UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS

IMAGINAÇÃO, INTUIÇÃO E VISUALIZAÇÃO: A RIQUEZA DE POSSIBILIDADES DA ABORDAGEM GEOMÉTRICA NO CURRÍCULO DE CURSOS DE LICENCIATURA DE MATEMÁTICA.

Curitiba

2009

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS

IMAGINAÇÃO, INTUIÇÃO E VISUALIZAÇÃO: A RIQUEZA DE POSSIBILIDADES DA ABORDAGEM GEOMÉTRICA NO CURRÍCULO DE CURSOS DE LICENCIATURA DE MATEMÁTICA.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Setor de Educação da Universidade Federal do Paraná, área temática **Educação, Cultura e Tecnologia** e linha de pesquisa **Educação Matemática** como requisito parcial à obtenção do título de **Doutor em Educação.**

Orientadora: **Profa. Dra. Maria Tereza Carneiro Soares**.

Curitiba
2009

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ MEC PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MESTRADO E DOUTORADO SETOR DE EDUCAÇÃO 1912

PARECER

Defesa de Tese de **JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS** para obtenção do Título de DOUTOR EM EDUCAÇÃO. Os abaixo-assinados, DRª MARIA TEREZA CARNEIRO SOARES, DR. HELENA NORONHA CURY, DRª LILIAN NASSER, DRª MÁRCIA REGINA FERREIRA DE BRITO DIAS e DR. CARLOS HENRIQUE DOS SANTOS argüiram, nesta data, o candidato acima citado, o qual apresentou a seguinte Tese: **"IMAGINAÇÃO, INTUIÇÃO E VISUALIZAÇÃO: A RIQUEZA DE POSSIBILIDADES DA ABORDAGEM GEOMÉTRICA NO CURRÍCULO DE CURSOS DE LICENCIATURA DE MATEMÁTICA".**

Procedida a argüição, segundo o Protocolo aprovado pelo Colegiado, a Banca é de Parecer que o candidato está apto ao Título de DOUTOR EM EDUCAÇÃO, tendo merecido as apreciações abaixo:

BANCA	ASSINATURA	APRECIAÇÃO
DRª MARIA TEREZA CARNEIRO SOARES	MTCSoares	APROVADO
DRª HELENA NORONHA CURY	Helena N. Cury	APROVADO
DRª LILIAN NASSER	Lilian Nasser	APROVADO
DRª MÁRCIA REGINA FERREIRA DE BRITO DIAS	Marcia Regina F de Brito	aprovado
DR. CARLOS HENRIQUE DOS SANTOS		aprovado
Dr. José Carlos Cifuentes		APROVADO

Curitiba, 10 de julho de 2009.

Prof. Dr. Ângelo Ricardo de Souza
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese de doutorado por processos eletrônicos ou fotocopiados.

____ Curitiba/PR: 10/07/2009.

assinatura

DEDICATÓRIA

Meu pai (in memorian): mostrou ser um doutor na sabedoria da vida, sem nunca ter freqüentado os bancos escolares e sequer conhecer e dominar as letras. Dele herdei valores morais e honestidade nas lutas pela vida.

Minha mãe: a quem nem o sofrimento e as doenças fizeram perder o afeto e o amor materno. Dela herdei a rebeldia contra o comodismo.

AGRADECIMENTOS

Ao longo de minha caminhada pelo ensino e pela Educação em Matemática, um número muito grande de pessoas me estimulou e me serviu de estímulo para crescer sempre, como pessoa e como profissional. Por acreditar que seria injusto citar algumas, por estarem registradas na memória recente e fazerem parte da minha vida atualmente, e deixar de citar outras tantas que a memória não evoca no momento, deixo meu agradecimento a todas indistintamente. Todas são e foram muito importantes para que eu chegasse a esse ponto. Particularmente, agradeço à minha orientadora Maria Tereza, pelo estímulo que me deu para iniciar e trilhar a caminhada do doutorado, por sua firme e competente orientação, por seu exemplo de comprometimento com a Educação Matemática e por sua forma de compartilhar seus conhecimentos.

Um Homem Também Chora (Guerreiro Menino)

Composição: Gonzaguinha

Um homem também chora
Menina morena
Também deseja colo
Palavras amenas...

Precisa de carinho
Precisa de ternura
Precisa de um abraço
Da própria candura...

Guerreiros são pessoas
Tão fortes, tão frágeis
Guerreiros são meninos
No fundo do peito...

Precisam de um descanso
Precisam de um remanso
Precisam de um sono
Que os tornem refeitos...

É triste ver meu homem
Guerreiro menino
Com a barra do seu tempo
Por sobre seus ombros...

Eu vejo que ele berra
Eu vejo que ele sangra
A dor que tem no peito
Pois ama e ama...

Um homem se humilha
Se castram seu sonho
Seu sonho é sua vida
E vida é trabalho...

E sem o seu trabalho
O homem não tem honra
E sem a sua honra
Se morre, se mata...

Não dá prá ser feliz
Não dá prá ser feliz...

É triste ver meu homem
Guerreiro menino
Com a barra de seu tempo
Por sobre seus ombros...

Eu vejo que ele sangra
Eu vejo que ele berra
A dor que tem no peito
Pois ama e ama...

Um homem se humilha
Se castram seu sonho
Seu sonho é sua vida
E vida é trabalho...

E sem o seu trabalho
O homem não tem honra
E sem a sua honra
Se morre, se mata...

Não dá prá ser feliz
Não dá prá ser feliz...

Não dá prá ser feliz
Não dá prá ser feliz
Não dá prá ser feliz...

RESUMO

Esta tese surge da seguinte indagação: é possível ensinar conceitos geométricos em disciplinas de cursos de Licenciatura em Matemática a partir de abordagens que envolvam imaginação, intuição e visualização? O problema de pesquisa foi elaborado com base em levantamento inicial, em oito currículos de Licenciaturas em Matemática do Estado do Rio Grande do Sul, ao buscar nas disciplinas da área de Geometria a existência de tópicos de Geometrias Não Euclidianas, Geometria Fractal, Topologia e Geometria Diferencial e a existência de abordagens inovadoras utilizando recursos didático-tecnológicos. Tem como objetivo apontar possibilidades de uso de abordagens que mobilizem imaginação, intuição e visualização no ensino de conceitos geométricos nas disciplinas mencionadas. A descrição e análise de experimentos de ensino de conceitos geométricos, realizados em duas disciplinas do ensino superior, cumprem o primeiro objetivo desta pesquisa e situam práticas educativas possíveis. É a partir destes dois experimentos, que buscou-se a literatura e, especialmente naquela fornecida pelo campo da Psicologia da Educação Matemática, foram encontradas pesquisas que destacam os três aspectos – imaginação, intuição e visualização no ensino de Matemática. Percebeu-se nessas pesquisas que há tendências em se tratar determinados conteúdos matemáticos de forma interdisciplinar, utilizando esses três aspectos, porém em sua maioria voltados à escola básica. Propõem-se algumas formas de tratar conteúdos de diversas disciplinas da Licenciatura em Matemática utilizando a riqueza de possibilidades oferecidas pela imaginação, intuição e visualização. Por fim, incluem-se ao longo da tese exemplos de como, com essas possibilidades, podem ser criados espaços ambiente nos quais entes geométricos podem ser imaginados, intuídos e visualizados e até mesmo sendo representados, como por exemplo, em tópicos específicos de disciplinas como Cálculo, Álgebra, Álgebra Linear e Análise.

Palavras-chave: Educação Matemática. Imaginação. Intuição. Visualização. Pensamento Geométrico Avançado.

ABSTRACT

This thesis emerges from the following question: is it possible to teach geometrical concepts in the disciplines of mathematics teaching undergraduate courses, from approaches involving imagination, intuition and visualization? The research problem was based on initial survey, in eight curricula of mathematics teaching courses from the State of Rio Grande do Sul, when searching for the existence of topics of Non Euclidean Geometries, Fractal Geometry, Topology and Differential Geometry and the existence of innovative approaches, using didactical-technological resources. We have as aim to point out opportunities to use approaches that mobilize imagination, intuition and visualization in the teaching of geometrical concepts in the disciplines mentioned above. A description and analysis of experiments for teaching geometrical concepts, carried out in two disciplines of higher education, fulfill the first objective of this research and locate possible educational practices. From these two experiments, we search for theoretical foundation, especially that one provided by the Psychology of Mathematics Education, and there were found researches that highlight the three aspects - imagination, intuition and visualization in the teaching of mathematics. It was noticed in these researches that there are trends in approaching certain mathematical contents in an interdisciplinary way, using these three aspects, but mostly focusing elementary school. We propose some ways of dealing with contents of different disciplines of mathematics teaching courses, using the wealth of opportunities offered by imagination, intuition and visualization. Finally, we include along the thesis examples of how to create, with these possibilities, space-environment in which geometrical entities can be imagined, felt, visualized and even represented in specific topics of subjects such as Calculus, Algebra, Linear Algebra and Analysis

Keywords: Mathematics Education. Imagination. Intuition. Visualization. Advanced Geometrical Thinking.

RESUMEN

Esta tesis surge de la siguiente pregunta: ¿es posible enseñar conceptos geométricos en las disciplinas de los cursos de formación de profesores de matemáticas en abordajes que envuelvan la imaginación, la intuición y la visualización? El problema de la investigación fue elaborado con base en una encuesta inicial, en ocho planes de estudios de cursos de formación de profesores de matemáticas del Estado de Rio Grande do Sul, al buscar en las disciplinas del campo de la geometría la existencia de tópicos de geometrías no euclidianas, geometría fractal, topología y geometría diferencial y la existencia de enfoques innovadores, utilizando materiales didácticos-tecnológicos. Se tiene por objeto señalar las oportunidades de utilizar los enfoques que movilizan la imaginación, la intuición y la visualización en la enseñanza de conceptos geométricos en las disciplinas mencionadas. La descripción y análisis de experimentos para la enseñanza de conceptos geométricos, realizado en dos disciplinas en la enseñanza superior, cumplen el primer objetivo de esta investigación y señalan prácticas educativas posibles. De estos dos experimentos, se buscó fundamentación teórica, sobre todo teniendo en cuenta el campo de la Psicología de la Educación Matemática, y se encontró investigaciones que señalan los tres aspectos - la imaginación, la intuición y la visualización en la enseñanza de las matemáticas. Se observó en las investigaciones que hay tendencias de tratar determinados contenidos matemáticos de manera interdisciplinaria, utilizando estos tres aspectos, pero principalmente destinados a la escuela primaria. Se proponen algunas formas de tratamiento de contenidos de diferentes disciplinas de cursos de formación de profesores de matemáticas empleando la riqueza de oportunidades ofrecidas por la imaginación, la intuición y la visualización. Por último, se insertan, a lo largo de la tesis, ejemplos de cómo, con estas posibilidades, se puede crear un espacio-entorno en el que las entidades geométricas se pueden imaginar, intuir, visualizar e incluso representar en temas específicos de disciplinas como Cálculo, Álgebra, Álgebra Lineal y Análisis

Palabras claves: Educación Matemática. Imaginación. Intuición. Visualización. Pensamiento Geométrico Avanzado.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

"A cultura tem que se reivindicar para a coletividade inteira, porque só com ela pode a humanidade tomar consciência de si própria."
Bento Caraça, in Cultura Integral do Indivíduo

Este trabalho é exigência parcial para conclusão do doutorado em Educação da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração em Educação, Cultura e Tecnologia e linha de pesquisa em Educação Matemática. Entendo que a formação de um pesquisador em Educação Matemática deva reunir ao menos dois aspectos do conhecimento científico - o da área das Ciências Exatas e o conhecimento da área de Ciências Humanas e Sociais.

Uma razão, talvez a principal, que me levou a buscar tal formação prende-se ao fato de ter conhecimentos da primeira área, por ter cursado um mestrado em Matemática Pura e Aplicada, e necessitar conhecer a segunda área com uma profundidade maior do que aquela que a experiência me proporcionou.

A reunião dos conhecimentos dessas duas áreas, em meu entender, é uma tarefa árdua, porém, inquestionavelmente, imprescindível para o pesquisador da área de Educação Matemática. Tendo como referência Morin (2002), uma reforma de pensamento se fez e se faz necessária para as funções de investigador e, neste caso, interpreto que nesta investigação será necessário revisitar o conhecimento matemático formal adquirido no mestrado e o conhecimento em Educação, para além do adquirido empiricamente pelo desempenho e atuação na formação de professores.

Granger (1974) coloca que o conhecimento científico, considerado como um processo de conceitualização, consiste na redução do que é experimentado na percepção como individual. "O individual somente pode ser apreendido numa atividade prática e a crença na possibilidade de seu conhecimento teórico poderá ser designada como a figura moderna da ilusão transcendental" (p.16). O autor caracteriza *o estilo* como “modalidade de integração do individual num processo concreto e que se apresenta necessariamente em todas as formas da prática.” (GRANGER, 1974, p. 17). É um modo de introduzir os conceitos de uma teoria, encadeando-os e unificando-os, como faz ao tratar do Estilo Euclidiano interligando-o à noção de grandezas geométricas.

A álgebra geométrica consiste em realizar operações geométricas ao multiplicar e dividir segmentos de retas, como por exemplo, na utilização desse método para o cálculo de áreas de regiões poligonais não regulares, pela triangularização e aplicação do Teorema de Pitágoras, como apresentado em Leivas(2007a). Para Granger (1974, p. 39)

> [...] a assimilação dessas áreas a grandezas de segunda espécie, construídas a partir dos comprimentos por uma operação análoga ao produto simétrico, é aqui um dado intuitivo. É por meio dele que a álgebra geométrica se enraíza, por assim dizer, no livro I dos Elementos.

É dessa forma que o autor define o estilo da *álgebra geométrica,* “justamente como um estilo, caracterizado pelo papel atribuído às propriedades intuitivas das figuras e pelo modo de introdução das operações, tais como a multiplicação dos comprimentos e sua elevação ao quadrado”. (Ibid., p. 47), sendo que se finaliza esse estilo com a ausência de algoritmos que aproximem números irracionais.

Uma mudança de estilo ocorre quando o conhecimento científico opera uma variação em sua construção pelos matemáticos no transcorrer do tempo e da criação e foi assim que ocorreu com o Estilo Euclidiano, quando Descartes considerava, segundo Granger (1974), estar ‘enjoado’ da Matemática pura, especialmente da Aritmética que considerava indutiva. Defendia que a Matemática deveria ser aplicável em seus princípios muito mais do que em conteúdos.

Para Granger (1974, p. 62),

> [...] a intuição espacial, que unia os antigos e, como diz Descartes, causava-lhes ‘escrúpulo em usar termos da Aritmética na Geometria’, achava-se conjurada. Todas as operações da análise algébrica – que Descartes sistematiza – estão, desde então, disponíveis para exprimir as propriedades geométricas... A noção confusa e imaginativa de dimensão de uma figura é substituída por outra noção clara e distinta: a de grau de uma equação.

É o nascimento do Estilo Analítico, em que a intuição algébrica serve como fundamento para a Geometria, deslocando a intuição das figuras próprias do Estilo Euclidiano e dando à Geometria um caráter métrico, que vai permitir ampliar os domínios da Geometria ao tratar com curvas de grau superior, por exemplo. A ênfase nesse estilo é no tratamento algébrico dos objetos se sobrepondo ao geométrico, o que parece continuar a prevalecer nas disciplinas da componente curricular denominada Geometria Analítica.

Nessa movimentação da criação matemática, novos estilos como o *Estilo Projetivo* e o *Estilo Vetorial* são impostos à Geometria. Assim, inovação no desenvolvimento curricular na formação do professor parece ser exigência necessária e urgente, tanto no que diz respeito aos conteúdos quanto às formas de tratamento do conhecimento matemático. Talvez a introdução de abordagens interdisciplinares no tratamento desse conhecimento possa vir a ser uma forma de não serem criadas disciplinas novas, isoladas, simplesmente para cobrir conteúdos novos ou suprir a ausência daqueles que os mais conservadores exigem que estejam presentes nos cursos em que atuam. Nesse caso, ainda permanece a idéia de que os cursos formam matemáticos, os quais irão atuar como professores, considerando que os dois papéis são idênticos.

Na minha caminhada acadêmica tanto como professor dos diversos graus de ensino, especialmente na formação inicial de professores de Matemática, inclusive como coordenador de curso de licenciatura, além de participante dos movimentos de Ensino e de Educação Matemática, fui construindo um conhecimento empírico da realidade do ensino em Geometria no estado do Rio Grande do Sul e no Brasil.

Da experiência de mais de trinta anos de atuação profissional, pude perceber que a Geometria desenvolvida na formação do professor ocorre de duas formas distintas. Numa primeira forma, o conhecimento geométrico ocorre em disciplinas constantes da grade curricular, de forma isolada e sem conexões entre as disciplinas caracterizadas como sendo de Geometria e nem com outras disciplinas não específicas dessa área, mas que podem utilizar aspectos de Geometria para uma melhor aquisição do conhecimento matemático, e isso parece estar próximo a um tratamento interdisciplinar na Licenciatura em Matemática. A falta de tal tratamento ocasiona um conhecimento geométrico limitado, fragmentado e com pouco significado para os futuros professores, que não percebem a riqueza e as possibilidades de emprego da Geometria em vários ramos e problemas da Matemática. Numa segunda forma, o conhecimento é adquirido em processos de ação continuada. Entretanto, esse último conhecimento, ainda mais fragmentado do que o primeiro, é adquirido por um número muito pequeno de professores, especialmente pela falta de incentivo dos dirigentes educacionais e públicos que não favorecem a participação dos professores em atividades locais, regionais e nacionais, quer com estímulo financeiro, quer no favorecimento de substituições das atividades regulares desses professores em sala de aula. Parece, no entanto, que essa tem sido a forma escolhida por muitos educadores para tentarem resolver as deficiências da formação inicial do professor que vai ensinar Matemática na escola básica.

Nos projetos pedagógicos dos cursos de formação de professores, que muitas vezes são simples grades curriculares, o conhecimento geométrico está centrado em algumas disciplinas que abordam Geometria Plana e Espacial, numa concepção dita euclidiana, sem nem ao menos fazer referências à formulação como a de Hilbert, que utiliza uma axiomatização mais completa de Geometria do que a de Euclides, ou a de Lobachevisky, por exemplo. No desenvolvimento de disciplinas que abordam Geometria, muitas vezes, não há uma concepção a ser seguida, pois determinados professores, por exemplo, desenvolvem suas disciplinas pelo caminho de resolução de exercícios rotineiros de simples aplicações de fórmulas. Alguns utilizam direta e exclusivamente o método axiomático e outros sequer fazem conexões da Geometria com outras áreas do conhecimento matemático ou conexões de outras áreas com a Geometria.

Com as mudanças na legislação, tais como a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDBEN - (BRASIL, 1996), e Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores (BRASIL, 2001), outros encaminhamentos foram dados aos cursos de formação e a redução de disciplinas foi inevitável, tanto no que diz respeito ao elenco de disciplinas quanto ao que diz respeito aos seus conteúdos. Parece que isso ocorre devido a não haver uma definição do que se espera da formação do professor e até mesmo do bacharel que é potencialmente aquele que vai atuar futuramente nessa formação.

Uma dicotomia parece existir entre os matemáticos, aos quais é atribuído fazer Matemática, e os professores, aos quais compete o ensino do que é relacionado a partir dessa área do conhecimento. Os primeiros, muitas vezes, atribuem um papel de menor valor aos segundos e esses, respeitando o saber dos primeiros, lhes atribuem uma falta de compreensão a respeito do que ensinar. Não se pode deixar de considerar a relevância das pesquisas sobre o ensino no campo da Educação Matemática e da Psicologia da Educação Matemática e, mais especificamente, o papel que o professor pode desempenhar como organizador e investigador de sua aula.

Valente (2008), pesquisador das raízes históricas do ensino da Matemática no Brasil, esboça uma trajetória de como o professor de Matemática chegou ao estágio atual, a partir de uma reconstrução de suas origens. Para tal se reporta ao século XVII, quando a preocupação da coroa portuguesa era a de preparar os militares para a guerra e, em assim o sendo, o objetivo era um bom treinamento. Dessa forma, o professor responsável pelo ensino de Matemática tinha como meta a preparação aos exames que permitiam a promoção dos oficiais militares. Já nessa conjuntura, é possível identificar o ensino de Geometria e diz o autor que os primeiros livros foram *Exame de artilheiros* e *Exame de bombeiros*, nos quais

> [...] o professor tem como uma de suas tarefas maiores, a partir da geometria, ensinar como é possível calcular o número de balas de canhão que um determinado lugar pode conter. Ou, ainda, à vista de uma pilha de balas de canhão, saber quantas balas a pilha tem. (VALENTE, 2008, p. 14).

Ainda segundo Valente (2008), em 1827 criam-se os Cursos Jurídicos no Brasil e a Geometria é utilizada como um dos exames parcelados de tais cursos, quando a Matemática ganha um novo *status* oficial. Os pontos desses exames eram língua francesa, gramática latina, retórica, filosofia racional e moral e Geometria, segundo o autor. “Os pontos dos exames parcelados seriam referência, também, para a elaboração de toda uma literatura escolar” (p. 16). Nesses, eram enunciados os assuntos, observações do autor do texto sobre o que era necessário saber, ou seja, quantas definições, aplicações e teoremas, e finalmente um texto sintético que deveria ser conhecido em termos teóricos e ser “decorado” pelos alunos para aprovação nas provas.

Isso perdurou por mais uma década até surgir a Matemática como disciplina pela Reforma Francisco Campos. Surge então uma preocupação com o ensinar a disciplina Matemática reunindo Geometria, Álgebra e Aritmética, talvez aqui aparecendo um início do que hoje denominamos Educação Matemática, com questionamentos ou dúvidas, por exemplo, “Como começar um curso de matemática pela geometria espacial?” (VALENTE, 2008, p. 19). Essa dúvida ainda paira até os dias de hoje, pois não há uma integração entre as disciplinas nos cursos de

Matemática e sim uma reunião de disciplinas, sem maiores interlocuções entre elas. Entretanto, parece estarem aí implantadas modificações na forma de atuar do professor que ensina Matemática, em que investigações sobre as práticas, o ensino e o fazer matemático se aproximam, caracterizando a pesquisa em Educação Matemática em um estágio embrionário.

Apesar do imenso número de pesquisas em Educação Matemática, parece que ainda há no interior dos Departamentos de Matemática de instituições do ensino superior brasileiro, a idéia de que a área de Educação Matemática destina-se somente para a formação continuada de professores e não como campo de pesquisa, como a que pretendo apresentar nesta tese, envolvendo a Geometria numa concepção mais ampla do que aquela que é usualmente utilizada, sem envolver, por exemplo, propriedades topológicas e fractais. Assim, acredito que possa dar uma contribuição com minhas pesquisas na construção de um currículo para a formação do professor de Matemática que contemple aspectos mais atuais em termos de Geometria.

