UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Luiz Henrique Pereira

O TEOREMA DE HOCHSCHILD-KOSTANT-ROSENBERG PARA VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Curitiba, 2010.

O TEOREMA DE HOCHSCHILD-KOSTANT-ROSENBERG PARA VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Luiz Henrique Pereira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.
Orientador: Prof. Dr. Eduardo Hoefel.

UFPR
Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

ATA DA 28ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos dezenove dias do mês de março de 2010, no Anfiteatro A – Prédio PC do Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná, foi instalada pelo Professor Eduardo Hoefel, a Banca Examinadora para a Vigésima Oitava Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Estiveram presentes ao Ato, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, ficou constituída pelos professores: Dr. Frank Michael Forger, da Universidade de São Paulo; Dr. Carlos Henrique dos Santos, o Departamento de Matemática desta UFPR; e Dr. Eduardo Hoefel Orientador da dissertação, a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às quatorze horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando o candidato **Luiz Henrique Pereira** a fazer a apresentação do tema da dissertação intitulada "O Teorema de Hochschild-Kostant-Rosenberg para Variedades Diferenciáveis". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de argüição pelos membros participantes. Após a argüição, a banca com pelo menos 03 (três) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho do pós-graduando.

A banca considerou que o pós-graduando fez uma apresentação com a necessária concisão. A Dissertação apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a dissertação e a argüição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

Curitiba, 19 de março de 2010.

Prof. Dr.Eduardo Hoefel
Presidente

Prof. Dr. Frank Michael Forger
Titular

Prof. Dr.Carlos Henrique dos Santos
Membro

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Setor de Ciências Exatas
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

PARECER DA BANCA EXAMINADORA

Após a apresentação do candidato **Luiz Henrique Pereira**, a banca deliberou pela aprovação da dissertação devendo para tanto fazer as correções, e incorporar as sugestões da banca no prazo estabelecido pelo regimento correspondente.

Curitiba, 19 de março de 2010

Prof. Dr. Eduardo Hoefel
Presidente

Prof. Dr. Frank Michael Forger
Titular

Prof. Dr. Carlos Henrique dos Santos
Membro

À Aline, minha querida esposa, por ter sugerido que eu cursasse este mestrado, me convencido de que eu conseguiria concluí-lo, pelo incentivo contínuo, pela ajuda em meus estudos, pela paciência nos momentos difíceis, por compartilhar os momentos de realização e pelo suporte incondicional, eu dedico esta dissertação. Sem ela, isto nunca seria escrito.

"O bom cálculo não necessita de ábaco."
Lao Tse
"Tao Teh King."

"As teses da matemática não são certas quando relacionadas com a realidade, e, enquanto certas, não se relacionam com a realidade."
A. Einstein

"A lógica é o princípio do conhecimento, não o fim."
Sr. Spock

Agradecimentos

Se eu fosse colocar aqui todos os nomes que merecem agradecimentos, provavelmente esta seção tornar-se-ia a maior deste trabalho. Isso posto, atenho-me ao indispensável, contando com o perdão dos omissos.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná como um todo, por ter me acolhido e tornado confortável minha passagem por lá. Aos colegas deste programa, pela troca de idéias e percepções e pelo socorro nos momentos difíceis. Com estes dois grupos de pessoas aprendi fatos e sentimentos que jamais imaginaria. Hoje tenho uma imagem mais prazerosa do mundo.

Agradeço à minha família, pela ajuda em vários sentidos e por acreditar que daria certo. Eu mesmo não acreditava muito. Minha personalidade difícil exige um agradecimento especial às pessoas mais próximas, minha mãe, meu padrasto, minha esposa, minha sogra e meu sogro, pela condescendência infinda.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Eduardo Hoefel. Em meu convívio com ele, não se limitou a mostrar como fazer boa ciência ou como se porta um bom professor. Sua influência se estende à minha visão de mundo e suas atitudes foram determinantes para que eu pudesse concluir esta etapa com felicidade. É um regozijo poder trabalhar e conviver com o professor Eduardo.

Não poderia deixar de agradecer à CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

É um fato elementar, porém importante, em geometria diferencial, o isomorfismo entre a álgebra de Lie dos campos de vetores em uma variedade diferenciável e a álgebra de Lie das derivações lineares na álgebra de funções C^∞ naquela variedade. O Teorema de Hochschild-Kostant-Rosenberg admite uma versão para variedades diferenciáveis que permite relacionar a Super-Álgebra de Lie Diferencial dos campos de polivetores sobre uma variedade diferenciável, munidos do colchete de Nijenhuis-Schouten e diferencial trivial à Super-Álgebra de Lie Diferencial das poliderivações sobre a Álgebra de funções ali definidas, munidas do colchete de Gerstenhaber e diferencial de Hochschild. Isto permite estabelecer um paralelo entre as propriedades do colchete de Gerstenhaber na cohomologia de Hochschild da Álgebra de funções sobre um sistema hamiltoniano e as equações de evolução em tais sistemas, que são obtidas através de campos de 2-vetores que satisfazem relações de comutatividade com respeito ao colchete de Nijenhuis-Schouten. No presente trabalho, descrevemos de maneira rigorosa e livre de coordenadas os operadores envolvidos. Em outras palavras, poliderivações são definidas de maneira global e puramente algébrica. É mostrado que, quando restringimos os operadores assim definidos a sistemas de coordenadas, obtemos precisamente a definição apresentada na literatura. Além disso, demonstramos a versão para variedades diferenciáveis do Teorema de Hochschild-Kostant-Rosenberg.

Abstract

It is a fundamental fact in Differential Geometry that the Lie algebra of vector fields on a differentiable manifold is isomorphic to the Lie algebra of linear derivations of the algebra of C^∞ functions on that manifold. The Hochschild-Kostant-Rosenberg theorem has a version for differentiable manifolds which allows to relate the differential Lie superalgebra of the polyvector fields with Nijenhuis-Schouten bracket and null differential, and the differential Lie superalgebra of the polyderivations of the algebra of functions on such manifold, with Gerstenhaber bracket and Hochschild differential. This allows to stablish a close correspondence between the properties of the Gerstenhaber bracket in the Hochschild cohomology of the functions algebra on a Hamiltonian system and the evolutions equations in such systems, obtained by 2-vector fields which satisfies certain commutativity relations with respect to Nijenhuis-Schouten bracket. In the present work, we provide a rigorous definition of the operators involved without appealing to the choice of some, yet arbitrary, coordinate system. In other words, the polyderivations are given a global and purely algebraic defintion. It is shown that, by restricting the operators so defined to a local coordinate system, one gets precisely the usual local definition available in the literature. Moreover, we give a proof of the Hochschild-Kostant-Rosenberg theorem for differentiable manifolds.

Sumário

Introdução

Uma das maneiras de se estudar a mecânica clássica hamiltoniana é valer-se de ferramentas como a geometria diferencial como base para seu desenvolvimento. Por exemplo, o estudo da evolução de um sistema hamiltoniano pode ser efetuado em termos da álgebra de Lie dos campos de vetores sobre uma variedade diferenciável, que freqüentemente é o fibrado cotangente a uma variedade diferenciável de base, um espaço de fases. Podemos relacionar a álgebra de Lie dos campos de vetores em uma variedade diferenciável $\mathbf{M}$ à álgebra de Lie das derivações sobre a álgebra das funções $C^\infty(\mathbf{M})$. Tal abordagem algébrica torna possível por vezes desvelar com mais facilidade relações que ficariam ocultas sob a complexidade da análise puramente geométrica, dando assim uma visão mais ampla das possíveis abordagens a problemas físicos como este. Obviamente, tais técnicas não se limitam à mecânica clássica, abrangindo qualquer área que se beneficie dos métodos da geometria diferencial.

A relação entre as álgebras de Lie acima citadas, motiva o estudo das relações entre modelos geométricos e estruturas algébricas. Uma variedade de Poisson, por exemplo, possui uma estrutura algébrica, o colchete de Poisson, que permite expressar equações de evolução em sistemas hamiltonianos. Podemos associar a tal colchete um campo de bivetores, o tensor de Poisson, que deve satisfazer determinadas condições de comutatividade com relação ao colchete de Nijenhuis-Schouten. A versão para variedades diferenciáveis do teorema de Hochschild-Kostant-Rosemberg permite relacionar a super-álgebra de Lie diferencial dos campos de multivetores sobre uma tal variedade, munidos do colchete de Nijenhuis-Schouten e do diferencial identicamente nulo, à super-álgebra de Lie diferencial das poliderivações da álgebra das funções C^∞ sobre tal variedade, munidas do colchete de Gerstenhaber e do diferencial de Hochschild. Um dos possíveis desdobramentos desta relação é o estudo de álgebras não comutativas a partir de modelos geométricos não comutativos, através de deformações de álgebras associativas e comutativas, como feito em [4]. O estudo de quantização de variedades de Poisson por deformação da álgebra de Poisson associada, cuja relevância é evidenciada nos trabalhos de [2] e [7], envolve tal relação em um âmbito geral, como mostra [12].

Neste trabalho é feita uma revisão dos principais conceitos relacionados à versão para variedades diferenciáveis do teorema de Hochschild-Kostant-Rosemberg, seguida de uma demonstração. É dada uma definição puramente algébrica de poliderivações e demonstrado que, para o caso da álgebra das funções infinitamente diferenciáveis sobre uma variedade diferenciável, tal definição coincide com a apresentada na literatura, dada em termos de cartas locais. Tal definição torna acessível a prova de fatos que de outra forma são um tanto obscuros, como por exemplo o fato de que um campo de multivetores alternado é representado por uma poliderivação que é um cociclo de Hochschild, mas não pode ser um cobordo, pois um cobordo não pode ser anti-simétrico [3].

No capítulo 1 é feita uma revisão de conceitos de álgebra multi-linear necessários ao longo do texto, de construções algébricas tais como álgebras de Lie, álgebras de Poisson, álgebras graduadas, derivações e derivações de ordem superior em uma álgebra e de definições elementares em homologia e cohomologia.

No capítulo 2 é feita uma revisão de alguns conceitos de geometria diferencial, tais como variedades diferenciáveis, fibrados vetoriais diferenciáveis, campos de vetores e campos de tensores e conceitos relacionados, e é construído um fibrado vetorial diferenciável sobre uma variedade diferenciável $\mathbf{M}$, cujo espaço de seções C^∞ é isomorfo ao espaço das derivações de ordem superior em $C^\infty(\mathbf{M})$.

No capítulo 3 é feita uma revisão das principais propriedades do colchete de Nijenhuis-Schouten e de alguns conceitos envolvendo variedades simpléticas e variedades de Poisson.

No capítulo 4 é definido o conceito de multiderivação em uma álgebra associativa e, no caso em que tal álgebra é a álgebra das funções C^∞ sobre uma variedade diferenciável, explicitamos sua relação com campos de tensores contravariantes em tal variedade. Tal conceito visa reproduzir o que se espera de uma multiderivação de grau n, que seja uma aplicação n-linear a qual é uma derivação em cada entrada. É também definido o conceito de derivação composta em uma álgebra comutativa e associativa, operador linear que surge ao compor-se uma quantidade finita de derivações em uma tal álgebra. Para o caso em que a álgebra é a álgebra das funções C^∞ sobre uma variedade diferenciável, é mostrado que o espaço das derivações compostas até a ordem r, ou seja, com compostas de no máximo r derivações, corresponde ao espaço das derivações de ordem menor ou igual a r sobre tal álgebra. Tal fato é utilizado para dar-se uma definição independente de coordenadas de poliderivações sobre a álgebra das funções C^∞ sobre uma variedade diferenciável, isto é, derivações de ordem superior com n entradas em uma variedade diferenciável. A isto segue uma demonstração da versão do teorema de Hochschild-Kostant-Rosemberg para variedades diferenciáveis.

Capítulo 1

Fundamentos Algébricos

1.1 Fundamentos de Álgebra Multilinear

Fixemos daqui em diante um corpo $\mathbb{K}$ não trivial arbitrário. Sejam U, V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais[1]. Denotaremos por $\mathbf{Vec}^{\mathbb{K}}$ a categoria dos espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ cujos morfismos são as transformações lineares e por $\mathbf{Vec}_f^{\mathbb{K}}$ a subcategoria completa constituída apenas pelos espaços vetoriais cuja dimensão sobre $\mathbb{K}$ é finita[2]. Denotaremos o conjunto dos morfismos de uma categoria $\mathbf{C}$ entre os objetos $A, B \in \mathbf{C}$ por $Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$. Os isomorfismos serão denotados por $\approx_{\mathbf{C}}$.

Precisaremos das seguintes definições e fatos de álgebra multilinear.

Definição 1.1.1 (Forma bilinear). *Uma aplicação $\omega : U \times V \to \mathbb{K}$ é dita uma forma bilinear se, e somente se*

i) $\omega(\alpha u + v, w) = \alpha\omega(u, w) + \omega(v, w)$;

ii) $\omega(u, \alpha z + w) = \alpha\omega(u, z) + \omega(u, w)$

quaisquer que sejam $\alpha \in \mathbb{K}$, $u, v \in U$ e $z, w \in V$.

Definição 1.1.2 (Núcleos de uma forma bilinear). *Seja $\omega : U \times V \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear. Chamamos o conjunto*

$$Ker_U(\omega) = \{x \in U \mid \omega(x, y) = 0,\ \forall y \in V\}$$

[1] Para uma definição, veja [22], por exemplo.

[2] As definições de categoria e notações seguem basicamente o exposto em [9].

de núcleo à esquerda de ω e o conjunto

$$Ker_V(\omega) = \{y \in V \mid \omega(x, y) = 0, \ \forall x \in U\}$$

de núcleo à direita de ω.

Definição 1.1.3 (Forma bilinear não degenerada)**.** *Dizemos que uma forma bilinear $\omega : U \times V \to \mathbb{K}$ é não degenerada se, e somente se, $Ker_U(\omega) = 0$ e $Ker_V(\omega) = 0$, onde 0 denota os subespaços triviais (nulos) de U e V.*

Considere uma forma bilinear $\omega : U \times U \to \mathbb{K}$. Faz sentido considerar simetrias em seus argumentos.

Definição 1.1.4 (Forma bilinear simétrica)**.** *Seja $\omega : U \times U \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear. Dizemos que ω é simétrica se, e somente se, $\omega(x, y) = \omega(y, x)$, $\forall x, y \in U$.*

Definição 1.1.5 (Forma bilinear anti-simétrica)**.** *Seja $\omega : U \times U \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear. Dizemos que ω é anti-simétrica se, e somente se, $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$, $\forall x, y \in U$.*

Dizemos que uma forma bilinear tem alguma simetria quando for simétrica ou anti-simétrica. Estas definições nos permitem abreviar a definição de forma bilinear não degenerada para o caso em que tal forma possua alguma simetria.

Definição 1.1.6 (Núcleo de forma bilinear com alguma simetria)**.** *Seja $\omega : U \times U \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear com alguma simetria. Chamamos o conjunto*

$$Ker(\omega) = \{x \in U \mid \omega(x, y) = 0, \ \forall y \in U\}$$

de núcleo de ω.

É imediato verificar que se ω possui alguma simetria, então esta definição de núcleo concorda com as definições de núcleo à direita e núcleo à esquerda. Com um argumento análogo, a definição de forma bilinear não degenerada com alguma simetria torna-se a seguinte.

Definição 1.1.7 (Forma bilinear não degenerada com alguma simetria)**.** *Dizemos que uma forma bilinear $\omega : U \times U \to \mathbb{K}$ com alguma simetria é não degenerada se, e somente se, $Ker(\omega) = 0$, onde 0 denota o subespaço nulo de U.*

A razão para privilegiarmos o núcleo à esquerda ficará clara posteriormente. Voltemos ao caso sem simetrias.

Definição 1.1.8 (Espaços duais)**.** *Sejam $V^\sharp$ e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais tais que existe uma forma bilinear não degenerada $\omega : V^\sharp \times V \to \mathbb{K}$. Neste caso, dizemos que $V^\sharp$ e V são duais com relação à forma ω e chamamos ω de produto de dualidade entre $V^\sharp$ e V.*

Exemplo 1.1.1. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial não trivial. Considere o conjunto $V^\sharp = Hom_{\mathbf{Vec}^{\mathbb{K}}}(V, \mathbb{K})$ das transformações $\mathbb{K}$-lineares $\alpha : V \to \mathbb{K}$, chamadas de funcionais lineares em V. Tal conjunto admite estrutura natural de $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Podemos definir uma forma bilinear não degenerada $\langle\ ,\ \rangle : V^\sharp \times V \to \mathbb{K}$ dada por

$$\langle \alpha, v\rangle = \alpha(v), \quad \forall \alpha \in V^\sharp,\ \forall v \in V.$$

De fato, a linearidade é clara. Para mostrar o restante, veja que se $\alpha \in Ker_{V^\sharp}(\langle\ ,\ \rangle)$, então α é a aplicação nula e portanto $Ker_{V^\sharp}(\langle\ ,\ \rangle) = 0$. Suponha que exista $v \in Ker_V(\langle\ ,\ \rangle)$ com $v \neq 0$. Então $\alpha(v) = 0$, $\forall \alpha \in V^\sharp$. Entretanto, como v é não nulo, podemos estender o conjunto $\{v\}$ para uma base algébrica (base de Hamel) $\{v, w_i\}_{i\in I}$ de V, onde I é algum conjunto de índices[3]. Assim, todo vetor $y \in V$ se escreve de maneira única como

$$y = \lambda v + \sum_{i\in supp(y)} \zeta^i w_i$$

onde $\lambda, \zeta^i \in \mathbb{K}$, $\forall i \in I$ e $supp(y) = \{j \in I \mid \zeta^j \neq 0\}$ é finito. Podemos definir então o funcional linear $\eta : V \to \mathbb{K}$ dado por

$$\eta(y) = \eta\left(\lambda v + \sum_{i\in supp(y)} \zeta^i w_i\right) = \lambda$$

Então η é claramente linear e ainda $\eta(v) = 1$, onde 1 denota a unidade em $\mathbb{K}$. Como $1 \neq 0$, pois supomos V sobre um corpo não trivial, segue que $v \notin Ker_V(\langle\ ,\ \rangle)$. Contradição. Logo só pode ser $v = 0$ e $\langle\ ,\ \rangle$ é não degenerada. Assim, $V^\sharp$ e V são duais com relação a $\langle\ ,\ \rangle$.

[3]Veja, por exemplo [20].

Este exemplo nos leva à seguinte definição.

Definição 1.1.9 (Dual algébrico)**.** *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Chamamos o $\mathbb{K}$-espaço vetorial $V^\sharp$ dado por $V^\sharp = Hom_{\mathbf{Vec}^{\mathbb{K}}}(V, \mathbb{K})$, com as operações de soma e produto por escalar elemento a elemento de dual algébrico de V.*

Exemplos de espaços duais são abundantes. Se $\mathcal{H}$ é um $\mathbb{K}$-espaço de Hilbert[4], com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, o produto interno nele definido, sendo não degenerado, estabelece uma dualidade entre $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^*$, o conjunto constituído apenas pelos funcionais lineares que são contínuos na topologia forte de $\mathcal{H}$. Isso explicita a dependência do conceito de dualidade com a forma bilinear que a estabelece.

Pode ser mostrado[5] que V tem dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ se, e somente se, $V^\sharp \approx_{\mathbf{Vec}^{\mathbb{K}}} V$. Nos casos de dimensão finita onde $\mathbb{K}$ é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, os produtos internos (ou hermitianos) canônicos, que fornecem isomorfismos entre o espaço vetorial V e seu dual topológico V^*, fornecem portanto um isomorfismo entre $V^\sharp$ e V^*. Isto nos permite confundir tais duais nestes casos, e faremos isto.

Proposição 1.1.1. *Sejam U, V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita. Considere os $\mathbb{K}$-espaços vetoriais $\mathrm{Lin}(U, V^*) = Hom_{\mathbf{Vec}_f^{\mathbb{K}}}(U, V^*)$ (com as operações usuais) das transformações lineares de U em V^* e $\mathcal{B}(U, V)$ das formas bilineares definidas em $U \times V$ com valores em $\mathbb{K}$. Então $\mathrm{Lin}(U, V^*) \approx_{\mathbf{Vec}_f^{\mathbb{K}}} \mathcal{B}(U, V)$.*

Demonstração. Definamos a aplicação $\varphi : Lin(U, V^*) \to \mathcal{B}(U, V)$ que associa a cada $T \in Lin(U, V^*)$ a forma bilinear $B_T \in \mathcal{B}(U, V)$ tal que

$$B_T(u, v) = (T(u))(v), \quad \forall u \in U,\ \forall v \in V$$

A linearidade de φ é clara. Vejamos que é injetora. Se $B_T(u, v) = 0$ para todos u, v, então $T(u)$ é o funcional linear nulo, para todo $u \in U$. Portanto T é a aplicação nula. Vejamos que φ é sobrejetora. Sejam m e n as dimensões de U e V respectivamente. Como toda aplicação linear é unicamente definida pela sua ação em uma base de seu domínio, temos que a dimensão de $Lin(U, V^*)$ é o

[4] Veja, por exemplo [24].

[5] Uma demonstração elegante pode ser encontrada em [20].

produto das dimensões de U e V^*, pois isto cobre todas as combinações linearmente independentes possíveis, ou seja, $dim_{\mathbb{K}}(Lin(U, V^*)) = mn$. Por outro lado, como uma forma bilinear é unicamente definida pela sua ação em uma base de cada um de seus domínios, $dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}(U, V)) = mn$. Do fato de ser φ linear e injetora entre espaços de mesma dimensão (finita), é sobrejetora e portanto bijetora. Como sua inversa é linear, é um isomorfismo entre $Lin(U, V^*)$ e $\mathcal{B}(U, V)$. □

Isto nos leva à seguinte proposição.

Proposição 1.1.2. *Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Seja $B : U \times U \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear não degenerada. Então a aplicação $T : U \to U^*$ associada a B pelo isomorfismo da proposição 1.1.1 é um isomorfismo.*

Demonstração. De ser B não degenerada, $Ker_U(B) = 0$. Como $(T(u))(v) = B(u, v)$, isso significa que $Ker(T) = 0$ e portanto T é injetora. De ser U de dimensão finita, U é isomorfo a U^* e portanto T é linear e injetora sobre espaços de mesma dimensão. Logo é sobrejetora, e portanto isomorfismo. □

É esta proposição que nos leva a "privilegiar" o núcleo à esquerda na definição 1.1.7 de uma forma bilinear não degenerada com alguma simetria.

Definição 1.1.10 (Aplicação multilinear)**.** *Sejam $U, V_1, \dots, V_p$ $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Dizemos que uma aplicação $f : V_1 \times \dots \times V_p \to U$ é multilinear se, e somente se, é linear em cada entrada, ou seja:*

$$f(v_1, \dots, \alpha v_i + w_i, \dots, v_p) = \alpha f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_p) + f(v_1, \dots, w_i, \dots, v_p)$$

para quaisquer $v_i, w_i \in V_i$, $\alpha \in \mathbb{K}$, em cada $i = 1, \dots, p$.

Definição 1.1.11 (Produto tensorial)**.** *Sejam $V_1, \dots, V_p$ $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. A menos de isomorfismos, existe um único $\mathbb{K}$-espaço vetorial, denotado por $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$ e uma transformação multilinear $\varphi : V_1 \times \dots \times V_p \to V_1 \otimes \dots \otimes V_p$ tais que dados um $\mathbb{K}$-espaço vetorial U e uma transformação multilinear $f : V_1 \times \dots \times V_p \to U$, existe uma única transformação linear $T : V_1 \otimes \dots \otimes V_p \to U$, com $f = T \circ$*

φ. Chamamos o espaço vetorial $V_1 \otimes \ldots \otimes V_p$ de produto tensorial dos espaços $V_1, \ldots, V_p$.[6]

Os elementos de um produto tensorial são ditos tensores. Se $T_i : U_i \to V_i$ é uma coleção tal que T_i é uma transformação $\mathbb{K}$-linear entre os $\mathbb{K}$-espaços vetoriais U_i e V_i para cada $i = 1, \ldots, p$, então podemos definir o produto tensorial das aplicações $T_1, \ldots, T_p$, denotado por $T_1 \otimes \ldots \otimes T_p$, de sorte que $(T_1 \otimes \ldots \otimes T_p)(u_1 \otimes \ldots \otimes u_p) = T_1(u_1) \otimes \ldots \otimes T_p(u_p)$, onde $u_1 \otimes \ldots \otimes u_p$ denota um elemento decomponível[7] de $U_1 \otimes \ldots \otimes U_p$.

Também é útil a seguinte proposição[8].

Proposição 1.1.3. *A menos de isomorfismos, o produto tensorial é associativo.*

Definição 1.1.12 (Álgebra tensorial)**.** *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Um elemento do espaço*

$$T_s^q(V) = \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s} \otimes \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{q}$$

é chamado tensor (misto) q vezes contravariante e s vezes covariante. Denotando $T_0^0(V) = \mathbb{K}$, o $\mathbb{K}$-espaço vetorial

$$T(V) = \bigoplus_{q,s=0}^{\infty} T_s^q(V)$$

munido do produto tensorial é dito álgebra tensorial de V.

Também definimos a álgebra dos tensores contravariantes como o espaço vetorial

$$T_\bullet(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} T_0^q(V)$$

[6] Demonstrações de existência, unicidade e universalidade destes objetos podem ser encontrados em [16] ou [13].

[7] Todo elemento de $U_1 \otimes \ldots \otimes U_p$ pode ser escrito como combinação linear de elementos da forma $u_1 \otimes \ldots \otimes u_p$. Quando for possível escrever um elemento com uma única parcela do tipo $u_1 \otimes \ldots \otimes u_p$, dizemos que o tensor é decomponível. Caso contrário, dizemos que o tensor é indecomponível.

[8] Demonstrações podem ser encontradas em [16] e [13].

munido do produto tensorial e a álgebra dos tensores covariantes como o espaço vetorial

$$T^{\bullet}(V) = \bigoplus_{s=0}^{\infty} T_s^0(V)$$

munido do produto tensorial.

Apesar destas definições e resultados envolverem $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, o que foi feito até aqui sobre produtos tensoriais admite análogo para k-módulos, onde k um anel. Entretanto, nosso interesse reside principalmente em $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e futuramente lidaremos apenas com $\mathbb{R}$-espaços vetoriais, o que justifica algumas simplificações. Dado um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V, denotaremos $V^{\otimes q} = T_0^q(V)$ e $V^{*\otimes s} = T_s^0(V)$, por simplicidade.

Definição 1.1.13 (Permutador)**.** *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Considere $V^{\otimes q}$, com $q \geq 1$ e S_q o grupo de permutações*[9] *do conjunto $\{1, \ldots, q\}$. Para cada $\sigma \in S_q$, podemos definir uma aplicação linear $\tau_\sigma : V^{\otimes q} \to V^{\otimes q}$, dada em tensores decomponíveis $v_1 \otimes \ldots \otimes v_q$ por*

$$\tau_\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_q) = v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(q)}$$

e estendida por linearidade. Chamamos τ_σ de permutador em $V^{\otimes q}$. De maneira inteiramente análoga, definimos o permutador para $V^{*\otimes s}$, com $s \geq 1$. Para $T_0^0(V) = \mathbb{K}$, o permutador é definido como a identidade em $\mathbb{K}$ (por conveniência).

Por vezes denotaremos a ação do permutador τ_σ em um elemento $v \in V^{\otimes q}$ ($v \in V^{*\otimes q}$) por $\sigma \cdot v = \tau_\sigma(v)$.

Definição 1.1.14 (Tensor simétrico)**.** *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Um tensor $t \in V^{\otimes q}$ ($t \in V^{*\otimes q}$) é dito simétrico se, e somente se, $\tau_\sigma(t) = t$, onde τ_σ é o permutador em $V^{\otimes q}$ ($V^{*\otimes q}$), para toda permutação $\sigma \in S_q$.*

Definição 1.1.15 (Tensor anti-simétrico)**.** *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Um tensor $t \in V^{\otimes q}$ ($t \in V^{*\otimes q}$) é dito anti-simétrico se, e somente se, $\tau_\sigma(t) = \varepsilon(\sigma)t$, onde τ_σ é o permutador em $V^{\otimes q}$ ($V^{*\otimes q}$) e $\varepsilon(\sigma)$ denota o sinal da permutação σ, para toda permutação $\sigma \in S_q$.*

[9] Para uma definição, veja [22].

Definição 1.1.16 (Álgebra simétrica)**.** *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e seja $T_\bullet(V)$ a sua álgebra de tensores simétricos contravariantes. Considere o ideal bilateral I gerado por todos os elementos da forma $t - \tau_\sigma(t)$, com $t \in V^{\otimes q}$, para toda permutação σ e para todo $q \geq 1$. Façamos então o quociente*

$$S_\bullet(V) = T_\bullet(V)/I$$

com o produto induzido pelo produto tensorial denotado por justaposição. A álgebra assim obtida é associativa, comutativa e é chamada álgebra simétrica contravariante de V. Esta álgebra também pode ser vista como

$$S_\bullet(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} S_0^q(V)$$

onde $S_0^q(V) = T_0^q(V)/(I \cap T_0^q(V))$.

Uma construção inteiramente análoga é válida para $T^\bullet(V)$, definindo assim a álgebra simétrica covariante $S^\bullet(V)$ de V.

Definição 1.1.17 (Álgebra exterior)**.** *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e seja $T_\bullet(V)$ a sua álgebra de tensores simétricos contravariantes. Considere o ideal bilateral I gerado por todos os elementos da forma $t - \varepsilon(\sigma)\tau_\sigma(t)$, com $t \in V^{\otimes q}$, para toda permutação σ e para todo $q \geq 1$. Façamos então o quociente*

$$\Lambda_\bullet(V) = T_\bullet(V)/I$$

com o produto induzido pelo produto tensorial denotado pelo símbolo $\wedge$. A álgebra assim obtida é associativa[10] e é chamada álgebra exterior contravariante de V. Esta álgebra também pode ser vista como

$$\Lambda_\bullet(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \Lambda_0^q(V)$$

onde $\Lambda_0^q(V) = T_0^q(V)/(I \cap T_0^q(V))$.

Uma construção inteiramente análoga é válida para $T^\bullet(V)$, definindo assim a álgebra exterior covariante $\Lambda^\bullet(V)$ de V.

[10] A álgebra exterior, apesar de não ser comutativa no sentido usual, apresenta uma comutatividade dita comutatividade graduada, a ser discutida posteriormente.

Pode ser mostrado que, se $dim_{\mathbb{K}}(V) = m$, então $dim_{\mathbb{K}}(\Lambda^q(V)) = \binom{m}{q}$, para $0 \leq q \leq m$ e $dim_{\mathbb{K}}(\Lambda^q(V)) = 0$ se $q > m$. Disto segue que $dim_{\mathbb{K}}(\Lambda^\bullet(V)) = 2^m$ (com seu análogo contravariante).

Segue disto que se V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial tal que $dim_{\mathbb{K}}(V) = m$, então $dim_{\mathbb{K}}(\Lambda^m(V)) = 1$. Escolher um tensor não nulo de $\Lambda^m(V)$ significa escolher uma orientação para V, devido às características de alternância do produto $\wedge$.

Como $\Lambda^q(V)$ provém de um produto tensorial de funcionais lineares em V, é lícito pensar na ação de um elemento $\omega \in \Lambda^q(V)$ em q vetores $v_1, \ldots, v_q \in V$. Das propriedades de alternância de $\wedge$, isto se traduz em termos dos elementos decomponíveis como[11]

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_q(v_1, \ldots, v_q) = det[\alpha_i(v_j)],\ \alpha_i \in V^*, v_j \in V,\ i, j = 1, \ldots, q$$

onde $det[\alpha_i(v_j)]$ é o determinante da matriz cujas entradas são constituídas pelos valores $\alpha_i(v_j)$ na i-ésima linha e na j-ésima coluna.

Definição 1.1.18 (Produto interior)**.** *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão m. Dado um elemento $\omega \in \Lambda^q(V)$, com $0 < q \leq m$, definimos o produto interior (ou contração) $\iota : V \times \Lambda^q(V) \to \Lambda^{q-1}(V)$ como a aplicação bilinear dada por*

$$(\iota_u\omega)(v_1, \ldots, v_{q-1}) = \omega(u, v_1, \ldots, v_{q-1}), \quad \forall u, v_1, \ldots, v_{q-1} \in V$$

O produto interior é definido como nulo se $q = 0$ ou $q > m$.

Definição 1.1.19 (Forma simplética)**.** *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Se $\omega : V \times V \to \mathbb{K}$ for uma forma bilinear anti-simétrica não degenerada, dizemos que ω é uma forma simplética em V. Também chamamos ω de produto interno simplético em V.*

Definição 1.1.20 (Espaço vetorial simplético)**.** *Um espaço vetorial simplético é um par (V, ω), onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\omega : V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma simplética nele definida.*

[11] Na realidade, determinantes podem ser definidos assim. Veja, por exemplo [16].

Exemplo 1.1.2 (Espaço vetorial simplético). Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^{2m}$ e $\beta = \{e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_m\}$ uma base para tal espaço. Escrevamos um elemento $u \in \mathbb{R}^{2m}$ da seguinte maneira

$$u = \sum_{i=1}^{m} \left(u_e^i e_i + u_f^i f_i\right)$$

Seja $\omega_0 : \mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$ a forma bilinear dada por

$$\omega_0(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \left(x_e^i y_f^i - x_f^i y_e^i\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{2m}$$

Então o par $(\mathbb{R}^{2m}, \omega_0)$ é um espaço vetorial simplético.

