

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Fernando Araujo Borges

Sequência de Auslander-Reiten para Álgebras de Hopf

Curitiba, 2010.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Fernando Araujo Borges

Sequência de Auslander-Reiten para Álgebras de Hopf

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Matemática, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves

Co-orientador: Prof. Dr. Edson Ribeiro Alves

Curitiba, 2010.

Resumo

Nesta dissertação, trataremos o problema de obter uma sequência de Auslander-Reiten para um módulo M sobre uma álgebra de Hopf, sendo conhecida a sequência de Auslander-Reiten terminando no módulo trivial. Auslander e Carlson provam em [3], entre outros resultados, que se o módulo trivial é um somando direto de $\text{End}_K(M)$ então a sequência exata obtida da sequência de Auslander-Reiten do módulo trivial tensorizando por M é equivalente a uma sequência de Auslander-Reiten de M , módulo um fator injetivo. Em [6], Green, Marcos e Solberg estendem para álgebras de Hopf de dimensão finita sobre um corpo K , e com antípoda involutiva, vários resultados provados por Auslander e Carlson, sendo o principal deles a resolução do problema acima no caso em que a antípoda de H é involutiva.

Palavras-chave: Sequências de Auslander-Reiten, Álgebras de Hopf, sequências quase cindidas.

Abstract

In this work, we address the problem of obtaining an Auslander-Reiten sequence for a module M over a Hopf algebra H starting from the Auslander-Reiten sequence that ends at the trivial module. Auslander and Carlson have proved in [3], among other results, that if the trivial module is a direct summand of $End_k(M)$ then the exact sequence obtained from tensoring the ARS of the trivial module by M is equivalent to an ARS of M , modulo an injective factor. In [6], Green, Marcos and Solberg extend to finite dimensional Hopf algebras, with involutive antipode, several results of Auslander and Carlson, the main result being the resolution of the problem above in the case that H has an involutive antipode.

Keywords: Auslander-Reiten sequences, Hopf Algebras, almost split sequences.

Sumário

Resumo	i
Abstract	ii
1 Preliminares	3
1.1 Álgebras e Módulos	3
1.2 Produto Fibrado e Soma Amalgamada	10
1.3 Álgebras de Frobenius e Simétricas	12
1.4 Defeito de Sequências Exatas	13
2 Categorias de Módulos e Comódulos	19
2.1 Biálgebras e Álgebras de Hopf	19
2.2 Módulos e Comódulos	28
2.3 Integrais e Semi-Simplicidade	35
2.4 Homomorfismos	40
2.5 Cocomutatividade e Semi-Simplicidade.	50
3 Teoria de Auslander-Reiten	55
3.1 A Translação de Auslander-Reiten	55
3.2 Sequência de Auslander-Reiten	57
3.3 Sequência de Auslander Reiten para Álgebras de Grupo	62
3.4 Sequência de Auslander-Reiten para Álgebras de Hopf	67

Introdução

Nesta dissertação, estudaremos como obter uma sequência de Auslander-Reiten para um H -módulo M indecomponível não projetivo a partir de uma sequência de Auslander-Reiten para o módulo trivial, onde H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo K , com antípoda involutiva. Mais precisamente, o corpo K tem uma estrutura canônica de H -módulo, que chamamos de módulo trivial e, se

$$\delta : 0 \rightarrow \tau(K) \rightarrow E \rightarrow K \rightarrow 0$$

é uma sequência de Auslander-Reiten, podemos obter a sequência exata

$$M \otimes_K \delta : 0 \rightarrow M \otimes_K \tau(K) \rightarrow M \otimes_K E \rightarrow M \rightarrow 0$$

aplicando o funtor $M \otimes_K -$ na sequência exata δ e usando o fato que M e $M \otimes_K K$ são isomorfos como H -módulos. Estamos interessados em verificar sob quais condições a sequência exata $M \otimes_K \delta$ é uma sequência de Auslander-Reiten. Auslander e Carlson provam em [3], entre outros resultados, que se o módulo trivial K é um somando direto de $\text{End}_K(M)$ então a sequência exata $M \otimes_K \delta$ é equivalente a uma sequência de Auslander-Reiten módulo um fator injetivo. Em [6], Green, Marcos e Solberg estendem para álgebras de Hopf de dimensão finita sobre um corpo K vários resultados provados por Auslander e Carlson em [3], sendo o principal deles a resolução do problema acima no caso em que a antípoda de H é involutiva. Desenvolveremos nesta dissertação toda a teoria básica de álgebras de Hopf e a parte essencial da teoria de Auslander-Reiten necessárias para resolver este problema.

No capítulo 1, apresentaremos os conceitos básicos que estaremos usando durante este trabalho e alguns resultados técnicos necessários.

O capítulo 2 é dedicado à teoria básica de álgebras de Hopf, seguindo [8], [7] e [5]. Entre os principais resultados, estão o teorema fundamental dos módulos de Hopf e o teorema de Maschke para álgebras de Hopf, que caracteriza quando a álgebra é semi-simples. Mostraremos também que uma álgebra de Hopf de dimensão finita é uma álgebra de Frobenius. Este fato vai ser importante para resolução do problema principal do trabalho. Os resultados apresentados na seção Homomorfismos terão um papel fundamental na generalização dos

resultados que temos para grupos e que são usados para resolver o problema citado acima nesse contexto.

Começamos o capítulo 3 apresentando algumas propriedades do funtor Tr e a relação entre o funtor DTr e a composta do funtor de Nakayama \mathcal{N} com o segundo syzygy Ω^2 , no caso de álgebras auto-injetivas. Esta relação será fundamental na última seção do trabalho. O resultado principal que demonstraremos na seção sobre sequência de Auslander-Reiten, é o que justifica porque o primeiro módulo da sequência de Auslander-Reiten de um módulo M é o $DTr(M)$, seguindo [4]. Os demais resultados importantes, como a existência da sequência de Auslander-Reiten, que omitiremos as demonstrações, podem ser encontrados com maiores detalhes em [4] e [2].

No que segue, baseado em [3], [4] e [6], começaremos a abordar mais diretamente o problema de obter a sequência de Auslander-Reiten desejada. Supondo que o módulo trivial não é projetivo e observando que o módulo $M \otimes_K K$ é isomorfo a M e que o funtor $M \otimes_K -$ é exato, é razoável perguntar o que acontece com a sequência de Auslander-Reiten terminando no módulo trivial quando aplicamos o funtor $M \otimes_K -$. Como já mencionado, se K é um somando direto de $End_K(M)$ então a sequência obtida é uma sequência de Auslander-Reiten módulo injetivos. Terminaremos este trabalho apresentando a demonstração deste resultado.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo preliminar inclui determinados conceitos básicos e alguns resultados técnicos que serão necessários nos capítulos seguintes. Estamos supondo conhecidas as definições de categorias, funtores e demais conceitos relacionados que estaremos usando neste trabalho.

1.1 Álgebras e Módulos

Neste trabalho, salvo indicação em contrário, K sempre denotará um corpo, A uma K -álgebra com unidade, $\text{Mod } A$ a categoria dos A -módulos à direita e $\text{mod } A$ a subcategoria de $\text{Mod } A$ formada pelos A -módulos finitamente gerados. Como M é um A -módulo à esquerda se, e somente se, M é um A^{op} -módulo à direita, usaremos a notação $\text{Mod } A^{op}$ para a categoria dos A -módulos à esquerda. Escrevemos $M = M_A$ para dizer que M é um A -módulo à direita e $M = {}_A M$ para dizer que M é um A -módulo à esquerda.

Uma sequência de A -módulos e morfismos de A -módulos

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

é **exata em** M_i se $\text{Im } f_{i+1} = \text{Ker } f_i$. Diremos que a sequência é **exata** se for exata em cada M_i . Diremos que uma sequência exata da forma

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

é uma **sequência exata curta**.

Proposição 1.1.1. *Considere um diagrama comutativo cujas linhas são sequências exatas de*

A-módulos e morfismos de *A*-módulos

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \\
 & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w \\
 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N'.
 \end{array}$$

Existe uma única aplicação linear $u : L \rightarrow L'$ que torna o quadrado da esquerda comutativo, isto é, tal que $v \circ f = f' \circ u$. Além disso, se v é um monomorfismo então u é um monomorfismo.

Demonstração. Ver [1], pág. 28. □

Corolário 1.1.2. *Seja $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ uma sequência exata de *A*-módulos e de morfismos de *A*-módulos. Existe um único isomorfismo $u : L \rightarrow \text{Ker } g$ tal que $i \circ u = f$, onde $i : \text{Ker } g \rightarrow M$ é a inclusão canônica.*

Demonstração. Ver [1], pág. 29. □

Proposição 1.1.3. *Considere um diagrama comutativo cujas linhas são sequências exatas de *A*-módulos e morfismos de *A*-módulos*

$$\begin{array}{ccccccc}
 L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\
 L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

Existe uma única aplicação linear $w : N \rightarrow N'$ que torna o quadrado da direita comutativo, para a qual $w \circ g = g' \circ v$. Além disso, se v é um epimorfismo então w é um epimorfismo.

Demonstração. Ver [1], pág. 29. □

Corolário 1.1.4. *Seja $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ uma sequência exata de *A*-módulos e de morfismos de *A*-módulos. Existe um único isomorfismo $w : N \rightarrow \text{Coker } f$ tal que $g \circ w = p$, onde $p : M \rightarrow \text{Coker } f$ é a projeção canônica.*

Demonstração. Ver [1], pág. 30. □

Definição 1.1.5. *Sejam *M* e *N* dois *A*-módulos.*

- (a) *um morfismo $f : M \rightarrow N$ é uma **seção** de $\text{mod } A$, se existe um morfismo $g : N \rightarrow M$ de $\text{mod } A$ tal que, $g \circ f = id_M$*
- (b) *um morfismo $f : M \rightarrow N$ é uma **retração** de $\text{mod } A$, se existe um morfismo $g : N \rightarrow M$ de $\text{mod } A$ tal que $f \circ g = id_N$*

Definição 1.1.6. Dizemos que uma sequência exata curta

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

cinde, se existe um isomorfismo $h : M \rightarrow L \oplus N$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow id_L & & \downarrow h & & \downarrow id_N & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{q} & L \oplus N & \xrightarrow{p} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

comuta; onde q é a inclusão e p é a projeção canônica.

Teorema 1.1.7. Seja $\delta : 0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ uma sequência exata curta em $\text{mod } A$. As seguintes condições são equivalentes:

- (a) a sequência δ cinde;
- (b) f é uma seção;
- (c) g é uma retração.

Demonstração. Ver [1], pág. 74. □

Um A -módulo P é dito **projetivo** se o funtor $\text{Hom}_A(P, _)$ é exato ou, equivalentemente, se para todo epimorfismo de A -módulos $f : M \rightarrow N$ e todo morfismo de A -módulos $u : P \rightarrow N$, existe um morfismo de A -módulos $v : P \rightarrow M$ tal que $u = f \circ v$, isto é, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \swarrow v & \downarrow u \\ M & \xrightarrow{f} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

Apresentaremos a seguir uma caracterização para este conceito e algumas propriedades dos módulos projetivos que serão usadas livremente durante este trabalho.

Proposição 1.1.8. Seja $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de A -módulos. A soma direta $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ é um A -módulo projetivo se, e somente se, cada P_λ é projetivo.

Demonstração. Ver [1], pág. 101. □

Teorema 1.1.9. Seja P um A -módulo. As seguintes condições são equivalentes:

- (i) P é projetivo;
- (ii) P é somando direto de um A -módulo livre;

(iii) toda sequência exata curta da forma $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ cinde.

Demonstração. Ver [1], pág. 102. □

Seja M um A -módulo. Uma sequência exata de A -módulos da forma

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{p_n} P_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0 \quad (1.1)$$

na qual cada P_i é um A -módulo projetivo, é chamada de **resolução projetiva de M** . Uma resolução projetiva de M da forma

$$P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

é chamada de **apresentação projetiva de M** .

Um epimorfismo $f : M \rightarrow N$ é dito **supérfluo** se, para todo morfismo $h : L \rightarrow M$ tal que $f \circ h : L \rightarrow N$ seja um epimorfismo, temos que h é um epimorfismo. Um par (P, p) é uma **cobertura projetiva de M** se P é um A -módulo projetivo e $p : P \rightarrow M$ é um epimorfismo súperfluo. Além disso, se A é uma K -álgebra de dimensão finita e M um A -módulo finitamente gerado então M possui uma cobertura projetiva única a menos de isomorfismo, ver [1], pág. 210.

Dada uma resolução projetiva de M como em (1.1), se (P_i, p_i) é uma cobertura projetiva de $\text{Ker } p_{i-1}$, diremos que (1.1) é uma **resolução projetiva minimal de M** . Usaremos o termo n -ésimo syzygy, com $n \geq 1$, para designar o módulo $\text{Ker } p_{n-1}$ que denotaremos por $\Omega^n(M)$. Denotando $\Omega^0(M) = M$, temos que $\Omega(\Omega^{n-1}(M)) = \Omega^n(M)$ para $n \geq 1$. Como duas resoluções projetivas minimais de M são isomorfas (ver [1], pág. 279), temos que $\Omega^n(M)$ está bem definido. Uma resolução projetiva minimal da forma

$$P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

é chamada de **apresentação projetiva minimal**.

Lema 1.1.10. (Serpente) Considere um diagrama comutativo cujas linhas são sequências exatas de A -módulos e morfismos de A -módulos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{u'} & M' & \xrightarrow{v'} & N' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Existe uma sequência exata

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \xrightarrow{u_1} \text{Ker } g \xrightarrow{v_1} \text{Ker } h \rightarrow \text{Coker } f \xrightarrow{u_2} \text{Coker } g \xrightarrow{v_2} \text{Coker } h \rightarrow 0.$$

Demonstração. Ver [1], pág. 32. □

Lema 1.1.11. *Seja $h : P_0 \rightarrow M$ uma cobertura projetiva do A -módulo M . Se a seqüência exata*

$$0 \rightarrow L \rightarrow P'_0 \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$$

é tal que N é isomorfo a M e P'_0 é projetivo, então $L \simeq \Omega(M) \oplus P$, para algum A -módulo projetivo P .

Demonstração. Seja $0 \rightarrow L \xrightarrow{g} P'_0 \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ uma seqüência exata em que N é isomorfo a M e P'_0 é projetivo. Considere um isomorfismo $w : N \rightarrow M$. Como P'_0 é projetivo, existe $v : P'_0 \rightarrow P_0$ tal que $wf = hv$, e então existe $u : L \rightarrow \Omega(M)$ que nos dá o seguinte diagrama com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{g} & P'_0 & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega(M) & \xrightarrow{h'} & P_0 & \xrightarrow{h} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Observe que v é um epimorfismo, pois $hv = wf$ é um epimorfismo e h é supérfluo. Então, pelo Lema da Serpente, temos o seguinte diagrama comutativo cujas linhas são seqüências exatas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } u & \xrightarrow{g'} & \text{Ker } v & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{g} & P'_0 & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega(M) & \xrightarrow{h'} & P_0 & \xrightarrow{h} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \text{Coker } u & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

Note que g' é um isomorfismo. Além disso, P_0 é projetivo, logo v é uma retração e assim, concluímos que $\text{ker } v$ é somando de P'_0 , logo $\text{ker } v$ é projetivo. Como $\text{ker } v \simeq \text{ker } u$, temos que $\text{ker } u$ é projetivo. Portanto, se u for uma retração, tomando $P = \text{ker } u$ temos que $L \simeq \Omega(M) \oplus P$.

Provaremos que u é uma retração. Como v cinde e w é um isomorfismo, existem $v' : P_0 \rightarrow P'_0$ e $w^{-1} : M \rightarrow N$ tais que $v \circ v' = id_{P_0}$ e $w \circ w^{-1} = id_M$. Logo, se $hv = wf$, então $h = wf v'$. Portanto, $w^{-1}h = f v'$. Então, temos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Omega(M) & \xrightarrow{h'} & P_0 & \xrightarrow{h} & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow u' & & \downarrow v' & & \downarrow w^{-1} \\
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{g} & P'_0 & \xrightarrow{f} & N \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Daí, $h'uu' = vgu' = vv'h' = h'$. Como h' é mono, $uu' = id_{\Omega(M)}$. Portanto u é uma retração. \square

Proposição 1.1.12. *Seja $\delta : Q_1 \xrightarrow{f} Q_0 \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$ uma apresentação projetiva de M , então δ é isomorfa a uma sequência exata $\delta' : Q'_1 \oplus Q''_1 \rightarrow Q'_0 \oplus Q''_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ com $Q''_1 \simeq Q''_0$.*

Demonstração. Seja (Q'_0, t) uma cobertura projetiva de M . Então, temos o seguinte quadrado comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 Q_0 & \xrightarrow{g} & M \longrightarrow 0 \\
 \downarrow p & & \downarrow id_M \\
 Q'_0 & \xrightarrow{t} & M \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Como $t \circ p = g$ é um epimorfismo e t é supérfluo, concluímos que p é um epimorfismo. Mas Q'_0 é projetivo, logo, p é uma retração e portanto, existe um isomorfismo $h_0 : Q_0 \rightarrow Q'_0 \oplus Q''_0$ onde $Q''_0 = \ker(p)$. Vemos que $Q''_0 \subset \text{Im}(f)$, pois $g(Q''_0) = t \circ p(Q''_0) = 0$. Sendo Q''_0 projetivo, a correstrição de f a Q''_0 é uma retração, logo, existe um isomorfismo $h_1 : Q_1 \simeq Q'_1 \oplus Q''_1$ com $Q''_1 \simeq Q''_0$. Provaremos que δ é isomorfa à sequência

$$\delta' : Q'_1 \oplus Q''_1 \xrightarrow{f'} Q'_0 \oplus Q''_0 \xrightarrow{g'} M \rightarrow 0$$

onde $g' = g \circ h_0^{-1}$ e $f' = h_0 \circ f \circ h_1^{-1}$. Para provar que δ é isomorfa a δ' , basta provar que δ' é exata e que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 Q_1 & \xrightarrow{f} & Q_0 & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow h_1 & & \downarrow h_0 & & \downarrow id_M & & \\
 Q'_1 \oplus Q''_1 & \xrightarrow{f'} & Q'_0 \oplus Q''_0 & \xrightarrow{g'} & M & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Pela definição de f' e g' , é claro que o diagrama acima é comutativo e que $\text{Im}(f') \subset \ker(g')$. Por outro lado, se $g'(y) = 0$ para algum $y \in Q'_0 \oplus Q''_0$, então $g(h_0^{-1}(y)) = 0$, como δ é exata, concluímos que $h_0^{-1}(y) = f(a)$ para algum $a \in Q_1$. Logo, $y = h_0 \circ f \circ h_1^{-1}(h_1(a)) = f'(h_1(a))$, terminando a demonstração de que δ é isomorfa a δ' . \square

Um A -módulo I é **injetivo** se o funtor $\text{Hom}_A(_, I)$ é exato ou, equivalentemente, se para todo monomorfismo $f : L \rightarrow M$ e todo morfismo $u : L \rightarrow I$, existe um morfismo $v : M \rightarrow I$ tal

que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M \\ & & \downarrow u & \nearrow v & \\ & & I & & . \end{array}$$

Teorema 1.1.13. *Um A -módulo I é injetivo se, e somente se, toda seqüência exata curta da forma*

$$0 \rightarrow I \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

cinde.

Demonstração. Ver [1] pág. 105. □

Proposição 1.1.14. *Seja $\delta : 0 \rightarrow L \oplus I \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ uma seqüência exata. Se I é injetivo, então δ é isomorfa a uma seqüência exata da forma*

$$\delta' : 0 \rightarrow L \oplus I \xrightarrow{(f_1, id_I)} M' \oplus I \xrightarrow{(g_0, 0)} N \rightarrow 0$$

Demonstração. Temos que $f|_I$ é uma seção, pois I é injetivo e f é um monomorfismo. Pelo teorema (1.1.7), temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{f|_I} & M & \xrightarrow{f'} & M' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id_I & & \downarrow h & & \downarrow id_{M'} \\ 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{q} & M' \oplus I & \xrightarrow{p} & M' \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde h é um isomorfismo, $M' = \text{Coker}(f|_I)$ e q e p são a inclusão e a projeção canônicas. Logo, para provar que δ é isomorfa à seqüência δ' , basta provar que o seguinte diagrama é comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L \oplus I & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id_{L \oplus I} & & \downarrow h & & \downarrow id_N \\ 0 & \longrightarrow & L \oplus I & \xrightarrow{(f_1, id_I)} & M' \oplus I & \xrightarrow{g'} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde $f_1 = f' \circ f|_L$ e $g' = g \circ h^{-1}$. A comutatividade do quadrado da direita segue da definição de g' , bem como o fato de que g' é um epimorfismo. Observe que, para $x \in L$ e $y \in I$,

$$\begin{aligned} f_1(x) + y &= f' \circ f|_L(x) + h \circ f(y) \\ &= f' \circ f(x) + h \circ f(y) \\ &= p \circ h \circ f(x) + h \circ f(y) \end{aligned}$$

e como $h \circ f(L) \subset M'$, temos que $(f_1, id_I) = h \circ f$, ou seja, o quadrado da esquerda é comuta-

tivo. Daí, obviamente, (f_1, id_I) é um monomorfismo.

Se $g'(y) = 0$ então $g \circ h^{-1}(y) = 0$, mas δ é exata, então existe $x \in L \oplus I$ tal que $f(x) = h^{-1}(y)$, ou seja, $(f_1, id_I)(x) = h \circ f(x) = y$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} g' \circ (f_1, id_I) &= g \circ h^{-1} \circ (f_1, id_I) \\ &= g \circ h^{-1} \circ h \circ f \\ &= g \circ f = 0, . \end{aligned}$$

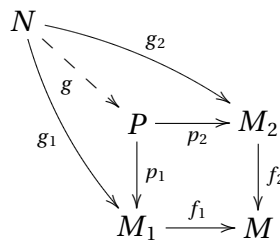
e segue que a segunda linha é exata. Além disto, temos que $g'(I) = g' \circ (f_1, id_I)(0 + I) = 0$, logo $g' = (g_0, 0)$ onde $g_0 = g'|_{M'}$. □

1.2 Produto Fibrado e Soma Amalgamada

Em várias situações, dados um morfismo $f : M \rightarrow N$ e uma seqüência exata começando ou terminando em M , é importante construir uma seqüência exata em paralelo para N de modo a obter um diagrama comutativo cujas linhas são essas seqüências. Nós precisamos de duas destas construções para demonstrar um resultado central da teoria de Auslander-Reiten e, para obtê-las, precisamos dos conceitos de soma amalgamada e produto fibrado.

Definição 1.2.1. *Sejam $f_1 : M_1 \rightarrow M$, $f_2 : M_2 \rightarrow M$ dois morfismos de $\text{Mod } A$. Um **produto fibrado de f_1 e f_2** é um módulo P e dois morfismos $p_1 : P \rightarrow M_1$ e $p_2 : P \rightarrow M_2$, tais que:*

- (i) $f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$;
- (ii) *para todo módulo N e todo par de morfismos $g_1 : N \rightarrow M_1$ e $g_2 : N \rightarrow M_2$ tais que $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$, existe um único morfismo $g : N \rightarrow P$ tal que $p_1 \circ g = g_1$ e $p_2 \circ g = g_2$.*



Teorema 1.2.2. *A cada diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & M_2 & & \\ & & & & \downarrow f_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & M_0 & \xrightarrow{f_0} & M_1 & \xrightarrow{f_1} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

em $\text{Mod } A$, com a linha inferior exata, corresponde a um diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_0 & \xrightarrow{p_0} & P & \xrightarrow{p_2} & M_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id}_{M_0} & & \downarrow p_1 & & \downarrow f_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & M_0 & \xrightarrow{f_0} & M_1 & \xrightarrow{f_1} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

onde (P, p_1, p_2) é um produto fibrado de f_1 e f_2 .

Reciprocamente, dado um diagrama comutativo com linhas exatas

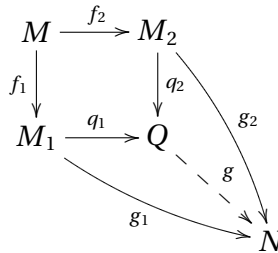
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_0 & \xrightarrow{p'_0} & P' & \xrightarrow{p'_2} & M_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id}_{M_0} & & \downarrow p'_1 & & \downarrow f_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & M_0 & \xrightarrow{f_0} & M_1 & \xrightarrow{f_1} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

existe um isomorfismo $f : P' \rightarrow P$, tal que $p_0 = f \circ p'_0$, $p_1 \circ f = p'_1$ e $p_2 \circ f = p'_2$.