Nesse sentido, apesar dos 100 anos da *International Commission on Mathematics Instruction*[1] (ICMI) criada em 1908, a Educação Matemática ainda é considerada pelos matemáticos como área incipiente e delegada àqueles que não apresentam competência, seja para o desenvolvimento da ciência Matemática, ou ao menos para o ensino dessa ciência (DRUCK, 2003). Os matemáticos, professores de ensino superior, se atribuem a tarefa de ensinar apenas conhecimentos matemáticos de alto nível, justificando que os mesmos seriam relevantes não só para os bacharéis que continuarão sua formação em Matemática, mas também para os licenciandos. Porém, mesmo concordando que estes conhecimentos sejam extremamente importantes para o professor de qualquer nível, pesquisas apontam que os mesmos não são pensados e preparados de forma que o licenciando, futuro professor, compreenda sua relação com os conteúdos a ensinar.

Naturalmente que educar pela Matemática é uma tarefa que exige um novo fazer na própria formação do quadro docente envolvido e comprometido com a formação do educador matemático e para tal a pesquisa em Educação Matemática apresenta-se como um campo fértil. Moreira e David (2007) ao distinguirem

[1] Mantive no texto alguns nomes internacionais na língua de origem, enquanto que traduções das citações retiradas da bibliografia estrangeira são feitas por mim de forma livre.

Matemática Escolar de Matemática Acadêmica assumem a existência de duas formas de saberes profissionais existentes nas licenciaturas, ou seja, os saberes e os significados que a comunidade científica atribui à Matemática, e aqueles que buscam professores e alunos ao longo do processo de ensino e de aprendizagem dessa disciplina na escola básica.

Moreira e David (2007, p. 47), analisam diversas questões com que se defrontam professores e revelam que:

> Ao identificar o tipo de saber matemático associado ao tratamento escolar dessas questões e ao confrontá-lo com a Matemática Acadêmica, normalmente veiculadas nos cursos de formação inicial do professor, constatamos uma forma específica de distanciamento entre formação e prática.

Em meu entender, no caso da Geometria, as questões são muito mais profundas em suas raízes, pois o professor, quando tem duas ou três disciplinas envolvendo esse conteúdo em sua formação inicial, além de tê-lo de forma dissociada daquela necessária ao ensino básico, não domina metodologias adequadas ao seu ensino. Pesquisas apontam um ensino dessa disciplina na escola básica que se limita ao uso de fórmulas, não privilegiando outras dimensões consideradas essenciais para o desenvolvimento de um pensamento geométrico, apoiado, por exemplo, no tripé imaginação, intuição e visualização, como por exemplo, na afirmação de Hilbert e Cohn-Vosse (1932, p. iii) no prefácio de seu livro *Geometry and the Imagination*

> Neste livro, é nosso objetivo dar uma apresentação da Geometria, tal como está hoje, em seus aspectos visual e intuitivo. Com a ajuda da imaginação visual, podemos iluminar a variedade de fatos e de problemas de Geometria e, além disso, é possível, em muitos casos, retratar o esboço geométrico dos métodos de investigação e demonstração, sem necessariamente entrar em pormenores relacionados com a estrita definição de conceitos e com cálculos reais.

Skemp (1993, p. 100) também se reporta a essas características:

> Nos anos 1880, Galton afirmou que as pessoas se diferenciavam por sua imaginação mental. Algumas, como ele mesmo, possuíam uma forte imaginação visual; outras, nada em absoluto, pensavam principalmente com palavras. Isto hoje é tão certo como fora então. Há também pessoas que dispõem das duas modalidades, porquanto, talvez, com uma preferência mais para uma do que para outra.

Para o autor, os símbolos desempenham um papel fundamental na formação de esquemas como estruturas conceituais e um conceito de alguma coisa é puramente mental e não pode ser audível ou visível. Então, para comunicar um conceito afirma o autor que há necessidade de símbolos que possam ser ouvidos ou visualizados e que estejam em conexão com a idéia que é formada mentalmente. Assim, para que uma idéia se faça consciente, segundo ele, parece haver a necessidade de uma estreita associação a um símbolo, os quais podem selecionar e manipular os conceitos livremente.

Skemp (1993, p.101) aborda pensamento verbal e pensamento visual como classes de imaginação e estabelece relação entre as duas classes. Para ele

> Os símbolos visuais se exemplificam claramente por meio de diagramas de todas as classes, em particular figuras geométricas. Porém dentro de que categoria poderíamos colocar símbolos algébricos como estes?
> $\int_a^b senx.dx; \{x : x^2 \geq 0\}$
> [...] Os símbolos algébricos possuem muito mais em comum com símbolos verbais do que com diagramas ou figuras geométricas e de imediato se classificam entre os primeiros.
> [...] Ambos, símbolos visuais e verbais, se usam em matemáticas, juntos ou separados.

A comunicação do pensamento visual se faz por meio de ações como desenhar, pintar ou filmar, o que torna essa comunicação mais difícil que a comunicação verbal e, talvez, por isso haja no ensino uma priorização das representações verbais ou em língua materna. Para ele, o símbolo visual, em qualquer caso, tem um vínculo mais estreito com o conceito do que o correspondente símbolo verbal. Dessa forma, segundo Skemp (1993), é interessante observar as diferenças individuais de imaginação apontadas por Galton.

> Se é correto que pensemos que imaginação visual é a mais favorável à integração de idéias; e se não é acidental que quando nos tornamos conscientes de como as idéias se relacionam umas a outras, nos referimos à experiência como *insight*, não como um ouvir interior; então podemos racionalmente estabelecer a hipótese de que as pessoas que têm sobressaído por sua contribuição matemática e científica usaram mais da imaginação visual do que a auditiva. (SKEMP, 1993, p. 118)

Nesse sentido, são apontados por Skemp (1993, p. 119) como exemplos dessas pessoas o próprio Galton ao afirmar que “sua própria imaginação visual era clara, porém lhe faltava fluidez verbal”, bem como o famoso cientista Einstein, em uma carta a Hadamard, estabelecendo que “sua imaginação preferida é visual e motora, e que as palavras convencionais e outros signos são considerados para o trabalho somente em um estudo secundário.”

Em relação à Geometria, Skemp (1993) afirma que o fato de a Geometria Euclidiana se centrar no estudo das figuras geométricas e no desenvolvimento sistemático dessas figuras a partir de axiomas, fez com que a importância maior, por muitos séculos, tenha sido dada à sistematização de propriedades do que propriamente aos aspectos geométricos em si. Além disso,

> Atualmente, é interessante observar que esta atitude tem se invertido entre os matemáticos e, enquanto que as figuras geométricas são utilizadas como ajuda para a imaginação, a decisão final nas questões de dedução lógica e inclusive em termos geométricos tem sido a álgebra. (SKEMP, 1993, p. 285)

A partir das considerações anteriores, nesta tese utilizarei o termo **imaginação** para expressar uma forma de concepção mental de um conceito matemático, o qual pode vir a ser representado por um símbolo ou esquema visual, algébrico, verbal ou uma combinação dos mesmos, com a finalidade de comunicar para o próprio indivíduo ou para outros tal conceito.

Quanto ao termo intuição, ele tem sido abordado tanto na Ciência quanto na Matemática sob diversos enfoques e autores, dentre os quais Klein (1927), Hilbert e Cohn-Vossen (1932) Hilbert (2003), Hadamard (1945), Granger (1974), Hernandez (1978), Fischbein (1987), Bishop (1989), Cunningham (1991), Tall (1991), Nasser (1992), Guzmán (1993, 1997, 2000), Skemp (1993), Hersh (1997), Davis e Hersh (1995), Cifuentes (2005), os quais, de uma forma ou de outra, relacionam intuição na Matemática e na Geometria.

Segundo Fischbein (1987), intuição ou conhecimento intuitivo é um tipo de cognição que se refere às afirmações auto-evidentes, as quais ultrapassam fatos observados, o que diferencia de percepção, algo como uma cognição imediata, não necessitando de prova para sua existência. Entende o autor por cognição as componentes estruturais de qualquer comportamento adaptativo, "o papel essencial da intuição é conferir às componentes conceituais de um esforço intelectual as mesmas propriedades as quais garantem a produtividade e a eficiência adaptativa de um comportamento prático." (FISCHBEIN, 1987, p. 19), enquanto que "o principal atributo do conhecimento intuitivo é o sentimento de uma certeza direta e este é produzido, em primeiro lugar, pela impressão de auto-evidência." (Ibid., p. 21).

O autor apresenta sua definição:

> Uma intuição é, então, uma idéia que possui as duas propriedades fundamentais de uma realidade concreta, dada objetivamente; imediatez - isto é, evidência intrínseca - e certeza (não certeza formal convencional, mas praticamente significativa, certeza imanente." (Ibid., p. 21).

Por outro lado, Skemp (1993) trata da comunicação de conceitos como algo difícil e considera que o uso da intuição, muitas vezes, favorece essa comunicação.

Para ele o funcionamento da inteligência pode ocorrer de forma intuitiva ou de forma reflexiva sendo que na primeira forma, o indivíduo é consciente por meio da audição e da visão oriundas do mundo externo.

Tall (1991, p. 108) define "Intuição como uma ressonância global no cérebro e depende da estrutura cognitiva do indivíduo o que, por sua vez, depende da experiência do indivíduo."

O termo intuição nesse trabalho tem o significado apontado por esses autores, ou seja, considero **intuição** um processo de construção de estruturas mentais para a formação de um determinado conceito matemático, a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto. O conceito deve ser formado de forma reflexiva, consciente, produzindo sentimento de certeza a partir da auto-evidência.

Uma primeira idéia considerada neste trabalho sobre visualização, destaco a ênfase que o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) dá ao pensamento visual. Costa (2000, p. 162) identificou como "uso da visualização e raciocínio espacial para resolver problemas tanto dentro como fora das matemáticas", também destaco a importância dada por Hilbert e Cohn-Vossen (1932), em sua primeira obra, ao tratamento de conceitos geométricos por representações visuais, tais como em configurações projetivas nas quais "os fatos geométricos podem ser formulados e deduzidos sem nenhuma medida ou comparação de distâncias ou de ângulos" (p. 94). Desse caso, ocorre apelo às projeções no denominado plano projetivo sendo que as figuras geométricas são analisadas pelo seu aspecto global, em contrapartida ao que ocorre com a "Geometria Diferencial que representa fundamentalmente um método diferente de abordagem" (p. 171), segundo a qual a análise de curvas e superfícies ocorre na vizinhança de pontos desses lugares geométricos.

Zimmermann e Cunningham (1991, p. 3) definem visualização matemática como "o processo de formação de imagens (mentalmente, ou com papel e lápis, ou com o auxílio de tecnologia) e utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática" enquanto que Cifuentes (2005, p. 58) considera que "visualizar é ser capaz de formular imagens mentais e está no início de todo o processo de abstração".

Guzmán (1997, p. 16) define visualização em matemática como “essa forma de atuar com atenção explícita às possíveis representações”, ao se referir ao conhecimento que todo especialista deve ter da utilidade de manejar com objetos abstratos de origem concreta, enquanto que para Presmeg (1986, p. 298) “Um método visual é aquele que envolve imagem visual, com ou sem um diagrama, como uma parte essencial do método de solução, mesmo se os métodos de raciocínio ou algébrico são ambos empregados.”

Para Arcavi (1999, p. 217)

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver idéias não conhecidas e avançar na compreensão.

Fischbein (1987, p. 103) identifica a visualização com o conhecimento intuitivo, uma vez que intuições são imediatas e aparentemente são auto evidentes. “É uma afirmação trivial que se tende naturalmente a pensar em termos de imagens visuais e que o que não se pode imaginar visualmente é difícil de conceber mentalmente”. Para o autor imagens como modelos podem propiciar relações e propriedades não pertinentes a determinada estrutura conceitual. “Entretanto, visualização, envolvida em uma atividade cognitiva adequada continua a ser um fator fundamental contribuindo para uma compreensão intuitiva.” (Ibid., p. 103).

Além disso, Fischbein (1987, p. 104) acrescenta que

> Representações visuais não somente auxiliam na organização da informação em representações como constituem um importante fator de globalização. Por outro lado, a concretude de imagens visuais é um fator essencial para a criação de um sentimento de auto-evidência e imediatez. Uma imagem visual não somente organiza os dados em estruturas significativas, mas é também um fator importante para orientar o desenvolvimento de uma solução analítica; representações visuais são essenciais dispositivos antecipatórios.

A partir dessas considerações preliminares considerarei ao longo deste trabalho **visualização** como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos.

No ensino superior, a introdução de conteúdos de Álgebra Linear nos currículos de Matemática, na maioria das vezes, é feita em uma disciplina e a Geometria em outra, não havendo ligação entre os dois saberes. Em alguns casos se percebe o uso de algum tópico de Álgebra Linear como método para o ensino de Geometria, tanto na abordagem analítica, quanto na abordagem de transformações ou de movimentos, tais como rotação, translação e simetria. Félix Klein, há mais de um século, já apontava para a importância do uso de transformações como método para o ensino da Geometria. Entretanto, até os dias atuais esses conteúdos continuam sendo centrados nos moldes de uma pseudo geometria euclidiana, sem oportunizar uma renovação no ensino dessa área.

Klein (1927) argumenta que a diferença real entre a denominada Geometria Sintética, isto é, aquela na qual figuras são estudadas por elas mesmas sem a intervenção de quaisquer fórmulas, e a Geometria Analítica, aquela na qual as figuras são estudadas fazendo uso de sistemas de coordenadas, é apenas quantitativa, no sentido de, ao não predominar figuras ou fórmulas, ter-se uma ou outra.

> A Geometria Analítica não pode prescindir em absoluto da representação geométrica nem, ao contrário, a Geometria Sintética pode ir muito longe sem expressar com precisão, com fórmulas adequadas, seus resultados. Porém, como ocorre sempre que se trata de algo opinável, os matemáticos têm se dividido em dois grupos, os que têm dado origem à escola sintética pura e aqueles à analítica pura, baseados ambos exclusivamente na pureza do método e não na natureza das coisas que estudam, o que conduz aos geômetras analíticos se perderem frequentemente em cálculos sem representação geométrica alguma, e os sintéticos evitarem artificialmente o uso de toda fórmula. (KLEIN, 1927, p. 74)

Klein (1927) afirma que, similarmente ao que ocorre com a Geometria Analítica e a Geometria Sintética, passa-se com análise vetorial, a qual, embora muito utilizada na Física, ainda não tem lugar nos tratados de Geometria, nos dias atuais, com o que concordamos plenamente.

O estudo de conceitos matemáticos no ensino superior, ancorado na riqueza de possibilidades visuais advindas da Geometria, parece ser uma alternativa pedagógica importante e interessante para a aquisição de novos saberes, dentre os quais aqueles da Álgebra Linear ou os da Geometria Diferencial, ao utilizar vetores tangentes a curvas de uma superfície para a compreensão de derivadas direcionais. Ainda mais, nos cursos de Cálculo, por exemplo, abordagem geométrica como método pode intervir para a compreensão do Teorema do Valor Médio ou do Teorema da Função Inversa, o que em geral não é feito, pois não se estabelece relação ou utilização da Geometria como elemento facilitador da construção desse conhecimento. Com isto, a construção do conhecimento geométrico fica limitada a poucas disciplinas curriculares e não como algo adquirido na própria construção do conhecimento matemático. Essa forma de utilizar a Geometria no currículo, interrelacionada às outras disciplinas é o que caracterizo como geometrizar o currículo de Matemática.

Partindo dessas considerações iniciais, que constituem o capítulo 1, no segundo capítulo deste trabalho são apresentadas as justificativas para a proposta da pesquisa, quando é descrita a minha trajetória de vida profissional, é realizado um levantamento e análise de conteúdos de Geometria em oito cursos de Licenciatura em Matemática no Rio Grande do Sul e, ainda, é apresentada a delimitação do problema de pesquisa e os objetivos do trabalho.

No terceiro capítulo descrevo os experimentos, por mim realizados em sala de aula, quando apresento e analiso dois experimentos de ensino de conceitos geométricos; sendo um realizado em um Curso de Licenciatura em Matemática e outro em ação continuada numa disciplina de Programa de Pós-Graduação na linha de Educação Matemática.

No quarto capítulo, apresento um cenário de ensino de Geometria, quanto a propostas e reformulações curriculares, bem como um breve levantamento de diretrizes, parâmetros e orientações curriculares.

No quinto capítulo, apresento a forma como os temas imaginação, intuição e visualização foram e são tratados na literatura mais diretamente ligada ao Grupo Internacional de Psicologia da Educação Matemática (PME), centrando atenção especial nos trabalhos de Klein, Fischbein, Freudenthal e Skemp, dentre outros. A partir de minhas concepções iniciais sobre imaginação, intuição e visualização e com base na literatura consultada, exemplifico uma possibilidade de geometrizar o tópico de grupos algébricos.

No sexto capítulo, apresento sugestões para um projeto de Licenciatura em Matemática com base na riqueza de possibilidades imaginativas, intuitivas e visuais da Geometria no longo trajeto de conceitualização matemática, apontando aspectos que considero relevantes em um currículo para a Licenciatura em Matemática.

No capítulo sete elaboro minhas considerações finais sobre a tese, apresentando, a seguir, as referências e apêndices.

2 JUSTIFICATIVAS E DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

A fim de justificar a presente pesquisa, apresento inicialmente alguns fatos de minha vida acadêmica, os quais me conduziram a iniciar um projeto de doutorado e escolher a área de Geometria como tema.

2.1 UMA TRAJETÓRIA PERCORRIDA

Tendo iniciado os estudos primários no Grupo Escolar Estadual Dr. Armando Fagundes, na Vila Gotuzzo, na cidade de Pelotas, em 1959, ano em que completei nove anos de idade, de imediato senti um grande interesse pelos estudos e novas perspectivas de vida, oriundas de uma realidade até então desconhecida em função das origens humildes e falta de escolaridade familiar. Ao final do quinto ano da Escola Primária, a necessidade de prestar Exame de Admissão ao Ginásio, dar continuidade aos estudos como forma de melhorar as condições de vida futuras e o estímulo familiar foram suficientes para vencer a segunda etapa de escolaridade, até então considerada uma exceção na comunidade social a qual eu pertencia.

Durante esta etapa, convivendo com o movimento de Matemática Moderna e suas inovações, tive oportunidade de ter a mesma professora durante os quatro anos do Ciclo Ginasial, enquanto esta cursava a Licenciatura em Matemática na única instituição que oferecia esta modalidade de ensino na cidade de origem, a saber, a Universidade Católica de Pelotas, na qual vim a ingressar no ano de 1971, como aluno e, em 1976, como professor, talvez pela própria motivação proporcionada pela excelência de ensino da grande mestra que possibilitou o prazer do convívio com a Matemática. Futuramente, vim a substituir a preciosa Mestra no magistério estadual do Ensino Médio, sendo o escolhido dentre os professores que atuavam no Ensino Fundamental, infelizmente por motivos de enfermidade da marcante professora.

A partir do ingresso na Universidade, os caminhos e possibilidades para o exercício do magistério se apresentaram e, no ano seguinte, ao concluir parcialmente as obrigações militares, comecei o exercício profissional na quinta e na sexta séries do recentemente criado Ensino de Primeiro Grau em escola estadual e também na segunda série noturna do então curso ginasial, em extinção. A rica experiência, adquirida durante o exercício do magistério concomitantemente ao cursar a Licenciatura em Matemática, reforçou a certeza da escolha pela profissão.

O desejo de ainda dar continuidade a descobertas de novas oportunidades e possibilidades profissionais fez com que ao final da graduação eu participasse de cursos de verão destinados à professores na Universidade de São Paulo e na Universidade Mackenzie, nos anos de 1975 e 1976, bem como outros cursos extensionistas locais, o que ocasionou minha entrada como professor no Curso de Matemática da Universidade Católica de Pelotas no ano de 1976, ao mesmo tempo em que atuava nas redes estadual e particular de Primeiro e Segundo Grau.

Vislumbra-se nesta experiência com o ensino superior a vontade de ir além, mas universidades privadas, em geral, não proporcionavam liberação para seus professores se afastarem de suas atividades, mesmo que para se qualificarem, até porque, na década de 70, ainda não eram comuns professores mestres ou doutores nestas instituições, principalmente no interior dos estados brasileiros. Quando em 1979 fui chamado para ingressar no Departamento de Matemática da Fundação Universidade Federal do Rio Grande (FURG), na cidade de Rio Grande, no Rio Grande do Sul, não houve nenhuma dúvida em realizar mudanças antevendo aí mais uma possibilidade de continuação de estudos mais avançados, o que aconteceu em 1981 quando foi criado o primeiro curso de especialização na região, oferecido pela Universidade Federal de Pelotas que, mesmo ainda não tendo sua Licenciatura em Matemática, oferece o Curso de Especialização em Análise, o qual cursei e concluí em 1982. Nesta ocasião já havia sido feita uma tentativa de saída para o mestrado, não sucedida pela necessidade de contratação de professor substituto, o que era proibido pelo governo federal, na época. Neste período eu já havia participado de Escola de Geometria, na Universidade Estadual de Campinas, onde pretendia realizar projeto de mestrado, então adiado e não abandonado.

Em 1983, o Departamento de Matemática da Fundação Universidade Federal do Rio Grande, concedeu minha liberação para ingresso no Curso de

Mestrado em Matemática Pura e Aplicada, numa universidade que não fosse a Universidade Federal do Rio Grande do Sul e numa área que não fosse a de Análise, por já haver uma docente daquele departamento ali cursando mestrado em Matemática Pura e com projeto em Análise, mas essa não era a minha área pretendida. Foi feita seleção e ingresso na Universidade Federal de Santa Catarina e a área escolhida foi a de Geometria e Topologia, tendo desenvolvido um trabalho de dissertação de mestrado, concluído em 1985, sob o título *Um Estudo de Superfícies em* R^3, o qual, muito embora em Matemática Pura e Aplicada, teve um cunho voltado ao ensino superior, buscando estudar algum conteúdo matemático que tivesse relacionamento direto com o ensino de Geometria nesse nível de ensino, sendo dessa forma um trabalho de cunho didático-pedagógico.

