

ANDRESSA ANTONINI BERTOLAZZO

O efeito de espaços de fase não homogêneos em coeficientes de difusão e transporte

Dissertação apresentada ao Curso de Pós -
Graduação em Física do Setor de Ciências
Exatas da Universidade Federal do Paraná,
como requisito parcial para a obtenção do
grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes

Curitiba

2010

"Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável (...) para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer "(Albert Einstein)

RESUMO

Sistemas Hamiltonianos apresentam espaço de fase não homogêneo com a presença de regiões de trajetórias regulares (denominadas ilhas) e trajetórias caóticas (região estocástica, mar caótico). Trajetórias caóticas podem se aproximar das regiões regulares sendo aprisionadas ao redor destas por um certo período de tempo (as vezes muito longo), apresentando comportamento próximo ao de uma trajetória iniciada em uma região de ilha. Estas regiões de aprisionamento (chamadas de grude) são responsáveis pela existência de transporte anômalo (e superdifusão) em sistemas hamiltonianos. Estas regiões podem apresentar modos aceleradores os quais aceleram linearmente uma trajetória por um período de tempo finito (a aceleração dependerá do número rotacional das ilhas). Utilizando-se destas propriedades do espaço de fase, é possível obter correntes com direções preferenciais em sistemas que apresentam quebras de simetria. Estas correntes são nulas para sistemas em equilíbrio (segunda lei da termodinâmica). Neste trabalho analisamos um sistema hamiltoniano assimétrico que, quando adicionado o termo de dissipação, apresenta correntes de direção preferencial, mesmo no limite próximo ao sistema conservativo. Para uma dissipação muito pequena é analisada a influência do espaço de fase no aparecimento destas correntes. Obtém-se como resultado que as correntes surgem devido a vôos assimétricos que a trajetória sofre no espaço de fase, e que estas correntes serão maiores se as ilhas de maior amplitude no espaço de fase apresentarem modos aceleradores.

ABSTRACT

Hamiltonian systems present mixed phase space with regular trajectories regions (called islands) and chaotic trajectories (stochastic regions, chaotic sea). Chaotic trajectories can approach to the regular regions and they can be trapped around them for some period of time (sometimes for a long period of time) presenting regular behavior closed to the one of trajectories into the island. These trapped regions (called stickiness) are responsible for the existence of anomalous transport (and superdiffusion) in Hamiltonian systems. It occurs because they could exhibit accelerator modes, which accelerates a trajectory linearly for some time (this acceleration depends on the winding number of the islands). Using this properties of the phase space, we can obtain direct currents in systems that have broken symmetries, but these currents must be null for equilibrium systems (second law of thermodynamics). In this work we analyze an asymmetric hamiltonian system, when the dissipative term is introduced and there is a direct current in the system, even in the limit closed to the conservative system. The influence of phase space in the emergence of direct currents in weak dissipation is analyzed. We attain as results that the current appears because Levy flies that the trajectories experience are asymmetric, and this currents are greater if the biggest islands in the phase space present accelerator mode.

AGRADECIMENTOS

- Ao professor Dr. Sergio Roberto Lopes, orientador deste trabalho, pela orientação, pelo conhecimento transmitido a mim.
- Ao pós doutorando José Danilo Szezech pela colaboração, contribuição no trabalho e pelas importantes discussões.
- Aos colegas da pós graduação pela colaboração e apoio.
- Aos meus pais pela forma que me educaram e pelo apoio que sempre me deram.
- À minha irmã, Andréa, por sempre acreditar que segui a carreira que sempre gostei e apresento vocação.
- Ao meu namorado, Iverson, pelas inúmeras vezes que desabafei e que me aconselhou.
- Ao professor Dr. Carlos de Carvalho pelo suporte computacional.
- À CAPES e a CNPq pelo apoio financeiro.
- A Deus por me dar forças para sempre continuar, nunca desistir.

Conteúdo

Agradecimentos	iv
Conteúdo	v
1 Introdução	1
2 Sistemas Hamiltonianos	4
2.1 Sistemas Integráveis	4
2.2 Sistemas quasi-Integráveis	8
2.3 Equações na forma de mapa e na forma Hamiltoniana	9
2.4 Área no espaço de fase e função geratriz	11
2.5 Estabilidade KAM para curvas com número de rotação irracional	12
2.6 Teorema de Poincaré- Birkhoff para Número de Rotação Racional	13
2.7 Modo acelerador	20
2.8 Modo balístico	21
2.9 Espaços não homogêneos e ergodicidade	21
2.10 Armadilhas Dinâmicas	22
2.10.1 Armadilha de ilhas hierárquicas	23
2.10.2 Armadilhas de rede estocástica	23
2.10.3 Armadilhas de camada estocástica	24
2.11 Expoente de Lyapunov a tempo finito	25
3 Mapa Padrão	28
3.1 Introdução	28
3.2 Armadilhas dinâmicas	30
3.3 Vôos no espaço de fase limitado ao cilindro	31
3.4 Ergodicidade	33
3.5 Mapa padrão com dissipação	34

4	Mapa Padrão Dissipativo e Assimétrico	39
4.1	Apresentando o modelo	39
4.2	Espaço de fase do sistema conservativo	44
4.3	Inserindo a dissipação	51
5	Conclusão	63
	Bibliografia	65

Capítulo 1

Introdução

O efeito catraca apresenta a possibilidade de se obter transporte direto (correntes de direções preferenciais de movimento) de partículas sem a presença de forças externas (como por exemplo forças gravitacionais, campos elétricos macroscópicos e gradientes espaciais químicos de longo alcance [1]) atuando no sistema. Este efeito tornou-se popular devido ao grande interesse em torno de motores moleculares (ou motores brownianos).

Este efeito é proibido para sistemas em equilíbrio devido a segunda lei da termodinâmica. Assim, para que exista este efeito é necessário que o sistema esteja fora do equilíbrio dinâmico e que apresente a quebra de certas simetrias espaciais e temporais [2]. A simetria a ser quebrada é aquela em que as equações de movimento permanecem invariantes porém inverte-se o sinal da velocidade do sistema [2]. Estes sistemas dinâmicos que não apresentam ruído termodinâmico e nem forças externas, apresentam correntes em direções preferenciais devido ao termo inercial (ou efeito inercial) que induz o caos determinístico no sistema [2], [3].

Sistemas Hamiltonianos apresentam espaço de fase não homogêneos, apresentando tanto regiões de caos quanto regiões de movimento regular. Existem certas regiões do espaço de fase, regiões em torno das trajetórias regulares (ilhas), nas quais uma trajetória provinda da região de caos (mar caótico) sofre um aprisionamento e apresenta movimento influenciado pelo número rotacional da curva mais externa da ilha. Existem ilhas que apresentam modos aceleradores e, devido a estes, trajetórias iniciadas em regiões regulares (ilhas) são aceleradas em função do tempo. As trajetórias que estão aprisionadas em torno destas regiões também sofrem a influência dos modos aceleradores, podendo sofrer vôos no espaço de fase caso este seja ilimitado em p ou θ . Assim, uma trajetória iniciada no mar caótico apresenta movimento

caótico no espaço de fase e, ao ser aprisionada por um determinado tempo em torno de uma ilha de modo acelerador, apresenta vôos os quais possuem aceleração.

Como visto no início da introdução, para que existam correntes certas simetrias devem ser quebradas. A referência [2] constrói um sistema com vôos assimétricos de Levy e deriva uma expressão para a corrente utilizando-se uma soma em relação as ressonâncias principais do sistema. Neste artigo obtém-se que a corrente de direção preferencial é obtida através da quebra de simetria dos vôos de Levy ocasionados pelas ressonâncias com número rotacional diferente de zero (ressonâncias de modos balísticos).

Entretanto, quando trabalhamos com um sistema dissipativo (como é o caso do modelo que utilizaremos neste trabalho) o espaço de fase é transformado. As ilhas ressonantes são destruídas e, dependendo das bifurcações que o sistema apresenta, a maior parte dos pontos elípticos do sistema tornam-se atratores no sistema dissipativo. Na referência [4] observa-se que, quando um sistema apresenta dissipação, quanto menor for a dissipação maior será o número de atratores do sistema e maior será o período destes atratores (a função do número de atratores em função da dissipação segue uma lei de potência). Os atratores de períodos maiores possuirão tempo de vida menor em relação ao aumento da dissipação. Para pouca dissipação os atratores de período maior tenderão a influenciar a dinâmica do espaço de fase. Quanto maior for o número de atratores, mais fractal será a bacia de atração destes atratores no espaço de fase. Quanto mais perto do sistema conservativo, mais próxima será a dimensão fractal efetiva à dimensão do sistema conservativo.

Em [5] observa-se que a indução de atratores devido a dissipação pode ser vista em todas as escalas e estes atratores apresentam bacias entrelaçadas num modo complexo, levando a uma multi-estabilidade e imprevisibilidade do sistema. Em sistemas hamiltonianos a lei de espalhamento de partículas é algébrica devido a presença de grude e, em sistemas dissipativos esta lei é exponencial, assim, o artigo descreve a existência de uma região do parâmetro de dissipação em que estes dois comportamentos se cruzam, podendo ser observada pela curva de dimensão fractal do sistema em função do aumento da dissipação. O artigo conclui que a região de pequena dissipação (próxima ao sistema conservativo) apresenta um decaimento fractal rápido e linear devido a esta transição entre a dinâmica de espalhamento algébrica de sistemas conservativos e a dinâmica de espalhamento exponencial de sistemas dissipativos. Na região com maior dissipação a dimensão fractal diminui lentamente devido ao aparecimento de atratores mais fortes.

Uma propriedade importante destas correntes de direção preferencial é o possível ganho de energia através destas. Na referência [6] observa-se o ganho de energia do sistema devido ao aumento na velocidade de saturação do sistema quando uma pequena dissipação é adicionada. Isto ocorre porque o sistema conservativo apresenta um toro invariante que proíbe e limita o movimento do sistema na direção de sua velocidade e, quando é adicionada a dissipação, os pontos elípticos do sistema bifurcam formando um foco estável e o toro que limita o movimento na direção da velocidade é quebrado. Existe uma região de grude no espaço de fase e muitas trajetórias orbitam por um longo tempo em torno do foco antes de serem capturadas por este. Este tipo comportamento de trajetórias em torno do foco também é observado em nosso sistema.

Em vários artigos são citados a viabilidade de observação experimental destes efeitos através de redes ópticas que possuem átomos confinados ("cold atom").

Este trabalho está organizado em 4 capítulos. No capítulo 1 apresentaremos teoricamente como ocorre a formação do espaço de fase de um sistema hamiltoniano, bem como algumas propriedades que aparecem no espaço de fase destes sistemas, este capítulo está baseado nas referências [7], [8], [9]. No capítulo 2 apresentaremos a dinâmica do mapa padrão, seu espaço de fase e características apresentadas pelo sistema. O mapa padrão apresenta propriedades genéricas de sistemas Hamiltonianos e muitos modelos se reduzem a forma deste mapa. No mesmo capítulo é adicionado um termo de dissipação ao sistema e são observadas algumas propriedades. Para o capítulo 2 utilizaram-se como referências [7], [8], [10]. No capítulo 3 apresentamos o modelo do mapa padrão o qual é inserido um termo de assimetria espacial e dissipação, modelo apresentado pela referência [3], a qual apresenta resultados que motivaram esta pesquisa pois, para entendermos e analisarmos a presença de correntes com direção preferencial quando o sistema é próximo ao conservativo (resultado encontrado em [3]), analisamos quais as propriedades do espaço de fase que contribuem para o aparecimento desta corrente, objetivo principal desta pesquisa. Na conclusão finalizamos o trabalho fazendo certas correlações com os resultados, apresentamos algumas hipóteses ainda não confirmadas e trabalhos futuros.

Capítulo 2

Sistemas Hamiltonianos

2.1 Sistemas Integráveis

Um sistema físico é considerado hamiltoniano quando as forças que atuam sobre este são invariantes da velocidade e seu movimento pode ser descrito através das equações de Hamilton-Jacob. Quando a hamiltoniana possui um valor constante igual a energia do sistema (sistemas com energia constante) o sistema é considerado Hamiltoniano. Um sistema com N graus de liberdade será integrável se as suas equações de Hamilton-Jacob forem separáveis em N equações independentes, um para cada grau de liberdade e suas soluções de $p(t)$ e $q(t)$ puderem ser escritas em quadraturas.

Considerando um oscilador com dois graus de liberdade e que possui Hamiltoniana independente do tempo, se H é integrável este pode ser escrito em função de variáveis ação-ângulo:

$$H(J_1, J_2) = E \quad (2.1)$$

sendo E a energia constante do sistema e J_1 e J_2 constantes de movimento.

Como H é constante, o movimento no espaço de fase é reduzido em grau de liberdade (de 4 dimensões para 3 dimensões). Como J_1 e J_2 são constantes de movimento do sistema, o movimento no espaço de fase se reduz a uma superfície bidimensional em um espaço tridimensional de energia constante.

Sabemos que o movimento angular de cada grau de liberdade para este caso é parametrizado pela frequência angular associada a cada grau de liberdade do sistema:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \omega_1 t + \theta_{10} \text{ e} \\ \theta_2 &= \omega_2 t + \theta_{20}\end{aligned}\tag{2.2}$$

Estas variáveis ângulo são periódicas e de período 2π e assim o movimento pode ser caracterizado como o movimento em um toro, como pode ser observado na figura 2.1.

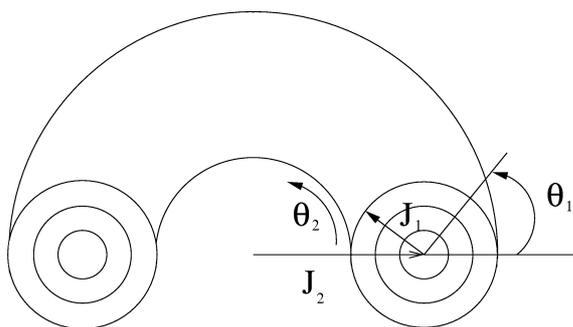


Figura 2.1: Representação do espaço de fase limitado por um toro para um sistema integrável com dois graus de liberdade caracterizado pelas variáveis J_1 , J_2 e suas respectivas variáveis ângulo conjugadas: θ_1 e θ_2 .

O movimento no espaço de fase limitado ao toro é caracterizado pelas variáveis J_1 , J_2 e suas respectivas variáveis conjugadas ângulo: θ_1 e θ_2 . J_1 é a variável que representa o raio de círculos concêntricos (raio interno do toro) e θ_1 representa a variável ângulo de cada um destes círculos; J_2 representa o raio externo do toro sendo θ_2 sua variável ângulo conjugada (figura 2.1).

Ao fixar a energia E e J_1 do sistema, J_2 será obrigatoriamente fixo pois $H(J_1, J_2) = E$. Assim:

$$\text{se } J_1 = J_1(E = \text{constante}, J_2) = \text{constante} \longrightarrow J_2(E, J_1) = \text{constante}.$$

Sabemos que o movimento de θ_1 e θ_2 é dado pela equação 2.2. Como $\omega_1 = \omega_1(J_1)$ e $\omega_2 = \omega_2(J_2)$, a razão

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

também é constante, sendo esta razão, α , denominada número de rotação. Para $\alpha = \frac{r}{s}$, r e s inteiros, sendo que r não é divisível por s , as frequências são comensuráveis e

o movimento no toro é periódico. Assim, uma trajetória sempre retornará ao ponto inicial depois de r revoluções em θ_1 e s revoluções em θ_2 .

Quando α é irracional a trajetória mapeia toda a superfície do toro, nunca retornando ao ponto inicial (trajetórias não periódicas). O movimento no toro pode ser generalizado para um sistema com N graus de liberdade. Cada ação constante do sistema irá diminuir em um grau a dimensão do espaço de fase. Assim, para um sistema com N graus de liberdade ($2N$ -dimensional), se tivermos N ações constantes, o espaço de fase $2N$ -dimensional será reduzido para um espaço N -dimensional com N variáveis ângulo ortogonais entre si e de período 2π .

Em sistemas integráveis, para qualquer espaço canônico:

$$\vec{p} = \vec{p}(\vec{J}, \vec{\theta}); \quad \vec{q} = \vec{q}(\vec{J}, \vec{\theta})$$

podemos decompor \vec{p} e \vec{q} via expansão de Fourier das variáveis ângulo:

$$\begin{aligned} \vec{p}(t) &= \sum_m \vec{p}_m(\vec{J}) e^{i(\vec{m} \cdot \vec{\omega} t + \vec{m} \cdot \vec{\beta})} \\ \vec{q}(t) &= \sum_m \vec{q}_m(\vec{J}) e^{i(\vec{m} \cdot \vec{\omega} t + \vec{m} \cdot \vec{\beta})}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

sendo \vec{m} um vetor N -dimensional com componentes inteiras e β um vetor constante.

Para soluções periódicas:

$$\vec{m} \cdot \vec{\omega} = 0, \quad (2.4)$$

o que implica que $\omega_i = n_i \omega_0$, sendo que n_i e ω_i não possuem fator comum. Assim, o período de uma trajetória completa é descrito como:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi n_i}{\omega_i}, \quad (2.5)$$

sendo que n_i é o “número de voltas” que o i -ésimo grau de liberdade com frequência ω_i necessita para fazer uma trajetória completa de um período T .

Fazendo um corte da superfície do toro no plano $J_1 = \theta_1$ (corte da trajetória em θ_2 constante), as sucessivas intersecções da trajetória com esta superfície definirão um mapa que possui J_1 constante. O intervalo de tempo entre cada iteração será $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_2}$ (tempo para θ_2 dar uma volta de 2π) e θ_1 avançará de $\omega_1 \Delta t = \omega_1 \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\alpha(J_1)$. Assim, o próximo ponto que cortará o plano $J_1 = \theta_1$ pode ser obtido

através das seguintes equações:

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

sendo estas conhecidas como o mapa de torção.

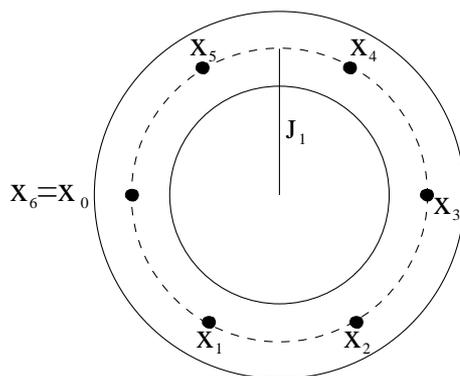


Figura 2.2: Representação gráfica do mapa de torção. A curva tracejada apresenta α racional e está entre duas trajetórias com α irracional

Para trajetórias com $\alpha = \frac{r}{s}$ racional este mapa é formado por pontos fixos que retornam a si mesmos depois de s iteradas. Já para α irracional qualquer condição inicial no círculo tende a formar o círculo completo (fechado) quando n tende ao infinito (figura 2.2).

O mapa de torção pode ser descrito em função de outras variáveis (além das variáveis de ação-ângulo), como por exemplo para:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \cos \psi - y_n \sin \psi \\ y_{n+1} &= x_n \sin \psi + y_n \cos \psi, \end{aligned} \quad (2.7)$$

sendo ψ um parâmetro fixo, tornando-se um mapa de torção linear. Como a área deste mapa é preservada (deve obedecer ao teorema de Liouville), esta forma do mapa também deve obedecer uma regra do tipo:

$$\frac{\partial(J_{n+1}, \theta_{n+1})}{\partial(J_n, \theta_n)} \equiv [\theta_{n+1}, J_{n+1}] = 1 \quad (2.8)$$

Este resultado é geral para qualquer sistema integrável com N graus de liberdade e H constante.

2.2 Sistemas quasi-Integráveis

Considerando um sistema bidimensional integrável, inserindo uma perturbação ao sistema de tal forma que a Hamiltoniana seja função também dos ângulos:

$$H(\vec{J}, \vec{\theta}) = H_0(\vec{J}) + \epsilon H_1(\vec{J}, \vec{\theta}), \quad (2.9)$$

sendo H_0 a hamiltoniana do sistema não perturbado.

Fazendo o plano $\theta_2 = \text{constante}$ temos um corte do espaço de fase para a superfície $J_1 - \theta_1$. Nesta superfície espera-se que o mapa de torção comporte-se da forma:

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n + \epsilon f(J_{n+1}, \theta_n) \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}) + \epsilon g(J_{n+1}, \theta_n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

f e g são periódicas em θ . Este mapa deve também preservar a área pois suas iterações são obtidas através das equações de Hamilton. Para isto, utiliza-se a função geratriz, que pode ser obtida através de:

$$F_2 = J_{n+1}\theta_n + 2\pi\mathcal{A}(J_{n+1}) + \epsilon\mathcal{G}(J_{n+1}, \theta_n), \quad (2.11)$$

sendo $\alpha = \frac{d\mathcal{A}}{dJ_{n+1}}$, $f = -\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\theta_n}$, $g = -\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial J_{n+1}}$ e $\frac{\partial f}{\partial J_{n+1}} + \frac{\partial g}{\partial\theta_n} = 0$ para que a área seja preservada.

Para a maioria dos mapas f é independente de \vec{J} e $g \equiv 0$. Assim, o mapa de torção perturbado torna-se o mapa de torção radial:

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n + \epsilon f(\theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Linearizando este mapa em torno de um ponto fixo de período 1: $J_{n+1} = J_n = J_0$, para α inteiro. Ações próximas a este ponto podem ser descritas como $J_n = J_0 + \Delta J_n$ e, considerando $\alpha(J_{n+1}) = \alpha(J_0) + \alpha'\Delta J_n$, obtém-se através da linearização que:

$$\begin{aligned} J_0 + \Delta J_{n+1} &= J_0 + \Delta J_n + \epsilon f(\theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi(\alpha(J_0) + \alpha'\Delta J_n). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Substituindo uma nova ação $I_n = 2\pi\alpha'\Delta J_n$, obtém-se o mapa padrão generalizado:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + K f^*(\theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1}, \quad \text{mod } 2\pi \end{aligned} \quad (2.14)$$

sendo $K = 2\pi\alpha'\epsilon f_{max}$ o parâmetro de estocasticidade e $f^* = \frac{f}{f_{max}}$. Para $f^* = \sin \theta_n$ obtém-se o mapa padrão (também conhecido como mapa de Chirikov-Taylor):

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + K \sin \theta_n, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1}, \quad \text{mod } 2\pi, \end{aligned} \quad (2.15)$$

utilizado por Chirikov-Taylor para analisar a transição entre o movimento regular e o movimento caótico.

O mapa de torção perturbado pode ser generalizado para um sistema de N graus de liberdade e Hamiltoniana constante utilizando-se a função geratriz:

$$F_2 = \vec{J}_{n+1} \cdot \vec{\theta}_n + 2\pi\mathcal{A}(\vec{J}_{n+1}) + \epsilon\mathcal{G}(\vec{J}_{n+1}, \vec{\theta}_n). \quad (2.16)$$

Se \mathcal{G} não for função de \vec{J}_{n+1} , será obtido um mapa de torção $(2N - 2)$ dimensional da forma:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{n+1} &= \vec{J}_n + \epsilon\vec{f}(\vec{J}_{n+1}, \vec{\theta}_n) \\ \vec{\theta}_{n+1} &= \vec{\theta}_n + 2\pi\vec{\alpha}(\vec{J}_{n+1}) + \epsilon\vec{g}(\vec{J}_{n+1}, \vec{\theta}_n). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Podendo ser representado simbolicamente por:

$$\vec{x}_{n+1} = T\vec{x}_n, \quad \vec{x} = \vec{x}(\vec{J}, \vec{\theta}) \quad (2.18)$$

na qual T representa o mapa.