Demonstração. Ver [1], pág. 77. □

Definição 1.2.3. Sejam $f_1 : M \rightarrow M_1$ e $f_2 : M \rightarrow M_2$ dois morfismos de $\text{Mod } A$. Uma **soma amalgamada de f_1 e f_2** é um módulo Q com dois morfismos $q_1 : M_1 \rightarrow Q$ e $q_2 : M_2 \rightarrow Q$, tais que:

- (i) $q_1 \circ f_1 = q_2 \circ f_2$
- (ii) para todo módulo N e todo par de morfismos $g_1 : M_1 \rightarrow N$ e $g_2 : M_2 \rightarrow N$ tais que $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$, existe um único morfismo $g : Q \rightarrow N$ tal que $g \circ q_1 = g_1$ e $g \circ q_2 = g_2$.



Teorema 1.2.4. Cada diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f_1} & M_1 & \xrightarrow{f_0} & M_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_2 & & & & & & \\ & & M_2 & & & & & & \end{array}$$

em $\text{Mod } A$, com a linha superior exata, corresponde a um diagrama comutativo com linhas

exatas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f_1} & M_1 & \xrightarrow{f_0} & M_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f_2 & & \downarrow q_1 & & \downarrow id_{M_0} & & \\
 0 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{q_2} & Q & \xrightarrow{q_0} & M_0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

onde (Q, q_1, q_2) é uma soma amalgamada de f_1 e f_2 .

Reciprocamente, dado diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f_1} & M_1 & \xrightarrow{f_0} & M_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f_2 & & \downarrow q'_1 & & \downarrow id_{M_0} & & \\
 0 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{q'_2} & Q' & \xrightarrow{q'_0} & M_0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

existe um isomorfismo $f : Q \rightarrow Q'$ tal que $q_0 = q'_0 \circ f$, $f \circ q_1 = q'_1$ e $f \circ q_2 = q'_2$.

Demonstração. Ver [1], pág. 79. □

1.3 Álgebras de Frobenius e Simétricas

Nos próximos capítulos vamos trabalhar com álgebras de Hopf e veremos que uma álgebra de Hopf de dimensão finita é uma álgebra de Frobenius. Então, apresentaremos nesta seção as definições e conceitos básicos sobre álgebras de Frobenius. Para uma abordagem mais detalhada, consulte [1].

Definição 1.3.1. Uma K -álgebra A é uma álgebra de Frobenius se existe uma forma bilinear não-degenerada $(,) : A \otimes_K A \rightarrow K$ tal que $(ab, c) = (a, bc)$ para todos a, b e $c \in A$ (diremos então que $(,)$ é associativa). Além disso, diremos que a álgebra de Frobenius A é simétrica se a forma $(,)$ é simétrica.

Definição 1.3.2. Seja A uma K álgebra. Então, diremos que A é auto-injetiva se A_A é um A -módulo injetivo.

Em todo este trabalho, usaremos D para denotar tanto o funtor dualidade usual

$$Hom_k(_, K) : \text{mod} A^{op} \rightarrow \text{mod} A.$$

quanto a sua inversa

$$Hom_k(_, K) : \text{mod} A \rightarrow \text{mod} A^{op}.$$

Recordamos que, se A é uma K -álgebra e I é um A -módulo então I é injetivo se, e somente se, $D(I)$ é projetivo (ver [4], pág. 32).

Proposição 1.3.3. Seja A uma K -álgebra de Frobenius de dimensão finita. Então,

(i) ${}_A A \simeq D(A_A)$ e $A_A \simeq D({}_A A)$;

(ii) A é auto-injetiva;

(iii) A é simétrica se, e somente se, $A \simeq D(A)$ como A -bimódulo.

Demonstração. (i) defina $\psi_r : A \rightarrow D(A)$ por $\psi_r(a)(a') = (a, a')$. Como $(,)$ é não-degenerada, segue que ψ_r é injetora e como A tem dimensão finita, ψ_r é sobrejetora. Além disso, se a, a' e $b \in A$ então

$$\psi_r(ab)(a') = (ab, a') = (a, ba') = \psi_r(a)(ba') = (\psi_r(a)b)(a')$$

e portanto ψ_r é um isomorfismo de A -módulos à direita. Para provar a outra parte, basta definir $\psi_l(a)(a') = (a', a)$ e verificar que é um isomorfismo de A -módulos à esquerda.

(ii) Segue diretamente do item anterior e de que o funtor D leva módulo projetivo em injetivo.

(iii) Se A é simétrica, então $(,)$ é simétrica. Logo, $\psi_r = \psi_l$. Portanto $A \simeq D(A)$ como A -bimódulo. Reciprocamente, se $\psi : A \rightarrow D(A)$ é um isomorfismo de bimódulos então $(,) : A \otimes_K A \rightarrow K$ definida por $a \otimes b \mapsto \psi(a)(b)$ é uma forma bilinear associativa, não-degenerada e simétrica. \square

O resultado mais importante desta seção é que se A é auto-injetiva, então um A -módulo finitamente gerado é projetivo se e somente se é injetivo.

Proposição 1.3.4. *Seja A uma K -álgebra de dimensão finita. Então, são equivalentes:*

(a) A é auto injetiva.

(b) um A -módulo finitamente gerado M é injetivo se, e somente se, é projetivo.

Demonstração. Suponhamos (a) e seja M um A -módulo finitamente gerado. Se M é projetivo então M é somando de um A -módulo livre A^n , para algum n . Como A é injetivo, A^n é injetivo, logo M é injetivo. Reciprocamente, se M é injetivo então $D(M)$ é projetivo. Pela primeira parte, segue que $D(M)$ é injetivo. Logo, $D(D(M)) \simeq M$ é projetivo. Portanto, (a) implica (b).

Que (b) implica (a) é claro, pois A é projetivo como A -módulo. \square

1.4 Defeito de Sequências Exatas

Nesta seção, assumiremos que A é uma K -álgebra de dimensão finita, no entanto, podemos assumir de forma mais geral que K é um anel de Artin comutativo e A é uma K -álgebra de

Artin (ver [4], pág. 128) . Seja $\delta : 0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ uma sequência exata curta em $\text{mod } A$. Na teoria de Auslander-Reiten, estamos interessados em uma classe das sequências exatas curtas onde um morfismo de A -módulos $h : X \rightarrow N$ se fatora por g , caso h não seja uma retração. Portanto, é interessante estudar algumas propriedades do módulo $\text{Coker} \text{Hom}_A(X, g)$. Por exemplo, se $\text{Coker} \text{Hom}_A(X, g) = 0$ então todo morfismo de X em N se fatora por g . Denote por $\delta^*(X) = \text{Coker}(\text{Hom}_A(X, g))$ e $\delta_*(X) = \text{Coker}(\text{Hom}_A(f, X))$. δ_* e δ^* são chamados de defeito covariante e contravariante da sequência exata δ , respectivamente.

Antes de falar sobre a propriedade de $\delta^*(X)$ que estamos interessados, é conveniente estabelecer algumas notações. Seja M um A -módulo não nulo. Uma cadeia finita com $n+1$ submódulos de M

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0$$

é chamada série de composição de comprimento n para M , se é uma cadeia maximal. Pelo Teorema de Jordan-Hölder (ver [1], pág. 168), podemos definir, sem ambiguidade, o comprimento $l(M)$ de M como sendo zero se $M = 0$ e n se M possui uma serie de composição de comprimento n . Sejam M e N dois A -módulos. Denotaremos o comprimento do K -módulo $\text{Hom}_A(M, N)$ por $l(M, N)$. Usaremos $()^t$ para denotar o funtor

$$\text{Hom}_A(_, A) : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A^{op}$$

e a composta $D()^t$ será denotada por \mathcal{N} ; o funtor $\mathcal{N} = D()^t$ é conhecido como funtor de Nakayama.

Sejam $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de A -módulos e Z um A -módulo. Usaremos a notação f^* para o morfismo $\text{Hom}_A(f, Z)$ e f_* para o morfismo $\text{Hom}_A(Z, f)$.

Seja $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0$ uma apresentação projetiva minimal de M . Denotaremos por $\text{Tr}(M)$ o A^{op} -módulo $\text{Coker } f_1^t$. Veremos mais tarde algumas propriedades do A^{op} -módulo $\text{Tr}(M)$.

Proposição 1.4.1. *Seja $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} \cdots M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \rightarrow 0$ uma sequência exata. Então,*

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i l(M_i) = 0$$

Demonstração. Para $n = 3$ ver [1], pág 170. Como M_2/M_1 é isomorfo a $\text{Im } f_2$ podemos reduzir a sequência exata dada à uma sequência exata da forma

$$0 \rightarrow M_2/M_1 \rightarrow M_3 \xrightarrow{f_3} \cdots M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \rightarrow 0.$$

Como $l(M_2/M_1) = l(M_2) - l(M_1)$, segue por indução que

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i l(M_i) = 0.$$

□

Nosso próximo objetivo é mostrar que, dados M e $N \in \text{mod } A$ e uma apresentação projetiva minimal

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

de M , o comprimento de $\text{Hom}_A(M, N)$ é dado pela fórmula

$$l(M, N) = l(P_0, N) - l(P_1, N) + l(N, DTr(M)) \quad (1.3)$$

Para isso, começando da sequência (1.2) obtemos a sequência exata

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_A(P_0, N) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_A(P_1, N) \quad (1.4)$$

Provaremos que $\text{Coker } f^* = N \otimes_A Tr(M)$. Note que temos a seguinte sequência exata:

$$N \otimes_A P_0^t \rightarrow N \otimes_A P_1^t \rightarrow N \otimes_A Tr(M) \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

Para provar que $\text{Coker } f^* = N \otimes_A Tr(M)$, provaremos que $N \otimes_A (P_i)^t \simeq \text{Hom}_A(P_i, N)$ como consequência do seguinte fato mais geral:

Proposição 1.4.2. *Sejam A e B duas K -álgebras, P_A um A -módulo projetivo finitamente gerado, ${}_B M_A$ um bimódulo e N_B um B -módulo à direita. Então, existe um isomorfismo funtorial de K -módulos*

$$\varphi : N \otimes_B \text{Hom}_A(P, M) \rightarrow \text{Hom}_A(P, N \otimes_B M)$$

definido por $y \otimes f \mapsto (x \mapsto y \otimes f(x))$, onde $y \in N$, $f \in \text{Hom}_A(P, M)$ e $x \in P$. Além disso, se ${}_A N_B$ for um $A - B$ -bimódulo, então φ é um isomorfismo de A -módulos à esquerda.

Demonstração. Se N for um A -módulo à esquerda, então $N \otimes_B \text{Hom}_A(P, M)$ e $N \otimes_B M$ possuem estrutura de A -módulo à esquerda e então $\text{Hom}_A(P, N \otimes_B M)$ também possui estrutura de A -módulo à esquerda. Vamos verificar que o isomorfismo φ é um isomorfismo de A -módulos. Para a prova de que φ é um isomorfismo de K -módulos, ver [1], pág. 130. Então, provaremos apenas que φ é A -linear. De fato,

$$\begin{aligned}
 \varphi(a(y \otimes f))(x) &= \varphi(ay \otimes f)(x) \\
 &= ay \otimes f(x) \\
 &= a(y \otimes f(x)) \\
 &= a(\varphi(y \otimes f)(x)) \\
 &= (a\varphi(y \otimes f))(x)
 \end{aligned}$$

para todo $a \in A$, $x \in P$ e $y \otimes f \in N \otimes_B \text{Hom}_A(P, M)$.

□

Pela proposição (1.4.2) acima, temos que $N \otimes_A (P_i)^t \simeq \text{Hom}_A(P_i, N \otimes_A A)$. Como $N \otimes_A A \simeq N$, das sequências exatas (1.4) e (1.5), temos agora o diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, N) & \xrightarrow{g^*} & \text{Hom}_A(P_0, N) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}_A(P_1, N) & \longrightarrow & \text{Coker } f^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi & & \\
 & & & & N \otimes_A P_0^t & \longrightarrow & N \otimes_A P_1^t & \longrightarrow & N \otimes_A \text{Tr}(M) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

onde as aplicações verticais são isomorfismos.

Resumindo a discussão acima temos o seguinte resultado:

Proposição 1.4.3. *Seja $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ uma apresentação projetiva minimal de M e seja N um A -módulo. Então, temos uma sequência exata da forma*

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(P_0, N) \rightarrow \text{Hom}_A(P_1, N) \rightarrow N \otimes_A \text{Tr}(M) \rightarrow 0$$

Demonstração. Vide discussão acima.

□

Queremos provar que

$$l(M, N) = l(P_0, N) - l(P_1, N) + l(N, D\text{Tr}(M))$$

mas, pelas proposições (1.4.3) e (1.4.1), temos

$$l(M, N) = l(P_0, N) - l(P_1, N) + l(N \otimes_A \text{Tr}(M))$$

Então, provaremos que $l(N, D\text{Tr}(M)) = l(N \otimes_A \text{Tr}(M))$ como consequência do teorema de adjunção clássico.

Proposição 1.4.4. *Sejam A, B duas K -álgebras e $L_A, {}_A M_B$ e N_B três módulos. Então, existe um isomorfismo de K -módulos*

$$\nu' : \text{Hom}_B(L \otimes_A M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(L, \text{Hom}_B(M, N))$$

funtorial em cada variável. Além disso, se L é um B -módulo à esquerda, então v' é um isomorfismo de B -módulos.

Demonstração. Provaremos apenas a segunda parte, a primeira é o, bem conhecido, isomorfismo de adjunção, ver [1], pág. 126. Sejam $b \in B$, $f \in \text{Hom}_B(L \otimes_A M, N)$, $x \in L$ e $y \in M$. Então,

$$\begin{aligned} v'(fb)(x)(y) &= (fb)(x \otimes y) \\ &= f(b(x \otimes y)) \\ &= f(bx \otimes y) \\ &= v'(f)(bx)(y) \\ &= (v'(f)b)(x)(y) \end{aligned}$$

□

Com isso temos $\text{Hom}_A(N, DTr(M)) \simeq D(N \otimes_A Tr(M))$, logo

$$l(N, DTr(M)) = l(D(N \otimes_A Tr(M))) = l(N \otimes_A Tr(M))$$

o que prova a equação (1.3).

Teorema 1.4.5. *Seja $\delta : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \rightarrow 0$ uma seqüência exata. Para todo $X \in \text{mod } A$,*

$$l(\delta_*(DTr(X))) = l(\delta^*(X))$$

Demonstração. Seja $X \in \text{mod } A$. Então, segue da definição de δ_* e δ^* e da proposição (1.4.1) que

$$l(\delta^*(X)) = l(X, M) - l(X, N) + l(X, L) \quad (1.6)$$

$$l(\delta_*(DTr(X))) = l(M, DTr(X)) - l(N, DTr(X)) + l(L, DTr(X)). \quad (1.7)$$

Subtraindo (1.6) de (1.7) e aplicando (1.3), obtemos

$$\begin{aligned} l(\delta_*(DTr(X))) - l(\delta^*(X)) &= l(M, DTr(X)) - l(N, DTr(X)) + l(L, DTr(X)) \\ &\quad - [l(X, M) - l(X, N) + l(X, L)] \\ &= (l(P_1, M) - l(P_0, M)) + (l(P_0, N) - l(P_1, N)) \\ &\quad + (l(P_1, L) - l(P_0, L)) \\ &= l(P_1, M) - l(P_1, N) + l(P_1, L) \\ &\quad - [l(P_0, M) - l(P_0, N) + l(P_0, L)] \\ &= l(\delta^*(P_1)) - l(\delta^*(P_0)). \end{aligned}$$

Como cada P_i é projetivo, $\text{Hom}_A(P_i, _)$ é um funtor exato, logo, $\delta^*(P_i) = 0$. Portanto,

$$l(\delta_*(DTr(X))) = l(\delta^*(X)) \quad (1.8)$$

□

Corolário 1.4.6. *Seja $\delta : 0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \rightarrow 0$ uma seqüência exata em $\text{mod } A$. Então, para $X \in \text{mod } A$, são equivalentes:*

- (i) *todo morfismo $h : X \rightarrow L$ se fatora por g ;*
- (ii) *todo morfismo $h' : M \rightarrow DTr(X)$ se fatora por f .*

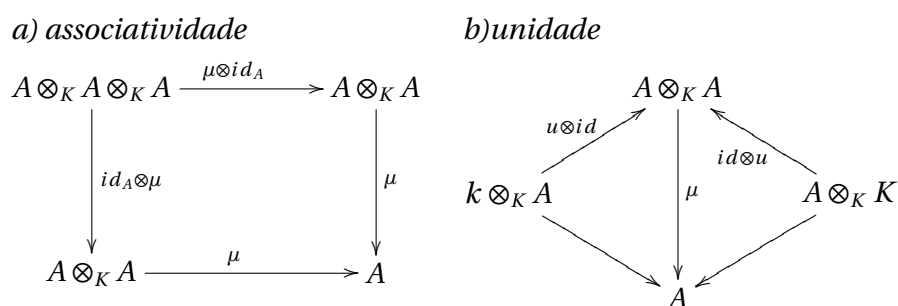
Demonstração. Pelo Teorema anterior, temos que $l(\delta^*(X)) = l(\delta_*(DTr(X)))$. Daí, concluímos que $\delta^*(X) = 0$ se, e somente se, $\delta_*(DTr(X)) = 0$, ou seja, (i) e (ii) são equivalentes. □

Capítulo 2

Categorias de Módulos e Comódulos

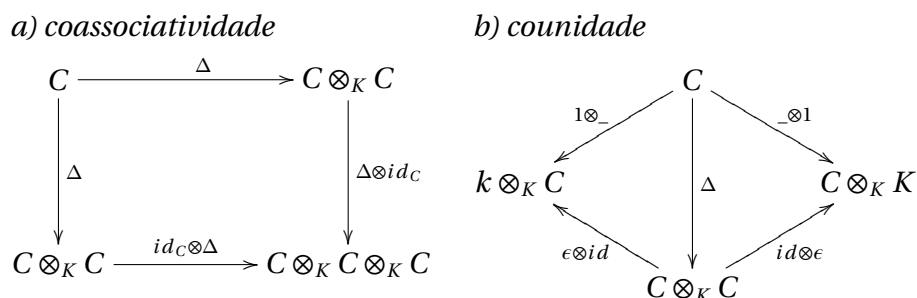
2.1 Biálgebras e Álgebras de Hopf

Definição 2.1.1. Uma K -álgebra com unidade é um K -espaço vetorial A com duas aplicações K -lineares, a multiplicação $\mu : A \otimes_K A \rightarrow A$ e a unidade $u : K \rightarrow A$, tais que os seguintes diagramas são comutativos:



No diagrama da unidade, a aplicação de $k \otimes_K A$ em A é o isomorfismo canônico $\lambda \otimes a \mapsto \lambda a$; analogamente para a aplicação de $A \otimes_K k$ em A .

Definição 2.1.2. Uma K -coálgebra com unidade é um K -espaço vetorial C com duas aplicações K -lineares, a comultiplicação $\Delta : C \rightarrow C \otimes_K C$ e a counidade $\epsilon : C \rightarrow K$, tais que os seguintes diagramas são comutativos:



Sejam C e D duas coálgebras, com comultiplicações Δ_C e Δ_D e counidades ϵ_C e ϵ_D , respectivamente. Uma aplicação $f : C \rightarrow D$ é um **morfismo de coálgebras** se $\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C$ e $\epsilon_C = \epsilon_D \circ f$.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & D \\ \downarrow \Delta_C & & \downarrow \Delta_D \\ C \otimes_K C & \xrightarrow{f \otimes f} & D \otimes_K D \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & D \\ \searrow \epsilon_C & & \downarrow \epsilon_D \\ & & K \end{array}$$

Notação: Usaremos a notação de Sweedler para a comultiplicação, pois é uma notação eficaz na simplificação de vários tipos de operações. Dado uma K -coálgebra (C, Δ, ϵ) e $c \in C$, podemos escrever

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^n c_{1i} \otimes c_{2i} \tag{2.1}$$

para $c_{1i}, c_{2i} \in C$. Vamos reescrever (2.1) como

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2. \tag{2.2}$$

Usando (2.2) para escrever a propriedade coassociativa de Δ , temos

$$\sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3. \tag{2.3}$$

Pela counidade, e pelos isomorfismos canônicos de $C \otimes_K k$ e $k \otimes_K C$ com C , temos

$$c = \sum c_1 \epsilon(c_2) = \sum \epsilon(c_1) c_2. \tag{2.4}$$

Sejam M e N dois K -espaços vetoriais, utilizaremos neste trabalho T para denotar a aplicação troca, ou seja, $T : M \otimes_K N \rightarrow N \otimes_K M$ é definida por $T(m \otimes n) = n \otimes m$ para $m \in M$ e $n \in N$.

Proposição 2.1.3. *Sejam $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$ duas coálgebras. Então, $C \otimes_K D$ é uma coálgebra.*

Demonstração. Definindo $\Delta_{C \otimes_K D} := (id_C \otimes T \otimes id_D)(\Delta_C \otimes \Delta_D)$ e $\epsilon_{C \otimes_K D} := \mu_K(\epsilon_C \otimes \epsilon_D)$, onde $\mu_K : K \otimes_K K \rightarrow K$ é o isomorfismo canônico, temos que $(C \otimes_K D, \Delta_{C \otimes_K D}, \epsilon_{C \otimes_K D})$ é uma coálgebra. Sejam $c \in C$ e $d \in D$, então

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta_{C \otimes_K D}) \Delta_{C \otimes_K D}(c \otimes d) &= (id \otimes \Delta_{C \otimes_K D})(\sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2) \\
&= \sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_{2_1} \otimes d_{2_1} \otimes c_{2_2} \otimes d_{2_2} \\
&= \sum c_{1_1} \otimes d_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes d_{1_2} \otimes c_2 \otimes d_2 \\
&= (\Delta_{C \otimes_K D} \otimes id)(\sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2) \\
&= (\Delta_{C \otimes_K D} \otimes id) \Delta_{C \otimes_K D}(c \otimes d)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(id \otimes \epsilon_{C \otimes_K D}) \Delta_{C \otimes_K D}(c \otimes d) &= (id \otimes \epsilon_{C \otimes_K D})(\sum c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2) \\
&= \sum c_1 \otimes d_1 \otimes \epsilon_C(c_2) \epsilon_D(d_2) \\
&= \sum c_1 \epsilon_C(c_2) \otimes d_1 \epsilon_D(d_2) \otimes 1 \\
&= c \otimes d \otimes 1.
\end{aligned}$$

De forma análoga, prova-se que $(\epsilon_{C \otimes_K D} \otimes id) \Delta_{C \otimes_K D}(c \otimes d) = 1 \otimes c \otimes d$.

□

Proposição 2.1.4. *Seja H um K -espaço vetorial. E suponha que H tem estrutura de K -álgebra com as aplicações $\mu : H \otimes_K H \rightarrow H$ e $u : K \rightarrow H$, e de coálgebra com as aplicações $\Delta : H \rightarrow H \otimes_K H$ e $\epsilon : H \rightarrow K$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *As aplicações μ e u são morfismos de coálgebras.*
- (ii) *As aplicações Δ e ϵ são morfismos de álgebras.*

Demonstração. μ é um morfismo de coálgebras se, e somente se,

$$1. \Delta_H \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ \Delta_{H \otimes_K H}$$

$$2. \epsilon \otimes \epsilon = \epsilon \circ \mu$$

u é um morfismo de coálgebras se, e somente se,

$$3. \Delta \circ u = u \otimes u$$

$$4. \epsilon \circ u = id_K.$$

Por outro lado, como

$$\mu \otimes \mu \circ \Delta_{H \otimes H} = (\mu \otimes \mu) \circ (id \otimes T \otimes id) \circ (\Delta \otimes \Delta) = \mu_{H \otimes H} \circ (\Delta \otimes \Delta)$$

e $u \otimes u$ é a unidade de $H \otimes_K H$, temos que Δ é um morfismo de álgebras se, e somente se, vale (1) e (3) e ϵ é um morfismo de álgebras se, e somente se, vale (2) e (4). Portanto, (i) é equivalente a (ii). □

Um K -espaço vetorial H com aplicações K -lineares μ , u , Δ e ϵ , que satisfaz as condições equivalentes da proposição anterior, é chamado de **K -biálgebra**.