Com efeito, a bilinearidade de ω_0 e sua anti-simetria são claras. Vejamos que ω_0 é não degenerada. Note que

$$\begin{aligned}
\omega_0(e_i, e_j) &= 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, m \\
\omega_0(f_i, f_j) &= 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, m \\
\omega_0(e_i, f_j) &= \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, m \\
\omega_0(f_i, e_j) &= -\delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Seja $v \in Ker(\omega_0)$. Então $\omega_0(v, x) = 0,\ \forall x \in V$. Fazendo sucessivamente $x = e_i$ e $x = f_i$ para $i = 1, \dots, m$, vemos que $v_f^i = 0,\ i = 1, \dots, m$ e $v_e^i = 0,\ i = 1, \dots, m$. Logo $v = 0$. Assim, $(\mathbb{R}^{2m}, \omega_0)$ é um espaço vetorial simplético.

Proposição 1.1.4 (Anti-ortogonalização). *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial m dimensional e $\omega : V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear anti-simétrica em V. Então existe uma base $\{u_1, \dots, u_k, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ de V tal que*

$$\begin{aligned}
\omega(u_i, v) = 0, &\quad \forall i = 1, \dots, k,\ \forall v \in V \\
\omega(e_i, e_j) = 0, &\quad \forall i, j = 1, \dots, n \\
\omega(f_i, f_j) = 0, &\quad \forall i, j = 1, \dots, n \\
\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}, &\quad \forall i, j = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

Demonstração. Seja $U = Ker(\omega)$ (note que U é $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de V). Escolhamos uma base $\{u_1, \ldots, u_k\}$ para U. Tomemos um subespaço W de V complementar a U, assim $V = U \oplus W$. Se $W = 0$, acabou. Caso contrário, tomemos $e_1 \in W$, $e_1 \neq 0$. Como $e_1 \notin U$, existe $f_1 \in W$ tal que $\omega(e_1, f_1) \neq 0$. Por linearidade, podemos tomar f_1 de sorte que $\omega(e_1, f_1) = 1$. Sejam $W_1 =< e_1, f_1 >$ o subespaço gerado por e_1, f_1 e $W_1^{\perp_\omega} = \{x \in W \mid \omega(x, v) = 0, \ \forall v \in W_1\}$. Segue que $W_1 \cap W_1^{\perp_\omega} = 0$. De fato, suponha que $x \in W_1 \cap W_1^{\perp_\omega}$. Então x pode ser escrito como $x = ae_1 + bf_1$ e $\omega(x, e_1) = \omega(x, f_1) = 0$. Mas $\omega(x, e_1) = -b$ e $\omega(x, f_1) = a$, donde $x = 0$. Temos também que todo elemento de W pode ser escrito como uma soma de um elemento de W_1 e de um elemento de $W_1^{\perp_\omega}$. Basta notar que dado $x \in W$, se $\omega(x, e_1) = c$ e $\omega(x, f_1) = d$, x pode ser escrito como

$$x = (x + cf_1 - de_1) + (de_1 - cf_1)$$

onde a primeira parcela entre parênteses é um elemento de $W_1^{\perp_\omega}$ e a segunda é um elemento de W_1. Logo $W = W_1 \oplus W_1^{\perp_\omega}$. E portanto $V = U \oplus W_1 \oplus W_1^{\perp_\omega}$. Se $W_1^{\perp_\omega} = 0$, acabou. Caso contrário, repete-se o processo até que $W_n^{\perp_\omega} = 0$. Como V tem dimensão finita, este processo acaba em um número finito de passos, produzindo a soma direta

$$V = U \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_n,$$

na qual $dim_{\mathbb{K}}(U) = k$ e $dim_{\mathbb{K}}(W_i) = 2, \ i = 1, \ldots, n$. □

Segue desta proposição que se (V, ω) é um espaço vetorial simplético de dimensão finita, então V tem dimensão par, pois ω não degenerada significa $U = 0$.

Definição 1.1.21 (Base simplética)**.** *Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético não trivial de dimensão finita. Então V admite uma base $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ na qual*

$$\begin{aligned} \omega(e_i, e_j) &= 0 \ , \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n \\ \omega(f_i, f_j) &= 0 \ , \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n \\ \omega(e_i, f_j) &= \delta_{ij} \ , \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

devido à proposição 1.1.4. Qualquer base de V que satisfaça tais condições é chamada base simplética para (V, ω).

Uma forma simplética $\omega : V \times V \to \mathbb{K}$ em um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V de dimensão finita, sendo não degenerada, estabelece um isomorfismo, dado pela proposição 1.1.2. Isto significa que a ω está associado um único isomorfismo $T_\omega : V \to V^*$ tal que

$$(T_\omega(u))(v) = \omega(u, v), \quad \forall u, v \in V$$

Por outro lado, das definições de produto tensorial e produto exterior, podemos considerar ω como sendo um elemento de $\Lambda^2(V)$, pois é bilinear e anti-simétrica. O produto interior de um elemento $u \in V$ por ω é um funcional linear dado por

$$(\iota_u \omega)(v) = \omega(u, v), \quad \forall u, v \in V$$

Portanto $\iota_u \omega = T_\omega(u)$ para todo $u \in V$, o que nos leva a concluir que o produto interior por ω estabelece um isomorfismo entre V e V^*. Em vista deste isomorfismo, podemos encarar a forma simplética, nestes casos, como um produto de dualidade entre V e V^*.

Suponha que $\mathbb{K}$ seja um corpo de característica 0. Do fato de existir uma base simplética para um $\mathbb{K}$-espaço vetorial simplético de dimensão finita (V, ω), um cálculo direto nos mostra que, se $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ for tal base, então a n-ésima potência exterior $\omega^n = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ é proporcional a $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \wedge f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$ e portanto não nula. Isto nos leva à seguinte definição.

Definição 1.1.22 (Volume simplético)**.** *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo de característica 0 e (V, ω) um $\mathbb{K}$-espaço vetorial simplético não trivial, com $dim_{\mathbb{K}}(V) = 2m$. Chamamos a m-ésima potência exterior*

$$\eta = \omega^m = \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{m \text{ vezes}}$$

de volume simplético de V.

1.2 Derivações de Álgebras e Álgebras Graduadas

Nesta seção definiremos algumas das estruturas algébricas que serão utilizadas futuramente. Entretanto, as mais usuais não serão aqui definidas e podem ser encontradas em [22], [16] ou [21]. Aqui, $\mathbb{K}$ denotará um corpo e k denotará um anel (com unidade).

Definição 1.2.1 (Operador diferencial de primeira ordem de uma álgebra)**.** *Seja (A, μ) uma k-álgebra associativa. Dizemos que uma aplicação k-linear $D : A \to A$ é um operador diferencial de primeira ordem da álgebra A se, e somente se, D satisfaz:*

$$D(\mu) = \mu(D \otimes id) + \mu(id \otimes D)$$

onde id denota a identidade em A.

A condição acima é conhecida como "regra de Leibniz". É interessante notar que se A é uma k-álgebra com unidade e, então

$$D(e) = D(\mu(e \otimes e)) = \mu(D(e) \otimes e) + \mu(e \otimes D(e)) = D(e) + D(e)$$

logo, $D(e) = 0$. Disto, se k é um anel comutativo e A é uma k-álgebra associativa, então $D(a) = 0$ para todo $a \in k$, onde usamos o fato de, sob tais circunstâncias, podermos identificar elementos de k com suas imagens em A pela inclusão $e : k \to A$, o homomorfismo unidade.

Definição 1.2.2 (Derivação de uma álgebra)**.** *Sejam (A, μ) uma k-álgebra associativa e B uma sub-álgebra de A. Um operador diferencial de primeira ordem $D : A \to A$ é dito uma derivação (de primeira ordem) da álgebra A sobre B se, e somente se, $D(b) = 0$ para todo $b \in B$.*

Definição 1.2.3 (Derivações)**.** *Sejam A uma k-álgebra associativa e B uma sub-álgebra de A. O conjunto de todas as derivações D de A sobre B munido das operações de adição e produto por elemento do anel ponto a ponto constitui um k-módulo, chamado o módulo das derivações de A sobre B e denotado por $Der_B(A)$*

(tal módulo será à direita, à esquerda ou bi-módulo em acordo com A ser k-álgebra à direita, à esquerda ou bilateral).

Da linearidade do produto μ e do produto tensorial, não é difícil verificar que o espaço acima é de fato um k-módulo.

Definição 1.2.4 (Derivações internas). *Sejam (A, μ) uma k-álgebra associativa e $B \subset Z(A)$ uma sub-álgebra de A contida no centro de A. Dizemos que uma aplicação k-linear $f : A \to A$ é uma derivação interna de A sobre B se, e somente se, existe $a \in A$ tal que*

$$f = \mu(a \otimes id) - \mu(id \otimes a),$$

onde $a \otimes id$ denota $a \otimes id : A \to A \otimes A$ tal que $(a \otimes id)(b) = a \otimes b$. Temos que

$$\begin{array}{rcl} f(\mu) & = & \mu(a \otimes \mu) - \mu(\mu \otimes a) = \\ & = & \mu(\mu(a \otimes id) \otimes id) - \mu(id \otimes \mu(id \otimes a)) = \\ & = & \mu(\mu(a \otimes id) \otimes id) - \mu(\mu(id \otimes a) \otimes id) + \\ & + & \mu(\mu(id \otimes a) \otimes id) - \mu(id \otimes \mu(id \otimes a)) = \\ & = & \mu((\mu(a \otimes id) - \mu(id \otimes a)) \otimes id) + \\ & + & \mu(id \otimes \mu(a \otimes id)) - \mu(id \otimes \mu(id \otimes a)) = \\ & = & \mu((\mu(a \otimes id) - \mu(id \otimes a)) \otimes id) + \\ & + & \mu(id \otimes (\mu(a \otimes id) - \mu(id \otimes a))) = \\ & = & \mu(f \otimes id) + \mu(id \otimes f) \end{array}$$

onde usamos a associatividade de μ, que se expressa como $\mu(\mu \otimes id) = \mu(id \otimes \mu)$. Se $b \in B$, então $f(b) = \mu(a \otimes b) - \mu(b \otimes a) = 0$, logo $f \in Der_B(A)$.

O k-módulo das derivações internas (também não é difícil verificar que é de fato k-módulo à direita, à esquerda ou bi-módulo, em acordo com A ser álgebra à esquerda, à direita ou bilateral, dado que μ é linear) será denotado por $IDer_B(A)$. Note que $IDer_B(A)$ é sub-módulo de $Der_B(A)$.

Precisemos agora a noção de operador diferencial e derivação de ordem superior em uma k-álgebra. Naturalmente, a definição é recursiva.

Definição 1.2.5 (Operador diferencial de ordem superior). *Sejam k um anel comutativo com unidade e (A, μ, e) uma k-álgebra associativa, comutativa, com unidade. Dizemos que uma aplicação $D : A \to A$ é um operador diferencial de ordem menor ou igual a r, com $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se, e somente se, D é k-linear e ainda, para todo $a \in A$ a aplicação*

$$\tilde{D} = D(\mu(a \otimes id)) - \mu(a \otimes D)$$

é um operador diferencial de ordem menor ou igual a $r - 1$. Dizemos que uma aplicação $D : A \to A$ é um operador diferencial de ordem 0 se $D = \mu(a \otimes id)$ para algum $a \in A$.

Definição 1.2.6 (Derivação de ordem superior). *Sejam k um anel comutativo com unidade, (A, μ, e) uma k-álgebra associativa, comutativa com unidade e B uma subálgebra de A. Um operador diferencial de ordem menor ou igual a r, $D : A \to A$, é dito uma derivação de ordem menor ou igual a r de A sobre B se, e somente se, $D(b) = 0$ para todo $b \in B$.*

Note que se $D \in Der_B(A)$, então D é uma derivação de ordem menor ou igual a 1 sobre B, pois dado $a \in A$

$$\tilde{D} = D(\mu(a \otimes id)) - \mu(a \otimes D) = \mu(D(a) \otimes id)$$

e se $b \in B$, $D(b) = 0$.

Por outro lado, se $D : A \to A$ é linear e ainda, dado $a \in A$, $\tilde{D} = D(\mu(a \otimes id)) - \mu(a \otimes D)$ é a multiplicação por um elemento, ou seja, $\tilde{D} = \mu(b \otimes id)$, então $D(a) = \partial(a) + \mu(\partial(e) \otimes a)$, para algum operador diferencial de primeira ordem ∂.[12]. Se D é uma derivação de ordem menor ou igual a 1 sobre B, então dado $a \in A$, para todo $b \in A$ existe $c \in A$ tal que

$$D(\mu(a \otimes b)) - \mu(a \otimes D(b)) = \mu(c \otimes b)$$

Como $e \in B$, pela equação acima, temos para todo $a \in A$, $D(a) = c$. Assim,

$$D(\mu(a \otimes b)) = \mu(D(a) \otimes b) + \mu(a \otimes D(b))$$

[12] Para uma demonstração, veja [14].

e para qualquer $b \in B$, vale $D(b) = 0$. Logo, $D \in Der_B(A)$. Isso mostra que as derivações de ordem menor ou igual a 1 de A sobre B são exatamente as derivações de primeira ordem de A sobre B.

De agora em diante, dada uma k-álgebra A (com unidade), denotaremos por $Der(A)$ o k-módulo das derivações de A sobre o anel k, cuja construção é bem definida, uma vez que podemos identificar tal anel com uma sub-álgebra de A. Iremos nos referir a elementos de $Der(A)$ simplesmente como derivações de A.

Na maioria dos textos didáticos sobre álgebra o adjetivo "associativa" é suprimido, ficando subentendido que a operação de produto da álgebra é associativa. Entretanto, neste estudo é importante manter explícito este adjetivo, uma vez que estamos interessados em estruturas algébricas cujos produtos associados não sejam necessariamente associativos. As próximas construções devem deixar claro o porquê desta necessidade.

Definição 1.2.7 (Anel de Lie)**.** *Seja L um conjunto munido de duas operações internas $+ : L \times L \to L$ e $[\ ,\ ] : L \times L \to L$. Chamamos a tripla $(L, +, [\ ,\ ])$ de anel de Lie se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

i) $(L, +)$ *é grupo abeliano;*

ii) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$, $\forall x, y, z \in L$;

iii) $[x, y] = -[y, x]$, $\forall x, y \in L$ *(anti-simetria);*

iv) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$, $\forall x, y, z \in L$ *(identidade de Jacobi).*

Note que de ii) e iii) segue que $[x, y + z] = [x, y] + [x, z]$.

Definição 1.2.8 (Álgebra de Lie)**.** *Dizemos que o par $(L, [\ ,\ ])$ é uma álgebra de Lie sobre o corpo $\mathbb{K}$ se, e somente se:*

i) L *é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial;*

ii) $(L, +, [\ ,\ ])$ *é um anel de Lie;*

iii) $[ax, y] = [x, ay] = a[x, y]$, $\forall a \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in L$.

Claramente, o produto anterior não é necessariamente associativo.

Quando uma estrutura algébrica $(L, [\ ,\ ])$ satisfizer todas as condições anteriores, exceto possivelmente a identidade de Jacobi, dizemos que é uma álgebra quase-Lie.

Exemplo 1.2.1 (Álgebra de Lie das derivações). Sejam (A, μ) uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa e B uma sub-álgebra de A. Definamos o produto $[\ ,\ ] : Der_B(A) \times Der_B(A) \to Der_B(A)$ por

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1,\ \forall D_1, D_2 \in Der_B(A)$$

Então $(Der_B(A), [\ ,\ ])$ é uma álgebra de Lie.

Em primeiro lugar, devemos mostrar que o produto acima define uma derivação. Para tanto, sejam $D_1, D_2 \in Der_B(A),\ \alpha \in \mathbb{K}, a, b \in A$. Então

$$\begin{aligned} [D_1, D_2](\alpha a + b) &= (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(\alpha a + b) = \\ &= D_1(D_2(\alpha a + b)) - D_2(D_1(\alpha a + b)) = \\ &= \alpha D_1(D_2(a)) + D_1(D_2(b)) - \alpha D_2(D_1(a)) - D_2(D_1(b)) = \\ &= \alpha[D_1, D_2](a) + [D_1, D_2](b) \end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned} [D_1, D_2](\mu) &= (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(\mu) = \\ &= D_1(D_2(\mu)) - D_2(D_1(\mu)) = \\ &= D_1(\mu(D_2 \otimes id) + \mu(id \otimes D_2)) - \\ &- D_2(\mu(D_1 \otimes id) + \mu(id \otimes D_1)) = \\ &= \mu(D_1 \circ D_2 \otimes id) + \mu(D_2 \otimes D_1) + \\ &+ \mu(D_1 \otimes D_2) + \mu(id \otimes D_1 \circ D_2) - \\ &- \mu(D_2 \circ D_1 \otimes id) - \mu(D_1 \otimes D_2) - \\ &- \mu(D_2 \otimes D_1) - \mu(id \otimes D_2 \circ D_1) = \\ &= \mu(D_1 \circ D_2 \otimes id) + \mu(id \otimes D_1 \circ D_2) - \\ &- \mu(D_2 \circ D_1 \otimes id) - \mu(id \otimes D_2 \circ D_1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mu((D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1) \otimes id) + \\ &+ \mu(id \otimes (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)) = \\ &= \mu([D_1, D_2] \otimes id) + \mu(id \otimes [D_1, D_2]) \end{aligned}$$

E ainda, se $b \in B$

$$[D_1, D_2](b) = D_1(D_2(b)) - D_2(D_1(b)) = 0$$

A linearidade segue do fato de que, se $D_3 \in Der_B(A)$

$$\begin{aligned} [\alpha D_1 + D_2, D_3] &= (\alpha D_1 + D_2) \circ D_3 - D_3 \circ (\alpha D_1 + D_2) = \\ &= \alpha D_1 \circ D_3 - \alpha D_3 \circ D_1 + D_2 \circ D_3 - D_3 \circ D_2 = \\ &= \alpha[D_1, D_3] + [D_2, D_3] \end{aligned}$$

A anti-simetria é quase óbvia

$$[D_1, D_1] = D_1 \circ D_1 - D_1 \circ D_1 = 0$$

A identidade de Jacobi é um pouco mais trabalhosa, mas é direta

$$\begin{aligned} & [[D_1, D_2], D_3] + [[D_2, D_3], D_1] + [[D_3, D_1], D_2] = \\ = \; & [D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1, D_3] + [D_2 \circ D_3 - D_3 \circ D_2, D_1] + \\ + \; & [D_3 \circ D_1 - D_1 \circ D_3, D_2] = \\ = \; & (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1) \circ D_3 - D_3 \circ (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1) + \\ + \; & (D_2 \circ D_3 - D_3 \circ D_2) \circ D_1 - D_1 \circ (D_2 \circ D_3 - D_3 \circ D_2) + \\ + \; & (D_3 \circ D_1 - D_1 \circ D_3) \circ D_2 - D_2 \circ (D_3 \circ D_1 - D_1 \circ D_3) = \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

Pois a composição de funções é associativa. Isso mostra que $(Der_B(A), [\ ,\ ])$ é uma álgebra de Lie.

Definição 1.2.9 (Derivação de uma álgebra de Lie)**.** *Seja* $(L, [\ ,\ ])$ *uma álgebra de Lie. Dizemos que uma aplicação linear* $D : L \to L$ *é uma derivação da álgebra de Lie* $(L, [\ ,\ ])$ *se, e somente se, satisfaz*

$$D([u, v]) = [D(u), v] + [u, D(v)],\ \forall u, v \in L.$$

Uma outra estrutura algébrica importante aqui é a álgebra de Poisson.

Definição 1.2.10 (Álgebra de Poisson). *Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa, munida de uma operação linear $\{\ ,\ \} : A \otimes A \to A$. Dizemos que o par $(A, \{\ ,\ \})$ é uma álgebra de Poisson se, e somente se, ocorre que*

i) $(A, \{\ ,\ \})$ *é uma álgebra de Lie;*

ii) para cada $a \in A$ fixado, a aplicação $D_a : A \to A$ dada por

$$D_a(b) = \{a, b\},\ \forall b \in A$$

é tal que $D_a \in Der(A)$.

Se $(A, \{\ ,\ \})$ for uma álgebra quase-Lie que cumpre o item ii), dizemos que $(A, \{\ ,\ \})$ é uma álgebra quase-Poisson.

Uma decomposição em soma direta de um k-módulo pode ser entendida como segue. Seja M um k-módulo e I um conjunto de índices. Suponha que exista uma família de k-módulos $\{M_i\}_{i \in I}$ tal que

$$M \approx_{\mathbf{k-Mod}} \bigoplus_{i \in I} M_i$$

onde $\approx_{\mathbf{k-Mod}}$ denota isomorfismo de k-módulos. Podemos identificar cada M_i com sua cópia em M, pois a decomposição em soma direta permite definir uma família de monomorfismos $\{f_i : M_i \to M\}_{i \in I}$ de maneira natural. Quando dissermos $M_i \subset M$, deve-se entender $M_i \approx_{\mathbf{k-Mod}} f_i(M_i) \subset M$. Também confundiremos $x \in M_i$ com $x \in M$, porém tendo em mente que o real significado desta frase é que $x \in M_i$ está em correspondência biunívoca com $f_i(x) \in M$.

Definição 1.2.11 (Módulo $\mathbb{Z}$-graduado). *Um k-módulo $\mathbb{Z}$-graduado M é um k-módulo que admite uma decomposição em soma direta*

$$M \approx_{\mathbf{k-Mod}} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$$

Se $x \in M$ é tal que $x \in M_i$ para algum $i \in \mathbb{Z}$, dizemos que x é um elemento homogêneo de grau i. Se $f \in Hom_{\mathbf{k-Mod}}(M^{\otimes n}, M)$ é tal que $f(M_{i_1} \otimes \ldots \otimes M_{i_n}) \subset M_{i_1 + \ldots + i_n + p}$, $\forall i_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}$, para algum $p \in \mathbb{Z}$, dizemos que f tem grau p.

Definição 1.2.12 (Álgebra $\mathbb{Z}$-graduada)**.** *Seja (A, μ) uma k-álgebra. Dizemos que A é uma k-álgebra $\mathbb{Z}$-graduada (ou simplesmente uma k-álgebra graduada) se, e somente se, A é um k-módulo $\mathbb{Z}$-graduado tal que*

$$\mu(A_i \otimes A_j) \subset A_{i+j}, \ \forall i, j \in \mathbb{Z}.$$

Em outras palavras, μ tem grau zero.

Definição 1.2.13 (Álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada)**.** *Seja (A, μ) uma k-álgebra. Dizemos que A é uma k-álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada (ou uma super-álgebra) se, e somente se, A é uma k-álgebra $\mathbb{Z}$-graduada tal que se $a \in A_i$ e $b \in A_j$, então*

$$\mu(a \otimes b) = (-1)^{ij} \mu(b \otimes a)$$

A condição acima é dita simetria graduada ou super-simetria.

Notação 1.2.1 (Convenção da super-simetria). Sempre que fizer sentido comutar dois objetos homogêneos de graus p e q (por exemplo, funções homogêneas e elementos homogêneos), o resultado deve ser corrigido por um fator $(-1)^{pq}$ (de modo a satisfazer às condições de produto tensorial graduado). Isto, em muitos casos, evita ter de lidar explicitamente com os sinais, simplificando a notação. Façamos assim. Sejam U, V, W, Z $\mathbb{K}$-espaços vetoriais graduados e $f : U \to V, \ g : W \to Z$ duas aplicações lineares de graus p e q, respectivamente. Dados $u \in U_i$ e $v \in W_j$, convencionamos

$$(f \otimes g)(u \otimes v) = (-1)^{qi} f(u) \otimes g(v).$$

Definição 1.2.14 (Derivação graduada)**.** *Seja (A, μ) uma k-álgebra graduada. Uma derivação graduada de grau p é uma aplicação linear $D : A \to A$ homogênea de grau p que satisfaz*

$$D(\mu) = \mu(D \otimes id) + \mu(id \otimes D), \ \textit{(Leibniz graduada)},$$

ou seja, para quaisquer elementos homogêneos $a \in A_i, \ b \in A_j$, vale (usando a notação 1.2.1)

$$D(\mu(a \otimes b)) = \mu(D(a) \otimes b) + (-1)^{pi} \mu(a \otimes D(b))$$

Denotamos o k-módulo (à direita, à esquerda ou bi-módulo) das derivações graduadas de grau p (com as operações usuais de soma e produto por elemento do anel ponto a ponto) por $Der^p(A)$.

Definição 1.2.15 (Super-álgebra de Lie)**.** *Seja L um $\mathbb{K}$-espaço vetorial graduado*

$$L \approx_{\mathbf{Vec}^{\mathbb{K}}} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} L_i.$$

Dizemos que o par $(L, [\ ,\ ])$ é uma super-álgebra de Lie se, e somente se, $[\ ,\ ]$ é $\mathbb{K}$-bilinear e satisfaz

i) $[L_i, L_j] \subset L_{i+j},\ \forall i, j \in \mathbb{Z}$;

ii) $[a, b] = -(-1)^{ij}[b, a],\ \forall a \in L_i,\ \forall b \in L_j$, *(anti-simetria graduada);*

iii) $(-1)^{ki}[[a, b], c] + (-1)^{ij}[[b, c], a] + (-1)^{jk}[[c, a], b] = 0,\ \forall a \in L_i,\ \forall b \in L_j,\ \forall c \in L_k$, *(Jacobi graduada).*

Analogamente ao caso anterior, se $x \in L_i$, chamamos $x \in L$ de elemento homogêneo de grau i e se $f \in Hom_{\mathbf{Vec}^{\mathbb{K}}}(L^{\otimes n}, L)$ é tal que $f(L_{i_1} \otimes \ldots \otimes L_{i_n}) \subset L_{i_1+\ldots+i_n+p}$, $\forall i_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \ldots, n$ para algum $p \in \mathbb{Z}$, dizemos que f tem grau p (Assim, $[\ ,\ ]$ tem grau 0).

Definição 1.2.16 (Derivação de super-álgebra de Lie)**.** *Seja $(L, [\ ,\ ])$ uma super-álgebra de Lie. Uma aplicação linear $D : L \to L$ é uma derivação de grau p da super-álgebra de Lie L se, e somente se, satisfaz para cada elemento homogêneo $a \in L_i$ e para cada $b \in L$*

$$D([a, b]) = [D(a), b] + (-1)^{ip}[a, D(b)]$$

Definição 1.2.17 (k-álgebra filtrada)**.** *Sejam (A, μ) uma k-álgebra associativa e $I \subset \mathbb{Z}$. Uma filtração em A é uma família $\{A_i\}_{i \in I}$ de k-sub-módulos A_i de A tal que*

i) $i \leq j \Rightarrow A_i \subset A_j$;

ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$;

iii) $\mu(A_i \otimes A_j) \subset A_{i+j}$.

Dizemos que A é filtrada, quando é munida de uma filtração.

1.3 Fundamentos de Homologia e Cohomologia

Definição 1.3.1 (Complexo de cadeias). *Seja k um anel comutativo com unidade. Um complexo de cadeias com coeficientes em k é uma seqüência $\{(C_n, \partial_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, onde C_n são k-módulos e $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ são homomorfismos de k-módulos*

$$C_\bullet : \ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots$$

tal que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Os homomorfismos ∂_n são ditos operadores de bordo. Se $c \in C_n$ é tal que $\partial_n c = 0$, então dizemos que c é um ciclo. Se $c \in C_n$ é tal que existe $b \in C_{n+1}$ com $c = \partial_{n+1} b$, dizemos que c é um bordo. Quando conveniente, denotaremos o complexo de cadeias em questão simplesmente por $(C_\bullet, \partial)$.

Definição 1.3.2 (Complexo de cocadeias). *Seja k um anel comutativo com unidade. Um complexo de cocadeias com coeficientes em k é uma seqüência $\{(C^n, \delta^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, onde C^n são k-módulos e $\delta^n : C^n \to C^{n+1}$ são homomorfismos de k-módulos*

$$C^\bullet : \ldots \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \ldots$$

tal que $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Os homomorfismos δ^n são ditos operadores de cobordo. Se $c \in C^n$ é tal que $\delta^n c = 0$, então dizemos que c é um cociclo (ou fechado). Se $c \in C^n$ é tal que existe $b \in C^{n-1}$ com $c = \delta^{n-1} b$, dizemos que c é um cobordo (ou exato). Quando conveniente, denotaremos o complexo de cocadeias em questão simplesmente por $(C^\bullet, \delta)$.

Definição 1.3.3 (Grupos de homologia). *Dado um complexo de cadeias $C_\bullet$ com coeficientes em k, o n-ésimo grupo de homologia $H_n(C_\bullet)$ é o k-módulo definido por*

$$H_n(C_\bullet) = Ker(\partial_n)/Im(\partial_{n+1})$$

Elementos de H_n são ditos classes de homologia.

Definição 1.3.4 (Grupos de cohomologia). *Dado um complexo de cocadeias $C^\bullet$ com coeficientes em k, o n-ésimo grupo de cohomologia $H^n(C^\bullet)$ é o k-módulo definido por*

$$H^n(C^\bullet) = Ker(\delta^n)/Im(\delta^{n-1})$$

Elementos de H^n são ditos classes de cohomologia.

Definição 1.3.5 (Morfismos de complexos de cadeias). *Sejam $A_\bullet$ e $B_\bullet$ dois complexos de cadeias com coeficientes em k. Um morfismo de complexos de cadeias $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ é uma família de homomorfismos de k-módulos $f_n : A_n \to B_n$ tal que $f_{n-1}\partial_n = \partial_n f_n$, para todo n.*

Definição 1.3.6 (Morfismos de complexos de cocadeias). *Sejam $A^\bullet$ e $B^\bullet$ dois complexos de cocadeias com coeficientes em k. Um morfismo de complexos de cocadeias $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ é uma família de homomorfismos de k-módulos $f^n : A^n \to B^n$ tal que $f^{n+1}\delta^n = \delta^n f^n$, para todo n.*

Proposição 1.3.1 (Morfismo induzido na homologia). *Sejam $A_\bullet$ e $B_\bullet$ dois complexos de cadeias com coeficientes em k e $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ um morfismo de complexos de cadeias. Então para cada $n \in \mathbb{Z}$, f_n induz um homomorfismo de k-módulos $(f_n)_* : H_n(A_\bullet) \to H_n(B_\bullet)$, natural.*[13]

Proposição 1.3.2 (Morfismo induzido na cohomologia). *Sejam $A^\bullet$ e $B^\bullet$ dois complexos de cocadeias com coeficientes em k e $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ um morfismo de complexos de cocadeias. Então para cada $n \in \mathbb{Z}$, f^n induz um homomorfismo de k-módulos $(f^n)^* : H^n(A^\bullet) \to H^n(B^\bullet)$, natural.*[14]

Definição 1.3.7 (Quase-isomorfismo). *Sejam A e B dois complexos de (co) cadeias com coeficientes em k e $f : A \to B$ um morfismo de complexos de (co) cadeias. Dizemos que f é um quase-isomorfismo se o homomorfismo induzido na (co) homologia $(f_n)_* : H_n(A) \to H_n(B)$ ($(f^n)^* : H^n(A) \to H^n(B)$) é um isomorfismo de k-módulos para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

[13] Para uma demonstração, veja [19].

[14] Para uma demonstração, veja [19].

Definição 1.3.8 (Cohomologia de Hochschild)**.** *Sejam k um anel comutativo com unidade, (A, μ, e) uma k-álgebra associativa e M um A-bimódulo. A cohomologia de Hochschild $H^n(A, M)$ da álgebra A com coeficientes em M é a cohomologia do complexo de cocadeias $(C^\bullet(A, M), \delta_H)$, onde*

$$C^n(A, M) = Hom_{\mathbf{k-Mod}}(A^{\otimes n}, M)$$

$$\begin{aligned}(\delta_H f)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) &= \mu(a_1 \otimes f(a_2 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1 \otimes \ldots \otimes \mu(a_i \otimes a_{i+1}) \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) + \\ &+ (-1)^{n+1} \mu(f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \otimes a_{n+1})\end{aligned}$$

Ao par $(C^\bullet(A, M), \delta_H)$, denominamos complexo de cocadeias de Hochschild da álgebra (A, μ, e) com coeficientes em M.

Definição 1.3.9 (Complexo filtrado)**.** *Seja $(C^\bullet, \delta)$ um complexo de cocadeias. Dizemos que o complexo $(C^\bullet, \delta)$ é filtrado se, e somente se, existem um conjunto de índices $I \subset \mathbb{Z}$ e para cada $n \in \mathbb{Z}$, uma família $\{F^i C^n\}_{i \in I}$ de k-sub-módulos $F^i C^n$ de C^n de maneira que*

i) $i \leq j \Rightarrow F^i C^n \subset F^j C^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

ii) $\bigcup_{i \in I} F^i C^n = C^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

iii) $\delta^n(F^i C^n) \subset F^i C^{n+1}$, $\forall i \in I$.

Analogamente, poderíamos definir complexo filtrado para complexos de cadeias.

