UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MÁRIO FILIZZOLA COSTA

EQUITY PREMIUM: ANÁLISES DE UM CASO BRASILEIRO

CURITIBA
2009

MÁRIO FILIZZOLA COSTA

EQUITY PREMIUM: ANÁLISES DE UM CASO BRASILEIRO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico, Departamento de Economia, Setor de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal do Paraná, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Desenvolvimento Econômico.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Vaz Lobo Bittencourt.

CURITIBA
2009

TERMO DE APROVAÇÃO

MÁRIO FILIZZOLA COSTA

EQUITY PREMIUM: ANÁLISES DE UM CASO BRASILEIRO

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Desenvolvimento Econômico, Setor de Ciências Sociais da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

ORIENTADOR: PROF. DR. MAURÍCIO VAZ LOBO BITTENCOURT.
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA,UFPR

PROF. DR. ARMANDO VAZ SAMPAIO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA,UFPR

PROF. DR. ROBERTO MEURER
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA,UFSC

Curitiba, 05 de junho de 2009

Dedico:
À minha esposa, Eloisa, e aos meus filhos, Mário e Pedro Henrique.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida e pelas oportunidades permitidas.

Ao professor Maurício Vaz Lobo Bittencourt, pelas aulas ministradas na FECILCAM e pelas valiosas orientações para a realização desta pesquisa.

Aos professores que nos acompanharam durante essa trajetória.

Aos colegas de curso que sempre souberam motivar nos momentos mais difíceis.

À direção da FECILCAM, que colaborou em todos os sentidos para a realização do Mestrado em Desenvolvimento Econômico.

Aos amigos que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização desse trabalho.

RESUMO

O processo de expansão financeira e geração de crédito a ordem global é uma das principais características da sociedade contemporânea, alem dos inquestionáveis vínculos existentes entre as variáveis financeiras e reais da economia. A importância destas relações se encontra na necessidade de estabilidade que as diferentes sociedades buscam. Sendo assim, o objetivo deste trabalho é avaliar, através do modelo de Lucas, o *equity premium* brasileiro para o período de 1980-2008 em comparação aos dados reais, para proporcionar subsídios para uma avaliação da aderência do modelo à realidade contemporânea e a intensidade com que tais relações ocorrem.

Para encontrar o valor do *equity premium*, será utilizado o modelo de Hansen e Singleton, uma derivação do modelo de Lucas, além da averiguação do coeficiente de aversão ao risco e do fator de desconto estocástico através do método estatístico de Variável Instrumental e do GMM.

Os resultados demonstraram a existência de um *puzzle* para o período, caracterizando a inconsistência do modelo de Lucas a termos quantitativos, apesar dos dados se aproximarem muito das análises teóricas, indicando uma consistência qualitativa. Conclui-se assim que as fricções de mercado associadas às divergências de hábitos dos consumidores proporcionam valores diferentes entre as análises de Lucas e os dados reais.

Palavras-chave: Prêmio de Risco; mistério do prêmio de risco; retorno dos ativos; coeficiente de aversão ao risco; fator de desconto estocástico; função utilidade.

ABSTRACT

The process of financial expansion and creation of credit to global order is a key feature of contemporary society, besides the undeniable links between the financial variables and real economy. The importance of these relations is in need of stability that different societies seek. Thus, the objectives of this study is to evaluate, through the model of Lucas, the Brazilian equity premium for the period 1980-2008 compared to actual data, to provide subsidies to assess the adherence of the model the contemporary reality and the intensity in which such relationships occur.

To find the value of the equity premium, the model will be used to Hansen and Singleton, a derivation of the model of Lucas, in addition to finding the coefficient of risk aversion and the stochastic discount factor by the statistical method of Instrumental Variable and GMM.

The results demonstrated the existence of a puzzle for the period, showing the inconsistency of the Lucas model of quantitative terms, although the data are very close to the theoretical analysis, indicating a consistent quality. It is concluded that the friction of the market associated with differences in habits of consumers provide different values between Lucas and the analysis of real data.

Keywords: Equity premium; equity premium puzzle; return of assets; coefficient of aversion risk; stochastic discount factor; utility function.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1 INTRODUÇÃO

O processo de expansão das teorias e instrumentos financeira a ordem global é uma das principais características da economia contemporânea, associado a uma elevação dos serviços financeiros e do mercado de capitais a nível mundial.

A importância do mesmo é inquestionável quando avaliamos as diversas possibilidades de geração de crédito para os diferentes setores da economia, assim como para os agentes econômicos e governos.

Acompanhando ainda este processo tem-se uma o surgimento das relações entre as teorias de finanças e a ciência econômica, mais especificamente, as relações entre as variáveis reais e o preço dos ativos financeiros. Relações estas já observadas pelas inúmeras crises financeiras que se externaram para as variáveis reais de diversas economias durante a década de 1990.

O trabalho de Markowitz (1959) sobre as teorias de carteira, assim como os modelos de precificação, como o CAPM de Sharpe (1964) e Lintner (1965), e o APT de Ross (1976), não lograram representar tais relações, apresentando como variáveis determinantes de alteração dos preços dos ativos financeiros a remuneração de carteiras de mercado, ou do próprio mercado de capitais por completo.

O artigo "*Asset Prices in a Exchange Economy*" de Lucas (1971) apresenta-se como uma revolução neste sentido, onde através da inserção de uma função utilidade a estrutura de um modelo aos moldes do CAPM possibilitou a criação de um modelo intertemporal de precificação de ativos financeiros, e demonstrou como acontece esta relação entre as teorias de finanças e a ciência economia, aos moldes de uma teoria de equilíbrio geral.

Basicamente os modelos intertemporais de precificação, também chamados de modelos de utilidade esperada ou modelos de consumo CAPM, apresentam o prêmio de risco (*equity premium*) sendo determinado pela covariância entre a utilidade esperada e a taxa de retorno dos ativos esperada. Teoricamente esta covariância deve ser negativa.

Mehra e Prescott (1985) testaram o modelo de Lucas com os dados da economia Americana, para o período de 1889-1978, alcançando valores divergentes entre os dados empíricos para o período e os valores obtidos pelo modelo de Lucas, intitulando assim o trabalho como: "*The Equity Premium: a puzzle*".

Os agregados “heróicos” utilizados por Lucas não eram condizentes com a economia real por mais que, segundo Mehra (2003), o *puzzle* seja quantitativo e não qualitativo.

O presente trabalho busca avaliar o modelo de Lucas para dados da economia brasileira de 1980-2008, com o objetivo de averiguar a existência ou não do *equity premium*, a aderência do modelo à realidade contemporânea e a intensidade com que tais relações ocorrem.

Para tanto faz-se necessário determinar os valores do coeficiente de aversão ao risco α e o fator de desconto estocástico β. Para encontrar o valor do *equity premium*, será utilizado o modelo de Hansen e Singleton (1982), uma derivação do modelo de Lucas, além da averiguação do coeficiente de aversão ao risco e do fator de desconto estocástico, através do método estatístico de Variável Instrumental e do GMM[1].

O trabalho fica assim dividido, além desta introdução, no segundo capítulo é apresentada a fundamentação teórica, na qual são averiguadas teorias de escolhas sobre incerteza, diferentes funções utilidade e conceitos básicos de utilidade topológica; no terceiro capítulo são demonstrados os diferentes modelos de precificação e o modelo de precificação intertemporal, na qual são avaliados dados para as principais economias desenvolvidas e para o Brasil; no quarto capítulo é apresentada a descrição dos dados, análises e estimações; findando com a conclusão.

[1] Método Generalizado dos Momentos (GMM).

2 REFERENCIAL TEÓRICO

As teorias de precificação de ativos estão inseridas nas análises microeconômicas de mercado de ativos, sendo que para uma melhor compreensão do funcionamento do mercado de ativos faz-se necessário uma análise mas detalhada referente a escolhas sob incerteza.

Este capítulo busca com isso avaliar primeiramente as escolhas sob incerteza, que envolvem decisões de agentes econômicos em busca de uma maximização intertemporal de suas utilidades baseadas em consumo no tempo.

Vale ainda salientar que sendo o presente trabalho uma avaliação pormenorizada de modelos intertemporais de precificação de ativos, faz-se necessário não apenas o entendimento prévio e teórico das escolhas sob incerteza mas também o entendimento do comportamento das principais funções utilidade que podem ser utilizadas nos modelos intertemporais.

Sendo assim, este capítulo é dividido em duas sessões, onde na primeira são apresentados os conceitos referentes à incerteza, onde são avaliados os preceitos de loteria, utilidade esperada e aversão ao risco, finalizando a sessão com a apresentação de algumas funções utilidade.

2.1 ESCOLHAS SOB INCERTEZA

Nesta seção busca-se avaliar como ocorre o processo comportamental de escolha dos consumidores quando se está tratando de incertezas. Tais decisões são referentes normalmente ao mercado de ativos, na qual a incerteza permeia o meio, onde a certeza sobre a remuneração dos ativos financeiros nunca é exata, sendo sempre acompanhada da existência do risco.

Para tal compreensão faz-se necessário o entendimento pormenorizado sobre loterias, onde são apresentados os conceitos estatísticos e probabilísticos referentes a jogos de incerteza; a utilidade esperada obtida dos jogos em loterias; e o conceito de aversão ao risco, onde serão avaliadas as teorias referentes aos conceitos de risco, aversão, amor e indiferença ao mesmo.

2.1.1 LOTERIAS

Para uma melhor representação do comportamento do consumidor sob incerteza, faz-se necessário avaliar primeiramente, conforme Varian (1992), uma decisão de escolha aos moldes de um jogo de loteria.

Uma loteria é demonstrada como sendo:

$$p \circ x \oplus (1 - p) \circ y$$

Esta notação significa que o consumidor recebe o prêmio *x* com a probabilidade *p* e o prêmio *y* com a probabilidade (*1* - *p*).

Existem algumas suposições para a forma de comportamento do consumidor com relação à loteria:

- Receber um prêmio com probabilidade 1 (um) é o mesmo que ter certeza do recebimento do prêmio:

$$1 \circ x \oplus (1 - 1) \circ y \sim x$$

- O consumidor não se importa sobre a ordem descrita na loteria:

$$p \circ x \oplus (1 - p) \circ y \sim (1 - p) \circ y \oplus p \circ x$$

- As percepções do consumidor se resumem unicamente às redes de probabilidades:

$$q \circ (p \circ x \oplus (1 - p) \circ y) \oplus (1 - q) \circ y \sim (qp) \circ x \oplus (1 - qp) \circ y$$

As duas primeiras suposições não apresentam tanto mistério, sendo que na primeira tem-se que uma probabilidade de 1 (um) é a caracterização de ocorrência de 100%, enquanto que a segunda afirma que a ordem da apresentação da loteria não altera o processo decisório do consumidor.

A terceira suposição, também chamada de “redutor de loterias compostas”, demonstra a indiferença do consumidor com relação a este processo de simplificação das redes de probabilidades da loteria.

Um bom exemplo da terceira suposição é o caso de um jogo de loteria onde existem três prêmios (*x*, *y* e *z*), e eles apresentam probabilidades idênticas de ocorrência, ou seja, 1/3 de probabilidade. Através do redutor de loterias, este jogo pode ser representado assim:

$$\frac{2}{3} \circ \left[\frac{1}{2} \circ x \oplus \frac{1}{2} \circ y\right] \oplus \frac{1}{3} \circ z$$

Que nada mais é que a representação de 1/3 de probabilidade de ocorrência de cada evento.

Os estudos sobre loteria são interessantes para apresentar como o consumidor se comporta quando se defronta com a incerta, e como ele pode mensurar estas possibilidades na busca da maximização de sua utilidade.

Considerando os objetivos do trabalho proposto, devemos analisar agora os conceitos de loteria em conjunto às análises de utilidade esperada.

2.1.2 UTILIDADE ESPERADA

A preferência do consumidor é representada por uma funções utilidade contínua, segundo Varian (1992), e as preferências entre funções utilidades distintas ocorrem como se segue:

$$p \circ x \oplus (1-p)y \succ q \circ w \oplus (1-q)z$$

$$u(p \circ x \oplus (1-p) \circ y) > u(q \circ w \oplus (1-q)z)$$

Onde a primeira loteria é preferível à segunda em decorrência unicamente de que a utilidade proporcionada pela primeira é maior que a utilidade proporcionada pela segunda.

Varias funções utilidade diferentes podem ser apresentadas além destas avaliadas acima. Dentre este número infinito de suposições, podemos encontrar uma função em particular que apresenta convenientemente a *propriedade da utilidade esperada*, conforme abaixo:

$$u(p \circ x \oplus (1-p) \circ y) = pu(x) + (1-p)u(y)$$

A *propriedade da utilidade esperada* afirma que a utilidade da loteria é igual à expectativa da utilidade dos prêmios.

> We can compute the utility of any lottery by taking the utility that would result from each outcome, multiplying that utility times the probability of occurrence of that outcome, and then summing Over the outcomes. (Varian, 1992)

Vale salientar que a utilidade é aditivamente separável entre o produto, e que a probabilidade é linear.

Apesar de existir uma infinidade de possíveis funções utilidade, dentre estas funções bem comportadas ou não, interessa ao escopo deste trabalho aquelas funções utilidade que apresentam as mesmas suposições comportamentais das citadas acima, levando ainda em consideração mas alguns axiomas, sejam eles:

(i) se a probabilidade p se encontrar entre o intervalo [0,1], podem ocorrer mudanças de preferências:

$$\{p\ in\ [0,1]: p \circ x \oplus (1-p) \circ y \succcurlyeq z\} \text{ e } \{p\ in\ [0,1]: z \succcurlyeq p \circ x \oplus (1-p) \circ y\}$$

(ii) se existir indiferença entre os prêmios, se terá também indiferença entre as loterias:

$$x \sim y \text{ , assim } p \circ x \oplus (1-p) \circ z \sim p \circ y \oplus (1-p) \circ z$$

Percebe-se no primeiro axioma que conforme a probabilidade se altera entre o intervalo [0,1], as preferências podem se alterar. Neste caso, a loteria de prêmio *x* com probabilidade p e prêmio de y com probabilidade de $(1-p)$ é preferível ao prêmio z, e vice-versa, dependendo do valor de p se encontrar entre o intervalo. No segundo axioma tem-se a lógica de que a indiferença entre prêmios proporciona também indiferença entre as loterias, neste caso, a indiferença entre os prêmios *x* e *y*, proporciona a indiferença entre a loteria de prêmio *x* com probabilidade p e premio *z* com probabilidade de $(1-p)$, e a loteria de prêmio *y* e probabilidade *p* e prêmio *z* com probabilidade $(1-p)$.

(iii) em um espaço de loterias validadas pelo consumidor - $\mathcal{L}$, existem boas loterias *b* e más loterias *w*:

$$x\ in\ \mathcal{L}\ , b \succcurlyeq x \succcurlyeq w$$

(iv) considerando o terceiro axioma, a preferência entre loterias estará condicionada a probabilidades de loterias *b* ocorrerem em detrimento de loterias *w*:

$$p \circ b \oplus (1-p) \circ w \succ q \circ b \oplus (1-p) \circ w \text{ apenas se } p > q$$

No terceiro axioma temos a demonstração da existência de um espaço de loterias validadas pelo consumidor, e que neste espaço existem boas e más loterias, que alteram as decisões de preferência dos consumidores quando se tem diferentes probabilidades ocorrendo.

Considerando que as funções utilidade analisadas apresentam comportamento equivalente aos axiomas acima relacionados, têm-se condições, agora, de apresentar a *teoria da utilidade esperada*.

A *teoria da utilidade esperada*, segundo os axiomas e suposições, afirma que existem funções utilidade u definidas dentro de $\mathcal{L}$ que satisfazem as propriedades de utilidade esperada aos moldes de:

$$u(p \circ x \oplus (1-p) \circ y) = pu(x) + (1-p)u(y) \text{ [2]}$$

Conclui-se ainda que sendo $x \succ y$ tem-se que $u(x) > u(y)$, através de:

$$u(x) = p_x \text{ onde, } x \sim p_x \circ b \oplus (1-p_x) \circ w$$

[2] Para uma análise mas detalhada da comprovação da teoria, ver Varian, Hall R. (Microeconomic Analysis, 1992) pag. 175.

$$u(y) = p_y \text{ onde, } y \sim p_y \circ b \oplus (1 - p_y) \circ w$$

onde sendo a utilidade de x igual a p_x, tem-se que o prêmio x é indiferente à loteria de prêmios bons b com probabilidade de p_x e prêmio maus w com probabilidade $(1 - p_x)$, em decorrência de que a utilidade de x está condicionada à probabilidade de ocorrência de x em uma determinada loteria, sendo que a satisfação do consumidor é a ocorrência do prêmio x. Entendendo este pressuposto, têm-se condições de avaliar quando a utilidade de x é maior que a utilidade de y, e condiciona-se que x seja preferível a y.

Varian (1992) também afirma que as funções de utilidades esperadas $u: \mathcal{L} \rightarrow R$ podem sofrer transformações monotônicas, desde que não alterem suas propriedades básicas que seguem as suposições e axiomas já mencionados. Pode-se exemplificar uma transformação monotônica que não altere as características básicas das funções de utilidade esperada como uma função de utilidade esperada $u(\cdot)$ que se transforma em $v(\cdot) = au(\cdot) + c$.[3]

As funções de utilidade esperada não se baseiam unicamente em casos de loterias de apenas dois resultados, situação esta que caracteriza uma simplificação necessária para uma compreensão mas detalhada do modelo. Os estudos a seguir buscam apresentar funções de utilidades esperadas que trabalhem com loterias de finitos números de resultados, onde o produto x_i é alcançado mediante a probabilidade p_i para $i = 1, \ldots, n$, e a utilidade esperada é representada como:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \quad (2.1)$$

Se considerarmos que se trabalha com distribuições de probabilidade contínua, podemos reescrever a equação 2.1 como:

$$\int u(x) p(x) dx \quad (2.2)$$

A equação 2.1 fica sendo utilizada para distribuições de probabilidade discretas, onde temos o valor da utilidade de determinada loteria equivalente a soma da multiplicação entre os prêmios e suas respectivas probabilidades, lembrando que o somatório de p_i é igual a 1 (um); enquanto que a equação 2.2 é utilizada para distribuições de probabilidade

[3] Estas transformações podem ser facilmente demonstradas, onde:

$$\begin{aligned} v(p \circ x \oplus (1 - p) \circ y) &= au(p \circ x \oplus (1 - p)y) + c \\ &= a[pu(x) + (1 - p)u(y)] + c \\ &= p[au(x) + c] + (1 - p)[au(y) + c] \\ &= pv(x) + (1 - p)v(y) \end{aligned}$$

contínua, onde a integral se apresenta como somatório da distribuição de probabilidade contínua vezes a utilidade de cada prêmio respectivo.

É possível ainda simplificar estas notações através da utilização de *operadores expectacionais*. Conforme Gujarati (2003), pode-se considerar X uma variável aleatória que recebe valores de x, e a utilidade de X também sendo uma variável aleatória composta de valores de $u(X)$. O valor esperado da variável aleatória da utilidade de X é representado por $Eu(X)$, que é a notação de *utilidade esperada associada com a loteria X*. No caso de uma variável aleatória discreta, $Eu(X)$ é dada pela equação 2.1, enquanto no caso de uma variável aleatória contínua, $Eu(X)$ é dado pela equação 2.2.

2.1.3 AVERSÃO AO RISCO

Considerando o espaço de loterias $\mathcal{L}$ composto unicamente de loterias com prêmios em dinheiro, têm-se condições práticas de apresentar uma função utilidade aos moldes das suposições e axiomas acima mencionados. Esta análise proporciona condições de apresentar o comportamento do consumidor em relação a uma cesta de loterias com prêmios em dinheiro, unicamente entendendo sua função utilidade por dinheiro.

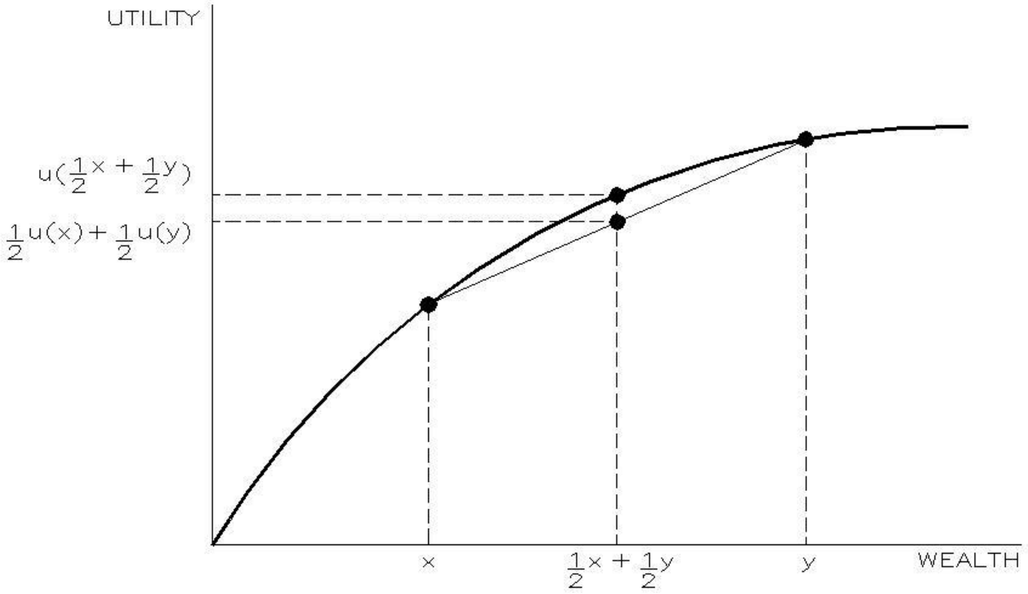
Para se computar o valor da utilidade esperada de uma loteria $p \circ x \oplus (1-p) \circ y$, basta avaliar $pu(x) + (1-p)u(y)$. O gráfico 1 demonstra o comportamento da utilidade esperada de uma loteria, onde o consumidor prefere o valor da utilidade esperada da loteria $u(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$, ao valor da utilidade da loteria $\frac{1}{2}u(x) + \frac{1}{2}u(y)$.

O comportamento do consumidor associado ao gráfico 1 é de *aversão ao risco*, onde o valor esperado do jogo é preferível à utilidade de se efetivar o jogo, proporcionado funções utilidade côncavas.

> If a consumer is risk averse Over some region, the chord drawn between any two points of the graph of his utility function in this region must lie below the function. This is equivalent to the mathematical definition of a concave function. (Varian, 1992)

Vale salientar que além de um comportamento de *aversão ao risco* condizente com uma função côncava, existe o comportamento *amante do risco,* relacionado a funções convexas, proporcionando um valor da utilidade esperada da loteria inferior ao valor da utilidade da loteria, onde o consumidor prefere à utilidade do jogo a utilidade esperada do valor do jogo. O consumidor *indiferente ao risco* apresenta, por conseguinte, uma função utilidade linear.

GRÁFICO 1 - UTILIDADE ESPERADA DE UMA LOTERIA



Fonte: Elaboração própria

Pode-se demonstrar ainda a aversão ao risco avaliando o gráfico 1, segundo a análise de ganhos ou perdas de riqueza, e quanto estas alterações podem proporcionar de variação na utilidade. A variação de utilidade proporcionada pelo aumento de riqueza de $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ à y é inferior à variação de utilidade proporcionada pela redução de riqueza de $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ à x. Esta análise é clara na dedução de aversão ao risco em decorrência de que a utilidade é mas afetada por perdas do que por ganhos. Por analogia, o amante do risco apresenta variação da utilidade maior quando percebe ganhos que quando percebe perdas de riqueza.

