

Luciana Cristine Silva Amorim

Modelos Cosmológicos Inflacionários com
Correções Semi-Clássicas

Curitiba
2010

Luciana Cristine Silva Amorim

Modelos Cosmológicos Inflacionários com
Correções Semi-Clássicas

Dissertação apresentada ao Instituto
de Física da Universidade Federal do
Paraná, como requisito parcial para
a obtenção do grau de Mestre em
Física

Orientador: Prof. Dr. Fernando
Pablo Devecchi

Curitiba
2010

Luciana Cristine Silva Amorim

Modelos Cosmológicos Inflacionários com Correções Semi-Clássicas

96 páginas

Dissertação (Mestrado) - Instituto de Física Universidade Federal do Paraná

1. Cosmologia Inflacionária
2. Teoria Quântica de Campos

I. Universidade Federal do Paraná. Departamento de Física

Comissão Julgadora:

Prof. Dr.
Gilberto Medeiros Kremer

Prof. Dr.
Clisthenis Ponce Constantinidis

Prof. Dr.
Fernando Pablo Devecchi

*In Memoriam: Irany Miguel Silva Amorim
Caren Jane Silva Ifrán*

Sou brasileira, e não desisto nunca!

Agradecimentos

Agradeço a Dona Lisete pelo amor e respeito incondicionais, como mãe e amiga.

Agradeço a todos aqueles que acharam que eu não ia conseguir, pensar em vocês me deu muita força nos momentos de desânimo.

Agradeço a todas as bolsas que ganhei na vida: cursinho pré vestibular (GEPEC), bolsa alimentação, vale transporte e moradia (UFPEL), iniciação científica e mestrado (CNPq), por custearem meus estudos.

Aos amigos e colegas da pós graduação da Física da UFPR por tornarem minha adaptação fácil e agradável. Em especial aos colegas Thiago Corrêa de Freitas e Marcelo Silva Custódio por vivenciarem comigo uma cena do filme "A casa Das Máquinas" em um dos meus muitos dias de desespero.

Agradeço a minha pré-banca de defesa composta pelos Profs. Dr. Carlos Eduardo Fiore dos Santos e Marlus Koehler pelas valiosas contribuições pacientemente escritas à mão.

Agradeço aos Amigos que são meus **Amigos**, que me telefonam, mandam e-mail ou vão à minha casa para saberem se eu estou bem.

Ao Departamento de Física de Pelotas pelo "primeiro adestramento" e aos professores que me deram aula na UFPR durante o mestrado, pelo "segundo adestramento".

Agradeço a minha banca de defesa composta pelos Profs. Dr. Gilberto Medeiros Kremer e Clisthenis Ponce Constantinidis pelas dicas, questionamentos e esclarecimentos.

Agradeço ao Prof.-Orientador-Treinador Fernando Devecchi pela paciência de me ensinar a calcular algo novo para mim e "aparar minhas arestas" neste período de mestrado.

Novamente ao CNPq, pelo apoio financeiro e ao R.U. pelo almoço na hora.

Resumo

Esta dissertação pretende analisar uma cosmologia semiclássica, para um universo inflacionário, com dois campos escalares como fontes. A dinâmica do modelo é montada usando as equações de Einstein da Relatividade Geral, a equação de Klein-Gordon para campos escalares e a definição de valor esperado no vácuo do operador de energia-momento dessas fontes. Após a apresentação dos conceitos básicos da Relatividade Geral, da Cosmologia e das Teorias de Campos focalizamos no modelo mencionado e estudamos a evolução temporal do fator de escala do universo, da sua aceleração, e das densidades de energia das fontes. Comparamos nessa parte final os resultados obtidos para os casos clássico e semiclássico fazendo uso das chamadas equações modificadas de Einstein.

Abstract

The main goal of this work is to analyze a semi-classical model of cosmology for an inflationary universe, with two scalar fields as sources. This model dynamics is constructed using Einstein equations of General Relativity, Klein-Gordon equations for the scalar fields and the definition of expectation value for the energy-momentum operator of those sources. After a presentation of the basic concepts of General Relativity, Cosmology, and Field Theory we focus on the formulation mentioned above, studying the time evolution of the scale factor, of its acceleration and the energy densities of the sources. We compare in the final part of this work the results of the classical and semi-classical versions, using the so-called modified Einstein equations.

Sumário

Lista de Figuras	4
Lista de Tabelas	6
1 Introdução	7
2 Teoria da Relatividade	9
2.1 Relatividade Especial	9
2.2 Relatividade Geral	10
2.2.1 Forças Gravitacionais e a Geodésica	11
2.2.2 Limite Newtoniano	14
2.3 Derivada Covariante	16
2.4 Dedução do Tensor de Curvatura	18
2.5 Equações de Campo de Einstein	21
2.6 Campos Clássicos	24
2.7 Teorema de Noether	25
3 Cosmologia	27
3.1 Consideração Inicial - O Princípio Cosmológico	28
3.2 Métrica de Roberston Walker	28
3.2.1 Componentes do Tensor de Riemann	29
3.3 Modelo Cosmológico Padrão	31
3.3.1 Problemas do Modelo Cosmológico Padrão	33

3.3.2	Alguns Parâmetros da Cosmologia	33
3.4	Contraproposta Inflacionária para solucionar os problemas do Modelo Padrão	37
3.4.1	Universo Permeado por Constate Cosmológica	37
3.4.2	Soluções inflacionárias a partir de Campo Escalar	38
3.4.3	Problema de Horizonte	40
3.4.4	Problema da Curvatura	41
3.4.5	Problema dos Monopolos Magnéticos	42
4	Visão Básica de Teoria de Campos em Espaço-tempo Curvo	43
4.1	Campo escalar em espaço tempo de Minkowski e sua quantização	43
4.1.1	Tensor de energia-momento	47
4.1.2	Estado de Vácuo	49
4.1.3	Ordenamento Normal	50
4.2	Campo escalar em espaço tempo curvo	52
4.2.1	Tensor Energia Momento em espaço tempo curvo	53
4.2.2	Renormalização do Tensor energia-momento	55
5	Modelo Cosmológico com Campo de Bósons como Ínflaton	58
5.1	Equações de Klein-Gordon em Espaço tempo Curvo	58
5.2	Equações de Campo para o Modelo	60
5.3	Valores Iniciais para o Modelo	62
5.4	Discussão dos Resultados	66
5.4.1	Caso para 5% de densidade de matéria	67
5.4.2	Caso para 10% de densidade de matéria	72
5.4.3	Soluções Cosmológicas com variação em $\dot{a}(0)$ e $\ddot{a}(0)$	75
5.4.4	Resultados do modelo para universo composto apenas por ínflaton	78
6	Conclusões e Perspectivas	83

7 Apêndice	85
7.1 Pacote de R.G. do Software Mapele 10	85
7.2 Implementação dos programas	85
7.3 Casos Intermediários - Valores Iniciais pela equação de Friedmann	90
7.4 Casos Intermediários - Valores Iniciais para $\dot{a}(t)$ e $\ddot{a}(t)$ pela equação da densidade de Inflaton Corrigida	92
Referências Bibliográficas	94

Lista de Figuras

2.1	Deformação do espaço-tempo devido à presença de uma massa	11
3.1	Comparação entre observações para determinar o parâmetro de Hubble . .	35
5.1	Resultado obtido para os fatores de escala com os valores iniciais (5.25) . .	68
5.2	A diferença entre as duas curvas mostra o padrão de afastamento do fator de escala semi-clássico em relação à curva clássica.	69
5.3	Resultado obtido para a aceleração com os valores iniciais (5.25)	70
5.4	Resultados obtidos para as densidades de energia com os valores iniciais (5.25)	72
5.5	Resultados obtidos para os fatores de escala com os valores iniciais (5.26) .	73
5.6	Resultados obtidos para as acelerações com os valores iniciais (5.26)	74
5.7	Resultados obtidos para as densidades de energia com os valores iniciais (5.26)	75
5.8	Resultados obtidos para o fator de escala com os valores iniciais (5.29) . . .	76
5.9	Resultados obtidos para as curvas de aceleração para os valores iniciais (5.29)	77
5.10	Resultados obtidos para as densidades de energia com os valores iniciais (5.29)	78
5.11	Resultados obtidos para os fatores de escala com os valores iniciais (5.30) .	79
5.12	Resultados obtidos para as acelerações com os valores iniciais (5.30)	81
5.13	Resultados obtidos para as densidades de ínflaton com os valores iniciais (5.30)	82

7.1	Resultados para as curvas de aceleração utilizando valores iniciais obtidos pela equação de Friedmann (5.20)	90
7.2	Final do período inflacionário para diferentes valores de densidade de matéria.	91
7.3	Análise das amplitudes oscilatórias das curvas de aceleração para o período pós-inflacionário.	91
7.4	Resultados para as curvas de aceleração utilizando valores iniciais obtidos pela equação da densidade de ínflaton corrigida (5.28)	92
7.5	Detalhe do final do período inflacionário para diferentes valores de densidade de matéria.	93
7.6	Análise das amplitudes oscilatórias das curvas de aceleração para o período pós-inflacionário.	93

Lista de Tabelas

5.1	Proporção entre as densidades de matéria e de campo escalar (5.18)	65
-----	--	----

Capítulo 1

Introdução

O estudo do cosmos é uma atividade de longa data na humanidade; porém a chamada cosmologia moderna surgiu como linha de trabalho na comunidade científica internacional somente no começo do século XX [7].

O Modelo Padrão (que usa como dinâmica as equações de Einstein da Relatividade Geral) foi capaz de prever a existência da Radiação Cósmica de Fundo e as abundâncias dos elementos químicos leves no universo [1]. Isto foi um marco para a Cosmologia, que tomou o modelo padrão como referência.

Apesar desses sucessos, o modelo padrão não possui estrutura matemática suficiente para a explicação de questões importantes como: o por quê do universo ser homogêneo e isotrópico em grandes escalas; o por quê da não existência de monopolos magnéticos, entre outros pontos fundamentais. Para resolver esses problemas que a formulação padrão não é capaz de resolver, Alan Guth, Andrei Linde e outros propuseram no início da década de 80 do século XX os chamados modelos inflacionários [7]. Tais modelos trabalham com a idéia de que o universo passou por uma fase de violenta expansão em curto intervalo de tempo, que pode ser ocasionada pela presença de um campo escalar representando a chamada energia de vácuo [13]. Nesta fase do universo - dita primordial, pelo fato de envolver uma escala de energia muito alta - a gravitação deve ser apresentada através de uma teoria essencialmente escalar-tensorial [10].

Há na atualidade uma grande busca por uma teoria quântica para a gravidade. No entanto, a Relatividade Geral e a Mecânica Quântica mostram até o momento serem não compatíveis [6]. Enquanto a primeira descreve muito bem a Física da escala macroscópica, incluindo a escala cosmológica, a segunda descreve o "micro". Quando o objetivo é montar modelos cosmológicos de universos jovens, uma alternativa é o chamado tratamento semi-clássico dentro da linguagem da Relatividade Geral [8]. Nesse conjunto de formulações se encaixam também as Teorias Quânticas de Campos em Espaço-Tempo curvos, o que nos

permite aplicar a técnica de segunda quantização a campos que moram numa variedade 4-dimensional riemanniana (um campo de fundo clássico gravitacional) [8]. Baseado no que apresentamos anteriormente iremos estudar no capítulo quatro duas versões de um mesmo modelo. O modelo semi-clássico, usando como base as Equações Modificadas de Einstein possui termos de correções da ordem de \hbar . Quando desconsideramos a constante de Planck o que ganhamos é a versão clássica do modelo.

Pelo fato do modelo estudado apresentar equações altamente não lineares o grande problema do trabalho é encontrar uma faixa de valores onde exista soluções com interpretação cosmológica. Esta dissertação pretende analisar uma cosmologia semiclássica, para um universo inflacionário, com dois campos bosônicos como fontes. Estes campos representam o campo de inflaton e a matéria ordinária, respectivamente.

A dissertação está estruturada da seguinte forma: no primeiro capítulo são mostradas as idéias que fundamentam a Teoria da Relatividade Geral; no segundo capítulo estudamos de modo básico o Modelo Padrão da Cosmologia, com os seus sucessos e fracassos, o que nos leva às soluções inflacionárias mencionadas anteriormente nesta introdução. No terceiro capítulo faremos uma introdução à Teoria de Campos Quânticos para geometrias plana e curva. No quarto capítulo, mostraremos nossos resultados originais: o modelo inflacionário com campos bosônicos representando o inflaton e a matéria ordinária. Comparamos nesse capítulo os resultados obtidos para os casos clássico e semiclássico; fazendo uso das equações modificadas de Einstein.

A métrica que será usada no trabalho é de assinatura $(+, -, -, -)$ e para os capítulos finais iremos utilizar as unidades naturais da forma $\hbar = c = k_B = 8\pi G = 1$.

Capítulo 2

Teoria da Relatividade

Neste capítulo faremos uma breve descrição sobre **Relatividade Especial** (R.E.), tendo em vista o fato da **Relatividade Geral** (R.G.) ser uma generalização da (R.E.) [1].

Apresentamos os principais conceitos matemáticos sobre a (R.G.), que será o tema principal deste capítulo.

Para o nosso trabalho a (R.E.) é uma teoria que está à margem da (R.G.), portando não será dada a ela tanta ênfase.

2.1 Relatividade Especial

A transformação de Galileu não mantém a integridade das equações de Maxwell, ou seja, estas equações mudam sua forma sob aquelas transformações [1]. Este fato foi percebido por Lorentz e, em 1905, Einstein postulou que as leis físicas devem permanecer invariantes sob uma transformação de Lorentz. Essas transformações substituem as transformações de Galileu na Relatividade Especial. As transformações de Lorentz então devem ser de tal modo que seja possível recuperar as Leis de Newton no limite de baixas velocidades e servir também para descrever fenômenos em altas velocidades preservando a constância da velocidade da luz. As transformações de Lorentz podem ser definidas como

$$x'^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} x^{\beta} + ax^{\alpha}. \quad (2.1)$$

Quando $a = 0$, a equação (2.1) representa o **Grupo de Lorentz**, sendo Λ_{β}^{α} é a matriz constante e x'^{α} e x^{β} são quadri-vetores contra-variantes, os índices gregos podem variar de 0 a 3.

Nesta notação, temos que $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$.

Para o presente trabalho será adotado o sistema de unidades naturais. Neste sistema

temos que $\hbar = c = G = 1$. As transformações de Lorentz, para satisfazer os postulados da Relatividade Especial, devem manter invariantes o intervalo de tempo próprio, bem como o intervalo infinitesimal entre dois eventos. Tais intervalos ficam expressos por

$$ds^2 = \sum_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad e \quad d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2}, \quad (2.2)$$

onde eliminamos o sinal de somatório, já que só existe tal soma diferente de zero para índices iguais [2]. Importante mencionarmos que, se o intervalo infinitesimal entre dois eventos é invariante, o tempo próprio também será invariante [4].

O tensor $\eta_{\alpha\beta}$ denominado tensor de Minkowski, que contém todas as propriedades geométricas do espaço-tempo plano, tal tensor é definido por

$$\eta_{\alpha\beta} = (\eta^{\alpha\beta})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Vale a pena ressaltar que os efeitos gravitacionais são desprezados no tensor $\eta_{\alpha\beta}$. Na próxima seção, os efeitos gravitacionais começaram a fazer parte do cenário. Chegará um ponto então onde o tensor métrico de Minkowski, deverá ser substituído por outro que descreva a geometria de espaços não planos.

A idéia principal aqui discutida é que a R.E. não é capaz de descrever efeitos gravitacionais, ela é válida apenas para referenciais não inerciais, devemos entrar no formalismo da R.G. para incluirmos efeitos gravitacionais [3].

2.2 Relatividade Geral

A Relatividade Geral é a teoria do espaço, tempo e gravitação concluída por Einstein em Novembro de 1915 como uma generalização da Relatividade Especial, incorporando efeitos gravitacionais através dos referenciais não inerciais [2, 16, 15].

Einstein tentava inicialmente reformular a mecânica de Newton dentro da Relatividade Especial quando averiguou não ser possível. Por esta razão acabou por desenvolvendo

uma nova teoria para gravitação, e verificou que a mecânica newtoniana é válida, porém para limites de baixas velocidades.

A RG descreve todos os fenômenos gravitacionais fazendo uso de um dos mais elegantes ferramentais matemáticos, a geometria diferencial e, segundo este formalismo, a gravidade é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo e esta, é gerada pela matéria e energia presente neste espaço-tempo. Como exemplo, considere a figura abaixo

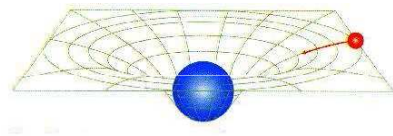


Figura 2.1: Deformação do espaço-tempo devido à presença de uma massa

A malha do espaço-tempo é alterada pela presença de uma grande massa. Um raio de luz, emitido por uma estrela distante, sofrerá uma curvatura. Este fato foi comprovado em Sobral, aqui no Brasil, durante um eclipse total do Sol. Isto ocorre, não porque a luz proveniente de tal estrela é atraída gravitacionalmente pelo Sol e sim porque a luz, como qualquer outro objeto, irá percorrer o caminho com o menor gasto de energia. A luz desvia por estar percorrendo uma **geodésica** pois, seu movimento é inercial.

Pela R.G., os efeitos gravitacionais são determinados por fatores puramente geométricos. Na próxima seção obteremos a representação matemática para a curva geodésica. Será visto que esta pode ser obtida pelo princípio de mínima ação a partir da equação do movimento de uma partícula em queda livre imersa em um campo gravitacional como. Será mostrado também que a curva geodésica depende de um elemento chamado de Conexão Afim, que é representado exclusivamente por termos geométricos.

2.2.1 Forças Gravitacionais e a Geodésica

O fato de podermos representar a Conexão Afim, também conhecida por símbolo de Christoffel, com dependência exclusiva de termos geométricos, é uma consequência do

Princípio da Equivalência. Tal princípio toma como base a igualdade entre as massas inerte e massa pesada. (Em um campo de gravitação homogêneo, todos os movimentos se executam como na ausência de um campo de gravitação, em relação a um sistema de coordenadas uniformemente acelerado [3].)

As equações do movimento da R.G. começam por considerar uma partícula em queda livre, imersa no campo gravitacional terrestre. Considerado um sistema coordenado ξ^α localizado na própria partícula que cai, neste sistema coordenado a partícula se encontra em repouso, enquanto que, para um referencial fixo na terra, o movimento é uniformemente acelerado. O referencial na partícula em queda é então denominado de **localmente inercial** e, por isto, nele valem as leis da Relatividade Especial. Desse modo, podemos equacionar o movimento da partícula segundo o referencial dela própria

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad , \quad (2.4)$$

onde, $d\tau$ é o tempo próprio, que é medido no referencial da partícula.

Reescrevemos (2.4) de forma mais conveniente, com o objetivo de aplicar a regra da cadeia e, relacionar o referencial que cai ξ^α com um referencial fixo x^μ na Terra

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial\tau} \right). \quad (2.5)$$

Agora, se faz a derivada do produto

$$\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) = 0 \quad . \quad (2.6)$$

Quando multiplicamos ambos os lados por $\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha} \right)$, temos

$$\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha} + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial\xi^\alpha} \frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.7)$$

onde, utilizando o tensor de Kronecker $\delta_\mu^\lambda = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\xi^\mu} \frac{\partial\xi^\lambda}{\partial\xi^\alpha}$, é obtida a equação simplificada

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \delta_\mu^\lambda + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial\xi^\alpha \partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad . \quad (2.8)$$

Percebe-se então o fator $\frac{\partial^2 \xi^\alpha \partial^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu \partial \xi^\alpha}$, é conhecido como Símbolo de Christoffel, e é representado por $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$, de forma que a equação do movimento que buscamos, será dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 . \quad (2.9)$$

O símbolo de Christoffel ou conexão afim é o elemento matemático que torna possível determinar as curvas geodésicas do espaço curvado por um campo gravitacional. Quando a conexão afim é nula, o que temos é um movimento uniforme. Este elemento não é um tensor, pois se um tensor é nulo em um certo referencial, em outro referencial ele também deverá ser nulo, o que não é satisfeito. Neste caso outra propriedade do símbolo de Christoffel é a simetria perante permutação de índices inferiores, de forma que $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$.

Passamos agora para a representação da conexão afim em termos da métrica, em notação quadri-vetorial. Para isto vamos minimizar a ação correspondente à partícula que se desloca entre dois pontos arbitrários em um campo gravitacional. O intervalo infinitesimal expresso por (2.2), é dado neste caso por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (2.10)$$

cujas equações são as mesmas da R.E., com a diferença de que o tensor de Minkowski será substituído por um tenso que descreve um espaço-tempo curvo. A ação que representa o movimento da partícula entre dois pontos quaisquer é dada por

$$S = \int_a^b \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda , \quad (2.11)$$

onde o diferencial em λ representa o elemento diferencial do comprimento da curva para o corpo se deslocando em queda livre e λ é um parâmetro da curva que está relacionado com as demais coordenadas por $x^\mu(\lambda)$ [2].

Considerando uma pequena variação da ação

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_a^b \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda = 0 \\ &\int_a^b \delta \left(g_{\mu\nu} \frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) d\lambda = 0 . \end{aligned} \quad (2.12)$$

A lagrangeana pode ser reconhecida como o termo entre parênteses da expressão (2.12), de forma que

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L} d\lambda \equiv \int_a^b \delta \left(g_{\mu\nu} \frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) d\lambda \quad (2.13)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} . \quad (2.14)$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange para a lagrangeana acima, vemos que

$$\frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\rho} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) , \quad (2.15)$$

de onde se chega à expressão

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \\ \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 . \end{aligned} \quad (2.16)$$

que possui a mesma forma que a equação (2.9), onde $x^\mu(\lambda) = x^0(\lambda) = d\tau$. Deste modo, através da mínima ação, fica explícita a relação entre o símbolo de Christoffel e a métrica do campo

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) . \quad (2.17)$$

Esta forma de escrever o símbolo de Christoffel é muito importante para a R.G.. Através dela é possível determinar os elementos do Tensor de Einstein.

Na próxima seção iremos chegar ao resultado newtoniano para o potencial gravitacional, já fazendo uso deste último resultado.

2.2.2 Limite Newtoniano

Para chegarmos ao resultado newtoniano para o potencial gravitacional, devemos proceder como segue.

Primeiramente, o tensor métrico $g^{\mu\nu}$, o qual ainda não conhecemos sua forma (mas sabemos que substituirá em algum momento o tensor de Minkowski) dado pela equação (2.3), tem que ser um tensor diagonal. Desse modo, apenas os elementos com índices iguais

sobreviverão na Conexão Afim.

Em segundo lugar, estamos considerando uma partícula movendo-se com baixa velocidade em um campo gravitacional. Quando sua velocidade é muito baixa, podemos negligenciar $\frac{d\vec{x}}{d\tau}$ em relação a $\frac{dt}{d\tau}$, na equação da geodésica, de modo que [1]

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} \right) = 0 . \quad (2.18)$$

Pelo fato do campo ser estacionário, o termo de Conexão Afim (2.17) é reduzido por

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} . \quad (2.19)$$

E, sendo este suficientemente fraco, podemos escrever a métrica perturbada

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1 , \quad (2.20)$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$ é o tensor de Minkowski e $h_{\alpha\beta}$ é uma pequena perturbação na métrica, preservando termos em até primeira ordem em h , temos que

$$\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta} . \quad (2.21)$$

Se, aplicarmos a equação (2.20) em (2.18)

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00} . \quad (2.22)$$

Usando a regra da regra da cadeia, para relacionar o tempo próprio da partícula com um referencial fixo na Terra, temos que

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} \frac{d\tau^2}{dt^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 \nabla h_{00} , \quad (2.23)$$

e, levando em conta a conexão afim, se extrai que $\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$, se obtém finalmente [1]

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} = -\nabla \phi , \quad (2.24)$$

que é o conhecido resultado Newtoniano, onde ϕ é o potencial gravitacional dependente da distância que a massa se encontra do gerador de gravidade. Aqui, considerado a Terra, então, um potencial claramente central.

