Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Patrícia Aparecida Manholi

COMPACIDADE GENERALIZADA
E
CONCEITOS RELACIONADOS

Curitiba

Março de 2010

Patrícia Aparecida Manholi

COMPACIDADE GENERALIZADA
E
CONCEITOS RELACIONADOS

Tese de Mestrado apresentada como requisito parcial para obtenção do Titulo de Mestre em Matemática Aplicada, Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientadora:
Prof ª Dr ª Soraya Rosana Torres Kudri

Curitiba
Março de 2010

à minha família e meu querido esposo
Ângelo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por colocar em minha vida pessoas que me ajudaram de forma intelectual e moral, que me incentivaram e me acreditaram.

Ao meu querido esposo Ângelo, pelo seu amor e apoio.

Aos queridos professores do PPGMA\UFPR, pelos seus conhecimentos compartilhados.

À gentil professora Dr ª Soraya Rosana Torres Kudri, pela excelente orientação.

Aos meus pais José e Geni.

À Capes, pela grande ajuda financeira e à UFPR, pela oportunidade.

LISTA DE SÍMBOLO

$\operatorname{int} A$	Interior do conjunto A
$\overline{A}$	Fecho do conjunto A
$\operatorname{int}_{\delta} A$	δ-interior do conjunto A
$\operatorname{int}_{\delta_X} A$	δ-interior do conjunto A no espaço X
$cl_{\delta}A$	δ-fecho do conjunto A
$cl_{\delta_X} A$	δ-fecho do conjunto A no espaço X
$\operatorname{int}_A B$	Interior do conjunto B em A
$cl_A B$	Fecho do conjunto B em A
(X,τ)	Espaço Topológico
(X,τ^*)	Semi-regularização do espaço topológico (X,τ)
$gcl(A)$	g-fecho de A
g-int(S)	g-interior de A
$\varnothing$	conjunto vazio
AxB	Produto cartesiano entre A e B
$\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$	Família indexada de conjuntos
$\prod_{i=1}^{n} A_i$	Produto cartesiano dos elementos da família finita de conjuntos $\{A_i \setminus i = 1,2,\cdots,n\}$
$\prod\{X_i \setminus i \in I\}$	Produto cartesiano da família de conjuntos $\{A_i \setminus i \in I\}$
$x = \{x_i \setminus i \in I\}$	Elemento do produto cartesiano $\prod\{X_i \setminus i \in I\}$
$\bigcup_{i \in I} A_i$	União dos elementos da família infinita $\{A_i \setminus i \in I\}$
$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup\{A_\alpha \setminus \alpha \in J\}$	União dos elementos da família $\{A_\alpha \setminus \alpha \in J\}$

$\bigcap_{i=1}^{n} V_i$	Interseção dos elementos da família finita $\{V_i \setminus i = 1,2,\cdots,n\}$
$\bigcap_{\alpha \in J} V_\alpha$	Interseção dos elementos da família $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$
$f : X \to Y$	Função qualquer de X em Y

RESUMO

Neste trabalho,usamos os conjuntos g-fechados (definidos por N. Levine) e uma variação destes, os chamados conjuntos δg-fechados (definidos por Dontchev), para definir três novas classes de espaços relacionados com a GO-compacidade: Espaços Weakly GO-compactos, Almost GO-compactos e Espaços Nearly GO-compactos. Estudamos muitas de suas propriedades e analisamos a relação entre eles e entre espaços topológicos já conhecidos: Espaços GO-compactos, compactos, Nearly-compactos, Almost-compactos e Weakly-compactos.

Também definimos e investigamos um novo axioma da separação chamada de almost g-regularidade a qual é mais fina que a g-regularidade. Definimos e desenvolvemos a classe dos conjuntos gN-fechados, αg-regulares e αg-Hausdorff. Também desenvolvemos novos resultados relacionados com espaços $T_{\frac{3}{4}}$

Palavras-chave: GO-compacidade, Weakly GO-compacidade, Almost GO-compacidade, Nearly GO-compacidade, espaços Almost g-regulares, αg-regulares, αg-Hausdorff, $T_{\frac{1}{2}}$, $T_{\frac{3}{4}}$, conjuntos gN-fechados e δg-convergência.

ABSTRACT

By using g-closed sets (as defined by N. Levine) and a variation of those, the so called δg-closed sets (defined by Dontchev) we define three new classes of spaces related to GO-compactness: Weakly GO-compact spaces, Almost GO-compact spaces Nearly GO-compact. We study many of their properties and analyze the relationship between them and between well know topological spaces: GO-compact spaces, compact spaces, Nearly-compact spaces, Almost-compact spaces and Weakly-compact spaces.
We also define and investigate a new separation axiom called almost g-regularity, which is weaker than the g-regularity. We define and develop gN-closed class, αg-regular and αg-Hausdorff sets. We also obtain new results related to $T_{\frac{3}{4}}$ spaces

Keywords: GO-compactness, Weakly GO-compactness, Almost GO-compactness, Nearly GO-compactness, Almost g-regulares, αg-regulares, αg-Hausdorff, $T_{\frac{1}{2}}$, $T_{\frac{3}{4}}$ spaces, gN-closed sets and δg-convergence.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO **1**
CAPÍTULO 1 .... **6**
TEORIA BÁSICA *6*
1.1 Teoria Básica *6*
CAPÍTULO 2 .... **10**
CONJUNTOS g-FECHADOS E CONJUNTOS δg-FECHADOS *10*
2.1 Conjunto g-fechados *10*
2.2 Conjuntos δg-fechados *15*
CAPÍTULO 3. .... **22**
AXIOMAS DA SEPARAÇÃO E ALGUNS RESULTADOS *22*
3.1 Espaços Almost Weakly Hausdorff, espaços T_1, espaços $T_{\frac{3}{4}}$ e espaços $T_{\frac{1}{2}}$ *22*
3.2 Espaço g-regular, Espaço g-normal e espaço Almost g-regular *38*
CAPÍTULO 4 .... **61**
TEORIA DE g-CONVERGÊNCIA *61*
4.1 Teoria de g-convergência *61*
CAPÍTULO 5 .... **66**
ESPAÇOS GO-COMPACTOS *66*
5.1 Espaços GO-compactos *66*
CAPÍTULO 6 .... **77**
ESPAÇOS WEAKLY GO-COMPACTOS *77*
6.1 Espaços Weakly GO-compactos *77*
CAPÍTULO 7 .... **95**
ESPAÇOS ALMOST GO-COMPACTOS *95*
7.1.1 Espaços Almost GO-compactos *95*
7.2 Caracterização de espaços Almost GO-compactos via g-convergência *108*
CAPÍTULO 8 .... **110**
ESPAÇOS NEARLY GO-COMPACTOS *110*
8.1 Espaços Nearly GO-compactos *110*
8.2 Espaços Nearly GO-compactos via δg-convergência *122*
CAPÍTULO 9 .... **127**
CONJUNTOS gN-FECHADOS *127*
9.1 Conjuntos gN-fechados *127*
CAPÍTULO 10 .... **145**
FUNÇÕES CONTÍNUAS ASSOCIADAS ÀS TEORIAS ANTERIORES *145*
10.1 Funções contínuas associadas às teorias anteriores. *145*
BIBLIOGRAFIA: **161**

INTRODUÇÃO

Em 1969, M. K. Singal e Asha Mathur [32] definiram os espaços Nearly Compactos e desenvolveram muitas de suas propriedades. Cammaroto e Lo Faro [9], introduziram e caracterizaram a noção de espaços Weakly Compactos, que são estritamente mais fracos que os espaços Nearly-compactos.

Por Singal & Singal [34] foi introduzida à noção de espaços Almost Compactos que, por Poter e Thomas [31], são chamados de espaços quasi H-closed. Os espaços de Hausdorff Almost-compacto são chamados espaços H-closed que têm sido estudados por muitos matemáticos eminentes e têm gerado grande importância no estudo dos espaços minimal de Hausdorff.

Os espaços Almost-compactos estão entre os espaços Nearly-Compactos e Weakly-Compactos. Ou melhor:

Compacidade $\Rightarrow$ Nearly-Compacidade $\Rightarrow$ Almost-compacidade $\Rightarrow$ Weakly-compacidade.

Nenhuma das implicações inversas acima é verdadeira.

Donald Carnahan [11] definiu os conjuntos N-fechados relativos a um espaço topológico (X,τ), e estudou muitas de suas propriedades. Muitas vezes os conjuntos N-fechados são chamados de α-Nearly Compactos. A classe dos conjuntos N-fechados é importante no estudo das funções com gráficos fortemente fechados.

Em 1970, Levine [24] introduziu a noção de conjuntos fechados generalizados (conjuntos g-fechados). Os complementares dos conjuntos g-fechados são chamados conjuntos abertos generalizados (conjuntos g-abertos).

A teoria de conjuntos g-fechados vem sendo investigada por muitos topólogos nos últimos anos, não somente por serem uma generalização natural dos conjuntos fechados, mas também pelos novos conceitos introduzidos, por exemplo, novas propriedades de revestimento e novos axiomas da separação mais fracos que T_1, entre outros.

Levine também definiu a classe dos chamados espaços $T_{\frac{1}{2}}$. Mais tarde, Dunhan [15] e Levine [24] desenvolveram várias propriedades dos espaço $T_{\frac{1}{2}}$. O estudo com conjuntos g-fechados gerou novos axiomas da separação entre T_0 e T_1, tais como $T_{\frac{1}{2}}$ [15] [24]e $T_{\frac{3}{4}}$ [12]:

$T_1 \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} \Rightarrow T_{\frac{3}{4}} \Rightarrow T_0$.

Outros axiomas envolvendo conjuntos g-fechados são os espaços semi-pré-$T_{\frac{1}{2}}$ [13] e T_P [37]. Alguns desses espaços são usados na ciência da computação e topologia digital ([17-18][20-21] para exemplos). Outras novas propriedades são definidas pela variação das propriedades de submaximalidade. Além disso, o estudo dos conjuntos g-fechados também fornece uma nova caracterização de algumas classes de espaços já conhecidos, como por exemplo, a classe dos espaços extremamente desconexos. O estudo dos conjuntos g-fechados dão possíveis aplicações em computação gráfica [18][20-21] e em física quântica[28].

Em 1986, B. M. Munshi [27] generalizou a noção usual de regularidade e normalidade, trocando "conjuntos fechados" por "conjuntos g-fechados" nas definições, obtendo então a noção de g-regularidade e g-normalidade.

Booponk [3] introduziu em 2003, o conceito de espaços g-Hausdorff. Boonpok também investigou a preservação dos teoremas a respeito de espaços g-Hausdorff. Balachandran et al. [2] introduziram a noção de funções contínuas generalizadas (citadas como funções g-contínuas) e algumas de suas propriedades. Mais tarde buscou o conceito de funções g-irresolutes, funções strongly g-contínuas e funções perfectly g-contínuas.

Balachandran [2] introduziu a noção de GO-compacidade envolvendo conjuntos g-abertos. Caldas et al [7-8] desenvolveram esta nova classe de compacidade e obtiveram muitas de suas propriedades.

Recentemente, Caldas e Jafari [5], introduziram e desenvolveram o conceito de g-US, g-convergência, GO-compacidade seqüencial, g-continuidade seqüencial e g-sub-continuidade seqüencial.

Dontchev e Ganster [12] definiram uma nova classe de conjuntos fechados generalizados chamados δg-fechados. Os complementares dos conjuntos δg-fechados são chamados conjuntos δg-abertos.

A partir dessa nova classe, consideramos os espaços $T_{\frac{3}{4}}$ como o espaço onde todos os conjuntos δg-fechados são δ-fechados. Dontchev e Ganster também definem e pesquisam sobre funções δg-contínuas e δg-inrresolutes.

Em 1968, Saundararajan [35] introduz a classe dos espaço Weakly Hausdorff como o espaço cuja semi-regularização é um espaço T_1. Em 1989, Fukutaki [16] define e investiga a generalização dos espaços Weakly Hausdorff. Recentemente Dontchev e Ganter [12] consideraram a relação entre espaços $T_{\frac{3}{4}}$ e conjuntos δg-fechados, os espaços cuja semi-regularização é $T_{\frac{1}{2}}$: o chamado espaço Almost Weakly Hausdorff.

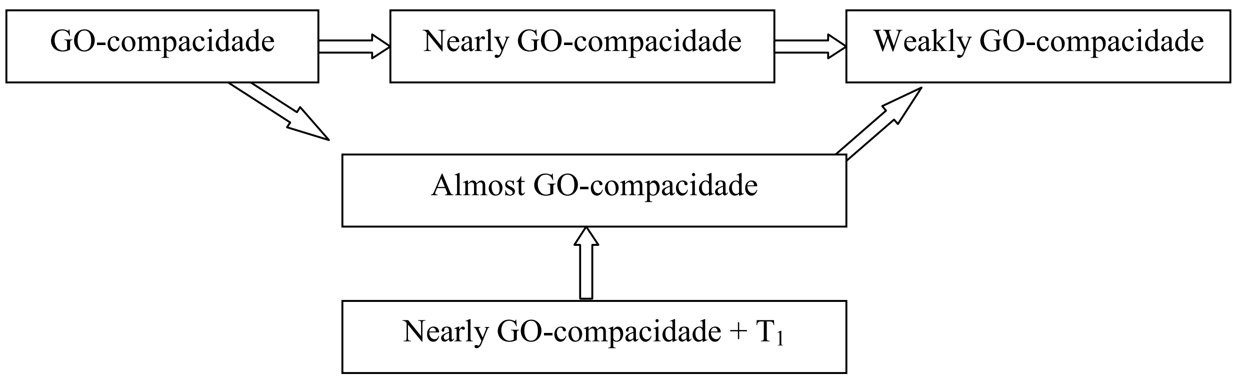
Neste trabalho, usamos os conjuntos g-fechados e δg-fechados para definirmos três novas classes de espaços relacionados com a GO-compacidade:

O primeiro espaço chamamos de Nearly Compacto Generalizado (citado como Nearly GO-compacto. Também caracterizamos este espaço via filtro base. Para tal caracterização, definimos o que chamamos δg-convergência; também definimos pontos de δg-acumulação. Verificamos a preservação de vários teoremas relacionados a Nearly-compacidade, compacidade, entre outros. Mostramos a implicação: Nearly GO-compacidade $\Rightarrow$ Nearly-compacidade. Com um contra-exemplo mostramos que a recíproca não é verdadeira.

O segundo espaço chamamos de Almost compacto generalizado (citado como Almost GO-compacto). Também caracterizamos os espaços Almost GO-compacto via filtro bases (abertos), pela g-convergência. Mostramos a implicação: Almost GO-compacto $\Rightarrow$ Almost-compacto, mas a recíproca não é verdadeira(verificamos isto com um contra-exemplo). Também investigamos varias de suas propriedades.

O terceiro espaço chamado espaço Weakly-compacto generalizado (citado como Weakly GO-compacto). Verificamos a implicação Weakly GO-compacto $\Rightarrow$ Weakly compacto. Estudamos também muitas de suas propriedades.

A partir dessas definições chegamos à seguinte conclusão:



Nenhuma dessas implicações tem recíproca verdadeira, como veremos com contra-exemplos.

Também, definimos e investigamos a classe dos conjuntos N-fechados generalizados (citados como gN-fechados) e dos espaços almost g-regular.

No primeiro capitulo, apresentamos algumas definições e resultados básicos, usados durante todo o trabalho.

No segundo capitulo apresentamos um estudo dos conjuntos g-fechados e dos conjuntos δg-fechados.

No terceiro capitulo trabalhamos com os espaços Almost Weakly Hausdorff, espaços T_1 e espaços $T_{\frac{1}{2}}$. Definimos também os espaços $T_{\frac{3}{4}}$ e desenvolvemos de forma própria alguns resultados. Ainda neste capítulo, caracterizamos os espaço g-regulares, g-normais e sugerimos uma definição de espaços almost g-regulares.

No quarto capitulo abordamos a teria de g-convergência, apresentando definições e resultados que serão úteis nos próximos capítulos.

No quinto capitulo definimos e caracterizamos os espaços GO-compactos.

No sexto capitulo sugerimos a definição de espaços Weakly GO-compactos. Neste capitulo encontramos a implicação: GO-compacto $\Rightarrow$ Weakly GO-compacto (página 84- Teorema 6.1.3)

No sétimo capitulo sugerimos a definição de espaços Almost GO-compactos. Neste capitulo encontramos as implicações: GO-compacto $\Rightarrow$ Almost GO-compacto (página 98- Teorema 7.1.1) e Almost GO-compacto $\Rightarrow$ Weakly GO-compacto (página 99- Teorema 7.1.2). Ainda neste capitulo, usando a definição filtro g-convergente e resultados, caracterizamos os espaços Almost GO-compactos via g-convergência.

No oitavo capitulo sugerimos a definição de espaços Nearly GO-compacto. Neste capitulo encontramos as implicações: GO-compacto $\Rightarrow$ Nearly GO-compacto (página 112- Teorema 8.1.2), Nearly GO-compacto $\Rightarrow$ Weakly GO-compacto (página 113- Teorema 8.1.3) e Nearly GO-compacto + T_1 $\Rightarrow$ Almost GO-compacto (página 114- Teorema 8.1.5). Ainda neste capitulo sugerimos a definição filtro δg-convergente e definimos espaços Nearly GO-compactos via δg-convergência.

No nono capitulo propomos a definição de conjuntos gN-fechados.

E finalmente no décimo capitulo definimos as funções g-contínuas, g-irresolutes, δg-contínuas e δg-irresolutes. Encontramos algumas relações entre elas, bem como relações entre os espaços compactos, GO-compactos, Nearly-compactos, Nearly GO-compactos, Almost-compactos, Almost GO-compactos, Weakly-compactos, Weakly GO-compactos e espaços $T_{3\frac{}{4}}$ por estas funções.

Em todo o trabalho, todos os resultados e definições sem atribuição de autoria são nossas contribuições. A maioria dos resultados com atribuição de autoria forma demonstrado de maneira própria.

Como pré-requisito para leitura deste trabalho, sugerimos noções básicas de Topologia Geral.

CAPÍTULO 1

TEORIA BÁSICA

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados básicos, os quais usaremos durante todo o trabalho.

1.1 Teoria Básica

Definição 1.1.1 [10] : Seja (X,τ) um espaço topológico e $S \subset X$ um subconjunto de X.

1. Dizemos que S é regularmente aberto se S= $\operatorname{int}\overline{S}$.
2. Dizemos que S é regularmente fechado se S= $\overline{\operatorname{int} S}$.

Definição 1.1.2 [14]: Seja (X,τ) um espaço topológico e $S \subset X$ um subconjunto de X. O δ-interior de S (denotado por $\operatorname{int}_\delta S$) é definido como sendo a união de todos os conjuntos regularmente abertos contidos em S. Quando $S = \operatorname{int}_\delta S$, dizemos que S é um conjunto δ-aberto em (X,τ).

Definição 1.1.3 [14]: Seja (X,τ) um espaço topológico e $S \subset X$ um subconjunto de X. Quando $S = \operatorname{int}_\delta S$, o subconjunto $X - S = R$ é dito um conjunto δ-fechado em(X,τ).

Teorema 1.1.1 [12]: Sejam (X,τ) um espaço topológico e $S \subseteq X$ tal que S é um subconjunto δ-fechado em (X,τ). Então

$$S = \{x \in X \setminus \operatorname{int}\overline{U} \cap S \neq \varnothing, \forall U \in \tau \quad com \quad x \in U\}$$

Demonstração: Sejam $A = \{x \in X \setminus \operatorname{int}\overline{U} \cap S \neq \varnothing, \forall U \in \tau \quad com \quad x \in U\}$ e S é um subconjunto δ-fechado em (X,τ).Claro que $S \subset A$. Agora, suponha que $x \in A$. Se $x \notin S$, então $x \in X - S$ que é um conjunto δ-aberto em (X,τ). Então existe um regularmente aberto V em (X,τ) tal que $x \in V \subset X - S$, ou seja, $V \cap S = \varnothing$. Por outro lado, como $x \in V = \operatorname{int}\overline{V}$, pela definição do conjunto A, $\varnothing = V \cap S = \operatorname{int}\overline{V} \cap s \neq \varnothing$, absurdo. Portanto $S = A$.

Teorema 1.1.2: Sejam (X,τ)um espaço topológico e $S \subseteq X$ tal que S é um subconjunto δ-fechado em (X,τ). Então S é igual à união de todos os subconjuntos regularmente fechados que contém S.

Demonstração: Sejam (X,τ) um espaço topológico, $S \subseteq X$ tal que S é um subconjunto δ-fechado em (X,τ) e $A = \bigcap A_\alpha$ onde A_α, $\forall \alpha$, é um subconjunto regularmente fechado em (X,τ) contendo S. Queremos mostrar que $S = A$. Claro que $S \subset A$. Agora, suponha que $x \in A$. Se $x \notin S$, então $x \in X - S$ que é um conjunto δ-aberto em (X,τ). Então existe um regularmente aberto V em (X,τ) tal que $x \in V \subset X - S$ e $V \cap S = \varnothing$, ou seja, $x \notin X - V$ e $S \subset X - V$. Logo existe um conjunto regularmente fechado $X - V$ contendo S tal que $x \notin X - V$. Pela definição de A, segue que $x \notin A$. Contradição. Logo $S = A$, isto é, S é igual à união de todos os subconjuntos regularmente fechados que contém S.

Observação 1.1.1: O conjunto $A = \{x \in X \setminus \operatorname{int}\overline{U} \cap S \neq \varnothing, \forall U \in \tau \quad com \quad x \in U\}$ é chamado δ-fecho do conjunto S, e denotado por $cl_\delta S$. Portanto, se S é um conjunto δ-fechado em (X, τ), então

$S = cl_\delta S = \{x \in X \setminus \operatorname{int}\overline{U} \cap S \neq \varnothing, \forall U \quad com \quad x \in U\}$.

Definição 1.1.4 [14]: Seja (X, τ) um espaço topológico. A topologia gerada pelos subconjuntos regularmente abertos em (X, τ) é denotado por τ^*. O espaço (X, τ^*) é dito semi-regularização do espaço (X, τ). Se $\tau = \tau^*$ então (X, τ) é dito semi-regular.

Observação 1.1.2: Os conjuntos abertos do espaço (X, τ^*) são os conjuntos δ-abertos do espaço (X, τ). De fato, dado um conjunto aberto U em (X, τ^*), então U é igual à união dos elementos da base de τ^* contidos em U. Como os elementos da base da topologia τ^* são conjuntos regularmente abertos em (X, τ), pela definição de conjuntos δ-abertos, segue que U é um conjunto δ-aberto em (X, τ).

Observação 1.1.3: A topologia τ sobre X é mais fina que a topologia τ^*. De fato, para cada $x \in X$ e cada elemento B da base de τ^* contendo x, B é um conjunto regularmente aberto em (X, τ) e portanto B é um aberto em (X, τ). Logo existe um elemento C da base de τ tal que $x \in B \subseteq C$. Daí segue que $\tau^* \subseteq \tau$.

Definição 1.1 .5 [26]: Um espaço X é dito ter uma base contável em $x \in X$ quando existe uma coleção β de vizinhanças de x tal que cada vizinhança de x contém pelo menos um dos elementos de β. Um espaço que tem uma base contável em cada ponto de X é dito satisfazer o primeiro axioma da contabilidade.

Definição 1.1.6: A topologia τ_p do ponto excluído sobre X é definido por:

Dado um ponto $p \in X$,

$U \in \tau_p$ se e somente se $p \notin U$ ou $U = X$.

Definição 1.1.7[31]: Uma função $f : X \to Y$ é strongly-contínua quando $f^{-1}(V)$ é aberta e fechado em X, para todo subconjunto $V \subset X$.

CAPÍTULO 2

CONJUNTOS g-FECHADOS E CONJUNTOS δg-FECHADOS

Neste capítulo definiremos dois conjuntos importantíssimos para este trabalho. São eles: os conjuntos g-fechados e conjuntos δg-fechados. Este capítulo está dividido em duas seções: na primeira temos a definição de conjuntos g-fechados e outras definições e resultados mais usados neste trabalho, relacionados aos conjuntos g-fechados. Na segunda postamos definições e resultados relacionados aos conjuntos δg-fechados também muito usados.

2.1 Conjunto g-fechados

Definição 2.1.1 [3]: Seja (X,τ) um espaço topológico. Um subconjunto A de X é chamado g-fechado se e somente se $\overline{A} \subseteq U$ quando $A \subseteq U$ e U é aberto em X.

Definição 2.1.2 [24]: Um conjunto A de um espaço topológico (X,τ) é chamado g-aberto quando $X - A$ for g-fechado.

Definição 2.1.3 [24]: Seja (X,τ) um espaço topológico e $x \in X$. Um subconjunto A de (X,τ) é chamado g-vizinhança de x quando A é um conjunto g-aberto tal que $x \in A$.

Teorema 2.1.1 [24]: Seja (X,τ) um espaço topológico e Φ a coleção de todos os fechados de (X,τ). Um subconjunto A de X é g-aberto se e somente se F $\subseteq$ int A sempre que F $\subseteq$ A e $F \in \Phi$.

Demonstração: Suponha que o subconjunto A de X é g-aberto, então pela definição anterior $X - A$ é g-fechado. Assim, para todo $F \in \Phi$ tal que F $\subseteq$ A, temos que $X - A \subseteq X - F = U$ com U aberto em X. Como $X - A$ é g-fechado então $\overline{X - A} \subseteq X - F = U$, ou seja, $X - \operatorname{int} A \subseteq X - F = U$. Logo $F \subseteq \operatorname{int} A$.
Reciprocamente, suponha que para todo $F \in \Phi$ temos que $F \subseteq \operatorname{int} A$ sempre que $F \subseteq A$. Vamos mostrar que A é g-aberto. Para isso, devemos mostrar que $X - A$ é g-fechado. Seja U aberto qualquer em X tal que $X - A \subseteq U$. Então $X - U \subseteq A$, onde $X - U \in \Phi$. Assim, usando a hipótese, $X - U \subseteq \operatorname{int} A$, ou seja, $\overline{X - A} \subseteq U$. Logo $X - A$ é g-fechado, e portanto A é g-aberto.

Teorema 2.1.2 [24]: Sejam (X,τ) um espaço topológico e A,B $\subseteq$ X g-abertos, então $A \cap B$ é g-aberto.

Demonstração: Seja F um subconjunto fechado em (X,τ) tal que $F \subseteq A \cap B$,onde A e B são g-abertos em (X,τ). Então $F \subseteq \operatorname{int} A$ e $F \subseteq \operatorname{int} B$. Logo $F \subseteq \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B \subseteq \operatorname{int}(A \cap B)$. Portanto $A \cap B$ é g-aberto.

Observação 2.1.1: De acordo com o teorema anterior, temos que a união de dois conjuntos g-fechados é um conjunto g-fechado.

Observação 2.1.2: Nem sempre a união de g-abertos é um g-aberto. De fato, seja $X = \{a,b,c\}$ e $\tau = \{\varnothing, \{a\}, X\}$. Então (X,τ) é um espaço topológico. Os subconjuntos $\{b\}$

e $\{c\}$ são g-abertos em (X,τ) pois o único fechado contido em ambos é o conjunto vazio. Mas $\{b\} \cup \{c\} = \{b,c\}$ é fechado em (X,τ), portanto não é g-aberto em (X,τ).
Desta observação também segue que a interseção de dois conjuntos g-fechados nem sempre é um conjunto g-fechado.

Teorema 2.1.3 [24]: Sejam (X,τ) um espaço topológico e A um subconjunto de (X,τ). O subconjunto A é g-fechado em (X,τ) se e somente se $\overline{A} - A$ não contém conjunto fechado não vazio.

Demonstração: Suponha primeiramente, que A seja g-fechado em (X,τ). Seja F um subconjunto fechado em (X,τ) tal que $F \subseteq \overline{A} - A$. Então $F \subseteq A^c$, portanto $A \subseteq F^c$. Como A é g-fechado em (X,τ), segue que $\overline{A} \subseteq F^c$, ou seja, $F \subseteq \left(\overline{A}\right)^c$. Portanto $F \subseteq \left(\overline{A}\right)^c \cap \left(\overline{A} - A\right) \subseteq \left(\overline{A}\right)^c \cap \left(\overline{A}\right) = \varnothing$ e assim $F = \varnothing$.
Reciprocamente suponha que $\overline{A} - A$ não contém conjunto fechado não vazio. Vamos mostrar que A é um conjunto g-fechado em (X,τ). Para isso, tome U um conjunto aberto em (X,τ) tal que $A \subseteq U$, então $U^c \subseteq A^c$. Assim $\overline{A} \cap U^c \subseteq \overline{A} \cap A^c = \overline{A} - A$. Como $\overline{A} \cap U^c$ é fechado em (X,τ), pela hipótese, $\overline{A} \cap U^c = \varnothing$. Portanto $\overline{A} \subseteq U^c$ e A é um conjunto g-fechado em (X,τ).

Teorema 2.1.4 [24]: Sejam X um espaço topológico e A $\subseteq$ B $\subseteq$ X, onde A é g-aberto relativo a B e B g-aberto relativo a X,então A é g-aberto relativo a X.

Demonstração: Seja F um subconjunto fechado em X tal que $F \subseteq A$. Como $A \subseteq B$ e B é g-aberto relativo a (X,τ), temos que $F \subseteq \operatorname{int} B$. Mas por hipótese A é g-aberto relativo a B, logo $F = F \cap B \subseteq \operatorname{int}_B A$ (pois $F \cap B$ é fechado em B). Então existe um aberto U em X tal que $F \subseteq U \cap B \subseteq A$. Assim $F \subseteq U \cap (\text{int}\, B) \subseteq U \cap B \subseteq A$. Logo $F \subseteq \text{int}\, A$, e A é g-aberto em X.

Teorema 2.1.5: Sejam (X,τ) um espaço topológico e Y um subespaço fechado em X. Se A $\subseteq$ Y é g-aberto em X, então A é g-aberto em Y.

Demonstração: Seja F um conjunto fechado em Y tal que $F \subseteq A$. Como Y é fechado em X, segue que F é fechado em X. Sendo A g-aberto em X segue que $F \subseteq \text{int}_X\, A$. Logo , existe um aberto U em X tal que $F \subseteq U \subseteq A$. Como $A \subseteq Y$, então
$F = F \cap Y \subseteq U = U \cap Y \subseteq A \cap Y = A$. Assim $V = U \cap Y$ é um aberto em Y tal que $F \subseteq V \subseteq A$. Portanto $F \subseteq \text{int}_Y\, A$
Portanto A é g-aberto em Y.

Definição 2.1.4 [6]: Seja (X,τ) e $S \subset X$ um subconjunto de X.

1. O interior generalizado (escrito como g-interior) de S denotado por g-*int(S)* é a união de todos g-abertos contidos em S.
2. O fecho generalizado (escrito como g-fecho) de S denotado por g*cl(S)* ou $\overline{S}^{g}$ é a interseção de todos os g-fechados que contém S.

Teorema 2.1.6: Seja A um subconjunto de um espaço topológico X.

a. $x \in gcl(A)$ se e somente se todo g-aberto que contém x intersecta A.

b. Suponha que a topologia τ de X é dada por uma base então, se $x \in gcl(A)$, todo elemento da base de τ que contém x intersecta A.

Demonstração:

a). Seja $x \in X$ e suponha que existe um g-aberto U contendo x e não intersecta A, então $X - U$ é um g-fechado que não contém x, mas contém A Pela definição de g-fecho, temos que $gcl(A) \subseteq X - U$. Portanto $x \notin gcl(A)$.

Reciprocamente se $x \notin gcl(A)$, pela definição de g-fecho, existe um g-fechado U que não contem x tal que $A \subset U$, logo existe $V = X - U$ g-aberto contendo x tal que $A \bigcap V = \varnothing$.

b). Se $x \in gcl(A)$, pela parte a., todo g-aberto que contém x intersecta A. Como todo aberto é g-aberto, se $x \in gcl(A)$, todo aberto que contém x intersecta A. Como todo elemento de uma base é aberto, então todo elemento da base de τ é g-aberto. Logo, todo elemento da base de X que contém x intersecta A.

Observação 2.1.3: A recíproca do teorema anterior item b. não é verdadeira. De fato, seja $X = \{a,b,c\}$ e $\tau = \{\varnothing,\{a\},X\}$. Então (X,τ) é um espaço topológico. Tome $A = \{b\}$. Todo aberto que contém c intersecta A. Mas $gcl(A) = A$ pois A é g-fechado em X. Assim, tomando $x = c$, todo aberto em X, contendo c intersecta A, mas $c \notin gcl(A)$.

Teorema 2.1.7: Sejam A e B subconjuntos nos espaços X e Y respectivamente. Então $A \times B$ é g-aberto em $X \times Y$ se e somente se A e B são g-abertos nos espaços X e Y, respectivamente.

Demonstração: Suponha que A e B são subconjuntos g-abertos nos espaços X e Y respectivamente, vamos mostrar que $A \times B$ é um subconjunto g-aberto em $X \times Y$. Para isso, seja $F \times G$ um conjunto em $X \times Y$ fechado tal que $F \times G \subseteq A \times B$. Então $F \subseteq A$ e $G \subseteq B$ onde F é fechado em X e G é fechado em Y. Portanto $F \subseteq \operatorname{int} A$ e $G \subseteq \operatorname{int} B$, e portanto $F \times G \subseteq (\operatorname{int} A) \times (\operatorname{int} B) = \operatorname{int}(A \times B)$.

Reciprocamente, se $A \times B$ é g-aberto em $X \times Y$, vamos mostrar que A e B são g-abertos nos espaços X e Y, respectivamente. Sejam F e G conjuntos fechado em X contidos A e B respectivamente. Então $F \times G$ é fechado em $X \times Y$ tal que $F \times G \subseteq A \times B$. Como $A \times B$ é g-aberto em $X \times Y$, temos que $F \times G \subseteq \operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int} A \times \operatorname{int} B$, e então, $F \subseteq \operatorname{int} A$ e $G \subseteq \operatorname{int} B$. Logo, A é g-aberto em X e B é g-aberto em Y.

2.2 Conjuntos δg-fechados

Definição 2.2.1 [12]: Um subconjunto A de um espaço (X,τ) é chamado δg-fechado quando $cl_\delta(A) \subseteq U$ sempre que $A \subseteq U$ e U é aberto em (X,τ).

Definição 2.2.2 [12]: Um subconjunto A de um espaço (X,τ) é chamado δg-aberto quando $B = X - A$ for δg-fechado.

Teorema 2.2.1: Um subconjunto A de um espaço (X,τ) é δg-aberto se somente se $F \subseteq \operatorname{int}_\delta(A)$ sempre que $F \subseteq A$ e F é fechado em (X,τ).

Demonstração: Seja A um subconjunto δg-aberto em (X,τ). Então $B = X - A$ é δg-fechado em (X,τ). Assim, para todo fechado F em (X,τ) tal que $F \subseteq A$, temos que
$X - A = B \subseteq X - F$
onde $X - F$ é aberto em (X,τ). Como $B = X - A$ é um subconjunto δg-fechado em (X,τ) então $cl_\delta(X - A) = cl_\delta(B) \subseteq X - F$. Logo $X - \operatorname{int}_\delta(A) \subseteq X - F$, isto é, $F \subseteq \operatorname{int}_\delta(A)$.

Reciprocamente, suponha que A é um subconjunto de (X,τ) tal que $F \subseteq \text{int}_\delta(A)$ sempre que $F \subseteq A$ e F é fechado em (X,τ). Vamos mostrar que $B = X - A$ é um subconjunto δg-fechado em (X,τ). Seja U aberto de (X,τ), tal que $X - A = B \subseteq U$. Então $X - U \subseteq A$, e $X - U$ é fechado em (X,τ). Pela hipótese, temos que $X - U \subseteq \text{int}_\delta(A)$. Logo, $cl_\delta(X - A) = X - \text{int}_\delta(A) \subseteq U$, ou seja, $B = X - A$ é δg-fechado em (X,τ), e portanto A é δg-aberto em (X,τ).

Teorema 2.2.2 [12]: Seja A um subconjunto do espaço (X,τ)**.** Então A é um subconjunto δg-fechado do espaço (X,τ) se e somente se $cl_\delta(A) - A$ não contém conjunto fechado não vazio.

Demonstração: Seja A um subconjunto δg-fechado no espaço (X,τ)**.** Suponha por absurdo que exista um subconjunto fechado $F \neq \varnothing$ em (X,τ) tal que $F \subseteq cl_\delta(A) - A$. Logo**,** $A \subseteq X - F$, e como A é um subconjunto δg-fechado no espaço (X,τ), $cl_\delta(A) \subseteq X - F$. Portanto $F \subseteq X - cl_\delta(A)$. Absurdo pois por hipótese $F \subseteq cl_\delta(A) - A \subseteq cl_\delta(A)$.

Logo $cl_\delta(A) - A$ não contém conjunto fechado não vazio.

Reciprocamente, suponha que A é um subconjunto de (X,τ) tal que $cl_\delta(A) - A$ não contém conjunto fechado não vazio. Vamos mostrar que A é um subconjunto δg-fechado no espaço (X,τ). Para isso, tomemos U um conjunto aberto em (X,τ) tal que $A \subseteq U$, então $U^c \subseteq A^c$. Assim $cl_\delta A \cap U^c \subseteq cl_\delta A \cap A^c = cl_\delta A - A$. Como $(cl_\delta A) \cap U^c$ é fechado em (X,τ), pela hipótese, $(cl_\delta A) \cap U^c = \varnothing$. Portanto $cl_\delta A \subseteq U^c$ e a é um conjunto g-fechado em (X,τ).

Teorema 2.2.3: O produto de uma família finita de conjuntos arbitrários é δg-aberto se e somente se cada fator for δg-aberto.

Demonstração: Seja $A=\prod_{i=1}^{n} A_i$ e suponha que $\{A_1,...,A_n\}$ é uma família de conjuntos δg-abertos. Vamos mostrar que A é um conjunto δg-aberto. Para isso, tome $F=\prod_{i=1}^{n} F_i$ um conjunto fechado qualquer tal que $F\subseteq A$. Então $\prod_{i=1}^{n} F_i\subseteq\prod_{i=1}^{n} A_i$, ou seja, $F_i\subseteq A_i$, para todos $i=1,2,\cdots,n$. Como cada F_i é fechado e cada A_i é δg-aberto para todos $i=1,2,\cdots,n$, segue que $F_i\subseteq \operatorname{int}_\delta A_i$, para todos $i=1,2,\cdots,n$. Logo $\prod_{i=1}^{n} F_i\subseteq\prod_{i=1}^{n}\operatorname{int}_\delta(A_i)=\operatorname{int}_\delta\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Vamos provar esta última igualdade. Se $(x_{1,},\cdots,x_n)=x\in\prod_{i=1}^{n}\operatorname{int}_\delta(A_i)$ então, para cada $x_i\in A_i$ existe um regularmente aberto U_i tal que $x_i\in U_i\subseteq A_i$, para todos $i=1,2,\cdots,n$..

Como $U=\prod_{i=1}^{n} U_i=\prod_{i=1}^{n}\operatorname{int}\overline{U_i}=\operatorname{int}\left(\prod_{i=1}^{n}\overline{U_i}\right)=\operatorname{int}\left(\overline{\prod_{i=1}^{n} U_i}\right)=\operatorname{int}\overline{U}$. Temos que, existe um conjunto regularmente aberto U tal que $x\in U\subseteq\prod_{i=1}^{n}(A_i)$. Portanto, $x\in\operatorname{int}_\delta\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)$ e

$\prod_{i=1}^{n}\operatorname{int}_\delta(A_i)\subset\operatorname{int}_\delta\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Agora, se $x\in\operatorname{int}_\delta\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)$, existe um regularmente aberto U tal que $x\in U\subseteq\prod_{i=1}^{n}(A_i)$.

