

Marcos Cesar Vergès

**Bacias Crivadas e Variabilidade da Dimensão
Instável no Acoplamento de Mapas
Lineares por Partes**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana.

Curitiba - PR

2009

Aos meus pais

Sérgio Vergès Sobrinho

Lenita Bennett Vergès

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana pela orientação do trabalho.

Ao Prof. Dr. Sérgio R. Lopes pelas sugestões dadas.

Ao Colega Rodrigo F. Pereira pelas discussões dinâmicas.

Aos Professores do Departamento de Física da UFPR.

Aos Colegas da Pós-Graduação e do Grupo de Pesquisa.

À Zoraia Ribeiro dos Santos pelo carinho e companheirismo.

À Norma Einsiedel pelo apoio e ensinamentos musicais.

Aos Amigos José Luiz Melo e Norton Luiz da Cunha.

A Johann S. Bach e Heitor Villa-Lobos por sua música.

Resumo

Neste trabalho estudamos a ocorrência de bacias crivadas e variabilidade da dimensão instável no acoplamento de mapas lineares por partes. Os mapas escolhidos para esta análise foram o mapa da tenda inclinada e o mapa do bangalô, que são aproximações lineares para o mapa de Lorenz. Os motivos para esta escolha são as vantagens numéricas e analíticas obtidas, assim como a possibilidade de expandir os resultados para o próprio mapa de Lorenz. As técnicas utilizadas consistem na avaliação de expoentes de Lyapunov e autovalores de órbitas periódicas, juntamente com algumas considerações sobre atratores. Também foram necessários certos procedimentos estatísticos, tais como análise de distribuições e considerações sobre ergodicidade, principalmente no estudo da variabilidade da dimensão instável. Os resultados obtidos consistem na determinação dos pontos onde bacias crivadas e variabilidade da dimensão instável aparecem nos sistemas considerados, bem como os pontos onde a variabilidade da dimensão instável é máxima.

Abstract

In this work we consider the occurrence of riddling and unstable dimension variability in the piecewise-linear couplings. We choose for this analysis the skew tent map and the bungalow map, which are a linear approach of the Lorenz map. The reasons for this choice are the numerical and analytical advantages, as well as the possibilities to apply the conclusions to the Lorenz map. The mathematical tools consist to the computation of Lyapunov exponents, the eigenvalues of the periodic orbits and some considerations of the attractors. Some statistical procedures as the density probability analysis and the ergodic theory has been necessary to our study, mainly in the unstable dimension variability. The results obtained consist at first to the onset determination of the riddling and the unstable dimension variability, then the unstable dimension variability blowout.

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Lista de Símbolos	viii
Lista de Figuras	xiii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Revisão Bibliográfica	2
1.2.1 Bacias Crivadas	2
1.2.2 Variabilidade da Dimensão Instável	4
1.3 Organização da Tese	5
2 Conceitos Fundamentais	6
2.1 Caos em Sistemas Dinâmicos	6
2.1.1 Sistemas Dinâmicos	6
2.1.2 Sistemas Dinâmicos Caóticos	7
2.1.3 Expoentes de Lyapunov	8
2.1.4 Estabilidade de Pontos Fixos e Órbitas Periódicas	10

2.1.5	Sincronização	11
2.2	Bacias Crivadas	12
2.3	Variabilidade da Dimensão Instável	14
2.4	O Sistema de Lorenz	15
3	O Mapa da Tenda Inclinada	19
3.1	Aspectos Gerais	19
3.1.1	Equação	19
3.1.2	Pontos Fixos	20
3.1.3	Expoente de Lyapunov	21
3.2	Acoplamento de Dois Mapas da Tenda	22
3.2.1	Equações	22
3.2.2	Sincronização	24
3.3	Bacias Crivadas nas Tendias Acopladas	29
3.3.1	Versão 1	31
3.3.2	Versão 2	31
3.4	VDI nas Tendias Acopladas	32
3.4.1	Versão 1	33
3.4.2	Versão 2	35
4	O Mapa do Bangalô	43
4.1	Aspectos Gerais	43
4.1.1	Equação	43
4.1.2	Pontos Fixos	44
4.1.3	Órbita de Período Dois	45
4.1.4	Expoente de Lyapunov	46
4.2	Acoplamento de Dois Mapas do Bangalô	48

4.2.1	Equações	48
4.2.2	Sincronização	48
4.3	Bacias Crivadas nos Bangalôs Acoplados	56
4.3.1	Versão 1	57
4.3.2	Versão 2	58
4.4	VDI nos Bangalôs Acoplados	60
4.4.1	Versão 1	60
4.4.2	Versão 2	61
5	Conclusões e Perspectivas	73
5.1	Conclusões	73
5.2	Trabalhos Futuros	75
A	A Equação de Frobenius-Perron	76
A.1	Densidade Natural	76
A.2	Dedução da Equação de Frobenius-Perron	77
	Bibliografia	86
B	Produção Científica	87

Lista de Símbolos

- a Parâmetro de controle (mapa isolado)
- T_a Mapa da tenda
- f_a Mapa do bangalô
- $\delta_{1,2}$ Autovalores (mapa isolado)
- λ Expoente de Lyapunov (mapa isolado)
- S Subespaço de sincronização
- ρ, ρ_a Densidade natural
- F, G Sistemas acoplados
- δ, ε Parâmetros de acoplamento
- d Soma dos parâmetros de acoplamento
- λ_{\parallel} Expoente de Lyapunov paralelo (sistema acoplado)
- λ_{\perp} Expoente de Lyapunov transversal (sistema acoplado)
- μ_1 Autovalor paralelo (sistema acoplado)
- e_1 Autovetor paralelo (sistema acoplado)

- μ_2 Autovalor transversal (sistema acoplado)
- e_2 Autovetor transversal (sistema acoplado)
- $\lambda_{\perp}(n)$ Expoente de Lyapunov transversal a tempo n
- $P(\lambda_{\perp}(n))$ Distribuição probabilística de $\lambda_{\perp}(n)$
- $\phi(n)$ Fração positiva de $P(\lambda_{\perp}(n))$

Lista de Figuras

2.1	Solução do sistema de Lorenz a partir da condição inicial $(x_0; y_0; z_0) = (0; 1; 0)$.	17
2.2	Evolução temporal das variáveis x , y e z no sistema de Lorenz.	17
2.3	Gráficos do mapa de retorno da variável z do sistema de Lorenz (a) e do mapa da tenda (b).	18
3.1	Gráficos do mapa da tenda inclinada utilizando como parâmetros de controle os valores $a = 0,7$ (a) e $a = 0,5$ (b).	20
3.2	Gráfico do expoente de Lyapunov do mapa da tenda inclinada em função do parâmetro de controle a	23
3.3	Órbita do acoplamento de duas tendas inclinadas na versão 2, a partir da condição inicial $(x_0; y_0) = (0, 2; 0, 9)$	24
3.4	Gráfico do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} em função do parâmetro d para a versão 1 do acoplamento de duas tendas inclinadas.	27
3.5	Gráfico global no parâmetro de controle a representando os intervalos em d onde o expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} é negativo na versão 1 de acoplamento de duas tendas inclinadas.	28
3.6	Gráfico do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} em função do parâmetro d para a versão 2 do acoplamento de duas tendas inclinadas.	29

3.7	Gráfico global no parâmetro de controle a representando os intervalos em d onde o expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} é negativo na versão 2 de acoplamento.	30
3.8	Sobreposição dos gráficos do logaritmo do módulo do autovalor transversal μ_2 para os pontos fixos e do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} na versão 1 do acoplamento de duas tendas inclinadas.	32
3.9	Bacia de sincronização localmente crivada do sistema de duas tendas acopladas na versão 1, utilizando os parâmetros $a = 0,5$ e $d = 2$	33
3.10	Bacia de sincronização globalmente crivada do sistema de duas tendas acopladas na versão 1, utilizando os parâmetros $a = 0,5$ e $d = 1,8$	34
3.11	Sobreposição dos gráficos do logaritmo do valor absoluto do autovalor transversal μ_2 para os pontos fixos e do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} na versão 2 do acoplamento de duas tendas inclinadas.	35
3.12	Bacia de sincronização crivada do sistema de duas tendas acopladas na versão 2, utilizando os parâmetros $a = 0,5$ e $d = 0,6$	36
3.13	Gráfico da fração positiva ϕ dos expoentes de Lyapunov a tempo 1 para o sistema de duas tendas acopladas na versão 1.	37
3.14	Gráfico da fração positiva ϕ dos expoentes de Lyapunov a tempo 30 para o sistema de duas tendas acopladas na versão 1.	38
3.15	Gráfico global no parâmetro de controle a representando os intervalos em d para os quais ocorre VDI na versão 1 do acoplamento de duas tendas inclinadas, utilizando expoentes de Lyapunov a tempo 30.	39
3.16	Distribuições do expoente de Lyapunov a tempo 30 para o acoplamento de duas tendas inclinadas na versão 1.	40
3.17	Gráfico da fração positiva ϕ dos expoentes de Lyapunov a tempo 1 para o sistema de duas tendas acopladas na versão 2.	41

3.18	Gráfico da fração positiva ϕ dos expoentes de Lyapunov a tempo 50 para o sistema de duas tendas acopladas na versão 2.	42
4.1	Gráficos do mapa do bangalô utilizando os valores do parâmetro de controle $a = 0,2$ (a) e $a = 0,45$ (b).	44
4.2	Gráfico da segunda iterada do mapa do bangalô (a) e gráfico teia de aranha (b) destacando a localização da órbita de período dois do mapa do bangalô. .	46
4.3	Gráfico do expoente de Lyapunov do mapa do bangalô em função do parâmetro de controle a	47
4.4	Órbita do acoplamento de dois bangalôs na versão 1, a partir da condição inicial $(x_0; y_0) = (0, 1; 0, 9)$	49
4.5	Gráfico do logaritmo do módulo dos autovalores transversais para os pontos fixos do sistema de dois bangalôs acoplados na versão 1.	51
4.6	Gráfico do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} em função do parâmetro $d \equiv \delta + \varepsilon$ para a versão 1 do acoplamento de dois bangalôs.	53
4.7	Gráfico global no parâmetro de controle a representando os intervalos em d onde o expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} é negativo na versão 1 do acoplamento de dois bangalôs.	54
4.8	Gráfico do logaritmo do módulo dos autovalores transversais para os pontos fixos do sistema de dois bangalôs acoplados na versão 2.	55
4.9	Gráfico do logaritmo do módulo do autovalor transversal para a órbita de período dois do sistema de dois bangalôs acoplados na versão 2.	56
4.10	Gráfico do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} em função do parâmetro d para a versão 2 do acoplamento de dois bangalôs.	57
4.11	Gráfico global no parâmetro de controle a representando os intervalos em d onde o expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} é negativo na versão 2 do acoplamento de dois bangalôs.	58

4.12	Sobreposição dos gráficos do logaritmo do módulo do autovalor transversal μ_2 para os pontos fixos e do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} na versão 1 do acoplamento de dois bangalôs.	59
4.13	Bacia de sincronização globalmente crivada do sistema de dois bangalôs acoplados na versão 1.	60
4.14	Sobreposição dos gráficos do logaritmo do módulo do autovalor transversal μ_2 para os pontos fixos e do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} na versão 2 do acoplamento de dois bangalôs.	61
4.15	Sobreposição dos gráficos do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} e do logaritmo do módulo do autovalor transversal μ_2 para a órbita de período dois na versão 2 do acoplamento de dois bangalôs.	62
4.16	Bacia de sincronização globalmente crivada do sistema de dois bangalôs acoplados na versão 2.	63
4.17	Gráfico global no parâmetro de controle a representando os intervalos em d onde ocorrem bacias crivadas na versão 2 do acoplamento de dois bangalôs.	64
4.18	Gráfico da fração positiva ϕ dos expoentes de Lyapunov a tempo 1 para o sistema de dois bangalôs acoplados na versão 1.	65
4.19	Gráfico da fração positiva ϕ dos expoentes de Lyapunov a tempo 30 para o sistema de dois bangalôs acoplados na versão 1.	66
4.20	Distribuições do expoente de Lyapunov a tempo 100 para o acoplamento de dois bangalôs na versão 1.	67
4.21	Gráfico global no parâmetro de controle a representando os intervalos em d para os quais ocorre VDI na versão 1 do acoplamento de dois bangalôs, utilizando expoentes de Lyapunov a tempo 30.	68
4.22	Gráfico da fração positiva ϕ dos expoentes de Lyapunov a tempo 1 para o sistema de dois bangalôs acoplados na versão 2.	69

4.23	Gráfico da fração positiva ϕ dos expoentes de Lyapunov a tempo 30 para o sistema de dois bangalôs acopladas na versão 2.	70
4.24	Distribuições do expoente de Lyapunov a tempo 100 para o acoplamento de dois bangalôs na versão 2.	71
4.25	Gráfico global no parâmetro de controle a representando os intervalos em d para os quais ocorre VDI na versão 2 do acoplamento de dois bangalôs, utilizando expoentes de Lyapunov a tempo 30.	72
A.1	Dedução da equação de Frobenius-Perron.	78

Introdução

Neste primeiro capítulo apresentamos resumidamente a motivação que originou o presente trabalho, bem como os resultados que já foram publicados em artigos científicos anteriores. A estruturação dos tópicos desenvolvidos ao longo da tese é apresentada na seção 1.3.

1.1 Motivação

No processo de modelagem de situações do mundo real, muitas vezes nos deparamos com sistemas exibindo equações de difícil solução. Na maior parte dos casos, o único modo de estudar o modelo é considerar simplificações de natureza matemática e física, desprezando termos com pouca contribuição no valor dos resultados finais. Procedendo assim, perdemos um pouco da informação real do sistema, mas ganhamos em manipulação algébrica, permitindo um estudo mais detalhado.

De todos os modelos matemáticos, o mais simples de ser tratado é o *modelo linear*, que exibe derivada constante em relação à variável independente, permitindo que muitos aspectos da dinâmica de um sistema sejam de fácil manipulação matemática.

Edward N. Lorenz, em seu célebre artigo [1], simplificou a análise de seu conjunto de equações considerando um sistema unidimensional em uma das variáveis do modelo. Porém, mesmo este sistema mais simples exibia um comportamento difícil de ser analisado. A solução

por ele encontrada foi então sugerir uma aproximação linear, facilitando assim a busca de informações sobre o modelo.

Nesta atitude reside a motivação para o presente trabalho, onde consideramos sistemas lineares por partes como aproximações do sistema unidimensional de Lorenz para estudar a ocorrência de dois fenômenos que afetam profundamente a dinâmica de um sistema, a *variabilidade da dimensão instável (VDI)* e a ocorrência de *bacias de atração crivadas (riddling)*.

1.2 Revisão Bibliográfica

Os fenômenos citados na seção anterior começaram a ser investigados mais recentemente, quando a tecnologia usada nos computadores tornou-se eficiente para uma análise numérica mais precisa de sistemas dinâmicos. O fato é que na presença destes fenômenos, pequenos erros devido à aproximação e truncamento de valores podem trazer consequências graves quando se deseja seguir (“sombrear”) uma trajetória real de um sistema a partir de uma trajetória obtida via simulação numérica. Assim, a confiabilidade dos resultados torna-se duvidosa e o sistema considerado perde sua utilidade prática. Na sequência, mostramos um panorama histórico de alguns resultados já investigados envolvendo bacias crivadas e VDI.

1.2.1 Bacias Crivadas

Bacias crivadas são bacias de atração de um determinado atrator possuindo buracos que fazem parte da bacia de um outro atrator. Elas foram descritas e assim chamadas por Alexander e colaboradores em [2], onde também apresentaram uma variedade de exemplos escolhidos a partir de sistemas dinâmicos discretos. Independentemente, este fenômeno também foi observado por Pikovsky e Grassberger em [3] num estudo de sistemas acoplados. Vários autores [4, 5, 6] apresentaram um exemplo físico (partícula em movimento sobre influência de três forças) onde podem ocorrer bacias crivadas. Além disso, bacias localmente crivadas foram detectadas em sistemas dinâmicos exibindo sincronização de caos [7, 8], pro-

duzindo o que conhecemos hoje como atrator *bubbling* e intermitência *on-off* [9]. Neste último contexto, a ocorrência de bacias crivadas em modelos de circuitos eletrônicos não-lineares acoplados foi demonstrada experimentalmente [10, 11, 12]. Além disso, este tipo de bacia também pode ocorrer no espaço de parâmetros em sistemas caóticos espaço-temporais [13].

As propriedades matemáticas da transição de bacias fractais para bacias crivadas foram exploradas em [14, 15, 16]. O surgimento, num sistema, de bacias crivadas devido a uma variedade de bifurcações foi relatada em [17, 18, 19] e relacionada principalmente com a transição a um estado caótico sincronizado [20, 21, 22, 23, 24], enquanto a influência de ruído em bacias crivadas foi também investigada em [25, 26]. Várias bacias são chamadas de entrelaçadas quando cada bacia é crivada com buracos pertencentes às outras bacias [2, 27, 28].

Existe um grande número de exemplos de bacias crivadas em modelos de interesse físico e biológico. Tais bacias têm sido investigadas em sistemas mecânicos, como arcos elásticos acoplados [29], e geralmente encontradas em sistemas dinâmicos espacialmente estendidos, como redes de mapas acoplados [30]. Outras aplicações incluem modelos ecológicos populacionais [28, 31, 32], reações químicas do tipo Belousov-Zhabotinsky [33] e modelos em economia [34].

Como as condições matemáticas para a ocorrência de bacias crivadas são bastante restritivas, alguns trabalhos subsequentes encontraram situações similares à bacias crivadas em que a definição formal não é estritamente aplicável. Estas situações podem ser chamadas coletivamente de *bacias tipo-crivadas*. Nesta categoria podemos incluir a influência da quebra de simetria ou catástrofe de *riddling* [26, 35], *pseudoriddling* ou *riddling* em janelas periódicas [36, 37, 38], bacias tipo-crivadas de regime transiente [39], *riddling* prático [40, 41] e bacias crivadas por sistemas Hamiltonianos abertos [42].

1.2.2 Variabilidade da Dimensão Instável

Uma classe de sistemas dinâmicos que ocupa um lugar proeminente em dinâmica não-linear é a classe dos *sistemas hiperbólicos* [43, 44], que possuem propriedades gerais interessantes.

A VDI é um fenômeno dinâmico que produz a quebra da hiperbolicidade de um sistema [45] e uma de suas consequências particularmente problemática é a perda da capacidade de sombreamento de trajetórias ruidosas, tais como as obtidas usando computadores, onde o inevitável ruído é produzido por erros de arredondamento e truncagem.

Se a VDI é muito severa, pode acontecer que uma trajetória ruidosa não se mantenha próxima de nenhuma trajetória real do sistema por um tempo razoável. Assim, as trajetórias geradas por computador podem neste caso ser apenas artefatos numéricos sem nenhum significado relevante [46]. Então, mesmo que o sistema seja formalmente determinístico, a característica das órbitas é, na melhor das hipóteses, a de um sistema estocástico. Tais sistemas são propriamente chamados de *sistemas pseudo-determinísticos*. De fato, quando não há sombreabilidade no sistema, o modelo em questão pode ser de uso limitado e neste caso a alternativa é procurar dados experimentais para obter informações relevantes sobre a dinâmica do sistema.

A VDI foi inicialmente descrita [45] para um difeomorfismo e a primeira observação deste fenômeno para um sistema dinâmico de interesse físico foi reportada para o *mapa do rotor duplo pulsado* [47, 48]. A presença da VDI é típica em sistemas com dimensão alta, como em redes de mapas acoplados [49]. Sistemas com baixa dimensão, entretanto, também podem apresentar VDI, frequentemente com um conjunto invariante não atrativo, como por exemplo uma sela caótica [50]. A relação entre VDI e bacias crivadas e também com intermitência *on-off*, em casos onde existe um subespaço invariante contendo o conjunto caótico, é discutida em [35] e [51], respectivamente.

Embora o mecanismo para a emergência da VDI já ter sido estudado em mapas quadráti-

cos acoplados [52], ainda não há um completo entendimento sobre as circunstâncias pelas quais a VDI aparece num sistema dinâmico quando um parâmetro varia. Parece natural, entretanto, que este *onset* esteja vinculado a alguma bifurcação resultante da mudança de estabilidade de um ponto fixo ou órbita periódica, no sentido que alguma autodireção estável torna-se instável, aumentando a dimensão do subespaço instável em uma unidade. A busca por esta bifurcação tem sido o tema de muitos trabalhos anteriores [35, 47, 53]. Mais recentemente, questões sobre o *onset* da VDI e onde ela é mais intensa (*blowout*) foram analisadas em trabalhos do grupo de dinâmica não-linear da Universidade Federal do Paraná [35, 51, 53, 54, 55, 56, 57].

1.3 Organização da Tese

O presente trabalho tem como objetivo o estudo de bacias crivadas e VDI no acoplamento de dois mapas lineares por partes, primeiramente com o mapa da tenda inclinada e depois com o mapa do bangalô.

No capítulo 2 fazemos inicialmente uma exposição geral sobre a teoria do caos em sistemas dinâmicos, enfocando principalmente as técnicas que serão utilizadas nos outros capítulos. Na sequência, abordamos de uma forma mais rigorosa os conceitos de bacia crivada e VDI.

Nos capítulos 3 e 4 fazemos uma exposição detalhada dos mapas da tenda inclinada e do bangalô, respectivamente, analisando também aspectos de acoplamento, sincronização, bacias crivadas e VDI nestes sistemas. As conclusões finais sobre este trabalho são apresentadas no capítulo 5.

Um resultado teórico usado no texto é enunciado no apêndice A e finalmente, no apêndice B, mostramos dois trabalhos publicados com material desta tese.

Conceitos Fundamentais

Com o intuito de analisar detalhadamente as evidências do aparecimento de bacias crivadas e VDI nos sistemas considerados, apresentamos neste capítulo alguns conceitos e técnicas que serão abordados no texto.

2.1 Caos em Sistemas Dinâmicos

2.1.1 Sistemas Dinâmicos

Um *sistema dinâmico* [44, 58] consiste de um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, com algumas grandezas que caracterizam o sistema variando no tempo. Para indicar o modo como um elemento deste conjunto é obtido em função das anteriores, o sistema possui uma regra que na maior parte dos casos é uma expressão matemática. A partir desta caracterização, podemos classificar os sistemas dinâmicos de várias maneiras.

Quanto ao tipo de modelo, um sistema dinâmico pode ser *linear* ou *não-linear*. Nos sistemas lineares, um elemento pode ser obtido através de uma combinação linear dos elementos anteriores, enquanto que os não-lineares podem exibir outros tipos de combinação. Neste trabalho tratamos com sistemas que são lineares, mas apresentando equações diferentes em

vários intervalos ao longo do domínio. Este tipo de sistema é chamado *linear por partes*.

Uma grande parte dos sistemas dinâmicos de interesse físico usam como variável temporal um número inteiro. Neste caso o sistema é denominado de tempo discreto, ou *mapa*, como aqueles que estudaremos adiante. Se, por outro lado, o tempo varia no conjunto dos números reais, então o sistema é chamado de tempo contínuo ou *fluxo*.

Na teoria dos sistemas dinâmicos estamos interessados, particularmente, no modo como certas grandezas, que são as variáveis dependentes, evoluem no tempo. No entanto, existem outras grandezas que não dependem do tempo, mas alterações nos seus valores geram mudança de comportamento no sistema. Chamamos estas grandezas de *parâmetros de controle*. Neste sentido, é importante conhecer não somente a evolução temporal de um sistema, mas também a dependência deste em relação aos parâmetros de controle.

Frequentemente, no espaço de fase de um sistema dinâmico, encontramos um conjunto de pontos que chamamos de *atrator* [59], que possui a propriedade de atrair para si um conjunto de condições iniciais, cujas trajetórias permanecem próximas a ele, mesmo na presença de pequenas perturbações. Um atrator possui características bem definidas, como o fato de ser invariante (ao iterarmos um ponto do atrator o resultado permanece no atrator para um tempo infinito) e mínimo (não existe um subconjunto do atrator com as mesmas propriedades).

2.1.2 Sistemas Dinâmicos Caóticos

O estudo de sistemas ditos caóticos ocupa um papel importante na descrição de fenômenos físicos, visto que a maior parte dos modelos utilizados apresentam caos.

O caos foi detectado pela primeira vez nos trabalhos de Poincaré [60] e Hadamard [61], e então vários sistemas com as mesmas características foram analisados em trabalhos posteriores [1, 62, 63, 64].

Existem várias definições de caos no que se refere ao estudo de sistemas dinâmicos, cada

uma delas dependendo da maneira como ele aparece no sistema. Detectamos o caos através de suas consequências, que são aperiodicidade e sensibilidade em relação às condições iniciais [65].

2.1.3 Expoentes de Lyapunov

O procedimento clássico para se detectar a presença de caos em sistemas dinâmicos consiste em calcular a média pela qual trajetórias divergem umas das outras. Esta média, conhecida como *expoente de Lyapunov*, será extensivamente usada neste trabalho. A seguir, apresentamos a metodologia para o cálculo do expoente de Lyapunov para mapas unidimensionais e N -dimensionais [66].

Expoente de Lyapunov para um Mapa Unidimensional

Consideremos, num mapa unidimensional f , as trajetórias x_k e y_k , começando, respectivamente, a partir de x_0 e y_0 . Deste modo, até um tempo k qualquer, podemos escrever

$$|x_{j+1} - y_{j+1}| \simeq |f'(x_j)| |x_j - y_j| \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, k-1, \quad (2.1)$$

onde $f'(x)$ denota a derivada de f no ponto x . Então

$$|x_k - y_k| \simeq |f'(x_{k-1})| |f'(x_{k-2})| \cdots |f'(x_0)| |x_0 - y_0|, \quad (2.2)$$

ou equivalentemente

$$|x_k - y_k| \simeq e^{\lambda k} |x_0 - y_0|, \quad (2.3)$$

onde

$$\lambda = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln |f'(x_j)|. \quad (2.4)$$

Esta expressão informa a taxa média de divergência (se $\lambda > 0$), ou convergência (se $\lambda < 0$) entre duas trajetórias, durante o intervalo de tempo $[0; k]$, e define λ como o *expoente de Lyapunov a tempo finito*. Porém, estamos interessados nesta taxa média quando o tempo

k cresce indefinidamente, logo, introduzimos um limite nesta expressão definindo o *expoente de Lyapunov a tempo infinito*, ou simplesmente, *expoente de Lyapunov*, dado por

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln |f'(x_j)| \right], \quad (2.5)$$

desde que a expressão em colchetes esteja bem definida e o limite exista.

As condições de definição e existência acima são garantidas para quase todas as trajetórias, utilizando o *teorema ergódico de Birkhoff* [67, 68].

A existência do limite na equação 2.5 e sua independência, até um certo grau, de uma trajetória particular, está vinculada à presença de uma *densidade natural* [A], garantida em nossos sistemas pelo *teorema de Krylov-Bogolyubov* [69].

Assim, é possível definir o expoente de Lyapunov de um modo alternativo, sem recorrer ao limite em 2.5. A nova expressão é enunciada da seguinte forma:

Suponha $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continuamente diferenciável, exceto para um número finito de pontos. Seja $\rho(x)$ a densidade natural da função f . Então, para quase todas as condições iniciais, o expoente de Lyapunov existe e tem como valor

$$\lambda = \int_0^1 \rho(x) \ln |f'(x)| dx. \quad (2.6)$$

Notemos que o expoente de Lyapunov acima fornece um valor não para todas, mas somente para quase todas as trajetórias.

Expoentes de Lyapunov para um Mapa N-dimensional

Quando a dimensão N de um mapa é maior do que 1, a equação 2.5 não pode mais ser usada, pois a derivada agora é substituída pela matriz jacobiana do sistema. Ainda assim é possível fazer uma adaptação, definindo os expoentes de Lyapunov de uma trajetória \mathbf{x}_k obtida por iteração de um mapa $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ como sendo os N autovalores da matriz

$$\Lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \ln [D_k^T D_k], \quad (2.7)$$

desde que D_k esteja bem definida e o limite exista. Aqui D^T denota a transposta de D e

$$D_k = \frac{\partial H}{\partial x}(\mathbf{x}_{k-1}) \frac{\partial H}{\partial x}(\mathbf{x}_{k-2}) \dots \frac{\partial H}{\partial x}(\mathbf{x}_0), \quad (2.8)$$

onde $\frac{\partial H}{\partial x}(\mathbf{x}_j)$ é a matriz jacobiana de H no ponto \mathbf{x}_j .

Para dimensão $N = 1$ existe apenas um expoente de Lyapunov e a expressão 2.7 se reduz à 2.5.

2.1.4 Estabilidade de Pontos Fixos e Órbitas Periódicas

Dado um mapa unidimensional f qualquer, os pontos p no domínio que cumprem a condição $f(p) = p$ são chamados de *pontos fixos*. Um ponto fixo é denominado *estável* quando pontos na sua vizinhança tendem a se aproximar dele sob a dinâmica do mapa. Para um ponto fixo *instável*, pontos na sua vizinhança tendem a se afastar cada vez mais.

Questões envolvendo a estabilidade de pontos fixos são cruciais no estudo de sistemas dinâmicos, visto que modelos realísticos estão constantemente sujeitos a pequenas perturbações. Nesta situação, se um estado estacionário real do modelo for representado por um ponto fixo instável do sistema, pequenos erros ou perturbações muito comuns em simulação computacional podem direcionar a órbita para longe do ponto fixo.

Para decidir sobre a estabilidade de um certo ponto fixo p de um mapa suave f sobre \mathbb{R} , basta calcular o valor $|f'(p)|$ [44]:

- Se $|f'(p)| < 1$, então p é um ponto fixo estável.
- Se $|f'(p)| > 1$, então p é um ponto fixo instável.

Um ponto p no domínio do mapa que cumpre a condição $f^k(p) = p$ para algum k inteiro positivo, com $f^i(p) \neq p$ para $1 \leq i \leq k - 1$, é denominado *ponto periódico de período k* e a órbita com condição inicial p consistindo de k pontos é chamada de *órbita periódica de período k* .

O resultado acima sobre estabilidade pode ser estendido para órbitas periódicas de período k , visto que todo ponto p nesta órbita é um ponto fixo do mapa f^k , ou seja, $f^k(p) = p$. Assim, podemos reescrever a regra acima na seguinte forma [44]:

Seja f um mapa suave sobre \mathbb{R} , e assumamos que $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ seja uma órbita de período k de f :

- Se $|f'(p_1)f'(p_2) \dots f'(p_k)| < 1$, então a órbita é estável.
- Se $|f'(p_1)f'(p_2) \dots f'(p_k)| > 1$, então a órbita é instável.

Quando a dimensão do mapa considerado é um número $N > 1$, não podemos mais aplicar as condições acima pois, como vimos no caso dos expoentes de Lyapunov, a derivada do mapa é substituída pela matriz Jacobiana. No entanto, aqui também é possível fazer uma adaptação destas condições para um mapa N -dimensional, considerando sua matriz jacobiana D e respectivos autovalores/autovetores μ_i e v_i calculados no ponto periódico p , respectivamente, onde $i = \{1, \dots, N\}$.

Seja então H um mapa N -dimensional, e assumamos que p é um ponto fixo de H [43]:

- Se $|\mu_i| < 1$, então p é um ponto fixo estável na direção do autovetor v_i .
- Se $|\mu_i| > 1$, então p é um ponto fixo instável na direção do autovetor v_i .

2.1.5 Sincronização

Uma classe de sistemas dinâmicos de grande interesse em física são os *sistemas acoplados*, que consistem de um certo número de sistemas dinâmicos que interagem entre si. Normalmente o acoplamento destes sistemas é regulado por um parâmetro de controle que chamamos *parâmetro de acoplamento* ou *força de acoplamento*, e sua variação muitas vezes produz consequências interessantes no sistema acoplado.

Embora sistemas caóticos exibam extrema sensibilidade em relação às condições iniciais, dois ou mais sistemas idênticos acoplados podem sincronizar suas trajetórias de modo que elas possuam os mesmos valores nas variáveis dinâmicas.

Consideremos, por exemplo [70], N sistemas idênticos a tempo discreto acoplados tal como uma cadeia de osciladores, cada um caracterizado pelo vetor de estado D -dimensional $\mathbf{x}_t^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Estes sistemas estão *completamente sincronizados* se

$$\mathbf{x}_t^{(1)} = \mathbf{x}_t^{(2)} = \dots = \mathbf{x}_t^{(N)} = \mathbf{s}(t), \quad (2.9)$$

representando um conjunto de $N - 1$ equações que definem um *subespaço de sincronização* S , que é um subconjunto D -dimensional do espaço de fase ND -dimensional. A existência do subespaço de sincronização depende das propriedades de acoplamento do sistema.

Neste trabalho analizaremos, entre outras coisas, condições para que ocorra sincronização nos sistemas que iremos definir.

2.2 Bacias Crivadas

Sistemas caóticos apresentando características especiais podem possuir bacias de atração extremamente entrelaçadas. Este fenômeno tem sido chamado de *riddling* e o efeito que ele provoca num sistema dinâmico é a produção de *bacias crivadas* [70]. Neste sentido, um sistema pode possuir um atrator caótico A cuja bacia de atração é crivada com buracos pertencentes à bacia de um outro atrator (não necessariamente caótico) B .

As consequências físicas do *riddling* podem ser bastante sérias em termos de nossa habilidade de prever para qual atrator uma trajetória do sistema se aproxima. Para ver isso, consideremos um ponto P arbitrário pertencente à bacia do atrator caótico A . Agora, se a bacia de A é crivada pela bacia do outro atrator B , então qualquer vizinhança de P possui uma fração não nula de seu volume pertencente à bacia de B . Deste modo, se consideramos esta vizinhança como uma pequena tolerância na determinação numérica ou experimental

de P a partir de uma condição inicial, o ponto resultante da trajetória sempre possui uma probabilidade positiva de estar na bacia do outro atrator. Em outras palavras, a probabilidade de escape da bacia do atrator A é não nula para qualquer vizinhança em torno de um ponto. Conseqüentemente, prever qual será o estado final do sistema torna-se bastante difícil.

As condições necessárias para a ocorrência de bacias crivadas num sistema dinâmico são [9]:

1. A existência de um subespaço invariante com dimensão menor do que a do espaço de fase;
2. A existência de um atrator caótico A referente à dinâmica dentro do subespaço invariante;
3. A existência de outro atrator B , caótico ou não, e não pertencente ao subespaço invariante;
4. O atrator A deve ser transversalmente estável no espaço de fase, ou seja, considerando órbitas típicas no atrator, os expoentes de Lyapunov para perturbações infinitesimais ao longo de direções transversais ao subespaço invariante devem ser todos negativos;
5. A existência de um conjunto transversalmente instável de órbitas periódicas instáveis imersas no atrator caótico A .

Uma simples inspeção na dinâmica do sistema revela a existência ou não dos elementos necessários para satisfazer as condições 1 e 2. Para que a condição 3 seja satisfeita deve existir outro atrator B fora do subespaço invariante. Nesta situação, dizemos que a bacia de atração, quando existe, é *globalmente crivada*. Entretanto, existem muitas situações para as quais não há tal atrator, mas as trajetórias que estão fora do subespaço invariante permanecem vagando pelo espaço de fase por um tempo arbitrariamente longo antes de retornarem ao

subespaço invariante. Neste caso, a bacia de atração resultante é dita *localmente crivada* e consideramos este regime transiente não sincronizado como um segundo comportamento possível, atribuindo-lhe as propriedades do segundo atrator B . As condições 4 e 5 são verificadas avaliando-se os expoentes de Lyapunov e os autovalores das órbitas periódicas imersas no subespaço invariante.

Estes procedimentos serão utilizados adiante para averiguar a existência ou não de bacias crivadas em nossos sistemas.

2.3 Variabilidade da Dimensão Instável

Um atrator caótico no subespaço de sincronização possui um número infinito de órbitas periódicas instáveis imersas nele e sua estabilidade transversal é dada pela relativa contribuição destas órbitas. Deste modo, mesmo que o subespaço de sincronização seja transversalmente estável, podem existir órbitas periódicas transversalmente instáveis imersas nele. Reciprocamente, um espaço de sincronização transversalmente instável também pode apresentar órbitas caóticas transversalmente estáveis.

A *variabilidade da dimensão instável (VDI)* é um fenômeno que ocorre quando temos, no mesmo atrator caótico, órbitas periódicas instáveis possuindo números diferentes de dimensões instáveis. Isto viola a continuidade entre direções estáveis e instáveis ao longo de uma trajetória, que é uma propriedade fundamental nos conjuntos hiperbólicos.

Um modo quantitativo de caracterizar a VDI é calcular o expoente de Lyapunov a tempo finito $\lambda_{\perp}(n)$ das órbitas imersas no subespaço de sincronização. Na presença da VDI a distribuição probabilística deste expoente de Lyapunov em relação às órbitas flutua em torno de zero devido à visitas da trajetória a regiões do atrator no subespaço de sincronização com um número variável de direções estáveis e instáveis [48]. Deste modo, é útil considerar a função de distribuição probabilística para o expoente a tempo finito $P(\lambda_{\perp}(n))$, a partir do

qual podemos obter o valor médio deste expoente:

$$\langle \lambda_{\perp}(n) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_{\perp}(n) P(\lambda_{\perp}(n)) d\lambda_{\perp}(n). \quad (2.10)$$

Onde existe VDI no sistema, esta distribuição deve conter valores tanto positivos quanto negativos de $\lambda_{\perp}(n)$. Isto implica que existe uma fração positiva de valores positivos de $\lambda_{\perp}(n)$ para condições iniciais randomicamente escolhidas no espaço de fase, dada por

$$\phi(n) = \int_0^{\infty} P(\lambda_{\perp}(n)) d\lambda_{\perp}(n) > 0. \quad (2.11)$$

Se a distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito é tal que metade de seus valores é positivo, ou seja $\phi(n) = 1/2$, então a VDI é mais intensa (*blowout*), e as consequências em termos de sombreamento de trajetórias são mais severas.

Usando estes argumentos, estaremos interessados em avaliar a ocorrência de VDI nos sistemas lineares por partes a serem definidos adiante, quando um certo parâmetro do sistema variar.

2.4 O Sistema de Lorenz

O artigo publicado por Lorenz em 1963 [1] revolucionou a pesquisa em dinâmica não-linear, por mostrar evidências numéricas da presença de caos em um sistema dinâmico.

Na esperança de encontrar um modelo matemático que reproduzisse com fidelidade os fenômenos meteorológicos, Lorenz trabalhou inicialmente num sistema de 12 equações diferenciais de primeira ordem, que ele considerava mais adequado do que o modelo linear usado na época. Porém, a dificuldade técnica de tratar este sistema o levou a estudar um conjunto mais simples de 7 equações que estava sendo investigado por B. Salzman [71]. Simplificando o modelo de Salzman para um sistema de apenas 3 equações, Lorenz constatou numericamente no seu computador *Royal McBee LGP-30* a presença de aperiodicidade e sensibilidade em relação às condições iniciais nas suas soluções, sintomas que indicam a presença do que mais tarde seria chamado de *caos*.