2.3 Derivada Covariante

É necessário ter claro que, em coordenadas curvilíneas, existem duas espécies de vetores e, como consequência, três espécies de tensores de segunda ordem, o que torna evidente a dificuldade em estabelecer uma operação diferencial. Num sistema cartesiano, as derivadas parciais das componentes de um quadri-vetor W_ν , em relação as suas coordenadas formam um tensor, enquanto que a derivada ordinária de um vetor resulta em outro vetor. Isto já não é verdadeiro em coordenadas curvilíneas [5]. Como a diferenciação está relacionada com a diferença das componentes de dois vetores infinitesimalmente vizinhos, em se tratando de coordenadas curvilíneas, chegar a uma operação que represente esta diferença significa fazer uma operação de transporte, o chamado **transporte paralelo**. Então, dado um quadri-vetor W^μ , que sofre uma transformação geral de coordenadas de um referencial S , para um outro S'

$$W'^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} W^\mu, \quad (2.25)$$

se aplica a derivada em relação a x'^κ , e obtemos

$$\frac{\partial W'^\lambda}{\partial x'^\kappa} = \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\kappa} W^\mu + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial W^\mu}{\partial x^\mu}. \quad (2.26)$$

O primeiro termo do lado direito da equação obtida só será nulo quando se tratar de espaço Euclidiano. Tal restrição não permite que a (2.26) seja a forma correta da derivada covariante, pois se busca um resultado que seja o mais geral possível. É necessário então a construção de outro tensor para manipular a equação, este tensor é a delta de Kronecker, do modo que

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\kappa} = \delta_\kappa^\lambda. \quad (2.27)$$

Derivando a função delta em relação a coordenada x'^τ , $\frac{\partial}{\partial x'^\tau} \left[\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\kappa} \right]$, temos que

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\tau} \partial x'^{\kappa}} + \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x'^{\tau} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\kappa}} = 0. \quad (2.28)$$

Utilizando a representação da conexão afim obtida por troca de sistema de coordenadas (2.2.1)

$$\Gamma_{\gamma\epsilon}^{\theta} = \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\epsilon}} \frac{\partial x^{\theta}}{\partial \xi^{\alpha}} \implies \Gamma_{\gamma\epsilon}^{\prime\theta} = \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\gamma} \partial x'^{\epsilon}} \frac{\partial x^{\theta}}{\partial \xi^{\alpha}}, \quad (2.29)$$

onde sofre uma transformação de coordenadas, a qual torna possível relacionar os sistemas coordenados S e S' e com isto, obtemos uma relação mais vantajosa para a conexão afim, no referencial S' [1]

$$\Gamma_{\gamma\epsilon}^{\prime\theta} = \frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\alpha}} \left[\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\epsilon}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\eta} \partial x^{\sigma}} + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\gamma} \partial x'^{\epsilon}} \right] \quad (2.30)$$

$$\Gamma_{\gamma\epsilon}^{\prime\theta} = \frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\epsilon}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\gamma}} \Gamma_{\eta\sigma}^{\beta} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\epsilon} \partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\sigma}}. \quad (2.31)$$

Multiplicando a equação (2.25) e (2.31) obtemos a expressão

$$W'^{\lambda} \Gamma_{\gamma\epsilon}^{\prime\theta} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} W^{\mu} \left[\frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\epsilon}} \Gamma_{\eta\sigma}^{\beta} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\gamma} \partial x'^{\epsilon}} \frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\sigma}} \right]. \quad (2.32)$$

Se fizermos uso agora, do tensor construído na equação (2.33), onde os índices livres λ, τ e κ são trocados respectivamente por θ, γ e ϵ . O índice mudo ν será trocado por σ . Deste modo temos

$$\frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\gamma} \partial x'^{\epsilon}} = - \frac{\partial^2 x'^{\theta}}{\partial x'^{\gamma} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\epsilon}}, \quad (2.33)$$

ao substituir o resultado em (2.32), obtemos

$$W'^{\lambda} \Gamma_{\epsilon\gamma}^{\prime\theta} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} W^{\mu} \left[\frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\epsilon}} \Gamma_{\eta\sigma}^{\beta} - \frac{\partial^2 x'^{\theta}}{\partial x'^{\gamma} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\epsilon}} \right], \quad (2.34)$$

lembrando da identidade (2.27), temos que

$$W'^{\lambda}\Gamma_{\gamma\epsilon}^{\theta} = W^{\tau} \left[\frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\epsilon}} \Gamma_{\eta\tau}^{\beta} - \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial^2 x'^{\theta}}{\partial x^{\alpha} \partial x'^{\epsilon}} \right]. \quad (2.35)$$

Somando então a equação (2.35) com (2.26)

$$\begin{aligned} W'^{\lambda}\Gamma_{\gamma\epsilon}^{\theta} + \frac{\partial W'^{\lambda}}{\partial x'^{\kappa}} &= \frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\epsilon}} \Gamma_{\eta\tau}^{\beta} W^{\tau} - \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\epsilon}} \frac{\partial^2 x'^{\theta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\tau}} W^{\tau} + \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} W^{\mu} \\ &+ \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial W^{\mu}}{\partial x^{\mu}}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Trocamos agora os índices livres λ e κ respectivamente por θ e ϵ , isto se estende para ambos os lados de (2.36). O índice mudo ν será substituído por α , deste modo podemos cancelar termos e obter

$$W'^{\lambda}\Gamma_{\epsilon\gamma}^{\theta} + \frac{\partial W'^{\theta}}{\partial x'^{\epsilon}} = \frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\epsilon}} \Gamma_{\eta\tau}^{\beta} W^{\tau} + \frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\epsilon}} \frac{\partial W^{\mu}}{\partial x^{\mu}}. \quad (2.37)$$

Novamente observando os índices que são mudos que são α e μ , iremos atribuir a estes η e β respectivamente, com objetivo de obter uma forma mais simples para a operação de diferenciação de um vetor, para qualquer referencial. E assim obtemos

$$\frac{\partial W'^{\theta}}{\partial x'^{\epsilon}} + \Gamma_{\gamma\epsilon}^{\theta} W'^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\theta}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\epsilon}} \left(\Gamma_{\eta\tau}^{\beta} W^{\tau} + \frac{\partial W^{\beta}}{\partial x^{\eta}} \right). \quad (2.38)$$

E deste modo, adquirimos a expressão conhecida por derivada covariante e como transferir esta quantidade para outro referencial. Ganhamos a expressão entre colchetes de (2.38) que é utilizada de modo individual para expressar a derivada covariante no referencial próprio. Esta parte entre colchetes é geralmente representada por ∇_{β} , onde o índice β é proveniente da própria expressão.

2.4 Dedução do Tensor de Curvatura

O tensor de curvatura é parte integrante fundamental do **Tensor de Einstein** e para obtê-lo, se faz uso da geometria Riemanniana e por este motivo, o tensor de curvatura também é conhecido por tensor de Riemann. Tal geometria foi desenvolvida sob uma

esfera.

Para espaços generalizados, surge a necessidade de expressar do modo mais geral possível a distância entre dois pontos. Antes de fazer a dedução do Tensor de Riemann é útil mencionar de modo aplicativo o Teorema de Stokes pois é através dele, que se obtém a forma matemática do tensor curvatura.

A integral estendida a uma hipersuperfície fechada pode ser transformada numa integral do quadri-volume que ela delimita, substituindo ao elemento de integração dS_ρ o seguinte operador [5]

$$dS^\rho \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^\rho}, \text{ onde } d\Omega \text{ representa o elemento de volume.} \quad (2.39)$$

o Teorema de Stokes é aplicado para se obter a integral do vetor W_ρ , ao redor de uma hipersuperfície fechada como uma integral do volume delimitado por ele.

$$\begin{aligned} \oint W_\rho dS^\rho &= \int \frac{\partial W_\rho}{\partial x^\rho} d\Omega \\ df^{\rho\kappa} &\rightarrow \left(dS^\rho \frac{\partial}{\partial x^\kappa} - dS^\kappa \frac{\partial}{\partial x^\rho} \right) \text{ onde } df^{\rho\kappa} \text{ é o elemento de superfície} \\ dx^\rho &\rightarrow df^{\kappa\rho} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \\ \oint W_\rho dx^\rho &= \int df^{\rho\kappa} \frac{\partial W_\rho}{\partial x^\kappa} = \frac{1}{2} \int df^{\rho\kappa} \left(\frac{\partial W_\kappa}{\partial x^\rho} - \frac{\partial W_\rho}{\partial x^\kappa} \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Agora temos condições de deduzir o Tensor de Riemann, um dos conceitos utilizados por este matemático para determinar a expressão matemática do tensor curvatura foi o transporte paralelo.

Num espaço Euclidiano traçam-se dois vetores ortogonais a uma superfície plana, o vetor \vec{A} e \vec{B} respectivamente. Translada-se então o vetor \vec{A} paralelamente até \vec{B} . Como se trata de um plano, ao unir as extremidades do vetor trasladado ao vetor \vec{B} a variação do ângulo entre eles é nula [5].

Seguindo a mesma linha de raciocínio para uma superfície curva intuitivamente percebemos que haverá uma variação angular diferente de zero entre o vetor trasladado e \vec{B} da superfície curva. Justamente esta variação que prova o fato da superfície é ser curva.

A variação do vetor pode ser calculada e para isto aplica-se o teorema de Stokes.

Considera-se um contorno infinitesimal fechado e faz-se o transporte paralelo de um vetor V_κ por todo o contorno.

Esta variação é expressa por ΔV_κ e computada durante o transporte paralelo ao longo do contorno infinitesimal fechado considerado

$$\Delta V_\kappa = \oint dV_\kappa \quad e \quad \delta V_\rho = \Gamma_{\rho\tau}^\kappa V_\kappa \partial x^\tau, \quad (2.41)$$

a combinação destas, traz $\oint \Gamma_{\rho\tau}^\kappa V_\kappa x^\tau$ e, de (2.41)

$$\frac{\partial V_\rho}{\partial x^\tau} = \Gamma_{\rho\tau}^\kappa V_\kappa. \quad (2.42)$$

Aplica-se agora Stokes (2.40), onde $\Delta f^{\alpha\beta}$ será a área delimitada pelo contorno, do modo

$$\begin{aligned} dx^\tau &\rightarrow df^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \\ \Delta V_\kappa &= \oint \Gamma_{\rho\tau}^\kappa V_\kappa dx^\tau = \int df^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\Gamma_{\rho\tau}^\kappa V_\kappa) \\ \Delta V_\kappa &= \frac{1}{2} \int df^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial (\Gamma_{\rho\beta}^\kappa V_\kappa)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial (\Gamma_{\rho\alpha}^\kappa V_\kappa)}{\partial x^\beta} \right). \end{aligned}$$

Agora se aplica a derivada do produto nos termos entre parênteses, o que resultará

$$\Delta V_\kappa = \frac{1}{2} \Delta f^{\alpha\beta} \left(V_\kappa \frac{\partial \Gamma_{\rho\beta}^\kappa}{\partial x^\alpha} - V_\kappa \frac{\partial \Gamma_{\rho\alpha}^\kappa}{\partial x^\beta} + (V_\theta \Gamma_{\kappa\alpha}^\theta) \Gamma_{\rho\beta}^\kappa - (V_\theta \Gamma_{\kappa\beta}^\theta) \Gamma_{\rho\alpha}^\kappa \right). \quad (2.43)$$

Substituindo $\kappa \rightarrow \tau$ e $\theta \rightarrow \tau$, possível somente porque κ e θ estão contraídos, temos

$$\Delta V_\tau = V_\tau \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{\rho\beta}^\tau}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\alpha}^\tau}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\kappa\alpha}^\tau \Gamma_{\rho\beta}^\kappa - \Gamma_{\kappa\beta}^\tau \Gamma_{\rho\alpha}^\kappa \right) \Delta f^{\alpha\beta}, \quad (2.44)$$

onde o termo entre parênteses é o tensor de Riemann, dado explicitamente por

$$R_{\rho\alpha\beta}^\tau = \frac{\partial \Gamma_{\rho\beta}^\tau}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\alpha}^\tau}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\kappa\alpha}^\tau \Gamma_{\rho\beta}^\kappa - \Gamma_{\kappa\beta}^\tau \Gamma_{\rho\alpha}^\kappa. \quad (2.45)$$

Pode-se ainda tornar este tensor misto em um tensor totalmente covariante, basta multiplicar pela métrica covariante

$$R_{\mu\rho\alpha\beta} = g_{\mu\tau} R_{\rho\alpha\beta}^{\tau}. \quad (2.46)$$

Há duas possíveis contrações para se fazer com o Tensor de Riemann

$$R_{\alpha\beta} = g^{\mu\rho} R_{\mu\rho\alpha\beta}, \quad (2.47)$$

esta primeira contração de índices é conhecida por **Tensor de Ricci**, e fazendo mais uma, obtém-se o **Escalar de Ricci**

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (2.48)$$

Agora é possível deduzir as equações de Einstein. Os tensores obtidos, o de Curvatura e suas contrações, irão compor as Equações de Einstein. Sem eles, é impossível calcular as equações de campo. Eles, juntamente com o tensor métrico de Robertson-Walker, aberto em componentes são quem irão separar as componentes Linearmente Independentes. Em outro momento, quando for necessário, serão calculados as componentes dos Símbolos de Christoffel e, as componentes do Tensor de Curvatura. No momento, chegaremos à forma das Equações de Campo.

2.5 Equações de Campo de Einstein

Busca-se uma resposta geométrica para a distribuição de matéria no universo. Esta era a idéia de Einstein. Esta busca começa por determinar a mínima ação da ação total a qual é composta da soma das ações do campo de matéria e o campo gravitacional. Do modo

$$S_T = S_m + S_g, \quad (2.49)$$

aplica-se o princípio da mínima ação, variando em relação à métrica $g_{\mu\nu}$

$$\delta(S_T) = \delta(S_m + S_g) = 0. \quad (2.50)$$

A ação clássica depende de uma densidade de lagrangeana, estas densidades são

respectivamente $\mathcal{L}_g = \mathcal{L}_g(g^{\mu\nu}, \partial_\sigma g^{\mu\nu})$ para o campo gravitacional e $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(g^{\mu\nu}, \partial_\sigma g^{\mu\nu})$ para o campo de matéria.

Onde as ações S_g e S_m são dados por

$$S_g = \int \mathcal{L}_g(g^{\mu\nu}, \partial_\sigma g^{\mu\nu}) dx^4 = \frac{1}{2} \int R \sqrt{-g} dx^4, \quad (2.51)$$

$$S_m = \int \mathcal{L}_m(g^{\mu\nu}, \partial_\sigma g^{\mu\nu}) dx^4 = \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.52)$$

onde se aplica a variação, conhecida como Regra de Leibniz [1], e se obtém

$$\delta S_g = \frac{1}{2} \int (R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} d^4x). \quad (2.53)$$

Agora, é preciso contrair índices no Símbolo de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}, \quad (2.54)$$

e utilizar a propriedade matricial $Tr(M^{-1} \frac{\partial M}{\partial x^\lambda}) = \frac{\partial(\ln Det M)}{\partial x^\lambda}$, para obter

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \ln g. \quad (2.55)$$

Comparando estas duas e fazendo uso à propriedade abaixo

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (g^{\nu\sigma} g_{\mu\nu}) = \frac{\partial}{\partial x^k} \delta_\mu^\sigma = 0, \quad (2.56)$$

chega-se a

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.57)$$

e, substituindo (2.57) em (2.53)

$$\delta S_g = \frac{1}{2} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \frac{1}{2} \int (g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x). \quad (2.58)$$

Como a variação do tensor de Riemann é expressa por [1, 5]

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial(\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)}{\partial x^\lambda}, \quad (2.59)$$

então, para findar a integral

$$\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) d^4x, \quad (2.60)$$

o caminho é aplicar a lei de Gauss $\oint V^\mu \sqrt{-g} dS_\mu = \int \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\mu \sqrt{-g} d\Omega$, onde $d\Omega$ é o elemento de volume infinitesimal chega-se à variação da ação do campo gravítico[1].

Resultará em

$$\delta S_g = \frac{1}{2} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.61)$$

Agora, se faz a variação do campo da ação que corresponde à matéria, dada por (2.52), com intento de somar as duas ações e obter a ação total

$$\delta S_m = \int \delta(\mathcal{L}_m \sqrt{-g}) d^4x = -\frac{1}{2} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.62)$$

E, é possível definir $T_{\mu\nu}$ pela equação acima como

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \delta \frac{\sqrt{-g} \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.63)$$

Somando os resultados obtidos em (2.61) e (2.62) é obtida a expressão que representa a variação da ação em relação a $g_{\mu\nu}$

$$\delta S_T = \frac{1}{2} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0, \quad (2.64)$$

sendo $\delta g^{\mu\nu}$ arbitrário chega-se a

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = +T_{\mu\nu}. \quad (2.65)$$

A expressão acima é denominada Tensor de Einstein. Este tensor mostra a relação entre a geometria a malha espaço-temporal (lado esquerdo de (2.65)) e o tensor de energia e momento dos causadores de tal formação geométrica (lado esquerdo de (2.65)).

As equações de Einstein respeitam leis de conservação de energia e momento, portanto podemos dizer que $\partial_\lambda G_{\mu\nu} = 0$ onde ∂_λ é um operador diferencial covariante que representa $(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$. Einstein introduziu Λ (**Constante Cosmológica**) à sua equação com objetivo de tornar possíveis soluções estacionárias. Tem-se então para o conjunto das dez equações de Einstein a equação na sua forma completa expressa por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}. \quad (2.66)$$

Esta é a equação mais importante em cosmologia. Dela é possível extrair as equações dinâmicas dos problemas gravitacionais.

Como foi visto até aqui, o princípio de mínima ação constitui parte fundamental para adquirirmos as equações de relevância. Isto é um conceito que vem de Teoria Clássica de Campos.

O Tensor Energia momento da Equação de Einstein ainda não está completamente determinado. Um modo de adquirir um tensor que possa ser utilizado em (2.66) é através do Teorema de Noether. Há casos, em que o tensor obtido por esta técnica não poderá ser aplicado, porém, no momento, em que estamos estudando o contexto clássico, este tensor possui grande valia.

Na próxima seção será feita uma introdução à Teoria Clássica de Campos e, um pequeno estudo sobre o teorema de Noether o qual é de grande importância na física.

2.6 Campos Clássicos

O objeto matemático fundamental em teoria de campos clássicos é a ação, sendo expressa na forma genérica por

$$S = \int \mathcal{L} dt = \int \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) d^4x, \quad (2.67)$$

onde $\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$ representa uma **densidade lagrangeana**. Aplicamos agora o princípio

da mínima ação

$$\begin{aligned}
\delta S &= 0 \\
\delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta (\partial_\mu \Phi) \right] = \\
&= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \delta \Phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \delta \Phi \right], \quad (2.68)
\end{aligned}$$

onde utilizando o teorema fundamental do cálculo das variações onde a integral pelo caminho fechado é nula, obtém-se a equação para o movimento de um campo contínuo

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0, \quad (2.69)$$

que é a equação de Euler-Lagrange para campos.

2.7 Teorema de Noether

Emmy Noether desenvolveu uma técnica bastante útil que equilibra dois conceitos de fundamental importância Simetria e Conservação. Cada invariância (simetria) em um sistema traz como acréscimo uma quantidade física que se conserva. Exemplificando, se um sistema é invariante frente a uma translação apresenta conservação de momento linear. Este teorema pode ser expresso tanto utilizando coordenadas generalizadas como notações genéricas para campos, sua demonstração visa justificar a origem da forma da parte clássica dos tensores que compõem o modelo [18, 19].

$$\mathcal{L}(x) \leftarrow \mathcal{L}(x) + \alpha \partial_\mu I^\mu(x), \quad (2.70)$$

onde $\alpha \leftarrow$ parâmetro infinitesimal e, $\delta \phi \leftarrow$ pequena deformação na configuração do campo.

consideramos como exemplo uma translação infinitesimal

$$x'^\theta \rightarrow x^\theta - a^\theta.$$

Deste modo, o campo sofre uma deformação

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x + a) = \phi'(x) + a^\theta \partial_\theta \phi(x). \quad (2.71)$$

E a Lagrangeana que descreve o movimento do campo também sofre uma deformação que é expressa na forma mais geral por

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' + a^\theta \partial_\theta \mathcal{L} = \mathcal{L}' + a^\tau \partial_\theta (\delta_\tau^\theta \mathcal{L}), \quad (2.72)$$

Compara-se com a forma geral do teorema de Noether e conclui-se que a grandeza que se conserva, para o caso de campos, é uma densidade de corrente

$$T_\nu^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu. \quad (2.73)$$

Assim como no caso do tensor misto de Riemann, basta multiplicar pelo tensor métrico covariante para extrair o índice contra-variante de (2.73). Este Tensor de Energia momento, enquanto se tratar de casos clássicos, pode ser usado na equação formalmente na equação de Einstein como termo de fonte de gravidade. Cada tipo de espaço possui suas próprias simetrias, e destas simetrias, é que se extraem as quantidades que se conservam. Em espaço de Minkowski, é possível afirmar que há simetria de translação, logo, o Teorema de Noether é válido.

Em outros tipos de espaço, sob certas condições, é possível recuperar este resultado aqui obtido. Isto mostra que o limite newtoniano está para a R.G. assim como, o tensor de Noether está para um certo limite em espaço tempo curvo, como será visto no capítulo três.

Capítulo 3

Cosmologia

Neste capítulo vamos estudar em especial o modelo padrão da cosmologia bem, como seus sucessos e a necessidade de uma nova teoria que vá de encontro com teorias de unificação, que é uma das grandes buscas da Física.

De acordo com evidências atuais, o universo em seus momentos iniciais era constituído de uma sopa de quarks, glúons e energia em forma de radiação, cujas condições de temperatura e densidade eram extremas.

Estas evidências que dispomos são provenientes de observações e experiências. Podemos citar a Radiação Cós mica de Fundo, descoberta por Penzias e Wilson em 1965 quando testavam um receptor de microondas.

As experiências com aceleradores de partículas são bastante esclarecedoras no sentido de poder afirmar que, determinadas reações de minúsculas partes da matéria, só ocorrem, com energias muito elevadas [7, 39]. Energias elevadas são observadas na natureza, porém, ao natural observa-se em média uma partícula por quilômetro quadrado por ano nos pólos com energia em torno de $10^{19} GeV \approx 55 J$ [38]. Dispomos na atualidade de equipamentos capazes de nos indicar em que direção do espaço ocorreu uma explosão estrelar em nova e supernova, através da captação de neutrinos e análise de seu ângulo sólido de entrada na atmosfera, além dos mais avançados telescópios, que começaram a mostrar algo de relevância para a atualidade através de William Herchel, e sua irmã, Caroline.

Modelos inflacionários, sugeridos primeiramente por Allan Guth, solucionam muito bem problemas que o modelo padrão não consegue resolver. Porém, além de ser um assunto extremamente difícil a Inflação Cosmológica ainda é um alvo de estudo muito recente, e provavelmente ainda estamos longe de resolver o problema da correta descrição da dinâmica do universo.

3.1 Consideração Inicial - O Princípio Cosmológico

O **Princípio Cosmológico** nos diz que não há região privilegiada no universo. Para todos os pontos que olharmos teremos a mesma impressão, de qualquer referencial.

Então, este princípio nos reporta ao conceito de homogeneidade e isotropia. Tal conceito trata da simetria da distribuição da matéria em pequenos volumes. Porém, num sistema com as dimensões astronômicas, pequenos volumes é algo muito relativo.

Os volumes que considerados em cosmologia, são cubos de arestas com $100Mpc$. E toda a matéria contida no seu interior está uniformemente distribuída.

3.2 Métrica de Roberston Walker

As dez equações não lineares acopladas de Einstein, deduzidas em (2.66), possuem mais de uma solução. A solução que nos interessa para o trabalho é àquela que considera o princípio cosmológico como condição de contorno. Quando tal princípio é considerado e, assumindo um universo sem constante cosmológica, as equações de Einstein possuem solução exata, e esta é a métrica de FLRW (Friedman-Lemaître-Robertson-Walker), mais popularmente conhecida por métrica de Robertson-Walker [4]. Então, para calcular a distância entre dois pontos em um espaço curvo homogêneo e isotrópico, relacionando o invariante diferencial ds^2 e o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, fazendo uso da métrica de Robertson-Walker em coordenadas esféricas

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.1)$$

podemos obter a matriz que representa o tensor métrico por comparação entre (3.1) e (2.2), onde $g_{\mu\nu}$ toma o lugar do tensor de Minkowski, e assim temos [1]

$$g_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a(t)^2}{(1-kr^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

que define todos os elementos diagonais da matriz que descreve a métrica do espaço curvo considerado.

Nesta métrica, $a(t)$ é o **fator de escala**. Quando consideramos um universo em expansão, estamos considerando que a malha espaço-temporal está expandindo. Como

tal malha, é dividida em células imaginárias, a medida destas células é que irão expandir, proporcionalmente, em todas as direções. Por isto, o fator de escala é conhecido por este nome. O fator de escala é um elemento multiplicativo, ele multiplica um sistema de coordenadas fixas que é chamado **coordenadas comoveis**. Logo, é o fator de escala quem determina o quanto cada célula expande no decorrer do tempo. Os fatores k que estão inclusos na métrica é o que define três possíveis modos geométricos, faremos mais adiante no texto que k está intimamente relacionado com a densidade crítica do universo. Os três possíveis valores para k são $k = -1$, $k = 0$ e $k = 1$. Temos que k é a constante de curvatura, que pode representar três distintos tipos geométricos de espaço, sendo eles $k = 0$ para um espaço plano, $k > 0$ para um espaço fechado, também chamado de esférico, e $k < 0$ para um espaço aberto, ou hiperbólico [6].

3.2.1 Componentes do Tensor de Riemann

Dando continuidade na busca por soluções que envolvam as equações de Einstein (2.66), e o princípio cosmológico, temos que trabalhar com as componentes do tensor de Riemann, definido como sendo a parte entre parênteses em (2.44). Como o tensor de Riemann depende da conexão afim expressa por (2.17), também precisamos destas componentes.

Nesta seção vamos tratar exclusivamente de tais componentes tensoriais.