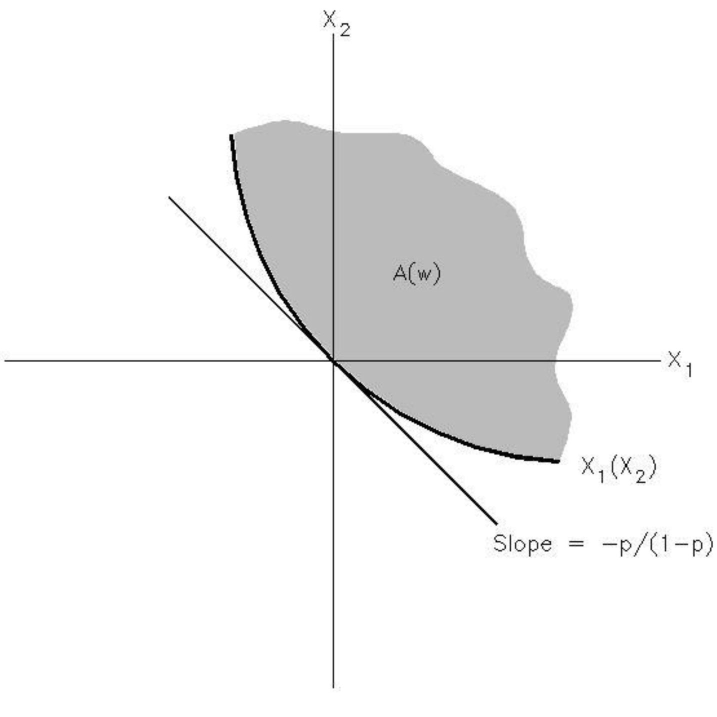
Varian (1992) ainda ressalta que a aversão ao risco pode ser medida facilmente pelo valor de sua derivada segunda, levando-se em consideração que a intensidade da concavidade da função utilidade esperada é que representa a maior ou menor aversão ao risco do consumidor. A hipótese de utilização única da derivada segunda como medida de aversão ao risco não representa da melhor forma possível o comportamento do consumidor, levando-se em consideração que a multiplicação da função utilidade esperada por uma constante não altera o comportamento do consumidor, mas altera o valor da derivada segunda.

Para a resolução deste problema, e normalização do padrão de medida, deve-se dividir o valor da derivada segunda pelo valor da derivada primeira da função utilidade esperada, engendrando assim a *medida de aversão ao risco Arrow-Pratt*:

$$r(w) = -\frac{u"(w)}{u'(w)} \quad (2.3)$$

É interessante ainda avaliar os espaços de loterias $\mathcal{L}$ mas detalhadamente. Uma delimitação do contradomínio de uma função implícita $x_2(x_1)$ representativa da curva de indiferença de um consumidor entre duas loterias (x_1, x_2), através da derivação da função e igualdade de x_1 a zero, restringe-se aos possíveis resultados racionais de escolha do consumidor com relação às duas loterias, levando-se em conta uma renda inicial *w*. O consumidor adquire x_1, mediante a ocorrência do evento E, e x_2 ocorrendo$(1 - E)$.

GRÁFICO 2 – CURVA DE INDIFERENÇA DA UTILIDADE ESPERADA DE UMA LOTERIA



Fonte: Elaboração própria

Esta análise pode ser observada no gráfico 2, onde a curva de indiferença é a representação de um limite de escolhas entre as duas loterias, onde a escolha seria equivalente à menor aceitação possível de um evento em questão. A inclinação do limite de *cenários aceitos pelo consumidor* no ponto (0,0) pode ser encontrada através da diferenciação da função e valoração de $x_1 = 0$.

$$pu(w + x_1) + (1 - p)u(w + x_2(x_1)) \equiv u(w) \quad (2.4)$$

$$pu'(w) + (1 - p)u'(w)x_2'(0) = 0$$

$$x_2'(0) = -\frac{p}{1-p} \quad (2.5)$$

A equação 2.4 representa a utilidade esperada do consumidor, em seu ponto de maximização, enquanto que a equação 2.5 demonstra a condição de primeira ordem e o resultado da inclinação no ponto $x_1 = 0$.

Se forem avaliados diferentes consumidores com as mesmas probabilidades para os eventos E e $(1 - E)$, podem ocorrer diferentes comportamentos de aversão ao risco. Segundo Varian (1992), indivíduos com uma aversão ao risco maior, devem ter contradomínios menores em relação aos consumidores com aversão ao risco menor, logo, o espaço de loterias do consumidor de maior risco está contido no espaço de loteria do consumidor de menor risco. Tal afirmação pode ser acompanhada pelo gráfico 3.

O gráfico 3 demonstra um estado global de utilidade esperada de dada loteria, onde os consumidores $i = 1, \dots, n$ são avaliados com relação à sua aversão ao risco. Neste caso o consumir 1 apresenta a menor aversão ao risco possível apresentando, assim, dentro de seu contradomínio, o contradomínio do consumidor 2, podendo-se por analogia estender até o consumidor *n*, proporcionando um *estado global de utilidade esperada*.

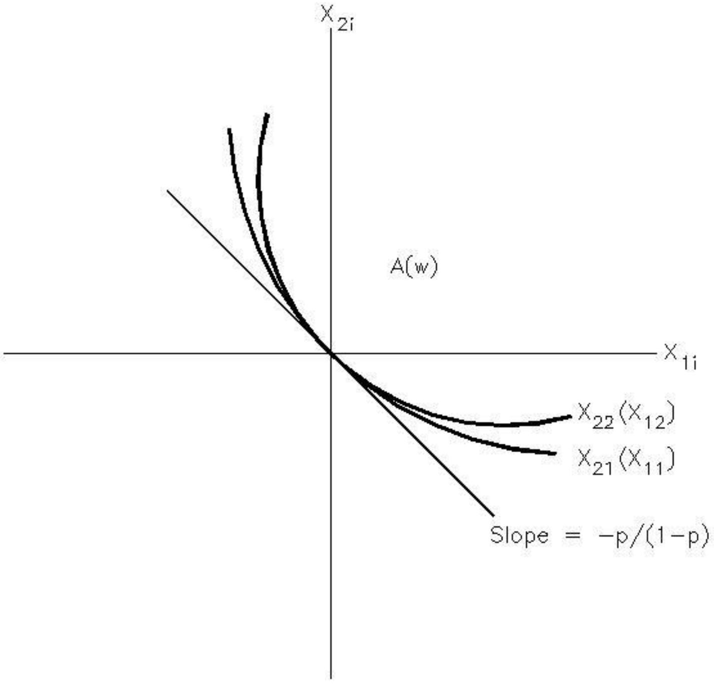
A forma de se mensurar estas diferenças de aversão ao risco é através da derivada segunda da função utilidade esperada e conseqüente valoração de $x_1 = 0$, atingindo assim:

$$pu"(w) + (1 - p)u"(w)x_2'(0)x_2'(0) + (1 - p)u'(w)x_2"(0) = 0 \quad (2.6)$$

$$x_2"(0) = \frac{p}{(1-p)^2}\left[-\frac{u"(w)}{u'(w)}\right] \quad (2.7)$$

A derivada segunda da função de utilidade esperada é obtida na equação 2.6, enquanto o resultado da condição de segunda ordem propiciada pela equação 2.7 demonstra que quanto maior a *medida de aversão ao risco Arrow-Pratt*, menor será o contradomínio do consumidor, ou seja, quanto mas avesso ao risco for o agente, menor será o espaço de loterias $\mathcal{L}$ do mesmo.

GRÁFICO 3 - CURVA DE INDIFERENÇA DA UTILIDADE ESPERADA DE UMA LOTERIA (ESTADO GLOBAL)



Fonte: Elaboração própria

2.1.3.1 AVERSÃO AO RISCO GLOBAL

A metodologia de mensuração do risco conforme avaliado acima é limitado a uma interpretação local, a menor escolha possível entre x_1 e x_2. Pode-se, agora, eliminar esta hipótese e avaliar o comportamento de aversão ao risco a termos globais.

Uma avaliação pormenorizada das funções utilidade demonstra uma variação da aversão ao risco conforme se altera o nível de renda.[4] No entanto, uma medida local não pode ser padronizada como medida confiável da aversão ao risco aos moldes de *Arrow-Pratt.*

Se considerarmos a existência de duas funções utilidade A(w) e B(w), com a função A(w) mais avessa ao risco que a função B(w), pode-se avaliar a aversão ao risco global de três formas, conforme Varian (1992).

A primeira metodologia é através de uma comparação de suas *medidas de aversão ao risco Arrow-Pratt*, para todos os níveis de renda,

[4] Para uma avaliação mais detalhada ver Markowitz (1952).

$$-\frac{A''(w)}{A'(w)} > -\frac{B''(w)}{A'(w)}$$

onde a função utilidade A apresenta uma maior medida de aversão ao risco que a função utilidade B, para todos os níveis de renda, baseando-se na medida *Arrow-Pratt*. Em termos práticos, tem-se o agente A mais avesso ao risco que o agente B.

Outra forma de avaliar o risco seria avaliando que a função utilidade do agente de maior risco A é uma transformação monotônica do agente B. Considerando que a função utilidade do agente de maior risco é mais côncava que a função utilidade do agente de menor risco pode-se, através de uma transformação em $B(w)$, obter a função $A(w)$. Logo, a função utilidade de A é uma transformação de concavidade da função utilidade de B, tal como:

$$A(w) = G(B(w))$$

Uma última forma de se avaliar como A é mais avesso ao risco que B é através da determinação de quanto os agentes estão dispostos a pagar para evitar determinado risco. Considerando que a variável aleatória com esperança zero é $\tilde{\epsilon}$, e que o valor que cada agente está disposto a gastar é $\pi_i(\tilde{\epsilon})$, tem-se:

$$A\big(w - \pi_A(\tilde{\epsilon})\big) = EA(w + \tilde{\epsilon})$$

onde o valor da função utilidade dependente da renda menos o custo do seguro é igual ao valor esperado de A em função da renda mais a ocorrência do sinistro. Pressupõem-se, conforme Pratt (1964), que quanto maior a aversão ao risco maior o valor que o agente econômico está disposto a pagar para evitar o risco, sendo assim $\pi_A(\tilde{\epsilon}) > \pi_B(\tilde{\epsilon})$.

As três metodologias se complementam, conforme Pratt (1964), demonstrando uma forma segura de comparação entre diferentes avaliações de risco[5].

Após detalhadas análises condizentes às teorias comportamentais, referentes a conceitos de loteria, utilidade esperada e aversão ao risco local e global, tem-se embasamento para uma avaliação formal de maximização da decisão do consumidor.

Para medir e avaliar ativos financeiros deve-se primeiramente determinar um intervalo de tempo, neste caso, um período fixo inicial e um final. No período inicial o consumidor apresenta riqueza w, que passa a ser utilizada fracionalmente (x_i) para investimento em diferentes ativos financeiros $i = 0, \dots, n$, sendo assim, a riqueza no segundo período é representada por:

[5] Para uma avaliação mais detalhada ver Pratt (1964).

$$\widetilde{W} = w\sum_{i=0}^{n} x_i\tilde{R}_i \quad (2.8)$$

Na equação 2.8 tem-se a riqueza no segundo período como uma variável aleatória igual ao montante w multiplicado pela média ponderada de retorno dos diversos ativos financeiros da carteira do agente econômico. A riqueza no segundo período se torna aleatória em decorrência de sua dependência à outra variável aleatória, o retorno dos ativos.

Considerando que o consumidor busca a maximização de sua utilidade esperada mediante as escolhas ponderadas de x_i, e que o somatório de x_i é igual a 1 (um), tem-se que o somatório de x_i pode ser representado também como:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \quad (2.9)$$

Substituindo a equação 2.9 na equação 2.8, obtêm-se:

$$\widetilde{W} = w\left[x_0R_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i\tilde{R}_i\right]$$

$$\widetilde{W} = w\left[R_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i(\tilde{R}_i - R_0)\right]$$

O problema de maximização pode ser agora demonstrado pela equação 2.10:

$$\max_{x_1,\dots,x_n} Eu(w[R_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i(\tilde{R}_i - R_0)]) \quad (2.10)$$

onde o consumidor maximiza sua utilidade mediante valores máximos para x_i.

Derivando a função utilidade e igualando a zero temos a condição de primeira ordem sendo expressa na equação 2.11:

$$Eu'(\widetilde{W})(\widetilde{R_i} - R_0) = 0 \quad (2.11)$$

$$Eu'(\widetilde{W})\widetilde{R_i} = R_0Eu'(\widetilde{W}) \quad (2.12)$$

A equação 2.12 é apenas outra representação da condição de primeira ordem, que através da identidade de covariância[6] pode proporcionar a equação 2.13, que re-escrita tem-se a equação 2.14, conforme abaixo:

$$cov(u'(\widetilde{W}), \widetilde{R_i}) + E\widetilde{R_i}Eu'(\widetilde{W}) = R_0Eu'(\widetilde{W}) \quad (2.13)$$

[6] Identidade de Covariância: $cov(X, Y) = EXY - EXEY$

$$E\widetilde{R_i} = R_0 - \frac{1}{Eu'(\widetilde{W})}cov(u'(\widetilde{W}), \widetilde{R_i}) \quad (2.14)$$

Na equação 2.14, o retorno esperado de qualquer ativo é a soma do retorno do ativo livre de risco mais o prêmio de risco, que é determinado pela covariância entre a utilidade marginal da riqueza com o retorno do ativo avaliado.

Considerando os pressupostos acima relacionados, um ativo que apresente uma relação direta entre o seu retorno e a riqueza, proporciona uma covariância negativa entre utilidade marginal e retorno do ativo, levando-se em consideração que a utilidade marginal é indiretamente proporcional ao nível de renda. Um ativo com estas características, conforme Varian (1992), apresenta taxa de retorno superior ao retorno livre de risco.

Já os ativos que apresentarem relação inversamente proporcional ao nível de renda devem apresentar, por analogia, uma taxa de retorno inferior ao retorno livre de risco.

2.1.3.2 AVERSÃO AO RISCO RELATIVO

As análises anteriores relacionadas à aversão ao risco tratam de conceitos absolutos de aversão ao risco, onde são avaliados prêmios de loteria recebidos em forma de bens ou dinheiro. No caso de aversão ao risco relativa, conforme Varian (1992), são analisados prêmios de loteria condicionados a percentuais de retorno sobre níveis iniciais de riqueza, conforme demonstrada na equação 2.15, diferente de valores fixos com bens físicos ou monetários. Vale ressaltar que análises de aversão ao risco relativa se apresentam constantemente como problemas econômicos.

$$pu(xw) + (1-p)u(yw) \quad (2.15)$$

Na equação 2.15 apresenta-se uma loteria de probabilidade p e prêmio condicionado a utilidade de um ganho percentual x sobre a riqueza w, mais a probabilidade $(1-p)$ e prêmio condicionado a utilidade de um ganho percentual y sobre a riqueza w.

Dentro destes pressupostos é coerente afirmar que a *medida de aversão ao risco Arrow-Pratt* também deve se adequar a uma análise relativa, neste caso tem-se:

$$\rho = -\frac{u"(w)w}{u'(w)} \quad (2.16)$$

onde a *medida de aversão ao risco absoluta de Arrow-Pratt* é um índice que multiplica um valor inicial de riqueza do consumidor, *proporcionando a medida de aversão ao risco relativa de Arrow-Pratt*.

Quando se avalia pormenorizadamente a equação 2.16, torna-se coerente questionar a relação da medida de aversão ao risco relativa com o nível de riqueza. Varian (1992) afirma que elevações na riqueza do consumidor proporcionam, possivelmente, acréscimo absoluto na disposição ao jogo, ou seja, uma redução na aversão ao risco absoluta. No entanto esta afirmação não pode ser levada adiante quando avaliamos a medida de aversão ao risco relativa. Fica a dúvida sobre como se comporta a aversão relativa ao risco do consumidor quando da variação na riqueza. Para uma simplificação, se utiliza uma aversão relativa ao risco constante (CRRA – *Constant Relative Risk Aversion*) como hipótese simplificadora do modelo comportamental do consumidor.

Afirmar que o comportamento do consumidor é CRRA, é indicar que alterações no nível de riqueza do agente proporcionam alterações de intensidade similar na aversão ao risco, ou seja, um acréscimo de 10% na renda proporciona um acréscimo de 10% no montante aplicado a risco.

2.2 FUNÇÕES UTILIDADE

Teorias comportamentais e de jogos buscam interpretar decisões maximizadoras intertemporais baseadas no funcionamento de funções utilidade. Sendo assim, a compreensão das diferentes formas de função utilidade é primordial para este estudo.

Como as funções utilidade são apresentadas neste caso como utilidade esperada, a dependência de variáveis aleatórias lhe proporciona uma demonstração puramente estatística, sendo assim, avaliaremos ainda o comportamento de funções utilidade de média e variância (*mean-variance utility fuction*).

> In general the expected utility of gamble depends on the entire probability distribution of the outcomes. However, in some circumstances the expected utility of a gamble will only depend on certain summary statistics of the distribution. The most common example of this is a mean-variance utility function. (Varian, 1992)

Existem basicamente três formas de função utilidade que serão levadas em consideração, sejam elas i – função quadrática; ii – função exponencial; e iii - função logarítmica.

2.2.1 FUNÇÃO UTILIDADE QUADRÁTICA

As funções quadráticas são funções polinomiais de segundo grau, e apresentam domínio limitado até o ponto de máximo da função, além de ser uma função estritamente côncava, conforme o gráfico 4.

As equações 2.17 e 2.18 apresentam as funções utilidade e a utilidade esperada. Considerando que a variável riqueza é uma variável aleatória, seu valor deve ser representado por sua média e variância, ou seja, $w \sim N(\mu; \sigma^2)$, sendo assim, tem-se:

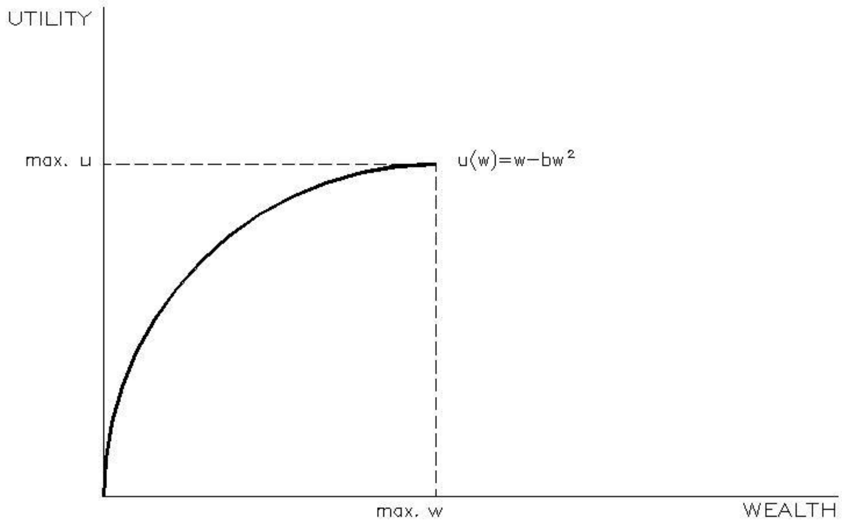
$$u(w) = w - bw^2 \quad (2.17)$$

$$Eu(w) = Ew - bEw^2$$

$$Eu(w) = \bar{w} - b\bar{w}^2 - b{\sigma^2}_w \quad (2.18)$$

onde a utilidade esperada é determinada unicamente pela média da riqueza do consumidor e a variância. Acréscimos na riqueza média proporcionam elevações na utilidade esperada, enquanto que acréscimos na variância da riqueza geram redução da utilidade esperada, conforme análises de Varian (1992) e Aguiar (2004).

GRÁFICO 4 - FUNÇÃO UTILIDADE QUADRÁTICA



Fonte: Elaboração própria

Apesar de as funções quadráticas serem de fácil manejo e aplicabilidade à teoria econômica, sua concavidade estrita impossibilita sua utilização como função utilidade, em decorrência de a *medida de aversão ao risco Arrow-Pratt* ser diretamente proporcional à riqueza, ou seja, aumento de riqueza proporcionam elevação da aversão ao risco. Esta interpretação pode ser vista através da avaliação da medida de aversão ao risco Arrow-Pratt para esta função, $r(w) = \frac{2b}{(1-2bw)}$, sendo que o domínio da função apresenta seu ponto de máximo em $w = \frac{1}{2b}$.

A hipótese de uma função utilidade quadrática é pouco provável.

2.2.2 FUNÇÃO UTILIDADE EXPONENCIAL

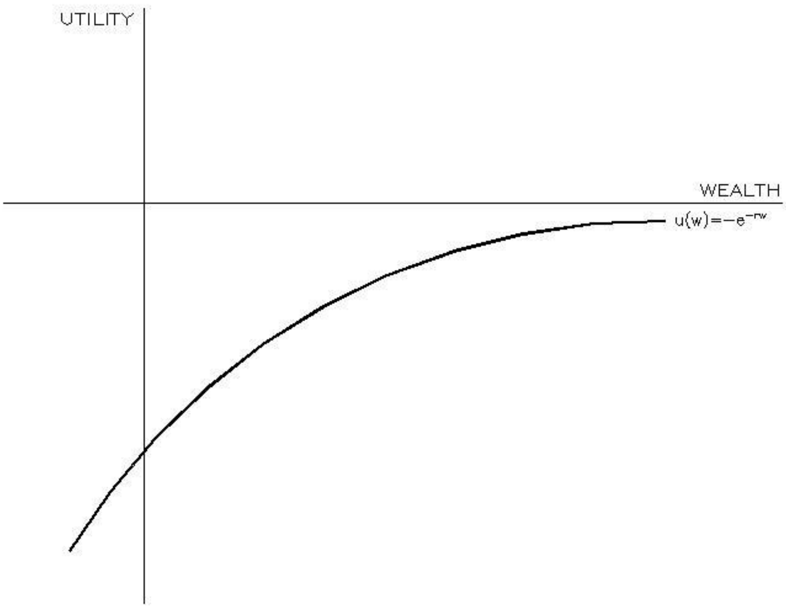
As funções utilidade exponenciais são as mais utilizadas, em decorrência de a medida de aversão ao risco Arrow-Pratt ser constante, conforme avalia Varian (1992) e Aguiar (2004). O gráfico 5 e as equações 2.19 e 2.20 demonstram o comportamento das funções utilidade e utilidade esperada, assim como sua apresentação aos moldes de uma distribuição estatística de média e variância da variável aleatória riqueza.

$$u(w) = -e^{-rw} \quad (2.19)$$

$$Eu(w) = -\int e^{-rw} f(w)dw$$

$$Eu(w) = -e^{-r(\overline{w}-\frac{r\sigma^2 w}{2})} \quad (2.20)$$

GRÁFICO 5 - FUNÇÃO UTILIDADE EXPONENCIAL



Fonte: Elaboração própria

As vantagens de se utilizar funções utilidade exponenciais são pelas transformações monotônicas que pode sofrer a função unicamente através de alterações nos valores da variável riqueza w. No caso da equação 2.20, a utilidade esperada sofre transformações monotônicas quando se tem alterações nos valores de $u(\bar{w}, {\sigma^2}_w) = \bar{w} - \frac{r{\sigma^2}_w}{2}$.

Calculando-se a medida de aversão ao risco Arrow-Pratt para a função exponencial obtêm-se $r(w) = r$. Sendo a medida de aversão ao risco uma constante, alterações no nível de riqueza não impactam nas decisões que envolvem análise de risco.