Capítulo 2

Fundamentos Geométricos

2.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 2.1.1 (Carta local). *Seja* $\mathbf{M}$ *um espaço topológico de Hausdorff cuja topologia possui base enumerável. Se existir um homeomorfismo* $\varphi : U \to V$ *entre um aberto* U *de* $\mathbf{M}$ *e um aberto* V *de* $\mathbb{R}^m$*, chamamos carta local ao terno ordenado* (U, φ, m)*. Quando não houver risco de confusão quanto à dimensão* m*,* (U, φ, m) *será abreviado para* (U, φ)*.*

Chamaremos ainda de vizinhança coordenada em torno do ponto x*, a carta local* (U, φ, m) *tal que* $x \in U$*.*

Definição 2.1.2 (Cartas compatíveis). *Dizemos que duas cartas locais* $(U_\alpha, \varphi_\alpha, n)$ *e* $(U_\beta, \varphi_\beta, m)$ *são compatíveis se, e somente se,* $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ *ou, caso* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$*, ambas as funções compostas:*

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

são difeomorfismos de classe C^k*, com* $k \geq 1$*.*

De agora em diante, a menos de menção explícita, todas as cartas compatíveis serão consideradas de classe C^∞.

Proposição 2.1.1. *Se* $(U_\alpha, \varphi_\alpha, n)$ *e* $(U_\beta, \varphi_\beta, m)$ *são cartas compatíveis tais que* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, *então* $m = n$.

Demonstração. De fato, como $(U_\alpha, \varphi_\alpha, n)$ e $(U_\beta, \varphi_\beta, m)$ são compatíveis, a composta $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é um difeomorfismo entre um aberto $V_\beta \subset \mathbb{R}^m$ e um aberto $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$. Do fato de tais abertos serem não vazios, segue que $m = n$. $\square$

Definição 2.1.3 (Dimensão)**.** *Dizemos que* $\mathbf{M}$ *nas condições acima tem dimensão* m *em* $x \in \mathbf{M}$ *se, e somente se, existe uma carta local* (U, φ, m) *tal que* $x \in U$. *No caso de ser* m *a dimensão de* $\mathbf{M}$ *para todo* $x \in \mathbf{M}$, *dizemos apenas que* $\mathbf{M}$ *tem dimensão* m.

Definição 2.1.4 (Atlas)**.** *Dizemos que uma família de cartas locais* $\mathfrak{A}(\mathbf{M}) = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ *é um atlas em* $\mathbf{M}$ *quando, e somente quando:*

i) $\forall \alpha, \beta \in I, (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *e* (U_β, φ_β) *são compatíveis;*

ii) $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \mathbf{M}$*;*

Definição 2.1.5. *Dizemos que uma carta local* (U, φ) *é admissível relativamente ao atlas* $\mathfrak{A}(\mathbf{M})$ *se, e somente se,* $\mathfrak{A}(\mathbf{M}) \cup \{(U, \varphi)\}$ *ainda for um atlas.*

Definição 2.1.6 (Atlas máximo)**.** *Dizemos que um atlas* $\mathfrak{A}(\mathbf{M})$ *é máximo em* $\mathbf{M}$ *se, e somente se, contém todas as cartas locais admissíveis.*

Definição 2.1.7 (Variedade diferenciável)**.** *Chamamos de variedade diferenciável o par ordenado* $(\mathbf{M}, \mathfrak{A}(\mathbf{M}))$, *onde* $\mathbf{M}$ *é um espaço topológico de Hausdorff cuja topologia tem base enumerável e* $\mathfrak{A}(\mathbf{M})$ *é um atlas máximo em* $\mathbf{M}$.

De agora em diante, abreviaremos "variedade diferenciável $(\mathbf{M}, \mathfrak{A}(\mathbf{M}))$" por "variedade diferenciável $\mathbf{M}$".

Definição 2.1.8 (Aplicação diferenciável em um ponto)**.** *Sejam* $\mathbf{M}$ *e* $\mathbf{N}$ *duas variedades diferenciáveis. Dizemos que uma aplicação* $f : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ *é diferenciável (de classe* C^k*) no ponto* $x \in \mathbf{M}$ *se, e somente se, existem vizinhanças coordenadas* (U, φ, m) *e* (V, ψ, n) *de* x *e* $f(x)$ *respectivamente, tais que* $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ *é diferenciável (de classe* C^k*) em* x.

É interessante notar que a definição de diferenciabilidade em um ponto é independente da escolha das vizinhanças coordenadas, devido à condição de compatibilidade das cartas locais.

Definição 2.1.9 (Aplicação diferenciável)**.** *Dizemos que uma aplicação* $f : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ *é diferenciável, se for diferenciável em* x*, para todo* x *pertencente a* $\mathbf{M}$.

Denotemos o semi-espaço superior de $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}$. Outra notação útil é a restrição à face $\mathbb{H}^n_0 = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n = 0\}$.

Podemos enfraquecer a definição de carta local em variedades diferenciáveis, exigindo que uma carta local (U, φ, m) da variedade diferenciável $\mathbf{M}$ seja tal que $\varphi : U \to V$ é um homeomorfismo entre um aberto U de $\mathbf{M}$ e um aberto V de $\mathbb{H}^m$, com a topologia induzida de $\mathbb{R}^m$. Variedades diferenciáveis modificadas assim são ditas variedades diferenciáveis com bordo. Se um dado ponto $p \in \mathbf{M}$ é tal que existe uma carta local (U, φ, m), com $p \in U$ e $\varphi(p) \in \mathbb{H}^m_0$, dizemos que p é um ponto de bordo de $\mathbf{M}$. O fato de ser ponto de bordo ser uma relação bem definida, bem como outros resultados sobre o tema, pode ser encontrado em [25].

A classe de todas as variedades diferenciáveis constitui uma categoria ao considerarmos as aplicações diferenciáveis como morfismos[1]. Aos isomorfismos desta categoria damos o nome de difeomorfismos e, se existir um difeomorfismo entre duas variedades diferenciáveis dadas, dizemos que estas são difeomorfas.

Exemplo 2.1.1 (Ação descontínua de um grupo [5]). Sejam $\mathbf{M}$ uma variedade diferenciável e (G, μ, e) um grupo. Denotemos por $(Diff(\mathbf{M}), \circ, Id_{\mathbf{M}})$ o grupo onde $Diff(\mathbf{M})$ é o conjunto de todos os difeomorfismos $f : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$, a operação algébrica $\circ$ é a composta de difeomorfismos e $Id_{\mathbf{M}}$ é a identidade em $\mathbf{M}$. Uma *ação* do grupo G em $\mathbf{M}$ é um morfismo de grupos $\psi : G \to Diff(\mathbf{M})$. Dados $g \in G$ e $p \in \mathbf{M}$ indicaremos por $gp = (\psi(g))(p)$ a avaliação do difeomorfismo $\psi(g)$ no ponto p. Dizemos que a ação ψ é *propriamente descontínua* quando, e somente quando, para qualquer $p \in \mathbf{M}$, existe U, uma vizinhança aberta do ponto p, tal que para todo $g \in G$, $g \neq e$ temos necessariamente $U \cap gU = \varnothing$. Podemos agora definir uma relação $\sim$ em $\mathbf{M}$ tal que, dados $p, q \in \mathbf{M}$, $p \sim q \Leftrightarrow \exists g \in G \mid q = gp$. É

[1]Veja por exemplo, [15].

fácil ver que $\sim$ é uma relação de equivalência. Como tal, permite definir o espaço quociente $\mathbf{M}/\sim$, que denotaremos por $\mathbf{M}/G$ e classes de equivalência, as quais escreveremos $Gp = [p]$ para denotar a classe do ponto p segundo esta relação. O fato de interesse deste exemplo é que $\mathbf{M}/G$ pode ser dotada de estrutura diferenciável de modo que a aplicação projeção $\pi : \mathbf{M} \to \mathbf{M}/G$ dada por $\pi(p) = Gp$, para todo $p \in \mathbf{M}$, seja um difeomorfismo local (ou seja, um difeomorfismo em uma vizinhança de cada ponto). Para verificar isto, notemos primeiramente que ao tomar a topologia quociente em $\mathbf{M}/G$, a aplicação projeção mostra-se aberta, pois dado U aberto não vazio em $\mathbf{M}$, ao tomar $q \in \pi^{-1}(\pi(U))$, temos $p \in U$ tal que $q = \pi^{-1}(\pi(p))$ e portanto $g \in G$ tal que $q = gp$. Como U é aberto e g age como difeomorfismo, o conjunto $V = gU$ é um aberto de $\mathbf{M}$ em torno de q, com $V \subset \pi^{-1}(\pi(U))$. Assim $\pi^{-1}(\pi(U))$ é aberto em $\mathbf{M}$ para todo U aberto em $\mathbf{M}$, o que é equivalente à projeção ser aberta. Obviamente, a projeção é contínua nesta topologia. Agora, tomemos $p \in \mathbf{M}$ e (U, φ) uma carta local em torno do ponto p. De ser ψ propriamente descontínua, podemos encontrar uma vizinhança $W \subset U$ do ponto p tal que $W \cap gW = \varnothing$, para todo $g \in G,\ g \neq e$. Façamos $V = W \cap U$. Temos que (V, φ) ainda é uma carta local em torno do ponto p. Com isto, $\pi|_V$ é injetora, logo bijetora em sua imagem. Portanto homeomorfismo sobre sua imagem. Construamos $\bar{\varphi} : \pi(V) \to \varphi(V)$ dada por $\bar{\varphi} = \varphi \circ \pi^{-1}$ neste domínio. Com isto, vemos que $\bar{\varphi}$ é homeomorfismo entre os abertos $\pi(V) \subset \mathbf{M}/G$ e $\varphi(V) \subset \mathbb{R}^m$. Denotemos $\bar{V} = \pi(V)$. Da arbitrariedade de p e da sobrejetividade de π, podemos construir uma família $\{(\bar{V}_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha)\}$ nas condições acima, tal que $\{\bar{V}_\alpha\}$ é uma cobertura de $\mathbf{M}$. Tomemos $(\bar{V}_1, \bar{\varphi}_1)$ e $(\bar{V}_2, \bar{\varphi}_2)$ desta família. Se $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 \neq \varnothing$, tomemos $x \in \bar{\varphi}_2(\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2)$. Chamando $p = \varphi_2^{-1}(x)$, π_1 a restrição de π a V_1 e π_2 a restrição de π a V_2, temos que

$$(\bar{\varphi}_1 \circ \bar{\varphi}_2^{-1})(x) = \varphi_1(\pi_1^{-1}(\pi_2(\varphi_2^{-1}(x)))) = \varphi_1((\pi_1^{-1} \circ \pi_2)(p))$$

Mas $q = (\pi_1^{-1} \circ \pi_2)(p)$, significa que existe $g \in G$ tal que $\pi_1^{-1} \circ \pi_2 = \psi(g)$, um difeomorfismo, para todo $p \in V_1 \cap V_2$. Assim, $\bar{\varphi}_1 \circ \bar{\varphi}_2^{-1} : \bar{\varphi}_2(\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2) \to \bar{\varphi}_1(\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2)$ é difeomorfismo. Para a composta $\bar{\varphi}_2 \circ \bar{\varphi}_1^{-1}$ vale o mesmo e a demonstração é análoga. Segue que a família $\{(\bar{V}_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha)\}$ é um atlas de $\mathbf{M}/G$. Tal atlas pode ser estendido para um atlas máximo, fornecendo assim uma estrutura diferenciável para $\mathbf{M}/G$.

É fácil ver que, segundo esta estrutura, π é um difeomorfismo local.

Uma coleção importante de variedades diferenciáveis são os chamados grupos de Lie.

Definição 2.1.10 (Grupo de Lie)**.** *Um grupo de Lie é um grupo* $(\mathbf{G}, \mu, e)$*, onde* $\mathbf{G}$ *denota o conjunto sobre o qual o grupo está definido,* μ *é a operação do grupo e* e *denota o elemento identidade, tal que* $\mathbf{G}$ *é uma variedade diferenciável,* μ *é infinitamente diferenciável e a operação de inversão* $\iota : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$; $\iota : x \mapsto x^{-1}$ *é infinitamente diferenciável.*

Definição 2.1.11 (Partição da unidade subordinada a uma cobertura)**.** *Sejam* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável e* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *uma cobertura aberta de* $\mathbf{M}$*. Uma partição da unidade subordinada à cobertura* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *é uma coleção de aplicações* $\{\rho_\alpha : \mathbf{M} \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in I}$ *que satisfaz*

i) $0 \le \rho_\alpha(p) \le 1,\ \forall \alpha \in I,\ \forall p \in \mathbf{M}$*;*

ii) $supp(\rho_\alpha) \subset U_\alpha,\ \forall \alpha \in I$*;*

iii) dado $p \in \mathbf{M}$*, existe uma vizinhança* U *de* p *tal que* $U \cap supp(\rho_i) \neq \varnothing$ *apenas para um número finito de índices;*

iv) $\sum_{\alpha\in I} \rho_\alpha(p) = 1,\ \forall p \in \mathbf{M}$.

onde $supp(\rho_\alpha)$ denota o suporte da aplicação ρ_α. Dada uma cobertura de $\mathbf{M}$, sempre é possível construir uma partição da unidade subordinada a tal cobertura[2].

2.2 Fibrados

Definição 2.2.1 (Estrutura Fibrada)**.** *Sejam* E*,* B *e* F *espaços topológicos. Dizemos que a quádrupla* (E, B, π, F) *é uma estrutura fibrada, quando* $\pi : E \to B$ *é uma aplicação contínua e sobrejetora tal que* $\pi^{-1}(x)$ *é homeomorfo a* F*, para todo* $x \in B$*. Então* E *é dito espaço total,* B *é dito espaço base,* π *é dita projeção,* F *é dita fibra típica e* $F_x = \pi^{-1}(x)$ *é dita fibra sobre* x*.*

[2]Para uma demonstração veja por exemplo, [17].

Definição 2.2.2 (Levantamento)**.** *Dados uma estrutura fibrada* (E, B, π, F)*, um espaço topológico* A *e uma aplicação contínua* $f : A \to B$*, dizemos que uma aplicação contínua* $g : A \to E$ *é um levantamento de* f *se, e somente se,* $\pi \circ g = f$*.*

Definição 2.2.3 (Seção)**.** *Dada uma estrutura fibrada* (E, B, π, F)*, dizemos que uma aplicação* $\sigma : B \to E$ *é uma seção da estrutura fibrada se, e somente se,* σ *é um levantamento da aplicação identidade em* B*.*

Definição 2.2.4 (Morfismo de estrutura fibrada)**.** *Dadas duas estruturas fibradas* (E_1, B_1, π_1, F_1) *e* (E_2, B_2, π_2, F_2)*, um morfismo de estruturas fibradas é um par de aplicações contínuas* $(\tilde{f}, f)$ *tal que:*

i) $\tilde{f} : E_1 \to E_2$ *e* $f : B_1 \to B_2$*;*

ii) $\pi_2 \circ \tilde{f} = f \circ \pi_1$*.*

Ou seja, é comutativo o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "f"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

Definição 2.2.5 (Estrutura Fibrada Localmente trivial)**.** *Seja* (E, B, π, F) *uma estrutura fibrada. Dizemos que* (E, B, π, F) *é localmente trivial se, e somente se, existe uma cobertura aberta* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *de* B*, tal que* $\pi^{-1}(U_\alpha)$ *é homeomorfo ao produto topológico* $U_\alpha \times F$*, para cada* $\alpha \in I$ *(*I *é o conjunto que indexa a cobertura). Um homeomorfismo* $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ *é dito trivialização da estrutura fibrada.*

Definição 2.2.6 (Fibrado Vetorial)**.** *Um fibrado vetorial* (E, B, π, F, G) *é uma estrutura fibrada* (E, B, π, F)*, satisfazendo as seguintes condições:*

i) (E, B, π, F) *é localmente trivial;*

ii) F *é um espaço vetorial topológico;*

iii) $\pi^{-1}(x)$ *é espaço vetorial topológico isomorfo a* F *para cada* $x \in B$*;*

iv) *as trivializações* $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$*, restritas a cada fibra, são isomorfismos lineares entre os espaços vetoriais* $\pi^{-1}(x)$ *e* $\{x\} \times F$ *para cada* $x \in U_\alpha$ *e para cada* $\alpha \in I$ *(e* $\{x\} \times F$ *herda naturalmente a estrutura vetorial e topológica de* F*) e portanto podem ser escritas como* $\varphi_\alpha(p) = (\pi(p), \phi_\alpha(p))$*, com* $p \in U_\alpha$*, de tal maneira que* $\phi_\alpha|_{F_{\pi(p)}}$ *é isomorfismo de espaços vetoriais topológicos entre* $F_{\pi(p)}$ *e* F*;*

v) G *é um grupo topológico cujos elementos são automorfismos de* F*, cuja operação algébrica é a composição de funções, de sorte que a ação de avaliação* $v : G \times F \to F$*, dada por* $v(g, u) = g(u)$ *é contínua;*

vi) *para todos* $\alpha, \beta \in I$ *e para todo* $x \in U_\alpha \cap U_\beta$*, a composta* $\phi_\beta|_{F_x} \circ (\phi_\alpha|_{F_x})^{-1} : F \to F$ *é um elemento de* G*;*

vii) *a aplicação induzida (dita função de transição)* $g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ *que associa* $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ *a* $\phi_\beta|_{F_x} \circ (\phi_\alpha|_{F_x})^{-1}$ *é contínua.*

Definição 2.2.7 (Fibrado Vetorial Diferenciável)**.** *Seja* (E, B, π, F, G) *um fibrado vetorial cuja fibra típica* F *é um espaço vetorial de dimensão finita. Dizemos que* (E, B, π, F, G) *é um fibrado vetorial diferenciável quando as seguintes condições adicionais forem satisfeitas:*

i) E*,* B *e* F *são variedades diferenciáveis;*

ii) G *é um grupo de Lie;*

iii) π *é uma aplicação* $C^\infty(E; B)$*;*

iv) *a cobertura aberta* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *de* B *referente à condição de trivialidade local está contida na coleção de abertos que define a estrutura diferenciável de* B*;*

v) *as funções de transição são* C^∞*.*

Claramente, as noções de levantamento, seção e morfismo podem ser adaptadas para o contexto de fibrados vetoriais diferenciáveis com poucas modificações.

Definição 2.2.8 (Levantamento diferenciável). *Dados um fibrado vetorial diferenciável* (E, B, π, F, G)*, uma variedade diferenciável* $\mathbf{A}$ *e uma aplicação* $f : \mathbf{A} \to B$ *infinitamente diferenciável, dizemos que uma aplicação* $g : \mathbf{A} \to E$ *é um levantamento de* f *se, e somente se,* g *é infinitamente diferenciável e ainda* $\pi \circ g = f$*.*

Definição 2.2.9 (Seção infinitamente diferenciável). *Dado um fibrado vetorial diferenciável* (E, B, π, F, G)*, dizemos que uma aplicação* $\sigma : B \to E$ *é uma seção infinitamente diferenciável do fibrado vetorial diferenciável se, e somente se,* σ *é um levantamento da aplicação identidade em* B*.*

Definição 2.2.10 (Morfismo de fibrados vetoriais diferenciáveis). *Dados os fibrados vetoriais diferenciáveis* $(E_1, B_1, \pi_1, F_1, G_1)$ *e* $(E_2, B_2, \pi_2, F_2, G_2)$*, um morfismo de fibrados vetoriais diferenciáveis é um par de aplicações infinitamente diferenciáveis* $(\tilde{f}, f)$ *tal que:*

i) $\tilde{f} : E_1 \to E_2$ *e* $f : B_1 \to B_2$*;*

ii) $\pi_2 \circ \tilde{f} = f \circ \pi_1$*;*

iii) para cada $x \in B_1$*,* $\tilde{f}|_{F_x} : \pi_1^{-1}(x) \to \pi_2^{-1}(f(x))$*, onde* F_x *é a fibra sobre* x*, é uma aplicação linear.*

Um fibrado vetorial diferenciável notável é o $(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^m, \pi, \mathbb{R}^n, GL(\mathbb{R}^n))$, onde $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ é a projeção canônica nas m primeiras coordenadas. Neste caso, a estrutura fibrada é naturalmente dada pela associação $\mathbb{R}^{m+n} \approx \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ (o fibrado é trivial, isto é, a estrutura fibrada é dada pelo produto cartesiano). Com isto em mente, dado um atlas $\mathfrak{A}(\mathbf{E})$ no espaço total $\mathbf{E}$ de um fibrado vetorial diferenciável $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \pi, F, \mathbf{G})$, podemos nos perguntar quais cartas de $\mathfrak{A}(\mathbf{E})$ são compatíveis com a estrutura fibrada. Isto nos leva ao seguinte conceito.

Definição 2.2.11 (Cartas fibradas). *Seja* $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \pi, F, \mathbf{G})$ *um fibrado vetorial diferenciável, onde* $dim(\mathbf{E}) = m + n$ *e* $dim(\mathbf{B}) = m$*. Uma carta local* $(V, \tilde{\varphi}) \in \mathfrak{A}(\mathbf{E})$ *é dita uma carta fibrada se, e somente se, existe uma carta local* $(\pi(V), \varphi)$ *no atlas de* $\mathbf{B}$*, tal que* $(\tilde{\varphi}, \varphi)$ *é um morfismo de fibrados entre* $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \pi, F, \mathbf{G})$ *e*

$(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^m, Pr_1, \mathbb{R}^n, GL(\mathbb{R}^n))$, *onde* $Pr_1 : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ *é a projeção canônica nas* m *primeiras coordenadas.*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & V \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^{m+n} \arrow[d, "Pr_1"] \\ \mathbf{B} \arrow[r] & \pi(V) \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

2.3 Campos de Vetores e Derivações

Se $\mathbf{M}$ é uma variedade diferenciável, o conjunto $C^\infty(\mathbf{M})$ das funções infinitamente diferenciáveis definidas em $\mathbf{M}$ a valores reais tem uma estrutura natural de $\mathbb{R}$-álgebra. O intuito desta seção é construir o fibrado tangente a $\mathbf{M}$ e mostrar que as seções C^∞ deste fibrado estão em correspondência biunívoca com as derivações da álgebra $C^\infty(\mathbf{M})$.

Seja $\mathbf{M}$ uma variedade diferenciável. Para cada $p \in \mathbf{M}$, definamos o $\mathbb{R}$-espaço vetorial V_p, tangente a $\mathbf{M}$ no ponto p, a partir dos germes de funções sobre $\mathbf{M}$.[3] Para tanto, definamos a relação $\sim$ em $C^\infty(\mathbf{M})$ por $f \sim g$ se, e somente se, existe U um aberto de $\mathbf{M}$ contendo o ponto p, tal que $f|_U = g|_U$. Esta é uma relação de equivalência e as classes de equivalência a ela associadas são ditas germes de funções no ponto p. As operações algébricas em $C^\infty(\mathbf{M})$ podem ser utilizadas para induzir uma estrutura de $\mathbb{R}$-álgebra em $C^\infty(\mathbf{M})/\sim$. Denotaremos por $\mathcal{F}_p$ a álgebra assim obtida. Seja I_p o ideal de $\mathcal{F}_p$ dos germes das funções que se anulam em p. Como I_p é um ideal em $\mathcal{F}_p$ e I_p^2 é um ideal em I_p, temos que I_p/I_p^2 é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Definimos então o espaço vetorial $V_p = (I_p/I_p^2)^*$, ou seja, V_p é o $\mathbb{R}$-espaço vetorial dual a I_p/I_p^2. Provemos que V_p tem dimensão finita.

Proposição 2.3.1. *Seja* (U, φ, m) *uma carta de* $\mathbf{M}$ *em torno do ponto* p. *Denotando por* $t^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *a* i*-ésima projeção canônica e por* $x^i = t^i \circ \varphi$ *a* i*-ésima função coordenada, então os representantes de* x^i *para* $i = 1, \ldots m$ *em* I_p/I_p^2 *constituem uma base para tal espaço.*

Demonstração. Dada $\mathbf{f} \in I_p/I_p^2$, seja $f \in C^\infty(\mathbf{M})$, um representante desta classe

[3] Detalhes desta construção podem ser encontrados em [26].

(classe da classe, para ser mais preciso). Note que $f(p) = 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\varphi(U)$ é convexo e que $\varphi(p) = 0$. A expressão de f em coordenadas é dada por $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$, que pela fórmula de Taylor fornece, para $y = \varphi(q), q \in U$

$$\begin{aligned}
(f \circ \varphi^{-1})(y) &= \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial t^i}\right|_0 t^i(y) + \\
&+ \sum_{i,j=1}^{m} t^i(y) t^j(y) \int_0^1 (1-s) \left.\frac{\partial^2 (f \circ \varphi^{-1})}{\partial t^i \partial t^j}\right|_{sy} ds \\
(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(q)) &= \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial t^i}\right|_0 t^i(\varphi(q)) + \\
&+ \sum_{i,j=1}^{m} t^i(\varphi(q)) t^j(\varphi(q)) \int_0^1 (1-s) \left.\frac{\partial^2 (f \circ \varphi^{-1})}{\partial t^i \partial t^j}\right|_{sy} ds \\
f(q) &= \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial t^i}\right|_{\varphi(p)} x^i(q) + \\
&+ \sum_{i,j=1}^{m} x^i(q) x^j(q) \int_0^1 (1-s) \left.\frac{\partial^2 (f \circ \varphi^{-1})}{\partial t^i \partial t^j}\right|_{sy} ds
\end{aligned}$$

Como $f \in C^\infty(\mathbf{M})$ e $x^i(p) = 0$, o termo

$$\sum_{i,j=1}^{m} x^i x^j \int_0^1 (1-s) \left.\frac{\partial^2 (f \circ \varphi^{-1})}{\partial t^i \partial t^j}\right|_{sy} ds$$

representa a classe nula em I_p/I_p^2. Disto concluímos que podemos escrever

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial t^i}\right|_{\varphi(p)} \mathbf{x}^i$$

onde $\mathbf{x}^i$ é a classe de x^i em I_p/I_p^2. Logo o conjunto $\{\mathbf{x}^i\}, i = 1, \ldots m$ gera I_p/I_p^2. Para mostrar a independência linear, note que

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{x}^i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i [x^i] \in I_p^2$$

onde $[x^i]$ é um representante de $\mathbf{x}^i$ em I_p. Escrevendo em coordenadas, ficamos com

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x^i\right) \circ \varphi^{-1} = \sum_{i=1}^{m} a_i (x^i \circ \varphi^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} a_i t^i$$

o que mostra que $\sum_{i=1}^{m} a_i[t^i] \in I^2_{\varphi(p)}$, pois a função $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ induz um homomorfismo de álgebras $(\varphi^{-1})^* : \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_{\varphi(p)}$ dado por $(\varphi^{-1})^*([f]) = [f \circ \varphi^{-1}]$. Assim, os termos de primeira ordem são nulos, o que significa que para cada $j = 1, \ldots, m$

$$\frac{\partial}{\partial t^j}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i t^i\right)\bigg|_0 = 0$$

e portanto $a_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, m$. $\square$

Isso mostra que V_p tem dimensão finita, e ainda $dim(V_p) = m$. Chamamos um elemento $\xi_p \in V_p$ de vetor tangente a $\mathbf{M}$ no ponto p.

Para cada $p \in \mathbf{M}$, associamos a cada vetor tangente $\xi_p \in V_p$ uma função linear $v_p : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$ dada por

$$v_p(f) = \begin{cases} 0 & \text{, se } \exists\, c \in f \mid c(x) = c\ \forall x \in \mathbf{M} \\ \xi_p([f]) & \text{, se } f \in I_p \end{cases}$$

onde $[f]$ denota a classe correspondente ao germe f em I_p/I_p^2. Como todo germe f pode ser escrito como $f = \tilde{f} + f(p)$, onde $\tilde{f} \in I_p$ e $f(p)$ é o germe da função constante cujo valor é $f(p)$, v_p satisfaz a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} v_p(fg) &= v_p((\tilde{f} + f(p))(\tilde{g} + g(p))) = \\ &= v_p(\tilde{f}\tilde{g} + f(p)\tilde{g} + g(p)\tilde{f} + f(p)g(p)) = \\ &= v_p(\tilde{f}\tilde{g}) + v_p(f(p)\tilde{g}) + v_p(g(p)\tilde{f}) + v_p(f(p)g(p)) = \\ &= \xi_p(\tilde{f}\tilde{g}) + f(p)\xi_p(\tilde{g}) + g(p)\xi_p(\tilde{f}) + 0 = \\ &= f(p)\xi_p(\tilde{g}) + g(p)\xi_p(\tilde{f}) = \\ &= f(p)v_p(\tilde{g}) + g(p)v_p(\tilde{f}) = \\ &= g(p)v_p(f) + f(p)v_p(g) \end{aligned}$$

Quando uma função linear $w : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$ obedece a tal propriedade, w é dita derivação de $\mathcal{F}_p$ no ponto p.

Por outro lado, se w é uma derivação de $\mathcal{F}_p$ no ponto p, podemos associar a w um único vetor tangente η_p tal que $\eta_p([f]) = w(f)$ para todo $f \in \mathcal{F}_p$. Para ver isto, note que se c representa uma função constante

$$w(c) = w(c \cdot 1) = cw(1) = cw(1 \cdot 1) = cw(1) + cw(1) = 2w(c)$$

e portanto $w(c) = 0$. Disto segue que ao escrever f como $f = \tilde{f} + f(p)$, temos que

$$w(f) = w(\tilde{f} + f(p)) = w(\tilde{f}) + w(f(p)) = w(\tilde{f})$$

e o valor de w é determinado pelo valor que assume em I_p. Se $f \in I_p^2$, existem $g, h \in I_p$ tais que $f = gh$. Logo

$$w(f) = w(gh) = h(p)w(g) + g(p)w(h) = 0$$

e w se anula em I_p^2. Porém, $f = \tilde{f} + f(p)$ resulta

$$w(f) = w(f - f(p)) = w(\tilde{f})$$

donde vemos que se $\tilde{f} \equiv \tilde{g} \ mod \ I_p^2$, então $w(f) = w(g)$ e w induz uma única transformação linear η_p que toma elementos de I_p/I_p^2 e leva a valores reais. Em outras palavras, $\eta_p \in V_p$.

Estabelecemos assim uma correspondência biunívoca entre as derivações de $\mathcal{F}_p$ no ponto p e os elementos de $(I_p/I_p^2)^*$. Não é difícil verificar que o conjunto destas derivações em um ponto munido das operações usuais de adição e produto por escalar o tornam um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e a associação que leva elementos de $(I_p/I_p^2)^*$ em derivações de $\mathcal{F}_p$ no ponto p descrita acima é um isomorfismo de espaços vetoriais. Assim, podemos falar em elementos de V_p agindo em um germe $f \in \mathcal{F}_p$, entendido que se trata da ação da derivação no ponto p correspondente, via a associação acima construída. Podemos ir além. Definimos a ação de um vetor $v_p \in V_p$ em uma função $f \in C^\infty(\mathbf{M})$ por

$$v_p(f) = v_p(\mathbf{f})$$

onde $\mathbf{f}$ é a classe de f em $\mathcal{F}_p$. Assim, $v_p(g) = v_p(f)$ sempre que $g \in \mathbf{f}$. A linearidade e a regra de Leibniz seguem diretamente desta definição.

Destes fatos, se $\mathbf{M}$ é uma variedade diferenciável de dimensão m, podemos construir o fibrado vetorial $(\mathcal{E}, \mathbf{M}, \pi, GL(\mathbb{R}^m))$, com $\mathcal{E} = \cup_{p \in \mathbf{M}} V_p$, a projeção π

dada por $\pi(v_p) = p$ e $\mathbb{R}^m$ como fibra típica, o qual pode ser dotado de estrutura diferenciável construída a partir daquela dada em $\mathbf{M}$. De fato, seja (U, φ) uma carta da variedade diferenciável m-dimensional $\mathbf{M}$, em torno do ponto $p \in \mathbf{M}$. Fazendo uso das mesmas notações da proposição 2.3.1, dada $f \in C^\infty(\mathbf{M})$, tomemos os elementos $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \in V_p$, para $i = 1, \ldots, m$, tais que

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f) = \left.\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial t^i}\right|_{\varphi(p)}$$

Agora, dado $\eta \in \pi^{-1}(U)$, para toda $f \in C^\infty(\mathbf{M})$ vale

$$\eta(f) = \eta\left(\sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial(\tilde{f} \circ \varphi^{-1})}{\partial t^i}\right|_{\varphi(\pi(\eta))} \mathbf{x}^i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{\pi(\eta)} \eta(x^i)$$

o que permite escrever

$$\eta = \sum_{i=1}^{m} \eta(x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\pi(\eta)} \tag{2.1}$$

e chamaremos tal fórmula de expressão de η em coordenadas segundo a carta (U, φ) e aos valores $\eta(x^i)$ de coordenadas de η. Isto nos habilita a definir uma aplicação $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$\tilde{\varphi}(\eta) = (\eta(x^1), \ldots, \eta(x^m))$$

E finalmente podemos definir a aplicação $\phi : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ dada por

$$\phi(\eta) = ((\varphi \circ \pi)(\eta), \tilde{\varphi}(\eta)) \tag{2.2}$$

Seja $\mathfrak{A}(\mathbf{M})$ o atlas da variedade diferenciável m-dimensional $\mathbf{M}$. Para cada carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, associamos a aplicação $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^{2m}$ construída como acima. Declaramos agora que um conjunto $V \subset \mathcal{E}$ é aberto em $\mathcal{E}$ se existem um aberto V_0 de $\mathbb{R}^{2m}$ e um índice α tais que $V = \phi_\alpha^{-1}(V_0)$. A coleção destes conjuntos constitui uma base para uma topologia em $\mathcal{E}$ que torna $\mathcal{E}$ uma variedade topológica. Além disso, se $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathfrak{A}(\mathbf{M})$, então a aplicação $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha)) \to \phi_\beta(\pi^{-1}(U_\beta))$ é de classe C^∞. Isto mostra que a coleção $(\pi^{-1}(U_\alpha), \phi_\alpha)$ define um atlas diferenciável em $\mathcal{E}$.