2.3 Equações na forma de mapa e na forma Hamiltoniana

Um sistema pode ser convertido para forma de mapa através da integração de suas equações de Hamilton em um período de tempo T_2 referente a um ciclo da variável θ_2 , produzindo um mapa na forma (2.10). Considerando um sistema bidimensional, para se obter a forma de mapa do sistema deve-se encontrar a ordem de ϵ através das funções f e g . Para isto, sabendo-se que:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_i}$$

e que para sistemas quasi-integráveis pode ser reescrito como:

$$\frac{dJ_1}{dt} = -\epsilon \frac{\partial H_1}{\partial \theta_1} \quad (2.19)$$

integrando de $t = 0$ até $t = T_2$:

$$\Delta J_1 = -\epsilon \int_0^{T_2} dt \frac{\partial H_1}{\partial \theta_1}(J_{n+1}, J_2, \theta_n + \omega_1 t, \theta_{20} + \omega_2 t) \quad (2.20)$$

Como H é constante, pode-se dizer que J_2 , ω_1 , ω_2 são funções de J_{n+1} . Integrando $\frac{\partial H_1}{\partial \theta_1}$ em relação a uma órbita não perturbada, isto é, em relação aos valores não perturbados de \vec{J} e $\vec{\theta}$ pode-se obter a ordem de ϵ :

$$\epsilon f(J_{n+1}, \theta_n) = \Delta J_1(J_{n+1}, \theta_n) \quad (2.21)$$

sendo que a variação na ação (ΔJ) pode ser obtida via condição de preservação de área no espaço de fase, obtendo-se que:

$$g(J, \theta) = - \int^\theta \frac{\partial f}{\partial J} d\theta' \quad (2.22)$$

sendo que $g \equiv 0$ para o mapa de torção radial.

O mesmo cálculo de variação da ação pode ser feito para a Hamiltoniana de um sistema bidimensional que não esteja na forma ação-ângulo:

$$H = H_0(J_1, p_2, q_2) + \epsilon H_1(J_1, \theta_1, p_2, q_2) \quad (2.23)$$

Podemos obter novamente que:

$$\Delta J_1 = -\epsilon \int_0^{T_2} dt \frac{\partial H_1}{\partial \theta_1}(J_{n+1}, \theta_n + \omega_1 t, p_2(t), q_2(t)). \quad (2.24)$$

O mesmo cálculo pode ser generalizado para um sistema de N graus de liberdade, obtendo-se o valor da variação da ação para $N - 1$ superfícies de secção das ações. Assim:

$$\Delta \vec{J}_1 = -\epsilon \int_0^{T_N} dt \frac{\partial H_1}{\partial \vec{\theta}_1}(\vec{J}_{n+1}, J_N, \vec{\theta}_n + \vec{\omega}t, \theta_N + \omega_N t) \quad (2.25)$$

sendo $\epsilon \vec{f} = \Delta \vec{J}$. Usando o método e as equações descritos anteriormente obtém-se o mapa na forma da equação (2.17).

Para transformar as equações de um mapa para a forma hamiltoniana deve-

mod inserir uma função periódica delta $\delta_1(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(n - m) = 1 + 2 \sum_{q=1}^{+\infty} \cos 2\pi qn$

nas equações de (2.12). Assim, obtemos que:

$$\frac{dJ}{dn} = \epsilon f(\theta) \delta_{1n} \quad \text{e} \quad \frac{d\theta}{dn} = 2\pi\alpha(J). \quad (2.26)$$

Podemos obter H através de:

$$H(J, \theta, n) = 2\pi \int^J \alpha(J') dJ' - \epsilon \delta_1(n) \int^\theta f(\theta') d\theta'. \quad (2.27)$$

2.4 Área no espaço de fase e função geratriz

A área no espaço de fase para o intervalo $\theta_1 < \theta < \theta_2$ é calculada através de:

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J(\theta) d\theta. \quad (2.28)$$

Considerando uma função geratriz do tipo $F_1 = F_1(\theta_{n+1}, \theta_n)$ para o mapa tal que:

$$J_n = -\frac{\partial F_1}{\partial \theta_n} \quad \text{e} \quad J_{n+1} = \frac{\partial F_1}{\partial \theta_{n+1}}. \quad (2.29)$$

Definindo uma variável λ que parametriza a curva, então:

$$\frac{dF_1}{d\lambda} = \frac{\partial F_1}{\partial \theta_{n+1}} \frac{d\theta_{n+1}}{d\lambda} + \frac{\partial F_1}{\partial \theta_n} \frac{d\theta_n}{d\lambda} = J_{n+1} \frac{d\theta_{n+1}}{d\lambda} - J_n \frac{d\theta_n}{d\lambda}. \quad (2.30)$$

Integrando esta equação obtemos que:

$$F_1(\theta'_2(\theta_2), \theta_2) - F_1(\theta'_1(\theta_1), \theta_1) = \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} J_{n+1} d\theta_{n+1} - \int_{\theta_1}^{\theta_2} J_n d\theta_n. \quad (2.31)$$

Desta forma:

$$\Delta F_1(\theta_2, \theta_1) = A_{n+1} - A_n \quad (2.32)$$

sendo θ'_1 e θ'_2 os pontos finais depois da iteração do mapa. Assim, uma mudança na área (em relação a uma curva escolhida arbitrariamente) da primeira para a segunda iteração é igual a diferença da função geratriz para o mapa em seus pontos finais (θ'_1, θ'_2) independentemente da escolha da curva de integração, sendo que ΔF_1 é a mudança na ação.

2.5 Estabilidade KAM para curvas com número de rotação irracional

Para

$$H = H_0(\vec{J}) + \epsilon H_1(\vec{J}, \vec{\theta}),$$

hamiltoniana em função de \vec{J} e $\vec{\theta}$ fracamente perturbada, a ressonância entre os graus de liberdade pode destruir a convergência das várias expansões em séries de potência que existiam no sistema não perturbado. Segundo o teorema KAM, teorema desenvolvido por Kolmogorov, Arnold e Moser e que recebeu este nome em homenagem aos três pesquisadores, para que exista um toro invariante $(\vec{J}, \vec{\theta})$ parametrizada por ξ que satisfaça as relações:

$$\begin{aligned}\vec{J} &= J_0 + \vec{v}(\vec{\xi}, \epsilon) \\ \vec{\theta} &= \vec{\xi} + \vec{u}(\vec{\xi}, \epsilon),\end{aligned}\tag{2.33}$$

sendo \vec{v} e \vec{u} periódicos em $\vec{\xi}$ e que se anulam quando $\epsilon = 0$ e $\dot{\xi} = \omega$ (ω é a frequência do toro não perturbado), devem ser satisfeitas as seguintes condições:

1. As frequências devem ser linearmente independentes:

$$\sum_i m_i \omega_i(\vec{J}) \neq 0,\tag{2.34}$$

sendo $\omega = \frac{\partial H_0}{\partial J}$ e m_i a componente i do vetor \vec{m} (ver (2.4) e (2.5));

2. Condições suaves de perturbação (número suficiente de derivadas contínuas). As curvas KAM só podem existir se distantes de ilhas perturbadas;
3. Condições iniciais suficientemente longe da ressonância para satisfazer:

$$|\vec{m} \cdot \vec{\omega}| \geq \gamma |\vec{m}|^{-\tau},\tag{2.35}$$

$\forall \vec{m}$; sendo τ função do número de graus de liberdade e da suavidade de H_1 ; γ depende de ϵ e da não-linearidade (G) da Hamiltoniana não perturbada (H_0).

Pela condição 3 observa-se que γ não deve ser grande, mas γ aumenta com ϵ , $|H_1|$ e $1/G$, assim, a perturbação deve ser pequena para que exista um toro KAM. Pelas condições 1 e 2 é necessária uma não-linearidade moderada. Se as três condições forem satisfeitas, o círculo do mapa torção ($J_{n+1} = J_n$) será perturbado para um quase-círculo.

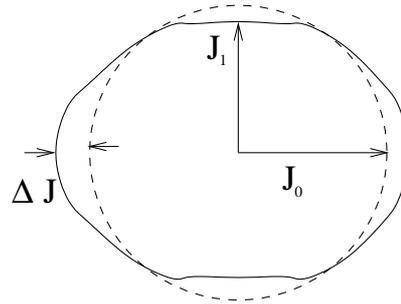


Figura 2.3: Deformação de uma curva com α irracional devido a inclusão de uma pequena perturbação à hamiltoniana integrável, gerando uma curva KAM.

Este teorema (desenvolvido por Kolmogorov, Arnold e Moser para um sistema com número suficiente de derivadas contínuas) fornece a base para a existência de um invariante em sistemas não-lineares acoplados. Para um mapa bidimensional, a condição suficiente de suavidade para a existência de curvas KAM (condição 2) é de que existam duas derivadas contínuas do mapa (ou três derivadas contínuas para a hamiltoniana que corresponde ao mapa).

Pode-se presumir (Moser, 1973) que a condição de suavidade de uma curva, para a existência de curvas KAM, é de que três derivadas contínuas são sempre suficientes, sendo que 2 derivadas contínuas são necessárias pois curvas invariantes podem ou não existir se existirem apenas duas derivadas contínuas. Para N graus de liberdade são necessários no mínimo $(2N - 2)$ derivadas contínuas (Chirikov, 1979). Entretanto, Moser (1966) descreve uma condição mais rigorosa: devem haver no mínimo $(2N + 2)$ derivadas contínuas para existir uma curva invariante.

Quanto maior o termo de perturbação ϵ , curvas KAM mais próximas à α racional serão destruídas mais facilmente, isto é, as últimas curvas KAM a quebrarem com o aumento da perturbação são as curvas mais irracionais possíveis, e o número mais irracional possível é o número de ouro: $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

2.6 Teorema de Poincaré- Birkhoff para Número de Rotação Racional

Como visto na seção anterior, toros irracionais sofrem uma deformação em torno de seu círculo original quando uma pequena perturbação é adicionada a hamiltoniana integrável. Com o aumento desta perturbação o toro irracional tende a

ser quebrado. A quebra dos toros irracionais dependerá do quão irracional seja α e do valor da perturbação. O último toro irracional a ser quebrado será aquele que possui α mais afastado possível de um número racional.

Em toros ressonantes (que possuem α racional) e em suas vizinhanças o teorema KAM não é válido. No caso de toros ressonantes, com $\alpha(J) = \frac{r}{s}$, segundo o teorema de Poincaré-Birkhoff, o termo de perturbação fará com que os toros sejam destruídos e apareçam $2ks$ ($k = 1, 2, \dots$) pontos fixos no lugar destes, sendo ks pontos elípticos (pontos que possuem todas as variedades estáveis) e ks pontos hiperbólicos (pontos que possuem uma variedade estável e outra instável). A vizinhança desses toros também sofrerá mudanças: toros irracionais muito próximos aos toros racionais serão destruídos.

Considerando o mapa de torção não perturbado, escolhendo um círculo com $\alpha(J) = \frac{r}{s}$ racional o qual um ponto inicial volte a si mesmo após s iteradas, pode-se escolher outros dois círculos (curvas KAM internas e externas à $\alpha(J) = \frac{r}{s}$) tais que $\alpha = \alpha_+ > \frac{r}{s}$ mapeia na direção anti-horária a cada s iterações do mapa e $\alpha = \alpha_- < \frac{r}{s}$ mapeia na direção horária do círculo a cada s iterações do mapa, como representado na figura 2.4.

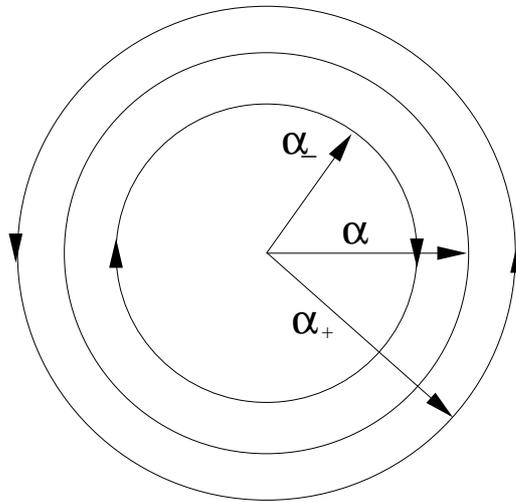


Figura 2.4: Representação de 3 curvas do mapa de torção não perturbado. A curva mais externa representa uma curva com α irracional tal que $\alpha = \alpha_+ > \frac{r}{s}$ mapeia na direção anti-horária a cada s iterações do mapa. A curva mais interna representa a curva com α irracional tal que $\alpha = \alpha_- < \frac{r}{s}$ mapeia na direção horária do círculo a cada s iterações do mapa. Entre estas duas curvas observa-se uma curva com $\alpha = \frac{r}{s}$ racional que retorna ao ponto inicial a cada s iterações do mapa.

Se o termo de perturbação for suficientemente pequeno, pontos inicialmente na curva α_+ após s iteradas irão se posicionar numa coordenada θ maior que a coordenada dos pontos iniciais, movimentando-se no sentido anti-horário. Já pontos da curva inicial α_- após s iteradas irão se posicionar numa coordenada θ menor que a coordenada dos pontos iniciais, movimentando-se no sentido horário. Como visto, pelo teorema KAM, estas duas curvas poderão se deformar em relação as curvas originais. Fixando θ , se variarmos J entre J_- da curva α_- e J_+ da curva α_+ , encontraremos uma curva α_ϵ tal que após s iteradas do mapa a coordenada θ não mudará. Esta curva estará próxima a curva de α racional e apenas terá uma mudança na sua coordenada J .

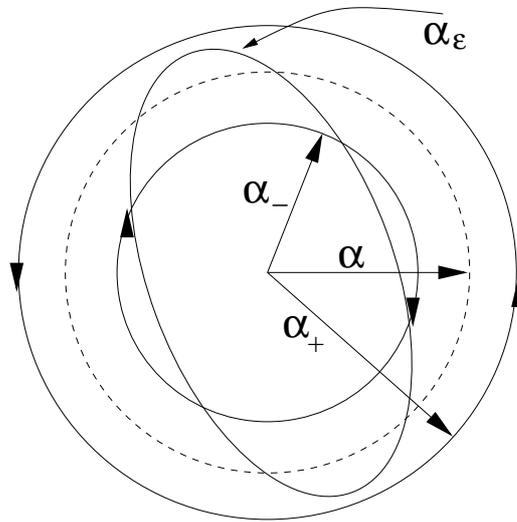


Figura 2.5: Inserção de uma pequena perturbação à hamiltoniana integrável. Entre as curvas irracionais perturbadas que giram no sentido anti-horário e horário existe uma curva α_ϵ tal que cada ponto desta curva ao ser iterado s vezes não sofrerá mudança na coordenada angular (θ_1).

Iterando s vezes cada ponto da curva α_ϵ obtemos uma nova curva α'_ϵ .

Como ambas as curvas provem de um mapa que obedece a preservação das áreas, a área limitada pela curva α_ϵ é igual a limitada pela curva α'_ϵ . Desta forma, as curvas devem se cruzar em um número par de pontos (figura 2.6). Cada um destes pontos retornam a si mesmos depois de s iterações do mapa e são chamados de pontos fixos de Poincaré-Birkhoff.

Os pontos fixos de Poincaré-Birkhoff apresentam dois comportamentos distintos: pontos na vizinhança de pontos fixos chamados elípticos tendem a circundar

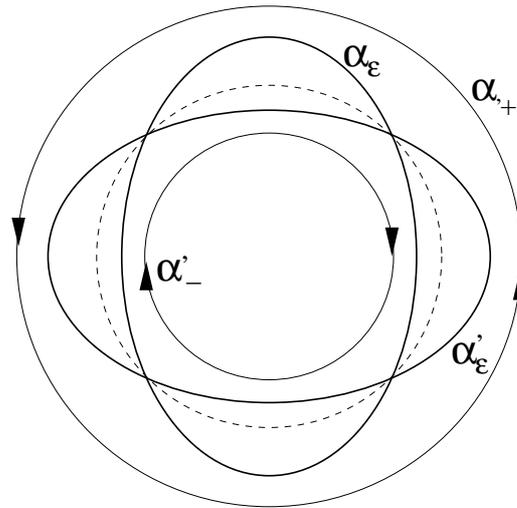


Figura 2.6: Curva α'_ϵ gerada através da iteração do mapa s vezes para cada ponto da curva α_ϵ .

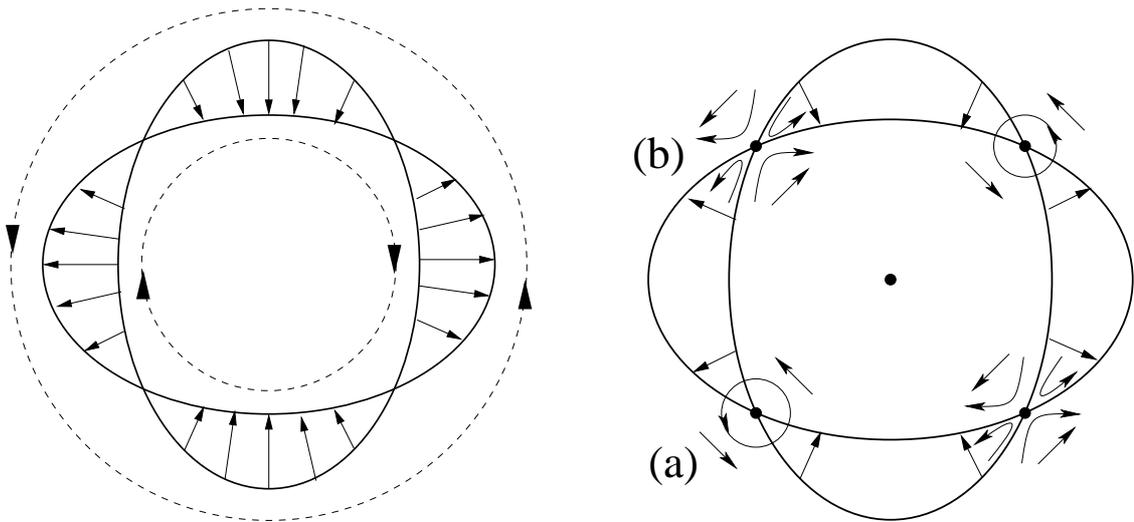


Figura 2.7: Pontos fixos gerados no cruzamento das curvas α_ϵ e α'_ϵ ($2ks$ pontos) e o comportamento de trajetórias iniciadas na vizinhança destes pontos. Para pontos elípticos (a), trajetórias iniciadas na vizinhança destes pontos tendem a circunda-los gerando toros invariantes; para pontos hiperbólicos (b) trajetórias iniciadas próximas a estes pontos tendem a se afastar destes.

estes pontos, formando toros menores; pontos na vizinhança de pontos fixos chamados hiperbólicos tendem a se afastar destes pontos. Com a perturbação formam-se

a mesma quantidade de pontos fixos elípticos (ks pontos) e hiperbólicos (ks pontos) que se alternam no espaço de fase (figura 2.7).

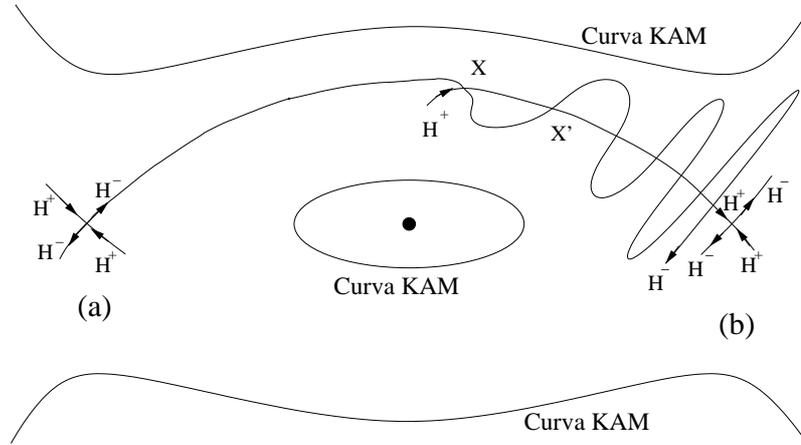


Figura 2.8: Representação gráfica do fenômeno de emaranhamento (ou tango) homoclínico, representando os infinitos cruzamentos que ocorrem entre as variedades instável e estável de um ponto hiperbólico. Para facilitar a compreensão, o ponto (a) é definido como o ponto hiperbólico da esquerda e o ponto (b) o ponto hiperbólico da direita.

Os pontos hiperbólicos serão conectados por uma separatriz. Diferente dos sistemas integráveis (como por exemplo o pêndulo) que possuem uma separatriz suave interligando os pontos hiperbólicos, a separatriz de sistemas quasi-integráveis possui um comportamento mais complexo. No caso de sistemas quasi-integráveis as curvas que interceptam os pontos hiperbólicos não se superpõe suavemente como em sistemas integráveis, e sim se interceptam infinitas vezes. Iremos considerar o ponto hiperbólico como a junção de quatro curvas: duas curvas com trajetórias que se aproximam do ponto fixo e são separatrizes da hamiltoniana H^+ e duas curvas com trajetórias que se afastam do ponto fixo e fazem parte da hamiltoniana H^- . Assim, um ponto P pertencerá a H^+ se em T_x^n iterações (com n tendendo ao infinito) se aproximar do ponto de singularidade. Para um ponto P pertencer a H^- a transformada inversa do mapa iterada n vezes ($\lim_{n \rightarrow +\infty} T_x^{-n}$) deve se aproximar da singularidade. Como o período de oscilação na separatriz tende ao infinito, as iterações do mapa de um ponto inicial P pertencente a uma destas curvas tenderão a se aproximar cada vez mais lentamente do ponto de singularidade. Considerando dois pontos hiperbólicos adjacentes, a curva H^- que sai de um ponto hiperbólico (definiremos como o ponto hiperbólico da esquerda) intercepta uma curva H^+ que

está se aproximando do outro ponto fixo hiperbólico (definiremos como o ponto hiperbólico da direita). Este ponto de intersecção entre as curvas (ponto X na figura 2.8) é denominado ponto homoclínico. Como as curvas H^+ e H^- são invariantes do sistema, o ponto homoclínico deve mapear apenas outros pontos homoclínicos pertencentes a estas duas curvas e, conseqüentemente, se existe um ponto homoclínico devem existir infinitos outros pontos homoclínicos e, da mesma forma, infinitos cruzamentos entre as curvas. A cada cruzamento a distância entre os pontos homoclínicos adjacentes diminui quanto mais próximos estes estão do ponto hiperbólico. Assim, como a área entre dois cruzamentos consecutivos deve ser igual pois o mapa do sistema quasi-integrável continua obedecendo a preservação das áreas, então a área definida pelas curvas que se cruzam em pontos homoclínicos consecutivos deve ser igual e, conseqüentemente, a curva H^- deve sofrer um alongamento na direção transversal à curva H^+ enquanto sofre uma contração na direção longitudinal à curva H^+ . Isto gera uma amplitude maior de oscilação da separatriz H^- ao se aproximar do ponto hiperbólico. O mesmo ocorre com a separatriz H^+ do ponto hiperbólico da esquerda. A curva de H^+ interceptará a curva H^- do ponto hiperbólico da direita infinitas vezes e oscilará com maior amplitude quanto mais se aproximar do ponto hiperbólico da direita.

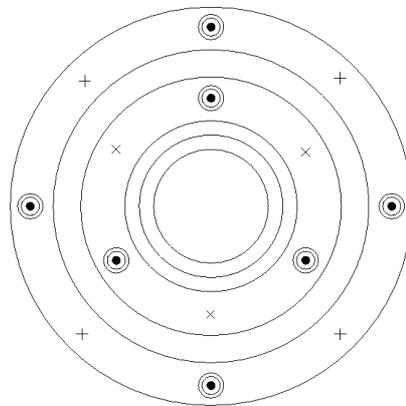


Figura 2.9: Estrutura padrão do espaço de fase do sistema quando uma pequena perturbação é inserida na hamiltoniana integrável. Observa-se a quebra de curvas com α racional para $s = 3$ e $s = 4$ gerando pontos fixos elípticos (representados por pontos internos ao círculos) e hiperbólicos (representados por segmentos de reta que se cruzam) próximos onde anteriormente encontravam-se as curvas. Estes pontos fixos estão limitados por curvas KAM.