Através da equação 2.20, é possível demonstrar que conforme se tem acréscimos na riqueza média ocorre elevação na utilidade esperada, em contrapartida a uma redução da utilidade esperada conforme ocorre elevação da variância da riqueza.

2.2.3 FUNÇÃO UTILIDADE LOGARÍTMICA

Depois de avaliadas as funções utilidade quadrática e exponencial que apresentam, respectivamente, uma medida de aversão ao risco Arrow-Pratt crescente e constante, tem-se a função utilidade logarítmica que tem uma medida de aversão ao risco decrescente conforme afirma Aguiar (2004), ou seja, a medida decai com o aumento da riqueza indicando que, conforme o nível de riqueza se eleva, têm-se reduções na medida de aversão ao risco, tornando o consumidor menos avesso ao risco.

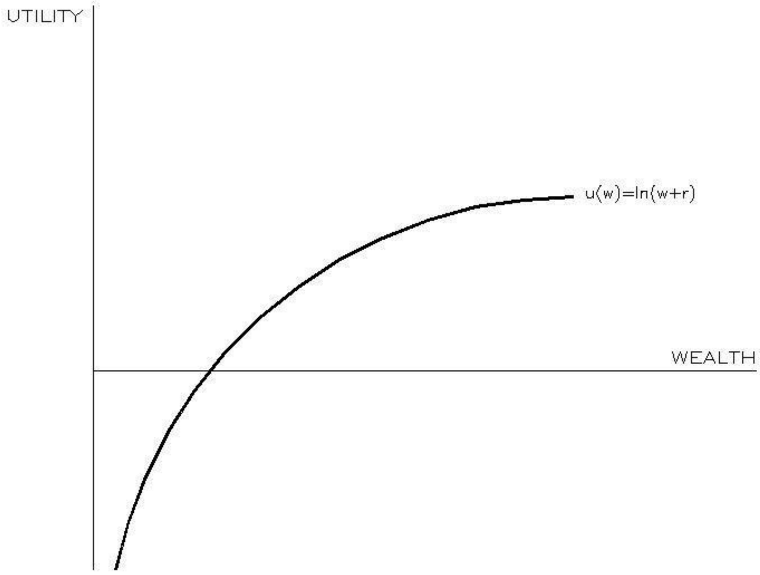
Esta análise é bem interessante, considerando que tal comportamento é relativamente plausível como representação do consumidor maximizador. A equação 2.21 e o gráfico 6 demonstram o comportamento de uma função logarítmica.

$$u(w) = \ln{(w + r)} \quad (2.21)$$

O cálculo da medida de aversão ao risco de Arrow-Pratt é $r(w) = \frac{1}{(w+r)}$, na qual demonstra com facilidade a relação inversa entre a riqueza w e $r(w)$.

Esta hipótese também pode ser utilizada para análise em mercados de risco, considerando que é relativamente plausível assumir que conforme as pessoas se tornam mais ricas sua aversão ao risco tende a diminuir.

GRÁFICO 6 - FUNÇÃO UTILIDADE LOGARÍTMICA



Fonte: Elaboração própria

2.3 UTILIDADE, PROBABILIDADE SUBJETIVA E OS DIFERENTES ESTADOS

Até agora se determinou que os prêmios recebidos fossem primeiramente bens, e posteriormente valores monetários. Uma avaliação mais detalhada de uma função utilidade nos indicará que os valores da utilidade podem variar conforme se apresentam diferentes realidades ou cenários. Um copo de água no deserto proporciona mais utilidade que um copo fora dele. Varian (1992) avalia como diferentes estados da natureza proporcionam variação nas funções utilidade, sendo que o valor de cada moeda é determinado pelo preço vigente na economia.

> … a complete description of the outcome of dollar gamble should include not only the amount of money available in each outcome but also the prevailing prices in each outcome. (Varian, 1992)

Genericamente a utilidade sobre bens ocorre em função de diferentes estados da natureza. Conforme Varian (1992): *"… an umbrella when it is raining may appear very different to a consumer than an umbrella when it is not raining"*.

A utilização de probabilidade condicionada é a operacionalização da análise de existência de diferentes resultados para diferente cenários. Considerando o prêmio b do jogo x sendo determinado pela ocorrência do evento $u(x)$, pode-se representar esta loteria como:

$$x \sim u(x) \circ b \oplus (1 - u(x)) \circ w$$

onde o recebimento de b está condicionado à ocorrência de $u(x)$, caso não ocorra este cenário, o ganho é de *w*.

Esta análise pode ser estendida muitas vezes além das duas únicas probabilidades $u(x)$ e $(1 - u(x))$, tornando-se possível uma análise do comportamento da utilidade aos moldes de uma interpretação dinâmica no transcorrer do tempo, onde E^n representa um número *n* de espaços dimensionais, com L^n cenários definidos no domínio E^n, conforme Lucas (1978) demonstra em seu célebre trabalho, *Asset Prices in an Exchange Economy*.

3 MODELOS DE PRECIFICAÇÃO

Após uma análise pormenorizada dos conceitos referentes a decisões sob incerteza, apresentados no capítulo anterior, obtêm-se subsídios para uma avaliação detalhada dos principais modelos de precificação, assim como os conceitos de *equity premium*.

As análises de *equity premium* estão inicialmente relacionadas aos preceitos de excedente de retorno, quando relacionamos ativos de risco com ativos livres de risco.

> It is often convenient to work with an asset's excess return, defined as the difference between the asset's return and the return on some reference asset. The reference asset is often assumed to be riskless and in practice is usually a short-term Treasury bill return. (Campbell & MacKinlay, 1997)

Para uma observação mais simplificada pode-se representar o retorno excedente como se segue:

$$Z_{it} = R_{it} - R_{0t}$$

onde o retorno excedente (*equity premium*) é igual à diferença entre a taxa de retorno ponderada R_{it} dos ativos $i = 1, \dots, n$ no período t, e a taxa de retorno R_{0t}.

Os estudos de *equity premium* estão diretamente relacionados aos diversos modelos de precificação de ativos que são analisados nas teorias de finanças. Basicamente, as estruturas de precificação das taxas de retorno de uma cesta de ativos de risco são determinados por uma taxa de retorno livre de risco somada ao prêmio de risco que se obtêm pelo investimento em ativos de risco. Tanto as taxas de retorno dos ativos de risco quanto o prêmio de risco são valores esperados, em decorrência de que os valores são baseados em dados obtidos em períodos passados e determinados através de análises estatísticas esperadas. Estes conceitos podem ser apresentados através de uma reformulação da equação apresentada acima como:

$$E(R_{i,t+1}) = R_{0,t+1} + E(Z_{i,t+1})$$

onde o valor esperado da taxa de retorno dos ativos de risco são determinados pela soma entre os ativos livres de risco e o prêmio de risco esperado.

Os diferentes modelos de precificação apresentados abaixo são instrumentos de mensuração da taxa esperada de retorno da carteira de ativos do agente econômico, onde a carteira é a representação de uma ponderação do retorno dos diferentes ativos através do peso dos mesmos na composição da carteira.

Tais teorias estão mais relacionadas aos conceitos de finanças do que propriamente às ciências econômicas, a não ser por recentes reformulações realizadas nestes principais modelos de precificação objetivando, através dos princípios de maximização neoclássica, possibilitar a determinação de pontos ideais de investimento no transcorrer do tempo. São os modelos intertemporais de precificação.

Vale salientar que um dos objetivos primordiais deste trabalho estão relacionados a uma avaliação da coerência destes modelos de precificação intertemporais para a ciências econômicas, considerando que a utilidade prática dos mesmos é de extrema importância quando avalia-se que a economia real contemporânea apresenta uma estreita relação com o sistema financeiro, estando tudo atrelado à finanças, fazendo-se de extrema relevância o entendimento das relações entre as ciências econômicas e as finanças. Conseqüentemente no presente capítulo, serão avaliadas as principais teorias de precificação e o modelo intertemporal de Lucas (1978), utilizado por Mehra e Prescott (1985) numa tentativa de análise para o caso americano.

A aplicação do modelo de Lucas por Merha e Prescott (1985) não apresentou os resultados esperados empiricamente, o que deu origem ao que ficou conhecido como, *equity premium puzzle*, o qual diversos cientistas econômicos e financistas tem tentado solucionar. Por mais que tenhamos um *puzzle* quantitativo, ele não se caracteriza como qualitativo, em razão de que a existência do *equity premium* não se comprovou apenas na economia americana mas também nas principais economias do mundo desenvolvido, conforme serão avaliados a seguir.

> I want to emphasize that the equity premium puzzle is a quantitative puzzle; standard theory is consistent with our notion of risk that, on average, stocks should return more than bonds. (Mehra, 2003)

Para o caso brasileiro, será averiguado que o *equity premium* também é uma realidade, onde no capítulo seguinte serão aplicados os modelos pertinentes a Lucas (1978), Mehra e Prescott (1985) e Mehra (2003), com objetivo de também averiguar a existência do *puzzle*.

3.1 MODELOS DE PRECIFICAÇÃO

Nesta seção, serão demonstrados dois modelos de precificação, sendo eles: i – *Capital Asset Pricing Model* – CAPM e ii - *Arbitrage Pricing Theory* – APT; além de uma readequação dos modelos ao prisma da utilidade esperada e da topologia

Varian (1992) avalia que os principais modelos de precificação apresentam sempre a mesma estrutura de mensuração, onde o retorno dos ativos é determinado pela soma do retorno dos ativos livres de risco, mas o prêmio de risco dos ativos avaliados podem tanto ser positivos quanto negativos. Esta interpretação pode ser demonstrada pela equação 3.1.

$$\bar{R}_a = R_0 + risk\ premium\ for\ asset\ a \quad (3.1)$$

Através da equação 3.1 pode-se ainda deduzir que o prêmio de risco dos ativos é determinado pela diferença de retorno entre os ativos de risco com os ativos livres de risco.

Estas análises estão relacionadas a teorias de equilíbrio geral, considerando que tanto o retorno quanto o risco dos ativos se encontram relacionados e interdependentes, formando um comportamento geral de equilíbrio no mercado de ativos. “*Therefore, in most model of asset pricing, the value of an asset ends up depending on how it covaries with other assets*.” (Varian, 1992)

Sendo assim, uma forte inter-relação entre o mercado de ativos é o que deve nortear esta sessão.

3.1.1 MODELO CAPM (CAPITAL ASSET PRICING MODEL)

O CAPM é o primeiro modelo de precificação de ativos financeiros, sendo teorizado por Sharpe (1964) e Lintner (1965), independentemente. Tanto Sharpe quanto Lintner, se basearam nos trabalhos de Markowitz (1959) e Tobin (1958) para a criação do modelo. Vale ainda salientar que tanto Markowitz quanto Sharpe foram premiados com Nobel pelas suas contribuições relacionadas a finanças em 1990, assim como Tobin em 1981.

As características básicas do modelo se baseiam nas análises de média e variância como forma de maximizar a riqueza do agente e proporcionar a máxima utilidade. Conforme Sharpe (1964), o consumidor apresenta a seguinte função utilidade:

$$U = (E_w, \sigma_w)$$

onde a utilidade é determinada pela média e desvio padrão da riqueza, sendo que a utilidade apresenta uma relação diretamente proporcional com a riqueza esperada

${}^{\delta U}/_{\delta E_w} > 0$, e inversamente proporcional com o desvio padrão ${}^{\delta U}/_{\delta \sigma_w} > 0$. Este comportamento proporciona curvas de indiferença com inclinação positiva.

> In assessing the desirability of a particular investment, however, he is willing to act on the basis of only two parameters of this distribution - its expected value and standard deviation. (Sharpe, 1964)

Sobre as análises de média e desvio padrão deve-se observar que o consumidor é propenso a decidir por carteiras que apresentando a mesma taxa de retorno, ou valor médio esperado, apresentem a menor variância possível, caracterizando um portfólio de *média e variância eficiente*.

Para uma formalização do modelo de precificação de ativos financeiros, é necessário considerar que o consumidor leva em consideração dois períodos. Esta interpretação é coerente quando se subentende que a maximização da riqueza obtida pelo agente busca proporcionar mais consumo, e uma forma clara de visualizar esta maximização é através da diferença entre dois períodos de consumo. Sendo assim, tem-se o segundo período demonstrado pela equação 3.2.

$$\tilde{C} = (W - c) \textstyle\sum_{a=0}^{A} x_a \tilde{R}_a \quad (3.2)$$

No segundo período o consumo é determinado pelo montante $(W - c)$, aplicado no portfólio x, com taxa de retorno ponderada $\sum_{a=0}^{A} x_a \tilde{R}_a$. Se for considerado que parte do portfólio é composto por ativos livres de risco e que sendo a soma do peso da carteira igual a um, tem-se $x_0 = 1 - \sum_{a=1}^{A} x_a$, e uma nova reformulação da equação 3.2 sendo apresentada pela equação 3.3 pode ser representada como se segue.

$$\tilde{C} = (W - c)\left[x_0 R_0 + \sum_{a=1}^{A} x_a \tilde{R}_a\right]$$

$$\tilde{C} = (W - c)[R_0 + \textstyle\sum_{a=1}^{A} x_a (\tilde{R}_a - R_0)] \quad (3.3)$$

Na equação 3.3, o valor entre colchetes representa o retorno do portfólio sendo composto por ativos livres de risco e com risco. Conforme avaliado acima, o consumidor busca investir em um portfólio que seja de *média e variância eficiente*, sendo assim, resulta-se agora em um problema de minimização com o objetivo a obter um portfólio que para uma dada taxa de retorno apresente a menor variância possível.

> Wich portfolio is actually chosen will depend on the investor's utility function; but whatever it is, it must minimize variance for a given level of expected return. (Varian, 1992)

O problema de minimização da variância[7] está condicionado a duas restrições, a taxa média de retorno do portfólio e o peso da carteira, conforme representado abaixo:

$$\min_{x_0,\ldots,x_A} \sum_{b=0}^{A} {x_b}^2 {\sigma_b}^2 + 2\sum_{a<b} x_a x_b \sigma_{ab}$$

$$\sum_{a=0}^{A} x_a \bar{R}_a = \bar{R}$$

$$\sum_{a=0}^{A} x_a = 1$$

A princípio, neste problema supõe-se que x_a pode ser positivo ou negativo, além de que o consumidor pode manter grandes ou pequenas posições em qualquer ativo.

Para que se obtenha a função de minimização é necessária a utilização do Lagrangeano, onde λ será o multiplicador de Lagrange da primeira restrição e μ será o multiplicador de Lagrange da segunda restrição, onde obtém-se a condição de primeira ordem representada pela equação 3.4 como se segue:

$$2\sum_{b=0}^{A} x_b \sigma_{ab} - \lambda \bar{R}_a - \mu = 0 \quad (3.4)$$

Através da equação 3.4, tem-se condições de alcançar uma padronização de medida de taxa de retorno, mas para isso, torna-se necessário algumas reformulações na mesma. Primeiramente será o ativo *b* a representação de um fundo *e* de *média e variância eficiente*, não havendo a necessidade de investimento com outros pesos, onde $x_b = 0$ para $b \neq e$, proporcionando, assim, que $\sum_{b=0}^{A} x_b = 1$ e uma reformulação da equação 3.5.

$$2\sigma_{ae} - \lambda \bar{R}_a - \mu = 0 \quad (3.5)$$

Agora que a condição de primeira ordem é a representação da minimização da variância entre o ativo a e o ativo $b = e$, conclui-se esta análise através das suposições

[7] Para uma avaliação mas detalhada sobre variância de carteiras ver Grinblatt, Mark e Titman, Sheridan (2005).

extremas de que o ativo a é livre de risco, ou que a também é igual a e. Sendo assim, tem-se através de substituições na equação 3.5, os seguintes casos extremos:

$$-\lambda\bar{R}_0 - \mu = 0$$

$$2\sigma_{ee} - \lambda\bar{R}_e - \mu = 0$$

Percebe-se que quando o ativo a é livre de risco, sua covariância com e se iguala a zero $\sigma_{ae} = 0$, e sendo considerado a como igual a e, a covariância de a e e torna-se uma a medida de variância do ativo e. Resolvendo as duas equações acima para λ e μ, obtém-se:

$$\mu = -\lambda\bar{R}_0$$

$$\lambda = \frac{2\sigma_{ee}}{\bar{R}_e - R_0}$$

Substituindo as duas equações acima na equação 3.5 e rearranjando-a, é possível produzir uma equação que padroniza medidas de retorno conforme abaixo:

$$\bar{R}_a = R_0 + \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{ee}}(\bar{R}_e - R_0) \quad (3.6)$$ [8]

Na equação 3.6 tem-se a taxa de retorno do ativo a sendo igual à soma do retorno do ativo livre de risco mais o prêmio de risco, que está em função da covariância do ativo a com a carteira eficiente e, além da variância da carteira eficiente e. Conforme a variância da carteira eficiente for maior têm-se menores prêmios de risco, assim como com covariâncias mais elevadas atinge-se maiores prêmios de risco.

Conforme Varian (1992), para dar uma forma mais empírica ao modelo deve-se, primeiramente determinar um portfólio específico que sirva como referencia. Para tanto,

---

[8] Derivação da equação 3.6

$$2\sigma_{ae} - \left(\frac{2\sigma_{ee}}{\bar{R}_e - R_0}\right)\bar{R}_a + \left(\frac{2\sigma_{ee}}{\bar{R}_e - R_0}\right)R_0 = 0$$

$$\bar{R}_a = \frac{\left(\frac{2\sigma_{ee}}{\bar{R}_e - R_0}\right)R_0 + 2\sigma_{ae}}{\left(\frac{2\sigma_{ee}}{\bar{R}_e - R_0}\right)}$$

$$\bar{R}_a = R_0 + 2\sigma_{ae}\frac{\bar{R}_e - R_0}{2\sigma_{ee}}$$

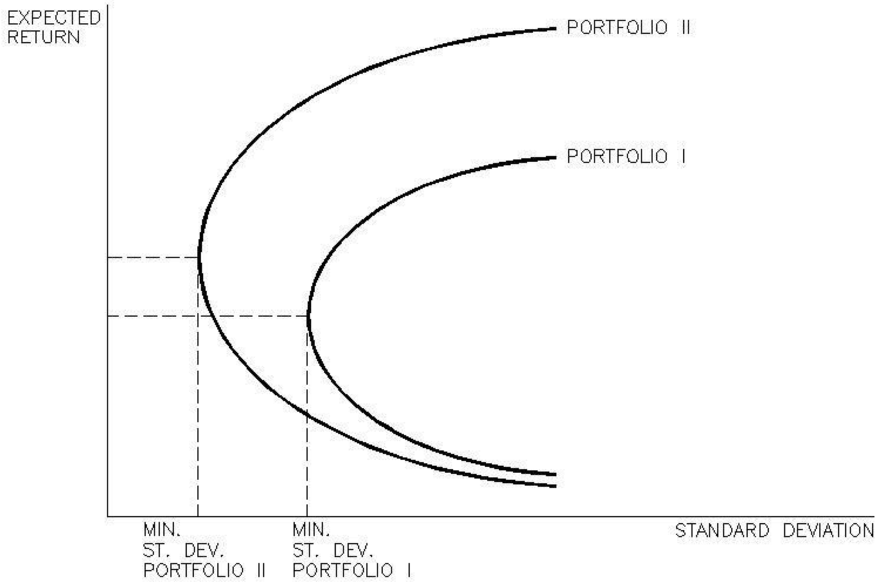
$$\bar{R}_a = R_0 + \frac{2\sigma_{ae}}{2\sigma_{ee}}(\bar{R}_e - R_0)$$

será avaliado um portfólio composto unicamente de ativos de risco, e outro composto de ativos livres de risco e com risco. Através da aplicação da equação 3.6 a estas duas carteiras teremos o tão almejado portfólio específico que se procura.

A fórmula de variância demonstrada acima proporciona em um eixo cartesiano entre retorno esperado e desvio padrão, com formas hiperbólicas conforme demonstrado no gráfico 7. Segundo avaliações de Markowitz (1959), o processo de diversificação do portfólio proporciona uma maior eficiência para o investidor e, no caso do gráfico 7, menores variâncias para dadas taxas de retorno.

Considerando que o portfólio composto de ativos de risco é o de maior diversificação possível, basta agora determinar o outro composto de ativos de risco e livres de risco. Se utilizando do mesmo eixo cartesiano do gráfico 7, é possível determinar o comportamento da segunda carteira através da demarcação de uma linha que passa pelo ponto de retorno do ativo livre de risco, e o ponto de tangência na hipérbole que determina o portfólio composto unicamente de ativos de risco.

GRÁFICO 7 - DIVERSIFICANDO O PORTFÓLIO



Fonte: Elaboração própria

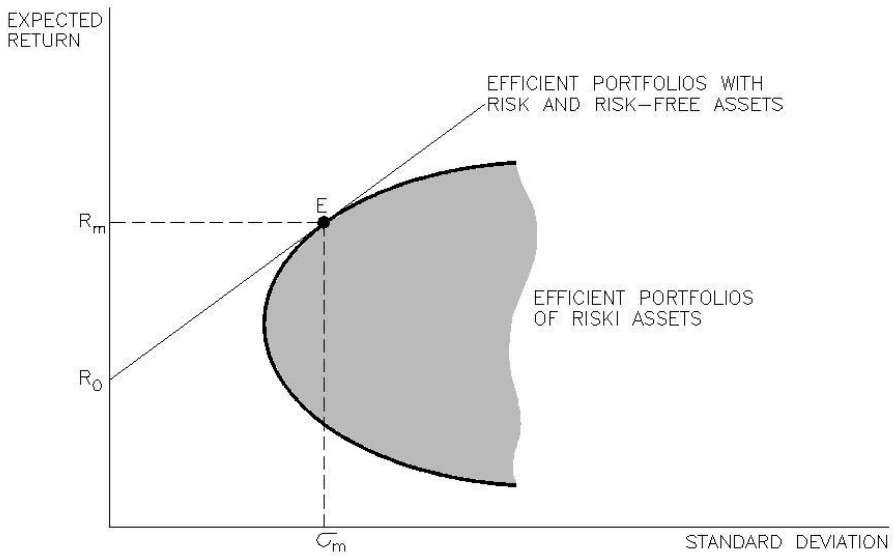
No caso da segunda carteira é fácil determinar a função matemática de seu retorno esperado através da manipulação da média ponderada do retorno $\bar{R}_m = x_1R_1 + x_2R_2$ e do desvio padrão da carteira $\sigma_m = x_2\sigma_2$. A substituição da equação de desvio padrão na de retorno com o objetivo de que o retorno fique em função dos retornos proporciona a função matemática da carteira composta de ativos de risco e livres de risco $\bar{R}_m = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{\sigma_2}\sigma_m$ onde R_1 representa o retorno dos ativos livre de risco.

> Sempre que a média da carteira e os desvios-padrão são médias ponderadas da carteira das médias e dos desvios-padrão de dois investimentos, os resultados de desvio-padrão e média são grafados como uma linha reta que liga os dois investimentos no diagrama de desvio-padrão e média. (Grinblatt & Titman, 2005)

O ponto de tangência entre as duas carteiras é mais uma tentativa de aumentar a diversificação do portfólio do consumidor, onde o agente agora é detentor de uma carteira que maximiza a diversificação entre ativos de risco e livres de risco. Esta suposição pode ser melhor entendida através do gráfico 8, onde o ponto $E(\bar{R}_m, \sigma_m)$ é considerado o ponto de maximização da utilidade do agente.