Com estas estruturas definidas, vemos que $(\mathcal{E}, \mathbf{M}, \pi, GL(\mathbb{R}^m))$ é um fibrado vetorial diferenciável, cuja fibra típica é $\mathbb{R}^m$, onde o espaço total é a variedade diferenciável $\mathcal{E}$, de dimensão $2m$, o espaço base é a variedade diferenciável $\mathbf{M}$, $\pi : \mathcal{E} \to \mathbf{M}$ é uma aplicação sobrejetora e infinitamente diferenciável, as trivializações são dadas pelas aplicações $\phi_\alpha = (\varphi_\alpha \circ \pi, \tilde{\varphi}_\alpha)$, o grupo estrutural é $GL(\mathbb{R}^m)$ e as condições de compatibilidade das trivializações são satisfeitas, dado que as aplicações do tipo $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ são difeomorfismos. Para ajustar as notações, escreveremos $T\mathbf{M} = \mathcal{E}$ e chamamos $T\mathbf{M}$ de fibrado tangente a $\mathbf{M}$, visto que seus elementos podem ser encarados como vetores tangentes a pontos da variedade $\mathbf{M}$. A partir de agora indicaremos o espaço vetorial tangente ao ponto p como $T_p\mathbf{M} = V_p$.

Exploremos um pouco a estrutura de fibrado definida em $T\mathbf{M}$.

Definição 2.3.1 (Campos de vetores)**.** *Seja* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável de dimensão* m*. Chamamos as seções* C^∞ *de* $(T\mathbf{M}, \mathbf{M}, \pi, GL(\mathbb{R}^m))$ *de campos de vetores em* $\mathbf{M}$*. Denotamos o espaço vetorial dos campos de vetores, com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar de funções ponto a ponto, por* $\mathfrak{X}(\mathbf{M})$*.*

Isso nos leva ao seguinte

Teorema 2.3.1. *Sejam* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável de dimensão* m *e* $C^\infty(\mathbf{M})$ *a* $\mathbb{R}$*-álgebra das funções* C^∞ *em* $\mathbf{M}$*. Então*

$$\mathfrak{X}(\mathbf{M}) \approx_{\mathbf{Vec}^{\mathbb{R}}} Der(C^\infty(\mathbf{M}))$$

Demonstração. Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, definamos a aplicação $\bar{X} : C^\infty(\mathbf{M}) \to C^\infty(\mathbf{M})$ dada por

$$\bar{X}(f)(p) = X_p(f), \ \forall\, f \in C^\infty(\mathbf{M}), \ \forall\, p \in \mathbf{M}$$

A aplicação $\bar{X}$ é uma derivação da álgebra $C^\infty(\mathbf{M})$. De fato, para quaisquer $f, g \in C^\infty(\mathbf{M})$, $a \in \mathbb{R}$ vale

$$\bar{X}(af + g)(p) = X_p(af + g) = aX_p(f) + X_p(g) = a\bar{X}(f)(p) + \bar{X}(g)(p)$$

$$\bar{X}(fg)(p) = X_p(fg) = g(p)X_p(f) + f(p)X_p(g) = g(p)\bar{X}(f)(p) + f(p)\bar{X}(g)(p)$$

A associação que leva $X \mapsto \bar{X}$ é claramente linear. Verifiquemos que é bijetora. Para verificar a injetividade, tomemos $\bar{X}$ tal que $\bar{X}(f) = 0$ para toda $f \in C^\infty(\mathbf{M})$.

Então

$$\begin{aligned}
\bar{X}(f)(p) &= 0,\ \forall p \in \mathbf{M},\ \forall f \in C^\infty(\mathbf{M}) \\
X_p(f) &= 0,\ \forall p \in \mathbf{M},\ \forall f \in C^\infty(\mathbf{M}) \\
X_p &= 0,\ \forall p \in \mathbf{M} \\
X &= 0
\end{aligned}$$

Para verificar a sobrejetividade, dado $D \in Der(C^\infty(\mathbf{M}))$, definamos para cada $p \in \mathbf{M}$, X_p tal que

$$X_p(f) = D(f)(p)$$

e o teorema segue ao se mostrar que X_p é um elemento de uma seção C^∞, para todo p. Para tanto, dado $p \in \mathbf{M}$, sejam $f, g \in C^\infty(\mathbf{M})$ tais que $f \equiv g$ em $\mathcal{F}_p$. Seja W um aberto de $\mathbf{M}$ em torno do ponto p, em que f e g coincidem. Tomemos uma carta (V, φ) em torno de p tal que $\varphi(p) = 0$ e restrinjamos tal carta a $U = V \cap W$. Então (U, φ) é uma carta em torno de p. Como f e g coincidem em U, também coincidem $\tilde{f} = f - f(p)$ e $\tilde{g} = g - g(p)$ o que nos fornece, para $i = 1, \ldots, m$

$$\left.\frac{\partial(\tilde{f} \circ \varphi^{-1})}{\partial t^i}\right|_0 = \left.\frac{\partial(\tilde{g} \circ \varphi^{-1})}{\partial t^i}\right|_0$$

onde t^i é a i-ésima projeção canônica de $\mathbb{R}^m$. De ser derivação, segue que se c é uma função constante em $\mathbf{M}$, $D(c) = 0$ pois

$$D(c) = cD(1) = cD(1 \cdot 1) = c(1D(1) + 1D(1)) = 2D(c)$$

e disto concluímos que se $\tilde{f} = f - f(p)$

$$D(f) = D(\tilde{f} + f(p)) = D(\tilde{f}) + D(f(p)) = D(\tilde{f})$$

Agora, fazendo $x^i = t^i \circ \varphi$, $i = 1, \ldots, m$ estas considerações nos levam a

$$\begin{aligned}
X_p(f) &= D(f)(p) = D(\tilde{f})(p) = \\
&= D\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(\tilde{f}\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i}\bigg|_0 x^i\right)(p) + \\
&+ D\left(\sum_{i,j=1}^{m} x^i x^j \int_0^1 (1-s)\frac{\partial^2(\tilde{f}\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i \partial t^j}\bigg|_{sy} ds\right)(p) = \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(\tilde{f}\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i}\bigg|_0 D(x^i)(p) + \sum_{i,j=1}^{m} h^f_{i,j} D(x^i x^j)(p) = \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(\tilde{f}\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i}\bigg|_0 D(x^i)(p) + \\
&+ \sum_{i,j=1}^{m} h^f_{i,j}(x^j(p)D(x^i)(p) + x^i(p)D(x^j)(p)) = \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(\tilde{f}\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i}\bigg|_0 D(x^i)(p) = \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(\tilde{g}\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i}\bigg|_0 D(x^i)(p) = \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(\tilde{g}\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i}\bigg|_0 D(x^i)(p) + \sum_{i,j=1}^{m} h^g_{i,j} D(x^i x^j)(p) = \\
&= D\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(\tilde{g}\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i}\bigg|_0 x^i\right)(p) + \\
&+ D\left(\sum_{i,j=1}^{m} x^i x^j \int_0^1 (1-s)\frac{\partial^2(\tilde{g}\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i \partial t^j}\bigg|_{sy} ds\right)(p) = \\
&= D(\tilde{g})(p) = D(g)(p) = \\
&= X_p(g)
\end{aligned}$$

o que mostra que X_p pode ser visto como agindo em germes de funções. Porém $f = \tilde{f} + f(p)$ dá

$$X_p(f) = D(f)(p) = D(\tilde{f})(p) = X_p(\tilde{f})$$

e o valor de X_p é determinado pelo valor que assume em I_p. Se $f, g \in C^\infty(\mathbf{M})$, ficamos ainda com

$$X_p(fg) = D(fg)(p) = g(p)D(f)(p) + f(p)D(g)(p) = g(p)X_p(f) + f(p)X_p(g)$$

e X_p é uma derivação no ponto p, pois a linearidade é clara. Então para cada p, X_p é uma derivação em um ponto e como $D(f) \in C^\infty(\mathbf{M})$ se $f \in C^\infty(\mathbf{M})$, temos que a seção $X : \mathbf{M} \to T\mathbf{M}$ do fibrado $T\mathbf{M}$ dada por $X(p) = X_p$ é C^∞. Assim, a associação proposta é sobrejetora, o que conclui a construção do isomorfismo de $\mathbb{R}$-espaços vetoriais entre $\mathfrak{X}(\mathbf{M})$ e $Der(C^\infty(\mathbf{M}))$. $\square$

Tendo em vista o exemplo 1.2.1, podemos construir o comutador de campos de vetores $[\ ,\ ] : \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \to \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ e assim obter a álgebra de Lie dos campos de vetores:

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),\ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}),\ \forall f \in C^\infty(\mathbf{M})$$

Segue do referido exemplo e do isomorfismo anterior que $(\mathfrak{X}(\mathbf{M}), [\ ,\ ])$ é de fato uma álgebra de Lie.

Analogamente ao que foi feito ao construirmos o fibrado tangente $T\mathbf{M}$, podemos construir fibrados vetoriais (diferenciáveis) com produtos tensoriais dos espaços tangentes (chamados então de fibrados tensoriais diferenciáveis). Em outras palavras, denotando por $T^q_s(T_p\mathbf{M}) = (T_p\mathbf{M})^{*\otimes s} \otimes (T_p\mathbf{M})^{\otimes q}$ e denotando por $T^q_s(T\mathbf{M}) = \bigcup_{p\in\mathbf{M}} T^q_s(T_p\mathbf{M})$, temos que $(T^q_s(T\mathbf{M}), \mathbf{M}, \pi, GL(T^q_s(\mathbb{R}^m)))$, com $\pi : T^q_s(T\mathbf{M}) \to \mathbf{M}$ dada por $\pi(\xi_p) = p$, é um fibrado vetorial que pode ser munido de estrutura de fibrado diferenciável com uma construção semelhante à que foi feita para $T\mathbf{M}$.

Vamos a algumas construções que merecem destaque.

Definição 2.3.2 (Fibrado cotangente)**.** *Dada uma variedade diferenciável* $\mathbf{M}$ *de dimensão* m*, chamamos de fibrado cotangente a* $\mathbf{M}$ *e denotamos* $T^*\mathbf{M}$ *ao fibrado tensorial diferenciável* $(T^0_1(T\mathbf{M}), \mathbf{M}, \pi, GL(\mathbb{R}^m))$*.*

Definição 2.3.3 (Campos de 1-formas diferenciais)**.** *Dada uma variedade diferenciável* $\mathbf{M}$*, um campo de 1-formas diferenciais em* $\mathbf{M}$ *é uma seção* C^∞ *de* $T^*\mathbf{M}$*.*

Denotemos por $\Lambda_q(\mathbf{M}) = \bigcup_{p\in\mathbf{M}} \Lambda_q(T_p\mathbf{M})$ o fibrado vetorial diferenciável obtido ao se fazer a q-ésima potência exterior em cada fibra de $T\mathbf{M}$.

Definição 2.3.4 (Campos de q-vetores)**.** *Dada uma uma variedade diferenciável* $\mathbf{M}$*, um campo de q-vetores em* $\mathbf{M}$ *é uma seção* C^∞ *de* $\Lambda_q(\mathbf{M})$*. Denotaremos o* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial dos campos de q-vetores em* $\mathbf{M}$ *por* $\Omega_q(\mathbf{M})$*. Identificaremos* $\Omega_0(\mathbf{M}) = C^\infty(\mathbf{M})$*. Note que* $\Omega_1(\mathbf{M}) = \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ *e que* $\Omega_q(\mathbf{M}) = 0$ *se* $q > dim(\mathbf{M})$*.*

Denotaremos ainda a álgebra exterior dos espaços de q-vetores por

$$\Omega_\bullet(\mathbf{M}) = \bigoplus_{q\in\mathbb{N}} \Omega_q(\mathbf{M})$$

com o produto exterior de campos de q-vetores definido fibra a fibra.

Denotemos por $\Lambda^q(\mathbf{M}) = \bigcup_{p\in\mathbf{M}} \Lambda^q(T_p^*\mathbf{M})$ o fibrado vetorial diferenciável obtido ao se fazer a q-ésima potência exterior em cada fibra de $T^*\mathbf{M}$.

Definição 2.3.5 (q-formas diferenciais)**.** *Dada uma uma variedade diferenciável* $\mathbf{M}$*, uma q-forma diferencial ou uma forma diferencial de grau q em* $\mathbf{M}$ *é uma seção* C^∞ *de* $\Lambda^q(\mathbf{M})$*. Denotaremos o* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial das q-formas diferenciais em* $\mathbf{M}$ *por* $\Omega^q(\mathbf{M})$*. Identificaremos* $\Omega^0(\mathbf{M}) = C^\infty(\mathbf{M})$*. Note que* $\Omega^q(\mathbf{M}) = 0$ *se* $q > dim(\mathbf{M})$*.*

Denotaremos ainda a álgebra exterior dos espaços de q-formas diferenciais por

$$\Omega^\bullet(\mathbf{M}) = \bigoplus_{q\in\mathbb{N}} \Omega^q(\mathbf{M})$$

com o produto exterior de q-formas diferenciais definido fibra a fibra.

Note que tanto $(\Omega_\bullet(\mathbf{M}), \wedge)$, quanto $(\Omega^\bullet(\mathbf{M}), \wedge)$ são $\mathbb{R}$-álgebras associativas graduadas.

Definição 2.3.6 (Avanço (ou *Push-Forward*))**.** *Sejam* $\mathbf{M}$ *e* $\mathbf{N}$ *variedades diferenciáveis de dimensões m e n respectivamente e* $F : M \to N$ *uma aplicação diferenciável. Para cada* $p \in \mathbf{M}$*, podemos definir a aplicação* $F_{p*} : T_p\mathbf{M} \to T_{F(p)}\mathbf{N}$ *tal que, para toda* $f \in C^\infty(\mathbf{N})$

$$(F_{p*}(X_p))(f) = X_p(f \circ F),\ \forall X_p \in T_p\mathbf{M}$$

Chamamos à aplicação $F_* : T\mathbf{M} \to T\mathbf{N}$ *dada por* $F_*(X) = F_{\pi_{\mathbf{M}}(X)*}(X),\ \forall X \in T\mathbf{M}$ *de avanço ou "push-forward" associado a* F*, onde* $\pi_{\mathbf{M}}$ *é a projeção do fibrado tangente a* $\mathbf{M}$*.*

Desta definição segue que o par (F_*, F) é um morfismo de fibrados vetoriais diferenciáveis entre $(T\mathbf{M}, \mathbf{M}, \pi_{\mathbf{M}})$ e $(T\mathbf{N}, \mathbf{N}, \pi_{\mathbf{N}})$. Note que é comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T\mathbf{M} & \xrightarrow{F_*} & T\mathbf{N} \\ {\scriptstyle \pi_{\mathbf{M}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathbf{N}}} \\ \mathbf{M} & \xrightarrow[F]{} & \mathbf{N} \end{array}$$

as aplicações F e F_* são diferenciáveis e F_* é linear em cada fibra. Para detalhes destes fatos, veja [17].

Da linearidade da aplicação F_{p*} definida acima (em cada ponto p), podemos tomar a aplicação dual $F_p^* : T^*_{F(p)}\mathbf{N} \to T^*_p\mathbf{M}$ que é dada por

$$(F^*\eta)_p(X_p) = \eta_{F(p)}(F_{p*}(X_p)),\ \forall X_p \in T_p\mathbf{M},\ \forall \eta_{F(p)} \in T^*_{F(p)}\mathbf{N}$$

Isto nos leva à seguinte definição.

Definição 2.3.7 (Retrocesso (ou *Pullback*))**.** *Sejam* $\mathbf{M}$ *e* $\mathbf{N}$ *variedades diferenciáveis de dimensão* m *e* $F : M \to N$ *um difeomorfismo. Chamamos à aplicação* $F^* : T^*\mathbf{N} \to T^*\mathbf{M}$ *tal que*

$$(F^*\eta)_p(X_p) = \eta_{F(p)}(F_{p*}(X_p)),\ \forall p \in \mathbf{M},\ \forall X_p \in T_p\mathbf{M},\ \forall \eta \in T^*_{F(p)}\mathbf{N}$$

de retrocesso ou "Pullback" associado a F*.*

A aplicação $F : M \to N$ acima induz um morfismo de fibrados vetoriais diferenciáveis dado por (F^*, F^{-1}), onde $F^* : T^*\mathbf{N} \to T^*\mathbf{M}$ é dada por $F^*(\eta) = F^*_{F^{-1}(\pi_{\mathbf{N}}(\eta))}(\eta),\ \forall \eta \in T^*\mathbf{N}$.

É interessante notar que se $\omega \in \Omega^q(\mathbf{N})$, uma aplicação diferenciável $F : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ induz um *pullback* de q-formas diferenciais (e usaremos a mesma notação). Basta notar que $\eta = F^*\omega$ é uma q-forma diferencial em $\mathbf{M}$ dada por

$$(F^*\omega)(p)(X_p) = \omega(F(p))(F_{p*}(X_p)),\ \forall p \in \mathbf{M},\ \forall X_p \in T_p\mathbf{M}$$

e em particular, induz um homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $F^* : C^\infty(\mathbf{N}) \to C^\infty(\mathbf{M})$, com $F^*(g) = g \circ F$, $\forall g \in C^\infty(\mathbf{N})$.

Também é válida a seguinte propriedade. Se $F : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ é uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ e se $\alpha, \beta \in \Omega^\bullet(\mathbf{N})$, então

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = (F^*\alpha) \wedge (F^*\beta) \tag{2.3}$$

Para detalhes, veja [25] ou [17].

De maneira geral, se $F : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ for um difeomorfismo, podemos definir o *pullback* de uma seção de um fibrado tensorial diferenciável $T^q_s(T\mathbf{N})$ para $q, s \in \mathbb{N}$ arbitrários.

Definição 2.3.8 (Retrocesso de campos tensoriais (ou *pullback*))**.** *Sejam* $\mathbf{M}$ *e* $\mathbf{N}$ *variedades diferenciáveis difeomorfas e* $F : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ *um difeomorfismo. Definimos o retrocesso (ou "pullback") associado a* F *como sendo a aplicação* $F^* : T^q_s(T\mathbf{N}) \to T^q_s(T\mathbf{M})$ *dada por*

$$\begin{aligned} & (F^*\tau)(p)(X_1, \ldots, X_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_q) = \\ = \;& \tau(F(p))(F_{p*}(X_1), \ldots, F_{p*}(X_s), (F_p^{-1})^*(\alpha_1), \ldots, (F_p^{-1})^*(\alpha_q)) \end{aligned}$$

$\forall p \in \mathbf{M}$, $\forall X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \Omega^1(\mathbf{M})$ *e para toda seção diferenciável* $\tau : \mathbf{N} \to T^q_s(T\mathbf{N})$*. Aqui identificamos* $T_p\mathbf{M} \approx T_p^{**}\mathbf{M}$ *e* $T_{F(p)}\mathbf{N} \approx T^{**}_{F(p)}\mathbf{N}$ *para todo* $p \in \mathbf{M}$*.*

Detalhes podem ser encontrados em [25].

Definição 2.3.9 (Diferencial de uma função)**.** *Seja* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável. Dada* $f \in C^\infty(\mathbf{M})$*, podemos definir uma 1-forma diferencial* $df \in \Omega^1(\mathbf{M})$ *de maneira que*

$$df(X)(p) = X(p)(f),\ \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$$

A qualquer 1-forma diferencial obtida assim damos o nome de diferencial da função f*.*

Com base nesta idéia, podemos construir a diferencial exterior de uma q-forma diferencial.

Proposição 2.3.2 (Diferencial exterior)**.** *Seja* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável. Existe um único operador* $d : \Omega^\bullet(\mathbf{M}) \to \Omega^\bullet(\mathbf{M})$ *que satisfaz:*

i) $d \in Der^1(\Omega^\bullet(\mathbf{M}))$;

ii) $d(f) = df$, $\forall f \in C^\infty(\mathbf{M})$;

iii) $d(d(\omega)) = 0$, $\forall \omega \in \Omega^\bullet(\mathbf{M})$.

Para a demonstração desta proposição, veja [17].

Em outras palavras, a diferencial exterior dá origem ao complexo de cocadeias

$$0 \longrightarrow \Omega^0(\mathbf{M}) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbf{M}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^m(\mathbf{M}) \longrightarrow 0$$

chamado o complexo de de Rham da variedade $\mathbf{M}$. Se $\omega \in \Omega^\bullet(\mathbf{M})$ é tal que $d\omega = 0$, então dizemos que ω é um co-ciclo, ou ainda, que é fechada. Se existir $\eta \in \Omega^\bullet(\mathbf{M})$ tal que $\omega = d\eta$, então dizemos que ω é um co-bordo, ou ainda, que é exata.

Em [17] é mostrada a seguinte propriedade. Sejam $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ variedades diferenciáveis e $F : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ uma aplicação diferenciável. Então, para toda $\omega \in \Omega^q(\mathbf{N})$, para todo $q \in \mathbb{N}$ vale

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega) \tag{2.4}$$

Definição 2.3.10 (Produto interior)**.** *Seja* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável. Definimos o produto interior (ou contração) de uma* q*-forma diferencial* ω, $q > 0$, *por um campo vetorial* $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ *como sendo a* $(q-1)$*-forma diferencial* $\iota_X\omega$ *tal que*

$$(\iota_X\omega)(Y_1, \ldots, Y_{q-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{q-1}),\ \forall Y_1, \ldots, Y_{q-1} \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$$

e se $f \in \Omega^0(\mathbf{M})$, o produto $\iota_X f$ é identicamente nulo, qualquer que seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$. Uma propriedade interessante do produto interior é que, dados $\alpha \in \Omega^k(\mathbf{M})$, $\beta \in \Omega^l(\mathbf{M})$ e $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, vale[4]

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{-k}\alpha \wedge \iota_X\beta \tag{2.5}$$

Em outras palavras, para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, $\iota_X \in Der^{-1}(\Omega^\bullet(\mathbf{M}))$.

[4]Para uma demonstração, veja [17].

2.4 O Colchete de Lie de Campos de Vetores

Um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ define um sistema de equações diferenciais ordinárias em $\mathbf{M}$. De fato, dados $p \in \mathbf{M}$ e (U, φ) uma carta local em torno de p, existe uma curva integral $\rho_p : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{M}$ tal que

$$\rho_p(0) = p$$

$$\frac{d\rho_p}{dt} = \rho_{p*}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_t \right) = X(\rho_p(t))$$

Dos teoremas de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias com condições iniciais e da dependência diferenciável das condições iniciais em $\mathbb{R}^m$ podemos construir uma aplicação diferenciável $\rho : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to V$, onde U e V são abertos de $\mathbf{M}$, de sorte que:

i) $\rho(0, p) = p$, $\forall p \in U$;

ii) dado $p \in U$, $\rho(t, p) = \rho_p(t)$ é uma curva integral de X passando por p;

iii) dado $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\rho_t : U \to V$ é um difeomorfismo.

Pois todas as considerações envolvidas são locais. Damos o nome de fluxo associado ao campo X à aplicação ρ acima descrita. Por vezes é útil pensar em ρ como uma família de difeomorfismos $\{\rho_t\}$ à qual daremos o mesmo nome. Quando existir um fluxo $\rho : \mathbb{R} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$, ou seja, um fluxo global, diremos que o campo de vetores X é completo.

Para detalhes destas construções, bem como demonstrações dos fatos envolvidos, veja [25].

Considere o fibrado tensorial diferenciável $(T^q_s(T\mathbf{M}), \mathbf{M}, \pi_{\mathbf{M}})$ sobre uma variedade diferenciável $\mathbf{M}$. Denotemos por $\Gamma(T^q_s(T\mathbf{M}))$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial das seções de $T^q_s(T\mathbf{M})$ e por $\Gamma(T(T\mathbf{M}))$ a soma direta de todos estes espaços para $s \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, chamando os elementos de $\Gamma(T^q_s(T\mathbf{M}))$ de campos de tensores em $\mathbf{M}$. Então $(\Gamma(T(T\mathbf{M})), \otimes)$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra associativa (com o produto definido fibra a fibra). Podemos definir uma derivação de grau zero em $(\Gamma(T(T\mathbf{M})), \otimes)$ que carrega informações sobre a geometria de $\mathbf{M}$.

Definição 2.4.1 (Derivada de Lie)**.** *Seja* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável. A derivada de Lie é uma aplicação* $\mathcal{L} : \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \times \Gamma(T(T\mathbf{M})) \to \Gamma(T(T\mathbf{M}))$, $\mathbb{R}$*-linear em* $\Gamma(T(T\mathbf{M}))$ *e em* $\mathfrak{X}(\mathbf{M})$ *dada por*

$$(\mathcal{L}_X\tau)(p) = \lim_{h\to 0} \frac{(\rho_h^*\tau)(p) - \tau(p)}{h}, \quad \forall p \in \mathbf{M}$$

onde $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ *é um campo de vetores com fluxo associado* $\{\rho_t\}$ *e* $\tau \in \Gamma(T_s^q(T\mathbf{M}))$ *é um campo de tensores. Dizemos que* $\mathcal{L}_X\tau$ *é a derivada de Lie de* τ *na direção de* X*.*

Note que se $f \in C^\infty(\mathbf{M})$, a definição acima nos leva a

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X f)(p) &= \lim_{h\to 0} \frac{(\rho_h^* f)(p) - f(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\rho_h(p)) - f(p)}{h} = \\ &= X_p(f)\end{aligned}$$

e portanto

$$\mathcal{L}_X f = X(f)$$

Pode ser mostrado[5] que se $Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, a definição 2.4.1 nos leva a

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

onde $[\ ,\ ]$ é o comutador de campos de vetores definido logo após o teorema 2.3.1. Também podem ser mostradas as seguintes propriedades[6]:

$$\mathcal{L}_X(\tau \otimes \sigma) = \mathcal{L}_X\tau \otimes \sigma + \tau \otimes \mathcal{L}_X\sigma\ , \quad \forall \tau, \sigma \in \Gamma(T(T\mathbf{M})) \tag{2.6}$$

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta\ , \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^\bullet(\mathbf{M}) \tag{2.7}$$

$$\mathcal{L}_X(\xi \wedge \zeta) = (\mathcal{L}_X\xi) \wedge \zeta + \xi \wedge \mathcal{L}_X\zeta\ , \quad \forall \xi, \zeta \in \Omega_\bullet(\mathbf{M}) \tag{2.8}$$

$$\mathcal{L}_X[Y, Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]\ , \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \tag{2.9}$$

$$\mathcal{L}_X\omega = \iota_X d\omega + d\iota_X\omega\ , \quad \forall \omega \in \Omega^\bullet(\mathbf{M}) \tag{2.10}$$

[5] Veja, por exemplo [25].

[6] Veja, por exemplo [25].

E ainda, se $\tau \in \Gamma(T^q_s(T\mathbf{M}))$, então para todos $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \Omega^1(\mathbf{M})$ e para todos $X, Y_1, \ldots, Y_s \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ vale

$$\begin{array}{rl} & (\mathcal{L}_X\tau)(\alpha_1, \ldots, \alpha_q, Y_1, \ldots, Y_s) = \mathcal{L}_X(\tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_q, Y_1, \ldots, Y_s)) - \\ - & \sum_{i=1}^{q} \tau(\alpha_1, \ldots, \mathcal{L}_X\alpha_i, \ldots, \alpha_q, Y_1, \ldots, Y_s) - \\ - & \sum_{i=1}^{s} \tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_q, Y_1, \ldots, \mathcal{L}_X Y_i, \ldots, Y_s) \end{array} \tag{2.11}$$

E em particular, se $X, Y_1, \ldots, Y_q \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ e $\omega \in \Omega^q(\mathbf{M})$, temos

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{L}_X\omega)(Y_1, \ldots, Y_q) & = & \mathcal{L}_X(\omega(Y_1, \ldots, Y_q)) + \\ & + & \sum_{i=1}^{q} (-1)^i \omega(\mathcal{L}_X Y_i, Y_1, \ldots, \hat{Y}_i, \ldots, Y_q) \end{array} \tag{2.12}$$

onde o símbolo "$\hat{a}$" significa que o elemento "a" está ausente.

Segue das equações 2.10, 2.7, 2.12, 2.5 e de um argumento de indução no grau das formas diferenciais a fórmula de Cartan para o diferencial exterior:

$$\begin{array}{rcl} d\omega(X_1, \ldots, X_{q+1}) & = & \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} \mathcal{L}_{X_i}(\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{q+1})) + \\ & + & \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega(\mathcal{L}_{X_i} X_j, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{q+1}) \end{array} \tag{2.13}$$

para toda $\omega \in \Omega^q(\mathbf{M})$, para todo $q \in \mathbb{N}$.

Segue das equações 2.5 e 2.12 que para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ e para toda $\omega \in \Omega^\bullet(\mathbf{M})$ vale

$$\iota_{[X,Y]}\omega = \mathcal{L}_X \iota_Y \omega - \iota_Y \mathcal{L}_X \omega \tag{2.14}$$

Definição 2.4.2 (2-forma diferencial não degenerada)**.** *Seja* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável. Uma 2-forma diferencial* $\omega \in \Omega^2(\mathbf{M})$ *é dita não degenerada quando, e somente quando,* $\omega(p)$ *é uma 2-forma não degenerada, para todo* $p \in \mathbf{M}$.

Proposição 2.4.1. *Sejam* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável de dimensão* m *e* $\omega \in \Omega^2(\mathbf{M})$ *uma 2-forma diferencial não degenerada. Então* ω *induz um isomorfismo de* $\mathbb{R}$*-espaços vetoriais entre* $\mathfrak{X}(\mathbf{M})$ *e* $\Omega^1(\mathbf{M})$ *dado pelo produto interior de campos de vetores com a 2-forma diferencial* ω.

Demonstração. A associação $X \mapsto \iota_X\omega$, para $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, é claramente linear. Vejamos que é injetora. Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ tal que $\iota_{X_p}\omega_p(Y_p) = 0$, $\forall Y_p \in T_p\mathbf{M}$, $\forall p \in \mathbf{M}$. Então $X_p \in Ker(\omega_p)$, $\forall p \in \mathbf{M}$. Como ω_p é não degenerada, $X_p = 0$, $\forall p \in \mathbf{M}$. Logo X é o campo vetorial nulo. Vejamos que é sobrejetora. Seja $\eta \in \Omega^1(\mathbf{M})$. Para cada $p \in \mathbf{M}$, pela proposição 1.1.2, $X_p \mapsto \iota_{X_p}\omega_p$ é um isomorfismo entre $T_p\mathbf{M}$ e $T_p^*\mathbf{M}$. Portanto, dada $\eta_p \in T_p^*\mathbf{M}$, existe um único $X_p \in T_p\mathbf{M}$ tal que $\iota_{X_p}\omega_p = \eta_p$. Segue que isto define uma função $X : \mathbf{M} \to T\mathbf{M}$ que comuta com a projeção $\pi : T\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ do fibrado tangente. Agora, note que tal associação é infinitamente diferenciável, pois leva campos vetoriais infinitamente diferenciáveis em formas diferenciais. Como é um isomorfismo linear em cada fibra, é um difeomorfismo local entre $T\mathbf{M}$ e $T^*\mathbf{M}$. Logo, pelo teorema da aplicação inversa[7] segue que sua inversa é um difeomorfismo local e portanto infinitamente diferenciável em cada ponto $p \in \mathbf{M}$. Segue disto que a aplicação $X : \mathbf{M} \to T\mathbf{M}$ acima obtida é infinitamente diferenciável e portanto $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$. $\square$

2.5 Derivações de Ordem Superior em uma Variedade Diferenciável

Nesta seção será construído um fibrado vetorial diferenciável sobre uma variedade diferenciável $\mathbf{M}$ cujas seções diferenciáveis correspondem a derivações de ordem menor ou igual a r da álgebra das funções $C^\infty(\mathbf{M})$ (definição 1.2.6).