Este sistema, conhecido hoje como *Sistema de Lorenz*, é dado pelas equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (2.12)$$

onde σ é o *número de Prandtl*. Aqui, r e b são parâmetros relacionados com a diferença de temperatura entre as camadas de ar e as dimensões do sistema, respectivamente.

A variável x é proporcional à intensidade da convecção na massa de ar, enquanto que a variável y é proporcional à diferença de temperatura entre as correntes de ar ascendente e descendente. Finalmente, a variável z é proporcional à distorção do perfil vertical da temperatura em relação ao perfil linear.

Com o intuito de analisar uma solução numérica deste sistema, Lorenz usou como parâmetros os valores $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$, constatando os sintomas caóticos descritos acima. A figura 2.1 exibe a solução do sistema de Lorenz utilizando estes valores a partir da condição inicial $(x_0; y_0; z_0) = (0; 1; 0)$.

Este gráfico, cuja forma lembra as asas de uma borboleta, é um esboço do atrator deste sistema. A evolução temporal das variáveis x , y e z está ilustrada na figura 2.2.

Para argumentar que o atrator na figura 2.1 é aperiódico, Lorenz decidiu examinar o comportamento dos sucessivos máximos locais M_n da coordenada z de uma trajetória, com $n \in \mathbb{N}$. Assim, ele fez uma interessante descoberta: Se plotamos o máximo M_{n+1} como função f do máximo M_n para cada $n \in \mathbb{N}$, surge um diagrama bastante simples ao qual chamamos de *mapa de retorno*, ilustrado na figura 2.3(a).

Este mapa de retorno, conhecido hoje como *mapa de Lorenz* é na verdade um sistema dinâmico unidimensional. A idéia de Lorenz era então reduzir o problema da aperiodicidade do atrator à mesma questão sobre este mapa. Como podemos observar na figura 2.3, o mapa f possui similaridades com o mapa da tenda T_a , que veremos adiante. Esta semelhança permitiu a Lorenz sugerir este último como uma aproximação linear para o mapa f . Agora,

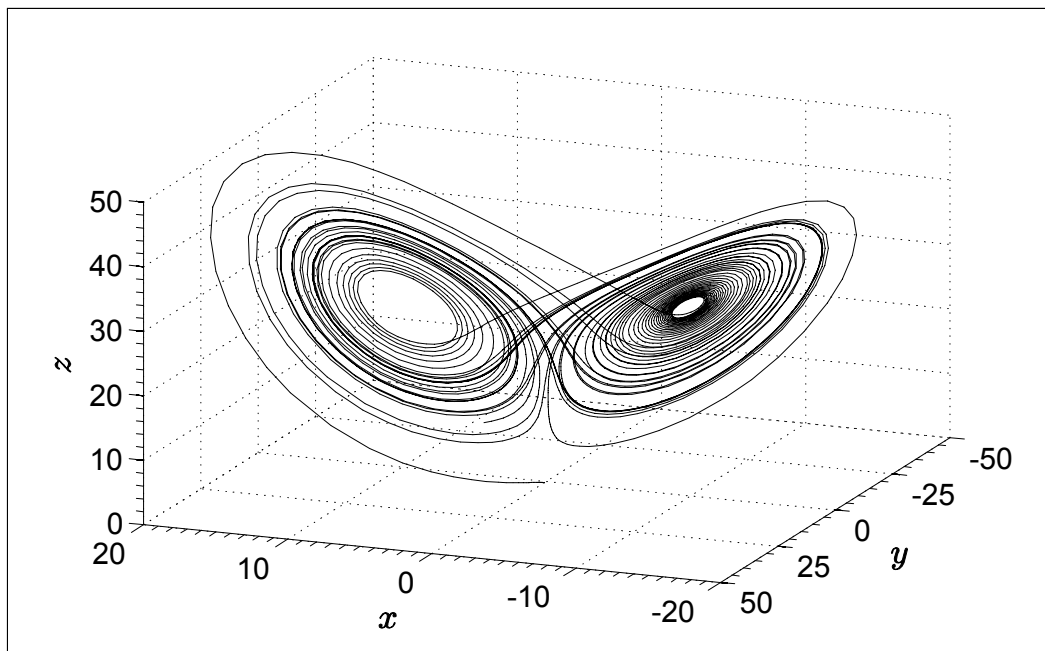


Figura 2.1: Solução do sistema de Lorenz a partir da condição inicial $(x_0; y_0; z_0) = (0; 1; 0)$, utilizando os parâmetros $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$.

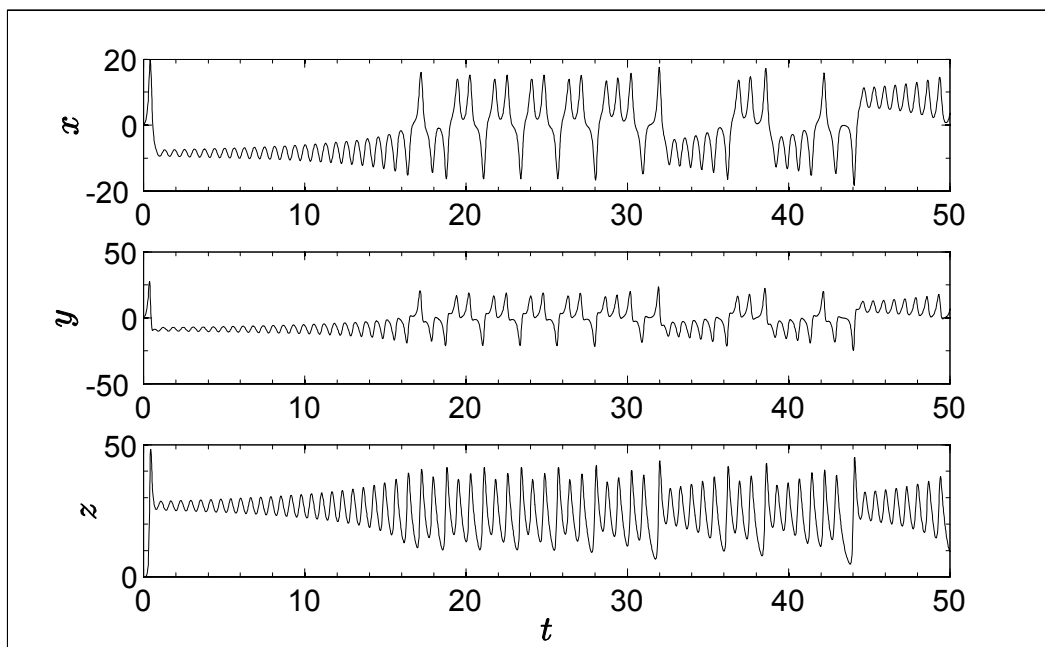


Figura 2.2: Evolução temporal das variáveis x , y e z no sistema de Lorenz, utilizando os parâmetros $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$.

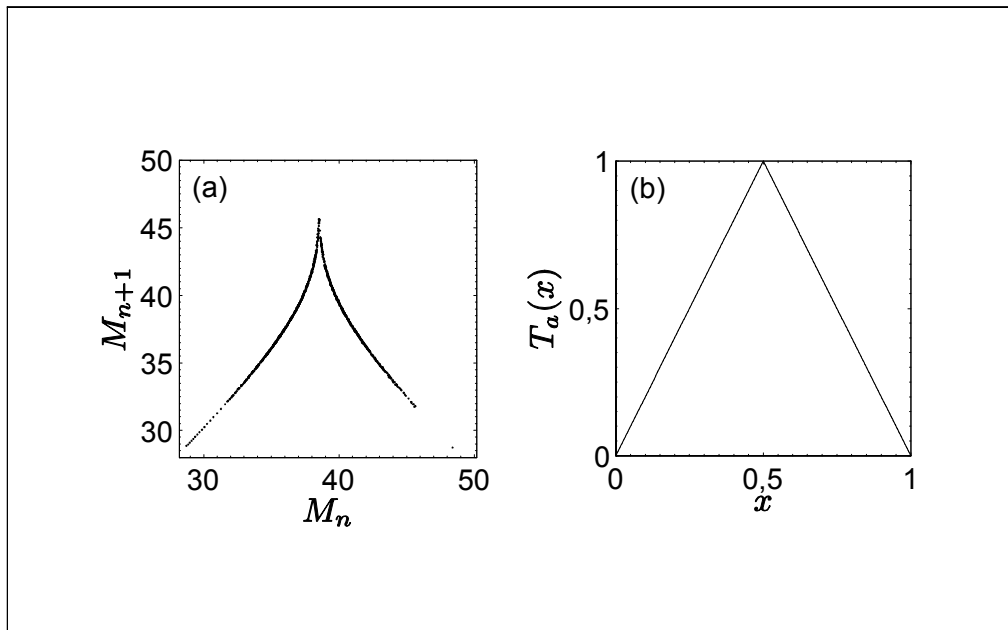


Figura 2.3: Gráficos do mapa de retorno da variável z do sistema de Lorenz (a) e do mapa da tenda (b). O mapa de retorno (a) é obtido plotando-se o máximo local M_{n+1} como função do máximo local M_n , na variável z , para cada $n \in \mathbb{N}$.

o valor absoluto da inclinação das partes lineares do mapa da tenda é maior do que 1 em todos os pontos, logo qualquer órbita periódica deve ser instável, pois a derivada de f^k em qualquer ponto da órbita periódica deve ser um produto de fatores maiores do que 1. Assim, Lorenz concluiu que a forma do mapa de retorno z torna impossível a existência de uma órbita periódica atratora.

Nos próximos capítulos estudaremos a ocorrência de bacias crivadas e VDI em dois mapas lineares por partes, a saber, o mapa da tenda inclinada, que é uma generalização do mapa da tenda e o mapa do bangalô.

O Mapa da Tenda Inclinada

Neste capítulo introduzimos em detalhes o mapa da tenda inclinada. Após uma discussão sobre as principais características deste sistema, consideramos o acoplamento de duas tendas e procedemos com a análise da sincronização de trajetórias, a ocorrência de bacias crivadas e VDI.

3.1 Aspectos Gerais

3.1.1 Equação

O mapa da tenda inclinada [66] é um sistema dinâmico unidimensional $T_a : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ controlado por um parâmetro real $a \in (0; 1)$, linear por partes nos intervalos $[0; a)$ e $[a; 1]$.

A equação que define este mapa é dada por

$$T_a(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} & \text{se } x \in [0; a), \\ \frac{1-x}{1-a} & \text{se } x \in [a; 1]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Notemos que o parâmetro a controla a posição da “ponta” da tenda e que a terminologia usada é sugerida pela forma apresentada no gráfico deste sistema, mostrado na figura 3.1, onde utilizamos os valores (a) $a = 0,7$ e (b) $a = 0,5$; respectivamente.

Para este capítulo utilizaremos sempre o valor $a = 0,5$ nas figuras e simulações numéri-

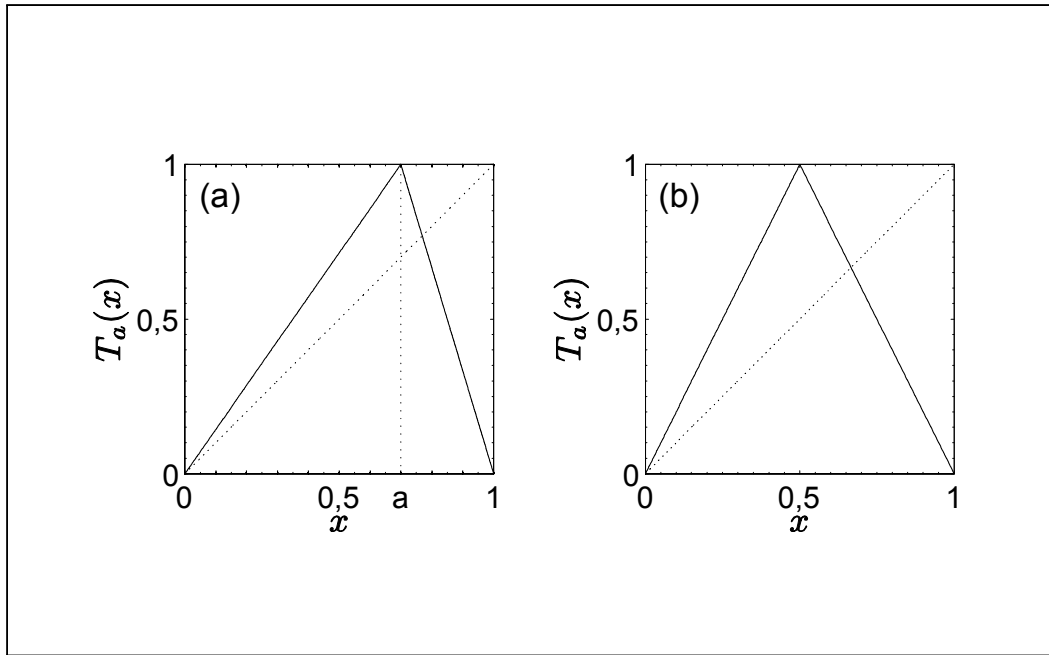


Figura 3.1: Gráficos do mapa da tenda inclinada utilizando como parâmetros de controle os valores $a = 0,7$ (a) e $a = 0,5$ (b). Na interseção dos gráficos com a diagonal do quadrado $[0; 1] \times [0; 1]$ encontramos os pontos fixos, dados por $x_1^* = 0$ e $x_2^* = 1/(2 - a)$.

cas, obtendo assim uma aproximação em relação ao mapa de Lorenz.

3.1.2 Pontos Fixos

Os pontos fixos do mapa da tenda inclinada são obtidos pela solução da equação $T_a(x^*) = x^*$. Fazendo isto, encontramos os seguintes pontos: $x_1^* = 0$, pertencente ao intervalo $[0; a)$ e $x_2^* = \frac{1}{2-a}$, pertencente ao intervalo $[a; 1]$. Com relação à estabilidade, estes pontos fixos são ambos *instáveis*, pois seus autovalores, dados respectivamente por

$$\delta_1 = \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad \delta_2 = -\frac{1}{1-a} \quad (3.2)$$

cumprem a condição

$$1 < |\delta_1| \leq |\delta_2|. \quad (3.3)$$

Na figura 3.1 estes pontos se localizam na interseção do gráfico do mapa com a diagonal do quadrado $[0; 1] \times [0; 1]$.

3.1.3 Expoente de Lyapunov

A linearidade por partes do mapa da tenda inclinada oferece grandes facilidades no cálculo de expoentes de Lyapunov [66] para as trajetórias, pois $T'_a(x)$ é constante em cada um dos intervalos na definição do mapa. Deste modo podemos encontrar os limites inferior e superior para o expoente de Lyapunov de qualquer trajetória do mapa conhecendo-se apenas o valor do parâmetro a . Isto é feito lembrando-se que para pontos no subintervalo $[0, a)$, temos $|T'_a(x)| = \frac{1}{a}$ e que para pontos no subintervalo $[a; 1]$, temos $|T'_a(x)| = \frac{1}{1-a}$. Assim, aplicando o *teorema ergódico de Birkhoff* e procedendo com o método para o cálculo do expoente de Lyapunov descrito na seção 2.1 do capítulo 2, obtemos:

$$\lambda_{[0;a)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln \left| \frac{1}{a} \right| \right] = -\ln(a), \quad (3.4)$$

$$\lambda_{[a;1]} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln \left| -\frac{1}{1-a} \right| \right] = -\ln(1-a).$$

Estes valores cumprem a condição $0 < -\ln(a) \leq -\ln(1-a)$, visto que $1 < \frac{1}{a} \leq \frac{1}{1-a}$. Como trajetórias suficientemente longas possuem pontos de ambos os intervalos, temos, de um modo geral, uma situação intermediária, ou seja

$$0 < -\ln(a) \leq \lambda \leq -\ln(1-a), \quad (3.5)$$

o que indica a presença de caos para qualquer valor permitido do parâmetro a . Em particular, fazendo $a = 0,5$; os limites inferior e superior coincidem no valor $\lambda = \ln(2) = 0,6931$; que representa o maior expoente de Lyapunov possível para este tipo de mapa.

Agora, para as considerações que faremos adiante, é necessário obter um valor do expoente de Lyapunov para trajetórias mais longas do mapa da tenda inclinada. Para isso devemos obter primeiramente a *densidade natural* ρ_a de pontos sobre o intervalo $[0; 1]$ resolvendo a *equação de Frobenius-Perron* [A]:

$$\rho_a(x) = \int_0^1 \rho_a(y) \delta(x - T_a(y)) dy, \quad (3.6)$$

da qual resulta a igualdade [66]

$$\rho_a(x) = a\rho_a(ax) + (1-a)\rho_a(1-(1-a)x), \quad (3.7)$$

cuja solução é a função constante $\rho_a(x) = k$. Para facilitar os cálculos utilizaremos, sem perda de generalidade, $k = 1$.

De posse desta densidade natural, calculamos agora o expoente de Lyapunov através da equação

$$\lambda(a) = \int_0^1 \rho_a(x) \ln |T'(x)| dx, \quad (3.8)$$

cujos resultados são dados por

$$\lambda(a) = -a \ln(a) - (1-a) \ln(1-a). \quad (3.9)$$

No caso especial em que $a = 0,5$; obtemos $\lambda = \ln(2)$, concordando com o valor encontrado anteriormente. Vale observar que o expoente de Lyapunov do mapa da tenda inclinada exibe uma dependência contínua e suave em relação ao parâmetro de controle a [72], o que ilustramos na figura 3.2.

3.2 Acoplamento de Dois Mapas da Tenda

3.2.1 Equações

Usando os dados gerais e características do mapa da tenda, vamos agora acoplar dois destes mapas [66] utilizando duas formas diferentes de acoplamento. Isto produz dois mapas bidimensionais, F e G , dados pelas equações 3.10:

$$\text{Versão 1: } \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_a(x_k) + (y_k - x_k) \delta \\ T_a(y_k) + (x_k - y_k) \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\text{Versão 2: } \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_a(x_k + (y_k - x_k) \delta) \\ T_a(y_k + (x_k - y_k) \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

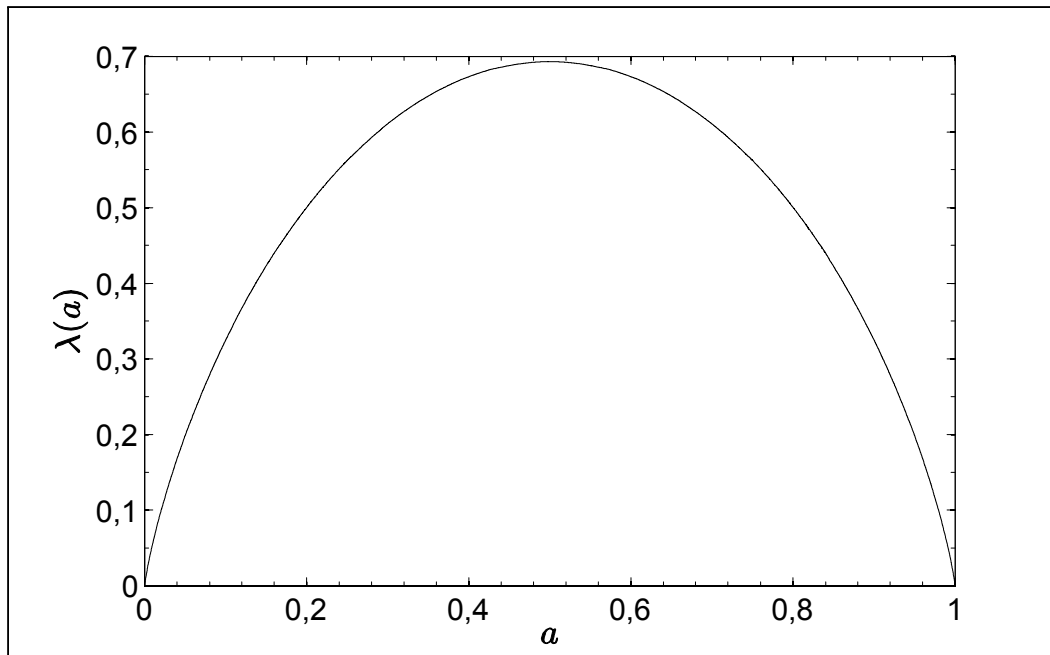


Figura 3.2: Gráfico do expoente de Lyapunov do mapa da tenda inclinada em função do parâmetro de controle a . Esta dependência é uma função contínua e suave.

Os dois parâmetros de acoplamento δ e ε podem tomar quaisquer valores. Como veremos adiante, o comportamento qualitativo do sistema depende essencialmente da soma $d \equiv \delta + \varepsilon$.

A diferença fundamental entre as duas formas de acoplamento reside no fato de que no mapa F aplicamos inicialmente o mapa da tenda para depois proceder com o acoplamento, enquanto que no mapa G acoplamos primeiramente para depois aplicar o mapa da tenda. Se fazemos $\delta = 0$, x_k não é influenciado por y_k , mas a menos que $\varepsilon = 0$, x_k influencia y_k .

Observe que o mapa F não deixa o quadrado $[0; 1] \times [0; 1]$ invariante, a não ser que δ e ε sejam ambos nulos, ao passo que G deixa o quadrado invariante quando $\delta \geq 0$ e $\varepsilon \geq 0$. Então, para obter F e G como funções bem definidas em \mathbb{R}^2 faz-se necessário estender o domínio do mapa da tenda inclinada para todo número real, omitindo as restrições $0 \leq x$ e $x \leq 1$ na equação 3.1.

3.2.2 Sincronização

Para a análise de sincronização [66], notemos primeiramente que tanto F quanto G deixam o conjunto

$$S = \{(x; y) \mid 0 \leq x = y \leq 1\} \subset [0; 1] \times [0; 1] \quad (3.11)$$

invariante, pois neste segmento temos $y_k - x_k = x_k - y_k = x_k - x_k = 0$. A reta $x = y$ é o subespaço de \mathbb{R}^2 onde os dois sistemas dinâmicos $x_{k+1} = T_a(x_k)$ e $y_{k+1} = T_a(y_k)$ estão sincronizados, por isso, dizemos que qualquer trajetória que começa em algum lugar do plano, mas que converge para o subespaço $x = y$, *sincroniza*. Na figura 3.3 representamos uma órbita do mapa G (versão 2 de acoplamento) que sincroniza enquanto permanece caótica. Observe que, dentro de S , a dinâmica é unidimensional, dada pelas iterações do mapa T_a .

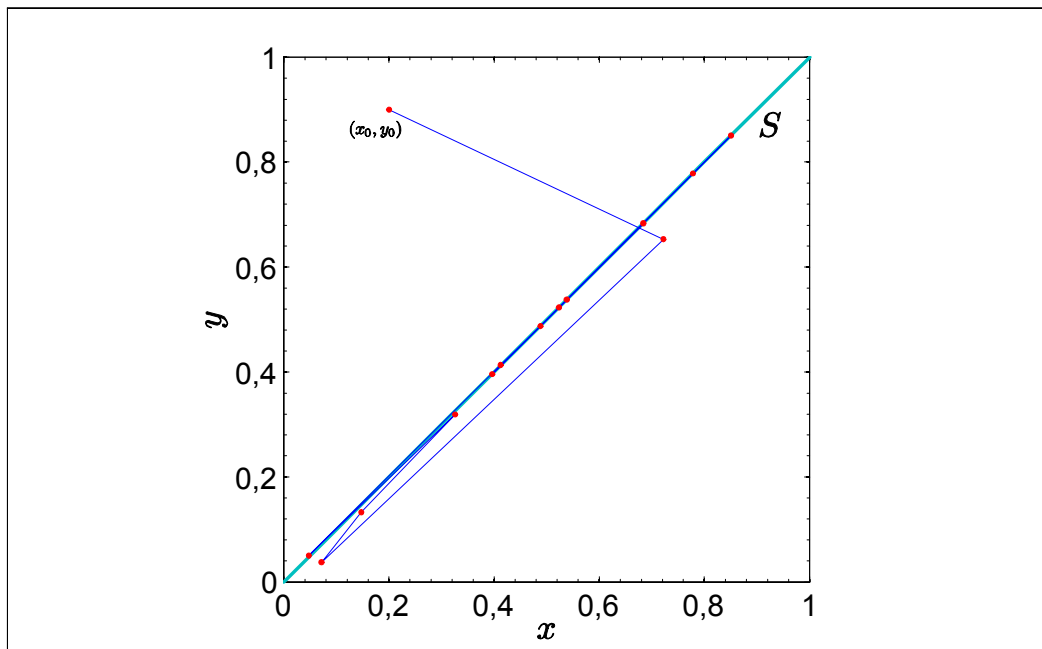


Figura 3.3: Órbita do acoplamento de duas tendas inclinadas na versão 2, a partir da condição inicial $(x_0; y_0) = (0,2; 0,9)$, usando como parâmetro de controle o valor $a = 0,5$. A diagonal do quadrado $[0; 1] \times [0; 1]$ é o espaço de sincronização S .

A questão que colocamos agora é decidir para quais condições iniciais em $[0; 1] \times [0; 1]$ a sincronização ocorre, ou equivalentemente, para quais condições iniciais as respectivas tra-

jetórias convergem para S . Para responder a esta questão, vamos considerar novamente os expoentes de Lyapunov como uma medida da convergência ou divergência entre as órbitas. Como nossos mapas agora são bidimensionais, calcularemos os expoentes de Lyapunov usando o método para sistemas N -dimensionais que descrevemos na seção 2.1 do capítulo 2. Apresentaremos os resultados primeiramente na versão 1 de acoplamento, para depois analisarmos a versão 2.

Versão 1

Na versão 1 de acoplamento, a matriz Jacobiana do sistema é dada por

$$DF = \begin{pmatrix} c - \delta & \delta \\ \varepsilon & c - \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

onde

$$c = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{se } x < a, \\ -\frac{1}{1-a} & \text{se } x \geq a. \end{cases} \quad (3.13)$$

Os autovetores são

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \delta \\ -\varepsilon \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

e os correspondentes autovalores

$$\begin{aligned} \mu_1 &= c, \\ \mu_2 &= c - (\delta + \varepsilon) = c - d. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como os autovetores não dependem de x , eles são também autovetores da matriz D_k na equação 2.8. Assim, os dois autovalores de D_k são dados por

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_1(x_{k-1}) \dots \mu_1(x_1) \mu_1(x_0), \\ \mu_2 = \mu_2(x_{k-1}) \dots \mu_2(x_1) \mu_2(x_0), \end{cases} \quad (3.16)$$

e os dois expoentes de Lyapunov resultantes têm a forma

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln |\mu_1(x_j)|, \\ \lambda_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln |\mu_2(x_j)|. \end{cases} \quad (3.17)$$

O primeiro autovetor está no subespaço $x = y$, logo o primeiro expoente de Lyapunov corresponde ao movimento ao longo de S . Por este motivo usaremos a notação λ_{\parallel} ao invés de λ_1 . O segundo autovetor é transversal ao subespaço $x = y$, então o expoente de Lyapunov correspondente será denotado por λ_{\perp} ao invés de λ_2 .

Usando agora a *densidade natural*¹ $\rho = \rho_a$ sobre S , os valores de λ_{\parallel} e λ_{\perp} podem ser novamente calculados para quase todas as trajetórias em S aplicando o *teorema ergódico de Birkhoff* e usando as equações

$$\lambda_{\parallel} = \int_0^1 \rho(x) \ln |\mu_1(x)| dx \quad \text{e} \quad \lambda_{\perp} = \int_0^1 \rho(x) \ln |\mu_2(x)| dx. \quad (3.18)$$

Procedendo com os cálculos, obtemos para o expoente de Lyapunov paralelo o mesmo valor encontrado na equação 3.9, dado por

$$\lambda_{\parallel} = -a \ln(a) - (1 - a) \ln(1 - a) \quad (3.19)$$

e para o expoente de Lyapunov transversal

$$\lambda_{\perp} = a \ln \left| \frac{1}{a} - d \right| + (1 - a) \ln \left| -\frac{1}{1 - a} - d \right|. \quad (3.20)$$

Se λ_{\perp} é negativo, então trajetórias iniciando próximas a S são atraídas para S . Esta é uma condição para que haja sincronização no sistema. Plotando λ_{\perp} em função da variável d com $a = 0,5$; mostramos na figura 3.4 os intervalos $I_1 = (-2, 237; -1, 731)$ e $I_2 = (1, 731; 2, 237)$ onde o expoente de Lyapunov transversal é negativo.

Considerando agora qualquer valor de a no intervalo permitido, exibimos na figura 3.5 uma visão global de todos os intervalos no parâmetro d onde o expoente de Lyapunov é negativo.

Assim, na versão 1 de acoplamento, com $a = 0,5$; a sincronização de trajetórias ocorre nos intervalos I_1 e I_2 . Porém, o aparecimento de bacias crivadas, que estudaremos na seção 3.3,

¹Notemos que $\rho(x) = \rho_a(x) = 1$ neste caso, pois no subespaço de sincronização S a dinâmica é exercida pelo mapa da tenda isolado.

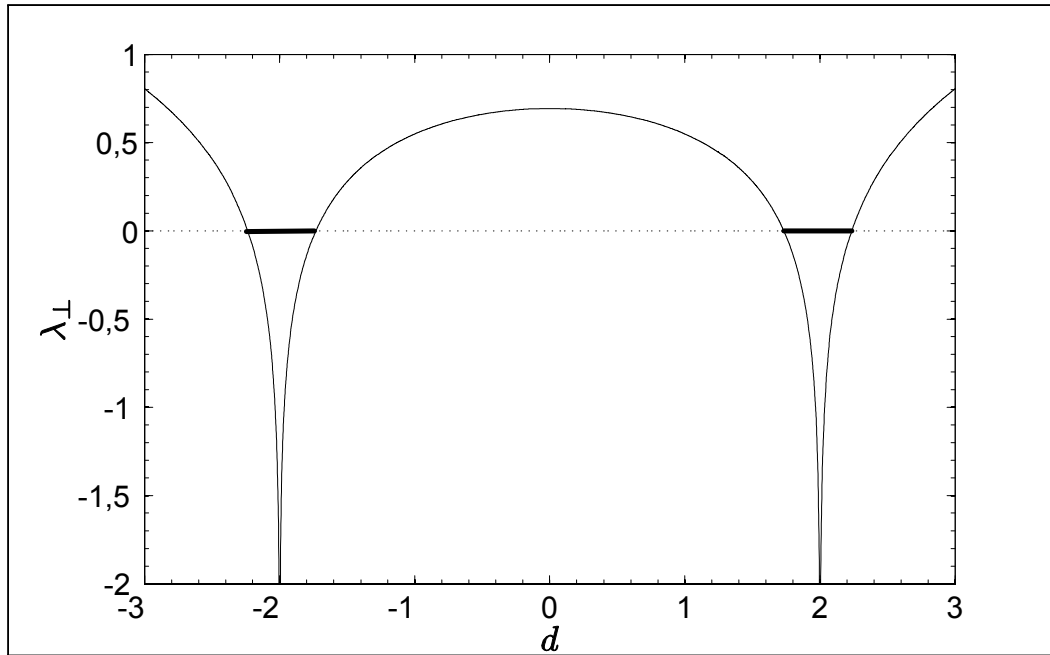


Figura 3.4: Gráfico do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} em função do parâmetro $d \equiv \delta + \varepsilon$ para a versão 1 do acoplamento de duas tendas inclinadas, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,5$. Os intervalos em negrito, dados por $I_1 = (-2,237; -1,731)$ e $I_2 = (1,731; 2,237)$, representam valores de d para os quais $\lambda_{\perp} < 0$.

pode fazer com que estas trajetórias se afastem definitivamente do subespaço de sincronização ou então fiquem num regime transiente durante muito tempo antes de sincronizarem.

Versão 2

Para o sistema acoplado na versão 2 a matriz jacobiana é dada por

$$DF = c \begin{pmatrix} 1 - \delta & \delta \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

sendo o valor de c igual ao utilizado na versão 1, exibido na equação 3.13.

Os autovetores e autovalor μ_1 são os mesmos da versão 1, representados nas equações 3.14 e 3.15, respectivamente. Apenas o autovalor μ_2 possui um valor diferente, dado por

$$\mu_2 = c(1 - d). \quad (3.22)$$

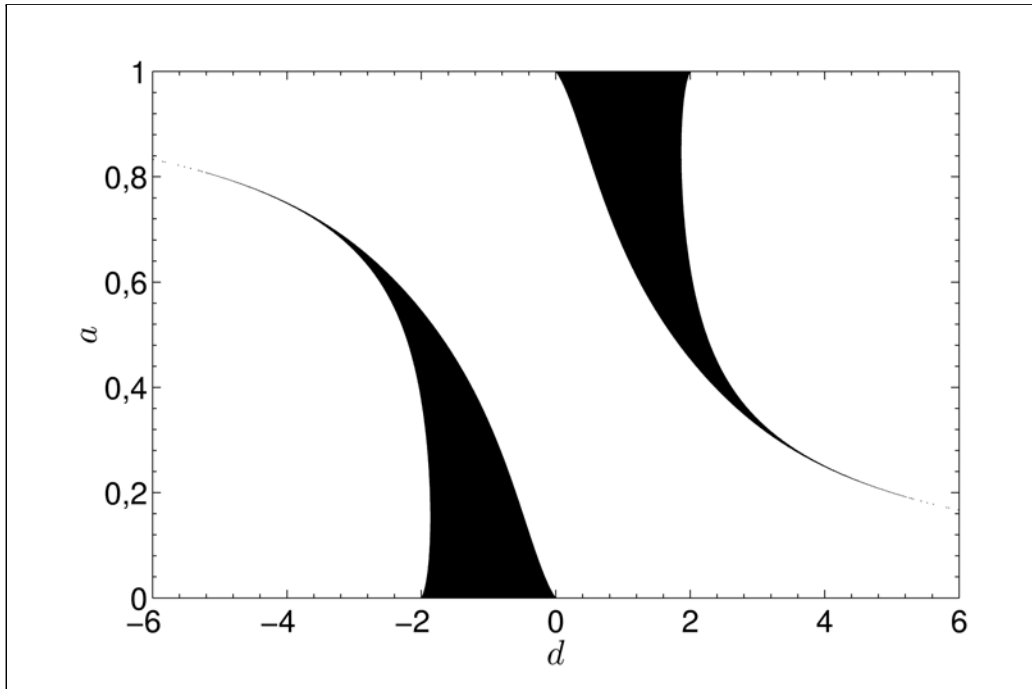


Figura 3.5: Gráfico global no parâmetro de controle a representando os intervalos em d onde o expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} é negativo na versão 1 de acoplamento de duas tendas inclinadas, usando como parâmetro de controle o valor $a = 0,5$. Traçando-se uma reta horizontal a partir de qualquer valor de a permitido, a interseção desta reta com o diagrama em preto determina os intervalos em d para os quais $\lambda_{\perp} < 0$.

Procedendo como na versão 1, obtemos o expoente de Lyapunov transversal que agora tem a forma

$$\lambda_{\perp} = -a \ln(a) - (1 - a) \ln(1 - a) + \ln |1 - d|. \quad (3.23)$$

Plotando este expoente de Lyapunov transversal em função do parâmetro d , com $a = 0,5$ observamos, na figura 3.6 a existência de um único intervalo $I_3 = (0,500; 1,500)$ onde este expoente é negativo.

Considerando novamente qualquer valor de a no intervalo permitido, mostramos na figura 3.7 uma visão global de todos os intervalos em d onde o expoente de Lyapunov é negativo.

Assim como na versão 1, o intervalo I_3 exhibe valores de d para os quais ocorre sincronização de trajetórias, porém, devemos ficar atentos ao aparecimento de bacias crivadas, que

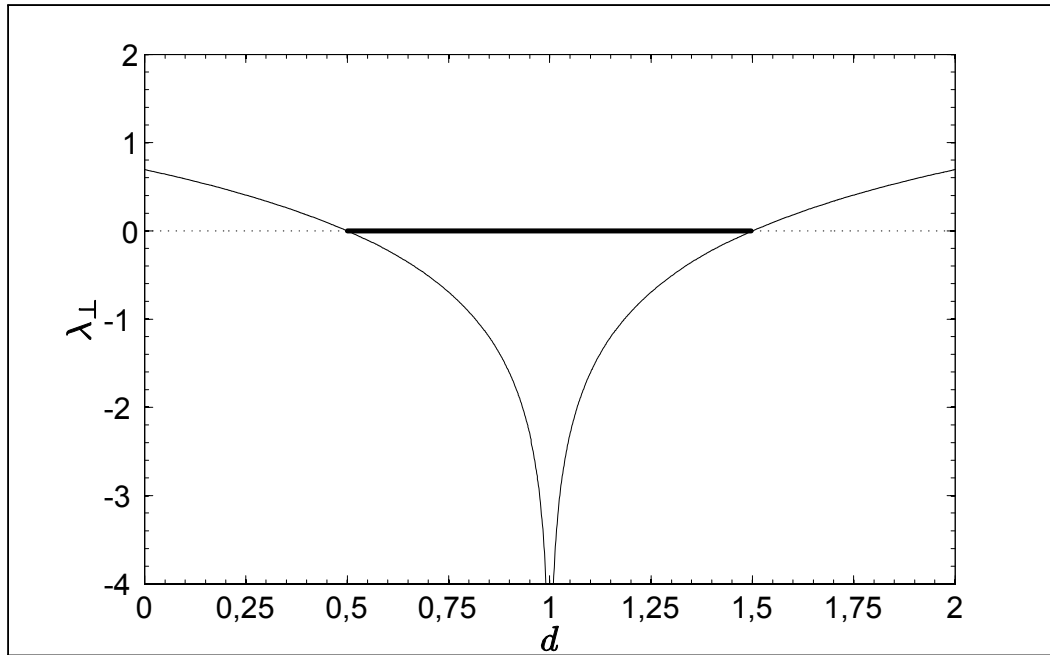


Figura 3.6: Gráfico do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} em função do parâmetro $d \equiv \delta + \varepsilon$ para a versão 2 do acoplamento de duas tendias inclinadas, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,5$. O intervalo em negrito, dado por $I_3 = (0,500; 1,500)$, representa valores de d para os quais $\lambda_{\perp} < 0$.

podem conduzir estas trajetórias para longe do subespaço de sincronização.

Com base nos valores encontrados até aqui, podemos agora averiguar a existência de bacias crivadas e VDI no acoplamento de duas tendias inclinadas, quando o parâmetro d varia.

3.3 Bacias Crivadas nas Tendias Acopladas

Para investigar a ocorrência de bacias crivadas no acoplamento de duas tendias inclinadas [66, 73], devemos mostrar que todas as condições definidas na seção 2.2 são satisfeitas para algum valor do parâmetro d .