A análise anterior proporcionou condições de determinar o portfólio específico de referência que se buscava. Agora conforme Varian (1992) é possível determinar o *portfólio de mercado* composto de ativos de risco.

GRÁFICO 8 - DIAGRAMA DE RETORNO E DESVIO-PADRÃO



Fonte: Elaboração própria

Através de uma avaliação pormenorizada do portfólio *m*, é possível determinar uma carteira que represente o próprio mercado de capitais, com o objetivo de determinar em termos práticos o movimento do mercado.

Considerando x_a^m como uma fração da riqueza do agente investida no ativo a e integrante do portfólio m, é possível determinar a soma de pesos do portfólio m como $\sum_{a=1}^{A} x_a^m = 1$. A riqueza dos indivíduos aplicada em ativos de risco será representada por W_i, e X_{ia}, e representará o número de partes do ativo a mantidas pelo individuo i. A equação de pesos pode ser representada como se segue:

$$x_a^m = \frac{p_a X_{ia}}{W_i}$$

Se for feita a soma para cada consumidor é possível determinar a parte do portfólio m composta pelo ativo a, onde:

$$x_a^m = \frac{p_a \sum_{i=1}^{I} X_{ia}}{\sum_{i=1}^{I} W_i}$$

Na equação anterior tem-se o denominador como sendo a soma de toda a riqueza aplicada em ativos de risco na economia, além do numerador representar o valor de todas as partes do ativo a existentes no mercado. Logo, o portfólio m é conhecido como o *portfólio de mercado* composto por ativos de risco.

Através desta análise pode-se agora reescrever a equação 3.6 em função do *portfólio de mercado* m em vez do portfólio e obtendo assim:

$$\bar{R}_a = R_0 + \frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}(\bar{R}_m - R_0) \quad (3.7)$$

Na equação 3.7 o retorno do ativo a é determinado pela soma entre o retorno dos ativos livres de risco mais o prêmio de risco, que está em função da covariância entre o ativo a e o *portfólio de mercado*, dividido pela variância do *portfólio de mercado*, vezes o retorno do mercado que exceder o retorno livre de risco. O interessante é que esta interpretação acrescenta um toque empírico ao prêmio de risco, segundo Varian (1992).

Modificando a representação do termo ${}^{\sigma_{am}}/_{\sigma_{mm}}$ por β_a é possível conduzir a equação 3.7 aos moldes de um modelo de regressão onde o retorno do ativo a estaria em função do retorno do *portfólio de mercado* $\bar{R}_a = f(\bar{R}_m)$, apresentando como coeficiente angular o β_a e intercepto R_0. Logo a equação 3.7 pode ser reescrita como se segue:

$$\bar{R}_a = R_0 + \beta_a(\bar{R}_m - R_0) \quad (3.8)$$

Com a equação 3.8 apresenta-se a forma final do CAPM. É importante observar que a equação final do modelo não inclui a variância do ativo em observação *a*, em função de que a covariância entre o ativo a e o *portfólio de mercado* determina como o ativo acompanha os movimentos do mercado, bastando apenas observar o risco do mercado através da variância do *portfólio de mercado*.

3.1.2 MODELO APT (ARBITRAGE PRINCING THEORY)

A criação do modelo de precificação por arbitragem (APT – Arbitrage Pricing Theory) realizada por Ross (1976), propôs uma alternativa ao CAPM como ferramenta de precificação de ativos para o mercado financeiro.

Críticas à eficiência do modelo de média e variância foram apresentadas como imposição à substituição do mesmo. A não estabilidade nas taxas de retorno dos ativos é o principal motivo que inviabilizava seus resultados.

> ... but on theoretical grounds it is difficult to justify either the assumption of normality in returns or of quadratic preferences to guarantee such efficiency, and on empirical grounds the conclusions as well as the assumptions of the theory have also come under attack. (Ross, 1976)

Apesar de os dois modelos trabalharem com a mesma estrutura de análise de retorno dos ativos condicionado à soma do retorno do ativo livre de risco com o prêmio de risco, são as hipóteses iniciais que proporcionam a divergência entre os modelos. Enquanto que no CAPM pressupõe-se que o indivíduo inicialmente busca a maximização de sua utilidade através de uma maximização do consumo para uma determinação da *média e variância eficiente*, tem-se no APT a avaliação da estrutura de formação do retorno dos ativos baseados em fatores macroeconômicos como preceito base à sua formação.

A ocorrência de estreitas relações comportamentais entre vários ativos financeiros proporciona a hipótese de que existem fatores comuns determinando o movimento dos ativos, característica essa comprovada através do alto grau de correlação existente entre os ativos financeiros. Além da existência de risco específico a cada ativo. Esta observação pode ser representada através da equação 3.9 como se segue:

$$\tilde{R}_a = b_{0a} + b_{1a}\tilde{f}_1 + \cdots + b_{ka}\tilde{f}_k + \tilde{\epsilon}_a \quad \text{para } a = 1, \dots, A \quad (3.9)$$

onde os $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_k)$ representam os fatores macroeconômicos que influenciam na taxa de retorno dos ativos, através de parâmetros $(b_{1a}, \dots, b_{ka})$ que demonstram a sensibilidade com que os fatores impactam no retorno. O risco específico a cada ativo $\tilde{\epsilon}_a$ é analisado como independente aos fatores macroeconômicos.

A existência de uma constante b_{0a} na equação 3.9 proporciona uma taxa intrínseca de retorno a cada ativo, sendo claramente a representação do retorno esperado do ativo. Pressupõe-se assim, conforme Varian (1992), que os fatores macroeconômicos e o risco específico dos ativos caracterizam-se como dispersão desta média, logo, estes valores apresentam distribuição $\tilde{f}_k \sim N(0; {\sigma_k}^2)$ e $\tilde{\epsilon}_a \sim N(0; {\sigma_a}^2)$. É importante ainda ressaltar que os fatores macroeconômicos são independentes entre si.

Para a formalização do modelo APT, será utilizada uma simplificação do mesmo, através da suposição de que existe apenas um fator macroeconômico $\tilde{f}_1$, dois ativos no portfólio e a não existência de risco especifico $\tilde{\epsilon}_a$ para os ativos. Além do que os ativos em análise são livres de risco. Sendo assim a equação 3.10 demonstra como acontece o retorno desta carteira.

$$x\tilde{R}_a + (1-x)\tilde{R}_b = [xb_{0a} + (1-x)b_{0b}] + [xb_{1a} + (1-x)b_{1b}]\tilde{f}_1 \quad (3.10)$$

Considerando a hipótese de que se está trabalhando com ativos livres de risco, o valor entre o segundo colchetes deve ser igual a zero, proporcionando assim:

$$x^* = \frac{b_{1b}}{b_{1b} - b_{1a}} \quad (3.11)$$

Sendo a equação 3.10, composta de ativos livres de risco, tem-se uma reformulação da mesma conforme segue abaixo:

$$x^* b_{0a} + (1-x^*)b_{0b} = R_0$$
$$x^*(b_{0a} - b_{0b}) = R_0 - b_{0b} \quad (3.12)$$

Substituindo-se a equação 3.11 na 3.12, para o caso do ativo a e do ativo b obtêm-se:

$$\frac{b_{0b} - R_0}{b_{1b}} = \frac{b_{0b} - b_{0a}}{b_{1b} - b_{1a}}$$
$$\frac{b_{0a} - R_0}{b_{1a}} = \frac{b_{0a} - b_{0b}}{b_{1a} - b_{1b}}$$

Considerando que as duas equações anteriores apresentam na parte direita da igualdade valores iguais, pode-se considerar $b_{0b} - b_{0a} / b_{1b} - b_{1a} = b_{0a} - b_{0b} / b_{1a} - b_{1b} = \lambda_1$ e conseqüentemente:

$$\frac{b_{0a} - R_0}{b_{1a}} = \lambda_1$$

$$\bar{R}_a = R_0 + b_{1a}\lambda_1 \quad (3.13)$$ [9]

Através da equação 3.13 alcança-se novamente a taxa de retorno da carteira sendo condicionada à soma do retorno livre de risco com o prêmio de risco, que está condicionado ao parâmetro do fator macroeconômico 1 que mede a sensibilidade ao mesmo, multiplicado pela constante. É clara a avaliação de que apesar de uma grande mudança nas hipóteses iniciais do modelo, retornam-se aos pressupostos básicos de determinação do retorno em função do retorno livre de risco mais o prêmio de risco.

Conclui-se ainda que o APT procura uma apresentação aos moldes da oferta dos ativos, ou seja, determina-se o retorno dos ativos através do que proporciona o retorno do mesmo, diferente do CAPM que visa a determinação do retorno pela demanda dos ativos.

3.1.3 UTILIDADE ESPERADA

Uma reavaliação dos modelos anteriores ao prisma da utilidade esperada busca atrelar o comportamento dos ativos a utilidade esperada dos agentes econômicos. Esta análise é uma tentativa de tornar os modelos mais realísticos, considerando que o comportamento de consumo se altera conforme se tem alteração do cenário econômico.

O processo de maximização da utilidade segundo Varian (1992) ocorre em termos intertemporais, estando a utilidade em função do consumo presente e consumo futuro. O consumo futuro é determinado pelo ganho de capital sobre o principal $(W - c)$, onde o retorno deste investimento está em função de ativos de risco e livres de risco. A equação abaixo mostra com mais clareza este problema de maximização do agente econômico.

$$\max_{c, x_1, \ldots, x_A} u(c) + \alpha E\left[u\left((W - c)\left(R_0 + \sum_{a=1}^{A} x_a(\tilde{R}_a - R_0)\right)\right)\right]$$

---

[9] Sendo b_{0a} uma constate caracterizada como o valor esperado do retorno, considera-se $\bar{R}_a = b_{0a}$.

A equação anterior demonstra que o consumidor busca a maximização da utilidade através da utilidade presente que se encontra em função do consumo presente $u(c)$, mais o valor descontado da utilidade esperada $\alpha E[u(W-c)\tilde{R}]$. A taxa de desconto é determinada por α, e a utilidade esperada está em função da riqueza do agente menos o consumo presente $(W-c)$ investida à taxa de retorno $\tilde{R}$, que é uma média ponderada de investimentos em ativos livres de risco x_0 com retornos de R_0 e ativos com risco $(x_1,\dots,x_A)$ com retorno de $\tilde{R}_a$. Neste caso, tem-se o consumo futuro sendo $\tilde{C}=(W-c)\tilde{R}$, aos moldes da equação 3.3.

A condição de primeira ordem para o problema de maximização é demonstrada abaixo como:

$$u'(c)=\alpha E u'(\tilde{C})\tilde{R}$$
$$0=Eu'(\tilde{C})(\tilde{R}_a-R_0)$$

Utilizando-se da identidade de covariância[10], é possível reescrever a condição de primeira ordem.

$$cov(u'(\tilde{C}),\tilde{R}_a)=Eu'(\tilde{C})(\tilde{R}_a-R_0)-Eu'(\tilde{C})E(\bar{R}_a-R_0)$$
$$Eu'(\tilde{C})(\tilde{R}_a-R_0)=cov(u'(\tilde{C}),\tilde{R}_a)+Eu'(\tilde{C})(\bar{R}_a-R_0)$$

Rearranjando a equação anterior é possível obter ainda:

$$\bar{R}_a=R_0-\frac{1}{Eu(\tilde{C})}cov(u'(\tilde{C}),\tilde{R}_a) \quad (3.14)$$

A equação 3.14 é muito similar a equação 3.8, com a diferença de que o prêmio de risco depende da covariância do retorno do ativo a com a utilidade marginal e não com o *portfólio de mercado*. Esta estrutura induz ao comportamento de retorno dos ativos em função da utilidade marginal dos agentes, ou seja, para que o prêmio de risco seja positivo é necessário que o retorno do ativo covarie positivamente com o consumo, para que proporcione covariância negativa com a utilidade marginal do consumo. Isso só é possível em função de que a utilidade marginal é negativamente relacionada ao consumo, onde ${\delta^2 u}/{\delta c^2}<0$. Por analogia, o prêmio será negativo quando o ativo relacionado tiver uma

[10] Identidade de Covariância: $cov(X,Y)=EXY-EXEY$

covariância negativa com o consumo, proporcionando uma covariância positiva com a utilidade.

Através da hipótese de que os ativos são distribuídos normalmente $\tilde{R}_a \sim N(\bar{R}, {\sigma_a}^2)$, é possível através de fórmula de covariância[11] de Rubinstein (1976), reescrever a equação 3.14 como se segue:

$$cov\big(u'(\tilde{C}), \tilde{R}_a\big) = Eu''(\tilde{C})cov(\tilde{C}, \tilde{R}_a)$$

$$\bar{R}_a = R_0 + \left(-\frac{Eu''_i(\tilde{C}_i)}{Eu'_i(\tilde{C}_i)}\right)cov(\tilde{C}_i, \tilde{R}_a)$$

Avaliando a equação acima, percebe-se que a covariância agora entre o consumo do agente e o retorno do ativo está sendo multiplicada pela *medida de aversão ao risco Arrow-Pratt* $r_i = -\frac{Eu''_i(\tilde{C}_i)}{Eu'_i(\tilde{C}_i)}$, proporcionando a equação final do modelo onde:

$$\bar{R}_a = R_0 + r_i cov(\tilde{C}_i, \tilde{R}_a) \quad (3.15)$$

Vale ressaltar que na equação 3.15 tem-se uma medida agregativa do retorno $\bar{R}_a$ com o prêmio de risco sendo determinada pela covariância do consumo com o retorno para cada agente *i*, vezes a medida de aversão ao risco de cada agente.

[11] A fórmula de Covariância de Rubinstein é dada por $cov\big(x, f(x)\big) = E[f'(y)]cov(x, y)$.
Para uma análise mais detalhada ver Rubinstein (1976).

4. METODOLOGIA

Nesta seção será apresentada a metodologia adotada no trabalho e a origem dos dados utilizados.

O capitulo é dividido em duas partes, onde na primeira é apresentada a origem dos dados, e na segunda a metodologia utilizada para tratar os mesmos.

4.1 DESCRIÇÃO DOS DADOS

A série de dados utilizada é composta de dados mensais e trimestrais, abrangendo o período de 1980 até 2008. Considerando que o presente trabalho busca avaliar o *equity premium* brasileiro, os dados são compostos de taxas de retorno de ativos livres de risco, ativos de risco, taxa de variação do consumo e índice de preços. Assim sendo, os dados são:

- Série mensal do Consumo de Energia Elétrica pela Indústria (unidade GWh), divulgado pela Eletrobrás no boletim SIESE, disponível no site do Ipeadata;

- Série anual de População Total, disponível no sistema SIDRA, do Instituto brasileiro de geografia e estatística (IBGE);

- Série mensal do Índice Bovespa (Ibovespa) de ações (ex-dividendo) em pontos, disponível no provedor Broadcast da Agencia estado;

- Serie mensal da Taxa Over/Selic divulgada pelo boletim do Banco Central do Brasil, na seção de mercado financeiro e de capitais, disponível no site do Ipeadata;

- Série mensal do Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC), divulgado no sistema SNIPC, do Instituto brasileiro de geografia e estatística (IBGE), disponível no site do Ipeadata;

4.2 TRATAMENTO DOS DADOS

A série mensal do Ibovespa sendo apresentada em pontos, não representa a taxa de retorno do índice, sendo necessário aplicar a equação abaixo para obtê-la:

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

onde o montante de variação do índice $1 + R_t$ é igual à divisão do número de pontos no período presente do índice P_t pelo número de pontos do índice no período passado P_{t-1}.

A partir do cálculo anterior do índice Ibovespa tem-se agora o mesmo distribuído através de uma taxa de variação ou retorno. Tanto a taxa de retorno do Ibovespa quanto à taxa Over/Selic são valores nominais, sendo necessário deflacioná-los. O índice de preços adotado para deflacionar os dados é o INPC (Índice Nacional de Preços ao Consumidor) do IBGE. A escolha pelo índice está associada à maior abrangência do mesmo em comparação ao IGP-DI.

O cálculo de deflação levou em consideração como período base o ano de 2008, no caso de uma análise anual, ou o ultimo trimestre de 2008, no caso de dados trimestrais. A equação abaixo demonstra a fórmula utilizada para deflacionar os dados.

$$V_r = \frac{I_t}{I_{t-1}} V_t$$

onde o valor real V_r é igual à divisão entre o índice do INPC no período atual (ano base ou trimestre base) I_t e o índice do INPC no período passado (anos ou trimestre anteriores) I_{t-1} multiplicados pelo valor nominal V_t.

Estando todos os dados em valores reais, é possível agora determinar a média aritmética e o desvio padrão das taxas de retorno para o período de 1980 até 2008 tanto para o Índice Ibovespa quanto para a taxa Over/Selic.

O cálculo da média aritmética é determinado pela definição abaixo:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

onde o valor médio de X é determinado pelo somatório de todos os valores de X divididos pelo número de dados.

O desvio padrão é determinado pela raiz quadrada da variância, sendo que a variância é determinada como:

$$var(X) = \sigma^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

onde a variância é o somatório das dispersões elevadas ao quadrado e dividido pelo número de observações.

E o desvio padrão é a raiz quadrada da variância, conforme segue abaixo.

$$\sigma = \sqrt{var(x)}$$

Análises de covariância e correlação também são necessárias, valendo ressaltar que estas observações buscam demonstrar conceitos estatísticos de relação entre variáveis, no presente caso, relações que possam existir entre as diferentes taxas de retorno, entre as taxas e o consumo, e entre o prêmio de risco e as diferentes taxas.

A covariância é uma medida de relação entre duas variáveis, onde é apresentado como elas variam conjuntamente. Caso as variáveis sejam completamente independentes entre si o valor de sua covariância é zero. A fórmula de covariância para variáveis discretas é assim apresentada:

$$cov(X,Y) = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n}$$

Já a correlação apresenta uma análise de relação entre duas variáveis sendo que a mesma representa uma medida de relação, onde quanto mais próximo de 1 (um positivo) mais forte é a relação diretamente proporcional, e quanto mais próximo de -1 (um negativo) mais forte é a relação inversamente proporcional. A análise de correlação pode ser averiguada conforme a equação abaixo.

$$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

A metodologia apresentada acima proporciona condições de compreender as taxas de crescimento médio durante o período analisado para o índice Ibovespa e a taxa Over/Selic, com o objetivo primordial de determinar a taxa do *equity premium*, que é determinado, conforme já avaliado, pela diferença de retorno entre os ativos de risco com os ativos livres de risco. No presente trabalho isto será feito pela diferença da taxa média de retorno do índice Ibovespa e a taxa Over/Selic.

A valor do *equity premium* no Brasil, determinado pela metodologia apresentada nesta seção, deve ser julgado e avaliado na seqüencia segundo as teorias econômicas e de finanças, conforme será apresentado no tópico seguinte.

Considerando que o trabalho proposto tem como objetivos específicos determinar o *equity premium* brasileiro, a existência do *puzzle*, e principalmente a coerência do modelo de Mehra e Prescott (1985), baseado no modelo de Lucas (1978), como um instrumento eficiente de inter-relação entre os agregados econômicos e os instrumentos financeiros, faz-se necessário então a mensuração do *equity premium* através da metodologia proposta para que se possa comparar com os dados obtidos através das análises empíricas conforme comentado anteriormente.

A forma de mensuração do prêmio de risco é baseada em Mehra e Prescott (1985) reformulado por Mehra (2003), levando em consideração o artigo de Hansen e Singleton (1983), na qual apresentam a hipótese de que o retorno das ações e o consumo serem conjuntamente distribuídos como uma log-normal.

O modelo de Mehra, Hansen e Singleton será apresentado na seção seguinte assim como a comprovação do *puzzle* para o Brasil, considerando que a não existência do *puzzle* está condicionada a igualdade de valores entre os dados de prêmio de risco alcançados pelos dados empíricos, com os valores obtidos pelo modelo, assim como a comprovação do *puzzle* ocorrendo em função da não igualdade destes valores.

Na seqüência o mesmo modelo proporciona condições de determinar os parâmetros α e β que seriam necessários para a comprovação do prêmio de risco aos moldes do encontrado pela tabela 4.

A determinação dos parâmetros possibilita avaliar as possíveis causas dos valores díspares caracterizados pelo *puzzle* e possíveis inconsistências neste modelo econômico-financeiro.

Serão ainda avaliadas algumas análises que fogem ao escopo básico do modelo do *equity premium* intertemporal mas que representam possíveis soluções ao puzzle e conseguinte aprimoramento das inter-relações entre a ciência econômica e as teorias de finanças.

5 MODELO INTERTEMPORAL DE PRECIFICAÇÃO E O *EQUITY PREMIUM*

Após uma avaliação pormenorizada das principais teorias que embasam os estudos referentes a finanças em economia, relacionados aos modelos de precificação de ativos, tem-se condições de uma melhor apresentação dos conceitos relacionados à existência do *equity premium* e a posteriores do *puzzle*. Sendo este proporcionado pela inconsistência entre os dados empíricos encontrados para a economia Americana e o modelo neoclássico de precificação de ativos de Lucas (1978).

Através do seminal trabalho *Asset Prices in a Exchange Economy* (1978), Lucas apresentou uma reformulação ao CAPM aos moldes da utilidade esperada, ou seja, apresentando um modelo intertemporal de maximização do consumo através do problema de maximização entre escolhas de consumo presente e consumo futuro. A decisão de não consumir está associada à decisão de compra de ativos financeiros que remuneram juros no transcorrer do tempo, proporcionando maior consumo futuro.

Com o artigo *The Equity Premium: A Puzzle* (1985), Mehra e Prescott buscaram convalidar os resultados reais do *equity premium* americano para o período de 1889-1978, com os valores obtidos através do modelo de Lucas. O artigo é intitulado *A Puzzle* em razão de que os valores apresentaram uma grande distorção, tornando-se assim um mistério para os economistas e profissionais da área.

Vários outros trabalhos se seguiram aos estudos de Mehra e Prescott com o objetivo de solucionar o chamado *Puzzle*, sem que os mesmos lograssem sucesso.

Os estudos referentes ao *equity premium* e ao *puzzle* apresentados são importantes do ponto de vista de que no preço dos ativos financeiros estão embutidos todos os fenômenos econômicos, ou seja, o entendimento deste comportamento é de fundamental importância para o compreensão do próprio mercado não apenas financeiro (variação do preço dos ativos), mas também do mercado real (variáveis determinantes das oscilações no preço).

> Our attack on this problem begins from the observation that all relevant information on the current and future physical state of the economy is summarized in the current output vector *y*. (Lucas, 1978)

Vale ainda salientar que, através dos dados empíricos de ocorrência do *equity premium* nas principais economias do mundo, demonstra-se que em uma análise de longo prazo o mercado de capitais torna-se uma importante ferramenta de investimento e maximização intertemporal de consumo através dos ganhos de rendimento superiores aos ativos livres de risco.

> This kind of long-term perspective underscores the remarkable wealth-building potential of the equity premium and explains why the equity premium is of central importance in portfolio allocation decision, in making estimates of the cost of capital, and in the current debate about the advantages of investing Social Security funds in the stock market. (Mehra, 2003)

Esta presente sessão é divida em três partes, sendo a primeira parte composta da apresentação dos dados reais de *equity premium* para o Brasil e as principais economias do mundo; na parte seguinte são apresentados as justificativas para a ocorrência do *equity premium*; e na terceira é demonstrado o modelo matemático utilizado.