Estes cruzamentos das variedades é chamado de emaranhamento (ou tango)

homoclínico. Devido a este comportamento, um pequeno paralelograma de condições iniciais próximo a um dos pontos homoclínicos sofrerá um estiramento e depois dobramento similarmente ao que ocorre com o paralelepípedo de condições iniciais do mapa da ferradura. Seguindo a trajetória de duas condições iniciais muito próximas e que estejam inicialmente nas redondezas da separatriz, veremos que elas se afastarão com apenas algumas iterações, caracterizando a imprevisibilidade e a sensibilidade do sistema às condições iniciais. Estas características sinalizam a presença de caos ao redor da separatriz. Esta região de caos preencherá toda a região entre duas curvas KAM, formando uma região de caos local.

Fazendo uma ampliação da vizinhança em torno de um dos novos pontos elípticos (formado pela quebra de um toro racional) observa-se um padrão similar ao do espaço fase total: curvas KAM em torno do ponto elíptico central, entre essas curvas pontos elípticos e hiperbólicos de órbitas periódica de ordem superior de ressonância que também se quebraram com a perturbação. Os pontos hiperbólicos formados pela perturbação destas ressonâncias também serão conectados por uma separatriz na qual as variedades estáveis e instáveis se cruzarão infinitas vezes, produzindo o tango homoclínico. Estas variedades também poderão cruzar com as variedades dos pontos hiperbólicos das ressonâncias de primeira ordem, produzindo infinitos cruzamentos em pontos chamados pontos heteroclínicos.

Concluimos então que o espaço de fase de um sistema quasi-integrável de dois graus de liberdade no qual a perturbação ao sistema integrável é suficientemente pequena será formado por curvas KAM provenientes de curvas com α irracional que não foram destruídas com a perturbação, pontos elípticos e hiperbólicos provenientes de curvas com α racional, novas curvas KAM em torno dos novos pontos elípticos e regiões de caos local que preenchem algumas regiões limitadas por duas curvas KAM. Esta mesma estrutura pode ser vista em cada ampliação do espaço de fase total, sendo uma estrutura fractal.

Ao aumentar o termo de perturbação mais toros irracionais serão quebrados, gerando uma conexão entre áreas de caos local. Existe um valor do parâmetro de perturbação no qual a última superfície KAM será quebrada, o que gera uma transição da presença de caos local para a presença de caos global. A estrutura do espaço de fase será modificada: trajetórias regulares (chamadas de ilhas) ocuparão pequenas regiões do espaço e são envoltas por trajetórias caóticas da região estocástica (conhecido como mar caótico) que preencherá todo o resto do espaço de fase. Em torno das ilhas aparecerão "cantoris": toros densos, invariantes e instáveis

provenientes de toros KAM destruídos pela perturbação. Para $K > K_c$ qualquer trajetória com número rotacional irracional possuirá um cantori. Podemos imaginar um cantori como sendo um toro com furos e, assim, uma trajetória leva um tempo muito grande para encontrar um destes furos e assim poder atravessá-lo. O cantori produz um tipo de barreira dinâmica para a difusão de partículas. Quanto maior for a diferença $(K - K_c)$ e a distância do cantori da borda de uma ilha, maior será a difusão em p . Por ser uma barreira na difusão de partículas, o cantori é um gerador de transporte anômalo em sistemas dinâmicos [7], [8].

2.7 Modo acelerador

Considerando o mapa padrão

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + K \operatorname{sen}(x_n), \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1}. \end{aligned}$$

no domínio fundamental $(0 \leq p < 2\pi)$ e $(0 \leq x < 2\pi)$, podemos obter soluções correspondentes ao movimento balístico tanto na direção de x quanto na direção de p , como por exemplo para as condições iniciais:

$$p_0^{(a)} = 2\pi m, \quad K \operatorname{sen}(x_0^{(a)}) = 2\pi l \quad (2.36)$$

sendo m inteiro e l inteiro, $l > 0$. Substituindo estes valores no mapa obtemos:

$$p_n^{(a)} = (2\pi l)n + 2\pi m$$

que descreve um movimento de aceleração em direção de p , isto é: p crescerá linearmente a cada iteração do mapa, e x crescerá em função de t^2 (em função do tempo, isto é, a cada iterada).

Este modo acelerador será estável para um certo intervalo de valores do parâmetro K . Para calcular este intervalo utilizaremos os autovalores da Jacobiana do sistema. Sabendo-se que a Jacobiana de um sistema de dois graus de liberdade é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial p_{n+1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Assim, para o sistema:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & K \cos(x) \\ 1 & 1 + K \cos(x) \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Se o módulo dos autovalores da Jacobiana forem menor que 1 o sistema será estável. Assim, os autovalores serão dados através da igualdade:

$$\lambda^2 - \lambda(2 + K \cos x) + 1 = 0 \quad (2.39)$$

Que resulta em:

$$\lambda = 1 + \frac{1}{2}K \cos x \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}K \cos x\right)^2 - 1} \quad (2.40)$$

Como, para que o sistema seja estável, $|\lambda| < 1$ obtemos que:

$$0 > K \cos x > -4 \quad (2.41)$$

Substituindo a condição de 2.36 em 2.41 obtemos que:

$$2\pi l < K < [4 + (2\pi l)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.42)$$

Para estes intervalos de K as ilhas no espaço de fase do apresentarão modos acelerados e, desta forma, trajetórias iniciadas dentro das ilhas possuirão dinâmica de aceleração constante. Como estas condições são para um ponto fixo de período 1, para pontos fixos de período maior (ilhas de maior ressonância) existirão outros modos aceleradores estáveis [7], [11].

2.8 Modo balístico

Como visto na seção anterior, quando uma ilha apresenta modo acelerador a trajetória de condições iniciais dentro das ilhas apresentarão aceleração constante em função do tempo.

Alguns sistemas dinâmicos (como por exemplo o mapa da separatriz) apresentam outro tipo de dinâmica peculiar: trajetórias iniciadas na região de ilhas apresentam velocidade constante em função do tempo. Este tipo de fenômeno é denominado modo balístico ou trajetórias balísticas [11], [8].

2.9 Espaços não homogêneos e ergodicidade

Um sistema é dito ergódico se a média de uma função observável do espaço de fase ($f(\mathbf{x})$) em função do tempo for igual a média desta observável em função do

espaço. Assim, um sistema ergódico não deve depender de \mathbf{x} e o espaço de fase não deve apresentar regiões inacessíveis à nenhuma trajetória, sendo que uma trajetória deve retornar várias vezes a uma região muito próxima a qualquer ponto do espaço de fase. Matematicamente podemos escrever que, para um mapa (T) , a média temporal é dada por:

$$\langle f(x) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x). \quad (2.43)$$

A média espacial de $f(x)$ é definida como:

$$\bar{f}(x) = \int_{\mathcal{M}} f(x) d\mu, \quad (2.44)$$

na qual \mathcal{M} representa o espaço de fase do sistema (integrando em todo o espaço) e μ é uma medida invariante. Estas duas médias estatísticas devem ser iguais para quase todo x . Esta propriedade pode não ser válida para um sistema global, porém para pequenas regiões de domínio do sistema esta pode ser válida.

Assim, sistemas hamiltonianos que apresentam espaço de fase não homogêneo com a presença de trajetórias caóticas e regulares não apresentam ergodicidade, pois nenhuma trajetória iniciada no mar caótico pode entrar em uma região das ilhas no espaço de fase. Desta forma, esta propriedade de ergodicidade só pode ser aplicada a uma sub-região do espaço de fase: o mar caótico.

2.10 Armadilhas Dinâmicas

Considerando um domínio A no espaço de fase, N_A um número grande de trajetórias iniciadas neste domínio, e ΔN_A o número de trajetórias que escapa do domínio A em um intervalo de tempo entre t e $t + dt$, a densidade de probabilidade de escape do domínio A será dada por:

$$\psi(t; A) = \lim_{\Delta\Gamma \rightarrow 0} \lim_{N_A \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta\Gamma} \frac{\Delta N_A(t, A)}{N_A}, \quad (2.45)$$

sendo $\Delta\Gamma = \Gamma(A)$ (região do espaço de fase do domínio A).

Existem regiões no espaço de fase em que certas trajetórias iniciadas no mar caótico são atraídas permanecendo um período longo de tempo antes de escaparem.

Estas regiões encontram-se nas vizinhanças de ilhas (trajetórias regulares) do espaço de fase. Em torno das ilhas no espaço de fase podem existir toros invariantes e furados (cantoris) remanescentes de um toro KAM quebrado devido ao aumento da perturbação. Estes cantoris produzem uma barreira dinâmica no sistema e, com isso, uma trajetória que é atraída para a região em torno de uma ilha não consegue escapar deste domínio enquanto não encontra um “furo” deste toro para poder atravessá-lo. As trajetórias que são capturadas por estas regiões de grude sofrem influência do movimento das ilhas. Assim, se uma ilha possui modo acelerador, a trajetória em torno da ilha apresentará aceleração conforme o número rotacional da ilha; se uma ilha possui modo balístico, uma trajetória que é atraída para o grude em torno da ilha possuirá velocidade e posição constantes da mesma forma que a ilha. Existem outros motivos e tipos de aprisionamento de trajetórias, entre eles são caracterizados o aprisionamento devido a ilhas hierárquicas, armadilhas de rede estocástica e armadilhas da camada estocástica. A presença de transporte anômalo em alguns sistemas está relacionado com as armadilhas dinâmicas e ao tempo de aprisionamento de trajetórias no domínio de grude.

2.10.1 Armadilha de ilhas hierárquicas

Este tipo de armadilha foi introduzida e descrita por Zaslavsky em 1995. Neste tipo de armadilha uma trajetória é aprisionada por um longo período de tempo em torno de um domínio hierárquico de ilhas. Assim, uma trajetória sofre grude em torno da sequência de ilhas em torno de ilhas de menor ressonância. A cada ampliação de uma ilha que está ao redor de uma ilha de maior amplitude, pode-se observar que a trajetória também está aprisionada a estas pequenas ilhas de menor amplitude. Quanto maior o subdomínio mais tempo uma trajetória permanecerá neste. Este tipo de armadilha pode ser observada na figura retirada da página 475 de [11] (figura 2.10).

2.10.2 Armadilhas de rede estocástica

As armadilhas de rede estocástica podem aparecer para os mesmos sistemas que apresentam armadilhas de ilhas hierárquicas. Neste tipo de armadilha uma ilha que está sofrendo bifurcação apresentam um sub-domínio muito forte, formando uma grade, em que uma trajetória será aprisionada por um tempo muito longo (muitas vezes maior do que o tempo que a trajetória permanece fora deste domínio), como

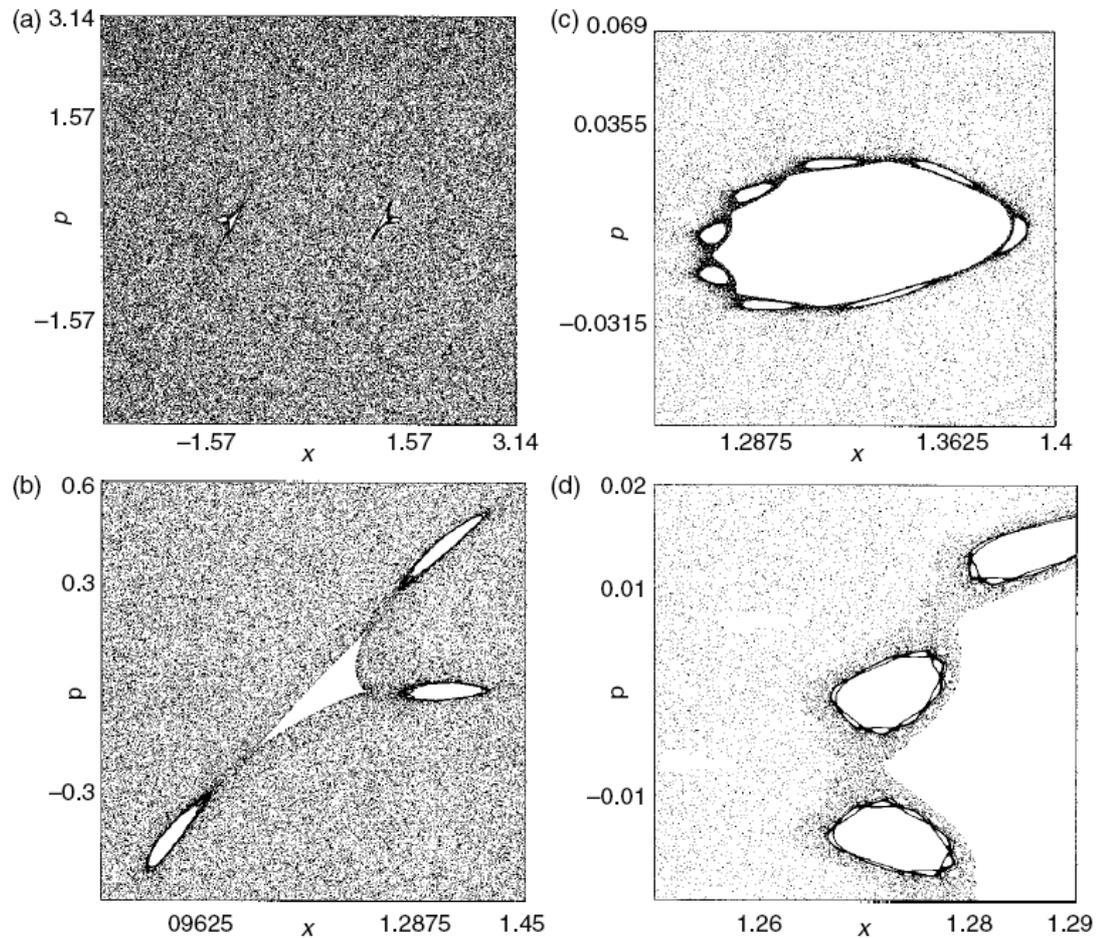


Figura 2.10: Figura retirada da referência [11] a qual apresenta uma armadilha dinâmica de rede estocástica para o mapa padrão ($K = 6,908745$). Pode-se observar que uma trajetória provinda do mar caótico é atraída para região em torno das ilhas, sofrendo aprisionamento em torno da sequência de ilhas 2-3-8-8-8... . Em (a) observa-se o espaço de fase do sistema, sendo este composto por duas ilhas; em (b) observa-se ampliação de uma das ilhas de (a), a qual apresenta 3 ilhas; em (c) a ampliação de uma das três ilhas de (b), no qual pode-se observar 8 ilhas ao redor desta ilha.

pode ser observado na figura 2.11 (região mais escura da figura).

2.10.3 Armadilhas de camada estocástica

Para que ocorra uma armadilha de camada estocástica uma ilha deve sofrer uma bifurcação. Uma ilha localizada no mar caótico e que possui um ponto elíptico

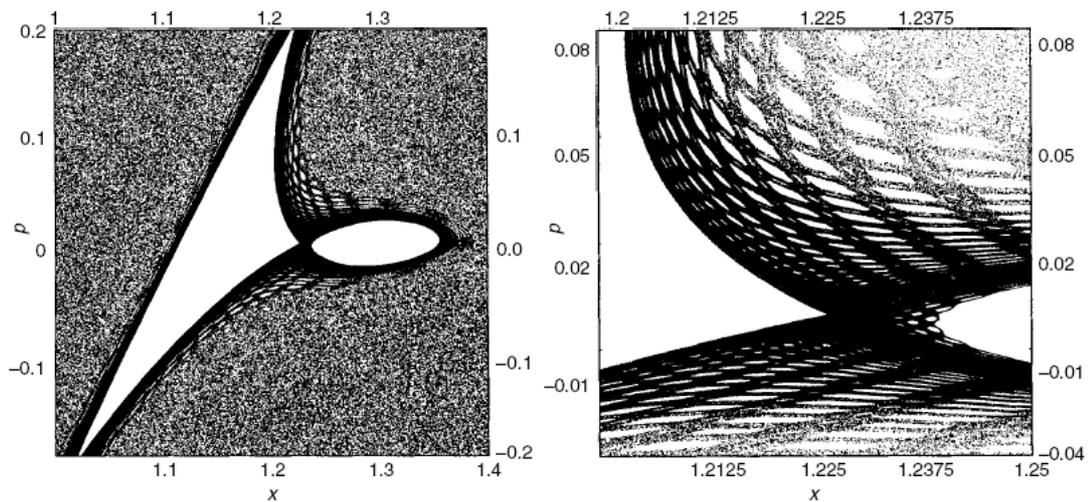


Figura 2.11: Figura retirada da referência [11] a qual apresenta uma armadilha dinâmica de rede estocástica para o mapa padrão ($K = 6,9009$) em um parâmetro muito próximo de uma bifurcação.

bifurca com o aumento do parâmetro de controle criando um ponto elíptico e um ponto hiperbólico adicionais ao sistema. A separatriz do sistema é destruída com a perturbação e em seu lugar surge uma estreita camada estocástica. Quanto mais aumenta-se o parâmetro de controle, maior torna-se a camada estocástica, até que esta se conecta ao mar caótico. Na região de conexão com o mar caótico forma-se a região da armadilha de camada estocástica, na qual uma trajetória pode permanecer um longo tempo sem conseguir ultrapassar esta camada, um esquema do surgimento desta armadilha está representada na figura 2.12 (retirada da referência [11]).

2.11 Expoente de Lyapunov a tempo finito

A estabilidade de pontos fixos e ciclos limites pode ser melhor obtida através da análise dos autovalores da matriz Jacobiana. Para trajetórias mais complicadas, utiliza-se a análise através do expoente de Lyapunov. O expoente de Lyapunov pode ser considerado uma generalização da análise de auto-valores para equações diferenciais ou equações adiferença (mapas), sendo a quantidade de expoentes de Lyapunov de um sistema a mesma quantidade de dimensões deste. Pode-se entender o expoente de Lyapunov geometricamente da seguinte forma: considerando uma “hiper-esfera”(com a mesma dimensão do sistema) de raio infinitesimal δr inicial,

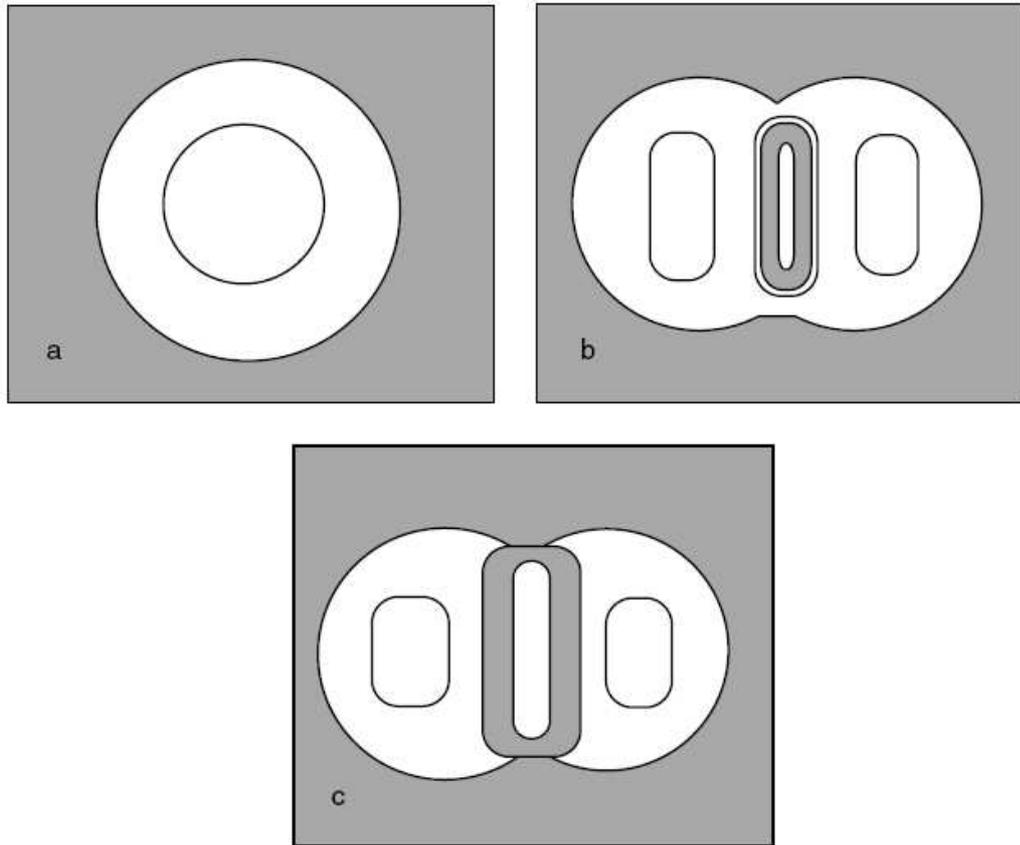


Figura 2.12: Figura retirada da referência [11] que apresenta um esquema do surgimento de uma armadilha de camada estocástica. Em (a) observa-se a ilha inicial que sofrerá bifurcação; em (b) o ponto elíptico bifurcou gerando mais um ponto elíptico e um ponto fixo hiperbólico, e na região do ponto hiperbólico uma região de caos que não está conectada com a região de caos externa a ilha; em (c) ocorre a conexão entre a região de caos interna à ilha e a região de caos externa à ilha, formando uma camada estocástica.

evoluindo esta “hiper-esfera” por um longo tempo, a imagem desta “hiper-esfera” em relação às equações de movimento será um “hiper-elipsóide” com coordenadas da ordem de $\delta r \cdot \exp(\lambda_i)$, $i = 1, 2, m$, no qual m é a dimensão do sistema e λ_i o expoente de Lyapunov. Assim, quando todos os expoentes de Lyapunov foram negativos, condições iniciais muito próximas convergem para uma mesma trajetória (e os erros de um sistema diminuem em importância com o tempo). Já se houver pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, trajetórias que iniciarem muito próximas se afastarão exponencialmente com o tempo [13]. O expoente de Lyapunov pode ser calculado

a tempo finito, o qual caracteriza a estabilidade de uma variedade localmente, ou a tempo infinito, o qual caracteriza a estabilidade global desta variedade, e é a média dos expoentes de Lyapunov locais.

Como o expoente de Lyapunov a tempo finito quantifica as divergências e contrações locais no espaço de fase [14], este pode ser utilizado para analisar a influência das regiões de grude sobre a dinâmica total de um sistema. Assim, quando uma trajetória é aprisionada por um determinado tempo em uma região de grude, o expoente de Lyapunov a tempo finito desta trajetória torna-se muito próximo de zero e, quando o sistema sai do aprisionamento e retorna a região do mar caótico seu expoente aumenta tornando-se mais positivo.

Capítulo 3

Mapa Padrão

3.1 Introdução

O mapa padrão, também conhecido como mapa de Chirikov-Taylor, apresenta dinâmica genérica pois vários modelos podem ser reduzidos a este. Assim, este modelo possui aplicação em diversas áreas, sendo aplicado em vários problemas de física de plasma, matéria condensada, aceleradores de partículas, e também na dinâmica de cometas no sistema solar, entre outros. Este sistema foi utilizado por Chirikov para analisar a quebra do último toro KAM proveniente do sistema integrável, representando uma transição do sistema: regiões de caos local que eram limitadas por curvas KAM passam a se conectar com a quebra do último toro KAM remanescente, formando uma extensa região caótica (mar caótico). Sua dinâmica é dada pelas seguintes equações:

$$p_{n+1} = p_n - K \text{sen}(x_n), \quad (3.1)$$

$$x_{n+1} = x_n + p_{n+1}. \quad (3.2)$$

O mapa descreve a dinâmica de um rotor pulsado: a cada intervalo de tempo constante o rotor sofre um “chute” com duração de tempo infinitesimal. O termo $K \text{sen}(x_n)$ representa a força e a direção do chute, sendo que a direção é definida através do sinal deste termo ($-$ ou $+$), o sinal translada a estrutura do espaço de fase podendo até modifica-la. Assim, este sistema é descrito e obtido através da seguinte hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2I} - K \cos(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT). \quad (3.3)$$

Sendo que a variável x_n corresponde ao ângulo (posição) do rotor e p_n corresponde ao momento angular, sendo estas as variáveis canônicas do sistema. Este mapa é definido tanto no toro ($-\pi < p < \pi$ e $0 < x < 2\pi$), quanto no cilindro ($-\infty < p < \infty$ e $0 < x < 2\pi$) ou no espaço infinito ($-\infty < p < \infty$ e $-\infty < x < \infty$). Porém, como x é a variável ângulo no sistema, limitaremos este em $0 < x < 2\pi$ [11]. Se fizermos a mudança de variável $p_n \rightarrow p_n + 2\pi$ em 3.1 observaremos que não haverá mudança em 3.2, assim, este mapa é periódico em p_n com período 2π , podendo então ser reduzido ao sistema no toro [10].