O trabalho de dissertação de mestrado versou principalmente sobre o papel das geodésicas, isto é, curvas que desempenham em superfícies, o papel que as retas desempenham na Geometria Euclidiana. Isto me proporcionou um conhecimento inicial de Geometrias Não Euclidianas, até então completamente ignorado pelo professor universitário, que se encontrava à busca de uma cultura matemática além daquela adquirida na graduação e que eu acreditava ser necessária para atuar na formação de professores. Cabe ressaltar que antes de iniciar o mestrado havia sido criada, tanto na Universidade Católica de Pelotas (UCPEL) quanto na FURG, a disciplina Geometria Diferencial em ambas as Licenciaturas e, como ainda é prática atual nas universidades, coube ao professor que mais recentemente tivesse ingressado em seus quadros tomar a responsabilidade de desenvolvê-la, apesar de não constar em minha formação inicial tal disciplina ou alguma similar. Amplia-se aí o gosto por aprofundar conhecimentos de Geometria.

Ao retornar à Universidade, por necessidades próprias de reformulações curriculares, envolvi-me cada vez mais com a Licenciatura em Matemática, como único professor até então com mestrado na área de Matemática, pois a docente que chegara, com o mestrado concluído na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, fora cedida a outra instituição.

Assim, no envolvimento na realização de eventos semestrais, passando a quinzenais e posteriormente a eventos semanais na própria instituição, denominados “Quintas com Matemática” contando, inicialmente, com a participação de colegas e amigos de outras instituições, permitiu que criasse um espaço para os alunos da Licenciatura discutirem e refletirem sobre a necessidade de envolvimento em atividades extra-classe. Com o passar do tempo, professores do próprio Departamento de Matemática e do Departamento de Educação passaram a se disponibilizar a realizar palestras nessas atividades. O caminho estava aberto para o envolvimento na formação de professores de Matemática, o que ocorre até os dias atuais, após ter passado por atuação junto aos movimentos envolvendo Matemática, Educação Matemática e Educação.

Em relação ao meu interesse pela Geometria, este já havia ocorrido enquanto aluno de graduação, ao participar de Curso de Extensão em Geometria Analítica Vetorial, na Universidade Católica de Pelotas. Em 1974, fui à busca de novos conhecimentos na Universidade de São Paulo em Curso de Extensão Universitária para Docentes de Matemática no Curso Secundário, retornando à mesma instituição no verão do ano seguinte para o curso sobre Áreas e Volumes. Concomitantemente a esse último, participei na Universidade Mackenzie dos cursos de Espaços Métricos, Introdução ao Cálculo e Práticas de Ensino.

A participação em cursos envolvendo Geometria fez com que me fosse solicitado ministrar na FURG a disciplina Geometria Plana e Espacial no Curso de Matemática e, logo a seguir, a disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica, tendo ministrado essas disciplinas por várias ocasiões até o afastamento da UCPEL.

Na minha trajetória profissional como professor universitário atuando na Licenciatura em Matemática na FURG, nem sempre estive atuando em disciplinas de Geometria. Em 1980, no segundo semestre do ano em que ingressei nessa instituição pública, me foi solicitado assumir a disciplina de Geometria Diferencial, a qual era oferecida pela primeira vez ao Curso de Matemática. A razão para tal foi o fato de tê-la ministrado, no semestre anterior, na UCPEL, na qual essa disciplina havia sido implantada no Curso de Matemática. Um contato com esse ramo da Geometria me propiciou um interesse maior pela área uma vez que, durante a graduação havia tido contato unicamente com Geometria Euclidiana.

A dificuldade de encontrar bibliografia sobre Geometria Diferencial foi muito grande, tendo servido de estímulo para buscar informações pertinentes o que conduziu a participar em julho de 1980 da Escola de Geometria Diferencial na

Universidade Estadual de Campinas, instituição que me despertou interesse em realizar mestrado.

Fui professor dessa área do conhecimento até o ano de 1982, quando me afastei definitivamente da Universidade Católica de Pelotas, sendo liberado da FURG para realização do mestrado. Participei de eventos nacionais sobre a Matemática Superior tais como Colóquios de Matemática no Instituto de Matemática Pura e Aplicada no Rio de Janeiro, sendo que em um deles freqüentei o curso de Superfícies Mínimas com o professor Manfredo Perdigão do Carmo, o que mais me entusiasmou ao estudo das geodésicas, objeto principal de minha dissertação de mestrado.

Estava posto o interesse pela área de Geometria, especialmente pelas descobertas oriundas dos estudos de forma autodidata de Geometria Diferencial, quando tomei contato com a escassa bibliografia existente a época, toda formada por autores clássicos, como Valladares (1973), Netto (1977), Struik, (1978), Pogorélov (1977). Essa busca me fez ter outras percepções sobre o Cálculo e seu ensino, a partir de interpretações geométricas, e sobre a própria Geometria Analítica. Aspectos visuais e de representação no tratamento tanto da Geometria Plana quanto da Espacial foram relevantes para o tratamento da Geometria Analítica Espacial, especialmente no que diz respeito à imaginação, intuição e representação de superfícies e curvas no espaço, enfoque este que, usualmente, não era utilizado no tratamento analítico da Geometria, pelo menos nas instituições em que atuava e que, segundo minha vivência profissional, ainda não é feito atualmente, nas instituições com as quais interajo.

Posteriormente, com o envolvimento na disciplina, o ingresso no mestrado e buscas mais refinadas me levaram a autores mais diversificados como Abascal (1952), Auslander (1967), Barbosa (1975), Barr (1989), Carmo (1971, 1979), D'Ambrosio (1977), Domingues (1982), Fedenko (1981), Flory (1978), Fulton (1971), Hirsch (1970), Lima (1977), Lipschutz (1980), Malliavin (1975), Massey (1972), Millman (1977), Rocha (1987), Ryan (1991), Santaló (1976), Sommerville (1914), Tenenblat (1988), Thorpe (1978), Vasíliev e Gutenmájer (1980), Vranceanu (1964), Wolf (1964).

Ao concluir o mestrado em Matemática no ano de 1985 e retornar à FURG, a disciplina Geometria Diferencial, de imediato, retornou à minha responsabilidade uma vez que o professor que a ministrou durante meu afastamento, solicitou logo mudança de disciplina. Com a aquisição de novos conhecimentos e de bibliografias pertinentes e atuais, a disciplina recebeu um novo enfoque, agora com uma abordagem voltada à formação do professor. A passagem à divulgação desse novo conhecimento adquirido foi imediata e foram publicados artigos relacionados a Geometrias Não Euclidianas (LEIVAS, 1988, 1993; DUTRA e LEIVAS, 1996), sendo o último em conjunto com orientando de iniciação científica. Com o envolvimento cada vez maior com a formação do professor outros trabalhos foram publicados, dentre esses relaciono os que envolvem Geometria em suas diversas especificidades. (LEIVAS, 1994a, 1994b, 1995, 2000a, 2000b, 2000c, 2001, 2002a, 2002b, 2002c, 2003, 2004, 2006a, 2006b, 2007a, 2007b).

Divulgar trabalhos envolvendo Geometria em eventos regionais e nacionais foi um segundo caminho trilhado no meu fazer Geometria para a formação de professores em ação continuada (LEIVAS, 2001, 2007c), algumas vezes estabelecendo ligações com outras áreas do conhecimento tal como encontrada em Leivas e Cury (2008), divulgando uma atividade envolvendo Geometria Fractal com o uso de recursos tecnológicos. Em Leivas (2008), descrevi um experimento de ensino utilizando propriedades topológicas para uma classificação de quadriláteros. Uma possibilidade de uso de fractais para ilustrar dimensões decimais obtidas por meio da função logarítmica se encontra em Leivas (2007b). O uso de modelagem, explorando simetrias de funções do segundo grau, é descrito em Leivas (2007c), enquanto que atividades para exploração do espaço são relacionadas em trabalhos de iniciação científica em Leivas e González (2001).

Ao participar como ouvinte, como palestrante e como organizador de eventos, relacionados à Matemática e à Educação Matemática, obtive um conhecimento de Geometria e de seu ensino que me permitiram identificar, empiricamente, o quanto ainda há por se fazer para que um maior aprofundamento no conhecimento de diversos aspectos de Geometria, aliados às metodologias que propiciem ao professor ou futuro professor adquirir um gosto por essa área do conhecimento.

Dessa experiência adquirida em contatos com participantes de eventos como os Encontros Gaúchos de Educação Matemática (EGEM), os Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM), Encontros Regionais de Matemática, de Ensino e de Educação Matemática no Rio Grande do Sul (EREM) e em cursos regionais de ação continuada, foi possível perceber empiricamente que uma grande maioria de professores em exercício não desenvolve conteúdos de Geometria na escola básica por não ter vivenciado, na universidade, experiências que lhes dêem segurança para sua prática profissional. Essa falta de vivência é a mesma que ocorre nos cursos de Pedagogia, que formam os professores para atuarem com a disciplina Matemática na Educação Infantil e Séries Iniciais.

Em minha experiência profissional tenho observado que, nas discussões curriculares para tratar das disciplinas de conteúdo especificamente matemático evoca-se o *matemático*, aquele que tem um profundo conhecimento matemático e que fez mestrado e/ou doutorado em Matemática e, para tratar das disciplinas referentes às didáticas específicas e/ou metodologia do ensino, chama-se o *não matemático*, que mesmo licenciado em Matemática e até com mestrado e/ou doutorado na área de Educação, é visto como aquele que não tem aprofundamento sobre o conhecimento matemático, segundo o senso comum internamente aos departamentos de Matemática. Para Moreira e David (2007, p. 102), "[…] uma apresentação do conhecimento matemático absolutizado em sua forma compacta, abstrata e formal pode reforçar certos tipos de dificuldades que o professor vai eventualmente encontrar em sua prática efetiva.".

Defendo a necessidade de que o professor que forma professores para a escola básica deve reunir conhecimentos específicos de Matemática e conhecimentos de Educação Matemática, e que, sobretudo, seja aquele que propicie conexões entre diversas áreas do conhecimento matemático, que facilite ou promova inter-relações entre esses conhecimentos e aqueles da Matemática da escola básica, ou seja, minha pretensão é sugerir nesta tese uma Educação Matemática para a formação de professores, contemplando a Geometria de uma forma mais abrangente e atual do que aquela que vem sendo realizada junto aos cursos.

2.2 A GEOMETRIA NOS CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NO RIO GRANDE DO SUL

Para delimitar o problema de pesquisa, considerando minha experiência profissional com Geometria e seu ensino, busquei inicialmente verificar currículos ou projetos pedagógicos de Licenciaturas em Matemática de universidades gaúchas, disciplinas e conteúdos ofertados nessa área da Matemática em suas diversas vertentes.

Embora tenham sido solicitados os programas e/ou projetos, por e-mail, a coordenadores de cursos de Matemática de 14 universidades ou institutos que os ofereciam em 2007 no Estado do Rio Grande do Sul, cujos endereços haviam sido capturados da página do Ministério da Educação, apenas dois atenderam à solicitação de envio. Como esse retorno foi reduzido, optei por solicitar diretamente a alguns colegas, que atuavam em algumas das instituições, tendo havido o encaminhamento de quatro projetos. Outros dois foram capturados na Internet. Foi analisado um total de oito projetos.

Inicialmente caracterizo cada curso e a seguir descrevo o que foi ofertado de disciplinas de Geometria em cada um dos currículos ou projetos pedagógicos de Curso de Licenciatura em Matemática, por instituição. Foram levados em conta os seguintes indicadores para análise, escolhidos a partir do que vinha observando quando da realização de encontros de professores em diversas regiões do Estado e do desconhecimento do assunto por parte de um grande número de participantes de discussões e oficinas.

i) abordagem vetorial para a disciplina Geometria Analítica;

ii) oferta da disciplina Geometria Plana;

iii) oferta da disciplina Geometria Espacial;

iv) oferta de alguma disciplina que aborde Geometrias Não Euclidianas;

v) oferta de alguma disciplina que aborde Geometria fractal;

vi) oferta de alguma disciplina de Geometria com uso de recursos tecnológicos;

vii) oferta de alguma disciplina de Topologia e Geometria Diferencial;

viii) oferta de alguma disciplina que aborde teorias atuais para o ensino de Geometria, como a Teoria de van Hiele.

ix) indícios de utilização de aspectos de imaginação, intuição, visualização nas disciplinas analisadas.

Por uma questão ética, não analisei o currículo da instituição privada em que atuo, após a aposentadoria na instituição pública.

2.2.1 Universidade Federal do Rio Grande - FURG[2]

A Universidade Federal do Rio Grande localiza-se a 320 km da capital, Porto Alegre, no extremo sul do estado e oferece o Curso de Matemática – Licenciatura Plena. O curso funciona desde 1966 e apresenta uma entrada diurna nos anos pares e uma noturna nos anos ímpares, a fim de viabilizar a forma seriada anual, a qual norteia o projeto do curso, o que corresponde a uma característica diferenciada dos demais, que geralmente são semestrais, por créditos e por disciplinas. Na quarta série, o curso apresenta um elenco de disciplinas semestrais permitindo uma maior flexibilização na escolha de disciplinas optativas.

(i) Na primeira série consta a disciplina GEOMETRIA ANALÍTICA, com uma carga de cento e oitenta horas, seis horas-aulas semanais, na qual a abordagem é feita pelas ferramentas oriundas da Álgebra Linear.

(ii) Na segunda série, a disciplina GEOMETRIA I, com a mesma carga horária da Geometria Analítica, aborda tópicos de Geometria Plana de forma intuitiva, utilizando tecnologias, bem como fazendo uso da Teoria de van Hiele.

(iii) Tópicos de Geometria Espacial são encontrados na mesma disciplina citada em (ii) com abordagem similar.

[2] Disponibilizado pela secretaria do Curso em jan/2008.

(iv) Na terceira série, com a mesma carga horária das duas disciplinas anteriores, encontra-se GEOMETRIA II, na qual a Geometria Euclidiana é desenvolvida utilizando métodos dedutivos. Percebi no programa dessa disciplina um aprofundamento ou um aspecto matemático mais intenso sobre Geometria, em que é feita abordagem de Geometrias Não Euclidianas e implicações filosóficas oriundas de suas construções.

(v) Na disciplina GEOMETRIA I, localizada na segunda série, aparece explicitamente abordagem de Geometria Fractal.

(vi) O uso de recursos computacionais no tratamento de Geometria é encontrado no programa da disciplina GEOMETRIA I.

(vii) No elenco de DISCIPLINAS ELETIVAS, sem carga horária definida e sem as ementas explicitadas, são encontradas as disciplinas: TOPOLOGIA; GEOMETRIA DIFERENCIAL e TÓPICOS DE GEOMETRIA.

(viii) Na disciplina GEOMETRIA I são explicitados estudos sobre van Hiele, uso de transformações para o ensino de Geometria, bem como o uso de materiais concretos.

(ix) Ainda na disciplina GEOMETRIA I aparece abordagem de forma intuitiva no tratamento da Geometria, na medida em que o programa indica “uso de material concreto para o ensino de Geometria, manipulação de figuras, representação e planificação de sólidos, reconstrução e ressignificação de conceitos geométricos”.

Do que pude perceber, há uma preocupação em contemplar no currículo do curso uma componente de Geometria em suas várias dimensões. Nos tópicos apresentados nos programas e projetos fornecidos, não foi feita qualquer alusão aos termos imaginação, intuição e visualização.

2.2.2 Universidade Católica de Pelotas - UCPEL[3]

Ainda no extremo sul do RS, a Universidade Católica de Pelotas, localiza-se na cidade de Pelotas sendo vizinha da cidade de Rio Grande e tendo sido a mantenedora inicial do curso criado em Rio Grande, inicialmente pela Faculdade de Filosofia e Letras ligada à UCPEL. O curso funciona desde 1960. O curso passou por inúmeras reformulações curriculares e, atualmente, é organizado em oito semestres, variando de quatro a seis disciplinas em cada um deles, tendo disciplinas específicas de Geometria nos quatro primeiros, Fundamentos de Geometria, Geometria Euclidiana I, Geometria Euclidiana II e Geometria Analítica, respectivamente, nessa ordem.

(i) No quarto semestre é oferecida a disciplina GEOMETRIA ANALITICA com a carga horária de sessenta horas, semestral, não evidenciando qualquer abordagem diferenciada da Geometria Analítica tradicional, quando a ênfase é dada na abordagem algébrica. O elenco dos conteúdos de Geometria Analítica são aqueles comumente constantes de um grande número de cursos: matrizes, determinantes, ponto, reta e plano.

(ii) Tópicos de Geometria Plana são encontrados no desenvolvimento do programa da disciplina FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA oferecida no primeiro semestre do currículo, com uma carga de sessenta horas. Observei uma ênfase nas construções utilizando instrumentos geométricos com utilização em escalas. Ainda no programa há uma discussão sobre forma, conteúdo e importância da Geometria no conhecimento e pensamento matemático. No programa da disciplina GEOMETRIA EUCLIDIANA I, oferecida no segundo semestre com sessenta horas, percebi uma introdução à axiomatização euclidiana e a construção de figuras planas como o triângulo e a circunferência. Os teoremas de Tales e de Pitágoras também são abordados, bem como o cálculo de áreas de polígonos regulares e operações. É retomada também a questão do pensamento geométrico, a exemplo do que foi feito na disciplina anterior.

---

[3] Capturado da Internet em 05/01/2008

(iii) Embora na ementa da disciplina FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA não constem construções de figuras espaciais, no desenvolvimento do programa aparece construção de poliedros regulares e planificação. Na disciplina GEOMETRIA EUCLIDIANA II, localizada no terceiro semestre, com carga também de sessenta horas, não mais percebi indício de discussão sobre o ensino e a importância da Geometria, como encontrado nas disciplinas anteriores.

(iv) Não foi explicitada abordagem sobre Geometrias Não Euclidianas.

(v) Não foi encontrada alusão à Geometria Fractal.

(vi) Não foi encontrada alusão a abordagem de Recursos Tecnológicos para o ensino de Geometria.

(vii) No último semestre da grade curricular do curso, há indicação da disciplina ELEMENTOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL com uma ementa definida, porém não indicando carga horária e nem programa da disciplina.

(viii) Na disciplina METODOLOGIA DA MATEMÁTICA II também com a mesma carga horária, localizada no quinto semestre, ao tratar da Pratica de Ensino de Matemática no Ensino Médio, encontram-se temas ligados à Geometria nos últimos itens do programa, a saber - Análise de procedimentos metodológicos necessários ao desenvolvimento da Prática de Ensino de Matemática no Ensino Médio; discussão de tendências metodológicas contemporâneas no ensino de Matemática; planejamento, execução e aplicação de atividades com uso de material concreto em Matemática; demonstração das Áreas das Figuras Planas; operações com Polinômios utilizando o conceito de Área; produtos Notáveis. Esses temas são aqueles usualmente trabalhados no Ensino Fundamental. Entretanto trabalhar polinômios e produtos notáveis com abordagem geométrica é um indício da Geometria interferindo em outros temas do conteúdo matemático da escola, como forma de visualização de conceitos algébricos.

Na disciplina LABORATORIO DE MATEMATICA I, com sessenta horas e oferecida no sexto semestre, ao planejar atividades relacionadas ao ensino e à aprendizagem no Ensino Fundamental, encontram-se alternativas metodológicas para o ensino de tópicos diversos de Matemática, dentre os quais a importância do lúdico em sala de aula: jogos didáticos, desafios lógicos, brincadeiras matemáticas e curiosidades matemáticas envolvendo conteúdos de Álgebra, Aritmética e

Geometria; dedução das fórmulas para cálculo das áreas das principais figuras planas a partir da área do retângulo; cálculo de áreas utilizando o tangram; expressões algébricas - confecção de polígonos e representação algébrica dos seus respectivos perímetros, áreas e volumes - uso de canudos de refrigerante para confecção dos polígonos; operações com polinômios por meio do cálculo de áreas; produtos notáveis; demonstrações do Teorema de Pitágoras; confecção do geoplano retilíneo e circular para trabalhar conceitos relacionados a Geometria Plana, como ângulos, polígonos, perímetro, áreas, números de diagonais, soma dos ângulos internos de um polígono, elementos da circunferência, polígonos inscritos na circunferência; dobraduras para explorar conceitos relacionados com frações, Geometria plana e espacial; confecção de quebra-cabeças geométricos – Tangrans; estudo de simetria através de espelhos. Construção do caleidoscópio.

(ix) Embora tenha havido preocupação aparente em distribuir Geometria ao longo do curso, como no caso das construções pelo desenho geométrico em Fundamentos de Geometria, não ficaram evidentes, por exemplo, aspectos de Geometria Descritiva por quaisquer das disciplinas, muito embora haja explicitação da utilização de visualização ao tratar de "Funções Linear e Quadrática: Aplicação, visualização e construção" na disciplina Laboratório de Matemática II.

Até onde foi possível perceber do projeto de curso retirado da Internet houve uma preocupação em distribuir os conteúdos de Geometria ao longo dos semestres.

2.2.3 Universidade Federal de Santa Maria - UFSM[4]

A UFSM localiza-se na região central do estado oferecendo o Curso de Licenciatura em Matemática diurno e noturno e o bacharelado diurno, ambos reformulados e implantados em 2001, mas tendo iniciado em tempo integral em 1965. Atualmente, no diurno, os alunos ingressam no curso de Matemática – Núcleo Comum e, após a integralização das disciplinas dos quatro primeiros semestres,

[4] Capturado da internet em 19/12/2007 e atualizado em 09/08/2008

optam entre licenciatura ou bacharelado. A duração média dos cursos diurno e noturno é de oito e nove semestres. Pela apresentação do curso, capturado da internet, percebe-se uma intensa ligação entre o curso de Licenciatura e Bacharelado, havendo um núcleo básico de dois anos, comum para a formação de bacharéis e licenciados, composto por disciplinas de formação matemática. A partir do 5º semestre ocorre uma bifurcação visando atender as especificidades do perfil de formação do bacharel e do licenciado, separadamente.

(i) Com 60 horas teóricas e 30 práticas, é oferecida a disciplina GEOMETRIA ANALÍTICA I-A, com o objetivo de utilizar técnicas algébricas para resolver problemas de Geometria Analítica, desenvolvendo a intuição e a visualização espacial de figuras. A primeira unidade aborda vetores.

(ii) Existe no programa a disciplina GEOMETRIA PLANA E DESENHO GEOMÉTRICO, com uma carga horária de noventa horas. Os objetivos da disciplina explicitam a ênfase no processo lógico-dedutivo e nos aspectos da aplicabilidade destes na resolução de problemas teóricos e práticos, bem como resolução de problemas de Geometria Euclidiana, utilizando régua e compasso, justificando logicamente a solução adotada.