Proposição 2.1.5. *Sejam C uma coálgebra e A uma álgebra. Então $\text{Hom}_K(C, A)$ é uma álgebra com o produto de convolução*

$$f * g = \mu(f \otimes g)\Delta$$

para todos $f, g \in \text{Hom}_K(C, A)$.

Demonstração. Sejam $f, g, h \in \text{Hom}_K(C, A)$, então

$$\begin{aligned} (f * g) * h &= \mu(f * g \otimes h)\Delta \\ &= \mu((\mu(f \otimes g)\Delta) \otimes h)\Delta \\ &= \mu(\mu \otimes id)(f \otimes g \otimes h)(\Delta \otimes id)\Delta \\ &\stackrel{(*)}{=} \mu(id \otimes \mu)(f \otimes g \otimes h)(id \otimes \Delta)\Delta \\ &= \mu(f \otimes (\mu(g \otimes h)\Delta))\Delta \\ &= \mu(f \otimes (g * h))\Delta \\ &= f * (g * h) \end{aligned}$$

portanto $*$ é associativa. Observe que em $(*)$ foi utilizado a associatividade de μ e a coassociatividade de Δ . A unidade em $\text{Hom}_K(C, A)$ é $u \circ \epsilon$, pois

$$\begin{aligned} f * (u\epsilon) &= \mu(f \otimes u\epsilon)\Delta \\ &= \mu(id_A \otimes u)(f \otimes id_K)(id_C \otimes \epsilon)\Delta \\ &= \mu(id_A \otimes u)(f \otimes id_K)(\otimes 1) \\ &= \mu(id_A \otimes u)(f \otimes 1) \\ &= f \end{aligned}$$

e, de forma similar, pode-se provar que $(u\epsilon) * f = f$. Para efeito de comparação, provaremos que $(u\epsilon) * f = f$ utilizando a notação de Sweedler para comultiplicação. Seja $c \in C$, então

$$(u\epsilon) * f(c) = \sum (u\epsilon)(c_1)f(c_2) = \sum \epsilon(c_1)1f(c_2) = \sum f(\epsilon(c_1)c_2) = f(\sum \epsilon(c_1)c_2) = f(c)$$

□

Observe que, se tomarmos $A = K$ em (2.1.5), temos uma estrutura de álgebra para H^* , se H for uma coálgebra. Por outro lado, se H é uma álgebra, queremos definir uma estrutura de coálgebra para H^* . Observe que o produto de convolução, ainda no caso $A = K$, é simplesmente a composta $H^* \otimes_K H^* \xrightarrow{\eta} (H \otimes_K H)^* \xrightarrow{\Delta^*} H^*$, onde a aplicação η é o monomorfismo definido por $\eta(\alpha \otimes \beta)(h \otimes g) = \alpha(h)\beta(g)$. Podemos seguir esta ideia para definir uma comultiplicação em H^* , mas vamos precisar supor que (H, μ, u) é uma álgebra de dimensão finita, pois assim, η é um isomorfismo e, então, podemos definir uma comultiplicação em H^* pela composta $H^* \xrightarrow{\mu^*} (H \otimes_K H)^* \xrightarrow{\eta^{-1}} H^* \otimes_K H^*$.

Proposição 2.1.6. *Sejam A e C dois K -espaços vetoriais. Se A é uma álgebra de dimensão finita e C uma coálgebra, então*

(a) A^* é uma coálgebra.

(b) $\text{Hom}_K(A, C)$ é uma coálgebra

Demonstração. Se A é uma álgebra de dimensão finita então a aplicação

$$\eta : A^* \otimes_K A^* \rightarrow (A \otimes_K A)^*$$

definida por $\eta(\alpha \otimes \beta)(a \otimes b) = \alpha(a)\beta(b)$ para $\alpha, \beta \in A^*$ e $a, b \in A$ é um isomorfismo. Defina $\Delta_{A^*} := \eta^{-1} \circ \mu^*$ e $\epsilon_{A^*} := \sigma \circ u^*$, onde $\sigma : K^* \rightarrow K$ é o isomorfismo $\sigma(f) = f(1)$, ou seja, $\epsilon_{A^*}(f) = f(1)$. Provaremos que $(A^*, \Delta_{A^*}, \epsilon_{A^*})$ é uma coálgebra. Sejam $\Delta_{A^*}(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$ para $f \in A^*$, $\Delta_{A^*}(g_i) = \sum_j g'_{ij} \otimes g''_{ij}$ e $\Delta_{A^*}(h_i) = \sum_j h'_{ij} \otimes h''_{ij}$. Então,

$$(\Delta_{A^*} \otimes id)\Delta_{A^*}(f) = \sum_{i,j} g'_{ij} \otimes g''_{ij} \otimes h_i$$

$$(id \otimes \Delta_{A^*})\Delta_{A^*}(f) = \sum_{i,j} g_i \otimes h'_{ij} \otimes h''_{ij}.$$

Seja $\eta' : A^* \otimes_K A^* \otimes_K A^* \rightarrow (A \otimes_K A \otimes_K A)^*$ definida por $\eta'(f \otimes g \otimes h)(a \otimes b \otimes c) = f(a)g(b)h(c)$ para $f, g, h \in A^*$ e $a, b, c \in A$. Provaremos que

$$\eta'(\sum_{i,j} g'_{ij} \otimes g''_{ij} \otimes h_i) = \eta'(\sum_{i,j} g_i \otimes h'_{ij} \otimes h''_{ij}),$$

logo, que Δ_{A^*} é coassociativa, pois η' é injetora. De fato,

$$\begin{aligned} f(abc) &= \mu^*(f)(ab \otimes c) \\ &= \eta(\Delta_{A^*}(f))(ab \otimes c) \\ &= \sum_i g_i(ab)h_i(c) \\ &= \sum_i (\eta(\Delta_{A^*}(g_i))(a \otimes b))h_i(c) \\ &= \sum_{i,j} g'_{ij}(a)g''_{ij}(b)h_i(c) \\ &= \eta'(\sum_{i,j} g'_{ij} \otimes g''_{ij} \otimes h_i)(a \otimes b \otimes c). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f(abc) &= \mu^*(f)(a \otimes bc) \\ &= \eta(\Delta_{A^*}(f))(a \otimes bc) \\ &= \sum_i g_i(a)h_i(bc) \\ &= \sum_{i,j} g_i(a)h'_{ij}(b)h''_{ij}(c) \\ &= \eta'(\sum_{i,j} g_i \otimes h'_{ij} \otimes h''_{ij})(a \otimes b \otimes c). \end{aligned}$$

Além disso, $f(a) = f(a1) = \mu^*(f)(a \otimes 1) = \eta(\Delta_{A^*}(f))(a \otimes 1) = \sum_i g_i(a)h_i(1) = \sum_i g_i(a)\epsilon_{A^*}(h_i)$, ou seja, $\sum_i g_i \epsilon_{A^*}(h_i) = f$, e analogamente, $\sum_i \epsilon_{A^*}(g_i)h_i = f$.

Como A tem dimensão finita, para provar o item (b), basta observar que $\text{Hom}_K(A, C) \simeq A^* \otimes_K C$ e aplicar o item (a) e a proposição (2.1.3). \square

Pela demonstração acima, vemos que $f(ab) = \sum_i g_i(a)h_i(b)$ para todo $a, b \in H$, onde $h_i, g_i \in H^*$ e $\Delta_{H^*}(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$. Por outro lado, se $(h'_i, g'_i)_i$ é uma família finita de elementos de H^* , tais que $f(ab) = \sum_i g'_i(a)h'_i(b)$ para todo $a, b \in H$, então $\Delta_{H^*}(f) = \sum_i g_i \otimes h_i = \sum_i g'_i \otimes h'_i$.

Definição 2.1.7. *Seja H uma biálgebra. Se a aplicação id_H possui uma inversa S com relação ao produto de convolução, então dizemos que S é a antípoda de H e que H é uma álgebra de Hopf.*

Note que se S é a antípoda de H , temos

$$\sum S(h_1)h_2 = \sum h_1S(h_2) = \epsilon(h)1 \quad (2.5)$$

para cada $h \in H$.

Exemplo 2.1.8. *A álgebra de grupo KG é uma álgebra de Hopf definindo $\Delta(g) = g \otimes g$, $\epsilon(g) = 1$ e $S(g) = g^{-1}$ para cada $g \in G$.*

Proposição 2.1.9. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então,*

(a) H^* é uma álgebra de Hopf;

(b) $H \simeq H^{**}$ como álgebras de Hopf.

Demonstração. Que H^* é uma álgebra, segue direto da proposição (2.1.5), tomando $A = K$ e $C = H$. Pela proposição anterior, com $A = H$, H^* é uma coálgebra. Então, para provar que H^* é uma álgebra de Hopf, temos que verificar que Δ_{H^*} e ϵ_{H^*} são morfismos de álgebras (ou, equivalentemente, que $*$ e $u \circ \epsilon$ são morfismos de coálgebras) e que H^* possui antípoda. Provaremos primeiro que Δ_{H^*} é um morfismo de álgebras. Sejam $f, g \in H^*$ e $h, l \in H$, então

$$\begin{aligned} (f * g)(hl) &= \sum f(h_1l_1)g(h_2l_2) \\ &= \sum f_1(h_1)f_2(l_1)g_1(h_2)g_2(l_2) \\ &= \sum (f_1 * g_1)(h)(f_2 * g_2)(l), \end{aligned}$$

logo, $\Delta_{H^*}(f * g) = \sum f_1 * g_1 \otimes f_2 * g_2 = \Delta_{H^*}(f)\Delta_{H^*}(g)$. Temos também que $\epsilon(hl) = \epsilon(h)\epsilon(l)$, logo, $\Delta_{H^*}(\epsilon) = \epsilon \otimes \epsilon$, então Δ_{H^*} é um morfismo de álgebras. Para provar que ϵ_{H^*} é um morfismo de álgebras, basta ver que

$$\epsilon_{H^*}(f * g) = f * g(1) = f(1)g(1) = \epsilon_{H^*}(f)\epsilon_{H^*}(g)$$

e

$$\epsilon_{H^*}(\epsilon) = \epsilon(1) = 1.$$

Finalmente, provaremos que H^* possui antípoda. De fato, provaremos que $S^* : H^* \rightarrow H^*$ definida por $S^*(f) = f \circ S$ é a antípoda de H^* . Sejam $f \in H^*$ e $h \in H$, então

$$\begin{aligned} \sum(S^*(f_1) * f_2)(h) &= \sum f_1 \circ S(h_1) f_2(h_2) \\ &= \sum f(S(h_1) h_2) \\ &= f(\epsilon(h)) \\ &= f(1) \epsilon(h) \\ &= \epsilon_{H^*}(f) \epsilon(h). \end{aligned}$$

Logo, $\sum(S^*(f_1) * f_2) = \epsilon_{H^*}(f) \epsilon$. Analogamente, $\sum(f_1 * S^*(f_2)) = \epsilon_{H^*}(f) \epsilon$. Portanto, H^* é uma álgebra de Hopf.

Para provar que $H \simeq H^{**}$ como álgebras de Hopf, basta provar que a aplicação usual $j : H \rightarrow H^{**}$, definida por $j(h)(f) = f(h)$ para $h \in H$ e $f \in H^*$, é um morfismo de álgebras e de coálgebras. Se $h, g \in H$ e $f \in H^*$ então

$$\begin{aligned} j(hg)(f) &= f(hg) \\ &= \sum f_1(h) f_2(g) \\ &= \sum j(h)(f_1) j(g)(f_2) \\ &= (j(h) * j(g))(f) \end{aligned}$$

e $j(1)(f) = f(1) = \epsilon_{H^*}(f)$. Logo, j é um morfismo de álgebras. Para provar que j é um morfismo de coálgebras, temos que provar que $\Delta_{H^{**}} \circ j = (j \otimes j) \circ \Delta$ e que $\epsilon = \epsilon_{H^{**}} \circ j$. Mas,

$$j(h)(f * g) = f * g(h) = \sum f(h_1) g(h_2) = \sum j(h_1)(f) j(h_2)(g)$$

para todos $f, g \in H^*$ e $h \in H$. Logo, $\Delta_{H^{**}}(j(h)) = \sum j(h_1) \otimes j(h_2)$, mas, por outro lado, $(j \otimes j) \circ \Delta(h) = \sum j(h_1) \otimes j(h_2)$, ou seja, $\Delta_{H^{**}} \circ j(h) = (j \otimes j) \circ \Delta(h)$ para todo $h \in H$. Além disto, $\epsilon_{H^{**}}(j(h)) = j(h)(\epsilon) = \epsilon(h)$ para todo $h \in H$. Assim, concluímos que j é um morfismo de coálgebras. Como H tem dimensão finita j é um isomorfismo de K -espaços vetoriais, mas vimos acima que j é um morfismo de álgebra e de coálgebra. Portanto, j é um isomorfismo de álgebra de Hopf. \square

Exemplo 2.1.10. Tomando $H = KG$ na proposição anterior, concluímos que KG^* é uma álgebra de Hopf. Considere $\{p_x | x \in G\}$ uma base de KG^* tal que $p_x(y) = \delta_{x,y}$ para todo $x, y \in G$. Vamos provar que $\Delta_{KG^*}(p_x) = \sum_{y \in G} p_y \otimes p_{y^{-1}x}$. Vimos anteriormente que esta igualdade segue do fato de que $p_x(ab) = \sum_{y \in G} p_y(a) p_{y^{-1}x}(b)$ para todo $a, b \in KG$. Para demonstrar este fato,

basta verificá-lo para $a, b \in G$, que é uma base de KG . Sejam $a, b \in G$, então

$$p_x(ab) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq ab \\ 1, & \text{se } x = ab. \end{cases}$$

Suponhamos que $x \neq ab$. Caso $y = a$, temos que $y^{-1}x \neq b$, ou seja, $p_{y^{-1}x}(b) = 0$. Caso $y \neq a$, temos que $p_y(a) = 0$. Em todo caso, temos que $p_y(a)p_{y^{-1}x}(b) = 0$, logo, se $x \neq ab$ então $\sum_{y \in G} p_y(a)p_{y^{-1}x}(b) = 0$. Como $p_y(a) = 0$ para todo $y \neq a$ e supondo que $x = ab$ temos que $p_y(a)p_{y^{-1}x}(b) = 1$ para $y = a$, concluímos que

$$\sum_{y \in G} p_y(a)p_{y^{-1}x}(b) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq ab \\ 1, & \text{se } x = ab. \end{cases}$$

ou seja,

$$p_x(ab) = \sum_{y \in G} p_y(a)p_{y^{-1}x}(b), \forall a, b \in G.$$

Proposição 2.1.11. *Seja H uma álgebra de Hopf. A antípoda S de H satisfaz as seguintes propriedades:*

- 1) $S(gh) = S(h)S(g)$ para todo $g, h \in H$;
- 2) $S(1) = 1$;
- 3) $\Delta(S(h)) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1)$;
- 4) $\epsilon(S(h)) = \epsilon(h)$;
- 5) as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $\sum S(h_2)h_1 = \epsilon(h)1$ para todo $h \in H$
- (b) $\sum h_2S(h_1) = \epsilon(h)1$ para todo $h \in H$
- (c) $S^2 = id_H$.

Demonstração. 1) Sejam $g, h \in H$. Defina $F, G \in \text{Hom}_K(H \otimes_K H, H)$ por $F(g \otimes h) = S(h)S(g)$ e $G(g \otimes h) = S(gh)$. Provaremos que $G * \mu = \mu * F = u_H \circ \epsilon_{H \otimes_K H}$, e com isso concluiremos que $F = G$, ou seja, que $S(gh) = S(h)S(g)$ para todos $g, h \in H$.

$$\begin{aligned} \mu * F(g \otimes h) &= \sum g_1 h_1 F(g_2 \otimes h_2) \\ &= \sum g_1 h_1 S(h_2)S(g_2) \\ &= \sum g_1 S(g_2)\epsilon(h) \\ &= \epsilon(g)\epsilon(h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G * \mu(g \otimes h) &= \sum G(g_1 \otimes h_1) g_2 h_2 \\
&= \sum S(g_1 h_1) g_2 h_2 \\
&= \sum S((gh)_1) (gh)_2 \\
&= S * id_H(gh) \\
&= \epsilon(gh) \\
&= \epsilon(g)\epsilon(h)
\end{aligned}$$

2) Como $\epsilon(1) = 1$ e $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, temos que

$$S(1) = S(1) \cdot 1 = (id * S)(1) = \epsilon(1)1 = 1$$

3) Para Δ , $F = \Delta \circ S$ e $G = T(S \otimes S)\Delta$ em $Hom_K(H, H \otimes H)$, mostraremos que $F * \Delta = \Delta * G = u_{H \otimes_K H} \circ \epsilon$ e, conseqüentemente, que $\Delta \circ S = T(S \otimes S)\Delta$, ou seja, $\Delta \circ S(h) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1)$ para todo $h \in H$. Seja $h \in H$, então

$$\begin{aligned}
(F * \Delta)(h) &= \sum \Delta \circ S(h_1) \Delta(h_2) \\
&= \sum \Delta(S(h_1) h_2) \\
&= \epsilon(h) \Delta(1) \\
&= \epsilon(h) 1 \otimes 1 \\
&= u_{H \otimes_K H} \circ \epsilon(h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta * G)(h) &= \sum \Delta(h_1) (S(h_3) \otimes S(h_2)) \\
&= \sum h_1 S(h_4) \otimes h_2 S(h_3) \\
&= \sum h_1 S(h_3) \otimes \epsilon(h_2) \\
&= \sum h_1 S(h_2) \otimes 1 \\
&= \epsilon(h) 1 \otimes 1 \\
&= u_{H \otimes_K H} \circ \epsilon(h)
\end{aligned}$$

4) Para $h \in H$, temos que

$$\begin{aligned}
\epsilon(S(h)) &= \epsilon(\sum S(h_1) \epsilon(h_2)) \\
&= \sum \epsilon(S(h_1)) \epsilon(h_2) \\
&= \sum \epsilon(S(h_1) h_2) \\
&= \epsilon((S * id)(h)) \\
&= \epsilon(h),
\end{aligned}$$

logo, $\epsilon \circ S = \epsilon$. Observe que se H tem dimensão finita, esta igualdade é trivial, pois $\epsilon \circ S = S^*(\epsilon) = \epsilon$.

5) (a) \Rightarrow (c): Como $S * S^2(h) = \sum S(h_1) S^2(h_2) = S(\sum S(h_2) h_1) = S(\epsilon(h)) = \epsilon(h) S(1) = \epsilon(h) 1$, temos que S^2 é a inversa de S . Então, $S^2 = id_H$.

(c) \Rightarrow (b): Temos que $u\epsilon(h) = (id * S)(h) = \sum h_1 S(h_2) = \sum S^2(h_1)S(h_2) = S(\sum h_2 S(h_1))$, então $S \circ u\epsilon(h) = S^2(\sum h_2 S(h_1)) = \sum h_2 S(h_1)$. Por outro lado, pelo item (2), segue que $S \circ u = u$, $S \circ u \circ \epsilon(h) = u \circ \epsilon(h)$, e portanto

$$\sum h_2 S(h_1) = u \circ \epsilon(h).$$

De forma similar, podemos provar que (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a). Portanto, (a), (b) e (c) são equivalentes. □

2.2 Módulos e Comódulos

Nesta seção apresentaremos a estrutura de comódulo. Nosso principal objetivo é provar o Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf, que será essencial para dar uma caracterização de semi-simplicidade para álgebras de Hopf, bem como para provar que álgebras de Hopf de dimensão finita são álgebras de Frobenius.

Definição 2.2.1. *Seja A uma K -álgebra. Um A -módulo à direita, é um K -espaço vetorial M com uma aplicação K -linear $\gamma : M \otimes_K A \rightarrow M$, tal que, os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_K A \otimes_K A & \xrightarrow{id_M \otimes \mu} & M \otimes_K A \\ \downarrow \gamma \otimes id_A & & \downarrow \gamma \\ M \otimes_K A & \xrightarrow{\gamma} & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M \otimes_K K & \xrightarrow{id_M \otimes u} & M \otimes_K A \\ & \searrow & \downarrow \gamma \\ & & M \end{array}$$

Proposição 2.2.2. *Sejam M e N dois H -módulos, onde H é uma álgebra de Hopf. Então,*

- (a) $Hom_K(M, N)$ possui estrutura de H -módulo dada por $(fh)(m) = \sum f(mS(h_1))h_2$ para $f \in Hom_K(M, N)$ e $h \in H$.
- (b) $M \otimes_K N$ possui estrutura de H -módulo dada por $(m \otimes n)h = (m \otimes n)\Delta(h) = \sum m h_1 \otimes n h_2$.
- (c) K pode ser visto como um H -módulo via a aplicação ϵ . A ação é definida por $kh = k\epsilon(h)$, para todo $k \in K$ e $h \in H$.

Demonstração. (a) Sejam $g, h \in H, f \in Hom_K(M, N)$ e $m \in M$ então:

$$\begin{aligned}
 ((fg)h)(m) &= \sum (fg)(mS(h_1))h_2 \\
 &= \sum (f(mS(h_1)S(g_1))g_2)h_2 \\
 &= \sum f(mS(g_1h_1))(g_2h_2) \\
 &= \sum f(mS((gh)_1))(gh)_2 \\
 &= (f(gh))(m)
 \end{aligned}$$

(b) Sejam $g, h \in H$ e $m \otimes n \in M \otimes_K N$ então:

$$\begin{aligned}
 (m \otimes n)(hg) &= (m \otimes n)\Delta(hg) \\
 &= \sum m(hg)_1 \otimes n(hg)_2 \\
 &= \sum (m(h_1g_1) \otimes n(h_2g_2)) \\
 &= \sum (mh_1 \otimes nh_2)g \\
 &= ((m \otimes n)h)g
 \end{aligned}$$

(c) Como $\epsilon : H \rightarrow K$ é um morfismo de álgebras segue que K possui uma estrutura natural de H -módulo dada por $kh = k\epsilon(h)$ para $k \in K$ e $h \in H$.

□

Em particular, tomando $N = K$ no item (a), $\text{Hom}_K(M, K)$ é H -módulo com $(fh)(m) = f(mS(h))$; além disso, vemos que $fh = S(h)f$ onde a ação à esquerda é a usual. Denotaremos por $(\)^*$ o funtor

$$\text{Hom}_K(\ , K) : \text{Mod}H \rightarrow \text{Mod}H$$

que leva um H -módulo M em um H -módulo M^* com a estrutura comentada acima.

Definição 2.2.3. *Seja C uma coálgebra. Um C -comódulo à direita, é um K -espaço vetorial M com uma aplicação K -linear $\rho : M \rightarrow M \otimes_K C$, tal que, os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes_K C \\
 \rho \downarrow & & \downarrow id_M \otimes \Delta \\
 M \otimes_K C & \xrightarrow{\rho \otimes id_C} & M \otimes_K C \otimes_K C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes_K C \\
 \downarrow \rho & \searrow \rho \otimes 1 & \downarrow id_M \otimes \epsilon \\
 M \otimes_K C & & M \otimes_K K
 \end{array}$$

Notação: Seja (M, ρ) um C -comódulo à direita. Para todo $m \in M$ denote

$$\rho(m) = \sum m_0 \otimes m_1$$

onde $m_0 \in M$ e $m_1 \in C$. Usando esta notação, a definição de comódulo pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\sum m_{0_0} \otimes m_{0_1} \otimes m_1 = \sum m_0 \otimes m_{1_1} \otimes m_{1_2} = \sum m_0 \otimes m_1 \otimes m_2$$

$$\sum \epsilon(m_1)m_0 = m$$

Definição 2.2.4. *Sejam M e N dois C -comódulos com estruturas dadas por ρ_M e ρ_N , respectivamente. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é um morfismo de comódulos se $\rho_N \circ f = (f \otimes id_C) \circ \rho_M$, ou seja, se o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow \rho_M & & \downarrow \rho_N \\ M \otimes_K C & \xrightarrow{f \otimes id} & N \otimes_K C \end{array}$$

Sejam C uma coálgebra, M um K -espaço vetorial e $\rho : M \rightarrow M \otimes_K C$ uma aplicação K -linear. Se $m \in M$ e $\rho(m) = \sum_i m_i \otimes c_i$, então podemos definir uma aplicação K -linear $\psi_\rho : C^* \otimes_K M \rightarrow M$ por $f \otimes m \mapsto \sum_i f(c_i)m_i$.