Olhando para o subespaço de sincronização S , definido na subseção 3.2.2, observamos que a dinâmica é governada apenas pelo mapa da tenda, visto que pontos neste subespaço

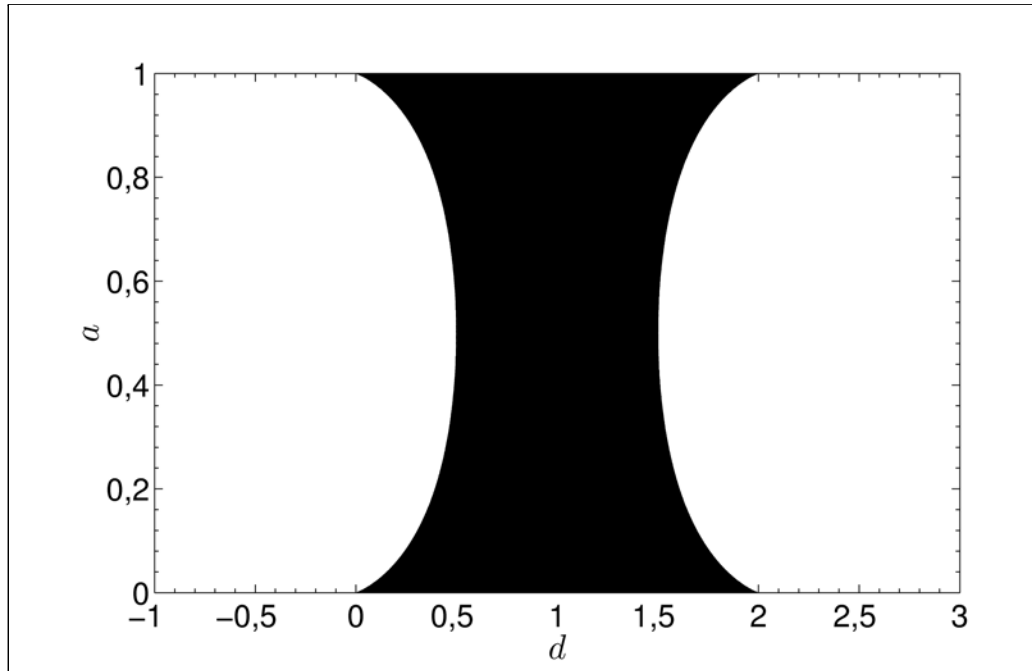


Figura 3.7: Gráfico global no parâmetro de controle a representando os intervalos em d onde o expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} é negativo na versão 2 de acoplamento. Traçando-se uma reta horizontal a partir de qualquer valor de a permitido, a interseção desta reta com o diagrama em preto determina os intervalos em d para os quais $\lambda_{\perp} < 0$.

possuem as mesmas coordenadas em x e y , o que o torna invariante sob ação do mapa. Além disso, S é caótico pela dinâmica do mapa e é transversalmente estável nos intervalos I_1 , I_2 e I_3 , sendo portanto um atrator caótico para valores de d nestes intervalos. Com isso as condições 1 e 2 são satisfeitas.

É possível mostrar analiticamente [73] que existem valores de d nos intervalos I_1 , I_2 e I_3 para os quais temos um atrator no infinito ou então o comportamento transiente descrito na seção 2.2, produzindo, respectivamente bacias globalmente e localmente crivadas, verificando portanto a condição 3.

A condição 4 se verifica nos intervalos I_1 , I_2 e I_3 onde temos expoentes de Lyapunov negativos. Para completar a análise e verificar a condição 5, devemos investigar a presença de órbitas periódicas transversalmente instáveis imersas no subespaço S . Isto é feito

observando-se a evolução dos autovalores transversais μ_2 em função do parâmetro d , calculados nas respectivas órbitas periódicas. Começaremos esta análise com pontos fixos e então, se necessário, passamos a órbitas de peridos maiores. Como as 5 condições devem ser satisfeitas simultaneamente, vamos sobrepor os intervalos I_1 , I_2 e I_3 aos possíveis intervalos onde o logarítimo do valor absoluto do autovalor transversal calculado nos pontos fixos ou órbitas periódicas  maior que zero, caracterizando então as regiões onde ocorrem bacias crivadas. Analisaremos separadamente as versões 1 e 2.

3.3.1 Versão 1

Na versão 1 de acoplamento, o autovalor transversal $\mu_2^{(1,2)}$ calculado para os pontos fixos $x_1^* = 0$ e $x_2^* = 1/(2 - a)$, respectivamente, foi apresentado na equação 3.15. Plotando esta função na variável d e sobrepondo o gráfico ao da figura 3.4, obtemos, na figura 3.8, dois intervalos onde simultaneamente ocorrem expoentes de Lyapunov negativos e logartimos do módulo dos autovalores transversais positivos, de um ou outro ponto fixo.

Note que estes intervalos são exatamente aqueles onde o expoente de Lyapunov transversal é negativo, dados por $I_1 = (-2, 237; -1, 731)$ e $I_2 = (1, 731; 2, 237)$. Nas figuras 3.9 e 3.10, plotamos as bacias de atração localmente e globalmente crivadas, usando os parâmetros $d = 2$ e $d = 1, 8$; respectivamente.

O aspecto “perfurado” que observamos na bacia globalmente crivada justifica a terminologia dada. Na bacia localmente crivada não percebemos os “furos” que caracterizam este fenômeno. Isto se deve ao fato de não haver atrator no infinito, e sim um comportamento transiente das trajetórias que assumimos ter as propriedades de um atrator.

3.3.2 Versão 2

Na análise da ocorrência de bacias crivadas para a versão 2, não encontramos intervalos em d contendo simultaneamente expoentes de Lyapunov negativos e logartimos do valor

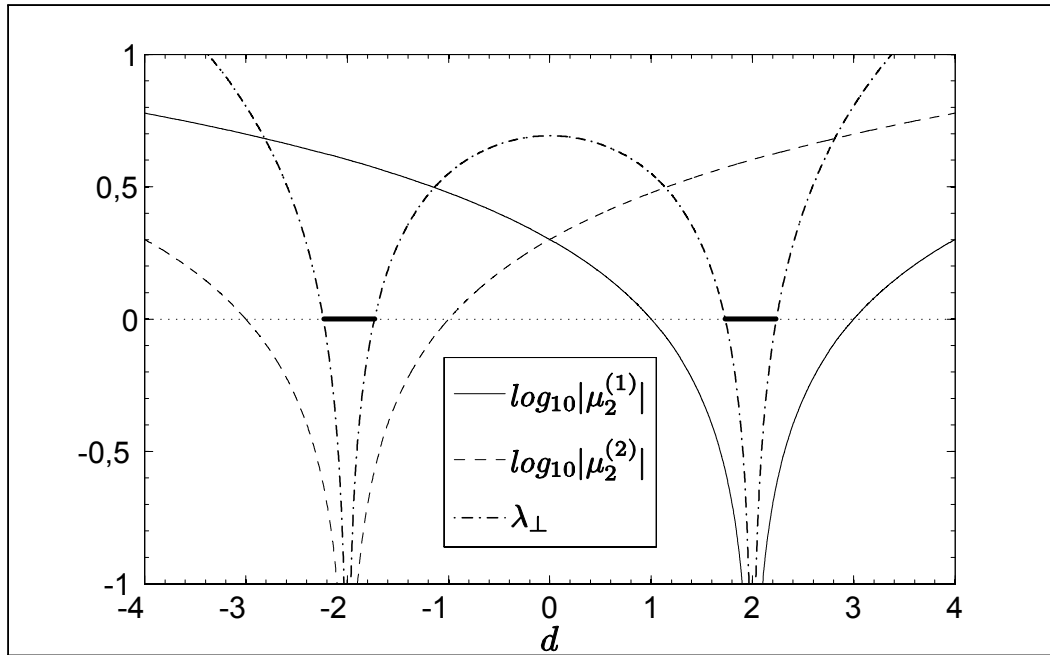


Figura 3.8: Sobreposição dos gráficos do logaritmo do módulo do autovalor transversal μ_2 para os pontos fixos e do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} na versão 1 do acoplamento de duas tendias inclinadas, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,5$. Os intervalos em negrito, dados por $I_1 = (-2, 237; -1, 731)$ e $I_2 = (1, 731; 2, 237)$, representam valores de d para os quais observamos a ocorrência de bacias crivadas no sistema.

absoluto dos autovalores transversais positivos para os pontos fixos, como pode ser visto na figura 3.11.

No entanto, a aparência da bacia na figura 3.12, onde usamos o valor $d = 0,6$; sugere a ocorrência de bacias crivadas para certos valores do parâmetro. Nestas condições, o fenômeno poderia acontecer devido à instabilidade de órbitas periódicas de período grande, para as quais não fizemos a análise.

3.4 VDI nas Tendias Acopladas

Para investigar a presença de VDI no acoplamento de duas tendias inclinadas, vamos considerar os expoentes de Lyapunov a tempo finito, definidos na equação 2.4. A VDI

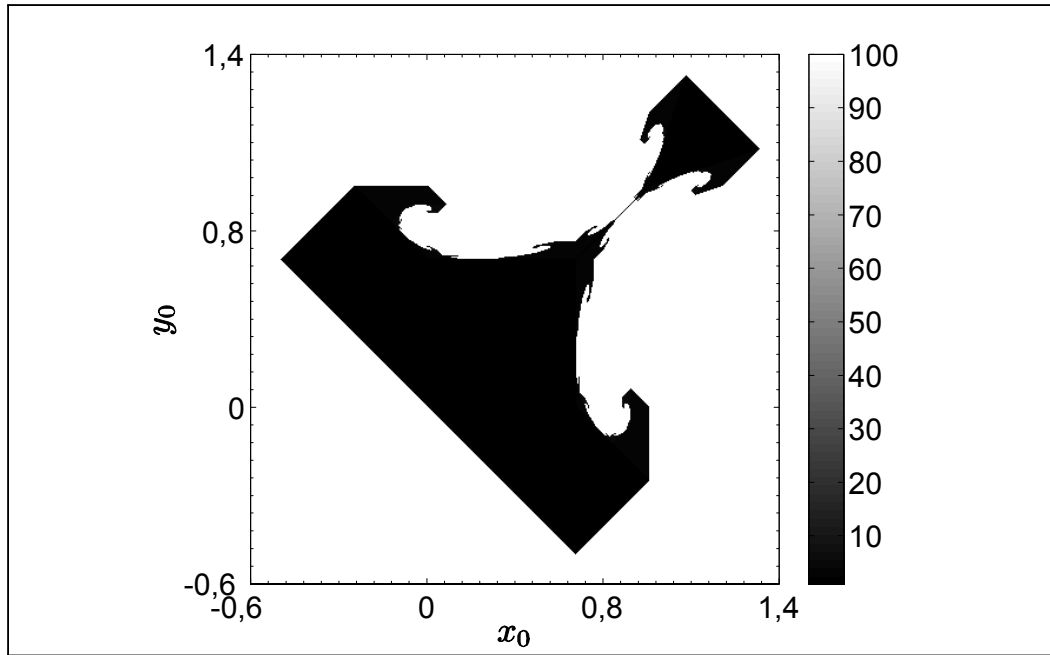


Figura 3.9: Bacia de sincronizaao localmente crivada do sistema de duas tendias acopladas na versão 1, utilizando os parâmetros $a = 0,5$ e $d = 2$. Os pontos em preto representam condioes iniciais cujas trajetórias sincronizam num tempo inferior a 100 iteraoes.

pode então ser caracterizada observando-se a flutuaao da distribuiao probabilística destes expoentes em torno de zero. Faremos esta análise numérica em separado para as versões 1 e 2.

3.4.1 Versão 1

Computando a fraao de expoentes de Lyapunov a tempo finito positivos para a versão 1 de acoplamento, observamos a ocorrência de intervalos em d onde esta fraao não atinge o valor máximo. Isto significa que existe um percentual destes expoentes que é negativo, caracterizando assim o aparecimento da VDI. A quantidade de pontos nas órbitas randômicas influencia fortemente a localizaao dos pontos onde a VDI aparece (*onset*) e o local onde ela é mais intensa (*blowout*).

Para a determinaao do *onset* da VDI, utilizamos expoentes de Lyapunov a tempo 1

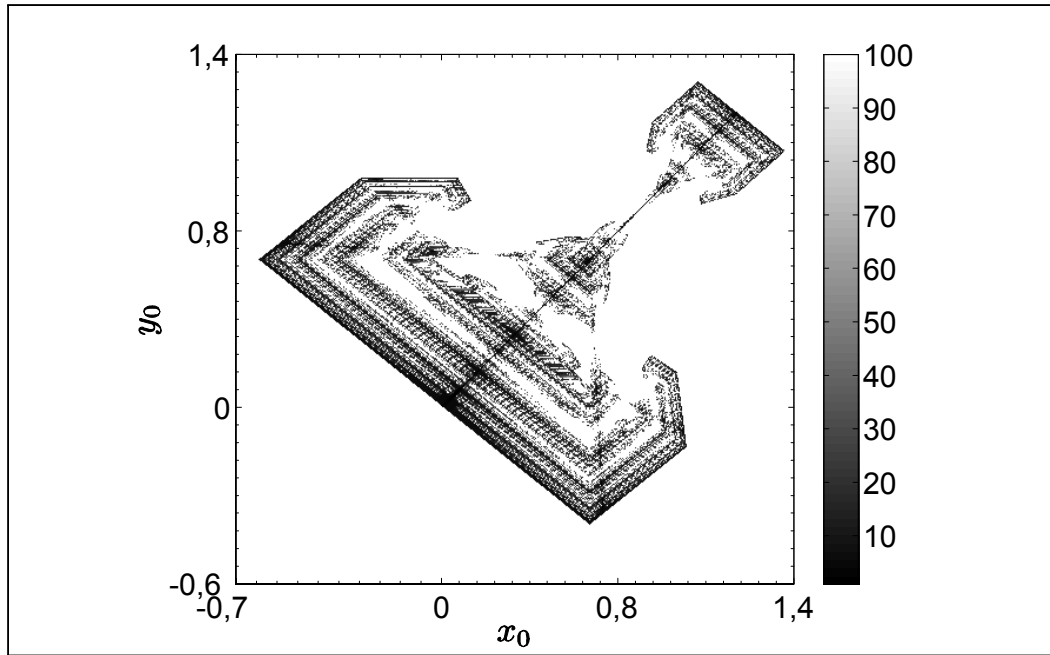


Figura 3.10: Bacia de sincronização globalmente crivada do sistema de duas tendias acopladas na versão 1, utilizando os parâmetros $a = 0,5$ e $d = 1,8$. Os pontos em preto representam condições iniciais cujas trajetórias sincronizam num tempo inferior a 100 iterações.

alegando que deste modo as distribuições são mais bem definidas nas bordas. Na figura 3.13, exibimos a fração positiva de expoentes de Lyapunov a tempo 1, constatando a presença da VDI em dois intervalos, a saber $J_1 = (-3; -1)$ e $J_2 = (1; 3)$. Os extremos deste intervalo correspondem aos pontos de *onset* da VDI.

Na determinação do *blowout* da VDI, utilizamos expoentes de Lyapunov a tempo 30, alegando que quanto maior este número, mais bem definido é o formato da distribuição destes expoentes, permitindo maior acuracidade na verificação das quantidades positivas e negativas.

Na figura 3.14, plotamos a fração positiva de expoentes de Lyapunov a tempo 30, constatando a presença de pontos onde esta fração é $1/2$. Este pontos correspondem a valores de d para os quais a VDI é máxima, e são dados por $d_1 = -2,24$; $d_2 = -1,74$; $d_3 = 1,74$ e $d_4 = 2,24$.

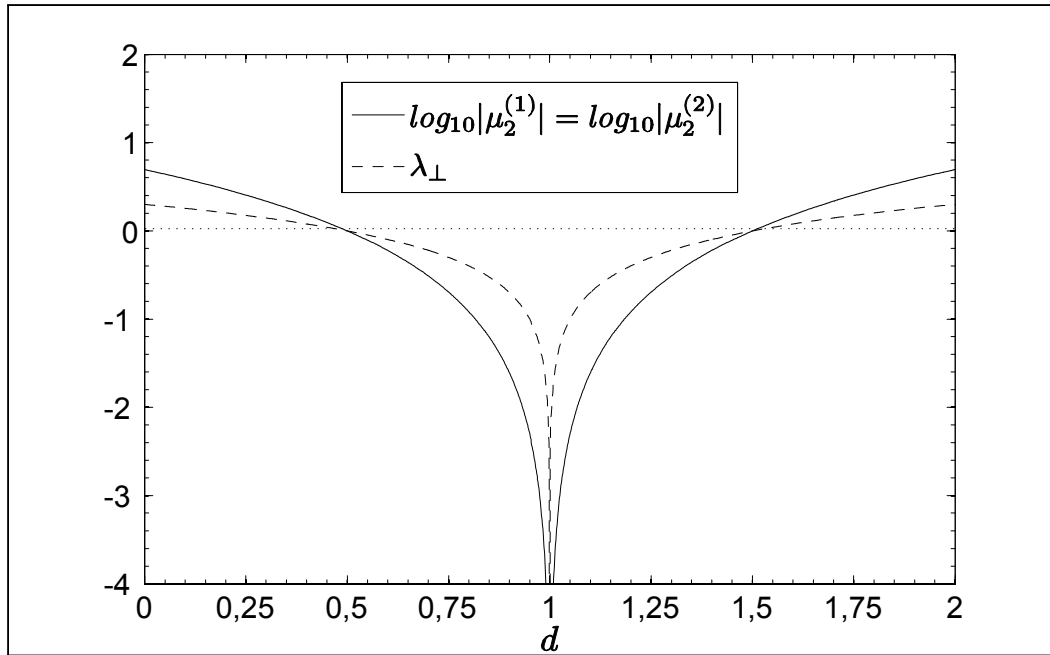


Figura 3.11: Sobreposição dos gráficos do logaritmo do valor absoluto do autovalor transversal μ_2 para os pontos fixos e do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} na versão 2 do acoplamento de duas tendias inclinadas, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,5$. Neste diagrama não encontramos valores de d que produzem bacias crivadas no sistema.

Para ilustrar de modo global a evolução da VDI em função do parâmetro a no acoplamento de duas tendias na versão 1, exibimos na figura 3.15 um diagrama contendo todos os intervalos (em cinza) onde este fenômeno acontece, utilizando expoentes de Lyapunov a tempo 30. Os pontos em preto representam VDI máxima para o valor de a correspondente.

Finalmente, em caráter ilustrativo, mostramos na figura 3.16 as distribuições dos expoentes de Lyapunov a tempo 30 para os valores de $d = 1$ e de $d = 2,24$ (*blowout*).

3.4.2 Versão 2

Para a versão 2 de acoplamento, o cálculo dos expoentes de Lyapunov a tempo finito não revelou a presença de VDI para nenhum valor de d . Nas figuras 3.17 e 3.18, exibimos a fração positiva dos expoentes a tempo 1 e a tempo 50, evidenciando que não há intervalos

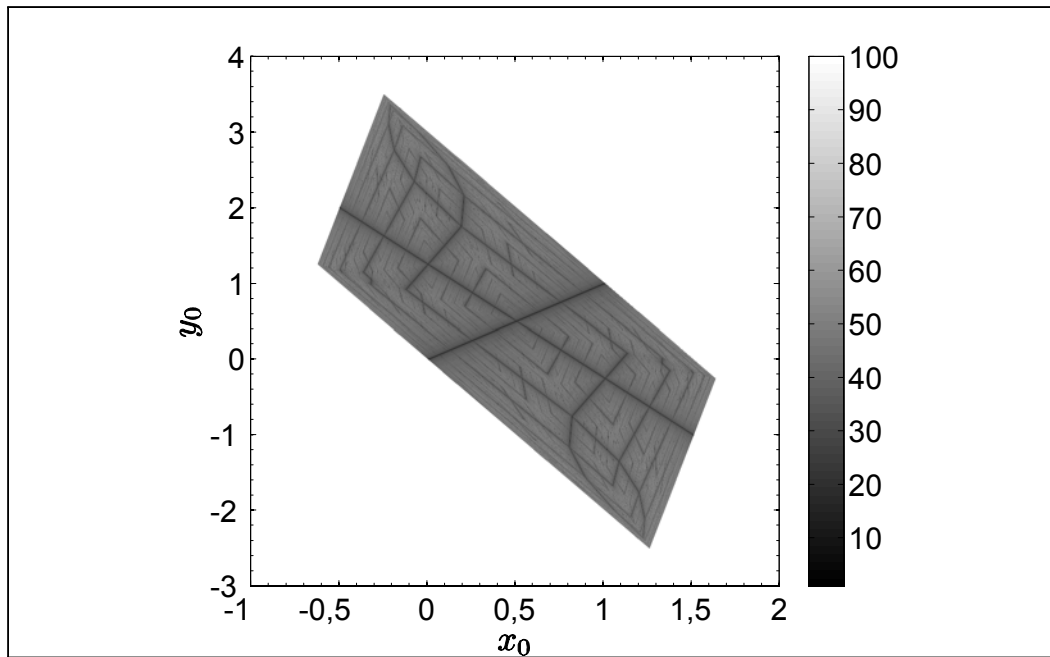


Figura 3.12: Bacia de sincronização crivada do sistema de duas tendias acopladas na versão 2, utilizando os parâmetros $a = 0,5$ e $d = 0,6$. Os pontos em preto representam condições iniciais cujas trajetórias sincronizam num tempo inferior a 100 iterações.

com frações positivas e negativas simultaneamente.

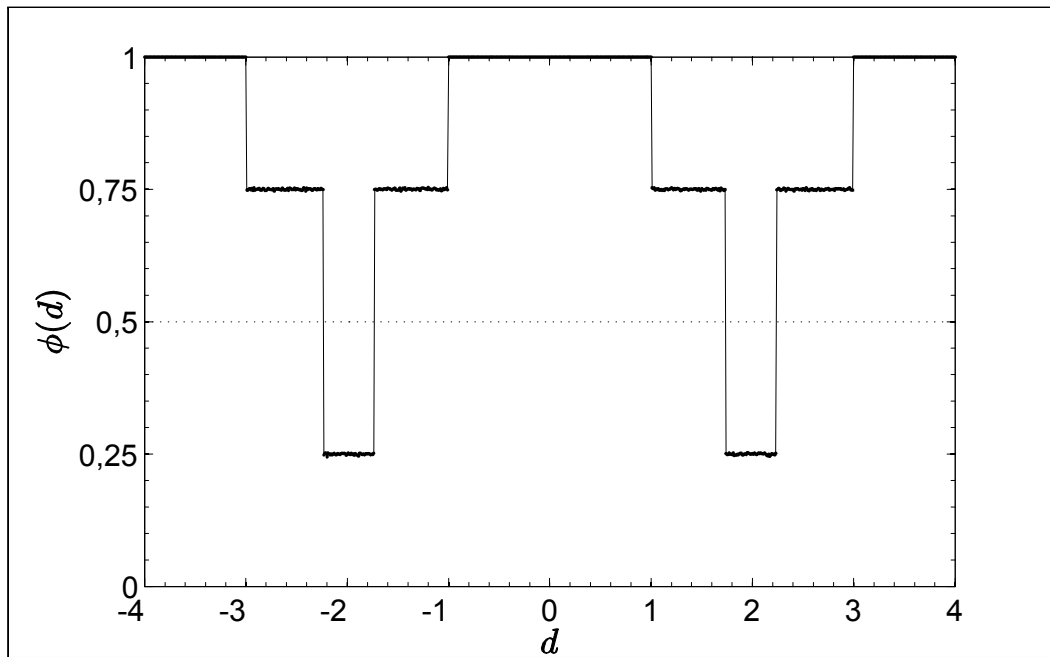


Figura 3.13: Gráfico da fração positiva ϕ dos expoentes de Lyapunov a tempo 1 para o sistema de duas tendias acopladas na versao 1, utilizando como parametro de controle o valor $a = 0,5$. Os intervalos para os quais $\phi \neq 1$ representam valores de d que produzem VDI no sistema e são dados por $J_1 = (-3; -1)$ e $J_2 = (1; 3)$. Os extremos destes intervalos correspondem ao *onset* da VDI.

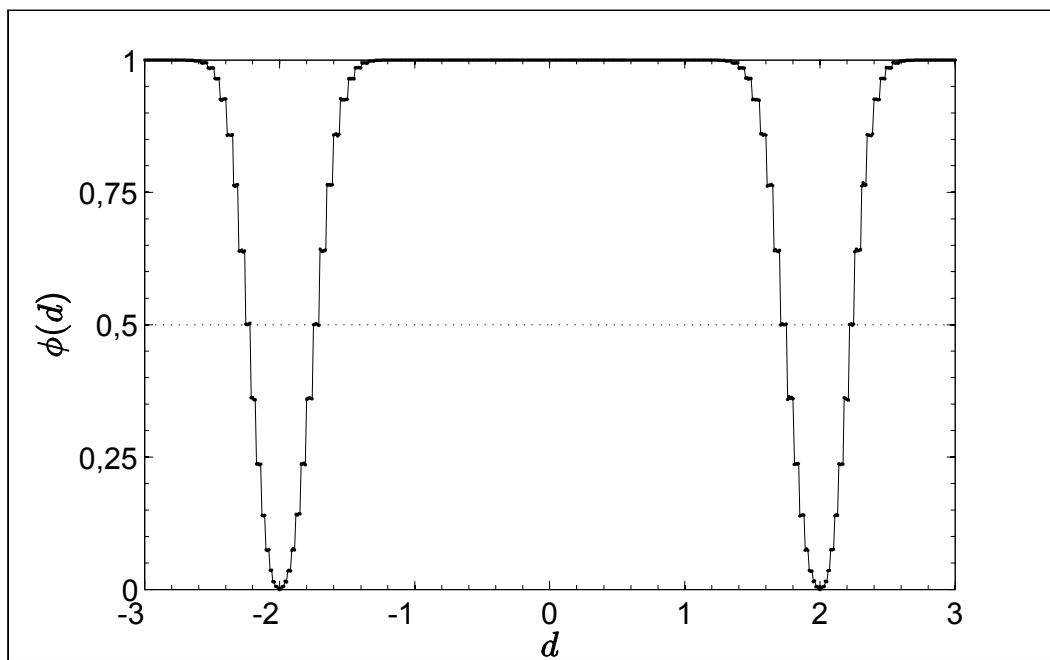


Figura 3.14: Gráfico da fração positiva ϕ dos expoentes de Lyapunov a tempo 30 para o sistema de duas tendias acopladas na versão 1, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,5$. A interseção da reta horizontal $\phi = 0,5$ com o diagrama representa os valores em d para os quais a VDI é máxima (*blowout*). Estes pontos são dados por $d_1 = -2,24$; $d_2 = -1,74$; $d_3 = 1,74$ e $d_4 = 2,24$.

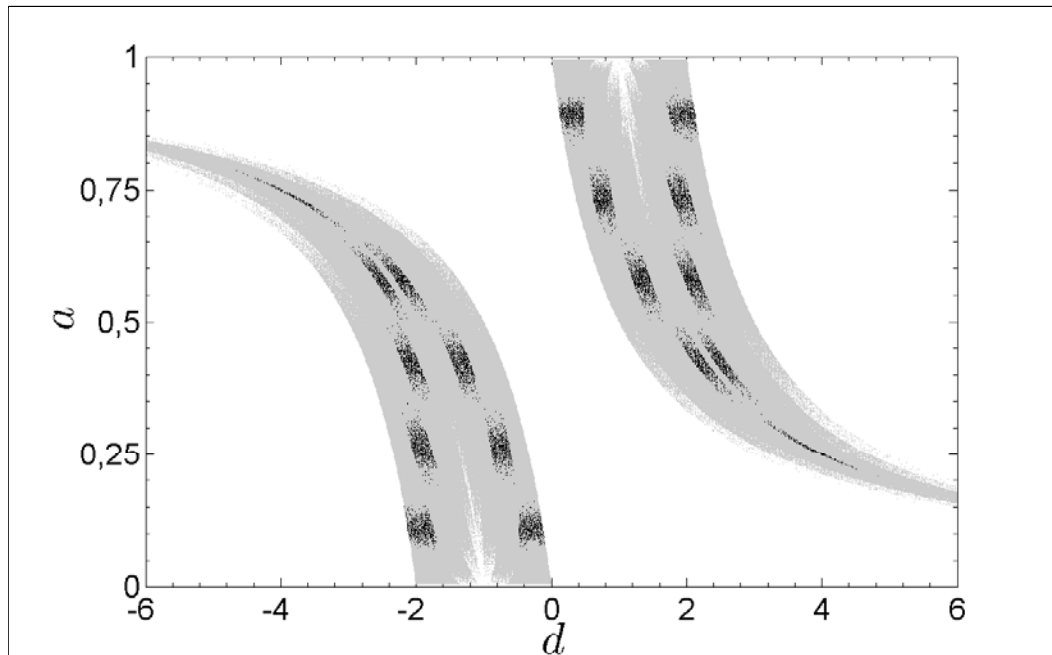


Figura 3.15: Gráfico global no parâmetro de controle a representando os intervalos em d para os quais ocorre VDI na versão 1 do acoplamento de duas tendias inclinadas, utilizando expoentes de Lyapunov a tempo 30. Traçando-se uma reta horizontal a partir de qualquer valor de a permitido, a interseção desta reta com o diagrama em cinza determina os intervalos em d para os quais encontramos VDI no sistema. Os pontos em preto representam valores de d para VDI máxima.

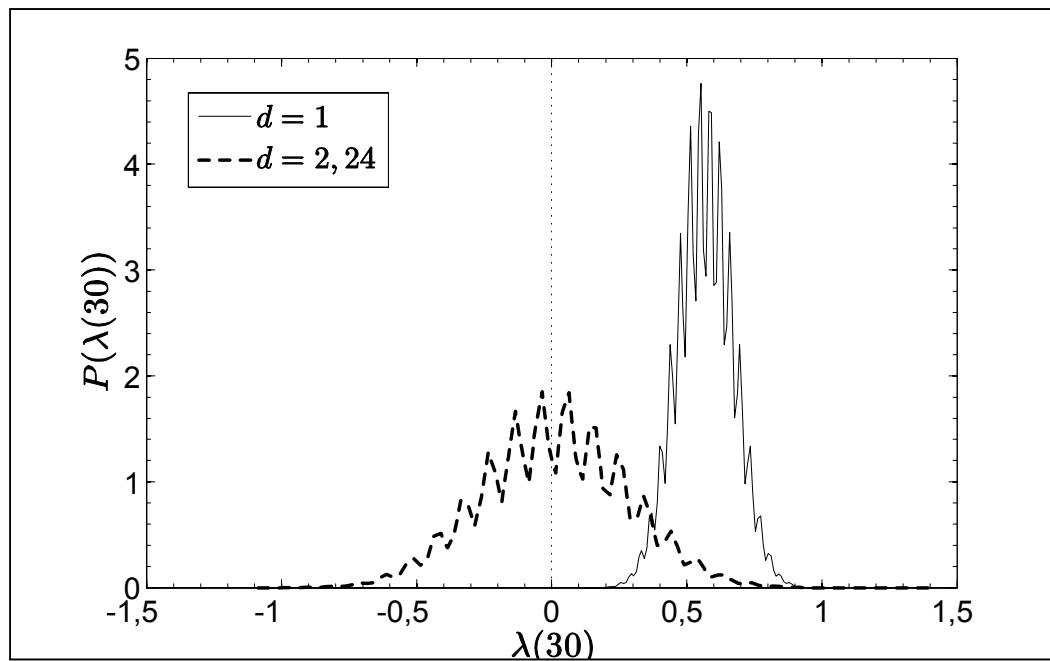


Figura 3.16: Distribuições do expoente de Lyapunov a tempo 30 para o acoplamento de duas tendias inclinadas na versão 1, usando como parâmetro de controle o valor $a = 0,5$; a partir dos valores $d = 1$ e $d = 2, 24$ (*blowout*).

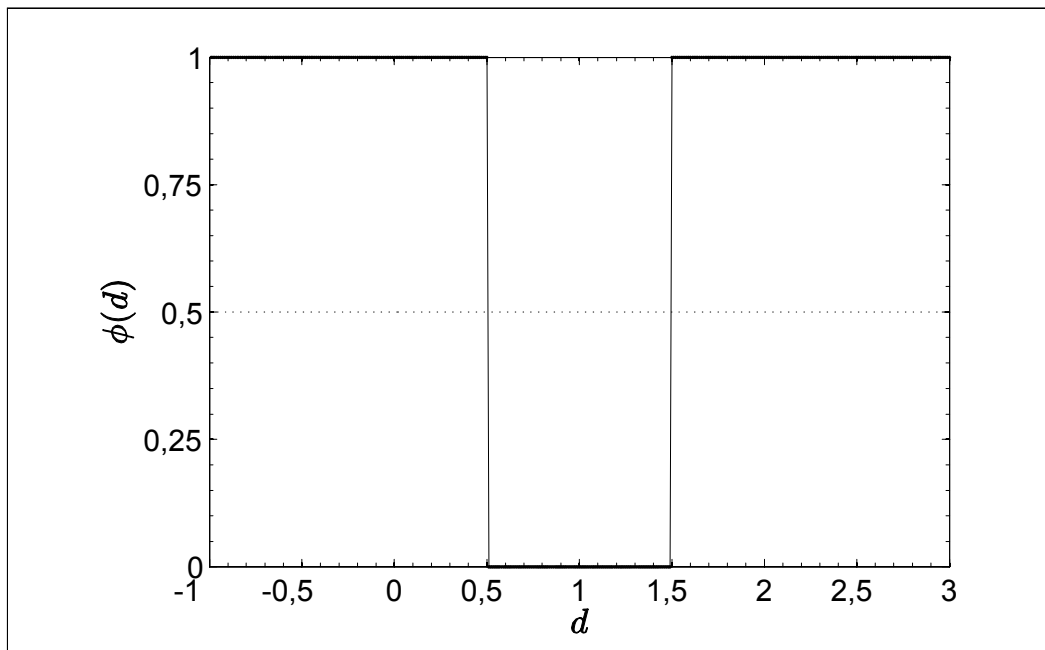


Figura 3.17: Gráfico da fração positiva ϕ dos expoentes de Lyapunov a tempo 1 para o sistema de duas tendas acopladas na versão 2, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,5$. Na figura temos somente frações positivas ($\phi = 1$) ou negativas ($\phi = 0$) na distribuição dos expoentes de Lyapunov, não havendo portanto indícios de VDI, qualquer que seja o valor de d .

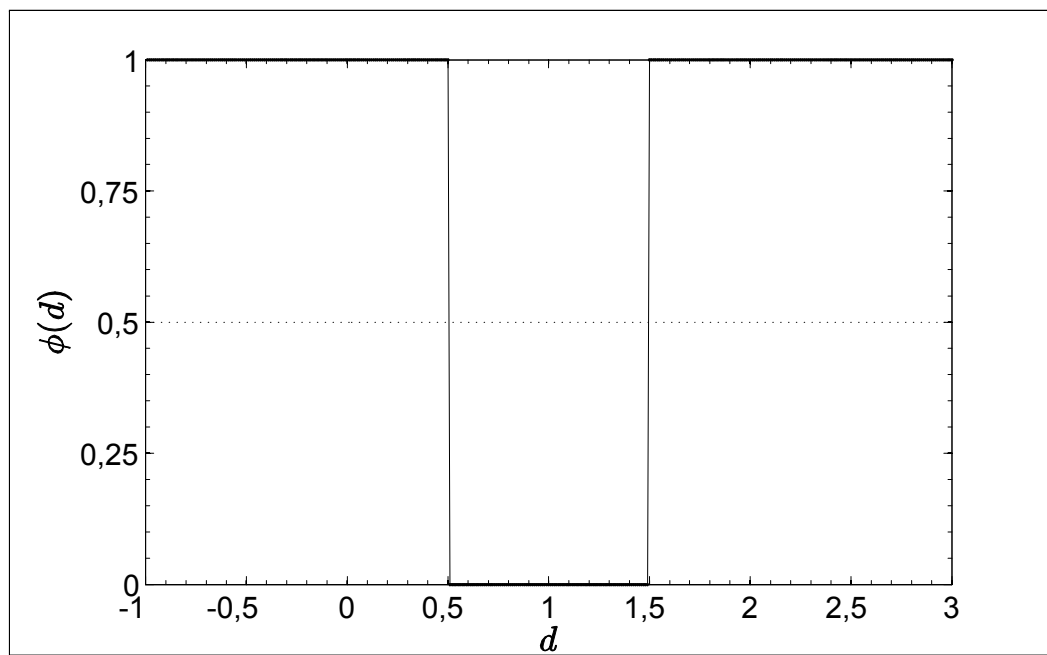


Figura 3.18: Gráfico da fração positiva ϕ dos expoentes de Lyapunov a tempo 50 para o sistema de duas tendias acopladas na versão 2, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,5$. A exemplo da figura 3.17, não há evidências de VDI no sistema.

O Mapa do Bangalô

Neste capítulo apresentamos o mapa do bangalô e suas características como uma melhor aproximação em relação ao mapa de Lorenz, comparado ao mapa da tenda. A partir da seção 4.2 consideramos o acoplamento de dois bangalôs e analisamos as condições para a sincronização de trajetórias, bem como a ocorrência de bacias crivadas e VDI.

4.1 Aspectos Gerais

4.1.1 Equação

O *mapa do bangalô* [74], a exemplo do mapa da tenda, também é um sistema dinâmico unidimensional $f_a : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$, linear por partes e controlado por um parâmetro $a \in (0; \frac{1}{2})$. A principal diferença em relação ao mapa da tenda está na quantidade de partes lineares considerada. Aqui teremos quatro segmentos lineares nos intervalos $[0; a)$, $[a; \frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2}; 1 - a)$, $[1 - a; 1]$ e o parâmetro a controla a posição dos “cantos” simétricos direito, $(a; 1 - a)$ e esquerdo, $(1 - a; 1 - a)$ do gráfico que representa o mapa. Novamente, a forma deste gráfico justifica a terminologia usada.

A equação do mapa do bangalô é dada por

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{1-a}{a}x & \text{se } x \in [0; a), \\ \frac{2a}{1-2a}x + \frac{1-3a}{1-2a} & \text{se } x \in [a; \frac{1}{2}), \\ \frac{2a}{1-2a}(1-x) + \frac{1-3a}{1-2a} & \text{se } x \in [\frac{1}{2}; 1-a), \\ \frac{1-a}{a}(1-x) & \text{se } x \in [1-a; 1], \end{cases} \quad (4.1)$$

e a figura 4.1, usando os valores (a) $a = 0,2$ e (b) $a = 0,45$ (aproximação melhor em relação ao mapa de Lorenz, comparado ao mapa da tenda), representa graficamente esta função.