(iii) É oferecida a disciplina TÓPICOS E ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL, também com 90 horas, tendo como objetivos, além daqueles de GEOMETRIA PLANA E DESENHO GEOMÉTRICO, intuir e visualizar figuras no espaço, resolver problemas de Geometria Espacial utilizando técnicas de projeções.

(iv) Não há evidências de que sejam abordados tópicos de Geometrias Não Euclidianas.

(v) Não há evidências de que Geometria Fractal esteja presente em alguma disciplina do curso.

(vi) Não há evidências de que Recursos Tecnológicos estejam presentes em disciplinas que abordam Geometria.

(vii) Disciplinas de Topologia e Geometria Diferencial não constam do programa do curso.

(viii) Não foi encontrada nas disciplinas, explicitamente, alguma teoria de ensino de Geometria. Entretanto, na disciplina TÓPICOS E ENSINO DE

GEOMETRIA ESPACIAL, encontra-se: Elaborar e propor alternativas didático-pedagógicas para o ensino de conteúdos constantes na ementa da disciplina, a fim de melhorar o processo. Em uma unidade da disciplina INSTRUMENTAÇAO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA I, lê-se "O ENSINO DA GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL" e, no programa da disciplina INSTRUMENTAÇAO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA II, encontra-se "GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO".

(ix) Intuição e visualização de figuras no espaço aparecem na disciplina TÓPICOS E ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL, uma vez que são abordados tópicos de Geometria Descritiva no programa dessa disciplina e construções com régua e compasso. Além dessa, em GEOMETRIA ANALÍTICA I-A consta no objetivo da disciplina "Utilizar técnicas algébricas para resolver problemas da Geometria Analítica, desenvolvendo a intuição e a visualização espacial de figuras."

2.2.4 Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS[5]

A UFRGS é a maior instituição do Estado do Rio Grande do Sul e também é a mais tradicional na formação em Matemática, atualmente oferecendo tanto a Licenciatura, diurna e noturna, quanto o Bacharelado. No primeiro semestre a oferta para ingresso é diurna e no segundo semestre, é noturna. A estrutura do curso é por disciplinas de natureza científico-cultural, oferecidas pela Faculdade de Educação, cada uma delas com carga horária de 30 horas, totalizando 300 horas, dentre as quais Tendências em Educação Matemática; disciplinas de natureza científico-cultural, oferecidas pelo Instituto de Matemática e Instituto de Física, dentre as quais, Cálculo e Geometria Analítica I-A, Cálculo e Geometria Analítica II-A, cada uma com a carga horária de 90 horas. Dentre as disciplinas com uma carga horária de 60 horas encontram-se Geometria I, Geometria Analítica B, Computador na Matemática Elementar, Geometria II; disciplinas de natureza prática tais como Laboratório de Prática de ensino-aprendizagem em Matemática I, Laboratório de Prática de ensino-aprendizagem em Matemática II e Laboratório de prática de ensino-aprendizagem

[5] Disponibilizado pelo coordenador de curso em 08/01/2008.

em Matemática III, com 120 horas cada e Educação Matemática e Tecnologia, com 60 horas.

(i) O currículo apresenta as disciplinas CÁLCULO E GEOMETRIA ANALÍTICA I-A, CÁLCULO E GEOMETRIA ANALÍTICA II-A e GEOMETRIA ANALÍTICA B. É evidenciado o tratamento vetorial dado à Geometria Analítica.

(ii) A disciplina GEOMETRIA I, com quatro créditos indica um tratamento tradicional da Geometria Euclidiana por pontos, retas e ângulos.

(iii) O tratamento espacial para Geometria Euclidiana é feito na disciplina GEOMETRIA II, também com quatro créditos.

(iv) Não apareceu indício de tratamento de Geometrias Não Euclidianas.

(v) Encontra-se o tema fractal sendo abordado na disciplina COMPUTADOR NA MATEMÁTICA ELEMENTAR I.

(vi) Na disciplina COMPUTADOR NA MATEMÁTICA ELEMENTAR I é feito o desenvolvimento de conceitos e relações matemáticas no ambiente LOGO. Na disciplina EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIA é feita análise e proposta de utilização de diferentes softwares para o ensino e a aprendizagem da Matemática na escola, acompanhada de prática pedagógica.

(vii) Nem no elenco de disciplinas optativas aparecem conteúdos de Topologia e Geometria Diferencial de forma explicita.

(viii) Na disciplina GEOMETRIA II são utilizadas as transformações geométricas no tratamento de Geometria. Na disciplina TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA é realizado estudo das principais tendências teórico–metodológicas de pesquisa em Educação Matemática considerando suas implicações na ação pedagógica do docente.

(ix) No oitavo semestre do curso, a disciplina de oito créditos denominada LABORATÓRIO DE PRÁTICA DE ENSINO-APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA aborda a Geometria Sintética no plano e no espaço com a preocupação de realizar preparação, execução e avaliação de experiências de prática de ensino de Geometria.

2.2.5 Universidade de Passo Fundo - UPF[6]

O curso de Licenciatura em Matemática da Universidade de Passo Fundo, criado em 1973, ao norte do Estado do Rio Grande do Sul, atendendo ao pedido do pesquisador, encaminhou ementas e conteúdos programáticos das disciplinas que envolviam Geometria. No total foram três disciplinas, sem especificação de carga horária e nem de localização no quadro de seqüência lógica. Na página do curso, foram localizados os níveis em que as disciplinas são oferecidas. Foi encontrado no nível um a disciplina Desenho Geométrico e no elenco de disciplinas optativas, para escolher 44 créditos, foram encontrados no nível oito, duas disciplinas: Geometria Descritiva e Projetiva e a disciplina Perspectiva. Não foi encontrada a disciplina encaminhada com ementa e programa, denominada Geometria Descritiva. Talvez esse fato seja um indicativo de certa discrepância existente entre o que está posto nos projetos de curso e o que é efetivamente desenvolvido e que não é raro de ser detectado em conversas informais com colegas de várias instituições.

(i) Geometria Analítica Plana e Geometria Analítica Espacial são abordadas na disciplina GEOMETRIA ANALÍTICA, constatando-se pelos conteúdos programáticos apresentados que essa é desenvolvida de forma tradicional, sem a utilização das ferramentas da Álgebra Linear.

(ii) Na disciplina GEOMETRIA EUCLIDIANA é feito o tratamento usual, com introdução pelos elementos primitivos, passando aos sistemas de medidas.

(iii) Conteúdos de Geometria Espacial são desenvolvidos na disciplina GEOMETRIA EUCLIDIANA.

(iv) Tópicos de Geometrias Não Euclidianas não encaminhados como componente de Geometria no currículo do Curso ou contemplados em alguma disciplina.

(v) Da mesma forma, também o item Fractais não foi encaminhado como componente de Geometria no currículo do Curso ou contemplado em alguma disciplina.

---

[6] Disponibilizado pela secretaria do Curso em 06/01/2008, atendendo solicitação feita pelo coordenador à docente que atua na instituição.

(vi) O uso de recursos tecnológicos não foi encaminhado como componente de Geometria no currículo do Curso ou contemplado em alguma disciplina.

(vii) Topologia e Geometria Diferencial não foram encaminhados como componentes de Geometria no currículo do Curso ou contemplados em alguma disciplina.

(viii) Não aparecem indícios de estudo de teorias de ensino de Geometria no currículo do Curso.

(ix) Foi possível perceber que o currículo do curso tenta preservar aspectos de GEOMETRIA DESCRITIVA e DESENHO GEOMÉTRICO o que possibilitam, talvez, desenvolvimento de aspectos de visualização, pois ao fazer representações e construções, o aluno está elaborando representações de conceitos que já estão elaborados em sua mente. Entretanto, esses termos não são explicitados em nenhum momento tanto na ementa quanto no programa.

2.2.6 Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUC-RS[7]

A PUC-RS com sede na capital do Estado do Rio Grande do Sul, tem seu projeto de Curso de Licenciatura em Matemática distribuído em oito níveis semestrais, em média com 20 créditos por nível, tendo sido implantado em forma noturna em 1985. As disciplinas são categorizadas em aulas teóricas, práticas ou atividades especiais. Nos três primeiros semestres, o projeto de curso apresenta as disciplinas denominadas INTEGRADORAS, tendo por objetivo proporcionar ao aluno experiências que sejam significativas na construção dos conteúdos de Matemática básica, interligando as áreas específicas com o Ensino Fundamental e Médio.

(i) Não foi encontrada qualquer disciplina explicitando a Geometria Analítica, embora apareça a Álgebra Linear como ferramenta para outras disciplinas e conteúdos não especificados.

[7] Disponibilizado por professor do corpo docente do Curso em 10/07/2007.

(ii) Nas disciplinas GEOMETRIA I e II são abordados tópicos de Geometria Plana bem como na DISCIPLINA INTEGRADORA I e II, que buscam utilizar metodologias alternativas que envolvem estas disciplinas e as demais constituintes do primeiro nível do curso.

(iii) Em GEOMETRIA II são encontrados tópicos de retas e de planos no espaço, bem como de poliedros, com o objetivo de desenvolver a visão espacial para a compreensão e construção de figuras aplicadas no mundo real.

(iv) Não foi encontrado qualquer aspecto de Geometrias Não Euclidianas nas disciplinas que compõem a grade curricular.

(v) Não foi encontrado qualquer aspecto de Geometria Fractal nas disciplinas que compõem a grade curricular.

(vi) Nas disciplinas INFORMÁTICA APLICADA À MATEMÁTICA I e II são desenvolvidos conceitos básicos de informática na Educação e Informática, aplicada ao processo de ensino e de aprendizagem da Matemática.

(vii) Não foi encontrado qualquer aspecto de Topologia e nem de Geometria Diferencial, quer como disciplina específica ou implicitamente nos conteúdos de outras disciplinas.

(viii) Não foi evidenciada qualquer tendência específica ou novas teorias para o ensino de Geometria.

(ix) Em DESENHO GEOMÉTRICO PARA MATEMÁTICA são utilizados os instrumentos convencionais para construções geométricas

2.2.7 Universidade do Vale do Rio dos Sinos - UNISINOS[8]

A UNISINOS tem sua Licenciatura em Matemática desde 1964 e possui tradição na realização de encontros regionais de Educação Matemática. O Curso é semestral e o projeto de curso não foi localizado na internet. Foi fornecido o elenco

[8] Fornecido pelo coordenador do curso atendendo solicitação de professora da instituição.

de disciplinas envolvendo Geometria. São apresentadas nos programas das disciplinas as competências a serem desenvolvidas, os conhecimentos que são esperados para aquisição pelos estudantes e as metodologias, técnicas e recursos de ensino e aprendizagem.

(i) Tratamento de vetores é o enfoque utilizado para o desenvolvimento da disciplina GEOMETRIA ANALÍTICA no plano.

(ii) No primeiro semestre do currículo consta a disciplina GEOMETRIA PLANA, com 60 horas, em que se percebe o desenvolvimento de Geometria Euclidiana Plana seguindo os aspectos dedutivos tradicionais, a começar pelos conceitos primitivos de ponto e reta.

(iii) No terceiro semestre, na disciplina GEOMETRIA ESPACIAL, com uma carga de 60 horas e 15 horas práticas, ocorre continuação do estudo iniciado na disciplina anterior, partindo posteriormente para o espaço.

(iv) A disciplina GEOMETRIA PLANA apresenta no último item do programa “exemplos de geometrias não euclidianas”.

(v) Nos programas fornecidos não se encontrou aspectos de fractais.

(vi) Nas metodologias empregadas para o desenvolvimento dos conteúdos de GEOMETRIA PLANA é indicada “Utilização de tecnologias, seu exame e discussão sobre sua adequação para ensino e aprendizagem”, bem como a apropriação de recursos tecnológicos na disciplina GEOMETRIA ESPACIAL. O uso de recursos tecnológicos, como a Web, é feito na disciplina de GEOMETRIA ANALÍTICA.

(vii) O programa não contempla Topologia nem Geometria Diferencial.

(viii) Não ficaram evidentes abordagens de tendências atuais para o ensino de Geometria.

(iv) Não houve evidência de uso de intuição, visualização e imaginação no desenvolvimento das disciplinas fornecidas.

2.2.8 Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - UNIJUI[9]

O projeto pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática tem a duração de quatro anos ou oito semestres, de forma regular noturna, estando em funcionamento desde 1998. As ofertas obedecem a uma nova dinâmica, sendo algumas componentes curriculares oferecidas de forma concentrada em janeiro, fevereiro, julho e componentes oferecidas no noturno, nos meses de março a junho e agosto a dezembro. Ainda mais, o projeto de curso apresenta um diferencial que é a possibilidade de o aluno cursar algumas atividades previstas de forma orientada e não-presencial, em proporções adequadas a cada componente curricular, com o objetivo de estimular a leitura, reflexão e elaboração de conceitos pelos alunos, intensificando a sua preparação para a atividade profissional futura.

O elenco de disciplinas é distribuído em oito semestres letivos e todas as disciplinas possuem carga horária de 60 horas-aulas.

(i) No segundo semestre consta a disciplina GEOMETRIA ANALÍTICA e VETORES, utilizando a ferramenta “vetores” para o estudo dos conceitos de Geometria Analítica e posteriores aplicações em situações práticas em Física e Matemática. O mesmo para a disciplina GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESPAÇO, no terceiro semestre. O plano explicita que os conteúdos da disciplina são úteis para disciplinas posteriores, que estes conteúdos geralmente são ausentes na educação básica e por isto a disciplina é importante para os professores.

(ii) GEOMETRIA I, no primeiro semestre, aborda a morfologia plana e o estudo axiomático dessa Geometria e o projeto de curso explicita que a componente curricular utiliza as demonstrações nas discussões dos conceitos, priorizando o raciocínio e estabelecendo relações com o cotidiano.

(iii) GEOMETRIA II, no segundo semestre também, trata da Geometria Espacial. Percebe-se, a exemplo da disciplina anterior, que a abordagem é feita pelo método dedutivo.

(iv) Não há tratamento de Geometrias Não Euclidianas.

---

[9] Disponibilizado pela diretora do Departamento de Física e Matemática em 31/05/2007.

(v) Não há abordagens de fractais nas disciplinas.

(vi) O uso de tecnologias de informação e comunicação é utilizado como recurso didático do componente curricular GEOMETRIA I e como ferramenta para a Matemática. Em MATEMÁTICA COMPUTACIONAL I e II são utilizados e analisados programas computacionais específicos para a elaboração de atividades destinadas ao ensino da Matemática na Educação Básica, sem, contudo, explicitar o uso em Geometria.

(vii) Não aparecem tópicos nem de Topologia e nem de Geometria Diferencial de forma explicita.

(viii) Não houve observação de tratamento de tendências para o ensino de Geometria, embora sejam contempladas tendências em Educação Matemática.

(ix) Não foi observado tratamento de visualização, intuição e imaginação.

Nesse levantamento realizado junto a oito universidades gaúchas que oferecem o curso de Licenciatura em Matemática foi constatado que em apenas um dos projetos de curso não existe a disciplina de Geometria Analítica, não havendo indicativos de que esse conteúdo tenha sido absorvido por outras disciplinas, como acontece com o Cálculo e Geometria Analítica I-A e Cálculo Geometria Analítica II-A no projeto da UFRGS. Em apenas dois projetos aparecem itens que contemplam minimamente Geometrias Não Euclidianas. Dois programas tratam de Geometria Fractal e cinco fazem uso de recursos tecnológicos para o ensino, nem sempre explicitando que sejam para a Geometria. Três cursos trazem indicativos de abordagem de Topologia e Geometria Diferencial e quatro indicam tratamento de tendências atualizadas para o ensino. Por último, quatro das instituições dão indícios de utilizarem alguma forma de visualização, por exemplo, na planificação de sólidos geométricos e até mesmo na construção de modelos desses, o que ocorre tanto nas disciplinas de Geometria Plana e Espacial quanto em Geometria Analítica. Algumas vezes são oferecidos tópicos de Geometria Descritiva e de Desenho Geométrico, que parecem ser possibilidades intrínsecas de desenvolver habilidades de visualização, ao fazer uso de instrumentos de desenho. Não foi percebido qualquer indicativo de que imaginação, intuição e visualização sejam elementos norteadores do ensino de Geometria.

O quadro a seguir apresenta uma síntese dos descritores que possibilitaram a análise feita acima, sobre a existência de aspectos de Geometria constantes nos currículos dos oito cursos, com as respectivas ocorrências indicadas pela letra X.

Descritores	***FURG***	***UCPEL***	***UFSM***	***UFRGS***	***UPF***	***PUC-RS***	***UNISINOS***	**UNIJUI**
I- a disciplina Geometria Analítica apresenta abordagem vetorial	X	X	X	X	X	---	X	X
ii- oferta da disciplina Geometria Plana	X	X	X	X	X	X	X	X
iii- oferta da disciplina Geometria Espacial	X	X	X	X	X	X	X	X
iv- oferta de alguma disciplina que aborde Geometrias Não Euclidianas	X	---	---	---	---	---	X	---
v- oferta de alguma disciplina que aborde Geometria Fractal	X	---	---	X	---	---	---	---
vi- oferta de alguma disciplina de Geometria com uso de recursos tecnológicos	X	---	---	X	---	X	X	X
vii- oferta de alguma disciplina de Topologia e Geometria Diferencial	X	X	---	X	---	---	---	---
viii- oferta de alguma disciplina que aborde tendências atualizadas como a teoria de van Hiele	X	X	X	X	---	---	---	---
ix- aparecem indícios de utilização nas disciplinas de aspectos de intuição, visualização e imaginação	---	X	X	X	---	X	---	--

Quadro 1 – Síntese da análise instituições x descritores

2.3 O QUE É POSSÍVEL APONTAR NUMA PRIMEIRA REVISÃO DA LITERATURA SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA NA LICENCIATURA DE MATEMÁTICA.

A presença da Geometria nas propostas curriculares das Licenciaturas em Matemática merece, no meu entender, atenção especial tanto por parte de investigadores matemáticos como por investigadores do ensino e da aprendizagem de Matemática nos diversos níveis. Diz Alsina (1999, p. 65, citado por Costa, 2000, p. 159): *"não servem nem os elementos de Euclides, nem os tratados de Bourbaki, [...] A geometria no ensino da Matemática deve ser a geometria útil para todos: o conhecimento matemático do espaço".*

Para Hilbert e Cohn-Vossen (1932), há uma tendência na investigação científica à *abstração,* a qual visa cristalizar as relações lógicas próprias do material em estudo e uma tendência à *compreensão intuitiva,* que concretiza de forma mais imediata uma convivência com os objetos de estudo.

> Quanto à geometria, em particular, a tendência abstrata tem levado à magníficas teorias sistemáticas de Geometria Algébrica, de Geometria Riemanniana e de Topologia; essas teorias fazem uso extensivo de raciocínio abstrato e cálculo simbólico no sentido de álgebra. Apesar disso, ainda é tão verdadeira hoje como nunca foi que compreensão intuitiva desempenha um papel importante em geometria. E essa intuição concreta é de grande valor, não só para o pesquisador, mas também para quem deseja estudar e avaliar os resultados de pesquisa em geometria. (HILBERT, 1932, p. iii)

Em relação aos estudos sobre o ensino de Geometria, levantamento realizado por Andrade e Nacarato (2004) aponta que 20% dos trabalhos dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM) são sobre esse tema, o que modifica, na opinião dos autores, o discurso do seu abandono, pelo menos se formos considerar o âmbito da pesquisa sobre o ensino de Geometria. Em parte concordo com os autores, muito embora estes dados levantados possam caracterizar a pesquisa sobre o ensino de Geometria na formação continuada e não na formação inicial de professores de Matemática. Entendo que a ação continuada não produz resultados imediatos para a grande maioria dos professores, primeiramente por não haver uma cultura de o professor, especialmente o da escola básica, participar de tais ações, principalmente pela falta de incentivo dos governantes em promovê-la ou incentivar a participação docente. Em segundo lugar, observo nos eventos, tanto regionais quanto nacionais, uma reduzida participação destes profissionais, acreditando que seja pela falta de recursos financeiros para sua participação, bem como pela elevada carga horária a que os professores da escola básica são submetidos, o que dificulta liberação pelas direções.

A pesquisa de Andrade e Nacarato aponta a tendência de visualização e representação pelo uso da experimentação e, também, de uma Geometria experimental como emergentes para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental, envolvendo aproximadamente 48% dos trabalhos apresentados nos eventos mencionados. Ainda mais, mostra que há resultados de pesquisa sobre o ensino de Geometria na educação básica, que já estão apontando para a existência de discussões no contexto de provas, argumentações e demonstrações.

Por outro lado, em pesquisas sobre a aprendizagem humana, especialmente naquelas em que há implicações relativas à formação de conceitos matemáticos, como as de Skemp (1993, p. 19), encontra-se que “a principal atitude exigida para a Matemática seria a de manipular e formar idéias abstratas; e coincidiria esta capacidade estreitamente com o que entendemos como inteligência?” Lembramos que “inteligente”, para o autor, corresponde ao significado dado por Vernon, “acumulação total dos planos ou esquemas mentais construídos por meio da interação do indivíduo com seu meio na medida em que lhe é permitido”. (SKEMP, 1993, pp. 20-21). Assim, esquemas significam o mesmo que estruturas conceituais.

A Matemática é um bom exemplo desse tipo de inteligência, pois ela fornece clareza nos desenvolvimentos de esquemas e também pelas aplicações matemáticas, por meio de suas poderosas ferramentas, em diversas atividades em ciências, atividades essas que caracterizam os objetos em mais funcionais do que perceptivos. Abstrair, para Skemp, significa uma atividade pela qual nos tornamos conscientes de similaridades que ocorrem cotidianamente em nossas experiências, levando a uma abstração, como no caso do ato de abstrair, capacitando os indivíduos para o reconhecimento de novas experiências com propriedades similares, o que conduz ao conceito do objeto experienciado e, a partir disso, a imaginação do objeto pode ser invocada pela mente.

Para Skemp (1993, p. 26) “um conceito para ser formado exige certo número de experiências que tenham algo em comum”, sendo somente após, pelo uso da linguagem escolhida, que aparece sua denominação. Para o autor, há uma diferença sutil entre o conceito, que é uma idéia, e o seu nome, como é o caso de números e numerais, na linguagem aritmética.