Precisemos a noção de derivação de ordem superior em um ponto. Sejam $p \in \mathbf{M}$ e $\mathcal{F}_p$ a $\mathbb{R}$-álgebra dos germes de funções em p. Se I_p denota o ideal das funções que se anulam em p, temos que I_p/I_p^r tem estrutura natural de $\mathbb{R}$-espaço vetorial, pois I_p^r é ideal em I_p. Chamando $J_p^r = (I_p/I_p^{r+1})^*$, podemos repetir o que foi feito para $V_p = (I_p/I_p^2)$ e definir uma derivação de ordem menor ou igual a r no ponto p. Uma aplicação $\mathbb{R}$-linear $D_p : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$ é um operador diferencial de ordem menor

[7] Para uma demonstração válida para aplicações definidas em $\mathbb{R}^m$, veja [18]. Como as considerações aqui são locais, o teorema é imediatamente transportado para variedades diferenciáveis.

ou igual a r no ponto p se, para toda $g \in \mathcal{F}_p$, a aplicação $d_g : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_g(f) = D_p(gf) - g(p)D_p(f)$$

for um operador diferencial de ordem menor ou igual a $r-1$ no ponto p, com os operadores diferenciais de ordem 0 dados por produtos de germes de funções. D_p é uma derivação de ordem menor ou igual a r no ponto p se for operador diferencial de ordem menor ou igual a r no ponto p e identicamente nulo em germes de funções constantes. Compare com a definição 1.2.6.

J_p^r tem dimensão finita. Para ver isto, seja (U, φ) uma carta local de $\mathbf{M}$ em torno do ponto p. Sem perda de generalidade, podemos tomar (U, φ) tal que $\varphi(p) = 0$ e $\varphi(U)$ seja convexo. Denotemos por $x^i = t^i \circ \varphi$ as coordenadas em U, onde $t^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é a i-ésima projeção canônica em $\mathbb{R}^m$. A afirmação segue ao mostrarmos que os representantes das funções x^i, $i = 1, \ldots, m$, $x^i x^j, 1 \leq i \leq j \leq n$, $\ldots, x^{i_1} \cdot \ldots \cdot x^{i_r}$, $i_1 \leq \ldots \leq i_r$ constituem uma base para I_p/I_p^{r+1}. Seja $f \in I_p/I_p^{r+1}$. Tomemos $f \in C^\infty(\mathbf{M})$ um representante desta classe. A fórmula de Taylor com resto integral de f, tendo em vista sua expressão em coordenadas em U, se escreve

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^m \left.\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i}\right|_0 x^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \left.\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i \partial t^j}\right|_0 x^i x^j + \ldots + \\ &+ \frac{1}{r!}\sum_{i_1,\ldots,i_{r+1}=1}^m x^{i_1}\ldots x^{i_{r+1}} \int_0^1 (1-s)^r \left.\frac{\partial^{r+1}(f\circ\varphi^{-1})}{\partial t^{i_1}\ldots\partial t^{i_{r+1}}}\right|_{sy} ds \end{aligned}$$

Passando ao quociente, notamos que o último termo do lado direito da equação anterior é nulo em I_p/I_p^{r+1}. Então a classe f se escreve como

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^m \left.\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i}\right|_0 x^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \left.\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i \partial t^j}\right|_0 x^i x^j + \ldots + \\ &+ \frac{1}{r!}\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^m \left.\frac{\partial^r(f\circ\varphi^{-1})}{\partial t^{i_1}\ldots\partial t^{i_r}}\right|_0 x^{i_1}\ldots x^{i_r} \end{aligned}$$

mostrando que x^i, $i = 1, \ldots, m$, $x^i x^j, 1 \leq i \leq j \leq n$, $\ldots, x^{i_1} \cdot \ldots \cdot x^{i_r}$, $i_1 \leq \ldots \leq i_r$ gera I_p/I_p^{r+1}, pois $f \circ \varphi^{-1}$ é infinitamente diferenciável.

Para mostrar a independência linear, vejamos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} a_i x^i + \sum_{1\leq i\leq j\leq m} a_{ij} x^i x^j + \ldots + \sum_{i_1\leq\ldots\leq i_r} a_{i_1\ldots i_r} x^{i_1}\ldots x^{i_r} = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i x^i + \sum_{1\leq i\leq j\leq m} a_{ij} x^i x^j + \ldots + \sum_{i_1\leq\ldots\leq i_r} a_{i_1\ldots i_r} x^{i_1}\ldots x^{i_r} \in I_p^{r+1} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i t^i + \sum_{1\leq i\leq j\leq m} a_{ij} t^i t^j + \ldots + \sum_{i_1\leq\ldots\leq i_r} a_{i_1\ldots i_r} t^{i_1}\ldots t^{i_r} \in I_{\varphi(p)}^{r+1}
\end{aligned}$$

Assim, os termos até ordem r são nulos, donde

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^r}{\partial t^{j_1}\ldots\partial t^{j_r}}\left(\sum_{i_1\leq\ldots\leq i_r} a_{i_1\ldots i_r} t^{i_1}\ldots t^{i_r}\right)\Bigg|_0 = 0 \\
&\vdots \\
&\frac{\partial^2}{\partial t^k\partial t^l}\left(\sum_{1\leq i\leq j\leq m} a_{ij} t^i t^j\right)\Bigg|_0 = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial t^j}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i t^i\right)\Bigg|_0 = 0
\end{aligned}$$

resultam

$$\begin{aligned}
&a_{j_1\ldots j_r} = 0 \\
&\vdots \\
&a_{kl} = 0 \\
&a_j = 0
\end{aligned}$$

para todas as combinações de índices pertinentes. Assim, I_p/I_p^{r+1} tem dimensão finita, e portanto J_p^r também.

Seja $\xi_p \in J_p^r$. Associamos a ξ_p uma aplicação linear $D_p : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$ dada por

$$D_p(f) = \begin{cases} 0 & \text{, se } \exists\, c \in f \mid c(x) = c\ \forall x \in \mathbf{M} \\ \xi_p([f]) & \text{, se } f \in I_p \end{cases}$$

onde $[f]$ denota a classe de f em I_p/I_p^{r+1}. Temos que, ao escrever germes $f \in \mathcal{F}_p$

como $f = \tilde{f} + f(p)$, com $\tilde{f} \in I_p$, dada $g \in \mathcal{F}_p$

$$\begin{aligned}
&\Delta_g(f) = D_p(gf) - g(p)D_p(f) = \\
&= D_p(\tilde{g}\tilde{f}) + g(p)D_p(\tilde{f}) + f(p)D_p(\tilde{g}) + 2f(p)g(p)D_p(1) - g(p)D_p(\tilde{f}) = \\
&= D_p(\tilde{g}\tilde{f}) + f(p)D_p(\tilde{g}) = \xi_p(\tilde{g}\tilde{f}) + f(p)\xi_p(\tilde{g})
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Note que, dada $f_1 \in I_p$, para toda $f_0 \in I_p$, vale

$$\delta_{f_1}^{r-1}(f_0) = \xi_p(f_1 f_0) - f_1(p)\xi_p(f_0) = \xi_p(f_1 f_0)$$

e sucessivamente podemos ver que, dadas $f_1, \ldots, f_i$

$$\delta_{f_i}^{r-i}(f_0) = \xi_p(f_i f_{i-1} \ldots f_0)$$

para toda $f_0 \in I_p$. Agora,

$$\delta_{f_r}^{0}(f_0) = \xi_p(f_r \ldots f_0) = 0$$

mostrando que $\delta_{f_{r-1}}^{1}$ é um operador diferencial de ordem menor ou igual a 1 no ponto p, considerado restrito a I_p. Restringindo-nos a I_p, por construção, $\delta_{f_i}^{r-i}$ ser operador diferencial de ordem menor ou igual a $r-i$ no ponto p, implica que $\delta_{f_{i-1}}^{r-i+1}$ é operador diferencial de ordem menor ou igual a $r-i+1$ no ponto p. Assim, temos que ξ_p é operador diferencial de ordem menor ou igual a r no ponto p e ainda, se $\delta : I_p \to \mathbb{R}$ é um operador tal que para toda $f \in I_p$, $\delta(f) = \xi_p(f_1 \ldots f_k f)$, com $f_1, \ldots, f_k \in I_p$, então δ é um operador diferencial de ordem menor ou igual a $r-k$, no ponto p. Levando isto na equação 2.15, vemos que Δ_g é operador diferencial de ordem menor ou igual a $r-1$ no ponto p, levando à conclusão de que D_p é operador diferencial de ordem menor ou igual a r no ponto p.

Por outro lado, seja $\omega : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$ uma derivação de ordem menor ou igual a r no ponto p. Então $f \in \mathcal{F}_p$ resulta

$$\omega(f) = \omega(\tilde{f} + f(p)) = \omega(\tilde{f})$$

mostrando que o valor de ω só depende de sua avaliação em I_p. Temos ainda que, se $f \in I_p^{r+1}$, existem $f_1, \ldots, f_{r+1} \in I_p$ tais que $f = f_1 \ldots f_{r+1}$ e portanto

$$\begin{aligned}
&\omega(f) = \omega(f_1 \ldots f_{r+1}) = \delta_{f_{r+1}}^{r-1}(f_1 \ldots f_r) + f_{r+1}(p)\omega(f_1 \ldots f_r) = \\
&= \delta_{f_{r+1}}^{r-1}(f_1 \ldots f_r) = \delta_{f_r}^{r-2}(f_1 \ldots f_{r-1}) = \ldots = \delta_{f_2}^{0}(f_1) = \\
&= f_1(p)g = 0
\end{aligned}$$

para alguma $g \in \mathcal{F}_p$, onde $\delta^{r-i}_{f_{r-i+2}}$ é operador diferencial de ordem menor ou igual a $r-i$, para $i = 1, \ldots, r$. Isso mostra que $f \equiv g \; mod \; I_p^{r+1}$ em I_p resulta $\omega(f) = \omega(g)$ e então ω pode ser visto como um elemento de $(I_p/I_p^{r+1})^*$. Segue que existe uma correspondência biunívoca entre derivações de ordem menor ou igual a r no ponto p e elementos de J_p^r.

Definimos a ação de uma derivação de ordem menor ou igual a r no ponto p, D_p, em uma função $f \in C^\infty(\mathbf{M})$ como sendo dada por

$$D_p(f) = \xi_p([f])$$

onde ξ_p é o elemento associado a D_p pela correspondência acima estabelecida e $[f]$ é a classe da função f em I_p/I_p^{r+1}.

Estamos aptos a demosntrar o seguinte teorema.

Teorema 2.5.1. *Seja* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável de dimensão* m. *Existe um fibrado vetorial diferenciável*[8] $J^r(\mathbf{M})$, *cujo espaço base é* $\mathbf{M}$ *e cujo espaço de seções infinitamente diferenciáveis* $\Gamma(J^r(\mathbf{M}))$ *é isomorfo como* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial ao espaço das derivações de ordem menor ou igual a* r *sobre* $C^\infty(\mathbf{M})$.

Demonstração. Construamos o fibrado vetorial diferenciável $J^r(\mathbf{M}) = \bigcup_{p \in \mathbf{M}} J_p^r$, com $J_p^r = (I_p/I_p^{r+1})^*$ e cujas funções coordenadas $\phi : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^K$, com π a projeção de $J^r(\mathbf{M})$ em $\mathbf{M}$ e U um aberto de $\mathbf{M}$, sejam da forma $\phi(\omega_p) = (x^i(\pi(\omega_p)), \omega_p(x^i), \omega_p(x^i x^j), \ldots, \omega_p(x^{i_1} \ldots x^{i_r}))$, onde os índices são crescentes de 1 a m, para todo $\omega_p \in J_p^r$. Note que $K = \sum_{k=1}^r \binom{m+k-1}{k}$.

Seja $\omega : \mathbf{M} \to J^r(\mathbf{M})$ uma seção infinitamente diferenciável de $J^r(\mathbf{M})$. Associamos a ω a aplicação $D : C^\infty(\mathbf{M}) \to C^\infty(\mathbf{M})$ dada por

$$D(f)(p) = \omega(p)(f) \quad \forall f \in C^\infty(\mathbf{M})$$

D assim definida é uma derivação de ordem menor ou igual a r em $C^\infty(\mathbf{M})$. Para verificar isto, note primeiramente que se c é uma função constante, então

$$D(c)(p) = \omega(p)(c) = 0 \quad \forall p \in \mathbf{M}$$

[8]Poderíamos chamar $J^r(\mathbf{M})$ de *espaço de jatos linearizados de ordem* r *sobre o fibrado tangente*.

logo D é nula em constantes. Em segundo lugar, dada $g \in C^\infty(\mathbf{M})$, o operador Δ_g dado por

$$\Delta_g(f) = D(gf) - gD(f) \quad \forall f \in C^\infty(\mathbf{M})$$

é tal que

$$\begin{aligned} \Delta_g(f)(p) &= D(gf)(p) - g(p)D(f)(p) = \omega(p)(gf) - g(p)\omega(p)(f) = \\ &= \delta_g(p)(f) \end{aligned}$$

que é uma seção infinitamente diferenciável (por construção) de $J^{r-1}(\mathbf{M})$. Porém, $J^1(\mathbf{M}) = \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ e o teorema 2.3.1 nos mostra que $J^1(\mathbf{M}) \approx_{\mathbf{Vec}^{\mathbb{R}}} Der(C^\infty(\mathbf{M}))$. Logo, por indução, D é uma derivação de ordem menor ou igual a r em $C^\infty(\mathbf{M})$.

A associação $\omega \mapsto D$ é claramente linear. Vejamos que é injetora. Suponha que ω seja associada a D identicamente nula. Temos que

$$\begin{aligned} D(f) = 0 \quad &, \quad \forall f \in C^\infty(\mathbf{M}) \\ D(f)(p) = 0 \quad &, \quad \forall f \in C^\infty(\mathbf{M}),\ \forall p \in \mathbf{M} \\ \omega(p)(f) = 0 \quad &, \quad \forall p \in \mathbf{M},\ \forall f \in C^\infty(\mathbf{M}) \\ \omega(p) = 0 \quad &, \quad \forall p \in \mathbf{M} \\ \omega = 0 \quad & \end{aligned}$$

Vejamos que a associação proposta é sobrejetora. Seja $D : C^\infty(\mathbf{M}) \to C^\infty(\mathbf{M})$ uma derivação de ordem menor ou igual a r em $C^\infty(\mathbf{M})$. Para cada $p \in \mathbf{M}$, definamos $\omega_p : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$ por

$$\omega_p(f) = D(f)(p) \quad \forall f \in C^\infty(\mathbf{M})$$

entendido que o símbolo f no lado esquerdo da igualdade se refere à classe em $\mathcal{F}_p$ da função representada pelo símbolo f no lado direito. ω_p está bem definida, pois se $f, g \in C^\infty(\mathbf{M})$ são tais que $f \equiv g$ em $\mathcal{F}_p$, podemos tomar uma carta local (U, φ) em torno do ponto p tal que $U \subset W$, onde W é um aberto de $\mathbf{M}$ no qual f e g coincidem, $\varphi(p) = 0$ e $\varphi(U)$ é convexo. Note agora que, em U, f e g se escrevem como

$$\begin{aligned} f &= f(p) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i}\bigg|_0 x^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i \partial t^j}\bigg|_0 x^i x^j + \ldots + \\ &+ \frac{1}{r!}\sum_{i_1,\ldots,i_{r+1}=1}^{m} x^{i_1}\ldots x^{i_{r+1}} \int_0^1 (1-s)^r \frac{\partial^{r+1}(f\circ\varphi^{-1})}{\partial t^{i_1}\ldots\partial t^{i_{r+1}}}\bigg|_{sy} ds \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g &= g(p) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(g\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i}\bigg|_0 x^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2(g\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i \partial t^j}\bigg|_0 x^i x^j + \ldots + \\ &+ \frac{1}{r!}\sum_{i_1,\ldots,i_{r+1}=1}^{m} x^{i_1}\ldots x^{i_{r+1}} \int_0^1 (1-s)^r \frac{\partial^{r+1}(g\circ\varphi^{-1})}{\partial t^{i_1}\ldots\partial t^{i_{r+1}}}\bigg|_{sy} ds \end{aligned}$$

onde $t^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é a i-ésima projeção canônica de $\mathbb{R}^m$. Logo, em U,

$$\begin{aligned} D(f) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i}\bigg|_0 D(x^i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i \partial t^j}\bigg|_0 D(x^i x^j) + \ldots + \\ &+ \frac{1}{r!}\sum_{i_1,\ldots,i_{r+1}=1}^{m} D(x^{i_1}\ldots x^{i_{r+1}}) \int_0^1 (1-s)^r \frac{\partial^{r+1}(f\circ\varphi^{-1})}{\partial t^{i_1}\ldots\partial t^{i_{r+1}}}\bigg|_{sy} ds \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D(g) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(g\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i}\bigg|_0 D(x^i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2(g\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i \partial t^j}\bigg|_0 D(x^i x^j) + \ldots + \\ &+ \frac{1}{r!}\sum_{i_1,\ldots,i_{r+1}=1}^{m} D(x^{i_1}\ldots x^{i_{r+1}}) \int_0^1 (1-s)^r \frac{\partial^{r+1}(g\circ\varphi^{-1})}{\partial t^{i_1}\ldots\partial t^{i_{r+1}}}\bigg|_{sy} ds \end{aligned}$$

Mas de ser D derivação de ordem menor ou igual a r, temos que

$$D(x^{i_1}\ldots x^{i_{r+1}})(p) = 0$$

para todas as combinações de índices pertinentes. De f e g pertencerem ao mesmo germe de função em p, todas as derivadas parciais até a ordem r de suas expressões em coordenadas coincidem, donde resulta

$$\begin{aligned}
&\omega_p(f) = D(f)(p) = \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i}\bigg|_0 D(x^i)(p) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i \partial t^j}\bigg|_0 D(x^i x^j)(p) + \ldots + \\
&+ \frac{1}{r!}\sum_{i_1,\ldots,i_{r+1}=1}^{m} D(x^{i_1}\ldots x^{i_{r+1}})(p)\int_0^1 (1-s)^r \frac{\partial^{r+1}(f\circ\varphi^{-1})}{\partial t^{i_1}\ldots \partial t^{i_{r+1}}}\bigg|_{sy} ds = \\
&+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(g\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i}\bigg|_0 D(x^i)(p) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2(g\circ\varphi^{-1})}{\partial t^i \partial t^j}\bigg|_0 D(x^i x^j)(p) + \ldots + \\
+ \quad &\frac{1}{r!}\sum_{i_1,\ldots,i_{r+1}=1}^{m} D(x^{i_1}\ldots x^{i_{r+1}})(p)\int_0^1 (1-s)^r \frac{\partial^{r+1}(g\circ\varphi^{-1})}{\partial t^{i_1}\ldots \partial t^{i_{r+1}}}\bigg|_{sy} ds = \\
&= D(g)(p) = \omega_p(g)
\end{aligned}$$

De ser D uma derivação de ordem menor ou igual a r, segue por indução em r que ω_p é derivação de ordem menor ou igual a r no ponto p. Logo $\omega_p \in J_p^r$, para todo $p \in \mathbf{M}$. Seja $\omega : \mathbf{M} \to J^r(\mathbf{M})$ a aplicação dada por $\omega(p) = \omega_p$. Para toda $f \in C^\infty(\mathbf{M})$, temos que

$$\omega(p)(f) = \omega_p(f) = D(f)(p)$$

mostrando que $p \mapsto \omega(p)(f)$ é infinitamente diferenciável, pois $D(f)$ o é, donde resulta que ω é uma seção infinitamente diferenciável de $J^r(\mathbf{M})$.

Isto mostra que $\Gamma(J^r(\mathbf{M}))$ é isomorfo como $\mathbb{R}$-espaço vetorial ao espaço das derivações de ordem menor ou igual a r em $C^\infty(\mathbf{M})$. $\square$

Decorre do teorema anterior que se $\mathbf{M}$ é uma variedade diferenciável de dimensão m, uma derivação de ordem menor ou igual a r, $D : C^\infty(\mathbf{M}) \to C^\infty(\mathbf{M})$ se escreve localmente como

$$D(f) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{1\le i_1 \le \ldots \le i_k \le m} a_{i_1\ldots i_k}(x_1,\ldots,x_m)\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\ldots \partial x^{i_k}},$$

com $a_{i_1\ldots i_k}$ infinitamente diferenciáveis [14].

Capítulo 3

O Colchete de Nijenhuis-Schouten

3.1 O colchete de Nijenhuis-Schouten

A mecânica clássica hamiltoniana pode ser bem descrita utilizando-se modelos geométricos tais como variedades simpléticas ou variedades de Poisson. Aqui é visto que pode-se associar campos de bi-vetores, ou seja, elementos de $\Omega_2(\mathbf{M})$, a tais estruturas desde que satisfaçam determinadas condições, que podem ser formuladas em termos algébricos. Será definido o colchete de Nijenhuis-Schouten e mostrado que a escolha de um campo de bi-vetores em uma variedade diferenciável corresponde à construção de uma variedade de Poisson se, e somente se, tal campo comuta consigo mesmo, segundo tal colchete.

Teorema 3.1.1 (O colchete de Nijenhuis-Schouten [8]). *Seja* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável. Existe uma única transformação bilinear* $[\ ,\ ] : \Omega_\bullet(\mathbf{M}) \times \Omega_\bullet(\mathbf{M}) \to \Omega_\bullet(\mathbf{M})$*, chamada o colchete de Nijenhuis-Schouten, satisfazendo as seguintes propriedades. Para* $A \in \Omega_p(\mathbf{M})$*,* $B \in \Omega_q(\mathbf{M})$ *e* $C \in \Omega_r(\mathbf{M})$*:*

i) $[A, B \wedge C] = [A, B] \wedge C + (-1)^{(p-1)q} B \wedge [A, C]$*, com* $[A, B] \in \Omega_{p+q-1}(\mathbf{M})$*;*

ii) $[f, g] = 0, \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathbf{M})$*;*

iii) $[X, f] = \mathcal{L}_X f, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}),\ \forall f \in C^\infty(\mathbf{M})$*;*

iv) $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$*;*

v) $[A,B] = -(-1)^{(p-1)(q-1)}[B,A]$

Para uma demonstração[1], veja [23].

Provemos algumas propriedades importantes para efetuar cálculos com o colchete de Nijenhuis-Schouten. Fixemos daqui em diante uma variedade diferenciável $\mathbf{M}$, de dimensão m. Até o fim desta seção, $[\ ,\ ]$ denotará o colchete de Nijenhuis-Schouten.

Proposição 3.1.1. *Sejam* $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ *e* $A \in \Omega_p(\mathbf{M})$*. Então*

$$[X,A] = \mathcal{L}_X A \tag{3.1}$$

Demonstração. Procedamos por indução. Se $A \in C^\infty(\mathbf{M})$ ou $A \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, então $[X,A] = \mathcal{L}_X A$ por definição. Suponha agora $A \in \Omega_p(\mathbf{M})$ e que a proposição está provada para $p-1$. Localmente, A pode ser escrito como $A = B \wedge Y$, onde $B \in \Omega_{p-1}(\mathbf{M})$ e $Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$. Da definição do colchete e da equação 2.8, segue

$$\begin{aligned}
[X,A] &= [X, B\wedge Y] = [X,B]\wedge Y + (-1)^0 B \wedge [X,Y] = \\
&= (\mathcal{L}_X B)\wedge Y + B \wedge \mathcal{L}_X Y = \mathcal{L}_X(B\wedge Y) = \\
&= \mathcal{L}_X A
\end{aligned}$$

E assim, a proposição está provada para todo $p \in \mathbb{N}$. □

Proposição 3.1.2. *Sejam* $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ *e* $A \in \Omega_p(\mathbf{M})$*. Então*

$$[X_1 \wedge \ldots \wedge X_r, A] = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r+i} X_1 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \wedge X_r \wedge \mathcal{L}_{X_i} A \tag{3.2}$$

Demonstração. Procedamos por indução. Para $r = 1$, esta proposição se reduz à anterior. Suponha que a proposição está provada para r. Da definição do colchete e da proposição anterior, temos

$$\begin{aligned}
&[X_1 \wedge \ldots \wedge X_{r+1}, A] = -(-1)^{r(p-1)}[A, X_1 \wedge \ldots \wedge X_{r+1}] = \\
&= -(-1)^{r(p-1)}([A, X_1 \wedge \ldots \wedge X_r] \wedge X_{r+1} + \\
&+(-1)^{(p-1)r} X_1 \wedge \ldots \wedge X_r \wedge [A, X_{r+1}]) =
\end{aligned}$$

[1]Aqui há a necessidade de uma adaptação nos sinais, mas a demonstração é a mesma.

$$= -(-1)^{r(p-1)}(-(-1)^{(p-1)(r-1)}[X_1 \wedge \ldots \wedge X_r, A] \wedge X_{r+1} +$$
$$+(-1)^{(p-1)r+1} X_1 \wedge \ldots \wedge X_r \wedge [X_{r+1}, A]) =$$
$$= (-1)^{1-p}[X_1 \wedge \ldots \wedge X_r, A] \wedge X_{r+1} + X_1 \wedge \ldots \wedge X_r \wedge [X_{r+1}, A] =$$
$$= (-1)^{1-p} \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r+i} X_1 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \wedge \ldots \wedge X_r \wedge \mathcal{L}_{X_i} A \wedge X_{r+1} +$$
$$+X_1 \wedge \ldots \wedge X_r \wedge \mathcal{L}_{X_{r+1}} A =$$
$$= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r+i+1} X_1 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \wedge \ldots \wedge X_r \wedge X_{r+1} \wedge \mathcal{L}_{X_i} A +$$
$$+X_1 \wedge \ldots \wedge X_r \wedge \mathcal{L}_{X_{r+1}} A =$$
$$= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{r+i+1} X_1 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \wedge \ldots \wedge X_{r+1} \wedge \mathcal{L}_{X_i} A$$

E assim a proposição vale para todo $r \geq 1$. □

Proposição 3.1.3. *Sejam* $X_1, \ldots, X_p, Y_1, \ldots, Y_q \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$. *Então vale*

$$[X_1 \wedge \ldots \wedge X_p, Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_q] =$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \wedge \ldots \wedge X_p \wedge$$
$$\wedge Y_1 \wedge \ldots \wedge \hat{Y}_j \wedge \ldots \wedge Y_q \tag{3.3}$$

Demonstração. Da proposição 3.2 e da equação 2.8, temos que

$$[X_1 \wedge \ldots \wedge X_p, Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_q] =$$
$$\sum_{i=1}^{p} (-1)^{p+i} X_1 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \wedge \ldots \wedge X_p \wedge \mathcal{L}_{X_i}(Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_q) =$$
$$\sum_{i=1}^{p} (-1)^{p+i} X_1 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \wedge \ldots \wedge X_p \wedge (\sum_{j=1}^{q} (-1)^{j-1} (\mathcal{L}_{X_i} Y_j) \wedge$$
$$\wedge Y_1 \wedge \ldots \wedge \hat{Y}_j \wedge \ldots \wedge Y_q) =$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (-1)^{p+i+j-1} X_1 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \wedge \ldots \wedge X_p \wedge (\mathcal{L}_{X_i} Y_j) \wedge$$
$$\wedge Y_1 \wedge \ldots \wedge \hat{Y}_j \wedge \ldots \wedge Y_q =$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(-1)^{i+j}[X_i, Y_j] \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \wedge \ldots \wedge X_p \wedge$$
$$\wedge Y_1 \wedge \ldots \wedge \hat{Y}_j \wedge \ldots \wedge Y_q \quad \square$$

Neste ponto, é interessante adotar a seguinte definição.

Definição 3.1.1 (Derivada de Lie formas diferenciais ao longo de um campo de multivetores [8])**.** *A derivada de Lie de uma forma diferencial $\alpha \in \Omega^{\bullet}(\mathbf{M})$ ao longo de um campo de multivetores $A \in \Omega_p(\mathbf{M})$, denotada por $\mathcal{L}_A\alpha$, é dada por*

$$\mathcal{L}_A\alpha = d\iota_A\alpha - (-1)^p\iota_A d\alpha \tag{3.4}$$

Proposição 3.1.4. *Dados $A \in \Omega_p(\mathbf{M})$ e $B \in \Omega_q(\mathbf{M})$, para toda forma diferencial $\alpha \in \Omega^{\bullet}(\mathbf{M})$, vale*

$$\mathcal{L}_{A\wedge B}\alpha = (-1)^q\iota_B\mathcal{L}_A\alpha + \mathcal{L}_B\iota_A\alpha \tag{3.5}$$

Demonstração. É um cálculo direto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{A\wedge B}\alpha &= d\iota_{A\wedge B}\alpha - (-1)^{p+q}\iota_{A\wedge B}d\alpha = d\iota_B\iota_A\alpha - (-1)^{p+q}\iota_B\iota_A d\alpha = \\
&= d\iota_B\iota_A\alpha - (-1)^q\iota_B d\iota_A\alpha + (-1)^q\iota_B d\iota_A\alpha - (-1)^{p+q}\iota_B\iota_A d\alpha = \\
&= \mathcal{L}_B\iota_A\alpha + (-1)^q\iota_B\mathcal{L}_A\alpha \quad \square
\end{aligned}$$

Isto nos permitirá estabelecer a seguinte propriedade.

Proposição 3.1.5. *Sejam $A \in \Omega_p(\mathbf{M})$, $B \in \Omega_q(\mathbf{M})$ e $\alpha \in \Omega^{p+q-1}(\mathbf{M})$. Então é válida a seguinte fórmula:*

$$\iota_{[A,B]}\alpha = (-1)^{(p-1)q}\mathcal{L}_A\iota_B\alpha - \iota_B\mathcal{L}_A\alpha \tag{3.6}$$

Demonstração. Procedamos por (dupla) indução. Se $A, B \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, então esta é simplesmente a fórmula 2.14. Suponha então o resultado válido para 1 e q e considere $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ e $B \in \Omega_q(\mathbf{M})$. Segue que

$$\begin{aligned}
\iota_{[X,B\wedge Y]}\alpha &= \iota_{[X,B]\wedge Y}\alpha + \iota_{B\wedge[X,Y]}\alpha = \iota_Y\iota_{[X,B]}\alpha + \iota_{[X,Y]}\iota_B\alpha = \\
&= \iota_Y(\mathcal{L}_X\iota_B\alpha - \iota_B\mathcal{L}_X\alpha) + \mathcal{L}_X\iota_Y\iota_B\alpha - \iota_Y\mathcal{L}_X\iota_B\alpha = \\
&= \mathcal{L}_X\iota_Y\iota_B\alpha - \iota_Y\iota_B\mathcal{L}_X\alpha = \mathcal{L}_X\iota_{B\wedge Y}\alpha - \iota_{B\wedge Y}\mathcal{L}_X\alpha
\end{aligned}$$

e por linearidade, o resultado vale para todo elemento em $\Omega_\bullet(\mathbf{M})$. Considere agora $A \in \Omega_p(\mathbf{M})$. Portanto:

$$\begin{aligned}
\iota_{[A\wedge X,Y]}\alpha &= -\iota_{[Y,A\wedge X]}\alpha = -\iota_{[Y,A]\wedge X}\alpha - \iota_{A\wedge[Y,X]}\alpha = \\
&= -\iota_X\iota_{[Y,A]}\alpha - \iota_{[Y,X]}\iota_A\alpha = \iota_X\iota_{[A,Y]}\alpha + \iota_{[X,Y]}\iota_A\alpha = \\
&= \iota_X((-1)^{p-1}\mathcal{L}_A\iota_Y\alpha - \iota_Y\mathcal{L}_A\alpha) + \mathcal{L}_X\iota_Y\iota_A\alpha - \iota_Y\mathcal{L}_X\iota_A\alpha = \\
&= (-1)^{p-1}\iota_X\mathcal{L}_A\iota_Y\alpha + \iota_Y\iota_X\mathcal{L}_A\alpha + (-1)^p\mathcal{L}_X\iota_A\iota_Y\alpha - \iota_Y\mathcal{L}_X\iota_A\alpha = \\
&= (-1)^p\mathcal{L}_{A\wedge X}\iota_Y\alpha - \iota_Y(\mathcal{L}_X\iota_A\alpha - \iota_X\mathcal{L}_A\alpha) = \\
&= (-1)^p\mathcal{L}_{A\wedge X}\iota_Y\alpha - \iota_Y\mathcal{L}_{A\wedge X}\alpha
\end{aligned}$$

onde foi usada a proposição anterior. Suponha agora o resultado válido para p e q. Temos então que:

$$\begin{aligned}
&\iota_{[A\wedge X,B\wedge Y]}\alpha = \iota_{[A\wedge X,B]\wedge Y}\alpha + (-1)^{pq}\iota_{B\wedge[A\wedge X,Y]}\alpha = \\
&= \iota_Y\iota_{[A\wedge X,B]}\alpha + (-1)^{pq}\iota_{[A\wedge X,Y]}\iota_B\alpha = \\
&= -(-1)^{p(q-1)}\iota_Y\iota_{[B,A\wedge X]}\alpha + (-1)^{pq}\iota_{[A\wedge X,Y]}\iota_B\alpha = \\
&= -(-1)^{p(q-1)}\iota_Y(\iota_{[B,A]\wedge X}\alpha + (-1)^{p(q-1)}\iota_{A\wedge[B,X]}\alpha) + (-1)^{pq}\iota_{[A\wedge X,Y]}\iota_B\alpha = \\
&= -(-1)^{p(q-1)}\iota_Y\iota_X\iota_{[B,A]}\alpha - \iota_Y\iota_{[B,X]}\iota_A\alpha + (-1)^{pq}\iota_{[A\wedge X,Y]}\iota_B\alpha = \\
&= (-1)^{q-1}\iota_Y\iota_X\iota_{[A,B]}\alpha - \iota_Y\iota_{[B,X]}\iota_A\alpha + (-1)^{pq}\iota_{[A\wedge X,Y]}\iota_B\alpha = \\
&= (-1)^{q-1}\iota_Y\iota_X((-1)^{q(p-1)}\mathcal{L}_A\iota_B\alpha - \iota_B\mathcal{L}_A\alpha) - \iota_Y((-1)^{q-1}\mathcal{L}_B\iota_X\iota_A\alpha - \iota_X\mathcal{L}_B\iota_A\alpha) + \\
&+(-1)^{pq}((-1)^p\mathcal{L}_{A\wedge X}\iota_Y\iota_B\alpha - \iota_Y\mathcal{L}_{A\wedge X}\iota_B\alpha) = \\
&= -(-1)^{pq}\iota_Y\iota_X\mathcal{L}_A\iota_B\alpha + (-1)^q\iota_Y\iota_X\iota_B\mathcal{L}_A\alpha + (-1)^q\iota_Y\mathcal{L}_B\iota_X\iota_A\alpha + \\
&+\iota_Y\iota_X\mathcal{L}_B\iota_A\alpha + (-1)^{p(q+1)}\mathcal{L}_{A\wedge X}\iota_Y\iota_B\alpha - (-1)^{pq}\iota_Y\mathcal{L}_{A\wedge X}\iota_B\alpha = \\
&= (-1)^{p(q+1)}\mathcal{L}_{A\wedge X}\iota_{B\wedge Y}\alpha + \iota_{B\wedge Y}\iota_X\mathcal{L}_A\alpha + (-1)^q\iota_Y\mathcal{L}_B\iota_{A\wedge X}\alpha - \\
&-(-1)^{pq}\iota_Y(\mathcal{L}_{A\wedge X}\iota_B\alpha + \iota_X\mathcal{L}_A\iota_B\alpha) + \iota_Y\iota_X\mathcal{L}_B\iota_A\alpha = \\
&= (-1)^{p(q+1)}\mathcal{L}_{A\wedge X}\iota_{B\wedge Y}\alpha + \iota_{B\wedge Y}\iota_X\mathcal{L}_A\alpha - \iota_Y\mathcal{L}_X\iota_B\iota_A\alpha + \\
&+\iota_Y\iota_X\mathcal{L}_B\iota_A\alpha + (-1)^q\iota_Y\mathcal{L}_B\iota_{A\wedge X}\alpha = \\
&= (-1)^{p(q+1)}\mathcal{L}_{A\wedge X}\iota_{B\wedge Y}\alpha + \iota_{B\wedge Y}\iota_X\mathcal{L}_A\alpha - \iota_Y(\mathcal{L}_X\iota_B - \iota_X\mathcal{L}_B - (-1)^q\mathcal{L}_B\iota_X)\iota_A\alpha = \\
&= (-1)^{p(q+1)}\mathcal{L}_{A\wedge X}\iota_{B\wedge Y}\alpha + \iota_{B\wedge Y}\iota_X\mathcal{L}_A\alpha - \iota_Y\iota_B\mathcal{L}_X\iota_A\alpha = \\
&= (-1)^{p(q+1)}\mathcal{L}_{A\wedge X}\iota_{B\wedge Y}\alpha - \iota_{B\wedge Y}\mathcal{L}_{A\wedge X}\alpha
\end{aligned}$$

Segue que para todo $A \in \Omega_p(\mathbf{M})$, todo $B \in \Omega_q(\mathbf{M})$ e toda $\alpha \in \Omega^\bullet(\mathbf{M})$, vale:

$$\iota_{[A,B]}\alpha = (-1)^{(p-1)q}\mathcal{L}_A\iota_B\alpha - \iota_B\mathcal{L}_A\alpha \tag{3.7}$$

$\square$

Teorema 3.1.2 (Identidade de Jacobi graduada)**.** *O colchete de Nijenhuis-Schouten satisfaz a identidade de Jacobi graduada, relativamente ao grau reduzido (em uma unidade).*

A demonstração segue da equação 3.3 por um cálculo direto, porém tedioso, e das propriedades da derivada de Lie de funções e campos de vetores.