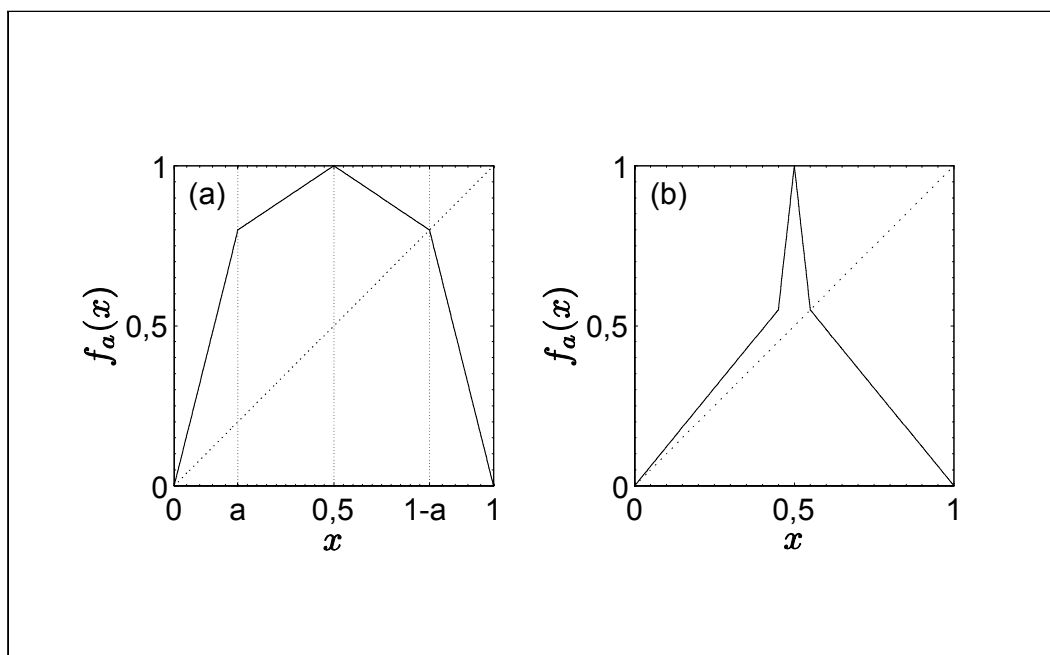


Figura 4.1: Gráficos do mapa do bangalô utilizando os valores do parâmetro de controle $a = 0,2$ (a) e $a = 0,45$ (b). Na interseção dos gráficos com a diagonal do quadrado $[0; 1] \times [0; 1]$ encontramos os pontos fixos.

Para todas as questões numéricas tratadas a seguir, sempre utilizaremos o valor $a = 0,45$.

4.1.2 Pontos Fixos

Resolvendo a equação $f_a(x^*) = x^*$ encontramos os dois pontos fixos do mapa do bangalô: $x_1^* = 0$, pertencente ao intervalo $[0; a)$ e $x_2^* = 1 - a$, pertencente ao intervalo $[1 - a; 1]$. Na

figura 4.1, estes pontos estão na interseção do gráfico do mapa com a diagonal do quadrado $[0; 1] \times [0; 1]$.

Para qualquer valor do parâmetro de controle a , estes pontos fixos são *instáveis*, pois seus autovalores satisfazem

$$|\delta_{1,2}| = \left| \frac{1-a}{a} \right| > 1. \quad (4.2)$$

4.1.3 Órbita de Período Dois

Para a análise sobre bacias crivadas no acoplamento de dois bangalôs que faremos adiante, será de suma importância a instabilidade da única órbita de período dois que ocorre na dinâmica deste mapa. Para encontrá-la, resolvemos a equação $f_a^2(x) = x$ descartando os pontos fixos, que também satisfazem esta igualdade.

Numericamente encontramos os pontos da órbita de período dois na interseção do gráfico de f_a^2 com a diagonal do quadrado $[0; 1] \times [0; 1]$. Os pontos correspondentes são dados por $x_1^{(2)} = 0,4583$ e $x_2^{(2)} = 0,625$. Na figura 4.2 mostramos, no gráfico (a), a segunda iterada do mapa com a localização dos pontos da órbita de período dois e no gráfico (b) uma representação desta órbita no mapa (gráfico teia de aranha).

Para encontrar os pontos desta órbita de forma analítica, para qualquer valor de a , devemos resolver a equação $f_a^2(x) = x$ levando em conta que o bangalô mapeia o ponto $0,4583$ (2º intervalo na definição do mapa) em algum ponto situado no 4º intervalo, e o ponto $0,625$ (4º intervalo) em algum ponto no 2º intervalo. Substituindo estes dados na equação $f_a^2(x) = x$, obtemos:

$$x_1^{(2)} = \frac{1-a}{3-4a} \quad \text{e} \quad x_2^{(2)} = \frac{3-5a}{3-4a}. \quad (4.3)$$

A simples substituição pelo valor $a = 0,45$ fornece os pontos correspondentes. Questões sobre a estabilidade desta órbita serão analisadas na seção 4.2.

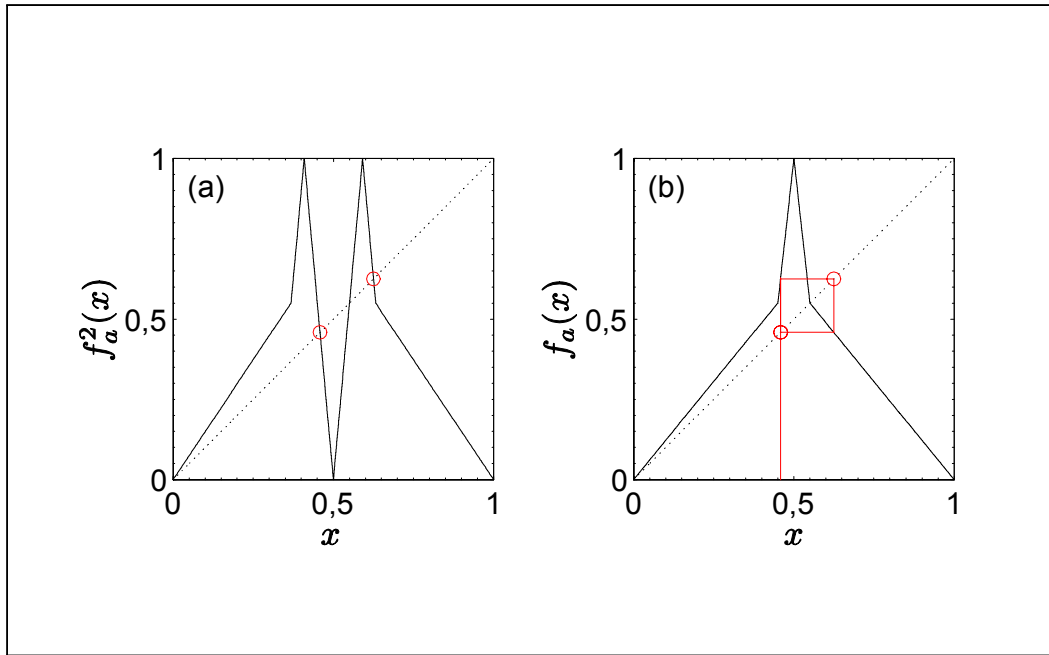


Figura 4.2: Gráfico da segunda iterada do mapa do bangalô (a) e gráfico teia de aranha (b) destacando a localização da órbita de período dois do mapa do bangalô. Para estes gráficos utilizamos como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$.

4.1.4 Expoente de Lyapunov

Uma característica útil do mapa do bangalô, que já vimos no mapa da tenda, é que o expoente de Lyapunov é uma função suave do parâmetro de controle a [72]. Para obter esta dependência, resolvemos a *equação de Frobenius-Perron* [A]:

$$\rho_a(x) = \int_0^1 \rho_a(y) \delta(x - f_a(y)) dy \quad (4.4)$$

obtendo a *densidade natural* [74]

$$\rho_a(x) = \frac{1}{2-3a} \chi_{[0;1-a)}(x) + \frac{1-2a}{a(2-3a)} \chi_{[1-a;1]}(x), \quad (4.5)$$

onde χ é a *função indicadora*, ou seja, $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$. Assim, a densidade invariante é constante no intervalo $[0; 1-a)$ e salta, no ponto $x = 1-a$, para outro valor constante. O expoente de Lyapunov é então calculado usando a equação

$$\lambda(a) = \int_0^1 \rho_a(x) \ln |f'_a(x)| dx, \quad (4.6)$$

cujos resultados, após os cálculos, é dado por

$$\lambda(a) = \frac{1-a}{2-3a} \ln \left(\frac{1-a}{a} \right) + \frac{1-2a}{2-3a} \ln \left(\frac{2a}{1-2a} \right). \quad (4.7)$$

Uma representação gráfica desta função pode ser visualizada na figura 4.3:

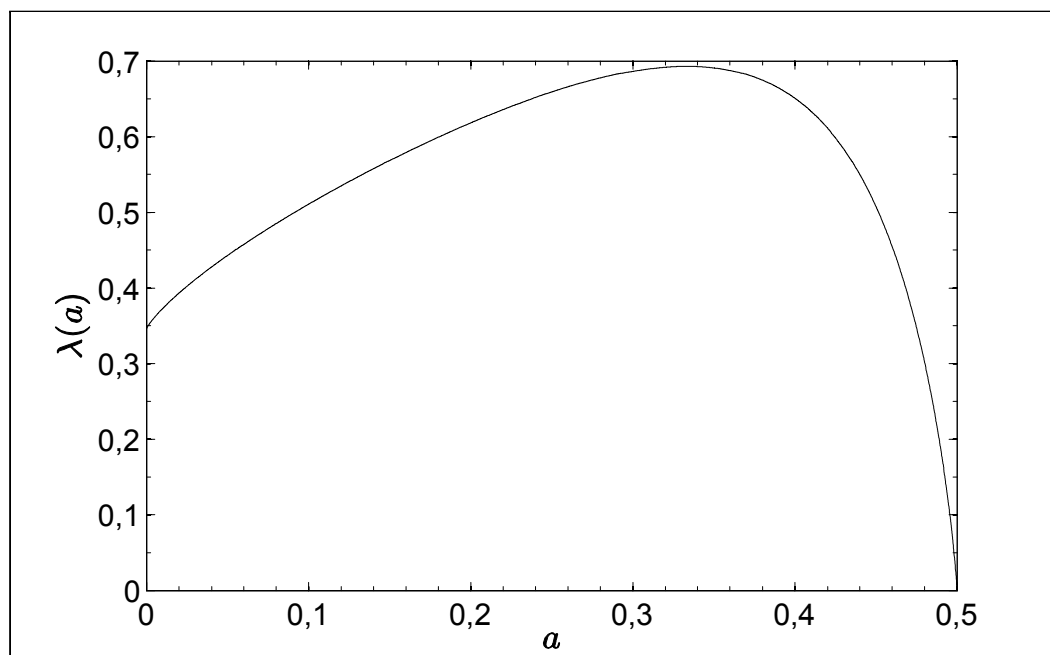


Figura 4.3: Gráfico do expoente de Lyapunov do mapa do bangalô em função do parâmetro de controle a . Esta dependência é uma função contínua e suave.

Em particular, para $a = \frac{1}{3}$ obtemos $\lambda\left(\frac{1}{3}\right) = \ln 2$, que é o valor máximo deste expoente e também o resultado esperado para o mapa da tenda. Para quaisquer outros valores de a , o expoente de Lyapunov é sempre positivo, exibindo uma dependência suave em relação a este parâmetro e assumindo o valor $\lambda = 0,5078$ para o mapa do bangalô com $a = 0,45$. Este valor de λ indica que trata-se de um mapa caótico, sem janelas periódicas com respeito ao parâmetro a .

4.2 Acoplamento de Dois Mapas do Bangalô

4.2.1 Equações

Novamente consideramos aqui duas versões de acoplamento de dois mapas do bangalô, que produzem mapas bidimensionais, aos quais também chamaremos de F e G , dados, respectivamente, por

$$\text{Versão 1: } \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_a(x_k) + (y_k - x_k) \delta \\ f_a(y_k) + (x_k - y_k) \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\text{Versão 2: } \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_a(x_k + (y_k - x_k) \delta) \\ f_a(y_k + (x_k - y_k) \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

onde δ e ε são parâmetros de acoplamento reais que podem ser diferentes quando o acoplamento é assimétrico ou mesmo se anularem num acoplamento unidirecional. Como veremos adiante, o comportamento dinâmico destes sistemas depende essencialmente da soma $d \equiv \delta + \varepsilon$.

A diferença básica entre estes dois mapas é que F não deixa o quadrado $[0; 1] \times [0; 1]$ invariante sob sua ação, a menos que δ e ε sejam ambos nulos, ao passo que G mantém o quadrado invariante quando $0 \leq \delta \leq 1$ e $0 \leq \varepsilon \leq 1$ simultaneamente. Por causa destes fatos, devemos estender o domínio do mapa do bangalô para todos os números reais, omitindo as restrições $0 \leq x$ e $x \leq 1$ na equação 4.1.

4.2.2 Sincronização

Na dinâmica do acoplamento descrito acima, o segmento

$$S = \{(x; y) \mid 0 \leq x = y \leq 1\} \subset [0; 1] \times [0; 1] \quad (4.9)$$

é sempre mantido invariante e é o subespaço onde os dois mapas acoplados $x_{n+1} = f_a(x_n)$ e $y_{n+1} = f_a(y_n)$ estão sincronizados. Este segmento é o nosso *subespaço de sincronização*. Uma órbita neste subespaço é obviamente a mesma órbita caótica do mapa desacoplado, só

que em \mathbb{R}^2 , portanto os pontos fixos de S são $P_1 = (0; 0)$ e $P_2 = (1 - a; 1 - a)$. Na figura 4.4, plotamos uma órbita típica do mapa 4.8a (versão 1), a partir de uma condição inicial cuja trajetória sincroniza.

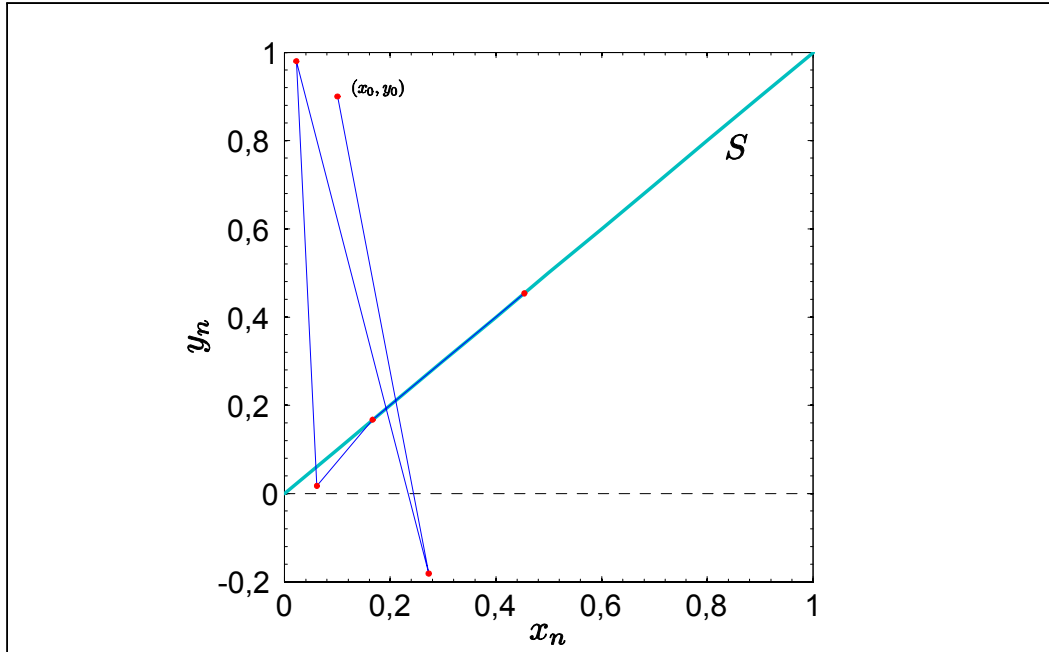


Figura 4.4: Órbita do acoplamento de dois bangalôs na versão 1, a partir da condição inicial $(x_0; y_0) = (0, 1; 0, 9)$, usando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$. A diagonal do quadrado $[0; 1] \times [0; 1]$ é o espaço de sincronização S .

Para analisarmos a estabilidade do subespaço de sincronização devemos investigar se uma trajetória que inicia próxima de S converge para uma trajetória em S . Isto pode ser feito considerando-se o expoente de Lyapunov máximo ao longo da direção transversal ao subespaço de sincronização, o qual denotamos por λ_{\perp} . Se este número é negativo (positivo) o estado sincronizado é estável (instável) com respeito a pequenas perturbações transversais.

Esta é somente uma condição necessária, porque eventuais órbitas periódicas transversalmente instáveis imersas no subespaço de sincronização tornariam divergentes as órbitas na vizinhança deste subespaço. Estas órbitas periódicas podem existir mesmo quando S é transversalmente estável (com $\lambda_{\perp} < 0$) e seu efeito é direcionar as trajetórias para longe de

S , impedindo a convergência ao estado sincronizado. Deste modo, uma condição suficiente para a sincronização é que todas as órbitas periódicas instáveis sejam transversalmente estáveis. Esta condição pode ser verificada calculando-se o autovalor da matriz Jacobiana ao longo da direção transversal a S . Se este autovalor possuir módulo menor do que 1, então as trajetórias próximas a S sincronizarão. A seguir analisamos estas condições isoladamente para cada versão de acoplamento.

Versão 1

Nesta versão de acoplamento, a matriz Jacobiana é dada por

$$DF = \begin{pmatrix} c - \delta & \delta \\ \varepsilon & c - \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

onde

$$c = \begin{cases} \frac{1-a}{a} & \text{se } x \in [0; a), \\ \frac{2a}{1-2a} & \text{se } x \in [a; \frac{1}{2}), \\ \frac{-2a}{1-2a} & \text{se } x \in [\frac{1}{2}; 1-a), \\ \frac{-(1-a)}{a} & \text{se } x \in [1-a; 1]. \end{cases} \quad (4.11)$$

Os autovalores da matriz Jacobiana são

$$\begin{aligned} \mu_1 &= c, \\ \mu_2 &= c - (\delta + \varepsilon) = c - d, \end{aligned} \quad (4.12)$$

com autovetores correspondentes

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -\delta \\ \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

O primeiro autovetor está no subespaço de sincronização S , enquanto que o segundo é transversal a ele. Devemos observar que, pelo fato de o mapa do bangalô ser linear por partes, o mapa 4.8a possui quatro diferentes expressões para os autovalores, cada uma delas definida num intervalo diferente, de acordo com o valor de c dado pela equação 4.11.

Na figura 4.5, plotamos o logaritmo do módulo do autovalor transversal μ_2 como função do parâmetro de acoplamento d para os pontos fixos $P_1 = (0; 0)$ ($\mu_2^{(1)}$) e $P_2 = (1 - a; 1 - a)$ ($\mu_2^{(4)}$) do mapa 4.8a.

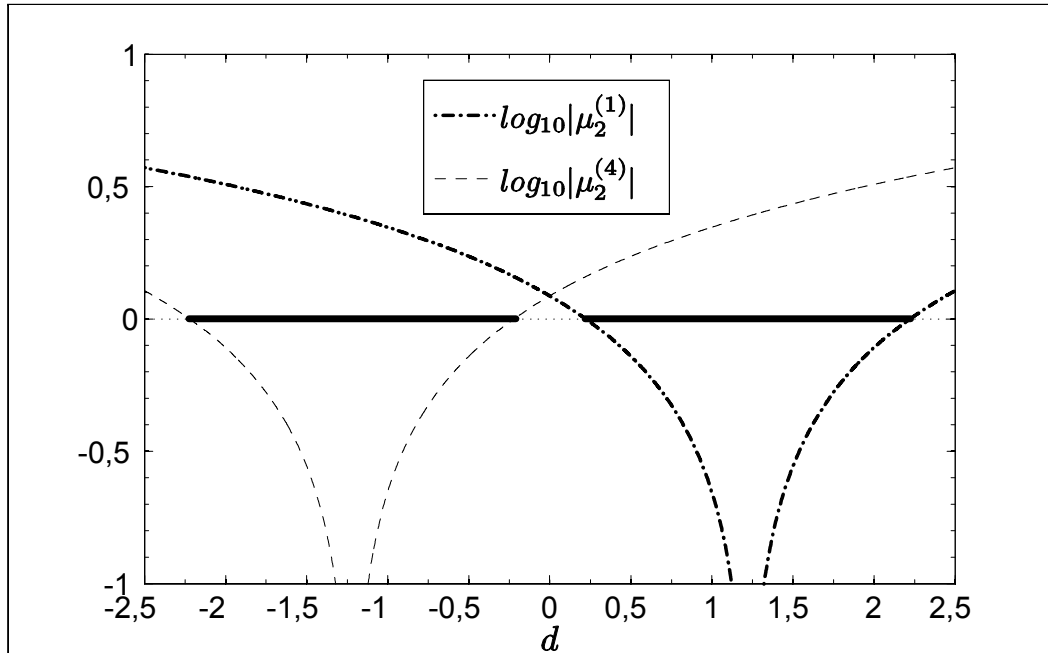


Figura 4.5: Gráfico do logaritmo do módulo dos autovalores transversais para os pontos fixos do sistema de dois bangalôs acoplados na versão 1, em função de d , utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$. Os intervalos em negrito representam valores de d para os quais cada um dos pontos fixos é estável.

De acordo com a teoria clássica, tais pontos periódicos são transversalmente estáveis (instáveis) se estes números são negativos (positivos). Como podemos ver, existe sempre um ponto fixo com logaritmo do módulo do autovalor transversal positivo, mesmo que para o outro ponto fixo este número seja negativo em algum intervalo em d . Para o ponto fixo P_1 , este intervalo é dado por $I_1 = (d_1; d_2)$, onde

$$d_{1,2} = \left(\frac{1 - a}{a} \right) \mp 1, \tag{4.14}$$

enquanto que, para P_2 temos $I_2 = (-d_2; -d_1)$. Usando $a = 0,45$; como na figura acima, estes intervalos são $I_1 = (0,22; 2,23)$ e $I_2 = (-2,23; -0,22)$. Concluimos então que, independen-

temente do valor de d , sempre existirá algum ponto fixo transversalmente instável imerso na variedade de sincronização S .

Observe que esta análise foi feita apenas para pontos fixos, o que é suficiente para a caracterização de bacias crivadas que faremos na seção seguinte nesta versão de acoplamento.

Com relação ao expoente de Lyapunov, um procedimento semelhante ao que fizemos na tenda inclinada nos leva a obter estes valores. Neste sentido, o expoente de Lyapunov ao longo da direção paralela ao subespaço de sincronização tem o mesmo valor daquele encontrado para o mapa desacoplado, ou seja,

$$\lambda_{\parallel} = \frac{1-a}{2-3a} \ln \left(\frac{1-a}{a} \right) + \frac{1-2a}{2-3a} \ln \left(\frac{2a}{1-2a} \right). \quad (4.15)$$

Agora, o expoente de Lyapunov transversal pode ser obtido através da equação 2.6, aplicando o teorema ergódico de Birkhoff. Temos então

$$\begin{aligned} \lambda_{\perp} = & \frac{1}{2-3a} \left[a \ln \left| \frac{1-a}{a} - d \right| + \frac{1-2a}{2} \ln \left| \frac{2a}{1-2a} - d \right| + \frac{1-2a}{2} \ln \left| \frac{-2a}{1-2a} - d \right| \right] + \\ & + \frac{1-2a}{2-3a} \ln \left| \frac{-(1-a)}{a} - d \right|. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Graficamente, usando $a = 0,45$; representamos na figura 4.6 o expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} como função de d , onde identificamos os intervalos $C_1 = (-1, 227; -1, 217)$ e $C_2 = (0, 550; 1, 831)$, para os quais este expoente é negativo. Usando valores de d nestes intervalos, garantimos uma condição necessária para sincronização.

De modo global, para qualquer valor do parametro a , visualizamos na figura 4.7 a distribuição destes intervalos, permitindo assim a condição necessária de sincronização.

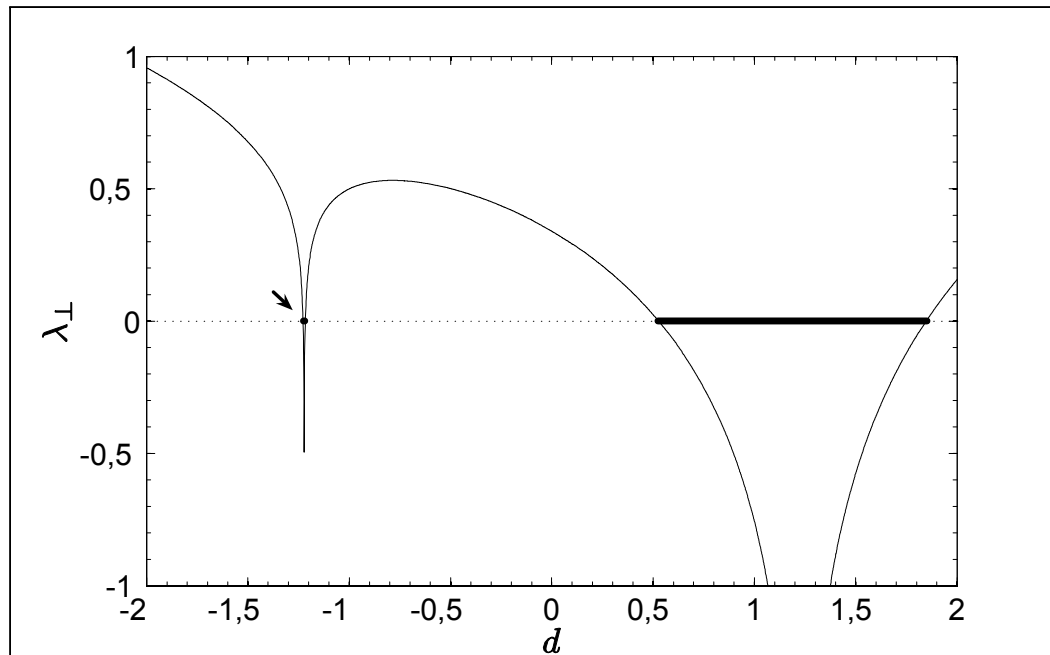


Figura 4.6: Gráfico do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} em função do parâmetro $d \equiv \delta + \varepsilon$ para a versão 1 do acoplamento de dois bangalôs, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$. Os intervalos em negrito, dados por $C_1 = (-1,227; -1,217)$ e $C_2 = (0,550; 1,831)$, representam valores de d para os quais $\lambda_{\perp} < 0$.

Versão 2

Agora consideramos os mapas acoplados na versão 2, para a qual a matriz Jacobiana é

$$DG = c \begin{pmatrix} 1 - \delta & \delta \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

e onde c é dado na equação 4.11. Aqui os dois autovetores e o autovalor μ_1 são os mesmos da versão 1, sendo que o autovalor transversal é dado agora por

$$\mu_2 = c(1 - d). \quad (4.18)$$

O logaritmo do módulo do autovalor transversal está plotado na figura 4.8 como função do parâmetro de acoplamento d para os pontos fixos P_1 e P_2 do mapa 4.8b.

Existe um intervalo comum para o qual os dois pontos fixos são transversalmente estáveis

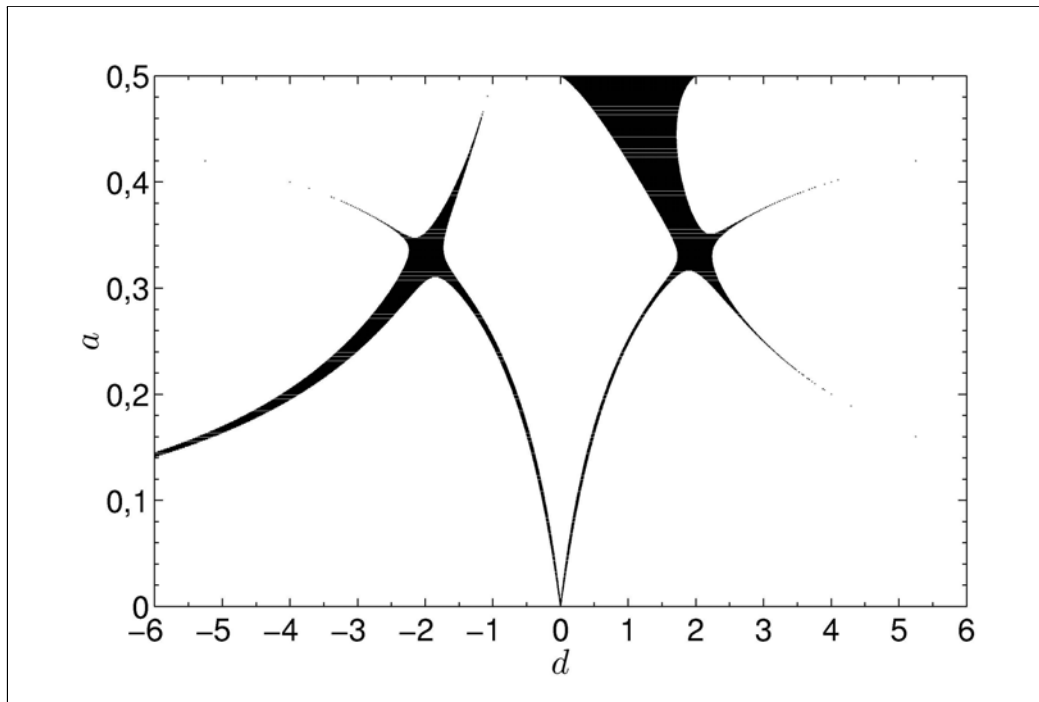


Figura 4.7: Gráfico global no parâmetro de controle a representando os intervalos em d onde o expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} é negativo na versão 1 do acoplamento de dois bangalôs, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$. Traçando-se uma reta horizontal a partir de qualquer valor de a permitido, a interseção desta reta com o diagrama em preto determina os intervalos em d para os quais $\lambda_{\perp} < 0$.

simultaneamente, dado por $I_3 = (d_3; d_4)$, onde

$$d_{3,4} = 1 \mp \left(\frac{a}{1-a} \right). \quad (4.19)$$

Fazendo $a = 0,45$, como na figura acima, encontramos o intervalo $I_3 = (0,18; 1,83)$. Neste caso, diferentemente da versão anterior, é necessário analisar também a órbita de período dois, visto que ela pode ser transversalmente instável, mesmo quando os pontos fixos são transversalmente estáveis. Como vimos anteriormente, os pontos da órbita de período dois são dados por

$$\begin{aligned} P_1^{(2)} : x_1^{(2)} &= \frac{1-a}{3-4a} \in [a; \frac{1}{2}), \\ P_2^{(2)} : x_2^{(2)} &= \frac{3-5a}{3-4a} \in [1-a; 1] \end{aligned} \quad (4.20)$$

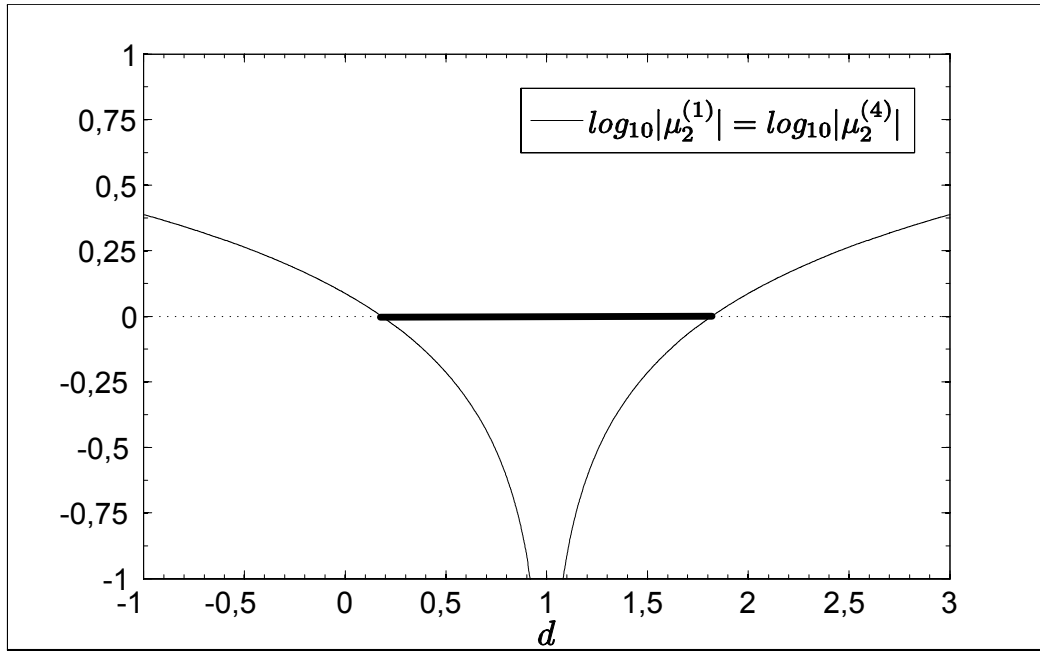


Figura 4.8: Gráfico do logaritmo do módulo dos autovalores transversais para os pontos fixos do sistema de dois bangalôs acoplados na versão 2, em função de d , utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$. O intervalo em negrito representa valores de d para os quais os pontos fixos são estáveis.

com autovalor transversal dado por

$$\mu_2^{(per.2)} = \left(\frac{1}{2a-1} - 1 \right) (1-d)^2, \quad (4.21)$$

de modo que os intervalos para os quais a órbita é transversalmente instável são

$$d < 1 - \sqrt{\frac{1-2a}{2(1-a)}}, \quad d > 1 + \sqrt{\frac{1-2a}{2(1-a)}}. \quad (4.22)$$

O logaritmo do módulo do autovalor transversal da órbita de período dois está plotado na figura 4.9 como função de d , para $a = 0,45$; mostrando o intervalo $(0,70; 1,28)$ onde esta órbita é transversalmente estável.

Quanto ao expoente de Lyapunov transversal, na versão 2 do acoplamento ele é dado pela equação

$$\lambda_{\perp} = \frac{1}{2-3a} \left[(1-a) \ln \left(\frac{1-a}{a} \right) + (1-2a) \ln \left(\frac{2a}{1-2a} \right) \right] + \ln |1-d| \quad (4.23)$$

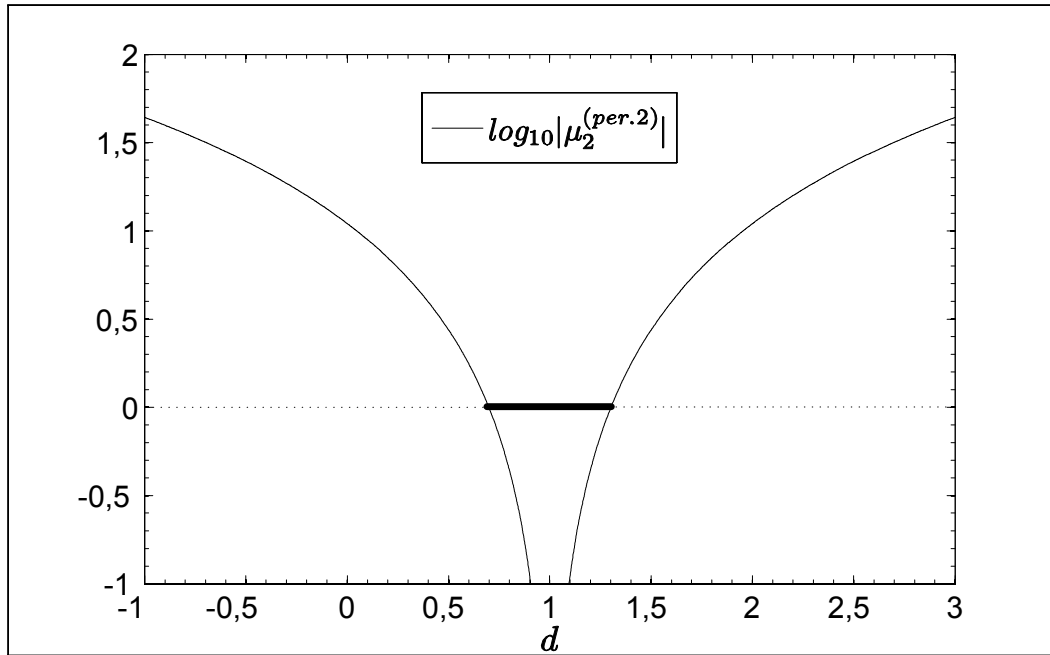


Figura 4.9: Gráfico do logaritmo do módulo do autovalor transversal para a órbita de período dois do sistema de dois bangalôs acoplados na versão 2, em função de d , utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$. O intervalo em negrito representa valores de d para os quais esta órbita é transversalmente estável.

e sua representação gráfica para o valor $a = 0,45$ é exibida na figura 4.10. Podemos então observar apenas um intervalo, dado por $V = (0,396; 1,604)$ onde o expoente transversal é negativo, satisfazendo a condição necessária para a sincronização.

Globalmente, para todo valor de a permitido, exibimos na figura 4.11 a disposição dos intervalos onde o expoente de Lyapunov é negativo, permitindo a condição necessária de sincronização.

4.3 Bacias Crivadas nos Bangalôs Acoplados

Na verificação das condições para a existência de bacias crivadas no acoplamento de 2 bangalôs, as condições de 1 até 3 são idênticas àquelas que vimos para a tenda inclinada, restando apenas verificar as condições 4 e 5. Para isso, vamos novamente sobrepor os gráficos

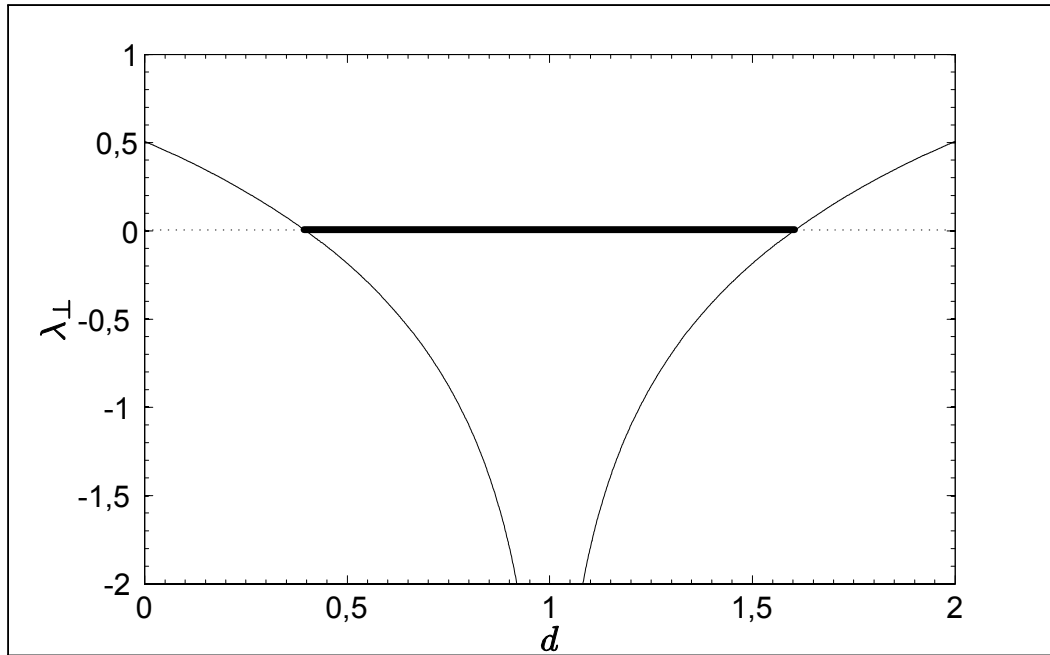


Figura 4.10: Gráfico do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} em função do parâmetro d para a versão 2 do acoplamento de dois bangalôs, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$. O intervalo em negrito, dado por $V = (0,396; 1,604)$, representa valores de d para os quais $\lambda_{\perp} < 0$.

do expoente de Lyapunov e do autovalor transversal (em escala logarítmica), calculados nos pontos fixos, para cada uma das versões de acoplamento.