Como $U=\prod_{i=1}^{n} U_i$, onde cada U_i é aberto, temos que

$\prod_{i=1}^{n} U_i=\operatorname{int}\overline{\prod_{i=1}^{n} U_i}=\operatorname{int}\prod_{i=1}^{n}\overline{U_i}=\prod_{i=1}^{n}\operatorname{int}(\overline{U_i})$. Portanto $U_i=\operatorname{int}\overline{U_i}$, $\forall i=1,2,\cdots,n$. Logo, existe um regularmente aberto U_i tal que $x_i\in U_i\subseteq A_i$, $\forall i=1,2,\cdots,n$, e assim

$x \in \prod_{i=1}^{n} \text{int}_\delta(A_i)$ e $\prod_{i=1}^{n} \text{int}_\delta(A_i) \supset \text{int}_\delta\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)$. Contudo, segue que $\prod_{i=1}^{n} \text{int}_\delta(A_i) = \text{int}_\delta\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Logo $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ é δg-aberto.

Reciprocamente, suponha que $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ é um conjunto δg-aberto. Considere conjuntos fechados F_i, para $i = 1,...,n$, tais que $F_i \subseteq A_i$. Então $\prod_{i=1}^{n} F_i \subseteq \prod_{i=1}^{n} A_i$ onde $F = \prod_{i=1}^{n} F_i$ é um conjunto fechado. Como $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ é um conjunto δg-aberto,

$\prod_{i=1}^{n} F_i \subseteq \text{int}_\delta\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \text{int}_\delta(A_i)$ (esta última igualdade mostramos no item anterior). Ou seja, $F_i \subseteq \text{int}_\delta A_i$ para cada $i = 1,...,n$.Portanto cada A_i é um conjunto δg-aberto.

Teorema 2.2.4 [12]: Seja (X,τ) um espaço topológico:

1. Todo conjunto δ-fechado é um conjunto δg-fechado.
2. Todo conjunto δg-fechado em (X,τ) é um conjunto g-fechado em (X,τ^*).
3. Todo conjunto δg-fechado em (X,τ) é um conjunto g-fechado em (X,τ).
4. A interseção de um conjunto δg-fechado com um conjunto δ-fechado é sempre um conjunto δg-fechado.

Demonstração:

(1) Seja A um conjunto δ-fechado tal que $A \subseteq U$ onde U é aberto em (X,τ). Como $CL_\delta(A) = A \subseteq U$. Logo A é um conjunto δg-fechado.

(2) Seja A um δg-fechado em (X,τ) tal que $A \subseteq U$ onde U é aberto em (X,τ^*). Como $\tau^* \subseteq \tau$, $U \in \tau$, temos que $cl_\delta(A) \subseteq U$. Portanto A é g-aberto em (X,τ^*).

(3) Seja A um conjunto δg-fechado em (X,τ), então para todo U aberto em (X,τ), tal que $A \subseteq U$ temos que $cl_\delta(A) \subseteq U$. Como $cl(A) \subseteq cl_\delta(A)$, segue que $cl(A) \subseteq U$ sempre que $A \subseteq U$ e $U \in \tau$. Logo E é g-fechado em (X,τ).

(4) Seja *A* um subconjunto δg-fechado e *B* um subconjunto δ-fechado em (X,τ), e $A \cap B$. Queremos mostrar que C é um subconjunto δg-fechado em X. Para isso, seja U aberto em (X,τ) tal que $A \cap B \subseteq U$ .Então $A \subseteq U \cup (X-B)$ logo $cl_\delta(A) \subseteq U \cup (X-B)$. Agora, $cl_\delta(A \cap B) \subseteq (cl_\delta(A)) \cap B \subseteq U$. Portanto $A \cap B$ é δg-fechado em (X,τ).

Observação 2.2.1: A recíproca do teorema anterior não é verdadeira. Por exemplo:

1. Seja $X = \{a,b,c\}$ e $\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{b,c\}, X\}$. Temos então que (X,τ) é um espaço topológico. Seja $A = \{b\}$. A é um subconjunto δg-fechado em (X,τ) pois $cl_\delta(A) = \{b,c\} \subseteq U$ para todo aberto U em (X,τ). Mas A não é um subconjunto δ-aberto em X pois, se fosse, A seria regularmente aberto em (X,τ).
2. Seja $X = \{a,b,c\}$ e $\tau = \{\varnothing, \{a,b\}, X\}$. Temos então que (X,τ) é um espaço topológico. A semi-regularização de X é (X,τ^*) onde $\tau^* = \{\varnothing, X\}$. Seja $A = \{b\}$. A é um subconjunto g-fechado em (X,τ^*) pois $cl_{\tau^*}(A) = X \subseteq U$ para todo aberto U em (X,τ^*). Mas A não é um subconjunto δg-aberto em (X,τ). De fato, $U = \{b,c\}$é aberto em (X,τ) tal que $A \subset U$. Mas $cl_\delta(A) = X \not\subset U$.
3. Seja $X = [0,1]$. Vamos definir uma base para uma topologia τ sobre X da seguinte forma: para cada ponto de $(0,1]$ considere o sistema de vizinhanças induzida pela topologia usual sobre o sistema de números reais e seja o sistema de vizinhanças do ponto $x = 0$ pelos conjuntos U_k, onde $U_k = \left[0, \frac{1}{k}\right) - \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$. Temos que U_k é um subconjunto g-aberto em X, mas não é δg-fechado em X. De fato, $[0] = \{0\}$ é um

subconjunto fechado em X tal que $[0] \subset U_k$. Mas não existe conjunto regularmente aberto contido em U_k e que contenha $[0]$.

Observação 2.2.2: Seja A é um subconjunto regularmente fechado $\Rightarrow$ A é um subconjunto δ-fechado $\Rightarrow$ A é um subconjunto δg-fechado $\Rightarrow$ A é um subconjunto g-fechado. Nenhuma das implicações contraria acima é verdadeira. De fato, tome X como o conjunto dos números reais e τ a topologia usual sobre X. O subconjunto $Y = \{x\}$ é δ-fechado em X pois $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$, $\operatorname{int}\overline{U} \bigcap \{x\} \neq \varnothing$. Mas $Y = \{x\}$ não é regularmente fechado em X pois $\operatorname{int}\overline{Y} = \operatorname{int} Y = \operatorname{int}\{x\} = \varnothing$. Para os demais contra-exemplos para as outras implicações, basta ver a observação anterior, itens 1 e 3.

Teorema 2.2.5 [12]:

1. A união finita de conjuntos δg-fechados é sempre um conjunto δg-fechado.
2. A união contável de conjuntos δg-fechados não precisa ser um conjunto δg-fechado.
3. A interseção de conjuntos δg-fechados pode não ser um conjunto δg-fechado.

Demonstração:

(1) Seja $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ onde, cada i=1,2,....,n , A_i é δg-fechado. Seja U aberto tal que $A \subseteq U$. Logo, para cada i=1,2,....,n temos que $A_i \subseteq U$. Como cada A_i é δg-fechado, temos que $cl_\delta(A_i) \subseteq U$ para todo i=1,2,...,n. Logo $\operatorname{int}_\delta\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{n}\operatorname{int}_\delta(A_i) \subseteq U$. Portanto A é um conjunto δg-fechado.

(2) Seja X o conjunto dos números reais com a topologia usual. Como X é semi-regular, então todo conjunto com um único elemento e´δg-fechado em X. Seja N o conjunto de

todos os inteiros positivos. Seja $A = \bigcup_{n \in N} \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ que é uma união contável de conjuntos δg-fechados, mas não é um conjunto δg-fechado pois $A \subset (0,1)$ e $0 \in cl_\delta A$.

(3) Sejam $X = \{a, b, c, d, e\}$ e $\tau = \{\varnothing, \{a, b\}, \{c\}, \{a, b, c\}, X\}$. Seja $A = \{a, c, d\}$ e $B = \{b, c, e\}$. Ambos A e B são δg-fechados am X pois o único aberto que contem A e B é o próprio X. Mas $A \cap B = \{c\}$ não é δg-fechado pois $\{c\} = C \subset \{c\}$ e $cl_\delta(\{c\}) = \text{int}_\delta(C) = \{c, d, e\} \not\subset \{c\}$.

CAPÍTULO 3.

AXIOMAS DA SEPARAÇÃO E ALGUNS RESULTADOS

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira seção, definimos e estudamos algumas propriedades dos espaços $T_{\frac{1}{2}}$, dos espaços T_1 e dos espaços Almost Weakly Hausdorff. Também estabelecemos algumas relações entre eles. Definimos também os espaços $T_{\frac{3}{4}}$, estudamos algumas de suas propriedades e desenvolvemos de forma própria alguns resultados.

Na segunda seção, definimos e caracterizamos os espaços g-regulares e g-normais. Sugerimos a definição de espaços Almost g-regulares e desenvolvemos algumas de suas propriedades.

3.1 Espaços Almost Weakly Hausdorff, espaços T_1, espaços $T_{\frac{3}{4}}$ e espaços $T_{\frac{1}{2}}$

Definição 3.1.1 [12]: Um espaço topológico (X,τ) é chamado espaço T_1 quando todo subconjunto unitário é fechado.

Definição 3.1.2 [15]: Um espaço topológico (X,τ) é chamado espaço $T_{\frac{1}{2}}$ quando todo subconjunto g-fechado em (X,τ) é fechado.

Teorema 3.1.1 [15]: X é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$ se e somente se para cada $x \in X$, o subconjunto unitário $\{x\}$ é aberto ou fechado.

Demonstração: Suponha que X é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$. Suponha que para cada $x \in X$, o subconjunto unitário $\{x\}$ não seja fechado em X.. Como X é a única vizinhança de $\{x\}^c$, temos que $\{x\}^c$ g-fechado e portanto fechado. Logo $\{x\}$ é aberto em X.
Reciprocamente, seja A um subconjunto g-fechado em X, com $x \in \overline{A}$. Se o conjunto unitário $\{x\}$ é aberto, temos que $\{x\} \cap A \neq \varnothing$ e portanto $x \in A.$ Por outro lado, se $\{x\}$ é fechado, como A é g-fechado, o único fechado contido em $\overline{A} - A$ é conjunto vazio (pelo Teorema 2.1.3). Como $\{x\} \subseteq \overline{A}$ segue que $x \in A.$ Portanto, $\overline{A} = A$, ou seja, A é um conjunto fechado em X e X é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$.

Corolário 3.1.1 [12]: Se (X,τ) é um espaço T_1, então (X,τ) é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$.

Demonstração: Segue direto da Definição 3.1.1 de espaços T_1 e do teorema anterior.

Teorema 3.1.2 [15]: Seja (X,τ) um espaço $T_{\frac{1}{2}}$ e seja $f:X\to Y$ uma função aberta e bijetora tal que para cada $y\in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ é um conjunto finito. Então (Y,σ) é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$.

Demonstração: Seja $y\in Y$, Por hipótese $f^{-1}(\{y\})=\{x_1,\cdots,x_n\}$. Se para algum i, $\{x_i\}\in\tau$ então $\{y\}=\{f\{x_i\}\}\in\sigma$ pois *f* é uma função aberta. Caso contrário, $\{x_i\}^c\in\tau$ para todo $i=1,2,\cdots,n$ e portanto $\{y\}^c=f\left(\{x_1\}^c\cap\cdots\cap\{x_n\}^c\right)\in\sigma$. Portanto (Y,σ) é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$.

Corolário 3.1.2 [15]: A imagem homeomórfa de um espaço $T_{\frac{1}{2}}$ é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$.

Teorema 3.1.3 [15]: Seja $X=\prod\{X_\alpha\setminus\alpha\in J\}$. O espaço (X,τ) um espaço $T_{\frac{1}{2}}$ se e somente se X_α é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$.

Demonstração: O espaço X contém um subespaço que é homeomorfo a X_α**.** Basta então usar o teorema e corolário anterior.

Teorema 3.1.4 [12]: Seja A um subconjunto de um espaço semi-regular (X,τ).

1. A é um conjunto δg-fechado se e somente se A é g-fechado.
2. Se (X,τ) também for um espaço $T_{\frac{1}{2}}$, então A é δg-fechado se e somente se A é fechado.

Demonstração:

1. Suponha, inicialmente que A seja um conjunto δg-fechado em (X,τ). Pelo Teorema 2.2.3, segue que A é g-fechado em (X,τ^*). Como $\tau=\tau^*$ pois (X,τ) é um espaço semi-regular, segue que A é g-fechado em (X,τ).

Reciprocamente, suponha que A é g-fechado em (X,τ). Como (X,τ) é semi-regular, então, para todo $U\in\tau$ tal que $A\subseteq U$ temos que $cl(A)=cl_{\delta}(A)\subseteq U$. Portanto A é δg-fechado em (X,τ).

2. Se (X,τ) é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$, então todo subconjunto g-fechado em (X,τ) é um subconjunto fechado em (X,τ). Pelo item anterior se A é δg-fechado em (X,τ) então A é g-fechado e portanto A é fechado em (X,τ). Reciprocamente, se A é um subconjunto fechado em (X,τ), A é um subconjunto g-fechado em (X,τ). Como (X,τ) é um espaço semi-regular, pelo item 1), segue que A é um subconjunto δg-fechado em (X,τ).

Definição 3.1.3 [12]: Um espaço topológico (X,τ) é chamado Almost Weakly Hausdorff quando a semi-regularização de (X,τ) é $T_{\frac{1}{2}}$.

Teorema 3.1.5 [14]: Para um espaço topológico (X,τ) as seguintes condições são equivalentes:

1. (X,τ) é um espaço Almost Weakly Hausdorff.
2. Para todo $x\in X$, $\{x\}$ é um conjunto δ-fechado ou δ-aberto.
3. Para todo $x\in X$, $\{x\}$ é um conjunto δ-fechado ou regularmente aberto.

Demonstração:

$(1) \Rightarrow (2)$ Considere (X,τ) um espaço Almost Weakly Hausdorff. Então a semi-regularização (X,τ^*) é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$ Logo, $\forall x \in X$ $\{x\}$ é aberto ou fechado em (X,τ^*) Portanto $\{x\}$ é δ-fechado ou δ-aberto.

$(2) \Rightarrow (3)$ Imediato.

$(3) \Rightarrow (1)$ Se para todo $x \in X$, $\{x\}$ é δ-fechado ou regularmente aberto em (X,τ) então, para todo $x \in X$, $\{x\}$ é fechado ou aberto em (X,τ^*). Portanto (X,τ^*) é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$ e (X,τ) é um espaço Almost Weakly Hausdorff.

Teorema 3.1.6 [12]: Em um espaço Almost Weakly Hausdorff (X,τ), conjuntos g-fechados em (X,τ^*) são δ-fechado em (X,τ) e portanto δg-fechado em (X,τ).

Demonstração: Seja A um subconjunto g-fechado em (X,τ^*). Como (X,τ) é Almost Weakly Hausdorff, temos que (X,τ^*) é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$. Então A é um subconjunto fechado em (X,τ^*). Portanto A é um subconjunto regularmente fechado em (X,τ) e então, A é um subconjunto δ-fechado em (X,τ), seguindo daí que A é um subconjunto δg-fechado em (X,τ).

Definição 3.1.4 [12]: Um espaço topológico (X,τ) é chamado espaço $T_{\frac{3}{4}}$ quando todo subconjunto δg-fechado de (X,τ) é δ-fechado.

Lema 3.1.1 [12]: Em qualquer espaço (X,τ), um subconjunto unitário $\{x\}$ é δ-aberto se e somente se ele é regularmente aberto.

Demonstração: Sejam (X,τ) um espaço topológico e $x \in X$. Suponha que $\{x\}$ é um subconjunto δ-aberto. Então $\{x\}$ é a união de conjuntos regularmente abertos contidos em $\{x\}$. Se $\{x\}$ não fosse regularmente aberto, o único regularmente aberto contido em $\{x\}$ seria o conjunto vazio. Assim $\{x\} = \varnothing$. Absurdo.
A recíproca segue da definição de conjunto δ-aberto.

Teorema 3.1.7 [12]: Para um espaço topológico (X,τ), as seguintes condições são equivalentes:

1. X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.
2. Todo subconjunto unitário $\{x\}$, é δ-aberto ou fechado.
3. Todo subconjunto unitário $\{x\}$, é regularmente aberto ou fechado.

Demonstração:
$(1) \Rightarrow (2)$ Seja que X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ e $x \in X$. Suponha que $\{x\}$ não seja um subconjunto fechado de (X,τ). Vamos mostrar que $\{x\}$ é δg-aberto. Para isso, tome um subconjunto F fechado em (X,τ) tal que $F \subseteq \{x\}$. Como o único conjunto contido em $\{x\}$ é ele mesmo e o conjunto vazio, e como supomos que $\{x\}$ não é fechado, segue que $F = \varnothing$. Logo $F \subseteq \operatorname{int}_{\delta}\{x\}$. Portanto $\{x\}$ é um subconjunto δg-aberto em (X,τ). Agora, como por hipótese (X,τ) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$, segue que $\{x\}$ é um subconjunto δ-aberto em (X,τ).

$(2) \Rightarrow (3)$ Por hipótese, todo subconjunto unitário $\{x\}$, é δ-aberto ou fechado. Pelo Lema 3.1.1, segue que subconjunto unitário $\{x\}$, é regularmente aberto ou fechado.
$(3) \Rightarrow (1)$ Seja A um subconjunto δg-aberto de (X,τ). Vamos mostrar que A é um subconjunto δ-aberto em (X,τ). Seja $x \in A$, pela hipótese, $\{x\}$ é regularmente aberto ou fechado em (X,τ). Se $\{x\}$ for regularmente aberto, para todos $x \in A$, então A é δ-aberto

em (X,τ) (pelo Lema 3.1.1). Agora, se $\{x\}$ fechado, para algum (ou todos) $x \in A$, como A é δg-aberto de (X,τ), $\{x\} \subseteq \operatorname{int}_\delta A$. Assim $A = \bigcup_{x\in A}\{x\} \subseteq \operatorname{int}_\delta A$. Como $\operatorname{int}_\delta A \subseteq A$ sempre, segue que $\operatorname{int}_\delta A = A$, e portanto A é um subconjunto δ-aberto em (X,τ).

Teorema 3.1.8: O espaço X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ se e somente se todo subconjunto B de X é igual a interseção de todos regularmente fechados e todos abertos contendo B.

Demonstração: Suponha que X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ com $B \subseteq X$ arbitrário. Então

$B = \bigcap\left\{\{x\}^c \setminus x \notin B\right\}$. Como todo $\{x\}$ é regularmente aberto ou fechado em X, então $\{x\}^c$ é regularmente fechado ou aberto em X, seguindo daí o resultado.

Reciprocamente, suponha que todo subconjunto de X é igual a interseção de todos abertos e regularmente fechados contendo B. Se $x \in X$, pela hipótese, $\{x\}^c$ é a interseção de todos regularmente fechados e de todos abertos contendo $\{x\}^c$. Vamos mostrar que $\{x\}^c$ é regularmente fechado ou aberto em X , ou seja, $\{x\}$ é regularmente aberto ou fechado em X. Como $\{x\}^c = X - \{x\}$, segue que $cl_\delta\{x\}^c = X$ ou $cl_\delta\{x\}^c = \{x\}^c$. Se $cl_\delta\{x\}^c = \{x\}^c$ para todo $x \in X$, então $\{x\}$ é δ-aberto e portanto X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$. Agora, se para algum $x \in X$ tivermos $cl_\delta\{x\}^c \neq \{x\}^c$, então $cl_\delta\{x\}^c = X$.Mas $\{x\}^c$ é igual a interseção de todos regularmente fechado e todo todos aberto contendo $\{x\}^c$. Como o único regularmente fechado contendo $\{x\}^c$ é X, segue $\{x\}^c$ é um conjunto aberto em X. Portanto $\{x\}$ é fechado. Concluímos então que $\{x\}$ é regularmente aberto ou fechado em X para qualquer $x \in X$. Portanto X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Teorema 3.1.9: Sejam X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ e $Y \subseteq X$ um subconjunto aberto em X.Então Y é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Demonstração: De fato, como X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$, $\forall y \in Y$, então $\{y\}$ é um subconjunto regularmente aberto ou fechado em X. Se $\{y\}$ é um subconjunto regularmente aberto, como Y é aberto em X, segue que $\{y\} = Y \bigcap \{y\}$ é aberto em Y. Vamos mostrar que $\operatorname{int}_Y(cl_Y\{y\}) = \operatorname{int}_X(cl_Y\{y\})$. Para cada $k \in \operatorname{int}_Y(cl_Y\{y\})$, existe um aberto U em Y tal que $x \in U \subset cl_Y\{y\}$. Como Y é aberto em X, segue que U é aberto em X e $k \in \operatorname{int}_X(cl_Y\{y\})$. Assim $\operatorname{int}_Y(cl_Y\{y\}) \subseteq \operatorname{int}_X(cl_Y\{y\})$. Agora, se $k \in \operatorname{int}_X(cl_Y\{y\})$, existe um aberto V em X tal que $k \in V \subset (cl_Y\{y\})$. Como $k \in V \bigcap Y$ e $V \bigcap Y$ é aberto em Y com $k \in V \bigcap Y \subset V \subset (cl_Y\{y\})$, segue que $\operatorname{int}_Y(cl_Y\{y\}) = \operatorname{int}_X(cl_Y\{y\})$. Portanto, $\operatorname{int}_Y(cl_Y\{y\}) = \operatorname{int}_X(cl_Y\{y\}) = \operatorname{int}_X(cl_X\{y\} \bigcap Y) = \operatorname{int}_X(cl_X\{y\}) \bigcap Y = \{y\} \bigcap Y = \{y\}$, ou seja $\{y\}$ é um subconjunto regularmente aberto em Y.
Mas, se $\{y\}$ é um subconjunto fechado em X, $\{y\} = Y \bigcap \{y\}$ é fechado em Y. Portanto, Y é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Teorema 3.1.10 [12]: Todo espaço T_1 é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Demonstração: Sejam X um espaço T_1 e $A \subseteq X$ um subconjunto δg-fechado em X. Tome $x \in cl_\delta(A)$, como X é T_1, temos que $\{x\}$ é um conjunto fechado de X. Se $x \notin A$, então $\{x\} \subseteq cl_\delta(A) - A$, como A é δg-fechado segue pelo Teorema 2.2.2 que $cl_\delta(A) - A$ não contém conjunto fechado não vazio. Portanto $cl_\delta(A) = A$ e assim A é δ-fechado em X. logo X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Exemplo 3.1.2: Um exemplo de um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ que não é um espaço T_1 : Seja (X,τ) um espaço topológico onde $X=\{x,y,z\}$, e seja $\tau=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{x,y\},X\}$. Então (X,τ) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ mas não é um espaço T_1. De fato, (X,τ) não é um espaço T_1 pois $\{x\}$ não é fechado em (X,τ). Agora, (X,τ) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$, pois

$\operatorname{int}\overline{\{x\}}=\operatorname{int}\{x,z\}=\{x\}$ então $\{x\}$ é regularmente aberto em (X,τ);

$\operatorname{int}\overline{\{y\}}=\operatorname{int}\{y,z\}=\{y\}$ então $\{y\}$ é regularmente aberto em (X,τ);

$\{z\}$ é fechado em (X,τ).

Pela definição de espaço $T_{\frac{3}{4}}$, segue que (X,τ) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Teorema 3.1.11 [12]: Todo espaço $T_{\frac{3}{4}}$ é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$.

Demonstração: Sejam X um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ e $A\subseteq X$ um subconjunto g-fechado de X. Como X é um Espaço $T_{\frac{3}{4}}$, ou $\{x\}$ é um subconjunto δ-aberto ou fechado. Logo, ou $\{x\}$ é aberto ou fechado. Pelo Teorema 3.1.6, temos que X é um Espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Exemplo 3.1.3: Um exemplo de espaço $T_{\frac{1}{2}}$ que não é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Seja $X=\{a,b\}$ e $\tau=\{\varnothing,\{a\},X\}$. Então (X,τ) é um espaço topológico. Observe que (X,τ) é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$. Mas (X,τ) não é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$. De fato, $\{a\}$ não é fechado pois $\{b\}$ não é aberto. $\{a\}$ também não δ-aberto pois $\operatorname{int}\overline{\{a\}}=X\neq\{a\}$.

Teorema 3.1.12 [12] : Para um espaço topológico (X,τ) as seguintes condições são equivalentes:

1. X é Almost Weakly Hausdorff.
2. X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ e cada conjunto $\{x\}$ é δ-fechado ou δ-aberto em (X,τ).

Demonstração:

$(1)\Rightarrow(2)$ Suponha que (X,τ) é um espaço Almost Weakly Hausdorff, então (X,τ^*) é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$. Seja A um subconjunto δg-fechado em (X,τ), então A é g-fechado em (X,τ^*), e portanto A é fechado em (X,τ^*). Assim A é regularmente fechado em (X,τ) e portanto A é δ-fechado em (X,τ). Logo (X,τ) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$. Então $\{x\}$ é δ-fechado ou δ-aberto em (X,τ).

$(2)\Rightarrow(1)$Suponha que (X,τ) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ e que $\forall x\in X,\{x\}$ é um subconjunto δ-fechado ou δ-aberto em (X,τ). Portanto $\{x\}$ é fechado ou aberto em (X,τ^*). Logo, pelo Teorema 3.1.1, (X,τ^*) é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$ e assim (X,τ) é um espaço Almost Weakly Hausdorff.

Teorema 3.1.13: Seja $X=\prod\{X_\alpha \setminus \alpha\in J\}$. Se (X,τ) um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ então X_α é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Demonstração: Seja $X=\prod\{X_\alpha \setminus \alpha\in J\}$ tal que (X,τ) um espaço $T_{\frac{3}{4}}$. Escolha $\alpha\in J$ qualquer, vamos mostrar que X_α é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$. Seja $x_\alpha\in X_\alpha$ qualquer, então para qualquer $x = (x_\beta)_{\beta \in J} \in X$ onde $x_\beta \in X_\beta$ é um elemento qualquer de X_β se $\beta \neq \alpha$ mas se $\alpha = \beta$, $x_\beta = x_\alpha$, temos que $\{x\} = \{(x_\beta)_{\beta \in J}\} \subset X$ é regularmente aberto ou fechado em (X,τ).

Consideremos τ como a topologia produto sobre X. Então $\{x\}$ não é aberto em (X,τ) pois todo aberto em X possui infinitas parcelas iguais a X_β, com β variando em J. Assim $\{x\}$ não é regularmente aberto em (X,τ). Então $\{x\}$ é fechado em (X,τ) e portanto $\{x_\alpha\}$ é fechado em X_α. Logo X_α é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Considerando τ como a topologia da caixa sobre X. Se $\{x\}$ é fechado em (X,τ) , então $\{x_\alpha\}$ é fechado em X_α. Agora, se $\{x\}$ é regularmente aberto em (X,τ),
$\prod_{\beta \in J}\{x_\beta\} = \{x\} = \operatorname{int}\overline{\{x\}} = \operatorname{int}\overline{\prod_{\beta \in J}(\{x_\beta\})} = \operatorname{int}\prod_{\beta \in J}\overline{\{x_\beta\}} = \prod_{\beta \in J}\operatorname{int}\overline{\{x_\beta\}}$. Portanto, $\{x_\alpha\} = \operatorname{int}\overline{\{x_\alpha\}}$ e X_α é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$

Em qualquer caso, se $X = \prod\{X_\alpha \setminus \alpha \in J\}$. Se (X,τ) um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ então X_α é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Corolário 3.1.3: Seja $X = \prod\{X_\alpha \setminus \alpha \in \{1,2,\cdots,n\}\}$. O espaço (X,τ) *é* um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ então X_α é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Demonstração: Suponha que X seja um espaço $T_{\frac{3}{4}}$. Seja $\alpha \in \{1,2,\cdots,n\}$ qualquer e X_α o espaço correspondente. Queremos mostrar que X_α é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$. Para isso, tome $x_\alpha \in X_\alpha$ um elemento qualquer. Como X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$, e seja $x = (x_1,\cdots,x_n) \in X$ no qual $x_\alpha = x_\beta$ na α-ésima posição e se $\alpha \neq \beta$, $x_\beta \in X_\beta$ é um elemento qualquer. Então $\{x\}$ é regularmente aberto ou fechado em X. Logo $\{x_\alpha\}$ é regularmente aberto ou fechado em X_α.

Exemplo 3.1.4: Recíproca do teorema anterior não é verdadeira.

O produto de dois espaços $T_{\frac{3}{4}}$ não é geralmente um espaço $T_{\frac{3}{4}}$. Por exemplo $X = \{a,b,c\}$ e $\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$. Seja $Q = \{(c,b)\}$, então Q é δg-fechado em $X \times X$. De fato, o único aberto em $X \times X$ é contendo Q é o próprio $X \times X$

Observe que Q não é δ-fechado em $X \times X$ pois $X - Q$ não é aberto em $X \times X$.

Lema 3.1.4: Seja $X = \prod\{X_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ onde J é infinito. Então X é $T_{\frac{3}{4}}$ se e somente se T_1 (A topologia considerada sobre X é a topologia produto).

Demonstração: Suponha que X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$. Seja $x \in X$, $\{x\}$ não é aberto na topologia produto, portanto $\{x\}$ não é regularmente aberto na topologia produto. Como X é $T_{\frac{3}{4}}$, $\{x\}$ é fechado. Daí segue X é um espaço T_1.

A recíproca já foi provada no Teorema 3.1.10.

Teorema 3.1.14: Seja $X = \prod\{X_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ onde J é infinito. Então X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ se e somente se cada X_α é um espaço T_1 (A topologia considerada sobre X é a topologia produto).

Demonstração: De fato se X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$, pelo lema anterior, X é um espaço T_1, então X_α é um espaço T_1 para todo $\alpha \in J$.

Reciprocamente, se X_α é um espaço T_1 para todo $\alpha \in J$, então X é um espaço T_1.

Portanto X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ (pelo Teorema 3.1.10).

Teorema 3.1.15 [15]: Seja $(X,\tau) = \prod\{(X_i,\tau_i) \setminus i = 1,2,...,n\}$. Então X é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$ se e somente se uma das seguintes condições é satisfeita:

a. (X_i,τ_i) é um espaço T_1 para todo $i = 1,2,...,n$

ou

b. para algum *k*, (X_k,τ_k) é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$ mas não T_1 onde (X_i,τ_i) é discreto para todo $i \neq k$.

Demonstração: Suponha primeiramente que X é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$ e que o item a. não seja satisfeito. Suponha também que, para algum k, (X_k,τ_k) não é um espaço T_1, mas é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$. Fixe $i \neq k$. Afirmamos que (X_i,τ_i) é um espaço discreto. Caso contrario, existe um $x_i \in X_i$ tal que $\{x_i\} \notin \tau_i$. Todavia, para algum $x_k \in X_k$, x_k não é fechado em (X_k,τ_k). Defina $x^* \in X$ por

$$x^*(k) = x_k$$

$$x^*(i) = x_i$$

$$x^*(j) \in X_j \text{ arbitrariamente para } i \neq k,i$$

Se $\{x^*\} \in \tau$, então a i-ésima projeção $P_i[\{x^*\}] = \{x_i\} \in \tau_i$, uma contradição. Se $\{x^*\}$ é fechado em (X,τ) então $\{x_k\}$ é fechado em (X_k,τ_k) também uma contradição. Pelo Teorema 3.1.1 segue que (X_i,τ_i) é discreto para todo $i \neq k$.

Reciprocamente, se o item a. é verdadeiro (X,τ) é um espaço T_1 e portanto $T_{\frac{1}{2}}$ (pelo Teorema 3.1.10). Se o item b. for verdadeiro então para algum *k*, (X_k,τ_k) é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$ mas não T_1 onde (X_i,τ_i) é discreto para todo $i \neq k$. Seja $x \in X$. Se $\{x_k\} \in \tau_k$, então $x = \prod\{x_j \setminus 1 \leq j \leq n\} \in \tau$. Por outro lado se $\{x_k\}$
É fechado em (X_k,τ_k) então $\{x\}$ é fechado em (X,τ). Portanto (X,τ) é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$.

Teorema 3.1.16: Seja $(X,\tau) = \prod\{(X_i,\tau_i) \setminus i = 1,2,...,n\}$. Então X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ se e somente se uma das seguintes condições é satisfeita:

a. (X_i,τ_i) é um espaço T_1 para todo $i = 1,2,...,n$

ou

b. para algum *k*, (X_k,τ_k) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ mas não T_1 onde (X_i,τ_i) é discreto para todo $i \neq k$

Demonstração: Suponha primeiramente que X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$. Então X é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$, pelo Teorema 3.1.11. Pelo Teorema anterior, a) ou b) é satisfeitas.
Reciprocamente, se a) é satisfeita, (X,τ) é um espaço T_1. Logo (X,τ) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.
Agora, se a condição b) for satisfeita, então para algum k, X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ mas não T_1, enquanto (X_i,τ_i) é discreto para todo $i \neq k$. Seja $x \in X$, se $\{x_k\}$ é regularmente aberto, então $\{x\} = \prod\{x_j / j = 1,2,...,n\}$ é regularmente aberto (pois (X_i,τ_i) é discreto para todo $i \neq k$). Por outro lado, se $\{x_k\}$ é fechado, $\{x\} = \prod\{x_j / j = 1,2,...,n\}$ é fechado em X (pois (X_i,τ_i) é discreto para todo $i \neq k$). Logo (X,τ) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Teorema 3.1.17: Seja (X,τ_α) um espaço $T_{\frac{3}{4}}$, $\forall \alpha \in J$, onde $\{\tau_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma família totalmente ordenada em relação à inclusão. Então $(X,\bigcap\{\tau_\alpha \setminus \alpha \in J\})$ é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Demonstração: Seja $x \in X$ e suponha que $\{x\}$ não seja regularmente aberto em $(X,\bigcap\{\tau_\alpha \setminus \alpha \in J\})$. Então $\{x\}$ não é regularmente aberto em (X,τ_β) para algum $\beta \in J$. Como, por hipótese, (X,τ_β) é $T_{\frac{3}{4}}$, $\{x\}$ é fechado em (X,τ_β). Vamos mostrar que $\{x\}$ é fechado em (X,τ_α),$\forall \alpha \in J$ .Se $\alpha \in J$ é tal que $\tau_\beta \subseteq \tau_\alpha$, então $\{x\}$ é fechado em (X,τ_α). Agora, se $\alpha \in J$ é tal que $\tau_\alpha \subseteq \tau_\beta$, e se $\{x\}$ não é fechado em (X,τ_α), então $\{x\}$ não pode ser fechado em (X,τ_β), contradição. Logo $\{x\}$ é regularmente aberto ou fechado em $(X,\bigcap\{\tau_\alpha \setminus \alpha \in J\})$, e portanto $(X,\bigcap\{\tau_\alpha \setminus \alpha \in J\})$ é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Lema 3.1.5(Lema de Zorn): Seja X um conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadeia tenha pelo menos uma cota superior, então X tem um elemento maximal

Corolário 3.1.4: Para qualquer topologia τ sobre um espaço X, existe uma topologia υ sobre X tal que :

a. $\tau \subset \upsilon$
b. (X,υ) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$
c. Se (X,σ) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ para $\tau \subset \sigma \subset \upsilon$, então $\sigma = \upsilon$.

Demonstração: Seja $\wp = \{\tau_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma família indexada de todas as topologias mais finas que τ sobre um espaço X. tal que (X,τ_α) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$. Note que $\wp \neq \varnothing$ pois X com a topologia discreta é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$. Todavia, se $\{\tau_\alpha \setminus \alpha \in J^*\}$ é um subconjunto de

$\wp$ totalmente ordenado como respeito a inclusão, então pelo teorema anterior, $(X,\sigma) = (X,\bigcap\{\tau_\alpha \setminus \alpha \in J^*\})$ é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ tal que $\tau \subset \sigma$. Então $\sigma \in \wp$ e pelo Lema de Zorn , $\wp$ possui um elemento minimal υ que satisfaz as propriedades acima.

3.2 Espaço g-regular, Espaço g-normal e espaço Almost g-regular

Definição 3.2.1 [26]: Um espaço X é dito regular quando para cada par (x,B) tal que $x \in X$ e B é um subconjunto fechado em X com x $\notin$ B, existirem abertos U e V disjuntos tais que $x \in U$ e $B \subset V$.

Definição 3.2.2 [30]: Um espaço X é dito regular generalizado (escrito como g-regular) quando para cada par (x,B) tal que $x \in X$ e B é um subconjunto g-fechado em X com $x \notin B$, existirem abertos U e V disjuntos tais que $x \in U$ e $B \subset V$.

Definição 3.2.3 [26]: Um espaço X é dito normal quando para cada par (A,B) de subconjuntos fechados em X com A$\bigcap$B=$\varnothing$, existirem abertos U e V disjuntos tais que $A \subset U$ e $B \subset V$.

Definição 3.2.4 [30]: Um espaço X é dito normal generalizado (escrito como g-normal) quando para cada par (A,B) de subconjuntos g-fechados em X com A$\bigcap$B=$\varnothing$, existirem abertos U e V disjuntos tais que $A \subset B$ e $B \subset V$.

Definição 3.2.5 [3]: Um espaço X é dito Hausdorff quando para cada par (x,y) de elementos de X com $x \neq y$, existirem abertos U e V disjuntos tais que x$\in$U e y$\in$ V.

Teorema 3.2.1 [21]: Seja (X,τ) um espaço topológico. O espaço (X,τ) é um espaço de Hausdorff, se e somente se (X,τ^*) é um espaço de Hausdorff.

Demonstração: Sejam (X,τ) um espaço Hausdorff e $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Então existem U e V abertos disjuntos em (X,τ) tais que $x \in U$ e $y \in V$. Então $x \in \operatorname{int}\overline{U} = U_1$ e $y \in \operatorname{int}\overline{V} = V_1$ com V_1 e U_1 subconjuntos regularmente abertos em (X,τ) contendo y e x, respectivamente. Falta mostrar que V_1 e U_1 são disjuntos. Como $\overline{U} \cap V = \varnothing$, então $U_1 \cap V = \operatorname{int}\overline{U} \cap V = \varnothing$. Mas, desde que U_1 e V são abertos, $U_1 \cap \overline{V} = \varnothing$. Portanto $U_1 \cap V_1 = U_1 \cap \operatorname{int}\overline{V} \subseteq U_1 \cap \overline{V} = \varnothing$

Como $\tau^* \subset \tau$, a recíproca é imediata.

Definição 3.2.6 [3]: Um espaço X é chamado g-Hausdorff quando para cada par (x,y) de elementos de X com $x \neq y$, existirem g-abertos U e V disjuntos tais que x $\in$ U e y$\in$ V.

Observação 3.2.1:

1. Se X é um espaço g-regular então X é regular.De fato, sejam x $\in$ X e B é um subconjunto fechado em X (e portanto g-fechado) tal que x $\notin$ B. Como X é g-regular, existem U e V abertos disjuntos tais que x $\in$ U e B $\subset$ V. Portanto X é regular.
2. Se X é um espaço g-normal, então X será normal.De fato, sejam A e B subconjuntos fechados em X (e portanto g-fechados de X) tal que $A \cap B = \varnothing$. Como X é g-normal, existem U e V abertos disjuntos tais que $A \subset U$ e $B \subset V$. Portanto X é normal.

Teorema 3.2.2 [3]: Se X é um espaço de Hausdorff, então X é um espaço g-Hausdorff.