Para $K = 0$ este sistema torna-se integrável, $p_{n+1} = p_n = p_c$ e a cada iterada do mapa é adicionado o valor de p_c à variável ângulo (x_n). O espaço de fase do sistema é formado por infinitas curvas invariantes com p constante, como pode ser observado na figura 3.1(a), na qual as curvas (retas fechadas) são toros com número rotacional irracional e regiões de p constante na qual as curvas apresentam apenas alguns pontos (número finito de pontos) representam curvas com número rotacional racional, sendo o número de pontos o período da trajetória.

Para $K \neq 0$ o sistema torna-se quase-integrável e quanto maior o valor de K , maior a perturbação ao sistema integrável. Com o aumento do valor da perturbação, as curvas KAM remanescentes do sistema integrável acabam se quebrando, gerando uma conexão entre regiões de caos local anteriormente limitadas por estas curvas. Para o mapa padrão, o valor de K_c em que ocorre a quebra do último toro é de $K \approx 0,9716$. Para $K < K_c$ as regiões de trajetórias caóticas estão limitadas na direção de p e tanto o momento quanto a energia do sistema estão confinados a um intervalo restrito de valores para qualquer tempo. Para $K > K_c$, o movimento das trajetórias caóticas não é limitado na direção p pois estas curvas invariantes foram quebradas. Podemos retirar a limitação do movimento de p no espaço de fase e, assim, tanto a velocidade quanto a energia do sistema poderão apresentar valores arbitrariamente altos. Essas trajetórias formam o mar caótico (ou estocástico) no espaço de fase. A transição sofrida pelo espaço de fase em função do parâmetro K pode ser observada na figura 3.1, em (a) $K = 0$, (b) $K = 0,5$, (c) $K = 0,9$ e (d) $K = 1,1$.

Este mapa é conservativo e preserva áreas no espaço de fase $x - p$ (o determinante da Jacobiana é igual a 1). Se definirmos uma região no espaço de fase, o conjunto de condições iniciais dentro desta região ocupará, após n iteradas do mapa, uma outra região do espaço de fase que possuirá mesma área da região inicial.

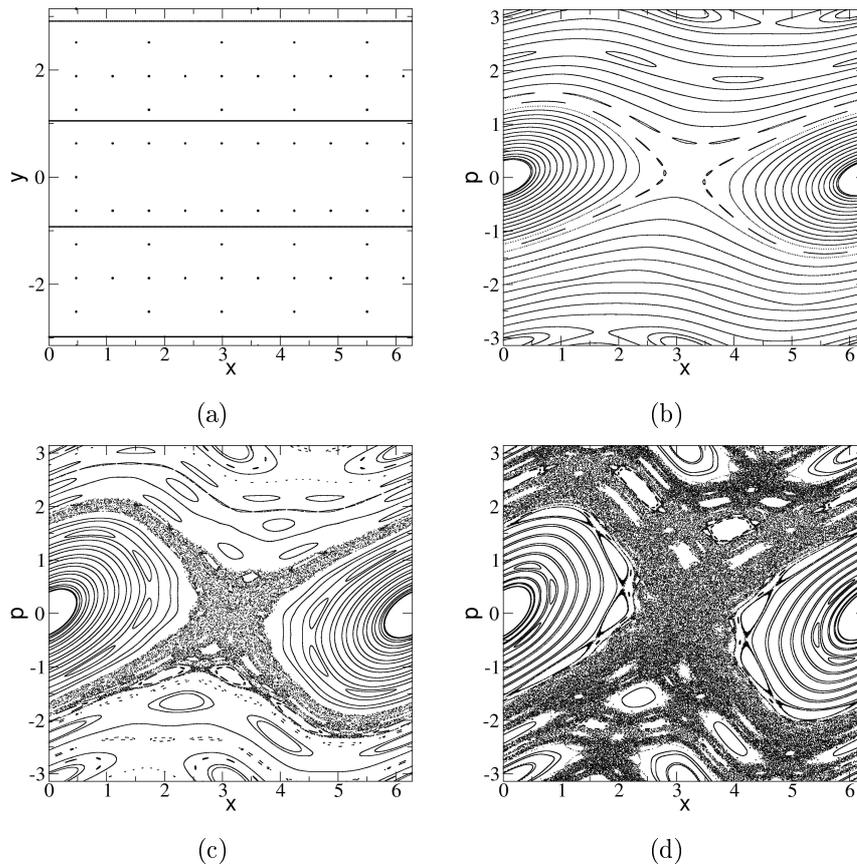


Figura 3.1: Espaço de fase do mapa padrão para diferentes valores do parâmetro de estocacidade K , sendo (a) $K = 0$, (b) $K = 0,5$, (c) $K = 0,9$ e (d) $K = 1,1$.

3.2 Armadilhas dinâmicas

Uma trajetória iniciada no mar caótico pode sofrer aprisionamento em algum domínio do espaço de fase podendo permanecer um longo período de tempo até conseguir escapar deste domínio. Podemos observar nas figuras 3.2 e 3.3 exemplos deste aprisionamento para o mapa padrão com movimento limitado ao toro. Na figura 3.2(a) podemos observar uma região mais escura no espaço de fase, esta região é mais visitada do que as outras partes do espaço de fase, é a região de grude em torno da ilha principal no espaço de fase. É interessante notar que o grude ocorre em torno de apenas uma das ilhas primárias do mapa, esta ilha não possui vínculo com a outra ilha do espaço de fase. Através da figura 3.2(b) podemos observar o que ocorreu com a trajetória. Para um tempo $n < 10^4$ a trajetória se desenvolvia na região estocástica do mar caótico e seu expoente de Lyapunov a tempo finito estava em torno de 1,5, o que caracteriza uma trajetória caótica. Logo depois a trajetória

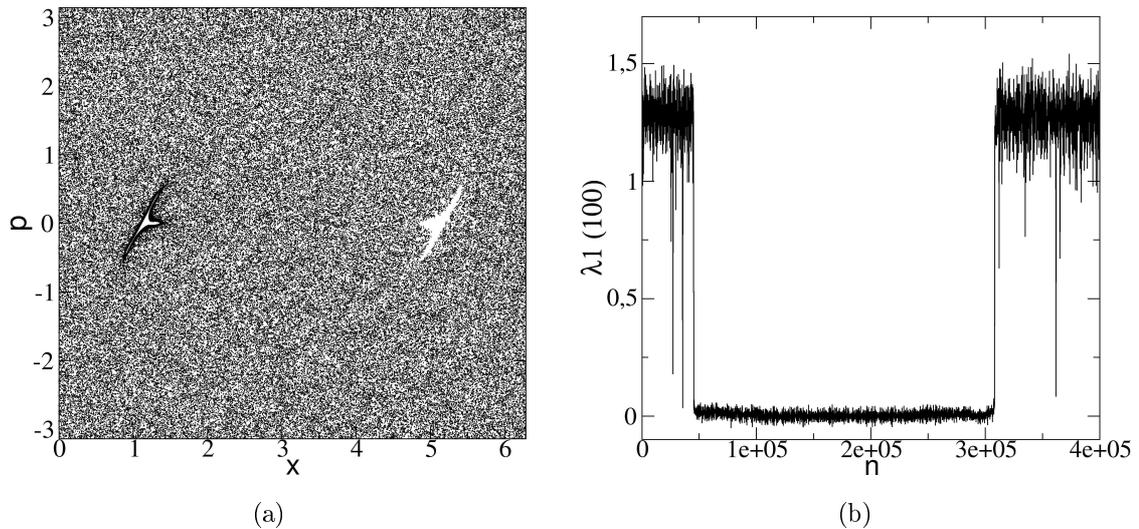


Figura 3.2: (a) Trajetória no espaço de fase de apenas uma condição inicial para o mapa padrão com $K = 6,900796$ e (b) o expoente de Lyapunov a tempo finito (tempo 100) para esta trajetória.

sofreu um aprisionamento em torno de uma das ilhas principais, permanecendo um período longo em torno da ilha, no grude. Esta trajetória consegue escapar do grude e volta a ter um movimento caótico na região de estocacidade. Estas diferentes fases da trajetória também estão caracterizadas na figura 3.3.

3.3 Vôos no espaço de fase limitado ao cilindro

Se retirarmos a limitação do movimento em p (o domínio no espaço de fase será $0 < x < 2\pi$ e $-\infty < p < \infty$) podemos observar que uma trajetória pode não sofrer aprisionamento em torno de uma ilha, e sim apresenta vôos no espaço de fase, esses vôos caracterizam os modos aceleradores das ilhas.

Para o caso do movimento limitado ao toro, uma trajetória que é aprisionada em torno de uma ilha de modo acelerador sofre aceleração mas, como p é limitado entre $-\pi$ e π , a trajetória acaba sendo transladada para a região ao redor da ilha (pois o mapa é periódico em p a cada acréscimo de 2π) e assim permanece em torno desta por um longo período de tempo antes de escapar.

Porém, se o espaço de fase é ilimitado, a trajetória não será transladada para o espaço de fase de $-\pi < p < \pi$ e, assim, o modo acelerador provocará um aumento aproximadamente linear no momento (p) da trajetória, o que caracteriza estes vôos no espaço de fase do sistema quando p não possui limitação. Podemos observar na

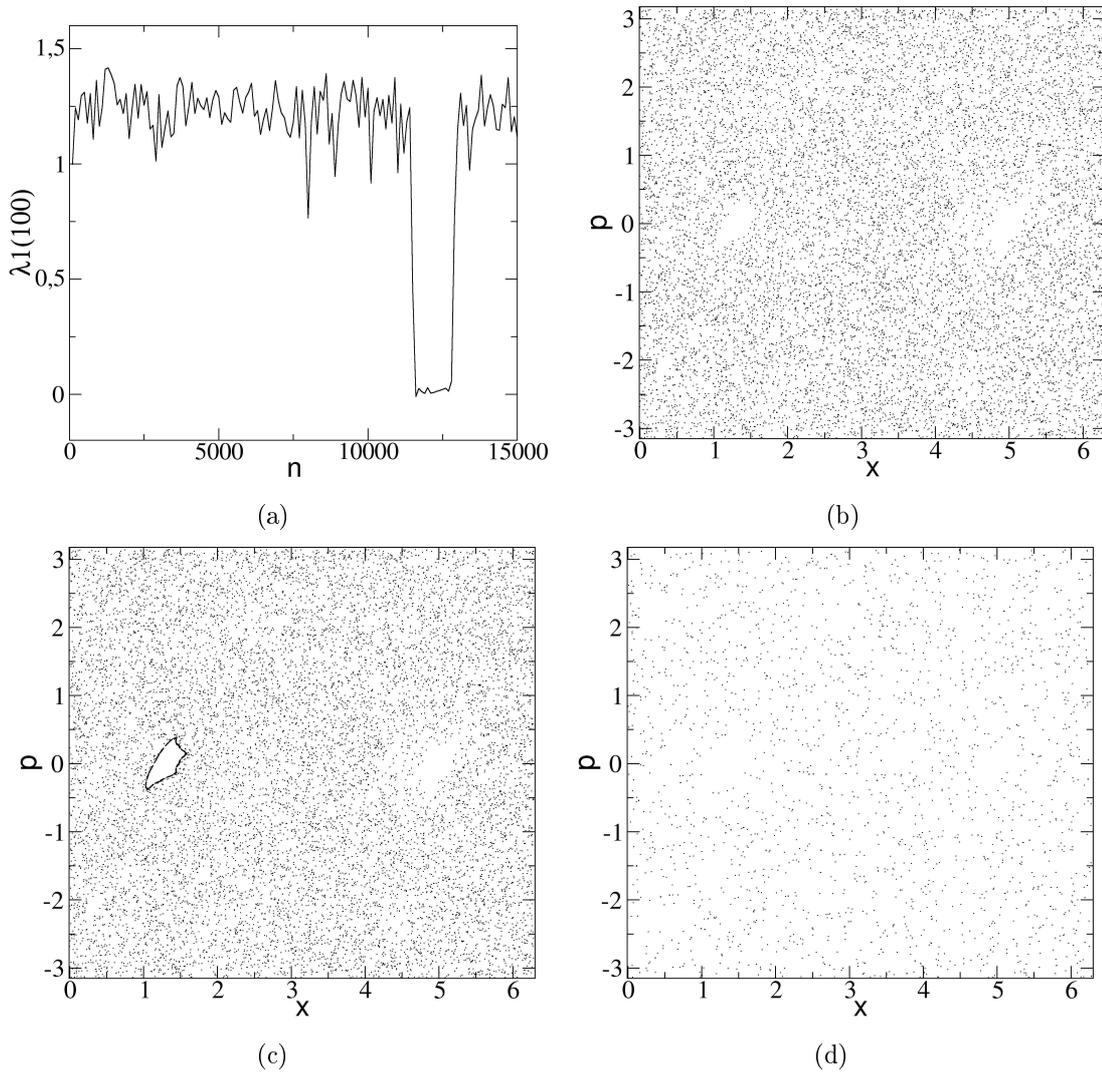


Figura 3.3: (a) Expoente de Lyapunov a tempo finito (tempo 100) para a trajetória do espaço de fase de (b), (c) e (d). Em (b) a trajetória até $n = 11200$ (antes de ser aprisionada); em (c) $n = 13000$, observa-se o aprisionamento da trajetória entorno de uma das ilhas principais; (d) trajetória no espaço de fase de $n = 13000$ até $n = 15000$.

figura 3.4 que estes vôos podem ser caracterizados via expoente de Lyapunov a tempo finito da mesma forma que as regiões de grude para o caso do movimento limitado ao toro.

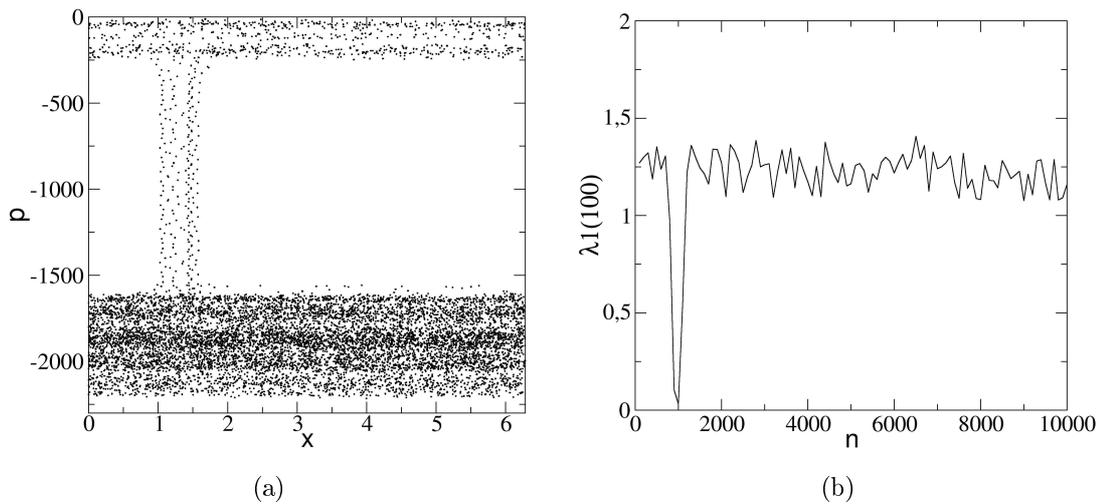


Figura 3.4: (a) Espaço de fase no cilindro (p não limitado) para apenas uma condição inicial iniciada no mar caótico (do espaço de fase limitado - no toro) para $K = 6,574798$ e (b) expoente de Lyapunov a tempo finito (tempo 100) desta trajetória.

3.4 Ergodicidade

Para o movimento no cilindro (movimento não limitado na direção de p) as trajetórias podem sofrer vôos no espaço de fase e logo depois sofrer uma difusão na região de estocacidade, sofrendo pequenos vôos devido a influência de pequenas ilhas (microilhas) que não são visíveis no espaço de fase. As trajetórias podem alcançar valores altos de momento, como podemos observar na figura 3.5(a). Entretanto, se escolhermos muitas condições iniciais aleatórias podemos observar que a média do momento destas partículas em função do tempo tende a zero. Como o sistema é conservativo, não deve violar a segunda lei da termodinâmica, como pode ser observado na figura 3.5(b) (não devem aparecer correntes no sistema). Quanto mais condições iniciais, mais próximo de zero tende esta média. Assim, podemos concluir também que o sistema não é ergódico, pois a média do momento para apenas uma trajetória em função do tempo (figura 3.5(a)) não possui o mesmo valor do que a média de muitas condições iniciais iteradas em um tempo pequeno (figura 3.5(b)).

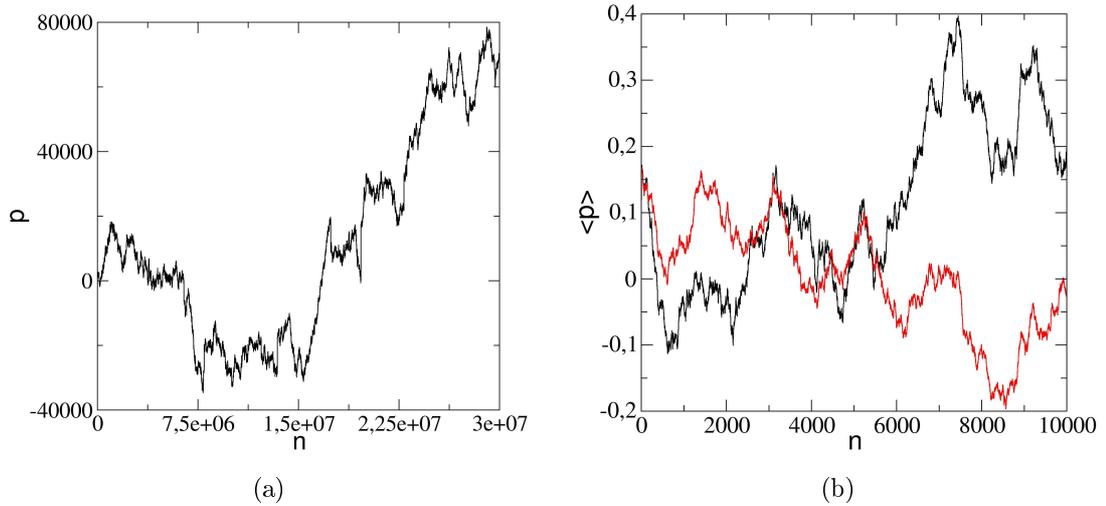


Figura 3.5: (a) Momento de uma partícula (iniciada no mar caótico) em função do tempo; (b) média do momento de $5 \cdot 10^6$ (preto) e 10^7 (vermelho) partículas em função do tempo para $K = 6,574798$.

3.5 Mapa padrão com dissipação

Quando inserimos um termo de dissipação (γ) no mapa padrão na forma:

$$p_{n+1} = \gamma p_n - K \text{sen}(x_n), \quad (3.4)$$

$$x_{n+1} = x_n + p_{n+1}, \quad (3.5)$$

sendo $0 < \gamma < 1$, obtemos o determinante da Jacobiana do mapa igual ao valor de γ . Como $\gamma < 1$, o determinante da Jacobiana será menor do que 1 e assim a dinâmica do sistema deve convergir para uma região atrativa do espaço de fase com área nula. Assim, uma trajetória levará um tempo transiente antes de ser atraída para um ponto fixo ou uma linha, ou até mesmo um atrator caótico. Para $K = 0$ as trajetórias são atraídas para uma linha em $p = 0$. Para outros valores de K , o sistema pode ser atraído para pontos fixos de diferentes períodos como mostra a figura 3.6. Para $K = 8,8$, o sistema apresenta um atrator caótico, como pode ser observado na figura 3.7, sendo que em 3.7(b) podemos observar a fractalidade deste atrator.

Uma trajetória no espaço de fase com p não limitado também passa por um período de transiente antes de ser atraído para algum tipo de atrator. Este período de transiente dependerá do quão forte é a dissipação. Para o caso da figura 3.9, em que $K = 6,90833$ e $\gamma = 0,999$, podemos observar que no transiente a trajetória sofre vãos, isto é, é influenciada por modos aceleradores do sistema. Podemos observar

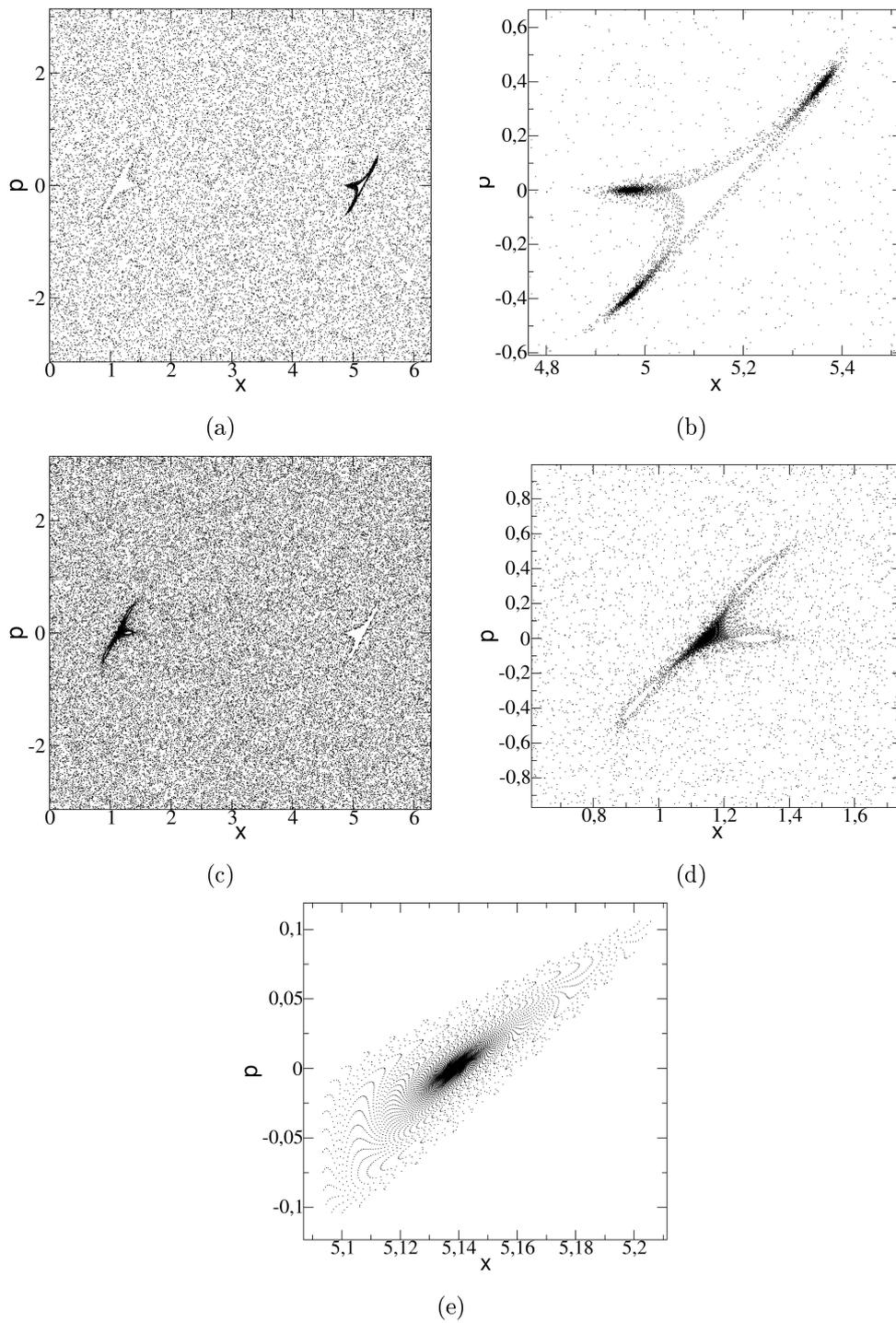


Figura 3.6: (a) Espaço de fase para $-\pi < p < \pi$ para o sistema dissipativo com $\gamma = 0,999$ e $K = 6,90833$, para apenas uma condição inicial. As figuras (b) e (d) são zoom das figuras (a) e (c) respectivamente; (e) trajetória indo para um ponto fixo de período 1.