4.3.1 Versão 1

Para a versão 1, esta sobreposição é mostrada na figura 4.12, onde encontramos os intervalos onde ocorrem bacias crivadas, dados por $C_1 = (-1,227; -1,217)$ e $C_2 = (0,550; 1,831)$.

Um exemplo gráfico de bacia globalmente crivada nesta versão de acoplamento, pode ser visualizada na figura 4.13, onde usamos o valor $d = 0,7$.

Para qualquer valor de a permitido, os intervalos onde ocorrem bacias crivadas coincidem com aqueles em que o expoente de Lyapunov é negativo, portanto a figura 4.7 exhibe também intervalos em d cujos valores determinam o aparecimento de bacias crivadas.

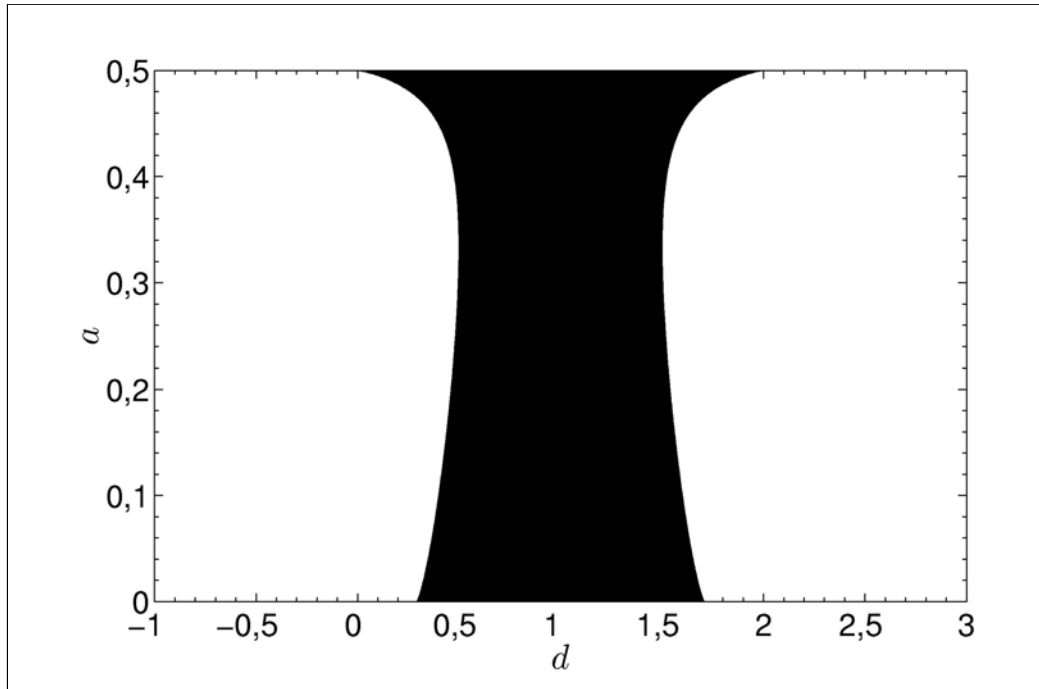


Figura 4.11: Gráfico global no parâmetro de controle a representando os intervalos em d onde o expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} é negativo na versão 2 do acoplamento de dois bangalôs, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$. Traçando-se uma reta horizontal a partir de qualquer valor de a permitido, a interseção desta reta com o diagrama em preto determina o intervalo em d onde $\lambda_{\perp} < 0$.

4.3.2 Versão 2

Na versão 2 de acoplamento, quando sobrepomos os gráficos do expoente de Lyapunov e do autovalor transversal relativos aos pontos fixos, não observamos a ocorrência de intervalos onde se tem bacias crivadas, como podemos ver na figura 4.14.

Porém, uma análise da estabilidade transversal da única órbita de período 2 deste sistema produz um gráfico que, sobreposto a gráfico dos expoentes de Lyapunov, revela a presença de dois intervalos dados por $V_1 = (0,421; 0,705)$ e $V_2 = (1,287; 1,592)$ onde se verificam bacias crivadas no sistema. Na figura 4.15 observamos estes intervalos.

Um exemplo de bacia crivada para este sistema usando o valor $d = 0,6$ pode ser visua-

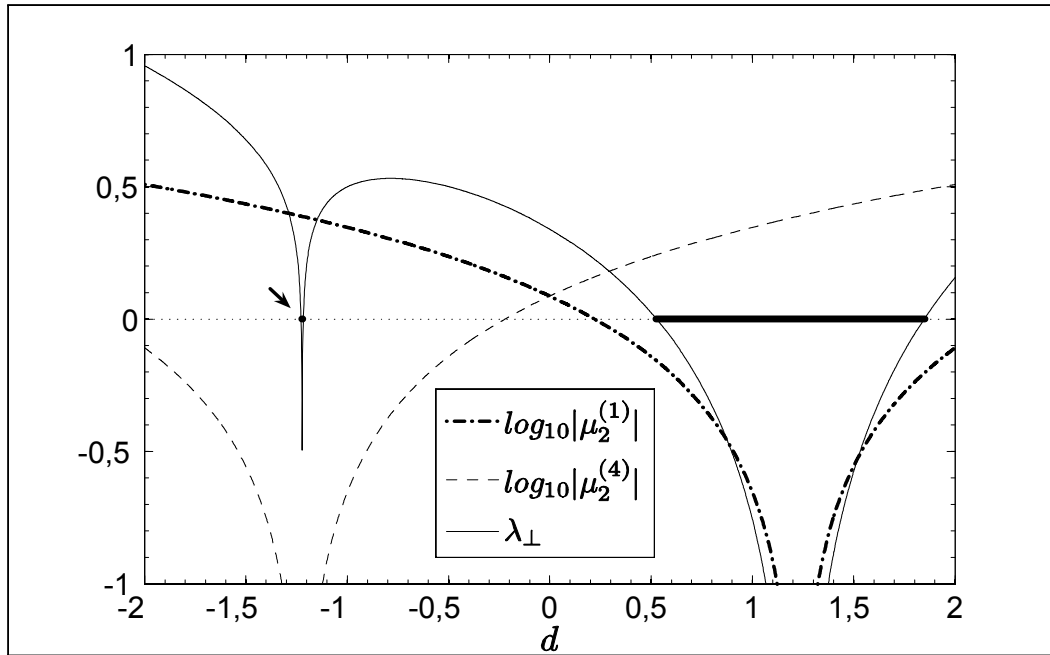


Figura 4.12: Sobreposição dos gráficos do logaritmo do módulo do autovalor transversal μ_2 para os pontos fixos e do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} na versão 1 do acoplamento de dois bangalôs, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$. Os intervalos em negrito, dados por $C_1 = (-1,227; -1,217)$ e $C_2 = (0,550; 1,831)$, representam valores de d para os quais observamos a ocorrência de bacias crivadas no sistema.

lizado na figura 4.16.

Para outros valores de a , também detectamos 2 intervalos cujos valores fornecem bacias crivadas neste sistema. Na figura 4.17, estes intervalos estão representados em preto. Aqui não existe correspondência entre os intervalos com expoente de Lyapunov negativos e os intervalos que geram bacias crivadas. Temos, por outro lado duas bandas representando estes intervalos. Na banda inferior, os pontos fixos são os responsáveis pela instabilidade que gera o crivamento das bacias, enquanto que na banda superior a órbita de período 2 cumpre este papel. Na transição das duas bandas observamos dois intervalos degenerados, quando $a = 0,33$; que é o valor onde o bangalô se transforma na tenda.

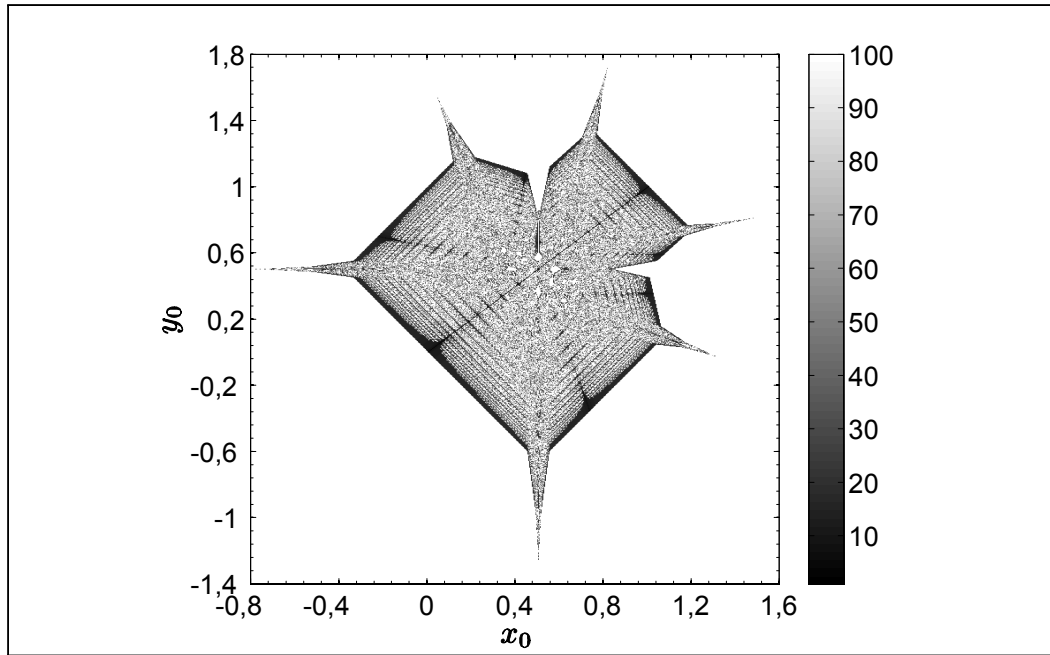


Figura 4.13: Bacia de sincronização globalmente crivada do sistema de dois bangalôs acoplados na versão 1, utilizando os parâmetros $a = 0,45$ e $d = 0,7$. Os pontos em preto representam condições iniciais cujas trajetórias sincronizam num tempo inferior a 100 iterações.

4.4 VDI nos Bangalôs Acoplados

Do mesmo modo como no caso das tendas, a VDI será evidenciada calculando-se a distribuição probabilística dos expoentes de Lyapunov a tempo finito. Analizamos novamente as versões 1 e 2 em casos separados.

4.4.1 Versão 1

Utilizando expoentes de Lyapunov a tempo 1, com $a = 0,45$; encontramos dois intervalos com ocorrência simultânea de valores positivos e negativos. Estes intervalos são dados por $H_1 = (-1,58; -0,70)$ e $H_2 = (0,22; 2,23)$ e graficamente estão representados na figura 4.18. Seus extremos correspondem aos pontos de *onset* da VDI.

Calculando agora os expoentes de Lyapunov a tempo 30, observamos uma suavização do

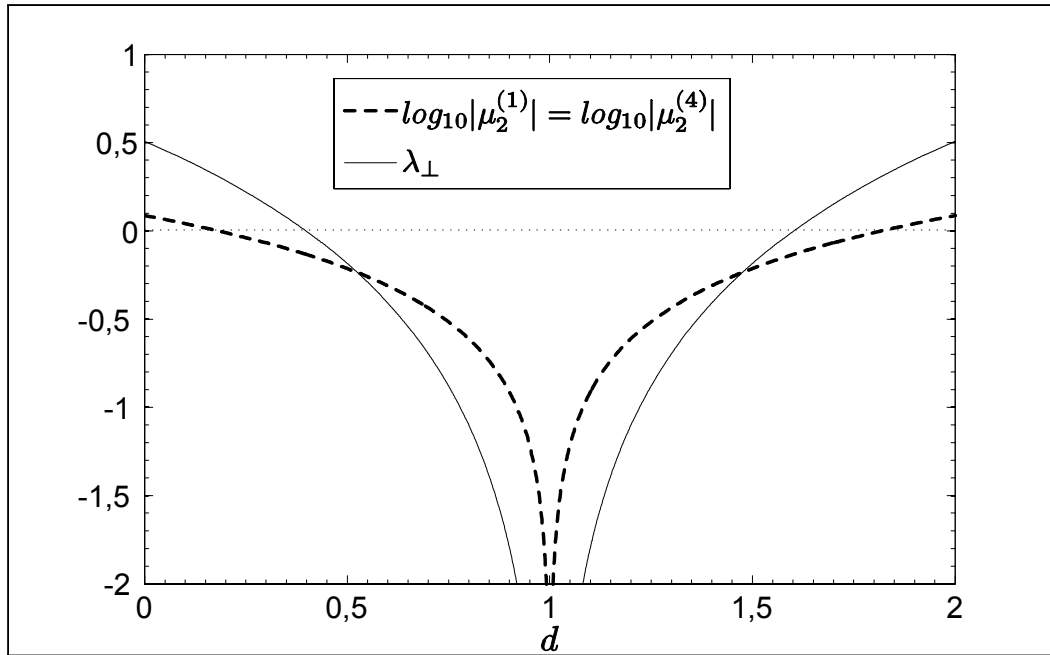


Figura 4.14: Sobreposição dos gráficos do logaritmo do módulo do autovalor transversal μ_2 para os pontos fixos e do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} na versão 2 do acoplamento de dois bangalôs, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$. Neste diagrama não encontramos valores de d que produzem bacias crivadas no sistema.

gráfico, representado na figura 4.19, que revela de forma mais precisa os pontos onde a VDI é mais intensa (*blowout*). Estes pontos são dados pelos valores $k_1 = -1,23$; $k_2 = -1,21$; $k_3 = 0,71$ e $k_4 = 1,69$. Algumas distribuições de expoentes de Lyapunov a tempo 100 para esta versão de acoplamento são ilustradas na figura 4.20.

Para outros valores de a o número de intervalos do parâmetro d nos quais observamos a VDI pode variar até 4, como podemos ver na figura 4.21, onde representamos, de forma global estes intervalos. Os pontos em preto representam valores de *blowout*.

4.4.2 Versão 2

Na versão 2 do acoplamento de dois bangalôs, a avaliação dos expoentes de Lyapunov a tempo 1, para $a = 0,45$; revelou a ocorrência de dois intervalos no parâmetro d manifestando

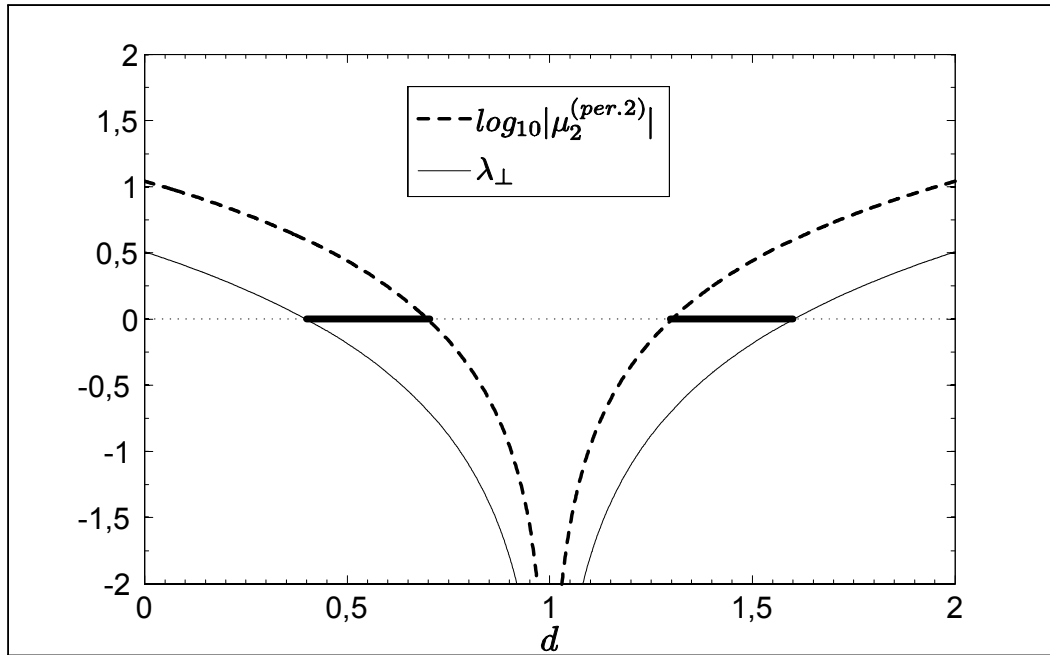


Figura 4.15: Sobreposição dos gráficos do expoente de Lyapunov transversal λ_{\perp} e do logaritmo do módulo do autovalor transversal μ_2 para a órbita de período dois na versão 2 do acoplamento de dois bangalôs, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$. Os intervalos em negrito, dados por $V_1 = (0,421; 0,705)$ e $V_2 = (1,287; 1,592)$, representam valores de d para os quais observamos a ocorrência de bacias crivadas no sistema.

a VDI no sistema. Este intervalos são dados por $L_1 = (0,18; 0,70)$ e $L_2 = (1,30; 1,82)$ e aparecem representados na figura 4.22.

Considerando agora os expoentes de Lyapunov a tempo 30, encontramos os pontos de *blowout*, representados por $m_1 = 0,4$ e $m_2 = 1,6$. Na figura 4.23, estes pontos aparecem na interseção da reta $\phi = 0,5$ com o gráfico. As distribuições dos valores dos expoentes de Lyapunov a tempo 100 para alguns valores de d são mostradas na figura 4.24.

De forma global, para qualquer valor do parâmetro a do mapa mostramos na figura 4.25 os intervalos em d para os quais temos VDI no sistema. Os pontos em preto representam valores de *blowout*.

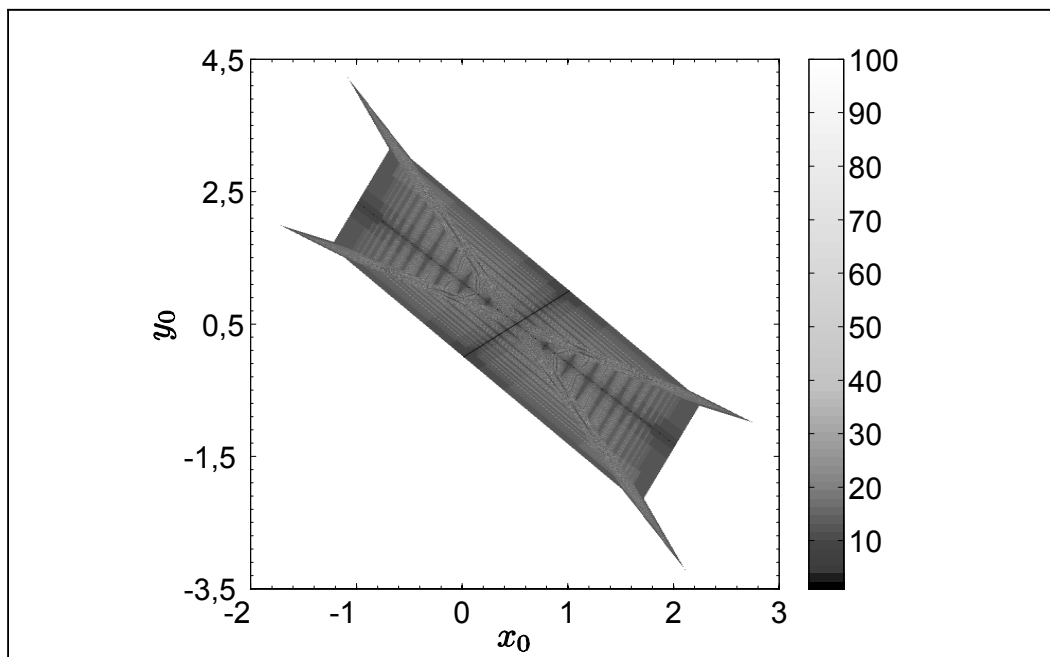


Figura 4.16: Bacia de sincronização globalmente crivada do sistema de dois bangalôs acoplados na versão 2, utilizando os parâmetros $a = 0,45$ e $d = 0,6$. Os pontos em preto representam condições iniciais cujas trajetórias sincronizam num tempo inferior a 100 iterações.

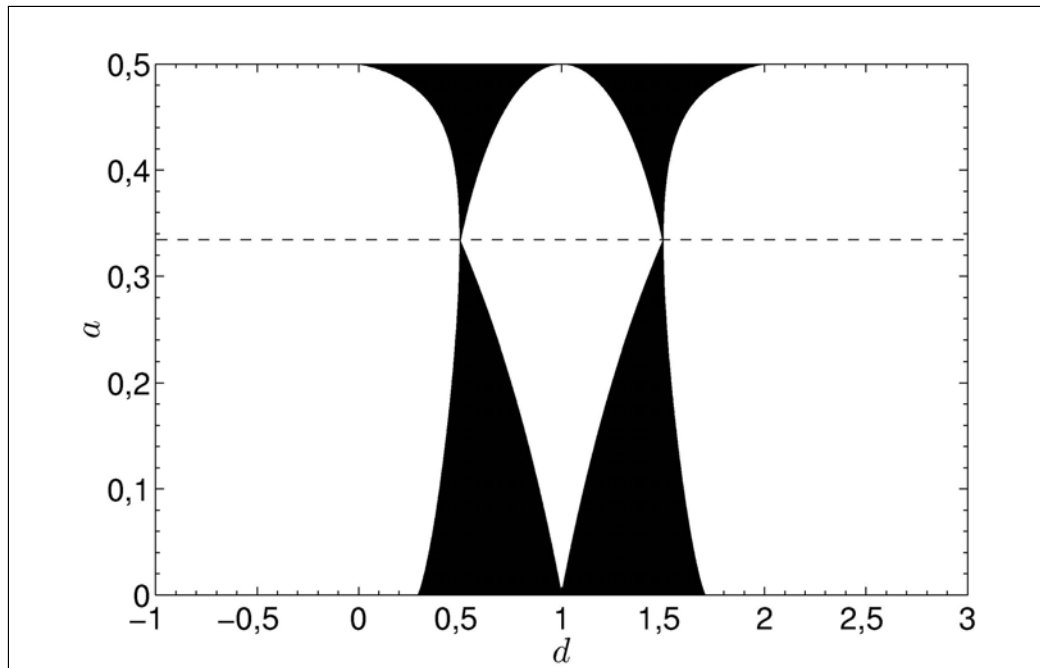


Figura 4.17: Gráfico global no parâmetro de controle a representando os intervalos em d onde ocorrem bacias crivadas na versão 2 do acoplamento de dois bangalôs. Traçando-se uma reta horizontal a partir de qualquer valor de a permitido, a interseção desta reta com o diagrama em preto determina estes intervalos. A linha tracejada divide o gráfico em duas partes: Na parte inferior são os pontos fixos os responsáveis pelo aparecimento de bacia crivadas, enquanto que na parte superior a órbita de período dois cumpre esta função. A transição entre as duas partes ocorre para o valor $a = 1/3$, que corresponde ao parâmetro de controle onde o bangalô se transforma em tenda.

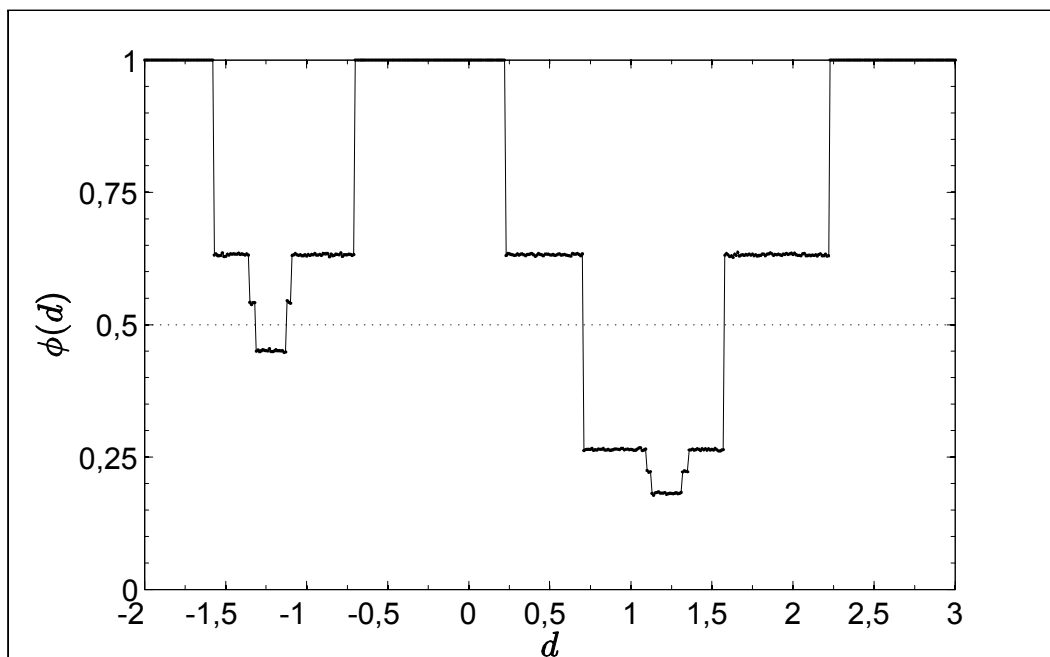


Figura 4.18: Gráfico da fração positiva ϕ dos expoentes de Lyapunov a tempo 1 para o sistema de dois bangalôs acoplados na versão 1, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$. Os intervalos para os quais $\phi \neq 1$ representam valores de d que produzem VDI no sistema e são dados por $H_1 = (-1,58; -0,70)$ e $H_2 = (0,22; 2,23)$. Os extremos destes intervalos correspondem aos pontos de *onset* da VDI.

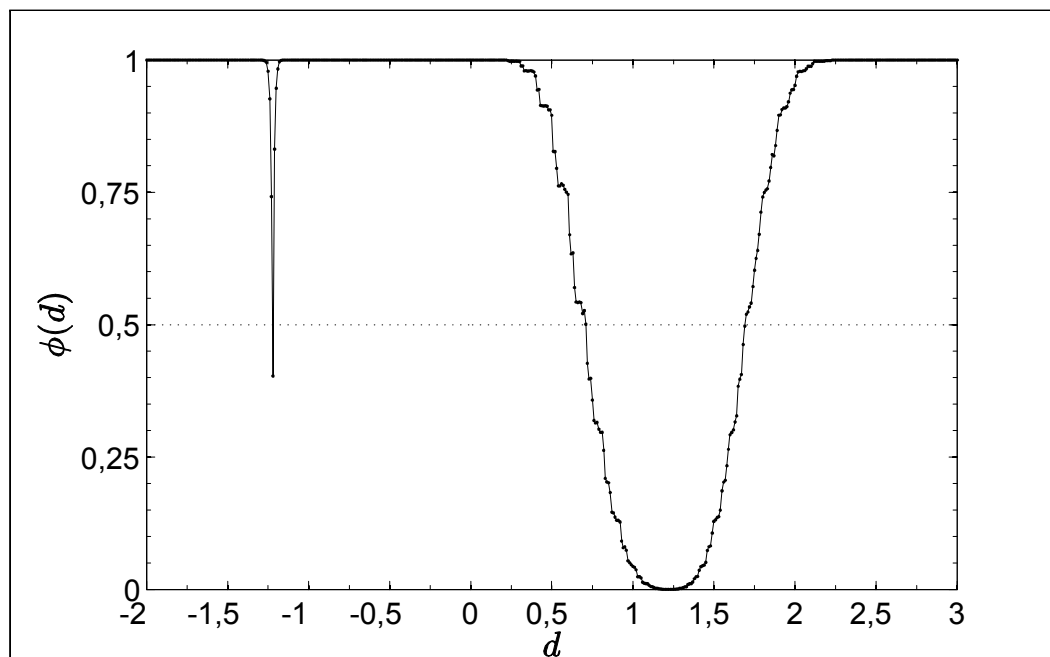


Figura 4.19: Gráfico da fração positiva ϕ dos expoentes de Lyapunov a tempo 30 para o sistema de dois bangalôs acoplados na versão 1, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$. A interseção da reta horizontal $\phi = 0,5$ com o diagrama representa os valores em d para os quais a VDI é máxima (*blowout*). Estes pontos são dados por $k_1 = -1,23$; $k_2 = -1,21$; $k_3 = 0,71$ e $k_4 = 1,69$.

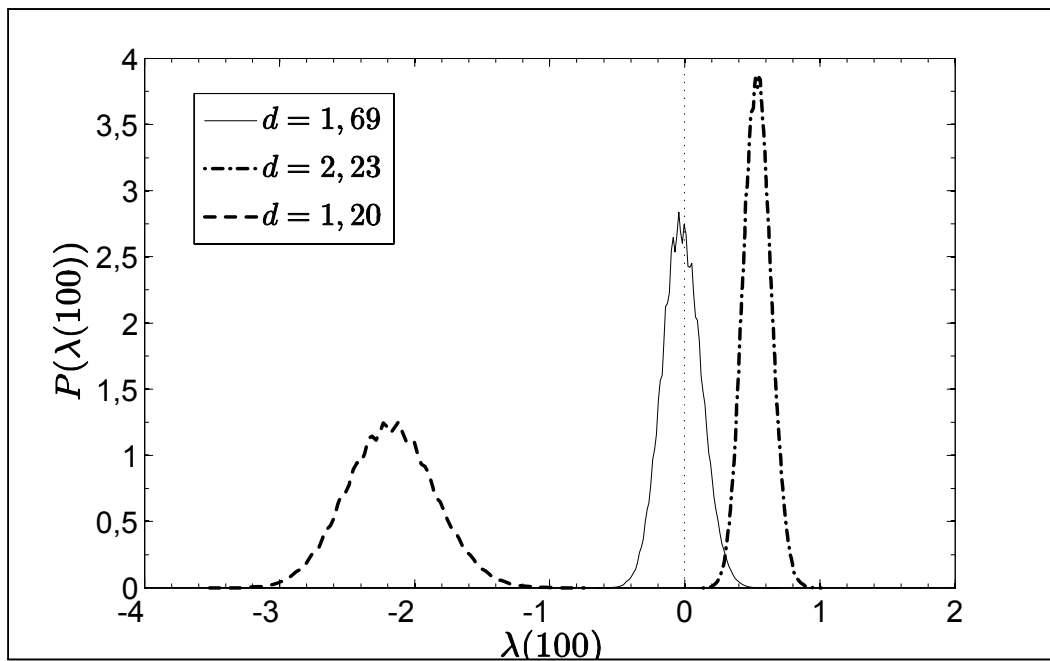


Figura 4.20: Distribuições do expoente de Lyapunov a tempo 100 para o acoplamento de dois bangalôs na versão 1, usando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$; a partir dos valores $d = 1,20$; $d = 1,69$ (*blowout*) e $d = 2,23$.

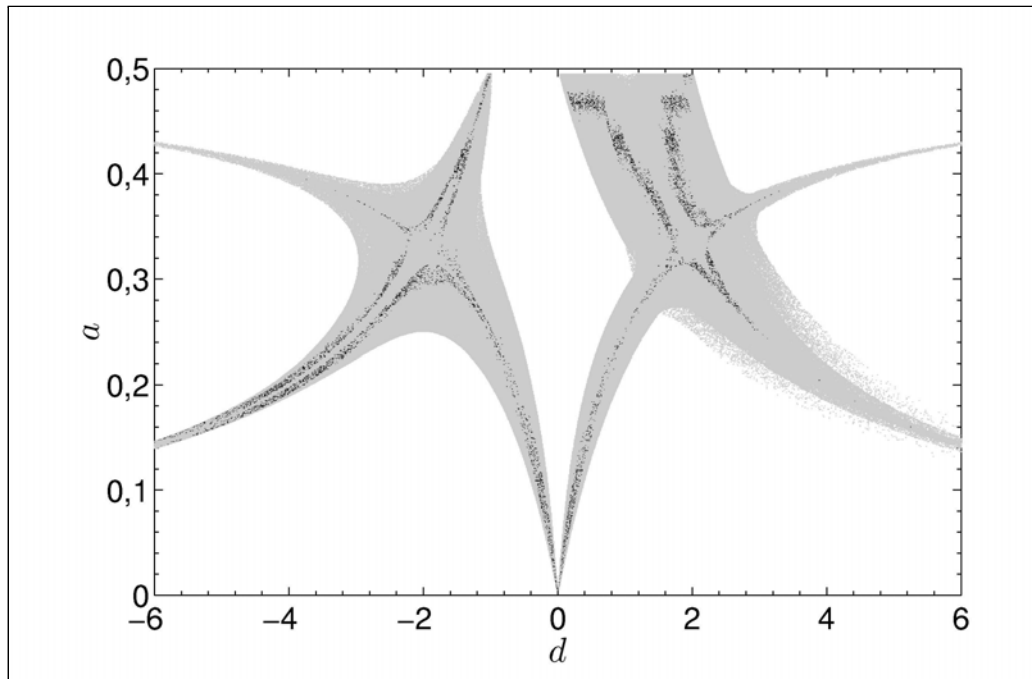


Figura 4.21: Gráfico global no parâmetro de controle a representando os intervalos em d para os quais ocorre VDI na versão 1 do acoplamento de dois bangalôs, utilizando expoentes de Lyapunov a tempo 30. Traçando-se uma reta horizontal a partir de qualquer valor de a permitido, a interseção desta reta com o diagrama em cinza determina os intervalos em d para os quais encontramos VDI no sistema. Os pontos em preto representam valores de d para VDI máxima.

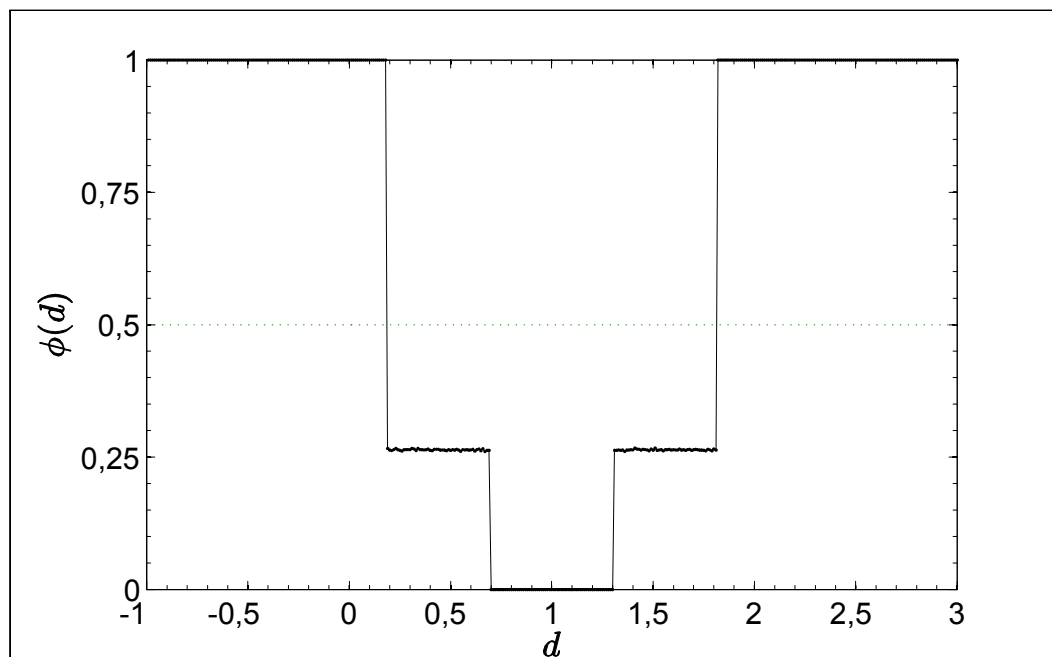


Figura 4.22: Gráfico da fração positiva ϕ dos expoentes de Lyapunov a tempo 1 para o sistema de dois bangalôs acoplados na versão 2, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$. Os intervalos para os quais $\phi \neq 1$ e $\phi \neq 0$ representam valores de d que produzem VDI no sistema e são dados por $L_1 = (0,18;0,70)$ e $L_2 = (1,30;1,82)$. Os extremos destes intervalos correspondem ao *onset* da VDI.

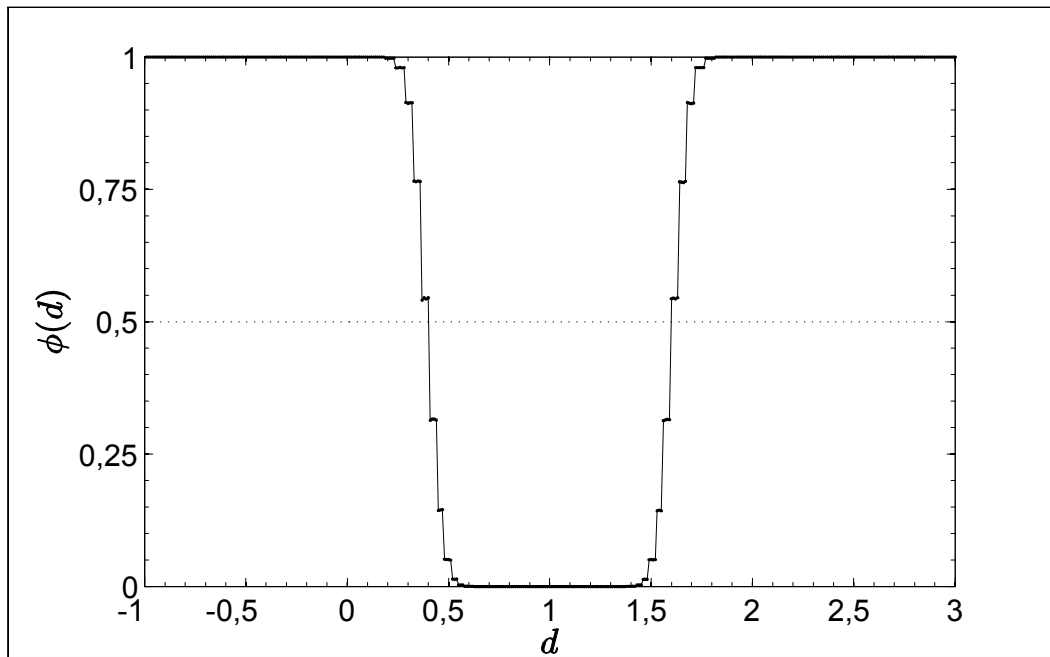


Figura 4.23: Gráfico da fração positiva ϕ dos expoentes de Lyapunov a tempo 30 para o sistema de dois bangalôs acopladas na versão 2, utilizando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$. A interseção da reta horizontal $\phi = 0,5$ com o diagrama representa os valores em d para os quais a VDI é máxima (*blowout*). Estes pontos são dados por $m_1 = 0,4$ e $m_2 = 1,6$.