O pseudotensor (2.17), que caracteriza a conexão afim, mostra explicitamente a relação entre esta conexão e o tensor métrico.

Os objetivos principais desta seção são encontrar a componente temporal do tensor de Ricci (2.47) e o escalar de curvatura (2.48). Ambos são fundamentais para encontrar a **equação de Friedmann**, que será explicada ao longo do capítulo.

Iremos utilizar recursos computacionais para calculá-los, é um modo didático e prático de encontrar tais tensores. Mas primeiro, mostraremos como obter os elementos da conexão afim pelo modo tradicional, como segue abaixo. Depois de eliminar os termos que se anulam, pois o tensor métrico é nulo para componentes fora da diagonal, é obtida para a conexão afim (2.17) a seguinte componente [1]

$$\Gamma_{11}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}. \quad (3.3)$$

De modo análogo

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2, & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta & \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2}, \\
\Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2) & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} & \Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2) \sin^2 r & \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Para calcularmos o tensor de Riemann pelo modo tradicional, as componentes da conexão afim acima expostos são de fundamental importância. Podemos averiguar isto, através da relação abaixo

$$R_{1010} = g_{11}R_{010}^1 = g_{11}R_{010}^0 = g_{11} \left(\frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial x^1} + \Gamma_{01}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^1 - \Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^1 \right), \tag{3.5}$$

lembrando que índices contraídos representa soma.

Do mesmo modo, poderíamos seguir para encontrar as demais componentes.

Colocaremos aqui, alguns resultados de importância para os cálculos da dissertação. No apêndice consta a rotina que deve ser empregada no software Maple 10 que traz como resultado as componentes do tensor de Riemann, chistoffel de primeira e segunda ordem, componentes do tensor de Ricci e tensores de Einstein. Logo abaixo, temos a componente temporal do tensor de Ricci

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \tag{3.6}$$

e a seguir, as três componentes espaciais

$$R_{11} = -\left(\frac{a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k}{1-kr^2}\right), \quad R_{22} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2, \quad R_{33} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2(\theta). \tag{3.7}$$

a partir de qualquer componente espacial podemos equacionar uma regra geral, válida para espaços simétricos

$$R_{ij} = \frac{g_{ij}}{a^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k). \tag{3.8}$$

E logo abaixo, temos o escalar de Ricci proveniente da relação (2.48)

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right). \quad (3.9)$$

Os resultados (3.6) e (3.9), em especial, possuem significados de grande importância para os cálculos que serão desenvolvidos ao longo do trabalho.

3.3 Modelo Cosmológico Padrão

A idéia original do modelo padrão é que o universo evoluiu de um estado de alta temperatura e densidade que teve início com um evento violento. Tal evento é denominado **Big-Bang**. O Modelo Padrão diz então que, em torno de 13,6 bilhões de anos atrás, toda a forma de matéria existente estava concentrada em um único lugar do espaço com densidade infinita [11].

Uma perturbação neste sistema provocou a grande explosão, os elementos leves não foram formados no primeiro instante, não havia possibilidade de isto ocorrer. Para a formação dos primeiros bárions, era necessário o resfriamento para proporcionar a baixa de energia e, conseqüentemente, a ligação entre quarks [9, 7].

Os sucessos e a aceitação deste modelo se dá pelas previsões que este foi capaz de fazer. Ele previu a existência da Radiação Cósmica de Fundo e a nucleossíntese dos elementos leves [1].

Para o modelo padrão, o tensor que contém as informações sobre a matéria existente no universo é o tensor de energia-momento de um fluido perfeito.

Introduzem-se então as quadri-velocidades, a forma que se deseja obter para o tensor deve ser tal que, considerando um referencial na própria partícula, ela adquira a forma para o tensor de um fluido em repouso. Tal equação para um fluido perfeito, que é largamente usada na literatura para a descrição de modelos cosmológicos, em movimento adquire a forma [34, 23, 22]

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

Ao substituir a equação (3.10) em (2.66), as componentes de índice nulo do tensor de Ricci (3.6) e do tensor métrico (3.2) e o escalar de curvatura (3.9), chega-se a equação a qual foi denominada equação de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \quad (3.11)$$

Agora, com qualquer componente espacial do tensor de Ricci (3.7) e do tensor de energia-momento (3.10) chega-se à equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.12)$$

Derivando (3.11) em relação ao tempo e, substituindo (3.12) na equação que resultou da derivação, obtemos

$$\dot{\rho} + 3H(\rho_T + p) = 0. \quad (3.13)$$

Esta equação também pode ser obtida através da derivada covariante do tensor energia momento do fluido, o que significa aplicar uma lei de conservação de energia [35, 21, 12]. Podemos integrar (3.13) para isto, devemos efetuar uma simplificação. Tal simplificação é considerar o universo como sendo espacialmente plano. Também é necessário acrescentar uma equação de estado para os elementos constituintes do universo, sendo esta $p = \omega\rho$ onde ω é a constante a qual define o constituinte [11]. Assim, podemos integrar no tempo a equação para $\dot{\rho}$, o que resulta em

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+\omega)}, \quad (3.14)$$

onde ρ_0 representa a densidade inicial do constituinte analisado. Para este exemplo, está sendo analisado apenas um constituinte por vez, sendo seus possíveis valores $\frac{1}{3}$, -1 e 0 . Estes valores correspondem respectivamente a radiação (gás de fótons), energia de vácuo e matéria bariônica. Por substituição direta dos valores de ω em (2.19), obtemos os resultados para $\rho(t)$ em função do fator de escala.

Para universo dominado por energia de vácuo, a solução para a densidade será $\rho_\nu = \text{cte}$. Para a matéria de pressão nula, e para a radiação, teremos

$$p_m = 0 \longrightarrow \rho_m \propto a^{-3} \quad \text{e} \quad p_r = \frac{\rho_r}{3} \longrightarrow \rho_r \propto a^{-4}$$

Estes dois últimos resultados mostram que a solução gerada pela densidade de energia de radiação decai mais rapidamente por um fator a^{-1} quando comparado com a densidade de matéria.

3.3.1 Problemas do Modelo Cosmológico Padrão

Apesar de todas as vantagens do Modelo Padrão Cosmológico, ele não consegue resolver questões que se verificam por observações, logo, ele é contraditório. Exemplo disto é o **problema da planura** [7].

Através dos dados observacionais, o parâmetro de densidade do universo deve ser próximo do parâmetro crítico, que é estimado como uma unidade. Este valor traz como consequência que, ou o universo é plano ou quase plano.

O parâmetro de densidade, como será vista na próxima seção, é o principal elemento na definição da geometria no universo. Isto significa que, qualquer modificação em seu valor inicial, fará com que o universo evolua de um modo inesperado. Podendo este se expandir para sempre e até mesmo sofrer um Big-Crunch [6, 25].

Há outros problemas dentro do modelo padrão, como por exemplo, o **problema do horizonte**, e dos **monopólos magnéticos**. Estes argumentos, mostra a necessidade de desenvolver uma nova teoria. Allan Guth, na década de 80, propôs o modelo inflacionário. Este resolve problemas que o modelo padrão não resolve, mas não é uma teoria fechada, e ainda há muito que desenvolver.

Agora, veremos os parâmetros utilizados na cosmologia.

3.3.2 Alguns Parâmetros da Cosmologia

Esta seção tratará das principais grandezas que devem estar presentes em um modelo cosmológico.

a) Parâmetro de Hubble

O fato de o universo estar expandindo, foi constatado por Hubble em 1929, ao observar que objetos distantes estão se afastando do nosso referencial [1, 7]. Sua lei de expansão é descrita por $\mathbf{v} = H_0 \mathbf{r}$, onde \mathbf{v} é a velocidade de recessão do universo, \mathbf{r} a distância do objeto observado ao nosso referencial e H_0 , a constante de Hubble. Como, esta constante na realidade, não é constante, pois depende de grandezas que variam com o tempo, sua denominação será **parâmetro** de Hubble. Uma quantidade mensurável, e que possui alguns variados métodos de ser calculado.

Hubble encontrou, originalmente como sendo 55 km/s/Mpc . Atualmente, é aceito entre a comunidade astronômica como sendo aproximadamente 72 km/s/Mpc . Este valor é interpretado da seguinte forma, suponha uma galáxia distante da Terra de 100 Mpc, ela tem uma velocidade de recessão de aproximadamente 7200 km/s.

Assim, é possível definir o parâmetro de Hubble, para qualquer instante de tempo como

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (3.15)$$

onde $\dot{a}(t)$ é velocidade de recessão medida em (km/s) e, $a(t)$, o próprio fator de escala, em Megaparsec (Mpc).

Uma vez sabendo que a distância entre as galáxias aumenta com o tempo e, que a luz possui uma velocidade limite logo, ela leva um tempo para chegar até instrumentos de medida, podemos calcular o *redshift* do espectro de absorção, como sendo

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda_{em}} - 1 = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{em}}. \quad (3.16)$$

Onde, λ_{em} é o comprimento de onda emitido pela galáxia e λ_0 , o comprimento de onda que chega no instrumento de medida. Este conhecido resultado da óptica, o efeito Doppler, é aplicado na cosmologia, com aproximação para baixas velocidades de modo

$$z = \frac{v}{c} = \frac{l_0 a(t) H}{c} \quad (3.17)$$

onde l_0 , é a distância no tempo entre duas galáxias, chamada de distância própria. Com este resultado, podemos visualizar que o desvio para o vermelho é diretamente proporcional ao parâmetro de Hubble. A figura abaixo visa tornar um pouco mais claro, como o valor do parâmetro de Hubble é determinado.

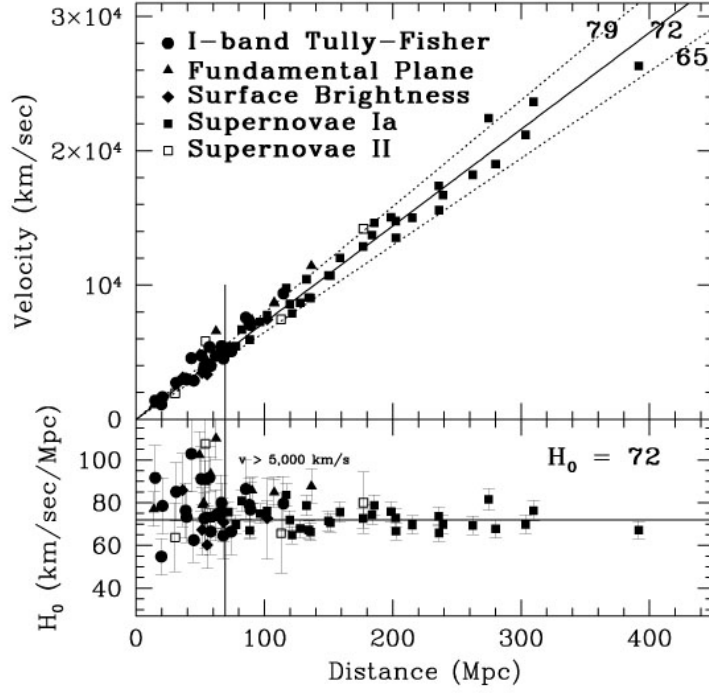


Figura 3.1: Comparação entre observações para determinar o parâmetro de Hubble

Então, para determinar o parâmetro de Hubble, são feitas várias observações e, se extrai destas observações um valor razoável, que admite uma pequena margem de erro.

b) Parâmetro de desaceleração

Assim como em mecânica clássica, onde temos que a aceleração é a variação da velocidade em relação ao tempo, em cosmologia, temos de certo modo, que a variação do parâmetro de Hubble em relação ao tempo nos fornece o parâmetro de desaceleração. Para que a expansão seja acelerada, é necessário que o q_0 seja negativo. O modo de adquirir sua representação matemática é expandir $a(t)$ em torno do tempo presente, e generalizamos para tempos arbitrários, do modo

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{q_0}{2} H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots$$

$$q = -\frac{\ddot{a}}{H^2 a} = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{4\pi G}{H^2 c^2} \left(p + \frac{1}{3}\rho \right), \quad (3.18)$$

seu valor, quando negativo, significa expansão acelerada. Do contrário, desacelerada. O sinal negativo foi literalmente colocado à mão, baseado em idéias e observações de alcance limitado que indicavam estar o universo em uma fase de expansão desacelerada. Temos que $a(t)$ é o fator de escala normalizado em relação ao tempo atual. Do modo

$$a(t) \equiv \frac{R(t)}{R_A} \quad e \quad R_A = R(t_A). \quad (3.19)$$

Ao observarmos (3.18), temos visivelmente que o parâmetro de desaceleração depende da densidade total e da pressão da matéria presente no Universo. Pode-se concluir então que a matéria é de fato muito importante para o comportamento atual da aceleração cósmica.

c) Parâmetros de densidade

A equação de Friedmann (3.11) é necessária para compreender o que são os parâmetros de densidade. Tal equação é a componente temporal das equações de Einstein (2.66), ela mostra que há uma relação entre o parâmetro de Hubble e a densidade do universo.

Fazemos uso então de (3.6), (3.9) e, da definição a qual diz que a componente temporal do tensor energia-momento de um fluido perfeito corresponde à sua densidade [5, 23].

Deste modo, temos a equação

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (3.20)$$

Ao reescrever a equação de Friedmann de modo mais conveniente e, utilizando (3.15)

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho - \frac{k}{a^2H^2}, \quad (3.21)$$

Onde definimos os parâmetros **densidade da soma de todas as fontes** e **densidade de curvatura**, igualando à unidade $1 = \Omega_{fontes} + \Omega_k$.

Que, por comparação com (3.21), obtemos respectivamente

$$\Omega_{fontes} = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho \quad e \quad \Omega_k = -\frac{k}{a(t)^2H^2} \quad (3.22)$$

Se, $k = 0$ então $\Omega_T = 1$. Faz-se as devidas substituições chega-se ao adimensional parâmetro de distribuição de matéria

$$\Omega_T = \frac{\rho}{\rho_c} = 1 \quad (3.23)$$

Que induz o importante resultado

$$\rho = \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (3.24)$$

O qual representa a densidade crítica do universo, ou seja, a densidade total de matéria e

energia necessária para que o universo seja exatamente plano. Pouco mais, pouco menos resulta em outra geometria. Com estas informações é possível fazer as seguintes relações

$$k = -1 \rightarrow \text{universo aberto, pois } \rho < \rho_c \text{ logo, } \Omega_T < 1$$

$$k = 0 \rightarrow \text{universo plano, pois } \rho = \rho_c \text{ logo, } \Omega_T = 1$$

$$k = 1 \rightarrow \text{universo fechado, pois } \rho > \rho_c \text{ logo, } \Omega_T > 1$$

Nos modelos que consideram universo homogêneo e isotrópico, a geometria plana ou quase plana, é a mais provável.

3.4 Contraproposta Inflacionária para solucionar os problemas do Modelo Padrão

Nesta seção, vamos estudar algumas propostas inflacionárias. A primeira tentativa de um modelo inflacionário, não se mostrou muito promissora, pois para esta, o universo deveria de ser completamente preenchido por constante cosmológica, ou energia de vácuo. Além de apresentar inhomogeneidades no final da era inflacionária [14].

Uma outra proposta que será apresentada é de um campo escalar gerador de inflação.

3.4.1 Universo Permeado por Constante Cosmológica

Para descrever o universo jovem, com tempo de existência inferior a 10^{-34} s, solucionando os principais problemas do MCP Alan Guth propôs que, é de que neste período o fator de escala passou por uma aceleração absurdamente grande. Guth fez uso da constante cosmológica como uma possível causadora de tal fenômeno. Supondo então, a equação de Friedmann com a constante cosmológica (3.11).

Como a hipótese primeira da inflação é que o fator de escala passou por um enorme acréscimo, a curvatura e a densidade sofreram uma diluição bem rápida. É possível perceber olhando as relações de proporcionalidade da equação de Friedmann. Tomas-se então a simplificação

$$\frac{\dot{a}}{a} \approx \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \quad (3.25)$$

Onde por integração se chega a

$$a(t) = a_0(t) \exp \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t. \quad (3.26)$$

Zel'Dovich foi quem associou Λ a energia de vácuo, colocando Λ como um termo de fonte, do modo [14, 13]

$$\frac{\Lambda}{8\pi G} = \rho_\nu \longrightarrow \Lambda = 8\pi G\rho_\nu, \quad (3.27)$$

onde ρ_ν é a energia de vácuo. E a nova solução para o fator de escala seria

$$a(t) = a_0(t) \exp \sqrt{\frac{8\pi G\rho_\nu}{3}} t. \quad (3.28)$$

Considerando as condições especiais desta época, um modo de interpretar fisicamente a constante cosmológica, além de um termo de fonte é utilizando conhecimentos de teoria quântica de campos.

A densidade deste ponto de vista fica entrelaçada com a energia de vácuo. Para calcular qual seria a grandeza da energia de vácuo é preciso considerar a dimensão de λ que é de $[L]^{-2}$ como sendo o comprimento de Planck [25].

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \approx \frac{L_{pl}^{-2}}{8\pi G} = \frac{[(\hbar G/c^3)^{\frac{1}{2}}]^{-2} c^2}{8\pi G} \approx 10^{95} \frac{kg}{m^3}. \quad (3.29)$$

Campos escalares como de Higgs ou Goldstone, poderiam ter fornecido um mecanismo natural para a inflação, e sua energia potencial pode ser associada à constante cosmológica [13]. Uma outra proposta seria inflação caótica, onde flutuações quânticas fazem com que o campo de Higgs tenha valores aleatórios em diferentes regiões do universo, isto traria como consequência valores diferentes da Λ em diferentes partes do universo, acarretando inflações diferentes.

O grande problema da solução (3.28), é a inflação eterna [27]. Isto, para um modelo realista, não é o desejado. Espera-se um modelo que passe por fases, a fase da radiação e da matéria.

Na próxima seção, será apresentada uma possibilidade de inflação, a partir de campos escalares.

3.4.2 Soluções inflacionárias a partir de Campo Escalar

Para descrever de modo mais formal a inflação, dentro da simplicidade possível, considera-se o campo escalar ϕ , tais campos descrevem um campo de partículas de spin nulo. Consideremos então, a densidade lagrangeana de um campo escalar não massivo

$$\mathcal{L}_{inf} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial^\nu\phi - V(\phi), \quad (3.30)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial escalar [26]. Ao aplicarmos tal densidade lagrangeana, no tensor de Noether (2.73), obtemos

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right). \quad (3.31)$$

Onde, abrindo as componentes do tensor e, comparando com a equação do fluido perfeito chegamos a [24, 7]

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad e \quad p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (3.32)$$

Para haver uma expansão acelerada, o termo cinético deve ser muito inferior ao termo de potencial, do modo

$$V(\phi) \gg \frac{\dot{\phi}^2}{2}, \quad (3.33)$$

com esta condição podemos concluir que $p_\phi = -V_i = -\rho_\phi$. E ainda, que o potencial deve possuir seu máximo valor. Desse modo ele encontra-se num estado chamado de **estado de falso vácuo**[7].

O potencial do campo escalar deve sair do falso vácuo variando muito lentamente para um mínimo valor, deste modo, com pressão negativa variando proporcionalmente com o potencial é o que garante expansão acelerada. Este processo é conhecido por **aproximação Slow-roll** [13, 25].

$$\epsilon = \frac{1}{16\pi} \frac{V'}{V} \quad e \quad \eta = \frac{1}{8\pi} V''V, \quad (3.34)$$

Onde, para garantir uma rolagem lenta, o potencial deve obedecer as condições $\epsilon \ll 1$ e $|\eta| \ll 1$. As condições Slow-roll são equivalentes à condição imposta sobre os parâmetros cosmológicos para que ocorra a inflação. Para que a aceleração seja positiva, precisamos das seguintes condições para o parâmetro de Hubble

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1, \quad (3.35)$$

e, para ocorrer inflação precisamos que $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ e $\ddot{\phi} \ll V'(\phi)$, então, teremos para a equação de Friedmann e, para a equação de movimento para o ínflaton, respectivamente

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}V(\phi) \quad e \quad 3H\dot{\phi} = -V'(\phi), \quad (3.36)$$

aplicando estas últimas na condição (3.35), teremos que $-\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{V'}{V}\right) = \epsilon < 1$. Este resultado mostra que há inflação até valores de $\epsilon \sim 1$. A condição obtida através de (3.33), nos leva a possibilidade de efetuar a troca, na equação de Friedmann, da densidade total pelo potencial escalar. Efetuando então, esta integração, obtemos para universo espacialmente plano

$$H = \sqrt{\frac{8\pi V(\phi)}{3}}, \quad (3.37)$$

que por sua vez produz a solução desejada na forma de exponencial

$$a(t) = a_0(t) \exp \sqrt{\frac{V(\phi)}{3}}. \quad (3.38)$$

A justificativa para o potencial migrar do falso vácuo para o vácuo verdadeiro vai depender do modelo utilizado.

Existem modelos de inflação caótica que utiliza argumentos de tunelamento, por exemplo. Um exemplo de potencial é $V(\phi) = V_i \phi^n$, onde V_i e n são constantes arbitrárias [13]. Nas próximas subseções, iremos analisar os problemas que as soluções inflacionárias aqui obtidas podem resolver.

3.4.3 Problema de Horizonte

Um fóton percorre uma geodésica nula em um referencial comóvel, onde ϕ e θ mantêm-se constantes. Do elemento de linha da métrica de Robertson-Walker obtém-se

$$cdt = \frac{Rdr}{\sqrt{(1 - kr^2)}}, \quad (3.39)$$

onde, é possível encontrar através da integral, a distância própria l_h ao horizonte de eventos r_h deste fóton

$$\frac{l_h}{R} = c \int_0^t \frac{dt}{R} = \int_0^{r_h} \frac{dr}{\sqrt{(1 - kr^2)}}, \quad (3.40)$$

a desigualdade abaixo é valida quando se compara a distância atual até a superfície do último espalhamento e o horizonte de eventos no desacoplamento

$$\int_0^{t_{des}} \frac{dt}{R} \ll \int_{des}^{t_0} \frac{dt}{R}. \quad (3.41)$$

Quando ocorreu o desacoplamento entre matéria e radiação, o comprimento de Hubble (H^{-1}) era comparável ao que hoje se tem como separação angular

$$\theta_{des} = (0.87)\Omega_0 \left(\frac{z_{des}}{1100}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.42)$$

o que traz por conseqüência que regiões afastadas por ângulos ≥ 1 não estavam em contato causal, neste sentido, o MCP não consegue explicar como a radiação cósmica de fundo pode ser tão homogênea e isotrópica se no passado não estavam em contato causal.

3.4.4 Problema da Curvatura

Faz-se $\Lambda = 0$ no Modelo de Friedmann e é fácil mostrar que [1]

$$kc^2 = (\Omega - 1)R^2H^2. \quad (3.43)$$

No período dominado pela radiação, o fator de escala tinha uma dependência com $t^{1/2}$, no período dominado pela matéria a dependência temporal segue a lei $t^{2/3}$. Fazendo uso de $H = \frac{\dot{a}}{a}$, chega-se

$$|\Omega - 1| \propto t, \rho_r \gg p_m \quad |\Omega - 1| \propto t^{2/3}, \rho_r \ll p_m, \quad (3.44)$$

Através de observações é possível dizer que $\Omega_0 = 1,02 \pm 0,02$, $T_0 = 13,7 \cdot 10^9$ anos e $t_{des} = 3,8 \cdot 10^5$ anos. Desse modo

$$\frac{|\Omega_0 - 1|}{|\Omega_{des} - 1|} = \left(\frac{t_0}{t_{des}}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 10^3. \quad (3.45)$$

Desse modo, no desacoplamento esperava-se $|\Omega - 1 \approx 10^{-3}|$, na época de Planck $t_p = 1,35 \cdot 10^{-43} s$ e $|\Omega_p - 1| \approx 10^{-60}$. O MCP impõem condições iniciais muito peculiares para a existência de um universo plano, o que incentiva a busca de novas explicações.

3.4.5 Problema dos Monopolos Magnéticos

A quebra espontânea de simetria supostamente ocorrida em $t \approx 10^{-35} s$, gera soluções que podem ser interpretadas como partículas com carga magnética. Tais partículas teóricas teriam energia de repouso de $10^6 GeV$ o que equivale a uma massa de aproximadamente $1,8 \cdot 10^{-8} g$. A densidade de monopolos existente na época, devido à expansão deveria ter valor atual da ordem de $10^{-15} g cm^3$ que é muito maior que o valor numérico da densidade crítica.

Na próxima seção, será vista algumas soluções inflacionárias, que por sua vez, resolvem alguns destes problemas que o modelo cosmológico padrão não é capaz de resolver. Para fins de conhecimento geral, é importante saber que antes da quebra espontânea de simetria, a qual desacoplou a força gravitacional das outras três fundamentais, isto é, para escalas muito pequenas, menores que a escala de Planck ($< 10^{-33} cm$), a teoria clássica perde a validade. Torna-se necessária a quantificação do campo gravitacional, pois eles se tornam relevantes [7].

O campo gravitacional ainda não foi quantificado, embora muitos físicos estejam tentando, no momento, uma alternativa é trabalhar com campos quânticos em espaço tempo curvo. Tais considerações serão utilizadas no capítulo três do trabalho.