De forma similar, pode-se pensar na construção do conceito de triângulo como idéia geométrica e objeto triangular, como os blocos lógicos, por exemplo. Os Blocos lógicos mais convencionais são construídos, em geral, com madeira, mas podem ser emborrachados ou até mesmo de papel. É comum o uso da denominação de triângulo verde, vermelho, azul ou amarelo pelos professores que fazem uso desse recurso didático. Entretanto, essas peças apresentam espessuras completamente distintas quando construídas com os materiais acima. Questiono se esse uso permitirá a elaboração do conceito de triângulo como um polígono. Se as peças forem chamadas de triângulos, isso significa que é possível ter triângulos de várias espessuras, o que não conduz ao conceito de triângulo que estará sendo construído com o uso desse material didático, inclusive podendo-se chegar ao conceito de triângulo como uma superfície prismática e não como linha poligonal, cuja percepção visual só é possível numa representação plana de tal conceito abstrato. Faço um segundo questionamento - se o triângulo for construído com palitos de picolé ou com canudinhos, a aprendizagem do conceito de triângulo ocorrerá da mesma forma anterior?

Os questionamentos que aqui coloco servem para exemplificar que apenas o recurso didático com material alternativo não é suficiente para a construção de um conceito, se não houver um conhecimento do conteúdo em toda a sua intensidade e plenitude, como é o caso de distinguir o objeto triangular de um triângulo, o objeto plano do espacial, as linhas das regiões. Dessa forma, reforço a impossibilidade de construir, a partir de um plano, um triângulo por ser este um conceito presente no mundo das idéias abstratas. Os conceitos matemáticos são considerados muito mais abstratos do que aqueles que ocorrem no cotidiano de nossas vidas e assim, para Skemp (1993, p. 31) “a comunicação dos conceitos matemáticos é muito mais difícil, tanto para quem comunica quanto para quem recebe a comunicação”.

É possível que, por essa razão, muitas pessoas não consigam aprender Matemática quando se parte da abstração pura de conceitos não formados ou oriundos de diferentes experiências visuais, manipulativas, de linguagem e de pensamento. Acreditando nisso, é que defendo o uso de experiências concretas, entendendo por experiência concreta toda atividade desenvolvida pelo indivíduo que o conduza à apropriação de um conceito. Como exemplo, pode ser feito uma construção do conceito de grupo por simetrias de triângulos e de quadrados, a partir de modelos de regiões triangulares e quadradas. Tal construção pode ser ancorada na importância que Skemp atribui para o ensino de Geometria aos experimentos realizados por Piaget, Dienes, Gattegno, Fischbein, Freudenthal e van Hiele. Segundo Nasser (1992, p. 71)

> Esta relação entre as fases de van Hiele e modos de atividades mentais de Skemp lança alguma luz sobre a forma como as fases são tratadas na estrutura cognitiva. Constitui uma boa contribuição para o alcance das aplicações da teoria de van Hiele, uma vez que não houve suficiente investigação sobre as fases de aprendizagem até agora.

Na 21ª conferência do Grupo de *Psychology of Mathematics Education* (PME), ocorrida em 1997, e no PME 22, em 1998, ocorreram diversificações de interesses a respeito do tema visualização, sendo que o uso de computadores e softwares na aprendizagem e no uso de visualização ganhou espaço ao ser dirigido para os aspectos voltados ao pensamento geométrico, incluindo-se aí o interesse pela teoria semiótica focando o tema.

A influência das tecnologias computacionais surge no PME 23, em Haifa com trabalhos sobre visualização como veículo significativo para resolver problemas em álgebra. Parzysz, citado por Presmeg (apud Gutiérrez, Boero, 2006), enfatizou, na ocasião, que visualização pode ser útil não somente em tópicos visuais como Geometria e Trigonometria, mas também em Álgebra. São feitas explanações sobre as vantagens de utilizar softwares computacionais que estimulam visualização dinâmica. Os processos visuais, auxiliados pelo computador, motivam a obter facilmente diferenças entre vários tipos de problemas algébricos. Nesse PME, muitos trabalhos estimularam o uso de visualização por meio de Geometria Dinâmica.

O levantamento realizado em universidades gaúchas mostrou que apenas 25% dos currículos analisados apresentam alguma alusão ao tema fractal, sem merecer uma atenção especial. Da mesma forma, recursos tecnológicos merecem alguma atenção em 50% dos currículos analisados, sendo que alguns deles apresentam especificação a temas de Geometria. Muitos abordam a ferramenta computacional por si mesma, sem especificar temas a que esteja relacionada. Em apenas um dos cursos é explicitada a linguagem *Logo*.

A respeito do uso de tecnologias computacionais, Almeida (2000, p. 20) diz que “muitos dos desafios enfrentados atualmente têm a ver com a fragmentação do conhecimento, que resulta tanto de nossa especialidade quanto, e principalmente, do processo educacional do qual participamos”. A esse respeito temos nos reportado à cultura que parece se tornar cada vez mais enfraquecida na formação do professor de Matemática, pelo fato de que, nessa formação, continua a ser ensinada a Matemática originária dos gregos, sem incorporação de novos conhecimentos adquiridos pela humanidade ao longo dos tempos.

Embora os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental estejam postos desde 1998, ainda há muito desconhecimento de suas orientações para o ensino básico. “As tecnologias da comunicação e informação, além de serem veículos de informações, possibilitam novas formas de ordenação da experiência humana, com múltiplos reflexos, particularmente na cognição e na atuação humana sobre o meio e sobre si mesmo” (BRASIL, 1998, p. 135). Dessa forma, o uso das tecnologias na sala de aula deve estar diretamente ligado às concepções de ensino e de aprendizagem estabelecidas no Projeto Político Pedagógico das escolas e do qual o professor deve ser um dos construtores, a fim de que possa se adequar, de se preparar e executar o que lhe compete.

Concordo com o documento em relação ao uso de computador, quando afirma que essa utilização permite criar ambientes de aprendizagem que fazem surgir novas formas de pensar e aprender, uma vez que

> [...] possibilita a problematização de situações por meio de programas que permitem observar regularidades, criar soluções, estabelecer relações, pensar a partir de hipóteses, entre outras funções;
> [...] favorece a aprendizagem cooperativa, pois permite a interação e a colaboração entre alunos (da classe, de outras escolas ou com outras pessoas) no processo de construção de conhecimentos, [...];
> [...] favorece aprendizagem ativa controlada pelo próprio aluno [...];
> [...] desenvolve processos meta cognitivos, na medida em que o instrumento permite pensar sobre os conteúdos apresentados e as suas formas de representação, levando o aluno a “pensar sobre o pensar”;
> [...] oferece recursos rápidos e eficientes [...] (BRASIL, 1998, p. 147).

Parece que uma mudança necessária na escola é formar uma concepção do que significa a Informática na Educação e qual o uso do computador no processo pedagógico. Para Valente (2002), o computador pode se usado na escola de duas formas: como meio de transmissão de informações e para a construção de conhecimentos. No primeiro caso, há uma conservação da prática pedagógica que ainda perdura na grande maioria das escolas e, no segundo caso, ainda há uma falta de preparação, muito grande, dos profissionais para desempenhar uma função inovadora na Educação.

Para Freire (1977, p. 26) “a ação de levar, de transferir, de entregar, de depositar algo em alguém, ressalta nele, uma conotação indiscutivelmente mecanicista”, muito embora esta ação possa implicar em conhecimento, mas isto é feito de forma que o indivíduo receba o conhecimento pronto e acabado, segundo a visão do “transmissor” e essa é a ação promovida pelo primeiro uso do computador apontada por Valente (2002) no parágrafo anterior, o que denomina de “paradigma instrucionista”.

Em relação ao segundo uso do computador, Valente (2000) encontra guarida em Papert (1994, p. 124):

> O sufixo – *ismo* é um marcador do abstrato, e sua presença no título reflete minha mudança no estilo intelectual. A palavra *instrucionismo* visa significar algo muito diferente de *pedagogia*, ou a arte de ensinar. Ela deve ser lida num nível mais ideológico ou pragmático como expressando a crença de que a via para uma melhor aprendizagem deve ser o aperfeiçoamento da instrução – se a Escola é menos que perfeita, então sabemos o que fazer: ensinar melhor. O Construcionismo é uma filosofia de uma família de filosofias educacionais que nega esta “verdade óbvia”. Ele não coloca em dúvida o valor da instrução como tal.

Para Papert (1994), um objetivo do construcionismo[10] é ensinar para que haja uma aprendizagem mais eficiente com um mínimo de ensino. Assim, o papel do professor é menor do que o do aluno e isto é um choque nas concepções dos professores, em sua grande maioria, que se julgam detentores do conhecimento.

No que diz respeito ao uso de tecnologias computacionais e a uma inter-relação entre conteúdos matemáticos, uma associação entre Álgebra e Geometria, em atividades para o Ensino Fundamental e Médio de Matemática tem sido apresentada em livros didáticos, artigos e dissertações. Hellmeister e Galvão (1998) relatam atividades desenvolvidas com professores da rede pública paulista, em um programa de formação continuada, com o objetivo de modelar, por meio de peças coloridas de cartolina, expressões algébricas de 1º e 2º graus, utilizadas, posteriormente, para resolução de equações e fatoração de trinômios de segundo grau.

---

[10] O termo construcionismo tratado aqui, apóia-se nas idéias de Papert e Harel, encontradas no livro **Constructionism**. New Jersey: Ablex Publishing Corporation, 1991.

Groenwald et al. (1999) mencionam um projeto desenvolvido em escolas públicas de uma cidade da Grande Porto Alegre, trabalhando com materiais manipulativos para a introdução de operações com polinômios. Mottin (2004) faz uso de recursos didático-pedagógicos para a resolução de problemas que envolvem produtos notáveis e Teorema de Pitágoras, em uma 8ª série de uma escola privada do interior do Rio Grande do Sul. Essas propostas levam em conta, especialmente, a possibilidade de utilizar mais de uma representação para conceitos matemáticos, aproveitando operações e propriedades já conhecidas pelos alunos para introduzir novos entes matemáticos. No entanto, nesses casos exemplificados e em outros que seguem a mesma orientação, os conteúdos de Álgebra são aqueles trabalhados no Ensino Fundamental e os geométricos são os tradicionalmente estudados em Geometria Plana.

Acredito que há muitas outras possibilidades de relacionar Álgebra e Geometria, inclusive pensando em termos de atividades para Ensino Médio ou superior. É com essa idéia que sugiro uma proposta para uso de um software de Geometria Dinâmica (*Geometricks*), desenvolvendo habilidades associadas ao ensino de Álgebra e uma construção que foge dos padrões euclidianos, relacionada aos “fractais”, relatadas em Leivas e Cury (2008).

Entre as habilidades necessárias para a aprendizagem de Álgebra, tem sido citado o sentido do símbolo e Arcavi (1995, p. 159) reporta-se a uma idéia não totalmente definida sobre esse construto, apresentada por Fey, em 1990: “uma habilidade informal de lidar efetivamente com expressões simbólicas e operações algébricas”. Fey considera, entre as componentes básicas do sentido do símbolo, a habilidade de examinar uma expressão algébrica para fazer estimativas aproximadas dos padrões que podem emergir ou das representações gráficas (apud Pierce; Stacey, 2004). Ainda que não esteja apresentando uma definição para o sentido do símbolo, que segundo ele é uma noção complexa e multifacetada, Arcavi (1994) apresenta características que devem estar incluídas nesse “sentido”. Entre elas, podemos citar: a) um sentimento de quando se deve abandonar os símbolos e usar outras abordagens, ao resolver um problema; b) a conscientização de que se podem manejar relações algébricas que expressam informações dadas em mais de um tipo de representação.

Pelas idéias acima apresentadas, vemos que entre as habilidades a serem desenvolvidas no ensino de Álgebra estão a visualização de padrões e sua representação simbólica. No entanto, se partirmos de uma determinada representação, como um fractal, obtido por um processo iterativo gerado por um software, a possibilidade de entender o processo em si será maior. Brandão (2002) propôs a construção de fractais por meio de processos de recorrência, para a exploração de conceitos algébricos, como progressões geométricas e somatórios. Leivas (2007b), em um mini-curso sobre as conexões entre dimensão, logaritmo e fractais, propôs a construção de objetos fractais cujas dimensões, dadas por números decimais, pudessem ser expressas por logaritmos, proporcionando ao professor que atua na escola básica algum significado para o estudo da função logarítmica. O fractal, objeto de uma nova Geometria, pode representar mais uma relação entre Álgebra e Geometria, desenvolvendo habilidades algébricas e visuais por meio de processos interativos. Deve-se levar em contar que a Geometria Fractal e suas aplicações no desenvolvimento da Teoria do Caos é um dos aspectos mais modernos em termos de descobertas geométricas e que ainda não foi incorporada na formação do professor.

Embora muito já tenha sido feito voltado para a escola básica, para o ensino superior ainda pouco ou quase nada tem acontecido e a meu ver o círculo vicioso de delegar inoperâncias no ensino de Geometria deve ser rompido neste nível de ensino, até mesmo para se poder ampliar uma atuação nas séries finais do Ensino Fundamental e, especialmente no Ensino Médio.

Durante o I Seminário de Ensino de Geometria, realizado em Ouro Preto em agosto de 2007, foram realizadas mesas redondas por níveis de ensino: *O ensino de Geometria no Brasil*: uma leitura das últimas décadas; *O ensino de geometria nos cursos de Matemática* e debates temáticos: *O não resgate das geometrias e o ensino atual*; *O ensino de Geometria no Ensino Fundamental*: diferentes perspectivas.

Do que pude presenciar e do que consta dos anais do evento, notei ali uma falta de atendimento ao Ensino Médio quanto ao fato de as questões de ensino de Geometria serem centradas no Ensino Fundamental e, mesmo em havendo uma mesa para discutir o ensino de Geometria nos cursos de Licenciatura em Matemática, o que presenciei foi aquilo que em minha prática tenho constatado, ou seja, uma apresentação apenas de problemas de conteúdos matemáticos, como um dos problemas de Legendre e não a forma como a Geometria em suas diversas possibilidades pode ser abordada em tais cursos, caracterizando uma dicotomia entre conteúdo e método.

Dessa forma, acredito que o professor deva ter uma cultura matemática, no caso deste trabalho especificamente geométrica, para que possa atuar em qualquer nível de ensino.

2.4 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

Na Educação Matemática tem-se buscado não só inovações mas também mudanças na formação do professor, em especial nas últimas décadas, face às novas exigências do mundo, do mercado de trabalho e dos indivíduos. Mudanças sociais e políticas de acesso à escola convivem, por exemplo, com altos índices de reprovação e evasão escolar e exigem atitudes arrojadas dos professores, com procedimentos metodológicos e comportamentais adequados para cumprir a tarefa de educar.

Segundo Davis e Hersh (1995), questionamentos sobre quais são os Fundamentos da Matemática ainda continuam a ser feitos e para respondê-los, dizem os autores, não há respostas exatas e claras, até porque não há unanimidade de opinião a respeito entre matemáticos, por não existirem contas a fazer e por não haver uma única base filosófica a seguir, sendo, portanto, divergentes as opiniões a respeito. Courant e Robbins (2000) no prefácio de “O que é Matemática?” iniciam sua incursão numa busca de respostas, afirmando que

> A Matemática, como expressão da mente humana, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa, e o desejo da perfeição estética. Seus elementos básicos são a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade. Embora diferentes tradições possam enfatizar diferentes aspectos, é somente a influência recíproca destas forças antitéticas e a luta por sua síntese que constituem a vida, a utilidade e o supremo valor da Ciência Matemática; (COURANT; ROBBINS, 2000, prefácio)

Entretanto, Hersh (1997, p. xi) afirma que “Eles nunca responderam sua questão; ou melhor, eles responderam *mostrando* o que é Matemática, não *dizendo* o que ela é.” (Grifo do autor)

Pesquisas em Educação Matemática têm mostrado a necessidade de que na formação inicial dos professores seja dado um tratamento adequado aos conhecimentos dos conteúdos do Ensino Fundamental e Médio, o que não se percebe ainda em diversas partes do mundo, como destacam Ball e Ma (apud LOUREIRO, 2004) em relatório da *Conference Board of Mathematical Sciences*, no qual dois temas foram discutidos: “a base intelectual da Matemática escolar e a natureza específica do conhecimento matemático necessário para o ensino”. Dentre as recomendações gerais consensuais do documento destaca-se:

> [...] recomendação 1. os futuros professores necessitam de cursos de matemática que desenvolvam uma profunda compreensão da matemática que vão ensinar.
> recomendação 3. os cursos acerca das idéias fundamentais da matemática escolar devem ter por objetivo central um desenvolvimento completo de idéias matemáticas básicas.
> recomendação 4. ao mesmo tempo em que constroem o conhecimento matemático, os cursos de matemática para futuros professores devem desenvolver os hábitos de pensamento próprios a um matemático e dar a conhecer estilos de ensino flexíveis e interativos.
> recomendação 8. deve existir uma maior colaboração entre professores universitários e professores do ensino básico.
> recomendação 10. os professores devem ter oportunidade de desenvolver o seu conhecimento matemático e o seu ensino ao longo da sua carreira, por meio de auto formação e formação nas universidades e por meio de cursos formais. (BALL;MA, apud LOREIRO, 2004, p. 51)

O parecer 9/2001 do Conselho Nacional de Educação do Brasil, homologado, institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de Licenciatura, de graduação plena. Nessas diretrizes, no inciso III e IV do Art. 2º, que trata da organização curricular de cada instituição, encontram-se outras formas de orientação inerentes à formação para a atividade docente, entre as quais o preparo para: “III. O exercício de atividades de enriquecimento cultural; IV. O aprimoramento em práticas investigativas;” (BRASIL, 2001, p. 61)

Quanto à formação de professores que irão atuar na Educação Básica, o Art. 3º indica a observação de princípios norteadores do preparo para o exercício profissional levando em conta a coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do futuro professor, tendo em vista a aprendizagem como processo de construção de conhecimentos, habilidades e valores em interação com a realidade e com os demais indivíduos, no qual são colocados em uso capacidades pessoais e os conteúdos, como meio e suporte para a constituição das competências.

Por outro lado, o mesmo documento determina que se busquem competências para a atuação profissional devendo-se adotar tais competências como norteadoras, tanto da proposta pedagógica, em especial do currículo e da avaliação, quanto da organização institucional e da gestão da escola de formação. Para tal

> O projeto pedagógico de cada curso, considerado o artigo anterior, levará em conta que:
> I. a formação deverá garantir a constituição das competências objetivadas na educação básica;
> II. o desenvolvimento das competências exige que a formação contemple diferentes âmbitos do conhecimento profissional do professor;
> III. a seleção dos conteúdos das áreas de ensino da educação básica deve orientar-se por ir além daquilo que os professores irão ensinar nas diferentes etapas da escolaridade;
> IV. os conteúdos a serem ensinados na escolaridade básica devem ser tratados de modo articulado com suas didáticas específicas. (BRASIL, 2001, p. 63).

As diretrizes curriculares apontam ainda uma definição dos conhecimentos exigidos para a constituição das competências que deverão ir além da formação específica relacionada às diferentes etapas da Educação Básica. Os currículos deverão envolver os futuros professores em um debate amplo e contemporâneo contemplando “cultura geral e profissional” (art. 6º - § 3º - I). No que diz respeito à seleção e ao ordenamento dos conteúdos, o art. 10 diz que estes “serão de competência da instituição de ensino, sendo o seu planejamento o primeiro passo para a transposição didática, que visa a transformar os conteúdos selecionados em objeto de ensino dos futuros professores.” (Ibid., p. 64)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, (BRASIL, 1998, p. 59) destacam que “A Matemática faz parte da vida das pessoas como criação humana, ao mostrar que ela tem sido desenvolvida para dar respostas às necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos [...]”. O que se verifica na prática é que poucas mudanças nos currículos e no fazer matemático, especialmente em Geometria, têm ocorrido com a finalidade de alcançar os objetivos preconizados no mesmo documento que “destaca a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo e ofereçam sugestões de como trabalhar com explicações, argumentações e demonstrações” (Ibid., p. 60).

Uma tentativa de mudança no ensino de Geometria, combatida por muitos pesquisadores e autores, ocorreu a partir da década de 50, nos Estados Unidos com o grupo *School Mathematics Study Group* (SMSG). Foi nessa época editado um texto denominado *Geometry*, escrito por Edwin E. Moise e Floyd L. Downs Jr, utilizando recomendações de comissões sobre Matemática e seu ensino, o que era um dos objetivos do grupo. Esta obra, de certa forma resultado do movimento Matemática Moderna, teve seus reflexos no Brasil, na década de 70, tendo sido criado um grupo preocupado com o movimento, denominado Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), que considerando a importância do texto anterior publicou uma tradução com o título de Geometria Moderna (MOISE, DOWNS, 1971).

Este movimento não teve seqüência e o texto não mais foi editado. Entretanto, ele continuou a ser utilizado em disciplinas de Geometria nas universidades, por mim e por muitos outros professores com os quais mantenho intercâmbios. Embora o texto contenha muita linguagem da teoria de conjuntos, há uma abordagem de caráter exploratório/investigativo que é característica de Geometria.

Entendo que uma base intelectual e cultural para o futuro professor deva ser proporcionada em sua formação inicial, especificamente no conhecimento de Geometria num aspecto abrangente, moderno, com uma visão diversificada, em que ele possa se apossar dos conceitos geométricos desenvolvendo uma diversidade de habilidades.

Embora muitos trabalhos já existam, contribuindo para a melhoria do ensino de Geometria, ainda há muito a ser feito para que se atinja um patamar considerável e que a disciplina venha a ser ensinada na Educação Básica de forma regular, como preconizam Ball e Ma (apud Loureiro, 2004) ou em países onde ocorreu o abandono injustificado como assegura Guzmán (1993, pp. 62-89). Em geral, nos currículos dos cursos de formação de professores de Matemática existem disciplinas de Geometria com objetivos específicos de realizar demonstrações, de caráter exclusivamente dedutivo sem, no entanto, discutir as possibilidades de uso e adequação ao ensino básico, deixando ao futuro professor tal adequação, o que dificilmente ocorre.