Proposição 2.2.5. *(M, ρ) é um C -comódulo à direita se, e somente se, (M, ψ_ρ) é um C^* -módulo à esquerda.*

Demonstração. Seja $\rho : M \rightarrow M \otimes_K C$ uma aplicação K -linear. Denote por $f \cdot m = \psi_\rho(f \otimes m)$ e $\rho(m) = \sum m_0 \otimes m_1$, então $f \cdot m = \sum f(m_1)m_0$ para todo $f \in C^*$ e $m \in M$.

Suponhamos que (M, ρ) seja um C -comódulo à direita. Então, como $1_{C^*} = \epsilon$, segue da definição de comódulo que

$$1_{C^*} \cdot m = \sum \epsilon(m_1)m_0 = m.$$

Logo, para $f, g \in C^*$ e $m \in M$

$$\begin{aligned} f \cdot (g \cdot m) &= f \cdot (\sum g(m_1)m_0) \\ &= \sum g(m_1)f \cdot m_0 \\ &= \sum g(m_1)f(m_{0_1})m_{0_0} \\ &= \sum g(m_2)f(m_1)m_0 \\ &= \sum (f * g)(m_1)m_0 \\ &= (f * g) \cdot m, \end{aligned}$$

ou seja, (M, ψ_ρ) é um C^* -módulo à esquerda.

Reciprocamente, suponhamos que (M, ψ_ρ) seja um C^* -módulo à esquerda. Então, $\epsilon \cdot m = m$, logo $\sum \epsilon(m_1)m_0 = m$, o que prova a segunda condição da definição de comódulos. Para verificar a primeira condição, observe que, dados $f, g \in C^*$ e $m \in M$, temos $(f * g) \cdot m =$

$f \cdot (g \cdot m)$. Se $\mu' : M \otimes_K K \otimes_K K \rightarrow M$ é o isomorfismo canônico, então

$$\begin{aligned} (f * g) \cdot m &= \sum (f * g)(m_1) m_0 \\ &= \sum f(m_{1_1}) g(m_{1_2}) m_0 \\ &= \mu'(id \otimes f \otimes g)(id \otimes \Delta) \rho(m) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f \cdot (g \cdot m) &= f(\sum g(m_1) m_0) \\ &= \sum g(m_1) f(m_{0_1}) m_{0_0} \\ &= \mu'(id \otimes f \otimes g)(\rho \otimes id) \rho(m). \end{aligned}$$

Logo, $(id \otimes f \otimes g)(id \otimes \Delta) \rho(m) = (id \otimes f \otimes g)(\rho \otimes id) \rho(m)$ para todos $f, g \in C^*$. Portanto, $(id \otimes \Delta) \rho(m) = (\rho \otimes id) \rho(m)$. De fato, podemos supor que

$$(\rho \otimes id) \rho(m) - (id \otimes \Delta) \rho(m) = \sum m_{ij} \otimes c_i \otimes c_j$$

onde $(c_i)_i$ é uma base de C e $m_{ij} \in M$. Logo, $m_{ij} = \mu'(id \otimes e_i^* \otimes e_j^*)(\sum m_{ij} \otimes c_i \otimes c_j) = 0$. Portanto

$$(id \otimes \Delta) \rho(m) = (\rho \otimes id) \rho(m).$$

□

Exemplo 2.2.6. Se (C, Δ, ϵ) é uma coálgebra então (C, Δ) é um comódulo. A proposição (2.2.5) determina uma ação à esquerda de C^* em C dada por

$$f \rightarrow c = \sum f(c_2) c_1$$

para $f \in C^*$ e $c \in C$.

Se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita então podemos definir uma estrutura de H^* módulo à direita para H , via o isomorfismo $j : H \rightarrow H^{**}$. De fato, se $h \in H$ e $f \in H^*$, define $h \leftarrow f = j^{-1}(j(h)f)$. Mas, se $g \in H^*$ então

$$\begin{aligned} (j(h)f)(g) &= j(h)(g * (S^*(f))) \\ &= g * (f \circ S)(h) \\ &= \sum g(h_1) f \circ S(h_2) \\ &= g(\sum f \circ S(h_2) h_1) \\ &= j(\sum f \circ S(h_2) h_1)(g), \end{aligned}$$

logo, $j(h)f = j(\sum f \circ S(h_2) h_1)$, ou seja, $h \leftarrow f = j^{-1}(j(h)f) = \sum f \circ S(h_2) h_1 = S^*(f) \rightarrow h$. Portanto

$$h \leftarrow f = S^*(f) \rightarrow h. \quad (2.6)$$

Podemos definir também uma ação à esquerda de H^* em H dada por

$$f \rightarrow h = \sum f(S(h_1))h_2 \quad (2.7)$$

e uma ação à direita de H^* em H dada por

$$h \leftarrow f = \sum f(h_1)h_2 \quad (2.8)$$

e observe que $f \rightarrow h = h \leftarrow S^*(f)$.

Exemplo 2.2.7. Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com (h_i) uma K -base para H e (h_i^*) a base dual para H^* . Então, (H^*, ρ) é um H -comódulo à direita, onde $\rho : H^* \rightarrow H^* \otimes H$ é definida por $\rho(f) = \sum_i h_i^* * f \otimes h_i$. Pela proposição (2.2.5), basta verificar que ψ_ρ é o produto de convolução em H^* (H^* é um H^* -módulo à esquerda com o produto de convolução). Sejam $f, g \in H^*$, então $\psi_\rho(g \otimes f) = \sum g(h_i)h_i^* * f = g * f$.

Definição 2.2.8. Seja H uma álgebra de Hopf. Um H -módulo de Hopf é um K -espaço vetorial M , tal que:

- (1) M é um H -módulo;
- (2) M é um H -comódulo, via $\rho : M \rightarrow M \otimes_K H$;
- (3) ρ é um morfismo de H -módulos.

Em (3) estamos pensando $M \otimes_K H$ com a estrutura de H -módulo definida em (2.2.2)(b).

Como (H, Δ) é um H -comódulo e Δ é um morfismo de H -módulos, da definição de biálgebra (Δ é um morfismo de álgebras), segue que H é um H -módulo de Hopf.

Vimos anteriormente que H^* é um H -comódulo à direita e um H -módulo à direita (e também um H^{op} -módulo com $(hf)(x) = f(xh)$). Então, para provar que H^* é um H -módulo de Hopf, basta provar que ρ , definida no exemplo (2.2.7), é um morfismo de H -módulos. Observe que, para todo $f, g \in H^*$ e $h, l \in H$, temos

$$\begin{aligned} g*(fh)(l) &= \sum g(l_1)(fh)(l_2) \\ &= \sum g(l_1)f(l_2S(h)) \\ &= \sum g(l_1\epsilon(h_2))f(l_2S(h_1)) \\ &= \sum g(l_1S(h_2)h_3)f(l_2S(h_1)) \\ &= \sum (h_3g)(l_1S(h_2))f(l_2S(h_1)) \\ &= \sum ((h_2g)*f)(lS(h_1)) \\ &= \sum (((h_2g)*f)h_1)(l) \end{aligned}$$

ou seja

$$g*(fh) = \sum ((h_2g)*f)h_1 \quad (2.9)$$

Utilizaremos (2.9) para provar que ρ é um morfismo de H -módulos. Para isto, basta observar que $g*f = \sum_i g(x_i)t_i^*$ para todo $g \in H^*$ se, e somente se, $\rho(f) = \sum_i t_i^* \otimes x_i$. Pois, se $f \in H^*$, temos que

$$\begin{aligned} g*(fh) &= \sum ((h_2g)*f)h_1 \\ &= \sum_i \sum [(h_{(2)}g)(h_i)h_i^*f]h_{(1)} \\ &= \sum_i \sum g(h_i h_{(2)})[h_i^*f]h_{(1)} \end{aligned}$$

para todo $g \in H^*$, logo, $\rho(fh) = \sum_i \sum (h_i^*f)h_{(1)} \otimes h_i h_{(2)} = \rho(f)h$.

Para completar a demonstração de que ρ é um morfismo de H -módulos, vamos provar que $g*f = \sum g(x_i)t_i^*$ para todo $g \in H^*$ se, e somente se, $\rho(f) = \sum t_i^* \otimes x_i$. Pela definição de ρ no exemplo (2.2.7), temos que $\rho(f) = \sum_i h_i^*f \otimes h_i$. Se $g*f = \sum_j g(x_j)t_j$ para todo $g \in H^*$, então $h_i^*f = \sum_j h_i^*(x_j)t_j$. Logo,

$$\begin{aligned} \rho(f) &= \sum_i (\sum_j h_i^*(x_j)t_j) \otimes h_i \\ &= \sum_j \sum_i t_j \otimes h_i^*(x_j)h_i \\ &= \sum_j t_j \otimes x_j \end{aligned}$$

Por outro lado, se $\rho(f) = \sum_i h_i^*f \otimes h_i = \sum_i t_i \otimes x_i$, então $\sum_i g(x_i)t_i = \sum_i g(h_i)h_i^*f = g*f$. Resumindo a discussão acima, temos a seguinte

Proposição 2.2.9. *Seja H uma álgebra de Hopf. Então,*

- (i) H é um H -módulo de Hopf
- (ii) se H tem dimensão finita, então H^* é um H -módulo de Hopf.

Demonstração. Vide discussão anterior. □

Exemplo 2.2.10. *Seja V um K -espaço vetorial. Definindo $\rho : V \otimes_K H \rightarrow V \otimes_K H \otimes_K H$ por $\rho := id_V \otimes \Delta$ e $(v \otimes h)g = v \otimes hg$ para todos $h, g \in H$ e $v \in V$, temos que $V \otimes_K H$ é um H -módulo de Hopf à direita. O teorema fundamental dos módulos de Hopf diz que este é o exemplo de H -módulos de Hopf, chamado de módulo de Hopf trivial.*

Definição 2.2.11. *i) Seja M um H -módulo à direita. O conjunto dos invariantes por H em M é o H -submódulo*

$$M^H = \{m \in M \mid mh = m\epsilon(h), \forall h \in H\}$$

ii) Seja M um H -módulo à esquerda. O conjunto dos invariantes por H em M é o H -submódulo

$$M^H = \{m \in M \mid hm = \epsilon(h)m, \forall h \in H\}$$

iii) Seja M um H -comódulo. O conjunto dos coinvariantes de H em M é o subespaço

$$M^{coH} = \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1\}.$$

Teorema 2.2.12. (Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf) *Seja M um H -módulo de Hopf. Então $M \simeq M^{coH} \otimes_K H$ como H -módulos de Hopf à direita, onde $M^{coH} \otimes_K H$ é o módulo de Hopf trivial.*

Demonstração. Defina $f : M^{coH} \otimes_K H \rightarrow M$ por $m' \otimes h \mapsto m'h$ e $g : M \rightarrow M^{coH} \otimes_K H$ por $m \mapsto \sum m_0 S(m_1) \otimes m_2$. Precisamos provar que, para $m \in M$, temos $\sum m_0 S(m_1) \in M^{coH}$. Mas,

$$\begin{aligned} \rho(\sum m_0 S(m_1)) &= \sum \rho(m_0 S(m_1)) \\ &= \sum \rho(m_0) S(m_1) \\ &= \sum (m_0 \otimes m_1) S(m_2) \\ &= \sum m_0 S(m_3) \otimes m_1 S(m_2) \\ &= \sum m_0 S(m_2) \otimes \epsilon(m_1) \\ &= \sum m_0 S(m_1) \otimes 1 \end{aligned}$$

ou seja, $\sum m_0 S(m_1) \in M^{coH}$.

Provaremos que f , definida acima, é um isomorfismo de H -módulos de Hopf com $f^{-1} = g$. Seja $m \in M$, então

$$\begin{aligned} f \circ g(m) &= f(\sum m_0 S(m_1) \otimes m_2) \\ &= \sum m_0 S(m_1) m_2 \\ &= \sum m_0 \epsilon(m_1) \\ &= m. \end{aligned}$$

Por outro lado, sejam $m' \in M^{coH}$ e $h \in H$, então

$$\begin{aligned} g \circ f(m' \otimes h) &= g(m'h) \\ &= \sum (m'h)_0 S((m'h)_1) \otimes (m'h)_2 \\ &= \sum m'_0 h_1 S(m'_1 h_2) \otimes m'_2 h_3 \\ &= \sum m' h_1 S(h_2) \otimes h_3 \\ &= \sum m' \epsilon(h_1) \otimes h_2 \\ &= m' \otimes \sum \epsilon(h_1) h_2 \\ &= m' \otimes h \end{aligned}$$

Portanto, $f \circ g = id_M$ e $g \circ f = id_{M^{coH} \otimes_K H}$

Para terminar a demonstração, falta provar que f é um morfismo de H -módulos de Hopf, ou seja, falta provar que f é um morfismo de H -módulos e de H -comódulos. Que f é morfismo de H -módulos é claro, pois

$$f((m' \otimes h)l) = f(m' \otimes hl) = m'(hl) = (m'h)l = f(m' \otimes h)l$$

para $m' \otimes h \in M^{coH} \otimes_K H$ e $l \in H$. Temos também que

$$\begin{aligned} \rho \circ f(m' \otimes h) &= \rho(m'h) \\ &= \sum m'h_1 \otimes h_2 \\ &= (f \otimes id_H)(\sum m' \otimes h_1 \otimes h_2) \\ &= (f \otimes id_H)(id_{M^{coH}} \otimes \Delta)(m' \otimes h) \end{aligned}$$

Logo, f é um morfismo de H -comódulos. □

2.3 Integrais e Semi-Simplicidade

Seja A uma K -álgebra. Um A -módulo S é **simples** se os únicos submódulos são 0 e S ; S é dito **semi-simples** se S é soma de A -módulos simples. A K -álgebra A é semi-simples, se A vista como um A -módulo é semi-simples.

Teorema 2.3.1. *Seja S um A -módulo. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) S é semi-simples;
- (b) S é soma direta de A -módulos simples;
- (c) todo sub-módulo de S é um somando de S .

Demonstração. Ver [1], pág. 172. □

Uma **integral à direita** em H é um elemento $t \in H$ tal que $th = t\epsilon(h)$, para todo $h \in H$, ou seja, t é um elemento de H^H ; uma **integral à esquerda** em H é um elemento $t' \in H$ tal que $ht' = \epsilon(h)t'$, para todo $h \in H$. Denotaremos por \int_H^r o espaço das integrais à direita e \int_H^l o espaço das integrais à esquerda. No próximo lema provaremos, entre outras coisas, que a existência de uma integral não nula em H implica que H é de dimensão finita.

Seja (C, Δ, ϵ) uma coálgebra. Diremos que um subespaço J de C é um **coideal à direita** se $\Delta(J) \subseteq J \otimes_K C$. Analogamente se define coideal à esquerda.

Lema 2.3.2. *Seja H uma álgebra de Hopf. Se J é um ideal e um coideal à direita (esquerda) não nulo de H então $J = H$. Em particular,*

- (a) *se H contém um ideal à direita não nulo de dimensão finita, então H tem dimensão finita;*
- (b) *se H é semi-simples então H tem dimensão finita;*
- (c) *se H contém uma integral t , então H tem dimensão finita.*

Demonstração. Seja J um ideal à direita não nulo e um coideal à direita. Se $\epsilon(J) = 0$, então para todo $h \in J$ temos $h = \sum \epsilon(h_1)h_2 \in \epsilon(J)H = 0$, logo, $J = 0$, uma contradição. Portanto, $\epsilon(J) \neq 0$, e então existe $h \in H$ tal que $\epsilon(h) = 1$. Logo, $1 = \epsilon(h)1 = \sum h_1 S(h_2) \in JH \subseteq J$, ou seja, $1 \in J$. Portanto $J = H$.

Provaremos (a) como consequência da primeira parte da proposição. Suponhamos que J tenha dimensão finita e defina o ideal $I = H^* \rightarrow J$ (onde $f \rightarrow x$ é como em 2.7). Provaremos que I é um coideal e um ideal à direita. Sejam $f \in H^*$, $x \in J$ e $y \in H$, então

$$\Delta(f \rightarrow x) = \sum f(S(x_1))x_2 \otimes x_3 = \sum f \rightarrow x_1 \otimes x_2 \in I \otimes_K H$$

e

$$\begin{aligned} (f \rightarrow x)y &= \sum f(S(x_1))x_2 y \\ &= \sum f(\epsilon(y_1)S(x_1))x_2 y_2 \\ &= \sum f(y_1 S(y_2)S(x_1))x_2 y_3 \\ &= \sum (f y_1)(S(x_1 y_2))x_2 y_3 \\ &= \sum (f y_1) \rightarrow x y_2 \in I, \end{aligned}$$

logo, I é um coideal e um ideal à direita. Pela primeira parte da proposição, temos $I = H$. Portanto H tem dimensão finita, pois I tem dimensão finita.

Se H é semi-simples, então $H = I \oplus \text{Ker}(\epsilon)$ para algum ideal I . Como $\text{ker}(\epsilon)$ tem codimensão 1 em H , I tem dimensão 1 e o item (b) segue direto do item (a). Para provar o item (c), basta ver que t gera um ideal de dimensão finita e aplicar o item (a). \square

Lema 2.3.3. *Se (M, ρ) é um H -comódulo à direita, então $M^{H^*} = (M)^{\text{co}H}$, com (M, ψ_ρ) um H^* -módulo à esquerda.*

Demonstração. Sejam $m \in (M)^{\text{co}H}$ e $f \in H^*$, então $\psi_\rho(f \otimes m) = f(1)m = \epsilon_{H^*}(f)m$, ou seja, $m \in M^{H^*}$. Reciprocamente, seja $m \in M^{H^*}$, então $\psi_\rho(f \otimes m) = \epsilon_{H^*}(f)m = f(1)m$ para todo $f \in H^*$. Por outro lado, se $\rho(m) = \sum_i m'_i \otimes h'_i$, então $\psi_\rho(f \otimes m) = \sum_i f(h'_i)m'_i$ para todo $f \in H^*$. Definindo $y = m \otimes 1 - (\sum m'_i \otimes h'_i) = m \otimes 1 - \rho(m)$, temos que $\mu'(id_M \otimes f)(y) = 0$

para todo $f \in H^*$, onde $\mu' : M \otimes_K K \rightarrow M$ é o isomorfismo canônico. Podemos supor que $y = \sum m_i \otimes h_i$ com $(h_i)_i$ linearmente independente. Logo,

$$m_j = \mu'(id \otimes h_j^*)(y) = 0$$

para todo j . Daí, segue que $y = 0$, ou seja, $\rho(m) = m \otimes 1$. Portanto, $m \in M^{coH}$. \square

Proposição 2.3.4. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então,*

- (a) \int_H^r e \int_H^l possuem dimensão um.
- (b) a antípoda S é bijetora, e $S(\int_H^l) = \int_H^r$
- (c) H é um H^* -módulo cíclico à direita e à esquerda.
- (d) H é uma álgebra de Frobenius.

Demonstração. (a) Como H tem dimensão finita, H^* também é uma álgebra de Hopf de mesma dimensão e, pela proposição (2.2.9), H^{**} é um H^* -módulo de Hopf; por sua vez, H^{**} é isomorfo a H como álgebra de Hopf e este isomorfismo induz uma estrutura de H^* -módulo de Hopf sobre H . Logo, pelo teorema fundamental dos módulos de Hopf, (2.2.12), $H \simeq (H)^{coH^*} \otimes_K H^*$. Mas $\dim H^* = \dim H$, logo, $\dim(H)^{coH^*} = 1$. Pelo lema (2.3.3), temos que $(H)^{coH^*} = H^H = \int_H^l$. Portanto, \int_H^l tem dimensão um. Que \int_H^r tem dimensão um, segue direto do item (b) que provaremos agora.

(b) Sejam $0 \neq h^* \in \int_{H^*}^l$ e $\alpha : \int_{H^*}^l \otimes_K H \rightarrow H^*$ o isomorfismo de H -módulos de Hopf do teorema fundamental dos módulos de Hopf. Se $g \in \ker(S)$, então $\alpha(h^* \otimes g) = h^* g = S(g)h^* = 0$. Como α é injetora, $h^* \otimes g = 0$, mas $h^* \neq 0$, logo $g = 0$. Portanto, S é injetora. Como H é de dimensão finita, S é bijetora. Provaremos agora que $S(\int_H^l) = \int_H^r$. Sejam $h \in \int_H^l$ e $g \in H$. Então, $g = S(t)$ para algum $t \in H$ ($t = S^{-1}(g)$) e

$$\begin{aligned} S(h)g &= S(h)S(t) \\ &= S(th) \\ &= S(\epsilon(t)h) \\ &= s(h)\epsilon(t) \\ &= S(h)\epsilon(S(t)) \\ &= S(h)\epsilon(g). \end{aligned}$$

Por outro lado, seja $h \in \int_H^r$ e tome $g \in H$ tal que $S(g) = h$. Queremos provar que $tg = \epsilon(t)g$ para todo $t \in H$. Mas,

$$\begin{aligned}
 S(tg - \epsilon(t)g) &= S(g)S(t) - S(g)\epsilon(t) \\
 &= hS(t) - h\epsilon(t) \\
 &= h\epsilon(S(t)) - h\epsilon(t) \\
 &= h\epsilon(t) - h\epsilon(t) = 0
 \end{aligned}$$

como S é injetora, $tg = \epsilon(t)g$, ou seja, $g \in \int_H^l$.

(c) Aplicando o teorema fundamental dos módulos de Hopf e o lema (2.3.3), temos o isomorfismo $\alpha : \int_H^l \otimes H^* \rightarrow H$ dado por $\alpha(h \otimes f) = h \leftarrow f$ para $h \in \int_H^l$ e $f \in H^*$, pela igualdade (2.6) temos $h \leftarrow f = S^*(f) \rightarrow h$. Então, se $0 \neq h \in \int_H^l$, $H = h \leftarrow H^* = S^*(H^*) \rightarrow h = H^* \rightarrow h$ onde a última igualdade segue do item (b) para a álgebra de Hopf H^* .

(d) Seja $0 \neq f \in \int_{H^*}^l$. Defina $(h, g) = f(hg) \in K$ para $h, g \in H$. Provaremos que $(,) : H \otimes_K H \rightarrow K$ é uma forma bilinear, associativa e não degenerada. Que $(,)$ é bilinear, segue direto da linearidade da f , e a associatividade é clara da definição de $(,)$ e da associatividade da multiplicação em H . Seja $a \in H$ tal que $(a, h) = 0$ para todo $h \in H$. Então $0 = f(ah) = (hf)(a)$ para todo $h \in H$. Pelo item (c), H^* é um H -módulo cíclico, logo, $f(a) = 0$ para todo $f \in H^*$, ou seja, $a = 0$. Portanto, $(,)$ é não degenerada. \square

Corolário 2.3.5. *Se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre K então H é auto-injetiva.*

Demonstração. Pelo item (d) da proposição (2.3.4), H é Frobenius. Segue da proposição (1.3.3) que H é auto-injetiva. \square

Exemplo 2.3.6. *Seja $\{p_x | x \in G\}$ uma base de $(KG)^*$ tal que $p_x(y) = \delta_{x,y}$ para todo $x, y \in G$. Então, a forma bilinear determinada por $f = p_1 \in \int_{H^*}^l$ é simétrica. Portanto, KG é uma álgebra simétrica.*

Vamos precisar do Teorema de Wedderburn, que caracteriza as álgebras semi-simples, para provar o Teorema de Maschke para Álgebras de Hopf de dimensão finita. No próximo capítulo, veremos uma relação do Teorema de Maschke com um resultado obtido por Green, Marcos e Solberg, em [6], relacionando a semi-simplicidade de H com a propriedade do módulo trivial ser projetivo.

Proposição 2.3.7. *Seja A uma K -álgebra. As condições seguintes são equivalentes:*

- (a) *A é semi-simples;*
- (b) *todo A -módulo é semi-simples;*
- (c) *todo A -módulo é projetivo;*
- (d) *todo A -módulo é injetivo;*

(e) toda sequência exata curta cinde;

(f) todo ideal à direita de A é um fator direto de A .