Demonstração: Se X é Hausdorff então para cada par de (x,y) de elementos de X com $x \neq y$, existem abertos U e V disjuntos tais que x $\in$ U e y $\in$ V. Como todo conjunto aberto é g-aberto, segue que X é g-Hausdorff.

Teorema 3.2.3: Seja (X,τ) um espaço topológico g-regular. Se (X,τ) for um espaço g-Hausdorff, então (X,τ) é um espaço de Hausdorff.

Demonstração: Seja (X,τ) um espaço topológico g-regular. Suponha que (X,τ) seja um espaço g-Hausdorff. Tome $x, y \in X$ quaisquer tais que $x \neq y$. Como (X,τ) é g-Hausdorff, existem g-abertos disjuntos U e V tais que $x \in U$ e $y \in V$. Como (X,τ) é um espaço g-regular, existem abertos Z e W tais que $x \in Z \subset \overline{Z} \subset U$, $y \in W \subset \overline{W} \subset V$, e $Z \cap W \subset U \cap V = \varnothing$. Portanto, existem abertos Z e W disjuntos tais que $x \in Z$ e $y \in W$. Daí segue que (X,τ) é um espaço de Hausdorff.

Corolário 3.2.1: Seja (X,τ) um espaço topológico g-regular. Se (X,τ) for um espaço g-Hausdorff se e somente se (X,τ) é um espaço de Hausdorff.

Exemplo 3.2.1: Vejamos um exemplo de espaço g-Hausdorff que não é Hausdorff. Considere $X = \{a,b,c\}$ e $\tau = \{\varnothing,\{a\},X\}$. Temos que (X,τ) é um espaço topológico. Observe que (X,τ) não é um espaço de Hausdorff pois $\{a\}$ não é fechado em (X,τ). Mas (X,τ) é g-Hausdorff. De fato, como $\{a\}$ é aberto em (X,τ) então é g-aberto em (X,τ). Agora, $\{b\}$e $\{c\}$ são g-abertos em (X,τ) pois o único fechado contido em ambos é o conjunto vazio.

Corolário 3.2.2: Se (X,τ) for Hausdorff então (X,τ^*) é g-Hausdorff.

Demonstração:

Sejam (X,τ) um espaço Hausdorff e $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Então, pelo Teorema 3.2.1, (X,τ^*) é Hausdorff. Logo, pelo Teorema anterior, (X,τ^*) é g-Hausdorff.

Lema 3.2.2: Seja (X,τ) um espaço Almost Weakly Hausdorff. Se (X,τ^*) for g-Hausdorff então (X,τ) é g-Hausdorff.

Demonstração:

Sejam (X,τ) um espaço Almost Weakly Hausdorff e $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Se (X,τ^*) é um espaço g-Hausdorff, existem U e V g-abertos disjunto de (X,τ^*) tais que $x \in U$ e $y \in V$. Como (X,τ) um espaço Almost Weakly Hausdorff então conjuntos g-abertos em (X,τ^*) são δ-abertos em (X,τ) e portanto g-abertos em (X,τ). Portanto U e V g-abertos disjunto de (X,τ) tais que $x \in U$ e $y \in V$ e (X,τ) é g-Hausdorff.

Teorema 3.2.4 [26]: Se todo conjunto unitário for fechado em X, então se X é um espaço regular temos que X é um espaço Hausdorff.

Demonstração: Sejam $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Desde que $\{x\}$ é fechado em X, $y \notin \{x\}$ e X é um espaço regular, existem abertos disjuntos U e V tais que $x \in U$ e $y \in V$. Portanto X é um espaço de Hausdorff.

Corolário 3.2.3: Suponha que todo conjunto unitário de X seja fechado. Se X é um espaço g-regular, então X é um espaço Hausdorff.

Demonstração: Desde que todo espaço g-regular é um espaço regular, e todo espaço regular é Hausdorff; temos que todo espaço g-regular é um espaço Hausdorff.

Corolário 3.2.4: Suponha que todo conjunto unitário de X seja fechado**.** Se X é g-regular, então X é g-Hausdorff.

Demonstração: Se X é um espaço g-regular então, pelo Corolário 3.2.3 X é um espaço de Hausdorff. Por sua vez, pelo Teorema 3.2.2, X é um espaço g-Hausdorff.

Teorema 3.2.5: Suponha que todo conjunto unitário de X seja g-fechado. Então X g-normal implica X g-regular.

Demonstração: Sejam U um subconjunto g-fechado em X e $x \in X$ tal que $x \notin U$. Como todo conjunto unitário é g-fechado, seque que $\{x\}$ é g-fechado em X. Como X é um espaço g-normal, existem abertos disjuntos V e W tais que $x \in V$ e $U \subseteq W$. Portanto X é um espaço g-regular.

Corolário 3.2.5: Suponha que todo conjunto unitário de X seja fechado. Então X g-normal implica X g-Hausdorff.

Demonstração: De acordo com o Teorema 3.2.5, se X é um espaço g-normal, então X é um espaço g-regular e portanto, pelo Corolário 3.2.4, X é um espaço g-Hausdorff.

Teorema 3.2.6: Para um espaço X, são equivalentes:

1. X é um espaço g-regular.
2. Para cada $x \in X$ e uma g-vizinhança U de x, existe uma vizinhança V de x tal que $\overline{V} \subset U$.

3. Para cada $x \in X$ e cada subconjunto g-fechado A em X tal que $x \notin A$, existe um conjunto aberto U contendo x tal que $\overline{U} \cap A = \varnothing$.

Demonstração:

($1 \Rightarrow 2$) Seja $x \in X$ e uma g-vizinhança U de x, então $B = X - U$ é um subconjunto g-fechado em X tal que $x \notin B$. Como X é g-regular, existem W e V abertos disjuntos em X tais que

$x \in V$ e $B \subset W$. Observe que o conjunto $\overline{V}$ é disjunto de B. De fato, se $y \in B$ então W é uma vizinhança de y disjunta de V, logo $y \notin \overline{V}$ e $\overline{V} \cap B = \varnothing$.

Logo $x \in \overline{V} \subset U$.

($2 \Rightarrow 3$) Sejam $x \in X$ e A um subconjunto g-fechado em X tal que $x \notin A$ então $B = X - A$ é uma g-vizinhança aberta em X tal que x $\in$ B. Por hipótese, existe uma vizinhança V de x tal que $\overline{V} \subset U$. Dai segue que existe uma vizinhança V de x tal que $\overline{V} \cap A = \varnothing$.

($3 \Rightarrow 1$) Seja $x \in X$ e A g-fechado em X tal que $x \notin A$. Por hipótese existe um conjunto aberto U contendo x tal que $\overline{U} \cap A = \varnothing$. Então $V = X - \overline{U}$ é uma aberto de X, tal que $A \subset V$, $x \in U$ e $U \cap V = \varnothing$. Portanto X é g-regular.

Corolário 3.2.6: Se um espaço (X, τ) é um espaço g-regular, então para cada $x \in X$ e cada vizinhança U de $x \in U$ existe uma g-vizinhança V de x tal que $V \subset \overline{V} \subset \operatorname{int}\overline{U}$.

Demonstração: Sejam $x \in X$ e U uma vizinhança de x, então $B = X - U$ é um subconjunto fechado em X, portanto g-fechado, tal que x $\notin$ B. Como X é g-regular, existem W e V abertos disjuntos, portanto g-abertos disjuntos em X tais que

$x \in V$ e $B \subset W$. Observe que o conjunto $\overline{V}$ é disjunto de B. De fato, se $y \in B$ então W é uma vizinhança de y disjunta de V, logo $y \notin \overline{V}$ e $\overline{V} \cap B = \varnothing$.

Portanto $x \in V \subset \overline{V} \subset U = \operatorname{int} U \subset \operatorname{int}\overline{U}$.

Corolário 3.2.7: Se (X,τ) é um espaço g-regular então, para cada $x \in X$ e cada g-vizinhança U de x, existe uma g-vizinhança V de x tal que $V \subset \overline{V} \subset \operatorname{int}\overline{U}$.

Demonstração: Sejam (X,τ) é um espaço g-regular, $x \in X$ e U g-vizinhança de x. Então, pelo Teorema 3.2.6, existe um aberto V contendo x tal que $V \subset \overline{V} \subset U$. Como U é g-aberto, $V \subset \overline{V} \subset \operatorname{int} U \subseteq \operatorname{int}\overline{U}$. Lembrando que todo aberto é g-aberto, daí segue o resultado.

Corolário 3.2.8: Se (X,τ) é um espaço g-regular então, para cada $x \in X$ e cada g-vizinhança U de x, existe uma g-vizinhança V de x tal que $V \subset \overline{V} \subset \operatorname{int}\overline{U}$.

Demonstração**:** Sejam (X,τ) é um espaço g-regular , $x \in X$ e U g-vizinhança de x. Então, pelo Teorema 3.2.6, existe um aberto V contendo x tal que $V \subset \overline{V} \subset U$. Como U é g-aberto, $V \subset \overline{V} \subset \operatorname{int} U \subseteq \operatorname{int}\overline{U}$. Lembrando que todo aberto é g-aberto, segue o resultado.

Teorema 3.2.7: Seja (X,τ) um espaço topológico. Dado um subconjunto $A \subseteq X$ g-fechado e $x \in X$ tal que $x \notin A.$ Então (X,τ) é um espaço g-regular se e somente se existem abertos U e V tais que $x \in U$, $A \subseteq V$ e $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

Demonstração: Suponha que (X,τ) é um espaço g-regular. Sejam $A \subseteq X$ g-fechado e $x \in X$ tal que $x \notin A.$ Então existem abertos U e V tais que $x \in V$, $A \subseteq U$ e $\overline{U} \cap V = \varnothing$. Desde que $\overline{U}$ é regularmente fechado e portanto g-fechado e $x \in X$ tal que $x \notin \overline{U}.$ Então existem abertos Z e W tais que $x \in Z$, $A \subseteq \overline{U} \subseteq W$ e $\overline{Z} \cap W = \varnothing$. Assim, existem abertos U e Z tais que $x \in Z$, $A \subseteq U$ e $\overline{Z} \cap \overline{U} \subseteq \overline{Z} \cap W = \varnothing$.
Reciprocamente, suponha que dado um subconjunto $A \subseteq X$ g-aberto e $x \in X$ tal que $x \notin A$, existem abertos U e V tais que $x \in U$, $A \subseteq V$ e $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$. Então existem abertos U e V tais que $x \in U$, $A \subseteq V$ e $U \cap V \subseteq \overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

Pela Definição 3.2.2, temos que (X,τ) é um espaço g-regular.

Corolário 3.2.9: Se um espaço topológico (X,τ) é g-regular então, para todo fechado A e cada ponto x não pertencente a A, existem abertos V_1 e V_2 tais que $x \in V_1$, $A \subset V_2$ e $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$.

Demonstração: Direto do teorema anterior.

Teorema 3.2.8: Sejam (X,τ)um espaço topológico e A um subconjunto g-fechado em (X,τ). Se (X,τ) é um espaço g-regular então A é g-regular como subespaço de (X,τ).

Demonstração: Seja $a \in A$ e F um subconjunto de A g-fechado em A tal que $a \notin F$. Como A é g-fechado em (X,τ), segue que F também é g-fechado em (X,τ) e $a \in X - F$. Como (X,τ) é g-regular, existem abertos U e V disjuntos tais que $a \in U$ e $F \subset V$. Os conjuntos $U' = U \cap A$ e $V' = V \cap A$ são abertos em A disjuntos tais que $a \in U'$ e $F \subset V'$. Portanto A é um subespaço g-regular.

Teorema 3.2.9: Para um espaço X, são equivalentes:

1. X é g-normal.
2. Para todo g-fechado F e todo g-aberto G em X tal que $F \subset G$, existir um aberto H tal que $F \subset H \subset \overline{H} \subset G$.

Demonstração:

($1 \Rightarrow 2$) Seja F g-fechado e G g-aberto em X, tal que $F \subset G$. Então $B = X - G$ é um conjunto g-fechado em X tal que $B \cap F = \varnothing$. Pela hipótese, existem abertos H e V disjuntos tais que $F \subset H$ e $B \subset V$. Além disso $\overline{H} \cap B = \emptyset$. De fato, se $y \in B$ então V é uma vizinhança de y disjunta de H. Logo $y \notin \overline{H}$. Logo $\overline{H} \subset G$ e $F \subset H \subset \overline{H} \subset G$.

($2 \Rightarrow 1$) Sejam A e B g-fechados disjuntos em X, então $G = X - B$ é um conjunto g-aberto em X tal que G contém A. Por hipótese, existe um aberto H tal que $A \subset H \subset \overline{H} \subset G$. Seja $V = X - \overline{H}$ assim, como $\overline{H} \subset G = X - B$ então $B \subset X - \overline{H} = V$. Logo, existem g-abertos H e V disjuntos tais que $B \subset V$ e $A \subset H$. Portanto X é um espaço g-normal.

Teorema 3.2.10 [26]: Todo espaço metrizável é normal**.**

Observação 3.2.3: O teorema acima não é verdadeiro se trocarmos normal por g-normal. De fato, se X é um espaço metrizável, pelo Teorema anterior X é um espaço normal. Mas conjuntos g-fechados disjuntos, em geral não podem ser separados por conjuntos abertos. Por exemplo: seja $X = \{a,b,c\}$ e $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Observe que os conjuntos $\{b\}$ e $\{c\}$ são conjuntos g-fechados e disjuntos, mas não podem ser separados por abertos e disjuntos de (X,τ).

Teorema 3.2.11 [26]: Todo espaço regular com base contável é normal.

Teorema 3.2.12: Todo espaço g-regular com base contável é g-normal.

Demonstração: Seja X um espaço g-regular com uma base contável $\mathcal{B}$. Sejam A e B subconjuntos g-fechados e disjuntos em X. Para cada elemento x de A, existe uma vizinhança U de x que não intersecta B, pois X é um espaço g-regular. Ainda por X ser g-regular, podemos escolher uma vizinhança V de x tal que o fecho está contido em U (Teorema 3.2.6). Finalmente, escolha um elemento de $\mathcal{B}$ contendo x e que esteja contido em V. Escolhendo dessa forma um elemento $\mathcal{B}$ para cada ponto x de A, formamos uma cobertura de A por abertos de X, portanto uma cobertura de A por g-abertos de X, cujo fecho não intersecta B. Desde que a cobertura de A é contável, podemos indexa-los com inteiros positivos, vamos denota-los por $\{U_n\}$.

Similarmente, escolha uma coleção contável $\{V_n\}$ de conjuntos abertos, portanto g-abertos, cobrindo B, tal que o fecho dos V_n são disjuntos de A Os conjuntos $U = \bigcup U_n$ e $V = \bigcup V_n$ são conjuntos abertos contendo A e B, respectivamente, mas eles não precisam ser disjuntos. Vamos construir dois abertos que são disjuntos e cobrem A e B. Dado n, defina

$$U'_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \qquad\qquad V'_n = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$$

Note que U'_n são conjuntos abertos, sendo a diferença de um conjunto aberto U_n e de um fechado $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$. Similarmente cada conjunto V_n é aberto. A coleção $\{U'_n\}$ é uma cobertura de A, pois cada x $\in$ A pertence a U_n pra algum n, e x não pertence a nenhum dos $\overline{V_i}$.

Similarmente, a coleção $\{V'_n\}$ é uma cobertura de A Finalmente, os conjuntos abertos

$$U' = \bigcup_{n \in Z_+} U'_n \qquad\qquad V' = \bigcup_{n \in Z_+} V'_n$$

são disjuntos, pois se $x \in U' \cap V'$, então $x \in U_j' \cap V_k'$ para algum j e k. Suponha que j $\leq$ k. Da definição de U_j', temos que $x \in U_j$, desde que j $\leq$ k, da definição de V_k', temos que $x \notin \overline{U_j}$. Contradição.

Agora, se k $\leq$ j. Da definição de V_k', temos que $x \in V_k$, desde que k $\leq$ j, da definição de U_k', temos que $x \notin \overline{U_k}$ .Contradição.

Definição 3.2.7 [13]: Um subconjunto *A* de um espaço topológico (X, τ) é dito α-Hausdorff se e somente se para quaisquer dois elementos $a, b \in X$ onde $a \in A$ e $b \in X - A$ existem abertos disjuntos *U* e *V* em (X, τ) contendo *a* e *b*, respectivamente.

Definição 3.2.8: Um subconjunto A de um espaço topológico (X,τ) é chamado αg-Hausdorff se e somente se para quaisquer dois ponto $a,b \in X$ onde $a \in A$ e $b \in X - A$ existir g-abertos disjuntos *U* e *V* em (X,τ) contendo *a* e *b*, respectivamente.

Exemplo 3.2.2: Sejam $X = \{a,b,c\}$ e $\tau = \{\varnothing, \{b\}, X\}$. Então (X,τ) é um espaço topológico. Considere $A = \{a,c\}$, temos que A é um subconjunto αg-Hausdorff. De fato, $a,c \in A$, tanto $\{a\}$ quanto $\{c\}$ são g-abertos pois o único fechado contido em ambos é o conjunto vazio. O único elemento em (X,τ) que não pertence a A é *b*, e $\{b\}$ é um conjunto g-aberto contendo *b* e não intersecta $\{a\}$ e $\{c\}$.

Definição 3.2.9 [22]: Um subconjunto *A* de um espaço topológico (X,τ) é chamado α-regular se e somente se para todo ponto $a \in A$ e todo aberto *U* em (X,τ) tal que $a \in U$ existe um aberto *V* em (X,τ) tal que $a \in V \subset \overline{V} \subset U$.

Teorema 3.2.13: Seja A um subconjunto α-regular no espaço topológico (X,τ). Então, para qualquer fechado *F* em (X,τ) e qualquer ponto $a \in A$ tal que $a \in X - F$, existe abertos disjuntos contendo *a* e *F*, respectivamente.

Demonstração: Sejam A um subconjunto α-regular no espaço topológico (X,τ) e F um conjunto fechado em (X,τ) tal que $a \in A$ e $a \in X - F = U$ onde U é aberto em (X,τ). Então, por definição, existe um aberto V tal que $a \in V \subset \overline{V} \subset U$. Defina $W = X - \overline{V}$, então W é um aberto em (X,τ) tal que $W \cap V = \varnothing$, $a \in V$ e $F \subset X - U \subset X - \overline{V} = W$.

Definição 3.2.10: Um subconjunto *A* de um espaço topológico (X,τ) é chamado αg-regular se e somente se para todo ponto $a \in A$ e todo g-aberto *U* em (X,τ) tal que $a \in U$ existir um aberto V tal que $a \in V \subset \overline{V} \subset U$.

Teorema 3.2.14: Seja A um subconjunto αg-regular do espaço topológico (X,τ). Então, para qualquer g-fechado *F* em (X,τ) e qualquer ponto $a \in A$ tal que $a \in X - F$, existir abertos disjuntos contendo *a* e *F*, respectivamente.

Demonstração: Sejam A um subconjunto αg-regular do espaço topológico (X,τ) e F um conjunto g-fechado em (X,τ) tal que $a \in A$ e $a \in X - F = U$ onde U é g-aberto em (X,τ). Então, por definição, existe um aberto V tal que $a \in V \subset \overline{V} \subset U$. Defina $W = X - \overline{V}$, então V é um aberto em (X,τ) tal que $W \cap V = \varnothing$, $a \in V$ e $F \subset X - U \subset X - \overline{V} = W$.

Exemplo 3.2.3: Sejam $X = \{a,b\}$ e $\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\}$. Então (X,τ) é um espaço topológico. Considere $A = \{a\}$, temos que A é um subconjunto αg-regular. De fato, $\{a\}$ é g-fechado pois $\overline{\{a\}} = \{a\} \subseteq U$. Para todo aberto U contendo A. O único elemento em (X,τ) que não pertence a A é *b*, e $\{b\}$ é um conjunto aberto contendo *b* e não intersecta $\{a\}$.

Teorema 3.2.15: Sejam (X,τ) um espaço topológico e A um subconjunto de (X,τ). O subconjunto A é αg-regular se e somente se todo ponto $a \in A$ e todo g-aberto *U* em (X,τ) tal que $a \in U$ existir um <u>regularmente aberto</u> V tal que $a \in V \subset \overline{V} \subset U$.

Demonstração: Seja A um subconjunto αg-regular de um espaço topológico (X,τ). Então, para todo ponto $a \in A$ e todo g-aberto U em (X,τ) tal que $a \in U$ existe um aberto W tal que $a \in W \subset \overline{W} \subset U$ (por definição de conjunto αg-regular). Como $V = \operatorname{int}\overline{W}$ é um subconjunto regularmente aberto em (X,τ). De fato, $\operatorname{int}\overline{V} = \operatorname{int}\left(\overline{\operatorname{int}\overline{W}}\right) \supseteq \operatorname{int}V = V$. Agora, se $x \in \operatorname{int}\overline{V} = \operatorname{int}\left(\overline{\operatorname{int}\overline{W}}\right)$, então existe uma vizinhança B de x tal que $B \subseteq \overline{\operatorname{int}\overline{W}} \subseteq \overline{W}$.

Portanto $x \in B = \operatorname{int}B \subseteq \operatorname{int}\overline{W} = V$, e $\operatorname{int}\overline{V} = V$. Além disso, $a \in W = \operatorname{int}W \subset \operatorname{int}\overline{W} = V$.

Mais ainda, $a \in W = \operatorname{int}W \subset \operatorname{int}\overline{W} = V \subset \overline{V} = \overline{\operatorname{int}\overline{W}} \subseteq \overline{W} \subset U$.

Logo, existe um regularmente aberto V tal que $a \in V \subset \overline{V} \subset U$.

A recíproca segue da definição de conjunto αg-regular (Definição 3.2.10)

Observações 3.2.2:

1. Sejam (X,τ) um espaço topológico e A um subconjunto de X. Se A é αg-regular então A é α-regular.
2. Sejam (X,τ) um espaço topológico e A um subconjunto de X. Se A é α-Hausdorff então A é αg-Hausdorff.

De fato:

1. Sejam (X,τ) um espaço topológico e A um subconjunto αg-regular em X. Tome $a \in A$ e um aberto U em (X,τ) tal que $a \in U$. Como todo aberto é g-aberto, pela hipótese, existe um aberto V tal que $a \in V \subset \overline{V} \subset U$. Portanto A é α-regular.
2. Sejam (X,τ) um espaço topológico e A um subconjunto α-Hausdorff em X. Dado quaisquer dois ponto $a,b \in X$ onde $a \in A$ e $b \in X - A$, por hipótese, existe abertos e disjuntos U e V contendo a e b, respectivamente. Como todo aberto é g-aberto, temos que A é αg-Hausdorff.

Exemplo 3.2.4: Sejam $X = \{a,b,c\}$ e $\tau = \{\varnothing, \{b\}, X\}$. Então (X,τ) é um espaço topológico. Considere $A = \{a,c\}$, temos que A é um subconjunto αg-Hausdorff. De fato, $a,c \in A$, tanto $\{a\}$ quanto $\{c\}$ são g-abertos pois o único fechado contido em ambos é o conjunto vazio. O único elemento em (X,τ) que não pertence a A é *b*, e $\{b\}$ é um conjunto g-aberto contendo *b* e não intersecta $\{a\}$ e $\{c\}$.

Observe também que A não é α-Hausdorff. De fato, o único elemento em (X,τ) que não pertence a A é o elemento *b*, e $\{b\}$ é um conjunto aberto contendo *b*, mas X é o único aberto contendo a ou c e intersecta $\{b\}$.

Exemplo 3.2.5: Seja $X = \{a,b,c\} \cup \{a_i \setminus i = 1,2,\cdots\}$. Considere a topologia τ onde cada a_i é um ponto isolado. Considere também o sistema fundamental de vizinhanças de *a* como $\{V^n(a) \setminus n = 1,2,\cdots\}$, onde $V^n(a) = \{a, a_i \setminus i \geq n\}$. O sistema fundamental de vizinhanças de *b* como $\{V^n(b) \setminus n = 1,2,\cdots\}$, onde $U^n(b) = V^n(a) \cup \{b,c\}$. O conjunto $A = \{b,c,a_1\}$ é um conjunto α-regular em X pois o único fechado contido em A é $\{b,c\}$ e $a_1 \notin \{b,c\}$. Tomando $U = U^2(b)$ e $V = \{a_1\}$, estes são abertos disjuntos contendo $\{b,c\}$ e a_1, respectivamente. Mas A não é αg-regular.De fato, $\{b\}$ é g-fechado em X pois $\overline{\{b\}} = \{b,c\}$ e todo aberto que contém $\{b\}$, contém $\overline{\{b\}} = \{b,c\}$, $c \notin \{b\}$ e não existem abertos disjuntos contendo b e c separadamente.

Definição 3.2.11 [33]: Um espaço X é chamado almost regular quando para cada subconjunto regularmente fechado F e cada $x \in X - F$ existirem abertos disjuntos U e V tais que $F \subset U$ e $x \in V$.

Teorema 3.2.16 [33]: X é um espaço almost regular se e somente se para cada ponto $x \in X$ e cada vizinhança regularmente aberta U de x, existe uma vizinhança V de x tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U = \operatorname{int}\overline{U}$.

Demonstração: Seja $x \in X$ e U uma vizinhança regularmente aberta de x. Então $x \notin X - U$, onde $X - U$ é regularmente fechado. Como X é um espaço almost regular, existe abertos disjunto W e V tais que $X - U \subset W$ e $x \in V$. Observe que $\overline{V} \bigcap W = \varnothing$ pois tanto V quanto W são abertos. Logo $X - U \subset W \subset X - \overline{V}$, disso segue que $x \in V \subset \overline{V} \subset U = \operatorname{int}\overline{U}$.

Reciprocamente, suponha que se para cada ponto $y \in X$ e cada vizinhança regularmente aberta U de y, existe uma vizinhança V de y tal que $y \in V \subset \overline{V} \subset \operatorname{int}\overline{U}$. Seja $x \in X$ e F um conjunto regularmente fechado tal que $x \in X - F$ o qual é um conjunto regularmente aberto. Pela hipótese, existe uma vizinhança V de x tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset \operatorname{int}\overline{U} = U$. Seja $W = X - \overline{V}$, então $V \bigcap W = \varnothing$, e $F \subset W = X - \overline{V}$.

Definição 3.2.12: Um espaço X é chamado almost g-regular quando para todo subconjunto δg-fechado F e cada $x \in X - F$ existirem abertos disjuntos U e V tais que $F \subset U$ e $x \in V$.

Teorema 3.2.17: X é um espaço almost g-regular se e somente se para cada ponto $x \in X$ e cada δg-aberto U contendo x, existe uma vizinhança V de x tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

Demonstração: Seja $x \in X$ e U δg-aberto contendo x. Então $x \notin X - U$, onde $X - U$ é δg-fechado. Como a é almost g-regular, existe abertos disjuntos W e V tais que $X - U \subset W$ e

$x \in V$. Observe que $\overline{V} \cap W = \emptyset$ pois tanto V quanto W são abertos. Logo $X - U \subset W \subset X - \overline{V}$, disto segue que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

Reciprocamente, suponha que se para cada ponto $y \in X$ e cada δg-aberto U contendo y, existe uma vizinhança V de y tal que $y \in V \subset \overline{V} \subset U$**.** Seja $x \in X$ e F um conjunto δg-fechado tal que $x \in X - F$ o qual é um conjunto δg-aberto. Pela hipótese, existe uma vizinhança V de x tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset X - F$. Seja $W = X - \overline{V}$, então $V \cap W = \emptyset$, $x \in V$ e $F \subset X - \overline{V} = W$.

Exemplo 3.2.6: Seja $X = [0,1]$. Para cada ponto de $(0,1]$ considere o sistema de vizinhanças induzido pela topologia usual sobre o sistema de números reais e seja o sistema de vizinhanças de zero formada pelos conjuntos U_k, onde $U_k = \left[0, \frac{1}{k}\right) - \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$. Seja σ a topologia gerada pelo sistema de vizinhanças definido acima.

Observe que (X, σ) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ pois todo conjunto unitário em (X, σ) é fechado.

Seja *U* um subconjunto δg-aberto em (X, σ) então, pelo observado, U é um subconjunto δ-aberto em (X, σ), ou seja, U é igual a união de todos regularmente abertos contido nele. Como os U_k's não são regularmente abertos, segue que U coincide com os conjuntos δ-aberto na topologia usual sobre X. Portanto U é um intervalo aberto ou é igual a união de intervalos abertos. Sem perda de generalidade, vamos considerar U como um intervalo aberto. Como X com a topologia usual é um espaço regular, para cada $x \in U$, existe uma vizinhança V de x tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

Portanto $X = [0,1]$ é um espaço almost g-regular.

Teorema 3.2.18 [33]: Se X é um espaço regular, então X é um espaço almost-regular.

Demonstração*:* Se X é um espaço regular, então para cada $x \in X$ e cada vizinhança U de x, existe uma vizinhança V de x tal que
$\overline{V} \subset U = \operatorname{int} U \subset \operatorname{int} \overline{U}$. Portanto X é almost-regular.

Corolário 3.2.10: Se X é um espaço g-regular, então X é um espaço almost-regular.

Demonstração: Se X é espaço g-regular, então X é um espaço regular. Pelo teorema anterior, X é um espaço almost-regular.

Teorema 3.2.19: Todo espaço g-regular é um espaço almost g-regular.

Demonstração*:* Seja X um espaço g-regular. Sejam F um conjunto δg-fechado e $x \in X$ tal que $x \in X - F$. Como F é g-fechado, $x \notin F$ e X é g-regular, existe abertos disjuntos U e V tais que $F \subset U$ e $x \in V$. Portanto X é almost g-regular.

Exemplo 3.2.7: Exemplo de espaço almost g-regular que não é um espaço g-regular:
Seja $X = [0,1]$. Para cada ponto de $(0,1]$ considere o sistema de vizinhanças induzida pela topologia usual sobre o sistema de números reais e considere o sistema de vizinhanças de 0 formada pelos conjuntos U_k, onde $U_k = \left[0, \frac{1}{k}\right) - \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$.

Defina por $K = \left\{1, \frac{1}{2}, \cdots\right\}$. È fácil ver que K é um subconjunto fechado em (X, τ). Portanto K é um subconjunto g-fechado em X tal que $0 \notin K$. Mas não existe abertos disjuntos U e V pertencentes a (X, τ) contendo K e 0, respectivamente. Portanto (X, τ) não é um espaço g-regular. Como mostramos anteriormente (Exemplo 3.2.6) que X é almost g-regular, temos que (X, τ) é um exemplo de espaço almost g-regular que não é g-regular.

Teorema 3.2.20: Todo espaço almost g-regular é um espaço almost regular.

Demonstração*:* Seja F um conjunto regularmente fechado e $x \in X$ tal que $x \in X - F$, então F é δg-fechado. Como X é almost g-regular, existe abertos disjunto U e V tais que $F \subset U$ e $x \in V$. Portanto X é almost regular.

Exemplo 3.2.8: A recíproca do teorema anterior não é verdadeira. Sejam $X = \{a, b, c\}$ e $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$. Então (X, τ) é um espaço topológico almost-regular. De fato, os subconjuntos regularmente fechados em (X, τ) são $\{a\}$ e $\{b, c\}$. Como. $b, c \notin \{a\}$ temos que existem abertos disjuntos $\{a\}$ e $\{b, c\}$ tais que $b, c \in \{b, c\}$e $\{a\} \subseteq \{a\}$. Para $a \notin \{b, c\}$, existem abertos disjuntos $\{a\}$ e $\{b, c\}$ tais que $\{b, c\} \subseteq \{b, c\}$e $a \in \{a\}$.
Mas (X, τ) não é um espaço topológico almost g-regular. De fato, $\{b\}$ é δg-fechados em (X, τ). Como $c \notin \{b\}$ e temos que não existem abertos disjuntos U e V tais que $c \in U$ e $\{b\} \subseteq V$.

Teorema 3.2.21: Seja (X, τ) um espaço topológico. Se o espaço (X, τ^*) é g-regular então (X, τ) é almost g-regular.

Demonstração: Suponha primeiramente que (X, τ^*) é um espaço g-regular. Sejam F um conjunto δg-fechado em (X, τ) e $x \in X - F$. Como todo δg-fechado é g-fechado em (X, τ^*), segue que F é g-fechado em (X, τ^*). Pela hipótese, existem $U, V \in \tau^* \subseteq \tau$ disjuntos tais que $F \subset U$ e $x \in V$. Portanto (X, τ) é almost g-regular.

Teorema 3.2.22: Um espaço topológico (X,τ) é almost g-regular se e somente se , para cada $x \in X$ e cada δg-aberto U contendo x, existe um conjunto regularmente aberto V contendo x tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ **.**

Demonstração: Sejam $x \in X$ e U um conjunto é δg-aberto contendo x, então $\{x\}$ é disjunto do conjunto δg-fechado $X - U$. Pela hipótese, existem abertos U_1 e U_2 tais que tais que $x \in U_1$, e $U_1 \bigcap U_2 = \varnothing$. Então $\overline{U_1} \bigcap U_2 = \varnothing$, ou seja,
$\overline{U_1} \subset X - U_2 \subset U$ .Portanto, $x \in U_1 \subset \overline{U_1} \subset U$. Outra vez, $x \in U_1 \subset \operatorname{int}\overline{U_1} \subset \overline{U_1} \subset V$.
Portanto, tomando $\operatorname{int}\overline{U_1} = V$, temos que V é um subconjunto regularmente aberto em (X,τ). Logo $x \in U_1 \subset V = \operatorname{int}\overline{U_1} \subset \overline{\operatorname{int}\overline{U_1}} = \overline{V} \subset \overline{U_1} \subset U$.
Então $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ onde V é regularmente aberto.
Reciprocamente, suponha que para cada $x \in X$ e cada δg-aberto U contendo x, existe um conjunto regularmente aberto V contendo x tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Pelo Teorema 3.2.6, X é um espaço g-regular, pelo Teorema 3.2.21, segue que X é um espaço almost g-regular.

Teorema 3.2.23: Seja (X,τ) um espaço topológico. Dado um subconjunto $A \subseteq X$ δg-fechado e $x \in X$ tal que $x \notin A.$ Então (X,τ) é um espaço almost g-regular se e somente se existem abertos U e V tais que $x \in U$, $A \subseteq V$ e $\overline{U} \bigcap \overline{V} = \varnothing$.

Demonstração: Suponha que (X,τ) é um espaço almost g-regular. Sejam $A \subseteq X$ δg-fechado e $x \in X$ tal que $x \notin A.$ Então existem abertos U e V tais que $x \in V$, $A \subseteq U$ e $\overline{U} \bigcap V = \varnothing$. Como $\overline{U}$ é regularmente fechado e portanto δg-fechado tal que $x \notin \overline{U}.$ Então existem abertos Z e W tais que $x \in Z$, $A \subseteq \overline{U} \subseteq W$ e $\overline{Z} \bigcap W = \varnothing$. Assim, existem abertos U e Z tais que $x \in Z$, $A \subseteq U$ e $\overline{Z} \bigcap \overline{U} \subseteq \overline{Z} \bigcap W = \varnothing$.

Reciprocamente, suponha que dado um subconjunto $A \subseteq X$ δg-aberto e $x \in X$ tal que $x \notin A.$, existem abertos U e V tais que $x \in U$, $A \subseteq V$ e $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$. Então existem abertos U e V tais que $x \in U$, $A \subseteq V$ e $U \cap V \subseteq \overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.
Pela Definição 3.2.12, temos que (X,τ) é um espaço almost g-regular.

Corolário 3.2.11: Se um espaço topológico (X,τ) é almost g-regular então, para todo regularmente fechado A e cada ponto x não pertencente a A, existem abertos V_1 e V_2 tais que $x \in V_1$, $A \subset V_2$ e $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$.

Demonstração: Direto do teorema anterior.

Teorema 3.2.24: Se para cada $x \in X$ e cada δg-aberto U contendo x, existe um conjunto regularmente aberto V contendo x tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Então para cada $x \in X$ e cada regularmente aberto U' contendo x, existe um regularmente aberto V' contendo x tal que $x \in V' \subset \overline{V}' \subset U'$.

Demonstração: Sejam $x \in X$ e U' um conjunto regularmente aberto contendo x. Como U' é um conjunto δ-aberto, segue que U' é δg-aberto. Pela hipótese, existe um regularmente aberto V' contendo x tal que $x \in V' \subset \overline{V}' \subset U'$.

Corolário 3.2.12: Se um espaço topológico (X,τ) é almost g-regular então, para cada $x \in X$ e cada regularmente aberto U contendo x, existe um regularmente aberto V contendo x tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

Demonstração: Segue direto dos Teoremas 3.2.24 e 3.2.22.

Teorema 3.2.25: Se para cada $x \in X$ e cada regularmente aberto U contendo x, existe um regularmente aberto *V* contendo x tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$, então para todo subconjunto regularmente fechado A e cada ponto x não pertencente a A, existem abertos V_1 e V_2 tais que $x \in V_1$, $A \subset V_2$ e $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$.

Demonstração: Se A é um subconjunto regularmente fechado e $x \notin A$, então $X - A$ é regularmente aberto e contém x.. Pela hipótese, existe um regularmente aberto V_1 contendo x tal que $x \in V_1 \subset \overline{V_1} \subset X - A$. Como V_1 é regularmente aberto e contém x, pela hipótese, existe V_2 regularmente aberto contendo x tal que $x \in V_2 \subset \overline{V_2} \subset V_1$. Então V_2 e $X - \overline{V_1}$ são abertos tais que

$$\left(\overline{X - \overline{V_1}}\right) \cap \left(\overline{V_2}\right) = \left(X - \operatorname{int} \overline{V_1}\right) \cap \left(\overline{V_2}\right) = \left(X - V_1\right) \cap \left(\overline{V_2}\right) \subset \left(X - \overline{V_2}\right) \cap \left(\overline{V_2}\right) = \varnothing,$$

$A \subset (X - \overline{V_1})$ e $x \in V_2$.

Teorema 3.2.26: Seja (X, τ) uma espaço semi-regular. Se (X, τ) é almost g-regular, então X é g-regular.

Demonstração: Seja A um conjunto g-aberto e $x \in X$ tal que $x \in A$. Como X é semi-regular, $X - A$ é um conjunto δg-fechado que não contém x. Pela hipótese X é um espaço almost g-regular, então existem abertos disjunto U e V tais que $X - A \subset U$ e $x \in V$. Como $U \cap V = \varnothing$ e U é abertos, $U \cap \overline{V} = \varnothing$. Portanto $x \in V \subset \overline{V} \subset X - U \subset A$, ou seja, X é um espaço g-regular.

Corolário 3.2.13: Seja (X, τ) uma espaço semi-regular. (X, τ) é almost g-regular se e somente se X é g-regular.

Demonstração: Direto dos Teoremas 3.2.26 e 3.2.20

Teorema 3.2.27: Se X é um espaço g-regular então X é um espaço T_1.

Demonstração: Suponha que X não seja um espaço T_1, então existe $x \in X$ tal que $\{x\}$ não é um conjunto fechado em X, portanto o único fechado contido em $\{x\}$ é o conjunto vazio. Logo $\{x\}$ é um conjunto g-aberto em X. Como X é um espaço g-regular, existe um aberto V tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset \{x\}$. Absurdo. Logo, X é um espaço T_1.

Corolário 3.2.14: Se X é um espaço almost g-regular então X é um espaço T_1.

Demonstração: Segue direto do teorema anterior e do fato que todo espaço g-regular é um espaço almost g-regular.

Definição 3.2.13 [38]Um espaço X é dito se um espaço de Urysohn quando, cada par de elementos distintos $x, y \in X$ existirem abertos U e V tais que $x \in U$, $y \in V$ e $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

Teorema 3.2.28: Todo espaço Hausdorff almost g-regular é um espaço de Urysohn.