3.2 Variedades Simpléticas

Definição 3.2.1 (Forma simplética)**.** *Seja* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável. Dizemos que uma 2-forma diferencial* $\omega \in \Omega^2(\mathbf{M})$ *é uma forma simplética se, e somente se, é fechada e simplética em cada ponto, ou seja,*

i) $d\omega = 0$;

ii) $\omega_p = \omega(p)$ *é simplética em* $T_p\mathbf{M}$, $\forall p \in \mathbf{M}$.

Definição 3.2.2 (Variedade simplética)**.** *Uma variedade diferenciável simplética é um par* $(\mathbf{M}, \omega)$*, onde* $\mathbf{M}$ *é uma variedade diferenciável e* ω *é uma forma diferencial simplética.*

Exemplo 3.2.1 (Variedade simplética padrão). Considere o par $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ onde $\omega_0 \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$ é dada por

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp^i$$

nas coordenadas $(q^1, \ldots, q^n, p^1, \ldots, p^n)$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

Então $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é uma variedade simplética [1]. Chamaremos tal variedade de variedade simplética padrão e ω_0 de forma simplética padrão.

Definição 3.2.3 (Atlas de Darboux)**.** *Seja* $(\mathbf{M}, \omega)$ *uma variedade simplética. Um atlas de Darboux em* $\mathbf{M}$ *é um atlas* $\mathfrak{D}(\mathbf{M})$ *tal que em toda carta local* $(U, \varphi) \in \mathfrak{D}(\mathbf{M})$*,* ω *se escreve como uma forma simplética padrão.*

Teorema 3.2.1 (Teorema de Darboux)**.** *Toda variedade simplética admite um atlas de Darboux.*

Para uma demonstração, veja [1].

Definição 3.2.4 (Simplectomorfismo)**.** *Sejam* $(\mathbf{M}_1, \omega_1)$ *e* $(\mathbf{M}_2, \omega_2)$ *duas variedades simpléticas. Uma aplicação* $\varphi : \mathbf{M}_1 \to \mathbf{M}_2$ *é dita um simplectomorfismo se, e somente se, é um difeomorfismo e ainda* $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$*. Quando existir uma tal aplicação, dizemos que* $\mathbf{M}_1$ *e* $\mathbf{M}_2$ *são simplectomorfas.*

Definição 3.2.5 (Campo vetorial hamiltoniano)**.** *Seja* $(\mathbf{M}, \omega)$ *uma variedade simplética. Dizemos que um campo vetorial* $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ *é um campo vetorial hamiltoniano se, e somente se, existe uma função* $H \in C^\infty(\mathbf{M})$ *tal que* $\iota_X \omega = dH$*. Neste caso, dizemos que* H *é a função de Hamilton (ou hamiltoniana) do campo vetorial* X*. Se um campo vetorial é hamiltoniano, com função hamiltoniana* f*, é conveniente explicitá-la denotando o campo com um sub-índice como em* X_f*.*

Se $(\mathbf{M}, \omega)$ é uma variedade simplética, dada $H \in C^\infty(\mathbf{M})$, temos que $dH \in \Omega^1(\mathbf{M})$ e do fato de ser ω não degenerada, a dH corresponde um único $X_H \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ tal que $\iota_{X_H}\omega = dH$. X_H é dito o *gradiente simplético* da função H.

Proposição 3.2.1. *Seja* $(\mathbf{M}, \omega)$ *uma variedade simplética. Denotando por* $\mathfrak{X}_H(\mathbf{M})$ *o subconjunto de* $\mathfrak{X}(\mathbf{M})$ *dos campos vetoriais hamiltonianos, então* $(\mathfrak{X}_H(\mathbf{M}), [\ ,\ ])$ *é sub-álgebra de Lie da álgebra de Lie dos campos vetoriais* $(\mathfrak{X}(\mathbf{M}), [\ ,\ ])$*.*

Demonstração. Comecemos por verificar que $\mathfrak{X}_H(\mathbf{M})$ é subespaço vetorial de $\mathfrak{X}(\mathbf{M})$. Temos que

$$\iota_{\alpha X_f + X_g}\omega = \alpha\iota_{X_f}\omega + \iota_{X_g}\omega = \alpha df + dg = d(\alpha f + g)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para todos $X_f, X_g \in \mathfrak{X}_H(\mathbf{M})$. Verifiquemos que $\mathfrak{X}_H(\mathbf{M})$ é fechado para o comutador de campos. Usando as fórmulas 2.14 e 2.10 e notando que ω é fechada, temos

$$\begin{aligned}
\iota_{[X_f,X_g]}\omega &= \mathcal{L}_{X_f}\iota_{X_g}\omega - \iota_{X_g}\mathcal{L}_{X_f}\omega = \\
&= \iota_{X_f}d\iota_{X_g}\omega + d\iota_{X_f}\iota_{X_g}\omega - \iota_{X_g}\iota_{X_f}d\omega - \iota_{X_g}d\iota_{X_f}\omega = \\
&= d(\omega(X_g, X_f))
\end{aligned}$$

Como $\omega(X_g, X_f) \in C^\infty(\mathbf{M})$, temos que $[X_f, X_g]$ é um campo vetorial hamiltoniano, com função de Hamilton $\omega(X_g, X_f)$. □

Definição 3.2.6 (Fluxo de fase hamiltoniano)**.** *Um fluxo de fase hamiltoniano em uma variedade simplética é o fluxo associado a um campo vetorial hamiltoniano.*

Definição 3.2.7 (Colchete de Poisson de funções hamiltonianas)**.** *Seja* $(\mathbf{M}, \omega)$ *uma variedade simplética. Dadas* $f, g \in C^\infty(\mathbf{M})$*, definimos o colchete de Poisson das funções* f *e* g *como sendo a aplicação* $\{\ ,\ \} : C^\infty(\mathbf{M}) \times C^\infty(\mathbf{M}) \to C^\infty(\mathbf{M})$ *dada por*

$$\{f, g\} = \omega(X_g, X_f),$$

onde X_f *e* X_g *são os campos vetoriais hamiltonianos dados pela correspondência* $df = \iota_{X_f}\omega$ *e* $dg = \iota_{X_g}\omega$*, respectivamente.*

Teorema 3.2.2 (Álgebra de Poisson de uma variedade simplética)**.** *Sejam* $(\mathbf{M}, \omega)$ *uma variedade simplética e* $\{\ ,\ \} : C^\infty(\mathbf{M}) \times C^\infty(\mathbf{M}) \to C^\infty(\mathbf{M})$ *o colchete de Poisson das funções hamiltonianas. Então* $(C^\infty(\mathbf{M}), \{\ ,\ \})$ *é uma álgebra de Poisson (definição 1.2.10).*

Demonstração. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f, g, h \in C^\infty(\mathbf{M})$. Comecemos com a anti-simetria.

$$\{f, g\} = \omega(X_g, X_f) = -\omega(X_f, X_g) = -\{g, f\}$$

Bilinearidade:

$$\begin{aligned}
\{f, ag + h\} &= \omega(X_{ag+h}, X_f) = (\iota_{X_{ag+h}}\omega)(X_f) = \\
&= d(ag + h)(X_f) = adg(X_f) + dh(X_f) = \\
&= a\iota_{X_g}\omega(X_f) + \iota_{X_h}\omega(X_f) = a\omega(X_g, X_f) + \omega(X_h, X_f) = \\
&= a\{f, g\} + \{f, h\}
\end{aligned}$$

Que em conjunto com a anti-simetria fornece a bilinearidade. Identidade de Jacobi:

$$\begin{aligned}
\{f,\{g,h\}\} &= \omega(X_{\{g,h\}},X_f) = (\iota_{X_{\{g,h\}}}\omega)(X_f) = (d\{g,h\})(X_f) = \\
&= d(\omega(X_h,X_g))(X_f) = (\iota_{[X_g,X_h]})(X_f) = \omega([X_g,X_h],X_f) = \\
&= -(\iota_{X_f}\omega)([X_g,X_h]) = -df([X_g,X_h]) = [X_g,X_h](f) = \\
&= X_hX_g(f) - X_gX_h(f) = X_h(df(X_g)) - X_g(df(X_h)) = \\
&= X_h(\iota_{X_f}\omega(X_g)) - X_g(\iota_{X_f}\omega(X_h)) = \\
&= X_h(\omega(X_f,X_g)) - X_g(\omega(X_f,X_h) = \\
&= d(\omega(X_f,X_g))(X_h) - d(\omega(X_f,X_h))(X_g) = \\
&= \iota_{[X_g,X_f]}\omega(X_h) - \iota_{[X_h,X_f]}\omega(X_g) = \\
&= \omega(X_{\{f,g\}},X_h) + \omega(X_{\{h,f\}},X_g) = \\
&= \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\}
\end{aligned}$$

Da anti-simetria, é necessário verificar a regra de Leibniz em apenas uma das entradas:

$$\begin{aligned}
\{f,gh\} &= \omega(X_{gh},X_f) = \iota_{X_{gh}}\omega(X_f) = d(gh)(X_f) = \\
&= hdg(X_f) + gdh(X_f) = h\iota_{X_g}\omega(X_f) + g\iota_{X_h}\omega(X_f) = \\
&= h\omega(X_g,X_f) + g\omega(X_h,X_f) = \\
&= h\{f,g\} + g\{f,h\}
\end{aligned}$$

mostrando que $(C^\infty(\mathbf{M}),\{\ ,\ \})$ é uma álgebra de Poisson. □

Note que estas definições levam à equação

$$X_f(g) = dg(X_f) = \iota_{X_g}\omega(X_f) = \omega(X_g,X_f) = \{f,g\} \tag{3.8}$$

Teorema 3.2.3. *Em uma variedade simplética, existe um homomorfismo de álgebras de Lie entre a álgebra de Lie dos campos de vetores hamiltonianos e a álgebra de Poisson das funções hamiltonianas.*

Demonstração. Sejam $(\mathbf{M},\omega)$ uma variedade simplética e $\{\ ,\ \}$ o colchete de Poisson das funções de Hamilton. Dados X_f, X_g campos vetoriais hamiltonianos e

$h \in C^\infty(\mathbf{M})$, temos

$$\begin{aligned}
(X_{\{f,g\}} - [X_f, X_g])(h) &= X_{\{f,g\}}(h) - X_f(X_g(h)) + X_g(X_f(h)) = \\
&= \{\{f,g\},h\} - X_f(\{g,h\}) + X_g(\{f,h\}) = \\
&= \{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

onde usamos a equação 3.8. Logo

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}} \qquad \square$$

Definição 3.2.8 (Sistema hamiltoniano)**.** *Um sistema hamiltoniano é uma tripla* $(\mathbf{M}, \omega, H)$*, onde* $(\mathbf{M}, \omega)$ *é uma variedade simplética e* $H \in C^\infty(\mathbf{M})$ *é uma função escolhida, dita a hamiltoniana do sistema.*

Definição 3.2.9 (Equação de evolução)**.** *Seja* $(\mathbf{M}, \omega, H)$ *um sistema hamiltoniano. A equação de evolução de uma função* $f \in C^\infty(\mathbf{M})$ *é definida como sendo*

$$\frac{d}{dt}(f \circ \rho_t) = \{H, f\}$$

onde $\{\rho_t\}$ *é o fluxo associado a* X_H*.*

Note que o colchete de Poisson carrega informações sobre a integrabilidade do sistema. Se a função f comuta com a hamiltoniana H, a equação acima nos mostra que f é uma integral primeira do sistema, pois é constante ao longo do fluxo de fase do campo hamiltoniano X_H.

3.3 Variedades de Poisson

Definição 3.3.1 (Variedades de Poisson)**.** *Uma variedade de Poisson é um par* $(\mathbf{M}, \{\ ,\ \})$*, onde* $\mathbf{M}$ *é uma variedade diferenciável e* $(C^\infty(\mathbf{M}), \{\ ,\ \})$ *é uma álgebra de Poisson.*

Em uma variedade simplética $(\mathbf{M}, \omega)$ é sempre possível definir uma estrutura de variedade de Poisson. Para tanto, basta definir o colchete de Poisson das funções hamiltonianas. A recíproca é falsa, em geral. Basta tomar uma variedade $\mathbf{N}$ de dimensão ímpar e nela definir o colchete de funções nulo. Tal construção define uma variedade de Poisson, sendo entretanto impossível definir uma estrutura simplética em $\mathbf{N}$, dado que tem dimensão ímpar.

Exemplo 3.3.1 (Variedade de Lie-Poisson [4]). Seja $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ uma $\mathbb{R}$-álgebra de Lie de dimensão finita. Então $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ admite um colchete de Poisson $\{\ ,\ \}$ construído a partir do colchete de Lie em $\mathfrak{g}$.

De fato, é claro que $\mathfrak{g}^*$, sendo um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita, tem estrutura natural de variedade diferenciável. Sejam $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Em cada elemento $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, temos que $df(\alpha), dg(\alpha) : T_\alpha\mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ são funcionais lineares, logo elementos de $(T_\alpha\mathfrak{g}^*)^*$. Como $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial de dimensão finita, podemos identificar $\mathfrak{g} \approx \mathfrak{g}^{**}$ e $T_\alpha\mathfrak{g}^* \approx \mathfrak{g}^*$. Assim, podemos identificar $df(\alpha)$ e $dg(\alpha)$ com elementos de $\mathfrak{g}$. Façamos $\{\ ,\ \} : C^\infty(\mathfrak{g}^*) \times C^\infty(\mathfrak{g}^*) \to C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ com

$$\{f, g\}(\alpha) = \alpha([df(\alpha), dg(\alpha)]), \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*),\ \forall \alpha \in \mathfrak{g}^*$$

Por linearidade, $\{f, g\}(\alpha)$ varia diferenciavelmente com α (pois $\mathfrak{g}$ tem dimensão finita), logo $\{f, g\}$ é uma função infinitamente diferenciável. Também por linearidade, $\{\ ,\ \}$ é linear em cada entrada. Da linearidade dos elementos de $\mathfrak{g}^*$ e da anti-simetria do colchete de Lie, segue que $\{\ ,\ \}$ é anti-simétrico. Da linearidade dos elementos de $\mathfrak{g}^*$ e do fato de $[\ ,\ ]$ satisfazer a identidade de Jacobi, segue que $\{\ ,\ \}$ também a satisfaz. Se $h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$

$$\begin{aligned}
\{f, gh\}(\alpha) &= \alpha([df(\alpha), d(gh)(\alpha)]) = \alpha([df(\alpha), h(\alpha)dg(\alpha) + g(\alpha)dh(\alpha)]) = \\
&= \alpha([df(\alpha), h(\alpha)dg(\alpha)]) + \alpha([df(\alpha), g(\alpha)dh(\alpha)]) = \\
&= h(\alpha)\alpha([df(\alpha), dg(\alpha)]) + g(\alpha)\alpha([df(\alpha), dh(\alpha)]) = \\
&= h(\alpha)\{f, g\}(\alpha) + g(\alpha)\{f, h\}(\alpha)
\end{aligned}$$

e portanto $\{f, gh\} = h\{f, g\} + g\{f, h\}$, mostrando que $(C^\infty(\mathfrak{g}^*), \{\ ,\ \})$ é uma álgebra de Poisson. Logo $(\mathfrak{g}^*, \{\ ,\ \})$ é uma variedade de Poisson, dita variedade de Lie-Poisson.

Definição 3.3.2 (Variedade quase Poisson)**.** *Uma variedade quase Poisson é um par* $(\mathbf{M}, \{\ ,\ \})$*, onde* $\mathbf{M}$ *é uma variedade diferenciável e* $(C^\infty(\mathbf{M}), \{\ ,\ \})$ *é uma álgebra quase Poisson.*

Teorema 3.3.1. *Seja* $(\mathbf{M}, \{\ ,\ \})$ *uma variedade de Poisson. Então existe um único* $B \in \Omega_2(\mathbf{M})$ *tal que*

$$\{f, g\} = \iota_B(df \wedge dg), \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathbf{M})$$

Demonstração. Como $\{\ ,\ \}$ é uma bi-derivação, ou seja, uma derivação em cada entrada, segue está associado a um único elemento de $\Gamma(T\mathbf{M} \otimes T\mathbf{M})$. De ser $\{\ ,\ \}$ anti-simétrico, segue que tal elemento pertence a $\Gamma(T\mathbf{M} \wedge T\mathbf{M})$. Temos então que, para todas $f, g \in C^\infty(\mathbf{M})$

$$\{f, g\} = B(f, g) = \iota_B(df \wedge dg)$$ □

Teorema 3.3.2 (Estrutura co-simplética e variedade quase Poisson)**.** *Sejam* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável e* $B \in \Omega_2(\mathbf{M})$ *um campo de bivetores fixo em* $\mathbf{M}$*. Então o colchete* $\{\ ,\ \} : C^\infty(\mathbf{M}) \times C^\infty(\mathbf{M}) \to C^\infty(\mathbf{M})$ *dado por*

$$\{f, g\} = \iota_B(df \wedge dg), \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathbf{M})$$

é tal que $(\mathbf{M}, \{\ ,\ \})$ *é uma variedade quase Poisson. E ainda,* $(\mathbf{M}, \{\ ,\ \})$ *é uma variedade Poisson se, e somente se,* $[B, B] = 0$*.*

Demonstração. Como B é um campo de bivetores, o colchete $\{\ ,\ \}$ acima definido é claramente linear, anti-simétrico e satisfaz a regra de Leibniz em cada entrada. Isso mostra que $(\mathbf{M}, \{\ ,\ \})$ é uma variedade quase Poisson. Vamos à identidade de Jacobi. Para tanto, são úteis duas relações. Em primeiro lugar, note que

$$\iota_B(df \wedge dg \wedge dh) = \iota_B(dg \wedge dh)df + \iota_B(dh \wedge df)dg + \iota_B(df \wedge dg)dh \tag{3.9}$$

para quaisquer $f, g, h \in C^\infty(\mathbf{M})$. Para mostrar isto, notemos que localmente podemos escrever $B = X \wedge Y$, com $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$. Tomando $Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ arbitrário, para $f, g, h \in C^\infty(\mathbf{M})$ temos

$$
\begin{aligned}
&\iota_B(df \wedge dg \wedge dh)(Z) = df \wedge dg \wedge dh(X,Y,Z) = \\
&= det \begin{bmatrix} df(X) & df(Y) & df(Z) \\ dg(X) & dg(Y) & dg(Z) \\ dh(X) & dh(Y) & dh(Z) \end{bmatrix} = \\
&= det \begin{bmatrix} dg(X) & dg(Y) \\ dh(X) & dh(Y) \end{bmatrix} df(Z) + det \begin{bmatrix} df(Y) & df(X) \\ dh(Y) & dh(X) \end{bmatrix} dg(Z) + \\
&+ det \begin{bmatrix} df(X) & df(Y) \\ dg(X) & dg(Y) \end{bmatrix} dh(Z) = \iota_B(dg \wedge dh) df(Z) + \\
&+ \iota_B(dh \wedge df) dg(Z) + \iota_B(df \wedge dg) dh(Z)
\end{aligned}
$$

Em segundo lugar, temos que

$$\iota_B d\iota_B \alpha = -\frac{1}{2}\iota_{[B,B]}\alpha \tag{3.10}$$

para todo $\alpha \in \Omega^\bullet(\mathbf{M})$, pois da definição 3.4 e da fórmula 3.6 segue que

$$
\begin{aligned}
\iota_{[B,B]}\alpha &= \mathcal{L}_B\iota_B\alpha - \iota_B\mathcal{L}_B\alpha = \\
&= d\iota_B\iota_B\alpha - \iota_B d\iota_B\alpha - \iota_B d\iota_B\alpha + \iota_B\iota_B d\alpha = \\
&= -2\iota_B d\iota_B\alpha
\end{aligned}
$$

A obstrução para $\{\ ,\ \}$ satisfazer a identidade de Jacobi é estabelecida pelo seguinte fato. Dadas $f, g, h \in C^\infty(\mathbf{M})$ arbitrárias

$$
\begin{aligned}
&\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = \\
&= \iota_B(df \wedge d\{g,h\}) + \iota_B(dg \wedge d\{h,f\}) + \iota_B(dh \wedge d\{f,g\}) = \\
&= -\iota_B(d\iota_B(dg \wedge dh) \wedge df) - \iota_B(d\iota_B(dh \wedge df) \wedge dg) - \iota_B(d\iota_B(df \wedge dg) \wedge dh) = \\
&= -\iota_B d(\iota_B(dg \wedge dh) \wedge df) + \iota_B(dh \wedge df) \wedge dg + \iota_B(df \wedge dg) \wedge dh) = \\
&= -\iota_B d\iota_B(df \wedge dg \wedge dh) = \\
&= \frac{1}{2}\iota_{[B,B]}(df \wedge dg \wedge dh)
\end{aligned}
$$

Onde usamos a equação 3.9 e, na última igualdade, a fórmula 3.10. Denotando o "jacobiador" de f, g, h por $J(f,g,h) = \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\}$, da arbitrariedade de f, g e h, segue que

$$J = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [B, B] = 0 \qquad \square$$

Do fato de podermos sempre associar a uma variedade quase Poisson $(\mathbf{M}, \{\ ,\ \})$ um campo de bivetores $B \in \Omega_2(\mathbf{M})$ tal que $\iota_B(df \wedge dg) = \{f, g\},\ \forall f, g \in C^\infty(\mathbf{M})$, o teorema acima mostra que $[B, B]$ é uma obstrução para $(\mathbf{M}, \{\ ,\ \})$ ser uma variedade de Poisson. No caso em que B define uma estrutura de Poisson, dizemos que B é uma estrutura co-simplética em $\mathbf{M}$.

Capítulo 4

O Teorema de Hochschild-Kostant-Rosenberg para Variedades Diferenciáveis

4.1 Operadores Multidiferenciais

Seja (A, μ, e) uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa com unidade. Denotemos

$$C^n(A, A) = Hom_{\mathbf{Vec}^{\mathbb{K}}}(A^{\otimes n}, A), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$$

$$C^\bullet(A, A) = \bigoplus_{n \geq 0} C^n(A, A)$$

Definição 4.1.1 (Composta parcial)**.** *Dados $f \in C^{m+1}(A, A)$ e $g \in C^{n+1}(A, A)$, definimos, para $1 \leq i \leq m+1$, a i-ésima composta parcial de f e g como a aplicação $\mathbb{K}$-linear $\circ_i : C^{m+1}(A, A) \otimes C^{n+1}(A, A) \to C^{m+n+1}(A, A)$, dada por*

$$f \circ_i g = f(id_A^{\otimes(i-1)} \otimes g \otimes id_A^{(m-i+1)})$$

onde id_A denota a identidade em A.

Definição 4.1.2 (Composta total)**.** *Dados $f \in C^{m+1}(A, A)$ e $g \in C^{n+1}(A, A)$, a composta total $\circ : C^{m+1}(A, A) \otimes C^{n+1}(A, A) \to C^{m+n+1}(A, A)$ é dada por*

$$f \circ g = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{n(i+1)} f \circ_i g$$

Definição 4.1.3 (Produto $\smile$)**.** *Definimos o produto $\smile$ como sendo a aplicação $\mathbb{K}$-linear $\smile: C^\bullet \otimes C^\bullet \to C^\bullet$, de grau zero, tal que se $f \in C^{m+1}(A, A)$ e $g \in C^{n+1}(A, A)$, então*

$$f \smile g = (-1)^{(m+1)(n+1)} \mu \circ (f \otimes g)$$

em outras palavras, se $a_0, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n+1} \in A$, vale

$$(f \smile g)(a_0 \otimes \ldots \otimes a_m \otimes a_{m+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+n+1}) =$$
$$= \mu(f(a_0 \otimes \ldots \otimes a_m) \otimes g(a_{m+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+n+1}))$$

Proposição 4.1.1. *$(C^\bullet, \smile)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra graduada associativa.*

Demonstração. Temos que $C^\bullet(A, A)$ é $\mathbb{K}$-espaço vetorial graduado por construção. Por ser $\smile$ $\mathbb{K}$-linear de grau zero, para $(C^\bullet, \smile)$ ser $\mathbb{K}$-álgebra associativa, basta mostrar que o produto é associativo. Note que $\mu \in C^2(A, A)$, donde

$$\mu^2 = \mu \circ \mu = \mu(\mu \otimes id_A - id_A \otimes \mu) = 0$$

Então, para $f \in C^{m+1}(A, A)$, $g \in C^{n+1}(A, A)$, $h \in C^{l+1}(A, A)$ e denotando $\sigma = (m+1)(n+1) + (m+1)(l+1) + (n+1)(l+1)$, vale

$$(f \smile g) \smile h - f \smile (g \smile h) = (-1)^\sigma \mu^2 (f \otimes g \otimes h) = 0$$ □

O par $(C^\bullet(A, A), \delta_H)$, com δ_H dado pela definição 1.3.8, é o complexo de Hochschild da álgebra (A, μ), com coeficientes em A.

Proposição 4.1.2. *δ_H, dado na proposição anterior, é uma derivação de grau 1 de $(C^\bullet(A, A), \smile)$.*

Demonstração. Para descarregar a notação, denotaremos o produto μ da álgebra A por justaposição de elementos. Por linearidade, basta considerar a avaliação de δ_H em um produto de elementos homogêneos. Sejam $f \in C^{m+1}(A, A)$ e $g \in$

$C^{n+1}(A,A)$. Para quaisquer $a_i \in A,\ i = 0, \ldots, m+n+2$, temos

$$\begin{aligned}
& \delta_H(f \smile g)(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+n+2}) = a_0(f \smile g)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{m+n+2}) + \\
+ & \sum_{i=0}^{m+n+1} (-1)^{i+1}(f \smile g)(a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+n+2}) + \\
+ & (-1)^{m+n+2}(f \smile g)(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+n+1})a_{m+n+2} = \\
= & a_0 f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}) g(a_{m+2} \otimes \ldots \otimes a_{m+n+2}) + \\
+ & \sum_{i=0}^{m} (-1)^{i+1} f(a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+1}) g(a_{m+2} \otimes \ldots \otimes a_{m+n+2}) + \\
+ & \sum_{i=m+1}^{m+n+1} (-1)^{i+1} f(a_0 \otimes \ldots \otimes a_m) g(a_{m+1} \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+n+2}) + \\
+ & (-1)^{m+n+2} f(a_0 \otimes \ldots \otimes a_m) g(a_{m+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+n+1}) a_{m+n+2} = \\
= & (a_0 f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_m) + \sum_{i=0}^{m} (-1)^{i+1} f(a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+1}) + \\
+ & (-1)^{m+2} f(a_0 \otimes \ldots \otimes a_m) a_{m+1}) g(a_{m+2} \otimes \ldots \otimes a_{m+n+2}) + \\
+ & (-1)^{m+1} f(a_0 \otimes \ldots \otimes a_m)(a_{m+1} g(a_{m+2} \otimes \ldots \otimes a_{m+n+2}) + \\
+ & \sum_{i=m+1}^{m+n+1} (-1)^{m+i+2} g(a_{m+1} \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+n+2}) + \\
+ & (-1)^{n+1} g(a_{m+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+n+1}) a_{m+n+2}) = \\
= & ((\delta_H f) \smile g)(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+n+2}) + (-1)^{m+1}(f \smile \delta_H g)(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+n+2})
\end{aligned}$$

$\square$

Definição 4.1.4 (O colchete de Gerstenhaber). *O colchete de Gerstenhaber é uma aplicação $\mathbb{K}$-linear $[\ ,\ ] : C^\bullet(A,A) \otimes C^\bullet(A,A) \to C^\bullet(A,A)$ de grau -1 tal que, se $f \in C^{m+1}(A,A)$ e $g \in C^{n+1}(A,A)$, então*

$$[f,g] = f \circ g - (-1)^{mn} g \circ f$$

Proposição 4.1.3. *Seja (A,μ) uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa. Então se $f \in C^m(A,A)$*

$$\delta_H(f) = (-1)^{m-1}[\mu, f]$$

onde $[\ ,\ ]$ é o colchete de Gerstenhaber.

Demonstração. Seja $f \in C^m(A,A)$. Como $\mu \in C^2(A,A)$, temos que

$$\begin{aligned}
[\mu, f] &= \mu \circ f - (-1)^{m-1} f \circ \mu = \mu(f \otimes id_A) + (-1)^{m-1}\mu(id_A \otimes f) + \\
&+ (-1)^{m-1}\sum_{i=1}^{m}(-1)^i f(id_A^{\otimes(i-1)} \otimes \mu \otimes id_A^{\otimes(m-i)}) = \\
&= (-1)^{m-1}\delta_H(f) \quad \square
\end{aligned}$$

Proposição 4.1.4. *Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra, onde $\mathbb{K}$ tem característica diferente de 2. Fixemos um produto $\nu \in C^2(A,A)$. Então ν é associativo se, e somente se, $[\nu,\nu] = 0$ e neste caso, define um diferencial de Hochschild em $C^\bullet(A,A)$.*

Demonstração. Dada $f \in C^{m+1}(A,A)$, temos que

$$\begin{aligned}
\delta_H^2(f) &= \delta_H(\delta_H(f)) = \\
&= [\nu,[\nu,f]] = [[\nu,\nu],f] - [\nu,[\nu,f]] \\
&\quad \delta_H^2(f) = \frac{1}{2}[[\nu,\nu],f]
\end{aligned}$$

Pois o colchete de Gerstenhaber satisfaz a identidade de Jacobi graduada[1] Mas

$$\frac{1}{2} = [\nu,\nu] = \nu(\nu \otimes id_A) - \nu(id_A \otimes \nu)$$

donde segue o resultado. $\square$

Definição 4.1.5 (Multiderivação)**.** *O espaço das multiderivações da $\mathbb{K}$-álgebra associativa (A,μ,e), denotado por $MDer(A)$, é a sub-álgebra de $(C^\bullet(A,A), \smile)$ gerada por $Der(A)$.*

Note que $MDer(A)$ é uma álgebra graduada com

$$MDer(A) = \bigoplus_{n\geq 1} MDer^n(A),$$

onde $MDer^n(A) = MDer(A) \cap C^n(A,A)$.