Demonstração. Ver [1], pág. 174. □

Teorema 2.3.8. (Maschke) *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. São equivalentes:*

(i) H é semi-simples

(ii) $\epsilon(\int_H^r) \neq 0$

(iii) $\epsilon(\int_H^l) \neq 0$

Demonstração. Por (2.3.4)(b), temos que (ii) e (iii) são equivalentes. Mostraremos que (i) é equivalente a (ii). Suponhamos que H seja semi-simples. Então, como $\ker(\epsilon)$ é um ideal de H , temos $H = I \oplus \ker(\epsilon)$ para algum ideal à direita $I \neq 0$ de H . Para provar que $\epsilon(\int_H^r) \neq 0$, basta provar que $I \subset \int_H^r$. Sejam $z \in I$ e $h \in H$. Observe que $h - \epsilon(h)1 \in \ker(\epsilon)$, logo $z(h - \epsilon(h)) \in I \cap \ker(\epsilon) = 0$. Então, segue que $zh = z\epsilon(h)$, ou seja, $z \in \int_H^r$. Portanto, $I \subset \int_H^r$.

Reciprocamente, suponhamos que $\epsilon(\int_H^r) \neq 0$. Obviamente, podemos escolher $t \in \int_H^r$ tal que $\epsilon(t) = 1$. Sejam M um H -módulo e N um sub-módulo de M . Por (2.3.7) e (2.3.1), para provar que H é semi-simples, basta provar que N é um somando de M . Sejam $\pi' \in \text{Hom}_K(M, N)$ tal que $\pi'(n) = n$ para $n \in N$ e $t \in \int_H^r$ tal que $\epsilon(t) = 1$, defina $\pi : M \rightarrow N$ por $m \mapsto (\pi't)(m)$. Queremos provar que $\pi \in \text{Hom}_H(M, N)$ e que π é uma retração. Sejam $m \in M$ e $h \in H$. Observe primeiro que se $t \in \int_H^r$ então $\Delta(t) \in (H \otimes_K H)^H$. De fato,

$$\begin{aligned} \Delta(t)h &= \Delta(t)\Delta(h) \\ &= \Delta(th) \\ &= \Delta(t\epsilon(h)) \\ &= \Delta(t)\epsilon(h). \end{aligned}$$

Provaremos agora que π é H -linear:

$$\begin{aligned} \pi(mh) &= (\pi't)(mh) \\ &= \sum \pi'(mhS(t_1))t_2 \\ &= \sum \pi'(mh_1\epsilon(h_2)S(t_1))t_2 \\ &= \sum \pi'(mh_1S(t_1h_2))t_2h_3 \quad (\text{usando que } \Delta(t)h_2 = \Delta(t)\epsilon(h_2)) \\ &= \sum \pi'(mh_1S(h_2)S(t_1))t_2h_3 \\ &= \sum \pi'(m\epsilon(h_1)S(t_1))t_2h_2 \\ &= \sum \pi'(mS(t_1))t_2h \\ &= ((\pi't)(m))h \\ &= \pi(m)h \end{aligned}$$

Para provar que π é uma retração, devemos encontrar $f \in \text{Hom}_H(N, M)$ tal que $\pi \circ f = id_N$. Mas, se $n \in N$ então $\pi(n) = (\pi' t)(n) = \pi'(nS(t_1))t_2 = nS(t_1)t_2 = n\epsilon(t) = n$. Portanto, tomando $f : N \rightarrow M$ definida por $n \mapsto n$, vemos que π é uma retração. \square

Corolário 2.3.9. *Seja G um grupo finito. KG é semi-simples se, e somente se, a característica de K não divide a ordem de G .*

Demonstração. $t = \sum_{g \in G} g$ é uma integral à direita em KG e $\epsilon(t) = |G|$. Pelo Teorema (2.3.8), temos que KG é semi-simples se, e somente se, $|G| \neq 0$. \square

2.4 Homomorfismos

Proposição 2.4.1. *Dado um morfismo de H -módulos $f : M \rightarrow N$, seja f^H a restrição de f a M^H .*

(i) $f^H(M^H) \subset N^H$

(ii) Se $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow L$ são morfismos de H -módulos, então $(g \circ f)^H = g^H \circ f^H$

(iii) $(id_M)^H = id_{M^H}$

(iv) Se $f : M \rightarrow N$ é um isomorfismo de H -módulos então $f^H : M^H \rightarrow N^H$ é um isomorfismo de H -módulos.

Demonstração. (i) Seja $n = f(m) \in f(M^H)$, então

$$nh = f(m)h = f(mh) = f(m\epsilon(h)) = f(m)\epsilon(h) = n\epsilon(h)$$

logo $n \in N^H$. Portanto, $f^H(M^H) \subset N^H$.

(ii) Seja $m \in M^H$. Por definição, $(g \circ f)^H(m) = g(f(m))$. Segue diretamente do item anterior que $g(f(m)) = g(f^H(m)) = g^H(f^H(m)) = g^H \circ f^H(m)$. Portanto, $(g \circ f)^H(m) = g^H \circ f^H(m)$ para todo $m \in M^H$.

(iii) é claro.

(iv) Segue dos itens anteriores, pois se $f : M \rightarrow N$ é um isomorfismo então

$$f^H \circ (f^{-1})^H = (f \circ f^{-1})^H = (id_N)^H = id_{N^H}$$

e

$$(f^{-1})^H \circ f^H = (f^{-1} \circ f)^H = id_{M^H}.$$

Portanto, $f^H : M^H \rightarrow N^H$ é um isomorfismo. \square

Com os três primeiros itens da proposição anterior, temos um funtor $(_)^H : \text{mod } H \rightarrow \text{mod } K$ no qual identificamos a sub-categoria dos H -módulos triviais com a categoria dos K -espaços vetoriais, pois todo espaço vetorial tem estrutura de H -módulo trivial por $\nu h := \epsilon(h)v$.

Proposição 2.4.2. *Seja H uma álgebra de Hopf sobre um corpo K e M e N dois H -módulos. Então*

$$\text{Hom}_H(M, N) = (\text{Hom}_K(M, N))^H.$$

Demonstração. Sejam $f \in \text{Hom}_H(M, N)$, $m \in M$ e $h \in H$ então

$$\begin{aligned} (fh)(m) &= \sum f(mS(h_1))h_2 \\ &= \sum (f(m)S(h_1))h_2 \\ &= f(m)(\sum S(h_1)h_2) \\ &= f(m)\epsilon(h) \end{aligned}$$

logo $f \in (\text{Hom}_K(M, N))^H$. Por outro lado, se $f \in (\text{Hom}_K(M, N))^H$, então

$$\begin{aligned} f(mh) &= \sum f(mh_1\epsilon(h_2)) \\ &= \sum f(mh_1)\epsilon(h_2) \\ &= \sum (fh_2)(mh_1) \\ &= \sum f(mh_1S(h_2))h_3 \\ &= \sum f(m\epsilon(h_1))h_2 \\ &= f(m)\sum \epsilon(h_1)h_2 \\ &= f(m)h \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.3. *Seja H uma álgebra de Hopf sobre um corpo K . Sejam L , M e N três H -módulos. Então o morfismo*

$$\nu : \text{Hom}_H(M \otimes_K L, N) \rightarrow \text{Hom}_H(L, \text{Hom}_K(M, N))$$

definido por $\nu(f)(a)(b) = f(b \otimes a)$ para todo $f \in \text{Hom}_H(M \otimes_K L, N)$, $a \in L$ e $b \in M$ é um isomorfismo de H -módulos para todos H -módulos L , M e N . Além disso, se N é um H -bimódulo então ν é um isomorfismo de H^{op} -módulos.

Demonstração. Observe que, pelas proposições (2.4.1) e (2.4.2), basta provar apenas que

$$\nu : \text{Hom}_K(M \otimes_K L, N) \rightarrow \text{Hom}_K(L, \text{Hom}_K(M, N))$$

é um isomorfismo de H -módulos. Provaremos primeiro que ν^{-1} é dada por $g \mapsto ((b \otimes a) \mapsto g(a)(b))$. Seja

$$\nu' : \text{Hom}_K(L, \text{Hom}_K(M, N)) \rightarrow \text{Hom}_K(M \otimes_K L, N)$$

o morfismo dado por $g \mapsto ((b \otimes a) \mapsto g(a)(b))$ para $g \in \text{Hom}_K(L, \text{Hom}_K(M, N))$, $b \in M$ e $a \in L$. Então

$$\nu' \circ \nu(f)(b \otimes a) = \nu(f)(a)(b) = f(b \otimes a)$$

e

$$\nu \circ \nu'(g)(a)(b) = \nu'(g)(b \otimes a) = g(a)(b)$$

Portanto $\nu' = \nu^{-1}$.

Falta provar que ν é morfismo de H -módulos. De fato, seja $f \in \text{Hom}_K(M \otimes_K L, N)$ e $h \in H$. Então,

$$\begin{aligned} \nu(fh)(a)(b) &= (fh)(b \otimes a) \\ &= \sum f((b \otimes a)S(h_1))h_2 \\ &= \sum f(bS(h_2) \otimes aS(h_1))h_3 \text{ (pela proposição (2.1.11) item 3)} \\ &= \sum (\nu(f)(aS(h_1))(bS(h_2)))h_3 \\ &= \sum (\nu(f)(aS(h_1))h_2)(b) \\ &= (\nu(f)h)(a)(b) \end{aligned}$$

Logo, ν é morfismo de H -módulos.

Para provar que ν é um isomorfismo de H^{op} -módulos, quando N é um H -bimódulo, basta observar que ν é H^{op} -linear. Mas,

$$\begin{aligned} \nu(hf)(b \otimes a) &= (hf)(a)(b) \\ &= (hf(a))(b) \\ &= h(f(a)(b)) \\ &= h(\nu(f)(a \otimes b)) \\ &= (h\nu(f))(a \otimes b). \end{aligned}$$

□

Proposição 2.4.4. *Sejam H uma K -álgebra de Hopfe e M um H -módulo.*

- (a) *A aplicação $\text{Tr} : M \otimes M^* \rightarrow K$ definida por $\text{Tr}(m \otimes \alpha) = \alpha(m)$ é um morfismo de H -módulos.*
- (b) *A aplicação $\sigma : \text{Hom}_K(K, M) \rightarrow M$ definida por $\sigma(f) = f(1)$, para f em $\text{Hom}_K(K, M)$, é um isomorfismo de H -módulos, funtorial em M .*

Demonstração. (a) Tr é morfismo de H -módulos:

$$\begin{aligned}
 Tr((m \otimes \alpha)h) &= \sum Tr(mh_1 \otimes \alpha h_2) \\
 &= \sum (\alpha h_2)(mh_1) \\
 &= \sum \alpha(mh_1 S(h_2))h_2 \\
 &= \sum \alpha(mh_1 S(h_1))h_2 \\
 &= \sum \alpha(m \epsilon(h_1))h_2 \\
 &= \sum \alpha(m) \epsilon(h_1)h_2 \\
 &= \alpha(m)h \\
 &= Tr(m \otimes \alpha)h
 \end{aligned}$$

(b) σ é morfismo de H -módulos:

$$\begin{aligned}
 \sigma(fh) &= (fh)(1) \\
 &= \sum f(1 \cdot S(h_1))h_2 \\
 &= \sum f(1 \cdot \epsilon(S(h_1)))h_2 \\
 &= \sum f(1)(\epsilon(h_1)h_2) \\
 &= \sigma(f)h
 \end{aligned}$$

Para concluir que σ é um isomorfismo, basta observar que a aplicação

$$\sigma' : M \rightarrow Hom_K(K, M)$$

definida por $m \mapsto (k \mapsto mk)$ é a inversa de σ .

□

Proposição 2.4.5. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo K , e sejam M e N dois H -módulos finitamente gerados. Então,*

(a) o morfismo

$$\phi_{N,M} : N^* \otimes_K M \rightarrow Hom_K(N, M)$$

definido por $\phi_{N,M}(\alpha \otimes m)(n) = m\alpha(n)$ para m em M , n em N e α em M^* , é um isomorfismo de H -módulos, com $\phi_{N,M}^{-1}$ dada por

$$g \mapsto \sum n_i^* \otimes g(n_i)$$

para $g \in Hom_K(N, M)$ e uma K -base $\{n_i\}$ de N . Além disso, se M é um H -bimódulo então $\phi_{N,M}$ é um isomorfismo de H^{op} -módulos.

(b) o morfismo

$$\eta : M^* \otimes_K N^* \rightarrow (N \otimes_K M)^*$$

definido por $\eta(\alpha \otimes \beta)(n \otimes m) = \alpha(m)\beta(n)$, para α em M^* , β em N^* , m em M e n em N , é um isomorfismo de H -módulos.

Demonstração.

(a) Temos que $\phi_{N,M}^{-1}$ é dada por $g \mapsto \sum n_i^* \otimes g(n_i)$. De fato, seja

$$\phi' : Hom_K(N, M) \rightarrow N^* \otimes_K M$$

o morfismo definido por $g \mapsto \sum n_i^* \otimes g(n_i)$ para $g \in Hom_K(N, M)$. Dado $n \in N$, temos $n = \sum_i n_i^*(n)n_i$ e, como consequência, $g = \sum_i g(n_i)n_i^*$. Portanto

$$\phi_{N,M} \circ \phi'(g)(n) = \phi_{N,M} \left(\sum_i n_i^* \otimes g(n_i) \right) (n) = \sum_i (\phi(n_i^* \otimes g(n_i)))(n) = \sum_i g(n_i)(n_i^*(n)) = g(n)$$

e

$$\phi' \circ \phi_{N,M}(\alpha \otimes m) = \phi'(\phi_{N,M}(\alpha \otimes m)) = \sum_i n_i^* \otimes \phi_{N,M}(\alpha \otimes m)(n_i) = \sum_i n_i^* \otimes m(\alpha(n_i)) = \alpha \otimes m$$

logo, $\phi' = \phi_{N,M}^{-1}$.

$\phi_{N,M}$ é morfismo de H -módulos:

$$\begin{aligned} \phi_{N,M}((\alpha \otimes m) \cdot h)(n) &= \phi_{N,M}((\alpha \otimes m)\Delta(h))(n) \\ &= \sum \phi_{N,M}(\alpha h_1 \otimes m h_2)(n) \\ &= \sum (m h_2)((\alpha h_1)(n)) \\ &= \sum (m h_2)\alpha(nS(h_1)) \\ &= \sum m\alpha(nS(h_1))h_2 \\ &= \sum \phi_{N,M}(\alpha \otimes m)(nS(h_1))h_2 \\ &= (\phi_{N,M}(\alpha \otimes m) \cdot h)(n) \end{aligned}$$

Para provar a segunda parte, observe que $Hom_K(N, M)$ possui uma estrutura de H^{op} -módulo dada por $(hf)(n) = h(f(n))$ e $N^* \otimes_K M$ possui uma estrutura de H^{op} -módulo dada por $h(\alpha \otimes m) = \alpha \otimes hm$. $\phi_{N,M}$ é morfismo de H^{op} -módulos, pois

$$\begin{aligned} \phi_{N,M}(h(\alpha \otimes y))(x) &= \phi(\alpha \otimes hy)(x) \\ &= (hy)\alpha(x) \\ &= h(y\alpha(x)) \\ &= h(\phi(\alpha \otimes y)(x)) \\ &= (h\phi(\alpha \otimes y))(x). \end{aligned}$$

Portanto, $\phi_{N,M}$ é um isomorfismo de H^{op} -módulos.

(b) Basta observar que $\eta = \nu^{-1} \circ \phi_{M,N^*}$ é um isomorfismo de $M^* \otimes_K N^*$ em $(N \otimes_K M)^*$, onde ν é dada em (2.4.3), e ver que

$$\begin{aligned} \nu^{-1} \circ \phi_{M,N^*}(\alpha \otimes \beta)(n \otimes m) &= \nu^{-1}(\phi_{M,N^*}(\alpha \otimes \beta))(n \otimes m) \\ &= (\phi_{M,N^*}(\alpha \otimes \beta)(m))(n) \\ &= (\beta\alpha(m))(n) \\ &= \alpha(m)\beta(n) \end{aligned}$$

para α em M^* , β em N^* , m em M e n em N . □

Proposição 2.4.6. *Sejam H uma álgebra de Hopf sobre um corpo K e M um H -módulo. O morfismo*

$$i : K \rightarrow \text{Hom}_K(M, M)$$

definido por $i(1) = id_M$ é um morfismo de H -módulos.

Em particular, se H é de dimensão finita sobre K e M é finitamente gerado, i induz um morfismo de H -módulos $i' : K \rightarrow M^* \otimes_K M$.

Demonstração. i é morfismo de H -módulos:

$$\begin{aligned} i(1h)(m) &= i(1\epsilon(h))(m) \\ &= m\epsilon(h) \\ &= \sum mS(h_1)h_2 \\ &= \sum i(1)(mS(h_1))h_2 \\ &= (i(1)h)(m) \end{aligned}$$

Suponhamos que H seja de dimensão finita sobre K e seja M um H -módulo finitamente gerado. Seja $\{m_1, \dots, m_n\}$ uma K -base para M . Então, por (2.4.5), temos que $\phi_{M,M}^{-1}$ é um isomorfismo de H -módulos, logo $i' = \phi_{M,M}^{-1} \circ i$ é um morfismo de H -módulos. Além disso, $i'(1) = \sum m_i^* \otimes m_i$. □

Proposição 2.4.7. *Seja H uma álgebra de Hopf sobre um corpo K . A aplicação natural*

$$j : M \rightarrow M^{**}$$

é um H -homomorfismo para todo H -módulo M se, e somente se, $S^2 = id_H$.

Além disso, se $S^2 = id_H$ e H é de dimensão finita sobre K , então j é um isomorfismo para todo H -módulo M finitamente gerado.

Demonstração. Suponhamos que $S^2 = id_H$. Sejam $m \in M$, $h \in H$ e $f \in M^*$. Então,

$$\begin{aligned}
 (j(m)h)(f) &= \sum j(m)(fS(h_1))h_2 \\
 &= \sum (fS(h_1))(m)h_2 \\
 &= \sum f(mS^2(h_1))h_2 \\
 &= \sum f(mh_1)\epsilon(h_2) \\
 &= \sum f(mh_1\epsilon(h_2)) \\
 &= f(mh) \\
 &= j(mh)(f)
 \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que j seja um H -homomorfismo para todo H -módulo M . Tomando $M = H$, temos que $j(h)(f) = (j(1)h)(f)$, para todo f em H^* e h em H . Logo,

$$\begin{aligned}
 f(h) &= j(h)(f) \\
 &= (j(1)h)(f) \\
 &= j(1)(fS(h)) \\
 &= (fS(h))(1) \\
 &= f(S^2(h))
 \end{aligned}$$

para todo f em H^* . Portanto, $S^2 = id_H$.

No caso de H ser de dimensão finita e M um H -módulo finitamente gerado, é bem conhecido que j é um isomorfismo de K -módulos. Então, supondo que $S^2 = id$, temos que j é um morfismo de H módulos, logo j é um isomorfismo de H -módulos. □

Proposição 2.4.8. *Seja H uma álgebra de Hopf sobre um corpo K e M um H -módulo. O morfismo*

$$Tr^* : M^* \otimes_K M \rightarrow K$$

definido por $Tr^(\alpha \otimes m) = \alpha(m)$, para todo m em M e α em M^* , é um morfismo de H -módulos para todo H -módulo M se, e somente se, $S^2 = id_H$.*

Demonstração. Suponhamos que $S^2 = id_H$. Então, pela proposição (2.1.11) item 5, temos que $\sum h_2S(h_1) = \epsilon(h)$, daí

$$\begin{aligned}
 Tr^*((\alpha \otimes m)h) &= \sum Tr^*(\alpha h_1 \otimes m h_2) \\
 &= \sum (\alpha h_1)(m h_2) \\
 &= \sum \alpha(m h_2 S(h_1)) \\
 &= \alpha(m \epsilon(h)) \\
 &= \alpha(m) \epsilon(h) \\
 &= Tr^*(\alpha \otimes m)h
 \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que Tr^* seja um morfismo de H -módulos para todo H -módulo M . Então, tomando $M = H$, temos que $Tr^*((\alpha \otimes m)h) = Tr^*(\alpha \otimes m)h$, para todo α em H^* e para todo m e h em H , ou seja, $(\alpha h_1)(m h_2) = \alpha(m)h$, para todo α em H^* e para todo m e h em H . Tomando $m = 1$, temos que $\alpha(h_2 S(h_1)) = \alpha(\epsilon(h))$, para todo α em H^* e h em H . Logo, $h_2 S(h_1) = \epsilon(h)$, para todo h em H . Portanto, usando a proposição (2.1.11) novamente, temos que $S^2 = id_H$. □

Provamos na proposição (2.4.8) que a aplicação $Tr^* : M^* \otimes_K M \rightarrow K$ dada por $Tr^*(\alpha \otimes m) = \alpha(m)$ é um morfismo de H -módulos, se e somente se, a antípoda S tem ordem dois. Na proposição (2.4.5), vimos que $Hom_K(M, M)$ é isomorfo a $M^* \otimes_K M$. Utilizando esta identificação, podemos dizer que a aplicação Tr^* é a aplicação traço usual.

$$\begin{array}{ccc}
 M^* \otimes_K M & \xrightarrow{Tr^*} & K \\
 & \searrow \phi_{M,M}^{-1} & \uparrow tr \\
 & & \text{End}_K(M)
 \end{array}$$

Lema 2.4.9. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com $S^2 = id_H$ e M, N, E três H -módulos finitamente gerados. Então existe um isomorfismo de H -módulos*

$$\psi : Hom_H(N^* \otimes_K M, E) \rightarrow Hom_H(M, N \otimes_K E)$$

dado por $\psi(f)(m) = \sum_i n_i \otimes f(n_i^* \otimes m)$, para $f \in Hom_H(N^* \otimes_K M, E)$, $m \in M$ e $\{n_1, \dots, n_r\}$ uma K -base de N .

Demonstração. Pela proposição (2.4.7), temos que $j : N \rightarrow N^{**}$ é um isomorfismo. Logo

$$j^{-1} \otimes Id_E : N^{**} \otimes_K E \rightarrow N \otimes_K E$$

é um isomorfismo. Pela proposição (2.4.5), temos o isomorfismo

$$\phi_{N^*, E}^{-1} : Hom_K(N^*, E) \rightarrow N^{**} \otimes_K E.$$

Aplicando o funtor $\text{Hom}_H(M, _)$ na composição $(j^{-1} \otimes id_E) \circ \phi_{N^*, E}^{-1}$ obtemos o isomorfismo

$$\text{Hom}_H(M, \text{Hom}_K(N^*, E)) \xrightarrow{((j^{-1} \otimes id_E) \circ \phi_{N^*, E}^{-1})^*} \text{Hom}_H(M, N \otimes_K E)$$

Compondo o isomorfismo acima com o isomorfismo de adjunção

$$v : \text{Hom}_H(N^* \otimes_K M, E) \rightarrow \text{Hom}_H(M, \text{Hom}_K(N^*, E))$$

dado em (2.4.3), obtemos o isomorfismo desejado. De fato, seja $f \in \text{Hom}_H(N^* \otimes_K M, E)$ e $m \in M$, então

$$\begin{aligned} ((j^{-1} \otimes id_E \circ \phi_{N^*, E}^{-1})^* \circ v)(f)(m) &= (j^{-1} \otimes id_E \circ \phi_{N^*, E}^{-1} \circ v)(f)(m) \\ &= (j^{-1} \otimes id_E \circ \phi_{N^*, E}^{-1})(v(f)(m)) \\ &= (j^{-1} \otimes id_E)(\phi_{N^*, E}^{-1}(v(f)(m))) \\ &= (j^{-1} \otimes id_E)(\sum n_i^{**} \otimes v(f)(m)(n_i^*)) \\ &= (j^{-1} \otimes id_E)(\sum n_i^{**} \otimes f(n_i^* \otimes m)) \\ &= \sum n_i \otimes f(n_i^* \otimes m) \\ &= \psi(f)(m). \end{aligned}$$

□

Corolário 2.4.10. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre K com $S^2 = id$ e M, N, X e Y quatro H -módulos finitamente gerados e $\beta : X \rightarrow Y$ um morfismo de H -módulos. Então, os seguintes diagramas são comutativos:*

(a)

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_H(N^* \otimes_K M, X) & \xrightarrow{\beta_*} & \text{Hom}_H(N^* \otimes_K M, Y) \\ \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 \\ \text{Hom}_H(M, N \otimes_K X) & \xrightarrow{(id_N \otimes \beta)_*} & \text{Hom}_H(M, N \otimes_K Y) \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_H(\text{Hom}_K(N, M), X) & \xrightarrow{\beta_*} & \text{Hom}_H(\text{Hom}_K(N, M), Y) \\ \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 \\ \text{Hom}_H(M, N \otimes_K X) & \xrightarrow{(id_N \otimes \beta)_*} & \text{Hom}_H(M, N \otimes_K Y) \end{array}$$

em que as flechas verticais são isomorfismos.