Demonstração: Seja (X, τ) um espaço de Hausdorff almost g-regular. Sejam x e y dois elementos distintos de X. Como (X, τ) é Hausdorff, existem abertos U e V tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \varnothing$. Desde que V é aberto, temos que $U \cap V = \varnothing$ implica que $\overline{U} \cap V = \varnothing$. Agora, $x \in \overline{U}$ e $y \notin \overline{U}$. Como $\overline{U}$ é regularmente fechado, ou seja, δ–fechado e portanto δg-fechado e X é almost g-regular, existe um aberto W contendo y tal que $y \in W \subset \overline{W} \subset X - \overline{U}$. Portanto $x \in U$, $y \in W$ e $\overline{U} \cap \overline{W} = \varnothing$. Logo X é um espaço de Urysohn.

Teorema 3.2.29: O produto de uma família finita de espaços topológicos é almost g-regular se e somente se cada fator for almost g-regular.

Demonstração: Seja $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ e suponha que $\{X_1,...,X_n\}$ é uma família de espaços almost g-regular. Seja $U = \prod_{i=1}^{n} U_i$ δg-aberto tal que $x = (x_1,\cdots,x_n) \in U$. Então cada U_i é δg-aberto tal que $x_i \in U_i$, para cada $i = 1,...,n$. Como cada X_i é almost g-regular, existe V_i aberto em X_i tal que $x_i \in V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i = 1,...,n$. Então $V = \prod_{i=1}^{n} V_i$ é um aberto em X tal que $x = (x_1,\cdots,x_n) \in V$ e $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Logo X é um espaço almost g-regular. Reciprocamente, suponha que $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ é um espaço almost g-regular. Considere um fator X_j qualquer. Sejam U_j δg-aberto em X_j contendo $x_j \in U_j$ e $U = \prod_{i=1}^{n} U_i$ onde $U_i = X_i$ se $i \neq j$, $U_i = U_j$ se $i = j$ e $x = (x_1,\cdots,x_n)$ onde x_i é arbitrário em X_i para $i \neq j$ e se $i = j$, então $x_i = x_j$. Então $x \in U$ e U é δg-aberto em X, e como X é almost g-regular, existe um aberto V em X tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Como $V = \prod_{i=1}^{n} V_i$ onde cada fator V_i é aberto em X_i tal que $x_i \in V_i$, temos que

$$x = (x_1,...,x_n) \in V = \prod_{i=1}^{n} V_i \subset \overline{V} = \prod_{i=1}^{n} \overline{V_i} = \overline{V_1} \times \cdots \times \overline{V_n} \subset U = \prod_{i=1}^{n} U_i .$$

Ou seja, $x_j \in V_j \subset \overline{V_j} \subset U_j$. Portanto X_j é almost g-regular.

CAPÍTULO 4

TEORIA DE g-CONVERGÊNCIA

Neste capítulo trabalhamos com a chamada g-convergência. Aqui encontraremos definições e resultados que usaremos nos capitulo 7 e 10.

4.1 Teoria de g-convergência

Definição 4.1.1 [36]: Uma família não vazia $\wp = \{F_i \setminus i \in J\}$ onde F_i são subconjuntos em X e chamado filtro em X quando satisfaz os seguintes axiomas.

1. Se $F \in \wp$, então F é não vazio.
2. Se $F_1 \in \wp$ e $F_1 \subseteq F$, então $F \in \wp$.
3. Se $F_1, F_2 \in \wp$, então $F_1 \cap F_2 \in \wp$

Definição 4.1.2 [36]: Uma família não vazia $\beta = \{B_i \setminus i \in J\}$ onde B_i são subconjuntos de X e chamado filtro base em X quando satisfaz os seguintes axiomas.

1. Se $B \in \beta$, então B é não vazio.
2. Se $B_1, B_2 \in \beta$, então $B \subseteq B_1 \cap B_2$ para algum $B \in \beta$.

Todo filtro $\wp$ é um filtro base e todo filtro gerado por um filtro base $\wp$ é ele próprio um filtro. Um filtro $\wp_1$ é dito mais fino que o filtro $\wp_2$ quando $\wp_2 \subseteq \wp_1$.

Definição 4.1.3 [36] : Uma sub-base ℓ para um filtro em um conjunto X é uma família não vazia de conjuntos não vazios $S \subseteq X$ tendo a propriedade da interseção finita. O filtro base gerado por ℓ é a família β de toda interseção finita $B = S_1 \cap ... \cap S_n$ de elementos $S_{1,}, ..., S_n$ de ℓ. O filtro gerado por ℓ é igual ao filtro gerado por β.

Observe que se $\wp_1$ e $\wp_2$ dois filtros em um espaço X, então $\wp_1 \cap \wp_2$ é a família de elementos comuns de $\wp_1$ e $\wp_2$, é um filtro em X.

Definição 4.1.4 [8]: Seja (X,τ) um espaço topológico, $\wp = \{F_i \setminus i \in J\}$ um filtro base de *X* e $x \in X$. Um filtro base é dito g-convergente para *x* quando existir um $F_i \in \wp$ tal que $F_i \subseteq U$ para cada g-vizinhança *U* de *x*.

Definição 4.1.5 [8]: Em um espaço topológico (X,τ), um ponto *x* é dito ponto de g-acumulação do filtro base Θ sobre *X* se e somente se para todo $\theta_i \in \Theta$ e para todo g-aberto *U* contendo x, temos que $\theta_i \cap U \neq \varnothing$. Em outras palavras, ponto *x* é dito ponto de g-acumulação do filtro base Θ sobre *X* se $x \in \bigcap_{i \in J} gcl(\theta_i)$.

Teorema 4.1.1: Se um filtro base g-converge para um ponto $x \in X$, então ele tem um ponto de g- acumulação em $x \in X$.

Demonstração: Seja $\wp = \{F_i \setminus i \in J\}$ um filtro base sobre X tal que ele g-converge para $x \in X$. Então para todo U_x g-aberto contendo x, existe $F_{i(x)} \in \wp$ tal que $F_{i(x)} \subseteq U_x$.

Como $\wp$ é um filtro base, para todo $F_i \in \wp$ temos que $\emptyset \neq F_{i(x)} \cap F_i \subseteq U_x \cap F_i$. Assim x é um ponto de g- acumulação de $\wp$ sobre X.

Lema 4.1.1: Sejam $\wp_1$ e $\wp_2$ dois filtro bases em X com $\wp_2$ mais fino que $\wp_1$. Então se $\wp_2$ tem um ponto de g- acumulação em $x \in X$, $\wp_1$ também tem um ponto de g-acumulação em $x \in X$.

Demonstração: Se $x \in X$ é um ponto de g-acumulação de $\wp_2$, então para todo $F_i^2 \in \wp_2$ e todo U_x g-aberto contendo x, $\emptyset \neq U_x \cap F_i^2$. Como $\wp_2$ mais fino que $\wp_1$, $\wp_1 \subseteq \wp_2$. Logo, para todo $F_i^1 \in \wp_1 \subseteq \wp_2$ e todo U_x g-aberto contendo x, $\emptyset \neq U_x \cap F_i^2$. Portanto x é ponto de g-acumulação de $\wp_1$ sobre X.

Observação 4.1.1: Seja $x \in X$ e *N(x)* é o conjunto de todos os conjuntos g-abertos contendo x. Então *N(x)* é um filtro base. De fato:

Se $N_x \in N(x)$, então N_x é um conjunto g-aberto tal que $x \in N_x$. Portanto N_x é não vazio.

Se $B_{1_x}, B_{2_x} \in N(x)$, então $N_x = B_{1_x} \cap B_{2_x}$ é tal que $N_x \in N(x)$.

Teorema 4.1.2: Um ponto $x \in X$ é um ponto de g-acumulação de um filtro $\wp$ sobre X se e somente se existir um filtro em X que é mais fino que $\wp$ e é g-convergente para $x \in X$.

Demonstração: Suponha que $x \in X$ é um ponto de g-acumulação de um filtro $\wp$ sobre X. Então $\emptyset \neq U_x \cap F$ para todo U_x g-aberto contendo x. Observe que a família $\Theta = \{U_x \cap F \neq \emptyset / U_x \in \mathrm{N}(x) \quad e \quad F \in \wp\}$ onde *N(x)* é o conjunto de todos os g-abertos contendo x, é um filtro base. De fato,

$\emptyset \neq U_x \cap F$, $\forall F \in \wp$ e $\forall U_x \in N(x)$;

e se $U_x^1 \cap F^1, U_x^2 \cap F^2 \in \Theta$, temos que

$\left(U_x^1 \cap F^1\right) \cap \left(U_x^2 \cap F^2\right) = \left(U_x^1 \cap U_x^2\right) \cap \left(F^1 \cap F^2\right) \in \Theta$, pois $F^1 \cap F^2 \in \wp$ e $U_x^1 \cap U_x^2$ é um conjunto g-aberto contendo x.

Desde que Θ é um refinamento de $\wp$ e de *N(x),* ele é g-convergente para x.

Reciprocamente, suponha que Θ é um refinamento de $\wp$ e que g-converge para x. Então ele tem um ponto de g-acumulação em x, pelo Teorema 4.1.1. Desde que Θ é mais fino que $\wp$, pelo Lema 4.1.1, temos que x é ponto de g-acumulação de $\wp$.

Definição 4.1.6 [36]: Um filtro maximal $\wp$ em um conjunto X é um filtro tal que não existe filtro sobre X o qual é estritamente mais fino que $\wp$. Um maximal filtro base β é um filtro gerado por β o qual é um filtro maximal.

Teorema 4.1.3: Um filtro base maximal $\wp$ tem um ponto de g-acumulação em $x \in X$ se e somente se $\wp$ g-converge para $x \in X$.

Demonstração:: Suponha que $\wp$ é um filtro base maximal tal que $x \in X$ é um ponto de g-acumulação de $\wp$. Então existe um filtro base em X o qual é mais fino que $\wp$ e g-converge para x (pelo Teorema 4.1.2). Como o único filtro base mais fino que $\wp$ é o próprio $\wp$, temos que $\wp$ g-converge para x.

A recíproca segue do Teorema 4.1.1.

CAPÍTULO 5

ESPAÇOS GO-COMPACTOS

Neste capitulo definimos e caracterizamos o espaço GO-compacto.

5.1 Espaços GO-compactos

Definição 5.1.1 [26]: Uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X é chamada cobertura de X se e somente se a união de seus elementos é igual a X.

Definição 5.1.2 [26]: A cobertura $\mathcal{A}$ é chamada de cobertura aberta de X se e somente se todos os elementos de $\mathcal{A}$ são abertos em X.

[6]: A cobertura $\mathcal{A}$ é chamada de cobertura g-aberta de X se e somente se todos os elementos de $\mathcal{A}$ são g-abertos de X.

Observação 5.1.1: Toda cobertura aberta de X é g-aberta. Basta observar que todo conjunto aberto é g-aberto.

Definição 5.1.3 [26]: Um espaço (X,τ) é chamado compacto se e somente se toda cobertura aberta $\mathcal{A}$ de X contém uma subcoleção finita cuja união de seus elementos cobre X.

Definição 5.1.4 [6]: Um espaço (X,τ) é chamado compacto generalizado (GO-compacto) se e somente se toda cobertura g-aberta $\mathcal{A}$ de X contém uma subcoleção finita cuja união de seus elementos cobre X.

Exemplo 5.5.1: Sejam $X=[0,1]$, τ a topologia usual sobre X e $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de X. Então $\forall \alpha \in J$, V_α coincidem com os abertos em X, pois (X,τ) é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$. Como (X,τ) compacto, segue que X é GO-compacto.

Teorema 5.1.1 [6]: Se o espaço (X,τ) é GO-compacto, então (X,τ) é compacto.

Demonstração: Basta observar que toda cobertura aberta é g-aberta.

Observação 5.1.2: A inversa do teorema anterior não é verdadeira. De fato, seja $X=\{x\}\bigcup\{x_i \setminus i \in I\}$ onde I é um conjunto não enumerável. Seja $\tau=\{\phi,\{x\},X\}$. Observe que (X,τ) é compacto, mas não é GO-compacto pois $V_i=\{x,x_i\},\ i\in I$ é uma cobertura g-aberta de X que não possui subcobertura finita.

Teorema 5.1.2: Seja (X,τ) um espaço Almost Weakly Hausdorff. Se (X,τ) for GO-compacto então (X,τ^*) é GO-compacto.

Demonstração: Sejam (X,τ) um espaço Almost Weakly Hausdorff e $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de (X,τ^*). Então $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura aberta de (X,τ^*) e portanto $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura aberta de (X,τ). Como (X,τ) é GO-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$. Logo (X,τ^*) é GO-compacto.

Corolário5.1.1: Seja (X,τ) um espaço Almost Weakly Hausdorff. Se (X,τ) for compacto então (X,τ^*) é GO-compacto.

Demonstração: Sejam (X,τ) um espaço Almost Weakly Hausdorff e $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de (X,τ^*). Então $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura aberta de (X,τ^*) e portanto $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura aberta de (X,τ). Como (X,τ) é compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$. Logo (X,τ^*) é GO-compacto.

Teorema 5.1.3: Seja (X,τ) um espaço de Hausdorff. O Espaço (X,τ) é GO-compacto se e somente se (X,τ) é compacto.

Demonstração: Se (X,τ) é um espaço de Hausdorff, então todo conjunto unitário é fechado. Portanto (X,τ) é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$, ou seja, todo conjunto g-aberto em (X,τ) é aberto em (X,τ) e vice-versa.

Definição 5.1.5: Sejam (X,τ) um espaço topológico e Y um subespaço de X. Dizemos que Y é GO-compacto relativo a (X,τ) se e somente se toda cobertura de Y por g-abertos em X possui uma subcoleção finita cuja união de seus elementos cobre Y.

Lema 5.1.1 [2]: Seja *Y* subespaço de *X*. Então *Y* é compacto se e somente se toda cobertura de *Y* por abertos em *X* contém uma subcoleção finita cobrindo *X*.

Teorema 5.1.4: Sejam (X,τ) um espaço topológico e *Y* um subespaço g-fechado de *X*. Se *X* é GO-compacto então *Y* é GO-compacto relativo a (X,τ).

Demonstração: Seja $\mathcal{A}=\{A_\alpha \setminus \alpha\in I\}$ uma cobertura de *Y* por g-abertos em *X*. Como Y é g-fechado em X, $X-Y$ é g-aberto em *X*. Assim $\mathcal{B}=\{A_\alpha \setminus \alpha\in I\}\cup\{X-Y\}$ é uma cobertura g-aberta de *X*. Como *X* é GO-compacto, segue que existe $I_0\subset I$ finito tal que $\{A_\alpha \setminus \alpha\in I\}\cup\{X-Y\}$ cobre *X*. Logo $Y\subseteq\bigcup\{A_\alpha \setminus \alpha\in I\}$. Portanto *Y* é GO-compacto relativo a *X*.

Lema 5.1.2: Sejam (X,τ) um espaço topológico e *Y* um subespaço g-aberto em *X*. Se *Y* é GO-compacto relativo a (X,τ) então *Y* é GO-compacto.

Demonstração: Seja $A=\{A_\alpha \setminus \alpha\in I\}$ uma cobertura g-aberta de *Y*. Como $\forall\alpha\in I$ temos $A_\alpha\subseteq Y\subseteq X$, A_α g-aberto em *Y* e *Y* g-aberto em *X*, segue que A_α é g-aberto de X e $A=\{A_\alpha \setminus \alpha\in I\}$ uma cobertura de *Y* por g-abertos de *X*. Assim, por hipótese existe $I_0\subset I$ finito tal que $\{A_\alpha \setminus \alpha\in I_0\}$ cobre *Y*. Portanto *Y* é GO-compacto.

Corolário 5.1.2: Sejam (X,τ) um espaço topológico e *Y* um subespaço aberto e fechado de *X*. O subespaço *Y* é GO-compacto se e somente se *Y* é GO-compacto relativo a (X,τ).

Demonstração: Seja *Y* um subespaço aberto e fechado de (X,τ) e suponha que *Y* é GO-compacto. Seja $A=\{A_\alpha \setminus \alpha \in I\}$ uma cobertura de *Y* por g-abertos em *X*. Vamos mostrar que $A'=\{A_\alpha \cap Y \setminus \alpha \in I\}$ é uma cobertura de Y por g-abertos em *Y*. Como *Y* é aberto em *X* e portanto g-aberto em *X*, temos que $A_\alpha \cap Y$ é g-aberto em X. Agora, se F_α é fechado em Y, tal que $F_\alpha \subset A_\alpha \cap Y$, então $F_\alpha \subset A_\alpha$. Como Y é fechado em X, temos que F_α é fechado em X, e portanto $F_\alpha \subset \operatorname{int}_X(A_\alpha)$. Desde que Y é aberto em X, $Y=\operatorname{int}_X Y$. Logo,
$F_\alpha \subset (\operatorname{int}_X A_\alpha)\cap(\operatorname{int}_X Y)=\operatorname{int}_x(A_\alpha \cap Y)\subseteq \operatorname{int}_y(A_\alpha \cap Y)$ Esta ultima inclusão deve-se: como $F_\alpha \subset \operatorname{int}_X(A_\alpha \cap Y)$, então existe um aberto *U* em (X,τ) tal que $F_\alpha \subset U \subset A_\alpha$. Mas $F_\alpha = F_\alpha \cap Y \subseteq Y$ e $U \cap Y = V$ é aberto em Y. Assim, existe um aberto *V* em Y tal que $F_\alpha = F_\alpha \cap Y \subset U \cap Y = V \subset A_\alpha \cap Y$. Portanto $F_\alpha \subset \operatorname{int}_Y(A_\alpha \cap Y)$.
Assim cada $A_\alpha \cap Y$ é g-aberto em *Y*, e $A'=\{A_\alpha \cap Y \setminus \alpha \in I\}$ é uma cobertura de Y por g-abertos em Y. Como Y é GO-compacto então Y, existe $I_0 \subset I$ finito tal que $\{A_\alpha \cap Y \setminus \alpha \in I_0\}$ cobre Y. Portanto $\{A_\alpha \setminus \alpha \in I_0\}$ cobre Y. Logo Y é GO-compacto relativo a X.
Reciprocamente, seja *Y* um subespaço aberto e fechado de (X,τ) e suponha que *Y* é GO-compacto relativo a (X,τ). Então, basta aplicar o lema anterior, lembrando que todo conjunto aberto é um conjunto g-aberto.

Teorema 5.1.5 [26]: Seja Y um subespaço compacto relativo a um espaço Hausdorff X, então Y é fechado em X.

Corolário 5.1.3: Seja Y um subespaço GO-compacto relativo a um espaço Hausdorff X, então Y é fechado em X.

Demonstração: Seja Y um subespaço GO-compacto relativo a um espaço Hausdorff X. Então Y um subespaço compacto relativo a um espaço Hausdorff X. Pelo teorema anterior segue que Y é fechado.

Lema 5.1.3: Sejam Y um subespaço GO-compacto relativo a um espaço Hausdorff X e x_0 não pertence a Y, então existe abertos disjuntos U e V em X contendo x_0 e Y, respectivamente.

Demonstração: Sejam Y um subespaço GO-compacto relativo a um espaço Hausdorff X e $x_0 \in X - Y$. Como X é Hausdorff, para cada y pertencente a Y, existem abertos U_y e V_y, disjuntos tais que $y \in U_y$ e $x_0 \in V_y$. Seja $\mathcal{V} = \{V_y \setminus y \in Y\}$, então $\mathcal{V}$ é uma cobertura g-aberta relativa de Y. Logo, como Y é GO-compacto relativo a X, existem $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pertencentes a Y tais que $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$. Defina V=$\bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$, então V é um conjunto de abertos de X tal que $x_0 \in V$. Logo, existe abertos $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$ V=$\bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$, tais que $Y \subset U$ e $x_0 \in V$.

Agora se $z \in U$, existe $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ tal que $z \in U_{y_i}$ e $z \notin V_{y_i}$, ou seja, $z \notin \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i} = V$.

Logo que $U \cap V = \varnothing$.

Teorema 5.1.6: Todo espaço GO-compacto Hausdorff é g-normal.

Demonstração: Seja X um espaço GO-compacto e Hausdorff. Vamos mostrar, primeiramente, que X é g-regular. Para isso, tome x$\in$X e B um subconjunto g-fechado em X que não contém x. Como X é GO-compacto e B g-fechado, segue que B é GO-compacto relativo a X (Teorema 5.1.4). Logo, pelo lema anterior existem abertos disjuntos U e V em X contendo x e B, respectivamente. Portanto, X é g-regular.

Agora, vamos mostrar que X é um espaço g-normal. Para isso, tome subconjuntos A e B g-fechados em X e escolha, para cada a de A, abertos disjuntos U_a e V_a contendo a e B, respectivamente, pela g-regularidade de X. Temos então, que $\mathcal{U}=\{U_a \setminus a \in A\}$ é uma cobertura aberta, portanto g-aberta de A, por g-abertos em X. Como A é GO-compacto relativo a X (novamente pelo Teorema 5.1.4), existe uma finita subcoleção em $\mathcal{U}$ cobrindo A. Seja ela $U_{a_1}, U_{a_2}, \ldots, U_{a_m}$. Então $U = \bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i}$

Defina $V = \bigcap_{i=1}^{m} V_{a_i}$, então V é aberto em X tal que $B \subset V$, e U é aberto em X tal que $A \subset U$. Além disso $U \cap V = \varnothing$ pois se $z \in U$, existe $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ tal que $z \in U_{y_i}$ e $z \notin V_{y_i}$, ou seja, $z \notin \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i} = V$.

Teorema 5.1.7: Sejam (X,τ) um espaço topológico e A um subconjunto de (X,τ). Se A é αg-regular e compacto, então $\overline{A}$ é GO-compacto.

Demonstração: Sejam (X,τ) um espaço topológico e A um subconjunto de (X,τ) e A é αg-regular e compacto. Considere $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de $\overline{A}$. Então para cada $x \in A$, existe um $\alpha(x) \in J$ tal que $x \in V_{\alpha(x)}$. Como A é αg-regular, existe um aberto U_x em (X,τ), tal que $x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq V_{\alpha(x)}$.

Seja $\{U_x \setminus x \in A\}$ a qual é uma cobertura aberta de A o qual è um conjunto compacto. Logo existem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos de A tais que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Portanto

$\overline{A} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha(x_i)}$. Então $\overline{A}$ é GO-compacto.

Corolário 5.1.4: Se A é αg-regular e GO-compacto, então $\overline{A}$ é GO-compacto.

Demonstração: Segue direto do fato de que todo espaço GO-compacto é um espaço compacto e aplicar o teorema anterior.

Corolário 5.1.5: Seja A um subconjunto denso e αg-regular em um espaço (X,τ). Se A GO-compacto relativo a (X,τ) então X é GO-compacto.

Demonstração: Sejam $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de (X,τ), e A um subconjunto denso em (X,τ), αg-regular e GO-compacto relativo a (X,τ). Logo A é αg-regular e compacto, temos que $\overline{A}$ é GO-compacto relativo a (X,τ), pelo corolário anterior. Como A é denso em X, isto é, $\overline{A}$=X, segue que X é GO-compacto.

Definição 5.1.6 [2]: A coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de um espaço X é dita ter a propriedade da interseção finita se e somente se toda subcoleção $\{C_1, C_2, ..., C_n\}$ de $\mathcal{C}$, a interseção $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$ não é vazia.

Teorema 5.1.8 [8]: Sejam (X,τ) um espaço topológico. X é GO-compacto se e somente se toda coleção $\mathcal{C}$ de g-fechados em X com a propriedade da interseção finita, a interseção $\bigcap$ {C/ C$\in$ $\mathcal{C}$ } não é vazia.

Antes de demonstrarmos este Teorema, mostremos que:

Sejam $\mathcal{A}$ uma coleção de subconjuntos de X e $\mathcal{C}$={X-A\ A $\in$ $\mathcal{A}$ } a coleção de seus complementos. São verdadeiros:

1. Se $\mathcal{A}$ é coleção de g-abertos se e somente se $\mathcal{C}$ é uma coleção de g-fechados.

2. A coleção $\mathcal{A}$ cobre X se e somente se a interseção $\bigcap_{C \in C} C = \varnothing$.

3. A subcoleção $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ de elementos de $\mathcal{A}$ cobre X se e somente se a interseção correspondente $C_1 \cap \cdots \cap C_n = \varnothing$ onde $C_i = X - A_i$. $A \in \mathcal{A}$

Demonstração:

1. Basta observar que se A é g-aberto, X-a é g-fechado.

2. Inicialmente, se a coleção $\mathcal{A}$ cobre X se $x \in X$ e, por absurdo, $x \in \bigcap_{C \in C} C$ então $x \notin A$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Portanto $x \notin \bigcup_{A \in A} A = X$. Contradição. Logo $\bigcap_{C \in C} C = \varnothing$.

Reciprocamente, se interseção $\bigcap_{C \in C} C = \varnothing$ e $x \in X$, suponha por absurdo que $\forall A \in \mathcal{A}$, $x \notin A$. Logo $x \in C$ $\forall C \in \mathcal{C}$. Assim $x \in \bigcap_{C \in C} C$. Mas por hipótese $\bigcap_{C \in C} C = \varnothing$. Absurdo! Logo $x \in \bigcup_{A \in A} A$ e $X = \bigcup_{A \in A} A$.

3. Inicialmente, se a subcoleção $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ de elementos de $\mathcal{A}$ cobre X; suponha por absurdo que existe $x \in X$ tal que $x \in C_1 \cap \cdots \cap C_n$ onde $C_i = X - A_i$, então $x \in C_i$ $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Portanto $x \notin A_i$ $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e então $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$. Contradição! Logo $C_1 \cap \cdots \cap C_n = \varnothing$.

Reciprocamente, se $C_1 \cap \cdots \cap C_n = \varnothing$ onde $C_i = X - A_i$ e se $x \in X$, suponha por absurdo que $x \notin A_i$ $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Assim, $x \in C_i = X - A_i$ $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e portanto $x \in C_1 \cap \cdots \cap C_n$. Mas pela hipótese $C_1 \cap \cdots \cap C_n = \varnothing$. Contradição. Logo $x \in A_i$ $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, isto é, $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Portanto $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Demonstração do Teorema 5.1.8: A afirmação que X é GO-compacto é equivalente a dizer que " Dado qualquer coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos g-abertos de X, se $\mathcal{A}$ cobre X, então alguma subcoleção finita de $\mathcal{A}$ cobre X" . Esta afirmação é equivalente a sua contra positiva, a qual é a seguinte: “Dado qualquer coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos g-abertos de X, se não existe alguma subcoleção finita de $\mathcal{A}$ que cobre X, então $\mathcal{A}$ não cobre X ”. Tome $\mathcal{C}$, como anteriormente, a coleção $\mathcal{C}$={X – A\ A $\in$ $\mathcal{A}$ } e aplicando de (1)-(3), Vemos que esta afirmação é, por sua vez, equivalente ao seguinte: “Dada qualquer coleção $\mathcal{C}$ de conjuntos fechados, se cada intersecção finita do elemento de $\mathcal{C}$ é não vazia, então a intersecção de todos os elementos de $\mathcal{C}$ é não vazia”. Esta é justamente a condição do teorema.

Proposição 5.1.1 [8]: Seja *(X, τ)* um espaço topológico. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1 (X, τ) é GO-compacto.

2 Para qualquer família K de subconjuntos g-fechados em X tal que $\bigcap_{k\in K} k = \varnothing$,

existe uma finita subfamília $L \subset K$ tal que

$\bigcap_{l\in L} l = \varnothing$.

3 $\bigcap_{k\in K} k \neq \varnothing$ para qualquer família K de subconjuntos g-fechados em X tal que

$\bigcap_{l\in L} l \neq \varnothing$ onde $L \subset K$ é uma subfamília finita..

Demonstração: (1) ⇒ (2): Seja (X, τ) um espaço GO-compacto e K uma família de

subconjuntos g-fechados tais que $\bigcap_{k\in K} k = \varnothing$. Então $\left[\bigcap_{k\in K} k\right]^c = [\varnothing]^c$, ou seja,

$\bigcup_{k\in K} k^c = X$. Logo existe uma subfamília finita L ⊂ K tal que $\bigcup_{l\in L} l^c = X$ e $\bigcap_{l\in L} l = \varnothing$

(iii)$\Rightarrow$ (3): Seja K uma família de subconjuntos g-fechados em X. Da suposição se $\bigcap_{k\in K} k = \varnothing$, então existe uma subfamília finita L $\subset$ K tal que $\bigcap_{l\in L} l = \varnothing$. Isto nos dá que se K não tem uma subfamília L tal que $\bigcap_{l\in L} l = \varnothing$, então $\bigcap_{k\in K} k \neq \varnothing$.

(iv)$\Rightarrow$ (2): Seja K uma família de subconjuntos g-fechados em X. Da hipótese, se $\bigcap_{l\in L} l \neq \varnothing$ para qualquer subfamília L $\subset$ K, então $\bigcap_{k\in K} k \neq \varnothing$. Isto nos dá que se $\bigcap_{k\in K} k = \varnothing$, então existe pelo menos uma subfamília L $\subset$ K tal que $\bigcap_{l\in L} l = \varnothing$.

(v) $\Rightarrow$ (1): Seja $\{U_i\}_{i\in I}$ uma cobertura g-aberta de X. Então, $\bigcup_{i\in I} U_i = X$. Isto nos dá que $\bigcap_{i\in I} U_i^c = \varnothing$ e U_i^c é são conjuntos g-fechados em X para cada i $\in$ I. Por hipótese, existe uma subfamília finita J $\subset$ I tal que $\bigcap_{j\in J} U_j^c = \varnothing$. Então $\bigcap_{j\in J} U_j = X$.

Portanto (X, τ) é um espaço GO-compacto.

CAPÍTULO 6

ESPAÇOS WEAKLY GO-COMPACTOS

Neste capítulo sugerimos a definição dos espaços Weakly GO-compactos envolvendo conjuntos g-abertos e δg-fechados. Analisamos as relações destes com os espaços GO-compactos (capitulo anterior) e com o espaço Weakly-compacto. Encontramos alguns resultados semelhantes aos encontrados por Cammaroto e Noiri [10]

6.1 Espaços Weakly GO-compactos

Definição 6.1.1 [10]: Uma cobertura $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ aberta de um espaço (X,τ) é dita regular se e somente se para cada $\alpha \in J$ existe um conjunto $F_\alpha \neq \varnothing$ regularmente fechado em X tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e

$$X = \bigcup \{\operatorname{int} \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\}.$$

Definição 6.1.2: Uma cobertura $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ g-aberta de um espaço (X,τ) é dita g-regular se e somente se para cada $\alpha \in J$ existe um conjunto $F_\alpha \neq \varnothing$ δg–fechado em X tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e

$$X = \bigcup \{\operatorname{int} \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\}.$$

Observação 6.1.1: Observe que toda cobertura regular é g-regular. De fato, seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura regular de X. Então cada V_α é g-aberto de X, e portanto $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura de X por g-abertos em (X,τ). Pela definição de cobertura regular, para cada $\alpha \in J$.
existe um conjunto $F_\alpha \neq \emptyset$ regularmente fechado em X tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e
X= $\bigcup\{\operatorname{int} \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\}$.

Desde que todo regularmente fechado é δg–fechado, temos que $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura g-regular de X.

Definição 6.1.3 [10]: Um espaço X é dito Weakly-compacto se e somente se toda cobertura regular de X possui uma subfamília finita cuja união do fecho de seus elementos cobre X.

Teorema 6.1.1: Sejam (X,τ) um espaço topológico e $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de X onde, para cada $\alpha \in J$, existe um conjunto $F_\alpha \neq \emptyset$ regularmente fechado em X tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e

$$X= \bigcup\{\operatorname{int} \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\}.$$

Então, a cobertura $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ possui uma subfamília cuja união do fecho de seus membros cobre X se e somente se (X,τ) é um espaço Weakly-compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de X onde, para cada $\alpha \in J$, existe um conjunto $F_\alpha \neq \emptyset$ regularmente fechado em X tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e $X = \bigcup\{\operatorname{int} \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\}$. Primeiramente suponha que a cobertura $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ possui uma subfamília cuja união do fecho de seus membros cobre X. Queremos mostrar que (X,τ) é um espaço Weakly-compacto. Para isso, seja $\{U_\beta \setminus \beta \in I\}$ uma cobertura regular de (X,τ). Então $\{U_\beta \setminus \beta \in I\}$ é uma cobertura aberta de (X,τ), e portanto g-aberta de (X,τ) onde, para cada $\beta \in I$, existe um conjunto $F_\beta \neq \emptyset$ regularmente fechado em X tal que $F_\beta \subset U_\beta$ e

$X = \bigcup\{\text{int}\,\mathrm{F}_\beta \setminus \beta \in I\}$. Por hipótese, existe uma subfamília finita de $\{U_\beta \setminus \beta \in I\}$ cuja união do fecho de seus membros cobre (X,τ). Portanto (X,τ) é um espaço Weakly-compacto.

Reciprocamente, suponha que (X,τ) é um espaço Weakly-compacto. Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de X onde, para cada $\alpha \in J$, existe um conjunto $F_\alpha \neq \emptyset$ regularmente fechado em X tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e

$X = \bigcup\{\text{int}\,\mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\}$. Como cada F_α é um conjunto fechado e cada V_α é g-aberto com $F_\alpha \subset V_\alpha$, pela definição de conjunto g-aberto, $F_\alpha \subset \text{int}\,V_\alpha$. Então

$X = \bigcup\{\text{int}\,\mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\} \subseteq \bigcup\{\text{int}\,\mathrm{V}_\alpha \setminus \alpha \in J\}$, ou seja, $\{\text{int}\,V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura regular de (X,τ). Logo, por hipótese, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup\limits_{\alpha \in J_0} \overline{\text{int}\,V_\alpha} \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}$,

como queríamos demonstrar.

Definição 6.1.4: Um espaço X é dito Weakly GO-compacto se e somente se toda cobertura g-regular de X possui uma subfamília finita cuja união do fecho de seus elementos cobre X.

Exemplo 6.1.1: Sejam $S = [0,1]$, τ a topologia induzida sobre S a partir da topologia usual sobre os números reais e S_1, S_2, S_3 três subconjuntos de S densos em (S,τ) dois a dois disjuntos e tais que $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = S$. Consideremos sobre S uma nova topologia $\sigma = \tau \cap \eta$ onde η é a seguinte topologia sobre S: $\eta = \{\emptyset, X, S_1, S_2, S_1 \cup S_2\}$. Vale o seguinte:

Dado C fechado e A aberto em (S,σ), segue que

$$\text{int}_\sigma C \subseteq \text{int}_\tau (cl_\sigma A)$$

onde $\operatorname{int}_\sigma C$ é o interior de C em (S,σ)

$\operatorname{int}_\tau D$ é o interior de D em (S,τ) e

$(cl_\sigma A)$ é o fecho de A em (S,σ).

Indicamos por x_i um elemento qualquer de S e portanto de $S_i, \forall i = 1,2,3$. Para provar o afirmado acima, basta mostrar que cada $x_i \in \operatorname{int}_\sigma C$, temos que $x_i \in \operatorname{int}_\tau(cl_\sigma A)$

Consideremos três casos:

(1) Seja $x_3 \in \operatorname{int}_\sigma C$, existe $V_{x_3} \in \sigma$ e assim $V_{x_3} \in \tau$ tal que $x_3 \in V_{x_3} \subseteq C \subseteq A \subseteq cl_\sigma A$. Como $V_{x_3} \in \tau$, segue que $x_3 \in \operatorname{int}_\tau(cl_\sigma A)$.

(2) Seja $x_2 \in \operatorname{int}_\sigma C$, existe um $V_{x_2} \in \tau$ com $x_2 \in V_{x_2}$ tal que $V_{x_2} \cap S_2 \subseteq C$ onde $cl_\sigma(V_{x_2} \cap S_2) \subseteq C \subseteq cl_\sigma A$ pois C é fechado em (S,σ). Assim C e $cl_\sigma A$ contém todos $x_2 \in V_{x_2}$. Além disso, C e $cl_\sigma A$ contém todos $x_3 \in V_{x_3}$ pois, caso contrário, se existisse $x_3 \in V_{x_3}$ com $x_3 \notin C$, como C um fechado em (S,σ), existe uma vizinhança V_{x_3} de x_3 em (S,σ) tal que $V_{x_3} \cap C = \varnothing$. Fazendo $V_{x_2} \cap V_{x_3} = H \neq \varnothing$ resulta que $H \cap C = \varnothing$ e $\varnothing \neq (H \cap S_2) \subseteq (V_{x_2} \cap S_2) \subseteq C$ o que é um absurdo. Vamos mostrar agora que $cl_\sigma A$ contém todos $x_1 \in V_{x_2}$. Suponhamos por absurdo que existe $x_1 \in V_{x_2}$ tal que $x_1 \notin cl_\sigma A$, então existe $V_{x_1} \in \tau$, com $x_1 \in V_{x_1}$, tal que $(V_{x_1} \cap S_1) \cap A = \varnothing$. Pondo $V_{x_2} \cap V_{x_1} = H \neq \varnothing$, resulta que $(H \cap S_1) \cap A = \varnothing$ onde $x_1 \in H \in \sigma$. Como S_3 é denso em (S,τ) segue que $H \cap S_3 \neq \varnothing$ (onde $H \in \tau$). Então existe um $\overline{x_3} \in H \subseteq V_{x_2}$, onde $\overline{x_3} \in C \subseteq A \subseteq cl_\sigma A$. Logo existe uma vizinhança $L_{\overline{x_3}} \in \sigma$ de $\overline{x_3}$ tal que $\overline{x_3} \in L_{\overline{x_3}} \subseteq A$ (pois A é um aberto em (S,σ)). Pondo $R_{\overline{x_3}} = L_{\overline{x_3}} \cap H \neq \varnothing$, resulta que $R_{\overline{x_3}}$ é um aberto em (S,τ) contendo $\overline{x_3}$ onde $\varnothing \neq R_{\overline{x_3}} \cap S_1 \subseteq A \cap S_1$ e portanto $(R_{\overline{x_3}} \cap S_1) \cap A \neq \varnothing$. Como $R_{\overline{x_3}} \subseteq H$ segue que $(H \cap S_1) \cap A \neq \varnothing$, o que é um absurdo.

Portanto $x_1 \in V_{x_2}$ e segue que $x_1 \in (cl_\sigma A)$. Logo $V_{x_2} \bigcap S_2 \subseteq cl_\sigma A$, $V_{x_2} \bigcap S_3 \subseteq cl_\sigma A, V_{x_2} \bigcap S_1 \subseteq cl_\sigma A$ e portanto $V_{x_2} \subseteq cl_\sigma A$. Como $x_2 \in V_{x_2} \in \tau$ segue que $x_2 \in \operatorname{int}_\tau (cl_\sigma A)$.

(3) Seja $x_1 \in \operatorname{int}_\tau C$ repetindo o mesmo raciocínio, no caso (2), segue-se que $x_1 \in \operatorname{int}_\tau (cl_\sigma A)$

De (1), (2) e (3) segue que $\operatorname{int}_\sigma C \subseteq \operatorname{int}_\tau (cl_\sigma A)$.

Agora, como (S,σ) é um espaço T_1 e portanto um espaço $T_{\frac{1}{2}}$. Segue que toda cobertura g-aberta de (S,σ) é uma cobertura aberta de (S,σ).
Seja $\{A_i \setminus i \in I\}$ é uma cobertura g-regular de (S,σ) existe então, para cada $i \in: I$, existe um C_i δg-fechado tal que $\operatorname{int} C_i \subseteq C_i \subseteq A_i$ com $\bigcup \operatorname{int} C_i = S$.