Teorema 4.1.1 (O sub-complexo $MDer(A)$)**.** *Toda multiderivação é um cociclo de Hochschild.*

[1] Para uma demonstração, veja [10].

Demonstração. Procedamos por indução para mostrar que δ_H é identicamente nulo em $MDer(A)$. Seja $X \in Der(A)$. Então para todos $a, b \in A$

$$\delta_H X(a \otimes b) = \mu(a \otimes X(b)) - X(\mu(a \otimes b)) + \mu(X(a) \otimes b) = 0$$

Suponha agora que o resultado seja válido para elementos de $MDer^{n-1}(A)$ e considere $D \in MDer^n(A)$. Como $MDer(A)$ é gerado por $Der(A)$, D pode ser escrito como combinação linear de elementos da forma $X \smile \tilde{D}$, com $X \in Der(A)$ e $\tilde{D} \in MDer^{n-1}(A)$. Por linearidade, basta considerar a avaliação de δ_H em tais elementos. Do fato de ser δ_H uma derivação de grau 1 de $(C^\bullet(A, A), \smile)$, segue que

$$\delta_H(X \smile \tilde{D}) = (\delta_H X) \smile \tilde{D} - X \smile \delta_H \tilde{D} = 0$$

Assim, $MDer(A)$ é subcomplexo de $(C^\bullet(A, A), \delta_H)$ e δ_H é identicamente nulo em $MDer(A)$. □

O próximo teorema relaciona campos de tensores contravariantes sobre uma variedade diferenciável $\mathbf{M}$ com as multiderivações da álgebra $C^\infty(\mathbf{M})$. Antes de enunciá-lo, convém relacionar tais campos a multiderivações em um ponto, conceito cuja construção é análoga à desenvolvida na seção 2.3.1. Precisemos a noção de multiderivação em um ponto.

Seja $\mathbf{M}$ uma variedade diferenciável de dimensão m. Como o espaço tangente em cada ponto da variedade $\mathbf{M}$ tem dimensão finita, $(T_p\mathbf{M})^{\otimes n}$ pode ser identificado com $(I_p/I_p^2)^{*\otimes n}$, onde I_p denota o ideal dos germes de funções que se anulam em p.

Tomemos o fibrado tensorial diferenciável $T_0^n(T\mathbf{M})$. Sejam $p \in \mathbf{M}$ e $\tau_p \in T_0^n(T\mathbf{M})$ tal que $\tau_p \in V_p^{\otimes n} = (I_p/I_p^2)^{*\otimes n}$. Denotando por $\mathcal{F}_p$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial dos germes de funções no ponto p, definimos a aplicação linear $\vartheta_p : \mathcal{F}_p^{\otimes n} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\vartheta_p(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = \begin{cases} 0 & \text{, se } \exists\, c \in f_i \mid c(x) = c\ \forall x \in \mathbf{M}, \\ & \text{para algum } i,\ i = 1, \ldots, n \\ \tau_p([f_1] \otimes \ldots \otimes [f_n]) & \text{, se } f_i \in I_p,\ \forall i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

e estendida por linearidade, onde $[f_i]$ denota a classe correspondente ao germe f_i em I_p/I_p^2. Como todo germe f pode ser escrito como $f = \tilde{f} + f(p)$, onde $\tilde{f} \in I_p$

e $f(p)$ é o germe da função constante cujo valor é $f(p)$, ϑ_p satisfaz a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} & \vartheta_p(f_1 \otimes \ldots \otimes f_i g_i \otimes \ldots \otimes f_n) = \\ = \ & g_i(p)\vartheta_p(f_1 \otimes \ldots \otimes f_i \otimes \ldots \otimes f_n) + f_i(p)\vartheta_p(f_1 \otimes \ldots \otimes g_i \otimes \ldots \otimes f_n) \end{aligned}$$

em cada i-ésima entrada. Uma aplicação linear $\omega : \mathcal{F}_p^{\otimes n} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} & \omega(f_1 \otimes \ldots \otimes f_i g_i \otimes \ldots \otimes f_n) = \\ = \ & g_i(p)\omega(f_1 \otimes \ldots \otimes f_i \otimes \ldots \otimes f_n) + f_i(p)\omega(f_1 \otimes \ldots \otimes g_i \otimes \ldots \otimes f_n) \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$ é dita uma *multiderivação de grau n, no ponto p.*

Entretanto, se $\omega : \mathcal{F}_p^{\otimes n} \to \mathbb{R}$ é uma multiderivação no ponto p, podemos associá-la a um único elemento $\eta_p \in V_p^{\otimes n}$, tal que $\eta_p([f_1] \otimes \ldots \otimes [f_n]) = \omega(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)$, para todo $f_1 \otimes \ldots \otimes f_n \in \mathcal{F}_p^{\otimes n}$. Para ver isto, note em primeiro lugar que, se c representa uma função constante, então

$$\begin{aligned} & \omega(f_1 \otimes \ldots \otimes c \otimes \ldots \otimes f_n) = c\,\omega(f_1 \otimes \ldots \otimes 1 \cdot 1 \otimes \ldots \otimes f_n) = \\ = \ & c(\omega(f_1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \ldots \otimes f_n) + \omega(f_1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \ldots \otimes f_n)) = \\ = \ & 2\,\omega(f_1 \otimes \ldots \otimes c \otimes \ldots \otimes f_n) \end{aligned}$$

Portanto, só pode ser $\omega(f_1 \otimes \ldots \otimes c \otimes \ldots \otimes f_n) = 0$. Segue disto que, dado $f_1 \otimes \ldots \otimes f_n \in \mathcal{F}_p^{\otimes n}$, ao escrever cada f_i como $f_i = \tilde{f} + f_i(p)$, com $\tilde{f} \in I_p$, da linearidade de ω ficamos com

$$\omega(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = \omega(\tilde{f}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{f}_n)$$

mostrando que o valor de ω é determinado apenas pelo valor que assume em $I_p^{\otimes n}$.

Suponha agora que, para algum i, $f_i \in I_p^2$. Então existem $g_i, h_i \in I_p$ tais que $f_i = g_i h_i$, resultando em

$$\begin{aligned} & \omega(f_1 \otimes \ldots \otimes f_i \otimes \ldots \otimes f_n) = \omega(f_1 \otimes \ldots \otimes g_i h_i \otimes \ldots \otimes f_n) = \\ = \ & g_i(p)\omega(f_1 \otimes \ldots \otimes h_i \otimes \ldots \otimes f_n) + h_i(p)\omega(f_1 \otimes \ldots \otimes g_i \otimes \ldots \otimes f_n) = 0 \end{aligned}$$

Logo, se $\tilde{f}_i \equiv \tilde{g}_i \ mod\ I_p^2$, $\forall i = 1, \ldots, n$, então $\omega(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = \omega(g_1 \otimes \ldots \otimes g_n)$ e assim ω induz uma única transformação linear $\eta_p \in (I_p/I_p^2)^{*\otimes n}$. Isto mostra que existe uma correspondência biunívoca entre elementos de $V_p^{\otimes n}$ e multiderivações de grau n no ponto p, permitindo-nos confundir estes conceitos.

Definamos a ação de $\vartheta_p \in V_p^{\otimes n}$ em elementos de $(C^\infty(\mathbf{M}))^{\otimes n}$ por $\vartheta_p(F_1 \otimes \ldots \otimes F_n) = \vartheta_p(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)$ em elementos decomponíveis e estendida por linearidade, onde f_i denota o representante de $F_i \in C^\infty(\mathbf{M})$ em $\mathcal{F}_p$, $i = 1, \ldots, n$.

Estamos aptos agora a demonstrar o seguinte

Teorema 4.1.2. *Seja* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável de dimensão* m*. Então*

$$\Gamma(T_0^n(T\mathbf{M})) \approx_{\mathbf{Vec}^{\mathbb{R}}} MDer^n(C^\infty(\mathbf{M})), \quad \forall n \geq 1.$$

Demonstração. Dado $\tau \in \Gamma(T_0^n(T\mathbf{M}))$, definimos uma aplicação $\bar{\tau} : C^\infty(\mathbf{M})^{\otimes n} \to C^\infty(\mathbf{M})$, dada por

$$\bar{\tau}(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)(p) = \tau_p(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n),\ \forall p \in \mathbf{M}$$

Note que $\tau_p \in (I_p/I_p^2)^{*\otimes n}$ significa que τ_p pode ser escrito como combinação linear de elementos da forma $v_p^1 \otimes \ldots \otimes v_p^n$, com $v_p^i \in (I_p/I_p^2)^*,\ \forall i = 1, \ldots, n$, sendo que $(v_p^1 \otimes \ldots \otimes v_p^n)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = v_p^1(f_1) \ldots v_p^n(f_n)$. Como τ é uma seção infinitamente diferenciável, $\bar{\tau}$ é um elemento de $MDer^n(C^\infty(\mathbf{M}))$.

A associação $\tau \mapsto \bar{\tau}$ é claramente linear. Mostremos que é bijetora.

Para verificar a injetividade, basta ver que

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = 0 \quad &, \quad \forall f_i \in C^\infty(\mathbf{M}),\ i = 1, \ldots, n \Rightarrow \\
\Rightarrow \bar{\tau}(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)(p) = 0 \quad &, \quad \forall p \in \mathbf{M},\ \forall f_i \in C^\infty(\mathbf{M}),\ i = 1, \ldots, n \Rightarrow \\
\Rightarrow \tau_p(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = 0 \quad &, \quad \forall p \in \mathbf{M},\ \forall f_i \in C^\infty(\mathbf{M}),\ i = 1, \ldots, n \Rightarrow \\
\Rightarrow \tau_p = 0 \quad &, \quad \forall p \in \mathbf{M} \Rightarrow \\
\Rightarrow \tau = 0 \quad &
\end{aligned}$$

onde na penúltima passagem usamos o seguinte fato. Tomando uma carta local (U, φ) em torno do ponto p, com $\varphi(p) = 0$ e fazendo $x^i = t^i \circ \varphi$, com $t^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a i-ésima projeção canônica[2], podemos escrever

$$\tau_p(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = \sum_{(i_1, \ldots, i_n)} a^{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_n}}$$

[2]Em acordo com as notações da seção 2.3.1.

onde $(i_1, \ldots, i_n)$ sob o símbolo de somatório significa que a soma deve ser realizada para cada i_j, com $j = 1, \ldots, n$, $i_j = 1, \ldots, m$. Avaliando τ_p sucessivamente em elementos da forma $(x^{i_1} \otimes \ldots \otimes x^{i_n})$, vemos que $a^{i_1 \ldots i_n} = 0$, para quaisquer combinações de índices i_j.

Para verificar a sobrejetividade, considere $D \in MDer^n(C^\infty(\mathbf{M}))$. Definamos para cada $p \in \mathbf{M}$, a aplicação linear $\tau_p : \mathcal{F}_p^{\otimes n} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tau_p(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = D(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)(p), \ \forall f_1 \otimes \ldots \otimes f_n \in \mathcal{F}_p$$

onde f_i no lado esquerdo da igualdade denota o germe da função f_i, escrita no lado direito da igualdade. Até o final desta demonstração, denotaremos funções e seus germes pelo mesmo símbolo, para evitar uma notação desnecessariamente carregada. Fica claro que o símbolo se refere a um germe de funções ou a uma função pelo domínio do operador sobre ele aplicado. Mostremos que τ_p está bem definido. Tomemos $f_i, g_i \in C^\infty(\mathbf{M})$, com $i = 1, \ldots, n$, tais que $f_i \equiv g_i$ em $\mathcal{F}_p$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Sejam W_i abertos de $\mathbf{M}$ em torno do ponto p tais que $f_i|_{W_i} = g_i|_{W_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Tomemos uma carta local (V, φ) de $\mathbf{M}$, tal que $\varphi(p) = 0$. Fazendo $U = V \cap W_1 \cap \ldots \cap W_n$, temos que (U, φ) ainda é uma carta local de $\mathbf{M}$ em torno de p. Caso necessário, podemos restringir φ a uma vizinhança ainda menor para que $\varphi(U)$ seja um aberto convexo[3] de $\mathbb{R}^m$. Como f_i e g_i coincidem em U para cada i, também coincidem $\tilde{f}_i = f_i - f_i(p)$ e $\tilde{g}_i = g_i - g_i(p)$ em U, para cada i. Assim,

$$\left.\frac{\partial(\tilde{f}_i \circ \varphi^{-1})}{\partial t^j}\right|_0 = \left.\frac{\partial(\tilde{g}_i \circ \varphi^{-1})}{\partial t^j}\right|_0, \ \forall j = 1, \ldots, m, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

De ser $D \in MDer^n(C^\infty(\mathbf{M}))$, temos que

$$D(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = D((\tilde{f}_1 + f_1(p)) \otimes \ldots \otimes (\tilde{f}_n + f_n(p))) = D(\tilde{f}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{f}_n)$$

[3]Isto é necessário para podermos tomar a fórmula de Taylor com resto integral.

donde resulta

$$\tau_p(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = D(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)(p) = D(\tilde{f}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{f}_n)(p) =$$
$$= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left.\frac{\partial(\tilde{f}_i \circ \varphi^{-1})}{\partial t^{j_1}}\right|_0 \ldots \left.\frac{\partial(\tilde{f}_i \circ \varphi^{-1})}{\partial t^{j_n}}\right|_0 D(x^{j_1} \otimes \ldots \otimes x^{j_n})(p) +$$
$$+ \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_n=1 \\ l_1,\ldots,l_n=1}}^{m} \int_0^1 (1-s) \left.\frac{\partial^2(\tilde{f}_1 \circ \varphi^{-1})}{\partial t^{j_1}\partial t^{l_1}}\right|_{sy} ds \ldots \int_0^1 (1-s) \left.\frac{\partial^2(\tilde{f}_n \circ \varphi^{-1})}{\partial t^{j_n}\partial t^{l_n}}\right|_{sy} ds \,\cdot$$
$$\cdot D(x^{j_1}x^{l_1} \otimes \ldots \otimes x^{j_n}x^{l_n})(p) =$$
$$= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left.\frac{\partial(\tilde{g}_i \circ \varphi^{-1})}{\partial t^{j_1}}\right|_0 \ldots \left.\frac{\partial(\tilde{g}_i \circ \varphi^{-1})}{\partial t^{j_n}}\right|_0 D(x^{j_1} \otimes \ldots \otimes x^{j_n})(p) +$$
$$+ \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_n=1 \\ l_1,\ldots,l_n=1}}^{m} \int_0^1 (1-s) \left.\frac{\partial^2(\tilde{g}_1 \circ \varphi^{-1})}{\partial t^{j_1}\partial t^{l_1}}\right|_{sy} ds \ldots \int_0^1 (1-s) \left.\frac{\partial^2(\tilde{g}_n \circ \varphi^{-1})}{\partial t^{j_n}\partial t^{l_n}}\right|_{sy} ds \,\cdot$$
$$\cdot D(x^{j_1}x^{l_1} \otimes \ldots \otimes x^{j_n}x^{l_n})(p) = D(\tilde{g}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{g}_n)(p) =$$
$$= D(g_1 \otimes \ldots \otimes g_n)(p) = \tau_p(g_1 \otimes \ldots \otimes g_n)$$

pois $D(x^{j_1}x^{l_1} \otimes \ldots \otimes x^{j_n}x^{l_n})(p) = 0$, para quaisquer combinações de índices (j_k, l_k). Assim, τ_p é bem definida como aplicação linear de $\mathcal{F}_p^{\otimes n}$ a valores reais, para cada $p \in \mathbf{M}$. Além disso, temos que

$$\tau_p(f_1 \otimes \ldots \otimes f_i g_i \otimes \ldots \otimes f_n) = D(f_1 \otimes \ldots \otimes f_i g_i \otimes \ldots \otimes f_n)(p) =$$
$$= g_i(p) D(f_1 \otimes \ldots \otimes f_i \otimes \ldots \otimes f_n)(p) + f_i(p) D(f_1 \otimes \ldots \otimes g_i \otimes \ldots \otimes f_n)(p) =$$
$$= g_i(p)\tau_p(f_1 \otimes \ldots \otimes f_i \otimes \ldots \otimes f_n) + f_i(p)\tau_p(f_1 \otimes \ldots \otimes g_i \otimes \ldots \otimes f_n)$$

em cada i-ésima entrada. Portanto τ_p é uma multiderivação de grau n no ponto p, para cada $p \in \mathbf{M}$. Construamos por fim a aplicação $\tau : \mathbf{M} \to T_0^n(T\mathbf{M})$ dada por $\tau(p) = \tau_p$. A aplicação τ é uma seção infinitamente diferenciável, pois para cada $p \in \mathbf{M}$

$$\tau(p)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = \tau_p(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = D(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)(p)$$

e $D(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) \in C^\infty(\mathbf{M})$, quaisquer que sejam os elementos $f_1 \otimes \ldots \otimes f_n \in C^\infty(\mathbf{M})$.

Segue que a associação proposta é um isomorfismo de $\mathbb{R}$-espaços vetoriais entre $\Gamma(T_0^n(T\mathbf{M}))$ e $MDer^n(C^\infty(\mathbf{M}))$. $\square$

O teorema anterior revela que se $\mathbf{M}$ é uma variedade diferenciável de dimensão m, então um elemento $D \in MDer^n(C^\infty(\mathbf{M}))$ pode ser escrito em coordenadas locais como

$$D = \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} D(x^{j_1} \otimes \ldots \otimes x^{j_n}) \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_n}}$$

4.2 Derivações Compostas

Definição 4.2.1 (Derivação composta)**.** *Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa, comutativa, com unidade. Chamamos espaço das derivações compostas, e denotamos $SDer(A)$, a sub-álgebra de $(C^1(A,A), \circ)$ gerada por $Der(A)$. Ao conjunto dos elementos $D \in SDer(A)$ tais que podem ser escritos como combinação linear de elementos do tipo $X_1 \circ \ldots \circ X_r$, com $X_i \in Der(A)$, $\forall i = 1, \ldots, r$, $r \leq n$, denotamos por $SDer^n(A)$.*[4]

Teorema 4.2.1. *Se $D \in SDer^n(A)$, então D é uma derivação de ordem menor ou igual a n (definição 1.2.6).*

Demonstração. Denotaremos o produto em A por justaposição. Procedamos por indução em n. Claramente, se $X \in Der(A)$, então X é uma derivação de ordem menor ou igual a 1. Suponha que $D \in SDer^n(A)$ e que a proposição está provada para $n-1$. Por linearidade, basta considerar D da forma $D = \tilde{D} \circ X_n$, onde $\tilde{D} \in SDer^{n-1}(A)$ e $X_n \in Der(A)$. Pela hipótese de indução e pelo fato de que $SDer^{r-1}(A) \subset SDer^r(A)$ para todo $r \geq 1$, basta considerar o termo de maior grau de $\tilde{D}$, ou seja, termos do tipo $X_1 \circ \ldots \circ X_{n-1}$. Para mostrar que $(X_1 \circ \ldots \circ X_n)$ é operador diferencial de ordem menor ou igual a n, dado $a \in A$, devemos mostrar que o operador Δ_a, dado por

$$\Delta_a(b) = (X_1 \circ \ldots \circ X_n)(ab) - a(X_1 \circ \ldots \circ X_n)(b)$$

[4] Note que $SDer(A)$ não pode ser escrito como soma direta dos espaços $SDer^n(A)$. No entanto, temos que $SDer^r(A) \subset SDer^n(A)$, sempre que $r \leq n$. Isto define uma filtração na álgebra $SDer(A)$.

para todo $b \in A$, é operador diferencial de ordem menor ou igual a $n-1$. Temos que

$$\begin{aligned}
&\Delta_a(b)(X_1 \circ \ldots \circ X_n)(ab) - a(X_1 \circ \ldots \circ X_n)(b) = \\
&= (X_1 \circ \ldots \circ X_n)(a) \cdot b + \sum_{i=1}^{n} (X_1 \circ \ldots \circ \hat{X}_i \circ \ldots \circ X_n)(a) X_i(b) + \\
&+ \sum_{1 \le i < j \le n} (X_1 \circ \ldots \circ \hat{X}_i \circ \ldots \circ \hat{X}_j \circ \ldots \circ X_n)(a)(X_i \circ X_j)(b) + \ldots + \\
&+ \sum_{I_k} X_{\hat{I}_k}(a) X_{I_k}(b) + \ldots + \sum_{i=1}^{n} X_i(a)(X_1 \circ \ldots \circ \hat{X}_i \circ \ldots \circ X_n)(b)
\end{aligned}$$

onde I_k representa um conjunto de índices, subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$, com exatamente k elementos $\{i_1, \ldots, i_k\}$, tais que $i_1 < \ldots < i_k$, $X_{\hat{I}_k}$ representa a composta $X_1 \circ \ldots \circ \hat{X}_{i_j} \circ \ldots \circ X_n$ na qual estão ausentes todos os elementos $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$, nesta ordem, e X_{I_k} representa a composta $X_{i_1} \circ \ldots \circ X_{i_k}$. Temos então que Δ_a é um operador que age em b apenas com compostas de no máximo $n-1$ fatores. Logo $\Delta_a \in SDer^{n-1}(A)$, que por hipótese é um operador diferencial de ordem menor ou igual a $n-1$, para todo $a \in A$. Logo D é operador diferencial de ordem menor ou igual a n. Ao considerar operadores do tipo $\tilde{D} \circ X$, com $X \in Der(A)$, claramente $\tilde{D}(X(\alpha)) = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ (devidamente identificado como elemento de A). Portanto D é uma derivação de ordem menor ou igual a n. $\square$

Teorema 4.2.2. *Seja* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável de dimensão* m*. Se* D *é uma derivação de ordem menor ou igual a* r *em* $C^\infty(\mathbf{M})$*, então* $D \in SDer^r(C^\infty(\mathbf{M}))$*.*

Demonstração. Procedamos por indução. Se D é uma derivação de ordem menor ou igual a 1, então $D \in Der(C^\infty(\mathbf{M}))$ e portanto $D \in SDer^1(C^\infty(\mathbf{M}))$. Suponha o resultado válido para $r-1$. Seja D uma derivação de ordem menor ou igual a r em $C^\infty(\mathbf{M})$. Então D pode ser associada a um elemento $D \in \Gamma(J^r(\mathbf{M}))$, segundo o teorema 2.5.1. Para cada $p \in \mathbf{M}$, definamos a transformação linear $\Phi_{r,p} : I_p/I_p^{r+1} \to I_p/I_p^r$ que associa a classe do germe de uma função f em I_p/I_p^{r+1} à sua classe em I_p/I_p^r. Isto é bem definido, pois $I_p^{r+1} \subset I_p^r$ e é uma projeção, pois pela fórmula de Taylor, se f tem um representante em I_p/I_p^r, então admite um representante em I_p/I_p^{r+1} tal que $[f]_r = \Phi_{r,p}([f]_{r+1})$. Notemos que se $f \in I_p^r \ mod \ I_p^{r+1}$, então

$\Phi_{r,p}(f) = 0$ e, por outro lado, se $\Phi_{r,p}(f) = 0$, então $f \in I_p^r \; mod \; I_p^{r+1}$. Logo, $Ker(\Phi_{r,p}) \approx_{\mathbf{Vec}^{\mathbb{R}}} I_p^r/I_p^{r+1}$. Temos, naturalmente, $I_p/I_p^{r+1} \approx_{\mathbf{Vec}^{\mathbb{R}}} I_p/I_p^r \oplus I_p^r/I_p^{r+1}$.

A aplicação dual a $\Phi_{r,p}$ é $\Phi_{r,p}^* : J_p^{r-1} \to J_p^r$, dada por

$$(\Phi_{r,p}^*(u))(f) = u(\Phi_{r,p}(f))$$

lembrando que $J_p^r = (I_p/I_p^{r+1})^*$. $\Phi_{r,p}^*$ é injetora. Isto segue do fato de ser dual a uma aplicação linear sobrejetora entre espaços vetoriais, pois se $u \in J_p^{r-1}$ é tal que $\Phi_{r,p}^*(u) = 0$, então $(\Phi_{r,p}^*(u))(f) = 0$ para toda $f \in I_p/I_p^{r+1}$ e disto, $u(\Phi_{r,p}(f)) = 0$ para toda $f \in I_p/I_p^{r+1}$. Como $\Phi_{r,p}$ é sobrejetora, dada $g \in I_p/I_p^r$, existe $f \in I_p/I_p^{r+1}$ tal que $g = \Phi_{r,p}(f)$. Assim, $u(g) = 0$ para toda $g \in I_p/I_p^r$ e portanto $u = 0$.

A aplicação $\Phi_r^* : J^{r-1}(\mathbf{M}) \to J^r(\mathbf{M})$ tal que $\Phi_r^*(\xi) = \Phi_{r,\pi(\xi)}^*(\xi)$ é um morfismo de fibrados vetoriais diferenciáveis. Temos que Φ_r^* é linear em fibras e as preserva por construção. E ainda se $\xi \in J^{r-1}(\mathbf{M})$, localmente ξ se escreve

$$\xi = \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq m} \xi(x^{i_1} \ldots x^{i_k}) \frac{\partial^k}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}}$$

Mas $\Phi_r^*(\xi)$ se escreve localmente como

$$\xi = \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq m} \xi(y^{i_1} \ldots y^{i_k}) \frac{\partial^k}{\partial y^{i_1} \ldots \partial y^{i_k}}$$

pois os termos de ordem r não pertencem à imagem de Φ_r^*. Como as cartas em $J^{r-1}(\mathbf{M})$ e $J^r(\mathbf{M})$ são cartas fibradas, existe um difeomorfismo que leva a expressão de ξ em termos das coordenadas y^i e suas derivadas, na expressão de ξ em termos das coordenadas x^i e suas derivadas. Da coincidência destas expressões, segue que Φ_r^* é infinitamente diferenciável.

Dado $p \in \mathbf{M}$, pela hipótese de indução e pela inclusão acima, basta considerar derivações de ordem menor ou igual a r que em uma vizinhança de p tenham apenas termos de ordem r. Sejam η uma tal derivação e $(U, x^1, \ldots, x^m)$ uma carta local de $\mathbf{M}$ em torno de p na qual isto ocorra. De ser η derivação de ordem menor ou igual a r, temos que

$$\eta(x^{i_1} \ldots x^{i_r}) = \Delta_{i_r}(x^{i_1} \ldots x^{i_{r-1}}) + x^{i_r}\eta(x^{i_1} \ldots x^{i_{r-1}})$$

com Δ_{i_r} operador diferencial de ordem menor ou igual a $r-1$. Da escolha da carta local, temos que $\eta(x^{i_1}\dots x^{i_{r-1}})=0$, pois η possui apenas termos de ordem igual a r. Portanto

$$\eta(x^{i_1}\dots x^{i_r}) = \Delta_{i_r}(x^{i_1}\dots x^{i_{r-1}})$$

e disto decorre que Δ_{i_r} é derivação de ordem menor ou igual a $r-1$. Podemos escrever η em termos dos Δ_{i_r} assim

$$\begin{aligned}
\eta &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i_1\leq\dots\leq i_{r-1}} \frac{\eta(x^{i_1}\dots x^{i_{r-1}}x^k)}{r!}\frac{\partial^r}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_{r-1}}\partial x^k} = \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i_1\leq\dots\leq i_{r-1}} \frac{\Delta_k(x^{i_1}\dots x^{i_{r-1}})}{r!}\frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_{r-1}}}\frac{\partial}{\partial x^k} = \\
&= \sum_{k=1}^{m}\frac{\Delta_k}{r!}\frac{\partial}{\partial x^k} \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Do fato de Δ_k ser derivação de ordem menor ou igual a $r-1$, a hipótese de indução nos permite escrever

$$\Delta_k = v_k \circ u_k$$

onde v_k é um campo vetorial e u_k é uma derivação de ordem menor ou igual a $r-2$, ambos definidos em U.

Da equação 4.1, ficamos com

$$\eta = \sum_{k=1}^{m}\frac{\Delta_k}{r!}\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{k=1}^{m}\frac{(v_k\circ u_k)}{r!}\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{k=1}^{m} v_k\left(\frac{u_k}{r!}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

como o termo $\frac{u_k}{r!}\frac{\partial}{\partial x^k}$ é composta de derivações, é uma derivação, de ordem menor ou igual a $r-1$ em U. Portanto

$$\eta = \sum_{k=1}^{m} v_k \circ w_k$$

com $v_k \in \Gamma(J^1(U))$ e $w_k \in \Gamma(J^{r-1}(U))$, para cada $k=1,\dots,m$. Para não sobrecarregar a notação, denotemos isto por $\eta = v\circ u$.

Sejam $\{U_\alpha\}$ uma cobertura localmente finita de $\mathbf{M}$ e $\{\rho_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada a tal cobertura. Para cada índice α, podemos encontrar v_α e u_α como acima, tais que

$$\eta = v_\alpha \circ u_\alpha$$

Construamos os campos $\zeta \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, $\xi, \theta \in \Gamma(J^{r-1}(\mathbf{M}))$ com

$$\zeta = \sum_\lambda \rho_\lambda v_\lambda, \quad \xi = \sum_\nu \rho_\nu u_\nu, \quad \theta = \sum_\beta \gamma_\beta u_\beta$$

onde $\gamma_\beta = \sum_\alpha \rho_\alpha v_\alpha(\rho_\beta)$. Note que θ está bem definido, pois se ρ_β tem suporte em U_β, suas derivadas também têm suporte em U_β e então, dado $p \in \mathbf{M}$, $\gamma_\beta(p)$ é não nula apenas para um número finito de índices β. Temos ainda que, dada $f \in C^\infty(\mathbf{M})$,

$$\rho_\lambda v_\lambda(\rho_\nu u_\nu(f)) = \rho_\lambda \rho_\nu v_\lambda(u_\nu(f)) + \rho_\lambda v_\lambda(\rho_\nu) u_\nu(f)$$

donde

$$\rho_\lambda \rho_\nu \eta(f) = \rho_\lambda v_\lambda(\rho_\nu u_\nu(f)) - \rho_\lambda v_\lambda(\rho_\nu) u_\nu(f)$$

pois se $U_\lambda \cap U_\nu = \varnothing$, então ou ρ_λ ou ρ_ν é nula, donde $\rho_\lambda \rho_\nu v_\lambda \circ u_\nu = \rho_\lambda \rho_\nu \eta$, e se $U_\lambda \cap U_\nu \neq \varnothing$, então $u_{\nu p} = u_{\lambda p}$ em cada $p \in U_\lambda \cap U_\nu$, donde $\rho_\lambda \rho_\nu v_\lambda \circ u_\nu = \rho_\lambda \rho_\nu \eta$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\eta(f) &= \sum_{\lambda,\nu} \rho_\lambda \rho_\nu \eta(f) = \sum_{\lambda,\nu} \rho_\lambda v_\lambda(\rho_\nu u_\nu(f)) - \sum_{\lambda,\nu} \rho_\lambda v_\lambda(\rho_\nu) u_\nu(f) = \\
&= \sum_\lambda \rho_\lambda v_\lambda \left(\sum_\nu \rho_\nu u_\nu(f) \right) - \sum_\nu \gamma_\nu u_\nu(f) = \\
&= (\zeta \circ \xi)(f) - \theta(f)
\end{aligned}$$

Da hipótese de indução, $\xi, \theta \in \Gamma(J^{r-1}(\mathbf{M})$ podem ser associados a elementos de $SDer^{r-1}(C^\infty(\mathbf{M}))$, donde $\eta \in SDer^r(C^\infty(\mathbf{M}))$. Como um elemento arbitrário de $D \in \Gamma(J^r(\mathbf{M})$ é combinação linear de elementos em $\Gamma(J^{r-1}(\mathbf{M})$ e elementos de ordem r, segue que

$$D \in SDer^r(C^\infty(\mathbf{M})) \qquad \square$$

4.3 Operadores Polidiferenciais

Definição 4.3.1 (Poliderivações de uma álgebra)**.** *Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra comutativa, associativa, com unidade. Uma poliderivação de uma álgebra A é um elemento do espaço $D_{poli}(A)$, definido como a sub-álgebra de $(C^\bullet(A,A), \smile)$ gerada* *por $SDer(A)$. Denotamos $D^n_{poli}(A) = D_{poli}(A) \cap C^n(A, A)$. Denotaremos também por $D^{n,r}_{poli}(A)$ o espaço das poliderivações de grau n e ordem menor ou igual a r, ou seja, elementos de $C^n(A, A)$ que sejam poliderivações geradas por $SDer^r(A)$.*

Teorema 4.3.1. *$(D_{poli}(A), \delta_H)$ é sub-complexo filtrado de $(C^\bullet(A, A), \delta_H)$.*

Demonstração. Para descarregar a notação, denotaremos o produto da álgebra A com um ponto. Tomemos um elemento $D \in D^{n,r}_{poli}(A)$. Então D é combinação linear de elementos do tipo $D_1 \smile \ldots \smile D_n$, com $D_i \in SDer^r(A)$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Note porém que, se $D_i \in SDer^r(A)$, então é combinação linear de elementos do tipo $X^i_1 \circ \ldots \circ X^i_j$, $j \leq r$, com $X^i_j \in Der(A)$, para todo $i = 1, \ldots, n$, para todo $j \leq r$. Então, se $a, b \in A$

$$\begin{aligned} &\delta_H(X^i_1 \circ \ldots \circ X^i_j)(a \otimes b) = \\ &= a(X^i_1 \circ \ldots \circ X^i_j)(b) - (X^i_1 \circ \ldots \circ X^i_j)(ab) + (X^i_1 \circ \ldots \circ X^i_j)(a)b = \\ &= -\sum_{k=1}^{j-1} \sum_{I_k} (X^i_{\hat{I}_k})(a)(X^i_{I_k})(b) \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde I_k denota um conjunto de índices, subconjunto de $\{1, \ldots, j\}$, com exatamente k elementos $l_1, \ldots, l_k$ tais que $l_1 < \ldots < l_k$, para $k \leq j$, $X^i_{\hat{I}_k}$ denota a composta $X^i_1 \circ \ldots \circ \hat{X}^i_{l_s} \circ \ldots \circ X^i_j$, na qual estão ausentes todos os elementos $X^i_{l_s}$, $l_s \in I_k$, em ordem, e $X^i_{I_k}$ denota a composta $X^i_{l_1} \circ \ldots \circ X^i_{l_k}$ nesta ordem.