Klotz (1991) afirma que o mundo matemático oscila entre períodos em que ajudas visuais são vistas como importante pedagogia e outros períodos em que são vistas como desvantagens e discute a respeito da grande necessidade de materiais e que muitas das ferramentas existentes raramente são utilizadas para fins educacionais, como confirma Grünbaum,

> É um fato curioso que a quantidade de material visualmente estimulante para nossos alunos parece ter-se mantido inalterada, ou mesmo diminuída, embora as possibilidades para a apresentação visual matemática e geométrica, em particular, se expandiram para além do que poderia ter sido imaginado até relativamente pouco tempo. (apud KLOTZ, 1991, p. 96)

Indo mais além sobre a necessidade, produção e utilização de recursos materiais em sua pesquisa que pudessem ser imediatos, Klotz (1991, p. 97) justifica “Porque sentimos a necessidade de produzir materiais que poderiam ser imediata e amplamente utilizados, nossas escolhas são bastante claras: imagens geradas por computador, armazenadas em vídeo e modelos em cartão”. Ainda mais,

> Como eu tenho indicado, objetos reais tridimensionais foi uma parte necessária de nossos planos. No entanto, um modelo geralmente é um trabalho laborioso feito de amor e raramente viável de ser feito por uma empresa comercialmente, é difícil encontrar modelos bons e baratos. O melhor material que se pode esperar por um preço razoável para uso imediato é de massa ou de papelão. (KLOTZ, 1991, p. 96)

Sobre a prova rigorosa, Garnica, ao tratar de formação de professores, diz:

> [...] a prova rigorosa, sendo elemento fundamental para entender a prática científica de Matemática, seria também fundamental nos cursos de formação de professores, não como mero recurso técnico, mas numa abordagem crítica, que possibilitasse uma visada panorâmica nos modos de produção e manutenção da ideologia do conhecimento absoluto para que, a partir disso, pudessem ser produzidas formas de tratamento alternativas às argumentações sobre os objetos matemáticos em salas de aulas reais. (GARNICA, apud CURY, 2001, p. 64)

Julgo importante no ensino superior um tratamento formal da Matemática como um todo e não exclusivamente da Geometria, como se este fosse o único ramo onde axiomas e teoremas existem e “precisam” ser estudados de forma teórico-dedutiva. A educação geométrica vai muito além do que simplesmente formalização. É necessário adequar a forma de compreensão dos conceitos geométricos que têm permeado seu ensino focado exclusivamente nos Elementos de Euclides.

Abordagens de Geometria Finitas, Geometria do ponto de vista de transformações topológicas, Geometria de movimentos, Geometria Dinâmica, Geometria Fractal, por exemplo, ainda não são realizadas por um grande número de cursos de formação, como pode ser visto pela análise dos currículos das Licenciaturas no RS. Segundo Goldenberg (1991) ao adotar um estilo visual e experimental na investigação e na aprendizagem matemática é possível fazer mudanças drásticas e fundamentais no envolvimento dos estudantes em Matemática para fomentar um desenvolvimento de espírito investigativo e o desenvolvimento de competências na mudança dos domínios da Matemática tradicional e contemporânea. Dentre os questionamentos levantados por ele e a conseqüente busca de resposta, estão “como deve ser a transferência da investigação matemática para o currículo da escola básica?; “como geometria fractal pode ser melhor utilizada como um poderoso exemplar de uma abordagem visual e experimental para o pensamento matemático?”. Afirma, ainda: “A percepção de que a Matemática não muda é, sem dúvida, em parte, resultante da resistência de mudar o currículo da Matemática” (GOLDENBERG, 1991, p. 40).

Concordando com o autor, acredito que isso ocorre, em parte, pelo fato que muitos professores, não desenvolvendo um conhecimento profundo de conteúdos atuais e metodologias adequadas, não conseguem ensinar Geometria tanto na escola básica quanto no ensino superior. O futuro professor, assim, não sabe como agir e apóia-se, na maioria das vezes, em livros didáticos repetitivos e, em se tratando do ensino superior, em livros obsoletos e conservadores.

O que pretendo investigar foi delimitado levando em conta o acima exposto e considerando minha experiência em ter:

- coordenado um Curso de Licenciatura em Matemática por mais de uma década e atuado como professor em disciplinas como Topologia, Geometria Diferencial, Geometria Euclidiana, Geometria Analítica, dentre outras, na formação inicial de professores de Matemática em uma Instituição Federal de Ensino no estado do Rio Grande do Sul;

- coordenado um Curso de pós-graduação, Especialização em Matemática, voltado ao professor que atua na Escola Básica na mesma instituição anterior e também tendo atuado como professor nas disciplinas Fundamentos de Álgebra e Fundamentos de Geometria no referido curso;

- desenvolvido uma dissertação de mestrado na área de Geometria e Topologia com vistas a introduzir modelos de Geometrias Não Euclidianas na formação do professor;

- militado em movimentos de Educação Matemática como na ação para a melhoria do ensino de ciências e matemática (REDE ACOMECIM), a partir da década de 80, em que 17 instituições de ensino do estado do Rio Grande do Sul se envolveram e desenvolveram ações que culminaram com a criação da Regional Sul da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, sendo a FURG a única instituição federal participante;

- atuado como diretor regional da Sociedade Brasileira de Educação Matemática do RS, quando tive ocasião de conhecer e atuar em diversas regiões percebendo como ocorre o ensino de Geometria e também conhecer a formação do professor no estado;

- ministrado oficinas de Geometria e de Álgebra na busca de conexões dessa última com Geometria nos Encontros Gaúchos de Matemática de Matemática a partir do II Encontro (1992) ao IX (2006) e em outros eventos regionais e nacionais;

- ministrado a disciplina de Geometria em cursos de pós-graduação – Especialização em diversas instituições regionais e nacionais, onde foi possível perceber diretamente a problemática da Geometria;

- atuado como dirigente nacional da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, quando foi possível conhecer em parte o cenário nacional e as discussões decorrentes dos problemas que envolvem a Geometria e seu ensino;

e, atualmente,

- ser responsável pela editoração do periódico Educação Matemática em Revista – RS, onde têm sido publicados artigos que buscam contribuir tanto para a formação de novos professores, quanto com os professores em exercício;

- atuar como professor de diversas disciplinas de Geometria na Licenciatura em Matemática em instituição privada de ensino superior na região metropolitana de Porto Alegre, bem como em outras disciplinas não envolvendo diretamente Geometria tais como Orientação e Supervisão de Estágio no Ensino Fundamental e Médio e na disciplina Tópicos de Geometria Plana no Curso de Especialização em Educação Matemática.

Dessa forma, sistematizadas as inquietações relacionadas às dificuldades no ensino de Geometria em diversos níveis, apresento o percurso realizado na elaboração do problema de pesquisa.

No início deste estudo, ao me questionar sobre **Qual Geometria deve ser ensinada na formação inicial de professores de Matemática?,** em uma primeira delimitação busquei **Que Geometria tem sido ensinada na Licenciatura em Matemática?** A partir de um levantamento descritivo dos programas de oito cursos de Licenciatura em Matemática no estado do Rio Grande do Sul, conclui que Topologia, Geometria Fractal, Tecnologias, Geometria Dinâmica, tendências atualizadas para o ensino de Geometria e Geometrias Não Euclidianas ainda não fazem parte dos currículos de forma sistemática e nem de forma interligada com outras disciplinas curriculares. Com essa informação, optei por uma segunda delimitação, focando o modo como esses conteúdos têm sido ensinados/aprendidos nesses cursos e, tomando a literatura consultada sobre o ensino de Geometria na Licenciatura em Matemática, senti a necessidade de entender melhor o papel da relação entre imaginação, intuição e visualização no desenvolvimento do pensamento geométrico na formação inicial do professor de Matemática bem como na formação continuada.

A partir desse primeiro encontro com a literatura e as referências consultadas sobre o ensino de Geometria e considerando os indicativos e sugestões da banca de qualificação, reformulei a questão de pesquisa, que passou a ter a seguinte formulação:

É possível ensinar conceitos geométricos em disciplinas de cursos de Licenciatura em Matemática a partir de abordagens que envolvam imaginação, intuição e visualização?

Assim, esta tese é elaborada com o seguinte **objetivo geral**:

Apontar possibilidades do uso de abordagens geométricas que mobilizem imaginação, intuição e visualização no ensino de conceitos em disciplinas de cursos de Licenciatura em Matemática.

Os seguintes **objetivos específicos** foram traçados:

1 Descrever e analisar experimentos geométricos realizados em disciplina do ensino superior.

2.Identificar na literatura, em especial na oriunda do campo da Psicologia da Educação Matemática, se há e como se caracterizam as pesquisas sobre o ensino de conceitos geométricos que mobilizam a imaginação, a intuição e a visualização.

3 Fornecer indicadores para uma proposta de currículo para cursos de Licenciatura em Matemática que contemple a imaginação, a intuição e a visualização.

3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE EXPERIMENTOS EM SALA DE AULA

Dentre tendências temáticas da pesquisa em Educação Matemática apontadas por Kilpatrick (1994) estão mudanças curriculares, utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) no ensino e na aprendizagem de Matemática e conhecimentos e formação/desenvolvimento profissional do professor. Segundo Kilpatrick, ao longo da última década, as mudanças mais óbvias que ocorreram na comunidade de investigadores em Educação Matemática, além do crescimento desse número, foi o caráter internacional e interdisciplinar. Para ele, uma forma de visualizar a pesquisa em Educação Matemática tem sido em relação ao conteúdo a que se refere. Coloca Geometria não apenas como um tópico do currículo escolar, mas como uma área de intensa atividade de pesquisa.

> Apesar das várias mudanças nos rumos da pesquisa, algumas questões de pesquisa parecem ser perenes, mudando apenas o nível de classificação do produto de aprendizagem, passando por Bloom, Skemp e van Hiele, para a taxonomia SOLO. A questão subjacente é realmente de uma avaliação: como é que vamos capturar o que os alunos têm aprendido? (KILPATRICK, 1994, p. 34).

Com relação a pesquisas internacionais sobre esse último tópico, encontram-se, por exemplo, as apresentadas no PME por Gutierrez e Boero (2006); também nesse referencial foram apresentadas pesquisas que destacaram a íntima relação entre o ensino de Geometria e imaginação, intuição, visualização e representação espacial no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Pesquisas sobre o conhecimento do futuro professor revelam a existência de diferentes abordagens teórico-metodológicas e apontam relações entre experiências vivenciadas na formação inicial e continuadas, teoricamente, experimentalmente e metodologicamente.

Em relação ao objetivo específico 1, realizei experimentos, cujos dados foram coletados a partir da aplicação de instrumentos por mim elaborados no formato de experimentos de ensino, envolvendo conteúdos de Geometria, a estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, em aulas da disciplina Estágio em Matemática I, e a estudantes do curso de pós-graduação da linha de

Educação Matemática, na disciplina de Recursos Tecnológicos e Educação Matemática.

Para Lüdke e André (1986), uma das características da pesquisa qualitativa em educação é que “tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal elemento; os dados coletados são predominantemente descritivos; a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto [...]” (p.11). Assim, pelo fato de estar diretamente envolvido com a formação de professores há longo tempo, em disciplinas da Licenciatura em Matemática e em cursos de especialização em Educação Matemática e, ao delimitar meu objeto de estudo, não ter encontrado na análise de currículos de oito universidades de uma região específica do país, indicativos de uso de abordagens inovadoras no ensino de Geometria, optei por elaborar experimentos de ensino.

Uma característica da pesquisa qualitativa, segundo Patton (apud Alves-Mazzotti, 2002, p. 131) é ela ser “compreensiva” ou interpretativa, o que significa para Alves-Mazzotti (2002) que

> [...] essas pesquisas partem do pressuposto de que as pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores e que seu comportamento tem sempre um sentido, um significado que não se dá a conhecer de modo imediato, precisando ser desvendado. (p. 131).

Entendo que, tendo certa compreensão sobre diversos currículos de Licenciatura em Matemática, uma experiência na discussão, implementação e coordenação de um curso e, além disso, uma atuação na grande maioria de disciplinas que constituem tais currículos, essa etapa dos experimentos teve uma abordagem indutiva uma vez que, segundo Alves-Mazzotti (2002, p. 131), nessa abordagem “O pesquisador parte de observações mais livres, deixando que dimensões e categorias de interesse emirjam progressivamente durante o processo de coleta e análise de dados”.

Em relação ao objetivo 2, realizei um inventário de pesquisas sobre o ensino de Geometria envolvendo abordagens do uso de imaginação, intuição e visualização a partir de bases de dados, particularmente as disponíveis no PME.

3.1 OS EXPERIMENTOS REALIZADOS

A seguir descrevo e analiso os experimentos por mim realizados tendo como referência teórica estudos de Piaget e Inhelder(1993) e Araújo (1994), Papert (1994), Brasil (1998), Borba e Villarreal (2005), Valente (2000) e Sancho (2006), anteriores ao inventário que pude realizar sobre propostas para o ensino de Geometria nos diferentes níveis de ensino nas fontes do PME.

Na realização dos experimentos, coleto dados em duas situações diversas por meio de experimentos de ensino específicos a cada uma delas. Procuro pouco interferir no processo de modo a esclarecer dúvidas e questionar os participantes para levantarem novas hipóteses e tentarem comprová-las ou rejeitá-las, o que entendo caracterizar uma investigação naturalística, que, segundo Alves-Mazzotti (2002), "é aquela em que a intervenção do pesquisador no contexto observado é reduzida ao mínimo". (p. 131). Para a mesma autora, "As pesquisas qualitativas são caracteristicamente multimetodológicas, isto é, usam uma grande variedade de procedimentos e instrumentos de coletas de dados". (p. 163).

No que segue apresento o desenvolvimento dos dois experimentos realizados e os sujeitos envolvidos e para sintetizar, indico um quadro detalhado das etapas indicadas a seguir.

1. elaboração e aplicação dos instrumentos de coleta de dados do experimento 1;
2. elaboração e aplicação dos instrumentos de coleta de dados do experimento 2;
3. organização dos dados coletados dos experimentos.
4. análise e discussão dos dados encontrados à luz da literatura.

	2007	2008		2009
Etapas	Agosto a Dezembro	Janeiro a Julho	Agosto a Dezembro	Janeiro a Julho
1	X			
2	X			
3		X		
4		X	X	
5				X

Quadro 2 – Cronograma da Pesquisa

O primeiro experimento foi elaborado para verificar como alunos utilizam propriedades topológicas na classificação de quadriláteros planos. Para tal, foram aplicadas tarefas adaptadas das provas sobre propriedades topológicas realizadas por Piaget e Inhelder (1993).

A coleta de dados foi realizada em um curso de Licenciatura em Matemática e a turma escolhida foi a de uma disciplina não específica de Geometria, denominada Estágio em Matemática I.

Escolhi a turma sob minha responsabilidade naquele momento. Ela era constituída de apenas doze alunos, o que não é comum na instituição, o que entendo facilitar a aplicação e a posterior análise do instrumento.

O tema escolhido, quadriláteros, deveu-se ao fato de esse assunto constar do programa da disciplina e entender que haveria possibilidade de elaborar um instrumento em que imaginação, intuição e visualização fossem mobilizadas para a redescoberta e o uso de propriedades topológicas para classificação dos mesmos.

O registro dos dados foi feito por meio de anotações por mim realizadas durante as aulas e relatórios escritos dos alunos na realização das tarefas propostas para duplas escolhidas aleatoriamente.

No segundo experimento, realizado em uma disciplina do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná, na linha de Educação Matemática, optei por tema referente à Geometria, mais especificamente pelo conceito de altura de triângulos, com o objetivo de verificar como indivíduos que têm alguma formação superior compreendem este conceito, pois, em observações decorrentes de minha prática profissional, geralmente a altura é associada a verticalidade e não ao perpendicularismo.

A escolha da turma foi por conveniência e a coleta foi realizada durante o horário da disciplina no período de uma hora, quando foi solicitado aos alunos planejar, executar e analisar uma oficina utilizando um software computacional.

O registro dos dados, primeiramente, foi feito por mim por meio de anotações de observações diretas do desempenho dos seis participantes na utilização de um software computacional; a seguir, foram registrados também os diálogos das duplas de participantes durante as atividades desenvolvidas no computador e anotadas as manifestações orais desses participantes ao analisarem o desenvolvimento da oficina, a partir dos descritores previamente elaborados pelo grupo, incluída a professora. Os dados da coleta dos diálogos foram organizados, transcritos, analisados preliminarmente e encaminhados aos participantes, pela página do grupo de discussão da disciplina na plataforma Moodle, e foi solicitado que cada um validasse suas manifestações.

No que segue, apresento um quadro resumo sobre a metodologia utilizada nos experimentos realizados.

	Experimento 1	Experimento 2
Campo da pesquisa	Disciplina de Estágio em Matemática I do Curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior do RS. A disciplina tem por objetivo desenvolver conteúdos e metodologias para o Ensino Fundamental	Disciplina de Recursos Tecnológicos e Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná, na linha de Educação Matemática.
Sujeitos	12 alunos	sete alunos
Tema abordado	Utilização de propriedades topológicas elementares para classificação de quadriláteros planos.	Uso de Geometria Dinâmica para determinação da altura de triângulos.
Coleta de dados	2º semestre letivo de 2007. Dados coletados a partir de quatro provas realizadas com os alunos.	1º semestre letivo de 2008. Dados coletados a partir da realização de uma oficina realizada em Laboratório de Informática
Procedimento para a coleta de dados	Os alunos se organizaram em duplas formadas por afinidades, numa mesma sala, sendo cada dupla bem afastada das demais. Registros escritos deveriam ser feitos por cada dupla. Foram gravados diálogos que travei com os alunos.	Cada dois alunos ocuparam um computador, a livre escolha, e os registros foram feitos por observação direta do desempenho dos alunos e anotados. Foram também anotados os debates realizados pelos alunos, pela professora da turma e por mim, que apliquei a oficina.
Indicadores de análise	1. Em que medida imaginação contribui para obter relações topológicas elementares na classificação de quadriláteros. 2. A intuição favorece a formação de conceitos topológicos? 3. A intuição auxilia no estabelecimento de relações topológicas elementares? 4. Visualização possibilita a classificação de quadriláteros?	Elaborados pela turma conjuntamente com a professora da disciplina, anteriores à realização da mesma: 1. papel do professor (aluno responsável pela oficina) no planejamento e na execução; 2. relação professor-aluno no estabelecimento de diálogo estabelecido entre ambos durante a oficina. 3. relação do sujeito-tecnologias, ou seja, as relações instituídas entre o professor e as tecnologia e também dos alunos com a tecnologia. 4. aprendizagem dos participantes na reconstrução dos conceitos, na colaboração e cooperação entre os participantes e na organização da atividade pelo executor. [relação ao software, ao conceito matemático e à colaboração e cooperação].

Quadro 3 – Resumo dos experimentos

Esses experimentos já realizados servirão de fundamentação para a proposta curricular para o ensino de Geometria, que apresento ao final. O primeiro experimento versa sobre a utilização de propriedades topológicas para a construção de conceitos de Geometria Plana, a saber, classificação de quadriláteros. O segundo experimento aborda uma experiência realizada em ação continuada com professores cursando uma disciplina de Tecnologia e Educação Matemática em que foi utilizado o software Cabri-Géometre II na reconstrução do conceito de altura, buscando desvincular tal conceito da verticalidade, como se percebe no ensino básico.

Acredito, como Fischbein (1987), que a intuição é uma forma de conhecimento que possibilita a aquisição de confiança e certeza em fatos matemáticos que se podem “ver” com a própria mente.

> É a necessidade para uma certeza comportamental, prática, não-convencional, implicitamente significativa que cria a crença quase instintiva na existência de tais certezas finais e, conseqüentemente, a busca por elas. Foi provavelmente Descartes quem melhor expressou esta visão: se conhecimento é sempre o produto de uma mente ativa, tem-se de encontrar na própria mente o critério pelo qual uma certa verdade pode ser distinguida de certas aparências.(FISCHBEIN, 1987, p. 7)

Sendo a percepção também uma forma de conhecimento, para Fischbein (1987) ela difere da intuição, pois intuição vai além dos fatos perceptíveis, necessitando uma extrapolação das informações advindas desses fatos. As representações intuitivas, embora de aparente auto-evidência, são absolutas e imutáveis e sendo assim, a utilização da percepção de atividades com folhas de papel creio permitirem aos estudantes buscarem propriedades de quadriláteros. Tais propriedades, em se mantendo invariantes e podendo ser abstraídas na ausência do material observável, creio possibilitar que a intuição conduza à classificação de quadriláteros. Além disso, com base nos autores consultados, creio poder afirmar que a passagem para a visualização, por meio dos materiais concretos observáveis, permite a construção de estruturas mentais, em direção ao conceito.

Conexões entre os conhecimentos matemáticos das diversas áreas são exemplos do que defendo como uma cultura matemática, em especial uma cultura geométrica, necessária ao professor para o seu exercício profissional.

3.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO EXPERIMENTO 1

Antes de iniciar propriamente a descrição e a análise, faço algumas considerações sobre noções e propriedades topológicas a fim de facilitar a compreensão do detalhamento do experimento.

A construção do conceito de espaço é essencial ao ser humano e tem sido objeto de estudo de vários ramos do conhecimento. No entendimento de Aguiar (2006), o estudo do espaço nos leva à sua conceituação na história da ciência, principalmente aquelas realizadas no âmbito da Filosofia, da Física e da Matemática, frente à capacidade dos seres humanos em reconhecerem configurações físicas e espaciais, compararem tamanhos e formas de se localizarem no espaço. No caso da Matemática, o estudo de formas planas e espaciais com suas propriedades se constitui numa parte importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Na trajetória histórica do conhecimento geométrico, de acordo com Aguiar (2006), a Geometria Euclidiana foi produzida antes de Cristo, enquanto que a projetiva surgiu quando artistas e arquitetos renascentistas passaram a se interessar pelo estudo de leis que regem a construção de projeções sobre a tela. Segundo essa autora, a Geometria Topológica é recente, datando do século XX, muito embora já existissem pesquisas isoladas a respeito desde o séc. XVII, bem como os trabalhos de Euler no século XVIII. Aguiar (2006) afirma que Poincaré produziu, em 1895, um primeiro trabalho considerando a topologia como um campo de estudo autônomo.

Estudos relativos à Geometria integram o currículo escolar de vários países e, atualmente no Brasil, são propostos desde os anos iniciais da Educação Básica sendo abordados nos blocos **espaço e forma** e **grandezas e medidas**. Segundo os PCN, “Os conceitos geométricos são importantes porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (BRASIL, 1998, p. 55).

Nos documentos oficiais brasileiros, um dos objetivos para o ensino de noções geométricas no primeiro ciclo do Ensino Fundamental é levar o aluno a “perceber semelhanças e diferenças entre objetos no espaço, identificando formas tridimensionais ou bidimensionais, em situações que envolvam descrições orais, construções e representações” (BRASIL, 1998, p. 66). Mas, o que deveria ser levado em conta para se alcançar tal objetivo? Que conhecimentos sobre percepção e representação do espaço pela criança deveriam ter os professores desse nível de escolaridade?

De acordo com Araújo (1994, p. 13), “é fácil encontrar alunos, das diferentes séries ou até mesmo professores, que não concebem o plano como espaço, parecendo que para eles as figuras de três dimensões são as únicas espaciais”. Na concepção dessa autora, essas observações demonstram que a percepção visual do espaço geométrico é confusa e equivocada.