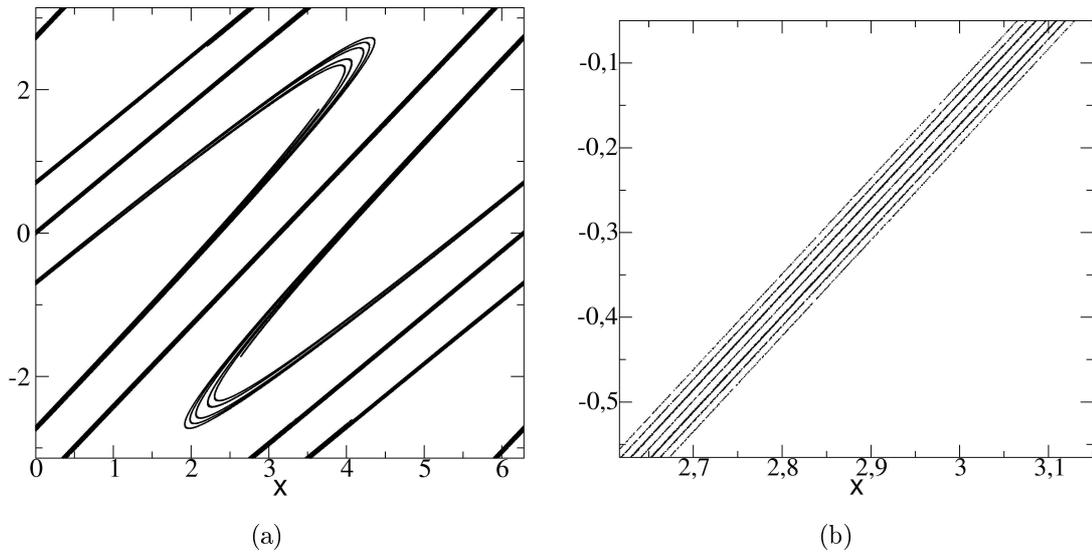


Figura 3.7: (a) Trajetória no espaço de fase de apenas uma condição inicial para o mapa padrão com dissipação, $K = 8,8$ e $\gamma = 0,1$, mostrando o aparecimento de um atrator caótico e (b) o zoom de uma parte do atrator mostrando sua fractalidade.

que esta aceleração é tanto na direção positiva quanto negativa e isto faz com que a trajetória não apresente uma direção preferencial de movimento, como pode ser observado pelo histograma dos momentos da trajetória enquanto esta encontra-se no transiente (figura 3.9(e)).

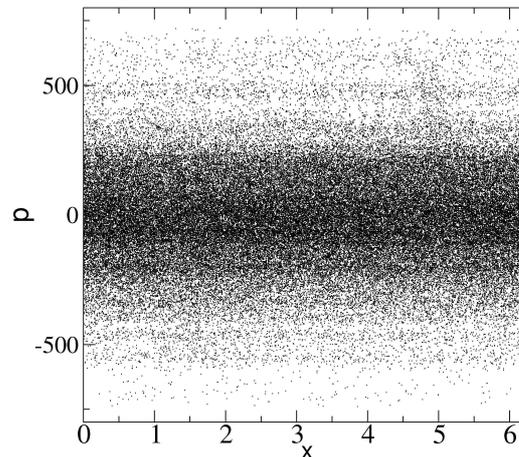


Figura 3.8: Espaço de fase para $-\infty < p < \infty$ para o sistema dissipativo com $\gamma = 0,999$ e $K = 6,90833$, para apenas uma condição inicial. A figura apresenta o espaço de fase para 10^5 iteradas do mapa (esta trajetória é atraída pelo ponto fixo - de período 2 - após $n = 10^7$).

Na referência [12] utiliza-se o mapa padrão dissipativo da forma:

$$p_{n+1} = e^{-\Gamma} p_n + K \text{sen}(x_n), \quad (3.6)$$

$$x_{n+1} = x_n + p_{n+1}. \quad (3.7)$$

Com este sistema o artigo apresenta numericamente a existência de intervalos de parâmetro (K) no qual o sistema apresenta trajetórias atrativas não-caóticas relacionadas a um modo balístico, no qual a coordenada x aumenta com o número de iteradas quando o sistema é não limitado em x , apresentando um transporte balístico e, dependendo do parâmetro, até mesmo super difusivo. Neste sistema acredita-se que o transporte anômalo é devido a certas estruturas do espaço de fase que fazem com que uma trajetória apresente duas escalas de tempo diferentes, sendo uma destas comparável as armadilhas dinâmicas presentes nos sistemas Hamiltonianos.

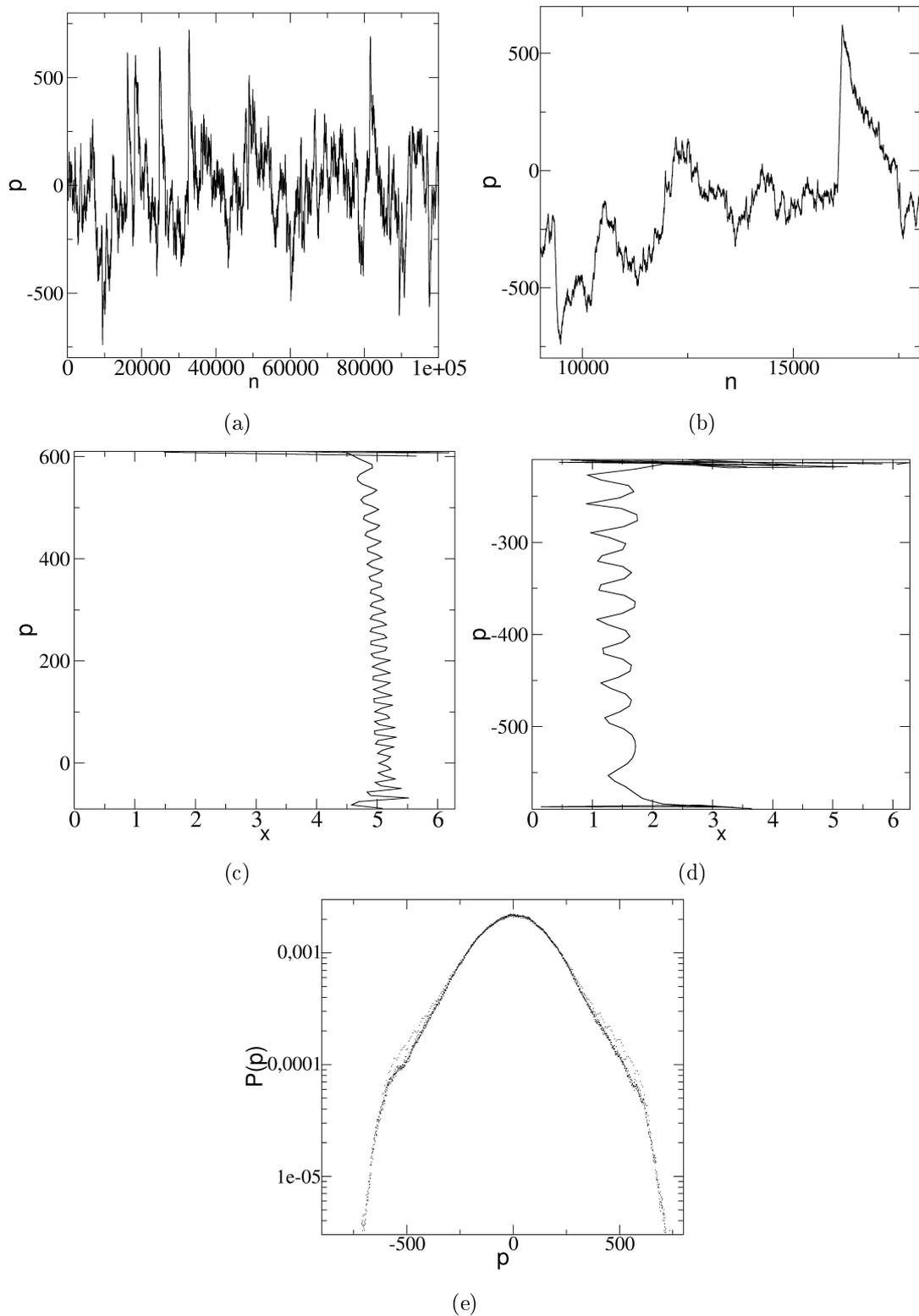


Figura 3.9: (a) Apresenta p em função do tempo para a trajetória da figura 3.5; (b) ampliação de (a) para $9000 < n < 18000$; (c) apresenta o espaço de fase da trajetória para $16050 < n < 16170$ e (d) para o intervalo de tempo $9320 < n < 9400$ mostrando vôos no espaço de fase que ocorrem na direção direções opostas; (e) apresenta a distribuição dos momentos da trajetória para $n = 10^7$ iteradas.

Capítulo 4

Mapa Padrão Dissipativo e Assimétrico

4.1 Apresentando o modelo

Como visto na introdução, para que um sistema apresente transporte em uma direção preferencial é necessária a quebra de simetria espacial e temporal. Assim, para analisarmos este fenômeno, será introduzido um termo de assimetria espacial no potencial do mapa padrão:

$$V(x, \tau) = -K \left[\cos(x) + \frac{a}{2} \cos(2x + \phi) \right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT). \quad (4.1)$$

sendo K o parâmetro de estocacidade, a o parâmetro de assimetria espacial (quando $a \neq 0$ a simetria espacial do sistema é quebrada), $\phi \neq m\pi$ sendo m um número inteiro.

Este novo potencial definirá o movimento de uma partícula em uma dimensão ($[x \in (-\infty, \infty)]$) devido a um potencial assimétrico pulsado.

Utilizaremos o potencial negativo (ao contrário do potencial apresentado na referência [3]) para melhor observação do espaço de fase do mapa. Para gerar o mapa utilizaremos a hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2I} - K \left[\cos(x) + \frac{a}{2} \cos(2x + \phi) \right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT). \quad (4.2)$$

As equações de movimento para as variáveis canônicas p e x serão dadas por:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (4.3)$$

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (4.4)$$

Obtendo-se:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{p}{I}, \quad (4.5)$$

$$\frac{dp}{d\tau} = -K \left[\text{sen}(x) + \frac{a}{2} \text{sen}(2x + \phi) \right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT). \quad (4.6)$$

Considerando:

$$\begin{aligned} p_n &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(\tau = nT - \epsilon) \\ p_n^* &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(\tau = nT + \epsilon) \\ p_{n+1} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(\tau = (n+1)T - \epsilon) \end{aligned}$$

Integrando as equações (4.5) e (4.6) no intervalo de $nT + \epsilon < \tau < (n+1)T - \epsilon$ obtemos que:

$$\begin{aligned} x[(n+1)T - \epsilon] - x[nT + \epsilon] &= \frac{p[nT + \epsilon]}{I}(T - 2\epsilon), \\ p[(n+1)T - \epsilon] - p[nT + \epsilon] &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando o limite para $\epsilon \rightarrow 0$:

$$x_{n+1} = x_n^* + \frac{p_n^*}{I}(T - 2\epsilon), \quad (4.7)$$

$$p_{n+1} = p_n^* \quad (4.8)$$

Integrando as equações (4.5) e (4.6) no intervalo de $nT - \epsilon < \tau < nT + \epsilon$ obtemos que:

$$\begin{aligned} x[nT + \epsilon] - x[nT - \epsilon] &= \frac{p[nT - \epsilon]}{I}(2\epsilon), \\ p[nT + \epsilon] - p[nT - \epsilon] &= -K [\text{sen}(x[nT - \epsilon]) + a \text{sen}(2x[nT - \epsilon] + \phi)]. \end{aligned}$$

Fazendo o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$:

$$x_n^* = x_n, \quad (4.9)$$

$$p_n^* = p_n - K [\text{sen}(x_n) + a \text{sen}(2x_n + \phi)]. \quad (4.10)$$

Substituindo (4.9) e (4.10) em (4.7) e (4.8) temos que:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{p_{n+1}}{I}T, \quad (4.11)$$

$$p_{n+1} = p_n - K [\text{sen}(x_n) + a \text{sen}(2x_n + \phi)]. \quad (4.12)$$

Multiplicando 4.12 por $\frac{T}{I}$ e fazendo a mudança de variável $p\frac{T}{I} \rightarrow \bar{p}$ e $K\frac{T}{I} \rightarrow \bar{K}$ e novamente $\bar{p} \rightarrow p$ e $\bar{K} \rightarrow K$ obtemos :

$$p_{n+1} = p_n - K [\text{sen}(x_n) + a \text{sen}(2x_n + \phi)],$$

$$x_{n+1} = x_n + p_{n+1}.$$

Adicionando um termo de dissipação em p_n (o qual fará o papel de assimetria temporal), obtemos o mapa do nosso sistema:

$$p_{n+1} = \gamma p_n - K [\text{sen}(x_n) + a \text{sen}(2x_n + \phi)], \quad (4.13)$$

$$x_{n+1} = x_n + p_{n+1}. \quad (4.14)$$

Sendo p a variável momento e x sua variável conjugada. O termo de dissipação γ pertence ao domínio $[0,1]$, quando $\gamma = 1$ o sistema é conservativo e quando $\gamma = 0$ o sistema é superamortecido. O termo de fase do sistema ϕ é fixado com o valor $\pi/2$ no sistema e termo $a \text{sen}(2x_n + \phi)$ produz a assimetria do sistema, como pode ser observado no seguinte exemplo: considerando como condição inicial do sistema $p_0 = p'$ e $x_0 = x'$, obtém-se que:

$$p'_1 = \gamma p' - K [\text{sen}(x') + a \cos(2x')],$$

$$x'_1 = x' + p'_1.$$

Se utilizarmos como condição inicial $p_0 = -p'$ e $x_0 = -x'$, obtemos que:

$$p''_1 = \gamma(-p') - K [\text{sen}(-x') + a \cos(-2x')],$$

$$x''_1 = -x' + p''_1.$$

Que resulta em:

$$p''_1 = -\gamma p' - K [-\text{sen}(x') + a \cos(2x')],$$

$$x''_1 = -x' + p''_1.$$

Quando $a = 0$ o sistema é simétrico: $p'_1 = -p''_1$ e $x'_1 = -x''_1$ porém, quando $a \neq 0$: $p'_1 \neq -p''_1$ e $x'_1 \neq -x''_1$, quebrando a simetria do sistema.

A análise abaixo e as definições do sistema são feitas da mesma maneira que na referência [3].

A jacobiana do sistema será dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \gamma & -K[\cos(x) + 2a \cos(2x + \phi)] \\ \gamma & 1 - K[\cos(x) + 2a \cos(2x + \phi)] \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

O determinante desta matriz é igual a γ e, assim, quando $\gamma = 1$ podemos dizer que este mapa preserva a área no espaço de fase e é conservativo (como propõe o teorema de Liouville). Quando $J < 1$ ($\gamma < 1$) a dinâmica do sistema não preserva mais a área no espaço de fase e sua dinâmica do sistema convergirá para uma região atrativa do espaço de fase com área nula (pontos fixos, ciclos limite ou até mesmo atratores estranhos).

Para a análise de estabilidade linear do sistema faremos apenas a análise de pontos fixos de período um. Assim, para $p_{n+1} = p_n = p^*$ e $x_{n+1} = x_n = x^*$ temos que:

$$\begin{aligned} x^* &= x^* + p^*, \\ p^* &= p^* - K[\text{sen}(x^*) + a \text{sen}(2x^* + \phi)]. \end{aligned}$$

Que resulta em:

$$\begin{aligned} p^* &= 2l\pi, \quad l \text{ inteiro}, \\ 2l\pi(\gamma - 1) &= K[\text{sen}(x^*) + a \text{sen}(2x^* + \phi)] \end{aligned}$$

Estes pontos são encontrados graficamente nos pontos em que a curva $f(l, \gamma) = 2l\pi(\gamma - 1)$ intercepta a curva $f(K, a, \phi, x^*) = K[\text{sen}(x^*) + a \text{sen}(2x^* + \phi)]$ (ver figura 4.2). Para analisar a estabilidade dos pontos fixos utilizaremos os autovalores da Jacobiana do sistema (equação 4.15):

$$\begin{vmatrix} \gamma - \lambda & -K[\cos(x^*) + 2a \cos(2x^* + \phi)] \\ \gamma & 1 - K[\cos(x^*) + 2a \cos(2x^* + \phi)] - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.16)$$

Definindo $\phi = \pi/2$ obtemos que:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \{ \gamma + 1 - K[\cos(x^*) - 2a \text{sen}(2x^*)] + \sqrt{\{ \gamma + 1 - K[\cos(x^*) - 2a \text{sen}(2x^*)] \}^2 - 4\gamma} \} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \{ \gamma + 1 - K[\cos(x^*) - 2a \text{sen}(2x^*)] - \sqrt{\{ \gamma + 1 - K[\cos(x^*) - 2a \text{sen}(2x^*)] \}^2 - 4\gamma} \} \end{aligned}$$

Fazendo o gráfico de $|\lambda|$ obtemos as curvas da figura 4.1. Como a estabilidade de pontos fixos de um mapa é dada por:

- $|\lambda| < 1$: estável,
- $|\lambda| > 1$: instável.

Para $\gamma < 1$ existem regiões onde os pontos fixos serão estáveis. Plotando estes intervalos em que o ponto fixo é estável juntamente com as curvas $f(l, \gamma) = 2l\pi(\gamma - 1)$ e $f(K, a, \phi, x^*) = K[\text{sen}(x^*) + a \text{sen}(2x^* + \phi)]$ obtemos a figura 4.2.

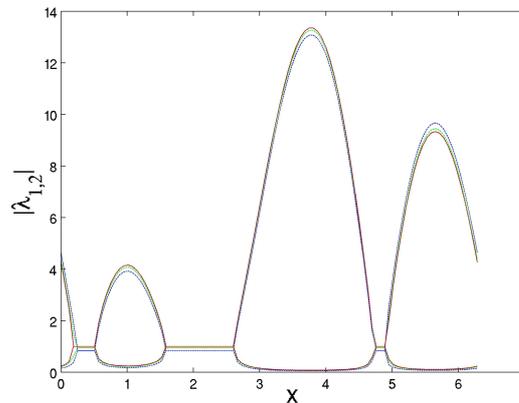


Figura 4.1: Módulo do autovalor da Jacobiana do sistema para os parâmetros $K = 6,5$, $a = 0,5$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$. Para $\gamma = 1$ (preto), $\gamma = 0,9999$ (vermelho), $0,9$ (verde) e $\gamma = 0,7$ (azul). Quando $|\lambda| > 1$ o ponto fixo é estável.

Este sistema será analisado no domínio de $-\infty < p < \infty$ e $0 < x < 2\pi$, espaço de fase em um cilindro. Assim, pode-se atribuir qualquer valor a p como condição inicial, entretanto, quando o sistema é iterado apresenta um valor máximo e mínimo de p , limitando sua energia e, assim, o espaço de fase do sistema é limitado na direção de p devido ao próprio sistema. Se considerarmos o valor de máximo da função $-K[\text{sen}(x_n) + a\text{sen}(2x_n + \phi)]$, considerando $\phi = \pi/2$, podemos obter que:

$$|p_{n+1}| \leq \gamma|p_n| + K[1 + a].$$

Fazendo a mudança de variável $\gamma \rightarrow (1 - \nu)$:

$$|p_{n+1}| \leq (1 - \nu)|p_n| + K[1 + a]. \quad (4.17)$$

Se

$$|p_n| > \frac{K[1 + a]}{\nu}$$

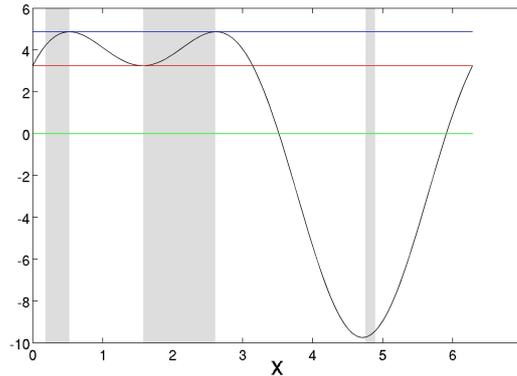


Figura 4.2: Nesta figura a região sombreada apresenta os intervalos de estabilidade dos pontos fixos para os parâmetros $K = 6,5$, $a = 0,5$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$. Curva $f(K, a, \phi, x^*) = K [\text{sen}(x^*) + a\text{sen}(2x^* + \phi)]$ (preta) e as curvas $f(l, \gamma) = 2l\pi(\gamma - 1)$: $l = 0$ para γ qualquer (em verde); $l = -1$ e $\gamma = 0,483$ (em vermelho); e $l = -1$ e $\gamma = 0,224$ apresentam os pontos fixos do sistema, pontos em que estas curvas se cruzam.

então, substituindo em 4.17 obtemos que

$$|p_{n+1}| \leq \frac{K[1+a]}{\nu}$$

e

$$|p_{n+1}| < |p_n|,$$

gerando um valor máximo e mínimo para p no espaço de fase, isto é, o movimento no espaço de fase não será mais em um cilindro, e sim em um certo domínio de p e x , fazendo com que a energia do sistema não chegue a valores muito elevados.

4.2 Espaço de fase do sistema conservativo

Para $\gamma = 1$ o sistema torna-se conservativo, podendo ser analisado no espaço de fase em um domínio $x \in [0, 2\pi]$ e $p \in [-\pi, \pi]$. O espaço de fase deste sistema apresenta as mesmas propriedades do mapa padrão, porém suas ilhas são muito menores (ocupam menos de 0,5% do espaço de fase). Quando $K = 0$ o sistema torna-se integrável e igual ao sistema do mapa padrão para $K = 0$. Para $K \neq 0$ o sistema é quase integrável e seu espaço de fase será modificado segundo o teorema de Poincaré-Birkhoff e o teorema KAM.

Com o aumento da perturbação (parâmetro K em nosso sistema) os toros irracionais sofrerão deformações e, dependendo do quão forte seja a perturbação, tenderão a quebrar. O último toro KAM a ser quebrado será aquele que possui número rotacional mais irracional. Os toros racionais também sofrerão quebra, gerando pontos fixos ($l \cdot s$ pontos elípticos e $l \cdot s$ pontos hiperbólicos, sendo l um número inteiro positivo e s o número de iterações do mapa para que este retorne ao ponto inicial). Existirão toros menores em torno dos pontos fixos elípticos e regiões de caos local entre curvas KAM que sofrerão apenas deformações. Com a destruição de todas os toros KAM originais do sistema integrável as regiões de caos local se conectarão, gerando uma região de caos global (mar caótico).