Capítulo 4

Visão Básica de Teoria de Campos em Espaço-tempo Curvo

Neste capítulo estudamos conceitos de Teoria de Campos em espaço-tempo plano e curvo. Um campo Ψ é um sistema com infinitos graus de liberdade, onde o funcional da ação $S[\Psi]$ especifica a dinâmica do sistema via equação de Euler-Lagrange [19, 18]. Um outro ponto fundamental é que, via processo de quantização, uma **teoria quântica de campos** pode ser formulada para Ψ . O campo de Klein-Gordon é, por excelência, o sistema onde os métodos mencionados acima são inicialmente utilizados. Neste capítulo consideramos o campo de Klein-Gordon imerso num espaço-tempo de Minkowski e numa segunda etapa num espaço tempo curvo, situação importante pela sua conexão com a cosmologia. Finalmente fizemos uma descrição de como calcular o valor esperado do tensor energia-momento desse campo, com o objetivo de montar uma teoria semi-clássica.

4.1 Campo escalar em espaço tempo de Minkowski e sua quantização

Vamos considerar uma densidade lagrangeana que, representa um campo massivo em espaço tempo plano. Tal densidade terá funções de campo descritas como Ψ , fazendo menção ao campo de matéria do modelo que, será representado por ψ . Sendo a ação de um campo massivo dada por

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - m^2 \Psi^2), \quad (4.1)$$

a equação do movimento do campo pode ser obtida através da mínima ação, ou, por

substituição da densidade lagrangeana na equação de Euler-Lagrange. De ambos os modos, obtemos a equação de Klein-Gordon para um campo com massa

$$(\square + m^2)\Psi = 0, \quad (4.2)$$

onde $\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$, esta equação representa o movimento de um campo em espaço-tempo de Minkowski, e admite solução de onda plana, em notação quadrivetorial, onde p^0 representa a energia. Aqui está expresso em sua forma contravariante, a forma covariante também possui o mesmo significado. Podemos considerar as relações quânticas $E = \hbar\omega$ e $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, para substituí-las na solução de onda plana gerada por (4.2) e deste modo, obtemos

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(p^0x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \Rightarrow \Psi(\mathbf{x}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}, \quad (4.3)$$

e \mathbf{A} é uma constante de normalização a ser determinada. Realizando a primeira e a segunda derivada em (4.3) e substituindo em (4.2), temos os modos de frequências de variações de onda plana expressos por $\omega^2 = m^2 + \mathbf{k}^2$.

Agora, consideremos a relação vinda da Relatividade Restrita para energia e momento:

$$E^2 = c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4 \quad \Rightarrow \quad E = \pm c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}, \quad (4.4)$$

onde ambas as soluções são permitidas, sendo que as soluções negativas representarão antipartículas e, substituímos as relações quânticas para energia e momento nesta relação, o resultado obtido é (4.1).

Este é um argumento que permite dizer que, depois de quantizar Ψ e transformá-lo em um operador de campo, tal operador, deve representar uma partícula de massa m . Se, a lagrangeana apresentada no princípio desta seção fosse desprovida de massa, sob mesmo argumento, o operador adquirido na quantização, deve representar uma partícula sem massa [17, 18].

Passaremos agora para o estudo da quantização canônica para o campo de Klein-Gordon. Tal quantização surge da necessidade de introduzirmos os termos de correções no modelo cosmológico estudado.

Para isto, consideremos a teoria clássica. Os elementos desta teoria já foram obtidos a partir do tensor energia-momento obtido via teorema de Noether no primeiro capítulo.

Logo, até então temos uma descrição de partículas clássicas, e estas, formam por definição um conjunto discreto. Para a quantização de tais elementos, as variáveis dinâmicas do sistema clássico, são por sua vez, promovidos a operadores de campo. A isto se chama segunda quantização. Feita a seguinte generalização de sistemas discretos para contínuos:

$$q_i \rightarrow \Psi(x), p_i \rightarrow \pi(x), \delta_{ij} \rightarrow \delta^3(x - y) ,$$

e suas respectivas relações de comutação [33]:

$$\begin{aligned} [\Psi(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}, t)] &= i\hbar\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ [\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\Psi}'(\mathbf{x}', t)] &= [\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}'(\mathbf{x}', t)] = 0, \end{aligned}$$

onde π é a densidade de momentos conjugados ao campo Ψ , e \mathbf{x} é um vetor no espaço de três dimensões $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

A relação entre a lagrangeana e o momento conjugado será:

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta[\partial_t\Psi(\mathbf{x}, t)]} = \partial_t\Psi(\mathbf{x}, t). \quad (4.5)$$

Na representação de Schrodinger, π e Ψ são independentes do tempo, logo, não é a representação adequada para o problema que estudamos. Na representação de Heisemberg, as relações de comutação são válidas a tempos iguais, então os operadores são tomados no mesmo instante. Uma vez que se expressa a Hamiltoniana através dos operadores π e Ψ , a Hamiltoniana também será um operador. Agora, para a quantização propriamente dita, consideremos a equação de Klein-Gordon dada por (4.2). Esta equação representa o campo que acompanha uma partícula escalar, independente se esta partícula possui ou não massa [28]. Como foi visto, esta equação possui solução de ondas planas. Na seção anterior, o objetivo era mostrar sua relação com a equação relativística, onde excluimos a solução com modos de frequências negativas. Vamos considerar a solução completa de (4.3), expandindo-a para os dois modos possíveis:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n e^{(ik_n x - i\omega t)} + a_n^* e^{(-ik_n x + i\omega t)}), \quad (4.6)$$

a forma de combinação linear em que a solução está apresentada garante que a solução pertence ao conjunto dos números reais e que o volume é invariante de Lorentz. Se escreve esta solução no espaço de Fourier com intento de, posteriormente, encontrar o

espectro da Hamiltoniana. Assim, a solução da equação de Klein-Gordon, de um sistema discreto para um sistema contínuo será:

$$\frac{1}{V^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}, \quad (4.7)$$

deste modo, a constante de normalização vem junto com a transformada. Agora, promove-se a função Ψ que representa o campo escalar a operador no espaço de Hilbert, onde, por consequência, vamos obter os operadores de criação e destruição:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} (\hat{a}(k)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t} + \hat{a}^\dagger(k)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega t}). \quad (4.8)$$

Vale salientar que há outros métodos para encontrar a constante de normalização, por exemplo, impor condições de ortonormalidade às funções $u(\mathbf{x}, t)$. A constante aparece naturalmente na transformada de Fourier.

Agora, assim como para a primeira quantização, se expressa os operadores criação e destruição em termos dos operadores posição e momento, aqui, estes operadores serão expressos em termos do momento conjugado ao campo e do próprio campo. Primeiro será necessário conhecer as propriedades do produto escalar, em termos deste produto, também ficará expressa as propriedades de ortonormalidade das funções $u(x, t)$.

Pela definição de produto escalar [17]:

$$(\Psi_1, \Psi_2) = -i \int \Psi_1 \vec{\partial}_0 \Psi_2^* d^3x \quad \text{onde} \quad A \vec{\partial}_0 B = A \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial t} B. \quad (4.9)$$

É usual e de bastante utilidade expressar (4.8) em termos do conjunto de soluções ortonormalizáveis $u(\mathbf{x}, t)$:

$$u(\mathbf{x}, t) = D e^{(-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \quad e \quad D = \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}, \quad (4.10)$$

onde \mathbf{D} representa a constante de normalização. Assim, após a substituição em (4.8), dos termos exponenciais por $u(\mathbf{x}, t)$ obtém-se:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} (\hat{a}(k)u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) + \hat{a}^\dagger(k)u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t)), \quad (4.11)$$

Ainda com o objetivo de provar que a hamiltoniana do campo escalar massivo é um operador, é possível tornar explícita a forma dos operadores criação e aniquilação. Para isto se multiplica, $-i \int u_{\mathbf{k}'}^* \vec{\partial}_0 d^3x$ que é obtido pelo produto escalar (4.9), pela esquerda de (4.11) e obtemos

$$\begin{aligned}
i \int u_{\mathbf{k}'}^* \vec{\partial}_0 d^3x \cdot \hat{\Psi} &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left(\hat{a}(k) \int u_{\mathbf{k}'}^* i \vec{\partial}_0 u_{\mathbf{k}} d^3x \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left(\hat{a}(k) \int \delta(k - k') d^3k \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \hat{a}(k) &= \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} i \int u_{\mathbf{k}'}^* \vec{\partial}_0 d^3x \cdot \hat{\Psi}, \tag{4.12}
\end{aligned}$$

de modo semelhante, multiplica-se pela direita $-i \int \vec{\partial}_0 d^3x$, e o resultado é o operador criação na forma:

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \hat{\Psi} i \vec{\partial}_0 u_{\mathbf{k}'} d^3x, \tag{4.13}$$

Os operadores destruição e criação estão sujeitos as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned}
[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\
[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] &= [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0,
\end{aligned}$$

e o contador do número de partículas, que será mais bem explicado quando o estado de vácuo for definido:

$$(2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(0) N(k) = a^\dagger(k) a(k). \tag{4.14}$$

Este operador, além de ser um ingrediente facilitador para os cálculos possui uma importante relação com a hamiltoniana que será desenvolvida na próxima seção, porque a hamiltoniana que será encontrada é uma função linear de \mathbf{N} . Com isto, podemos diagonalizar simultaneamente a hamiltoniana com o operador número. O modo como este operador atua em um vetor de estado, e seus possíveis autovalores, serão discutidos na seção que tratará do estado de vácuo.

4.1.1 Tensor de energia-momento

O tensor energia-momento surge de uma carga conservada, devido à invariância de translação no tempo. Desse modo, temos a Hamiltoniana. Este fato é o que se chama de

uma (simetria). Considerando um campo homogêneo e isotrópico, o que está sendo conservada é a densidade de energia. Esta densidade corresponde a componente temporal do Tensor de Noether. Seja então o tensor (2.73) para uma lagrangeana massiva, na métrica de Minkowski, a densidade de energia do campo será dada por:

$$T_{00} = \frac{1}{2}(\dot{\Psi}^2 + \overbrace{\nabla\Psi^2}^{=0} + m^2\Psi^2), \quad (4.15)$$

onde a quantidade anulada é pelo campo ser considerado homogêneo e isotrópico. Temos a hamiltoniana [18]:

$$H = \int \mathcal{H} d^3 x = \int T_{00} d^3 x = \int \frac{1}{2}(\dot{\Psi}^2 + m^2\Psi^2) d^3 x, \quad (4.16)$$

ao substituirmos a função Ψ (4.11) e sua derivada primeira em relação ao tempo, em termos dos operadores criação e aniquilação, teremos:

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int \frac{1}{2}(\hat{\Psi}\hat{\Psi}' + m^2\Psi\Psi') d^3 x = \int \frac{1}{2} \left\{ \left[\int \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(\hat{a}(k) \frac{\partial u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \hat{a}^\dagger(k) \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right) \right. \right. \\ \left. \left(\hat{a}(k') \frac{\partial u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}', t)}{\partial t} + \hat{a}^\dagger(k') \frac{\partial u_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}', t)}{\partial t} \right) \right] + m^2 \left[\int \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(\hat{a}(k) u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) + \hat{a}^\dagger(k) u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t) \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left(\hat{a}(k') u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}', t) + \hat{a}^\dagger(k') u_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}', t) \right) \right] \right\} d^3 x. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Esta equação pode ser reduzida, por propriedades de ortonormalidade das funções $u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}', t)$, sua derivada primeira e seus respectivos complexos conjugados [17, 8]. Efetuando as devidas simplificações em (4.17) integrando sobre todos os $d^3 k'$ teremos

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3 k [\hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k') + \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k')] \omega_k, \quad (4.18)$$

onde usando as relações de comutação para os operadores de criação e destruição e, adquire-se a integral:

$$\hat{H} = \int d^3 k \left[\frac{1}{2} + \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k') \right] \omega_k. \quad (4.19)$$

Esta integral, mostra a energia total do sistema obtido através do tensor energia-momento no espaço-tempo de Minkowski e, representada a energia de infinitos osciladores [18].

Na próxima seção será estudado o estado de vácuo, no final, iremos aplicar o operador hamiltoniano (4.19) e, mostrar que seu valor esperado é igual ao valor esperado da densidade de energia que, terá como resultado a energia de ponto zero.

4.1.2 Estado de Vácuo

A quantização para ficar completa precisa da definição de vácuo. Este é o estado de mais baixa energia, não necessariamente nula, mas a mais baixa. A energia neste estado será denotada por E_0 e corresponde a não existência de partículas.

O operador definido em (4.19) é de muita importância. Para definir bem sua atuação no espaço das partículas é necessário conhecer como atuam os operadores de criação e aniquilação.

De uma maneira simplificada, o que ocorre é

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle ,$$

onde $|n\rangle$ é o autoestado do operador número de partículas, com autovalor n .

$N|n\rangle = n|n\rangle$ Assim sendo, podemos mostrar a atuação do operador número em um autoestado n , como segue

$$N|n\rangle = a^\dagger a|n\rangle = a^\dagger \sqrt{n}|n-1\rangle = \sqrt{n} a^\dagger|n-1\rangle = \sqrt{n} \sqrt{n-1+1}|n\rangle = n|n\rangle .$$

Há, no entanto uma restrição bastante óbvia, a de que não se pode destruir uma partícula quando o a energia do sistema é a mais baixa, logo:

$$a(\vec{k})|0\rangle = 0, \tag{4.20}$$

e todos os demais autoestados quânticos podem ser construídos atuando no vácuo $|0\rangle$ os operadores de criação:

$$a^\dagger_1 a^\dagger_2 \dots |0\rangle ,$$

agora, fazemos a Hamiltoniana (4.19) atuar no vácuo, do modo:

$$\begin{aligned} \hat{H}|0\rangle &= \int d^3k \left[\frac{1}{2} + \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k') \right] \omega_k |0\rangle \\ &= \frac{1}{2} \omega_k |0\rangle . \end{aligned} \tag{4.21}$$

Por definição, densidade de energia do vácuo dada pelo valor esperado no vácuo do tensor de energia- momento, é nulo, logo:

$$\langle 0|\mathcal{H}|0 \rangle = \langle 0|T_{00}|0 \rangle = 0. \quad (4.22)$$

Porém, para espaço tempo curvo o estado de vácuo não é bem definido. Entende-se que a quantidade $\langle 0|T_{\mu\nu}|0 \rangle$ seria diferente de zero influenciando por sua vez na geometria do espaço-tempo [34]. Por este motivo a quantidade $\langle \Phi^2 \rangle = \langle \Phi\Phi' \rangle$ é uma quantidade importante e usada para descrever estados quânticos em espaço tempo curvo. Logo, ordenamento temporal é algo bastante importante.

4.1.3 Ordenamento Normal

Como o produto $\langle \Psi^2 \rangle$ é uma quantidade matemática que envolve produto de operadores como vimos na seção anterior, é comum deste produto, surgirem quantidades divergentes. Um método para remover estas divergências é o ordenamento normal. Esta técnica induz uma direção preferencial no tempo. Esta técnica, consegue fazer a conexão entre função de Green, temporalmente ordenada com o a ação da teoria, representada no funcional. Este funcional é a quantização do caminho integral, dado explicitamente por

$$Z(J) = \int \mathcal{D}[\Psi] e^{iS_m[\Phi] + i \int \overbrace{J(x)\Psi i(x)}^{=0} d^4x}, \quad (4.23)$$

onde D é um funcional, (4.23) representa a amplitude de transição do vácuo inicial $|0, i \rangle$ para um estado final de vácuo, $|0, f \rangle$. Para espaço-tempo curvo, há uma diferença entre os estados final e inicial de vácuo. Quando o espaço-tempo for espacialmente plano e, quando não há produção de partículas, a corrente $J(x) = 0$. Aplicamos agora o princípio variacional de Shwinger, por se tratar de uma integral de caminho quantizada

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta Z(J=0)}{\delta g^{\mu\nu}} = i \langle 0|i|T_{\mu\nu}|f0 \rangle. \quad (4.24)$$

Podemos utilizar a normalização aqui apresentada por se tratar primeiramente de espaço-tempo espacialmente plano, $k = 0$, para o limite onde $J = 0$ que caracteriza a não produção de partículas, assim temos que $Z(J = 0) \Rightarrow \langle 0|i|f0 \rangle = \langle 0|0 \rangle = 1$.

Precisamos de um potencial efetivo, que será extraída do caminho integral pelo princípio variacional já mencionado.

Deste modo temos que $Z(J = 0) = e^{iW} \Rightarrow -i \ln \langle 0|0 \rangle = W$ onde combinando com

(4.24) temos

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\langle 0|T_{\mu\nu}|0 \rangle}{\langle 0|0 \rangle}, \text{ onde } W \text{ é o potencial efetivo.} \quad (4.25)$$

Este resultado é bastante importante, ele será acrescentado no capítulo quatro à ação clássica (2.64) de onde iremos extrair as Equações Modificadas de Einstein as quais fazem parte do modelo cosmológico estudado no presente trabalho.

Prosseguimos então, com o estudo do ordenamento temporal.

$$T[\Psi(x)\Psi(y)] = \begin{cases} \Psi(x)\Psi(y) & \text{se } x^0 > y^0 \\ \Psi(y)\Psi(x), & \text{se } x^0 < y^0 \end{cases} \quad (4.26)$$

ou seja, em termos da função degrau:

$$T[\Psi(x)\Psi(y)] = \theta(x^0)\Psi(x)\Psi(x') + \theta(-x^0)\Psi(x')\Psi(x), \quad (4.27)$$

o valor esperado desta equação resulta no propagador de Feynmann [18, 19]:

$$\langle 0|T[\Psi(x)\Psi(y)]|0 \rangle = iG_F(x, x'). \quad (4.28)$$

e tal, deve satisfazer a relação [8]:

$$-(\square - m^2)G_F(x - x') = \delta^4(x - x'), \quad (4.29)$$

escrevemos a função de Green avançada e a função de Green retardada respectivamente como:

$$G_R(x, x') = -\theta(t - t')G(x, x') \quad e \quad G_A(x, x') = \theta(t' - t)G(x, x'), \quad (4.30)$$

onde a média destas duas quantidades é dada por:

$$\bar{G}(r, r') = \frac{1}{2}[G_R(x, x') + G_A(x, x')], \quad (4.31)$$

e, a função de Green deve ser interpretada como um operador que atua no espaço dos vetores $|\mathbf{x}\rangle$, o qual, é normalizado em espaço tempo curvo como:

$$\langle x|x'\rangle = \delta^n(x-x')\sqrt{-g(x)}. \quad (4.32)$$

Um dos objetivos de aqui apresentar este formalismo, é dizer de modo consistente que a relação citada no início desta secção é:

$$i^j \langle 0|T(\Psi(x)\Psi(x'))|0\rangle = \left(\frac{\delta^j \ln Z}{\delta J(x)\delta J(x')}\right). \quad (4.33)$$

4.2 Campo escalar em espaço tempo curvo

Dentro do contexto da cosmologia é possível analisar o problema do Big-Bang e os primeiros instantes do universo através de uma teoria de campo semi-clássica já que não existe casamento perfeito entre Mecânica Quântica e Relatividade Geral [7, 18]. Nesta teoria semi-clássica, também chamada de teoria de quantização em espaço tempo curvo, o campo gravitacional é tratado classicamente como gerador da métrica de fundo e os demais campos que compõem o universo estudado podem ser quantizados, numa teoria de campo semi-clássica [8].

A seguir apresentamos de maneira sucinta a abordagem técnica para quantizar um campo escalar na teoria semi-clássica é semelhante a técnica usada para a quantização em espaço-tempo plano.

Definimos a densidade lagrangeana de um campo escalar massivo, como no caso anterior por:

$$\mathcal{L}_m = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi - \frac{1}{2}m^2\Psi^2 - \frac{1}{2}\xi R\Psi^2\right], \quad (4.34)$$

e, por consequência a quantidade fundamental em teoria de campos.

$$S_\Psi = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi - \frac{1}{2}m^2\Psi^2 - \frac{1}{2}\xi R\Psi^2\right], \quad (4.35)$$

onde ξ é uma constante de acoplamento entre o campo escalar e o campo gravitacional.

Este, pode ser mínimo quando for nulo e pode ser conforme. Quando é conforme

$\xi_c = \frac{1}{4}\frac{(n-2)}{(n-1)}$ onde n é a dimensão do espaço-tempo.

Tornando mínima a ação (4.35), assim como no espaço plano, é obtida uma equação de Klein-Gordon para o movimento do campo dada por:

$$(\square + m^2 + \xi R)\Psi = 0, \quad (4.36)$$

e, o D'alambertiano para o campo escalar massivo em espaço tempo curvo ficará [8]:

$$\square\Psi = g_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\Psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Psi], \quad (4.37)$$

com a expressão de ξ para campo escalar não massivo conformemente acoplado ao campo gravitacional, é possível reescrever a equação de Klein-Gordon do modo:

$$\left(\square + \frac{1(n-2)}{4(n-1)}R\right)\Psi = 0, \quad (4.38)$$

A solução geral desta equação é também expressa como uma superposição linear de ondas planas, do mesmo modo que no espaço de Minkowski. Os operadores de criação e destruição são obtidos aplicando o produto de Klein-Gordon pela esquerda e pela direita do operador campo, exatamente como foi feito no caso plano e este procedimento, trás como resultado os mesmos operadores que foram obtidos.

4.2.1 Tensor Energia Momento em espaço tempo curvo

Uma primeira observação é que no espaço tempo curvo, não é possível fazer uso do tensor obtido pelo Teorema de Noether, cada espaço-tempo possui suas características particulares. É necessário então construir outro tensor, que dependa da métrica de fundo, e por consequência, que sirva para qualquer espaço-tempo, pois, este tensor deve ser de tal modo, que seja possível recuperar o resultado clássico. O procedimento não difere do caso de Minkowski. Para o caso mais geral, é usado o campo de matéria. A Ação total é dada do mesmo modo que no capítulo um, (2.49). Porém agora, como se busca um tensor mais geral, o qual nos remeta ao resultado para espaço-plano sob certas condições, a densidade de lagrangena do campo de matéria deve considerar um acoplamento com o campo gravitacional.

Como o modelo estudado estamos usando um potencial nulo para o campo de ínflaton, encontrar o $T_{\mu\nu}$ mais geral a partir do campo de matéria não trará problemas, mesmo porque, no final, as quantidades interessantes necessárias para a correção do tensor energia momento são quantidades apenas geométricas. Vamos considerar a densidade

lagrangeana dada por (4.34). O algoritmo usado para o cálculo das equações de campo de Einstein será o mesmo empregado aqui, e a ação para o campo gravitacional será a (2.64), em unidades naturais. Primeiro impomos que a ação deve ser mínima $\delta S = \delta(S_g + S_m) = 0$, com um pouco mais de detalhes abaixo:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^n x [\delta \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi - (m^2 + \xi R) \Psi^2 + \frac{1}{8\pi} R) \\ &+ \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi + \delta R (\frac{1}{8\pi} - \xi \Psi^2))] = 0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

Valem as mesmas regras utilizadas para encontrar a variação da ação total no primeiro capítulo, porém agora, temos mais elementos. Para melhor entendimento, ver as equações: (2.54), (2.57), (2.60), (2.64) e a referência [8].

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^n x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[-G_{\mu\nu} + (2\xi - 1) \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi + (\frac{1}{2} - 2\xi) g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \Psi \nabla_\sigma \Psi \right. \\ &\left. + 2\xi \Psi \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi - 2\xi g_{\mu\nu} \Psi \square \Psi + \xi R_{\mu\nu} \Psi^2 - \frac{1}{2} \xi g_{\mu\nu} R \Psi^2 - \frac{1}{2} \xi g_{\mu\nu} m^2 \Psi^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

como a região de integração é arbitrária, a quantidade buscada se torna o próprio integrando:

$$\begin{aligned} -G_{\mu\nu} &= (1 - 2\xi) \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi + \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \Psi \nabla_\sigma \Psi - 2\xi \Psi \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi \\ &+ 2\xi g_{\mu\nu} \Psi \square \Psi - \xi R_{\mu\nu} \Psi^2 + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} m^2 \Psi^2, \end{aligned} \quad (4.41)$$

e, realizando a devida analogia com (2.65), obtemos o tensor energia momento para o espaço-tempo curvo para um campo massivo:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= (1 - 2\xi) \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi + \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \Psi \nabla_\sigma \Psi - 2\xi \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi + 2\xi g_{\mu\nu} \Psi \square \Psi \\ &- \xi g_{\mu\nu} R \Psi^2 + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} m^2 \Psi^2, \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde se definirmos que $\eta^{\mu\nu} \leftarrow g^{\mu\nu}$, $m = 0$ e $\xi = 0$ obtém-se o tensor energia-momento no caso plano (3.31) [8]. A seguir estudaremos a renormalização do tensor de energia-momento. Um estudo necessário devido as divergências que este apresenta no momento de sua integração. Tais divergências não podem ser retiradas como no caso clássico, através de uma integral de Gauss assumindo condições de fronteira. Como foi feito no capítulo um.

4.2.2 Renormalização do Tensor energia-momento

Para calcular o tensor de stress para campos quânticos em espaço tempo com a métrica de fundo de RW, o interesse neste cálculo é devido ao alto grau de simetria presente neste modelo, bem como sua relevância cosmologica.