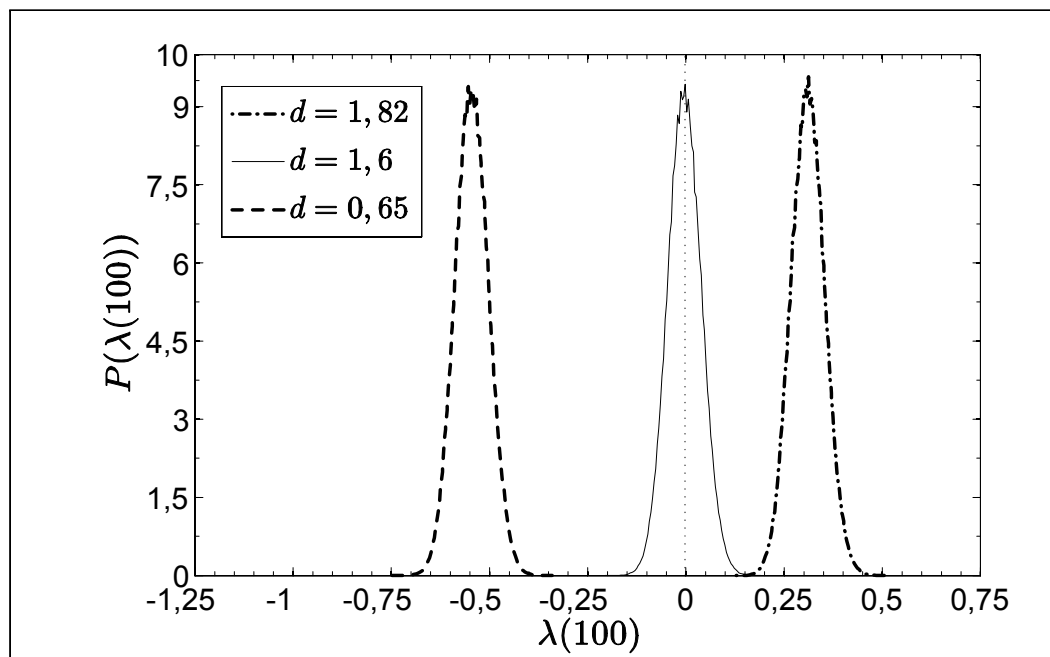


Figura 4.24: Distribuições do expoente de Lyapunov a tempo 100 para o acoplamento de dois bangalôs na versão 2, usando como parâmetro de controle o valor $a = 0,45$; a partir dos valores $d = 0,65$; $d = 1,6$ (*blowout*) e $d = 1,82$. O diagrama ilustra a flutuação destas distribuições em torno de $\lambda(100) = 0$.

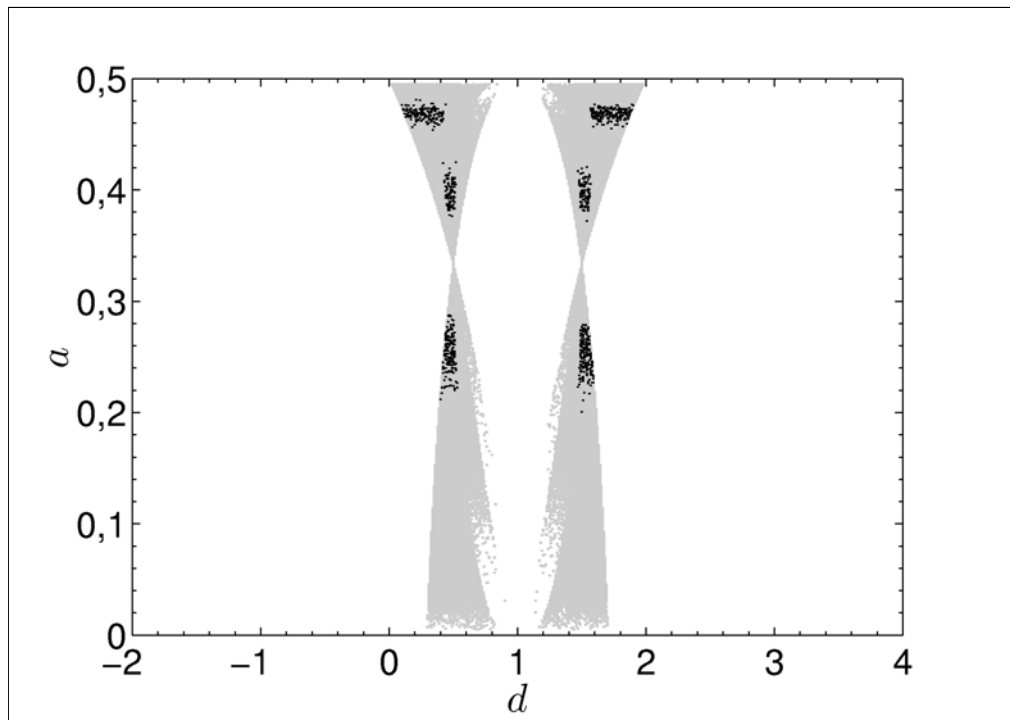


Figura 4.25: Gráfico global no parâmetro de controle a representando os intervalos em d para os quais ocorre VDI na versão 2 do acoplamento de dois bangalôs, utilizando expoentes de Lyapunov a tempo 30. Traçando-se uma reta horizontal a partir de qualquer valor de a permitido, a interseção desta reta com o diagrama em cinza determina os intervalos em d para os quais encontramos VDI no sistema. Os pontos em preto representam valores de d para VDI máxima.

Conclusões e Perspectivas

5.1 Conclusões

O estudo dinâmico no acoplamento dos mapas da tenda inclinada e do bangalô revelou a presença de bacias crivadas e VDI para certos valores do parâmetro d . Na literatura já publicada sobre este assunto encontramos trabalhos [21, 66, 73] descrevendo a existência de bacias crivadas para as duas versões de acoplamento de duas tendas inclinadas, utilizando um parâmetro de controle a . No que diz respeito à VDI nestes sistemas, todos resultados obtidos são originais, bem como o estudo sobre bacias crivadas e VDI nos acoplamentos de dois bangalôs.

Para o mapa da tenda inclinada, o acoplamento na versão 1 mostrou a incidência de bacias crivadas nos intervalos $I_1 = (-2, 237; -1, 731)$ e $I_2 = (1, 731; 2, 237)$, quando o parâmetro do mapa é $a = 0,5$. Nesta versão a instabilidade dos pontos fixos foi suficiente para garantir a ocorrência das bacias crivadas. Na versão 2 não detectamos nenhum intervalo que forneça valores de d para os quais tenhamos uma bacia crivada. Porém, foram apenas analisadas órbitas periódicas de período até 3, e como a figura 3.12 sugere, pode existir alguma órbita de período superior cuja instabilidade permita o crivamento da bacia.

Em relação à VDI, usando novamente $a = 0,5$; encontramos intervalos maiores que

englobam aqueles onde ocorrem bacias crivadas. Estes intervalos são dados por $J_1 = (-3; -1)$ e $J_2 = (1; 3)$ e seus extremos representam o *onset* da VDI. O *blowout* foi encontrado nos pontos $d_1 = -2,24$; $d_2 = -1,74$; $d_3 = 1,74$ e $d_4 = 2,24$. Na versão 2 não encontramos evidências da presença de VDI para nenhum valor de d .

Para o mapa do bangalô, a versão 1 revelou, usando $a = 0,45$; evidências de bacias crivadas em 2 intervalos em relação ao parâmetro d , a saber $C_1 = (-1,227; -1,217)$ e $C_2 = (0,550; 1,831)$. Usando outros valores do parâmetro a do mapa, podemos encontrar até 4 intervalos com as mesmas características. Aqui, a exemplo do mapa da tenda na versão 1, a análise dos pontos fixos já é suficiente para garantir a existência de bacias crivadas. Na versão 2, usando o mesmo valor de a da versão 1, o crivamento das bacias aparece também em dois intervalos, dados por $V_1 = (0,421; 0,705)$ e $V_2 = (1,287; 1,592)$. Porém, neste caso foi necessário analisarmos a única órbita de período 2, visto que a instabilidade dos pontos fixos não gera crivamento de bacias nesta versão de acoplamento.

Na análise da VDI para o valor $a = 0,45$; encontramos na versão 1 dois intervalos onde este fenômeno ocorre, dados por $H_1 = (-1,58; -0,70)$ e $H_2 = (0,22; 2,23)$. Os pontos de *blowout* foram identificados como sendo $k_1 = -1,23$; $k_2 = -1,21$; $k_3 = 0,71$ e $k_4 = 1,69$. Globalmente, para qualquer valor de a permitido, temos um número de intervalos onde a VDI ocorre que pode variar de dois até quatro. Na versão 2 de acoplamento também constatamos a presença de dois intervalos onde a VDI ocorre no sistema, representados por $L_1 = (0,18; 0,70)$ e $L_2 = (1,30; 1,82)$. Nestes intervalos os pontos de *blowout* foram identificados como sendo $m_1 = 0,4$ e $m_2 = 1,6$. De modo global, para todo a , encontramos sempre dois intervalos com ocorrência de VDI, dispostos em duas bandas, conforme a figura 4.17. Na banda inferior o fenômeno é gerado pela instabilidade dos pontos fixos enquanto que na banda superior a instabilidade é da órbita de período dois. Dois intervalos degenerados aparecem quando $a = 1/3$, que é o valor para o qual o bangalô se transforma em tenda.

Quanto às técnicas utilizadas na análise da VDI nos dois sistemas acoplados, observamos

melhores resultados para *onset* utilizando expoentes de Lyapunov a tempo 1. Por outro lado, tempos maiores do que 30 identificam melhor os pontos de *blowout*. Observamos também nos sistemas que os pontos de *blowout* da VDI correspondem aos pontos de *onset* do crivamento das bacias. Finalmente, devido aos métodos estatísticos utilizados, pequenas flutuações nos valores encontrados podem ocorrer quando utilizamos mais e maiores órbitas, principalmente na determinação da VDI.

5.2 Trabalhos Futuros

O estudo dinâmico de mapas lineares por partes possui diversas aplicações em ciência, visto que sistemas lineares são sempre a primeira hipótese para a modelagem de um problema físico. Neste contexto, indicamos como trabalhos futuros os seguintes itens:

- Estender os procedimentos aqui realizados para outros mapas lineares por partes.
- Investigar órbitas de período superior a 3 na versão 2 do acoplamento de duas tendas inclinadas, com a finalidade de completar o estudo de bacias crivadas naquele mapa.
- Expandir o estudo que fizemos para uma rede de mapas da tenda e do bangalô acoplados.

A Equação de Frobenius-Perron

Um resultado importante para o cálculo do expoente de Lyapunov de um sistema é a equação de Frobenius-Perron [75], que define a densidade de probabilidade de pontos sobre uma trajetória a partir de uma condição inicial dada. Neste apêndice, deduzimos uma expressão geral para esta equação.

A.1 Densidade Natural

Chamamos de *densidade natural* [76] uma função $\rho(x)$ que descreve a frequência com a qual as órbitas de um mapa unidimensional M visitam algum intervalo dado, a partir de condições iniciais estabelecidas. Neste sentido, partindo de um número infinito de condições iniciais na reta real, com densidade $\rho_0(x)$, a fração destas condições iniciais contidas num certo intervalo $[a; b]$ é dada por

$$\int_a^b \rho_0(x) dx.$$

Agora, a cada iteração do mapa, temos novas densidades de probabilidade ρ_1, ρ_2, \dots . Assim, a expressão geral para a densidade de pontos num certo intervalo $[a; b]$ a partir das iterações de um mapa M é a equação recursiva

$$\rho_{n+1}(x) = \int_a^b \rho_n(y) \delta[x - M(y)] dy, \quad (\text{A.1})$$

onde $\delta(x)$ é a função delta. Esta equação, que será obtida na próxima seção, é conhecida como *equação de Frobenius-Perron*. A invariância da densidade natural em relação às iterações do mapa permite escrever

$$\rho_{n+1}(x) = \rho_n(x) = \rho(x) \tag{A.2}$$

donde a equação de Frobenius-Perron pode ser escrita na forma

$$\rho(x) = \int_a^b \rho(y) \delta[x - M(y)] dy. \tag{A.3}$$

A.2 Dedução da Equação de Frobenius-Perron

Considerando [75] a figura A.1, observamos que os pontos pertencentes ao intervalo $(x, x + dx)$ no tempo $n + 1$ são obtidos, respectivamente, a partir de pontos nos intervalos $(y^{(i)}, y^{(i)} + dy^{(i)})$, no tempo n , por iteração do mapa M , sendo $y^{(i)}$ soluções da equação $M(y) = x$.

Deste modo, o número de pontos no intervalo $(x, x + dx)$, no tempo $n + 1$, é a soma do número de pontos nos intervalos $(y^{(i)}, y^{(i)} + dy^{(i)})$, no tempo n . Considerando as densidades naturais $\rho_{n+1}(x)$ e $\rho_n(y^{(i)})$, podemos escrever

$$\rho_{n+1}(x) |(x + dx) - x| = \sum_i \rho_n(y^{(i)}) |(y^{(i)} + dy^{(i)}) - y^{(i)}|, \tag{A.4}$$

ou seja,

$$\rho_{n+1}(x) |dx| = \sum_i \rho_n(y^{(i)}) |dy^{(i)}|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \rho_{n+1}(x) &= \sum_i \rho_n(y^{(i)}) \frac{|dy^{(i)}|}{|dx|} = \sum_i \rho_n(y^{(i)}) \frac{1}{|dx|/|dy^{(i)}|} = \\ &= \sum_i \rho_n(y^{(i)}) \left| \frac{dx}{dy^{(i)}} \right|^{-1} = \sum_i \rho_n(y^{(i)}) |M'(y^{(i)})|^{-1}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Agora, utilizando a propriedade da função delta

$$\delta(x - M(y)) = \sum_i \delta(y - y^{(i)}) |M'(y^{(i)})|^{-1}, \tag{A.6}$$

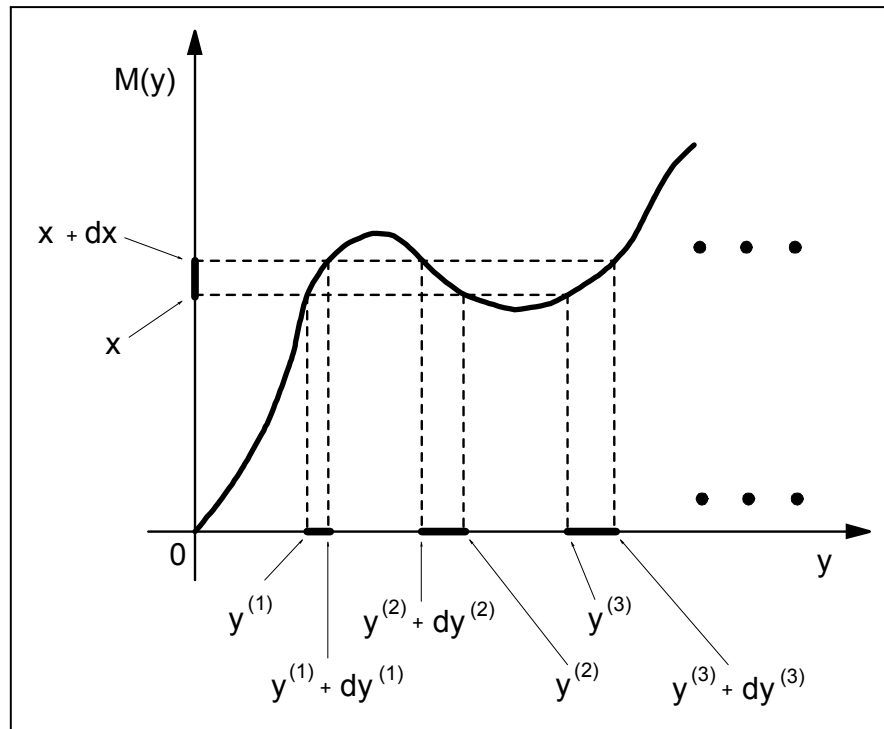


Figura A.1: Dedução da equação de Frobenius-Perron.

e substituindo a somatória por uma integral, obtemos a equação de Frobenius-Perron

$$\rho_{n+1}(x) = \int \rho_n(y) \delta[x - M(y)] dy. \quad (\text{A.7})$$

Bibliografia

- [1] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- [2] J. C. Alexander, J. A. Yorke, Z. You, and I. Kan. Riddled basin. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2(4):795–813, 1992.
- [3] A. Pikovsky and P. Grassberger. Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 24(19):4587–4597, 1991.
- [4] E. Ott and J. C. Sommerer. A physical system with qualitatively uncertain dynamics. *Nature*, 365:138–140, 1993.
- [5] E. Ott, J. C. Sommerer, J. C. Alexander, I. Kan, and J. A. Yorke. The transition to chaotic attractors with riddled basins. *Physical Review Letters*, 71(25):4134–4137, 1993.
- [6] E. Ott, J. C. Alexander, I. Kan, J. C. Sommerer, and J. A. Yorke. The transition to chaotic attractors with riddled basins. *Physica D*, 76(1):384–410, 1994.
- [7] H. Fujisaka and T. Yamada. Synchronization in chaotic systems. *Progress of Theoretical Physics*, 69(1):32–47, 1983.
- [8] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 64(8):821–824, 1990.

-
- [9] E. Ott and J. C. Sommerer. The transition to chaotic attractors with riddled basins. *Physical Letters A*, 188(1):39–47, 1994.
- [10] P. Ashwin, J. Buescu, and I. Stewart. Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators. *Physics Letters A*, 193:126–134, 1994.
- [11] J. F. Heagy, T. Carroll, and L. Pecora. Experimental and numerical evidence for riddled basins in coupled chaotic systems. *Physical Review Letters*, 73:3528–3531, 1994.
- [12] R. H. Parmenter and L. Y. Yu. Riddled behavior of certain synchronized systems. *Physics Letters A*, 189(3):181–186, 1994.
- [13] Y.-C. Lai and R. L. Winslow. Riddled parameter space in spatiotemporal chaotic dynamical systems. *Physical Review Letters*, 72(11):1640–1643, 1996.
- [14] P. Ashwin, J. Buescu, and I. Stewart. From attractor to chaotic saddle: A tale of transverse instability. *Nonlinearity*, 9:703–737, 1996.
- [15] P. Ashwin and M. Breakspear. Anisotropic properties of riddled basins. *Physics Letters A*, 280:139–145, 2001.
- [16] P. Ashwin, X.-C. Fu, and J. R. Terry. Riddling and invariance for discontinuous maps preserving Lebesgue measure. *Nonlinearity*, 15:633–645, 2002.
- [17] Y.-C. Lai, C. Grebogi, J. A. Yorke, and S. C. Venkataramani. Riddling bifurcation in chaotic dynamical systems. *Physical Review Letters*, 77(1):55–58, 1996.
- [18] T. Kapitaniak, Y. L. Maistrenko, A. Stefanski, and J. Brindley. Bifurcations from locally to globally riddled basins. *Physical Review E*, 57(6):6253–6256, 1998.
- [19] H. L. Yang and A. S. Pikovsky. Riddling, bubbling, and Hopf bifurcation in coupled map systems. *Physical Review E*, 60(5):5474–5478, 1999.

- [20] T. Kapitaniak and Y. L. Maistrenko. Chaos synchronization and riddled basins in two coupled one-dimensional maps. *Chaos, Solitons and Fractals*, 9(1;2):271–282, 1998.
- [21] T. Kapitaniak and Y. L. Maistrenko. Riddling bifurcations in coupled piecewise linear maps. *Physica D*, 126:18–26, 1999.
- [22] Y. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, A. Popovich, and E. Mosekilde. Transverse instability and riddled basins in a system of two coupled logistic maps. *Physical Review E*, 57(3):2713–2724, 1998.
- [23] Y. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, O. Popovych, and E. Mosekilde. Desynchronization of chaos in coupled logistic maps. *Physical Review E*, 60(3), 1999.
- [24] M. Manscher, M. Nordahn, E. Mosekilde, and Y. L. Maistrenko. Riddled basins of attraction for synchronized type-I intermittency. *Physical Letters A*, 238(6):358–364, 1998.
- [25] Y.-C. Lai and C. Grebogi. Noise-induced riddling in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 77:5047–5050, 1996.
- [26] Y.-C. Lai. Catastrophe of riddling. *Physical Review E*, 62(4):R4505–R4508, 2000.
- [27] I. Kan. Open sets of diffeomorphisms having two attractors, each with an everywhere dense basin. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 31:68–74, 1994.
- [28] F. Hofbauer, J. Hofbauer, P. Raith, and T. Steinberger. Intermingled basins in a two species system. *Journal Of Mathematical Biology*, 49(3):293–309, 2004.
- [29] M. Woltering and M. Markus. Riddled basins of coupled elastic arches. *Physics Letters A*, 260(6):453–461, 1999.

-
- [30] J. R. Chazottes and B. Fernández, editors. *Dynamics of Coupled Map Lattices And of Related Spatially Extended Systems*, volume 671 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, 2005.
- [31] B. Cazelles. Dynamics with riddled basins of attraction in models of interacting populations. *Chaos Solitons & Fractals*, 12:301–311, 2001.
- [32] B. Cazelles. Blowout bifurcation with non-normal parameters in population dynamics. *Physical Review E*, 64(3):2901–2904, 2001.
- [33] M. Woltering and M. Markus. Riddled basins in a model for the Belousov-Zhabotinsky reaction. *Chemical Physics Letters*, 321(5-6):473–478, 2000.
- [34] S. Yousefi, Y. Maistrenko, and S. Popovich. Complex dynamics in a simple model of interdependent open economies. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 5(3):161–177, 2000.
- [35] R. L. Viana and C. Grebogi. Riddled basins and unstable dimensions variability in chaotic systems with and without symmetry. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 11(10):2689–2698, 2001.
- [36] Y.-C. Lai and C. Grebogi. Riddling of chaotic sets in periodic windows. *Physical Review Letters*, 83(15):2926–2929, 1999.
- [37] J. R. Terry and P. Ashwin. Comment on riddling of chaotic sets in periodic windows. *Physical Review Letters*, 85(2):472–472, 2000.
- [38] Y.-C. Lai and C. Grebogi. Riddling of chaotic sets in periodic windows - reply to a comment. *Physical Review Letters*, 85:473–473, 2000.
- [39] M. Woltering and M. Markus. Riddled-like basins of transient chaos. *Physical Review Letters*, 84(4):630–633, 2000.

-
- [40] B. Blazejczyk-Okolewska, B. J. Brindley, and T. Kapitaniak. Practical riddling in mechanical systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11(15):2511–2514, 2000.
- [41] T. Kapitaniak. Partially nearly riddled basins in systems with chaotic saddle. *Chaos, Solitons and Fractals*, 12:2363–2367, 2001.
- [42] J. Aguirre and M. A. F. Sanjuán. Limit of small exits in open Hamiltonian systems. *Physical Review E*, 67:6201–6207, 2003.
- [43] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [44] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [45] R. Abraham and S. Smale. Nongenericity of Ω -stability. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 14:5–8, 1970.
- [46] Y.-C. Lai, C. Grebogi, and J. Kurths. Modeling of deterministic chaotic systems. *Physical Review E*, 59(3):2907–2910, 1999.
- [47] F. J. Romeiras, C. Grebogi, E. Ott, and W. P. Dayawansa. Controlling chaotic dynamic systems. *Physica D*, 58:165–192, 1992.
- [48] S. Dawson, C. Grebogi, T. Sauer, and J. A. Yorke. Obstructions to shadowing when a Lyapunov exponent fluctuates about zero. *Physical Review Letters*, 73(14):1927–1930, 1994.
- [49] Y.-C. Lai, D. Lerner, K. Williams, and C. Grebogi. Unstable dimension variability in coupled chaotic systems. *Physical Review E*, 60(5):5445–5454, 1999.
- [50] S. P. Dawson. Strange nonattracting chaotic sets, crises and fluctuating Lyapunov exponents. *Physical Review Letters*, 76(23):4348–4351, 1996.

-
- [51] R. L. Viana, S. E. de S. Pinto, and C. Grebogi. Chaotic bursting at the onset of unstable dimension variability. *Physical Review E*, 66(4):6213–6221, 2002.
- [52] E. Barreto and P. So. Mechanisms for the development of unstable dimension variability and the breakdown of shadowing in coupled chaotic systems. *Physical Review Letters*, 85(12):2490–2493, 2000.
- [53] R. L. Viana and C. Grebogi. Unstable dimension variability and synchronization of chaotic systems. *Physical Review E*, 62(1):462–468, 2000.
- [54] R. L. Viana, C. Grebogi, S. E. de S. Pinto, S. R. Lopes, A. M. Batista, and J. Kurths. Validity of numerical trajectories in the synchronization transition of complex systems. *Physical Review E*, 68(6):7204–7207, 2003.
- [55] R. L. Viana, J. R. R. Barbosa, C. Grebogi, and A. M. Batista. Simulating a chaotic process. *Brazilian Journal of Physics*, 35(01):139–147, 2005.
- [56] R. L. Viana, C. Grebogi, S. E. de S. Pinto, S. R. Lopes, A. M. Batista, and J. Kurths. Bubbling bifurcation: Loss of synchronization and shadowing breakdown in complex systems. *Physica D*, 206:94–108, 2005.
- [57] G. T. Kubo, R. L. Viana, S. R. Lopes, and C. Grebogi. Crisis-induced unstable dimension variability in a dynamical system. *Physics Letters A*, 372:5569–5574, 2008.
- [58] L. H. A. Monteiro. *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006.
- [59] J. Milnor. On the concept of attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 99(2):177–195, 1985.
- [60] H. Poincaré. Sur les courbes définies par une équation différentielle. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 90:673–675, 1880.

- [61] J. S. Hadamard. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 4(5):27–74, 1898.
- [62] R. M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261:459–467, 1976.
- [63] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 50:69–77, 1976.
- [64] O. Rössler. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57(5):397–398, 1976.
- [65] R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.
- [66] M. Hasler and Y. L. Maistrenko. An introduction to the synchronization of chaotic systems: Coupled skew tent maps. *IEEE Transactions on Circuits Systems*, 44(10), 1997.
- [67] P. Billingsley. *Ergodic Theory and Information*. John Wiley & Sons, New York, 1965.
- [68] R. Mañé. *Teoria Ergódica*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 1983.
- [69] N. N. Bogolyubov and N. M. Krylov. La theorie generalie de la mesure dans son application a l’etude de systemes dynamiques de la mecanique non-lineaire. *Annals of Mathematics*, 38(2):65–113, 1937.
- [70] J. Aguirre, R. L. Viana, and M. A. F. Sanjuán. Fractal structures in nonlinear dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 81(1):333–386, 2009.
- [71] B. Salzmänn. Finite amplitude free convection as an initial value problem. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 19:239–341, 1962.
- [72] R. Stoop and W.-H. Steeb. Chaotic family with smooth Lyapunov dependence. *Physical Review E*, 55(6):7763–7766, 1997.

-
- [73] N. Tan, Y. Chen, and J. Xu. A special bifurcation of riddled basin in two coupled skew tent maps. *Chaos, Solitons and Fractals*, 18:17–23, 2003.
- [74] W.-H. Steeb, M. A. van Wyk, and R. Stoop. Chaotic maps, control parameter and Lyapunov exponent. *International Journal of Theoretical Physics*, 37(10):2653–2655, 1998.
- [75] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [76] J.-P. Eckmann and D. Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, 57(3):617–656, 1985.
- [77] C. Sparrow. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [78] D. Gulick. *Encounters with Chaos*. McGraw-Hill, New York, 1992.
- [79] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books, Reading, Massachusetts, 1994.

Produção Científica

Neste último apêndice são apresentadas as seguintes publicações científicas, geradas neste trabalho:

- *Riddled Basins in Complex Physical and Biological Systems*. Journal of Computational Interdisciplinary Sciences, **1**(2):73-82, 2009.
- *Riddling and Chaotic Synchronization of Coupled Piecewise-linear Lorenz Maps*. Physica A, **388**:2515-2525, 2009.



Riddled basins in complex physical and biological systems

Ricardo Luiz Viana¹, Sabrina Camargo², Rodrigo F. Pereira¹, Marcos César Vergés¹,
Sérgio Roberto Lopes¹ and Sandro Ely S. Pinto³

Manuscript received on November 12, 2008 / accepted on January 10, 2009

ABSTRACT

Complex systems have typically more than one attractor, either periodic or chaotic, and their basin structure ultimately determines the final-state predictability. When certain symmetries exist in the phase space, their basins of attraction may be riddled, which means that they are so densely intertwined that it may be virtually impossible to determine the final state, given a finite uncertainty in the determination of the initial conditions. Riddling occurs in a variety of complex systems of physical and biological interest. We review the mathematical conditions for riddling to occur, and present two illustrative examples of this phenomenon: coupled Lorenz-like piecewise-linear maps and a deterministic model for competitive indeterminacy in populations of flour beetles.

Keywords: riddled basins, basins of attraction, complex systems, chaotic attractors.

Correspondence to: Ricardo Luiz Viana

¹Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, 81531-990 Curitiba, PR, Brazil.

²Instituto de Física, Universidade de São Paulo, 05315-970 São Paulo, SP, Brazil.

³Departamento de Física, Universidade Estadual de Ponta Grossa, 84032-900 Ponta Grossa, PR, Brazil.

E-mails: viana@fisica.ufpr.br / sabrina@fisica.ufpr.br / pereira@fisica.ufpr.br / mcverges@fisica.ufpr.br / lopes@fisica.ufpr.br / desouzapinto@gmail.com

1 INTRODUCTION

Chaotic dynamical systems having certain symmetries and quite general mathematical properties may present basins of attraction densely intertwined, a phenomenon called *riddling* (for a recent review covering theoretical and experimental aspects of riddling see Ref. [1]). In this case the system has a chaotic attractor \mathbf{A} whose basin of attraction is riddled with “holes” (in a measure-theoretical sense) belonging to the basin of another (non necessarily chaotic) attractor \mathbf{B} [2]. In other words, riddling means that every point in the basin of attractor \mathbf{A} has pieces of the basin of attractor \mathbf{B} arbitrarily nearby. The basins are called intermingled, when each basin is riddled with holes belonging to the other basin. For intermingled basins there must be at least two attractors lying in different invariant subspaces [2, 3].

Basin riddling affects our ability of predicting what attractor the trajectory originating from a given initial condition asymptotes to. Let \mathbf{P} be an arbitrary point belonging to the basin of the chaotic attractor \mathbf{A} . If the basin of \mathbf{A} is riddled by the basin of the other attractor \mathbf{B} , then a small ball of radius ϵ centered at \mathbf{P} has a nonzero fraction of its volume belonging to the basin of \mathbf{B} , irrespective of how small the radius ϵ may be. Hence, if we regard this ϵ -ball as an uncertainty neighborhood related to the (numerical or experimental) determination of the initial condition, the resulting trajectory has always a positive probability of falling into the basin of the other attractor. In other words, the probability of escaping from the basin of attractor \mathbf{A} is nonzero for every uncertainty ϵ . Consequently, in the presence of riddling, the task of predicting what will be the final state of the system becomes much more difficult than in the cases of fractal basins, where the boundary is a fractal curve and the uncertain fraction scales with ϵ as a power-law [4].

There are many examples of riddling in dynamical systems of physical and biological interest, as a forced double-well Duffing oscillator [5, 6, 7], coupled nonlinear electronic circuits [8, 9], coupled elastic arches [10], ecological population models [11], learning dynamical systems [12], chemical reactions of the Belousov-Zhabotinsky type [13], and in models of interdependent open economies [14]. In this paper we describe applications of riddled and intermingled basins in physical and biological complex systems.

This paper is organized as follows: in Section 2 we review the mathematical conditions for the existence of riddled basins. Section 3 deals with riddled basins in coupled piecewise-linear maps which can be viewed as a low-dimensional reduction of coupled Lorenz equations, for which riddling is thought to occur.

Section 4 brings an application of riddling in a dynamical system of biological interest, describing the competitive indeterminacy for two species of a flour beetle, and which presents intermingled basins. The last Section contains our conclusions.

2 MATHEMATICAL CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF RIDDLED BASINS

Let \mathbf{H} be the phase space in which a discrete-time map $x_{n+1} = F(x_n)$ is defined. Continuous-time flows can be also described by F , if Poincaré sections are taken. A closed subset $\mathbf{A} \in \mathbf{H}$ is said to be an attractor of F if it satisfies the following conditions:

- (i) \mathbf{A} has a basin of attraction, denoted $\beta(\mathbf{A})$, of positive Lebesgue measure (volume) in the phase space \mathbf{H} ;
- (ii) \mathbf{A} is a compact set with a dense orbit. In the Milnor definition of attractor, the basin of attraction does not need to include the whole neighborhood of the attractor.

If the basin of attraction of \mathbf{A} has positive Lebesgue measure, we call \mathbf{A} a weak Milnor attractor [15].

The basin of a chaotic attractor \mathbf{A} is riddled if its complement intersects every disk (in the sense of phase-space volumes of all sizes) of the phase space \mathbf{H} in a set of positive Lebesgue measure [2]. When the basin of attraction of \mathbf{A} is riddled with holes belonging to the basin of another attractor \mathbf{B} , we can say that, if a randomly chosen point has a positive probability of being in $\beta(\mathbf{A})$, then it also has positive probability of not being in $\beta(\mathbf{A})$. In the latter case, the point belongs to the other basin of attraction $\beta(\mathbf{B})$.

This measure-theoretical definition implies the following set of conditions under which riddled basins occur in a dynamical system [6]:

1. there is an invariant subspace $\mathbf{M} \in \mathbf{H}$;
2. the dynamics on \mathbf{M} has a chaotic attractor \mathbf{A} ;
3. there is another attractor \mathbf{B} not belonging to \mathbf{M} ;
4. the attractor \mathbf{A} is transversely stable in \mathbf{H} , i.e. for typical orbits on the attractor the Lyapunov exponents for infinitesimal perturbations along the directions transversal to the invariant subspace \mathbf{M} are all negative;
5. a set of unstable periodic orbits embedded in \mathbf{A} is transversely unstable. As a consequence, at least one of the Lyapunov exponents along directions transverse to \mathbf{M} experiences positive finite-time fluctuations.

Condition **1** is a consequence of the system having some symmetry which enables it to display an invariant subspace \mathbf{M} , in the sense that, once an initial condition is exactly placed on \mathbf{M} , the resulting trajectory cannot escape from \mathbf{M} for further times. To have riddling, it is necessary to have a dense set of points with zero Lebesgue measure in the attractor lying in the invariant subspace which are transversely unstable, thus it is necessary that this attractor be chaotic (condition **2**). The existence of another attractor (condition **3**) is necessary for the basin of an attractor to be riddled with holes belonging to the basin of this second attractor.

If the transverse Lyapunov exponents of typical orbits lying in the invariant manifold \mathbf{M} are all negative (condition **4**), then \mathbf{A} is an attractor at least in the weak Milnor sense, and its basin has positive Lebesgue measure. This can be verified by computing the maximal Lyapunov exponent along a transversal direction to \mathbf{M} :

$$\lambda_{\perp} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_{\perp}(x_0, n) < 0, \tag{1}$$

where

$$\tilde{\lambda}_{\perp}(x_0; n) = \frac{1}{n} \ln \|Df^n(x_0) \cdot v_{\perp}\|, \tag{2}$$

is the maximal time- n Lyapunov exponent along a transversal direction (specified by the singular vector v_{\perp}) with respect to the invariant manifold \mathbf{M} , $DF^n(x_0)$ being the Jacobian matrix of the n times iterated map F , with entries evaluated at an initial condition $x_0 \in \mathbf{A}$.

Condition **5** states that, while the invariant manifold \mathbf{M} is still transversely stable, there will be trajectories on the attractor \mathbf{A} that are transversely unstable. Verifying condition **5**, on the other hand, would require the determination of a transversely unstable periodic orbit embedded in the attractor \mathbf{A} . A consequence of these transversely unstable orbits is that there will be typically a number of positive values of the finite-time transversal Lyapunov exponent, or $\tilde{\lambda}_{\perp}(x_0, n) > 0$. Hence, this condition can be statistically verified by considering the probability distribution of finite-time transversal exponents $P(\tilde{\lambda}_{\perp}(x_0, n))$.

The existence of positive values of $\tilde{\lambda}_{\perp}(x_0, n)$ – condition **5** for riddling – implies that there is a fraction of positive values of $\tilde{\lambda}_{\perp}(x_0, n)$ for initial conditions x_0 randomly chosen in the attractor \mathbf{A} , i.e.

$$f(n) = \int_0^{\infty} P(\tilde{\lambda}_{\perp}(n)) d\tilde{\lambda}_{\perp}(n) > 0. \tag{3}$$

assuming that the probability is properly normalized.

3 RIDDLED BASINS IN LORENZ-LIKE MAPS

The modern age of nonlinear dynamics begun in 1963, when Ed Lorenz investigated the dynamics generated by a three-mode reduction of the equations governing thermal convection, that is one of the mechanisms underlying climate changes [16]. Lorenz realized that the chaotic dynamics exhibited by the three-mode differential equations

$$\frac{dx}{dt} = 10(y - x), \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dt} = x(28 - z) - y, \tag{5}$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z, \tag{6}$$

could be understood in terms of a simpler, low-dimensional discrete map. The so-called Lorenz map is obtained by sampling the local maxima of one of the evolving variables, $h_n = \max_{t=t_n} \{z(t)\}$, so as to yield a first return map $h_{n+1} = L(h_n)$, which is unimodal with a cusp [Fig. 1(a)]. Such maps display a similar dynamical behavior as the tent map ($x_{n+1} = 1 - 2|x_n - 1/2|$) and, in fact, this similarity was used by Lorenz to explain the erratic behavior of orbits belonging to the famous “butterfly attractor” in the three-dimensional phase space [16].