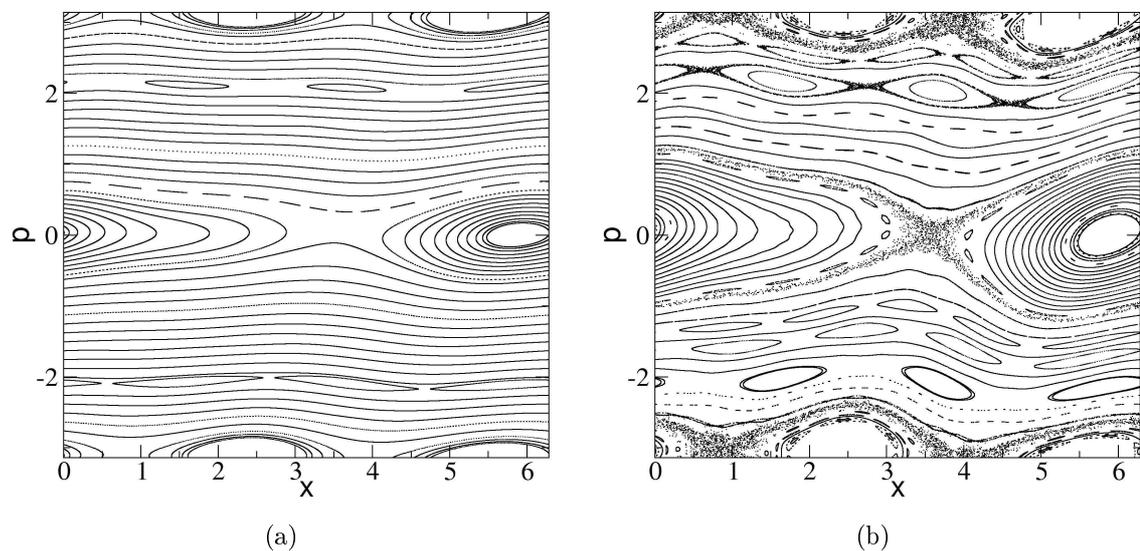


Figura 4.3: Espaço de fase do sistema para diferentes valores de K , sendo $a = 0,6$ e $\phi = \pi/2$. Para (a) $K = 0,1$ e (b) $K = 0,3$.

Estas transformações do espaço de fase para o nosso sistema estão ilustradas nas figuras 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6 considerando $a = 0,6$ e $\phi = \pi/2$. Na figura 4.3(a) ($K = 0,1$) observa-se a deformação sofrida por toros KAM e a formação de pontos fixos elípticos (centro das curvas fechadas). Na figura 4.3(b) ($K = 0,3$) observa-se a presença de regiões de caos local limitadas por curvas KAM, que se localizam na região da separatriz.

Para $K = 0,35$, podemos observar na figura 4.3 a trajetória de apenas uma condição inicial. Esta trajetória foi iterada 10^{12} vezes e ficou limitada a uma certa região do espaço de fase. Como este tempo é considerado um tempo longo de iteração, há evidências de que exista uma curva KAM que separa as duas regiões de caos no

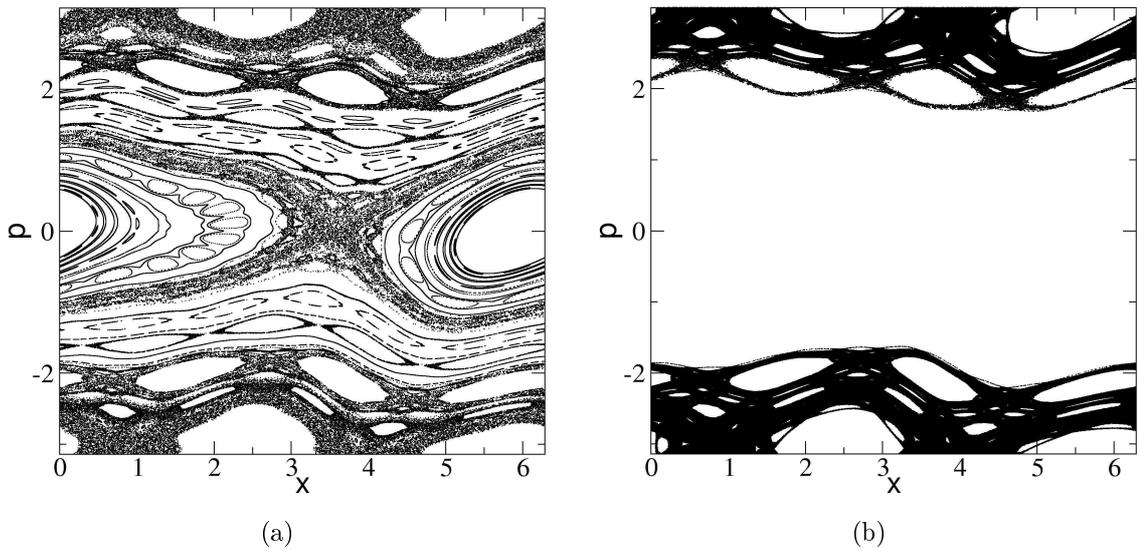


Figura 4.4: Em (a) o espaço de fase do sistema para $K = 0,35$, $a = 0,6$ e $\phi = \pi/2$ e em (b) trajetória de apenas uma condição inicial iterada 10^{12} vezes.

espaço de fase. Entretanto, este toro pode ter quebrado (cantori), mas seus "furos" podem ser tão pequenos ou poucos, que uma trajetória demore um tempo mais longo para atravessá-los.

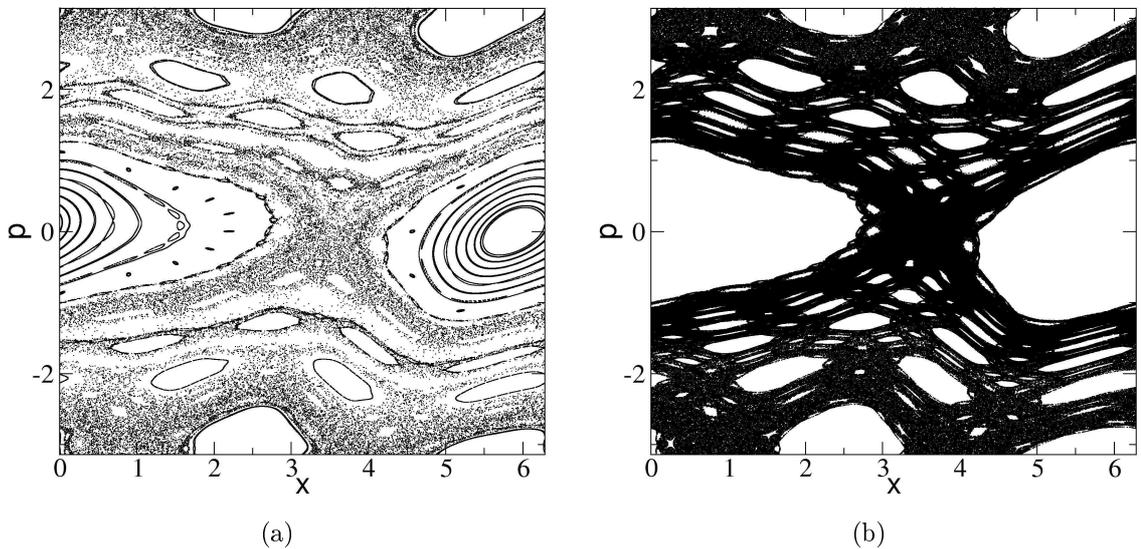


Figura 4.5: Em (a) o espaço de fase do sistema para $K = 0,4$, $a = 0,6$ e $\phi = \pi/2$ e em (b) trajetória de apenas uma condição inicial iterada 10^6 vezes.

Quando $K = 0,4$ o último toro KAM já está quebrado, em seu lugar existe um cantori que dificulta, porém não impede a passagem de um trajetória para qual-

quer uma das regiões de caos. Na região de intervalos de parâmetros próxima a $K = 0,35$ e $K = 0,40$ ocorre a quebra do último toros KAM com número rotacional irracional (proveniente do sistema integrável), gerando a transição do sistema de estocacidade local para estocacidade global. Podemos observar que a quebra do último toro KAM para o sistema ocorre muito antes do que a quebra do último toro para o mapa padrão (que ocorre em $K_c \approx 0,9716$). A quebra do último toro KAM do sistema dependerá também do valor de a .

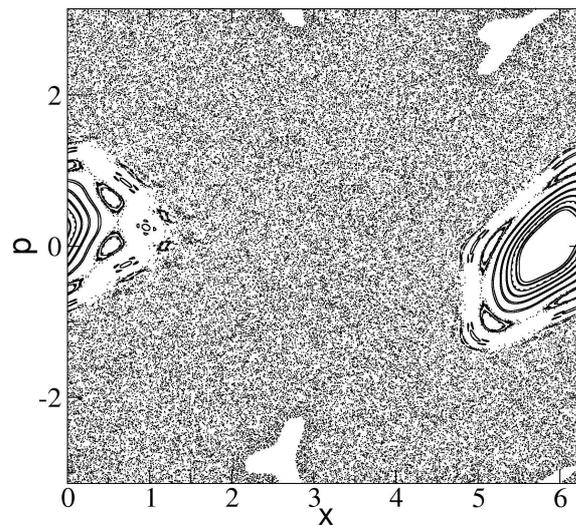


Figura 4.6: Espaço de fase do sistema para $K = 0,8$, $a = 0,6$ e $\phi = \pi/2$.

Quanto maior for a diferença entre K e K_c , menor é a barreira dinâmica para a difusão de partículas. Podemos observar na figura 4.6 que o espaço de fase apresenta ilhas encrustadas no mar caótico.

Com o aumento do parâmetro de estocacidade o tamanho das ilhas tende a diminuir, aumentando a região de estocacidade no sistema. Para $K = 6,5$ e $a = 0,6$ (figura 4.7) podemos observar 3 ilhas principais (período 3) que ocupam menos de 1% do espaço de fase. Podemos observar que as ilhas principais são rodeadas por outras ilhas (secundárias), e que em torno destas ilhas existe região de grude (figura 4.7(b)). Como as ilhas se tornam muito pequenas, não é possível observar a formação da sequência de ilhas em torno de ilhas, porém é provável que este fenômeno deva existir, e assim devem existir ilhas em torno das ilhas secundárias, e assim por diante.

Também podemos observar como o parâmetro a interfere no sistema: comparando o espaço de fase do sistema para $K = 6,5$. Para $a = 0,6$ (figura 4.7) o sistema apresenta 3 ilhas principais, enquanto que, para $a = 0,5$ (figura 4.8) obser-

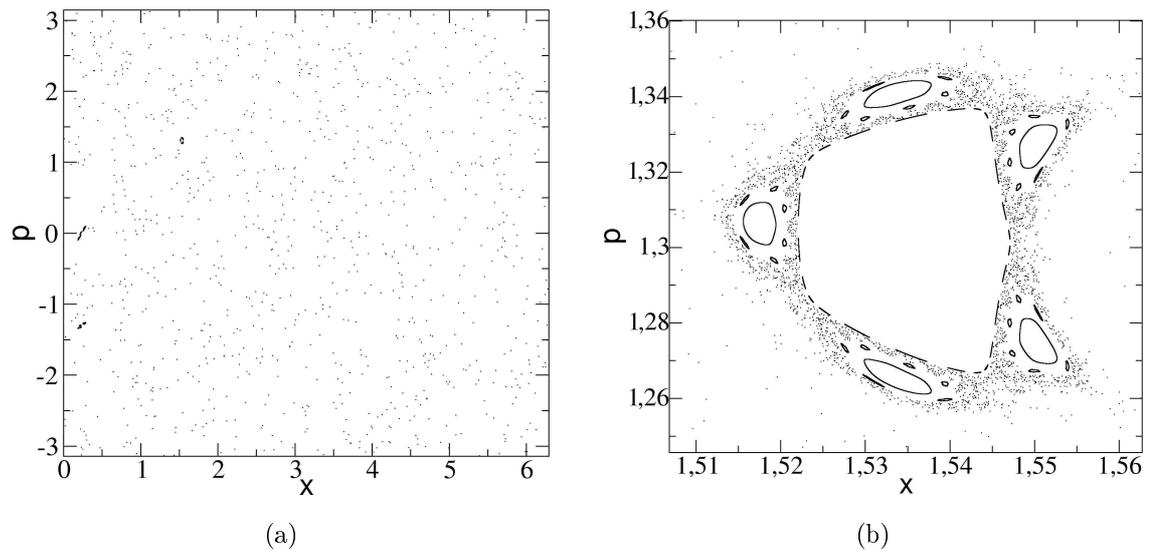


Figura 4.7: (a) espaço de fase do mapa padrão com termo de assimetria espacial ($a = 0,6$), $K = 6,5$ e $\phi = \pi/2$; (b) zoom da região de uma das ilhas principais de período 3.

vamos 4 ilhas principais. Assim, as bifurcações que ocorrem no sistema dependerão também do parâmetro a . Quanto maior for a , menor será o valor de K em que ocorre a quebra do último toro KAM. Também podemos observar na figura 4.8 variedades nas quais a trajetória consegue escapar da região de grude.

Outra característica que podemos observar no espaço de fase é o aprisionamento de trajetórias em torno das ilhas principais (grude), como pode ser observado nas figuras 4.7, 4.8 e 4.9. Na figura 4.9 podemos observar um tipo especial de aprisionamento dinâmico: aprisionamento da camada estocástica, na qual uma ilha com um ponto elíptico central bifurca criando dois pontos fixos, elíptico e hiperbólico, gerando duas novas curvas invariantes e caos local ao redor destas (no lugar da separatriz). Com o aumento do parâmetro de estocacidade a região de caos local se conecta com a região do mar caótico. Nas bordas das ilhas principais (figura 4.9) também pode-se observar a presença de aprisionamento de trajetórias.

Este sistema também apresenta ilhas com modos aceleradores (por exemplo para $K = 3,6$ e $K = 6,5$ para $a = 0,6$) e ilhas com modo balístico (por exemplo para $K = 6,0971$ e $a = 0,6$), ocorrendo aprisionamento de trajetórias em ambos os casos. Este tipo de armadilha dinâmica pode ser observada para diferentes valores de K , sendo uma propriedade fractal do sistema. Dois valores de K muito próximos podem apresentar ou não aprisionamento de trajetórias. Esta propriedade pode ser

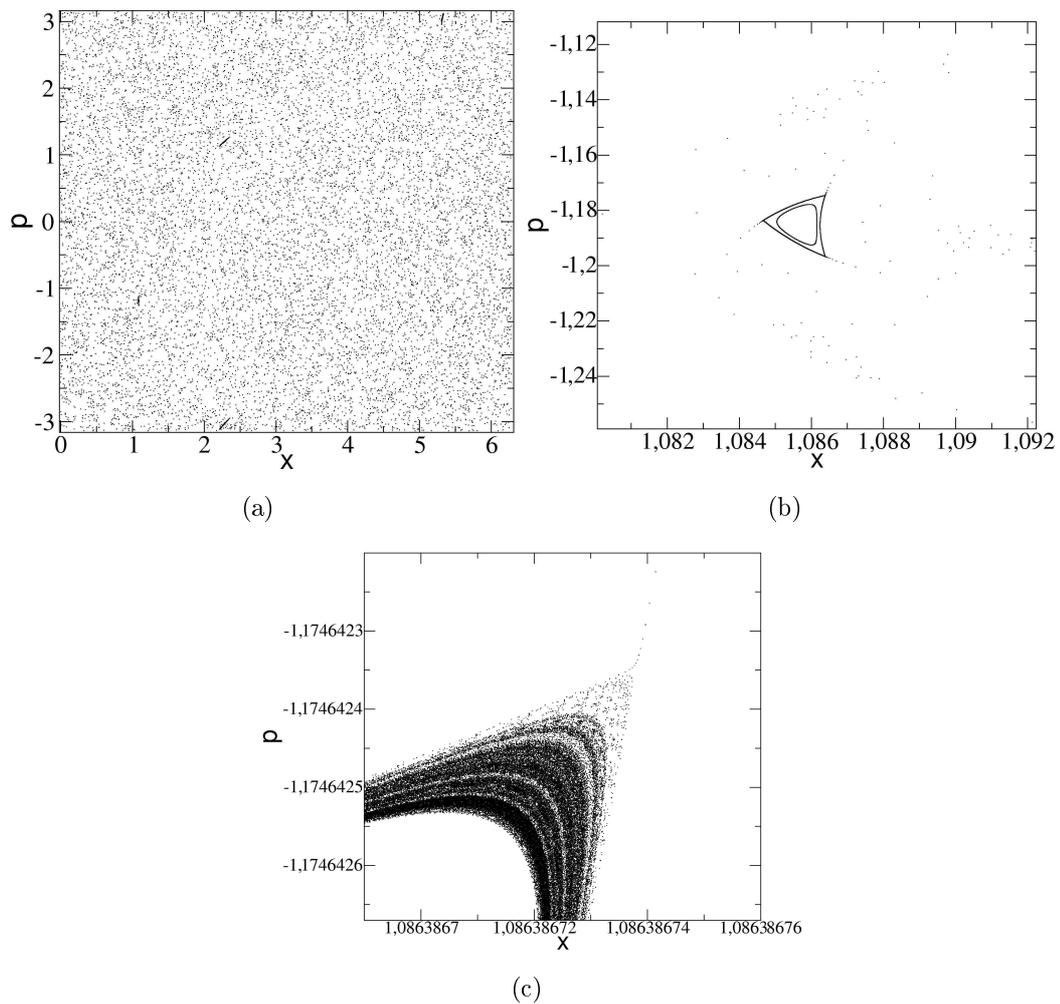


Figura 4.8: Espaço de fase do sistema para os parâmetros $a = 0,5$, $K = 6,5$ e $\phi = \pi/2$; (a) e (b) apresentam o ampliação de uma das ilhas principais de período 4, caracterizando o aprisionamento de uma trajetória ao redor da ilha.

quantificada através do expoente de Lyapunov a tempo finito [14]. Se uma trajetória está aprisionada na região de grude o expoente de Lyapunov se aproxima de zero (trajetória se aproxima de uma variedade estável), aumentando sua estabilidade. Quando a trajetória se afasta da região de grude o expoente de Lyapunov a tempo finito torna-se mais positivo (próximo ao valor de 1,5). Assim, se fizermos a fração de expoentes de Lyapunov a tempo finito próximos a zero em relação a todos os valores de expoente de Lyapunov a tempo finito calculados de uma trajetória poderemos quantificar a fração de tempo que esta trajetória sofreu a influência do grude. Na figura 4.10 foi calculada a fração de expoentes de Lyapunov a tempo finito (média a cada 100 tempos) menor do que 0,20 de uma trajetória iniciada em $x_0 = 0,7$ e

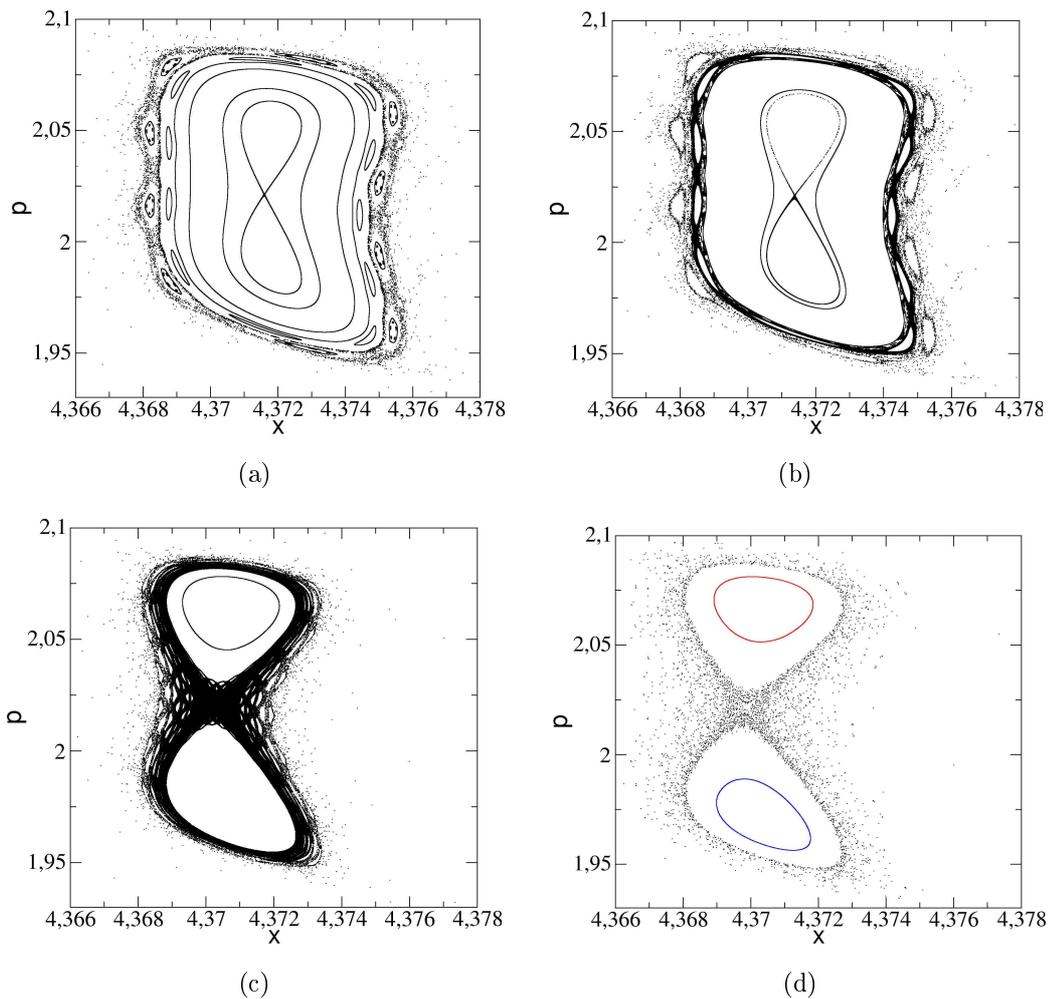


Figura 4.9: Ampliação do espaço de fase do sistema para uma ilha de período 3, parâmetros $a = 0,6$, e $\phi = \pi/2$, mostrando a bifurcação que ocorre para a sequência de parâmetros (a) $K = 6,052$; (b) $K = 6,053$; (c) $K = 6,058$ (d) $K = 6,06$.

$p_0 = 0,5$ e iterada em 10^8 tempos, mostrando vários domínios em que existe aprisionamento de trajetórias. Esta curva apresenta fractalidade e, assim, dois valores de parâmetro muito próximos, tão próximos quanto se queira, podem apresentar maior ou menor aprisionamento de trajetórias ou até mesmo um destes apresentar grude e o outro não.

Como visto, o aprisionamento de trajetórias afeta o transporte e a difusão das partículas no sistema, entretanto, quando inserimos várias partículas obtemos que a média do momento (e velocidade das partículas) no sistema tende a ser nulo. Como este sistema é conservativo (possui $|J| = 1$), nem mesmo os termos de assimetria afetarão a média das velocidades do sistema, como pode ser observado na figura 4.11

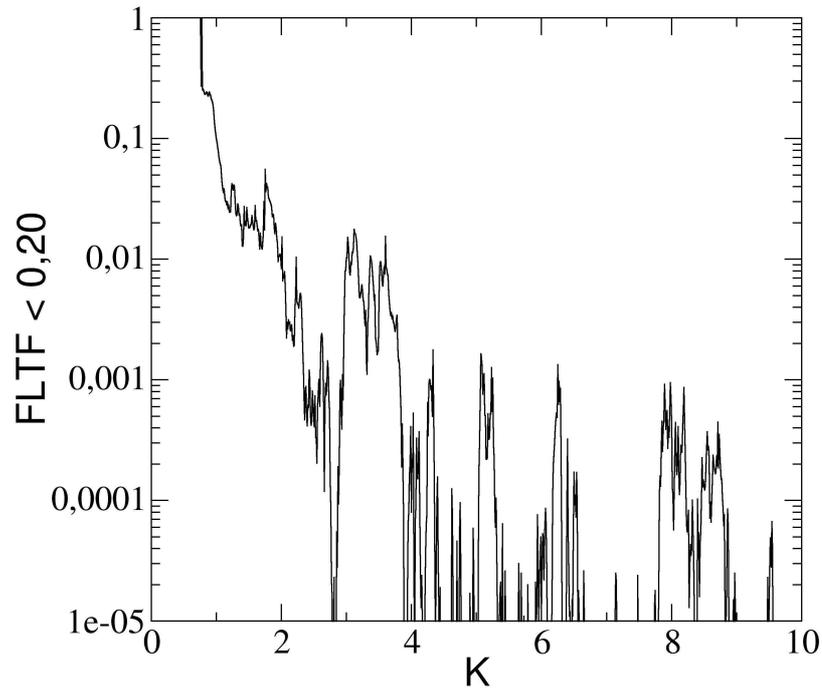


Figura 4.10: Fração de expoentes de Lyapunov a tempo finito (tempo 100) maiores que 0,20 em função do parâmetro de estocacidade (K) para uma trajetória iniciada em $p_0 = 0,5$ e $x_0 = 0,7$ e iterada 10^8 vezes, sendo p limitado ($-\pi < p < \pi$), utilizando-se os parâmetros $a = 0,6$ e $\phi = \pi/2$.

para 10^6 condições iniciais iteradas a 100 tempos, variando-se a e mantendo os outros parâmetros fixos (a) e variando ϕ e mantendo os outros parâmetros fixos (b).