Estas integrais estão em d^3k porque o espaço-tempo é espacialmente plano $k = 0$ [8]

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \int T_{\mu\nu}(\mathbf{k}, x) d^3k, \quad (4.43)$$

onde o tensor é expresso em termos dos modos $u_{(\mathbf{k})}$

Fazemos uso então do campo Ψ em termos dos operadores de criação e destruição a^\dagger e a . Obtido o tensor energia momento para um campo escalar não massivo e com acoplamento mínimo na métrica RW é:

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \Psi \nabla_\sigma \Psi, \quad (4.44)$$

usando a solução da equação de Klein-Gordon, expresso na forma (3.14), em detalhes, temos após efetuar os produtos escalares e considerando que é conhecido o fato que não se pode destruir uma partícula onde não há nenhuma, então, alguns dos valores esperados serão nulos e teremos

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{\mu\nu}|0 \rangle = & C^2 \int_k \int_{k'} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x^\nu} \frac{\partial u'^*}{\partial x^\mu} \langle 0|a_k a_{k'}^\dagger|0 \rangle + \frac{\partial u^*}{\partial x^\nu} \frac{\partial u'}{\partial x^\mu} \langle 0|a_{k'}^\dagger a_k|0 \rangle \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x^\rho} \frac{\partial u'^*}{\partial x^\tau} \langle 0|a_k a_{k'}^\dagger|0 \rangle + \frac{\partial u^*}{\partial x^\rho} \frac{\partial u'}{\partial x^\tau} \langle 0|a_{k'}^\dagger a_k|0 \rangle \right) \right\} d^3k d^3k', \quad (4.45) \end{aligned}$$

onde C^2 é uma constante de normalização. Integrando em k' e aplicando propriedades de ortonormalidade nas funções $u_{\mathbf{k}}$ e seu complexo conjugado se chega a

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0 \rangle = C^2 \int_k \left\{ \frac{\partial u}{\partial x^\nu} \frac{\partial u'^*}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\tau} \frac{\partial u}{\partial x^\rho} \frac{\partial u'^*}{\partial x^\tau} \right\} d^3k. \quad (4.46)$$

Esta integral diverge e, para resolver este problema, é necessário fazer uso da **lagrangeana efetiva** e dos conceitos discutidos na seção sobre ordenamento temporal que é a função de Green para o propagador de Feymann [30, 8].

O valor esperado do tensor de stress renormalizado é dado por

$\langle 0^A|T_{\mu\nu}(x)|0^A \rangle = \int T_{\mu\nu}^A(\mathbf{k}, x) d^3k$, onde A é a dimensionalidade. Para as referencias aqui utilizadas $A = 4$. Desse modo

$$\begin{aligned}
\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren} &= \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle - \langle 0^A | T_{\mu\nu} | 0^A \rangle |^A \\
&= \int [T_{\mu\nu}(\mathbf{k}, x) - T_{\mu\nu}^A(\mathbf{k}, x)] d^3k,
\end{aligned} \tag{4.47}$$

o tensor energia momento renormlizado pela lagrangeana efetiva, será [30, 8, 33, 31]:

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle_{ren} &= \left(\frac{1}{2880\pi^2} \right) \left[\left(-\frac{1}{3} \nabla_\mu \nabla_\nu R + R_\mu^\rho R_{\rho\nu} - R R_{\mu\nu} \right) \right. \\
&\quad \left. + g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{3} \square R - \frac{1}{2} R^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma} + \frac{1}{3} R^2 \right) \right] \\
&= -\left(\frac{1}{2880\pi^2} \right) \left[{}^{(1)}H_{\mu\nu} \frac{1}{6} - {}^{(3)}H_{\mu\nu} \right].
\end{aligned} \tag{4.48}$$

As quantidades ${}^{(1)}H_{\mu\nu}$ e ${}^{(3)}H_{\mu\nu}$ são funções puramente geométricas, que surgem da renormalização do tensor energia-momento. Analizando individualmente o termo ${}^{(1)}H_{\mu\nu}$ podem ser escrito

$${}^{(1)}H_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} R^2 \tag{4.49}$$

$${}^{(2)}H_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{4.50}$$

desta forma usando (4.48) chegamos a ${}^{(3)}H_{\mu\nu}$ [30]. Podemos escrever então tais quantidades geométricas como

$${}^{(1)}H_{\mu\nu} = 2\nabla_\mu \nabla_\nu R - 2g_{\mu\nu} \square R + \frac{1}{2} R^2 - 2R R_{\mu\nu} \tag{4.51}$$

$${}^{(3)}H_{\mu\nu} = \frac{2}{3} R R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R^2 g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - R_{\mu\alpha} R_\nu^\beta, \tag{4.52}$$

Trabalhando em particular com a métrica de Robertson-Walker, a qual é largamente utilizada em cosmologia por representar universo homogêneo e isotrópico, podemos reescrever ${}^{(1)}H_{\mu\nu}$ e ${}^{(3)}H_{\mu\nu}$ para espaço-tempo espacialmente plano

$$\begin{aligned}
{}^{(3)}H_{00} &= 4,5a(t)^4\ddot{a}(t)^2 + 18a(t)^3\ddot{a}(t)\dot{a}(t)^2 + 18a(t)^2\dot{a}(t)^4 + \frac{28,5\ddot{a}(t)^2}{a(t)^2} + \\
&+ \frac{42\ddot{a}(t)\dot{a}(t)^2}{a(t)^3} + \frac{9\dot{a}(t)^4}{a(t)^4}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

$${}^{(1)}H_{00} = -\frac{18\ddot{a}(t)^2}{a(t)^2} + 18\frac{\dot{a}(t)^4}{a(t)^4}, \tag{4.54}$$

e, para as componentes espaciais

$$\begin{aligned}
{}^{(3)}H_{11} &= \frac{39\ddot{a}(t)^2}{2} + \frac{3a(t)^4\ddot{a}(t)^2}{2} + 6a(t)^3\ddot{a}(t)\dot{a}(t)^2 + 6a(t)^2\dot{a}(t)^4 + \frac{10\ddot{a}(t)\dot{a}(t)^2}{a(t)} \\
&+ \frac{5\dot{a}(t)^4}{a(t)^2}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$${}^{(1)}H_{11} = 6\ddot{a}(t)^2 + 12a(t)\ddot{\ddot{a}}(t)^4 - \frac{96\ddot{a}(t)\dot{a}(t)^2}{a(t)} + \frac{78\dot{a}(t)^4}{a(t)^2}, \tag{4.56}$$

Estes resultados são obtidos utilizando os conhecimentos adquiridos no capítulo dois seção 3.2.1, o tensor de Riemann e suas contrações.

A constante e , (4.48) de valor $\frac{1}{2880\pi^2}$ é uma propriedade da matéria de campos bosônicos [31]. No próximo capítulo, vamos descrever uma cosmologia inflacionária, como foi visto no segundo capítulo. Para isto utilizaremos campos bosônicos.

Capítulo 5

Modelo Cosmológico com Campo de Bósons como Inflaton

O modelo cosmológico estudado neste capítulo trata de dois campos bosônicos fontes de gravitação. Temos o campo de inflaton e o campo de matéria. Investigaremos a influência de efeitos quânticos no campo de inflaton para este modelo cosmológico quadridimensional.

O campo ϕ irá representar o inflaton (campo bosônico) onde sua dinâmica será regida pela equação de Klein-Gordon. As correções quânticas estão incluídas no tensor energia-momento por outro lado, campo ψ representará o campo de matéria, cuja dinâmica também será regida por uma equação de Klein-Gordon.

Nosso trabalho consiste em encontrar conjuntos de valores iniciais que solucione o sistema de equações diferenciais não lineares que será aqui exposto. Tais valores iniciais devem produzir soluções dentro da cosmologia inflacionária. Como o modelo estudado possui duas versões, a clássica e a semi-clássica, temos que encontrar valores iniciais de modo que seja possível a comparação entre ambas as variações do modelo. Esta é a contribuição original de nosso trabalho.

5.1 Equações de Klein-Gordon em Espaço tempo Curvo

Na seção 1.6 foi dada uma breve introdução à teoria de campos. Foi mostrado que se uma variação é aplicada à densidade lagrangeana clássica e, tornando esta variação mínima, temos como resultado a equação de Euler-Lagrange (1.69). No capítulo três obtivemos a equação de equação de Klein-Gordon (3.2) para um campo de matéria ψ , temos sua densidade lagrangeana definida por (4.34).

Lembrando que estamos trabalhando com acoplamento mínimo, podemos simplesmente fazer $\xi = 0$ em (4.36). Com isto, adquirimos novamente a equação de Klein-Gordon para espaço tempo-plano

$$(\square + m^2)\psi \Rightarrow (\nabla^\nu \nabla_\nu + m^2)\psi = 0, \quad (5.1)$$

O próximo passo será aplicar a derivada covariante à derivada do campo de matéria. Aqui então é usada a geometria Riemanniana, pelo fato de ser espaço tempo curvo e não Minkowskiano nos reporta a seguinte condição $\nabla^\nu \nabla_\nu = \nabla_\nu(\partial^\nu \Psi)$, onde pela definição de derivada covariante temos

$$\nabla_\nu(\partial^\nu \psi) = \ddot{\psi} + \Gamma_{0\mu}^\mu(\partial^0 \psi) + \overbrace{\Gamma_{\theta\mu}^\mu}^{=0}(\partial^\theta \psi). \quad (5.2)$$

Pelo fato de que o modelo trabalhado considera propriedades de isotropia, então, as derivadas espaciais são nulas e a parte temporal do símbolo de Christoffel (2.17) na métrica FLRW 3.2, para o caso espacialmente plano, é dado

$$\Gamma_{0\mu}^\mu = \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3 = 3\frac{\dot{a}}{a}. \quad (5.3)$$

A equação clássica para o campo de matéria num universo descrito para tal elemento de linha na condição de espaço plano $k = 0$ em (3.2) será

$$(\square + m^2)\psi = \ddot{\psi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\psi} + m^2\psi = 0. \quad (5.4)$$

Do mesmo modo, obtemos uma equação de Klein-Gordon para o campo de ínflaton em espaço-tempo curvo, lembrando que esta não possui termo de potencial como na equação anterior onde, o termo de potencial é o potencial massivo, deste modo temos

$$\square\phi = \ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} = 0. \quad (5.5)$$

Estas equações de movimento para os dois campos aqui estudados, são equações de continuidade assim como (3.13) porém, descrita em termos dos campos. Tais equações dinâmicas em conjunto com o traço do tensor de Einstein (2.65) acrescido do termo corretivo obtido no capítulo anterior (4.48), irão compor o sistema de equações cosmológicas para o modelo aqui investigado.

Tal acréscimo no tensor de Einstein pode ser motivado via variação da ação total, como foi mostrado no primeiro capítulo. Veremos de um modo simplificado que o termo corrigido estudado no terceiro capítulo surge desta variação da ação, assim, temos a versão semi-clássica do modelo. Vale lembrar, pelo que foi até o momento estudado que as formulações lagrangeanas são um modo apropriado para a dinâmica relativística, pois todas as expressões são invariantes de Lorentz [18]. Por outro lado as formulações hamiltonianas são necessárias para realizar a quantização no campo responsável pela inflação, pois somente assim é possível fazer um análogo e descrever o tensor energia momento quanticamente. Tudo o que foi até aqui estudado será aplicado no próximo capítulo, para encontrar as soluções cosmológicas do problema.

5.2 Equações de Campo para o Modelo

Para chegarmos a equação do modelo, precisamos calcular a variação da ação total do sistema em relação a $g_{\mu\nu}$ e esta, deve ser um mínimo, do modo

$$\delta S_T = \delta \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_T d^4 x, \quad (5.6)$$

onde a densidade lagrangeana total corresponde a soma das densidades lagrangeanas clássica e semi-clássica.

A variação da ação clássica foi obtida do modo mais simples no primeiro capítulo e corresponde a equação (2.64) [5]. Enquanto que a integral de caminho, de onde se extrai a lagrangeana semi-clássica, foi mencionada no terceiro capítulo (4.23). Deste modo podemos encontrar a renormalização do tensor energia-momento [30]. Temos que

$$\delta S_T = \delta \int \left(\frac{1}{2} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - T_{\mu\nu}) + W \right) g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x = 0, \quad (5.7)$$

que resultará na equação modificada de Einstein

$$(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - T_{\mu\nu}) + \langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle = 0. \quad (5.8)$$

Onde substituímos o valor esperado do tesor energia-momento pelo seu valor renormalizado (4.48) como segue abaixo

$$G_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}^{cl} - \left(\frac{h}{2880\pi^2}\right) [{}^{(1)}H_{\mu\nu} \frac{1}{6} - {}^{(3)}H_{\mu\nu}] = 0, \quad (5.9)$$

onde a constante $\frac{h}{2880\pi^2}$, representam **partículas escalares**, como já foi discutido no capítulo anterior [32, ?].

A equação (5.9) será a equação mestra para o modelo. Onde $T_{\mu\nu}^{cl}$ corresponde a soma dos campos clássicos de matéria e de ínflaton, do modo $T_{\mu\nu}^{cl} = T_{\mu\nu}^{\phi cl} + T_{\mu\nu}^{\psi cl}$.

Temos ainda que a equação (5.9) é uma equação tensorial, é possível representá-la como uma matriz. Lembrando que estamos utilizando unidades naturais ($\hbar = c = 8\pi G = 1$) [21]. Podemos ainda reagrupar os termos de (5.9) com o objetivo de separarmos os termos geradores de gravitação das respostas geométricas geradas por tal campo, do modo

$$G_{\mu\nu} - \left(\frac{h}{2880\pi^2}\right) {}^{(1)}H_{\mu\nu} \frac{1}{6} + \left(\frac{h}{2880\pi^2}\right) {}^{(3)}H_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{cl}. \quad (5.10)$$

Para encontrarmos soluções cosmológicas, devemos fazer uso das propriedades do traço do tensor de Einstein. Considerando as três componentes espaciais linearmente dependentes (LD), o traço de (5.9) ficará expresso por

$$\mathbf{Tr}[G_{\mu\nu}] = G_{00} + \overbrace{G_{11} + G_{22} + G_{33}}{=LD} = 0. \quad (5.11)$$

Desse modo temos então que somar as componentes temporal e a primeira espacial do tensor acima, lembrando da métrica de Robertson-Walker (3.2), sendo tais componentes dadas explicitamente por

$$G_{00} = T_{00}^{cl} + \left(\frac{h}{2880\pi^2}\right) \left[{}^{(3)}H_{00} - {}^{(1)}H_{00} \frac{1}{6} \right], \quad (5.12)$$

$$G_{11} = T_{11}^{cl} + \left(\frac{h}{2880\pi^2}\right) \left[{}^{(3)}H_{11} - {}^{(1)}H_{11} \frac{1}{6} \right], \quad (5.13)$$

A soma de (5.12) e (5.13) é uma combinação linear das componentes linearmente independentes do tensor de Einstein. Tal soma será a terceira equação do modelo a qual

deverá ser integrada numericamente.

$$G_{00} + G_{11} - T_{00}^{cl} - T_{11}^{cl} - \left(\frac{h}{2880\pi^2}\right) \left[{}^{(3)}H_{00} - {}^{(1)}H_{00}\frac{1}{6} \right] - \left(\frac{h}{2880\pi^2}\right) \left[{}^{(3)}H_{11} - {}^{(1)}H_{11}\frac{1}{6} \right] = 0 \quad (5.14)$$

onde as quantidades geométricas, dependentes do fator de escala ${}^{(1)}H_{00}$ e ${}^{(3)}H_{00}$, assim como ${}^{(1)}H_{11}$ e ${}^{(3)}H_{11}$ são àquelas obtidas no capítulo anterior e dadas pelas equações (4.53), (4.54), (4.55) e (4.56), respectivamente.

Os únicos elementos que faltam determinar, para chegarmos finalmente as equações que serão integradas, são os que dependem dos tensores de energia-momento para os campos clássicos de matéria e de bósons.

A partir do tensor energia-momento definido para espaço-tempo curvo (4.42), para $\xi = 0$, podemos obter tais elementos pendentes. Para o campo bosônico fazemos em (4.42) $m = 0$ e, para o campo de matéria, no mesmo tensor, fazemos $m \neq 0$. Calculamos então suas componentes na métrica RW para $k = 0$ e temos

$$\begin{aligned} T_{00}^{\phi} &\Rightarrow \rho_{\phi} = \frac{1}{2}\dot{\phi}(t)^2 & T_{00}^{\psi} &\Rightarrow \rho_{\psi} = \frac{1}{2}\dot{\psi}(t)^2 + \frac{1}{2}\psi(t)^2 \\ T_{11}^{\phi} &= a(t)^2\frac{1}{2}\dot{\phi}(t)^2 & T_{11}^{\psi} &= a(t)^2\frac{1}{2}\dot{\psi}(t)^2 - a(t)^2\frac{1}{2}\psi(t)^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Agora, temos todas as equações para investigarmos soluções cosmológicas. A equação (5.14) com as devidas substituições das componentes tensoriais (5.15), em conjunto com as equações dinâmicas dos campos escalares (5.4) e (5.5), formam um conjunto de três equações diferenciais não lineares a serem resolvidas.

Observe que, ao fazermos $h = 0$ na soma das equações (5.12) e (5.13) o que obtemos é, versão clássica do modelo. Com isto, podemos comparar as soluções cosmológicas para ambos os casos, é o que será feito na próxima seção.

5.3 Valores Iniciais para o Modelo

As soluções cosmológicas do modelo aqui tratado dependerão exclusivamente de um problema de valor inicial. O conjunto de equações a ser resolvido, (5.4), (5.5) e (5.10) é altamente não linear, com derivadas de ordem superior a três, para a versão

semi-clássica do modelo. Estas derivadas de ordem superior são resultantes dos termos geométricos adquiridos pela renormalização do tensor energia-momento.

O modelo foi então integrado numericamente pelo software Maple 10 e seus gráficos plotados no Software Oringin Lab 7.5.

Afim de estudarmos o comportamento de ambas as versões do sistema, começaremos por analisar a versão clássica do modelo.

Vamos ter em mente a situação onde toda a energia está na forma de inflaton, gradativamente decaído ao longo do tempo causando o período de aceleração positiva, característico da era cosmológica inflacionária. Assim, para $t = 0$, nos tensores correspondentes às densidades de campo escalar bosônico e campo de matéria obtidos respectivamente por T_{00}^{ϕ} e T_{00}^{ψ} em (5.15) aplicamos as seguintes condições iniciais

$$\rho_{\phi(0)} |_{max} = \frac{\dot{\phi}(0)^2}{2} |_{max} = 1 \rightarrow \dot{\phi}(0) |_{max} = \sqrt{2}, \quad (5.16)$$

$$\rho_{\psi(0)} |_{min} = 0 \quad (5.17)$$

Como o modelo não possui um termo de interação direta entre os campos de inflaton e de matéria, tais campos interagem indiretamente via campo gravitacional para ambas as versões do modelo. Os valores iniciais de $\dot{\psi}(0)$ e $\psi(0)$ estão definidos como nulos pela condição inicial (5.17). Observando que quanto mais estes valores diferirem de zero, mais teremos que diminuir o valor de $\dot{\phi}(0) |_{max}$. Este raciocínio deve ser seguido, tomando por base que

$$\rho_{\phi}(0) + \rho_{\psi}(0) = 1 \Rightarrow \psi(0)^2 + \dot{\phi}(0)^2 + \dot{\psi}(0)^2 = 2, \quad (5.18)$$

e servirá para a construção de uma tabela onde teremos os valores iniciais mais adequados para as densidades de energia para resolver o modelo dentro das condições exigidas pelo período cosmológico estudado.

Agora, analisaremos a equação de Friedmann (3.11), esta possui um valor bem determinado para qualquer instante de tempo, para ambas as versões clássica e semi-clássica do modelo, porque depende da densidade total de energia do universo, dada por (5.18). Então, sabendo disto, vamos analisar a equação de Friedmann como função das densidades para chegarmos a um valor inicial para $\dot{a}(0)$, onde ρ^T representa a densidade total de energia do universo

$$\dot{a}(t) = a(t) \sqrt{\frac{\rho^\phi(t) + \rho^\psi(t)}{3\rho^T}}. \quad (5.19)$$

Para o instante $t = 0$, considerando a condição de normalização por ajuste de relógios

$$\dot{a}(t = 0) = \overbrace{a(t = 0)}^{=1} \sqrt{\frac{1}{3}}. \quad (5.20)$$

Deste modo, os valores iniciais que resolvem a versão clássica do modelo, já estão determinados. Visto que conhecemos $a(0) = 1$ e $\dot{a}(0) = 1/\sqrt{3}$, também temos a relação entre as densidades de energias (5.18).

Podemos tornar explícita a relação entre a derivada segunda do fator de escala e os campos escalares. Isto se dá somando (5.12) e (5.13) com $h = 0$, isolando $\ddot{a}(t)$. Para se chegar a esta equação, tomemos primeiramente as componentes do tensor de Einstein, para universo espacialmente plano, cuja forma compacta está dada pelos termos geométricos do lado esquerdo de (2.65), onde foram utilizados (3.6) e (3.9)

$$G_{00} = -3\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} \quad G_{11} = 2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}(t)^2, \quad (5.21)$$

a equação para aceleração obtida através do processo descrito acima será dado por

$$\ddot{a}(0) = \frac{1}{2a(0)} \left\{ 3\frac{\dot{a}(0)^2}{a(0)^2} - \dot{a}(0)^2 + \frac{a(0)^2}{2} (\dot{\psi}(0)^2 - \psi(0)^2 + \dot{\phi}(0)^2) + \overbrace{\rho^\psi(0) + \rho^\phi(0)}^{=1} \right\}, \quad (5.22)$$

aplicando os valores iniciais já definidos para o fator de escala e sua derivada primeira temos para o valor inicial da aceleração clássica, a seguinte dependência

$$\ddot{a}(0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left\{ \dot{\phi}(0)^2 + \psi(0)^2 \right\}. \quad (5.23)$$

Deste modo, podemos ver a relação entre a aceleração e os campos escalares. Por uma questão de estratégia, iremos utilizar como valor inicial para a aceleração, na versão semi-clássica do modelo, a resposta obtida para esta variável quando integramos a

versão clássica. Isto nos dá o benefício da primeira comparação entre os dois sistemas. Posteriormente, se necessário, faremos os devidos ajustes para valores mais convenientes. Respeitando a proporção entre as densidades dos constituintes (5.18), podemos construir a seguinte tabela

$\rho^\psi(0)$	$\psi(0)$	$\rho^\phi(0)$	$\dot{\phi}(0)$
0.05	$\sqrt{10}/10$	0.95	$\sqrt{190}/10$
0.06	$\sqrt{3}/5$	0.94	$\sqrt{47}/5$
0.07	$\sqrt{14}/10$	0.93	$\sqrt{186}/10$
0.08	$2/5$	0.92	$\sqrt{46}/5$
0.09	$3\sqrt{2}/10$	0.91	$\sqrt{91}/50$
0.1	$\sqrt{5}/5$	0.9	$3\sqrt{5}/5$

Tabela 5.1: Proporção entre as densidades de matéria e de campo escalar (5.18)

Esta tabela está considerando valores iniciais para as densidade de matéria compreendida entre 5% e 10% da densidade de energia total. Estes valores foram assim escolhidos, pois abaixo de 5% de densidade de matéria, os resultados obtidos não são os melhores para a cosmologia. Isto será melhor elucidado no momento em que fizermos a análise dos gráficos.

Como já conseguimos determinar os valores iniciais para a versão clássica do modelo e o objetivo é compará-lo com sua versão semi-clássica, continuaremos nosso estudo agora visando determinar valores iniciais para a derivada terceira do fator de escala, já que os termos geométricos provenientes da renormalização do tensor-energia momento possui derivada de quarta ordem para o fator de escala, deste modo, o integrador numérico computacional utilizado precisa de um valor inicial para a derivada terceira do fator de escala.

Lembrando que o termo corretivo em (5.12) e (5.13) tem origem na renormalização do tensor energia-momento e, que tal procedimento é feito sobre o campo de bósons, como foi mostrado no capítulo 3, temos que a versão corrigida para a densidade de ínflaton ($\rho^\phi(t)_{qt}$) será a soma da componente temporal do tensor energia-momento para o campo de bósons clássico (5.15) com a componente temporal do tensor energia-momento renormalizado (4.48)

$$\rho^\phi(t)_{qt} = \frac{\dot{\phi}(t)^2}{2} + \left(\frac{h}{2880\pi^2}\right) \left[{}^{(3)}H_{00} - {}^{(1)}H_{00} \frac{1}{6} \right]. \quad (5.24)$$

Ou seja, o sistema clássico é aquele que não possui termos de correção para o campo

bosônico representado em (5.24) pela segunda parcela do lado direito. Uma opção de analisar o valor inicial da derivada terceira do fator de escala é resolver a equação (5.24) para $t = 0$ por atribuição de valores, desse modo, obtemos que tal derivada resulta numa constante. Portanto, podemos assumir qualquer valor para esta derivada de ordem superior.