Another piecewise-linear approximation to the Lorenz map is provided by the so-called bungalow-tent map, which has out of four linear segments instead of two, as in the tent function [17, 18]:

$$x_{n+1} = f_a(x_n) = \begin{cases} \frac{1-a}{a}x_n, & \text{if } x_n \in [0, a), \\ \frac{2a}{1-2a}x_n + \frac{1-3a}{1-2a}, & \text{if } x_n \in [a, \frac{1}{2}), \\ \frac{2a}{1-2a}(1-x_n) + \frac{1-3a}{1-2a}, & \text{if } x_n \in [\frac{1}{2}, 1-a), \\ \frac{1-a}{a}(1-x_n), & \text{if } x_n \in [1-a, 1], \end{cases} \tag{7}$$

where $a \in (0, \frac{1}{2})$ is a control parameter. For $a = \frac{1}{3}$ we obtain the tent map. A linear coordinate transformation $h = 22x + 32$ and the choice $a = 0.45$ furnish a better approximation of the Lorenz map in comparison with the tent function [Fig. 1(b)]. In the following we will refer to the former as the piecewise-linear Lorenz map.

The two fixed points of the bungalow map are $P_1 : x_1^* = 0$ and the right corner point $P_2 : x_2^* = 1 - a$. For all values of the control parameter a , the fixed points are unstable

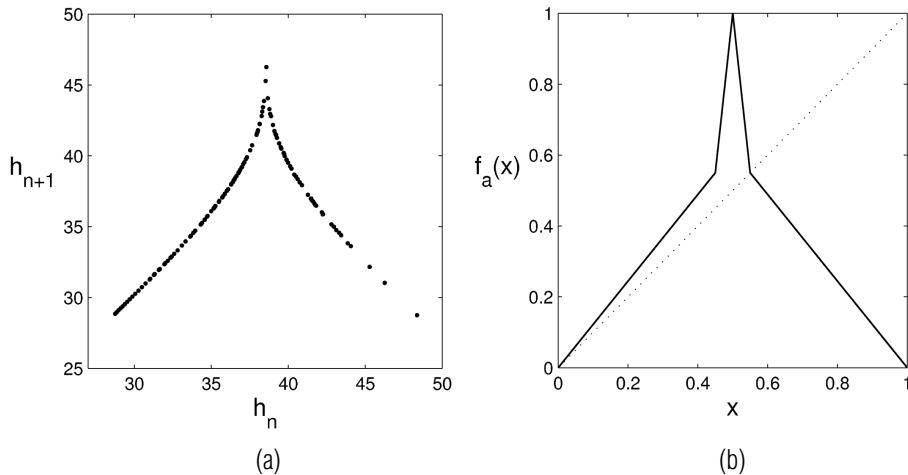


Figure 1 – (a) Lorenz map. (b) Bungalow-tent map for $a = 0.45$.

because the eigenvalues $\delta_{1,2} = (a - 1)/a$ are greater than 1 in modulus. Although the map is non-smooth at the fixed point x_2^* , we can define the map derivative at the right-hand site of x_2^* , because this point belongs to the interval $[1 - a, 1]$. Thanks to the piecewise-linearity of this map, it is possible to obtain analytically its Lyapunov exponent for any value of a , namely [17, 18]:

$$\lambda(a) = \frac{1-a}{2-3a} \ln\left(\frac{1-a}{a}\right) + \frac{1-2a}{2-3a} \ln\left(\frac{2a}{1-2a}\right). \quad (8)$$

In particular, for $a = 1/3$ (tent map) we obtain $\lambda = \ln 2$, and, for other values of a , the Lyapunov exponent is always positive, displaying a smooth dependence with a . For the approximation to the Lorenz map which results from $a = 0.45$, we have $\lambda = 0.5078$.

Systems of coupled Lorenz equations have been found numerically to exhibit a suggestive evidence for riddled basins [19], although without a mathematical proof. Such an investigation is indeed quite difficult in view of the high dimensionality of the system and of the rather strong mathematical requirements necessary to characterize riddled basins, as we have seen in the previous Section. Hence we can resort to the one-dimensional reduction performed by taking the Lorenz map and its piecewise-linear counterpart. Hence we can study the presence of riddled basins in coupled Lorenz equations starting from its simplest possible version, which is the coupling of piecewise-linear Lorenz maps in the form

$$x_{n+1} = f_a(x_n) + \delta(x_n - y_n), \quad (9)$$

$$y_{n+1} = f_a(y_n) + \epsilon(y_n - x_n), \quad (10)$$

where f_a is given by Eq. (7), and δ and ϵ are coupling strengths

which can be different when the coupling is asymmetric, and even vanish for unidirectional coupling (a master-slave configuration). As we will see, the dynamics of the system depends essentially on their sum $d \equiv \delta + \epsilon$.

It has been known for a long time that two identical coupled chaotic systems, in spite of their characteristic sensitivity on the initial condition, can attain a completely synchronized state characterized by $x_n = y_n$ for all times n [20, 21]. In terms of the two-dimensional phase space \mathbf{H} of the coupled system, the synchronized state defines a synchronization subspace \mathbf{M} , which is the straight line $x = y$. The orbit in the synchronized state is obviously the same as a chaotic orbit from the uncoupled maps. Hence, it turns out that \mathbf{M} is an invariant subspace, thus fulfilling condition **1** for riddling. Moreover, there is a chaotic attractor \mathbf{A} embedded in the synchronization subspace (condition **2**), such that the fixed points in \mathbf{M} are $P_1 = 0$ and $P_2 = 1 - a$, belonging to the intervals $[0, a)$ and $[1 - a, 1]$, respectively. In this case, there is only one transversal direction to \mathbf{M} . Besides the synchronized state, there exists another attractor \mathbf{B} off the manifold \mathbf{M} , that is the attractor at infinity (condition **3**).

In order to verify condition **4** for riddling, we have to investigate for which values of the coupling coefficient d the transversal Lyapunov exponent is negative. The exponent along the transversal direction, on the other hand, can be obtained by applying Birkhoff ergodic theorem as [15]:

$$\lambda_{\perp} = \frac{1}{2-3a} \left[a \ln \left| \frac{1-a}{a} - d \right| + \frac{1-2a}{2} \ln \left| \frac{2a}{1-2a} - d \right| \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1-2a}{2} \ln \left| \frac{-2a}{1-2a} - d \right| \\
 & + \frac{1-2a}{2-3a} \ln \left| \frac{-(1-a)}{a} - d \right|, \quad (11)
 \end{aligned}$$

where we have used the invariant density of the isolated map [17, 18].

In Figure 2 we plot the transversal Lyapunov exponent as a function of the coupling strength sum $d = \delta + \varepsilon$ for $a = 0.45$. There are out of four intervals of d for which the transversal Lyapunov exponent is negative, thus fulfilling Condition 4 for riddling. The boundaries of these intervals are the given by the values of d for which $\lambda_{\perp} = 0$, yielding transcendental equations in view of (11). The intervals characterized by negative transversal exponents for the piecewise-linear Lorenz case ($a = 0.45$) are $I_1 = (-1.224, -1.220)$ and $I_2 = (0.689, 1.707)$.

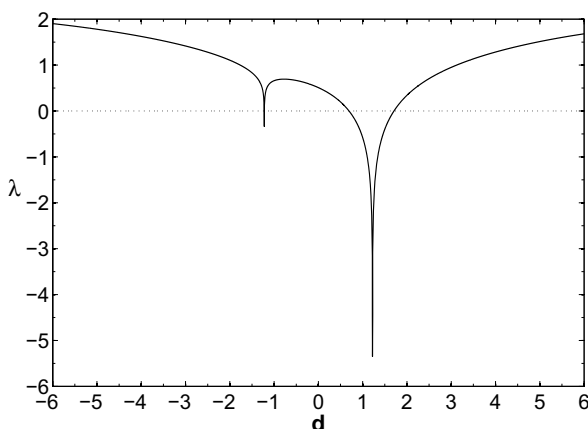


Figure 2 – Transversal Lyapunov exponent for the synchronized attractor of coupled piecewise-linear Lorenz maps with $a = 0.45$ (as a function of the coupling strength d).

We can now verify condition 5 for riddling, that demands that there exist transversely unstable fixed points in the synchronized attractor \mathbf{A} . In principle, any periodic orbit embedded in \mathbf{A} can be transversely unstable, so we start by the fixed points. Thanks to the piecewise-linearity of the bungalow-tent map, we can compute analytically the eigenvalues of the fixed points along transversal directions to the synchronization subspace. In Figure 3 we plot the moduli of the transversal eigenvalue μ_2 as a function of the coupling parameter d for the fixed points P_1 and P_2 of the coupled maps. Regardless of the value taken on by d , there will be always some transversely unstable fixed point, i.e. there is at least one transversal eigenvalue having modulus greater than the unity.

For the fixed point $P_1 = 0$ this interval is $d_1 < d < d_2$, where

$$d_{1,2} = \left(\frac{1-a}{a} \right) \mp 1, \quad (12)$$

and for $P_2 = 1 - a$, $-d_2 < d < -d_1$. For $a = 0.45$, as in Figure 3, these intervals are $I_3 = (-2.23, -0.22)$ and $I_4 = (0.22, 2.23)$ for the fixed points P_1 and P_2 , respectively.

Summing up, since condition 5 is verified for any d , the only relevant condition for riddling is 4, i.e. the coupling strength sum d must take on a value belonging to the intervals I_1 or I_2 such that we have riddled basins of attraction.

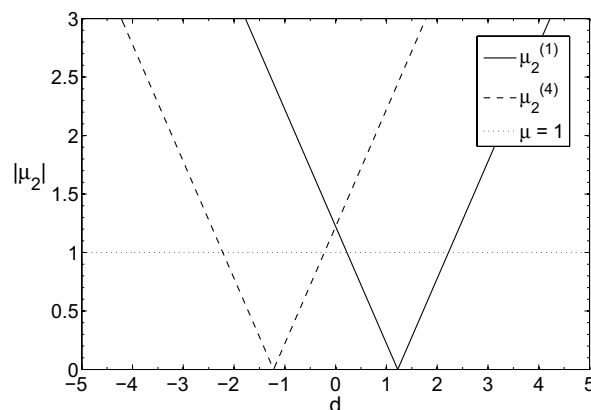


Figure 3 – Moduli of the transversal eigenvalue of the coupled piecewise-linear Lorenz maps as a function of the coupling strength d for the fixed points $P_1 = 0$ and $P_2 = 1 - a$.

An example of a non-riddled basins of synchronization is provided by Figure 4(a), where the black pixels represent initial conditions in the phase plane which asymptote to the synchronized state $x_n = y_n$, whereas white pixels represent initial conditions generating orbits which go to infinity. In fact, the black and white regions do not seem to be densely intertwined, as required for riddled basins, and are actually fractal ones, with a nonetheless involved basin boundary structure. A riddled basin is exemplified in Figure 4(b), for which the value ($d = 1.5$) of the coupling strength is such that $\lambda_T < 0$ (condition 4). The black and white regions are densely intermixed, such that for any point belonging to the basin of the synchronized attractor there exists a neighborhood containing points belonging to the basin of infinity.

4 INTERMINGLED BASINS IN A COMPETITION TWO-SPECIES SYSTEM

Experiments on the competition of two species of flour beetles, *Tribolium castaneum* and *Tribolium confusum* resulted in the eventual extinction of either one of the two competitors [22]. However,

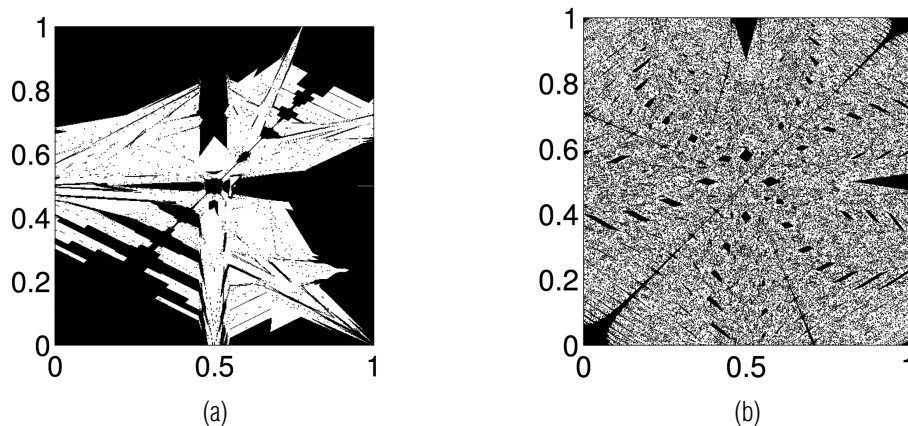


Figure 4 – Initial conditions in the phase plane for $a = 0.45$ and (a) $d = 0.5$ and (b) $d = 1.5$. The black pixels represent initial conditions which converge to a synchronized state, whereas white pixels are initial conditions generating orbits going to infinity.

the particular species to become extinct was found to be extremely sensitive to the initial population and the environmental conditions (such as temperature and humidity) prevailing during the realization of the experiment [23]. Moreover, there are also experimental evidences of chaotic behavior in the time evolution of the populations of single species of *Tribolium* [24]. Hence we may regard the extinction of either species as an asymptotic state with a well-defined attractor in the phase space [25]. The observed extreme sensitivity on the initial condition has led to the hypothesis that the basins of these attractors are riddled [26].

In fact, the basins of attraction are intermingled, for each basin is riddled with holes belonging to the other basin. In this case the two coexisting attractors must lie in different invariant subspaces, and the basin of each attractor is pierced with holes containing initial conditions belonging to the basin of the other attractor [2, 3]. Moreover, these basins are so intertwined that, given an initial condition with a finite uncertainty, the final state cannot be predicted. The sensitivity observed in the *Tribolium sp.* experiments suggests that a mathematical model describing the problem should exhibit intermingled basins, since the initial population in the experiments correspond to an initial condition which is unavoidably plagued with some uncertainty, and thus the outcome becomes uncertain, even if the accuracy is very large in determining the initial condition [25, 26].

Hofbauer and coworkers [25] have developed a class of two-dimensional models in which we consider two species with populations $x_1(n)$ and $x_2(n)$ at (discrete) times $n = 0, 1, 2, \dots$, which labels the insect generation, and satisfying identical evolution equations. We can adapt our conditions for riddling to the case of intermingled basins in this two-dimensional phase space H , as follows:

- 1a.** there are two invariant one-dimensional subspaces M_0 and M_1 in the phase plane;
- 2a.** the dynamics on the invariant subspaces M_0 and M_1 have chaotic attractors **A** and **B**, respectively;
- 3a.** the attractors **A** and **B** are transversely stable in the phase plane, i.e. for typical orbits on the attractors the Lyapunov exponent for infinitesimal perturbations along the direction transversal to the invariant subspaces M_0 and M_1 , respectively, is negative;
- 4a.** a set of unstable periodic orbits embedded in the chaotic attractors **A** and **B** are transversely unstable. As a consequence, along the direction transversal to M_0 and M_1 , the Lyapunov exponent experiences positive finite-time fluctuations.

The Hofbauer model starts from the map equations

$$x_1(n+1) = x_1(n)\Phi(x_1(n) + x_2(n)), \quad (13)$$

$$x_2(n+1) = x_2(n)\Phi(x_1(n) + x_2(n)), \quad (14)$$

where $\Phi(\cdot)$ is a function compatible with three biological requirements: (i) the proportion of each species does not change with time, i.e. $x_2(n+1)/x_1(n+1) = x_2(n)/x_1(n)$; (ii) the total population $x = x_1 + x_2$ in a generation depends only on the value at its previous generation; and (iii) $\partial\Phi/\partial x_1 < 0$ and $\partial\Phi/\partial x_2 < 0$.

Perturbations of Eqs. (13)–(14) are included in the model so as to bring about competition effects that may lead to species extinction:

$$x_1(n+1) = x_1(n)\Phi(x_1(n) + x_2(n)) \left[1 + \kappa x_1(n)G(x_1(n), x_2(n)) \right], \quad (15)$$

$$x_2(n + 1) = x_2(n)\Phi(x_1(n) + x_2(n)) [1 - \kappa x_2(n)G(x_1(n), x_2(n))], \quad (16)$$

where $0 < \kappa < 1$ stands for the strength of the competition between species and, for simplicity, we assume that $G(\cdot)$ depends only on the total population $x = x_1 + x_2$. Changing variables from (x_1, x_2) to $(x, y \equiv x_1/x)$ we obtain, from Eqs. (15)–(16), the following two-dimensional map

$$x(n + 1) = T(x(n)) \equiv x(n)\Phi(x(n)), \quad (17)$$

$$y(n + 1) = y(n) + \kappa y(n)(1 - y(n))g(x(n)), \quad (18)$$

where $g(x) = xG(x, x(1 - y))$ satisfies the mathematical requirements stated in Ref. [25]. Within the class of two-dimensional discrete models defined by Eqs. (17)–(18) both functions T (or Φ) and g (or G) have to be determined taking into account the possibility of riddled basins. There must be two possible outcomes: $y = 0$ (extinction of the x_1 species) or $y = 1$ (extinction of the x_2 species). These are the only attractors of the two-dimensional map in the phase plane, denoted as **A** and **B**, respectively. Moreover, their basins of attractions $\beta(\mathbf{A})$ and $\beta(\mathbf{B})$ must be riddled (in fact intermingled), what poses additional requirements in the formulation of the model.

The evolution of the total population, governed by the one-dimensional map $T(x)$, must be chaotic in order to fulfill condition **2a** for intermingled basins, since the only way to have an infinite number of unstable periodic orbits within an attrac-

tor is to ensure the existence of a dense chaotic orbit lying in the invariant manifold. The transversal dynamics (18) has two invariant subspaces: $\mathbf{M}_0 = \{(x, y = 0) | x \in [0, 1]\}$ and $\mathbf{M}_1 = \{(x, y = 1) | x \in [0, 1]\}$, what fulfills condition **1a**. The specific function $g(x)$, on the other hand, must be chosen so as to warrant the proper transverse stability conditions **3a** and **4a**.

The case for which $T(x) = 3x \pmod{1}$ and $g(x) = \cos(2\pi x)$ was previously studied by Kan [26], who proved the existence of intermingled basins when $\kappa = 1/32$. This proof has been extended to the case $0 < \kappa < 1$ by Hofbauer and collaborators [25]. In the present paper we consider a slightly modified version of Kan’s model, by choosing

$$x(n + 1) = 4x(n)(1 - x(n)), \quad (19)$$

$$y(n + 1) = y(n) + \kappa y(n)(1 - y(n)) \cos(3\pi x(n)). \quad (20)$$

such that the dynamics in each invariant subspace is strongly chaotic (transitive).

A representative example of the basins of attraction exhibited by this system is depicted in Figure 5(a) for $\kappa = 0.3$. A numerical approximation of the basin of the attractor at \mathbf{M}_0 (\mathbf{M}_1) is represented by the white (black) pixels, and show a fine structure, with tongues of a basin approaching the other attractor at arbitrarily small distances. Moreover, the tongue-like structure of each basin is self-similar, as suggested by the magnification shown in Figure 5(b).

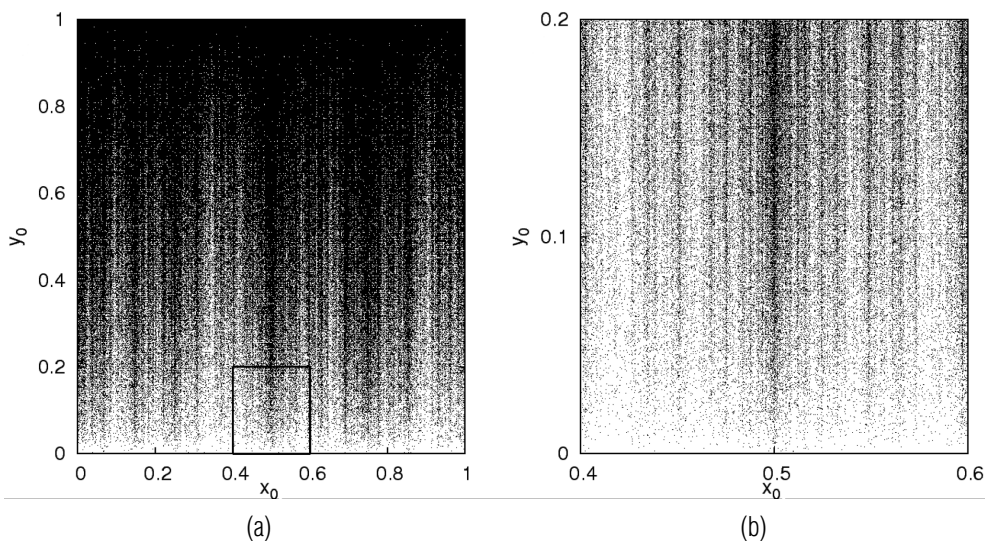


Figure 5 – Basins of the synchronized attractor (white pixels) and of the attractor at infinity (black pixels) when $\kappa = 0.3$. (b) Magnification of a small region of (a).

In order to discuss conditions **3a** and **4a** for intermingled basins in a quantitative setting, we deal with the finite-time Lyapunov exponents of the two-dimensional map defined by Eqs. (19)–(20). If either attractor has a riddled basin, it must be transversely stable (condition **3a**), such that it is necessary that the infinite-time transversal Lyapunov exponent be negative for **A** and **B**:

$$\begin{aligned} \lambda_{\perp} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_{\perp}(x(0), y(0), n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \|DF(x_i, y_i) \cdot e_y\| < 0, \end{aligned} \quad (21)$$

where DF is the map Jacobian. In addition, it is also required that both **A** and **B** must contain transversely unstable orbits (condition **4a**). This implies the existence of positive and negative fluctuations of the finite-time transversal exponent, $\tilde{\lambda}_{\perp}(x(0), y(0), n)$, what makes useful to work with the probability distribution $P(\tilde{\lambda}_{\perp}(x(0), y(0), n))$.

The probability distribution function (PDF) we have numerically obtained for typical chaotic orbits in both attractors is fitted by a Gaussian distribution, with small (and statistically not significant) deviations at its tails. For a Gaussian distribution, it turns out that the infinite-time Lyapunov exponent along the transversal direction is the average finite-time exponent:

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{\lambda}_{\perp}(x(0), y(0), n) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\lambda}_{\perp}(n) P(\tilde{\lambda}_{\perp}(x(0), y(0), n)) d\tilde{\lambda}_{\perp}(n) = \lambda_{\perp}, \end{aligned} \quad (22)$$

provided the PDF is normalized.

In Figure 6(a) we depict (in gray-scale) the dependence on the parameter κ of the numerically obtained probability distribution function $P(\tilde{\lambda}_{\perp})(x(0), y(0), n)$ for the time-24 transverse Lyapunov exponents. The average of these PDFs are always negative for any κ , hence $\tilde{\lambda}_{\perp} < 0$ (condition **3a**). The widths of the PDFs increase with κ , with a marked asymmetry toward negative values of the exponent, as shown by the computed moments of the PDFs as a function of κ [Fig. 6(b)]. We have used in these computations, both typical chaotic orbits in the attractor **A** and atypical unstable period- p orbits embedded in **A** [27], with similar results for the attractor **B**.

Verifying the condition **4a** for intermingled basins amounts to observe a positive fraction of positive values of $\tilde{\lambda}_{\perp}(n)$ for initial conditions $(x(0), y(0))$ randomly chosen in the attractor **A** or **B** [cf. Eq. (3)]. If the PDFs are such that half of their values are positive sign, there results that $f(n) = 1/2$, and the

infinite-time transversal exponent vanishes ($\lambda_{\perp} = 0$), the attractor losing transversal stability (a blowout bifurcation). We remark that the occurrence of a blowout bifurcation marks the endpoint of riddling, since after that the invariant chaotic sets **A** or **B** become transversely unstable.

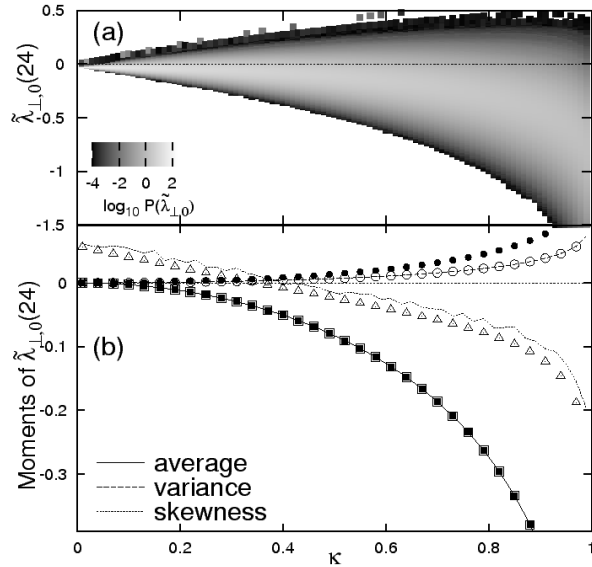


Figure 6 – (a) PDF (in gray-scale) and (b) some of its moments, for time-24 transversal Lyapunov exponents for typical orbits in the subspaces $y = 0$ as a function of the parameter κ . The lines stand for typical chaotic orbits, whereas the symbols represent atypical unstable period- p orbits (open symbols of $p = 24$, filled symbols for $p = 12$).

The dependence of the positive fraction of time- n transverse Lyapunov exponents with κ is depicted in Figure 7(a) for three different values of n . The results indicate that, for $0 < \kappa < 1$ we have a nonzero positive fraction of transversal exponents, on account of the existence of transversely unstable periodic orbits. Since the infinite-time Lyapunov exponent is already negative for this range of parameters there follows that the map always fulfill the conditions for riddling. This result holds for both attractors, so we have intermingled basins for any κ .

Our conclusions are reinforced by computing the so-called contrast measure, that quantifies the relative contribution of the unstable period- p orbits to the natural measure of a chaotic attractor [28],

$$C_p = |\mu_p^u - \mu_p^s|, \quad (23)$$

where μ_p^u and μ_p^s are the contributions of period- p orbits, embedded in the chaotic attractor, which are transversely unstable and stable, respectively. Riddling occurs when the former contribution is nonzero, hence the contrast measure is supposed to

take on values between zero and unity for systems possessing riddled basins. The contrast measure is depicted in Figure 7(b) as a function of the parameter κ for orbits with three different periods. The results confirm those obtained with help of finite-time Lyapunov exponents.

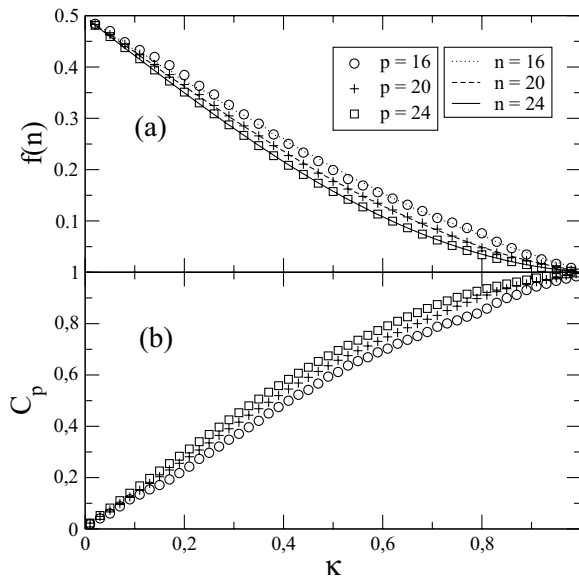


Figure 7 – Dependence with κ of (a) the positive fraction of transversal Lyapunov exponents of attractor **A** for typical chaotic orbits ($n = 16, 20, 24$) and unstable periodic orbits ($p = 16, 20, 24$); (b) contrast measure for $p = 16, 20, 24$.

5 CONCLUSIONS

Riddled basins, when occurring in complex systems, present many challenges for theoretical and experimental investigations. The extreme sensitivity to initial conditions make those systems highly susceptible to uncertainties of parameter and state determination. On the other hand, the rather stringent mathematical conditions necessary for the occurrence of riddled or intermingled basins (chiefly the mandatory existence of invariant manifolds for each coexisting attractor) limit the horizon of dynamical systems to be investigated. For example, coupled chaotic systems commonly present one such invariant manifold – the synchronization subspace. However, other invariant subspaces would require additional symmetry properties that not all complex systems are able to exhibit.

In spite of these difficulties, it turns out that riddling is quite common in complex systems. In this paper we have shown two representative examples of riddling in systems of physical and biological interest. Coupled Lorenz-like piecewise-linear maps can be viewed as a toy model that is expected to emulate dynamical features of complex systems describing climate change. We

have shown that there are wide parameter values (in this case, the strength of coupling between the systems) for which the basin of the chaotic synchronized attractor is riddled. The advantages here are that we can actually prove that the basins are riddled, by verifying the mathematical requirements for that, which may be unfeasible in a higher-dimensional model. Moreover, since we were able to prove riddling for such a low-dimensional system, it is well likely that higher-dimensional models would also display riddled basins.

The second example studied involves a model for the competition between two species of flour beetles, in which the final states are the extinction of either species. The discrete-time model we used for this problem is simple enough that the mathematical requirements for riddling can be proved to exist for any intensity of the competition between species. Moreover, the basins of both coexisting attractors are mutually riddled, or intermingled. A practical consequence of riddling, in this case, is that the outcome of the species competition is indeterminate, as observed in experiments with populations of *Tribolium sp.* The conventional explanation for this phenomenon has been stochastic, both of genetic and demographic origin, but we showed that intermingled basins offer a new perspective on this phenomenon, since they provide a deterministic origin for the competitive indeterminacy, what can be used to analyze the evolution of other animal populations.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially supported by CNPq, CAPES, FAPESP, and Fundação Araucária (Brazilian government agencies).

REFERENCES

- [1] SANJUAN MAF, AGUIRRE J & VIANA RL. 2009. Rev. Mod. Phys., 81: 333.
- [2] ALEXANDER JC, YORKE JA, YOU Z & KAN I. 1992. Int. J. Bifurcat. Chaos, 2: 795.
- [3] LAI YC & GREBOGI C. 1995. Phys. Rev. Lett., 52: R3313.
- [4] McDONALD SW, GREBOGI C & OTT E. 1985. Physica D, 17: 125.
- [5] OTT E & SOMMERER JC. 1993. Nature, 365: 138.
- [6] OTT E, SOMMERER JC, ALEXANDER JC, KAN I & YORKE JA. 1993. Phys. Rev. Lett., 71: 4134.
- [7] OTT E, ALEXANDER JC, KAN I, SOMMERER JC & YORKE JA. 1994. Physica D, 76: 384.
- [8] ASHWIN P, BUDESCU J & STEWART I. 1994. Phys. Lett. A, 193: 126.

- [9] HEAGY JF, CARROLL TL & PECORA LM. 1994. *Phys. Rev. Lett.*, 73: 3528.
- [10] WOLTERING M & MARKUS M. 1999. *Phys. Lett. A*, 260: 453.
- [11] CAZELLES B. 2001. *Chaos, Solit. & Fract.*, 12: 301.
- [12] NAKAJIMA H & UEDA Y. 1996. *Physica D*, 99: 35–44.
- [13] WOLTERING M & MARKUS M. 2000. *Chem. Phys. Lett.*, 321: 473–478.
- [14] YOUSEFI S, MAISTRENKO Y & POPOVICH S. 2000. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 5: 161.
- [15] HASLER M & MAISTRENKO YL. 1997. *IEEE Trans. Circ. Syst.*, 144: 856.
- [16] LORENZ E. 1963. *J. Atmospheric Sciences*, 20: 130.
- [17] STEEB W-H, VAN WYK MA & STOOP R. 1998. *Int. J. Theor. Phys.*, 37: 2653.
- [18] STOOP R & STEEB W-H. 1997. *Phys. Rev. E*, 55: 7763.
- [19] KIM C-M, RIM S, KYE W-H, RYU J-W & PARK Y-J. 2003. *Phys. Lett. A*, 320: 39.
- [20] FUJISAKA H & YAMADA T. 1983. *Prog. Theor. Phys.*, 69: 32.
- [21] PECORA LM & CARROLL TL. 1990. *Phys. Rev. Lett.*, 64: 821.
- [22] PARK T. 1954. *Physiol. Zool.*, 27: 177.
- [23] COSTANTINO RF & DESCHARNAIS RA. 1991. *Population dynamics and the Tribolium model: genetics and demography*. (Springer Verlag, Berlin, 1991), Chap. 8.
- [24] COSTANTINO RF, CUSHING JM, DENNIS B & DESHARNAIS RA. 1997. *Nature*, 375: 227. COSTANTINO RF, DESHARNAIS RA, CUSHING JM and DENNIS B. 1997. *Science*, 275: 389.
- [25] HOFBAUER F, HOFBAUER J, RAITH P & STEINBERGER T. 2004. *J. Math. Biol.*, 49: 293.
- [26] KAN I. 1994. *Bull. Am. Math. Soc.*, 31: 68.
- [27] PEREIRA RF, PINTO SES, VIANA RL, LOPES SR & GREBOGI C. 2007. *Chaos*, 17: 023131.
- [28] LAI Y-C. 1999. *Phys. Rev. E*, 59: R3807.



Riddling and chaotic synchronization of coupled piecewise-linear Lorenz maps

M.C. Vergès^a, R.F. Pereira^a, S.R. Lopes^a, R.L. Viana^{a,*}, T. Kapitaniak^b

^a Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Caixa Postal 19044, 81531-990, Curitiba, Paraná, Brazil

^b Division of Dynamics, Technical University of Łódź, Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź, Poland

ARTICLE INFO

Article history:

Received 11 February 2009

Available online 26 February 2009

Keywords:

Riddled basins

Chaotic synchronization

Lorenz map

Piecewise-linear map

Bungalow map

Coupled maps

ABSTRACT

We investigate the parametric evolution of riddled basins related to synchronization of chaos in two coupled piecewise-linear Lorenz maps. Riddling means that the basin of the synchronized attractor is shown to be riddled with holes belonging to another basin in an arbitrarily fine scale, which has serious consequences on the predictability of the final state for such a coupled system. We found that there are wide parameter intervals for which two piecewise-linear Lorenz maps exhibit riddled basins (globally or locally), which indicates that there are riddled basins in coupled Lorenz equations, as previously suggested by numerical experiments. The use of piecewise-linear maps makes it possible to prove rigorously the mathematical requirements for the existence of riddled basins.

© 2009 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

In 1963 Lorenz published a landmark paper which marked the beginning of the modern age of nonlinear dynamics [1]. One of the most striking insights of Lorenz was his perception that the complicated (in fact, chaotic) dynamics exhibited by the three-dimensional flow for some parameter values could be understood in terms of a simpler, low-dimensional discrete map. This was obviously a consequence of the strong dissipative character of the equations, and it is a widely used procedure in modern nonlinear dynamics research. Lorenz took the local maxima of one of the evolving variables of his system and plotted a first return map, the so-called Lorenz map. It turned out that the form of this map resembled the so-called tent function ($x \mapsto 1 - 2|x - 1/2|$) whose properties were already known by mathematicians for a long time [2].

This resemblance between the Lorenz and tent maps was serendipitous since the latter was known to possess ergodic orbits (now called transitive or strongly chaotic [2]), such that it provided a sound foundation for the claim that the Lorenz original system would present chaotic trajectories in the phase space. Moreover, the correspondence between the butterfly attractor and the properties of the Lorenz map furnished an early evidence that chaotic dynamics in complex, higher-dimensional systems could be understood by studying simpler, low-dimensional systems.

The Lorenz map is non-smooth thanks to its having a cusp, but it is smooth (albeit nonlinear) otherwise. On the other hand, we may have some advantages of using a piecewise-linear Lorenz map, also known as the bungalow–tent map [3,4]. Piecewise-linear maps have been intensively studied as models of a variety of physical systems ranging from electrical circuits [5] to vibroimpact mechanical oscillators [6]. Moreover, chaotic piecewise-linear maps have been shown to be *robust* in the sense that the chaotic orbits would persist for parameter variations, a property not shared by smooth chaotic systems in general [5].

In this paper we will explore some dynamical properties of two coupled piecewise-linear Lorenz maps. This is a simple system which nonetheless contains some of the fundamental properties of coupled map lattices and even oscillator

* Corresponding author.

E-mail address: viana@fisica.ufpr.br (R.L. Viana).

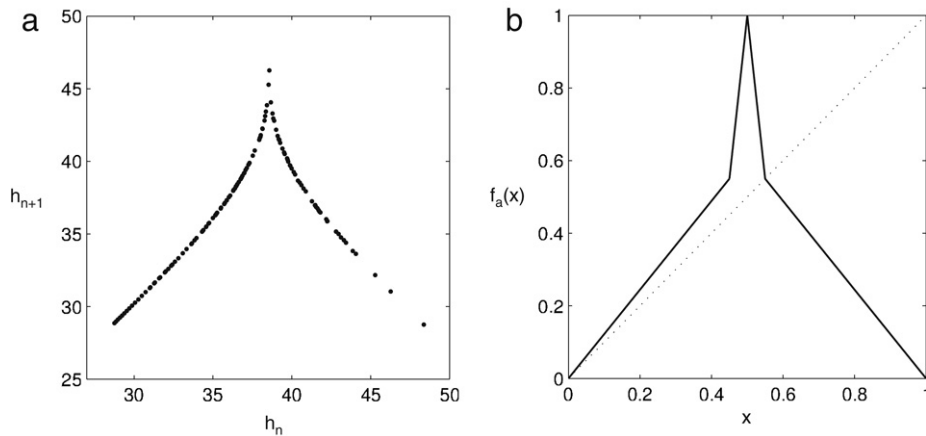


Fig. 1. (a) Lorenz map. (b) Bungalow-tent map for $a = 0.45$.

chains. Being piecewise linear such coupled maps have the additional advantage of having a constant Jacobian and thus some analytical exact results for, e.g. Lyapunov spectra [7]. This allows one to investigate phenomena like complete synchronization of chaos and riddled basins [8,9].

In brief, a riddled basin is a basin of attraction of an attractor characterized by the presence of holes belonging to the basin of another attractor [10,11]. As a consequence, given an initial condition belonging to the basin of some attractor, there will be always some points in its neighborhood, no matter how small it is, belonging to the basin of another attractor. Hence the physical consequences of riddling are quite serious in terms of our ability of predicting which attractor the trajectory originating from a given initial conditions asymptotes to.

Kim and coworkers [12] have suggested the presence of riddled basins in two diffusively coupled Lorenz equations, which comprises a six-dimensional system where the synchronized orbit lies on a three-dimensional subspace. However, a direct characterization of riddling is quite difficult in such high-dimensional systems, calling for indirect ways to evidence riddling. One example is to consider the coupling of Lorenz maps, which can give us insight on the mechanisms whereby two coupled Lorenz systems can generate riddled basins. However, since the original Lorenz map would be likewise difficult to analyze, a better approach could be to use a piecewise-linear approximation to it, as we do in this paper.

Accordingly, our aim in this work is to describe the parametric evolution of riddled basins of chaotic synchronization in two coupled piecewise-linear Lorenz maps. We shall describe with particular emphasis two situations the parameter ranges for which the coupled maps present riddled basins. The parameters to be considered are the slope of the isolated maps and the coupling strength, considering two different coupling prescriptions. We show that the properties of riddled basins are qualitatively distinct according to the prescription used.