4.3 Inserindo a dissipação

Devido a segunda lei da termodinâmica, direções preferenciais de corrente ou transporte são proibidas para sistemas em equilíbrio. Entretanto, em sistemas fora do equilíbrio, se forem quebradas as simetrias espaciais e temporais, o sistema pode apresentar correntes em direções preferenciais. Adicionando a dissipação em nosso sistema, este torna-se fora do equilíbrio. Como o sistema é gerado por um potencial com assimetria espacial, as simetrias do sistema são quebradas. Como resultado, as correntes com direção preferencial aparecem em nosso sistema, como podemos observar na figura 4.12. Este resultado foi observado por Lei Wang *et. al* em [3], porém este não foi analisado e nem relacionado ao espaço de fase do sistema.

Para $\gamma < 0,6$ podemos observar na figura 4.12 que a curva de $\langle p \rangle$ em função

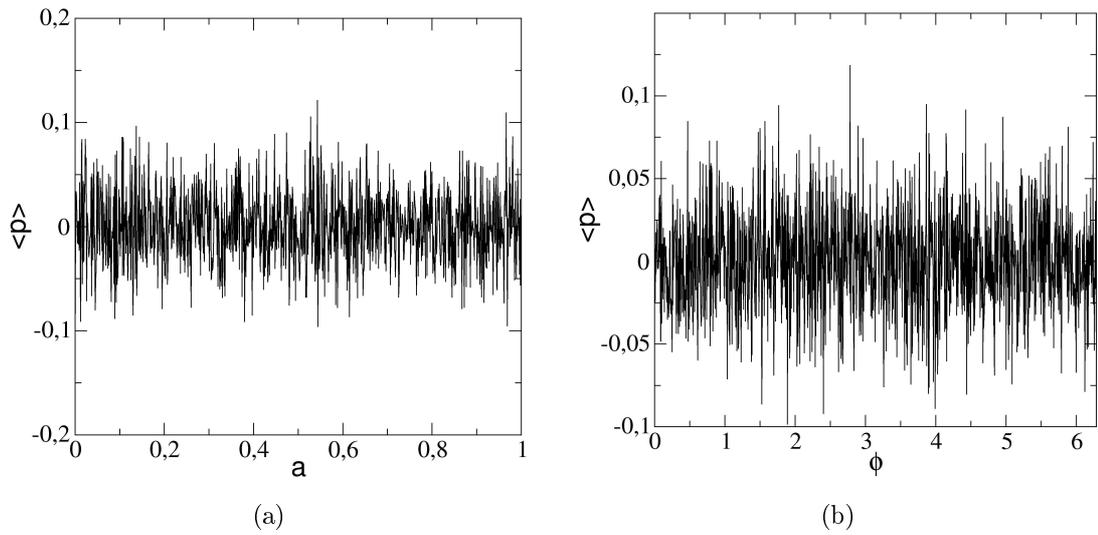


Figura 4.11: (a) Média de 100 tempos de 10^6 condições iniciais para cada para $K = 6,574798$ variando-se (a) a , com $\phi = \pi/2$, e (b) ϕ , mantendo $a = 0,5$.

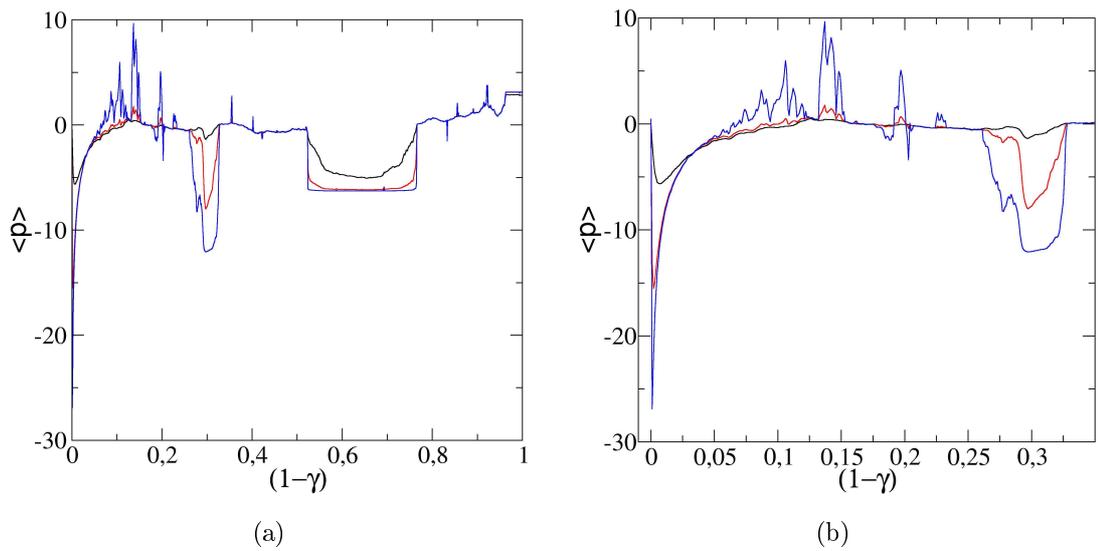


Figura 4.12: Corrente média ($\langle p \rangle$) para 10^6 condições iniciais iteradas a diferentes tempos (100 - preto , 1000 - vermelho e 10^6 - azul), sendo a média feita no tempo e entre todas as condições iniciais para diferentes valores de γ . Os parâmetros utilizadas foram: $a = 0,5$, $\phi = \pi/2$ e $K = 6,574798$; (b) ampliação de (a) para $(1 - \gamma) < 0,4$.

de $(1 - \gamma)$ satura rapidamente. Para $\gamma > 0,6$ podemos observar que quanto maior o tempo de iteração maior será a corrente com direção preferencial. Esta curva deverá saturar para um tempo de iteração grande, dependendo do quão rápido as trajetórias

tendem aos atratores para cada valor de γ .

Fazendo uma ampliação das regiões em que o sistema é pouco dissipativo ($\gamma > 0.9$), podemos observar que, mesmo próximo ao caso conservativo, o sistema apresenta estas correntes preferenciais (figura 4.13(b)). Estas correntes só ocorrem quando existe assimetria, como pode ser observado na figura 4.13. Quando $a = 0$ e o sistema toma a forma do mapa padrão, inserindo a dissipação no mapa podemos observar que estas direções preferenciais de corrente não aparecem no sistema. Para entendermos que, mesmo próximo de um sistema conservativo, existem estas correntes, vamos analisar o que acontece com uma trajetória do sistema no espaço de fase.

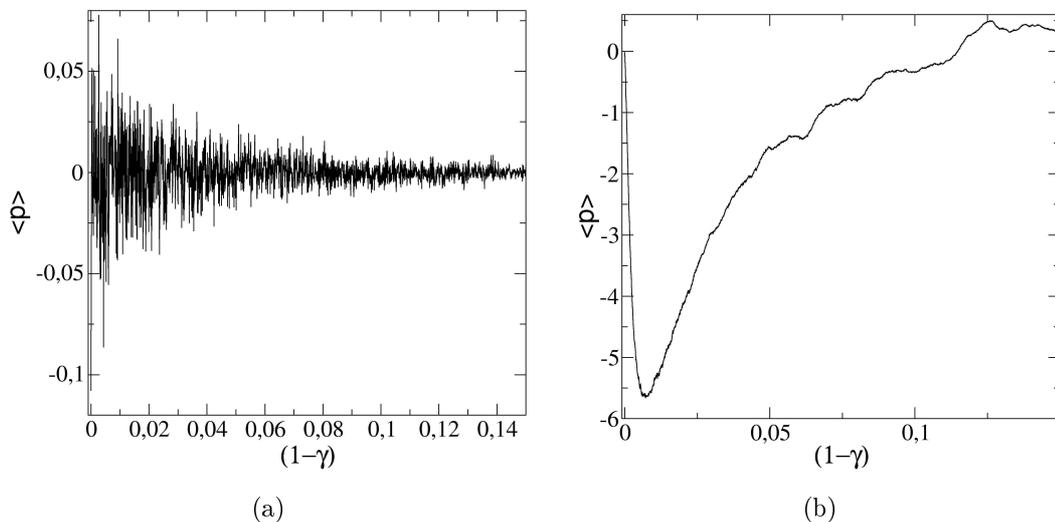


Figura 4.13: Média de p para 100 iteradas de 10^6 condições iniciais em função de $(1 - \gamma)$ para o sistema $K = 6,574798$, $\phi = \pi/2$ e (a) $a = 0$ e para (b) $a = 0,5$.

No transiente de uma trajetória podemos observar que esta apresenta o mesmo movimento de uma trajetória iniciada no mar caótico: apresenta difusão intercalada com vôos de modos aceleradores de maior e menor influência. A interferência de ilhas de modos aceleradores (do sistema conservativo) faz com que a trajetória acelere no sentido negativo (devido a assimetria do sistema as acelerações no sentido positivo são muito pequenas) e difunde normalmente tanto na direção positiva quanto na direção negativa, principalmente na direção positiva logo após um vôo de sentido negativo. Um exemplo deste tipo de trajetória pode ser observada na figura 4.14.

Estes vôos podem ser observados no espaço de fase no cilindro, como mostra a figura 4.15, a trajetória irá decrescendo em p em torno de dois intervalos de x .

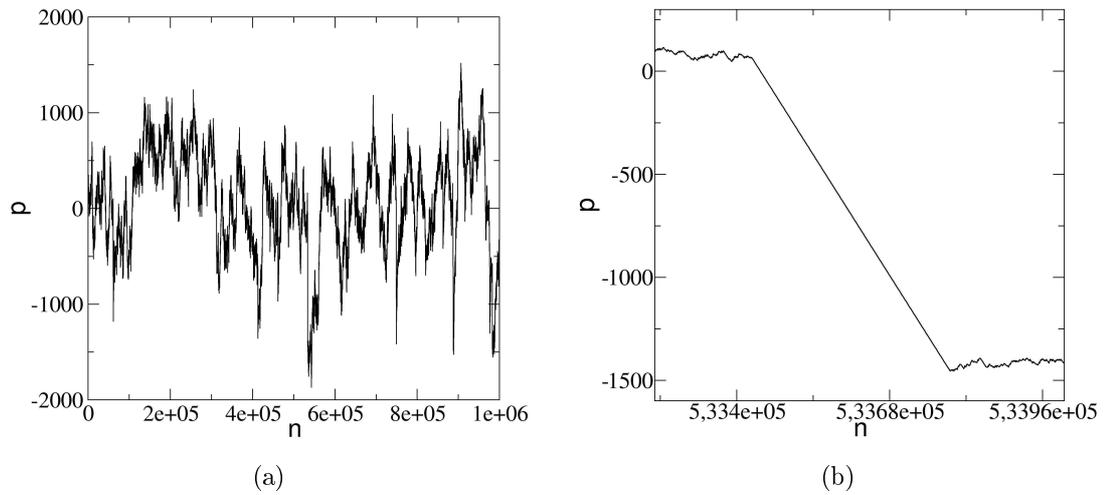


Figura 4.14: Momento de uma partícula em função do tempo (número de iteradas) para $K = 5, 8$, $a = 0, 5$, $\phi = \pi/2$ e $\gamma = 0, 9999$ e (b) ampliação de uma região de (a) que apresenta um vôo.

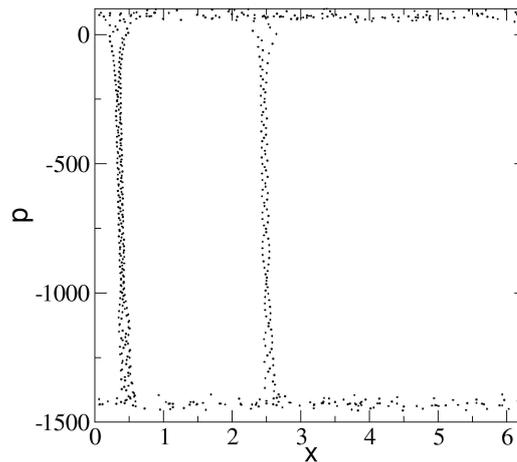


Figura 4.15: Espaço de fase no cilindro para a trajetória da figura 4.14 para $5, 333 \cdot 10^5 \leq n \leq 5, 339 \cdot 10^5$.

Como, com a dissipação o mapa perde a simetria de p a cada intervalo de p de 2π , pode-se observar que estes vôos sofrem uma certa inclinação em x no espaço de fase, como se a trajetória estivesse mapeando ilhas (ou a "memória" de regiões de ilhas) que estão um pouco transladadas em x a cada intervalo de p de aproximadamente 2π .

Estes vôos também podem ser caracterizados via expoente de Lyapunov a tempo finito, como mostra a figura 4.16(a). Quando a trajetória sofre a influência de "pseudo modos aceleradores" a trajetória tende a aumentar a estabilidade (expoente

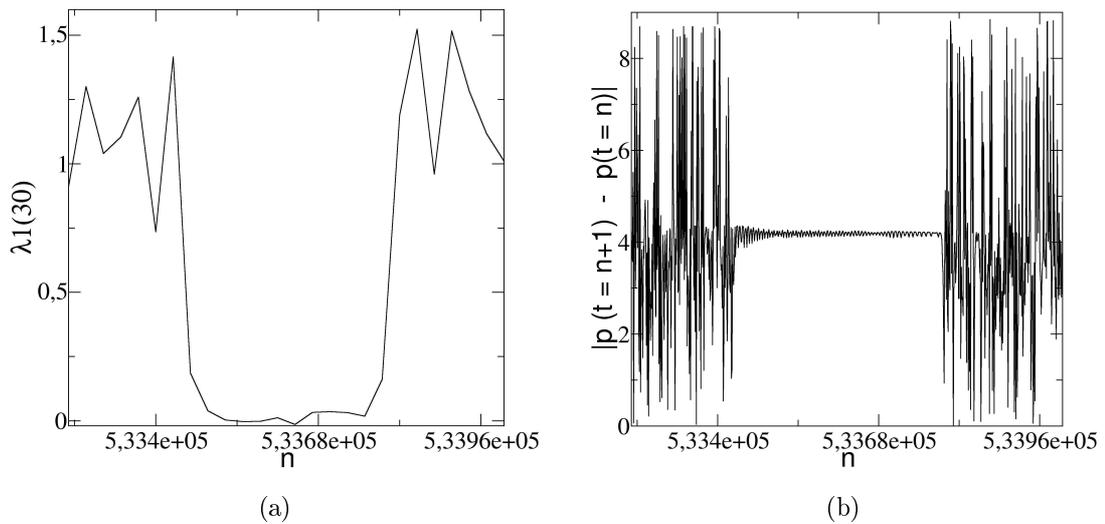


Figura 4.16: (a) Expoente de Lyapunov a tempo finito (tempo 30) em função de n para a ampliação da trajetória da figura 4.14 e (b) $|p_{n+1} - p_n|$ em função de n .

de Lyapunov a tempo finito próximo de zero) e logo que escapa destes retorna a apresentar maior instabilidade (expoente de Lyapunov a tempo finito próximo de 1,5). Estes vôos aumentam o valor de p a cada iterada de um valor entre 3,88 e 4,3, como é ilustrado em 4.16(b). Assim, a cada 3 iteradas p sofre um acréscimo de um valor em torno de 4π . É interessante ressaltar que o sistema conservativo para os parâmetros $K = 5,8$ e $a = 0,5$ apresenta modo acelerador que aumenta de 4π o valor de p a cada 3 iteradas.

O termo de dissipação no mapa faz com que seja perdida a simetria do espaço de fase do mapa a cada 2π na direção de p . Entretanto, como estamos utilizando um termo de dissipação muito próximo ao caso conservativo, podemos aproximar o espaço de fase como sendo simétrico a cada 2π em p . Assim, trabalhando com a trajetória limitada ao toro podemos observar o que ocorre no espaço de fase quando é inserida a dissipação (figura 4.17).

Os pontos elípticos internos às ilhas do sistema conservativo (figura 4.7) tornam-se atratores para o sistema dissipativo, entretanto, pode ocorrer de esses pontos elípticos sofrerem bifurcação, trocando de estabilidade e tornando-se pontos hiperbólicos. Não apenas os pontos elípticos das ilhas principais tornam-se pontos fixos, também os pontos fixos de ilhas de ressonância de outras ordens (ilhas em torno das ilhas principais) tornam-se pontos fixos. Na figura 4.17 podemos observar regiões de grude remanescentes do sistema conservativo. Na figura 4.17(b) podemos observar que a trajetória sofre o grude em torno da ilha principal e em torno das ilhas

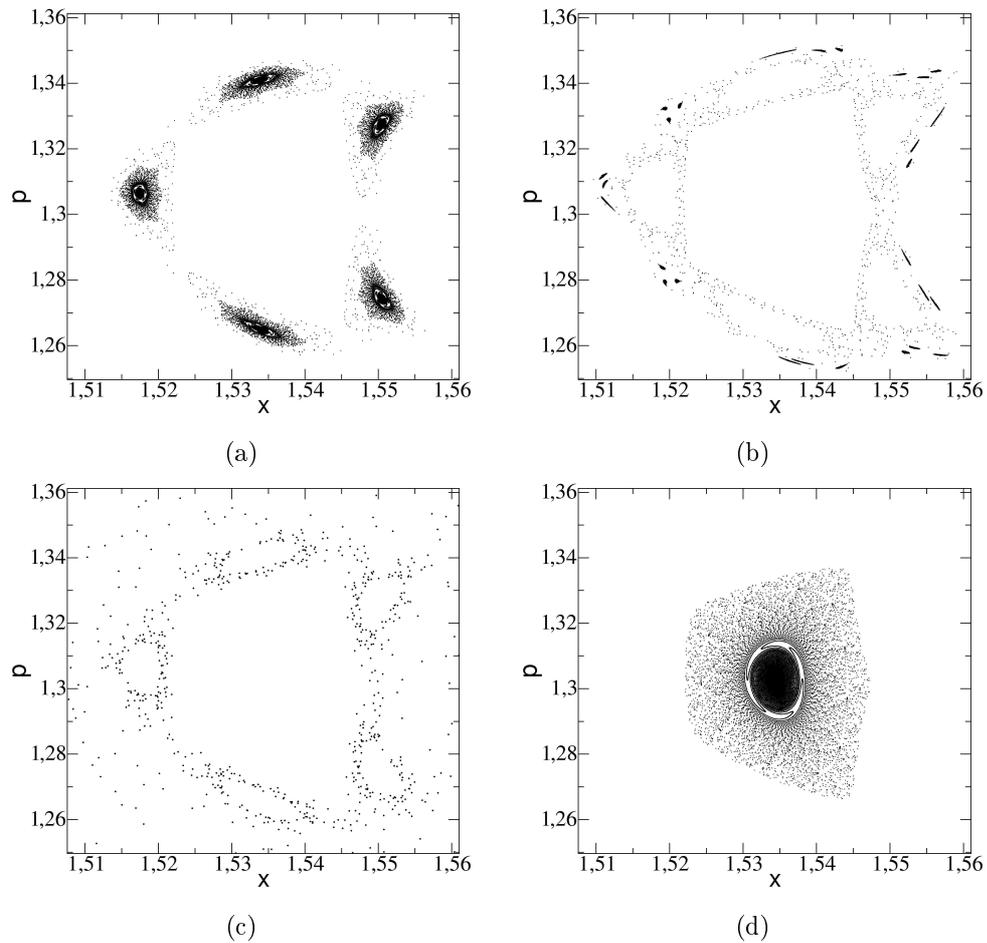


Figura 4.17: Ampliação do espaço de fase do sistema limitando p em $[-\pi, \pi]$ para $K = 6, 5$, $a = 0, 6$, $\phi = \pi/2$ e $\gamma = 0,9999$ para 4 diferentes condições iniciais, sendo que, em (a) a trajetória é atraída para um atrator de período 15 proveniente dos pontos elípticos centrais das ilhas ao redor da ilha principal de período 3 do sistema conservativo; em (b) a trajetória é atraída para pontos fixos provenientes de pontos elípticos internos as ilhas de maior ressonância do sistema conservativo; em (c) a trajetória sofre aprisionamento porém não é atraída para os pontos fixos do sistema; em (d) a trajetória é atraída para o ponto fixo de período 3 provindo do ponto elíptico central das ilhas do sistema conservativo.

secundárias antes de serem atraídas para o atrator originado de ilhas de ressonância de ordem superior. Na figura 4.17(c) a trajetória sofre um aprisionamento em torno da ilha principal e logo retorna ao mar caótico. Já na figura 4.17(d) a trajetória é atraída para um atrator de período 3 (atrator provindo dos pontos elípticos centrais da ilha de período 3), apresentando movimento de aproximação em torno dos pontos

fixos por um longo período de tempo antes de encontrar seu estado final (ponto fixo).

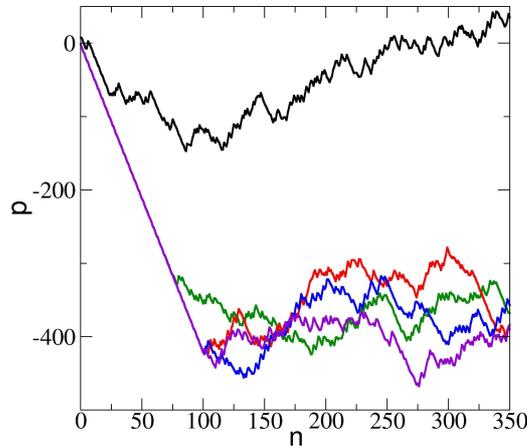


Figura 4.18: Momento de 5 trajetórias em função do tempo, em preto uma trajetória iniciada no mar caótico e as outras curvas foram iniciadas com as mesmas condições iniciais da figura 4.17.

Utilizando as mesmas condições iniciais da figura 4.17 como condições iniciais para as curvas da figura 4.18 podemos observar que, para uma condição inicial no mar caótico a trajetória iniciará com movimento de difusão e sofrerá vôos intercalados com o movimento de difusão na região estocástica. Para as outras condições iniciais a trajetória iniciará com um movimento de aceleração até um tempo aproximado de $n = 100$. Até mesmo a trajetória que iniciava seu movimento na região de grude também sofreu aceleração. Assim, toda trajetória iniciada na região de uma ilha de modo acelerador (ou em torno da região de grude desta) sofrerá aceleração. Entretanto, para outros parâmetros do sistema conservativo existem ilhas que não apresentam modos aceleradores.