Além disso, muitos gráficos foram gerados com o intento de verificar a importância do valor inicial para a derivada terceira, de fato, o conjunto de equações da versão semi-clássica do modelo gera resultados que não diferem qualitativamente, independente do valor assumido para tal derivada do fator de escala. Logo, vamos assumir por simplicidade que $d^3a(0)/dt^3 = 0$. Agora, que já possuímos a devida quantidade de valores iniciais, podemos integrar o sistema definido pelas equações de movimento do campo (5.4) e (5.5) juntamente com a equação resultante da soma dos tensores de Einstein (5.12) e (5.13).

Os resultados obtidos desta integração numérica serão discutidos na próxima seção, através da análise detalhada dos gráficos gerados para o fator de escala $a(t)$, a aceleração de expansão $\ddot{a}(t)$, a densidade de energia de matéria $\rho^\psi(t)$ e a densidade de energia de campo bosônico $\rho^\phi(t)$. Todos os resultados obtidos estão dentro do que esperamos para o fator de desaceleração q_0 (3.18), o qual foi explicado no segundo capítulo da dissertação e, por tal explicação, para universo em expansão acelerada este parâmetro deve ser negativo.

5.4 Discussão dos Resultados

As soluções que serão aqui discutidas são as que têm significado cosmológico para a era inflacionária, ou seja, os resultados devem apresentar fator de escala monotonicamente crescente, aceleração positiva e em algum momento a densidade de matéria deve superar a densidade de ínflaton. O sistema visto de modo puramente matemático, possui outras soluções. Muitas soluções foram geradas, fazendo rotinas no integrador numérico Maple 10, de modo que fossem criados vários conjuntos de valores iniciais. Dentro das soluções obtidas com curvas suaves, foram selecionadas as que poderiam representar a era inflacionária e, depois disto, refinadas. Este refinamento foi realizado com base no estudo feito na seção anterior, procurando dentro das soluções geradas, concordância com a teoria.

Para fazermos a análise dos gráficos, em primeiro momento, iremos atribuir ao modelo condições iniciais para os campos, contidas na primeira linha da tabela 5.1. A primeira linha, corresponde a uma proporção de 5% de densidade de matéria e 95% de densidade de campo de ínflaton.

A aceleração da versão clássica do modelo é obtida pela substituição dos valores da tabela 5.1 em (5.23), tal valor será utilizado como valor inicial da aceleração para a versão semi-clássica, com o intento de compararmos as curvas. É também um modo de simplificar o problema, visto que a curva de aceleração para este caso é extremamente sensível a variações no seu valor inicial.

Podemos observar em (5.23) que o valor da aceleração clássica não depende de $\dot{\psi}(0)$, isto se deve a normalização atribuída ao valor de $a(0)$. Com esta justificativa atribuiremos a $\dot{\psi}(0)$ o valor nulo. Passaremos agora para a integração do problema constituído pelas três equações (5.4), (5.5) e (5.9) através da atribuição de valores iniciais.

Os casos intermediários, com densidades de matéria entre 5% e 10% para a versão semi-clássica, constam no apêndice deste trabalho. Nos deteremos aqui aos casos extremos pois eles limitam nossas soluções cosmológicas.

5.4.1 Caso para 5% de densidade de matéria

Abaixo, temos então, o conjunto de valores iniciais utilizados nesta primeira análise.

Logo a seguir, a discussão dos resultados.

Os valores iniciais para $a(0) = 1$ e $\dot{a}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ foram assim determinados pela equação de Friedmann, conforme a discussão feita em (5.19) e, os valores iniciais para os campos foram extraídos da primeira linha da tabela 5.1.

$$\begin{aligned} a(0) &= 1 & \dot{a}(0) &= \frac{1}{\sqrt{3}} & \ddot{a}(0) &= 0 & \ddot{a}(0) &= 4/3 \\ \dot{\phi}(0) &= \sqrt{190}/10 & \psi(0) &= \sqrt{10}/10 & \dot{\psi}(0) &= 0 & \phi(0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

a) Fator de Escala

- A figura (5.1) a seguir mostra que o universo quadridimensional estudado, possui um regime de expansão permanente.
Devido a sutil diferença existente entre ambas as versões do modelo, foi feita uma análise mais detalhada no intervalo compreendido entre $30 \leq t \leq 50$, que também está contido na figura. Este intervalo foi escolhido por representar o final da curva, deste modo podemos ver melhor a diferença entre as curvas.
- Podemos ver que, o fator de escala para a versão semi-clássica, evolui mais depressa. O universo deste modo, expande mais rapidamente. Para o instante $t = 10$, a diferença entre as curvas clássica e semi-clássica chega a ser de 0,02 (dentro do limite de erro permitido pelo método de integração utilizado) como mostra a figura 5.2 e, com o passar do tempo, este valor tende a aumentar. Ao

calcularmos o coeficiente de correlação entre as curvas clássica e semi-clássica para o fator de escala, chega-se a 0,99. Isto significa que a versão semi-clássica corrige a curva clássica em um valor próximo de 1%. Esta função de correlação foi calculada no Excel.

- Estudando os dados gerados pelo integrador utilizado, percebemos que a curva que resulta da diferença entre os dois casos do modelo para o fator de escala, possui um comportamento exponencial. Isto implica que, para os instantes iniciais a diferença entre as curvas era mínima e, quanto mais nos afastarmos dos instantes iniciais, mais a versão semi-clássica do modelo difere da versão clássica.
- Para ambas as versões do modelo, o fator de escala é monotonicamente crescente e as curvas são suaves para qualquer passo de integração e para qualquer intervalo de t . Analizando o comportamento de $\dot{a}(t)$ percebemos que para valores entre $0,5 < t < 1$ tal parâmetro possui comportamento constante e logo após, seu valor decresce. Em todos os gráficos que serão analisados deve haver uma concordância aproximada entre os valores do término do período inflacionário cosmológico e da perda de validade do modelo semi-clássico, em especial. Pois o principal objetivo do modelo é caracterizar o fim da era inflacionária semi-clássicamente.

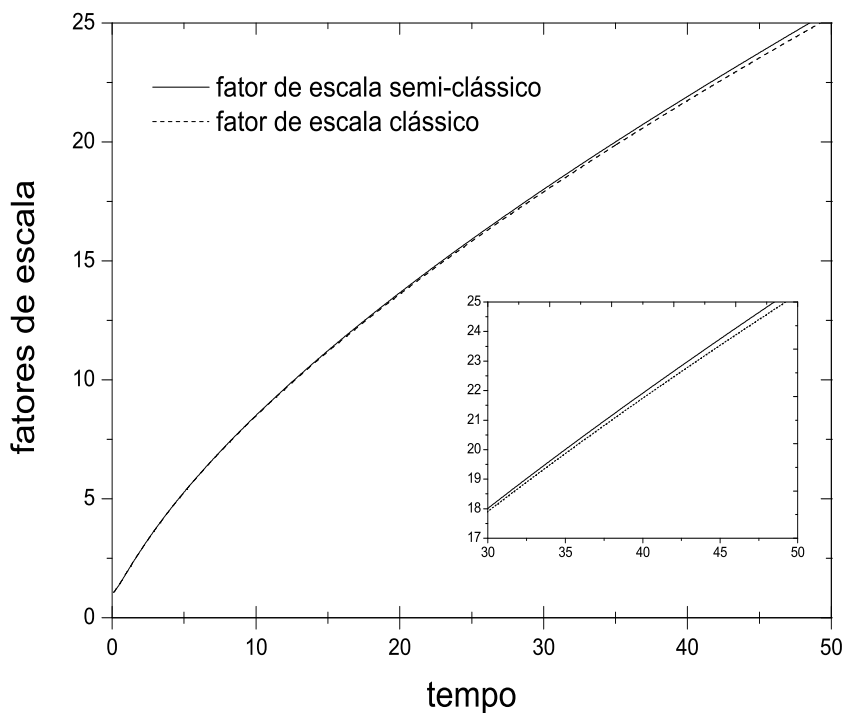


Figura 5.1: Resultado obtido para os fatores de escala com os valores iniciais (5.25)

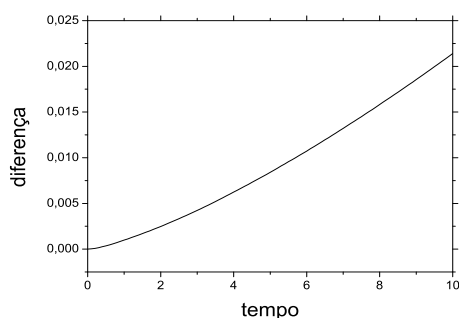


Figura 5.2: A diferença entre as duas curvas mostra o padrão de afastamento do fator de escala semi-clássico em relação à curva clássica.

- Esta figura mostra também que o valor de $\dot{a}(t)$ assume valores maiores para o caso em que há correções semi-clássicas logo, esperamos de antemão que o gráfico da aceleração semi-clássica represente um universo que possua um cenário inflacionário de menor duração quando comparado com o caso clássico.

b) Aceleração

- A curva de aceleração 7.3 a seguir obtida, para as condições iniciais 5.25, caracteriza um período inflacionário inicialmente acelerado, seguido de um período de desaceleração que tem início em $t < 1$ para o caso semi-classico. Podemos ver que o período inflacionário termina mais rapidamente para a versão corrigida do modelo embora esta versão, possa nos fornecer apenas um estudo qualitativo devido a não linearidade de seu comportamento.
- A versão semi-clássica é muito sensível a variações para $\dot{a}(0)$ e $\ddot{a}(0)$. Se, mantivermos fixos os valores iniciais das densidades de energia, da aceleração e do fator de escala como em 5.25 e variarmos o valor de $\dot{a}(0)$ no intervalo compreendido entre $0, 1 \leq \dot{a}(0) \leq 1$, vemos que a curva tende a ser mais suave quando o valor de $\dot{a}(0)$ tende a $1/\sqrt{3}$ tanto pela esquerda, quanto pela direita. Mantendo todos os valores iniciais fixos e variando apenas o valor inicial da aceleração em $\delta = 0, 1$, esta curva começa a oscilar de modo que não podemos mais ter um comportamento sequer qualitativo para a versão semi-clássica do modelo. Para δ superior a $0, 4$ o que temos é um comportamento altamente não-linear
- Para o exato valor $t = 1, 05$ temos que a versão clássica do modelo entra na fase de desaceleração há um período de desaceleração máxima bem caracterizada para tal versão, este período está compreendido entre $1, 5 < t < 3, 25$. Logo após, tal curva segue assintoticamente para zero, não retornando a uma nova fase de aceleração.

- O passo de integração utilizado para as curvas mostram os detalhes oscilatórios, quanto menor o passo melhor o estudo qualitativo para a versão semi-clássica. Tal versão tem como ponto positivo mostrar que é possível modelar o universo primordial quadridimensional considerando efeitos quânticos também em quatro dimensões. Há uma pequena janela de valores para todos os parâmetros onde conseguimos reduzir significativamente as oscilações. Veremos em uma seção a parte que para variarmos $\dot{a}(0)$ e ainda assim, obtermos resultados cosmológicos, devemos também variar $\ddot{a}(0)$. Mostraremos como tais grandezas estão relacionadas.
- Há curvas mais suaves do que as apresentadas neste trabalho, porém a proporção das densidades não é respeitada logo, são soluções puramente matemáticas, sem significado para a cosmologia.

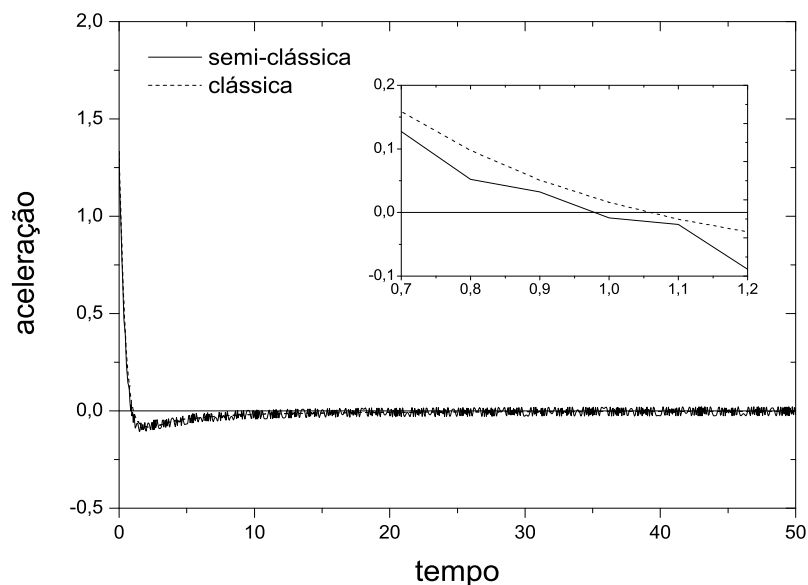


Figura 5.3: Resultado obtido para a aceleração com os valores iniciais (5.25)

c) Densidades de Energia

- A seguir os gráficos das densidades de energia 5.4 mostram dois detalhes. A partir do gráfico maior, vemos o comportamento das densidades de inflaton em relação a densidade de matéria. Temos que a curva de densidade para o campo bosônico semi-clássico é 1% maior que o mesmo campo clássico.
- Os gráficos mostram que inicialmente temos predominância do campo de bósons. Esta densidade apresenta uma queda mais rápida e tal comportamento é

responsável pelo período de expansão acelerada do universo a qual foi evidenciada anteriormente pelo gráfico da aceleração.

- Os gráficos em detalhes, visam mostrar o momento em que as densidades de ínflaton clássico e semi-clássico tornam-se inferiores a de matéria e, o comportamento da densidade de ínflaton com correções quânticas em relação as demais densidades. Vemos no detalhe menor que, para o intervalo compreendido entre $0,8 \leq t \leq 0,82$, a densidade de matéria supera as densidades de ínflaton e ainda, que a densidade de ínflaton semi-clássica possui uma queda mais rápida do que a densidade de ínflaton clássica. A partir deste ponto, onde a densidade de matéria é superior as densidades de ínflaton, temos o período de desaceleração para ambas as versões do modelo.
- O instante onde a densidade de matéria supera as densidades de campo bosônico é o instante que caracteriza o fim da era inflacionária. A densidade semi-clássica de campo de bósons para valores a partir de $t = 1,75$ torna-se negativa, por este motivo foi retirado do gráfico. Além de não possuir significado físico, tais valores negativos, representam o fim da validade do modelo semi-clássico. Reforçando que esta versão do modelo, descreve os instantes iniciais do universo compreendido depois da era de Planck onde a temperatura e, por consequência, a energia são muito altas. Uma equação simplista que exemplifica tal relação entre temperatura e energia, apenas para fins de entendimento qualitativo é $E = k_B \cdot T$. Onde k_B e T são respectivamente a constante de Boltzmann e a temperatura. Para Universo velho não há necessidade de termos de correção da ordem de \hbar .

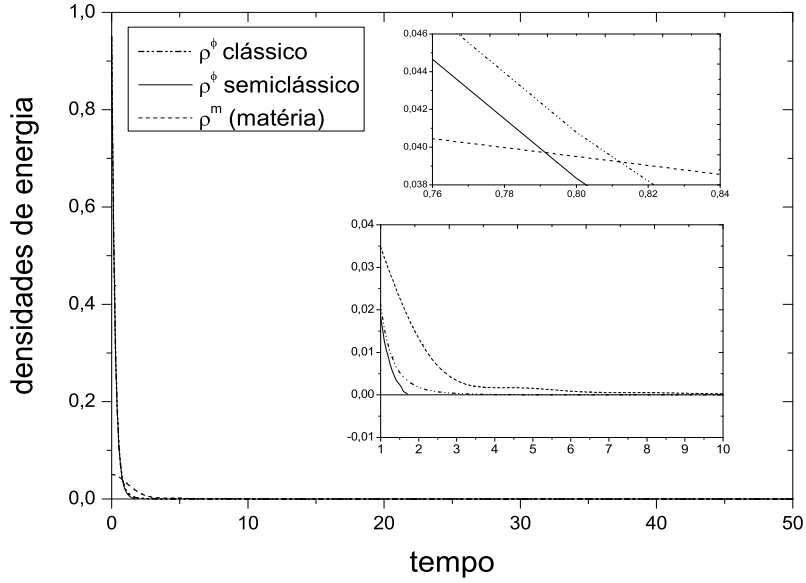


Figura 5.4: Resultados obtidos para as densidades de energia com os valores iniciais (5.25)

Agora, iremos analisar a última linha da tabela 5.1, onde temos que o universo é constituído por 10% de matéria e 90% de campo de bósons. Estas são as condições que caracterizam o período inflacionário. Vamos comparar as curvas obtidas, anteriormente, com as curvas obtidas com os novos valores iniciais. A variação das densidades de energia requer o cuidado de que seja respeitada, a quantidade total de densidade de energia do universo. Como, os valores de $\dot{a}(0)$ e $\ddot{a}(0)$ se mostram mais eficientes para os valores $1/\sqrt{3}$ e $4/3$, respectivamente, iremos mantê-los fixos. Segue então, o próximo conjunto de valores iniciais

5.4.2 Caso para 10% de densidade de matéria

Integrando as mesmas equações (5.4), (5.5) e a soma de (5.12) e (5.13). Variando apenas os valores iniciais para os campos de modo que tenhamos 90% de campo bosônico e 10% de campo de matéria, temos

$$\dot{\phi}(0) = 3\sqrt{5}/5 \quad \psi(0) = \sqrt{5}/5. \quad (5.26)$$

os demais valores iniciais são idênticos aos de (5.25). Temos os seguintes comportamentos para as variáveis de interesse cosmológico

a.1) Fator de escala

- O comportamento das curvas clássica e semi-clássica para os valores iniciais 5.26 é monotonicamente crescente, conforme veremos na figura 5.5, indicando expansão permanente. Quando comparado com os fatores de escala da figura 5.1, não mostra alteração.
- Isto significa que a variação da proporção das densidades de energia não altera o comportamento do fator de escala. O que era de se esperar, visto que a equação de Friedmann depende da densidade total de energia que será sempre 100%.
- O padrão da diferença entre os fatores de escala para as versões clássica e semi-clássica do modelo permanece a mesma apresentada na figura 5.2, bem como a variação percentual entre as duas versões.

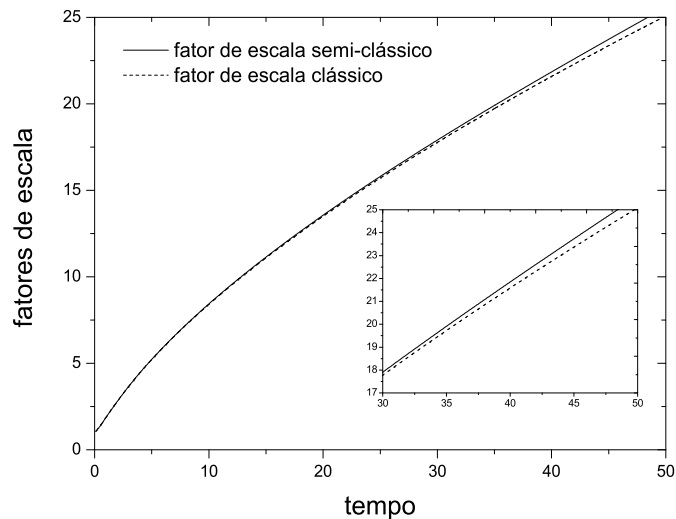


Figura 5.5: Resultados obtidos para os fatores de escala com os valores iniciais (5.26)

b.1) Aceleração

- O estudo da aceleração para estes valores, onde mantivemos fixos os valores para o fator de escala e suas derivadas, mostra que o aumento de matéria altera a suavidade da curva.
- Comparando os gráficos vemos que mesmo a curva semi-clássica representada na figura 5.6, logo a seguir, não sendo tão suave quanto 7.3, o modelo com correções quânticas é eficiente para representar os instantes iniciais do período inflacionário até o seu fim.

- Analisando o detalhe, vemos que em $t = 0,8$, a versão semi-clássica entra na fase de desaceleração enquanto que o modelo clássico entra nesta fase em $t \approx 1,2$. Pelas características da curva de aceleração semi-clássica, o breve período em que temos a desaceleração máxima será aqui representado somente pelo resultado clássico, tal período está compreendido entre os mesmos valores que a aceleração da figura 7.3.

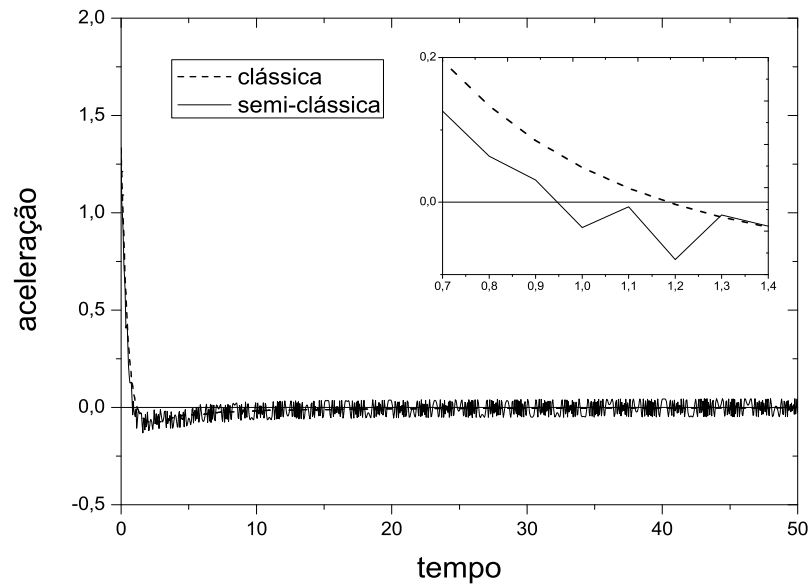


Figura 5.6: Resultados obtidos para as acelerações com os valores iniciais (5.26)

c.2) Densidades de energia

- Vamos estudar a figura 5.7, que está representando as curvas das densidades de energia para os valores iniciais (5.26). As curvas para as densidades de energia 5.7 seguem o mesmo padrão qualitativo das curvas 5.4.
- Para este caso temos que a densidade de matéria supera as densidades de inflaton para tempos menores, compreendidos entre o pequeno intervalo de tempo $0,58 < t < 0,59$. A densidade de inflaton semi-clássica também perde a validade para $t \approx 1,5$, onde a curva torna-se negativa.

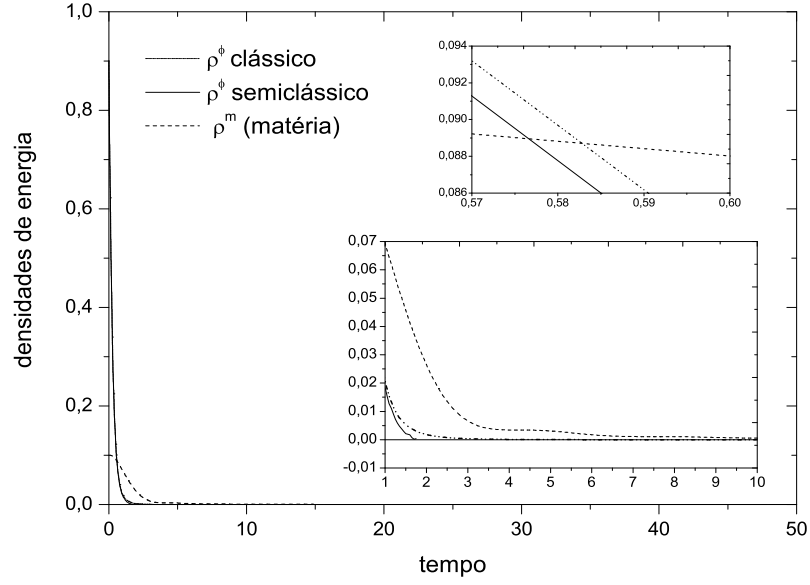


Figura 5.7: Resultados obtidos para as densidades de energia com os valores iniciais (5.26)

5.4.3 Soluções Cosmológicas com variação em $\dot{a}(0)$ e $\ddot{a}(0)$

Nesta seção vamos analisar novamente o caso para 10% de matéria da tabela (5.1). Porém agora, os valores iniciais a serem modificados serão $\dot{a}(0)$ e $\ddot{a}(0)$. Há uma relação entre estas grandezas e que pode ser obtida a partir da equação da densidade de campo bosônico corrigido.