5.1 FATOS EMPÍRICOS NO BRASIL E NO MUNDO

Quando são avaliados os dados históricos referentes à ocorrência do *equity premium* para diversas economias do mundo percebe-se através destes resultados que a ocorrência de prêmios de risco em períodos de longo prazo é praticamente um fato comprovado. Vale ressaltar que o mesmo não pode ser confirmado para observações de curto prazo, em decorrência de choques externos que desestabilizam o mercado, acompanhados dos ciclos econômicos que caracterizam o movimento econômico de longo prazo.

Avaliando-se os dados demonstrados por Mehra e Prescott (1985) para o período de 1889-1978, apresentou-se da economia americana, um *equity premium* na ordem de 6,18%, condizentes à taxa de retorno real do Índice S&P 500[12] de 6,98% contra 0,80% dos T-bills[13] americanos.

Este excesso de retorno dos ativos de risco para com os ativos livres de risco não é uma característica unicamente da economia americana, através da tabela 1 e 2 é possível observar além dos dados para a economia americana, dados também para a economia inglesa, japonesa, alemã e francesa.

---

[12] S&P 500 é um dos índices de ações da agencia de Rating Standard & Poors, composto pelas 500 ações do setor industrial mais negociadas nos Estados Unidos. Depois do Índice Dow Jones, o S&P 500 é o mais utilizado.

[13] T-bills ou Treasury bills são títulos do governo Americano emitidos pelo Tesouro, com maturidade de no máximo 1 ano, caracterizados como títulos públicos de curto prazo. Estes títulos não pagam taxa de juros sobre sua maturidade, em vez disso, remuneram através da diferença entre o preço de compra e o de venda, sendo que o preço de compra é um valor descontado do preço nominal de venda.

Através de uma avaliação pormenorizada das tabelas 1 e 2 é possível observar que tanto os Estados Unidos quanto os outros países desenvolvidos apresentaram elevadas taxas de *equity premium* para diferentes períodos. Considerando que 85% do capital investido em ativos financeiros encontram-se nestes países, segundo Mehra (2003), é realmente forte a comprovação de que o investimento em ativos de risco apresenta retorno superior a ativos livres de risco quando se está falando de períodos de longo prazo.

TABELA 1 - RETORNO DE ATIVOS FINANCEIROS – E.U.A

Período	Valores Reais		Equity Premium
	Índice Mercado	Ativos Livres de Risco	
1802-1998	7,00	2,90	4,10
1889-2000	7,90	1,00	6,90
1926-2000	8,70	0,70	8,00
1947-2000	8,40	0,60	7,80

Fonte: Dados de 1802-1998 são de Siegel (1998); para 1889-2000 são de Mehra e Prescott (1985) atualizados pelos autores; e os restantes são de Mehra (2003)

TABELA 2 - RETORNO DE ATIVOS FINANCEIROS – PAÍSES DESENVOLVIDOS

Países	Período	Valores Reais		Equity Premium
		Índice Mercado	Ativos Livres de Risco	
Reino Unido	1947-1999	5,70	1,10	4,60
Japão	1970-1999	4,70	1,40	3,30
Alemanha	1978-1997	9,80	3,20	6,60
França	1973-1998	9,00	2,70	6,30

Fonte: Dados para o Reino Unido os dados são de Siegel (1998); e os restantes são de Campbell (2003).

Para uma análise mais drástica sobre as disparidades entre o investimento em ativos de risco e ativos livres de risco para a economia americana, avaliaremos o valor final do investimento de US$ 1,00 dólar para os períodos abaixo apresentados pela tabela 3 nos respectivos ativos.

Fica mais evidenciada a disparidade de retorno entre os diferentes tipos de investimento, tornando o investimento em ativos de risco um tipo de investimento não desprezível para carteiras de longo prazo que buscam maximizar seus retornos.

Para o caso brasileiro não é diferente, a existência do *equity premium* também é um fato, apesar de que anos de distorções através de crises inflacionárias prejudicaram uma estabilidade maior nas taxas de investimento.

TABELA 3 - VALOR TERMINAL DE INVESTIMENTO DE US$ 1,00 – E.U.A

Período Investimento	S&P 500		T-bills	
	Real	Nominal	Real	Nominal
1802-1997	558.945,00	7.470.000,00	276,00	3.679,00
1926-2000	226,47	2.586,52	1,71	16,56

Fonte: Dados de Mehra (2003).

Através da tabela 4 é possível averiguar as taxas de equity premium anuais realizadas através da diferença de retorno obtido entre o Índice Ibovespa e a taxa Over/Selic que é utilizada como indexador de títulos do governo brasileiro. As duas taxas de retorno são médias aritméticas anuais deflacionadas pelo índice de preços INPC[14].

TABELA 4 - RETORNO DE ATIVOS FINANCEIROS – BRASIL

Período	Valores Reais		Equity Premium
	Ibovespa	Over/Selic	
1980-2008	32,69	9,99	22,70
1980-1994	47,33	7,01	40,32
1995-2008	17,00	13,18	3,82

Fonte: Elaboração Própria

Na tabela 4, o *equity premium* anual para o período de 1980-2008 apresentou uma elevada taxa de retorno na ordem de 22,70%, em decorrência de que o índice Ibovespa deflacionado para o período apresentou uma taxa de retorno de 32,69% em contraposição à taxa Over/Selic de 9,99%. Esta taxa elevada do prêmio de risco para o primeiro período em análise se deveu à grande instabilidade no período de 1980-1994 em função das elevadas taxas de inflação que distorceram o comportamento do mercado. Enquanto que no período pós plano-real 1995-2008, caracterizado pela estabilidade inflacionária, o prêmio de risco caiu drasticamente em comparação ao período anterior, levando-se ainda em consideração que a maior parte deste período foi caracterizada por constantes instabilidades no mercado internacional, advindo de crises financeiras que levaram a intensas fugas de capital da economia brasileira, resultando em drásticas quedas de remuneração do índice Ibovespa.

Quando são avaliados os investimentos no índice Ibovespa e em títulos do governo indexados a taxa Over/selic através do valor acumulado no final do período representado pelo valor final do investimento de R$ 1,00, é possível averiguar como o investimento no

[14] INPC (Índice nacional de preço ao consumidor) é um índice de preços medido pelo IBGE (Instituto brasileiro de geografia e estatística) desde 1979. O INPC mede uma faixa salarial mais baixa que o IPCA, até seis salários mínimos, em contraposição ao IPCA de até 40 salários mínimos.

equity premium é apenas vantajoso quando visando o longo prazo e não o curto prazo. A tabela 5 demonstra esta afirmação.

Avaliando-se a tabela 5 é possível visualizar que o investimento de R$ 1,00 para o período de 1980-2008 no índice Ibovespa proporcionou no final do período um valor de R$ 19,00, em contraposição ao valor final de R$ 12,51 investidos em títulos do governo indexados à taxa Over/Selic. Já para o período de 1995-2008 o retorno acumulado do índice Ibovespa não se apresentou vantajoso em comparação ao investido em títulos do governo. Pressupõem-se neste caso que as instabilidades de curto prazo deste período inviabilizaram este tipo de investimento, comprovando que os investimentos em ativos de risco são inviáveis quando realizados para o curto prazo.

TABELA 5 - VALOR TERMINAL DE INVESTIMENTO DE R$ 1,00 – BRASIL

Período Investimento	**Ibovespa**		**Títulos Index over/selic**	
	Real	**Nominal**	**Real**	**Nominal**
1980-2008	19,00	6,75545E+12	12,51	4,44556E+12
1980-1994	6,37	7,83357E+11	2,26	2,7825E+11
1995-2008	2,98	8,62	5,53	15,98

Fonte: Elaboração Própria

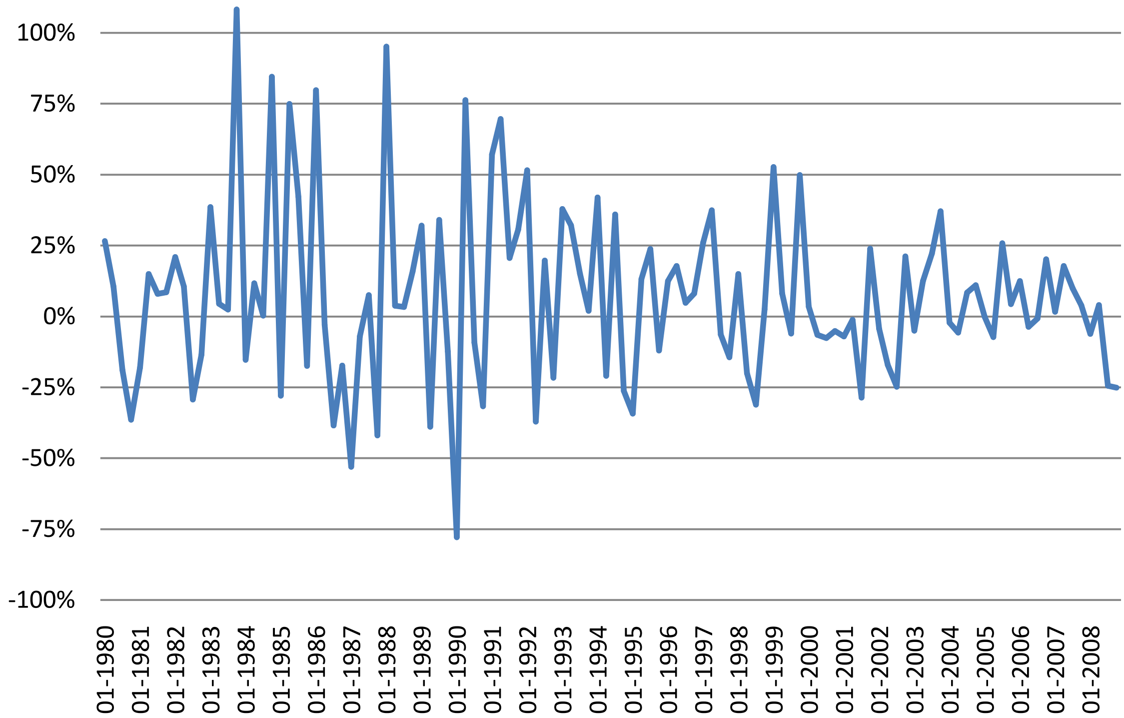
5.2 JUSTIFICATIVAS AO EQUITY PREMIUM

A ocorrência do prêmio de risco é justificada pela existência de um maior nível de risco para o mercado de ações que para o mercado de títulos públicos. Tobin (1958) já confirmava a relação diretamente proporcional entre risco e retorno, um *trade-off* inevitável.

O gráfico 9 ilustra a taxa de variação do retorno real do Índice Ibovespa trimestralmente para o período de 1980-2008 e o gráfico 10 demonstra a taxa de variação da Over/Selic também trimestral para o período de 1980-2008.

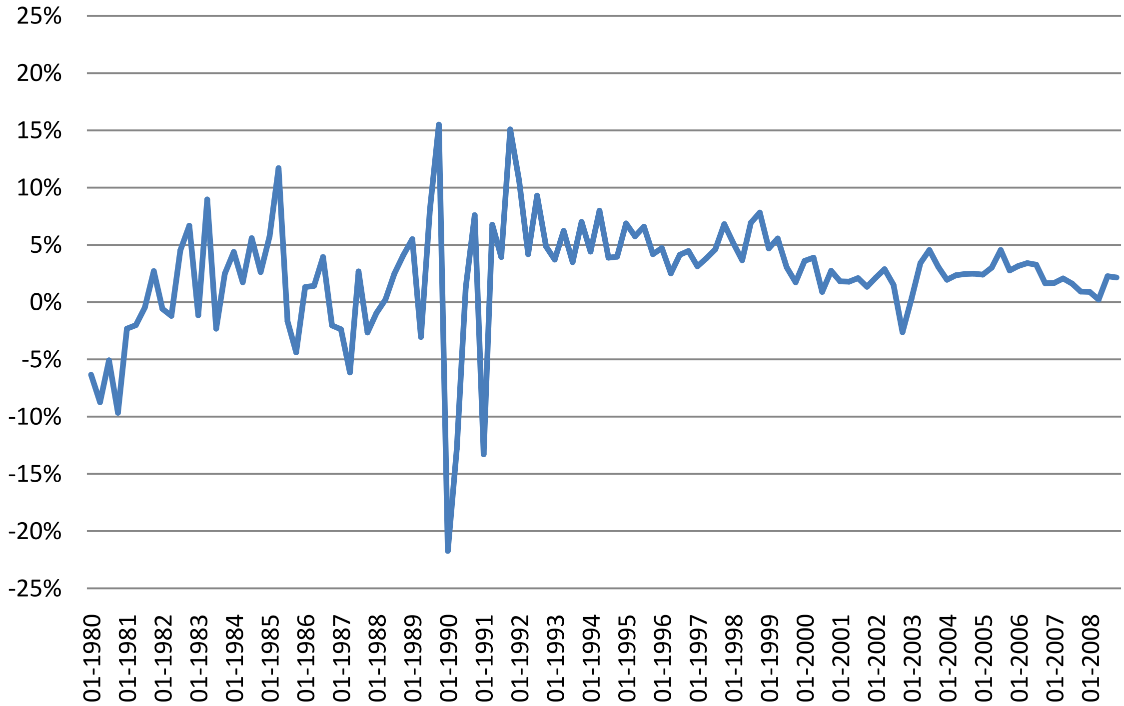
Através da ilustração dos dois gráficos torna-se evidente quanto mais risco existe no mercado de capitais em comparação ao mercado de títulos públicos. E considerando o *trade-off* entre risco e retorno, conclui-se que as taxas mais elevadas de retorno do mercado de capitais no transcorrer do tempo são condizentes com as elevadas taxas de risco do mesmo, justificando-se assim o porque da existência do *equity premium*.

GRÁFICO 9 - TAXA DE RETORNO REAL DO ÍNDICE IBOVESPA, 1980-2008



Fonte: Elaboração Própria

GRÁFICO 10 - TAXA REAL DE RETORNO OVER/SELIC, 1980-2008



Fonte: Elaboração Própria

Para uma compreensão mais detalhada sobre porque alguns ativos são mais rentáveis que outros, ou porque dos diferentes preços de mercado, é necessário um entendimento mais profundo sobre as modernas teorias de precificação.

Conforme avaliado anteriormente, uma das principais teorias sobre o assunto considera que a utilidade marginal de se deixar de ter consumo presente para comprar determinado ativo financeiro deve ser igual à utilidade esperada obtida no futuro através da venda do ativo proporcionando consumo, ou seja, o preço presente é uma decorrência do preço esperado do determinado ativo.

> The deux ex machine of this theory is that assets are priced such that, ex-ante, the loss in marginal utility incurred by sacrificing current consumption and buying an asset at a certain price is equal to the expected gain in marginal utility contingent on the anticipated increase in consumption when the asset pays off in the future. (Mehra, 2003)

Vale ainda ressaltar que a mesma intensidade de consumo não proporciona a mesma utilidade, quando se considera que os níveis de consumo apresentam-se diferentes. Quando se fala de níveis de consumo se está considerando, por exemplo, que a utilidade de um copo d'água no deserto é diferente da utilidade proporcionada pelo mesmo copo d'água a beira de uma piscina. Este parêntese é fundamental para se entender o comportamento do agente econômico intertemporal no processo de escolha do ativo financeiro que deseja manter em mãos.

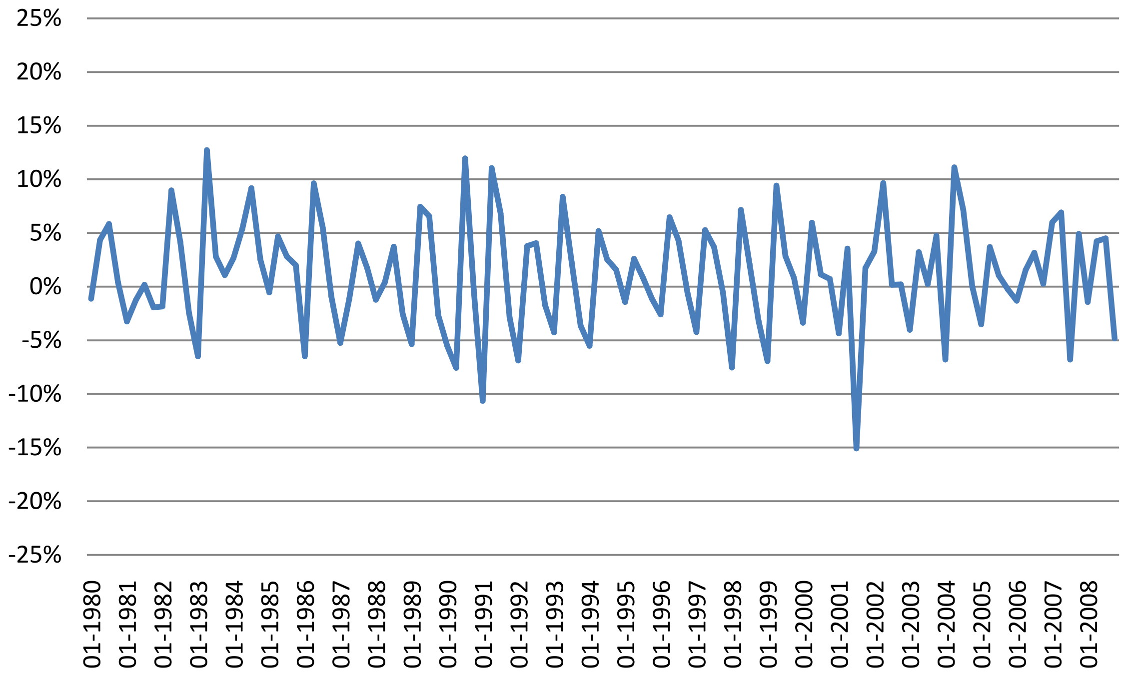
Sendo assim, ativos que pagam melhor quando o cenário é positivo e o consumo é elevado, proporcionam um baixo acréscimo de utilidade e tendem a valer menos, em comparação a ativos que pagam melhor quando o cenário é negativo e o consumo é baixo, gerando com isso um alto acréscimo de utilidade. É coerente afirmar que o agente maximizador buscará ativos que proporcionem mais utilidade, conseqüentemente sua escolha recai sobre ativos que remuneram em momentos ruins da economia.

Pode-se extrapolar estes conceitos para uma análise do CAPM (*Capital Asset Pricing Model*). Conforme visto anteriormente, o CAPM é um modelo linear entre o retorno esperado do ativo e o retorno/risco de mercado, onde o parâmetro desta função, chamado de beta, determina a intensidade do retorno esperado. Quanto maior o beta maior o retorno esperado de dado ativo. Os estados bons e ruins a qual a economia passa são completamente absorvidos pelo CAPM, onde o retorno/risco de mercado oscila em decorrência destes diferentes cenários.

Um elevado beta para determinado ativo tende a pagar mais quando o retorno do mercado é maior, ou seja, quando a economia apresenta um estado bom com elevadas taxas de consumo. Este tipo de ativo é menos preferido que os que pagam em período de estado ruim, sendo assim, valem menos e são vendidos por menos. Considerando que o preço é inversamente proporcional ao retorno do ativo, os ativos que valem menos e são vendidos por menos por não serem mantidos por muito tempo tendem a apresentar uma taxa de retorno maior nos períodos de estado bom, assim conforme apresentado pelo CAPM.

> A high beta security tends to pay off more when the market return is high, that is, when times are good and consumption is plentiful; as discussed earlier, such a security provides less incremental utility than a security that pays off when consumption is low, is less valuable to investors and consequently sells for less. (Mehra, 2003)

GRÁFICO 11 - TAXA DE VARIAÇÃO DO CONSUMO (CONSUMO DE ENERGIA ELÉTRICA PELA INDÚSTRIA – GWH), 1980-2008



Fonte: Elaboração Própria

> Insurance policies are a classic example of assets that smooth consumption. Individuals willingly purchase and hold than, in spite of their very low rates of return. (Mehra, 2003)

Uma última observação interessante destas teorias é que o consumidor não gosta de grandes variações no consumo, preferindo certa estabilidade do mesmo, condizente com o pressuposto de que prefere absorver ativos financeiros que remunerem em estados ruins da economia como forma de garantia para a manutenção da estabilidade de consumo, em contraposição a ativos que remuneram em estados bons e que distorcem o consumo do agente. O gráfico 11 demonstra a taxa de variação do consumo no transcorrer do período de 1980-2008 (série trimestral), que corroboram a análise de que o consumo é relativamente estável no transcorrer do tempo.

5.3 MODELANDO O EQUITY PREMIUM

O modelo adotado por Mehra e Prescott (1985) foi baseado no modelo de Lucas (1978), no qual se apresentam algumas hipóteses básicas como:

- Economia com baixo nível de choques exógenos;

- Um único tipo de agente econômico, com preferências a maximização do consumo intertemporal, aos moldes da equação abaixo;

$$E_0[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)] \qquad 0 < \beta < 1, \quad (5.1)$$

onde:

$E_0(.)$ = operador de expectativa, condicionado a informações avaliadas no tempo zero, que denota o presente;

β = fator de desconto temporal;

U = função utilidade crescente, continuamente diferenciável e côncava;

c_t = consumo per capita.

- A função utilidade é restrita condição CRRA (*Constante Relative Risk Aversion*), sendo,

$$U(c, \alpha) = \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha}\ , 0 < \alpha < \infty \quad (5.2)$$

onde, α mede a curvatura da função e quando $\alpha = 1$ tem-se o limite de uma função logarítmica.

A escolha por uma função logarítmica segue as mesmas características do porque utilizá-la nas teorias de crescimento (modelo neoclássico de crescimento – Solow) e teoria do ciclo de negócios por ser uma função agregativa onde ocorrem acréscimos no tempo a taxas estacionárias. Mas a mesma função apresenta uma desvantagem, que é relacionar o comportamento de aversão ao risco do agente à decisão intertemporal de consumo.

É importante salientar que sendo a função do tipo CRRA, caracteriza-se que o agente econômico é adverso a grandes variações no consumo, preferindo uma taxa de consumo estável. *Specifically, the coefficient of relative risk aversion is the reciprocal of the elasticity of intertemporal substitution*. Mehra (2003)

- As unidades produtivas produzem no tempo t, y_t unidades de produtos, que também representam o quanto é pago de dividendo pelas empresas. A produção é um processo estocástico de Markov[15],

$$F(y', y) = pr\{y_{t+1} = y' | y_t = y\}$$

onde a probabilidade de ocorrência de y' no tempo $t + 1$ está condicionado a ocorrência de y no tempo t.[16]

Conforme Mehra e Prescott (1985), uma matriz de probabilidade esperada é formulada como segue,

$$y_{t+1} = x_{t+1} y_t \qquad x_{t+1} \epsilon \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$
$$Pr\{x_{t+1} = \lambda_j | x_t = \lambda_i\} = \phi_{ij}$$

onde a produção futura é determinada pela produção no presente à intensidade de um parâmetro x_{t+1}, sendo este parâmetro pertencente ao conjunto λ, que por sua vez é o conjunto dos possíveis resultados de x_t e x_{t+1}, dando condições à probabilidade condicionada que gera a matriz de probabilidades esperadas ϕ_{ij}.

O comportamento maximizador do agente econômico está condicionado a um problema de escolha intertemporal. O agente iguala a perda de utilidade presente, mediante o adiamento de consumo em troca da compra de ativos, ao ganho descontado de utilidade esperada referente à venda futura do ativo. Esta análise é representada pela equação 5.3,

$$p_t U'(c_t) = \beta E_t[(p_{t+1} + y_{t+1}) U'(c_{t+1})] \quad (5.3)$$

[15] Processo estocástico de Markov é uma cadeia de valores estocásticos onde o valor futuro não depende dos valores passados, mas exclusivamente do valor presente. Representa-se basicamente o processo estocástico de Markov como uma probabilidade condicional, onde o valor esperado de x_{t+1} está condicionado ao valor de x_t.