Como todo δg-fechado é g-fechado em (S,σ), pela definição de g-fechado segue que $cl_\sigma (C_i) \subseteq A_i$, para todo $i \in: I$.
Pelo demonstrado anteriormente, temos que $\operatorname{int}_\sigma C \subseteq \operatorname{int}_\tau (cl_\sigma A)$. Então $\{\operatorname{int}_\tau (cl_\sigma A_i) \setminus i \in I\}$ é uma cobertura aberta de (S,τ) que é compacto. Logo, existe $I_0 \subset I$ finito tal que

$S = \bigcup_{i \in I_0} \operatorname{int}_\tau (cl_\sigma A_i) \subseteq \bigcup_{i \in I_0} (cl_\sigma A_i)$. Portanto (S,σ) é um espaço Weakly GO-compacto.

Mas (S,σ) não é um espaço Almost-compacto (Definição vide próximo capítulo- página 95). De fato, um subconjunto U de S é aberto em (S,σ), se para cada $x \in S_i \bigcap U$ com $i = 1,2,3$, sempre existe um intervalo B tal que

$$\begin{cases} B \bigcap S_1 \subset U \\ B \bigcap S_2 \subset U \\ B \bigcap S \subset U \end{cases}$$

Portanto, segue que (S,σ) não é um espaço Almost-compacto.

Exemplo 6.1.2: Exemplo de espaços Weakly GO-compacto.

Seja $X = \{a,b\} \cup \{a_{ij}, b_{ij}, c_i \setminus i, j = 1,2,\cdots\}$, e considere o sistema fundamental de vizinhanças para cada $a_{ij} b_{ij}, c_{ij}$:

$N(a_{ij}) = \{\{a_{ij}\}\}$

$N(b_{ij}) = \{\{b_{ij}\}\}$

$N(c_i) = \{\{c_i\}\}$

Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-regular de X. Então para cada $\alpha \in J$ existe um conjunto $F_\alpha \neq \emptyset$ δg-fechado em X tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e

$$X = \bigcup \{\operatorname{int} F_\alpha \setminus \alpha \in J\}.$$

Como $b \in X$, existe $\alpha(b) \in J$ tal que $b \in \operatorname{int} F_{\alpha(b)}$. Mas o único aberto em X que contém b é o próprio X. Logo $X = \overline{\operatorname{int} F_{\alpha(b)}} \subset \overline{V_{\alpha(b)}}$. Portanto (X, τ) é um espaço Weakly GO-compacto.

Teorema 6.1.2: O espaço (X, τ) é Weakly GO-compacto então (X, τ) é Weakly-compacto.

Demonstração: Suponha X seja Weakly GO-compacto. Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura regular de X. Desde que toda cobertura regular é g-regular, e como (X, τ) é Weakly GO-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}$ .Portanto (X, τ) é Weakly-compacto.

Teorema 6.1.3: Um espaço (X, τ) é Weakly GO-compacto se (X, τ) for GO-compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-regular de X. Como para cada $\alpha \in J$, V_α é g-aberto e como (X, τ) é

GO-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que X= $\bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$.

Portanto (X,τ) é Weakly GO-compacto.

Exemplo 6.1.3: Exemplo de espaço Weakly GO-Compacto que não é GO-compacto.
Seja $X = \{x\} \bigcup \{x_i \setminus i \in I\}$ onde I é um conjunto não enumerável. Considere $\tau = \{\varnothing, \{x\}, X\}$.
Já vimos que (X,τ) não é um espaço GO-compacto. Vamos agora mostrar que (X,τ) é Weakly GO-compacto.

Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-regular de X. Então para cada $\alpha \in J$ existe um conjunto $F_\alpha \neq \varnothing$ δg-fechado em X tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e

$$X= \bigcup \{\operatorname{int} F_\alpha \setminus \alpha \in J\}.$$

Tome $x_k \in X$ para algum $k \in I$, existe $\alpha(k) \in J$ tal que $x_k \in \operatorname{int} F_{\alpha(k)}$. Mas o único aberto em X que contém x_k é o próprio X. Logo $X = \overline{\operatorname{int} F_{\alpha(k)}} \subset \overline{V_{\alpha(k)}}$. Portanto (X,τ) é um espaço Weakly GO-compacto.

Definição 6.1.5 [10]: Um subespaço S de um espaço topológico X é chamado Weakly-compacto relativo a X se e somente se para cada cobertura $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ de S por abertos em X satisfazendo a propriedade (P), existir $J_0 \subset J$ finito tal que

$$S \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}$$

(P) Para cada $\alpha \in J$, existe um conjunto regularmente fechado $F_\alpha \neq \varnothing$ em X tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e

$$S \subseteq \bigcup \{\operatorname{int}_X F_\alpha \setminus \alpha \in J\}.$$

Definição 6.1.6: Um subespaço S de um espaço X é chamado Weakly GO-compacto relativo a X se e somente se para cada cobertura $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ de S por g-abertos de X satisfazendo a propriedade (P'), existir $J_0 \subset J$ finito tal que

$$S \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}$$

(P') Para cada $\alpha \in J$, existe um conjunto δg-fechado $F_\alpha \neq \varnothing$ em X tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e

$$S \subseteq \bigcup \{\mathrm{int}_X \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\}$$

Teorema 6.1.4: Seja $S \subset X$ um subespaço Weakly GO-compacto relativo a X, então S é Weakly-compacto relativo a X.

Demonstração: Suponha que $S \subset X$ é um subespaço Weakly GO-compacto relativo a X. Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ cobertura de S por abertos em X satisfazendo a propriedade (P) descrita abaixo, então $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ cobertura de S por g-abertos em X satisfazendo a propriedade (P):

(P) Para cada $\alpha \in J$, existe um conjunto regularmente fechado $F_\alpha \neq \varnothing$ em X tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e

$$S \subseteq \bigcup \{\mathrm{int}_X \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\}$$

Como todo conjunto aberto é g-aberto e um conjunto regularmente fechado é δ-fechado e portanto δg-fechado,temos que então $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$cobertura de S por g-abertos de X satisfazendo a propriedade (P'):

(P') Para cada $\alpha \in J$, existe um conjunto δg-fechado $F_\alpha \neq \varnothing$ em X tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e

$$S \subseteq \bigcup \{\mathrm{int}_X \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\}$$

Como S é um subespaço Weakly GO-compacto relativo a X, existe $J_0 \subset J$ finito tal que

$$S \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha} \quad .$$

Portanto S é Weakly-compacto relativo a X.

Teorema 6.1.5 [10]: Se um subespaço A de um espaço X é Weakly-compacto então A é Weakly-compacto relativo a X.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura de A por abertos em X satisfazendo a condição de que, para cada $\alpha \in J$, existe um conjunto regularmente fechado $F_\alpha \neq \emptyset$ em X tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e

$$A \subset \bigcup \{\operatorname{int}_X \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\}.$$

Então, para cada $\alpha \in J$, $\operatorname{int}_X(F_\alpha) \cap A$ e $V_\alpha \cap A$ são abertos em A e $F_\alpha \cap A$ é fechado em A. A família $\{V_\alpha \cap A \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura aberta de A. Para cada $\alpha \in J$,

$$cl_A(\operatorname{int}_X(F_\alpha \cap A)) \subseteq F_\alpha \cap A \subset V_\alpha \cap A$$

Como $A \subset \bigcup \{(\operatorname{int}_X \mathrm{F}_\alpha) \cap A \setminus \alpha \in J\}$ e

$(\operatorname{int}_X(F_\alpha \cap A)) \subseteq \operatorname{int}_A[cl_A(\operatorname{int}_X(F_\alpha \cap A))]$

Desde que $[cl_A(\operatorname{int}_X(F_\alpha \cap A))]$ é regularmente fechado em A.

Assim, $\{V_\alpha \cap A \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura regular de A. Como por hipótese A é Weakly compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que

$$A = \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha \cap A}.$$

Logo $A = \bigcup_{\alpha \in J_0} cl_A(V_\alpha \cap A) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}$.

Portanto A é Weakly-compacto relativo a X.

Corolário 6.1.1: Se um subespaço A de um espaço X é Weakly GO-compacto então A é Weakly-compacto relativo a X.

Demonstração: A $\subset$ X é Weakly GO-compacto $\Rightarrow$ A $\subset$ X é Weakly-compacto $\Rightarrow$
A $\subset$ X é Weakly-compacto relativo a X (pelo teorema anterior)

Teorema 6.1.6: Seja A um subconjunto aberto e fechado em um espaço topológico X. Se A é um subespaço Weakly GO-compacto então A é Weakly GO-compacto relativo a X.

Demonstração: Seja $A \subset X$ um subconjunto aberto e fechado em X, e Weakly GO-compacto como subespaço. Queremos mostrar que A é Weakly GO-compacto relativo a X. Para isso tome uma cobertura qualquer $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ de A por g-abertos em X satisfazendo a propriedade (P'):

(P') Para cada $\alpha \in J$, existe um conjunto δg-fechado $F_\alpha \neq \varnothing$ em X tal que $F_\alpha \subseteq V_\alpha$ e

$$A \subset \bigcup \{\operatorname{int}_X \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\}.$$

Afirmo que para cada $\alpha \in J$, $V_\alpha \bigcap A$ é g-aberto em A. De fato, seja D_α um fechado em A tal que $D_\alpha \subseteq V_\alpha \bigcap A$. Por D_α ser fechado em A e A fechado em X, então D_α é fechado em X. Como A também é aberto em X, então $V_\alpha \bigcap A$ é g-aberto em X. Portanto

$D_\alpha \subseteq \operatorname{int}_X (V_\alpha \cap A)$,

ou seja,

$D_\alpha = D_\alpha \bigcap A \subseteq [\operatorname{int}_X (V_\alpha \cap A)] \subseteq \operatorname{int}_A (V_\alpha \cap A)$.

Agora, para cada $\alpha \in J$, vamos mostrar que $F_\alpha \bigcap A \neq \varnothing$ é δg-fechado em A tal que

$F_\alpha \bigcap A \subseteq V_\alpha \bigcap A$ e

$$A \subset \bigcup \{\operatorname{int}_X (\mathrm{F}_\alpha \cap A) \setminus \alpha \in J\}.$$

De fato, seja U aberto em A tal que $F_\alpha \bigcap A \subset U$. Como $\operatorname{int}_X A = A = \overline{A}$, segue que $A = \overline{\operatorname{int}_X A}$. Logo A é δ-fechado em X, temos que $F_\alpha \bigcap A$ é δg-fechado em X. Logo $cl_{\delta_X}(F_\alpha \cap A) \subset U$. Mas $cl_{\delta_X}(F_\alpha \cap A) = [cl_{\delta_X}(F_\alpha)] \bigcap A = cl_{\delta_A}(F_\alpha)$. Portanto,

$F_\alpha \bigcap A \neq \varnothing$ é δg-fechado em A tal que $F_\alpha \bigcap A \subseteq V_\alpha \bigcap A$ e

$$A \subset \bigcup \{\operatorname{int}_X (\mathrm{F}_\alpha \cap A) \setminus \alpha \in J\}.$$

Então, como A é Weakly GO-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} \left(\overline{V_\alpha} \cap A\right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}.$$

Portanto A é Weakly GO-compacto relativo a X

Teorema 6.1.7 [10]: Seja X um espaço Weakly-compacto. Se A é um subconjunto aberto e fechado em X, então A é Weakly-compacto relativo a X.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura de A por conjuntos abertos em X satisfazendo o seguinte: para cada $\alpha \in J$, existe um conjunto regularmente fechado $F_\alpha \neq \emptyset$ em X tal que $F_\alpha \subseteq V_\alpha$ e

$A \subset \bigcup\{\text{int}_X \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\}$.

Assuma que $X - A \neq \emptyset$. Desde que A é aberto e fechado, $X - A$ é também aberto e fechado. Portanto a família $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\} \cup \{X - A\}$ é uma cobertura regular de X. Desde que X é Weakly compacto existe um subconjunto finito $J_0 \subset J$ tal que

$$X = \left(\bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}\right) \cup \left(\overline{X - A}\right) = \left(\bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}\right) \cup (X - A)$$

Portanto obtemos que $A \subseteq \left(\bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}\right)$, ou seja, a é Weakly-compacto relativo a X.

Corolário 6.1.2: Seja X um espaço Weakly GO-compacto. Se A é um subconjunto aberto e fechado em X, então A é Weakly-compacto relativo a X.

Demonstração:Basta lembrar que se X é Weakly GO-compacto então X é Weakly-compacto e aplicar o teorema anterior.

Teorema 6.1.8: Se um subespaço A aberto e fechado em um espaço X é Weakly GO-compacto então A é Weakly GO-compacto relativo a X.

Demonstração: Seja $A \subset X$ um subconjunto regularmente fechado em um espaço Weakly GO-compacto X. Queremos mostrar que A é Weakly GO-compacto relativo a X. Para isso tome uma cobertura qualquer $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ de S por g-abertos em X satisfazendo a propriedade (P'):

(P') Para cada $\alpha \in J$, existe um conjunto δg-fechado $F_\alpha \neq \emptyset$ em X tal que $F_\alpha \subseteq V_\alpha$ e

$$A \subset \bigcup \{\mathrm{int}_X \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\}.$$

Como $\mathrm{int}_X A = A = \overline{A}$, segue que $A = \overline{\mathrm{int}_X A}$, então A é δ-fechado em X e então A éδg-fechado em X, e portanto g-fechado em X. Então $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\} \cup \{X - A\}$ é uma cobertura g-aberta de X Além disso, como A é aberto, $X - A = \overline{X - A}$, e como A é fechado, $\overline{X - A}$ é regularmente fechado em X tal que $X - A \supseteq \overline{X - A}$, e

$A \subset \bigcup \{\mathrm{int}_X \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\} \cup \{\mathrm{int}(\overline{X - A})\} = \bigcup \{\mathrm{int}_X \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\} \cup \{X - A\}$,

pois $X - A = \mathrm{int}(X - A) = \mathrm{int}(\overline{X - A})$

Assim, $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\} \cup \{X - A\}$ é uma cobertura g-regular de X

que é um espaço Weakly-compacto. Portanto existe um subconjunto finito $J_0 \subset J$ tal que

$$X = \left(\bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}\right) \cup \left(\overline{X - A}\right) = \left(\bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}\right) \cup (X - A)$$

Portanto obtemos que $A \subseteq \left(\bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}\right)$, ou seja, a é Weakly GO-compacto relativo a X.

Teorema 6.1.9 [10]: Se todo subconjunto próprio regularmente fechado em um espaço X é Weakly-compacto relativo a X, então X é Weakly-compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura regular de X. Então para cada $\alpha \in J$, existe um conjunto regularmente fechado $F_\alpha \neq \emptyset$ em X tal que $F_\alpha \subseteq V_\alpha$ e

$$X = \bigcup \{\mathrm{int}_X \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\}.$$

Escolha e fixe $\alpha_0 \in J$. Defina $K = X - \operatorname{int}(F_{\alpha_0})$, então K é um conjunto regularmente fechado em X, e $K \subset \bigcup \{\operatorname{int}_X \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J - \{\alpha_0\}\}$. Portanto $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J - \{\alpha_0\}\}$ é uma cobertura de K por abertos em X tal que para cada $\alpha \in J - \{\alpha_0\}$, existe um conjunto regularmente fechado $F_\alpha \neq \varnothing$ em X tal que $F_\alpha \subseteq V_\alpha$ e

$$K \subset \bigcup \{\operatorname{int}_X \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J - \{\alpha_0\}\}.$$

Pela hipótese, existe $J_0 \subset J - \{\alpha_0\}$ finito tal que

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}$$

Logo $X = K \cup \{\operatorname{int}(F_{\alpha_0})\} = \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha} \cup \{\operatorname{int}(F_{\alpha_0})\} \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha} \cup V_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0 \cup \{\alpha_0\}} \overline{V_\alpha}$.

Ou seja, X é Weakly-compacto.

Corolário 6.1.3 [10]: Se todo conjunto próprio regularmente fechado em X é Weakly-compacto, então X é Weakly-compacto.

Demonstração: Se todo conjunto próprio regularmente fechado em X é Weakly-compacto, então todo subconjunto próprio regularmente fechado em um espaço X é Weakly-compacto relativo a X. Pelo teorema anterior, segue que X é Weakly-compacto.

Corolário 6.1.4: Se todo subconjunto próprio regularmente fechado de um espaço X é Weakly GO-compacto relativo a X, então X é Weakly-compacto.

Demonstração: Se $A \subset X$ regularmente fechado é Weakly GO-compacto relativo a X, então $A \subset X$ regularmente fechado é Weakly-compacto relativo a X. Logo, pelo Teorema 6.1.9, segue que $A \subset X$ é Weakly-compacto.

Teorema 6.1.10: Se todo subconjunto próprio fechado em um espaço X é Weakly GO-compacto relativo a X, então X é Weakly GO-compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-regular de X. Então para cada $\alpha \in J$, existe um conjunto δg–fechado $F_\alpha \neq \varnothing$ em X tal que $F_\alpha \subseteq V_\alpha$ e

$$X = \bigcup \{\operatorname{int}_X \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\}.$$

Escolha e fixe $\alpha_0 \in J$. Defina $K = X - \operatorname{int}_X (F_{\alpha_0})$, então K é um conjunto fechado em X, e $K \subset \bigcup \{\operatorname{int}_x (\mathrm{F}_\alpha) \setminus \alpha \in J - \{\alpha_0\}\}$. Portanto $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J - \{\alpha_0\}\}$ é uma cobertura de K por g-abertos em X tal que para cada $\alpha \in J - \{\alpha_0\}$, existe um conjunto δg-fechado $F_\alpha \neq \varnothing$ em X tal que $F_\alpha \subseteq V_\alpha$ e

$$K \subset \bigcup \{\operatorname{int}_X \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J - \{\alpha_0\}\}.$$

Pela hipótese, existe $J_0 \subset J - \{\alpha_0\}$ finito tal que

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}$$

Logo $X = K \cup \{\operatorname{int}_x (F_{\alpha_0})\} = \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha} \cup \{\operatorname{int}_X (F_{\alpha_0})\} \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha} \cup V_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0 \cup \{\alpha_0\}} \overline{V_\alpha}$

Ou seja, X é Weakly GO-compacto.

Corolário 6.1.5: Se todo subconjunto próprio fechado e aberto em um espaço X é Weakly GO-compacto, então X é Weakly GO-compacto.

Demonstração: Se todo subconjunto próprio fechado e aberto em um espaço X é Weakly GO-compacto, então todo subconjunto próprio fechado e aberto em um espaço X é Weakly GO-compacto relativo a X. Pelo teorema anterior, X é Weakly GO-compacto.

Teorema 6.1.11: Sejam A_1 e A_2 são subconjuntos de um espaço X. Se A_1 e A_2 são Weakly GO-compactos relativos a X então $A_1 \cup A_2$ é Weakly GO-compacto relativo a X.

Demonstração:Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura g-regular relativa de $A_1 \cup A_2$.
Então para cada $\alpha \in J$ existe um conjunto δg-fechado em X $F_\alpha \neq \emptyset$ em X tal que
$F_\alpha \subset V_\alpha$ e

$$A_1 \cup A_2 \subset \bigcup \{\operatorname{int} \mathrm{F}_\alpha \setminus \alpha \in J\}.$$

Então $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura g-regular relativa de A_1 e A_2.
Como ambos subconjuntos são Weakly GO-compactos relativos a X, existem J_1 e J_2 subconjuntos finitos de J, tais que

$$A_1 \subset \bigcup_{\alpha \in J_1} \overline{V_\alpha} \text{ e } A_2 \subset \bigcup_{\alpha \in J_2} \overline{V_\alpha}.$$

Portanto, $A_1 \cup A_2 \subset \left(\bigcup_{\alpha \in J_1} \overline{V_\alpha}\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in J_2} \overline{V_\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha \in J_1 \cup J_2} \overline{V_\alpha}$, ou seja, $A_1 \cup A_2$ é Weakly GO-compacto relativo a X.

Teorema 6.1.12: Sejam A_1 e A_2 são subconjuntos de um espaço X. Se A_1 e A_2 são Weakly GO-compactos relativos a X então $A_1 \times A_2$ é Weakly GO-compacto relativo a $X \times X$.

Demonstração:Seja $\{V_\alpha^1 \times V_\alpha^2 \setminus \alpha \in J\}$ cobertura g-regular relativa de $A_1 \times A_2$. Então, para cada $\alpha \in J$ existe $F_\alpha^1 \times F_\alpha^2 \neq \emptyset$ δg-fechado tal que $F_\alpha^1 \times F_\alpha^2 \subset V_\alpha^1 \times V_\alpha^2$ e $A_\alpha^1 \times A_\alpha^2 \subset \bigcup_{\alpha \in J} \operatorname{int}(F_\alpha^1 \times F_\alpha^2)$. Então, $A_\alpha^1 \subset \bigcup_{\alpha \in J} \operatorname{int}(F_\alpha^1)$ e $A_\alpha^2 \subset \bigcup_{\alpha \in J} \operatorname{int}(F_\alpha^2)$, donde $F_\alpha^1 \neq \emptyset$, $F_\alpha^2 \neq \emptyset$, $F_\alpha^1 \subset V_\alpha^1$ e $F_\alpha^2 \subset V_\alpha^2$.

Vamos mostrar que F_α^1 e F_α^2 são δg-fechado tais que $F_\alpha^1 \subset V_\alpha^1$, $F_\alpha^2 \subset V_\alpha^2$, $A_\alpha^1 \subset \bigcup_{\alpha \in J} \operatorname{int}(F_\alpha^1)$ e $A_\alpha^2 \subset \bigcup_{\alpha \in J} \operatorname{int}(F_\alpha^2)$.

Sejam U_α^1 e U_α^2 abertos tais que $F_\alpha^1 \subset U_\alpha^1$ e $F_\alpha^2 \subset U_\alpha^2$, então

$F_\alpha^1 \times F_\alpha^2 \subset U_\alpha^1 \times U_\alpha^2$. Como $F_\alpha^1 \times F_\alpha^2$ é δg-fechado e $U_\alpha^1 \times U_\alpha^2$ é aberto em $A_1 \times A_2$. temos que $F_\alpha^1 \times F_\alpha^2 \subset \mathrm{int}_\delta\left(U_\alpha^1 \times U_\alpha^2\right) = \mathrm{int}_\delta\left(U_\alpha^1\right) \times \mathrm{int}_\delta\left(U_\alpha^2\right)$. Logo $F_\alpha^1 \subset \mathrm{int}_\delta\left(U_\alpha^1\right)$ e $F_\alpha^2 \subset \mathrm{int}_\delta\left(U_\alpha^2\right)$. Então F_α^1 e F_α^2 são δg-fechado. Como $F_\alpha^1 \times F_\alpha^2 \subset V_\alpha^1 \times V_\alpha^2$ e $A_\alpha^1 \times A_\alpha^2 \subset \bigcup_{\alpha \in J} \mathrm{int}\left(F_\alpha^1 \times F_\alpha^2\right)$, segue que $F_\alpha^1 \subset V_\alpha^1$, $F_\alpha^2 \subset V_\alpha^2$, $A_\alpha^1 \subset \bigcup_{\alpha \in J} \mathrm{int}\left(F_\alpha^1\right)$ e $A_\alpha^2 \subset \bigcup_{\alpha \in J} \mathrm{int}\left(F_\alpha^2\right)$.

Observe também que, se G_1 e G_2 são fechados em X tais que $G_1 \subset V_\alpha^1$ e $G_2 \subset V_\alpha^2$, logo $G_1 \times G_2 \subset V_\alpha^1 \times V_\alpha^2$. Como $V_\alpha^1 \times V_\alpha^2$ é g-aberto em X × X, segue que $\overline{G_1 \times G_2} \subset \overline{G_1} \times \overline{G_2} \subset V_\alpha^1 \times V_\alpha^2$, ou seja, $\overline{G_1} \subset V_\alpha^1$ e $\overline{G_2} \subset V_\alpha^2$.

Portanto V_α^1 e V_α^2 são g-abertos em X. Assim, $\left\{V_\alpha^1 \setminus \alpha \in J\right\}$ cobertura g-regular de A_1 e $\left\{V_\alpha^2 \setminus \alpha \in J\right\}$ cobertura g-regular de A_2. Como A_1 e A_2 são Weakly GO-compactos relativos a X, existem $J_1, J_2 \subset J$ ambos finitos, tais que $A_1 \subset \bigcup_{\alpha \in J_1} V_\alpha^1$ e $A_2 \subset \bigcup_{\alpha \in J_1} V_\alpha^2$.

Logo, $A_1 \times A_2 \subset \bigcup_{\alpha \in J_1} \overline{V_\alpha^1} \times \bigcup_{\alpha \in J_2} \overline{V_\alpha^2} = \bigcup_{\substack{\alpha \in J_1 \\ \beta \in J_2}} \overline{V_\alpha^1} \times \overline{V_\beta^2} = \bigcup_{\substack{\alpha \in J_1 \\ \beta \in J_2}} \overline{V_\alpha^1 \times V_\beta^2}$. Portanto, $A_1 \times A_2$ é Weakly GO-compacto relativo a $X \times X$.

Definição 6.1.7[10]: Uma função $f : X \to Y$, onde X e Y são espaços topológicos, é dita almost-aberta quando $f(U) \subset \mathrm{int}\,\overline{f(U)}$ para todo aberto *U* em *X*.

Definição 6.1.8 [10]: Uma função $f : X \to Y$ onde X e Y são espaços topológicos é dita aberta quando $f(U)$ é aberto em Y, para todo aberto *U* em *X*.

Teorema 6.1.13 [10]: Uma função $f: X \to Y$ é almost-aberta se e somente se $f^{-1}\left(\overline{V}\right) \subset \overline{f^{-1}(V)}$ para todo aberto *V* em *Y*.

Teorema 6.1.14 [10]: Seja $f: X \to Y$ almost-aberta perfeita. Se K é Weakly-compacto relativo a Y, então $f^{-1}(K)$ é Weakly-compacto relativo a X.

Corolário 6.1.6: Sejam X e Y espaços topológicos, $f: X \to Y$ almost-aberta perfeita e K um subconjunto do espaço X. Se K é Weakly GO-compacto relativo a Y, então $f^{-1}(K)$ é Weakly-compacto relativo a X.

Demonstração: Sejam X e Y espaços topológicos, $f: X \to Y$ almost-aberta perfeita e K um subconjunto do espaço X. Se K é Weakly GO-compacto relativo a Y, então K é Weakly-compacto relativo a Y, e portanto $f^{-1}(K)$ é Weakly-compacto relativo a X (pelo teorema anterior).

Corolário 6.1.7 [10]: Seja $f: X \to Y$ uma função aberta perfeita e contínua. Então X é Weakly-compacto se e somente se Y é Weakly-compacto.

Corolário 6.1.8: Sejam X e Y espaços topológicos, e $f: X \to Y$ uma função aberta perfeita e contínua. Se X é Weakly GO-compacto então Y é Weakly-compacto.

Demonstração: Seja $f: X \to Y$ uma função aberta perfeita e contínua. Então X é Weakly GO-compacto então X é Weakly-compacto. Logo Y é Weakly-compacto.

Corolário 6.1.9: Seja X Weakly GO-compacto e $f : X \to Y$ strongly-contínua, então para todo $V \subset Y$ não vazio, $f^{-1}(V)$ é Weakly GO-compacto relativo a X.

Demonstração: De fato, para todo $V \subset Y$ não vazio, como f é strongly-contínua, $f^{-1}(V)$ é aberto e fechado em X. Como X é um espaço Weakly GO-compacto, aplicando o corolário anterior, $f^{-1}(V)$ é Weakly GO-compacto relativo a X.

Teorema 6.1.15: Seja X em espaço GO-compacto. Se $f : X \to Y$ é fechada contínua tal que $Y = f(X)$. Então Y é Weakly-compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura regular de Y, então para cada $\alpha \in J$ existe $F_\alpha \neq \emptyset$ regularmente fechado tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e $Y = \bigcup_{\alpha \in J} \operatorname{int}_X F_\alpha$.

Como f é contínua, $\{f^{-1}(V_\alpha) \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura g-aberta de X. Por hipótese, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{f^{-1}(V_\alpha)}$.

Então $Y = f(X) = f\left(\bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{f^{-1}(V_\alpha)} \right) = \bigcup_{\alpha \in J_0} f\left(\overline{f^{-1}(V_\alpha)}\right) = \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{f\left(f^{-1}(V_\alpha)\right)} = \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{(V_\alpha)}$. Portanto Y é Weakly-compacto.

CAPÍTULO 7

ESPAÇOS ALMOST GO-COMPACTOS

Neste capítulo sugerimos a definição dos espaços Almost GO-compacto trocando na definição de espaços Almost-compactos “cobertura aberta” por “cobertura g-aberta” . Desenvolvemos muita de suas propriedades e as relações com os espaços dos capítulos anteriores e também com os espaços Almost-compactos. Por últimos, caracterizamos os espaços Nearly GO-compactos via g-convergência de um filtro base aberto.

7.1.1 Espaços Almost GO-compactos

Definição 7.1.1 [10]: Dizemos que um espaço (X,τ) é Almost-compacto quando toda cobertura aberta $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ de X possuir uma subfamília finita tal que a união do fecho de seus elementos cobre X.

Definição 7.1.2: Dizemos que um espaço (X,τ) é Almost GO-compacto quando toda cobertura g-aberta $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ de X possuir uma subfamília finita tal que a união do fecho de seus elementos cobre X.

Exemplo 7.1.1:

Seja $X = \{a, b, c_i, a_{ij}, b_{ij} \setminus i, j =,2,3,...\}$. Defina a base $N(x)$ com o sistema fundamental de vizinhanças, para cada ponto x de X, como o seguinte:

$N(a) = \{U^n(a) = \{a, a_{ij}(i \geq n, \forall j) \setminus n = 1,2,...\}\}$

$N(b) = \{U^n(b) = \{b, b_{ij}(i \geq n, \forall j) \setminus n = 1,2,...\}\}$

$N(a_{ij}) = \{\{a_{ij}\}\}$

$N(b_{ij}) = \{\{b_{ij}\}\}$

$N(c_i) = \{U^n(c_i) = \{c_i, a_{ij}, b_{ij}(j \geq n, \forall i) \setminus n = 1,2,...\}\}$

O conjunto X munido da topologia gerada pela base $N(x)$ e um espaço topológico que é Almost GO-Compacto. De fato, seja $U = \{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura g-aberta de X . Então, $\forall x \in X$ existe $\alpha(x) \in J$ tal que $x \in V_{\alpha(x_i)}$. Como (X, τ) é um espaço de Hausdorff, $\{x\}$ é um conjunto fechado em X e $\{x\} \subseteq V_{\alpha(x)}$, segue que $\{x\} \subseteq \operatorname{int}(V_{\alpha(x)})$. Então $\{\operatorname{int} V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura aberta de X. Denote por G(a) e G(b)um par de elementos de $\{\operatorname{int} V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$, os quais contém a e b respectivamente. $\overline{G(a)}$ e $\overline{G(b)}$ conterão todos mas um numero finito , digamos n e m, respectivamente, de c_i's . Suponha que $n \geq m$. Então, os $c_1, \cdots, c_n$ que não são cobertos por $\overline{G(a)}$ e $\overline{G(b)}$ serão cobertos por um número finito de fecho de elementos de $\{\operatorname{int} V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$, digamos $\overline{G_1}, \cdots \overline{G_n}$. O $X - \left[\left(\overline{G(a)}\right) \cup \left(\overline{G(b)}\right)\right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{n} \overline{G_i}\right]$ contém um numero finito de a_{ij}'s e b_{ij}'s . Logo, existe um $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}$. Daí segue que (X, τ) é um espaço Almost GO-compacto.

Teorema 7.1.1: Se um espaço (X, τ) é GO-compacto, então (X, τ) é Almost GO-compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de X, como X é GO-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$ .Como $V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset X$, temos que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}$.

Portanto X é Almost GO-compacto.

Exemplo 7.1.2: A recíproca do teorema anterior não é verdadeira. De fato, seja $X = \{x\} \bigcup \{x_i \setminus i \in I\}$ onde I é um conjunto não enumerável. Seja $\tau = \{\phi, \{x\}, X\}$. Observe que (X,τ) é Almost GO-compacto. De fato, seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de X. Então, para cada $y \in \{x_i \setminus i \in I\}$, existe $\alpha_y \in J$ tal que $y \in V_{\alpha_y}$, e $\overline{V_{\alpha_y}} = \{x_i \setminus i \in I\}$. Agora, para $y = x \in X$ existe $\alpha_x \in J$ tal que $x \in V_{\alpha_x}$, e $\overline{V_{\alpha_x}} = X$ .Logo, temos que (X,τ) é Almost GO-compacto. Mas(X,τ) não é GO-compacto pois $V_i = \{x, x_i\}$ $i \in I$ é uma cobertura g-aberta de X que não possui subcobertura finita.

Teorema 7.1.2: Se um espaço (X,τ) é Almost GO-compacto, então (X,τ) é Weakly GO-compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-regular de X. Logo $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de X, como X é AGO-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que

$$X = \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha} .$$

Portanto X é Weakly GO-compacto.

Exemplo 7.1.3: A recíproca do teorema anterior não é verdadeira.

Seja $X = \{a,b\} \bigcup \{a_{ij}, b_{ij}, c_i \setminus i,j = 1,2,\cdots\}$, e considere o sistema fundamental de vizinhanças para cada $a_{ij}, b_{ij}, c_i \in X$:

$N(a_{ij}) = \{\{a_{ij}\}\}$

$N(b_{ij}) = \{\{b_{ij}\}\}$

$N(c_i) = \{\{c_i\}\}$

Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-regular de X. Então para cada $\alpha \in J$ existe um conjunto $F_\alpha \neq \varnothing$ δg-fechado em X tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e

$$X = \bigcup \{\operatorname{int} F_\alpha \setminus \alpha \in J\}.$$

Como $b \in X$, existe $\alpha(b) \in J$ tal que $b \in \operatorname{int} F_{\alpha(b)}$. Mas o único aberto em X que contém b é o próprio X. Logo $X = \overline{\operatorname{int} F_{\alpha(b)}} \subset \overline{V_{\alpha(b)}}$. Portanto (X,τ) é um espaço Weakly GO-compacto.

Mas (X,τ) não é um espaço Almost GO-compacto. De fato, tome $U = \{\{a_{ij}\}, \{b_{ij}\}, \{c_i\} \setminus ij = 1,2,\cdots\} \bigcup \{\{a\},\{b\}\}$. Então U é uma cobertura g-aberta de X pois $\{a_{ij}\}$, $\{b_{ij}\}$ e $\{c_i\}$ são abertos em X para todos $i,j = 1,2,\cdots$ e, $\{a\}$ e $\{b\}$ também são g-abertos pois o único fechado contido em ambos é o conjunto vazio.

Como

$\overline{\{a_{ij}\}} = \{a_{ij}, a, b\}$

$\overline{\{b_{ij}\}} = \{b_{ij}, a, b\}$

$\overline{\{c_i\}} = \{c_i, a, b\}$

$\overline{\{a\}} = \{a, b\}$

$\overline{\{b\}} = \{a, b\}$

Segue que não existe uma família finita em U o qual a união do fecho de seus elementos cubra X. Logo (X,τ) não é um espaço Almost GO-compacto

Teorema 7.1.3: Se um espaço (S,σ) é um espaço Almost-compacto, então (S,σ) é um espaço Weakly GO-compacto.

Demonstração: Suponha que (S,σ) é um espaço almost compacto e considere $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-regular qualquer de (S,σ). Então, para cada $\alpha \in J$, existe $F_\alpha \neq \varnothing$ δg-fechado tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e $S = \bigcup_\alpha \operatorname{int} F_\alpha$. Então $\{\operatorname{int} F_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura aberta de (S,σ). Usando a hipótese de (S,σ) ser um espaço almost-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que

$$S = \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{\operatorname{int} F_\alpha} \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} \left(\overline{V_\alpha}\right).$$

Portanto (S,σ) é um espaço Weakly GO-compacto.

Observação 7.1.1: Como vimos no Exemplo 6.1.1, temos que a recíproca do teorema anterior não é verdadeira.

Teorema 7.1.4: Se um espaço (X,τ) é Almost GO-compacto, então (X,τ) é Almost-compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura aberta de X, portanto $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura g-aberta de X. Como X é Almost GO-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que

$$X = \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}.$$

Portanto X é Almost-compacto.

A recíproca do teorema anterior não é verdadeira.

Exemplo 7.1.4: Exemplo de um espaço X que é Almost-compacto que não é Almost GO-compacto.

Seja $X = \{a,b\} \cup \{a_{ij}, b_{ij}, c_i \setminus i, j = 1,2,\cdots\}$, e considere o sistema de vizinhanças para cada

$a_{ij}, b_{ij}, c_i \in X$:

$N(a_{ij}) = \{\{a_{ij}\}\}$

$N(b_{ij}) = \{\{b_{ij}\}\}$

$N(c_i) = \{\{c_i\}\}$

Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura aberta de X.

Como $b \in X$, existe $\alpha(b) \in J$ tal que $b \in V_{\alpha(b)}$. Mas o único aberto que contem b é o próprio X. Logo $X = V_{\alpha(b)} \subset \overline{V_{\alpha(b)}}$. Portanto (X,τ) é um espaço Almost-compacto.

Mas (X,τ) não é um espaço Almost GO-compacto. Como mostramos antes (Exemplo 7.1.3)

Exemplo 7.1.5: Exemplo de um espaço X que é Almost-compacto que não é Almost GO-compacto.

Seja $X = \mathrm{N}$ o conjunto dos números naturais. Considere a seguinte topologia sobre X.

$\tau = \{\varnothing, \mathrm{N}\} \cup \{U^n = \{n, n+1, \cdots\} \setminus n \geq 3\}$

Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura aberta de X.

Como $1 \in X$, existe $\alpha(1) \in J$ tal que $1 \in V_{\alpha(1)}$. Mas o único aberto que contém 1 é o próprio X.

Logo $X = V_{\alpha(1)} \subset \overline{V_{\alpha(1)}}$. Portanto (X,τ) é um espaço Almost-compacto.

Mas (X,τ) não é um espaço Almost GO-compacto pois todo conjunto unitário é g-aberto (X,τ), isto é, $V = \{V_x = \{x\} \setminus x \in X\}$ é uma cobertura g-aberta de (X,τ). Para todo $a \in X$, $\overline{\{a\}} = \{1,2,3,\cdots,a\}$. Portanto, não existe uma subfamília em V cuja união do fecho de seus elementos cobre X.

O espaço (X,τ) também é uma espaço Weakly GO-compacto que não é Almost Go-compacto. De fato, seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura de (X,τ) tal que $\forall \alpha \in J$, existe $F_\alpha \neq \varnothing$ tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e $X = \bigcup_{\alpha \in J} \operatorname{int} F_\alpha$. Como $1 \in X$, existe $\alpha(1) \in J$ tal que $1 \in \operatorname{int} F_{\alpha(1)}$. Mas o único aberto que contém 1 é o próprio X.

Logo $X = \operatorname{int} F_{\alpha(1)} \subseteq \overline{ntF_{\alpha(1)}} \subset \overline{F_{\alpha(i)}} \subset \overline{V_{\alpha(1)}}$. Portanto (X,τ) é um espaço Weakly GO-compacto.