Como fixamos $a(0)$ por ajuste de relógios e sabendo que o percentual de correção da versão semi-clássica sobre a versão clássica está em torno de 1%, podemos reescrever (5.24) do modo

$$\begin{aligned} \rho^\phi(0)_{qt} - \frac{\dot{\phi}(0)^2}{2} &= + \left(\frac{h}{2880\pi^2} \right) \left[{}^{(3)}H_{00} - {}^{(1)}H_{00} \frac{1}{6} \right] \Big|_{a(0)=1}, \\ 0,01 &= \left(\frac{h}{2880\pi^2} \right) \left[{}^{(3)}H_{00} - {}^{(1)}H_{00} \frac{1}{6} \right] \Big|_{a(0)=1}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Onde, as quantidades ${}^{(3)}H_{00}$ e ${}^{(1)}H_{00}$ em componentes de acordo com a métrica (3.2) para $k = 0$. Assim, teremos a relação explícita entre $\dot{a}(0)$ e $\ddot{a}(0)$

$$0,01 = \left(\frac{h}{2880\pi^2} \right) \left[36\ddot{a}(0)^2 + 18\ddot{a}(0)^4 + 6\dot{a}(0)^4 + 60\ddot{a}(0)\dot{a}(0)^2 \right] \Big|_{a(0)=1} \quad (5.28)$$

Concluimos aqui que para variarmos $\dot{a}(0)$ precisamos variar também $\ddot{a}(0)$. Os resultados obtidos são muito semelhantes ao caso anterior onde utilizamos para $\dot{a}(0)$ e $\ddot{a}(0)$ os valores obtidos pela equação de Friedmann. Aqui o que ocorre é uma mudança de escala porém os padrões de comportamento são idênticos. Então, consideremos as condições iniciais

$$\begin{aligned} a(0) &= 1 & \dot{a}(0) &= 1 & \ddot{a}(0) &= 0 & \ddot{a}(0) &= 2 \\ \dot{\phi}(0) &= 3\sqrt{5}/5 & \psi(0) &= \sqrt{5}/5 & \dot{\psi}(0) &= 0 & \phi(0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

a3) Fator de Escala

- Os fatores se escala seguem monotonicamente crescentes indicando expansão acelerada.
- Para intervalos de tempo grandes, observamos que o padrão de afastamento da curva semi-clássica segue os casos anteriores, ou seja, o afastamento entre as curvas é uma exponencial e o universo inflacionário descrito semi-clássicamente expande mais depressa do que o descrito clássicamente.

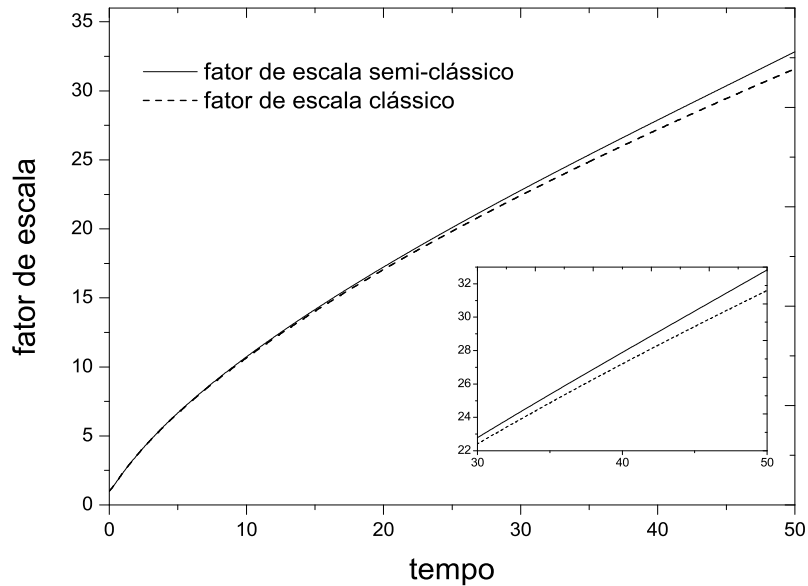


Figura 5.8: Resultados obtidos para o fator de escala com os valores iniciais (5.29)

b3) Aceleração

- Nesta nova escala, o período inflacionário também termina mais rapidamente para o caso semi-clássico e o padrão de oscilação desta curva é idêntico ao caso (5.26).

Mostrando que independente da escala adotada, os resultados devem ser semelhantes.

- O modelo semi-clássico é altamente não linear, ou seja, pequenas variações em $\dot{a}(0)$ sem a devida alteração em $\ddot{a}(0)$ faz com que as curvas saiam da faixa de valores onde temos significado cosmológico.

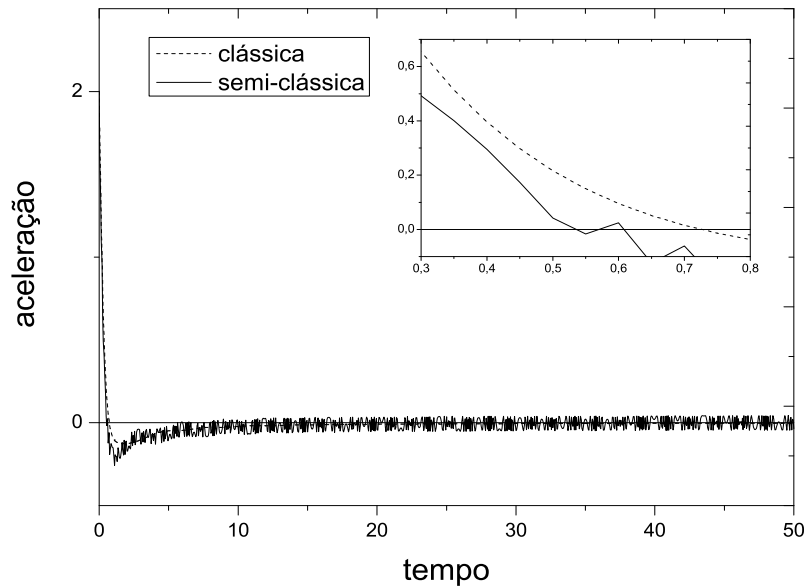


Figura 5.9: Resultados obtidos para as curvas de aceleração para os valores iniciais (5.29)

b3) Densidades de Energia

- Nesta escala, o modelo semi-clássico perde a validade para valores inferiores a 1. Pois a curva se torna negativa.
- O campo bosônico decai mais rapidamente para o caso semi-clássico do que para o caso clássico.
- A era inflacionária tem seu término primeiro para o modelo semi-clássico, assim como nos casos anteriores

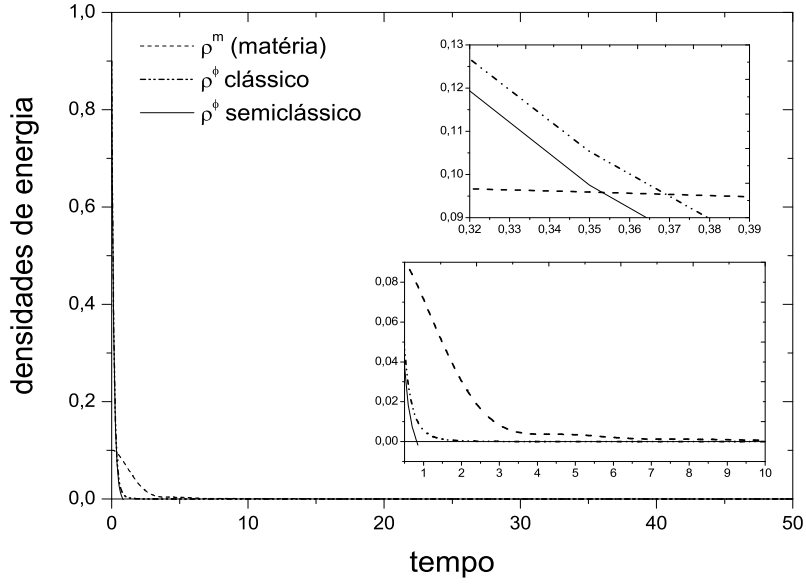


Figura 5.10: Resultados obtidos para as densidades de energia com os valores iniciais (5.29)

O que obtivemos de positivo nesta seção é a confirmação dos resultados para as variáveis de interesse cosmológico pois a técnica utilizada para adquirir os valores iniciais para as derivadas do fator de escala difere dos casos anteriores, onde demos ênfase à equação de Friedmann.

5.4.4 Resultados do modelo para universo composto apenas por ínflaton

Com o objetivo de melhor compreender o papel da matéria nas duas versões do modelo, vamos analisar o comportamento das curvas para o fator de escala, aceleração e densidades de energia para um universo composto apenas pelo campo de bósons. Vamos manter fixos os valores do fator de escala e suas derivadas, nos valores que indicaram o melhor ajuste dos resultados para as duas versões do modelo, agora com 100% de ínflaton.

Segue abaixo, as condições iniciais utilizadas

$$\begin{aligned}
 a(0) = 1 \quad \dot{a}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \ddot{a}(0) = 0 \quad \ddot{a}(0) = 4/3 \\
 \dot{\phi}(0) = \sqrt{2} \quad \psi(0) = 0 \quad \dot{\psi}(0) = 0 \quad \phi(0) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.30}$$

a.3) Fator de escala

- Temos que o comportamento dos fatores de escala da figura 5.11 a seguir é absurdamente diferente para o caso obtido nas figuras 5.1 e 5.5. A equação de Friedmann clássica (5.19), mostra a dependência para a derivada primeira do fator de escala em relação aos campos de matéria e de ínglaton, o caso semi-clássico também dependerá destes campos, acrescidos dos termos corretivos da componente temporal do valor esperado do tensor energia momento (4.48) para o campo de bósons.
- O valor inicial para $\psi(0)$ altera significativamente o comportamento do fator de escala, além de mostrar claramente que, a versão semi-clássica expande mais lentamente em relação a versão clássica.
- Na presença de matéria, vimos na seção anterior que, a versão semi-clássica expande mais rapidamente.

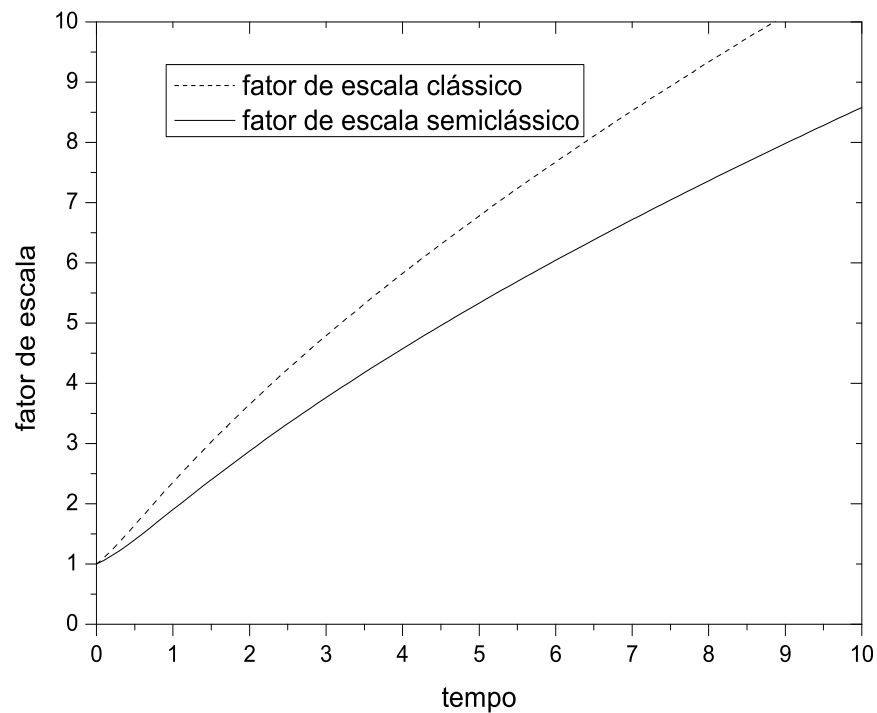


Figura 5.11: Resultados obtidos para os fatores de escala com os valores iniciais (5.30)

b.3) Aceleração

A curva de aceleração 5.12 que será aqui estudada mostra que o valor inicial da curva clássica foi deslocado para um valor maior aos que foram obtidos em 7.3 e 5.6. Isto se

deve a equação (5.22) que na ausência do campo de matéria, irá resultar para os valores iniciais de $a(0) = 1$ e $\dot{a}(0) = 1/\sqrt{3}$ em

$$\ddot{a}(0) = \frac{2}{3} + \dot{\phi}(0)^2.$$

- A estratégia adotada na seção anterior, de atribuir ao valor inicial da aceleração para a versão semi-clássica, o valor gerado pela versão clássica (5.31), para universo sem matéria, resulta em uma curva com oscilações.
- Mantendo fixo todos os valores 5.30, variando apenas o valor de $\ddot{a}(0)$ entre $1, 2 \leq \ddot{a}(0) \leq 1, 5$, obtemos que a curva semi-clássica ainda permanece mais suave quando seu valor tende a $4/3$. Para valores inferiores a $1, 2$ e superiores a $1, 5$, a curva com correções quânticas perde o significado para a cosmologia, sendo impossível comparar ambas as versões do modelo para o mesmo ponto inicial da aceleração.
- Temos que para universo preenchido apenas pelo campo de bósons, a versão clássica sai da era inflacionária antes da versão semi-clássica, conforme mostra o detalhe da figura 5.12.

Um fato interessante é que o comportamento oscilatório da curva semi-clássica é muito mais sensível ao acréscimo de matéria do que o seu decréscimo. Quanto mais matéria tiver o universo, mais a versão semi-clássica perde seu significado.

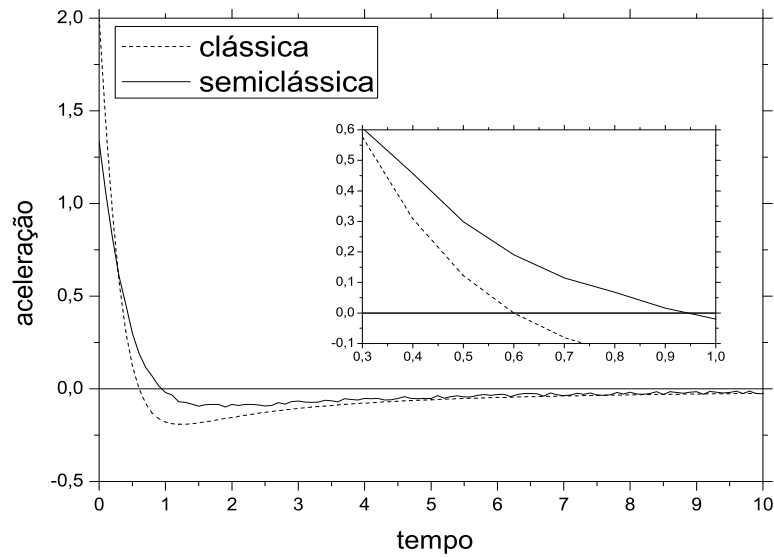


Figura 5.12: Resultados obtidos para as acelerações com os valores iniciais (5.30)

c.3) Densidades de ínflaton

Agora, vamos analisar a partir da figura 5.13 a seguir o comportamento do campo de ínflaton para ambas as versões do modelo.

- Podemos ver que a densidade de ínflaton clássica decai mais rapidamente do que a densidade de ínflaton semi-clássica, isto provoca um menor período da era inflacionária para o caso clássico, conforme podemos verificar através da curva de aceleração 5.12. Podemos ver também que para $t \approx 1,7$, o modelo semi-clássico não descreve mais um período inflacionário, pois a curva torna-se negativa.

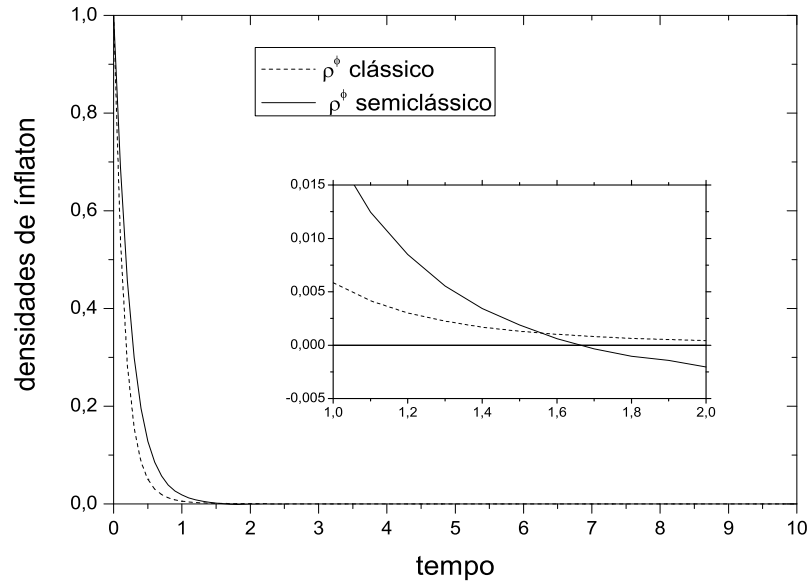


Figura 5.13: Resultados obtidos para as densidades de inflaton com os valores iniciais (5.30)

- Dado o exposto, podemos ver que a presença de matéria nas duas versões do modelo estudado apresentam um papel importante, pois uma porção de matéria altera significativamente o comportamento das curvas. Vale lembrar que a primeira modelagem feita para inflação era composto apenas pela energia de vácuo, conforme foi estudado no segundo capítulo (3.27) Em consequência disso, não podemos atribuir valores acima de 10% para o campo de matéria. Além de que uma maior quantidade de densidade de matéria descaracteriza a era inflacionária, que é o foco do presente trabalho.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho estudamos a possibilidade de um campo bosônico como sendo o responsável por regimes inflacionários dentro das famílias da cosmologia de Fridmann-Robertson-Walker. Este campo de bósons foi estudado sob dois contextos, o clássico e o semi-clássico.

Por ser o campo de bósons um campo escalar, fizemos uso da equação de Klein-Gordon para descrever as equações dinâmicas do sistema bem como, as equações de Einstein da Relatividade Geral para o campo gravitacional. Fizemos uso das Equações de Einstein modificadas, estas surgem através do conceito de Valor Esperado do Tensor energia-momento.

Fez parte deste trabalho tornar-me capaz de formular matematicamente um modelo cosmológico. Para isto foi necessário reciclar alguns dos conhecimentos já adquiridos em nível de graduação e pós-graduação, acrescentar Relatividade Geral na notação de Geometria Diferencial, o modelo padrão da cosmologia bem como um pouco sobre algumas das teorias mais aceitas na atualidade para descrever Universo Inflacionário e métodos de resolução.

Podemos dividir a dissertação em duas partes, a primeira parte trata do estudo teórico necessário para descrever um modelo cosmológico e uma breve apresentação teórica sobre teoria de campos em espaço tempo curvo. Como o cálculo do valor esperado do tensor energia-momento em espaço-tempo curvos resulta em divergências, precisamos estudar também uma técnica de renormalização, e vimos que, a partir da renormalização surgem quantidades geométricas que são as quantidades que corrigem o tensor de Einstein.

A segunda e última parte trata da integração numérica do sistema de equações com o qual trabalhamos para descrever as versões clássica e semi-clássica do modelo cosmológico estudado. O modelo formado neste contexto é altamente não linear, sendo portanto necessário o uso de técnicas numéricas para encontrarmos um conjunto de valores iniciais capaz de produzir soluções cosmológicas aceitáveis. As soluções

cosmológicas produzidas pelo modelo correspondem ao final do período inflacionário. Embora este modelo não contemple o período atual aceleração positiva do universo ele mostra que é possível introduzir correções da ordem de \hbar , o que é bastante lógico para um período onde o universo se encontrava em altas energias.

Há uma enorme dificuldade em tratar quanticamente o universo primordial, já que a Relatividade Geral e a Mecânica Quântica não são teorias compatíveis. A quantização de um loop, é bastante complexa envolvendo ferramentas e conceitos matemáticos da Teoria Quântica de Campos para espaço-tempo curvo.

Atualmente, está se buscando uma teoria quântica para a gravitação e, este trabalho é uma ferramenta útil como iniciação a tais estudos.

Este trabalho foi inteiramente descrito com as ferramentas de Teoria de Campos, deixando o ponto de vista termodinâmico, usual em modelos cosmológicos, em segundo plano. Uma perspectiva que vemos para trabalhos futuros é a introdução de um termo gerador de matéria, para isto é necessária a interação entre os campos de matéria e de ínflaton para que a energia potencial do ínflaton seja convertida em matéria.

Este termo pode ser introduzido estudando o modelo tanto com equações de estado termodinâmicas como Teoria de Campos.

Capítulo 7

Apêndice

7.1 Pacote de R.G. do Software Mapele 10

Faremos uso agora do software Maple 10 para calcular as componentes do tensor de Riemann, para isto, temos que ter clara a assinatura da métrica para obtermos o resultado desejado. A métrica empregada será a que foi expressa por (3.2). Assim, empregamos a seguinte rotina

```
[> restart;
[> with(tensor)
[> coords=[t, r, theta, phi]
[> g=array (symmetric, sparse, 1..4, 1..4)
[>g[1,1]=1 g[2,2]=-a(t)^ 2/(1-k*r^ 2) g[3,3]=-a(t)^ 2*r^ 2
g[4,4]=-a(t)^ 2*r^ 2*(sin(theta))^ 2
[> metric=create([-1,-1],eval(g));
```

Esta sequência irá gerar em primeiro momento, uma matriz idêntica a que temos (3.2). Se, fizermos uso de mais dois comandos

```
[> tensorsGR(coords,metric,contra_metric,det_met,C1,C2,Rm,Rc,R,G,C);
[>display_allGR(coords,metric,contra_metric,det_met,C1,C2,Rm,Rc,R,G,C);
```

Com esta sequência podemos gerar todos os elementos de importância dentro da Relatividade Geral, Christoffel de primeira e segunda ordem para métrica que aplicamos, tensores de Ricci, Riemann e de Einstein.

7.2 Implementação dos programas

Os resultados apresentados neste trabalho foram calculados no Maple 10, este software faz integração numérica utilizando o método de Runge-Kutta. De um modo mais didático apresentamos como gerar os resultados obtidos neste trabalho em duas etapas:

Primeiramente geramos um programa auxiliar onde faremos uso das componentes do Tensor de Ricci, dos tensores de Einstein, dos tensores de energia-momento (5.15) e das componentes do Tensor de energia momento renormalizado (4.48). Este programa irá gerar a equação (5.14). O resultado gerado neste programa será implementado no segundo programa onde, iremos gerar as listas de pontos que nos permitem gerar os resultados gráficos. Para gerar os gráficos podemos fazer uso dos softwares Origin ou Grace.

programa1

```
[> restart;

[> h:= 1;

[> R00:= 3/a(t)*diff(a(t),t,t);

[> R11:= (a(t)*diff(a(t),t,t)+2*diff(a(t),t)^ 2)/(-1);

[> R:= 6*(a(t)*diff(a(t),t,t)+diff(a(t),t)^ 2)/a(t)^ 2;

[> H300:= .5*(3*(R11)^ 2*a(t)^ 2 + (R00)^ 2) - R00^ 2 + 2/3*R*R00 - 1/4*R^ 2;
[> Ha:= expand(H300);

[> H100:= .5*R^ 2 - 2*R*R00;

[> Hb:= expand(H100);

[> H111:= -2*(diff(R,t,t))*(-a(t)^ 2) + .5*R^ 2*(-a(t)^ 2) - 2*R*R11;

[> Hc:= expand(H111);

[> H311:= a(t)^ 2*(3*(R00)^ 2 + 3*(R11)^ 2)/2 - (-1/a(t)^ 2)*(R11)^ 2 +
(2/3)*R*R11 - (1/4)*R^ 2*(-a(t)^ 2);

[> Hd:= expand(H311);

[> TQ0[phi]:= ((h/(2880*(Pi)^ 2))*(Ha - (1/6)*Hb));

[> TQ00[phi]:= expand(TQ0[phi]);

[> TQ1[phi]:= ((h/(2880*(Pi)^ 2))*( Hd -(1/6)*Hc ));

[> TQ11[phi]:= expand(TQ1[phi]);

[> T00[phi] := .5*(diff(phi(t),t))^ 2;

[> Tt[phi]:= .5*(diff(phi(t),t))^ 2 + TQ00[phi];

[> T11[phi]:= .5*(diff(phi(t),t))^ 2*a(t)^ 2;

[> T00[psi]:= .5*(diff(psi(t),t))^ 2 + .5*psi(t)^ 2;

[> T11[psi]:= a(t)^ 2/2*((diff(psi(t),t))^ 2 - psi(t)^ 2 );

[> G00:= -3*(diff(a(t),t)^ 2)/a(t)^ 2 ;

[> G11 := (2*a(t)*diff(a(t),t,t)+diff(a(t),t)^ 2);
```

```
[> T00[tot]:= T00[phi] + T00[psi] + TQ00[phi];
```

```
[> T11[tot]:= T11[phi] + T11[psi] + TQ11[phi];
```

```
[> e3:= G00 + G11 - T11[tot] - T00[tot];
```

que resultará no seguinte código para ser utilizado no próximo programa:

```
[> e3 := -3*diff(a(t),t)^2/a(t)^2 + 2*a(t)*diff(a(t),t,t) + diff(a(t),t)^2 -  
.5*diff(phi(t),t)^2*a(t)^2 - 1/2*a(t)^2*(diff(psi(t),t)^2 - psi(t)^2) -  
.1024305556e-1/Pi^2/a(t)^2*(diff(a(t),t,t))^2 +  
1/1440*1/Pi^2/a(t)*diff(a(t),t,t,t,t) -  
29/1440*1/Pi^2/a(t)^3*diff(a(t),t,t)*diff(a(t),t)^2 +  
.2083333334e-2/Pi^2/a(t)^4*diff(a(t),t)^4 - .8506944444e-2/Pi^2*diff(a(t),t,t)^2 -  
.4861111111e-2/Pi^2/a(t)^2*diff(a(t),t)^4 -  
.2083333333e-2/Pi^2*a(t)^4*diff(a(t),t,t)^2 -  
.8333333333e-2/Pi^2*a(t)^3*diff(a(t),t,t)*diff(a(t),t)^2 -  
.8333333333e-2/Pi^2*a(t)^2*diff(a(t),t)^4 -  
13/1440*1/Pi^2/a(t)*diff(a(t),t,t)*diff(a(t),t)^2 - .5*diff(phi(t),t)^2 -  
.5*diff(psi(t),t)^2 - .5*psi(t)^2;
```

programa2

```
[> restart;
```

```
[> with(plots):
```

```
[> readlib(readdata):
```

```
[> s:= diff(a(t),t,t):
```

```
[> H300:= .5*(3*(R11)^2*a(t)^2 + (R00)^2) - R00^2 + 2/3*R*R00 - 1/4*R^2;
```

```
[> H100:= .5*R^2 - 2*R*R00;
```

```
[> H:= diff(a(t),t)/a(t):
```

```
[> rho[phi]:= 0.5*(diff(phi(t),t)^2) + expand(1/2880/Pi^2*(H300 - H100/6));
```

```
[> e1:= diff(psi(t),t,t) + 3*H*diff(psi(t),t) + psi(t);
```

```
[> e2:= diff(phi(t),t,t) + 3*H*diff(phi(t),t);
```

```
[> u1:= -3*diff(a(t),t)^2/a(t)^2 + 2*a(t)*diff(a(t),t,t) + diff(a(t),t)^2 -  
.5*diff(phi(t),t)^2*a(t)^2 - 1/2*a(t)^2*(diff(psi(t),t)^2 - psi(t)^2) -  
.1024305556e-1/Pi^2/a(t)^2*diff(a(t),t,t)^2 +  
1/1440*1/Pi^2/a(t)*diff(a(t),t,t,t,t) -  
29/1440*1/Pi^2/a(t)^3*diff(a(t),t,t)*diff(a(t),t)^2 +  
.2083333334e-2/Pi^2/a(t)^4*diff(a(t),t)^4 - .8506944444e-2/Pi^2*diff(a(t),t,t)^2 -  
.4861111111e-2/Pi^2/a(t)^2*diff(a(t),t)^4 -
```

```
.20833333333e-2/Pi^2*a(t)^4*diff(a(t),t,t)^2 -
.83333333333e-2/Pi^2*a(t)^3*diff(a(t),t,t)*diff(a(t),t)^2 -
.83333333333e-2/Pi^2*a(t)^2*diff(a(t),t)^4 -
13/1440*1/Pi^2/a(t)*diff(a(t),t,t)*diff(a(t),t)^2 - .5*diff(phi(t),t)^2 -
.5*diff(psi(t),t)^2 - .5*psi(t)^2;
```

```
[> re1:=dsolve(e1=0,e2=0,u1=0,a(0)=1, D(a)(0)=1/sqrt(3),D(D(a))(0)=4/3,
D(D(D(a)))(0)=0,phi(0)= 0,psi(0) =2/5,D(phi)(0) =
sqrt(46)/5,D(psi)(0)=0,a(t),psi(t),phi(t),type=numeric,output=listprocedure);
```

```
[> odeplot(re1,[[t,a(t)]],0.. 10);
```

```
[> odeplot(re1,[[t),(s)]],0 .. 10,thickness=3,color=blue,numpoints = 250);
```

Onde os gráficos que o Maple 10 irá plotar a partir destes comandos é insatisfatório, portanto, devemos gerar listas de pares ordenados e fazer uso de outro programa que seja exclusivamente para tratamento gráfico.