[16] Para uma análise mais detalhada ver Lucas (1978).

onde o preço presente do ativo p_t multiplicado pela utilidade marginal presente $U'(c_t)$ é igual ao valor esperado descontado $\beta E_t[.]$ do preço futuro do ativo mais os ganhos de dividendos $(p_{t+1} + y_{t+1})$ multiplicados pela utilidade marginal futura $U'(c_{t+1})$.

A igualdade da equação 5.3 é fundamental para o processo de decisão intertemporal do consumidor, avaliando que a decisão de consumo leva em consideração o acréscimo de utilidade que pode proporcionar o consumo no presente ou futuro mediante o preço do ativo nos dois períodos.

> The operative concept here is "incremental loss or gain in well-being because of consumption," and the concept should be differentiated from incremental consumption itself. (Mehra, 2003)

Considerando que $R_{f,t+1} = (p_{t+1} + y_{t+1})/p_t$ ou $R_{e,t+1} = (p_{t+1} + y_{t+1})/p_t$, é possível reescrever a equação 5.3 em função do retorno livre de risco na equação 5.4 e em função do retorno de ativos com risco na equação 5.5.

$$1 = \beta E_t \left[\frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)} R_{f,t+1}\right] \quad (5.4)$$

$$1 = \beta E_t \left[\frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)} R_{e,t+1}\right] \quad (5.5)$$

As duas equações anteriores comprovam-se através do conceito de que o retorno futuro multiplicado pelo fator de desconto estocástico $M_{t+1} = U'(c_{t+1})/U'(c_t)$ e pelo fator de desconto temporal β, proporcionando o retorno ao valor inicial do capital, ou seja, 1.

Ainda é possível representar o retorno futuro do ativo livre de risco como,

$$R_{f,t+1} = \frac{1}{q_t} \quad (5.6)$$

onde q_t representa o preço do título.

Considerando a nomenclatura do fator de desconto estocástico, é possível representar a equação 5.5 como,

$$1 = \beta E_t\left[M_{t+1} R_{e,t+1}\right] \quad (5.7)$$

Através de algumas manipulações algébricas na equação 5.7 é possível alcançar a equação do *equity premium*, bastando aplicar a fórmula de covariância de Rubinstein (1976), e substituir a equação 5.4 é possível obter,

$$\beta E_t \left[\frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}\right] E_t\left(R_{e,t+1}\right) + \beta cov_t \left[\frac{U'(c_{t+1}), R_{e,t+1}}{U'(c_t)}\right] = 1$$

$$E_t(R_{e,t+1}) = R_{f,t+1} + cov_t\left\{\frac{-U\prime(c_{t+1}), R_{e,t+1}}{E_t[U\prime(c_{t+1})]}\right\} \quad (5.8)$$

A equação 5.8 é a representação do retorno esperado do ativo de risco R_e em $t+1$ sendo igual à soma da taxa livre de risco R_f também em $t+1$, mais o prêmio de risco. E o prêmio de risco sendo a covariância da utilidade marginal com o retorno do ativo de risco em $t+1$.

Quanto mais negativa for a covariância da utilidade marginal com o retorno do ativo maior será o *equity premium*. Ativos que tem uma alta covariância positiva com o consumo apresentam uma alta covariância negativa com a utilidade marginal, sendo assim, os ativos que pagam altas taxas de remuneração nos períodos de altas taxas de consumo apresentam covariância altamente negativa com a utilidade marginal:

> Assets that covary positively with consumption – that is, assets that pay off in states when consumption is high and marginal utility is low – command a high premium because these assets “destabilize”consumption. (Mehra, 2003)

Utilizando-se do modelo apresentado acima, Mehra e Prescott (1985) encontraram uma diferença entre o *equity premium* alcançado através da serie história de 1889-1978 e o encontrado através do modelo de Lucas (1978) operacionalizado por Mehra e Prescott. A questão agora se torna avaliar o porquê do *puzzle*. E para tanto utilizaremos uma readequação do modelo já avaliado, apresentado por Mehra (2003), que possibilita testarmos a existência do *equity premium* de uma forma relativamente fácil, conforme será avaliado nas seções subseqüentes.

6. ANÁLISES E ESTIMATIVAS

A modelagem apresentada na sessão anterior é a utilizada por Mehra e Prescott (1985) para determinação do *equity premium* americano, através do qual são encontradas divergências entre os dados empíricos avaliados para o período de 1889-1978 com relação aos resultados alcançados pelo modelo de Lucas (1978) utilizado, caracterizando o *equity premium puzzle*.

Nesta sessão serão analisados e estimados os dados com o objetivo a obter-se as taxas de retorno reais do índice Ibovespa, Over/Selic e conseqüentemente do *equity premium*, para se poder comparar com os resultados obtidos através do modelo de Mehra e Prescott (1985) e determinar a existência ou não do *puzzle* para o caso brasileiro.

Para facilitar a estimação dos dados através do modelo de Mehra e Prescott, será utilizada uma reformulação do mesmo apresentado por, Mehra (2003), e Hansen e Singleton (1983).

E após a análise do *puzzle*, serão avaliadas possíveis reformulações na teoria como tentativas a uma justificativa ao *puzzle* e ajustamento da mesma às realidades contemporâneas.

6.1 ANÁLISES EMPÍRICAS

Nesta sessão serão apresentados três métodos de estimações do *equity premium*. Primeiramente representados pelo modelo e Hansen e Singleton, uma análise matemática da teoria conforme detalhado na sessão anterior.

Nas duas ultimas sessões serão apresentados os resultados obtidos através do método de variável instrumental seguido do método do GMM, que buscam determinar os valores do coeficiente de aversão ao risco e da taxa de desconto intertemporal, com o objetivo final de através do modelo de Hansen e Singleton seja possível obter os valores do *equity premium*.

6.1.1 ANALISANDO O MODELO DE HANSEN E SINGLETON

Conforme Mehra (2003), Hansen e Singleton (1983), considera-se que o consumo cresce a taxa $x_{t+1} = c_{t+1}/c_t$ e é distribuído independente e identicamente; e que a taxa de crescimento do dividendo $z_{t+1} = y_{t+1}/y_t$ também é distribuído independentemente e identicamente. Tanto x quanto z são distribuídos em forma de logaritmos.

A conseqüência das hipóteses apresentadas acima proporciona que o retorno dos ativos $R_{e,t}$ também sejam distribuídos independente e identicamente (i.i.d.) e sejam distribuídos conjuntamente $(x_t, R_{e,t})$ através de uma função logarítmica.

A equação fundamental de relação entre os preços presente e futuro pode, através da substituição da derivada da utilidade $U'(c_t) = c_t^{-\alpha}$, gerar a seguinte equação,

$$p_t = \beta E_t \left[(p_{t+1} + y_{t+1}) \frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)} \right]$$

$$p_t = \beta E_t[(p_{t+1} + y_{t+1}) x_{t+1}^{-\alpha}] \quad (6.1)$$

Através de álgebra é possível reescrever a equação 6.1 nas equações 6.2 e 6.3 conforme segue:

$$E_t(R_{e,t+1}) = \frac{E_t(z_{t+1})}{\beta E_t(z_{t+1} x_{x+1}^{-\alpha})} \quad (6.2)$$

$$R_{f,t+1} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{E_t(x_{x+1}^{-\alpha})} \quad (6.3)$$

Considerando que a taxa de crescimento do consumo e do dividendo são distribuídos na forma logarítmica, pode-se considerar através das propriedades de log-normal, que,

$$E_t(R_{e,t+1}) = \frac{e^{\mu_z + 1/2\alpha^2}}{\beta e^{\mu_z - \alpha\mu_x 1/2(\alpha_z^2 + \alpha^2\alpha_x^2 - 2\alpha\sigma_{x,z})}}$$

$$lnE_t(R_{e,t+1}) = -ln\beta + \alpha\mu_x - \frac{1}{2}\alpha^2\alpha_x^2 + \alpha\sigma_{x,z} \quad (6.4)$$

$$R_f = \frac{1}{\beta e^{-\alpha\mu_x + 1/2\alpha^2\alpha_x^2}}$$

$$lnR_f = -ln\beta + \alpha\mu_x - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_x^2 \quad (6.5)$$

Considerando o conceito de prêmio de risco, é possível subtrair-se lnR_f de $lnE_t(R_{e,t+1})$, para obter-se o valor do *equity premium*, onde

$$lnE_t(R_{e,t+1}) - lnR_f = \alpha\sigma_{x,z}$$

$$lnE_t(R_{e,t+1}) - lnR_f = \alpha\sigma_{x,R_e} \quad (6.6)$$

Baseando-se na equação 6.6, tem-se que o *equity premium* é a multiplicação entre o coeficiente de aversão ao risco e a covariância entre o logaritmo natural da taxa de crescimento do consumo com o logaritmo natural da taxa de crescimento do dividendo, que neste modelo pode ser considerado como a taxa de retorno do ativo de risco.

A condição de equilíbrio do modelo, segundo Lucas (1978), pressupõe que a taxa de crescimento do consumo acompanha a taxa de crescimento do rendimento dos ativos e, conseqüentemente, a covariância entre consumo e retorno torna-se uma variância do consumo, conforme se segue.

$$lnE_t(R_{e,t+1}) - lnR_f = \alpha\sigma_x^2 \quad (6.7)$$

A equação 6.7 considera o *equity premium* como sendo determinado pelo coeficiente de aversão ao risco e pela variância do consumo.

As tabelas abaixo demonstram os resultados obtidos para a economia brasileira, referentes às taxas de retorno dos ativos de risco, livres de risco e comportamento do consumo no transcorrer do período de 1980-2008.

TABELA 6 – ESTATÍSTICA DESCRITIVA PARA A ECONOMIA BRASILEIRA (1980-2008)

Variáveis	**Média Trimestral**	**Desvio-Padrão**
Variação do Consumo	0,0109	0,0500
Ativos de Risco (Ibovespa)	0,0708	0,3060
Ativos Livres de Risco (Over/Selic)	0,0233	0,0496
Equity Premium	0,0475	0,3043

Fonte: Elaboração Própria

Na tabela 6 são apresentadas as taxas médias trimestrais e suas respectivas dispersões para a variação do consumo, os ativos livres de risco, ativos de risco e o *equity premium*.[17]

Nas tabelas 7 e 8 são apresentadas as matrizes de variância/covariância e de correlação entre a variação do consumo, os ativos livres de risco, ativos de risco e o *equity premium*.

[17] Os dados apresentados na tabela 4 são valores anuais, enquanto que os valores da tabela 6 são trimestrais. A utilização de dados anuais para a tabela 4 ocorre para uma melhor comparação com os valores obtidos em outros países, mesmo que os dados utilizados para as análises empíricas deste trabalho utilizem dados trimestrais.

Para que se possam iniciar as análises e possíveis substituições para o modelo de Mehra (2003) e Hansen e Singleton (1983), deve-se determinar valores iniciais para α e β.

Considerando estudos de Mehra e Prescott (1985), "*any of the above cited studies can be challenged on a number of grounds but together they constitute an a priori justification for restricting the value of α to be a maximum of ten, as we do in this study.*", logo, os valores de α se encontram entre 0 e 10. Enquanto que os valores de β, conforme Mehra e Prescott (1985) são apresentados entre 0 e 1.

Levando-se em consideração que estamos avaliando dados brasileiros, conforme os trabalhos de Issler e Piqueira (2000), Nakane e Soriano (2003) e Catalão e Yoshino (2004), que buscaram realizar observações do *equity premium* para o Brasil, os valores para α se situam entre 2 e 5, quando são avaliados períodos pré e pós plano real, e valores para α entre 0 e 2 para períodos unicamente pós plano real. Já os valores para β também permaneceram entre 0 e 1 aos moldes das análises de Mehra e Prescott.

TABELA 7 - MATRIZ DE VARIÂNCIA E COVARIÂNCIA (1980-2008)

	Var. Consumo	**Ibovespa**	**Over/Selic**	**Equity Premium**
Var. Consumo	**0,0025**	0,0096	0,0014	0,0096
Ibovespa	0,0096	**0,0936**	0,0101	0,0919
Over/Selic	0,0014	0,0101	**0,0025**	0,0098
Equity Premium	0,0096	0,0919	0,0098	**0,0926**

Fonte: Elaboração Própria

TABELA 8 - MATRIZ DE CORRELAÇÃO (1980-2008)

	Var. Consumo	**Ibovespa**	**Over/Selic**	**Equity Premium**
Var.Consumo	**1,0000**	0,6285	0,5821	0,6340
Ibovespa	0,6285	**1,0000**	0,6658	0,9868
Over/Selic	0,5821	0,6658	**1,0000**	0,6517
Equity Premium	0,6340	0,9868	0,6517	**1,0000**

Fonte: Elaboração Própria

Conseqüentemente para o presente caso, será considerado a princípio os valores de α e β como 2 e 0,99, respectivamente. Sendo assim, é possível agora substituir os valores acima apresentados nas tabelas para obter o *equity premium* através do modelo. Considerando os valores de α e β, quais devem ser os valores dos ativos livres de risco, ativos de risco e o *equity premium* levando em consideração os valores de consumo?

Através das equações acima obtêm para os ativos livres de risco (taxa Over/Selic):

$$lnR_f = -ln\beta + \alpha\mu_x - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_x^2$$

$$lnR_f = 0{,}0269$$

ou

$$R_f = 1{,}0272$$

onde o ativo livre de risco para o caso brasileiro, ou seja, a remuneração média da Over/Selic é de 2,72% para o período em análise.

Para os ativos de risco (índice Ibovespa) os valores são:

$$lnE_t(R_e) - lnR_f = \alpha\sigma_x^2$$

$$lnE_t(R_e) = lnR_f + \alpha\sigma_x^2$$

$$lnE_t(R_e) = 0{,}0319$$

ou

$$E_t(R_e) = 1{,}0324$$

onde o ativo de risco para o caso brasileiro, ou seja, a remuneração média do índice Ibovespa é de 3,24% para o período em observação.

Pressupõe-se, então, através dos cálculos acima, que o *equity premium* para a economia brasileira através do modelo de Mehra (2003) é de 0,52% para o período de 1980-2008, apresentando-se assim um *puzzle* para o caso brasileiro.

Este puzzle é caracterizado pela distorção encontrada entre os valores obtidos pelos dados de retorno real médio do índice Ibovespa e da média real da taxa Over/Selic para o período em trimestre de 1980-2008, em comparação aos valores obtidos pelo modelo de Mehra (2003). Para o caso dos dados reais para a economia brasileira foi obtido um *equity premium* de 4,75% em contrapartida ao valor de 0,52% obtido pelo modelo.

Considerando a existência do *puzzle* sendo um valor muito acima do alcançado pelo modelo de Mehra, Hansen e Singleton, deve-se observar com melhores detalhes a equação 5.8’, conforme abaixo,

$$E_t\left(R_{e,t+1}\right) = R_{f,t+1} + cov_t\left\{\frac{-U\prime(c_{t+1}), R_{e,t+1}}{E_t[U\prime(c_{t+1})]}\right\} \quad (5.8’)$$

O que deve ser levado em consideração na equação acima é que quanto maior a covariância entre o retorno dos ativos de risco e a variação do consumo, maior o *equity premium*. Esta análise é também demonstrada pela equação 6.6’:

$$lnE_t\left(R_{e,t+1}\right) - lnR_f = \alpha\sigma_{x,R_e} \quad (6.6')$$

onde, o *equity premium* é determinado pela covariância entre o retorno dos ativos de risco e a variação do consumo, multiplicado pelo coeficiente de aversão ao risco.

É interessante perceber que sendo o *equity premium* apresentado pelos dados reais da tabela 6 muito acima do determinado pelo modelo de Mehra, conclui-se que o coeficiente de aversão ao risco deve ser relativamente maior do que o valor inicialmente utilizado $\alpha = 2$.

Sendo assim, através da equação 6.6’, é possível determinar o valor ideal para o coeficiente de aversão ao risco, levando-se em consideração os valores da taxa de retorno para ativos de risco, livres de risco e da covariância entre o retorno dos ativos de risco e a variação do consumo, conforme segue abaixo:

$$lnE_t\left(R_{e,t+1}\right) - lnR_f = \alpha\sigma_{x,R_e}$$

$$\alpha = \frac{lnE_t\left(R_{e,t+1}\right) - lnR_f}{\sigma_{x,R_e}}$$

$$\alpha = 4{,}71$$

Através da resolução da equação 6.6’, obteve-se um valor de 4,71, um valor muito próximo do apresentado pelos trabalhos de Issler e Piqueira (2000), Nakane e Soriano (2003) e Catalão e Yoshino (2004), que corrobora a análise realizada.

Observa-se ainda que o valor de α é relativamente maior que o utilizado inicialmente, conduzindo teoricamente, segundo a metodologia de Mehra (2003) e Hansen e Singleton (1983), a uma compensação lógica dentro do que deveria ser levando em consideração a baixa covariância entre o retorno dos ativos de risco e a taxa de variação do consumo.

No entanto esta observação leva inexoravelmente a um segundo *puzzle*, conforme análises de Weil (1989), conhecido como *The Riskfree Rate Puzzle*. Os valores muito elevados do coeficiente de aversão ao risco como forma de ajuste para equalizar o *equity premium* alcançado empiricamente, em uma comparação com o obtido através do modelo de Mehra e Prescott, conduzem também a uma elevação demasiada do fator de desconto, levando a um valor irreal acima de 1 (um).

Um valor para o fator de desconto acima de 1 (um) indica um fator de desconto negativo, situação esta fora da realidade e considerada *riskfree rate puzzle*. Para este caso o fator de desconto β é determinado através de substituições realizadas na equação 6.5, conforme segue abaixo:

$$lnR_f = -ln\beta + \alpha\mu_x - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_x^2$$

$$\beta = e^{-lnR_f + \alpha\mu_x - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_x^2}$$

$$\beta = 1{,}05$$

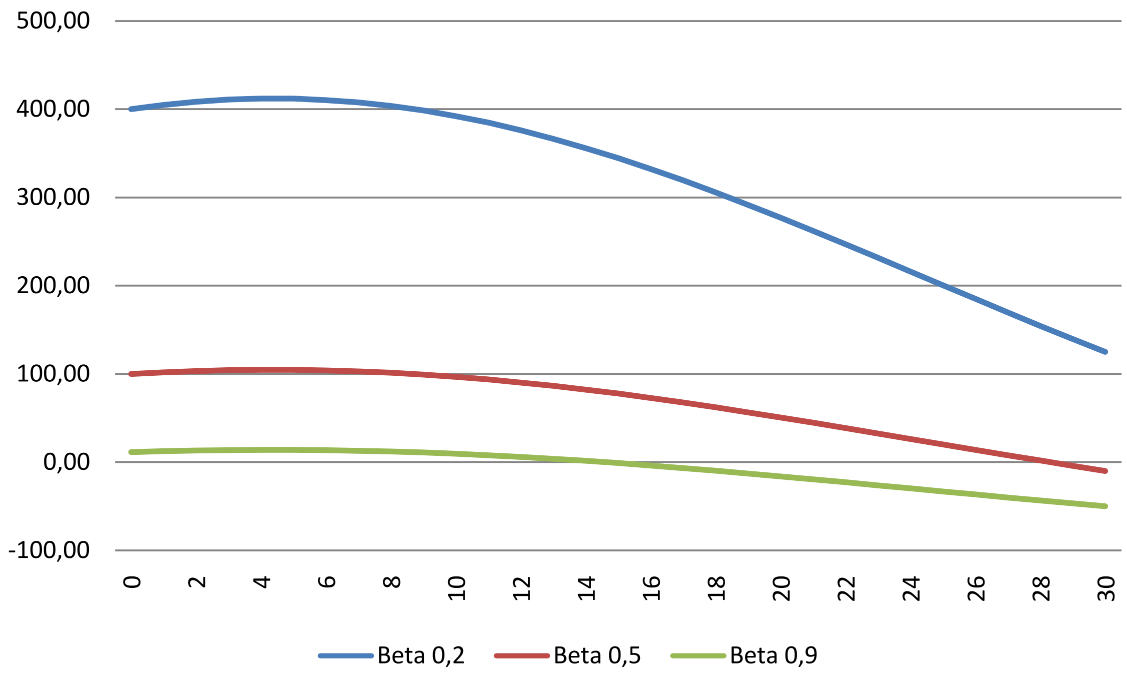
Através do valor do fator de desconto β acima de 1 (um), demonstra-se um *riskfree rate puzzle* proporcionado pela metodologia de ajustamento utilizada por Mehra.

Conforme Weil (1989), a lógica deste segundo puzzle se encontra na percepção de que quando o coeficiente de aversão ao risco α se encontra muito elevado, a taxa marginal de substituição intertemporal se encontra muito baixa $\psi = {}^{1}\!/_{\alpha}$, proporcionando indisposição entre os investidores de realizarem aplicações para consumo futuro, preferindo com isso o consumo presente. Para que ocorra consumo presente em larga escala os investidores tornam-se muito dispostos a emprestar recursos. Para que, apesar da elevada demanda por recursos, seja possível a manutenção de taxas livres de risco baixas, estando a economia em equilíbrio, é necessário que os valores do fator de desconto β sejam maiores que 1 (um), desincentivando os investidores a emprestarem capital.

> Given positive average consumption growth, a low riskless interest rate and a positive rate of time preference, such investors would have a strong desire to borrow from the future. A low riskless interest rate is possible in equilibrium only if investors have a negative rate of time preference that reduces their desire to borrow. (Campbell & MacKinley, 1997)

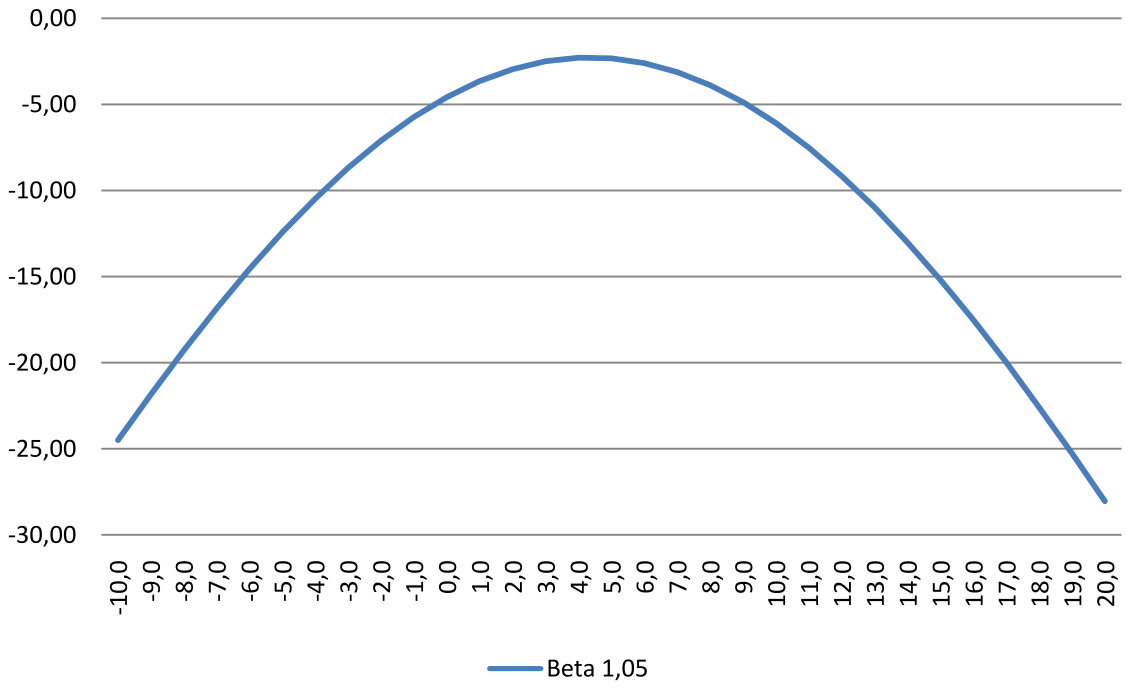
O gráfico 12 demonstra com maior facilidade as questões do *riskfree rate puzzle*, onde neste caso são apresentadas três curvas de fatores de desconto β diferentes que se alteram em função de uma escala de coeficiente de aversão ao risco α, proporcionando diferentes taxas de ativos livres de risco.