Definição 7.1.3: Um subespaço A de um espaço topológico X é chamado Almost GO-compacto relativo a X se e somente se para cada cobertura $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ de S por g-abertos em X, existir $J_0 \subset J$ finito tal que

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}$$

Teorema 7.1.5: Seja A um subespaço g-aberto em um espaço topológico (X,τ). Então se A for Almost GO-compacto relativo a (X,τ), então A será Almost GO-compacto como subespaço.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura g-aberta de A. Como A é g-aberto em (X,τ) temos que $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura de A por g-abertos em (X,τ). Como A é Almost GO-compacto relativo a (X,τ), existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}$.

Portanto X é Almost GO-compacto como subespaço.

Corolário 7.1.1: Seja A um subespaço aberto em um espaço topológico (X,τ). Então se A for Almost GO-compacto relativo a (X,τ), então A será Almost GO-compacto como subespaço.

Demonstração: Segue direto do teorema anterior, lembrando que todo conjunto aberto é g-aberto.

Teorema 7.1.6: Seja A um subespaço fechado e g-aberto em um espaço topológico (X,τ). O subconjunto A for Almost GO-compacto como subespaço se e somente se A será Almost GO-compacto relativo a (X,τ).

Demonstração: Sejam (X,τ) um espaço topológico e A um subconjunto g-aberto e fechado em (X,τ). Suponha que A é Almost GO-compacto como subespaço de (X,τ). Considere $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura de A por g-abertos em (X,τ). Como A é fechado em X, vamos mostrar que $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura de A por g-abertos em A. Para isso, tome F um subconjunto fechado em A tal que $F \subseteq V_\alpha$. Como A é fechado em (X,τ), então F é fechado em (X,τ) e, como V_α é g-aberto em (X,τ) tal que $F \subseteq \operatorname{int}_X V_\alpha$. Então, existe um aberto U em (X,τ) tal que $F \subseteq U \subseteq V_\alpha$. Portanto $U \bigcap A$ é aberto em A tal que $F = F \bigcap A \subseteq U \bigcap A \subseteq V_\alpha \bigcap A \subseteq V_\alpha$, e assim $F \subseteq \operatorname{int}_X V_\alpha \subseteq \operatorname{int}_A V_\alpha$ e V_α é g-aberto em A. Como A é Almost GO-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha \cap A} \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}$.

Portanto X é Almost GO-compacto relativo a X.
A recíproca segue direto do Teorema 7.1.5.

Teorema 7.1.7: Todo subconjunto g-fechado em um espaço Almost GO-compacto X é Almost GO-compacto relativo a X.

Demonstração: Seja A um subconjunto g-fechado em um espaço Almost GO-compacto X. Considere $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ um cobertura de A por g-abertos em X. Então $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\} \bigcup \{X - A\}$ é uma cobertura g-aberta de X . Como X é Almost GO-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}$. Portanto A é um subespaço almost GO-compacto relativo a X.

Corolário 7.1.2: Seja (X, τ) um espaço Almost GO-compacto. Então, todo subconjunto fechado A de (X, τ) é Almost GO-compacto relativo a X.

Demonstração: Sejam (X, τ) um espaço Almost GO-compacto e A um subconjunto fechado em X GO-compacto relativo a X. Como todo fechado é um conjunto g-fechado, o resultado segue que do teorema anterior.

Teorema 7.1.8: Em um espaço g-regular (X, τ), todo par de subconjuntos disjuntos (A, B) onde A é g-fechado e B é Almost GO-compacto relativo a X, existem abertos disjuntos U e V tais que $A \subset U$ e $B \subset V$.

Demonstração: Sejam (X, τ) um espaço g-regular, A um subconjunto g-fechado em (X, τ) e B um subespaço Almost GO-compacto relativo a (X, τ) tais que $A \bigcap B = \varnothing$. Como (X, τ) g-regular, para cada $x \in B$, existem abertos U_x e V_x tais que $x \in U_x$ e $A \subseteq V_x$ e $\overline{U_x} \bigcap \overline{V_x} = \varnothing$ (pelo Teorema 3.2.7). Então $\{U_x \setminus x \in B\}$ é uma cobertura de A por g-abertos em (X, τ), portanto existem $x_1, \cdots, x_n \in B$ tais que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$.

Agora, seja $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ e $U = X - \overline{V}$. Temos que $A \subseteq V$ e $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}} \subseteq X - \bigcap_{i=1}^{n} \overline{V_{x_i}} = U$.

Além disso, $V \bigcap U \subseteq \overline{V} \bigcap U = \overline{V} \bigcap \left(X - \overline{V}\right) = \varnothing$.

Teorema 7.1.9: Em um espaço almost g-regular (X,τ) (Definição 3.2.12), todo par de subconjuntos disjuntos (A,B) onde A é δg-fechado e B é Almost GO-compacto relativo a X, existem abertos disjuntos U e V tais que $A \subset U$ e $B \subset V$.

Demonstração: Seja (X,τ) um espaço almost g-regular, A um subconjunto δg-fechado em (X,τ) e B um subespaço Almost GO-compacto relativo a (X,τ) tais que $A \cap B = \varnothing$. Como (X,τ) é almost g-regular, para cada $x \in B$, existem abertos U_x e V_x tais que $x \in U_x$ e $A \subseteq V_x$ e $\overline{U_x} \cap \overline{V_x} = \varnothing$ (pelo Teorema 3.2.23). Então $\{U_x \setminus x \in B\}$ é uma cobertura de A por g-abertos em (X,τ), portanto existem $x_1,\cdots,x_n \in B$ tais que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$.

Agora, seja $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ e $U = X - \overline{V}$. Temos que $A \subseteq V$ e $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}} \subseteq X - \bigcap_{i=1}^{n} \overline{V_{x_i}} = U$. Além disso, $V \cap U \subseteq \overline{V} \cap U = \overline{V} \cap \left(X - \overline{V}\right) = \varnothing$.

Corolário 7.1.3: Em um espaço almost g-regular X, todo par de conjuntos (A,B) onde B é δg-aberto e A é almost GO-compacto relativo a X tal que $A \subseteq B$, existe um regularmente aberto V tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset B$.

Demonstração: Sejam X um espaço almost g-regular, B é δg-aberto e A é almost GO-compacto relativo a X tal que $A \subseteq B$. Desde que $C = X - B$ é δg-fechado disjunto de A, pelo teorema anterior, existem abertos U e V tais que $A \subset U$, $C \subset V$ e $\overline{U} \cap V = \varnothing$. Portanto $A \subset U \subseteq \overline{U} \subset X - V \subset B$. Logo $A \subset U = \operatorname{int} U \subseteq \operatorname{int} \overline{U} \subset \overline{\operatorname{int} \overline{U}} \subset \overline{U} \subset X - V \subset B$. Desde que $W = \operatorname{int} \overline{U}$ é regularmente aberto em X, segue que, existe um regularmente aberto W em X tal que $A \subset W = \operatorname{int} \overline{U} \subset \overline{\operatorname{int} \overline{U}} = \overline{W} \subset \overline{U} \subset B$, ou seja, $A \subset W \subset \overline{W} \subset B$.

Teorema 7.1.10: Em um espaço almost g-regular X, todo par de conjuntos disjuntos (A,B) onde B é δg-fechado e A é almost GO-compacto relativo a X, então existem abertos disjuntos U e V tais que $A \subset U$, $B \subset V$ e $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

Demonstração: Seja X um espaço almost g-regular, onde B é δg-fechado e A é almost GO-compacto relativo a X. Para cada $x \in A$ temos que $x \notin B$. Como (X,τ) é um espaço almost g-regular, existem abertos U_x e V_x tais que $x \in U_x$, $B \subseteq V_x$ e $\overline{U_x} \cap \overline{V_x} = \varnothing$. Então $\{U_x \setminus x \in A\}$ e´ uma cobertura g-aberta de A. Logo, existem $x_1, \cdots, x_n \in A$ tais que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}} = K$. Defina $\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} = V$ e $M = X - \bigcap_{i=1}^{n} \overline{V_{x_i}}$. Temos então que $B \subseteq V$ e $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}} \subseteq X - \overline{V} = M$. Além disso, $\overline{M} \cap \overline{V} = \left(X - \overline{V}\right) \cap \overline{V} = \varnothing$.

Teorema 7.1.11: Em um espaço Almost GO-compacto, almost g-regular X, todo par de conjuntos disjuntos (A,B) regularmente fechados, existem abertos disjuntos U e V tais que $A \subset U$, $B \subset V$ e $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

Demonstração: Seja X um espaço almost g-regular, onde A e B são regularmente fechado. Como todo regularmente fechado é δg-fechado e todo regularmente fechado em um espaço almost GO-compacto é Almost GO-compacto relativo a X (Corolário 7.1.2), segue direto do Teorema anterior que existem abertos disjuntos U e V tais que $A \subset U$, $B \subset V$ e $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

Teorema 7.1.12: Sejam (X,τ) um espaço topológico e A um subespaço αg-regular em(X,τ). Se A é um subespaço Almost GO-compacto, então A é um subespaço Almost GO-compacto relativo a (X,τ).

Demonstração: Suponha que A é um subespaço Almost GO-compacto, e seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de A por g-abertos em (X,τ). Como A é αg-regular então existe um aberto U_x tal que $x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq V_{\alpha(x)}$.

Seja $\{U_x \cap A \setminus x \in A\}$ o qual é uma cobertura aberta de A que é um subconjunto Almost GO-compacto. Logo existem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos de A tais que

$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i} \cap A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}}$. Portanto $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha(x_i)}$. Então A é Almost GO-compacto. Relativo a (X,τ).

Corolário 7.1.4: Sejam (X,τ) um espaço topológico, e A um subconjunto de X. Se A é g-aberto em (X,τ) e αg-regular. O subespaço A de (X,τ) é Almost GO-compacto relativo a (X,τ) se e somente se A é Almost GO-compacto como subespaço.

Demonstração: Seja A um subconjunto é g-aberto em (X,τ) e αg-regular.

Suponha primeiramente que A é Almost GO-compacto relativo a (X,τ), desde que A é g-aberto em (X,τ), pelo Teorema 7.1.5 segue que A é Almost GO-compacto como subespaço.

Reciprocamente, suponha que A é Almost GO-compacto, como A é αg-regular, pelo Teorema 7.1.12, segue que A é Almost GO-compacto relativo a (X,τ).

Teorema 7.1.13: Seja A qualquer subconjunto denso e αg-regular de um espaço (X,τ) tal que toda cobertura de A por g-abertos em (X,τ) é uma cobertura g-aberta de (X,τ). Então (X,τ) é Almost GO-compacto se e somente se (X,τ) GO-compacto.

Demonstração: Suponha inicialmente que X é um espaço Almost GO-compacto. Seja A um subconjunto denso e αg-regular no espaço (X,τ) tal que toda cobertura de A por g-abertos em (X,τ)é uma cobertura g-aberta de (X,τ). Considere $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de (X,τ). Então para cada $x \in X$, existe um $\alpha(x) \in J$ tal que $x \in V_{\alpha(x)}$. Como A é αg-regular, para todo $x \in A$ existe um aberto U_x em (X,τ) tal que

$x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq V_{\alpha(x)}$.

Então $\{U_x \setminus x \in A\}$ é uma cobertura de A por g-abertos em (X,τ), e portanto, $\{U_x \setminus x \in A\}$ é uma cobertura g-aberta de (X,τ). Como X é um espaço Almost GO-compacto, existem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos de A tais que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}}$. Logo

$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha(x_i)}$. Portanto A é GO-compacto relativo a (X,τ). Como A é denso em (X,τ), isto é, $\overline{A}$=X, segue que (X,τ) é GO-compacto.

A recíproca é já foi provada no Teorema 7.1.1.

7.2 Caracterização de espaços Almost GO-compactos via g-convergência

Definição 7.2.1 [17]: Uma família não vazia $\beta = \{B_i \setminus i \in J\}$ onde B_i são subconjuntos em *X* é chamado filtro base aberto em *X* quando cada $B_i \in \beta$ é um aberto em X e satisfaz os seguintes axiomas.

3. Se $B \in \beta$, então *B* é não vazio.
4. Se $B_1, B_2 \in \beta$, então $B \subseteq B_1 \bigcap B_2$ para algum $B \in \beta$.

Teorema 7.2.1: Para um espaço topológico *(X, τ)*, são equivalentes:

1 X é Almost GO-compacto;

2 Se $\{F_\alpha\}$ é uma família de conjuntos g-fechados tais que $\bigcap F_\alpha = \varnothing$, então existe uma família finita em $\{F_\alpha\}$ tal que $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int} F_{\alpha_i} = \varnothing$;

3 Todo filtro base aberto tem um ponto de g-acumulação;

4 Todo filtro base maximal aberto g-converge para algum ponto $x \in X$.

Demonstração:

$(1) \Rightarrow (4)$: Seja $\wp = \{F_\alpha\}$ um filtro base maximal tal que $\wp$ não g-converge para qualquer ponto de X. Então $\wp$ não tem pontos g-acumulação (Teorema 4.1.3) . Assim, para todo $x \in X$, existe um conjunto g-aberto U_x contendo x tal que para todo $B_{\alpha(x)}$ pertencente a base de $\wp$ tem-se que $B_{\alpha(x)} \cap U_x = \varnothing$, logo $B_{\alpha(x)} \cap \overline{U_x} = \varnothing$, pois. $B_{\alpha(x)}$ é um aberto contendo x. Portanto o conjunto dos g-abertos $U = \{U_x \,/\, x \in X\}$ que satisfaz a propriedade acima cobre X e pela hipótese, existe uma subfamília finita $\{U_{x_i} / 1 \le i \le n\}$ de U cuja união do fecho de seus elementos cobre X. Como $\wp$ é um filtro base, existe $F_0 \subset \bigcap_{i=1}^{n} B_{\alpha(x_i)}$, $F_0 \ne \varnothing$, $F_0 \in \wp$. Mas

$$F_0 = F_0 \cap X = F_0 \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}} \right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\overline{U_{x_i}} \cap F_0 \right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(\overline{U_{x_i}} \cap B_{\alpha(x_i)} \right) = \varnothing$$

Contradição. Logo, $\wp$ g-converge para x.. Pelo Teorema 4.1.1, x é um ponto de g-acumulação de $\wp$. Pelo Teorema 4.1.3, todo filtro base maximal aberto sobre X g-converge.

$(4) \Rightarrow (3)$:Seja $\wp$ um filtro base aberto sobre X, então existe um filtro base maximal aberto Θ que é mais fino que $\wp$. Por hipótese Θ g-converge para x . Então $\exists \phi_{\alpha(x)} \in \Theta$ tal que $\forall U_x$ g-aberto com $x \in U_x$ temos que $\phi_{\alpha(x)} \subseteq U_x$. Então, pelo Lema 4.1.1 e pelo Teorema 4.1.1, x é um ponto de g-acumulação de $\wp$.

$(3) \Rightarrow (2)$: Seja $\{F_\alpha\}$ é uma família de conjuntos g-fechados tais que $\bigcap F_\alpha = \varnothing$. Suponha que para toda subfamília finita de $\{F_\alpha\}$, temos $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int} F_{\alpha_i} \ne \varnothing$. Então, como $\hbar$ ={toda finita interseção do interior de elementos de $\{F_\alpha\}$} (pela Definição 4.3 de Teoria de g-convergência) forma um filtro base aberto, pela hipótese, $\hbar$ possui algum ponto de g-acumulação $x_0 \in X$. Como $\bigcap F_\alpha = \varnothing$, existe $\alpha(x_0)$ tal que $x_0 \notin F_{\alpha(x_0)}$, ou seja, $x_0 \notin \operatorname{int}(F_{\alpha(x_0)}) \ne \varnothing$ Portanto $x_0 \in X - \operatorname{int}(F_{\alpha(x_0)})$, um conjunto g-aberto. Mas x_0 é um ponto de g-acumulação de $\hbar$, $\operatorname{int}(F_{\alpha(x_0)}) \in \hbar$ e $\operatorname{int}(F_{\alpha(x_0)}) \cap (X - \operatorname{int} F_{\alpha(x_0)}) \ne \varnothing$. Absurdo.

$(2) \Rightarrow (1)$: Imediato.

CAPÍTULO 8

ESPAÇOS NEARLY GO-COMPACTOS

Neste capitulo sugerimos a definição dos espaços Nearly GO-compacto. Obtemos muitas de suas propriedades e também as relações com os espaços dos capítulos anteriores bem como com os espaços Nearly-compactos. Por último, definimos δg-convergência de um filtro e caracterizamos os espaços Nearly GO-compactos via δg-convergência.

8.1 Espaços Nearly GO-compactos

Definição 8.1.1 [5]**:** Um espaço (X,τ) é chamado Nearly-compacto se e somente se toda cobertura regularmente aberta $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ de X possui subcobertura finita .

Assim, dizer que um espaço (X,τ) é Nearly-compacto é equivalente a dizer que toda cobertura aberta de X possui uma subfamília finita tal que

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{int} \overline{V_k} \ .$$

Definição 8.2.2: Um espaço (X,τ) é chamado Nearly GO-compacto se e somente se toda cobertura δg-aberta $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ de X admite uma subfamília finita tal que

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$$

Teorema 8.1.1: Se um espaço (X,τ) é Nearly GO-compacto então (X,τ) é Nearly-compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura regularmente aberta de X. Então $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura δg-aberta de X. Como X é Nearly GO-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que

$$X = \bigcup_{\alpha \in J_0}^{n} V_\alpha$$

Portanto é um espaço Nearly-compacto.

Exemplo 8.1.1: A recíproca do teorema anterior não é verdadeira. De fato, seja $X = \{x\} \bigcup \{x_i \setminus i \in I\}$ onde I é um conjunto não enumerável. Tome $i = i_0 \in I$ fixo, e seja $\tau = \{\varnothing, \{x\}, \{x_{i_0}\}, \{x, x_{i_0}\}, X\}$. Observe que (X,τ) é Nearly-compacto, mas não é Nearly GO-compacto. De fato, tomando $V_{i_0} = \{x_{i_0}\}$ e $V_i = \{x, x_i\}_{i \in I - \{i_0\}}$ onde $i \in I - \{i_0\}$ (pois o único fechado contido nos $V_i's$ com $i \in I - \{x_{i_0}\}$, é o conjunto vazio e V_{i_0} é regularmente aberto em (X,τ)), temos que $\{V_i = \{x, x_i \setminus i \in I \setminus \{i_0\}\}\} \bigcup V_{i_0}$ é uma cobertura δg-aberta de X que não possui subfamília finita cuja união de seus membros cobre X. Mas (X,τ) é Nearly-compacto pois. (X,τ) é compacto.

O exemplo anterior mostra que espaços Nearly GO-compacto não coincidem com espaços Compactos.

Teorema 8.1.2: Um espaço (X,τ) é GO-compacto então (X,τ) é Nearly GO-compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de X e portanto, uma cobertura g-aberta de X. Como X é GO-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que

$$X = \bigcup_{\alpha \in J_0}^{n} V_\alpha$$

Portanto X é Nearly GO-compacto.

Exemplo 8.1.2: Exemplo de espaço Nearly GO-compacto que não é GO-Compacto.
Seja $X = \{a, a_i \setminus i = 1,2,\cdots\}$ e $\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{\{a, a_i\} \setminus i \in I\}, X\}$. Observe que (X,τ) não é compacto e portanto, não é um espaço GO-compacto. Mas (X,τ) é Nearly GO-compacto. De fato, os únicos regularmente aberto em (X,τ) são o conjunto vazio e X. Assim, se $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura δg-aberta de X, então existe $\alpha(a_i) \in J$ tal que $a_i \in V_{\alpha(a_i)}$.
Portanto $\{a_i\} = \overline{\{a_i\}} \subseteq \operatorname{int}_\delta V_{\alpha(a_i)} = X$
Logo $\overline{V_{\alpha(a_i)}} = X$.

O exemplo acima mostra que Nearly GO-compacidade não implica em Compacidade.

Teorema 8.1.3: Um espaço (X,τ) é Nearly GO-compacto então (X,τ) é Weakly GO-compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-regular de (X,τ). Então , para cada $\alpha \in J$, existe um δg-fechado $F_\alpha \neq \varnothing$ tal que $F_\alpha \subset V_\alpha$ e $X = \bigcup_{\alpha \in J} \operatorname{int} F_\alpha$. Portanto $\{\operatorname{int} \overline{F_\alpha} \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura regularmente aberta de (X,τ). Logo, por hipótese, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} \operatorname{int} \overline{F_\alpha}$.

Como $\operatorname{int}\overline{F_\alpha} \subset \overline{V_\alpha}$, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}$. Portanto (X,τ) é um espaço Weakly GO-compacto.

Exemplo 8.1.3: O espaço definido a seguir é um exemplo de espaço Weakly GO-compacto que não é Nearly GO-compacto.

Sejam $X = \{x\} \cup \{x_i \setminus i \in I\}$ e I é um conjunto não enumerável e $\tau = \{\varnothing, \{x\}, X\}$. Então (X,τ) é um espaço topológico. (X,τ) não é um espaço Nearly GO-compacto. De fato, seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura de (X,τ) onde $V_\alpha = \{x, x_\alpha\}$, $\forall \alpha \in J$. Todos V_α são conjuntos δg-abertos pois o único fechado contido em todos V_α é o conjunto vazio. Pode-se observar facilmente que não existe uma subfamília de $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ cuja união cobre X.

Mas (X,τ) é um espaço Weakly GO-compacto pois é Almost GO-compacto, como mostramos no Exemplo 7.1.2.

Teorema 8.1.4: Um espaço almost g-regular (X,τ) é Nearly-compacto se e somente se (X,τ) é Nearly GO-compacto.

Demonstração: Seja X um espaço almost g-regular.

Suponha que X é Nearly-compacto. Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de X. Para cada $x \in X$, existe $\alpha_x \in J$ tal que $x \in V_{\alpha_x}$. Como X é almost g-regular, existe um aberto U_x que contém x e $\overline{U_x} \subset V_{\alpha_x}$.

Observe que $\{U_x \setminus x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X. Como X é Nearly-compacto, existem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos de X tais que $X = \bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{int}\overline{U_{x_k}}$

Como,

$\operatorname{int}\overline{U_x} \subset \overline{U_x} \subset V_{\alpha_x}$, temos que $X = \bigcup_{k=1}^{n} V_{\alpha_{x_k}}$

Portanto X é Nearly GO-compacto.

Recíproca foi provada no Teorema 8.1.1.

Teorema 8.1.5: Seja (X,τ) um espaço T_1. Se (X,τ) é um espaço Nearly GO-compacto, então (X,τ) é um espaço Almost GO-compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de X. Então, para cada $x \in X$,existe $\alpha(x) \in J$ tal que $x \in V_{\alpha(x)}$, ou seja, $\{x\} \subseteq V_{\alpha(x)}$. Como X é um espaço T_1, $\{x\}$ é fechado em X; e como cada $V_{\alpha(x)}$ é g-aberto, $\{x\} \subseteq \operatorname{int}(V_{\alpha(x)}) \subseteq \operatorname{int}(\overline{V_{\alpha(x)}})$. Então $\{\operatorname{int}(\overline{V_{\alpha(x)}}) \setminus x \in X\}$ é uma cobertura regularmente aberta de (X,τ), e como (X,τ) é Nearly GO-compacto então (X,τ) é nearly compacto, e portanto existem $x_1,\ldots,x_n \in X$ tais que $X = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{int}(\overline{V_{\alpha(x_i)}}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_{\alpha(x_i)}}$. Como $J_0 = \{\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_n)\} \subset J$ é finito e $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} \overline{V_\alpha}$, temos que (X,τ) é um espaço Almost GO-compacto.

Exemplo 8.1.4: O espaço definido a seguir é um exemplo de espaço Almost GO-compacto que não é Nearly GO-compacto.

Sejam $X = \{x\} \cup \{x_i \setminus i \in I\}$ e I é um conjunto não enumerável e $\tau = \{\varnothing, \{x\}, X\}$. Então (X,τ) é um espaço topológico. (X,τ) não é um espaço Nearly GO-compacto. De fato, seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura de (X,τ) tal que $V_\alpha = \{x, x_\alpha\}$, $\forall \alpha \in J$. Todos V_α's são conjuntos δg-aberto pois o único fechado contido em cada V_α é o conjunto vazio. Pode-se observar facilmente que não existe uma subfamília em $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ cuja união cobre X.

Mas (X,τ) é um espaço Almost GO-compacto pois para qualquer cobertura g-aberta $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ de (X,τ), existe $\alpha(x) \in J$ tal que $x \in V_{\alpha(x)}$, ou seja, $\{x\} \subseteq V_{\alpha(x)}$. Como $X = \overline{\{x\}} \subseteq \overline{V_{\alpha(x)}}$.

Exemplo 8.1.5: Exemplo de almost GO-compacto que não é Nearly-compacto.

Seja $X = \{a,b\} \cup \{a_{ij}, b_{ij}, c_i \setminus i, j = 1,2,\cdots\}$, e considere o sistema de vizinhanças.

$N(a_{ij}) = \{\{a_{ij}\}\}$

$N(b_{ij}) = \{\{b_{ij}\}\}$

$N(c_i) = \{U^n(c_i) = \{c_{,i}, a_{ij}, b_{ij} \setminus j \geq n, \forall i\} \setminus n = 1,2,\cdots\}$

$N(a) = \{U^n(a) = \{a, a_{ij} \setminus i \geq n, \forall j\} \setminus n = 1,2,\cdots\}$

$N(b) = \{U^n(b) = \{b, b_{ij} \setminus i \geq n, \forall j\} \setminus n = 1,2,\cdots\}$

X é um espaço Almost GO-compacto como mostra o exemplo anterior.

E fácil ver que o espaço X não é Nearly Compacto.

Corolário 8.1.1: Seja (X,τ) um espaço de Hausdorff. Se (X,τ) é um espaço Nearly GO-compacto, então (X,τ) é um espaço Almost GO-compacto.

Demonstração: Segue do fato de que todo espaço Hausdorff é um espaço T_1, e usa-se o teorema anterior.

Teorema 8.1.6: Seja (X,τ^*) for GO-compacto então (X,τ) é Nearly GO-compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de (X,τ). Então $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura g-aberta de $(X,\tau *)$. Como $(X,\tau *)$ é GO-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$. Logo (X,τ) é Nearly GO-compacto.

A recíproca não é verdadeira.

Exemplo 8.1.6: Seja $X = \{a, a_i \setminus i = 1,2,\cdots\}$ e $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a, a_i\} \setminus i \in I\}, X\}$. Observe que (X,τ) é Nearly GO-compacto. De fato, os únicos regularmente abertos em (X,τ) são o conjunto vazio e X. Assim, se $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura δg-aberta de X, então existe $\alpha(a_i) \in J$ tal que $a_i \in V_{\alpha(a_i)}$. Portanto $\{a_i\} = \overline{\{a_i\}} \subseteq \operatorname{int}_\delta V_{\alpha(a_i)} = X$

Logo $\overline{V_{\alpha(a_i)}} = X$.

Mas $(X,\tau *)$ não é GO-compacto. De fato, A=$\{\{a\},\{a_i\} \setminus i = 1,2,\cdots\}$ é uma cobertura g-aberta de $(X,\tau *)$ pois, como $\tau * = \{X,\emptyset\}$, o único fechado contido nos elementos de A é o conjunto vazio. É fácil ver que A não possui subcobertura finita de $(X,\tau *)$.

Teorema 8.1.7: Seja $(X,\tau *)$ for Nearly GO-compacto então (X,τ) é Nearly GO-compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de (X,τ). Então $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura δg-aberta de $(X,\tau *)$. Como $(X,\tau *)$ é Nearly GO-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$. Logo (X,τ) é Nearly GO-compacto.

Corolário 8.1.2: Seja (X,τ) um espaço Almost Weakly Hausdorff (Definição 3.1.3). O espaço $(X,\tau *)$ é GO-compacto se e somente se (X,τ) é Nearly GO-compacto.

Demonstração: Seja (X,τ) um espaço Almost Weakly Hausdorff.

Suponha primeiramente que (X,τ^*) é GO-compacto. Então (X,τ^*) é Nearly GO-compacto. Aplicando o teorema anterior segue que (X,τ) é Nearly GO-compacto.

Reciprocamente, suponha que (X,τ) é Nearly GO-compacto. Como (X,τ) é um espaço Almost Weakly Hausdorff todos conjuntos δg-abertos em (X,τ^*) são δ-abertos em (X,τ) e portanto δg-abertos em (X,τ). Assim se $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de (X,τ^*) então $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δ-aberta de (X,τ^*), e portanto $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de (X,τ) que é um espaço Nearly GO-compacto e então existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$. Logo (X,τ^*) é Nearly GO-compacto.

Teorema 8.1.8: Todo espaço Nearly GO-compacto Hausdorff é almost g-regular.

Demonstração:

Sejam X um espaço Nearly GO-compacto, F um subconjunto δg-fechado F e $x \in X - F$.

Para cada $y \in F$, como X é Hausdorff, existem regularmente abertos disjuntos U_x e V_x tais que $x \in U_x$ e $y \in V_x$. Então $\{V_y \setminus y \in F\}$ é uma cobertura δg-aberta de F, e $\{V_y \setminus y \in F\} \cup \{X - F\}$ é uma cobertura δg-aberta de X. Como X é Nearly GO-compacto, existem $y_1,\dots,y_n \in F$ tais que $X = \left(\bigcup_{i=i}^{n} V_{y_i}\right) \cup (X - F)$. Então $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} = V$ e $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} = U$. Como tanto U quanto V são abertos disjuntos em X, segue que X é almost g-regular.

Teorema 8.1.9 [5]: Um espaço almost-regular é Almost-compacto se e somente se é Nearly-compacto.

Demonstração: Seja X um espaço almost-regular.

Suponha que X é Almost-compacto. Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura aberta de X. Para cada $x \in X$, existe $\alpha_{(x)} \in J$, tal que $x \in V_{\alpha(x)}$. Como X é almost -regular, existe um aberto $U_{\alpha(x)}$ contendo x tal que $\overline{U_{\alpha(x)}} \subset \operatorname{int}\overline{V_{\alpha(x)}}$. Observe que $\{U_{\alpha(x)} \setminus x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X. Como X é Almost GO-compacto, existem elementos $x_1,...,x_n$ em X tais que $X = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{\alpha(x_i)}}$.

Portanto, $X = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{int}\overline{V_{\alpha(x_i)}}$, ou seja, X é Nearly-compacto.

A recíproca deve-se ao fato de que todo espaço Nearly-compacto é Almost-compacto.

Teorema 8.1.10: Um espaço almost g-regular é Almost GO-compacto se e somente se Nearly GO-compacto.

Demonstração:Seja X um espaço almost g-regular.

Suponha que X é Almost GO-compacto. Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de X. Para cada $x \in X$, existe $\alpha(x) \in J$, tal que $x \in V_{\alpha(x)}$. Como X é almost g-regular, existe um aberto $U_{\alpha(x)}$ contendo x tal que $\overline{U_{\alpha(x)}} \subset V_{\alpha(x)}$. Observe que $\{U_{\alpha(x)} \setminus x \in X\}$ é uma cobertura g-aberta de X. Como X é Almost GO-compacto, existem elementos $x_1,...,x_n$ em X tais que $X = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{\alpha(x_i)}}$. Portanto, $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha(x_i)}$, ou seja, X é Nearly GO-compacto.

Reciprocamente, suponha que X é um espaço Nearly GO-compacto. Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de X. Para cada $x \in X$, existe $\alpha(x) \in J$, tal que $x \in V_{\alpha(x)}$. Como X é almost g-regular, pelo Teorema 3.2.26, X é um espaço T_1, $\{x\}$ é fechado em X tal que $\{x\} \subset \operatorname{int}_\delta\left(V_{\alpha(x)}\right)$. Assim $\{\operatorname{int}_\delta V_{\alpha(x)} \setminus x \in X\}$ é uma cobertura δ-aberta de X e portanto uma cobertura δg-aberta de X. Como X é um espaço Nearly GO-compacto, existem

$x_1,...,x_n \in X$ tais que $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha(x_i)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_{\alpha(x_i)}}$. Portanto X é um espaço Almost GO-compacto.

Corolário 8.1.3: Um espaço g-regular é Almost GO-compacto se e somente se é Almost-compacto.

Demonstração:
Suponha que X é Almost-compacto. Como X é g-regular, então X é almost-regular e, portanto X é Nearly-compacto (Teorema 8.1.9).Desde que g-regular implica em almost g-regular; e como um espaço almost g-regular Nearly-compacto é Nearly GO-compacto. De acordo com o teorema anterior, segue que X é Almost GO-compacto.
A recíproca já foi provada no Teorema 7.1.4.

Teorema 8.1.11: Um espaço g-regular X é Almost GO-compacto se e somente se é GO-compacto.

Demonstração:Seja X um espaço g-regular.
Suponha que X é Almost GO-compacto. Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de X. Como X é g-regular, existe um aberto $U_{\alpha(x)}$ contendo x tal que $\overline{U_{\alpha(x)}} \subset V_{\alpha(x)}$.
Observe que $\{U_{\alpha(x)} \setminus x \in X\}$ é uma cobertura g-aberta de X. Como X é Almost GO-compacto, existem elementos $x_1,...,x_n$ em X tais que $X = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{\alpha(x_i)}}$.

Portanto, $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha(x_i)}$, ou seja, X é GO-compacto.
A recíproca deve-se ao fato de que todo espaço GO-compacto é Almost GO-compacto (Teorema 7.1.1).

Corolário 8.1.4: Um espaço g-regular é Almost GO-compacto se e somente se é Nearly-compacto.

Demonstração:Seja X um espaço g-regular. Se X é um espaço Almost GO-compacto, pelo teorema anterior, X é um espaço GO-compacto, ou seja X é Compacto e portanto Nearly-compacto.
Reciprocamente, se X é nearly-compacto então X é um espaço almost-compacto, pelo Corolário 8.1.3 anterior como X é g-regular, segue que X é almost GO-compacto.

Teorema 8.1.13: Seja X um espaço g-regular. X é Weakly GO-compacto se e somente se X é Nearly GO-compacto.

Demonstração: Seja X um espaço g-regular.
Suponha que X é um espaço Weakly GO-compacto. Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de X, então para cada $x \in X$ existe um $\alpha(x) \in J$ tal que $x \in V_{\alpha(x)}$. Como X é g-regular e portanto X é almost g-regular, (pelo Teorema 3.2.19)existem conjuntos regularmente abertos $U_{\alpha(x)}$ e $W_{\alpha(x)}$ contendo x tais que
$x \in W_{\alpha(x)} \subseteq \overline{W_{\alpha(x)}} \subseteq U_{\alpha(x)} \subseteq \overline{U_{\alpha(x)}} \subseteq V_{\alpha(x)}$. A coleção $\{U_{\alpha(x)} \setminus x \in X\}$ é uma cobertura g-regular de X. Como X é Weakly GO-compacto, existem elementos $x_1,\dots,x_n$ em X tais que $X = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{\alpha(x_i)}}$.

Portanto, $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha(x_i)}$, ou seja, X é Nearly GO-compacto.
Reciprocamente, suponha que X é um espaço Nearly GO-compacto. Pelo Teorema 8.1.3 segue que X é um espaço Weakly GO-compacto.

Corolário 8.1.6: Seja X um espaço g-regular. X é Weakly GO-compacto se e somente se X é GO-compacto

Demonstração: Seja X um espaço g-regular. Se X é Weakly GO-compacto, pelo teorema anterior, X é Nearly GO-compacto. Logo X é g-regular Nearly GO-compacto, e isso implica que X é GO-compacto.
A recíproca segue do Teorema 6.1.3.

Teorema 8.1.14: Seja A qualquer subconjunto denso e αg-regular de um espaço (X,τ) tal que toda cobertura de A por g-abertos em (X,τ) é uma cobertura g-aberta de (X,τ). Então (X,τ) é Nearly GO-compacto se e somente se (X,τ) GO-compacto.

Demonstração: Suponha que X é um espaço Nearly GO-compacto. Seja A um subconjunto denso e αg-regular do espaço (X,τ) tal que toda cobertura de A por g-abertos em (X,τ)é uma cobertura g-aberta de (X,τ). Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de (X,τ). Então para cada $x \in X$, existe um $\alpha(x) \in J$ tal que $x \in V_{\alpha(x)}$. Como A é αg-regular, para todo $x \in A$ existe um regularmente aberto U_x em (X,τ) tal que

$x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq V_{\alpha(x)}$.

Então $\{U_x \setminus x \in A\}$ é uma cobertura de A por regularmente abertos em (X,τ), e portanto, $\{U_x \setminus x \in A\}$ é uma cobertura δg-aberta de X. Como X é um espaço Nearly GO-compacto, existem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos de A tais que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}}$. Logo $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha(x_i)}$. Portanto A é GO-compacto relativo a (X,τ). Como A é denso em (X,τ), isto é, $\overline{A}$=X, segue que (X,τ) é GO-compacto.
A recíproca é já foi provada pelo Teorema 8.1.2.

8.2 Espaços Nearly GO-compactos via δg-convergência

Definição 8.2.1 [36]: Seja (X,τ) um espaço topológico, $\wp = \{F_i \setminus i \in J\}$ um filtro base de *X* e $x \in X$. Um filtro base é dito δ-convergente para *x* se e somente se existe um $F_i \in \wp$ tal que $F_i \subseteq U$ para cada regularmente aberto *U* contendo *x*.

Definição 8.2.2: Em um espaço topológico (X,τ), um ponto *x* é dito ponto de δg-acumulação do filtro base Θ sobre X se e somente se para todo $\theta_i \in \Theta$ e para todo δg-aberto *U* contendo x, temos que $\theta_i \cap U \neq \varnothing$.

Definição 8.2.3: Seja (X,τ) um espaço topológico, $\wp = \{F_i \setminus i \in J\}$ um filtro base de *X* e $x \in X$. Um filtro base é dito δg-convergente para *x* se e somente se existe um $F_i \in \wp$ tal que $F_i \subseteq U$ para cada δg-aberto *U* contendo *x*.

Definição 8.2.4 [36]: Em um espaço topológico (X,τ), um ponto *x* é dito ponto de δ-acumulação do filtro base Θ sobre X se e somente se para todo $\theta_i \in \Theta$ e para todo regularmente aberto *U* contendo x, temos que $\theta_i \cap U \neq \varnothing$.

Teorema 8.2.1: Se um filtro base Θ δg-converge para $x \in X$ **,** então *x* é um ponto de δg-acumulação do filtro base Θ .

Demonstração: Seja $\Theta = \{F_\alpha\}$ um filtro base que δg-converge para $x \in X$ então, para todo U δg-aberto contendo x, existir um $F_{\alpha(x)} \in \Theta$ tal que $F_{\alpha(x)} \subset U$. Pela definição de filtro, para todo $F_\alpha \in \Theta$, $F_{\alpha(x)} \cap F_\alpha \neq \varnothing$. Logo para todo $F_\alpha \in \Theta$, $\varnothing \neq F_{\alpha(x)} \cap F_\alpha \subset U \cap F_\alpha$. Portado, x é um ponto de δg-acumulação do filtro base Θ.

Lema 8.2.1: Sejam $\wp_1$ e $\wp_2$ dois filtros base em X com $\wp_2$ mais fino que $\wp_1$. Então se $\wp_2$ tem um ponto de δg-acumulação em $x \in X$, $\wp_1$ também tem um ponto de δg-acumulação em $x \in X$.

Demonstração: Se $x \in X$ é um ponto de δg-acumulação de $\wp_2$, então para todo $F_i^2 \in \wp_2$ e todo U_x δg-aberto contendo x, $\varnothing \neq U_x \cap F_i^2$. Como $\wp_2$ mais fino que $\wp_1$, $\wp_1 \subseteq \wp_2$, para todo $F_i^1 \in \wp_1 \subseteq \wp_2$ e todo U_x δg-aberto contendo x, $\varnothing \neq U_x \cap F_i^1$. Portanto x é ponto de δg-acumulação de $\wp_1$ sobre X.