Assim, $\delta_H(X^i_1 \circ \ldots \circ X^i_j) \in D^{2,j-1}_{poli}(A)$. Como δ_H é uma derivação de grau 1 de $(C^\bullet(A, A), \smile)$, segue que

$$\delta_H(D_1 \smile \ldots \smile D_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} D_1 \smile \ldots \smile \delta_H(D_i) \smile \ldots \smile D_n \tag{4.3}$$

Por linearidade, $D \in D^{n,r}_{poli}(A)$, resulta $\delta_H(D) \in D^{n+1,r}_{poli}(A)$. Isto mostra que $(D_{poli}(A), \delta_H)$ é subcomplexo de $(C^\bullet(A, A), \delta_H)$ e ainda, filtrado pela ordem da derivação. $\square$

Definição 4.3.2 (Alternador em $D^{n,r}_{poli}(A)$)**.** *Se A é uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa, comutativa, com unidade e o corpo $\mathbb{K}$ tem característica zero, definimos para $n \geq 1$,* *a aplicação linear* $Alt : D^{n,r}_{poli}(A) \to D^{n,r}_{poli}(A)$ *dada em elementos decomponíveis por*

$$Alt(D_1 \smile \ldots \smile D_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) D_{\sigma(1)} \smile \ldots \smile D_{\sigma(n)}$$

onde σ *denota uma permutação de* S_n*, o conjunto de todas as permutações de* n *elementos, e* $\varepsilon(\sigma)$ *denota o sinal da permutação.*

Proposição 4.3.1. *Seja* $D \in D^{n,r}_{poli}(C^\infty(\mathbf{M}))$ *tal que* D *é fechado pelo diferencial de Hochschild. Então existem uma cocadeia* $E \in D^{n-1,r+1}_{poli}(C^\infty(\mathbf{M}))$ *e um elemento* $\eta \in MDer^n(C^\infty(\mathbf{M}))$ *alternado, tais que*

$$D = \delta_H(E) + \eta \tag{4.4}$$

A demonstração desta proposição é deixada para o apêndice A.

Notação 4.3.1. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa, comutativa, com unidade. Denotaremos por $\mathcal{D}(A) = A \oplus D_{poli}(A)$. Note que $(\mathcal{D}(A), \delta_H)$ é sub-complexo do complexo de Hochschild $(C^\bullet(A, A), \delta_H)$.

Teorema 4.3.2 (O teorema de Hochschild-Kostant-Rosemberg para variedades diferenciáveis[5])**.** *Seja* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável de dimensão* m*. Os complexos* $(\mathcal{D}(C^\infty(\mathbf{M})), \delta_H)$ *e* $(\Omega_\bullet(\mathbf{M}), d)$*, onde* $d : \Omega_\bullet(\mathbf{M}) \to \Omega_\bullet(\mathbf{M})$ *é o diferencial identicamente nulo, são quase-isomorfos.*

Demonstração. Seja $Alt(MDer^n(C^\infty(\mathbf{M})))$ a imagem do alternador em $MDer^n(C^\infty(\mathbf{M})) = D^{n,1}_{poli}(C^\infty(\mathbf{M}))$. Definamos a aplicação linear $\psi : \Omega_n(\mathbf{M}) \to Alt(MDer^n(C^\infty(\mathbf{M})))$ dada em elementos decomponíveis por

$$\psi(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) = Alt(X_1 \smile \ldots \smile X_n)$$

para $n \geq 1$. Note que ψ preserva fibras. Vejamos que ψ é injetora. Seja $\eta \in \Omega_n(\mathbf{M})$ tal que $\psi(\eta) = 0$. Em cada ponto $p \in \mathbf{M}$, η_p se escreve como combinação linear de elementos de uma base para $\Lambda_p(T_p\mathbf{M})$, que são do tipo $X_{i_1 p} \wedge \ldots \wedge X_{i_n p}$. Porém

$$\psi(X_{i_1 p} \wedge \ldots \wedge X_{i_n p}) = Alt(X_{i_1 p} \smile \ldots \smile X_{i_n p}) = Alt(X_{i_1 p} \otimes \ldots \otimes X_{i_n p}) =$$
$$= X_{i_1 p} \wedge \ldots \wedge X_{i_n p}$$

[5] Esta demonstração segue a técnica exposta em [3]

pois em cada ponto o produto $\smile$ coincide com o produto tensorial, dado que cada X_{ip} pode ser encarado como um funcional linear. Portanto, $\psi(\eta) = 0$ resulta em $\eta_p = 0$ para todo ponto p, logo $\eta = 0$. Vejamos que ψ é sobrejetora. Seja $N \in Alt(MDer^n(C^\infty(\mathbf{M})))$. Por linearidade, basta considerar N do tipo $\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)X_{\sigma(1)} \smile \ldots \smile X_{\sigma(n)}$. Tomamos então $\eta \in \Omega_n(\mathbf{M})$ como $X_1 \wedge \ldots \wedge X_n$. Segue que

$$\psi(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) = Alt(X_1 \smile \ldots \smile X_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)X_{\sigma(1)} \smile \ldots \smile X_{\sigma(n)}$$

Por linearidade, $\psi(\eta) = N$. Assim, podemos associar elementos alternados em $MDer^n(C^\infty(\mathbf{M}))$ a campos de n-vetores de maneira biunívoca. A partir de agora, não faremos mais distinção entre tais elementos. Chamemos J_n a família de aplicações que tomam cocadeias $D \in D^{n,r}_{poli}(C^\infty(\mathbf{M}))$ e as levam em $J_n(D) = Alt(D)$, para $n \geq 1$ e J_0 a identidade em $C^\infty(\mathbf{M})$. Como $C^\infty(\mathbf{M})$ é comutativa, δ_H é identicamente nulo em $C^\infty(\mathbf{M})$. Logo, $J_1 \circ \delta_H = d \circ J_0$. Seja D um n-cobordo, $n > 1$. Então existe E, uma $(n-1)$-cocadeia tal que $D = \delta_H(E)$. As fórmulas 4.2 e 4.3 nos mostram que $\delta_H(E)$ é combinação linear de termos que são simétricos em duas entradas, logo só pode ser $Alt(\delta_H(E)) = 0$. Segue que $J_n \circ \delta_H = d \circ J_{n-1}$, pois d é identicamente nulo. Assim, cada J_n induz um morfismo em cohomologia $J_n^* : H^n(\mathcal{D}(C^\infty(\mathbf{M}))) \to H^n(\Omega_n(\mathbf{M}))$.

Do fato de $(\Omega_n(\mathbf{M}), d)$ ser dotado do diferencial identicamente nulo, temos que $H^n(\Omega_n(\mathbf{M}))$ é isomorfo como $\mathbb{R}$-espaço vetorial a $\Omega_n(\mathbf{M})$, para todo $n \geq 0$.

Claramente, J_0^* é isomorfismo. Seja D um n-cociclo, $n \geq 1$. Da proposição 4.3.1 temos que $D = \delta_H(E) + \eta$, para E uma $(n-1)$-cocadeia e $\eta \in \Omega_n(\mathbf{M})$. Disto decorre que se $\theta \in H^n(D_{poli}(C^\infty(\mathbf{M})))$, cujo representante em $D_{poli}(C^\infty(\mathbf{M}))$ é D, D pode ser escrito como $D = \delta_H(E) + \eta$ e então

$$J_n^*(\theta) = [J_n(D)] = [J_n(\delta_H(E) + \eta)] = [\eta] = \eta$$

Temos que J_n^* é injetora. De fato, se θ é tal que $J_n^*(\theta) = 0$, então $[J_n(D)] = 0$, e portanto $J_n(\delta_H(E) + \eta) = J_n(\eta) = 0$ resultando em $\eta = 0$, pois $J_n(\eta) = \eta$. Logo, $D = \delta_H(E)$ e então θ é a classe nula. J_n^* é sobrejetora. Para verificar isto, basta notar que $\Omega_n(\mathbf{M})$ é isomorfo a $Alt(MDer^n(C^\infty(\mathbf{M})))$, que está contido em $MDer^n(C^\infty(\mathbf{M}))$ que por sua vez está contido em $D^{n,r}_{poli}(C^\infty(\mathbf{M}))$, para todo $r \geq 1$. Então, dado $\eta \in \Omega_n(\mathbf{M})$, o associamos a $\eta \in D^{n,r}_{poli}(C^\infty(\mathbf{M}))$. Mas pelo teorema 4.1.1, η é um n-cociclo. Assim, $J_n(\eta) = \eta$. Note ainda que, do fato de ser η alternado e tendo em vista as fórmulas 4.2 e 4.3, η não pode ser um cobordo e portanto a classe de η em $H^n(D_{poli}(C^\infty(\mathbf{M})))$ é não nula. Segue que J_n^* é um isomorfismo em cohomologia para todo n e assim $(\mathcal{D}(C^\infty(\mathbf{M})), \delta_H)$ e $(\Omega_\bullet(\mathbf{M}), d)$ são quase-isomorfos. $\square$

4.4 Epílogo

É possível mostrar que para uma $\mathbb{R}$-álgebra associativa, comutativa, com unidade A, $\mathcal{D}(A)$ é fechado para o colchete de Gerstenhaber. É sabido que $(C^\bullet(A, A), [\ ,\ ]_G)$, onde $[\ ,\ ]_G$ denota o colchete de Gerstenhaber, é uma super-álgebra de Lie (com grau reduzido). Definindo o diferencial $\delta : C^\bullet(A, A) \to C^{\bullet+1}(A, A)$ como a aplicação linear que, para $f \in C^m(A, A)$, é dada por $\delta(f) = (-1)^{m-1}\delta_H(f)$ e adicionando-se isto à proposição 4.1.3, da identidade de Jacobi segue que δ é uma derivação de grau 1 da super-álgebra de Lie $(C^\bullet(A, A), [\ ,\ ]_G)$. Uma super-álgebra de Lie é dita *super-álgebra de Lie diferencial*, quando existe uma derivação de grau 1 d da super-álgebra de Lie que é também um diferencial, ou seja, $d^2 = 0$. Assim, $(C^\bullet(A, A), [\ ,\ ]_G, \delta)$ é uma super-álgebra de Lie diferencial [6]. Além do mais, o colchete de Gerstenhaber é uma derivação de grau -1 com relação ao produto $\smile$.

Por outro lado, se $\mathbf{M}$ é uma variedade diferenciável, $[\ ,\ ]_{NS}$ o colchete de Nijenhuis-Schouten em $\Omega_\bullet(\mathbf{M})$, é o único colchete para o qual $\Omega_\bullet(\mathbf{M})$ adquire estrutura de super-álgebra de Lie e ainda é uma derivação de grau -1 com relação ao produto $\wedge$. Ao tomar o diferencial nulo $d = 0$ em $\Omega_\bullet(\mathbf{M})$, temos que $(\Omega_\bullet(\mathbf{M}), [\ ,\ ]_{NS}, d)$ é uma super-álgebra de Lie diferencial. O teorema 4.3.2 permite relacionar, em cohomologia, as super-álgebras de Lie diferenciais $(\mathcal{D}(C^\infty(\mathbf{M})), [\ ,\ ]_G, \delta)$ e $(\Omega_\bullet(\mathbf{M}), [\ ,\ ]_{NS}, d)$. Notemos que o colchete de Gerstenhaber induzido $[\ ,\ ]_{\bar{G}}$ torna $(H^\bullet(\mathcal{D}(C^\infty(\mathbf{M}))), [\ ,\ ]_{\bar{G}})$ uma super-álgebra de Lie, o diferencial induzido $\bar{\delta}$ é uma derivação de grau 1 desta super-álgebra de Lie e $[\ ,\ ]_{\bar{G}}$ é uma derivação de grau -1 com relação ao produto $\wedge$, que é o produto induzido de $\smile$ em cohomologia. Então $[\ ,\ ]_{\bar{G}}$ é o colchete de Nijenhuis-Schouten em $\Omega_\bullet(\mathbf{M})$.

A relação entre as super-álgebras de Lie acima citadas, motiva o estudo das relações entre modelos geométricos e estruturas algébricas. Uma variedade de Poisson, por exemplo, possui uma estrutura algébrica, o colchete de Poisson, que permite expressar equações de evolução em sistemas hamiltonianos. Podemos associar a tal colchete um tensor de Poisson B, que deve satisfazer $[B, B]_{NS} = 0$. Disto inferimos que as propriedades do colchete de Gerstenhaber na cohomologia de Hochschild dos operadores polidiferenciais nos fornece informações sobre as propriedades de campos de polivetores sobre uma variedade diferenciável, que por sua vez se relacionam com a dinâmica presente em tal variedade, como por exemplo, se tal variedade possui ou não estrutura de Poisson, uma vez escolhido um campo de bivetores.

Um dos possíveis desdobramentos desta relação é o estudo de álgebras não comutativas a partir de modelos geométricos não comutativos, através de deformações de álgebras associativas e comutativas, como feito em [4]. Tal relação também é central no estudo de quantização de variedades de Poisson, por deformação da álgebra de Poisson associada, como mostra [12].

Apêndice A

O objetivo desta seção é demonstrar a proposição 4.3.1. Tal proposição permite escrever um cociclo do complexo de Hochschild das poliderivações da álgebra $C^{\infty}(\mathbf{M})$, das funções infinitamente diferenciáveis sobre uma variedade diferenciável $\mathbf{M}$, como soma de um cobordo e uma multiderivação alternada. Em outras palavras, todo cociclo é coomólogo a uma multiderivação alternada. A demonstração[1] será precedida de duas proposições auxiliares. De agora em diante, A denotará a $\mathbb{R}$-álgebra $C^{\infty}(\mathbf{M})$. O produto em A será denotado por justaposição. $MDer(A)$ é o espaço das multiderivações em A, $D_{poli}(A)$ é o espaço das poliderivações em A e δ_H denota o diferencial de Hochschild.

Lema A.0.1. *Seja $C \in MDer^n(A)$. Então existem $E \in D_{poli}^{n-1,2}(A)$ e $\omega \in Alt(MDer^n(A))$ tais que*

$$C = \delta_H(E) + \omega$$

Demonstração. Para $n = 1$ o resultado é trivial. Seja $C \in MDer^n(A)$, com $n \geq 2$. Então C é combinação linear de elementos do tipo

$$X_1 \smile \ldots \smile X_n$$

com $X_i \in Der(A)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Para cada $i = 1, \ldots, n-1$, seja $\Phi_i : MDer^n(A) \to D_{poli}^{n-1,2}(A)$, dada em elementos decomponíveis por

$$\Phi_i(X_1 \smile \ldots \smile X_n) = (-1)^i (X_1 \smile \ldots \smile (X_i \circ X_{i+1}) \smile \ldots \smile X_n)$$

[1]Esta demonstração segue o que foi feito em [11]

e estendida por linearidade. Segue das propriedades de δ_H que

$$\delta_H(\Phi_i(X_1 \smile \ldots \smile X_n)) = -(X_1 \smile \ldots \smile \delta_H(X_i \circ X_{i+1}) \smile \ldots \smile X_n) =$$
$$= X_1 \smile \ldots \smile X_i \smile X_{i+1} \smile \ldots \smile X_n + X_1 \smile \ldots \smile X_{i+1} \smile X_i \smile \ldots \smile X_n$$

Denotando por τ_i a troca de elementos nas posições consecutivas i e $i+1$, podemos escrever

$$\delta_H(\Phi_i(X_1 \smile \ldots \smile X_n)) = X_1 \smile \ldots \smile X_n + \tau_i X_1 \smile \ldots \smile X_n$$

que, por linearidade, resulta em

$$\delta_H(\Phi_i C) = C + \tau_i C$$

Então, para transposições consecutivas τ_i e τ_j, vale

$$\begin{aligned}
\delta_H(\Phi_i(\tau_j C) - \Phi_j C) &= \delta_H(\Phi_i(\tau_j C)) - \delta_H(\Phi_j C) = \\
&= \tau_j C + \tau_i \cdot \tau_j C - C - \tau_j C = \\
&= \tau_i \cdot \tau_j C - C
\end{aligned}$$

Seja σ uma permutação de $\{1, \ldots, n\}$, ou seja, $\sigma \in S_n$. Então σ pode ser escrita como composta de um número finito de transposições consecutivas. Escrevamos $\sigma = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_k}$. Definamos a aplicação Φ_σ, construída a partir desta permutação, por

$$\Phi_\sigma(C) = \Phi_{i_1 \ldots i_k}(C) = \Phi_{i_1}(\tau_{i_2} \cdots \tau_{i_k} C) - \Phi_{i_2 \ldots i_k}(C) =$$
$$= \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l+1} \Phi_{i_l}(\tau_{i_{l+1}} \cdots \tau_{i_k} C)$$

Com isto, temos que

$$\delta_H(\Phi_\sigma(C)) = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l+1} (\tau_{i_{l+1}} \cdots \tau_{i_k} C + \tau_{i_l} \cdots \tau_{i_k} C) = \sigma \cdot C + (-1)^{k+1} C$$

Denotando o sinal da permutação σ por $\varepsilon(\sigma)$, ficamos com

$$\varepsilon(\sigma)\delta_H(\Phi_\sigma(C)) = \varepsilon(\sigma)\sigma \cdot C - C$$

Tomando
$$\Phi(C) = -\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\Phi_\sigma(C)$$
temos que
$$\begin{aligned}\delta_H(\Phi(C)) &= -\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\delta_H(\Phi_\sigma(C)) = \\ &= -\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}(\varepsilon(\sigma)\sigma\cdot C - C) = \\ &= C - \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\sigma\cdot C\end{aligned}$$
mostrando que
$$C = \delta_H(\Phi(C)) + \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\sigma\cdot C$$
□

Lema A.0.2. *Sejam* $\mathbf{M} = \mathbb{R}^m$ *e* $C \in D^{n,r}_{poli}(A)$ *tal que* $\delta_H C = 0$. *Então existem* $E \in D^{n-1,r+1}_{poli}(A)$ *e* $\omega \in Alt(MDer^n(A))$ *tais que*
$$C = \delta_H(E) + \omega$$

Demonstração. Procedamos por indução no grau da derivação. Se C tem grau 1, então $\delta_H(C) = 0$ significa que
$$C(ab) = C(a)b + aC(b)$$
ou seja, $C \in Der(A)$ donde podemos tomar $E = 0$ e $\omega = C$. Suponha o resultado válido para $n-1$. Seja um cobordo $C \in D^{n,r}_{poli}(A)$, com $n > 1$. Então C pode ser escrito como
$$C = \sum_{|I_1|=r}\frac{\partial^r}{\partial x^{I_1}} \smile D_{I_1} + \tilde{C}$$
onde $I_1 = (i_1, \ldots, i_r)$ é um multi-índice que denota quais derivadas parciais compõem o operador diferencial, $|I_1|$ denota a ordem do multi-índice (quantos elementos possui) e $\tilde{C}$ é a parte de C com ordem menor que r no primeiro argumento. Não há prejuízo à argumentação ao supor $|I_1| = r$.

Como $\delta_H C = 0$, temos que

$$\sum_{|I_1|=r} \frac{\partial^r}{\partial x^{I_1}} \smile \delta_H D_{I_1} + C' = 0$$

onde C' contém os termos de $\delta_H C$ cujas ordens de derivação na primeira entrada são inferiores a r. Assim, C é um n-cociclo no qual os coeficientes de maior ordem na primeira entrada constituem $(n-1)$-cociclos. Da hipótese de indução, podemos escrever $D_{I_1} = \delta_H(E_{I_1}) + F_{I_1}$, com $E_{I_1} \in D_{poli}^{n-2,r+1}(A)$ e $F_{I_1} \in Alt(MDer^{n-1}(A))$. Façamos

$$G = \sum_{|I_1|=r} \frac{\partial^r}{\partial x^{I_1}} \smile E_{I_1}$$

Temos então que

$$\bar{C} := C + \delta_H G = \sum_{|I_1|=r} \frac{\partial^r}{\partial x^{I_1}} \smile F_{I_1} + \tilde{C} + \sum_{|I_1|=r} \delta_H \left(\frac{\partial^r}{\partial x^{I_1}} \right) \smile E_{I_1}$$

que também é um cociclo. Chamando

$$H = \tilde{C} + \sum_{|I_1|=r} \delta_H \left(\frac{\partial^r}{\partial x^{I_1}} \right) \smile E_{I_1}$$

vemos que H possui apenas termos de ordem estritamente menor do que r na primeira entrada. Nossa intenção é mostrar que é possível escrever C como soma de um cobordo e de um elemento cuja ordem de derivação na primeira entrada é estritamente menor que r. Para tanto, escrevamos

$$H = \sum_{I_1,\ldots,I_n} H_{I_1,\ldots,I_n} \frac{\partial^{|I_1|}}{\partial x^{I_1}} \smile \ldots \smile \frac{\partial^{|I_n|}}{\partial x^{I_n}}$$

e

$$R = \sum_{|I_1|=r} \frac{\partial^r}{\partial x^{I_1}} \smile F_{I_1} = \sum_{I_1,i_2,\ldots,i_n} \frac{\partial^r}{\partial x^{I_1}} \smile \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \smile \ldots \smile \frac{\partial}{\partial x^{i_n}}$$

Como $\delta_H(\bar{C}) = 0$ e $\bar{C} = R + H$, das propriedades do diferencial de Hochschild, temos que

$$\sum_{I_1,i_2,\ldots,i_n} \delta_H \left(\frac{\partial^r}{\partial x^{I_1}} \right) \smile \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \smile \ldots \smile \frac{\partial}{\partial x^{i_n}} +$$
$$+ \sum_{I_1,\ldots,I_n} H_{I_1,\ldots,I_n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial^{|I_1|}}{\partial x^{I_1}} \smile \ldots \smile \delta_H \left(\frac{\partial^{|I_k|}}{\partial x^{I_k}} \right) \smile \ldots \smile \frac{\partial^{|I_n|}}{\partial x^{I_n}} = 0$$

resulta em

$$rR_{\bar{I}_1,i_1,\dots,i_n} + 2\sum_{l=1}^{n-1} H_{\bar{I}_1,i_1,\dots,\{i_l,i_{l+1}\},\dots,i_n} = 0$$

onde $\bar{I}_1$ denota o multi-índice que surge da redução de I_1 em uma ordem e os colchetes $\{\}$ denotam os índices que são simétricos, ambos efeitos devidos à ação do diferencial de Hochschild. Os demais termos de H não nos fornecem informação para nossos propósitos. Tomando todas as permutações nas últimas n entradas, alternando e somando, ficamos com

$$\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) R_{\bar{I}_1,\sigma(i_1),\dots,\sigma(i_n)} = 0$$

De ser R anti-simétrico nas últimas $n-1$ entradas, segue que

$$R_{(I_1,i_1),i_2,\dots,i_n} = \sum_{s=2}^{n} (-1)^s R_{(I_1,i_s),i_2,\dots,\hat{i}_s,\dots,i_n}$$

onde (I_1, i_s) denota o multi-índice $\bar{I}_1$ acrescido do índice i_s e $\hat{i}_s$ denota a ausência de i_s na lista. Da simetria no primeiro multi-índice, ficamos com

$$rR_{I_1,i_2,\dots,i_n} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{s=2}^{n} (-1)^s R_{(I_1,i_s),i_2,\dots,\hat{i}_s,\dots,i_n}$$

Fazendo

$$K_{(I_1,i_s),i_2,\dots,\hat{i}_s,\dots,i_n} = R_{I_1,i_s,i_2,\dots,\hat{i}_s,\dots,i_n} + \sum_{k=1}^{r} R_{(I_1;\hat{i}_r),i_r,i_2,\dots,\hat{i}_s,\dots,i_n}$$

onde $(I_1; \hat{i}_r)$ denota o multi-índice obtido ao retirar-se i_r de I_1, temos que

$$\sum_{s=2}^{n} (-1)^s K_{(I_1,i_s),i_2,\dots,\hat{i}_s,\dots,i_n} = (r+n-1) R_{I_1,i_2,\dots,i_n}$$

Entretanto, é possível escrever

$$\sum_{s=2}^{n} (-1)^s K_{(I_1,i_s),i_2,\dots,\hat{i}_s,\dots,i_n} = (n-1) K_{I_1,i_2,\dots,i_n} +$$
$$+ \sum_{t=3}^{n} (-1)^t (n+1-t)(K_{I_1,i_t,i_2,\dots,\hat{i}_t,\dots,i_n} + K_{I_1,i_{t-1},i_2,\dots,\hat{i}_{t-1},\dots,i_n})$$

Notemos agora que, ao aplicar o diferencial de Hochschild a termos do tipo

$$K_{I_1,i_2,\ldots,i_n}\frac{\partial^{|I_1|}}{\partial x^{I_1}}\frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \smile \frac{\partial}{\partial x^{i_3}} \smile \ldots \smile \frac{\partial}{\partial x^{i_n}}$$

obteremos termos correspondentes a termos do tipo

$$K_{I_1,i_2,\ldots,i_n}\frac{\partial^{|I_1|}}{\partial x^{I_1}} \smile \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \smile \ldots \smile \frac{\partial}{\partial x^{i_n}}$$

e ao aplicar o diferencial de Hochschild a termos do tipo

$$(K_{I_1,i_t,i_2,\ldots,\hat{i}_t,\ldots,i_n} + K_{I_1,i_{t-1},i_2,\ldots,\hat{i}_{t-1},\ldots,i_n}) \frac{\partial^{|I_1|}}{\partial x^{I_1}} \smile \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \smile \ldots \smile \frac{\partial^2}{\partial x^{i_{t-1}}\partial x^{i_t}} \smile \ldots \smile \frac{\partial}{\partial x^{i_n}}$$

obteremos termos correspondentes a termos do tipo

$$(K_{I_1,i_t,i_2,\ldots,\hat{i}_t,\ldots,i_n} + K_{I_1,i_{t-1},i_2,\ldots,\hat{i}_{t-1},\ldots,i_n}) \sum_{t=3}^{n}(-1)^t\frac{\partial^{|I_1|}}{\partial x^{I_1}} \smile \ldots \smile \frac{\partial}{\partial x^{i_{t-1}}} \smile \frac{\partial}{\partial x^{t}} \ldots \smile \frac{\partial}{\partial x^{i_n}}$$

e simétricos. Portanto é possível construir um elemento K tal que $\delta_H K$ envolva todos os termos de R, sem que adicione termos de ordem maior ou igual a r. Isso mostra que existe uma cocadeia G' tal que $C - \delta_H(G')$ tem derivadas parciais de ordem estritamente menor do que r na primeira entrada. Iterando este procedimento se necessário, é possível construir uma cocadeia G tal que $C' = C - \delta_H G$ é de primeira ordem na primeira entrada. No que segue, basta considerarmos cociclos C da forma

$$C = \sum_i X_i \smile D_i$$

onde $X_i \in Der(A)$. Pelo mesmo argumento utilizado no início desta demonstração, $\delta_H C = 0$ fornece $\delta_H D_i = 0$, e a hipótese de indução novamente nos dá $D_i = \delta_H E_i + F_i$, com E uma $(n-2)$-cocadeia e F_i multiderivação alternada de grau $n-1$. Assim,

$$\begin{aligned} C &= \sum_i X_i \smile D_i = \sum_i X_i \smile \delta_H E_i + \sum_i X_i \smile F_i = \\ &= -\delta_H\left(\sum_i X_i \smile E_i\right) + \sum_i X_i \smile F_i \end{aligned}$$

Como $X_i \smile F_i \in MDer^n(A)$, o lema anterior fornece $X_i \smile F_i = \delta_H \bar{B}_i + \omega_i$, donde

$$C = \delta_H \left(\sum_i (B_i - X_i \smile E_i) \right) + \omega \qquad \square$$

Temos então o seguinte

Teorema A.0.1. *Seja* $\mathbf{M}$ *uma variedade diferenciável. Se* $C \in D^{n,r}_{poli}(A)$ *é um cociclo, então existem* $E \in D^{n-1,r+1}_{poli}(A)$ *e* $\omega \in MDer^n(A)$ *tais que*

$$C = \delta_H E + \omega$$

Demonstração. Seja C um n-cociclo. Tomemos uma cobertura aberta de $\{U_\alpha\}$ de $\mathbf{M}$ e uma partição da unidade $\{\rho_\alpha\}$ subordinada a esta cobertura. Então podemos escrever

$$C = \sum_\alpha \rho_\alpha C$$

com cada $\rho_\alpha C$ um cociclo com suporte em U_α. O lema anterior garante que, para cada α, existem E_α e ω_α tais que

$$\rho_\alpha C = \delta_H E_\alpha + \omega_\alpha$$

que, por construção, têm suporte em U_α. Disto segue que

$$E = \sum_\alpha E_\alpha$$

e

$$\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha$$

são objetos bem definidos, $E \in D^{n-1,r+1}_{poli}(A)$, ω é anti-simétrico e pertencente a $MDer^n(A)$, tais que

$$C = \delta_H E + \omega \qquad \square$$

Referências Bibliográficas

[1] Arnold, V. I. *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*, Editora Mir, Moscovo, 1987.

[2] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerovicz, A., Sternheimer, D.: Deformation theory and quantization, *Ann. Phys.*, 111:61-151, 1978.

[3] Cahen, M., De Wilde, M., Gutt, S.: Local cohomology of the algebra of C^∞ functions on a connected manifold, *Lett. in Math. Phys.*, 4:157-167, 1980.

[4] Cannas da Silva, A., Weinstein, A. *Geometric Models for Noncommutative Algebras*, University of California, Berkeley, 1998.

[5] Carmo, M. P. do *Geometria Riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.

[6] Doubek, M., Markl, M., Zima, P.: Deformation theory (lecture notes), *Archivum Mathematicum*, 43(5):333-371, 2007, arXiv:0705.3719v3[math.AG].

[7] Fedosov, B.: A simple geometrical construction of deformation quantization, *J. Differential Geom.*, 40:213-238, 1994.

[8] Forger, M., Paufler, C., Römer, H.: The Poisson Bracket for Poisson Forms in Multisymplectic Field Theory, *Rev. Math. Phys.*, 15(7):705-743, 2003.

[9] Gelfand, S. I., Manin, Yu. I. *Methods of Homological Algebra*, Springer, New York, 2003.

[10] Gerstenhaber, M.: The cohomology structure of an associative ring, *Ann. of Math.*, 78(2):267-288, 1963.

[11] Gutt, S., Rawnsley, J.: Equivalence of star products on a symplectic manifold: an introduction to Deligne's Čech cohomology classes, *J. Geom. Phys.*, 29:347-392, 1999.

[12] Kontsevich, M.: Deformation quantization of Poisson manifolds, *Lett. in Math. Phys.*, 66:157-216, 2003.

[13] Kostrikin, A. I., Manin, Yu. I. *Linear Algebra and Geometry*, CRC Press, 1989.

[14] Kostrikin, A. I., Shafarevich I. R. *Basic Notions of Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[15] Kostrikin, A. I., Shafarevich I. R. *Algebra V: homological algebra*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[16] Lang, S. *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[17] Lee, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[18] Lima, E. L. *Curso de Análise, Vol. 2*, IMPA, Rio de Janeiro, 1999.

[19] Lima, E. L. *Homologia Básica*, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

[20] Lyubich, Yu. I. *Functional Analysis I: linear functional analysis*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[21] Mac Lane, S. *Homology*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[22] Mac Lane, S., Birkhoff, G. *Algebra*, AMS Chelsea Publishing, Providence, 1999.

[23] Marsden, J. E., Ratiu, T. *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, Springer-Verlag, 1999.

[24] Oliveira, C. R. *Introdução à Análise Funcional*, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.

[25] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 1, Publish or Perish, Houston, 1999.

[26] Warner, F. W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1983.