GRÁFICO 12 - RETORNO DE ATIVOS LIVRES DE RISCO X COEFICIENTE DE AVERSÃO AO RISCO



Fonte: Elaboração Própria

GRÁFICO 13 - RETORNO DE ATIVOS LIVRES DE RISCO X COEFICIENTE DE AVERSÃO AO RISCO



Fonte: Elaboração Própria

Através de uma avaliação detalhada do gráfico 12 é possível perceber que quanto mais próximo de 0 (zero) for o fator de desconto β, maiores serão as taxas de retorno mediante os coeficientes de aversão ao risco. Cabe ainda observar que a curva apresenta um comportamento polinomial.

Agora o gráfico 13, que apresenta uma curva do fator de desconto $\beta = 1{,}05$ condizente com o valor acima calculado segundo metodologia de Mehra (2003), demonstra-se com mais clareza o comportamento polinomial da curva, assim como o *puzzle* caracterizado pelos valores negativos do retorno do ativo livre de risco em decorrência de um fator de desconto acima de 1 (um).

Conforme já demonstrado por Mehra (2003), se for considerado uma condição de equilíbrio para o modelo, o retorno dos ativos de risco devem ser iguais às taxas de variação do consumo, proporcionando uma nova metodologia para cálculo e determinação dos valores para o coeficiente de aversão ao risco e para o fator de desconto.

> If the model equilibrium condition is imposed that $x = R_e$ (a consequence of which is the restriction that the return on equity be perfectly correlated with the growth rate of consumption), we get (Mehra, 2003)

$$lnE_t\left(R_{e,t+1}\right) - lnR_f = \alpha\sigma_x^2$$

Retornando à equação 6.7, é possível averiguar que o *equity premium* passa agora a ser determinado pela multiplicação entre o coeficiente de aversão ao risco e a variância do consumo. Através dessa nova metodologia de determinação do prêmio de risco é possível agora determinar o coeficiente de aversão ao risco conforme segue:

$$lnE_t\left(R_{e,t+1}\right) - lnR_f = \alpha\sigma_x^2$$

$$\alpha = \frac{lnE_t\left(R_{e,t+1}\right) - lnR_f}{\sigma_x^2}$$

$$\alpha = 18{,}13$$

A resolução apresentada acima demonstra, segundo a nova metodologia de cálculo, que o coeficiente de aversão ao risco α é de 18,13, um valor bem acima do apresentado segundo a equação 6.6, que foi de 4,71. Esta grande diferença é claramente demonstrada quando se avalia o valor da covariância do retorno dos ativos de risco com a taxa de variação do consumo na tabela 7, em comparação com o valor da variância do consumo, onde os valores são 0,0096 e 0,0025, respectivamente. Como o valor da variância do consumo é bem menor que o da covariância do retorno dos ativos de risco com a taxa de variação do consumo, o coeficiente de aversão ao risco da equação 6.7 deve ser bem maior para alcançar o elevado valor do *equity premium* demonstrado na tabela 6 de 4,75%.

Por analogia, em posse do valor do coeficiente de aversão ao risco α, é possível agora determinar também a taxa de desconto β conforme se segue:

$$lnR_f = -ln\beta + \alpha\mu_x - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_x^2$$

$$\beta = e^{-lnR_f + \alpha\mu_x - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_x^2}$$

$$\beta = 0{,}83$$

O novo valor da taxa de desconto β, não caracteriza o *riskfree rate puzzle*, demonstrando a razão da utilização da equação 6.7 em comparação à equação 6.6 para determinação de α e β. Mas vale ressaltar novamente que a metodologia adotada pela equação 6.7 leva em consideração a condição de equilíbrio do modelo na qual exista uma perfeita correlação entre a taxa de retorno dos ativos de risco e a taxa de variação do consumo. Infelizmente para este caso, o mercado não se encontra na condição de equilíbrio, sendo demonstrado pela tabela 8 na qual a correlação é de 0,6285.

As duas metodologias adotadas não solucionam, necessariamente, o puzzle, pois os dados alcançados mediante a utilização da equação 6.6 se aproximam drasticamente dos trabalhos apresentados por Issler e Piqueira (2000), Nakane e Soriano (2003) e Catalão e Yoshino (2004), apesar de caracterizar-se como uma "faca de dois gumes", onde a solução do *equity premium puzzle* é condicionada à aceitação do *riskfree rate puzzle*, não simbolizando uma adequada solução ao problema. Enquanto que através da equação 6.7 na qual a solução do *equity premium puzzle* não esta condicionada à aceitação do *riskfree rate puzzle*, não pode ser também considerada uma solução adequada em razão da condição de equilíbrio imposta de perfeita correlação entre a taxa de retorno dos ativos de risco e a taxa de variação do consumo, condição esta refutada pelos dados reais alcançados pela tabela 8.

Mehra (2003) conclui neste caso que o *equity premium puzzle* é quantitativo, na qual a previsão dos valores não pode ser alcançada levando-se em consideração os modelos utilizados, apesar de que através dos dados históricos de vários países a teoria de que o retorno dos ativos de risco supera inexoravelmente o retorno dos ativos livres de risco ser uma realidade, sendo o *equity premium puzzle* quantitativo e não qualitativo.

> I want to emphasize that the equity premium puzzle is a quantitative puzzle; standard theory is consistent with our notion of risk that, on average, stocks should return more than bonds. The Puzzle arises from the fact that the quantitative predictions of the theory are an order of magnitude different from what has been historically documented. (Mehra, 2003)

Parte da justificativa à distorção observada estão relacionados à existência de custos de transação e imperfeições de mercado, conforme será avaliado mais pormenorizadamente à frente.

6.1.2 ESTIMAÇÕES COM VARIÁVEIS INSTRUMENTAIS

Uma análise pormenorizada da equação 6.4 pode proporcionar uma condição de ortogonalidade interessante para que se possam realizar inferências sobre o coeficiente de aversão ao risco α e a taxa marginal de substituição intertemporal ψ.

$$lnE_t\left(R_{e,t+1}\right) = -ln\beta + \alpha\mu_x - \frac{1}{2}\alpha^2\alpha_x^2 + \alpha\sigma_{x,z}$$

$$0 = lnE_t\left(R_{e,t+1}\right) + ln\beta - \alpha\mu_x + \frac{1}{2}(\alpha^2\alpha_x^2 - 2\alpha\sigma_{x,z})$$

A equação acima demonstra uma relação diretamente proporcional entre o retorno dos ativos e a taxa de variação do consumo. Se forem ignoradas as constantes da equação, as duas variáveis devem se ajustar proporcionando a igualdade 0 (zero).

Se for relaxada a igualdade entre o coeficiente de aversão ao risco e a taxa marginal de substituição intertemporal, é possível tentar estimar estes parâmetros, considerando que a taxa de variação do consumo é α vezes maior que a taxa de retorno dos ativos, e que a taxa de retorno dos ativos é $\psi = {}^{1}/_{\alpha}$ vezes maior que a taxa de variação do consumo. Através destas análises é possível re-escrever a equação acima como:

$$r_{i,t+1} = \mu_i + \alpha\Delta c_{t+1} + \eta_{i,t+1} \quad (6.8)$$

$$\Delta c_{t+1} = \tau_i + \psi r_{i,t+1} + \zeta_{i,t+1} \quad (6.9)$$

Avaliando as equações acima é possível perceber que, tanto na primeira quanto na segunda, as variáveis independentes são correlacionadas com o termo de erro, tornando a estimação pelo método dos Mínimos Quadrados Ordinários (*Ordinary Least Squares* – OLS) inapropriado. Conforme o trabalho de Hansen e Singleton (1983), seguido de Hall

(1988), a utilização de variáveis instrumentais deve solucionar este problema, sendo assim o método de mínimos quadrados em dois estágios o mais apropriado.

Para o caso da equação 6.8, o termo de erro η_{t+1} é correlacionado com a taxa de variação do consumo c_{t+1}, no entanto, o mesmo termo de erro é não correlacionado com inúmeras variáveis no tempo t. Sendo assim, várias variáveis defasadas podem ser utilizadas como variáveis instrumentais.[18] Por analogia, os mesmos conceitos também se aplicam às análises da equação 6.9.

TABELA 9 – REGRESSÃO COM VARIÁVEL INSTRUMENTAL (TAXA DE RETORNO E TAXA DE CRESCIMENTO DO CONSUMO)

Regressão (ativo)	**Variável Instrumental (*)**	**Primeiro Estágio (**)**	**Segundo Estágio (***)**	
		R^2 (F)	**Coeficiente (t)**	**R^2 (F)**
6.8 (Selic)	Δ consumo (1) Selic (1)	0,0734 (0,0139)	0,1879 (0,0465)	0,0343 (0,0465)
6.8 (Ibovespa)	Δ consumo (1) Ibovespa (1)	0,0502 (0,0557)	-0,1678 (0,7701)	0,0007 (0,7700)
6.9 (Selic)	Selic (1) Δ consumo (1)	0,0363 (0,1260)	0,1825 (0,0465)	0,0343 (0,0465)
6.9 (Ibovespa)	Ibovespa (1) Δ consumo (1)	0,1259 (0,0005)	-0,0044 (0,7701)	0,0007 (0,7700)
6.8 (Selic)	Δ cons. (1) e (2) Selic (1) e (2)	0,0756 (0,0705)	0,1879 (0,0465)	0,0343 (0,0465)
6.8 (Ibovespa)	Δ cons. (1) e (2) Ibovespa (1) e (2)	0,0648 (0,1174)	-0,1678 (0,7701)	0,0007 (0,7700)
6.9 (Selic)	Selic (1) e (2) Δ cons. (1) e (2)	0,1818 (0,0001)	0,1825 (0,0465)	0,0343 (0,0465)
6.9 (Ibovespa)	Ibovespa (1) e (2) Δ cons. (1) e (2)	0,2666 (0,0000)	-0,0044 (0,7701)	0,0007 (0,7700)

Fonte: Elaboração Própria
(*) Os valores entre parêntesis indicam o número de defasagens;
(**) Os valores entre parêntesis indicam o nível de significância p-value;
(***) Os valores entre parêntesis indicam o nível de significância p-value.

[18] Existem duas atribuições básicas para a consistência do estimador de variável instrumental:
- Ser correlacionado com o regressor, $cov(z, x) \neq 0$;
- Não ser correlacionado com o termo de erro, $cov(z, e) = 0$;
Para uma análise mais pormenorizada avaliar ver Hill, Griffiths, Judge (2003) e Gujarati (2003).

Na tabela 9, são apresentados os dados estimados através da metodologia de Mínimos Quadrados em Dois Estágios (*Two-Stage Least Squares* – TSLS) para as equações 6.8 e 6.9.

A regressão com variável instrumental ilustrada pela tabela 9 utiliza como taxa de retorno de ativos livres de risco a taxa Over/Selic, e como taxa de retorno de ativos de risco o índice Ibovespa. Sobre a variação do consumo, é utilizada como variável proxy o consumo de energia elétrica pela indústria. Os instrumentos são defasados e 1 ou 2 períodos, sendo eles a taxa Over/Selic, o índice Ibovespa e a taxa de crescimento do consumo.

Na tabela 9 temos primeiramente a indicação sobre qual equação foi utilizada na regressão, além de especificar sobre que tipo de taxa de retorno é utilizada a análise (Over/Selic e Ibovespa). Na segunda coluna são apresentadas as variáveis instrumentais utilizadas e suas respectivas defasagens. Nas colunas 3, 4 e 5 são demonstrados resultados obtidos nas estimações, sendo respectivamente o R^2 e a probabilidade do teste F referente ao primeiro estágio, o coeficiente e a probabilidade do teste t para o segundo estágio, e o R^2 e a probabilidade do teste F referente ao segundo estágio.

A tabela também mostra que a taxa Over/Selic apresenta altas evidências de previsibilidade em contraposição ao índice Ibovespa, quando se analisa a equação 6.8. Também se observou que o coeficiente da taxa Over/Selic é positivo, corroborando a teoria, apesar de seu valor insignificantemente próximo de 0 (zero), enquanto que o coeficiente do índice Ibovespa sendo negativo e contrário à teoria também é insignificantemente próximo de 0 (zero).

Com relação equação 6.9, a previsibilidade também é baixa para o índice Ibovespa, sendo que para a taxa Over/Selic o nível de significância encontra-se próximo de 5%. Mas o mais interessante desta observação está em averiguar se realmente quando o coeficiente de aversão ao risco α é elevado, a taxa marginal de substituição intertemporal ψ é baixa e vice-versa. Em relação a estas suposições, é apenas plausível quando se verifica os coeficientes do índice Ibovespa que apresentaram um valor relativamente alto de α em relação à ψ, enquanto que para a taxa Over/Selic, permaneceram praticamente estáveis.

Em última análise, as defasagens de 1 período em relação a de 2 períodos não apresentaram diferenças, concluindo-se que uma defasagem de 2 períodos não tem correlação com o regressor.

Estes resultados não são muito encorajadores para o modelo de consumo analisado, além de não demonstrarem elevadas taxas para o coeficiente de aversão ao risco, situação esta que poderia solucionar a questão do *equity premium puzzle*.

6.1.3 ESTIMAÇÕES COM GMM

As mesmas equações 6.8 e 6.9 podem ser utilizadas novamente para que se estimem os valores do coeficiente de aversão ao risco α e a taxa marginal de substituição intertemporal ψ através do Método dos Momentos Generalizados (*Generalized Method of Moments* – GMM).

Todas as análises realizadas até agora estiveram relacionadas a específicas restrições de distribuição log-linear, e estas, às análises isoladas referentes a dados *cross-section* e séries temporais. A utilização do GMM por Hansen (1982) e seguido por Hansen e Singleton (1982), permite que possa ser realizado estimações sobre o modelo de consumo CAPM sem que seja necessária a imposição de restrições especificas quanto à linearização da função, além de não ignorar qualquer dimensão dos dados.

Para o caso em estudo, será avaliada primeiramente a metodologia GMM nas mesmas equações a qual foi aplicado o método TSLS, e em seguida aplicaremos o GMM a uma das equações fundamentais do modelo de Lucas para determinação do coeficiente de aversão ao risco α e da taxa de desconto β.

A utilização de métodos de momentos busca estimar os coeficientes, onde a relação teórica que os parâmetros devem satisfazer é determinada pelas condições de ortogonalidade. Reescrevendo as equações 6.8 e 6.9, é possível criar as condições necessárias para a implantação do GMM.

$$r_{i,t+1} = \mu_i + \alpha\Delta c_{t+1} + \eta_{i,t+1}$$

$$0 = r_{i,t+1} - \mu_i - \alpha\Delta c_{t+1} - \eta_{i,t+1} \quad (6.10)$$

$$\Delta c_{t+1} = \tau_i + \psi r_{i,t+1} + \zeta_{i,t+1}$$

$$0 = \Delta c_{t+1} - \tau_i - \psi r_{i,t+1} - \zeta_{i,t+1} \quad (6.11)$$

Os cenários de variáveis instrumentais associadas às equações de Euller proporcionam estimações que buscam minimizar os valores entre a ponderação teórica e os valores reais.

A ortogonalização das funções acima torna as mesmas isentas de variáveis dependentes ou independentes, sendo assim, a utilização do R^2 torna-se inexistente. Uma forma de determinar a consistência dos resultados é através do *J-statistic*. Os valores do *J-statistic* é uma aproximação assintótica da distribuição χ^2.

> This *J*-statistic may be used to carry out hypothesis tests from GMM estimation. A simple application of the *J*-statistic is to test the validity of over-identifying restrictions under the null hypothesis that the over-identifying restrictions are satisfied, the *J*-statistic times the number of regression observations is asymptotically χ^2 with degrees of freedom equal to the number of over-identifying restrictions (Newey & West 1987)

Na tabela 10 são apresentadas as estimações do método GMM para as equações 6.10 e 6.11, com o objetivo a determinar os valores dos parâmetros α e ψ respectivamente.

TABELA 10 - REGRESSÃO COM GMM (EQUAÇÕES 6.10 E 6.11)

Regressão	**Variável Instrumental**	**Coeficiente (*) (J)**
6.10	Δ consumo (1)	4,8908 (0,0000)
6.11	Ibovespa (1)	-0,4475 (0,0000)

Fonte: Elaboração Própria
(*) Os valores entre parêntesis indicam o nível de significância p-value;

Os dados obtidos para o coeficiente de aversão ao risco e para a taxa marginal de substituição intertemporal são mais significantes que os alcançados anteriormente pelo método TSLS. O teste J foi altamente significativo para as duas equações, apesar de que para a equação 6.11 ter sido obtido um valor negativo, sua significância estatística comprovando a teoria de que quando α é grande, ψ deve ser relativamente pequeno. Vale ainda observar que o valor estimado para o coeficiente de aversão ao risco de 4,89 é próximo das estimações realizadas nos trabalhos de Issler e Piqueira (2000), Nakane e Soriano (2003) e Catalão e Yoshino (2004), cujos valores se situavam aproximadamente entre 2 e 5. É importante também observar que o valor de 4,89 para o coeficiente de aversão ao risco é praticamente o mesmo valor encontrado pelo modelo log-linear de Mehra (2003), Hansen e Singleton (1983), que na sessão anterior apresentou um valor de 4,71.

Apesar dos dados altamente significantes da tabela 10, não é possível estimar o valor da taxa de desconto, sendo assim, utilizaremos outra equação fundamental do modelo de Lucas (1978) para aplicar a metodologia GMM e estimarmos tanto α quanto β.

Utilizando da equação 5.3, é possível através de alguma manipulação algébrica encontrar uma forma eficaz para a determinação dos dois parâmetros através do GMM, conforme é apresentado abaixo,

$$p_t U'(c_t) = \beta E_t[(p_{t+1} + y_{t+1})U'(c_{t+1})]$$

$$1 = \beta E_t\left[\frac{(p_{t+1} + y_{t+1})}{p_t}\frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}\right]$$

$$1 = \beta E_t\left[\left(r_{i,t+1}\right)\Delta c_{t+1}^{-\alpha}\right]$$

onde dividindo-se ambos os lados da equação por preço do ativo e pela utilidade marginal no período t, é possível ter no lado direito da equação a taxa de retorno no período $t+1$ e a variação do consumo elevada ao sinal negativo do coeficiente de aversão ao risco também no período $t+1$.[19]

A equação exata a ser aplicada pelo método GMM é determinada através da equação de Euller que também é uma condição de ortogonalidade, conforme segue abaixo.

$$0 = \beta\left(r_{i,t+1}\right)\Delta c_{t+1}^{-\alpha} - 1 \quad (6.12)$$

Para esta nova regressão, o objetivo é determinar os parâmetros α e β, da equação 6.12, considerando como variáveis instrumentais o índice Ibovespa e a taxa de variação do consumo, na qual são defasados primeiramente em 1 período, e depois em 2 períodos. A tabela 11 mostra os resultados obtidos da estimação.

Conforme avaliação da tabela 11, é possível perceber que para a regressão que se utilizou de variável instrumental com defasagem de apenas 1 período o valor do coeficiente de aversão ao risco α de 4,03 também ficou próximo dos já analisados anteriormente, além de apresentar um nível de significância em torno de 5%. O fator de desconto intertemporal β também ficou muito próximo dos apresentados anteriormente através dos modelos de log-linear, mostrando-se ainda mais significativo que o de α.

---

[19] Sendo $U'(c_t) = c_t^{-\alpha}$, é possível substituir na equação o resultado da derivada da utilidade para que se obtenha a variação do consumo, conforme abaixo:

$$\frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)} = \frac{c_{t+1}^{-\alpha}}{c_t^{-\alpha}} = (\Delta c_{t+1})^{-\alpha}$$

TABELA 11 - REGRESSÃO COM GMM (EQUAÇÃO 6.12)

Regressão	**Variável Instrumental (*)**	**(J) (**)**	**α (***) (t)**	**β (***) (t)**
6.12	Ibovespa (1) Δ cons. (1)	(0,0279)	4,0314 (0,0443)	0,8884 (0,0000)
6.12	Ibovespa (1) e (2) Δ cons. (1) e (2)	(0,0456)	2,1286 (0,0399)	0,9160 (0,0000)

Fonte: Elaboração Própria
(*) Os valores entre parêntesis indicam o número de defasagens;
(**) Os valores entre parêntesis indicam o nível de significância p-value;
(***) Os valores entre parêntesis indicam o nível de significância p-value.

Quando analisamos a regressão que utilizou variáveis instrumentais de 1 e 2 períodos, obteve-se algumas alterações, mas que ficaram dentro de observações realizadas por trabalhos desenvolvidos para o caso brasileiro. Estes coeficientes também foram significativos.

Com referência à significância do modelo, o teste J apresentou-se mais significativo para a regressão com variável instrumental de 1 defasagem, do que quando utilizou-se 2 defasagens. Mas as taxas permanecem relativamente elevadas, validando o método.

É colocado em questionamento o porquê dos resultados relativamente favoráveis quando da utilização do método GMM em contraposição ao método TSLS.

As justificativas a tal questão estão na estrutura do método TSLS, que se utilizou de dados log-lineares homocedásticos, que expurgavam alguns dados de retornos de ativos previsíveis dos dados originais, proporcionando dados com baixa significância e fora dos padrões teóricos do modelo. Em contrapartida, o estimador GMM não necessita log-linearizar a função além de trabalhar com modelos heterocedásticos, evitando perda de dados e baixas taxas de significância.

> The GMM system allows for this possibility, without linearilizing the model or imposing distributional assumptions, so the GMM rejection is powerful evidence against the standard consumption CAPM with power utility. (Campbell & MacKinlay, 1997)

Por mais que os dados anteriores com a utilização do GMM possam parecer alentadores, eles não resolvem o problema do *puzzle*. Aplicando-se os resultados obtidos anteriormente de α e β nas equações 6.5 e 6.6, os valores são de 15,05% ao trimestre para os ativos livres de risco, 16,21% para os ativos de risco, e um *equity premium* de 1,17% ao trimestre. Mesmo os dados estando em linha com as análises realizadas por outros trabalhos, a questão do *puzzle* não é solucionada.

Vale recordar ainda que para que o *puzzle* seja solucionado o valor do coeficiente de aversão ao risco deve ser próximo de 18, valor este irreal e propenso a ocasionar o *riskfree rate puzzle*.

A tabela 12 demonstra todos os resultados obtidos desde a utilização da metodologia Hansen e Singleton às análises de TSLS a GMM.