Observação 8.2.1: Seja $x \in X$ e $N_\delta(x)$ é o conjunto de todos os conjuntos δg-abertos contendo x, é um filtro base. De fato:

Se $N_x \in N_\delta(x)$, então N_x é um conjunto δg-aberto tal que $x \in N_x$.

Portanto N_x é não vazio.

Se $B_{1_x}, B_{2_x} \in N_\delta(x)$, então $N_x = B_{1_x} \cap B_{2_x}$ é tal que $N_x \in N_\delta(x)$.

Teorema 8.2.2: Um ponto $x \in X$ é um ponto de δg-acumulação de um filtro $\wp$ em X se e somente se existir um filtro em X o que é mais fino que $\wp$ e é δg-convergente para $x \in X$.

Demonstração: Seja $x \in X$ é um ponto de δg-acumulação de um filtro $\wp$ em *X*. Então $\varnothing \neq U_x \cap F$ para todo U_x δg-aberto contendo *x*. Observe que a família $\Theta = \{U_x \cap F \neq \varnothing / U_x \in N_\delta(x) \quad e \quad F \in \wp\}$ onde $N_\delta(x)$ é o conjunto de todos os δg-abertos contendo x, é um filtro base. De fato, $\varnothing \neq U_x \cap F$, $\forall F \in \Theta$ e $\forall U_x \in N_\delta(x)$;

e se $U_x^1 \cap F^1, U_x^2 \cap F^2 \in \Theta$, temos que

$$\left(U_x^1 \cap F^1\right) \cap \left(U_x^2 \cap F^2\right) = \left(U_x^1 \cap U_x^2\right) \cap \left(F^1 \cap F^2\right) \in \Theta,$$

pois $F^1 \cap F^2 \in \wp$ e $U_x^1 \cap U_x^2$ é um conjunto δg-aberto contendo *x*.

Como Θ é um refinamento de $\wp$ e de $N_\delta(x)$, ele é δg-convergente para *x*.

Reciprocamente, suponha que Θ é um refinamento de $\wp$ e que δg-converge para *x*. Então ele tem um ponto de δg-acumulação em x, pelo Teorema 8.2.1. Desde que Θ é mais fino que $\wp$, pelo Lema 8.2.1, temos que *x* é ponto de δg-acumulação de $\wp$.

Teorema 8.2.3: Um filtro base maximal $\wp$ tem um ponto de δg-acumulação em $x \in X$ se e somente se $\wp$ δg-converge para $x \in X$.

Demonstração: Seja $\wp$ um filtro base maximal. Suponha primeiramente que $\wp$ tem um ponto de δg-acumulação em $x \in X$. Então existe um filtro base em X o qual é mais fino que $\wp$ e δg-converge para x. Como o único filtro base mais fino que $\wp$ é o próprio $\wp$, temos que $\wp$ δg-converge para x.

A recíproca segue direto do Teorema 8.2.1.

Teorema 8.2.4: Para um espaço topológico (x, τ), são equivalentes:

1 X é Nearly GO-compacto;

2 Se $\{F_\alpha\}$ é uma família de conjuntos δg-fechados tais que $\bigcap F_\alpha = \varnothing$, então existe uma família finita tal que $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \varnothing$;

3 Todo filtro base tem um ponto de δg-acumulação;

4 Todo filtro base maximal δg-converge para algum ponto $x \in X$.

Demonstração:

$(1) \Rightarrow (4)$: Seja $\wp = \{F_\alpha\}$ um filtro base maximal tal que $\wp$ não δg-convergente para qualquer ponto de X. Então $\wp$ não tem pontos de δg-acumulação. Assim, para todo $x \in X$, existe um conjunto δg-aberto U_x contendo x e $F_{\alpha(x)} \in \wp$, tal que $F_{\alpha(x)} \cap U_x = \varnothing$. Portanto o conjunto dos δg-abertos que satisfaz a propriedade acima $\{U_x / x \in X\}$ cobre X e pela hipótese, existe uma subcobertura finita $\{U_{x_i} / 1 \le i \le n\}$. Como $\wp$ é um filtro base, existe $F_0 \subset \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha(x_i)}$, $F_0 \neq \varnothing$, $F_0 \in \wp$. Mas

$F_0 = F_0 \cap X = F_0 \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(U_{x_i} \cap F_0 \right) = \varnothing$ Contradição. Logo, $\wp$ δg-convergente para x. Pelo teorema anterior, x é um ponto de δg-acumulação de $\wp$.

$(4) \Rightarrow (3)$: Todo filtro base está contido num filtro base maximal.

$(3) \Rightarrow (2)$: Seja $\{F_\alpha\}$ é uma família de conjuntos δg-fechados tais que $\bigcap F_\alpha = \varnothing$. Suponha que para toda subfamília finita de $\{F_\alpha\}$ temos $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \neq \varnothing$.

Então, como $\hbar =$ {toda finita interseção de elementos de $\{F_\alpha\}$} Forma um filtro base, pela hipótese, $\hbar$ possui algum ponto de δg-acumulação $x_0 \in X$. Como $\bigcap F_\alpha = \varnothing$, existe

$\alpha(x_0)$ tal que $x_0 \notin F_{\alpha(x_0)}$. Portanto $x_0 \in X - F_{\alpha(x_0)}$, um conjunto δg-aberto**.** Mas x_0 é um ponto de δg-acumulação de $\hbar$ e $F_{\alpha(x_0)} \in \hbar$ então $F_{\alpha(x_0)} \bigcap \left(X - F_{\alpha(x_0)}\right) \neq \varnothing$.

Absurdo.

(2)$\Rightarrow$(1): Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de X. Então

$\bigcap (X - V_\alpha) = X - \bigcup V_\alpha = \varnothing$. Por hipótese, existe uma família finita tal que

$\varnothing = \bigcap_{i=1}^{n} \left(X - V_{\alpha_i}\right) = X - \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$. Portanto X é Nearly GO-compacto.

CAPÍTULO 9

CONJUNTOS gN-FECHADOS

Propomos neste capítulo a definição de conjuntos gN-fechados que nada mais são que subespaços Nearly GO-compactos relativo a um dado espaço topológico. Relacionamos este conjunto com o já conhecido conjunto N-fechado. Encontramos muitos resultados interessantes sobre este novo conjunto.

9.1 Conjuntos gN-fechados

Definição 9 .1.1 [29]: Seja (X,τ) um espaço topológico, e A um subconjunto de X. Dizemos que A é N-fechado relativo a (X,τ) quando toda cobertura de A por regularmente abertos de X possuir subcobertura finita.

Definição 9.1.2: Sejam (X,τ) um espaço topológico e A um subconjunto de X. Dizemos que A é gN-fechado relativo a (X,τ) quando toda cobertura de a por δg-aberto de X possuir subcobertura finita.

Exemplo 9.1.2: Seja X o conjunto dos números reais e $A=[0,1]$. Considere $\sigma=\{\varnothing,\{U\subseteq X\setminus p\notin U\},X\}$ onde $p\in A$.

Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura de A por δg-abertos de X. Então existe $\alpha(p) \in J$ tal que $p \in V_{\alpha(p)}$. Portanto $\{p\} \subset \operatorname{int} V_{\alpha(p)} = X$. Logo $A \subseteq V_{\alpha(p)}$ e A é gN-fechado relativo a (X,σ).

Observação 9.1.1: Sejam (X,τ) um espaço topológico e A um subconjunto de X. Se *A* é gN-fechado relativo a (X,τ)então *A* é N-fechado relativo a (X,τ) pois todo conjunto regularmente aberto é um conjunto δg-aberto.

Exemplo 9.1.2: A recíproca da observação anterior não é verdadeira. De fato, Considere $X = \{x\} \cup \{x_i \setminus i \in I\}$, $\tau = \{\varnothing, \{x\}, X\}$ e $A = \{x_i \setminus i \in I\}$. O conjunto A é N-fechado relativo a X, pois o único regularmente aberto em X que contém A é o conjunto X. Mas A não é gN-fechado relativo a X pois $\{V_i \setminus i \in I\}$ tal que $V_i = \{x, x_i\}$ é uma cobertura de A por δg-abertos de X que não possui subcobertura de A que seja finita.

Teorema 9.1.1: Em um espaço de Hausdorff, conjunto gN-fechados relativos a (X,τ) são fechados e, portanto g-fechados.

Demonstração: Seja C um subconjunto gN-fechado relativo a (X,τ) e x um elemento que não pertence a C. Como (X,τ) é um espaço de Hausdorff, para cada elemento c pertencente a C, existem U_c, V_c regularmente abertos disjuntos tais que $x \in U_c$, $c \in V_c$ e $U_c \cap \overline{V_c} = \varnothing$. A coleção $\{V_c \setminus c \in C\}$ é uma cobertura δ-aberta relativa a (X,τ) de C. Como todo δ-aberto é δg-aberto e como C é gN-fechado relativo a (X,τ), existem $c_1,\ldots,c_n$ elementos de C tais que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{c_i} = V$. Então $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{c_i} = U$ e $U \cap C = \varnothing$. Observe que U é um conjunto aberto em (X,τ) e $x \in U \subseteq X - C$. Portanto $X - C$ é um conjunto aberto, e então C é um conjunto fechado. Desde que todo conjunto fechado é g-fechado, segue que C é um conjunto g-fechado.

Teorema 9.1.2: A união finita de conjuntos gN-fechados relativos a (X,τ) é um conjunto gN-fechado relativo a (X,τ).

Demonstração: Seja $C = \bigcup\{C_i \setminus i = 1,2,...,n\}$ onde cada C_i é gN-fechado relativo a (X,τ), para i=1,2,...,n. Seja ϑ uma cobertura qualquer δg-aberta relativa a (X,τ) de C. Então ϑ é uma cobertura qualquer δg-aberta relativa a (X,τ) de cada C_i, para $i = 1,2,\cdots,n$. Portanto existe uma subcoleção finita $\{O_j^i \setminus j = 1,2,..., m_i\}$ em ϑ tal que

$C_i \subset \bigcup\{O_j^i \setminus j = 1,2,..., m_i\}$ para cada $i = 1,2,\cdots,n$. Segue então que

$C \subset \bigcup\{O_j^i \setminus j = 1,2,...,m_i; i = 1,2,..., n\}$.

Teorema 9.1.3: Sejam C um conjunto gN-fechado relativo a (X,τ) e B um subconjunto δg-fechado tal que $B \subset C$. Então B é também gN-fechado relativo a (X,τ).

Demonstração: Seja C um subconjunto gN-fechado relativo a τ, e B um subconjunto δg-fechado tal que $B \subset C$. Seja ϑ uma cobertura qualquer δg-aberta relativa a (X,τ) de B. Então $\vartheta \bigcup \{X - B\}$ é uma cobertura δg-aberta relativa a (X,τ) de C. Desde que C é gN-fechado, existe uma subcoleção finita $\{O_j \setminus j = 1,2,..., m\}$ de ϑ tal que

$C \subset \left(\bigcup \{O_j \setminus j = 1,2,...,m\} \right) \cup (X - B)$. Portanto $B \subset \bigcup \{O_j \setminus j = 1,2,...,m\}$,e então B é gN-fechado relativo a (X,τ).

Teorema 9.1.4: Seja B um conjunto gN-fechado relativo a (X,τ) e O um subconjunto δg-aberto tal que $O \subset B$. Então $B - O$ é também gN-fechado relativo a (X,τ).

Demonstração: Seja ϑ uma cobertura qualquer δg-aberta relativa a (X,τ) de $B - O$. Então $\vartheta \cup O$ é uma cobertura δg-aberta relativa a (X,τ) de B. Desde que B é gN-fechado, existe uma subcoleção finita $\{O_j \setminus j = 1,2,...,m\}$ de ϑ tal que

$B - O \subset \bigcup \{O_j \setminus j = 1,2,...,m\}$. Portanto $B - O$ é gN-fechado relativo a (X,τ).

Teorema 9.1.5: Em um espaço de Hausdorff (X,τ), seja B um conjunto gN-fechado relativo a (X,τ). Para qualquer $x \in B$ e qualquer δ-aberto A tal que $x \in A \subset B$, existe um aberto V tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset A$.

Demonstração: Sejam B um subconjunto gN-fechado relativo a (X,τ), A um subconjunto δ-aberto e qualquer $x \in B$ tal que $x \in A \subset B$. Para qualquer $y \in B - A$, como (X,τ) é Hausdorff, existem conjunto regularmente abertos disjuntos U_y e V_y tais que contém y e x, respectivamente. Como cada U_y e V_y são abertos, temos que $\overline{U_y} \cap V_y = \emptyset$. Pelo mesmo motivo de V_y ser aberto em (X,τ) e $x \in V_y$, existe um elemento $G_y \in \tau$ tal que $x \in G_y \subset V_y$. Podemos assumir que $G_y \subset A$. Por outro lado,a coleção $\{U_y \setminus y \in B - A\}$ é uma cobertura δg-aberta (por δg-abertos em (X,τ)) de $B - A$. Pelo teorema anterior

$B-A$ é também gN-fechado relativo a (X,τ), então existem elementos $y_1,....,y_n \in B-A$ tais que $B-A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}U_{y_i}=U$. Observe que $x\in\bigcap_{i=1}^{n}G_{y_i}=G$, $G\bigcap U=\varnothing$ e como U e G são abertos em (X,τ), $\overline{G}\bigcap U=\varnothing$. Além disso, $x\in G\subset A\subset B$ e portanto $\overline{G}\subset\overline{A}\subset\overline{B}=B$ (esta última igualdade deve-se ao Teorema 9.1.1). Assim $B-A\subset B\bigcap U\subset B-\overline{G}$. Logo $x\in G\subset\overline{G}\subset A$.

Teorema 9.1.6: Todo subconjunto δg-fechado de um espaço Nearly GO-compacto (X,τ) é gN-fechado relativo a (X,τ).

Demonstração: Seja um subconjunto B δg-fechado de um espaço Nearly GO-compacto (X,τ). Tome $O=\{O_i \setminus i\in I\}$ uma cobertura de B por δg-abertos em (X,τ). Então $\{X-B\}\bigcup O=\{X-B\}\bigcup\{O_i \setminus i\in I\}$ é uma cobertura δg-aberta de (X,τ) que é um espaço Nearly GO-compacto. Logo existe um subconjunto finito $I_0\subset I$ tal que $X=\{X-B\}\bigcup\left(\bigcup_{i\in I_0}O_i\right)$. Portanto $B\subseteq\left(\bigcup_{i\in I_0}O_i\right)$, isto é, B é um conjunto gN-fechado relativo a (X,τ).

Corolário 9.1.1: Um espaço (X,τ) é Nearly GO-compacto se e somente se todo subconjunto próprio δg-fechado de (X,τ) é gN-fechado.

Demonstração: Suponha que (X,τ) é um espaço Nearly GO-compacto, pelo teorema anterior, segue que todo espaço subconjunto δg-fechado em (X,τ) é gN-fechado relativo a (X,τ).

Reciprocamente, suponha que todo subconjunto δg-fechado em (X,τ) seja gN-fechado relativo a (X,τ). Vamos mostrar que (X,τ) é um espaço Nearly GO-compacto. Para isso, tome $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de (X,τ). Escolha $\alpha_0 \in J$ tal que $V_{\alpha_0} \neq \varnothing$. Então $K = X - V_{\alpha_0} \neq X$ é um subconjunto próprio δg-fechado em (X,τ). Pela hipótese, *K* é gN-fechado relativo a (X,τ). Como $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J - \{\alpha_0\}\}$ uma cobertura δg-aberta relativa de *K*. Então, existe $J_0 \subset J - \{\alpha_0\}$ finito tal que $K \subseteq \left(\bigcup_{i\in J_0} V_\alpha\right)$.

Então $X = V_{\alpha_0} \cup K \subseteq V_{\alpha_0} \cup \left(\bigcup_{i\in J_0} V_\alpha\right) = \left(\bigcup_{i\in J_0 \cup \{\alpha_0\}} V_\alpha\right)$

Portanto (X,τ) é um espaço Nearly GO-compacto.

Teorema 9.1.7: Sejam (X,τ) um espaço de Hausdorff Nearly GO-compacto e *M* um subconjunto gN-fechado relativo a (X,τ) e $k \in X$ tal que $k \in X - M$. Então podemos encontrar vizinhanças de *k* e *M*, respectivamente, cujos fechos são distintos.

Demonstração: Sejam (X,τ) um espaço de Hausdorff Nearly GO-compacto e *M* um subconjunto gN-fechado relativo a (X,τ) e $k \in X$ tal que $k \in X - M$. Para cada $m \in M$, como X é um espaço de Hausdorff , existem regularmente abertos U_m e V_m disjuntos tais que $m \in V_m$ e $k \in U_m$. A coleção $\{V_m \setminus m \in M\}$ é uma cobertura de M por δg-abertos em X. Como M é gN-fechado relativo a (X,τ), existem $m_1,\ldots,m_n$ pertencentes a M tais que $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{m_i} = V$. Defina $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{m_i}$ donde $k \in U$ e $U \cap V = \varnothing$. Como ambos U e V são abertos, $U \cap \overline{V} = \varnothing$. Vamos mostrar que $\overline{V}$ é gN-fechado. Como $\overline{V}$ é regularmente fechado, pelo Teorema 9.1.6, $\overline{V}$ é um conjunto gN-fechado relativo a (X,τ), com $k \in X - \overline{V}$. Para cada $v \in \overline{V}$, como X é um espaço de

Hausdorff , existem regularmente abertos Z_v e W_v disjuntos tais que $k \in Z_v$ e $v \in W_v$. A coleção $\{W_v \setminus v \in \overline{V}\}$ é uma cobertura de $\overline{V}$ por δg-abertos em X. Como $\overline{V}$ é gN-fechado relativo a (X,τ), existem $v_1,...,v_r$ pertencentes a $\overline{V}$ tais que $\overline{V} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} W_{v_i} = W$. Defina $Z = \bigcap_{i=1}^{r} Z_{v_i}$ donde $k \in Z$ e $Z \cap W = \varnothing$. Como ambos Z e W são abertos, $W \cap \overline{Z} = \varnothing$. Assim $\overline{V} \cap \overline{Z} \subset W \cap \overline{Z} = \varnothing$. Logo, existem vizinhanças V e W com fecho disjuntos tais que $k \in Z$ e $M \subset V$.

Corolário 9.1.2: Sejam (X,τ) um espaço de Hausdorff Nearly GO-compacto, *K* e *M* subconjuntos gN-fechados relativos a (X,τ). Então podemos encontrar vizinhas de *K* e *M*, respectivamente, cujos fechos são distintos.

Demonstração: Sejam (X,τ) um espaço de Hausdorff Nearly GO-compacto, *K* e *M* subconjuntos gN-fechados relativos a (X,τ). Para cada $m \in M$, pelo teorema anterior, existem conjuntos regularmente abertos U_m e V_m cujo fecho são disjuntos tais que $m \in V_m$ e $K \subseteq U_m$. A coleção $\{V_m \setminus m \in M\}$ é uma cobertura de M por δg-abertos em X. Como M é gN-fechado relativo a (X,τ), existem $m_1,...,m_n$ pertencentes a M tais que $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{m_i} = V$. Defina $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{m_i}$ donde $K \subseteq U$ e $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$. Logo U e V são os abertos que procurávamos.

Lema 9.1.1: Se A é um subconjunto gN-fechado relativo a um espaço de Hausdorff (X,τ), então A é um subespaço GO-compacto relativo a (X,τ).

Demonstração: Sejam (X,τ) um espaço de Hausdorff e A um subconjunto gN-fechado relativo a (X,τ). Considere $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura de A por g-abertos em (X,τ), então $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura de A por g-abertos em (X,τ^*). Como $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura de A, $\forall x \in A$, $\exists \alpha(a) \in J$ tal que $x \in V_{\alpha(x)}$, ou seja, $\{x\} \subseteq V_{\alpha(x)}$ e portanto $\{x\} \subseteq \operatorname{int}_\delta V_{\alpha(x)}$ (pois (X,τ^*) também é um espaço de Hausdorff e então, todo subconjunto finito é fechado). Assim $\{\operatorname{int}_\delta V_{\alpha(x)} \setminus x \in A\}$ é uma cobertura de A. Mas $\operatorname{int}_\delta V_{\alpha(x)}$ é a união de todos regularmente abertos em (X,τ) contidos em $V_{\alpha(x)}$, ou seja, $\operatorname{int}_\delta V_{\alpha(x)} = \bigcup_{i \in I_{\alpha(x)}} B_i$ onde, para cada $i \in I_{\alpha(x)}$, B_i é um conjunto regularmente aberto em (X,τ) e contidos em $V_{\alpha(x)}$. Logo $\{B_i \setminus i \in I_{\alpha(x)}, x \in A\}$ é uma cobertura de A por conjuntos regularmente abertos em (X,τ). Como regularmente aberto implica em δg-aberto, segue que $\{B_i \setminus i \in I_{\alpha(x)}, x \in A\}$ é uma cobertura de A por δg-abertos em (X,τ). Como A é um subconjunto gN-fechado em (X,τ), existe um numero finito de $i \in I_{\alpha(x)}$ com x variando em A, digamos $i_1,\cdots,i_n \in \bigcup_{x \in A} I_{\alpha(x)}$ tais que $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_{i_j}$. Agora, escolha $x_1,\cdots,x_n \in A$ tais que $x_j \in B_j \subseteq \bigcup_{i \in I_{\alpha(x_j)}} B_i \subseteq \operatorname{int}_\delta\left(V_{\alpha(x_{ij})}\right)$ para todo $j = 1,2,\cdots,n$. Portanto $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{int}_\delta\left(V_{\alpha(x_j)}\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_{\alpha(x_j)}$. Segue então, que A é um subconjunto GO-compacto relativo a (X,τ).

Lema 9.1.2: Se A é um subconjunto gN-fechado relativo a um espaço de Hausdorff (X,τ), então A é um subespaço GO-compacto relativo a (X,τ^*).

Demonstração: Sejam (X,τ) um espaço de Hausdorff e A um subconjunto gN-fechado relativo a (X,τ). Considere $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura de A por g-abertos em (X,τ^*). Como $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura de A, $\forall x \in A$, $\exists \alpha(a) \in J$ tal que $x \in V_{\alpha(x)}$, ou seja, $\{x\} \subseteq V_{\alpha(x)}$ e portanto $\{x\} \subseteq \operatorname{int}_\delta V_{\alpha(x)}$(pois (X,τ^*) também é um espaço de Hausdorff e então, todo subconjunto finito é fechado). Assim $\{\operatorname{int}_\delta V_{\alpha(x)} \setminus x \in A\}$ é uma cobertura de A. Mas $\operatorname{int}_\delta V_{\alpha(x)}$ é a união de todos regularmente abertos em (X,τ) contidos em $V_{\alpha(x)}$, ou seja, $\operatorname{int}_\delta V_{\alpha(x)} = \bigcup_{i \in I_{\alpha(x)}} B_i$ onde, para cada $i \in I_{\alpha(x)}$, B_i é um conjunto regularmente aberto em (X,τ) e contidos em $V_{\alpha(x)}$. Logo $\{B_i \setminus i \in I_{\alpha(x)}, x \in A\}$ é uma cobertura de A por conjuntos regularmente abertos em (X,τ). Como regularmente aberto implica em δg-aberto, segue que $\{B_i \setminus i \in I_{\alpha(x)}, x \in A\}$ é uma cobertura de A por δg-abertos em (X,τ). Desde que A é um subconjunto gN-fechado em (X,τ), existe um numero finito de $i \in I_{\alpha(x)}$ com x variando em A, digamos $i_1,\cdots,i_n \in \bigcup_{x \in A} I_{\alpha(x)}$ tais que $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_{i_j}$. Agora, escolha $x_1,\cdots,x_n \in A$ tais que $x_j \in B_j \subseteq \bigcup_{i \in I_{\alpha(x_j)}} B_i \subseteq \operatorname{int}_\delta\left(V_{\alpha(x_{ij})}\right)$ para todo $j = 1,2,\cdots,n$.

Portanto $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{int}_\delta\left(V_{\alpha(x_j)}\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_{\alpha(x_j)}$. Segue então que A é um subconjunto GO-compacto relativo a (X,τ^*).

Corolário 9.1.3: Seja (X,τ) um espaço Hausdorff e $A_i \subset X$ não vazio e gN-fechado relativo a (X,τ), para cada $i \in I$. Então $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ é também gN-fechado.

Demonstração: Como (X,τ) é um espaço de Hausdorff e, para cada $i \in I$, A_i é um subconjunto gN-fechado relativo a (X,τ) então, para cada $i \in I$, A_i é um subconjunto

GO-compacto relativo a (X, τ^*), pelo lema anterior. Daí segue que A_i é um conjunto fechado em (X, τ^*) (Corolário 5.1.2). Como a interseção arbitraria de conjuntos fechados é um conjunto fechado, temos que A é um subconjunto fechado em (X, τ^*). Logo A é um subconjunto δg-fechado em (X, τ). Como $A \subseteq A_i$ e A_i é um subconjunto gN-fechado relativo a (X,τ), pelo Teorema 9.1.3, a também é um subconjunto gN-fechado em (X,τ).

Teorema 9.1.8: Um subconjunto A de um espaço semi-regular (X,τ) é gN-fechado relativo a (X,τ) se e somente se A é GO-compacto relativo a (X,τ).

Demonstração: Se (X,τ) é um espaço semi-regular, temos que $\tau = \tau^*$.
Sejam A um subconjunto de (X,τ) tal que A é gN-fechado relativo a (X,τ), e $\{V_\alpha \setminus \alpha \in j\}$ uma cobertura de A por g-abertos em (X,τ). Como (X,τ) é semi-regular, $\{V_\alpha \setminus \alpha \in j\}$ uma cobertura de A por δg-abertos em (X,τ). Então, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $A \subset \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$. Portanto a é GO-compacto relativo a (X,τ).

Reciprocamente, suponha que A é GO-compacto relativo a (X,τ). Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in j\}$ uma cobertura de A por δg-abertos em (X,τ). Como (X,τ) é semi-regular, $\{V_\alpha \setminus \alpha \in j\}$ uma cobertura de A por g-abertos em (X,τ). Então, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $A \subset \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$.

Portanto a é gN-fechado relativo a (X,τ).

Teorema 9.1.9: Seja A um subconjunto aberto e fechado de um espaço (X,τ). Então A é gN-fechado relativo a (X,τ) se e somente se A é Nearly GO-compacto como subespaço.

Demonstração: Seja A um subconjunto aberto e fechado de um espaço X. Suponha que A é gN-fechado relativo a (X,τ). Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de A. Vamos mostrar que $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura de A por δg-abertos em (X,τ). Para isso tome F fechado em (X,τ) tal que $F \subset V_\alpha$. Desde que $V_\alpha \subset A$, segue que $F = F \cap A$ é fechado em A tal que $F = F \cap A \subset V_\alpha \cap A \subset V_\alpha$. Como V_α é δg-aberto em A, temos que $F \subset \operatorname{int}_{\delta_A} V_\alpha$. Portanto, existe U um conjunto regularmente aberto em A tal que $F \subset U \subset V_\alpha$. Como $A = \operatorname{int}_X \overline{A}$, temos que.

$U = \operatorname{int}_A(cl_A U) = \operatorname{int}_X(cl_A U) = \operatorname{int}_X(\overline{U}) \cap A = \operatorname{int}_X(\overline{U})$, pois $U \subseteq A$ e $\operatorname{int}_X \overline{U} \subseteq \operatorname{int}_X \overline{A} = A$

Portanto U é um regularmente aberto em (X,τ) tal que $F \subset U \subset V_\alpha$. Logo $F \subset \operatorname{int}_{\delta_X} V_\alpha$ e $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura de A por δg-abertos em (X,τ). Assim,existe $J_0 \subset J$ finito tal que $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$. Então A é Nearly GO-compacto como subespaço.

Reciprocamente, suponha que A é Nearly GO-compacto como subespaço.Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura de A por δg-abertos em (X,τ). Vamos mostrar que $\{V_\alpha \cap A \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura δg-aberta de A Seja F um conjunto fechado em A tal que $F \subseteq V_\alpha \cap A$. Como A é fechado em (X,τ), F também é fechado em (X,τ) e então

$F \subseteq \operatorname{int}_{\delta_X}(V_\alpha) \cap A = \operatorname{int}_{\delta_X}(V_\alpha \cap A)$ (pois $A = \operatorname{int}_X \overline{A} = \operatorname{int}_{\delta_X} A$). Então, existe um regularmente aberto U em (X,τ) tal que $F \subset U \subseteq V_\alpha \cap A$. Agora,

$\operatorname{int}_A(cl_A(U \cap A)) = \operatorname{int}_X(cl_A(U \cap A)) = \operatorname{int}_X(\overline{U} \cap A) = \operatorname{int}_X(\overline{U}) \cap A = U \cap A$. Portanto $U \cap A$ é um conjunto regularmente aberto em A e $F = F \cap A \subset U \cap A \subset U \subset V_\alpha \cap A$. Portanto $F \subseteq \operatorname{int}_{\delta_A}(V_\alpha \cap A)$ e $\{V_\alpha \cap A \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura δg-aberta de A. Pela hipótese, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0}(V_\alpha \cap A) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$. Portanto A é um subconjunto gN-fechado relativo a (X,τ).

Teorema 9.1.10: Seja A um subconjunto regularmente aberto de um espaço Se A é gN-fechado relativo a (X,τ) então A é Nearly GO-compacto como subespaço.

Demonstração: Seja A um subconjunto regularmente aberto de um espaço (X,τ). Suponha que A é gN-fechado relativo a (X,τ). Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de A. Vamos mostrar que $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura de A por δg-abertos em (X,τ). Para isso tome F fechado em (X,τ) tal que $F \subset V_\alpha$. Desde que $V_\alpha \subset A$, segue que $F = F \cap A$ é fechado em A tal que $F = F \cap A \subset V_\alpha \cap A \subset V_\alpha$. Como V_α é δg-aberto em A, temos que $F \subset \operatorname{int}_{\delta_A} V_\alpha$. Agora, seja U um conjunto regularmente aberto em A tal que $F \subset U \subset V_\alpha$.
Como $A = \operatorname{int}_X \overline{A} = \operatorname{int}_{\delta_X} A$, temos que.

$U = \operatorname{int}_A(cl_A U) = \operatorname{int}_X(cl_A U) = \operatorname{int}_X(\overline{U}) \cap A = \operatorname{int}_X(\overline{U})$,

pois $U \subseteq A$ e $\operatorname{int}_X \overline{U} \subseteq \operatorname{int}_X \overline{A} = A$

Portanto U é um regularmente aberto em (X,τ) tal que $F \subset U \subset V_\alpha$. Logo $F \subset \operatorname{int}_{\delta_X} V_\alpha$ e $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura de A por δg-abertos em (X,τ). Assim,existe $J_0 \subset J$ finito tal que $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$. Então A é Nearly GO-compacto como subespaço.

Teorema 9.1.11: Seja $S \subset X$ aberto e fechado em (X,τ) e seja $A \subseteq S$. Então A é gN-fechado relativo a X se e somente se A é gN-fechado relativo a S.

Demonstração: Sejam A um subconjunto gN-fechado relativo a (X,τ) e $\{V_\alpha \setminus \alpha \in j\}$ é uma cobertura de A por δg-abertos em S (S munido com a topologia do subespaço). Vamos mostrar que $\{V_\alpha \setminus \alpha \in j\}$ uma cobertura de A por δg-abertos de (X,τ). Para isso tome F fechado em (X,τ) tal que $F \subset V_\alpha$. Desde que $V_\alpha \subset A \subset S$, segue que $F = F \cap S$ é fechado em S tal que $F = F \cap S \subset V_\alpha \cap S \subset V_\alpha$. Como V_α é δg-aberto em S, temos que $F \subset \operatorname{int}_{\delta_S} V_\alpha$. Portanto, existe U um conjunto regularmente aberto em S tal que

$F \subset U \subset V_\alpha$. Como $S = \operatorname{int}_X \overline{S}$, temos que.

$U = \operatorname{int}_S(cl_S U) = \operatorname{int}_X(cl_S U) = \operatorname{int}_X(\overline{U}) \cap S = \operatorname{int}_X(\overline{U})$, pois $U \subseteq S$ e $\operatorname{int}_X \overline{U} \subseteq \operatorname{int}_X \overline{S} = S$

Portanto U é um regularmente aberto em (X,τ) tal que $F \subset U \subset V_\alpha$. Logo $F \subset \operatorname{int}_{\delta_X} V_\alpha$ e $\{V_\alpha \setminus \alpha \in j\}$ uma cobertura de A por δg-abertos em (X,τ). Assim,existe $J_0 \subset J$ finito tal que $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$. Então A é gN-fechado relativo a (X,τ).

Reciprocamente, suponha que A é gN-fechado relativo a S (com S munido da topologia do subespaço). Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in j\}$ é uma cobertura de A por δg-abertos em (X,τ). Vamos mostrar que $\{V_\alpha \cap S \setminus \alpha \in j\}$ é uma cobertura de A por δg-abertos em S. Seja F um conjunto fechado em S tal que $F \subseteq V_\alpha \cap S$. Como S é fechado em (X,τ), F também é fechado em (X,τ) e então $F \subseteq \operatorname{int}_{\delta_X}(V_\alpha) \cap S = \operatorname{int}_{\delta_X}(V_\alpha \cap S)$ (pois $S = \operatorname{int}_X \overline{S} = \operatorname{int}_{\delta_X} S$). Então, existe um regularmente aberto U em (X,τ) tal que $F \subset U \subseteq V_\alpha \cap S$. Agora, $\operatorname{int}_S(cl_S(U \cap S)) = \operatorname{int}_X(cl_S(U \cap S)) = \operatorname{int}_X(\overline{U} \cap S) = \operatorname{int}_X(\overline{U}) \cap S = U \cap S$. Portanto $U \cap S$ é um conjunto regularmente aberto em S e $F = F \cap S \subset U \cap S \subset U \subset V_\alpha \cap S$. Portanto $F \subseteq \operatorname{int}_{\delta_A}(V_\alpha \cap S)$ e $\{V_\alpha \cap S \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura δg-aberta de A. Pela hipótese, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0}(V_\alpha \cap S) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$. Portanto A é um subconjunto gN-fechado relativo a (X,τ).

Teorema 9.1.12: Seja $S \subset X$ regularmente aberto em (X,τ) e seja $A \subseteq S$. Então A é gN-fechado relativo a X então A é gN-fechado relativo a S.

Demonstração: Sejam A um subconjunto gN-fechado relativo a (X,τ) e $\{V_\alpha \setminus \alpha \in j\}$ é uma cobertura de A por δg-abertos em S (S munido com a topologia do subespaço). Vamos mostrar que $\{V_\alpha \setminus \alpha \in j\}$ uma cobertura de A por δg-abertos em (X,τ). Para isso tome F fechado em (X,τ) tal que $F \subset V_\alpha$. Desde que $V_\alpha \subset A \subset S$, segue que $F = F \cap S$

é fechado em S tal que $F = F \cap S \subset V_\alpha \cap S \subset V_\alpha$. Como V_α é δg-aberto em S, temos que $F \subset \operatorname{int}_{\delta_S} V_\alpha$. Agora, seja U um conjunto regularmente aberto em S tal que $F \subset U \subset V_\alpha$. Como $S = \operatorname{int}_X \overline{S}$, temos que. $U = \operatorname{int}_S(cl_S U) = \operatorname{int}_X(cl_S U) = \operatorname{int}_X(\overline{U}) \cap S = \operatorname{int}(\overline{U})$, pois $U \subseteq S$ e $\operatorname{int}_X \overline{U} \subseteq \operatorname{int}_X \overline{S} = S$

Portanto U é um regularmente aberto em (X,τ) tal que $F \subset U \subset V_\alpha$. Logo $F \subset \operatorname{int}_{\delta_X} V_\alpha$ e $\{V_\alpha \setminus \alpha \in j\}$ uma cobertura de A por δg-abertos em (X,τ). Assim,existe $J_0 \subset J$ finito tal que $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$. Então A é gN-fechado relativo a (X,τ).

Teorema 9.1.13: A interseção de um conjunto gN-fechado A e um conjunto δg-fechado B é um conjunto gN-fechado relativo a (X,τ).

Demonstração: Seja A um conjunto gN-fechado e B um conjunto δg-fechado B. Queremos mostrar que $A \cap B$ é um conjunto gN-fechado. Para isso, considere $V = \{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura de $A \cap B$ por δg-abertos de X. Então $\{X - B\} \cup V$ é uma cobertura de A por δg-abertos em X. Como A é gN-fechado relativo a (X,τ), existe $J_0 \subset J$ finito tal que $A \subseteq \left(\bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha\right) \cup (X - B)$.

Portanto

$$A \cap B \subseteq \left[\left(\bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha\right) \cup (X - B)\right] \cap B \subset \left(\bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha\right).$$

Daí segue que $A \cap B$ é gN-fechado relativo a (X,τ).

Teorema 9.1.14: Seja A um subconjunto de um espaço X. Se A é GO-compacto relativo a (X,τ^*) então A é gN-fechado relativo a (X,τ).

Demonstração: Seja $V = \{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura de A por δg-abertos em (X,τ). Como todo δg-abertos em (X,τ) é g-aberto em (X,τ^*), e como A é GO-compacto relativo a (X,τ^*), existe $J_0 \subset J$ finito tal que $A \subseteq \left(\bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha \right)$. Portanto A é gN-fechado relativo a (X,τ).

Corolário 9.1.4: Seja A um subconjunto de um espaço de Hausdorff X. O subespaço A é GO-compacto relativo a (X,τ^*) se e somente se A é gN-fechado relativo a (X,τ).

Demonstração: Seja A um subconjunto do espaço de Hausdorff X. Suponha primeiramente que A é GO-compacto relativo a (X,τ^*), segue do teorema anterior que A é gN-fechado relativo a (X,τ).
Reciprocamente, suponha que A é gN-fechado relativo a um espaço de Hausdorff (X,τ), pelo Lema 9.1.2 segue que A é GO-compacto relativo a (X,τ^*).

Observação 9.1.2: De acordo com o teorema anterior segue que se (X,τ) é um espaço de Hausdorff, então X é Nearly GO-compacto se e somente se (X,τ^*) é GO-compacto.

Lema 9.1.3: Seja (X,τ) um espaço de Hausdorff. Então para qualquer subconjunto A gN-fechado relativo a (X,τ) e qualquer ponto $y \in X - A$, existem disjuntos regularmente abertos U e V tais que $y \in U$ e $A \subset V$.

Demonstração: Sejam (X,τ) um espaço de Hausdorff, A um subconjunto gN-fechado relativo a (X,τ) e qualquer ponto $y \in X - A$ Como (X,τ) é um espaço de Hausdorff, para cada $x \in A$ existem regularmente abertos e disjuntos U_x e V_x tais que $x \in V_x$ e $y \in U_x$. A família $V = \{V_x \setminus x \in A\}$ é uma cobertura de A por δg-abertos em (X,τ). Como A é gN-fechado relativo a (X,τ), existem $x_1,...,x_n$ pertencente a A tais que $A \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}\right) = V$. Defina $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$ e observe que $y \in U$. Além disso, $V \cap U = \varnothing$ e tanto U quanto V são regularmente abertos em (X,τ).

Corolário 9.1.5: Todo subconjunto gN-fechado de um espaço de Hausdorff (X,τ) é fechado no espaço (X,τ^*)

Demonstração: Seja A um subconjunto gN-fechado no espaço Hausdorff (X,τ). Então, para qualquer $x \in X - A$, pelo lema anterior, existem disjuntos regularmente abertos U e V tais que $x \in U$ e $A \subset V$. Logo, $U \subset X - V \subset X - A$. Como U é regularmente aberto em (X,τ), segue que U é aberto em (X,τ^*).
Isto implica que $X - A$ é aberto em (X,τ^*), portanto A é fechado em (X,τ^*).