Abaixo mostramos como gerar tais listas, estamos utilizando passo de integração 0.05 e o intervalo de tempo está compreendido entre [0,50].

```
[> for ii from 0 by 0.05 to 50 do:          escq:= op(2, op(2, re1(ii))):
appendto('lis.dat');          lprint(ii, escq);
od:
writeto(terminal);
arq:=readdata("lis.dat",float,2);
plot(arq, labels=["t", "a(t)"], axes= FRAMED); (lista de pontos para a(t))
```

```
[> for ii from 0 by 0.05 to 50 do:          descq:= op(2, op(3, re1(ii))):
appendto( 'velq.dat');          lprint(ii, descq);
od:
writeto(terminal);
arq:=readdata("velq.dat",float,2);
plot(arq, labels=["t", "diff(a(t),t)"], axes= FRAMED);(lista de pontos para a'(t))
```

```
[> for ii from 0 by 0.05 to 50 do:          aceq:= op(2, op(4, re1(ii))):
appendto('ace2.dat');          lprint(ii,aceq);
od:
writeto(terminal);
arq:= readdata("ace2.dat",float,2);
plot(arq,labels=["t", "a(t)"], axes=FRAMED);(lista de pontos para a''(t))
```

```
[> for ii from 0 by 0.05 to 50 do:          aceq:= op(2, op(6, re1(ii))):
appendto('phif.dat');          lprint(ii,aceq);
od:
writeto(terminal);
arq:= readdata("phif.dat",float,2);
plot(arq,labels=["t","a(t)"], axes=FRAMED);
```

```
[> for ii from 0 by 0.05 to 50 do:          aceq:= op(2, op(7, re1(ii))):
appendto('ppiq.dat');          lprint(ii,aceq);
od:
writeto(terminal);
arq:= readdata("ppiq.dat",float,2);
plot(arq,labels=["t","a(t)"], axes=FRAMED);
```

```
[> for ii from 0 by 0.05 to 50 do:          aceq:= op(2, op(8, re1(ii))):
appendto('psif.dat');          lprint(ii,aceq);
od:
writeto(terminal);
arq:= readdata("psif.dat",float,2);
plot(arq,labels=["t","a(t)"], axes=FRAMED);
```

```
[> for ii from 0 by 0.05 to 50 do:          aceq:= op(2, op(9, re1(ii))):
appendto('ppsi.dat');          lprint(ii,aceq);
od:
writeto(terminal);
arq:= readdata("ppsi.dat",float,2);
plot(arq,labels=["t","a(t)"], axes=FRAMED);
```

E para gerarmos os pontos para os gráficos das densidades de energia, precisamos trabalhar com as listas geradas acima e as equações das densidades (5.15), apenas ρ_ψ e, (5.27) que corresponde a densidade de ínflaton corrigida. Desse modo

```
[> for ii from 0 by 0.05 to 50 do:
psif:= op(2, op(8, re1(ii))):          ppsi:= op(2, op(9, re1(ii))):
rhopsi:= psif^ 2/2+ ppsi^ 2/2:
appendto('res1.dat');lprint(ii,rhopsi); od: writeto(terminal);
arq:=readdata("res1.dat",float,2):plot(arq,labels=["t","rho[psi]"],axes=FRAMED);
```

```
[> for ii from 0 by 0.05 to 10 do:
> ppiq:= op(2, op(7, re1(ii))): aceq:= op(2, op(4, re1(ii))): descq:= op(2, op(3,
re1(ii))): aceq:= op(2, op(4, re1(ii))): escq:= op(2, op(2, re1(ii))): rhophi:=
```



```

ppiq^2/2 + (3.52*10^(-5))*(31.5*(aceq)^2/(escq)^2 - 6*(descq)^4/(escq)^4 -
4.5*(escq)^2*(descq)^4 - 42*(aceq)*(descq)^2/(escq)^3 - 18*(escq)^2*(descq)^4 -
18*(escq)^3*(aceq)*(descq)^2);          appendto('res2.dat');lprint(ii,rhophi);
od: writeto(terminal);
arq:=readdata("res2.dat",float,2);plot(arq,labels=["t","rho[phi]"],axes=FRAMED);

```

7.3 Casos Intermediários - Valores Iniciais pela equação de Friedmann

- As curvas abaixo mostram o comportamento da aceleração, para o caso semi-clássico, onde o valor inicial da densidade de matéria esta variando entre 6% e 9%. Tais resultados foram obtidos através da integração de (5.14) utilizando os devidos valores iniciais.

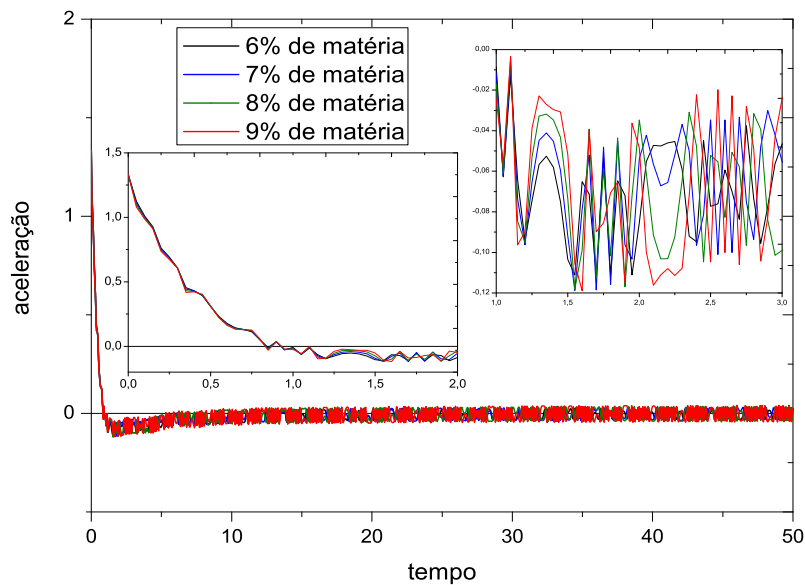


Figura 7.1: Resultados para as curvas de aceleração utilizando valores iniciais obtidos pela equação de Friedmann (5.20)

- Abaixo temos os instantes de término do período inflacionário utilizando os diferentes valores iniciais para a densidade de matéria podemos ver que quanto maior a densidade de matéria, mais rápido termina o período inflacionário.
- Abaixo damos ênfase ao comportamento das amplitudes das curvas de aceleração. Vemos que o aumento da densidade de matéria, gera uma maior amplitude das oscilações das curvas.

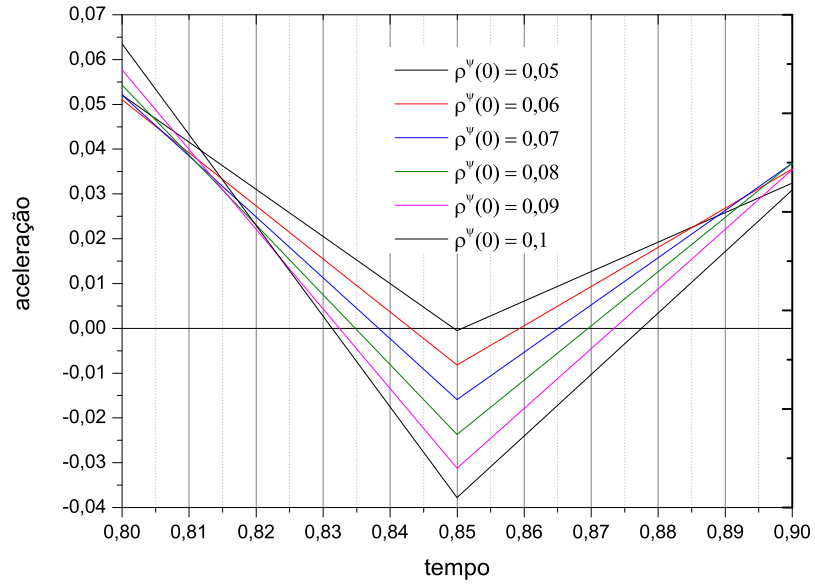


Figura 7.2: Final do período inflacionário para diferentes valores de densidade de matéria.

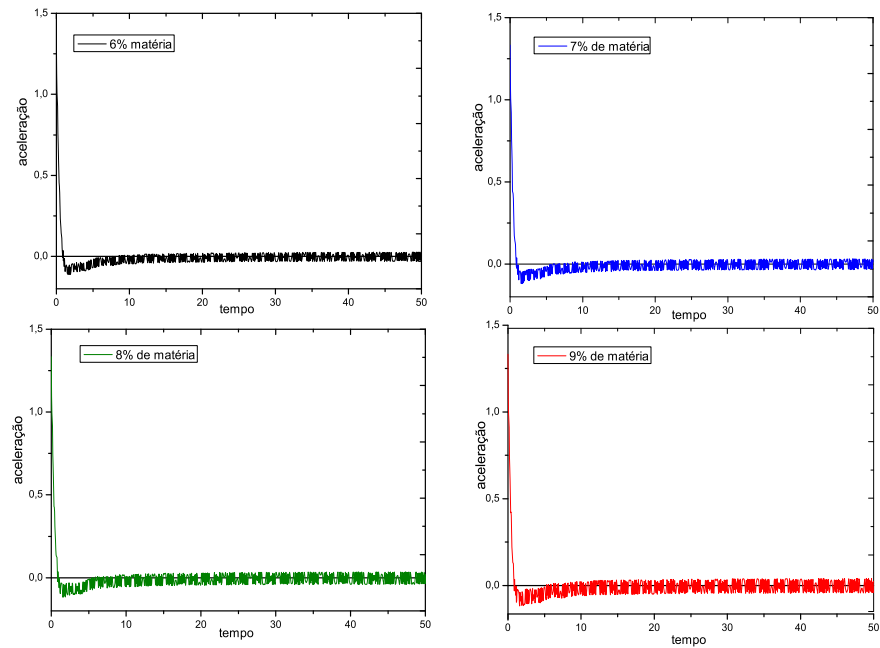


Figura 7.3: Análise das amplitudes oscilatórias das curvas de aceleração para o período pós-inflacionário.

7.4 Casos Intermediários - Valores Iniciais para $\dot{a}(t)$ e $\ddot{a}(t)$ pela equação da densidade de Ínflaton Corrigida

- As curvas abaixo mostram o comportamento da aceleração, para o caso semi-clássico, onde o valor inicial da densidade de matéria esta variando entre 6% e 9%.

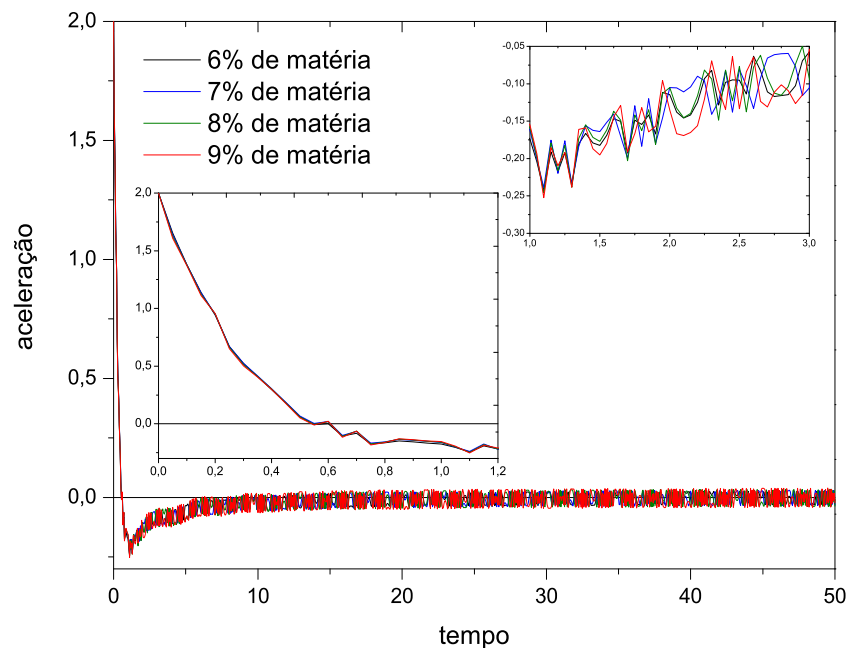


Figura 7.4: Resultados para as curvas de aceleração utilizando valores iniciais obtidos pela equação da densidade de ínflaton corrigida (5.28)

- Abaixo utilizamos os diferentes valores iniciais para a densidade de matéria. Podemos ver que utilizando a equação da densidade de ínflaton corrigida, com a finalidade de obtermos valores iniciais para $\dot{a}(t)$ e $\ddot{a}(t)$, obtemos resultados cosmológicos somente para valores iniciais de densidade de matéria em torno de 7,5% e acima deste. Valores iniciais inferiores a 7,5% não caracterizam o fim da era inflacionária, embora o comportamento das curvas sejam semelhantes ao caso em que obtivemos valores iniciais para $\dot{a}(t)$ e $\ddot{a}(t)$ pela equação de Friedmann
- Abaixo damos ênfase ao comportamento da amplitude da curva de aceleração de acordo com o valor inicial da densidade de matéria. Vemos que o aumento da densidade de matéria, gera uma maior amplitude das oscilações das curvas.

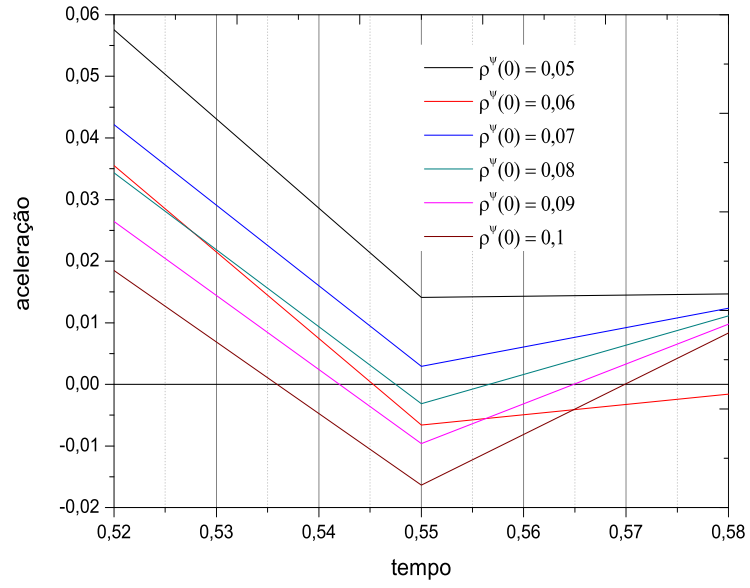


Figura 7.5: Detalhe do final do período inflacionário para diferentes valores de densidade de matéria.

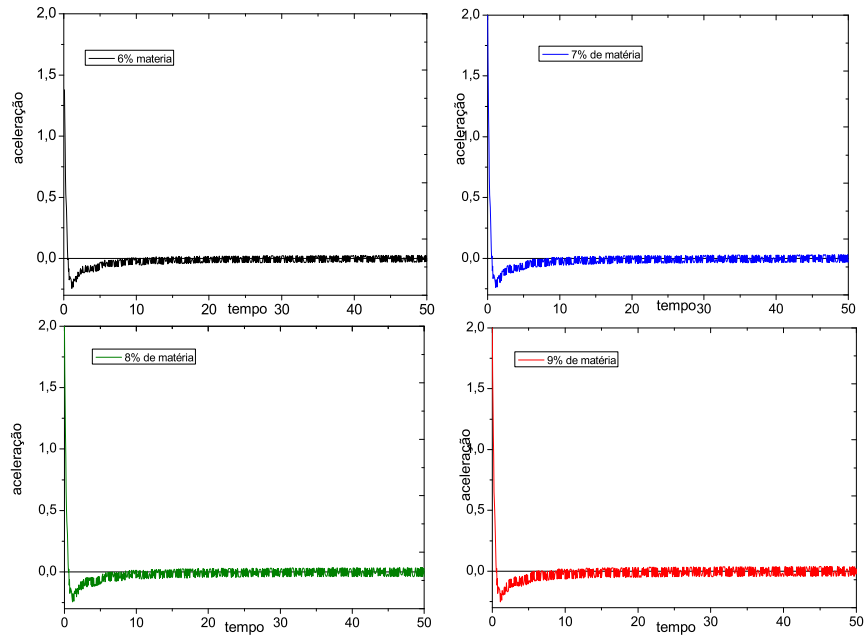


Figura 7.6: Análise das amplitudes oscilatórias das curvas de aceleração para o período pós-inflacionário.

Referências Bibliográficas

- [1] WEIMBERG S., **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity** (John Wiley and Sons, 1972).
- [2] MALCOLM L., **General Relativity** (Cambridge University Press 1999).
- [3] EINSTEIN A., **Como vejo o mundo - Tradução de H. P. de Andrade** (Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1981.)
- [4] D'INVERNO R. A., **Introducing Einstein's Relativity** (Oxford University Press, 2005).
- [5] LANDAU L., LIFCHITZ E., **Teoria do Campo** (Hemus, 1980).
- [6] HAWKING S., **O universo numa casca de noz** (Editora Ediouro-RJ - 2009)
- [7] HORVATH J. E. ... [et al.], **Cosmologia Física: Do micro ao macrocosmo e vice e versa** (São Paulo: Editora Livraria da Física - 2007)
- [8] BIRRELL N. D.; DAVIES P. C. W. **Quantum Fields in Curved Space** (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [9] KRANE K. S., **Introductoru Nuclear Physics** (John Wiley and Sons, 1987).
- [10] DAMOUR T. e POLYAKOV A. Nucl. Phys. B423, 532 (1994); id. Gen. Rel. Grav. 26, 1171 (1994)
- [11] HAWKING S., **A Brief History of Time - From the Big Bang to Black Holes** (New York, NY: Bantam Books, 1988).
- [12] LIDDLE A. ; **An Introduction to Modern Cosmology** (Jonh Wiley e Sons Ltd - 2003)
- [13] LINDE A. , **Particle physics as inflationary cosmology** (Harwood Academic Publisher - 1993).

- [14] GUTH A. H., **Inflation and New Era of High-Precision Cosmology** (MIT physics annual 2002).
- [15] DIRAC P. A. M. **General Theory of Relativity** (Jonh Wiley and Sons - 1975).
- [16] EINSTEIN A. **The Special and General Theory** (The Project Gutenberg EBook of Relativity, eBooks Readable By Both Humans and By Computers, Since 1971).
- [17] RYDER L. H. **Quantum Field Theory** (Cambridge University Press, 1996).
- [18] PESKIN M. E. ; SCHROEDER D. V. **An Introduction to Quantum Field Theory** ,Perseus Books Publishing (1995).
- [19] ZEE A. **Quantum field theory in a nutshell** (Princeton, 2003)
- [20] MATSAS G. E. A. Semiclassical gravity. **Rev. Bras. Ensino Fís.** v.27, n.1, 2005.
- [21] RIBAS, M. O.; KREMER G. M.; DEVECCHI F. P. Fermions as sources of accelerated regimes in cosmology. **Physical Review D.** v.72, n.72, 2005.
- [22] KREMER G. M.; DEVECCHI F. P. Irreversible processes in inflationary cosmological models. **Physical Review D** v.66, Art. No. 063503, 2002.
- [23] KREMER G. M.; DEVECCHI F. P. Viscous cosmological models and accelerated universes. **Physical Review D** v. 67, Art. No. 047301, 2003.
- [24] KOFMAN L.;LINDE A.; STAROBINSKY A. Reheating after Inflation. **Phys. Rev. Lett.**, v.73, 1994.
- [25] LYTH D. H.; RIOTTO A. Particle Physics Models of Inflation and the Cosmological Density Perturbation. **Phys. Rept.**. 314, p.1-146, 1999.
- [26] KALLOSH R. On Inflation in String Theory. **Lect.Notes Phys.**. v.738, p.119-156, 2008.
- [27] WINITZKI S. Predictions in eternal inflation. **Lect. Notes Phys.**. v.738, p.157-191, 2008.
- [28] MARTIN J. Inflationary Perturbations: the Cosmological Schwinger Effect. **Lect.Notes Phys.**. v.738, p.193-241, 2008.
- [29] RINGEVAL C.The Numerical Treatment of Inflationary Models. **Lect.Notes Phys.**. v.738, p.243-273, 2008.

- [30] BUNCH T. S. On renormalisation of the quantum stress tensor in curved space-time by dimensional regularisation **J. Phys. A: Math. Gen.**. Vol. 12, No. 4, 1979.
- [31] VILENKIN A. Classical and quantum cosmology of the Starobinsky inflationary model. **Phys. Rev. D.** v.32, p.2511-2521, 1985.
- [32] BUNCH T. S. ; DAVIES P. C. W. Stress Tensor and Conformal Anomalies for Massless Fields in a Robertson-Walker Universe. **Proc. R. Soc. Lond. A.** v.356, p.569-574, 1977.
- [33] ÉBOLI O. J. P.; PI S.; SAMIULLAH M. Renormalizability of the functional Schroedinger picture in Robertson-Walker space-time. **Annals of physics.** v.193, p.102-141, 1989.
- [34] MATSAS G. E. A. Gravitação semiclássica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 27, n. 1, p.137 - 145, 2005.
- [35] DEVECCHI F. P.; FROEHLICH M.L. Non-linear terms in 2D cosmology. **Europhysics Letters.** v.71 p.179-185,(2005).
- [36] DEVECCHI F. P.; FROEHLICH M.L. 3D gravity and non-linear cosmology. **Modern Physics Letters A.** v.21, p.445- 450, 2006.
- [37] SAMOJEDEN L. L.; KREMER G. M.; DEVECCHI F.P. Accelerated expansion in bosonic and fermionic 2D cosmologies with quantum effects. **Europhysics Letters.** v.87, n.1, 2009.
- [38] A New Astrophysics Facility Rises from the Pampa. Disponível em: <http://www.auger.org/>.
- [39] The Large Hadron Collider. Disponível em: <http://public.web.cern.ch/public/>.