Nos estudos de Piaget e Inhelder (1993) sobre a representação do espaço na criança, tem-se que a percepção do espaço não implica sua representação. Ou seja, o fato de as crianças perceberem sensivelmente o espaço não garante que elas o saibam representar. No entendimento desses autores:

> A percepção é o conhecimento dos objetos resultante de um contato direto com eles. A representação consiste, ao contrário, - seja ao evocar objetos em sua ausência, seja quando duplica a percepção em sua presença -, em completar seu conhecimento perceptivo referindo-se a outros objetos não atualmente percebidos (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 32).

Para Piaget e Inhelder (1993), a representação do espaço não é dada de antemão, ela é construída. Eles constataram que a criança constrói a representação de espaço de modo inverso ao que geralmente é apresentado na escola. Na Matemática escolar, costuma-se apresentar primeiramente noções de Geometria Euclidiana (idéias de ponto, de reta e de plano) para, somente depois, se tratar de Geometria Projetiva (representação de sólidos por meio de perspectivas) e, em último caso, já na Matemática superior, é que é apresentada a topologia (relações de vizinhança, separação, ordem, envolvimento e continuidade). Entretanto, Piaget e Inhelder (1993) constataram que a primeira representação de espaço na criança é de natureza topológica.

Na Matemática, a Topologia[11] estuda propriedades de objetos que se mantém invariantes mediante transformações contínuas, o que significa dizer, por

---

[11] A Topologia é caracterizada na comunidade científica juntamente com a geometria porque aborda transformações de objetos geométricos, constituindo-se, dessa forma, a área de **Topologia e Geometria**, conforme classificação do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

exemplo, que ao tomar um balão do tipo utilizado em aniversários e enchê-lo de ar, ele adquire certa forma. Se for isolada a saída de ar e o comprimir entre as mãos, ele vai adquirindo outras formas até o momento em que estoura. Até o momento imediatamente anterior ao rompimento, foram feitas transformações contínuas no balão, ou seja, transformações topológicas. Em outro exemplo, toma-se uma circunferência construída de um material elástico e é possível ir transformando-a continuamente, sem romper o material, em uma elipse, por exemplo, ou outra curva qualquer fechada e sem se entrelaçar. Dentre esses invariantes, encontram-se as relações de vizinhança, separação, ordem, envolvimento e continuidade. Por exemplo, se desenharmos dois objetos próximos num balão (bexiga) e, em seguida, o soprarmos, mesmo que o balão fique cheio de ar (o que caracteriza uma deformação em relação ao seu estado inicial), os dois objetos desenhados permanecerão vizinhos.

Para Piaget e Inhelder (1993), as relações topológicas elementares (vizinhança, separação, ordem, envolvimento e continuidade) estão no início do desenvolvimento da representação do espaço na criança e são, provavelmente, precoces ao seu próprio desenvolvimento psicológico. Afirmam ainda que isso ocorre por serem relações que não envolvem características euclidianas e projetivas (medidas, ângulos e perspectivas), que só vêm a se constituir mais à frente no desenvolvimento humano científico. Ainda mais, Piaget e Inhelder (1993) comprovam que somente por volta dos onze anos de idade é que o indivíduo adquire as noções de continuidade, quando formula os conceitos de ponto e de linha.

No que diz respeito ao espaço perceptivo e ao representativo, Piaget e Inhelder (1993) concluíram que as imagens dos objetos não resultam unicamente da percepção e que a construção do espaço começa no plano perceptivo, prosseguindo no plano representativo. Para entenderem a passagem de um plano a outro, os autores fizeram uma análise pela ‘estereognosia’, isto é, pela capacidade de se reconhecer ou identificar, através do tato, a natureza, a forma e as propriedades físicas de corpos. Eles analisaram como a criança inicia o reconhecimento pela percepção tátil, a qual passa a ser traduzida pelas imagens gráficas ou mentais, seguindo-se a abstração das formas.

Foi constatado por Piaget e Inhelder (1993) que as atividades perceptivas ou sensório-motoras se desenvolvem de modo muito sensível com o avançar da idade dos sujeitos observados, em oposição à constância dos mecanismos da percepção, os quais não ocorrem desde o inicio da evolução mental. Segundo esses autores, a percepção do espaço construída progressivamente pelo indivíduo durante o período sensório motor ocorre em três fases:

I - constituída de dois momentos: o dos puros reflexos e o das aquisições dos primeiros hábitos;

II - compreende o início das manipulações dos objetos e das primeiras condutas inteligentes;

III - compreende o início da experimentação e das primeiras coordenações interiorizadas, isto é, compreensão rápida de situações novas.

No que diz respeito às imagens gráficas, isto é, a passagem da percepção para a representação intuitiva, Piaget e Inhelder (1993) observam uma tradução do tátil ao visual, havendo uma combinação ao mesmo tempo entre a visão e o movimento. Foi também evidenciada uma ligação entre a imagem e os movimentos próprios da atividade perceptiva.

Quanto à abstração das formas, Piaget e Inhelder (1993) concluem que a mesma ocorre pela coordenação das ações e não apenas pelo objeto em si. Para os autores, num primeiro período os sujeitos da pesquisa não conseguem reconhecer e representar as formas por não serem capazes de reconstruí-las por meio de suas próprias ações. De acordo com Piaget e Inhelder (1993), num segundo período, as formas retas ou curvas e formas euclidianas simples começam a ser distinguidas para, finalmente, num terceiro período, mostrar a evidência da correlação entre elas e a coordenação das ações pelo retorno ao ponto de referência necessário para as construções, reconhecimento e representações. Entretanto, o processo de abstração das formas permanece inconcluso.

Na seqüência, Piaget e Inhelder (1993) investigam se as relações espaciais elementares e o desenho no espaço passam pelas mesmas fases já descritas antes no plano perceptivo. Pesquisam os sujeitos quanto ao desenho comum, espontâneo e inspirado em lembranças visuais que têm do objeto, bem como provocado por meio de cópias de formas geométricas básicas. Eles constatam que as relações topológicas primitivas aparecem no início dos desenhos das formas geométricas pelos sujeitos observados, concluindo que tais relações aparecem no espaço gráfico da mesma forma que nos espaços perceptivo e representativo.

Pode-se perceber que nos dois estudos de Piaget e Inhelder (1993), o do desenho e o da estereognosia, aspectos topológicos elementares, como o de vizinhança e o de separação, são fundamentais para a construção do espaço na criança. Fez-se necessário, então, para os autores, verificar se essas relações de vizinhança, e, portanto, de continuidade, são constitutivas da noção de ordem. Os resultados mostraram que é pela coordenação crescente das ações de separar e reagrupar que isso ocorre. Entretanto, essa ordenação ainda não é reversível, o que só ocorre com o desenvolvimento da noção topológica de envolvimento. Esta noção abstrai as noções de interior, exterior e de fronteira, as quais, juntamente com a de ordem linear, tornam-se cíclicas, estabelecem correspondências operatórias e fornecem ao sujeito a noção tridimensional.

Para comprovar que as relações topológicas elementares possibilitarão, com o desenvolvimento psicológico, a chegada aos métodos matemáticos dedutivos, as pesquisas de Piaget e Inhelder (1993) discutem que se faz necessária uma construção intelectual partindo de ponto até chegar ao contínuo e que isso não ocorre de forma brusca. De acordo com a literatura matemática, o conceito de continuidade é um dos mais complexos no desenvolvimento matemático, tendo atingido seu ápice com o desenvolvimento da Análise Matemática.

Piaget e Inhelder (1993) mostram que é por volta de 11 ou 12 anos, em média, que o pensamento formal se manifesta dando início ao processo dedutivo envolvendo as operações formais. Isso ocorre quando o indivíduo consegue abstrair o conceito de ponto tornando-se possível o tratamento operatório muito além do que ocorre com as estruturas aditivas apoiadas em materiais concretos, ou seja, estruturas discretas ou não contínuas.

Em meu entendimento, mesmo que os estudos de Piaget e Inhelder (1993) sobre a representação do espaço na criança não estejam voltados para questões pedagógicas, eles fornecem indicativos para o ensino de Geometria na escola, que tem como um dos objetivos propiciar condições para que os alunos percebam semelhanças e diferenças entre objetos no espaço, identificando formas tridimensionais ou bidimensionais, em situações que envolvam descrições orais, construções e representações.

Tomando-se como referência que a percepção do espaço não implica sua representação, bem como a existência de estágios de desenvolvimento da inteligência que interferem nessa representação, a escola deveria se apropriar sempre que possível de resultados de estudos e pesquisas no âmbito do desenvolvimento cognitivo, uma vez que lida com a promoção de ensino com vistas à aprendizagem dos alunos. Em nosso caso específico, os estudos de Piaget e Inhelder (1993) sobre a representação do espaço na criança forneceram parâmetros para análise de representações gráficas feitas por alunos do ensino superior acerca de sua preservação de propriedades topológicas a partir da construção de anéis e faixa de Möebius, na busca de classificação de quadriláteros.

Realizou-se um estudo com doze alunos do Curso de Formação de Professores de Matemática de uma instituição de ensino superior do RS, na disciplina Estágio em Matemática I, envolvendo conteúdos e metodologias para o Ensino Fundamental, no segundo semestre de 2007. Buscou-se verificar como alunos desse nível de escolaridade concebem e aplicam relações topológicas em nível de escolaridade mais avançado do que aqueles sujeitos investigados por Piaget e Inhelder.

Buscou-se aplicar algumas propriedades topológicas para visualizar transformações de objetos planos em objetos espaciais e vice-versa e foi analisado como estudantes da Licenciatura percebiam essas propriedades. Os resultados mostraram que, partindo de objetos concretos, acadêmicos que já cursaram disciplinas de Geometria ainda não conseguem perceber, conceber e aplicar imediatamente tais transformações, isto é, não têm o espaço perceptivo e o representativo bem elaborado.

As provas consistem em verificar se relações topológicas elementares são importantes para a formação geométrica de futuros professores, especialmente no que diz respeito à visualização para uma caracterização de quadriláteros, a partir da imaginação e da intuição empregadas na resolução das atividades. Aborda, além disso, conceitos não menos relevantes como fronteira, linhas, superfícies e transformações de figuras planas em espaciais e vice-versa.

Foram aplicadas quatro provas, as quais apresentam algumas características em comum e que serão descritas a seguir, e outras características específicas a cada uma, que serão descritas no início de cada prova.

3.2.1 Descrição do procedimento 1

A seguir é descrita a experiência realizada na disciplina de Estágio em Matemática I, já relatada em Leivas (2008).

Foram utilizadas tiras de papel dobradura de dupla face de duas cores diferentes (com dimensões aproximadas de 2 cm por 30 cm) assim preparadas e distribuídas aos alunos para a realização de quatro provas. Foi recomendado que a espessura da folha não fosse considerada. Os alunos deveriam, ao manusear o material, perceber que cada face é representada por uma cor, portanto, representa uma superfície com dois lados e que, para passar de um desses lados ao outro, deveriam atravessar uma fronteira. A duplicidade de faces também facilita a percepção de transformações realizadas com as faixas quando objetos planos (as faixas) podem ser transformados em objetos espaciais (anéis) e vice-versa. Além disso, as investigações nesse processo de transformação e de retorno ao objeto inicial permitiram verificar as relações de vizinhança e separação, na medida em que pontos próximos do objeto plano (a faixa) são levados em pontos próximos do objeto espacial (o anel). Entretanto, a recíproca já pode não ocorrer, na medida em que os alunos percebem que cortando objetos espaciais, relações de vizinhança não mais são preservadas.

Os alunos foram distribuídos na mesma sala, mas em duplas, de modo a poderem discutir, levantar hipóteses e redigir suas observações. Todos eles possuíam idades superiores a vinte anos, alguns com experiência no magistério e outros não. A maioria cursou disciplinas de Geometria e de Cálculo e a maioria cursou pelo menos até o terceiro semestre do curso.

A seguir são descritas as duplas que participaram das provas com uma pequena caracterização de cada uma delas.

(GRA; PAT): a primeira participante não tem experiência com sala de aula e a segunda tem experiência de dois anos no Ensino Fundamental (EF) e no Ensino Médio (EM);

(REJ; VIT): a primeira tem experiência com Educação Infantil por seis meses, e o segundo tem experiência de dois meses no EF;

(SIN; LUC): a primeira tem experiência com quarta série do EF há dois anos e como substituta em quinta série e a segunda tem quatro anos de experiência com as séries finais do EF e de um ano com Educação de Jovens e Adultos (EJA);

(CRI; CAR): a primeira não tem experiência de sala de aula e a segunda tem quatro anos de experiência com séries finais do EF e EJA;

(ANE; VER): ambas as participantes não têm nenhuma experiência de sala de aula.

(NAI; THA): a primeira tem 23 anos de experiência em escola estadual no EF e no EM e a segunda não tem qualquer experiência em sala de aula.

De início foi feita uma explicação geral sobre o que consistiriam as provas a serem realizadas e sobre os registros escritos a serem efetivados pelas duplas. Foi destacada a importância de levantarem hipóteses e as registrarem antes de realizarem colagens e recortes que seriam sugeridos. As tiras de papel poderiam ser manuseadas livremente e os debates entre os dois membros de cada dupla deviam ser efetivados, evitando influenciarem e serem influenciados pelas outras duplas.

3.2.2 As provas do experimento 1

Primeira prova:

Os participantes recebem uma faixa (figura 1) sendo um lado de uma cor (amarela, vermelha, azul ou laranja) e o outro lado não colorido. A prova consiste em verificar como os estudantes compreendem transformações de objetos planos em espaciais e a necessidade de passagem por fronteiras. Foi feita oralmente a pergunta para as duplas: “Quantos lados tem esse objeto que vocês receberam?”.

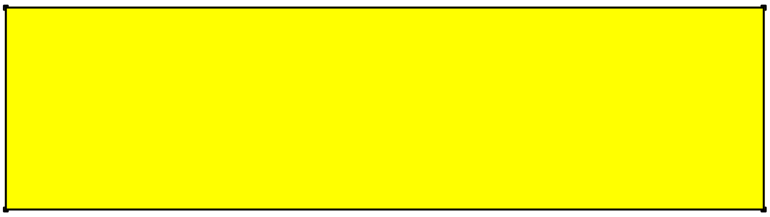


Figura 1 – Faixa dupla face colorida

De um modo geral os indivíduos tiveram muita dificuldade de compreenderem o que se estava perguntando, colocando a tira apoiada sobre a mesa e, por vezes, a suspendendo no ar. Voltavam a tira em muitas e variadas posições e tentavam responder em voz alta que era uma figura formada por seis lados. Alguns contestavam que eram quatro lados. Algumas duplas discutiram sobre a espessura da folha, que corresponderia a uma face de um objeto espacial. Solicitou-se que considerassem a folha sem espessura. Outras duplas, bastante inseguras, procuravam escutar o que outras discutiam, enquanto o pesquisador entrevistava e questionava algumas delas. Notou-se que a denominação “fronteira” foi relatada por uma dupla quando o termo surgiu em outra, ao comparar a faixa com as salas de aula contíguas e de como passar de uma para outra.

Falas das duplas foram gravadas, transcritas e, a seguir, apresentadas.

(NAI; THA): com muita dificuldade de compreenderem a figura, são questionadas pelo pesquisador [pesq.][12] “como você compara a faixa com essa sala e a sala ao lado?” [alunos] “são diferentes”. [pesq.] “como você passa dessa sala para a do lado que é diferente?” [alunos] “caminhando, fazendo um caminho?” Insisto e os alunos continuam com a idéia de que é preciso fazer um caminho. Então pergunto: “como você sai da sala” e finalmente respondem: “pela porta”. Finalmente chegam à conclusão de que há duas regiões retangulares e que para passar de uma delas à outra é necessário ultrapassar uma fronteira.

(REJ; VIT): “se pensarmos nesse pedaço de papel fornecido como uma figura plana no espaço, esta figura possui seis lados ou faces. Mas, se desconsiderarmos a espessura do material, e pensarmos na figura no plano, encontraremos uma figura com quatro lados. Se pensarmos na figura no espaço, mas considerando os quatro lados do quadrilátero como linha, podemos, dizer que esta figura possui dois lados”.

[12] [pesq.] significa minha intervenção nos diálogos.

(SIN; LUC): "se a figura recebida for considerada plana, tem quatro lados. No entanto, se for vista no espaço ela tem seis lados, porém, considerando que quatro dos seis lados possuem 0 (zero) dimensão, a figura passa a ter dois lados (lado claro e lado escuro). Para passar ao outro lado (lado escuro para lado claro) tenho que passar pelas linhas. Então esta figura é uma fórmula retangular".

(CRI; CAR): "se considerarmos a figura no espaço ela tem seis lados, se for considerada no plano a figura tem quatro lados, se considerarmos os lados como linhas a figura terá dois lados frente e verso".

(GRA; PAT): observei que esperavam para redigir sua resposta, ficando atentas ao que as duplas discutiam e até mesmo às indagações que eu propunha às duplas. Deram a seguinte resposta: "a figura é composta de dois retângulos e cada um possui quatro fronteiras para passar para o outro lado. Estas fronteiras são os lados, que são quatro".

Da análise dos dados da execução dessa primeira prova e do acompanhamento durante o desenvolvimento da atividade, percebi que os alunos de todas as duplas têm grande dificuldade de interpretar uma dada solicitação quando essa não é expressa por um algoritmo bem estruturado, com resposta fechada e imediata. Observei também que não há clareza, nos doze alunos pesquisados, quanto ao conceito de polígono, pois em suas falas não distinguem região retangular de retângulo. Conseqüentemente, os significados de faces, arestas, lados dos objetos geométricos não estão elaborados de forma precisa. Os aspectos relacionados a dimensões também não estão bem esclarecidos, não havendo distinção exata entre curvas e superfícies, até que isso seja verbalmente explicitado pelo pesquisador.

Esclareci ao grande grupo que a tira de papel representa um objeto com dois lados de modo que fosse possível dar continuidade à segunda tarefa

Segunda prova:

A segunda prova consistiu em analisar se as duplas conseguiam realizar transformações que levassem um objeto de dois lados em um objeto com um único lado, ou seja, transformar uma faixa plana que possui dois lados em uma Faixa de Möebius, superfície que possui uma única face.

Cada dupla recebeu uma nova faixa como aquela fornecida na figura 1, para que tentassem confeccionar, de alguma forma, uma figura de um único lado. Para tal foi disponibilizada cola plástica, tesoura, estilete e réguas. Após tentativas sem sucesso, sugeri que fossem demarcados pontos nos quatro vértices do quadrilátero (a faixa) como na figura 2, a seguir.

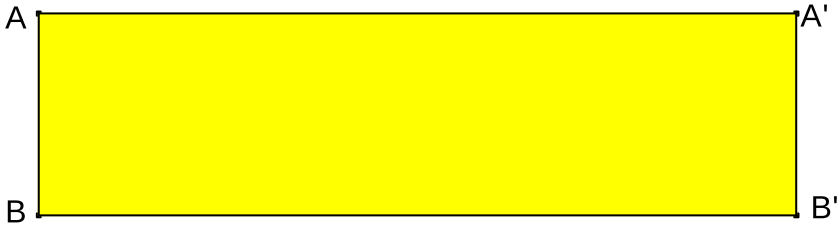


Figura 2 – Faixa dupla face colorida com letras nos vértices

Os estudantes concentraram suas atenções sobre os lados AB e A'B' (figura 2) efetuando transformações. Nenhuma das duplas se preocupou com colagens. Faziam movimentos no ar reunindo os lados opostos e juntavam sobre a mesa. A dupla formada por (GRA; PAT) relatou: "pensamos em colar a figura no papel, formar um anel, amassar formando uma esfera e nada funcionou". Disso inferi que as duas desconhecem ou não identificam os movimentos de rotação no espaço.

O caso da dupla (CRI; CAR) foi bastante interessante. Logo de imediato CRI me mostrou a "Faixa de Möebius" no ar, presa pelas extremidades com uma das mãos e pousando um dedo da outra mão sobre a superfície. Perguntei-lhes como chegaram a essa conclusão. Mostraram como haviam feito o percurso com o dedo que estava pousado sobre a superfície. Em sua escrita, assim se expressaram: "pegamos a figura dada e colamos as duas pontas com seu lado inverso, sem tirar o dedo da figura fizemos todo seu contorno, podendo assim observar que a figura ficou com apenas um lado, então fizemos o mesmo trajeto sem tirar a caneta até que voltasse ao ponto origem". O caso da dupla destoa das demais pela rapidez com que chegaram à conclusão, mostrando terem um desenvolvimento cognitivo mais avançado do que a dupla anterior. Perguntei se já haviam vivenciado tal experiência em outra circunstância, tendo havido resposta negativa.

As outras duplas fizeram relatos interessantes. Observe:

(NAI; THA): "primeiramente não conseguimos fazer nenhuma figura com um lado só. Tentamos fazer uma circunferência e obtivemos dois lados, dobramos o papel e também obtivemos dois lados. Logo tivemos a idéia de colocar letras em cada vértice da faixa e colamos a faixa unindo as letras opostas, desta forma conseguimos identificar apenas um lado".

(REJ; VIT): considerando a figura da seguinte forma: (desenharam a faixa como acima sombreando a região retangular). "Ao unirmos o vértice A com o vértice B' e o vértice B com o vértice A', conseguimos transformar a figura, que a principio possuía dois lados, em uma figura de um único lado, pois eliminamos as fronteiras".

(SIN; LUC): fazem o mesmo tipo de consideração de (REJ; VIT), sem sombrear a figura, e concluem: "Assim, teremos apenas uma face da figura e observamos também que se percorrermos à caneta sobre a figura formada passaremos pelas fronteiras, ou seja, as linhas". Com isso a dupla está querendo dizer que ao fazer a colagem AB com B'A', estão ultrapassando essa linha, não tendo ainda a percepção de que a fronteira foi eliminada e por isso a figura deixa de ter dois lados.

(ANE; VER): ao contrário da dupla anterior, já verbalizam a linguagem adquirida anteriormente ao expressarem-se da seguinte forma: "Sim, pois ao colarmos as fronteiras com os vértices invertidos, obtemos uma figura sem fronteira passando livremente para ambos os lados, que na nova figura é uma só".

Observei que as duas duplas anteriores estão adquirindo a linguagem e os conceitos matemáticos desejados. Os relatos mostraram uma aprendizagem significativa no que diz respeito a transformações que levam regiões planas de dois lados em objetos espaciais de um único lado. Perceberam também que as noções de fronteira como linhas são relevantes nesse processo de transformação. Além disso, pude perceber, dos diálogos com os participantes, que essas transformações não podem ser injetivas [correspondência um a um] no sentido que o ponto A coincide com B' e B coincide com A'. Assim, tal transformação não é um homeomorfismo.