TABELA 12 – RESULTADOS

Método	**Equação**	**alfa**	**beta**	**E. Premium Puzzle**	**Risk Free Rate Puzzle**
Hansen e Singleton		2	0,99	X	
Hansen e Singleton		4,71	1,05		X
Hansen e Singleton		18,13	0,83	X	
TLSL *	6.8 e 6.9	0,18	-	X	
GMM **	6.10 e 6.11	4,89	-	X	
GMM ***	6.12	4,03	0,89	X	

Fonte: Elaboração Própria
* O valor de alfa é determinado apenas pela taxa de retorno da over-selic, e o valor de beta não pode ser obtido pela equação 6.8 e 6.9 em função da não existência dele como parâmetro;
** O valor de beta não pode ser obtido pelas equações 6.10 e 6.11 em função da não existência dele como parâmetro;
*** Os valores de alfa e beta são obtidos considerando defasagem de apenas 1 período.

Considerando o relativo fracasso em solucionar o *puzzle*, deve-se avaliar as possíveis justificativas aos resultados adquiridos, conforme segue nas próximas sessões.

6.2 FRICÇÕES DE MERCADO

As fricções de mercado estão relacionadas aos custos de transação e às legislações existentes que impedem as livres negociações de compra e venda de ativos a descoberto. As ditas fricções são o que realmente caracterizam o mercado financeiro contemporâneo, em detrimento às hipóteses apresentadas pelo modelo de Lucas (1978), de livre mercado tanto com relação a custos quanto em relação a certas imposições a negócios com ativos.

> We now consider various market frictions that may be relevant for asset pricing. If investors face transactions costs or limits on their ability to borrow or sell assets short, then may have only a limited ability to exploit the empirical patterns in returns. (Campbell & MacKinlay, 1997)

Conforme observado por Campbell e Mackinlay (1997), as possibilidades de retorno referentes ao mercado passam a ser limitadas em decorrência das imposições acarretadas pelos custos de transação e legislação vigentes. Pressupõe-se que sendo o mercado regulamentado e impedido de funcionar livremente, os retornos passam a ser limitados e o modelo neoclássico de Lucas se compromete, não apresentando condições de se comprovar quantitativamente apesar de que, conforme Mehra (2003), o *puzzle* não é qualitativo.

Por analogia, é possível perceber que em função das mesmas fricções de mercado a *proxy* de consumo torna-se inadequada como análise.

Segundo análises de Hansen e Jagannathan (1991), a equação 6.1 tem uma análise interessante,

$$p_t = \beta E_t[(p_{t+1} + y_{t+1})x_{t+1}^{-\alpha}]$$

$$1 = E_{t+1}\left[\left(1 + r_{i,t+1}\right)M_{t+1}\right] \quad (6.13)$$

onde, através de alguma manipulação algébrica, é possível obter uma equação de Euller onde a multiplicação do fator de desconto estocástico com a taxa de retorno dos ativos proporciona o valor inicial da aplicação em termos de índice, ou seja, 1 (um).[20]

É importante perceber que esta equação representa um mercado perfeito, sem fricções, situação esta irreal. Sendo assim, Hansen e Jagannathan (1991) supuseram que a mesma equação não poderia ser uma igualdade e sim uma desigualdade, conforme segue abaixo.

$$1 \geq E_t\left[\left(1 + r_{i,t}\right)M_t\right] \quad (6.14)$$

Para mercados perfeitos, o valor deve ser uma igualdade, agora, para mercados imperfeitos tem-se uma desigualdade onde o retorno proporcionado pelo ativo vezes o fator de desconto estocástico deve ser inferior a 1 (um), levando-se em consideração que em mercados imperfeitos existe custo de transação e certas operações que são legalmente proibidas de ocorrerem, impossibilitando as máximas performances de estratégia em mercado financeiro, ocorrendo então um valor inferior a 1 (um).

Essa análise é facilmente observada quando considera-se que não são permitidas todas as formas de operações financeiras, e também passam a ser limitadas as operações com ativos, em função da não permissão para determinadas operações. Algumas operações lucrativas só podem ocorrer se for possível uma venda a descoberto em contraparte. Caso

[20] A equação 6.13 é obtida através das seguintes suposições:

$$r_{i,t+1} = \left(1 + R_{,t+1}\right) = \frac{p_{t+1} + y_{t+1}}{p_t}$$

$$M_{t+1} = \beta x_{t+1}^{-\alpha}$$

exista limite para vendas a descoberto, então nem a primeira operação deve existir. As reduções de operações passam a ser um fato, e o mercado fica relativamente limitado.

Em consonância com as fricções de mercado se encontram as análises de inconsistência na utilização dos dados agregados de consumo para o modelo de consumo CAPM. Algumas interpretações estão relacionadas ao fato de que não são todos os consumidores que operam no mercado financeiro, logo não é coerente se utilizar da relação retorno em ativos e consumo.

> One simple explanation is that there are two types of agents in the economy: constrained agents who are prevents from trading in asset markets and simply consume their labor income each period, and unconstrained agents. (Campbell & MacKinlay, 1997)

Estudos de Mankiw e Zeldes (1991) demonstraram que a taxa de variação do consumo de agentes não restritos é mais volátil que dos agentes restritos. Através destas comprovações fica mais clara ainda a ocorrência da desigualdade da equação 6.14, onde a não disseminação de investidores em mercado financeiro também é uma falha de mercado, que impossibilita a comprovação do modelo e também a inviabilidade da utilização de *proxies* ideais de consumo.

Outra análise interessante referente ao comportamento do consumidor como investidor de mercado financeiro é a suposição de que existem investidores que não compram e vendem ativos financeiros levando em consideração o comportamento racional de maximização intertemporal, apresentando assim um comportamento exógeno ao mercado. *These noise traders can influence stock prices because other investors, who are rational utility-maximizers, must be induced to accommodate their shifts in demand* (Campbell & MacKinlay, 1997).

Para alguns teóricos, o comportamento dos agentes racionais buscando seguir as decisões dos *noise traders* caracterizaria que o comportamento é muito mais idiossincrático do que racional. Mas o trabalho de Heaton e Lucas (1996) demonstra que o comportamento idiossincrático é temporário, não sendo esta a característica do consumidor.

É claro que as observações de Heaton e Lucas (1996) buscam demonstrar que o comportamento do consumidor, por mais que temporariamente distorcido, tende a normalidade racional, até por que existem diferentes ferramentas financeiras que possibilitam operações transitórias de hedge sem que necessariamente seja preciso se desfazer dos ativos financeiros inicialmente comprados através de decisões racionais.

Percebe-se aqui um embate teórico entre o comportamento racional do consumidor em consonância ao comportamento idiossincrático do mesmo.

> We close the system with the assumption of rational expectations: the market clearing price function *p* implied by consumer behavior is assumed to be the same as the price function *p* on which consumer decisions are based. (Lucas, 1978)

Sendo o modelo neoclássico, é lógica a hipótese da racionalidade do agente, até por que para Lucas (1978) esta hipótese simplificadora se faz necessária para se facilitar o entendimento estrutural de relacionamento entre as variáveis que compõem o modelo.

Vale ainda observar que o consumidor teoricamente não apresentando o comportamento aos moldes do estereótipo neoclássico não invalida por completo o modelo de Lucas, em função de que a existência de expectativas racionais pressupõe um processo dinâmico de desenvolvimento das expectativas dos agentes no transcorrer do tempo através dos constantes embates vividos individualmente, aos moldes de processos dialéticos a caminho da racionalidade, conforme análises originais de Muth (1961).

Percebe-se assim que estas distorções de mercado impossibilitam uma solução para o *puzzle* em termos quantitativos, levando-se em consideração que o modelo é formado tendo como base a igualdade da equação 6.13, enquanto que na verdade, a equação 6.14 é mais condizente com a realidade. Observa-se ainda que sendo os valores entre 0 e 1 infinitos, a operacionalização do modelo torna-se relativamente complexa, enquanto for considerada a existência destas fricções, que impossibilitam um possível equilíbrio de longo prazo.

6.3 DIFERENTES FORMAS DE PREFERÊNCIAS DO CONSUMIDOR

Outra área de trabalho na qual os estudiosos também têm adentrado buscando assim solucionar os problemas do *puzzle*, está relacionada à interpretação de que as preferências dos consumidores não podem ser apresentadas tão simplesmente quanto fora pelo modelo de Lucas (1978), que se utiliza da função apresentada pela equação 5.2, na qual a utilidade se encontra em função do consumo e do parâmetro α que simboliza o coeficiente de aversão ao risco.

$$U(C_t) = \frac{C_t^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha}$$

A equação 5.2 é uma função logarítmica e, sendo assim, apresenta uma taxa de variação constante no transcorrer do tempo, fator este que possibilita facilitar relativamente o estudo utilizado, mas que também simplifica drasticamente a forma como o agente econômico se comporta, limitando a aderência do modelo a realidade.

Neste caso uma equação logarítmica como esta acaba considerando o coeficiente de aversão ao risco como sendo igual à taxa marginal de substituição intertemporal. Isso significa dizer que o risco determina também a taxa de desejo do agente em trocar consumo no tempo. Uma determinada taxa α já caracterizaria o risco do agente e também a forma de desejo em realizar trocas entre consumo presente e futuro no transcorrer do tempo.

Estes são agregados “heróicos” da equação 5.2, e por isso, motivos de críticas à não coerência do modelo de Lucas (1978) e grande causa da realização do *puzzle*.

Sendo assim, Epstein e Zin (1989, 1991) e Weil (1989) apresentaram uma nova equação utilidade que poderia ser utilizada no lugar da equação logarítmica de Lucas, tal que busca separar o coeficiente de aversão ao risco e a taxa marginal de substituição intertemporal como segue:

$$U_t = \left\{(1-\beta)C_t^{\frac{1-\alpha}{\theta}} + \beta[E_t(U_{t+1}^{1-\alpha})]^{\frac{1}{\theta}}\right\}^{\frac{\theta}{1-\alpha}}$$

onde $\theta = {(1-\alpha)}\Big/{\left(1-{1}/{\psi}\right)}$. Quando $\theta = 1$, tem-se um caso especial em que a função torna-se linear.

Para outro grupo de pesquisadores, foi tentada uma função utilizada aos moldes de uma Cobb-Douglas, onde existem diferentes parâmetros para diferentes tipos de produtos para consumo.

$$U_C(C_t, X_t) = C_t^{-\alpha 1} X_t^{-\alpha 2}$$

onde a utilidade é determinada pelo consumo de produtos do tipo c e X, que apresentam, desta forma, diferentes parâmetros como $-\alpha 1$ e $-\alpha 2$, respectivamente.

Os produtos do tipo X são produtos bem específicos em contraposição a produtos comumente consumidos que são representados por c. Diferentes estudiosos atribuíram produtos diversos a X. Eichenbaum, Hansen e Singleton (1988), atribuíram a X produtos referentes à lazer. Aschauer (1985) e Startz (1989) consideraram X como sendo gastos do governo e ativos financeiros de produtos duráveis, respectivamente.

Ainda uma terceira função utilidade usada para substituir a equação de Lucas (1978), busca agora analisar a formação de hábito dos agentes. Pressupõe-se que o consumo passado determina também a forma de consumo presente, sendo assim a equação de Lucas passa por uma pequena alteração, conforme supôs Abel (1990, 1996):

$$U_t = E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \frac{\left(C_{t+j}/X_{t+j}\right)^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha}$$

onde X resume a influência do consumo passado sobre o nível de consumo presente e conseqüentemente pela utilidade. Sendo X o consumo passado, fica assim representado que $X_t = C_{t-1}^k$. O parâmetro k representa a distância entre o consumo passado e o presente.

A função utilidade de Abel (1990, 1996) considera que o consumo passado reduz a utilizada gerada pelo consumo presente, onde quanto mais já foi realizado de consumo, menos utilidade se obtêm do consumo presente.

Infelizmente estas novas análises do *equity premium puzzle* ao prisma de novas funções utilidade não lograram solucionar ainda este problema, considerando-se que o processo de pesquisa ainda se encontra em desenvolvimento.

As tentativas de soluções do *puzzle* ainda são uma realidade, seja através de avaliações referentes às análises de distorções do mercado ou através de alterações nas funções utilidade que devem ser aplicadas ao modelo intertemporal de Lucas.

7 CONCLUSÃO

O *Equity Premium* encontrado para a economia brasileira através do modelo de Hansen e Singleton (1982) apresentou, em comparação aos dados empíricos para o período de 1980-2008, um *puzzle* aos moldes da economia americana. Enquanto que para o *equity premium* obtido através dos dados para o período foi de 4,75%, o valor do mesmo se utilizando do modelo de Lucas (1978) foi de 0,52%. É importante observar que este cálculo leva em consideração que o coeficiente de aversão ao risco é de 2 e a taxa de desconto intertemporal é de 0,99, valores estes condizentes com os pressupostos de Mehra e Prescott (1985), na qual os valores não poderiam ser superiores a 10 e 0,99 respectivamente.

A inconsistência de valores nos leva a questionar o coeficiente de aversão ao risco utilizado. Através das análises de Mehra (2003), Hansen e Singleton (1982), quando a covariância entre o consumo e a taxa de retorno dos ativos financeiros é baixa, e o *equity premium* é elevado, o coeficiente de aversão ao risco deve ser relativamente elevado para compensar o valor da covariância. Sendo assim, se utilizando modelo de Mehra, Hansen e Singleton, é possível obter o valor de 4,71 para o coeficiente de aversão ao risco, valor este relativamente elevado para o caso brasileiro. Infelizmente este valor nos leva, conforme Weil (1989), ao chamado *The Riskfree Rate Puzzle*, na qual o valor da taxa de desconto intertemporal passa a ser de 1,05, valor este inconsistente com a teoria. Sendo assim, não podemos considerar estes resultados como uma resposta adequada.

Através de Mehra (2003) pode-se considerar que a covariância do consumo com a taxa de retorno dos ativos financeiros é exatamente igual à variância do consumo. Alcançando com isso um valor de 18,13 para o coeficiente de aversão ao risco e 0,83 para a taxa de desconto intertemporal, valores estes que se encontram dentro dos pressupostos teóricos e próximo dos valores 4,75% para o *equity premium*. É claro que esta hipótese está relacionada à suposição de que o retorno dos ativos covaria perfeitamente com o consumo, situação esta irreal para o caso brasileiro, e conseqüentemente inconsistente.

Considerando as dificuldades de se alcançar os valores de α e β através dos modelos matemáticos demonstrados acima, procurou-se determinar os mesmos através de metodologia estatística, utilizando-se estimações com variável instrumental e o método dos momentos generalizados – GMM.

Avaliou-se que a função utilidade adotada por Lucas (1978) que agrega ao coeficiente de aversão ao risco a taxa marginal de substituição intertemporal poderia estar deturpando os resultados, levando-nos a separá-las e determiná-las através do método de estimação de variável instrumental. Os resultados obtidos através deste método não foram significantes.

Na seqüência foi utilizada a metodologia GMM nas mesmas equações onde foi aplicado o método de variável instrumental, na qual o valor do coeficiente de aversão ao risco foi de 4,89, um valor muito próximo do alcançado pelo método matemático de Hansen e Singleton (1982). Além do valor da taxa marginal de substituição intertemporal ser bem menor que o valor do coeficiente de aversão ao risco, análise esta condizente com os pressupostos teóricos.

As equações utilizadas no GMM que foram aplicadas também ao método de variável instrumental não apresentam condições de medir o fator de desconto estocástico, sendo assim, foi utilizada uma equação fundamental do modelo de Lucas (1978) na qual se tem como parâmetro o coeficiente de aversão ao risco e o fator de desconto estocástico. Os valores obtidos para o coeficiente de aversão ao risco e o fator de desconto estocástico foram de 4,03 e 0,88 para 1 (uma) defasagem, e 2,12 e 0,91 para 2 (duas) defasagens, respectivamente. O elevado grau de significância comprova a veracidade dos dados que ficaram muito próximos dos obtidos pelas análises matemáticas e pelos trabalhos de estimações realizados por Issler e Piqueira (2000), Nakane e Soriano (2003) e Catalão e Yoshino (2004).

Apesar dos valores serem altamente significantes, substituindo-se os valores de α e β no modelo de Mehra (2003), Hansen e Singleton (1982), o valor do *equity premium* foi de 1,17%, valor este ainda bem diferente do valor real de 4,75%.

Através de todas estas análises, conclui-se que o modelo de Lucas (1978) é inconsistente para representar o comportamento do mercado de capitais da economia brasileira aos moldes de variáveis reais como o consumo. Conclui-se também que as relações entre a ciência econômica e as teorias de finanças acontecem em menor intensidade, em decorrência das fricções de mercado e das diferentes formas de preferências do consumidor que tornam o mercado muito mais rígido e conseqüentemente impossibilitado de funcionar tão perfeitamente conforme o modelo de Lucas (1978) prevê.

É importante ainda salientar que, para o caso brasileiro, os dados analisados levam em consideração o período anterior ao plano real, caracterizado por elevadas taxas de inflação e constantes choques exógenos advindos de planos econômicos mal sucedidos.

Subentende-se, então, conforme Hansen e Jagannathan (1991), que o mercado encontra-se entre dois extremos. A completa falta de relação entre o setor real e a variação do preço dos ativos, e a perfeita relação aos moldes de Lucas (1971). É possível ainda avaliar que com a ocorrência do processo de racionalização das sociedades, é possível que este índice de Hansen e Jagannathan (1991), que se encontra entre 0 e 1, se aproxime assintoticamente de 1 com o passar do tempo.

Como agenda de pesquisa, o presente trabalho sugere que se busque alternativas teóricas e metodológicas a verificar e se determinar as relações entre economia e finanças, de modo que se possa obter maior aderência entre tais modelos teóricos e a realidade.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABEL, A. **Asset Prices under Habit Formation and Catching Up with the Joneses**. American Economic Review, Vol. 80, (1990), pp. 38-42

ABEL, A. **Risk Premia and Term in General Equilibrium**. Unpublished paper, University of Pennsylvania, (1996)

AGUIAR, A. STREET de. **Equivalente Certo e Medidas de Risco em Decisões de Comercialização de Energia Elétrica**. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica: PUC do Rio de Janeiro, 2008.

ANSCOMBE, F. J. and AUMANN, R. J. **A Definition of Subjective Probability**. Econometric Research Program of Princeton University, No. 30 (1961)

ASCHAUER, D. **Fiscal Policy and Aggregate Demand**. American Economic Review, Vol. 75, (1985), pp. 117-127

CAMPBELL, John Y., LO, Andrew W. and MACKINLAY, A. Craig. **The Econometrics of Financial Market**. Princeton: Princeton University Press, 1997.

CATALÃO, A. Borges and YOSHINO, Joe A. **The Equity Premium Puzzle: Brasil e Estados Unidos**. São Paulo: Dissertação de Mestrado Profissionalizante: Modelagem Matemática em Finanças FEA-IME, 2004.

CONSTANTINIDES, G.M., HARRIS, M. and STULZ, R. **Handbook of the Economics of Finance**, New York: Elsevier B.V., 2003. (MEHRA, Rajnish; PRESCOTT, Edward C. **The Equity Premium in Retrospect**)

EICHENBAUM, M., HANSEN, L. and SINGLETON, K. **A Time Series Analysis of Representative Agent Models of Consumption and Leisure Choice under Uncertainty**. Quarterly Journal of Economics, Vol. 103, (1988), pp. 51-78

EPSTEIN, L. and ZIN, S. **Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Return: A Theoretical Framework**. Econometrica, Vol. 57, No. 3 (1989), pp. 937-968

GRINBLATT, Mark; TITMAN, Sheridan. **Mercados Financeiros e Estratégia Corporativa**. 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

HOFFMANN, Rodolfo. **Estatística para Economistas**. 4 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

GUJARATI, Damodar N. **Basic Econometrics**. 4 ed. New York: Mc Graw Hil, 2003.

HANSEN, Lars P. and JAGANNATHAN, R. **Implications of Security Market Data for Models of Dynamic Economies**. The Journal of Political Economy, Vol. 99 (1991), pp. 225-262

HANSEN, Lars P. and SINGLETON, Kenneth J. **Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models**. Econometrica, Vol. 50, No. 5 (Sep., 1982), pp. 1269-1286

HEATON, J. and LUCAS, D. **Evaluating de Effects of Incomplete Markets on Risk Sharing and Asset Pricing**. The Journal of Political Economy, Vol. 104 (1996), pp. 668-712

HERSTEIN, L. N. and MILNOR, John **An Axiomatic Approach to Measurable Utility**. Econometrica, Vol. 21, Issue 2 (Apr., 1953), pp. 291-297

HILL, R. Carter, GRIFFITHS, William E. e JUDGE, George G. **Econometria**. 2 ed. São Paulo: Saraiva, 2003.

ISSLER, J.; PIQUEIRA, N. **Estimating Relative Risk Aversion, The Discount Rate, and the Intertemporal Elasticity of Substitution in Consumption for Brazil Using Three Types of Utility Function**. Brazilian Review of Econometrics, Vol. 20 (2000), pp. 200-238

KOCHERLAKOTA, N.R. **The Equity Premium: it's still a puzzle**. Journal of Economic Literature, Vol. 34 (March. 1996) pp. 42−71

LINTNER, John. **The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets**. The Review of Economics and Statistics, Vol. 47, No. 1 (Feb., 1965), pp. 13-37

LUCAS JR., Robert E. **Asset Prices in an Exchange Economy**. Econometrica, Vol. 46, No. 6 (Nov., 1978), pp. 1429-1445

MARKOWITZ, Harry M. **Portfolio selection: efficient diversification of investments**. Massachussets: Cowles Foundation of Research in Economics of Yale University, 1959.

MARKOWITZ, Harry M. **The Utility of Wealth**. The Journal of Political Economy, Vol. 60, No. 2 (Apr., 1952), pp. 151-158

MANKIW, N. G. and ZELDES, S. **The Consumptions of Stockholders and Non-Stockholders**. The Journal of Financial Economics, Vol. 29 (1991), pp. 97-112

MEHRA, Rajnish and PRESCOTT, Edward C. **The Equity Premium: a puzzle**. Journal of Monetary Economics, Vol. 15 (1985) pp. 145-161

MEHRA, Rajnish. **The Equity Premium: why is it a puzzle**. Financial Analysts Journal (Jan./Feb. 2003) pp. 54–69.

MUTH, John F. **Rational Expectations and the Theory of Price Movements.** Econometrica, Vol. 29, No. 3 (Jul., 1961), pp. 315-335

NAKANE, Marcio and SORIANO, L. **Real Balances in the Utility Function: Evidence for Brazil**. Working Paper Banco Central do Brasil No. 68 (2003)

PRATT, John W. **Risk Aversion in the Small and in the Large**. Econometrica, Vol. 32, No. 1/2 (Jan. - Apr., 1964), pp. 122-136

ROSS, Stephen A. **The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing**. Journal of Economic Theory. No. 13 (May, 1976), 341-360

RUBINSTEIN, Mark. **The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options.** The Bell Journal of Economics, Vol. 7, No. 2 (Autumn, 1976), pp. 407-425

SHARPE, William F. **Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk**. The Journal of Finance, Vol. 19, Issue 3 (Sep., 1964), pp. 425-442

STARTZ, R. **The Stochastic Behavior of Durable and Non-Durable Consumption**. Review of Economics and Statistic, Vol. 71, (1989), pp. 356-363

TOBIN, James. **Liquidity Preference as Behavior Towards Risk**. The Review of Economic Studies, No. 67 (Feb., 1958), pp. 1-56

WEIL, P. **The Equity Premium Puzzle and Risk-Free Rate Puzzle**. Journal of Monetary Economics, Vol. 24 (1986), pp. 401-421

VARIAN, Hal R. **Microeconomic Analysis**. 3 ed. New York: Norton, 1992.