Teorema 9.1.15: **S**ejam (X,τ) um espaço topológico, e A um subconjunto de X. Se A é αg-regular e gN-fechado relativo a (X,τ), então $\overline{A}$ é gN-fechado relativo a (X,τ).

Demonstração: **S**ejam (X,τ) um espaço topológico, e A um subconjunto de X. tal que A é αg-regular e gN-fechado relativo a (X,τ). Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de $\overline{A}$. Então para cada $x \in A$, existe um $\alpha(x) \in J$ tal que $x \in V_{\alpha(x)}$. Como A é αg-regular, pelo Teorema 3.2.11, existe um regularmente aberto U_x tal que

$x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq V_{\alpha(x)}$.

Então $\{U_x \setminus x \in A\}$ é uma cobertura regularmente aberta de A o qual è um conjunto gN-fechado relativo a (X,τ). Logo existem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos de A tais que

$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha(x_i)}$. Portanto $\overline{A} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha(x_i)}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{\alpha(x_i)}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha(x_i)}$. Então $\overline{A}$ é gN-fechado.

Teorema 9.1.16: Seja (X,τ) um espaço topológico, e A um subconjunto de X. O subconjunto A é αg-regular e Almost GO-compacto relativo a (X,τ) se e somente se A é gN-fechado relativo a (X,τ).

Demonstração: Seja A um subconjunto αg-regular em (X,τ).

Suponha que A é almost GO-compacto relativo a (X,τ)Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de A. Então para cada $x \in A$, existe um $\alpha(x) \in J$ tal que $x \in V_{\alpha(x)}$. Como A é αg-regular, existe um aberto U_x tal que $x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq V_{\alpha(x)}$.

Então $\{U_x \setminus x \in A\}$ é uma cobertura aberta de A o qual é um subconjunto Almost GO-compacto relativo a (X,τ). Logo existem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos de a tais que

$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}}$. Portanto $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha(x_i)}$. Então A é gN-fechado relativo a (X,τ).

Reciprocamente, suponha que A é gN-fechado relativo a (X,τ)., e seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura g-aberta de A. Então para cada $x \in A$, existe um $\alpha(x) \in J$ tal que $x \in V_{\alpha(x)}$.

Como A é αg-regular, existe um regularmente aberto U_x tal que

$x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq V_{\alpha(x)}$.

Então $\{U_x \setminus x \in A\}$ é uma cobertura regularmente aberta de A o qual é um conjunto gN-fechado relativo a (X,τ). Logo existem $x_1, x_2, ..., x_n$ elementos de a tais que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}}$.

Portanto $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha(x_i)}$. Então A é GO-compacto relativo a (X,τ).

Teorema 9.1.17: Suponha que em um espaço (X,τ) exista um subconjunto A denso em X e αg-regular. Se A é gN-fechado relativo a (X,τ), X é um espaço Nearly GO-compacto.

Demonstração: Sejam $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de (X,τ) e A um subconjunto denso em (X,τ), αg-regular e gN-fechado relativo a (X,τ). Então, para cada $x \in A$ existe um $\alpha(x) \in J$ tal que $x \in V_{\alpha(x)}$. Como A é αg-regular, existe um aberto $U_{\alpha(x)}$ em (X,τ), tal que $x \in U_{\alpha(x)} \subset \overline{U_{\alpha(x)}} \subset V_{\alpha(x)}$.Agora considere $W_{\alpha(x)} = \operatorname{int} \overline{U_{\alpha(x)}}$ que é regularmente aberto em (X,τ), então
$x \in U_{\alpha(x)} \subset W_{\alpha(x)} = \operatorname{int} \overline{U_{\alpha(x)}} \subseteq \overline{W_{\alpha(x)}} = \overline{\operatorname{int} \overline{U_{\alpha(x)}}} \subset \overline{U_{\alpha(x)}} \subset V_{\alpha(x)}$, ou seja, existe um regularmente aberto $W_{\alpha(x)}$ tal que $x \in W_{\alpha(x)} \subset \overline{W_{\alpha(x)}} \subset V_{\alpha(x)}$.
A cobertura $\{W_{\alpha(x)} \setminus x \in A\}$ de A é uma cobertura por δg-abertos de (X,τ), como A é gN-fechado relativo a (X,τ), existem $x_1, \cdots, x_n \in A$ tais que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_{\alpha(x_i)}$. Portanto

$\overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha(x_i)}$. Então $\overline{A}$ é gN-fechado relativo a (X,τ).

CAPÍTULO 10

FUNÇÕES CONTÍNUAS ASSOCIADAS ÀS TEORIAS ANTERIORES

Neste último capítulo definimos as funções g-contínuas, g-irresolutes δg-contínuas e δg-irresolutes. Encontramos algumas relações entre elas, bem como relações entre os espaços compactos, GO-compactos, Nearly-compactos, Nearly GO-compactos, Almost-compactos, Almost GO-compactos, Weakly-compactos, Weakly GO-compactos e espaços $T_{\frac{3}{4}}$ por estas funções.

10.1 Funções contínuas associadas às teorias anteriores.

Definição 10.1.1 [6]: Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é g-contínua se e somente se $f^{-1}(V)$ é g-aberto para todo aberto $V \subset Y$.

Observação 10.1.1: Seja $f : X \to Y$ uma função contínua, então *f* é uma função g-contínua. De fato, seja $V \subset Y$ aberto em Y. Como *f* é contínua, $f^{-1}(V)$ é aberto em X e portanto $f^{-1}(V)$ é g-aberto em X. Logo, *f* é uma função g-contínua de X em Y.
A recíproca não é verdadeira, ou seja, se $f : X \to Y$ é uma função g-contínua de X em Y não implica que *f* seja uma função contínua. Como contra-exemplo, sejam $X = \{a,b,c\}$, $\tau = \{\varnothing, \{a,b\}, X\}$, e $\sigma = \{\varnothing, \{b\}, X\}$. A função identidade $f : (X,\tau) \to (X,\sigma)$ é g-contínua.

De fato, único subconjunto aberto em (X,σ) é $\{b\}$, e $f^{-1}(\{b\}) = \{b\}$, que é g-aberto em (X,τ) pois o único fechado contido em $\{b\}$ é o conjunto vazio. Logo *f* é uma função g-contínua. Mas *f* não é contínua pois $f^{-1}(\{b\}) = \{b\}$ que não é aberto em (X,τ).

Definição 10.1.2 [11]: Uma função $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ é chamada δg-contínua quando $f^{-1}(V)$ é δg-aberto em (Y,σ) para cada conjunto aberto V em (X,τ).

Teorema 10.1.1: Seja $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ uma função δg-contínua. Então, para cada $x\in X$ e cada δ-aberto *V* contendo $f(x)$, existe um δg-aberto U contendo *x* tal que $f(U)\subseteq V$.

Demonstração: Sejam $x\in X$ e V um conjunto δ-aberto contendo $f(x)$. Como todo δ-aberto é um conjunto aberto e *f* é uma função δg-contínua, $f^{-1}(V)$ é δg-aberto contendo *x*. Tome $U = f^{-1}(V)$, então existe um δg-aberto U contendo *x* tal que $f(U)\subseteq V$.

Definição 10.1.3 [11]: Uma função $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ é chamada δ-contínua quando $f^{-1}(V)$ é δ-aberto em (Y,σ) para cada conjunto δ-aberto V em (X,τ).

Definição 10.1.4 [12]: Uma função $f:(X,\tau)\to(Y,\theta)$ é dita ser g-irresulute se e somente se $f^{-1}(V)$ for g-aberto para todo g-aberto $V\subset Y$.

Teorema 10.1.2: Seja $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ uma função δ-contínua. Então, para cada subconjunto *V* de X temos que $f(cl_\delta V)\subseteq cl_\delta(f(V))$.

Demonstração: Sejam V um subconjunto de X e $x \in cl_\delta V$. Então para cada vizinhança U de $f(x)$, $f^{-1}(U)$ é um δ-aberto contendo x. Logo $f^{-1}(U) \cap V \neq \varnothing$ e portanto $U \cap f(V) \neq \varnothing$. Daí segue que $f(x) \in cl_\delta(f(V))$ e $f(cl_\delta V) \subseteq cl_\delta(f(V))$..

Observação 10.1.2: Se uma função $f:(X,\tau) \to (Y,\theta)$ é g-irresolute, então *f* é g-contínua. De fato, seja $V \subset Y$ um aberto (portanto g-aberto), como *f* é g-irresolute, $f^{-1}(V)$ é g-aberto em X. Logo, f é uma função g-contínua. Mas a recíproca não é verdadeira, ou seja, não é verdade que se uma função é g-contínua então ela será g-irresolute. Como contra-exemplo temos: considere $X = \{a,b,c\}$, $\tau = \{\varnothing, \{a,b\}, X\}$, e $\sigma = \{\varnothing, \{b\}, X\}$. A função identidade $f:(X,\tau) \to (X,\sigma)$ é g-contínua. De fato, único subconjunto aberto em (X,σ) é $\{b\}$, e $f^{-1}(\{b\}) = \{b\}$, que é g-aberto em (X,τ) pois o único fechado contido em $\{b\}$ é o conjunto vazio. Logo *f* é uma função g-contínua. Mas não é g-irresolute. De fato, $\{c\}$ é δg-aberto em (X,σ) pois o único fechado contido nele é o conjunto vazio, mas $f^{-1}(\{c\}) = \{c\}$ que é fechado em (X,τ) e portanto $f^{-1}(\{c\}) = \{c\}$ não é . δg-aberto em (X,τ).

Definição 10.1.5 [11]: Uma função $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ é chamada δg-irresolute se e somente se $f^{-1}(V)$ é δg-aberto em (Y,σ) para cada conjunto δg-aberto V em (X,τ).

Teorema 10.1.3 [11]: Se $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ é um função δg-contínua, então *f* é g-contínua.

Demonstração: Seja V um subconjunto fechado em (Y,σ) . Como *f* é uma função δg-contínua, $f^{-1}(V)$ é δg-fechado em (X,τ). Então $f^{-1}(V)$ é g-fechado em (X,τ). Portanto $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ é um função g-contínua.

Exemplo 10.1.1: Seja (X,τ) onde X é o conjunto dos números reais e τ a topologia gerada por um ponto, isto é, os conjuntos abertos não vazios são aqueles que contém um ponto fixado *x*, por exemplo $x=0$. Considere também (X,σ), onde σ é a topologia co-irracinal sobre X, isto é, $U\in\sigma$ se e somente se $X-U$ é um subconjunto dos números irracionais. Tome $f:(X,\tau)\to(X,\sigma)$ a função identidade. A função *f* é g-contínua. De fato, sejam U aberto em (X,σ), então $f^{-1}(X-U)$, é um subconjunto dos números irracionais, então $f^{-1}(X-U)$ não contém $x=0$ e portanto $f^{-1}(X-U)$ é fechado em (X,τ),portanto $f^{-1}(U)$ é aberto em (X,τ). Daí segue que *f* é uma função continua, ou seja, *f* é uma função g-contínua.
Mas *f* não é uma função δg-contínua. De fato, tome $U\in\sigma$ tal que $X-U$ seja igual ao conjunto P dos números irracionais . Assim $f^{-1}(X-U)=P$ é o conjunto dos números irracionais é fechado em (X,τ), O subconjunto P não é δg-fechado pois , como(X,τ^*) é o espaço indiscreto, ou seja, $\tau^*=\{\varnothing,X\}$, temos que $P\subset P\bigcup\{0\}$, mas $cl_\delta P=X\not\subset P\bigcup\{0\}$. Portanto *f* não é uma função δg-contínua.

Teorema 10.1.4: Sejam (X,τ) um espaço GO-compacto e $f:(X,\tau)\to(Y=f(X),\sigma)$ uma aplicação g-contínua e . Então $(Y=f(X),\sigma)$é compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha\setminus\alpha\in J\}$ uma cobertura aberta de $Y=f(X)$. Como *f* é uma função g-contínua, pelo teorema anterior, $\{f^{-1}(V_\alpha)\setminus\alpha\in J\}$ é uma cobertura g-aberta de (X,τ). Como (X,τ) é um espaço GO-compacto, existe $J_0\subset J$ finito tal que $X=\bigcup_{\alpha\in J_0}f^{-1}(V_\alpha)$.

Assim, $Y = f(X) = f\left(\bigcup_{\alpha \in J_0} f^{-1}(V_\alpha) \right) = \bigcup_{\alpha \in J_0} f\left(f^{-1}(V_\alpha)\right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} (V_\alpha)$. Logo $Y = f(X)$ é compacto.

Corolário 10.1.1 : Sejam (X,τ) um espaço GO-compacto e $f:(X,\tau) \to (Y = f(X),\sigma)$ uma aplicação δg-contínua e . Então $(Y = f(X),\sigma)$é compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura aberta de $Y = f(X)$. Como *f* é uma função δg-contínua, pelo Teorema 10.1.2, $\{f^{-1}(V_\alpha) \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura g-aberta de (X,τ). Como (X,τ) é um espaço GO-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} f^{-1}(V_\alpha)$.

Assim, $Y = f(X) = f\left(\bigcup_{\alpha \in J_0} f^{-1}(V_\alpha) \right) = \bigcup_{\alpha \in J_0} f\left(f^{-1}(V_\alpha)\right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} (V_\alpha)$. Logo *Y=f(x)* é compacto.

Teorema 10.1.5: Sejam (X,τ) um espaço Nearly GO-compacto e $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ uma aplicação δg-contínua e sobrejetiva. Então (Y,σ)é Nearly-compacto.

Demonstração: Sejam (X,τ) um espaço Nearly GO-compacto, $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ uma aplicação δg-contínua e $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura regularmente aberta de Y=*f*(X). Como *f* é uma função δg-contínua, $\{f^{-1}(V_\alpha) \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de X. Pela hipótese, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} f^{-1}(V_\alpha)$. Assim,

$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{\alpha \in J_0} f^{-1}(V_\alpha) \right) = \bigcup_{\alpha \in J_0} f\left(f^{-1}(V_\alpha)\right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} (V_\alpha)$. Logo *Y=f(x)* é Nearly-compacto.

Corolário 10.1.2: Seja $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ uma aplicação δg-contínua e sobrejetiva. Então, se (X,τ) é GO-compacto então (Y,σ)é Nearly-compacto.

Demonstração: Segue direto do fato de que todo espaço GO-compacto é Nearly GO-compacto e do teorema anterior.

Teorema 10.1.6 [11]: Seja (X,τ) um espaço semi-regular. Para uma função $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ as seguintes condições são equivalentes:

1. *f* é δg-contínua.
2. *f* é g-contínua.

Demonstração:

$1\Rightarrow 2$ Direto do Teorema 10.1.3.

$2\Rightarrow 1$ Sejam (X,τ) um espaço semi-regular e $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$uma função g-contínua. Tome V um subconjunto aberto.em (Y,σ). Então $f^{-1}(V)$ é um subconjunto g-aberto em (X,τ). Como $\tau=\tau^*$, segue que $f^{-1}(V)$ é um subconjunto δg-aberto em (X,τ). Logo, *f* é uma função δg-contínua.

Teorema 10.1.7 [11]: Seja $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ é uma função continua e δ-fechada, então para todo subconjunto δg-fechado A em (X,τ), $f(A)$ é um conjunto δg-fechado em (Y,σ).

Demonstração: Sejam $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ é uma função continua e δ-fechada, e A um subconjunto δg-fechado em (X,τ),. Queremos mostrar que $f(A)$ é um conjunto δg-fechado em (Y,σ). Para isso, tome $U\in\sigma$ tal que $f(A)\subseteq U$. Então $A\subseteq f^{-1}(U)$ e portanto $cl_\delta(A) \subseteq f^{-1}(U)$. Portanto $f(cl_\delta(A)) \subseteq U$ e então $cl_\delta(f(cl_\delta(A))) \subseteq U$. Logo, $cl_\delta(f(A)) \subseteq U$ e $f(A)$ é um conjunto δg-fechado em (Y,σ).

Corolário 10.1.3: Seja $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ contínua, δ-fechada e bijetiva. Se (Y,σ) é Nearly GO-compacto, então (X,τ) é Nearly-GO-compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de (X,τ). Pelo Teorema 10.1.7. $\{f(V_\alpha) \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura δg-fechada de (Y,σ) que é um espaço Nearly GO-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que $Y = \bigcup_{\alpha \in J_0} f(V_\alpha)$. Desde que *f* é bijetora

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in J_0} f(V_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \in J_0} f^{-1}(f(V_\alpha)) = \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha .$$

Portanto (X,τ) é um espaço Nearly GO-compacto.

Teorema 10.1.8: Seja $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ uma função fechada e δ-contínua tal que $f(X) = Y$. Se B é um subconjunto δg-fechado em (Y,σ), então $f^{-1}(B)$ é δg-fechado em (X,τ).

Demonstração: Suponha que B é um subconjunto δg-fechado em (Y,σ) e que $f^{-1}(B) \subset U$ onde *U* é um aberto em (X,τ). Queremos mostrar que $cl_\delta(f^{-1}(B)) \subset U$ ou que $cl_\delta(f^{-1}(B)) \cap U^c = \varnothing$. Observe que $f(cl_\delta(f^{-1}(B)) \cap U^c) = f(cl_\delta(f^{-1}(B))) \cap f(U^c) = cl_\delta(f(f^{-1}(B))) \cap f(U^c) \subseteq cl_\delta B - B$. A segunda inclusão é verdadeira pois *f* é uma função δ-contínua. Já para última inclusão vem de: como $f^{-1}(B) \subset U$, então $U^c \subset (f^{-1}(B))^c = X - f^{-1}(B)$, e portanto $f(U^c) \subset f(X - f^{-1}(B)) = Y - B$.

Como *f* é uma função fechada então $f\left(cl_{\delta}\left(f^{-1}(B)\right)\cap U^{c}\right)$ é fechado em (Y,σ), e

B é um subconjunto δg-fechado em (Y,σ), $cl_{\delta}B - B$ não contém conjunto fechado não vazio. Portanto, $f\left(cl_{\delta}\left(f^{-1}(B)\right)\cap U^{c}\right)=\varnothing$,

e assim. $cl_{\delta}\left(f^{-1}(B)\right)\cap U^{c}=\varnothing$.

Logo $cl_{\delta}\left(f^{-1}(B)\right)\subset U$ e $f^{-1}(B)$ é δg-fechado em (X,τ).

Corolário 10.1.4: Se $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ uma função fechada e δ-contínua tal que $f(X)=Y$, então *f* é uma função δg-irresolute.

Demonstração: Seja B um subconjunto δg-fechado em (Y,σ). Pelo teorema anterior, segue que $f^{-1}(B)$ é δg-fechado em (X,τ).

Portanto *f* é uma função δg-irresolute

Corolário 10.1.5: Se X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ e $f:X\rightarrow Y$ é fechada, δ-contínua e δ-fechada tal que $f(X)=Y$. Então Y é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Demonstração: Seja B um subconjunto δg-fechado em Y. Pelo teorema anterior $f^{-1}(B)$ é um subconjunto δg-fechado em X. Como X é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$, $f^{-1}(B)$ é um subconjunto δ-fechado em X. como *f* é uma função δ-fechada. $B=f\left(f^{-1}(B)\right)$ é um subconjunto δ-fechado em Y. Portanto Y é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$.

Corolário 10.1.6: Seja $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ uma função fechada e δ-contínua tal que $f(X)=Y$. Se (X,τ) for um espaço Nearly-compacto, então (Y,σ) é um espaço Nearly GO-compacto

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha\in J\}$ uma cobertura δg-aberta de (Y,σ). Pelo Corolário 10.1.4. $\{f^{-1}(V_\alpha)\setminus \alpha\in J\}$ é uma cobertura δg-abertos de (X,τ) que é um espaço Nearly GO-compacto, existe $J_0\subset J$ finito tal que $X=\bigcup_{\alpha\in J_0} f^{-1}(V_\alpha)$. Como $f(X)=Y$, segue que

$$Y=f(X)=f\left(\bigcup_{\alpha\in J_0} f^{-1}(V_\alpha)\right)=\bigcup_{\alpha\in J_0} f\left(f^{-1}(V_\alpha)\right)=\bigcup_{\alpha\in J_0} V_\alpha .$$

Portanto (Y,σ) é um espaço Nearly GO-compacto.

Corolário 10.1.7: Seja $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ uma função fechada e δ-contínua tal que $f(X)=Y$. Se (X,τ) for um espaço Nearly GO-compacto e $T_{\frac{3}{4}}$, então (Y,σ) é um espaço Nearly GO-compacto

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha\in J\}$ uma cobertura δg-aberta de (Y,σ). Pelo Corolário 10.1.4 $\{f^{-1}(V_\alpha)\setminus \alpha\in J\}$ é uma cobertura δg-aberta de (X,τ) que é um espaço Nearly GO-compacto e $T_{\frac{3}{4}}$, existe $J_0\subset J$ finito tal que $X=\bigcup_{\alpha\in J_0} f^{-1}(V_\alpha)$. Como $f(X)=Y$, segue que

$$Y=f(X)=f\left(\bigcup_{\alpha\in J_0} f^{-1}(V_\alpha)\right)=\bigcup_{\alpha\in J_0} f\left(f^{-1}(V_\alpha)\right)=\bigcup_{\alpha\in J_0} V_\alpha .$$

Portanto (Y,σ) é um espaço Nearly GO-compacto.

Corolário 10.1.8: Seja $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ uma δg-irresolute tal que $f(X)=Y$. Se (X,τ) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$ Nearly -compacto, então (Y,σ) é um espaço Nearly GO-compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de (Y,σ). Como *f* é uma função δg-irresolute e (X,τ) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$,. $\{f^{-1}(V_\alpha)\setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura δ-fechado de (X,τ) que é um espaço Nearly-compacto. Então existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} f^{-1}(V_\alpha)$. Portanto

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{\alpha \in J_0} f^{-1}(V_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \in J_0} f\left(f^{-1}(V_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha .$$

Logo (Y,σ) é um espaço Nearly GO-compacto.

Teorema 10.1.9 : Sejam (X,τ) um espaço GO-compacto e $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\sigma)$ uma aplicação g-contínua e sobrejetiva. Então (Y,σ) é compacto.

Demonstração: Seja $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura aberta de Y. Como *f* é g-contínua, $\{f^{-1}(V_\alpha)\setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura g-aberta de X, pois $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(V_\alpha)$.

Como X é GO-compacto, existe $J_0 \subset J$ finito tal que

$$X = \bigcup_{\alpha \in J_0} f^{-1}(V_\alpha)$$

Portanto $Y = f(X) = f\left(\bigcup_{\alpha \in J_0} f^{-1}(V_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \in J_0} f\left(f^{-1}(V_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$

Ou seja, Y é compacto.

Teorema 10.1.10: Se *f* é uma função g-contínua de um espaço GO-compacto X em um espaço $Y = f(X)$, então Y é um espaço Nearly GO-compacto.

Demonstração: Sejam $f:(X,\tau)\to(Y,\theta)$ uma função g-contínua de um espaço GO-compacto X em $Y=f(X)$ e $\{V_\alpha \setminus \alpha\in J\}$ uma cobertura por conjuntos δg-abertos em Y. Então $\{f^{-1}(V_\alpha)\setminus \alpha\in J\}$ é uma cobertura g-aberta de X. Portanto, existe $J_0\subset J$ finito tal que

$$X=\bigcup_{\alpha\in J_0}^{n} f^{-1}(V_\alpha)$$

Logo,

$$Y=f(X)=\bigcup_{\alpha\in J_0}^{n} f\left(f^{-1}(V_\alpha)\right)=\bigcup_{\alpha\in J_0}^{n} V_\alpha$$

ou seja, Y é um espaço Nearly GO-compacto.

Teorema 10.1.11: A imagem de um espaço Almost GO-compacto por uma função g-irresolute contínua é Almost GO-compacto.

Demonstração*:* Sejam $f:(X,\tau)\to(Y,\theta)$ uma função strongly contínua g-irresolute de um espaço Almost GO-compacto X em *Y=f(X)* e $\{V_\alpha \setminus \alpha\in J\}$ uma cobertura por conjuntos g-abertos em Y. Então $\{f^{-1}(V_\alpha)\setminus \alpha\in J\}$ é uma cobertura g-aberta de X. Portanto, existe $J_0\subset J$ finito tal que

$$X=\bigcup_{\alpha\in J_0}^{n} \overline{f^{-1}(V_\alpha)}$$

Logo,

$$Y=f(X)=\bigcup_{\alpha\in J_0}^{n} f\left(\overline{f^{-1}(V_\alpha)}\right)\subset\bigcup_{\alpha\in J_0}^{n} f\left(f^{-1}\left(\overline{V_\alpha}\right)\right)=\bigcup_{\alpha\in J_0}^{n} \overline{V_\alpha}$$

ou seja, Y é um espaço Almost GO-compacto.

Corolário10.1.9: A imagem de um espaço GO-compacto por uma função g-irresolute contínua é Almost GO-compacto.

Demonstração: Segue do fato de que todo espaço GO-compacto é Almost GO-compacto e aplicar o teorema anterior.

Corolário 10.1.10: A imagem de um espaço Hausdorff Nearly GO-compacto por uma função g-irresolute contínua é Almost GO-compacto.

Demonstração: Basta lembrar que todo espaço Hausdorff Nearly GO-compacto é Almost GO-compacto e aplicar o teorema anterior.

Teorema 10.1.12: A imagem de um Almost GO-compacto por uma função g-irresolute strongly-contínua é GO-compacto.

Demonstração: $f:(X,\tau)\to(Y,\theta)$ uma função contínua g-irresolute de um espaço Almost GO-compacto X em $Y=f(X)$ e $\{V_\alpha \setminus \alpha\in J\}$ uma cobertura g-aberta de Y. Então $\{f^{-1}(V_\alpha)\setminus \alpha\in J\}$ é uma cobertura g-aberta de X. Portanto, existe $J_0\subset J$ finito tal que

$$X=\bigcup_{\alpha\in J_0}^{n}\overline{f^{-1}(V_\alpha)}$$

Logo,

$$Y=f(X)=\bigcup_{\alpha\in J_0}^{n} f\left(\overline{f^{-1}(V_\alpha)}\right)\subset \bigcup_{\alpha\in J_0}^{n} f\left(f^{-1}(V_\alpha)\right)=\bigcup_{\alpha\in J_0}^{n} V_\alpha$$

ou seja, Y é um espaço GO-compacto.

Lema 10.1.1: Seja $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ uma aplicação δg-irresolute e K um subconjunto gN-fechado relativo a (X,τ), então $f(K)$ é gN-fechado relativo a (Y,σ).

Demonstração: Sejam K um subconjunto gN-fechado relativo a (X,τ), e $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura de $f(K)$ por δg-abertos em (Y,σ). Como f é uma função δg-irresolute, $\{f^{-1}(V_\alpha) \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura de K por δg-abertos em (X,τ). Como K é gN-fechado relativo a (X,τ), existe $J_0 \subset J$ finito tal que $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in J_0} f^{-1}(V_\alpha)$. Portanto

$f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{\alpha \in J_0} f^{-1}(V_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \in J_0} f\left(f^{-1}(V_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$. Logo $f(K)$ é gN-fechado relativo a (Y,σ).

Teorema 10.1.13: Nearly GO-compacidade é preservado por funções sobrejetivas δg-irresolutes.

Demonstração: Seja $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ uma função δg-irresolute e sobrejetora. Suponha que (X,τ) seja um espaço Nearly GO-compacto. Vamos mostrar que (Y,σ) é Nearly GO-compacto. Para isso, tome $\{V_\alpha \setminus \alpha \in J\}$ uma cobertura δg-aberta de (Y,σ). Como f é uma função δg-irresolute, $\{f^{-1}(V_\alpha) \setminus \alpha \in J\}$ é uma cobertura δg-aberta de (X,τ) que é um espaço Nearly GO-compacto. Então existe $J_0 \subset J$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J_0} f^{-1}(V_\alpha)$.

Desde que f é sobrejetora $Y = f(X) = f\left(\bigcup_{\alpha \in J_0} f^{-1}(V_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \in J_0} f\left(f^{-1}(V_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \in J_0} V_\alpha$.

Portanto (Y,σ) é um espaço Nearly GO-compacto.

Teorema 10.1.14: A função $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ é δg-contínua então $f(\wp)$ converge para $f(x)$ para cada $x \in X$ e cada filtro base $\wp$ δg-convergente para x.

Demonstração: Sejam $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ uma função δg-contínua e $\wp$ um filtro base sobre X , tal que $\wp$ δg-converge para x. Para qualquer V aberto em (Y,σ) tal que

$f(x) \in V$, então $x \in f^{-1}(V)$ que é δg-aberto em (X,τ). Como $\wp$ δg-convergente para *x*, existe $F_i \in \wp$ tal que $F_i \subseteq f^{-1}(V)$. Portanto, para qualquer V aberto em (Y,σ) tal que $f(x) \in V$, existe $f(F_i) \in f(\wp)$ tal que $f(F_i) \subseteq V$. Logo $f(\wp)$ converge para $f(x)$ para cada $x \in X$ e cada filtro base $\wp$ convergente para *x*.

Teorema 10.1.15: A função $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ é δg-irresolute então $f(\wp)$ δg-converge para $f(x)$ para cada $x \in X$ e cada filtro base $\wp$ δg -convergente para *x*.

Demonstração: Sejam $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ uma função δg-irresolute e $\wp$ um filtro base sobre X , tal que $\wp$ δg -converge para x. Para qualquer V δg-aberto em (Y,σ) tal que $f(x) \in V$, então $x \in f^{-1}(V)$ que é δg-aberto em (X,τ). Como $\wp$ δg-convergente para *x*, existe $F_i \in \wp$ tal que $F_i \subseteq f^{-1}(V)$. Portanto, para qualquer V δg-aberto em (Y,σ) tal que $f(x) \in V$, existe $f(F_i) \in f(\wp)$ tal que $f(F_i) \subseteq V$. Logo $f(\wp)$ δg-converge para $f(x)$ para cada $x \in X$ e cada filtro base $\wp$ δg-convergente para *x*.

Teorema 10.1.16: A função $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ é δg-contínua. Se (X,τ) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$, então *f* é uma função δ-contínua.

Demonstração: De fato, seja *U* um conjunto δ-aberto de (Y,σ). Como todo conjunto δ-aberto é um conjunto aberto, e como *f* é δg-contínua, $f^{-1}(U)$ é um conjunto δg-aberto em (X,τ). Como (X,τ) é um espaço $T_{\frac{3}{4}}$, então $f^{-1}(U)$ é um conjunto δ-aberto em (X,τ).

Logo *f* é uma função δ-contínua

Teorema 10.1.17: Se uma função $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ é δg-contínua então $g:(X,\tau^*)\to(Y,\sigma^*)$ tal que $g(x)=f(x), \forall x\in X$, é uma função g-contínua.

Demonstração: Seja *U* um conjunto aberto de (Y,σ^*). Então *U* é um conjunto aberto em (Y,σ). Como $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ é δg-contínua $f^{-1}(U)$ é δg-aberto em (X,τ). Como $g(x)=f(x)$ para cada $x\in X$, segue que $g^{-1}(U)=f^{-1}(U)$ é δg-aberto em (X,τ). Portanto, como (X,τ^*) é a semi-regularização de (X,τ), segue que $g^{-1}(U)$ um conjunto g-aberto em (X,τ^*).

Teorema 10.1.19: Uma função $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ é δg-irresolute, então $g:(X,\tau^*)\to(Y,\sigma^*)$, onde $g(x)=f(x), \forall x\in X$, é uma função g-contínua.

Demonstração: Suponha que $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ é uma função δg-irresolute. Seja $g:(X,\tau^*)\to(Y,\sigma^*)$, onde $g(x)=f(x), \forall x\in X$ e V um subconjunto aberto em (Y,σ^*), ou seja, V é δg-aberto em (Y,σ). Então $f^{-1}(V)$ δg-aberto em (X,τ) e $g^{-1}(V)=f^{-1}(V)$ é g-aberto em (X,τ^*). Logo *g* é uma função g-contínua.

Corolário 10.1.11: Uma função $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ é δg-irresolute, então $g:(X,\tau^*)\to(Y,\sigma^*)$, onde $g(x)=f(x), \forall x\in X$, é uma função δg-contínua.

Demonstração: Pelo teorema anterior, $g:(X,\tau^*)\to(Y,\sigma^*)$ é uma função δg-contínua. Então, para todos V é aberto em (Y,σ^*). Então $g^{-1}(V)$ é δg-aberto em (X,τ^*). Logo *g* é uma função δg-contínua.

Corolário 10.1.12: Uma função $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ é δg-irresolute tal que (X,τ) é um espaço Almost Weakly Hausdorff, então $g:(X,\tau^*)\to(Y,\sigma^*)$, onde $g(x)=f(x), \forall x\in X$, é uma função contínua.

Demonstração: Pelo corolário anterior, $g:(X,\tau^*)\to(Y,\sigma^*)$ é uma função δg-contínua. Então, para todos V é aberto em (Y,σ^*). Então $g^{-1}(V)$ δg-aberto em (X,τ^*) e portanto $g^{-1}(V)$ g-aberto em (X,τ^*). Como (X,τ) é um espaço Almost Weakly Hausdorff, (X,τ^*) é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$ e $g^{-1}(V)$ é aberto em (X,τ^*). Logo *g* é uma função g-contínua.

BIBLIOGRAFIA:

[1] Arockiarani, I.; Balachandran, K. and Ganster, M. - Regular Generalised Locally closed sets and RGL-continuous functions. Indian J. pure appl. Math., 28(5):661-669.(1997)

[2] Balachandran, K.; Sundaram and Maki, H. - On generalised continuous maps in topological spaces. Men. Fac. Kochi Univ. (Math), 12(1991), 5-13.

[3] Boonpok, C. - Preservation Theorems Concerning g–Hausdorff and rg-Hausdorff Spaces, Mahasarakham University, 31(3) (2003),138-140.

[4] Caldas, M. and Jafari, S. - On rarely g-continuous functions. Glasnik Matematiki. Vol 40(60), 317-322 (2005).

[5] Caldas, M. and Jafari, S. - On g-U S spaces, Univ. Bacau. Stud. Cerc. St. Ser. Mat. Romania, 14 (2005), 13-20.

[6] Caldas, M.; Jafari, S.; Latif, R. M. and Ozbakir, O. B. - GO-compact spaces and GO-(m,n)-compact spaces. King Fahd University of Petroleum e Minerals (2008)

[7] Caldas, M.; Jafari,S.; Moshokoa, S. P. and Noiri, T. - GO-compact spaces and Kupka typefunctions, Kochi J. Math., 2 (2007), 79-83.

[8] Caldas M.; Jafari, Moshokoa and Noiri, T. - On GO- compact spaces, University of Niš, Serbia. Filomat 22:1 (2008), 47-55.

[9] Cammaroto, F. and Lo Faro, G. - Spazi Weakly-compact, Riv. Mat. Univ. Parma (4)7 (1981), 383-395.

[10] Cammaroto, F. and Noiri, T. - A note on Weakly Compact spaces. Indian J. pure appl. Math.,16(12):1472-1477.(1985)

[11] Carnahan, D. - Locally Nearly Compact Spaces, Boll. U. M. I. () 6 (1972), 146-153.

[12] Dontchev, J. and Ganster, M. - On δ-Generalised Closed sets and $T_{\frac{3}{4}}$ spaces, Mem. Fac. Sci., Kochi Univ., Ser. A, Math 17,(1996), to appear.

[13] Dontchev, J. - On Generalised Semi-preopen sets. Mer. Fac. Sci. Kochi Univ. Serv. A (Math) (1995); 16:35-48.

[14] Dontchev, J.; Arokiarani, I. and Balachandran, K. - On generalized δ-closed sets and almost weakly Hausdorff spaces. Q & A in General Topology 18 (2000), 17-30

[15] Dunham, W. - $T_{\frac{1}{2}}$ -Spaces. Kyungpook Math. J. Volume 17, Num. 2 – December (1977).

[16] Fukutake, T. - On θ-weakly Hausdorff spaces, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Serv. A, Math., 10(1989), 9-13.

[17] Khalimsky ED. - Applications of connected ordered topological spaces in topology. In: Conference of Mathematics Department of Povolsia; (1970)

[18] Khalimsky ED, Kopperman R, Meyer P. R. - Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets. Topol. Appl. (1990); 36:1–17.

[19] Khalid Y. Al-Zoubi. - On generalised ω-closed sets Int. Journal of Mat. and Mat Sciences 2005:13(2005) 2001-2021.

[20] Kong TY, Kopperman R, Meyer P. R. - A topological approach to digital topology. Am Math Month (1991);98:901–17.

[21] Kovalevsky V, Kopperman R. - Some topology-based image processing algorithms. Ann NY Acad. Sci (1994);728:174–82.

[22] Kovacevic, I. - A Note on α-regularidade and compactness. Univ. u Novom Sadu Zb. Rad Prirod.-Mat. Fac. Ser. Mat. 19,1,109-117(1989).

[23] Kyriakos Keremedis and Eleftherios Tachtsis. - On the extensibility of closed Filters in T_1 spaces and the existence of well orderable filter bases. Comment. Math. Univ. Carolinae 40,2 (1999) 343{353}.

[24] Levine, N. - Generalised closed sets in Topology. Rend. Mat. Palermo, 19:89-96. (1970)

[25] Mashhour, A. S. & Hasanein, I. A. - Remarks on Nearly-compact spaces. Indian J. pure appl. Math, 12 (6):685-690, June (1981).

[26] Munkres, James R. - Topology: A first Course. Editor Prentice-Hall, (1974).

[27] Munshi, B. M. – Separation Axioms. Acta Scienc. Indica 12, No. 2, 140-144 (1986); Zbl 0675.54019)]

[28] Noiri, T. - On Almost-Regular Spaces. Glasnik Matematicki. Tom 4 (24) - No.1 - (1969).

[29] Noiri, T. - Remarks on Locally Nearly-compact spaces. Bolletino U. M. I. (4) 10 (1974), 36-43

[30] Noiri, T. and Popa, V. - On g-regular spaces and some functions. Mem. Fac. Sci., Kochi Univ., Ser. A 20,67-74 (1999). [ISSN 0389-0252]

[31] Poter, J. and Thomas, J. -. On H-closed and minimal Hausdorff spaces, Trans Amer. Math. Soc., 138 (1969), pp159-170

[32] Singal, M. K. and Mathur, A. On Nearly-compact spaces. Bull. Un. Mat. Italy. 4(2)(1969), 702-710

[33] Singal, M. K. and Shashi. – On almost-regular spaces- GlasniK Matematicki-Tom 4(24) –No 1 (1969).

[34] Singal, M. K. and Singal, A. R. – On almost M-compact spaces. Amm. Soc. Sci. Bruxelles 82 (1968), 233-242.

[35] Soundararajan, T. - Weakly Hausdorff Spaces and tha cardinality of topological spaces, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra III, Proc. Conf. Kampur, (1968); pp.301-306 (Academia, Prague, 1971)

[36] Steven A. Gaal - Point set Topology- Capítulo 5: Theory of convergence. Second Printing (1966)- Elsevier.

[37] Sundaram P., Pushpalatha A. - Strongly generalised closed sets in topological spaces. Far. East J. Math. Sci. (2001); 3(4): 563-75.

[38] Urysohn, P.- Über die Mächitigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Ann. 94 (1925), 262-295.