The rest of the paper is organized as follows: in Section 2 we outline the properties of the piecewise-linear Lorenz map. Section 3 deals with the synchronization prescriptions for two coupled maps, with some exact analytical results. The study of riddled basins of synchronization are treated in Section 4. Section 5 contains our Conclusions.

2. The piecewise-linear Lorenz map

It is a well-known fact that the Lorenz equations,

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(y - x), \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\beta - z) - y, \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \gamma z \quad (3)$$

produce phase-space trajectories which converge to a chaotic attractor with an involved fractal structure when $\alpha = 10$, $\beta = 28$, and $\gamma = 8/3$ [1]. One way to convey this idea is to perform a dimensional reduction by sampling only the local maxima of one of the phase-space variables, so as to get a discrete-time variable $h_n = \max_{t=t_n} \{z(t)\}$. Then we build a first return plot by graphing h_{n+1} versus h_n , the result being the so-called Lorenz map $h_{n+1} = L(h_n)$, which is a unimodal map with a cusp [Fig. 1(a)]. Such maps display a similar dynamical behavior as the tent map ($x_{n+1} = 1 - 2|x_n - 1/2|$) and, in fact, this similarity was used by Lorenz to explain the erratic behavior at the chaotic attractor in the three-dimensional phase space [1].

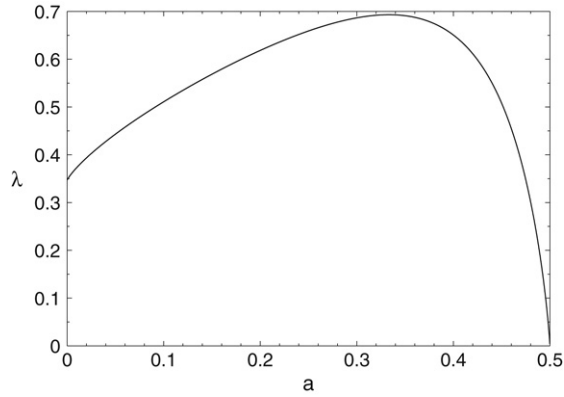


Fig. 2. Lyapunov exponent of a piecewise-linear Lorenz map versus its parameter a .

Another piecewise-linear approximation to the Lorenz map is provided by the so-called bungalow–tent map, which has out of four linear segments instead of two, as in the tent function [3,4]:

$$x_{n+1} = f_a(x_n) = \begin{cases} \frac{1-a}{a}x_n & \text{if } x_n \in [0, a) \\ \frac{a}{1-2a}x_n + \frac{1-3a}{1-2a} & \text{if } x_n \in \left[a, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{2a}{1-2a}(1-x_n) + \frac{1-3a}{1-2a} & \text{if } x_n \in \left[\frac{1}{2}, 1-a\right) \\ \frac{1-a}{a}(1-x_n) & \text{if } x_n \in [1-a, 1] \end{cases} \quad (4)$$

where $a \in (0, \frac{1}{2})$ is a control parameter. For $a = \frac{1}{3}$ we obtain the tent map. A linear coordinate transformation $h = 22x + 32$ and the choice $a = 0.45$ would approximate the Lorenz map better than the tent function [Fig. 1(b)]. In the following we will refer to the former as the piecewise-linear Lorenz map.

The two fixed points of the bungalow map are $P_1 : x_1^* = 0$ and $P_2 : x_2^* = 1 - a$. For all values of the control parameter a , the fixed points are unstable because their eigenvalues satisfy $|\delta_{1,2} = (a - 1)/a| > 1$. Although the map is non-smooth at the fixed point x_2^* , we can define the map derivative at the right-hand side of x_2^* , because this point belongs to the interval $[1 - a, 1]$.

A useful feature of the bungalow map is that the Lyapunov exponent is a smooth function of the control parameter a . In order to obtain this dependence we solve the Frobenius–Perron equation

$$\rho_a(x) = \int_0^1 \rho_a(y) \delta(x - f_a(y)) dy \quad (5)$$

to obtain the invariant density [3]

$$\rho_a(x) = \frac{1}{2-3a} \chi_{[0,1-a)}(x) + \frac{1-2a}{a(2-3a)} \chi_{[1-a,1]}(x), \quad (6)$$

where χ is the indicator function, i.e., $\chi_A(x) = 1$ if $x \in A$, and $\chi_A(x) = 0$ if $x \notin A$. Thus the invariant density is constant in the interval $[0, 1 - a)$ and jumps, at $x = 1 - a$, to another constant value. The Lyapunov exponent is then calculated using

$$\begin{aligned} \lambda(a) &= \int_0^1 \rho_a(x) \ln \left| \frac{df_a(x)}{dx} \right| dx. \\ &= \frac{1-a}{2-3a} \ln \left(\frac{1-a}{a} \right) + \frac{1-2a}{2-3a} \ln \left(\frac{2a}{1-2a} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

In particular, for $a = 1/3$ we obtain $\lambda(1/3) = \ln 2$, which is the expected result for the tent map [2], and also turns to be the maximum possible value for this exponent. For other values of a , the Lyapunov exponent is always positive, displaying a smooth dependence with a [Fig. 2], and assuming the value $\lambda = 0.5078$ for the approximation to the Lorenz map which results from $a = 0.45$. Hence we shall always be treating a chaotic (actually a transitive) map, with no periodic windows irrespective of the value of the parameter a .

3. Synchronization of two coupled piecewise-linear Lorenz maps

Coupled maps are paradigmatic examples of higher-dimensional dynamical systems, and have been extensively used since the 80s to investigate spatially extended systems where there is some kind of interplay between temporal and spatial degrees of freedom. One of such phenomena is synchronization of chaos [13]. Coupled chaotic maps can synchronize their amplitudes at each time depending on the coupling strength. The synchronized state is a low-dimensional attractor embedded in the system phase space, and its stability properties have been studied with respect to perturbations along transversal directions. Most of these investigations, however, are chiefly numerical since the system Jacobian depends on the phase space variables. Hence much effort has been devoted to coupled piecewise-linear maps, for which the Jacobian matrix has constant entries, which simplifies enormously the calculations and shed light on the mechanism whereby the synchronized state loses transversal stability [9].

The simplest problem belonging to this category consists of two coupled piecewise-linear Lorenz maps. Remembering that the Lorenz system describes a temporal dynamics for a fixed spatial location (the spatial structure being assumed *a priori* as given), the system of coupled maps could be regarded as a rough model of what happens if we consider the time evolution at two different spatial locations in the forced convection experiment from which we derive the Lorenz equations. In this case a natural choice for the coupling function is the diffusive one, i.e. it depends on the difference between the variables for both maps.

As a matter of fact, Kim et al. [12] have considered two identical Lorenz systems diffusively coupled in their z -component, or

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha(y_i - x_i), \quad (8)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = x_i(\beta - z_i) - y_i, \quad (9)$$

$$\frac{dz_i}{dt} = x_i y_i - \gamma z_i + \epsilon(z_{i+1} - z_i) \quad (10)$$

with $i = 1, 2$, such that $z_3 \equiv z_1$ and so on, ϵ being the coupling strength. This system was found to present both a synchronized and an anti-synchronized state, defined, respectively, by

$$(x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2), \quad (x_1 = -x_2, y_1 = -y_2, z_1 = z_2),$$

which are contained in three-dimensional invariant subspaces of the six-dimensional phase space of the coupled system. There have been found numerical evidences of riddled basins for values of ϵ large enough, but a systematic investigation is quite difficult in view of the high dimensionality of the system. Hence we can resort to the one-dimensional reduction performed by taking the Lorenz map and its piecewise-linear counterpart.

There are two different forms of coupling two piecewise-linear Lorenz maps, which renders two distinct two-dimensional maps, to be referred to as **F** and **G** given, respectively, by

$$\text{Version 1: } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_a(x_n) + \delta(y_n - x_n) \\ f_a(y_n) + \epsilon(x_n - y_n) \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\text{Version 2: } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_a(x_n + \delta(y_n - x_n)) \\ f_a(y_n + \epsilon(x_n - y_n)) \end{pmatrix} \quad (12)$$

where δ and ϵ are coupling strengths which can be different when the coupling is asymmetric, and even vanish for unidirectional coupling (a *master-slave* configuration). As it will turn out, the dynamical behavior of the system depends essentially on their sum $d \equiv \delta + \epsilon$.

The basic difference between these kinds of maps is that **F** does not render the square $[0, 1]^2$ invariant under its action, unless both δ and ϵ are zero, whereas **G** keeps the square invariant when both $0 \leq \delta \leq 1$ and $0 \leq \epsilon \leq 1$. In fact, in order to always have **F** and **G** as well-defined transformations of \mathbb{R}^2 , we must extend the domain of the map variables to the whole of \mathbb{R} by omitting the restrictions $0 \leq x$ and $x \leq 1$ in (4). In any case, the segment $\mathcal{S} = \{(x, y) \mid 0 \leq x = y \leq 1\}$ is kept invariant and is a subspace where the two coupled maps $x_{n+1} = f_a(x_n)$ and $y_{n+1} = f_a(y_n)$ are synchronized. It will be referred to as the *synchronization subspace* from now on. The orbit in the synchronization subspace is obviously the same as a chaotic orbit from the uncoupled map, hence the fixed points in \mathcal{S} are also $P_1 = 0$ and $P_2 = 1 - a$, located at the intervals 1: $[0, a]$ and 4: $[1 - a, 1]$, respectively.

In order to check this stability of the synchronization subspace we have to investigate whether or not a trajectory that starts slightly off \mathcal{S} converges to a trajectory in \mathcal{S} . This can be done by considering the maximum Lyapunov exponent along the direction transversal to the synchronization subspace, denoted as λ_{\perp} . If it is negative (positive) the synchronized state is stable (unstable) with respect to infinitesimal transversal perturbations.

This is only a necessary condition, though, since there may be transversely unstable periodic orbits embedded in the synchronization subspace. Such transversely unstable orbits may exist even when \mathcal{S} is transversely stable (i.e. with $\lambda_{\perp} < 0$),

and their overall effect is to drive trajectories away from \mathcal{S} , spoiling the convergence to the synchronized state. Hence a sufficient condition for a stable synchronized orbit is that all unstable periodic orbits in the synchronized state be transversely stable. This last requirement can be verified by computing the eigenvalue of the Jacobian matrix along the transversal directions such that all of them have moduli less than the unity.

3.1. Version I

Let us now apply these general arguments to the particular case of the coupled piecewise-linear Lorenz maps. Introducing the variables $u = x - y$ and $v = x + y$ results in the synchronization manifold \mathcal{S} being given by $u = 0$, and the transversal direction is parameterized by the v -coordinate. We first consider the coupled system in its version I [Eq. (11)], for which the Jacobian matrix is

$$DF = \begin{pmatrix} c - \delta & \delta \\ \varepsilon & c - \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (13)$$

where

$$c = \begin{cases} \frac{1-a}{a} & \text{if } x \in [0, a), \\ \frac{2a}{1-2a} & \text{if } x \in \left[a, \frac{1}{2} \right), \\ \frac{-2a}{1-2a} & \text{if } x \in \left[\frac{1}{2}, 1-a \right), \\ \frac{-(1-a)}{a} & \text{if } x \in [1-a, 1]. \end{cases} \quad (14)$$

The eigenvalues of the Jacobian matrix are given by

$$\mu_1 = c, \quad (15)$$

$$\mu_2 = c - d, \quad (16)$$

with corresponding eigenvectors

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -\delta \\ \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (17)$$

The first eigenvector lies in the synchronization subspace \mathcal{S} , whereas the second eigenvector is the transversal one. It should be remarked that, thanks to it being piecewise linear, the coupled map (11) has each of the four different results for the eigenvalues at a different interval, according to the value of c given by Eq. (14). Since the elements of the Jacobian matrix are constant, their eigenvalues/eigenvectors do not depend explicitly on the value of x or y and thus take on the same value for the fixed points $P_1 = 0$ and $P_2 = 1 - a$ in the synchronized state, belonging to intervals 1 and 4 of $[0, 1]$ and identified by $c = (1 - a)/a$ and $c = -(1 - a)/a$, respectively.

In Fig. 3(a) we plot the logarithm of the transversal eigenvalue ($|\mu_2|$) as a function of the coupling parameter d for the fixed points P_1 and P_2 of the coupled maps (11). Hence such periodic orbits are transversely stable (unstable) if these numbers are negative (positive). We see that, regardless of the value taken on by d , there will be always some fixed point with transversal eigenvalue having modulus greater than the unity, although the eigenvalue modulus of a given fixed point could be less than unity for some values of d . For the fixed point $P_1 = 0$ this interval is $d_1 < d < d_2$, where

$$d_{1,2} = \left(\frac{1-a}{a} \right) \mp 1, \quad (18)$$

and for $P_2 = 1 - a$, $-d_2 < d < -d_1$. For $a = 0.45$, as in Fig. 3, these intervals are $I_1 = (-2.23, -0.22)$ and $I_2 = (0.22, 2.23)$ for the fixed points P_1 and P_2 , respectively. We conclude that, no matter what the value of the coupling strength d , there will be always some transversely unstable fixed point embedded in the (chaotic) synchronized state.

Note that this analysis has been performed for fixed points only, which is sufficient for the characterization of riddling in this coupling prescription. Other periodic orbits can be transversely unstable, however, even when some fixed point is transversely stable. Moreover, for the intervals I_1 and I_2 , we observe from Fig. 3(a) that one of the fixed points is transversely stable, whereas the other one is transversely unstable. This phenomenon, called *unstable dimension variability*, has important consequences in terms of the global dynamics of the system [14,15], such as the validity of computer-generated trajectories of some strongly non-hyperbolic chaotic systems [16]. Moreover, it has applications in chaotic systems with more than one attractor, like the ecological problem of two-species competition with extinction of either one of the species [17].

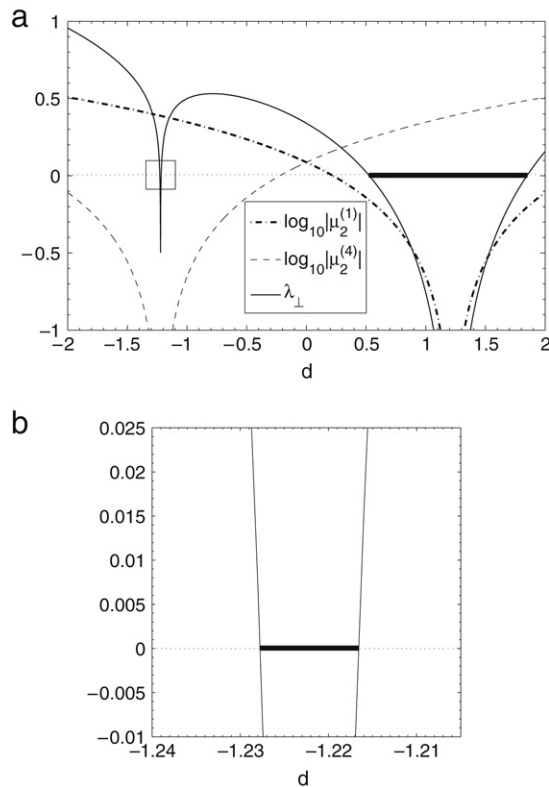


Fig. 3. (a) Logarithm of the transversal eigenvalue and Lyapunov exponent of the coupled piecewise-linear Lorenz maps (version I) as a function of the coupling strength $d = \delta + \varepsilon$ for the fixed points $P_1 = 0(\mu_2^{(1)})$ and $P_2 = 1 - a(\mu_2^{(4)})$. The intervals for riddling are denoted as thicker lines. (b) Magnification of a portion of the diagram.

3.2. Version II

Now we turn to the coupled maps in its version II, for which the Jacobian matrix is

$$DG = c \begin{pmatrix} 1 - \delta & \delta \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{pmatrix} \tag{19}$$

where c is given by (14), and whose eigenvectors as well as the eigenvalue μ_1 are the same as in version I, the transversal eigenvalue μ_2 being given by

$$\mu_2 = c(1 - d). \tag{20}$$

The logarithm of the transversal eigenvalue modulus is plotted in Fig. 4(a) as a function of the coupling parameter d for the fixed points P_1 and P_2 of the coupled maps (12). There is a common interval for which both fixed points are simultaneously transversely stable, given by $d_3 < d < d_4$, where

$$d_{3,4} = 1 \mp \left(\frac{a}{1 - a} \right), \tag{21}$$

and which turns to be the interval $I_3 = (0.18, 1.83)$ when $a = 0.45$, as shown in Fig. 4(a). In this case, unlike the previous coupling prescription, it is necessary to analyze also period-2 orbits, since we found that these can be transversely unstable even when the fixed points themselves are transversely stable.

The period-2 points are given by

$$P_1^{(2)} : x_1^{(2)} = \frac{1 - a}{3 - 4a} \in \left[a, \frac{1}{2} \right), \tag{22}$$

$$P_2^{(2)} : x_2^{(2)} = f_a(x_1^{(2)}) \in [1 - a, 1], \tag{23}$$

with transversal eigenvalue given by

$$\mu_2^{(per.2)} = \left(\frac{1}{2a - 1} - 1 \right) (1 - d)^2 \tag{24}$$

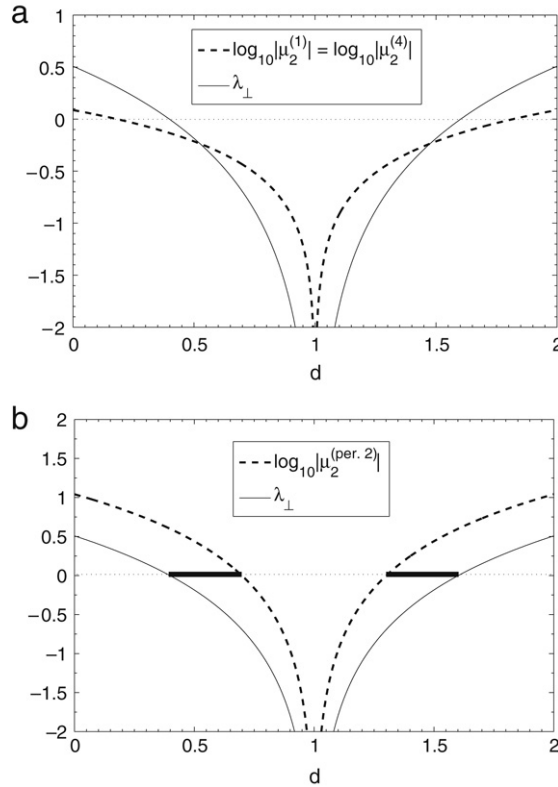


Fig. 4. Logarithm of the transversal eigenvalue and Lyapunov exponent of the coupled piecewise-linear Lorenz maps with $a = 0.45$ (version II) as a function of the coupling strength $d = \delta + \varepsilon$ for (a) fixed points, and (b) period-2 orbit in the synchronization subspace. The intervals for riddling are denoted as thicker lines.

such that the intervals for which these points are transversely unstable are

$$d < 1 - \sqrt{\frac{1 - 2a}{2(1 - a)}}, \quad d > 1 + \sqrt{\frac{1 - 2a}{2(1 - a)}}. \tag{25}$$

The log-eigenvalue of the period-2 orbit is depicted in Fig. 4(b) as a function of d , showing that, for the following intervals of d : $[0.4, 0.7]$ and $[1.2, 1.5]$, there will be some transversely unstable orbit (either a fixed point or a 2-cycle).

4. Riddling and chaotic synchronization

In this section we shall describe one of the consequences of the synchronized state being transversely stable as a whole, but possessing transversely unstable periodic orbits embedded on it. For this we focus on the basin of synchronization, which is the set of initial conditions in the phase-space which produce orbits which asymptote to the synchronized state as the time goes to infinity. It may well happen that this basin of synchronization be riddled, i.e. densely punctured with holes (in the measure-theoretical sense) belonging to the basin of another attractor.

The dynamical consequences of riddling are quite severe, for every initial condition we may think of is surrounded by an uncertainty ball of small but nonzero radius, representing the observational errors or parametric noise intrinsic to the determination of a state in the phase space. Hence, if the basin is densely riddled with regions belonging to another basin, such regions will intercept the uncertainty ball, turning uncertain the determination of the final state of the system. Even worse, this problem is not going to diminish reducing the radius of the uncertainty ball, since riddling occurs at every scale, no matter how small.

The conditions for the occurrence of riddled basins in a dynamical system are [18]:

1. There exists an invariant subspace whose dimension is less than that of the phase space;
2. The dynamics on the invariant subspace has a chaotic attractor A;
3. There is another attractor B, chaotic or not, and not belonging to the invariant subspace;
4. The attractor A is transversely stable in the phase space, i.e. for typical orbits on the attractor the Lyapunov exponents for infinitesimal perturbations along the directions transversal to the invariant subspace M are all negative;
5. A set of unstable periodic orbits embedded in the chaotic attractor A is transversely unstable.

The fact that the synchronization subspace \mathcal{S} of the coupled maps is invariant under the system dynamics already fulfills condition **1** for riddling. Moreover, if the coupled identical systems undergo chaotic motion, their synchronized state is also chaotic, i.e. there is a chaotic attractor A embedded in the synchronization subspace (condition **2**). For condition **3** to be satisfied there must exist another attractor B off the synchronized manifold \mathcal{S} (*global riddling*). There are many situations, however, for which there is no such attractor, but the trajectories off- \mathcal{S} spend an arbitrarily large time wandering through the available phase space region before returning to \mathcal{S} . In these cases (*local riddling*) we can still think of this non-synchronized transient regime as a second possible behavior and assign to it the properties formerly possessed by the second attractor B , namely conditions **4** and **5** of riddling. Hence, strictly speaking, local riddling means that only the local conditions for riddling have been verified for the system in analysis.

In practice, however, while most of the conditions for riddling rely on a local analysis in the vicinity of the synchronized state, the determination of a second attractor is usually an information of a global nature. Except for some cases in which this can be rigorously proved, the existence of a second attractor is suggested by numerical simulations of the dynamical system. Hence, as far as the local analysis is concerned, we are faced more often with local riddling than the global one in complex systems.

A formal way to understand local riddling consists on choosing a linear neighborhood Σ_Δ of the synchronization subspace \mathcal{S} , where $\Delta \rightarrow 0$, which is represented by a strip of width 2Δ surrounding it in both sides. If we denote with white pixels those initial conditions generating orbits that escape rapidly from Σ_Δ and by black points those orbits which do not escape and are attracted to the synchronization subspace, we can have the same tongue-like basin structure of the globally riddled case, but now restricted to the linear neighborhood Σ_Δ .

In the case of global riddling, it should be mentioned that condition **4** for riddling implies that “most” points, in the traditional two-dimensional Lebesgue measure sense, stay within this Σ_Δ neighborhood and are eventually attracted to A , as proved in Ref. [10]. This is thus compatible with the existence of a positive Lebesgue measure set of orbits in the linear neighborhood Σ_Δ that move away from it.

4.1. Version I

In order to verify condition **4** for riddling, we have to investigate for which values of the coupling coefficient $d = \epsilon + \delta$ the transversal Lyapunov exponent is negative. Let us first consider version I of the coupled maps. The Lyapunov exponents along the direction parallel to the synchronization subspace is the same as that for an uncoupled piecewise-linear Lorenz map, Eq. (7). The exponent along the transversal direction, on the other hand, can be obtained by applying Birkhoff ergodic theorem as

$$\begin{aligned} \lambda_\perp &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \ln |\mu_2(x_n)| = \int_0^1 \ln |\mu_2(x)| \rho(x) dx \\ &= \frac{1}{2-3a} \left[a \ln \left| \frac{1-a}{a} - d \right| + \frac{1-2a}{2} \ln \left| \frac{2a}{1-2a} - d \right| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-2a}{2} \ln \left| \frac{-2a}{1-2a} - d \right| \right] + \frac{1-2a}{2-3a} \ln \left| \frac{-(1-a)}{a} - d \right|, \end{aligned} \quad (26)$$

where we have used the invariant density given by Eq. (6).

In Fig. 3(a) we plot the transversal Lyapunov exponent as a function of the coupling strength sum $d = \delta + \epsilon$ for $a = 0.45$. There are two intervals of d for which the transversal Lyapunov exponent is negative, thus fulfilling condition **4** for riddling. The boundaries of these intervals are given by the values of d for which $\lambda_\perp = 0$, yielding transcendental equations in view of (26). The regions, in the parameter plane $a \times d$, characterized by negative transversal exponents, are depicted in Fig. 5. In the piecewise-linear Lorenz case ($a = 0.45$) such intervals are $(-1.224, -1.220)$ and $(0.689, 1.707)$.

In the previous section we concluded that, in version I of the coupled maps, there will be always transversely unstable fixed points in the synchronization subspace [see Fig. 3]. Besides the fixed point itself being transversely unstable, so are all its pre-images, which form a denumerable infinite set of points, thus condition **5** for riddling is always fulfilled for any value of d , such that the only remaining condition to be verified is the negativeness of λ_\perp , the intervals being thus indicated by Fig. 5 as black regions.

However, we must remark that condition **5** is of a local nature, whereas the existence of a second attractor is an information from the global dynamics of the coupled system. Unless we can rigorously prove that there is a second attractor at infinity (or elsewhere) for a basin with a nonzero Lebesgue measure the set of mathematical conditions can be used to define local riddling. For version I, this proof can be given by writing the coupled maps in terms of the variables $u = x - y$ and $v = x + y$. Since the map is defined in four intervals, so as the coupled maps in version I. Let us consider the interval $0 < x < a$. The dynamics along the transversal direction is piecewise linear, with a slope given by (14). Hence, if $d < d_{c2} = (1-a)/a$ the unstable manifold of the unstable fixed point extends to infinity, and the pre-images of the fixed point as well. A trajectory that closely follows this unstable manifold will asymptote to infinity, which is the second attractor characterizing global riddling. Moreover, this slope must be positive, otherwise the trajectories would approach the line $x = y$ but asymptote to infinity as well. This leads to another condition, namely $d > d_{c1} = (1-2a)/a$.

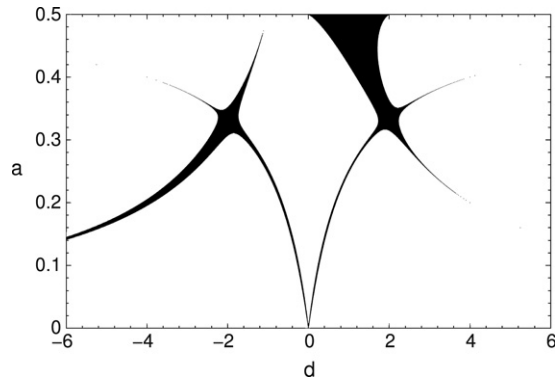


Fig. 5. In the parameter plane *a* versus *d*, the black regions have negative transversal Lyapunov exponent the coupled piecewise-linear Lorenz maps for *a* = 0.45 (version I).

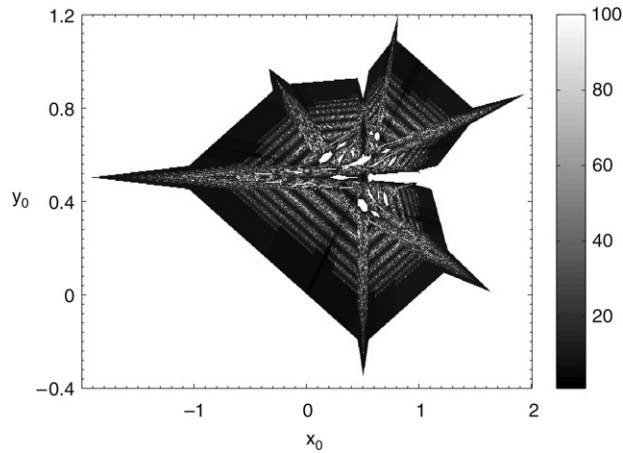


Fig. 6. Synchronization time for initial conditions in the phase plane for *a* = 0.45 and *d* = 1.0 (version I).

For global riddling the basin of synchronization is the set of initial conditions which asymptote to the synchronized attractor, with a similar definition for the basin of infinity. If we have local riddling, however, it is not possible to define such basins, hence it is more convenient to consider the synchronization time τ , i.e. the time it takes for an initial condition (x_0, y_0) to reach the synchronized state (i.e. to approach its vicinity with an accuracy of $\sim 10^{-5}$).

In Fig. 6 we plot in a gray-scale the values of the synchronization time τ for the initial condition (x_0, y_0) placed at the center of the corresponding pixel, for a value of *d* which fulfills the local requirements for riddling. The darker pixels indicate initial conditions whose orbits achieve the synchronized state in less than ten iterations, whereas for the lighter pixels this time is higher. White pixels indicate orbits which go to infinity.

4.2. Version II

Now for the version II, the transversal Lyapunov exponent is given by

$$\lambda_{\perp} = \frac{1}{2 - 3a} \left[(1 - a) \ln \left(\frac{1 - a}{a} \right) + (1 - 2a) \ln \left(\frac{2a}{1 - 2a} \right) \right] + \ln |1 - d|$$

$$\equiv K(a) + \ln |1 - d| \tag{27}$$

where *K* is a constant for a given *a*. Fig. 4 displays the dependence of λ_{\perp} with *d* for *a* = 0.45, showing an interval $(d_1, d_2) = (0.442, 1.558)$ for which the transversal Lyapunov exponent is negative, thus verifying condition 4 for riddling. In fact, the boundaries of this interval are the roots of $\lambda_{\perp} = 0$, namely

$$\tilde{d}_{1,2} = 1 \mp e^{-K(a)}, \tag{28}$$

straddling the point *d* = 1 at which the Lyapunov exponent is minus infinity.

We have seen in the previous section that, for the intervals [0.4, 0.7] and [1.2, 1.5], we can warrant the existence of transversely unstable periodic orbits embedded in the chaotic synchronized attractor, either fixed points or period-2 points,

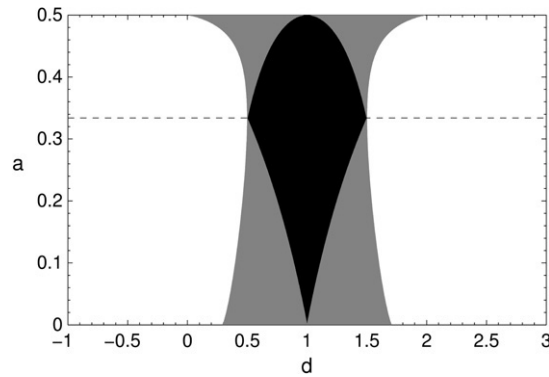


Fig. 7. In the parameter plane a versus d the black regions have negative transversal Lyapunov exponent, whereas the gray regions have in addition a transversely unstable orbit, thus characterizing riddling. We considered two coupled piecewise-linear Lorenz maps for $a = 0.45$ (version II).

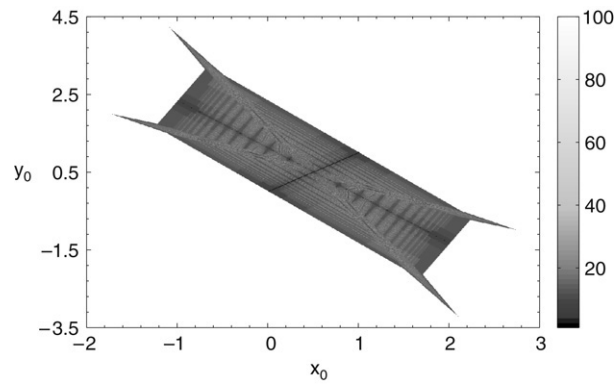


Fig. 8. Synchronization time for initial conditions in the phase plane for $a = 0.45$ and $d = 1.1$ (version II).

so as to fulfill condition 5 for riddling. The union of these intervals, on its hand, contain the interval (d_1, d_2) which verifies condition 4 for riddling, and hence the latter ultimately determines the existence of riddling. The regions with $\lambda_{\perp} < 0$ are indicated by black pixels in Fig. 7 as a function of both a and d . If, besides having $\lambda_{\perp} < 0$, the system also presents riddling, we indicate by gray pixels this situation. We observe that, for $a = 1/3$ (i.e. the tent map case), there is no riddling interval, since the system is hyperbolic and $\lambda_{\perp} < 0$ always implies synchronization [19]. For $a < 1/3$, riddling can be explained from the transversal instability of the fixed points, whereas for $a > 1/3$ we have to analyze a period-2 orbit to verify condition 5 for riddling.

In version II of coupling, it turns out that the unit square $[0, 1]^2$ is kept invariant under the dynamics of the coupled system if both ϵ and δ belong to the interval $[0, 1]$. These constraints being respected, there is no attractor in the phase plane other than the synchronized one, and riddling (if any) is certainly of a local nature. However, if either ϵ or δ take on values outside the interval $[0, 1]$, the unit square is no longer invariant and orbits can, in principle, asymptote to other attractor. We have been able to find numerically a second attractor at infinity, hence we can actually have global riddling.

Following the same procedure used in version I, we also plot in Fig. 8 the synchronization time for initial conditions and a value of d which is inside the riddling interval. The darker pixels, representing “fast” initial conditions, belong to the basin of the synchronized attractor, whereas the brighter pixels represent “slow” initial conditions that either spend a long time until asymptoting to the synchronized attractor or they may escape to the attractor at infinity. The example of riddling given in Fig. 8 shows the regions of “slow” and “fast” initial conditions densely intermixed in fine scales. Moreover, the bands of “slow” initial conditions have the characteristic tongue-like shape that we find in riddling bifurcation scenarios [20].

5. Conclusions

The Lorenz equations are a paradigmatic example of deterministic chaos, which has stimulated research over the last four decades. One noteworthy feature of coupled Lorenz equations is the presumed existence of riddled basins for some values of the coupling strength between them, in the sense that the basin structure can be so involved that near a point belonging to some basin there exists a point belonging to other basin, *no matter how near they are*. This is clearly a troublesome feature since any initial condition can be assigned with a small but nonetheless finite uncertainty, and the latter can be so large as to turn the final state of the system completely uncertain if the basins are riddled. This phenomenon is difficult to analyze in

the original Lorenz equations due to the high dimensionality, and thus we have considered a low-dimensional model which may shed some light on the dynamical behavior of the high-dimensional system, particularly on the existence of riddled basins.

In this spirit, we analyzed two schemes of coupling piecewise-linear versions of the Lorenz map, since exact analytical results can be given for them, e.g. the natural measure of chaotic orbits and the corresponding Lyapunov exponents. We found that, as a general trend, riddled basins are possible for relatively wide intervals of the coupling strength for both versions, which gives us more confidence that the suggestive evidences of riddling in the original coupled Lorenz systems are in fact true. There are some differences between both schemes, though.

When we add the coupling term after applying the map function (version I), the dynamics do not keep invariant the unit square. In this case we found that either the synchronized state has a (globally) riddled structure or it is not transversely stable and it is not an attractor itself. If we couple the variables before applying the map function (version II), the dynamics maintains the unit square invariant for some values of the coupling constants. In those cases we are sure that there cannot exist a second attractor, yielding local riddling. For other values, however, we have not been able to detect this second attractor as well. Unlike the previous version of coupling, we found that there are some intervals for which there are transversely unstable fixed points and/or period-two orbits. Hence we can have presence or absence of local riddling, depending on the parameter values.

We expect that for coupled Lorenz systems, one would observe a scenario more akin to version II, since such simulations typically adopt a diffusive type of coupling. Moreover, the more complex dynamical behavior of Lorenz equations makes it possible to assign one or more coexisting attractors, apart from the synchronized state. While bounded attractors would be less often probable, the existence of an attractor at infinity is quite common, such as in coupled Chua circuits. In those cases our analysis could be extended to the characterization of global riddling, as we have done in Version I.

Acknowledgments

This work was partially supported by CNPq, CAPES, and Fundação Araucária (Brazilian agencies).

References

- [1] E. Lorenz, *J. Atmospheric Sci.* 20 (1963) 130.
- [2] D. Gulick, *Encounters with Chaos*, McGraw Hill, New York, 1992.
- [3] W.-H. Steeb, M.A. van Wyk, R. Stoop, *Internat. J. Theoret. Phys.* 37 (1998) 2653.
- [4] R. Stoop, W.-H. Steeb, *Phys. Rev. E* 55 (1997) 7763.
- [5] S. Banerjee, J.A. Yorke, C. Grebogi, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998) 3049.
- [6] E.E. Pavlovskaja, M. Wiercigroch, *J. Sound Vib.* 305 (2007) 750.
- [7] C. Anteneodo, S.E. de S. Pinto, A.M. Batista, R.L. Viana, *Phys. Rev. E* 68 (2003) 045202 (R).
- [8] M. Hasler, Yu.L. Maistrenko, *IEEE Trans. Circuits Systems I* 44 (1997) 856.
- [9] Yu.L. Maistrenko, T. Kapitaniak, P. Szuminski, *Phys. Rev. E* 56 (1997) 6393; T. Kapitaniak, Yu.L. Maistrenko, *Phys. D* 126 (1999) 18.
- [10] J.C. Alexander, J.A. Yorke, Z. You, I. Kan, *Internat. J. Bifur. Chaos* 2 (1992) 795.
- [11] J. Aguirre, R.L. Viana, M.A.F. Sanjuán, *Fractal structures in nonlinear dynamics*, *Rev. Mod. Phys.* (2008) (in press).
- [12] C.-M. Kim, S. Rim, W.-H. Kye, J.-W. Ryu, Y.-J. Park, *Phys. Lett. A* 320 (2003) 39.
- [13] H. Fujisaka, T. Yamada, *Progr. Theoret. Phys.* 69 (1983) 32; L.M. Pecora, T.L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 821.
- [14] E.J. Kostelich, I. Kan, C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, *Phys. D* 109 (1997) 81.
- [15] R.F. Pereira, S.E. de S. Pinto, R.L. Viana, S.R. Lopes, C. Grebogi, *Chaos* 17 (2007) 023131.
- [16] R.L. Viana, C. Grebogi, S.E. de S. Pinto, S.R. Lopes, A.M. Batista, J. Kurths, *Phys. Rev. E* 68 (2003) 067204.
- [17] R.F. Pereira, S. Camargo, S.E. de S. Pinto, S.R. Lopes, R.L. Viana, *Phys. Rev. E* 78 (2008) 056214.
- [18] E. Ott, J.C. Sommerer, J.C. Alexander, I. Kan, J.A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* 71 (1993) 4134; E. Ott, J.C. Alexander, I. Kan, J.C. Sommerer, J.A. Yorke, *Phys. D* 76 (1994) 384.
- [19] R.F. Pereira, S.E. de Souza Pinto, R.L. Viana, S.R. Lopes, 2008 [nlin.CD]. *Arxiv Preprint arXiv:0809.0294*.
- [20] Y.-C. Lai, C. Grebogi, J.A. Yorke, S. Venkataramani, *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 55.