Demonstração. Segue do lema (2.4.9) que ψ_1 e ψ_2 no diagrama (a) são isomorfismos. Falta provar a comutatividade do diagrama (a).

Seja $f \in \text{Hom}_H(N^* \otimes_K M, X)$. Então

$$\begin{aligned}
 \psi_2 \circ \beta_*(f) &= \psi_2(\beta \circ f) \\
 &= \sum_{i=1}^n n_i \otimes \beta \circ f(n_i^* \otimes _) \\
 &= (id_N \otimes \beta)_*(\sum_{i=1}^n n_i \otimes f(n_i^* \otimes _)) \\
 &= (id_N \otimes \beta)_* \circ \psi_1(f)
 \end{aligned}$$

Para provar a comutatividade do diagrama (b), basta observar que, obviamente, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 Hom_H(Hom_K(N, M), X) & \xrightarrow{\beta_*} & Hom_H(Hom_K(N, M), Y) \\
 \downarrow (\phi_{N,M})^* & & \downarrow (\phi_{N,M})^* \\
 Hom_H(N^* \otimes_K M, X) & \xrightarrow{\beta_*} & Hom_H(N^* \otimes_K M, Y)
 \end{array}$$

e utilizar a comutatividade do diagrama do item (a). □

Lema 2.4.11. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre K com $S^2 = id$, M um H -módulo finitamente gerado e P um H -módulo projetivo finitamente gerado. Então,*

$$D(Hom_H(M \otimes_K P, H)) \simeq M \otimes_K D(Hom_H(P, H))$$

onde $D : mod H^{op} \rightarrow mod H$ é o funtor dualidade $Hom_K(_, K)$ usual.

Demonstração. Sabemos que $M \otimes_K P$ e H_H são H -módulos. Pelo isomorfismo (2.4.3) temos

$$Hom_H(M \otimes_K P, H) \simeq Hom_H(P, Hom_K(M, H)) \quad (2.10)$$

é um isomorfismo de H^{op} -módulos.

Temos também o isomorfismo

$$Hom_H(P, Hom_K(M, H)) \simeq Hom_H(P, Hom_K(M, H) \otimes_H H). \quad (2.11)$$

Segue do isomorfismo (1.4.2) que

$$Hom_H(P, Hom_K(M, H) \otimes_H H) \simeq Hom_K(M, H) \otimes_H Hom_H(P, H). \quad (2.12)$$

Dos isomorfismos (2.10), (2.11), (2.12), temos o isomorfismo

$$D(Hom_H(M \otimes_K P, H)) \simeq D(Hom_K(M, H) \otimes_H Hom_H(P, H)) \quad (2.13)$$

de H -módulos.

Usando o isomorfismo da proposição (1.4.4), temos o isomorfismo

$$D(\text{Hom}_K(M, H) \otimes_H \text{Hom}_H(P, H)) \simeq \text{Hom}_H(\text{Hom}_K(M, H), D(\text{Hom}_H(P, H))) \quad (2.14)$$

de H -módulos .

Da Proposição (2.4.5), temos o isomorfismo

$$\text{Hom}_H(\text{Hom}_K(M, H), D(\text{Hom}_H(P, H))) \simeq \text{Hom}_H(M^* \otimes_K H, D(\text{Hom}_H(P, H))) \quad (2.15)$$

de H -módulos. Aplicando novamente o Teorema (2.4.3) temos:

$$\text{Hom}_H(M^* \otimes_K H, D(\text{Hom}_H(P, H))) \simeq \text{Hom}_H(H, \text{Hom}_K(M^*, D(\text{Hom}_H(P, H)))) \quad (2.16)$$

um isomorfismo de H -módulos. E facilmente vemos que

$$\text{Hom}_H(H, \text{Hom}_K(M^*, D(\text{Hom}_H(P, H)))) \simeq \text{Hom}_K(M^*, D(\text{Hom}_H(P, H))) \quad (2.17)$$

são isomorfos como H -módulos. E aplicando novamente a Proposição (2.4.5), temos

$$\text{Hom}_K(M^*, D(\text{Hom}_H(P, H))) \simeq M^{**} \otimes_K D(\text{Hom}_H(P, H)). \quad (2.18)$$

Como H é uma álgebra de Hopf com $S^2 = Id_H$ e de dimensão finita, segue da Proposição (2.4.7) o isomorfismo

$$M^{**} \otimes_K D(\text{Hom}_H(P, H)) \simeq M \otimes_K D(\text{Hom}_H(P, H)). \quad (2.19)$$

de H -módulos. Juntando do isomorfismo (2.13) ao (2.19) temos

$$D\text{Hom}_H(M \otimes_K P, H) \simeq M \otimes_K D(\text{Hom}_H(P, H)) \quad (2.20)$$

□

2.5 Cocomutatividade e Semi-Simplicidade.

Proposição 2.5.1. *Sejam H uma álgebra de Hopf sobre K , P um H -módulo projetivo e M um H -módulo. Então, $M \otimes_K P$ é um H -módulo projetivo.*

Demonstração. Usando o isomorfismo da proposição (2.4.3), temos que

$$\text{Hom}_H(M \otimes_K P,) \simeq \text{Hom}_H(P,) \circ \text{Hom}_K(M,).$$

Então, $\text{Hom}_H(M \otimes_K P, \)$ é exato, pois é a composta de dois funtores exatos. Portanto, $M \otimes_K P$ é projetivo. □

Corolário 2.5.2. *Seja H uma álgebra de Hopf sobre um corpo K . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) H é semi-simples.
- (b) O módulo trivial é projetivo.
- (c) H tem dimensão finita e K é injetivo.

Demonstração. Se H é semi-simples então, pela proposição (2.3.7), todo H módulo é projetivo. Reciprocamente, como $M \otimes_K K \simeq M$, se K é projetivo então, pela proposição (2.5.1), todo H -módulo M é projetivo. Aplicando novamente (2.3.7), concluímos que (a) é equivalente a (b).

Se H é semi-simples então, pelo lema (2.3.2), H tem dimensão finita. Além disso, todo H -módulo é injetivo, em particular, K é injetivo. Logo, (a) implica (c). Reciprocamente, se H tem dimensão finita então, pelo corolário (2.3.5), H é auto-injetiva. Segue da proposição (1.3.4) que, se K é injetivo, então K é projetivo. Portanto, (c) implica (b). □

Podemos provar a equivalência entre os itens (a) e (b) do corolário anterior usando o Teorema de Maschke para álgebras de Hopf (2.3.8). Suponhamos que H seja semi-simples, pelo Teorema (2.3.8), existe um $h \in H^H$ tal que $\epsilon(h) \neq 0$. Mas $\text{Hom}_H(K, H) = (\text{Hom}_K(K, H))^H \simeq H^H$, então existe um H -morfismo $f : K \rightarrow H$ tal que $\epsilon \circ f = id_K$, ou seja, ϵ é uma retração, e portanto, K é projetivo. Reciprocamente, se K é projetivo, então existe $f \in \text{Hom}_H(K, H)$ tal que $\epsilon \circ f = id_K$, logo $\epsilon(H^H) \neq 0$, por Maschke, H é semi-simples. Portanto (a) e (b) são equivalentes.

Corolário 2.5.3. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo K e sejam M e N dois H -módulos finitamente gerados. Então*

$$M \otimes_K \Omega^n(N) \simeq \Omega^n(M \otimes_K N) \oplus P$$

para algum H -módulo projetivo P .

Demonstração. Sejam $(P_0, f_0), (Q_0, g_0)$ coberturas projetiva de N e de $M \otimes_K N$, respectivamente. Desta forma, temos as seguintes seqüências exatas

$$(1) \ 0 \rightarrow \Omega(N) \rightarrow P_0 \xrightarrow{f_0} N \rightarrow 0$$

$$(2) \quad 0 \rightarrow \Omega(M \otimes_K N) \rightarrow Q_0 \xrightarrow{g_0} M \otimes_K N \rightarrow 0$$

$$(3) \quad 0 \rightarrow M \otimes_K \Omega(N) \rightarrow M \otimes_K P_0 \xrightarrow{id_M \otimes f_0} M \otimes_K N \rightarrow 0.$$

onde (3) é obtida de (1) aplicando o funtor $M \otimes_K _$. Além disso, pela proposição (2.5.1), $M \otimes_K P_0$ é um H -módulo projetivo. Aplicando o lema (1.1.11) em (2) e (3), concluímos que

$$M \otimes_K \Omega(N) \simeq \Omega(M \otimes_K N) \oplus P$$

para algum H -módulo projetivo P .

Considere as seguintes resoluções projetivas minimais de N e de $M \otimes_K N$:

$$(4) \quad P_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} P_{n-3} \rightarrow \dots P_0 \xrightarrow{f_0} N \rightarrow 0$$

$$(5) \quad Q_{n-2} \xrightarrow{g_{n-2}} Q_{n-3} \rightarrow \dots Q_0 \xrightarrow{g_0} M \otimes_K N \rightarrow 0$$

Por definição $\Omega^{n-1}(N) = \ker(f_{n-2})$ e $\Omega^{n-1}(M \otimes_K N) = \ker(g_{n-2})$. Vamos supor por hipótese de indução que

$$M \otimes_K \Omega^{n-1}(N) \simeq \Omega^{n-1}(M \otimes_K N) \oplus P$$

para algum H -módulo projetivo P . Considerando $P_{n-1} \rightarrow \Omega^{n-1}(N)$ e $Q_{n-1} \xrightarrow{p} \Omega^{n-1}(M \otimes_K N)$ as coberturas projetivas de $\Omega^{n-1}(N)$ e $\Omega^{n-1}(M \otimes_K N)$, temos as sequências exatas

$$(6) \quad 0 \rightarrow \Omega^n(N) \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \Omega^{n-1}(N) \rightarrow 0$$

$$(7) \quad 0 \rightarrow \Omega^n(M \otimes_K N) \rightarrow Q_{n-1} \rightarrow \Omega^{n-1}(M \otimes_K N) \rightarrow 0$$

Da cobertura projetiva $Q_{n-1} \rightarrow \Omega^{n-1}(M \otimes_K N)$ temos a cobertura projetiva $Q_{n-1} \oplus P \rightarrow \Omega^{n-1}(M \otimes_K N) \oplus P$ e assim temos a sequência exata

$$(8) \quad 0 \rightarrow \Omega^n(M \otimes_K N) \rightarrow Q_{n-1} \oplus P \xrightarrow{h} \Omega^{n-1}(M \otimes_K N) \oplus P \rightarrow 0$$

Aplicando $M \otimes_K _$ na sequência exata (6) temos a sequência exata

$$(9) \quad 0 \rightarrow M \otimes_K \Omega^n(N) \rightarrow M \otimes_K P_{n-1} \xrightarrow{id_M \otimes f_n} M \otimes_K \Omega^{n-1}(N) \rightarrow 0.$$

onde $M \otimes_K P_{n-1}$ é projetivo. Aplicando novamente o lema (1.1.11), podemos dizer que

$$M \otimes_K \Omega^n(N) \simeq \Omega^n(M \otimes_K N) \oplus P$$

para algum H -módulo projetivo P .

□

Teorema 2.5.4. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo K , com $S^2 = id_H$. Então H é semi-simples se, e somente se, existe um H -módulo projetivo P tal que $dim_K(P)$ seja invertível em K .*

Demonstração. Seja P um H -módulo projetivo. Como $S^2 = id_H$, por (2.4.8), temos que $Tr^* : P^* \otimes P \rightarrow K$ é um morfismo de H -módulos. Por (2.4.6), temos que $i' : K \rightarrow P^* \otimes_K P$ é um morfismo de H -módulos. Logo, a composta $Tr^* \circ i'$ é um morfismo de H -módulos. Além disso,

$$Tr^* \circ i'(1) = Tr^*\left(\sum p_i^* \otimes p_i\right) = dim_K(P) \cdot 1_K.$$

Portanto, se $dim_K(P)$ é invertível em K então Tr^* é uma retração e K é somando de $P^* \otimes P$. Como $P^* \otimes P$ é projetivo, K é projetivo. Segue de (2.5.2) que H é semi-simples.

Reciprocamente, se H é semi-simples então, todo H -módulo é projetivo, em particular K é projetivo. Assim, $dim_K K = 1$ é invertível em K . \square

Corolário 2.5.5. *Se H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $S^2 = id$, e K tem característica 0 ou característica $p > dim_K(H)$, então H é semi-simples.*

Demonstração. Basta tomar $P = H$ no Teorema anterior. \square

Lembrando que uma álgebra de Hopf é cocomutativa se $T \circ \Delta = \Delta$, apresentaremos uma caracterização para a cocomutatividade em termos de isomorfismos entre módulos.

Proposição 2.5.6. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo K . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *A aplicação $T_{M,N} : M \otimes_K N \rightarrow N \otimes_K M$ definida por $m \otimes n \mapsto n \otimes m$ é um isomorfismo de H -módulos para todo par de H -módulos M e N finitamente gerados.*
- (b) *Para todo par de H -módulos M e N , finitamente gerados, $M \otimes_K N^* \simeq Hom_K(N, M)$ como H -módulos, com o isomorfismo dado por $m \otimes f \mapsto m f(_)$.*
- (c) *Para todo par de H -módulos X e Y , finitamente gerados, $Y \otimes_K X \simeq Hom_K(X^*, Y)$, com o isomorfismo dado por $y \otimes x \mapsto y j(x)$.*
- (d) *H é cocomutativa.*

Demonstração. (a) \Rightarrow (b): Segue diretamente do isomorfismo $\phi_{N,M}$ dado em (2.4.5). A composta $\phi_{N,M} \circ T_{M,N^*}$ é o isomorfismo desejado.

(b) \Rightarrow (a): Observe que $M \otimes N^* \simeq \text{Hom}_K(N, M) \simeq N^* \otimes M$, onde o primeiro isomorfismo é dado por (b) e o segundo é o isomorfismo $\phi_{N,M}^{-1}$ dado por (2.4.5). Falta verificar que este isomorfismo é T_{M,N^*} . De fato, o isomorfismo dado em (b) leva $m \otimes f$ em $mf(_)$ e

$$\phi_{N,M}^{-1}(mf(_)) = \sum_i n_i^* \otimes mf(n_i) = \sum_i n_i^* f(n_i) \otimes m = f \otimes m.$$

Como todo H -módulo finitamente gerado é da forma N^* para algum H -módulo N , segue que (b) \Rightarrow (a).

(b) \Rightarrow (c): Como (b) \Leftrightarrow (a), temos que $T_{X^*,X}$ é um isomorfismo de H -módulos, temos também, por (2.4.4), que Tr é um morfismo de H -módulos, logo a composta $Tr \circ T_{X^*,X}$ é um morfismo de H -módulos. Por outro lado, $Tr \circ T_{X^*,X}(f \otimes x) = f(x) = Tr^*(f \otimes x)$, logo Tr^* é um morfismo de H -módulos para todo H -módulo X . Daí, segue de (2.4.8) que $S^2 = id_H$.

Como X é um H -módulo finitamente gerado, H é de dimensão finita sobre K e $S^2 = id_H$, por (2.4.7), temos que $X \simeq X^{**}$. Portanto

$$Y \otimes X \simeq Y \otimes X^{**} \simeq \text{Hom}_K(X^*, Y)$$

onde o segundo isomorfismo é dado por (b) com $M = Y$ e $N = X^*$

(c) \Rightarrow (b): Identificando N com $K \otimes N$, segue de (c) (com $Y = K$ e $X = N$) que $j_N : N \rightarrow N^{**}$ é um isomorfismo. Tomando em (c) $Y = M$ e $X = N^*$, obtemos o isomorfismo $M \otimes N^* \simeq \text{Hom}_K(N^{**}, M)$. Como $N \simeq N^{**}$, temos o isomorfismo $M \otimes N^* \simeq \text{Hom}_K(N, M)$. Além disso, temos que este isomorfismo é dado pela expressão em (b). De fato,

$$m \otimes f \mapsto m j_{N^*}(f) \mapsto ((m j_{N^*}(f)) \circ j_N = mf(_))$$

(a) \Rightarrow (d): Tome em (a) $M = N = H$, então $T : H \otimes H \rightarrow H \otimes H$ é um isomorfismo de H -módulos. Logo,

$$T(\Delta(h)) = T(\sum h_1 \otimes h_2) = T(\sum 1 \cdot h_1 \otimes 1 \cdot h_2) = T((1 \otimes 1)h) = T(1 \otimes 1)h = (1 \otimes 1)h = \Delta(h)$$

(d) \Rightarrow (a): Sejam M e N dois H -módulos e suponhamos que H seja cocomutativo. Então

$$T_{M,N}((m \otimes n)h) = T_{M,N}(\sum m h_1 \otimes n h_2) = \sum n h_2 \otimes m h_1 = (n \otimes m)T(\Delta(h)) = (T_{M,N}(m \otimes n))h$$

logo $T_{M,N}$ é um morfismo de H -módulos. Obviamente $T_{M,N}$ é um isomorfismo com inversa $T_{N,M}$.

□

Capítulo 3

Teoria de Auslander-Reiten

Neste capítulo apresentaremos conceitos e resultados básicos da teoria de Auslander-Reiten, seguindo [2] e [4] como fontes principais, e estudaremos alguns resultados sobre sequências de Auslander-Reiten no caso de álgebras de grupo, seguindo [4], como motivação para a extensão destes resultados a uma classe de álgebras de Hopf ([6]) que é desenvolvida na última seção.

3.1 A Translação de Auslander-Reiten

Em todo este capítulo, assumimos que A é uma K -álgebra de dimensão finita. Seja $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0$ uma apresentação projetiva minimal de M . Denotaremos o A^{op} -módulo Coker f_1^t por $Tr(M)$ e chamaremos de **transposto** de M .

Proposição 3.1.1. *Seja M um A -módulo indecomponível em $\text{mod } A$:*

(a) *M é projetivo se, e somente se, $Tr(M) = 0$.*

(b) *se M não é projetivo, então $\delta' : P_0^t \xrightarrow{f_1^t} P_1^t \rightarrow Tr(M) \rightarrow 0$ é uma apresentação minimal de $Tr(M)$, onde $\delta : P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0$ é uma apresentação minimal de M .*

Demonstração. (a) Se M é projetivo, então o módulo P_1 na apresentação projetiva minimal de M é zero, e então $Tr(M) = 0$. Por outro lado, se $Tr(M) = 0$ então f_1^t é uma retração, pois P_1^t é projetivo. Logo, f_1 é uma seção, logo f_0 é uma retração, logo, M é projetivo.

Para provar o item (b), suponhamos que M não seja projetivo. Pelo item (a), $Tr(M) \neq 0$. Como P_0^t e P_1^t são projetivos, δ' é uma apresentação projetiva de $Tr(M)$. Queremos provar que δ' é minimal, mas se não for minimal, pela proposição (1.1.12), temos que δ' é isomorfa a uma sequência exata δ'' da seguinte forma:

$$\delta'' : Q'_0 \oplus Q''_0 \rightarrow Q'_1 \oplus Q''_1 \rightarrow Tr(M) \rightarrow 0$$

onde $Q_0'' \simeq Q_1''$. Portanto, $(Q_0')^t \oplus (Q_0'')^t \simeq P_0$, $(Q_1')^t \oplus (Q_1'')^t \simeq P_1$ e $(Q_0'')^t \simeq (Q_1'')^t$. Então, podemos obter uma apresentação projetiva de M da seguinte forma:

$$(Q_1')^t \rightarrow (Q_0'')^t \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Mas isto contradiz a minimalidade de δ . Esta contradição prova que δ' é uma apresentação projetiva minimal de $Tr(M)$, terminando a demonstração do item (b). \square

Apresentaremos mais algumas propriedades para o transposto Tr .

Proposição 3.1.2. *Seja M um A -módulo indecomponível em $\text{mod } A$. Então*

- (a) *$Tr(M)$ não possui somando projetivo não nulo;*
- (b) *Se M não é projetivo, então $Tr(M)$ é indecomponível e $Tr(Tr(M)) \simeq M$;*
- (c) *Se M e N são indecomponíveis não projetivos, então $M \simeq N$ se, e somente se, $Tr(M) \simeq Tr(N)$.*

Demonstração. Ver [2]. \square

A correspondência $M \rightarrow Tr(M)$ não induz uma dualidade de $\text{mod } A \rightarrow \text{mod } A^{op}$, pois aniquila os projetivos. Além disso, tal correspondência pode não ser nem um funtor, mas podemos definir uma nova categoria $\underline{\text{mod}} A$ (chamada categoria projetivamente estável) onde os objetos são os mesmos de $\text{mod } A$ e os morfismos de $\underline{Hom}_A(M, N)$ são os morfismos de $Hom_A(M, N)$ módulo os morfismos que se fatoram por algum A -módulo projetivo. Com esta nova categoria temos que a correspondência $M \rightarrow Tr(M)$ induz uma dualidade de $\underline{\text{mod}} A \rightarrow \underline{\text{mod}} A^{op}$. A demonstração deste fato não é trivial mas o leitor interessado pode encontrá-la nos livros [2] e [4].

A composta do funtor dualidade usual D com o funtor Tr é chamada de **Translação de Auslander-Reiten**. Se M é indecomponível e não-projetivo, então $Tr(M)$ é um A^{op} -módulo indecomponível e portanto $DTr(M)$ é um A -módulo indecomponível. Assim, o funtor DTr permite obter um novo módulo indecomponível a partir do módulo M .

Quando A é auto-injetiva (como no caso de álgebras de Hopf de dimensão finita) ou simétrica (o caso de KG), o funtor DTr apresenta algumas propriedades importantes que serão essenciais para o estudo de sequências de Auslander-Reiten nas seções 3.3 e 3.4 a seguir.

Proposição 3.1.3. *Seja A uma K -álgebra auto-injetiva e de dimensão finita. Então, os funtores $DTr : \underline{\text{mod}} A \rightarrow \underline{\text{mod}} A$ e $\Omega^2 \mathcal{N} : \underline{\text{mod}} A \rightarrow \underline{\text{mod}} A$ são isomorfos, onde \mathcal{N} denota o funtor de Nakayama $DHom_A(_, A)$.*

Demonstração. Seja $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ uma apresentação projetiva minimal de M em $\text{mod } A$. Aplicando o funtor $(_)^t$ e em seguida o funtor D , obtemos a sequência exata

$$0 \rightarrow DTrM \rightarrow \mathcal{N}(P_1) \rightarrow \mathcal{N}(P_0) \rightarrow \mathcal{N}(M) \rightarrow 0.$$

Como $\mathcal{N}(P_i) = D(P_i)^t$ é um A -módulo injetivo e A é auto-injetiva, segue da proposição (1.3.4) que $\mathcal{N}(P_i)$ é projetivo, e assim a sequência exata

$$\mathcal{N}(P_1) \rightarrow \mathcal{N}(P_0) \rightarrow \mathcal{N}(M) \rightarrow 0.$$

é uma apresentação projetiva minimal de $\mathcal{N}(M)$. Portanto, $DTr(M) \simeq \Omega^2 \mathcal{N}(M)$. □

Proposição 3.1.4. *Seja A uma álgebra simétrica. Então*

- (a) $D \simeq \text{Hom}_A(_, A)$.
- (b) A é auto-injetiva e $\mathcal{N} \simeq id_{\text{mod } A}$.