Para o caso de $K = 6,0971$ e $a = 0,6$, o sistema apresenta ilhas com modo balístico e assim, uma trajetória iniciada na região destas ilhas inicialmente manterá velocidade aproximadamente constante a cada l iterações, sendo l o período de uma ilha, por um curto período de tempo e depois difundirá no espaço de fase, podendo até mesmo apresentar vôos devido a modos balísticos de outras ilhas do espaço de fase. Para o parâmetro $K = 2,35$ e $a = 0,6$, condições iniciadas nas regiões das ilhas aproximam-se do atrator e permanecem na região do espaço de fase limitado em $-\pi < p < \pi$. Já as trajetórias iniciadas no mar caótico apresentam difusão e algumas regiões em que p é aproximadamente constante.

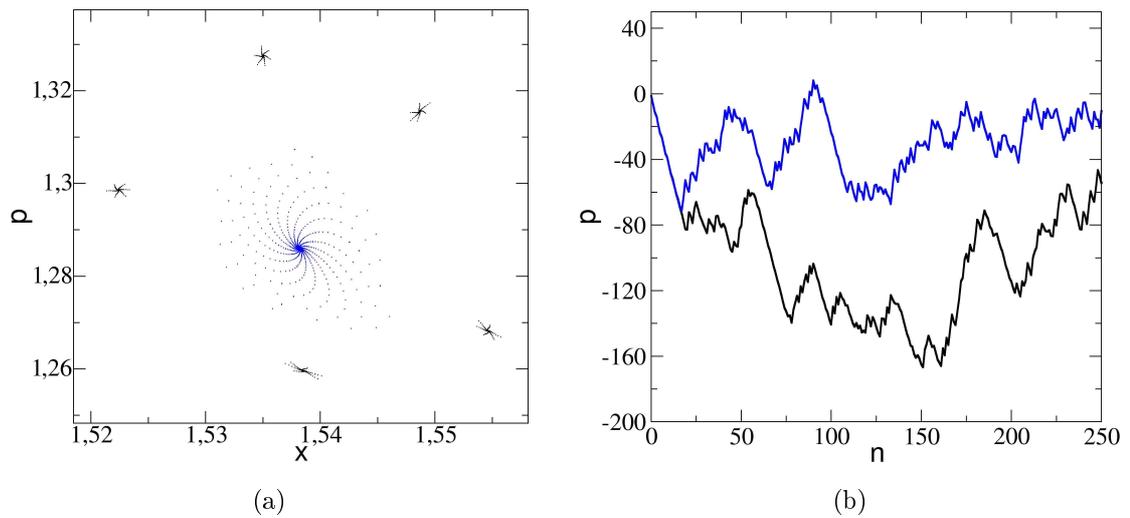


Figura 4.19: (a) Ampliação de duas trajetórias no espaço de fase do sistema limitando p em $[-\pi, \pi]$ para $K = 6, 5$, $a = 0, 6$, $\phi = \pi/2$ e $\gamma = 0, 995$ e (b) p em função de n para p ilimitado, sendo as mesmas condições iniciais de (a).

Quando aumentamos o valor da dissipação podemos observar que a estrutura do espaço de fase conservativo acaba sendo perdida. Se uma trajetória for iniciada em uma região da ilha sofrerá aceleração, porém, quanto maior a dissipação do sistema, menor será o tempo de aceleração que a trajetória sofrerá inicialmente. Além disto, os vôos sofridos pela trajetória durante o transiente caótico serão menores. Podemos observar este fenômeno comparando as figuras 4.17 e 4.18 nas quais $\gamma = 0, 9999$ com a figura 4.19 em que $\gamma = 0, 995$ para os mesmos parâmetros de K , a e ϕ .

Na figura 4.18, $K = 6, 5$ e $a = 0, 6$, podemos observar que, para o sistema dissipativo as trajetórias iniciadas em regiões onde eram localizadas as ilhas no sistema conservativo sofrem aceleração no início de suas trajetórias. Na figura 4.20(a) é mostrado o módulo da média do momento em função do tempo para 10^6 condições iniciais pertencentes a região em que existia uma ilha no espaço de fase conservativo (curva de cor preta) e para 10^6 condições iniciais escolhidas aleatoriamente no espaço de fase limitado ao toro (curva de cor azul). Podemos observar que as trajetórias iniciadas na região de ilha do sistema conservativo apresentam movimento de aceleração até um tempo aproximado de $n = 100$, depois as trajetórias sofrem uma diminuição gradual no momento (em módulo), até saturarem no mesmo valor em que a média do momento para as 10^6 condições aleatórias iniciadas no toro. Entretanto, para os parâmetros $K = 6, 0971$ e $a = 0, 6$ podemos observar na figura 4.20(b) que as condições iniciadas na região de uma ilha no sistema conservativo apresentam comportamento

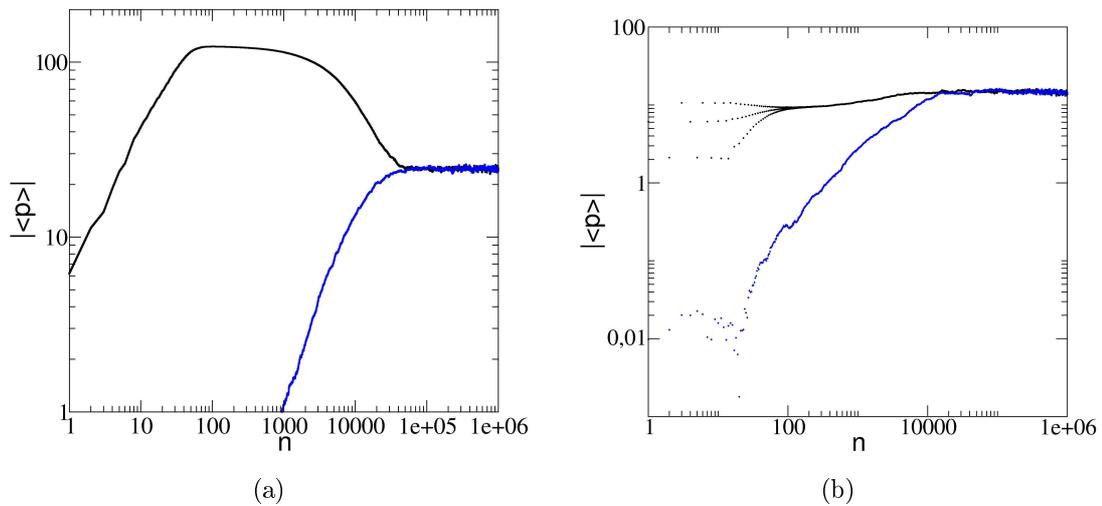


Figura 4.20: Módulo de $\langle p \rangle$ em função do tempo para 10^6 condições iniciais escolhidas aleatoriamente no espaço de fase do toro (azul) e na região de ilha (preto) para (a) $K = 6,5$ e $a = 0,6$ e (b) $K = 6,0971$ e $a = 0,6$.

diferente ao caso dos parâmetros anteriores. Isto se deve ao fato de, para $K = 6,0971$ e $a = 0,6$, as condições iniciadas nas regiões de ilhas do sistema conservativo não apresentarem uma aceleração inicial, mas sim manterem aproximadamente a mesma velocidade a cada 3 iterações do mapa (ilhas de período 3) por um pequeno período de tempo e depois apresentam diferentes vôos (de diferentes durações e sentidos) além de novos intervalos em que a trajetória mantém o momento aproximadamente constante a cada 3 iteradas do mapa, como é mostrado na figura 4.22.

Para o caso de $K = 6,5$ e $a = 0,6$ podemos observar através do histograma dos momentos de 10^6 condições iniciais após 100 tempos de iteração que as condições iniciadas dentro das ilhas produzem um segundo pico no histograma em um valor determinado de velocidade, em torno de -420 , como é mostrado na figura 4.21(a). Este valor corresponde aproximadamente ao mesmo valor de uma trajetória que diminui o momento em -4π a cada três iteradas. Este pico influencia a média dos momentos tornando-a mais negativa. Além disto, mesmo quando as condições iniciais utilizadas não se encontram na região de ilhas, a curva apresenta uma assimetria, sendo mais larga no sentido negativo. O histograma do momento de 10^6 condições iniciadas no toro para os parâmetros $K = 6,0971$ e $a = 0,6$ não apresenta um segundo pico, mas podemos observar que a curva do histograma também é assimétrica. Assim, podemos concluir que os parâmetros que apresentam vôos mais longos apresentam maior corrente para pequenos tempos. Em [2] é observado que a assimetria

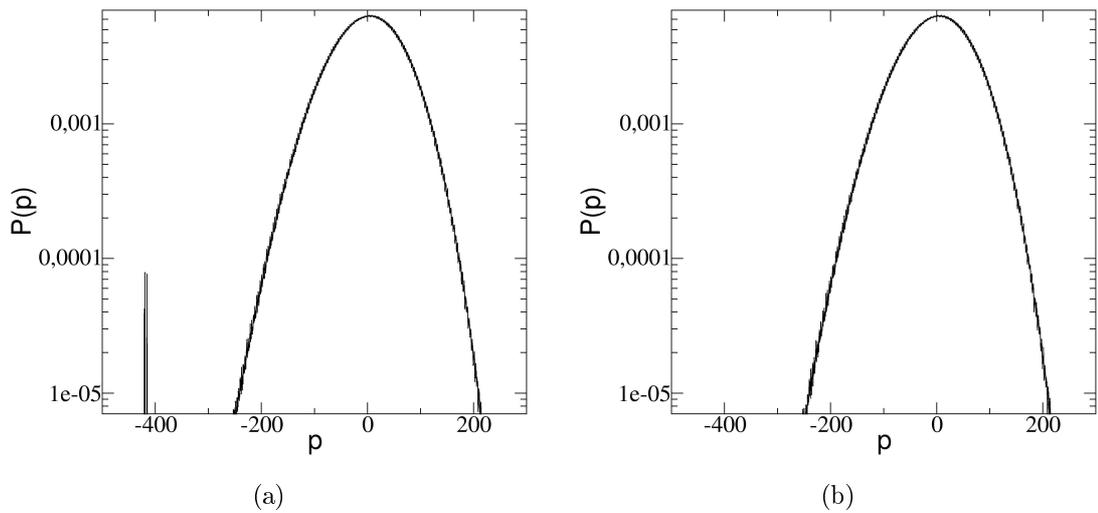


Figura 4.21: (a) Histograma do momento a tempo $t = 100$ de $5 \cdot 10^6$ condições iniciais aleatórias (a) no toro e (b) no mar caótico (retirando as condições dentro das ilhas) do toro para os parâmetros $K = 6,5$ e $a = 0,6$.

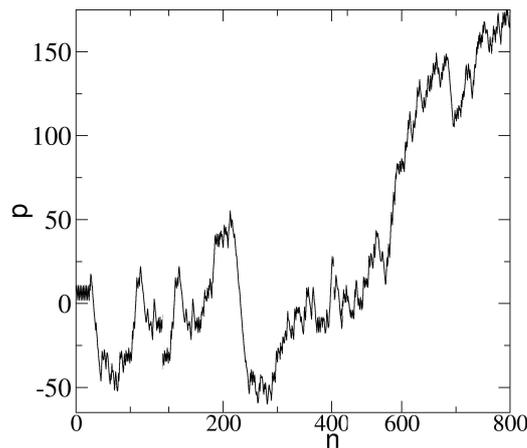


Figura 4.22: Evolução temporal do momento para uma trajetória iniciada na região próxima a um ponto elíptico. Região de trajetórias de movimento regular, ilhas, do sistema conservativo para o mesmo valor de parâmetro: $K = 6,0971$. Os parâmetros utilizados nesta trajetória são: $a = 0,6$ e $\gamma = 0,9999$.

do histograma está relacionada a assimetria dos vôos de pequena duração, vôos estes decorrentes de ilhas muito pequenas no espaço de fase. Podemos relacionar o pico observado em 4.21 com a assimetria de vôos de ilhas de menor ressonância (e maior amplitude) no espaço de fase (ilha de período 3 que apresenta modo balístico), pois, quando retiramos as trajetórias iniciadas na região de ilhas estes picos não aparecem no histograma.

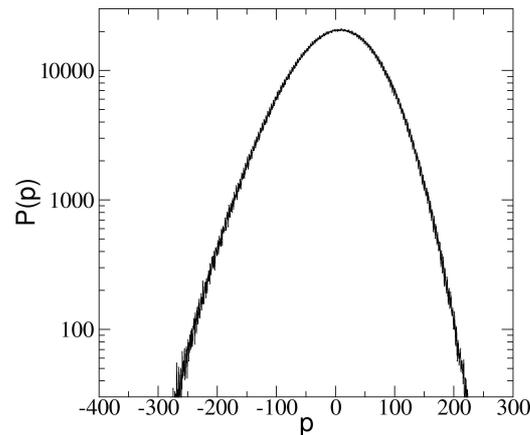


Figura 4.23: Histograma do momento a tempo $t = 100$ de $5 \cdot 10^6$ condições iniciais aleatórias no toro para $K = 6,0971$ e $a = 0,6$.

Na figura 4.24 é caracterizada a dependência do momento médio com a variação do parâmetro K (para a e ϕ fixos). Para $\gamma = 0,9999$ (uma dissipação extremamente pequena), figura 4.24(a) o sistema apresenta uma certa fractalidade, e esta fractalidade é perdida quando aumenta-se o valor da dissipação (observar a variação através da figura 4.24). Entretanto, os valores do módulo do momento médio aumentam com um pequeno aumento da dissipação. Como visto na figura 4.13(b) este aumento no módulo do momento médio pode diminuir com o aumento da dissipação.

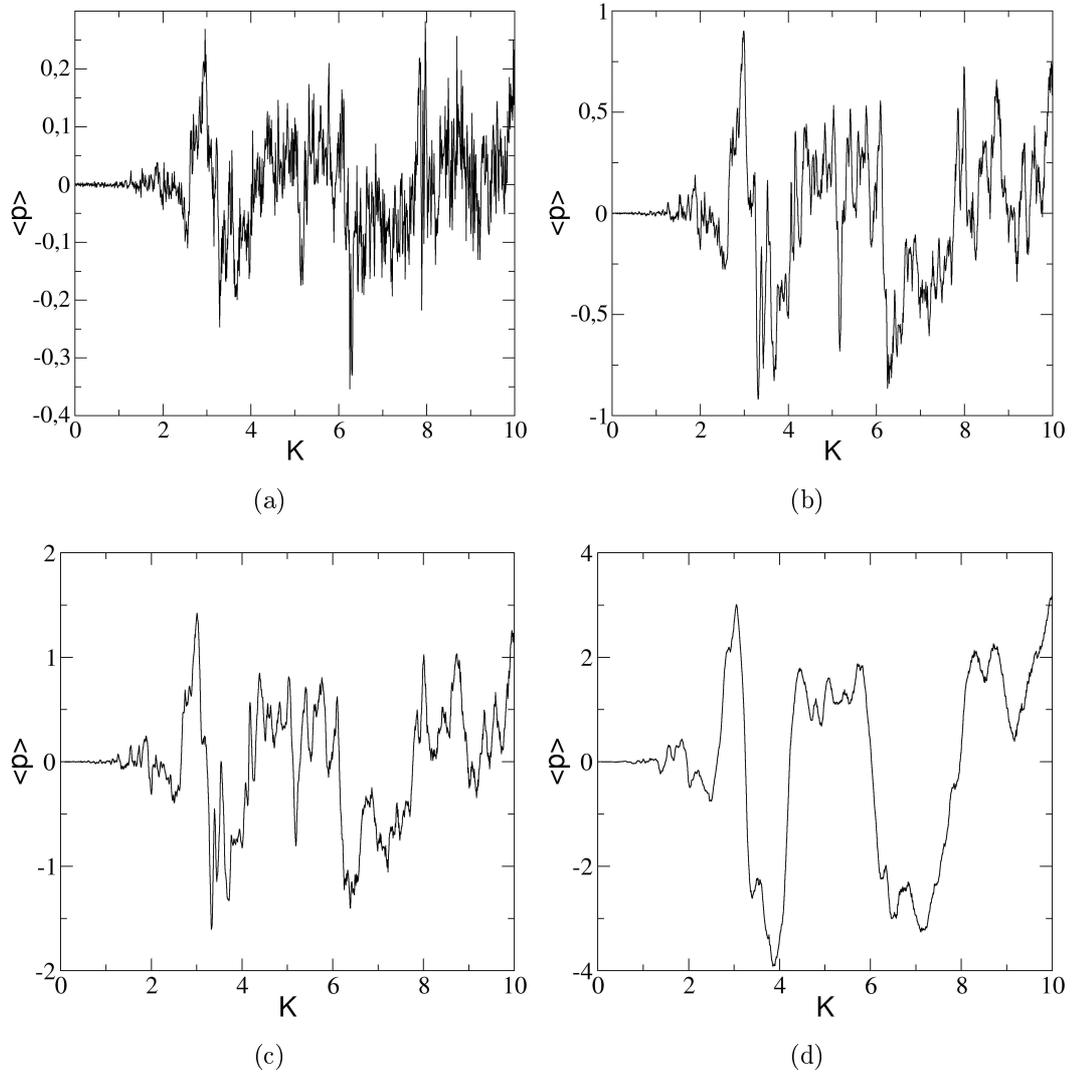


Figura 4.24: Média do momento em função de K para 100 iteradas de 10^6 condições iniciais para os parâmetros $a = 0,6$, $\phi = \pi/2$ e (a) $\gamma = 0,9999$, (b) $\gamma = 0,9995$, (c) $\gamma = 0,999$ e (d) $\gamma = 0,995$.

Capítulo 5

Conclusão

As correntes de transporte direto estão relacionadas aos vãos que uma trajetória sofre no espaço de fase devido a modos aceleradores. Para o sistema conservativo estas correntes são nulas, porém quando é inserido um termo de dissipação no sistema assimétrico, este apresenta estas correntes de sentido preferencial. Estes modos aceleradores são provenientes de regiões de ilhas ressonantes no espaço de fase que, com a dissipação, tornaram-se regiões atrativas (focos).

Devido a assimetria do sistema os vãos tornam-se assimétricos, ocorrendo mais fortemente em uma direção de p (positiva ou negativa). Para certos valores do parâmetro de estocacidade K , os que apresentarem ilhas de modos aceleradores, as correntes de direção preferencial são mais apreciáveis. Entretanto, estas correntes sempre existirão para o caso dissipativo, isto porque existem inúmeras micro-ilhas no espaço de fase conservativo que, no caso dissipativo, influenciarão trajetória gerando pequenos vãos e, como estes vãos possuem direções preferenciais devido a assimetria do sistema, geram a corrente não nula. Assim, é de fundamental importância a assimetria do sistema para que este apresente este tipo de corrente.

Como estes vãos estão diretamente ligados a trajetórias que no espaço conservativo e limitado ao toro sofrem aprisionamentos por longos tempos (grude) em torno de ilhas, e como existem parâmetros do sistema que no espaço de fase apresentam regiões de maior intensidade de grude do que outros valores do parâmetro de estocacidade (quantitativamente observados através da fração de Lyapunov a tempo finito), acreditamos que esta corrente preferencial é maior quanto maior for o aprisionamento de trajetórias em torno de ilhas no espaço de fase conservativo.

O cálculo da fração de expoente de Lyapunov a tempo finito, que caracteriza a intensidade do grude no espaço de fase, deve ser feito por uma trajetória iniciada

no mar caótico do espaço de fase do sistema conservativo limitado ao toro, para que se possa utilizar um tempo grande (sem que a trajetória tenda ao atrator, o que ocorreria se utilizássemos o sistema dissipativo) e para que a trajetória percorra toda a região do espaço de fase (por este motivo utilizasse o espaço de fase limitado ao toro). Entretanto, quando é inserido o termo de dissipação o espaço de fase do sistema sofre uma certa modificação: suas bifurcações ocorrem para valores do parâmetro K diferentes dos valores do sistema conservativo, porém as regiões de ilhas do sistema dissipativo apresentam-se muito próximas das ilhas do sistema conservativo, apenas um pouco transladadas. Devido a estas mudanças no espaço de fase quando a dissipação é inserida não foi possível fazer uma correlação entre os parâmetros que apresentam maior grude no sistema conservativo com os parâmetros que apresentam maior corrente de direção preferencial.

Como os parâmetros que apresentam regiões de grude intensas são aqueles que acabaram de passar por uma bifurcação e apresentam canais de grude entre as ilhas que bifurcaram [16], [15] e, como este sistema que estamos trabalhando apresenta este tipo de canais de grude provindos de bifurcações de ilhas, bifurcações essas que são função do parâmetro de estocacidade, acreditamos que exista uma relação entre a corrente de sentido preferencial com os parâmetros em que ocorre a bifurcação, sendo esta análise um importante trabalho futuro.

A perda de fractalidade do sistema com aumento da dissipação também pode ser observado. A fractalidade é uma característica das armadilhas dinâmicas, a existência ou não destas armadilhas em função do parâmetro de estocacidade é fractal. Assim, acreditamos que esta é uma evidência do papel destas armadilhas para que existam correntes de direção preferencial para o caso do sistema pouco dissipativo (muito próximo ao caso conservativo).

Outro trabalho a ser realizado é a análise de pontos fixos do sistema dissipativo, a análise de suas bacias de atração, bem como o comportamento destas bacias com o aumento da dissipação do sistema. A análise da dimensão fractal do sistema em função da dissipação também é outro ponto a ser analisado futuramente.

Bibliografia

- [1] ASTUMIAN, R. D., Thermodynamics and Kinetics of a Brownian Motor, **Science**, n. 276, p. 917-922, 1997.
- [2] DENISOV, S., FLACH, S., KLAFTER, J., DC current in Hamiltonian systems by Lévy flights, **Physica D**, n. 170, p. 131-142, 2002.
- [3] WANG, L., BENENTI, G., CASATI, G., LI, B., Ratchet Effect and the Transporting Islands in the Chaotic Sea, **Physical Review Letters**, n.99, p. 244101, 2007.
- [4] RODRIGUES, S. C., MOURA, A. P. S. de, GREBOGI, C., Emerging attractors and the transition from dissipative to conservative dynamics, **Physical Review E**, n. 80, p. 026205, 2009.
- [5] SEOANE, J. M., SANJÚAN, M. A. F., LAI, Y.-C., Fractal dimension in dissipative chaotic scattering, **Physical Review E**, n. 76, p. 016208, 2007.
- [6] CARVALHO, R. E., ABUD, C. V., SOUZA, F. C., Dissipation as a mechanism of energy gain, **Physical Review E**, n. 77, p. 036204, 2008.
- [7] LICHTENBERG, A. J., LIEBERMAN, M.A., **Regular and Chaotic Dynamics**. Editora Springer-Verlag, New York, 1992.
- [8] ZASLAVSKY, G. M., **Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics**. Editora Oxford University Press, New York, 2005.
- [9] OTT, E., **Chaos in Dynamical Systems**. Editora Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993.
- [10] JENSEN, R. V., Classical Chaos, **American Scientist**, n.75, p. 168, 1987.
- [11] ZASLAVSKY, G. M., Fractional kinetics, and anomalous transport, **Physics Reports**, n. 371, p. 461-580, 2002.

-
- [12] ZASLAVSKY, G. M., EDELMAN, M., Superdiffusion in the dissipative standard map, **Chaos**, n. 18, p. 033116, 2008.
- [13] SOMMERER, J. C., The End of Classical Determinism, **Johns Hopkins APL Technical Digest**, n. 16, p. 333-347, 1995.
- [14] SZEZECH, J. D., LOPES, S. R., VIANA, R. L., Finite-time Lyapunov spectrum for chaotic orbits of non-integrable Hamiltonian systems, **Physics Letters A**, n. 335, p. 394-401, 2005.
- [15] SZEZECH, J. D., LOPES, S. R., CALDAS, I. L., VIANA, R. L., MORRISON, P. J., Transport properties in nontwist area-preserving maps, **Chaos**, n. 19, p. 043108, 2009.
- [16] DULLIN, H. R., MEISS, J. D., STERLING, D., Generic twistless bifurcations, **Nonlinearity**, n. 13, p. 203-224, 2000.