Demonstração. Ver [4] pág. 127. □

3.2 Sequência de Auslander-Reiten

Definição 3.2.1. *Sejam L, M e N três módulos em $\text{mod } A$.*

- (a) *Um morfismo de A -módulos $f : L \rightarrow M$ é minimal à esquerda, se todo $h \in \text{End}_A(M)$ tal que $h \circ f = f$ é um automorfismo.*
- (b) *Um morfismo de A -módulos $g : M \rightarrow N$ é minimal à direita se todo $h \in \text{End}_A(M)$ tal que $g \circ h = g$ é um automorfismo.*
- (c) *Um morfismo de A -módulos $f : L \rightarrow M$ é quase cindido à esquerda se:*
 - (i) f não é uma seção.
 - (ii) *todo morfismo de A -módulos $u : L \rightarrow U$, que não é uma seção, se fatora por f .*
- (d) *Um morfismo de A -módulos $g : M \rightarrow N$ é quase cindido à direita se:*
 - (i) g não é uma retração.
 - (ii) *todo morfismo de A -módulos $v : V \rightarrow N$, que não é uma retração, se fatora por g .*
- (e) *Um morfismo de A -módulos $f : L \rightarrow M$ é minimal quase cindido à esquerda (direita) se é minimal à esquerda (direita) e quase cindido à esquerda (direita).*

Lema 3.2.2. *Seja $f : L \rightarrow M$ um morfismo em $\text{mod } A$. São equivalentes:*

(a) *f é uma retração.*

(b) *se $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ com M_i indecomponível, então as inclusões naturais $h_i : M_i \rightarrow M$ se fatoram por f .*

Demonstração. Se f é uma retração, então existe $f' : M \rightarrow L$ tal que $f \circ f' = id_M$. Defina $f_i = f'|_{M_i} : M_i \rightarrow L$. Então, $h_i = f \circ f_i$. Suponhamos (b). Sejam $f_i : M_i \rightarrow L$ tais que $f \circ f_i = h_i$ e $p_i : M \rightarrow M_i$ as projeções canônicas. Então,

$$id_M = \sum_i h_i \circ p_i = \sum_i f \circ f_i \circ p_i = f \circ \left(\sum_i f_i \circ p_i \right).$$

Portanto, f é uma retração. □

Lema 3.2.3. *As seguintes afirmações são equivalentes para um morfismo $g : N \rightarrow L$ em $\text{mod } A$:*

(a) *O morfismo g é uma seção.*

(b) *Se $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ com N_i indecomponível para todo $i = 1, \dots, n$, então as projeções canônicas $p_i : N \rightarrow N_i$ se fatoram por g*

Demonstração. É o dual do lema (3.2.2). □

Proposição 3.2.4. (a) *Se $f : L \rightarrow M$ é um morfismo quase cindido à esquerda, então L é indecomponível.*

(b) *Se $g : M \rightarrow N$ é um morfismo quase cindido à direita, então N é indecomponível.*

Demonstração. (a) Suponhamos que $L = \bigoplus_{i=1}^n L_i$ com L_i indecomponível e $n \geq 2$. Cada projeção $p_i : L \rightarrow L_i$ se fatora por f , pois f é quase cindido à esquerda. Segue de (3.2.3) que f é uma seção, o que é uma contradição. Portanto, L é indecomponível.

A demonstração de (b) é dual a de (a). Ver [4], pág. 139. □

Proposição 3.2.5. *As seguintes afirmações são equivalentes para um morfismo $g : L \rightarrow M$:*

(a) *o morfismo g é quase cindido à esquerda;*

(b) *o morfismo g não é uma seção e todo não isomorfismo $h : L \rightarrow Y$, com Y indecomponível, se fatora por g .*

Demonstração. Se g é quase cindido à esquerda, por definição, g não é uma seção. Se $h : L \rightarrow Y$ não é um isomorfismo e Y é indecomponível, h não é uma seção. Portanto, h se fatora por g , provando que (a) implica (b).

Suponhamos (b). Temos que provar apenas que, se $h : L \rightarrow Y$ não é uma seção, então h se fatora por g . Seja $Y = \bigoplus_{i=1}^n Y_i$ com Y_i indecomponível, então cada correstricção $h_i : L \rightarrow Y_i$ de h não é uma seção, pois h não é uma seção. Usando (b), temos que todos os h_i se fatoram por g . Portanto, h se fatora por g . □

Proposição 3.2.6. *As seguintes afirmações são equivalentes para um morfismo $f : M \rightarrow N$:*

- (a) *o morfismo f é quase cindido à direita;*
- (b) *o morfismo f não é uma retração e todo não isomorfismo $h : X \rightarrow N$, com X indecomponível, se fatora por f .*

pag 55 observar que Tr , a princípio, não é nem funtor.

Demonstração. Este é o resultado dual da proposição (3.2.5). Ver [4], pág. 141. □

Definição 3.2.7. *Uma sequência exata $\delta : 0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ em $\text{mod } A$ é uma sequência de Auslander-Reiten se:*

- (i) *f é quase cindido à esquerda;*
- (ii) *g é quase cindido à direita.*

Lema 3.2.8. *Seja $\delta : 0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ uma sequência exata em $\text{mod } A$. Se δ não cinde e*

- (i) *L é indecomponível, então g é minimal à direita.*
- (ii) *N é indecomponível, então f é minimal à esquerda.*

Demonstração. Provaremos apenas o item (i), pois a prova do item (ii) é análoga. Suponhamos L indecomponível. Seja $h \in \text{End}_A(M)$ tal que $g \circ h = g$. Pela proposição (1.1.1) existe um morfismo $u : L \rightarrow L$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow u & & \downarrow h & & \downarrow id_N \\
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0
 \end{array}$$

é comutativo com linhas exatas. Provaremos que u é um automorfismo e, portanto, h é um automorfismo. Se u não é um automorfismo, então u é nilpotente. Logo, existe n tal que, $u^n = 0$. Então, $h^n \circ f = h^{n-1} \circ f \circ u = f \circ u^n = 0$. Portanto, pela propriedade do conúcleo

da f (ver [1], pág. 71), temos que h^n se fatora por g , ou seja, existe $g' : N \rightarrow M$ tal que, $g' \circ g = h^n$. Mas, como $g \circ h = g$, temos $g \circ h^n = g$. Logo, $g \circ g' \circ g = g \circ h^n = g$. Como g é um epimorfismo, concluímos que $g' \circ g = id_N$. Isto contradiz a hipótese de que δ não cinde, logo, u é um automorfismo e então, h é um automorfismo. Portanto, g é minimal à direita. \square

Na definição de sequência de Auslander-Reiten, pedimos que f seja quase cindido à esquerda e g seja quase cindido a direita. Mas, observando a proposição (3.2.4) e o lema (3.2.8), vemos que estes morfismos são minimais. Veremos mais tarde que um morfismo minimal quase cindido, caracteriza uma sequência de Auslander-Reiten.

Teorema 3.2.9. *Seja $f : L \rightarrow M$ um morfismo minimal quase cindido à direita em $\text{mod } A$, com M não projetivo. Então,*

(a) M é indecomponível e f é um epimorfismo.

(b) A sequência exata $0 \rightarrow \text{Ker}(f) \xrightarrow{g} L \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$ possui as seguintes propriedades:

(i) $\text{Ker}(f) \simeq DTr(M)$;

(ii) g é um morfismo minimal quase cindido à esquerda.

Demonstração. (a) Como f é um morfismo quase cindido à direita, por (3.2.4), temos que M é indecomponível. Seja $h : P \rightarrow M$ uma cobertura projetiva de M . Como M não é projetivo, h não pode ser uma retração. Logo, h se fatora por f . Portanto, f é um epimorfismo, pois h é um epimorfismo.

Para provar o item (b), provaremos primeiro que $\text{Ker}(f)$ é indecomponível e depois provaremos que g é um morfismo minimal quase cindido à esquerda e que $\text{ker}(f) \simeq DTr(M)$. Suponhamos que $\text{Ker}(f) = \oplus_i N_i$, com N_i indecomponível. Como f não é uma retração, g não é uma seção. Pelo lema (3.2.3), alguma projeção $p_i : \text{Ker}(f) \rightarrow N_i$ não se fatora por g . Aplicando (1.2.4) para $(\text{Ker}(f), g, p_i)$, obtemos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(f) & \xrightarrow{g} & L & \xrightarrow{f} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow p_i & & \downarrow s_1 & & \downarrow id_M & & \\ 0 & \longrightarrow & N_i & \xrightarrow{s_2} & Q & \xrightarrow{t} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Provaremos que $\text{Ker}(f) \simeq N_i$. Para isto, basta provar que no caso de t ser um morfismo minimal quase cindido à direita, tem-se que s_1 é um isomorfismo. De fato, nesta situação, t não é uma retração, então se fatora por f , ou seja, existe $s' : Q \rightarrow L$ tal que $f \circ s' = t$. Como t é minimal, $s_1 \circ s'$ é um isomorfismo, e como f é minimal, $s' \circ s_1$ é um isomorfismo. Logo, s_1 é um isomorfismo e então, p_i é um isomorfismo.

Para terminar a demonstração de que $\text{Ker}(f) \simeq N_i$, resta então provar que o morfismo t é minimal quase cindido à direita. O morfismo t não é uma retração pois, caso contrário, s_i seria uma seção, e p_i se fatoraria por g . Seja $h : X \rightarrow M$ um morfismo em $\text{mod } A$ que não seja uma retração. Como f é um morfismo quase cindido à direita, concluímos que h se fatora por f , ou seja, existe um morfismo $f' : X \rightarrow L$ tal que $f \circ f' = h$. Logo, $t \circ s_1 \circ f' = f \circ f' = h$, ou seja, h se fatora por t . Então, t é um morfismo quase cindido à direita. Como N_i é indecomponível, aplicando o lema (3.2.8), temos que t é minimal à direita. Logo, t é um morfismo minimal quase cindido à direita.

Que g é minimal à esquerda, segue direto do lema (3.2.8), pois f não é uma retração e M é indecomponível.

Finalmente, provaremos que g é quase cindido à esquerda e que $\text{ker}(f) \simeq D\text{Tr}(M)$. Seja Y um módulo indecomponível não isomorfo a $D\text{Tr}(M)$ e $h : \text{Ker}(f) \rightarrow Y$ um morfismo qualquer. Se Y for injetivo, então Y não é isomorfo a $\text{Ker}(f)$, caso contrário, g seria uma seção. Por outro lado, suponhamos que Y não seja injetivo. Como Y não é isomorfo a $D\text{Tr}(M)$, temos que $\text{Tr}D(Y)$ não é isomorfo a M . Como $\text{Tr}D(Y)$ é indecomponível não isomorfo a M e f é quase cindido à direita, pela proposição (3.2.6), qualquer morfismo de $\text{Tr}D(Y)$ em M se fatora por f . Aplicando o corolário (1.4.6), temos que todo morfismo de $h : \text{Ker}(f) \rightarrow Y$ se fatora por g . Portanto, h não pode ser um isomorfismo, caso contrário g cinde.

Provamos que se Y não é isomorfo a $D\text{Tr}(M)$ então Y não é isomorfo a $\text{Ker}(f)$. Portanto, $\text{Ker}(f) \simeq D\text{Tr}(M)$. Além disto, provamos que todo não isomorfismo de $\text{Ker}(f)$ em Y , com Y indecomponível, se fatora por g . Aplicando a proposição (3.2.5), temos que g é quase cindido à esquerda. □

Proposição 3.2.10. *Seja $\delta : 0 \rightarrow L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ uma sequência exata em $\text{mod } A$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) δ é uma sequência de Auslander-Reiten;
- (b) L é indecomponível e f é quase cindido à direita;
- (c) N é indecomponível e g é quase cindido à esquerda;
- (d) g é minimal quase cindido à esquerda;
- (e) f é minimal quase cindido à direita;
- (f) N é isomorfo ao $\text{Tr}D(L)$ e g é quase cindido à esquerda;
- (g) L é isomorfo ao $D\text{Tr}(M)$ e f é quase cindido à direita.

(h) δ não cinde, N é indecomponível não projetivo e todo não-isomorfismo $h : N \rightarrow N$ se fatora por f

Demonstração. Ver [4] pág. 144 e 148. □

Teorema 3.2.11. *Se N é um módulo indecomponível não projetivo, então existe uma sequência de Auslander-Reiten*

$$\delta : 0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

Demonstração. Ver [4], pág. 145. □

O próximo Teorema garante a unicidade da sequência de Auslander-Reiten.

Teorema 3.2.12. *Dadas duas sequências de Auslander-Reiten δ e δ' em $\text{mod } A$, são equivalentes:*

(a) δ e δ' são isomorfas, ou seja, existe um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} \delta : 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \delta' : 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

onde as flechas verticais são isomorfismos;

(b) $L \simeq L'$;

(c) $N \simeq N'$.

Demonstração. Ver [4], pág. 146. □

3.3 Sequência de Auslander Reiten para Álgebras de Grupo

Esta seção é baseada na seção “Almost split sequences for group algebras” do livro [4]. Alguns resultados apresentados nesta seção do livro [4], nós já temos demonstrado para álgebras de Hopf no capítulo anterior. Como a álgebra de grupo KG é um caso particular de álgebra de Hopf, vamos usar estes resultados livremente.

Salvo indicação em contrário, assumimos em toda esta seção que K é um corpo de característica $p > 0$ e G é um grupo finito, cuja ordem é divisível por p . Então, KG não é uma álgebra semi-simples. Assim, a teoria de Auslander-Reiten aplica-se em $\text{mod } KG$. Além disso, no restante deste trabalho, denotaremos o funtor DTr por τ .

Sejam $\delta : 0 \rightarrow \tau(K) \rightarrow E \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0$ uma sequência de Auslander-Reiten e M um KG -módulo não projetivo. Como $M \otimes_K K \simeq M$ e $M \otimes_K -$ é um funtor exato, obtemos a sequência exata

$$\delta' : 0 \rightarrow M \otimes_K \tau(K) \rightarrow M \otimes_K E \xrightarrow{id_M \otimes \beta} M \rightarrow 0.$$

Agora, como KG é simétrica, $\tau \simeq \Omega^2$ e, além disso, o corolário (2.5.3) garante que $M \otimes_K \Omega^2(K) \simeq \Omega^2(M) \oplus Q$ para algum KG -módulo projetivo Q , e temos $M \otimes \tau(K) \simeq \tau(M) \oplus Q$. Ainda do fato de KG ser simétrica, segue que Q também é injetivo; usando a proposição (1.1.14) e os isomorfismos acima, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M \otimes_K \tau(K) & \longrightarrow & M \otimes_K E & \xrightarrow{id_M \otimes \beta} & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow id_M \\ 0 & \longrightarrow & \tau(M) \oplus Q & \xrightarrow{(\alpha, id_Q)} & (M \otimes_K E)' \oplus Q & \xrightarrow{(\beta_0, 0)} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde as flechas verticais são isomorfismos. Logo, $id_M \otimes \beta$ é um morfismo quase cindido à direita se, e somente se, $(\beta_0, 0)$ for um morfismo quase cindido à direita, ou seja, $id_M \otimes \beta$ é um morfismo quase cindido à direita se, e somente se,

$$\gamma : 0 \rightarrow \tau(M) \xrightarrow{\alpha} (M \otimes_K E)' \xrightarrow{\beta_0} M \rightarrow 0$$

é uma sequência de Auslander-Reiten. Assim, é importante entender que condições sobre M garantem que $id_M \otimes \beta$ é quase cindido à direita. Diremos que a sequência δ' é uma **sequência de Auslander-Reiten módulo injetivos**, se γ é uma sequência de Auslander-Reiten.

Lema 3.3.1. *Sejam $\delta : 0 \rightarrow \tau(K) \rightarrow E \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0$ uma sequência quase cindida e M um KG -módulo indecomponível. Então, são equivalentes:*

- (a) $rad(End_{KG}(M)) \subset Im(id_M \otimes \beta)_*$
- (b) $id_M \otimes \beta$ é uma retração ou é um morfismo quase cindido à direita.

Demonstração. Suponhamos que $rad(End_{KG}(M)) \subset Im(id_M \otimes \beta)_*$. Como M é indecomponível, $End_{KG}(M)$ é um anel local, então (a) implica que $Im(id_M \otimes \beta)_*$ é o $rad(End_{KG}(M))$ ou é $End_{KG}(M)$. Se $Im(id_M \otimes \beta)_* = End_{KG}(M)$ então $id_M \otimes \beta$ é uma retração. Por outro lado, se $Im(id_M \otimes \beta)_* = rad(End_{KG}(M))$ então, aplicando o funtor $Hom_{KG}(M, -)$ no diagrama acima, vemos que $Im((\beta_0)_*) = rad(End_{KG}(M))$. Logo, um endomorfismo $f : M \rightarrow M$ se fatora por β_0 se, e somente se, f não é um isomorfismo. Portanto, pela proposição (3.2.10), γ é uma sequência de Auslander-Reiten, ou seja, pelas observações anteriores, $id_M \otimes \beta$ é quase cindido à direita.

Reciprocamente, suponhamos (b). Se $id_M \otimes \beta$ é uma retração então todo endomorfismo se fatora por $id_M \otimes \beta$. Por outro lado, se $id_M \otimes \beta$ é um morfismo quase cindido à direita então todo endomorfismo que não é um isomorfismo se fatora por $id_M \otimes \beta$. \square

O lema anterior mostra que seria importante ter uma descrição da imagem de $(id_M \otimes \beta)_*$ e saber as condições necessárias e suficientes para que $id_M \otimes \beta$ seja uma retração se quisermos determinar quando a sequência δ' é uma sequência de Auslander-Reiten módulo injetivos. Vamos buscar isto, mas primeiro precisamos desenvolver algumas ferramentas.

Da inversa do isomorfismo dado em (2.4.9), com $M = N$ e $E = K$, obtemos o isomorfismo

$$End_{KG}(M) \rightarrow Hom_{KG}(M^* \otimes_K M, K)$$

dado por $f \mapsto (\alpha \otimes m \mapsto Tr^*(\alpha \otimes f(m)))$ para $f \in End_{KG}(M)$, $\alpha \in M^*$, $m \in M$. Por outro lado, $Tr^*(\alpha \otimes f(m))$ é igual ao traço do K -endomorfismo $f \circ \phi_{M,M}(\alpha \otimes m)$. Daí, identificando $M^* \otimes_K M$ com $End_K(M)$ via $\phi_{M,M}$ (definida em (2.4.5)), temos o isomorfismo

$$\psi' : End_{KG}(M) \rightarrow Hom_{KG}(End_K(M), K)$$

dado por $\psi'(f)(g) = tr(f \circ g)$ para todo $f \in End_{KG}(M)$ e $g \in End_K(M)$, onde $tr(f \circ g)$ denota o traço de $f \circ g$.

Lema 3.3.2. *Seja M um KG -módulo finitamente gerado.*

- (a) $\psi'(f)$ é uma retração se e somente se existe algum $g \in End_{KG}(M)$ tal que o traço da composta $f \circ g$ seja não nulo.
- (b) O KG -módulo trivial é um somando de $End_K(M)$ se e somente se existe algum $g \in End_{KG}(M)$ tal que o traço de g seja não nulo.

Demonstração. Seja $f \in End_{KG}(M)$.

Pelas proposições (2.4.4)(b) e (2.4.1), temos o isomorfismo

$$\sigma : Hom_{KG}(K, End_K(M)) \rightarrow End_{KG}(M)$$

dado por $\sigma(t) = t(1)$ para $t \in Hom_{KG}(K, End_K(M))$. Usando o isomorfismo σ , vemos que $\psi'(f) \circ t \neq 0$ se, e somente se,

$$0 \neq \psi'(f) \circ t(1) = \psi'(f)(\sigma(t)).$$

Logo, existe $t \in \text{Hom}_{KG}(K, \text{End}_K(M))$ tal que $\psi'(f) \circ t \neq 0$ se, e somente se, existe $g \in \text{End}_{KG}(M)$ tal que $\text{tr}(f \circ g) = \psi'(f)(g) \neq 0$. Assim, para provar o item (a), basta provar que $\psi'(f)$ é uma retração se, e somente se, existe $t \in \text{Hom}_{KG}(K, \text{End}_K(M))$ tal que $\psi'(f) \circ t \neq 0$.

Suponhamos que $\psi'(f)$ seja uma retração, então existe um morfismo $t : K \rightarrow \text{End}_K(M)$ tal que $\psi'(f) \circ t = \text{id}_K \neq 0$. Reciprocamente, se existe um KG -morfismo $t' : K \rightarrow \text{End}_K(M)$ tal que $\psi'(f) \circ t' \neq 0$, defina $t : K \rightarrow \text{End}_K(M)$ por $t = t' / (\psi'(f) \circ t'(1))$, então $\psi'(f) \circ t = \text{id}_K$, ou seja, $\psi'(f)$ é uma retração.

Para provar o item (b), basta aplicar o item (a) para $\text{id}_M \circ g = g$ e utilizar a definição do isomorfismo ψ' . \square

A próxima proposição dá a descrição que buscávamos para a imagem de $(\text{id}_M \otimes \beta)_*$.

Proposição 3.3.3. *Sejam $\delta : 0 \rightarrow \tau(K) \rightarrow E \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0$ uma sequência quase cindida e M um KG -módulo. Então, para $f \in \text{End}_{KG}(M)$, são equivalentes:*

- (a) f se fatora por $\text{id}_M \otimes \beta$.
- (b) o traço da composta $f \circ g$ é zero, para todo $g \in \text{End}_{KG}(M)$.

Demonstração. Como β é quase cindido à direita, um KG -morfismo $t : \text{Hom}_K(M, M) \rightarrow K$ se fatora por β se e somente se t não for uma retração. Por outro lado, pela proposição (2.4.10)(a), temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{KG}(M, M \otimes_K E) & \xrightarrow{(\text{id}_M \otimes \beta)_*} & \text{Hom}_{KG}(M, M) \\ \downarrow & & \downarrow \psi' \\ \text{Hom}_{KG}(M^* \otimes_K M, E) & \xrightarrow{\beta_*} & \text{Hom}_{KG}(M^* \otimes_K M, K) \end{array}$$

onde as flechas verticais são isomorfismos. Logo, f se fatora por $\text{id}_M \otimes \beta$ se e somente se $\psi'(f)$ se fatora por β . Como β não cinde, aplicando o lema (3.3.2), temos que f se fatora por $\text{id}_M \otimes \beta$ se e somente se o traço da composta $f \circ g = 0$ para todo $g \in \text{End}_{KG}(M)$. \square

Corolário 3.3.4. *Sejam $\delta : 0 \rightarrow \tau(K) \rightarrow E \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0$ uma sequência quase cindida e M um KG -módulo. Então,*

- (i) $\text{rad}(\text{End}_{KG}(M)) \subset \text{Im}(\text{id}_M \otimes \beta)_*$.
- (ii) $\text{id}_M \otimes \beta$ é uma retração se e somente se $\text{tr}(g) = 0$ para todo $g \in \text{End}_{KG}(M)$.

Demonstração. Suponhamos que $f \in \text{rad}(\text{End}_{KG}(M))$, então $f \circ g \in \text{rad}(\text{End}_{KG}(M))$ para todo $g \in \text{End}_{KG}(M)$. Dai, $f \circ g$ é nilpotente para todo $g \in \text{End}_{KG}(M)$, e portanto $\text{tr}(f \circ g) = 0$ para todo $g \in \text{End}_{KG}(M)$. Portanto, pela proposição anterior, $f \in \text{Im}(\text{id}_M \otimes \beta)_*$.

Como $\text{id}_M \otimes \beta$ é uma retração se, e somente se, id_M se fatora por $\text{id}_M \otimes \beta$, temos que o item (b) é uma consequência direta da proposição anterior, observando que $g = \text{id}_M \circ g$. \square

Teorema 3.3.5. *Sejam $\delta : 0 \rightarrow \tau(K) \rightarrow E \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0$ uma seqüência quase cindida e M um KG -módulo indecomponível.*

- (a) *$id_M \otimes \beta$ é uma retração se, e somente se, $tr(g) = 0$ para todo $g \in Hom_{KG}(M)$. Caso contrário, $id_M \otimes \beta$ é um morfismo quase cindido à direita.*
- (b) *Se p não divide $dim_K(M)$, então $id_M \otimes \beta$ é quase cindido à direita.*
- (c) *Se K é algebricamente fechado, então $id_M \otimes \beta$ é um morfismo quase cindido à direita se, e somente se, p não divide $dim_K(M)$.*

Demonstração. O item (a) segue direto do corolário (3.3.4) e do lema (3.3.1) e o item (b) segue direto do item (a), observando que $tr(id_M) \neq 0$ se p não divide $dim_K(M)$.

O item (c) será demonstrado em um contexto mais geral na próxima seção. □

Agora temos condições de verificar se δ' é uma seqüência de Auslander-Reiten módulo injetivos. Veremos que precisamos apenas supor que a aplicação traço usual seja uma retração.

Definição 3.3.6. *Um KG -módulo indecomponível M cinde o traço se $tr : End_K(M) \rightarrow K$ é uma retração.*

Supondo que M cinde o traço, temos que existe $g \in Hom_{KG}(K, End_K(M))$ tal que $tr \circ g = id_K$. Mas $g(1)h = g(1h) = g(1\epsilon(h)) = g(1)\epsilon(h)$ para todo $h \in KG$, logo, pela proposição (2.4.2), temos que $g(1) \in End_{KG}(M)$ e como $tr \circ g = id_K$, concluímos que $tr(g(1)) \neq 0$. Portanto, se M cinde o traço, existe $f \in End_{KG}(M)$ tal que $tr(f) \neq 0$.

Teorema 3.3.7. *Seja M um KG -módulo que cinde o traço. Se $\delta : 0 \rightarrow \tau(K) \rightarrow E \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0$ é uma seqüência de Auslander-Reiten, então*

$$\delta' : 0 \rightarrow M \otimes_K \tau(K) \rightarrow M \otimes_K E \xrightarrow{id_M \otimes \beta} M \rightarrow 0$$

é uma seqüência de Auslander-Reiten módulo injetivos.

Demonstração. Vimos no início desta seção que, se a seqüência δ é uma seqüência de Auslander-Reiten, então a seqüência δ' é isomorfa a uma seqüência da forma

$$0 \longrightarrow \tau(M) \oplus Q \xrightarrow{(\alpha, id_Q)} (M \otimes_K E) \oplus Q \xrightarrow{(\beta_0, 0)} M \longrightarrow 0$$

onde Q é um KG -módulo injetivo e β_0 é um morfismo quase cindido à direita se, e somente se, $id_M \otimes \beta$ é um morfismo quase cindido à direita. Supondo que M cinde o traço, temos que

existe $f \in \text{End}_{KG}(M)$ tal que $\text{tr}(f) \neq 0$, aplicando o teorema (3.3.5)(a), temos que $\text{id}_M \otimes \beta$ é um morfismo quase cindido à direita, logo, β_0 é um morfismo quase cindido à direita. Portanto, a sequência exata

$$0 \rightarrow \tau(M) \xrightarrow{\alpha} (M \otimes_K E) \xrightarrow{\beta_0} M \rightarrow 0$$

é uma sequência de Auslander-Reiten, ou seja, δ' é uma sequência de Auslander-Reiten módulo injetivos. \square

3.4 Sequência de Auslander-Reiten para Álgebras de Hopf

Esta seção é baseada na última seção do artigo “Representation and almost split sequences for Hopf Algebras” de Green, Marcos e Solberg, [6]. As demonstrações apresentadas aqui e que foram omitidas em [6], foram baseadas no artigo “Almost-Split Sequences and Group Rings” de Auslander e Carlson, [3].

Nesta seção assumiremos que H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo K e que todos os módulos são H -módulos à direita e finitamente gerados. Além disso, assumiremos que K não é projetivo, logo H não é semi-simples, e então a teoria de Auslander-Reiten aplica-se em $\text{mod}H$. Como estamos assumindo que K não é projetivo, os Teoremas (3.2.11) e (3.2.9) garantem a existência de uma sequência de Auslander-Reiten terminando em K , da forma

$$\delta : 0 \rightarrow \tau(K) \rightarrow E \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0.$$

Da mesma forma que na seção anterior, a partir da sequência exata δ obtemos uma sequência exata $\delta' = M \otimes_K \delta$. O objetivo desta seção é generalizar o teorema (3.3.7) para álgebras de Hopf de dimensão finita, não necessariamente simétrica como KG . Neste caso H é apenas auto-injetiva, o que dificulta a decomposição da sequência $\delta' = M \otimes_K \delta$, pois não temos mais $\Omega^2 \simeq \tau$, temos apenas $\Omega^2 \mathcal{N} \simeq \tau$.

Proposição 3.4.1. *Dados uma álgebra de Hopf H com $S^2 = \text{id}_H$ e um H -módulo M indecomponível, as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) K é somando de $\text{End}_K(M)$.
- (b) N é somando de $\text{End}_K(M) \otimes_K N$ para todo H -módulo N .
- (c) A aplicação $\text{Ext}_H^1(K, N) \rightarrow \text{Ext}_H^1(M, M \otimes_K N)$ induzida pelo funtor $M \otimes_K -$ é um monomorfismo, para todo H -módulo N .

(d) $0 \rightarrow M \otimes_K \tau(K) \rightarrow M \otimes_K E \xrightarrow{id_M \otimes \beta} M \rightarrow 0$ não cinde.

Demonstração. Para provar que (a) implica (b), basta observar que, por hipótese, temos o seguinte isomorfismo

$$End_K(M) \otimes_K N \simeq (K \oplus N') \otimes_K N$$

para algum somando N' de $End_K(M)$. Daí,

$$(K \oplus N') \otimes N \simeq (K \otimes_K N) \oplus (N' \otimes_K N) \simeq N \oplus (N' \otimes N)$$

provando a afirmação em (b).

Para provar que (b) implica (a), basta tomar $N = K$ em (b).

Vamos provar que (a) implica (d). Pelo item (b) do corolário (2.4.10), com $N = M$, $X = E$ e $Y = K$, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} Hom_H(M, M \otimes_K E) & \xrightarrow{(id \otimes \beta)_*} & Hom_H(M, M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Hom_H(End_K(M), E) & \xrightarrow{\beta_*} & Hom_H(End_K(M), K) \end{array}$$

onde as aplicações verticais são isomorfismos.

Se a sequência exata em (d) cinde, então id_M se fatora por $id \otimes \beta$. Daí, todo morfismo em $End_H(M)$ se fatora por $id \otimes \beta$, ou seja, $(id \otimes \beta)_*$ é um epimorfismo. Logo, β_* é um epimorfismo. Mas K é somando de $End_K(M)$, então existe uma retração $f : End_K(M) \rightarrow K$ na imagem de β_* e, se $f' : K \rightarrow End_K(M)$ é tal que $f \circ f' = id_K$ e $f = \beta_*(h) = \beta \circ h$, temos que $\beta \circ (h \circ f') = f \circ f' = id_K$, o que é uma contradição pois β não cinde. Esta contradição mostra que a sequência exata em (d) não cinde.

Agora provaremos que (d) implica (a). Se a sequência exata em (d) não cinde, então $(id \otimes \beta)_*$ não é um epimorfismo, logo β_* não é um epimorfismo. Por outro lado, se existir um morfismo f em $Hom_H(End_K(M), K)$ que não seja epimorfismo, então, como β é quase cindido à direita, f se fatora por β . Da mesma forma, se f for um epimorfismo e não cindir, f se fatora por β . Portanto, os únicos morfismos que não estão na imagem de β_* são as retrações. Como β_* não é um epimorfismo, existe uma retração em $Hom_H(End_K(M), K)$.

Para provar que (d) implica em (c), consideremos uma sequência $0 \rightarrow N \rightarrow E' \xrightarrow{\beta'} K \rightarrow 0$ em $Ext_H^1(K, N)$ e suponhamos que ela não cinda. Então, como β é um morfismo quase cindido à direita, β' se fatora por β e então temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & E' & \xrightarrow{\beta'} & K \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \tau(K) & \rightarrow & E & \xrightarrow{\beta} & K \rightarrow 0
 \end{array}$$

Aplicando o funtor $M \otimes_K _$, obtemos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & M \otimes_K N & \rightarrow & M \otimes_K E' & \rightarrow & M \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & M \otimes_K \tau(K) & \rightarrow & M \otimes_K E & \rightarrow & M \rightarrow 0
 \end{array}$$

Como a linha inferior não cinde, a linha superior não pode cindir. Portanto a aplicação $Ext_H^1(K, N) \rightarrow Ext_H^1(M, M \otimes_K N)$ induzida pelo funtor $M \otimes_K _$ é um monomorfismo.

A prova de que (c) implica (d) é imediata se tomarmos $N = \tau(K)$. \square

Note que para $H = KG$ temos uma demonstração da equivalência entre (a) e (d) independente da demonstração acima. Basta usar o item (b) do lema (3.3.2) e o item (ii) do corolário (3.3.4).

Corolário 3.4.2. *Cada uma das condições da proposição anterior é equivalente à aplicação traço $Tr^* : M^* \otimes M \rightarrow K$ ser uma retração.*

Demonstração. Identificando $M \otimes K$ com M e usando (2.4.10), obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 Hom_H(M^* \otimes M, E) & \xrightarrow{\beta_*} & Hom_H(M^* \otimes M, K) \\
 \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 \\
 Hom_H(M, M \otimes_K E) & \xrightarrow{(id \otimes \beta)_*} & Hom_H(M, M)
 \end{array}$$

Observe que:

- (i) De acordo com o lema (2.4.9) temos $\psi_2 : Hom_H(M^* \otimes_K M, K) \rightarrow Hom_H(M, M \otimes_K K)$ dada por $\psi_2(f)(m) = \sum n_i \otimes f(n_i^* \otimes m)$, onde $f \in Hom_H(M^* \otimes_K M, K)$, $m \in M$ e $\{n_i\}_{i=1}^r$ é uma K -base de M . Assim

$$\begin{aligned}
 \psi_2(Tr^*)(m) &= \sum n_i \otimes Tr^*(n_i^* \otimes m) \\
 &= \sum n_i \otimes n_i^*(m) \\
 &= \sum n_i n_i^*(m) \otimes 1 \\
 &= m \otimes 1
 \end{aligned}$$

Como estamos identificando $M \otimes_K K = M$, temos que $\psi_2(Tr^*) = id_M$.

- (ii) $id \otimes \beta$ é uma retração se, e somente se, existe $\alpha \in Hom_H(M^* \otimes M, E)$ tal que $\beta_*(\alpha) = \beta\alpha = Tr^*$. De fato, suponhamos que $id \otimes \beta$ seja uma retração, então existe $\alpha' \in Hom_H(M, M \otimes_K E)$ tal que $(id \otimes \beta)(\alpha') = id_M$. Como ψ_1 é um isomorfismo, existe um $\alpha \in Hom_H(M^* \otimes M, E)$ tal que $\psi_1(\alpha) = \alpha'$. Portanto,

$$\beta_*(\alpha) = \psi_2^{-1} \circ \psi_2(\beta_*(\alpha)) = \psi_2^{-1}((id \otimes \beta)_*\psi_1(\alpha)) = \psi_2^{-1}((id \otimes \beta)_*(\alpha')) = \psi_2^{-1}(id_M) = Tr^*.$$

Por outro lado, se existe $\alpha \in Hom_H(M^* \otimes M, E)$ tal que $\beta_*(\alpha) = \beta\alpha = Tr^*$ e então

$$(id \otimes \beta) \circ \psi_1(\alpha) = (id \otimes \beta)_*(\psi_1(\alpha)) = \psi_2 \circ \beta_*(\alpha) = \psi_2(Tr^*) = id_M$$

ou seja, $id \otimes \beta$ é uma retração.

- (iii) Existe $\alpha \in Hom_H(M^* \otimes M, E)$ tal que $\beta_*(\alpha) = \beta\alpha = Tr^*$ se, e somente se, Tr^* não é uma retração. De fato, se Tr^* não é uma retração, como β é um morfismo quase cindido à direita, existe tal α . Reciprocamente, se $\beta\alpha = Tr^*$, então Tr^* não pode cindir, pois β é um morfismo quase cindido à direita.

De (ii) e (iii) segue que: Tr^* é uma retração se, e somente se, $id_M \otimes \beta$ não é uma retração. \square

Corolário 3.4.3. *Com as condições da proposição (3.4.1) temos que Tr^* é uma retração se, e somente se, $id \otimes \beta$ não é uma retração.*

Demonstração. Segue direto do final da demonstração do corolário (3.4.2). \square

Identificando $M^* \otimes_K M$ com $End_K(M)$, temos que Tr^* é uma retração se, e somente se, a aplicação traço usual tr é uma retração. Então, assim como na seção anterior, diremos que um H -módulo M indecomponível é um **módulo que cinde o traço** se a aplicação $Tr^* : M^* \otimes M \rightarrow K$ for uma retração.

Lema 3.4.4. *Sejam N e M dois H -módulos finitamente gerados. Sejam*

$$\begin{aligned} \psi : Hom_H(N^* \otimes_K M, K) &\rightarrow Hom_H(M, N) \\ f &\mapsto \sum n_i f(n_i^* \otimes _) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi : Hom_H(K, N^* \otimes_K M) &\rightarrow Hom_H(N, M) \\ g &\mapsto \phi_{N,M}(g(1)) \end{aligned}$$

Então o traço de $(f \circ g)$ e $(\psi(f) \circ \phi(g))$ são iguais.

Demonstração. Sejam $f \in \text{Hom}_H(N^* \otimes_K M, K)$, $g \in \text{Hom}_H(K, N^* \otimes_K M)$ e $\{n_i\}_{i=1}^r$ uma K -base de N . Se $g(1) = \sum_{i=1}^r n_i^* \otimes x_i$, então o traço de $f \circ g$ é $f \circ g(1) = \sum_{i=1}^r f(n_i^* \otimes x_i)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \psi(f) \circ \phi(g)(n_t) &= \psi(f)(\phi_{N,M}(g(1))(n_t)) \\ &= \psi(f)(\phi_{N,M}(\sum_{i=1}^r (n_i^* \otimes x_i))(n_t)) \\ &= \psi(f)(\sum_{i=1}^r \phi_{N,M}(n_i^* \otimes x_i)(n_t)) \\ &= \psi(f)(\sum_{i=1}^r x_i n_i^*(n_t)) \\ &= \psi(f)(x_t) = \sum_{i=1}^r n_i f(n_i^* \otimes x_i). \end{aligned}$$

Como $\psi(f) \circ \phi(g)(n_t) = \sum_{i=1}^r n_i f(n_i^* \otimes x_i)$, temos

$$\begin{aligned} \text{tr}(\psi(f) \circ \phi(g)) &= \sum_{t=1}^r n_t^* (\psi(f) \circ \phi(g)(n_t)) \\ &= \sum_{t=1}^r f(n_t^* \otimes x_t) \\ &= \text{tr}(f \circ g) \end{aligned}$$

□

Proposição 3.4.5. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado K e com antípoda involutiva ($S^2 = id_H$). Seja M um H -módulo indecomponível. São equivalentes:*

- (a) M cinde o traço;
- (b) a característica de K não divide $\dim_K M$;
- (c) K é um somando de $\text{End}_K(M)$.

Demonstração. A equivalência entre (a) e (c) é consequência direta da definição de módulo que cinde o traço, do corolário (3.4.2) e da proposição (3.4.1). Então, falta provar apenas a equivalência entre (a) e (b).

Provaremos primeiro que (b) implica (a). Considere a aplicação $i' : K \rightarrow M^* \otimes_K M$ dada em (2.4.6). Temos que $\text{Tr}^* \circ i'(1) = \text{Tr}^*(\sum m_i^* \otimes 1 m_i) = \sum m_i^*(1 m_i) = \dim_K(M) \cdot 1$. Então, se a característica de K não divide a dimensão de M , temos que Tr^* é uma retração.

Vamos provar que (a) implica (b). Como $\text{tr}(id_M) = \dim_K M \cdot 1_K$, se a característica de K dividir a dimensão de M então $\text{tr}(id_M) = 0$. Como M é indecomponível, $\text{End}_H(M)$ é local com ideal maximal $r = \text{rad}(\text{End}_H(M))$, e portanto $\text{End}_H(M)/r$ é uma álgebra de divisão de dimensão finita sobre K . Como K é algebricamente fechado, $\text{End}_H(M)/r \simeq K$. Agora, se h é um elemento arbitrário de $\text{End}_H(M)$, então h pode ser escrito como $k id_M + h'$, em que $k \in K$ e $h' \in r = \text{rad}(\text{End}_H(M))$. Como r é nilpotente, o elemento h' é nilpotente e $\text{tr}(h') = 0$. Então,

$$\text{tr}(h) = \text{tr}(k id_M + h') = k \text{tr}(id_M) = 0.$$

Como M cinde o traço, existe um morfismo g em $\text{Hom}_H(K, M^* \otimes_K M)$ tal que $\text{Tr}^* \circ g = id_K$. Por outro lado, o traço de $\text{Tr}^* \circ g$ é $\text{Tr}^* \circ g(1) \neq 0$ e, pelo lema anterior, temos que os traços das composições $\text{Tr}^* \circ g$ e $\psi(\text{Tr}^*) \circ \phi(g)$ são iguais. Mas $\psi(\text{Tr}^*) \circ \phi(g) \in \text{End}_H(M)$, logo tem traço nulo. Este absurdo mostra que a característica de K não pode dividir $\dim_K(M)$ \square

Observe que a hipótese de K ser algebricamente fechado foi usada apenas para provar que (a) implica (b) e como consequência da proposição anterior temos a prova do item (c) da proposição (3.3.5).

Lembrando que precisamos saber se o morfismo $id_M \otimes \beta$ é um morfismo quase cindido à direita para poder provar que a sequência δ' é uma sequência de Auslander-Reiten módulo injetivos, vamos buscar caracterizar esta propriedade com a propriedade do módulo ser um módulo que cinde o traço.

Lema 3.4.6. *Sejam N e M dois H -módulos finitamente gerados, com M indecomponível. Seja*

$$\psi : \text{Hom}_H(N^* \otimes_K M, K) \rightarrow \text{Hom}_H(M, N)$$

o isomorfismo dado em (2.4.9), e seja $f \in \text{Hom}_H(N^ \otimes_K M, K)$. Então, se $\psi(f)$ não é uma retração, então f não é uma retração.*

Demonstração. Seja f uma retração em $\text{Hom}_H(N^* \otimes_K M, K)$ e seja g tal que $f \circ g = id_K$. Então, o traço do endomorfismo $h = \psi(f) \circ \phi(g)$ de N é igual a $f \circ g(1) = 1$, logo h não é nilpotente. Como $\text{End}_H(M)$ é local, h é um isomorfismo e $\psi(f)$ é uma retração. \square

Proposição 3.4.7. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com $S^2 = id_H$ e M um H -módulo. M cinde o traço se, e somente se,*

$$M \otimes_K E \xrightarrow{id_M \otimes \beta} M \rightarrow 0$$

é quase cindido à direita.

Demonstração. Como M cinde o traço, pelo corolário (3.4.3), $id_M \otimes \beta$ não é uma retração. Logo, para provar que $id_M \otimes \beta$ é quase cindido à direita, basta provar que se o morfismo $f \in \text{Hom}_H(X, M \otimes_K K)$ não é uma retração então se fatora por $id \otimes \beta$.

Por (2.4.10), temos que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_H(X, M \otimes_K E) & \xrightarrow{(id \otimes \beta)_*} & \text{Hom}_H(X, M \otimes_K K) \\ \downarrow \psi_1^{-1} & & \downarrow \psi_2^{-1} \\ \text{Hom}_H(M^* \otimes_K X, E) & \xrightarrow{\beta_*} & \text{Hom}_H(M^* \otimes_K X, K) \end{array}$$

Seja $f \in \text{Hom}_H(X, M)$ e suponhamos que f não seja uma retração. Então, $\psi_2^{-1}(f)$ não é uma retração, logo se fatora por β . Como o diagrama acima é comutativo, temos que f se fatora por $id \otimes \beta$.

Reciprocamente, se $id_M \otimes \beta$ é um morfismo quase cindido à direita, pela proposição (3.2.4), M é indecomponível. Então, Pelo item (d) da proposição (3.4.1) e pelo corolário (3.4.2) temos que M cinde o traço.

□

Corolário 3.4.8. *Seja M um H -módulo indecomponível e finitamente gerado, que não cinde o traço.*

(a) *O módulo trivial K não é um somando direto de $M^* \otimes_K X$ para qualquer H -módulo finitamente gerado X .*

(b) *Seja N um H -módulo. Se L^* é um somando indecomponível de $M^* \otimes N$ então L não cinde o traço.*

Demonstração. (a) Como M não cinde o traço, temos que $id \otimes \beta$ é uma retração, logo $(id \otimes \beta)_*$ é um epimorfismo. Portanto, β_* é um epimorfismo. Daí, K não pode ser somando de $M^* \otimes_K X$, caso contrário, β cinde.

(b) Suponhamos que L^* seja um somando indecomponível de $M^* \otimes_K N$. Então,

$$M^* \otimes_K N \otimes_K L \simeq Y \oplus L^* \otimes_K L$$

para algum H -módulo Y . Mas se L cinde o traço, então K é somando de $L^* \otimes_K L$, logo, é somando de $M^* \otimes_K N \otimes_K L$, o que contradiz (a). Portanto L não cinde o traço. □

Claramente, a proposição (3.4.7) mostra que uma condição necessária sobre o módulo M para que δ' seja uma sequência de Auslander-Reiten módulo injetivos é que M cinda o traço. Veremos no próximo teorema que esta é uma condição suficiente.

Teorema 3.4.9. *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com $S^2 = id_H$ e M um H -módulo que cinde o traço. Se $\delta : 0 \rightarrow \tau(K) \rightarrow E \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0$ é uma sequência de Auslander-Reiten, então*

$$\delta' : 0 \rightarrow M \otimes_K \tau(K) \rightarrow M \otimes_K E \xrightarrow{id_M \otimes \beta} M \rightarrow 0$$

é uma sequência de Auslander-Reiten módulo injetivos.

Demonstração. Seja $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow K \rightarrow 0$ a apresentação projetiva minimal de K . Então, aplicando o funtor de Nakayama $\mathcal{N} = D(Hom_H(_, H))$, obtemos a seguinte sequência exata

$$\mathcal{N}(P_1) \rightarrow \mathcal{N}(P_0) \rightarrow \mathcal{N}(K) \rightarrow 0 \tag{3.1}$$

Se P é um H -módulo projetivo então, pela Proposição (2.4.11),

$$\mathcal{N}(M \otimes_K P) \simeq M \otimes_K \mathcal{N}(P) \quad (3.2)$$

Aplicando o funtor $M \otimes_K _$ na sequência exata (3.1) e usando o isomorfismo (3.2), obtemos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccc} M \otimes_K \mathcal{N}(P_1) & \longrightarrow & M \otimes_K \mathcal{N}(P_0) & \longrightarrow & M \otimes_K \mathcal{N}(K) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{N}(M \otimes_K P_1) & \longrightarrow & \mathcal{N}(M \otimes_K P_0) & \longrightarrow & \mathcal{N}(M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como os dois primeiros morfismos verticais são isomorfismos, o terceiro também é um isomorfismo, logo $M \otimes_K \mathcal{N}(K) \simeq \mathcal{N}(M)$.

Pela Proposição (2.3.5), sabemos que H é auto-injetiva. Dai, pela proposição (3.1.3), temos que $\tau \simeq \Omega^2 \mathcal{N}$, logo $M \otimes_K \tau(K) \simeq \Omega^2(M \otimes_K \mathcal{N}(K)) \oplus Q \simeq \tau(M) \oplus Q$ pra algum H -módulo projetivo Q . Como H é auto-injetiva, Q é injetivo. Aplicando a proposição (1.1.14), obtemos a sequência exata

$$0 \rightarrow \tau(M) \rightarrow (M \otimes_K E)^{\mathcal{Y}} \xrightarrow{(id_M \otimes \beta)_0} M \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

Por hipótese, M cinde o traço. Aplicando a proposição (3.4.7), temos que $id_M \otimes \beta$ é quase cindido à direita, logo $(id_M \otimes \beta)_0$ é quase cindido à direita. Dai, (3.3) é uma sequência de Auslander-Reiten. Portanto, δ' é uma sequência de Auslander-Reiten módulo injetivos.

□

Referências Bibliográficas

- [1] I. Assem. *Algèbres et modules*. Masson, 1997.
- [2] I. Assem, D. Simson, and A. Skowronski. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, volume 1. Cambridge University Press, 2006.
- [3] M. Auslander and J. F. Carlson. Almost-split sequences and group rings. *Journal of Algebra*, (103):122–140, 1993.
- [4] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge University Press, 1995.
- [5] M. E. Sweedler. *Hopf Algebras*. Benjamin, New York, 1969.
- [6] E. N. Marcos, E. L. Green, and O. Solberg. Representation and almost split sequences for hopf algebras. *CMS Conf. Proc.*, 18, Amer. Math. Soc., 1994.
- [7] Sorin Dăscălescu, Constantin Năstăsescu, and Serban Raianu. *Hopf Algebras: An Introduction*. Marcel Dekker, 2001.
- [8] Susan Montgomery. *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*. American Mathematical Society, 1993.