Terceira prova:

Na terceira prova, busquei as relações de vizinhança de pontos mediante transformações da faixa em anéis circulares. Forneci uma faixa azul (figura 3) a cada dupla. Solicitei que demarcassem uma linha tracejada no sentido longitudinal pelos pontos médios dos dois lados AB e A'B'. Além disso, solicitei que marcassem dois pontos P e Q próximos um do outro, sobre essa linha tracejada, e mais próximos de um dos lados da faixa do que do outro. Com isso quis investigar se os alunos percebem a relação de vizinhança entre pontos e se após a colagem, mesmo sem a terem realizado, as relações se mantêm ou não. Para tal, foram feitas perguntas em seqüência como segue.

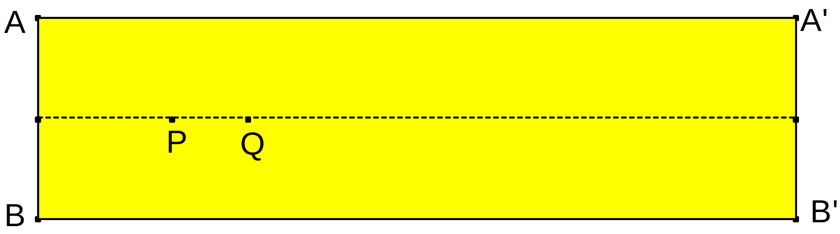


Figura 3 – Faixa dupla face colorida com pontos vizinhos

a) Perguntei o que ocorreria se fossem colados os lados AB e A'B' fazendo coincidirem os pontos A e A' bem como B e B'.

(ANE; VER): "antes de unir as fronteiras, P está mais próximo de AB e Q está mais próximo de A'B', após a união das fronteiras, P está mais próximo de A'B' e Q também. Os pontos AB e A'B' estão bem afastados, após a união das fronteiras ficam bem próximos".

Observei que, sem ter feito a colagem, a dupla não percebe que a ordem em relação a AB permanece, pois A'B' coincide com AB. Entretanto a dupla entende que há uma inversão dessa relação de proximidade em relação aos lados opostos da faixa inicial.

(SIN; LUC): "antes da colagem: os pontos P e Q estão mais próximos de B e A, sendo a figura uma reta. A' e B' estão mais distantes e mais próximos de Q. Após a colagem: Os pontos P e Q estão na mesma distância de A e B, A' e B' sendo que P está mais próximo e Q está mais distante".

Observei que a dupla percebe que a transformação geométrica realizada elimina uma das distâncias, aquela de A'B', e a referência passa a ser em relação ao primeiro lado AB.

(REJ; VIT): a dupla percebe que, ao realizar a colagem, a relação de aproximação e vizinhança muda, enquanto que a distância permanece inalterada. "No primeiro momento, antes da colagem, os pontos P e Q encontram-se de tal forma que o ponto P está mais próximo de A e B do que Q e o ponto Q, está mais próximo de A' e B’ do que P. Após a colagem, os pontos A e A’ são sobrepostos e os pontos B e B’, também. Dessa forma, o ponto P encontra-se mais próximo de A, A’, B e B’ do que Q, no entanto, a distância entre os pontos permanece a mesma. Com isso concluímos que a relação de aproximação e vizinhança muda e a relação de distância permanece a mesma”.

(GRA; PAT): expressam de forma clara as relações obtidas antes e depois da colagem, dizendo: “com a figura aberta, a distância de P até A’B’ é maior do que a de Q até lá. Quando é feita a colagem, isto se inverte, pois o P fica mais próximo de A’B’ e Q fica mais distante. Em relação ao lado AB, não houve alteração nas distâncias dos pontos P e Q com a colagem da figura. A distância entre os pontos P e Q não tem alteração com a colagem e a distância entre AB e A’B’ era uma, e com a colagem estes pontos passam a coincidir”.

Até onde é possível perceber, concluí dessa análise que os alunos estabelecem as relações de aproximação, mostrando que essa relação se encontra bem formada, inclusive a relação de ordem que fica estabelecida.

b) O que ocorreria com essa relação de vizinhança entre os pontos se fosse feito um corte transversal no anel, retornando ao estado de faixa?

As dificuldades apresentadas foram inúmeras durante a exploração do anel, sem realizar o corte, principalmente no que diz respeito à expressão tanto verbal quanto escrita das hipóteses que iam sendo levantadas. Tive de intervir e sugerir que pensassem em várias possibilidades de corte. Isto significa que os alunos ainda não têm bem formada a idéia de possibilidades diversas de obtenção de resultados quando a tarefa não é fechada como essa, não tendo sido especificado onde deveria ser cortado o anel, deixando a critério dos alunos da dupla o levantamento dessas possibilidades.

(CRI; CAR): fecharam questão dizendo que os pontos P e Q ficariam afastados. Perguntei: “é essa a única possibilidade de realizar o corte?” ao que respondem “não, não, podemos fazer o corte em outros pontos diferentes, mas aí os pontos continuam do mesmo jeito”. Continuei: “mas tanto faz vocês cortarem antes de P ou depois de Q, dá a mesma coisa?” As alunas param, pensam, tocam com o dedo o material, mudando a posição do dedo que corresponderia ao ponto onde cortariam o anel e finalmente fazem o registro: “se o corte fosse feito entre os pontos P e Q eles (os pontos P e Q) não seriam mais vizinhos, ficariam quase nas extremidades da faixa, se o corte for feito em qualquer outro ponto eles continuariam vizinhos, porém se o corte fosse feito após o ponto Q, o ponto P ficaria mais próximo ao vértice e se o corte fosse feito antes do ponto P o ponto Q ficaria mais próximo ao vértice". Observei aqui a dificuldade do uso de nomenclatura adequada e a dificuldade dos estudantes em expressarem em linguagem matemática idéias e conceitos. Quando se referem à proximidade de vértices, estão querendo se referir ao lado AB ou A'B' depois da colagem.

VER está mais adiantada no curso, é monitora de disciplinas de Cálculo, tendo maior facilidade de expressar-se matematicamente, embora a dupla, durante a pesquisa, manifestasse, em diversas oportunidades, grandes dificuldades com visualização. Assim, (ANE; VER) respondem: "corte antes do P → P e Q permanecem próximos; P e Q distantes e A'B'. Corte entre P e Q → P próximo de AB e Q distante de A'B' e P e Q distantes entre si. Corte após Q → P e Q permanecem próximos e próximos a A'B'.

(SIN; LUC): a dupla assim se expressa: "Se cortarmos antes de P, Q ficaria mais próximo de B', A'; B', A' e P e Q continuariam 'vizinhos'. Se cortarmos entre P e Q, P ficaria mais próximo de B, A; B', A' e P e Q não seriam mais 'vizinhos'. Se cortarmos após Q, P ficaria mais próximo de B, A; B', A' e P e Q continuariam 'vizinhos' ".

A relação de vizinhança é expressa em termos de distância pela dupla (GRA; PAT), mas confundem o conceito de vértice de uma figura plana com lados de um polígono. Como em outros momentos se expressavam usando 'fronteira'; percebe-se que o uso da palavra não foi significativo para ambas. Como o objetivo do experimento não era o de caracterizar tais conceitos, não explorei o tema junto aos pesquisados.

(GRA; PAT): "Se o corte for feito entre AB e P, haverá novos vértices (AB e A'B'). Neste caso P fica mais próximo de AB do que o ponto Q e Q fica mais próximo de A'B' do que o ponto P. Entre P e Q a distância não se altera, continuam 'vizinhos'. Se o corte for feito entre AB e Q, levando em consideração novos vértice (AB e A'B'), Q é mais próximo de A'B' do que o ponto P e P é mais próximo de AB do que Q. A distância em P e Q não se altera, continuam 'vizinhos'. Se o corte for feito entre P e Q, P será mais próximo de A'B' do que Q, Q será mais próximo de AB do que P. A distância entre P e Q aumentará, será a distância de AB até A’B’ menos a distância inicial entre P e Q, e então se perde a relação de vizinhança.”.

Assim como a dupla anterior, a dupla (NAI; THA), apesar de toda a experiência em sala de aula de NAI, faz confusão sobre o que seja vértice de um objeto matemático.

(NAI; THA): “Somente cortando entre os pontos P e Q, a vizinhança entre estes dois pontos se desfaz. Se cortarmos entre a união dos vértices e o ponto Q o vértice A e B continua mais perto do P. Se cortarmos entre o ponto P e o vértice o ponto P não fica sendo mais o ponto mais perto do vértice”.

Feita a análise e a escrita das hipóteses de cada dupla eu disse que poderiam cortar os anéis naqueles pontos sobre os quais não tivessem tanta convicção. Entretanto, todos dispensaram o corte por terem percebido as relações, quer percorrendo os caminhos entre os pontos com os dedos, quer pela simples observação. Considero, entretanto que a prova não foi tão simples e tão rápida quanto esperada, mas que o fato de poderem observar, manusear, alterar o ângulo de visão permitiu obterem conclusões e descobertas relevantes para a construção de pensamento geométrico desses futuros professores e que as relações topológicas de vizinhança e separação não tinham sido construídas embora alguns já tivessem cursado até três disciplinas de Geometria.

Quarta prova:

A quarta prova buscou mostrar que é possível a obtenção de quadriláteros por análises e descobertas das relações topológicas, em especial a de vizinhança, que é desfeita mediante colagem e corte de anéis com faixas coloridas.

Forneci duas faixas de cores diferentes e obtidos dois anéis independentes. Solicitei que as faixas fossem coladas formando dois anéis tendo um uma linha tracejada para fora e outro, uma linha tracejada para dentro (figura 4). Além disso, pedi que as duas linhas tracejadas se cruzassem ortogonalmente em um ponto M, deixando P e Q interceptados por M pela linha tracejada do outro anel e da mesma forma, que R e S fossem interceptados por M pela linha tracejada do outro anel.

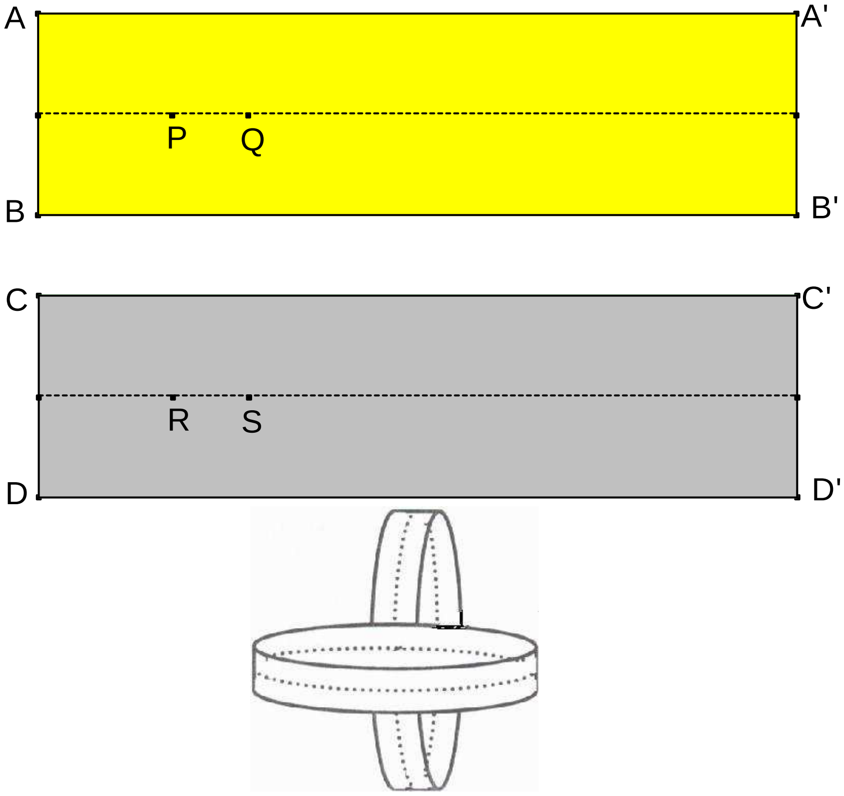


Figura 4 – Faixa dupla face colorida com pontos vizinhos e anéis[13]

Os alunos foram orientados a que os cinco pontos ficassem vizinhos. Perguntei oralmente aos alunos “qual é a relação de vizinhança que os pontos mantêm após um dos anéis ser cortado transversalmente?”. Pedi também que fossem feitas conjecturas de como ficariam os dois pontos da linha pontilhada quando o primeiro anel fosse cortado ao longo da mesma. E se o outro anel também fosse cortado pela linha tracejada, qual seria a relação entre os quatro? Orientei que primeiro pensassem sobre cortar nos dois pontos de cada uma das linhas e em seguida nos quatro em conjunto. Que figura geométrica resultaria após os dois cortes serem feitos?

Os alunos foram ainda orientados, após o registro das conjecturas anteriores, a cortar o primeiro anel e a conjecturar novamente sobre qual objeto resultaria após o recorte no segundo anel.

A análise dos dados do estudo feito me mostrou que as provas anteriores foram relevantes para a obtenção das relações de vizinhança e de separação obtidas. Entretanto, os alunos tiveram certa dificuldade de compreender a separação

[13] A figura dos anéis constantes da figura 4 foram retiradas de REGO, Rogéria Gaudencio do, REGO, Rômulo Marinho do. Matemáticativa II. João Pessoa: Ed. Universitária/ UFPB, 1999, p. 96.

de uma região plana pelas linhas tracejadas que se cruzam no ponto M, dividindo essa região em quatro outras, formando ângulos retos.

(NAI; THA): a dupla teve que recortar os anéis, não conseguiu formular hipótese correta. As alunas perceberam inicialmente a relação de vizinhança entre os quatro pontos, mas não levaram em consideração o ponto M, separando cada par de pontos de uma das linhas de um anel em dois segmentos formando ângulo reto.

(CRI; CAR): a dupla percebeu que as quatro linhas formavam um paralelogramo propriamente dito, mas colocavam sobre os vértices desse paralelogramo uma espécie de ângulo reto, sem saber localizar como isso seria. Os quatro pontos eram representados como vértices do paralelogramo e o ponto M nem era representado. Solicitei que pensassem a respeito desses pontos em relação ao ponto M e onde ele estaria. CRI passa duas linhas ultrapassando os lados do paralelogramo e se cruzando num ponto interno à região limitada por este, dizendo que ali está M. Retoma o esboço feito e diz: “não pode ter os lados inclinados”. Volta à pretensa representação dos ângulos retos e os localiza agora perfeitamente, concluindo que os quatro pontos não podem ser os vértices e sim os pontos onde as duas linhas cortam os lados. Elas concluem que o objeto é um quadrado. Recortam para conferir com grande satisfação pela comprovação da descoberta.

(ANE; VER): “Ao cortar uma das tiras no tracejado, ficaremos com uma tira e ½ anel em cada extremidade. Os pontos da tira cortada no tracejado mantêm a mesma vizinhança e na outra tira, seus pontos perdem a vizinhança. Ao cortar o segundo anel, obteremos um quadrado”.

(SIN; LUC): “Antes do corte temos como vizinhos S e L; E e A. Com o corte, os pontos S e L se separam, ou seja, deixam de ser vizinhos. E os pontos E e A continuam sendo vizinhos e formariam uma figura com dois anéis (algemas) e uma fórmula retangular. Dando continuidade a letra A, realizados um novo corte, os pontos E e A se separam, ou seja, deixam de ser vizinhos. O ponto central passa a ser o vértice do quadrado”.

(GRA; PAT): “As duas faixas com linhas tracejadas no seu ponto médio, foram colocadas de forma que as linhas tracejadas fiquem perpendiculares. Em cada linha há dois pontos “vizinhos” B e C, G e M. No momento do corte, B e C continuam ‘vizinhos’ e perde-se a relação de vizinhança entre G e M. Cortando a linha tracejada do outro anel, forma-se um quadrado.”.

(REJ; VIT): “Ao cortarmos a faixa vermelha que possui os pontos E e F no seu tracejado perpendicularmente a faixa laranja que possui os pontos G e H em seu tracejado, percebemos que o anel vermelho se transforma em dois outros anéis ligados pela faixa laranja. Dessa forma, vimos que os pontos E e F mantêm a relação de vizinhança, mas os pontos G e H se distanciam. Ao cortarmos o tracejado da faixa laranja, percebemos que a distância do ponto de origem O em relação aos demais pontos não muda este ponto O passa a ser os vértices de um quadrado que se forma”. A análise feita pela dupla mostra que houve um avanço significativo das relações de vizinhança e separação de pontos mediante as operações de colagem e de recortes das faixas, em relação às provas iniciais.

3.2.3 Análise do experimento 1

Da análise dos resultados das provas considero ser possível afirmar que propriedades topológicas são importantes para formação do professor de Matemática, em concordância ao que pregam as Diretrizes Curriculares Nacionais no que diz respeito ao enriquecimento cultural dos futuros professores, e, portanto, devem ser utilizadas na organização curricular da Licenciatura em Matemática. Essas relações, em geral não são estudadas na licenciatura, conforme análise de currículos de cursos do Rio Grande do Sul, constante deste trabalho. Quando a disciplina Topologia consta de algumas grades curriculares, em geral no bacharelado, ela é ministrada exclusivamente em seu aspecto formal.

Percebo a importância do desenvolvimento de atividades que estimulem a visualização dos alunos. Muito embora se tenha utilizado material manipulativo simples, como as faixas de papel coloridas, o simples manuseio desse material e sua exploração já permitem a obtenção de conclusões corretas, não havendo nem mesmo a necessidade de os participantes completarem todos os passos previstos em algumas das provas realizadas, ou seja, realizarem completamente as colagens para obtenção de novos objetos ou mesmo a separação mediante cortes dos objetos espaciais. Isso corrobora o que Klotz (1991) afirmou, de que em determinados períodos da história o aprimoramento de práticas educativas utilizando ajudas visuais constituem-se em importante pedagogia para a formação e os experimentos mostraram que, mesmo fora da faixa etária preconizada por Piaget e Inhelder (1993), os alunos da Licenciatura em Matemática podem obter conceitos matemáticos abstratos por meio de experiências, como apontado por Skemp (1993). Há um estímulo e apelo ao estilo visual e experimental para a investigação matemática pelos alunos durante a pesquisa, confirmando o que Goldenberg (1991) afirma. Para um grande número de estudantes, dentre os quais os participantes do experimento, sequer há clareza quanto a um quadrado também ser um retângulo e um losango.

Após a descoberta do quadrado formulei algumas perguntas tais como “qual figura resultaria do último experimento se as faixas não fossem todas de mesmo comprimento?”, sendo imediatamente respondido que seria retângulo. “E se as faixas fossem de mesmo comprimento, porém não coladas ortogonalmente?” Responderam também rapidamente, “um paralelogramo” (aquele do senso comum). “E para ser um losango, o que deveria ocorrer?” Embora demorando algum tempo responderam que as faixas deveriam ter mesmo comprimentos e que os anéis deveriam ser colados não ortogonalmente.

Do que pude perceber pela realização do experimento, os alunos nesse nível de escolaridade ainda não apresentam conhecimento de conceitos topológicos elementares e próprios da educação infantil, segundo os estudos de Piaget e Inhelder (1993), uma vez que, para esses autores, o conhecimento de propriedades topológicas ocorre anteriormente ao de propriedades euclidianas no desenvolvimento cognitivo. Os sujeitos investigados, numa faixa etária muito além daquela dos sujeitos investigados pelos autores, ainda desconhecem tais propriedades, muito embora já tenham estudado alguns conceitos de Geometria Euclidiana, sem conseguirem classificar corretamente quadriláteros.

Foi possível perceber na aplicação dos experimentos, pelo diálogo com os alunos, por meio de constantes questionamentos, que intuir propriedades de pontos vizinhos, conservar ou não essa relação pela colagem e corte na tira, proporcionou uma forma de construção de conhecimento, especialmente no sentido de intuição empregado por Fischbein (1987), ou seja, intuição como forma de produzir conhecimento.

Assim, ao estimular a imaginação dos investigados, antes da concretização das atividades, juntamente com a chamada à intuição do que iria ocorrer com a sua realização e, finalizada com a visualização do objeto formado, comprovando ou rejeitando a hipótese intuitiva levantada previamente, foi possível construir uma classificação de quadriláteros por meio do uso de algumas propriedades topológicas elementares, como, por exemplo, a de vizinhança. Isso confirma o preconizado por Kilpatrick (1994) de que visualização é uma área de pesquisa atual, e as pesquisas brasileiras de Andrade e Nacarato (2004), estão nela inseridas.

O experimento me remeteu ainda ao que Hilbert e Cohn-Vossen (1932) afirmou, de que teorias como a da Topologia, ao fazerem uso da intuição concreta e pelo uso extensivo de raciocínio abstrato, desempenham importante e valoroso papel na pesquisa em Geometria. Além disso, creio me autorizar a defender a introdução na Licenciatura em Matemática de tal tema, uma vez que apenas três cursos, dentre os oito investigados, tinham em seus currículos algum tópico de Topologia ou de Geometria Diferencial, de forma explicita.

Dessa forma, esse experimento me esclareceu uma das respostas de Davis e Hersch (1985), à pergunta “O que é matemática?” Perceber que elementos básicos, como lógica e intuição, análise e construção, se adequam perfeitamente à investigação realizada e permitem um desenvolvimento de idéias matemáticas básicas com uma melhor e mais profunda compreensão de quadriláteros, um tema de matemática básica fundamental, desenvolvido na formação inicial do professor, devido a ter ligação direta com temas que são abordados na escola básica, como pregado por Ball e Ma (1994, apud Loureiro, 2004).

3.3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO EXPERIMENTO 2

Apresento aqui um relato de experimento realizado durante a disciplina Recursos Tecnológicos e Educação Matemática ministrada pela professora Suely Scherer, no Programa de Pós-Graduação em Educação – Linha de Pesquisa em Educação Matemática, desenvolvida no primeiro semestre de 2008. Uma das atividades da disciplina consistiu no planejamento e execução de uma oficina utilizando um software específico, indicado pela professora a cada aluno. A oficina foi oferecida em dia pré-estabelecido no planejamento inicial da disciplina. Os participantes foram os sete alunos da disciplina e cada oficina teve duração de uma hora. Coube-me planejar e executar a primeira oficina, utilizando o software Cabri-Géomètre II.

A atividade foi realizada com os sete alunos e nem todos conheciam o software. Cinco participantes tinham graduação em Matemática e duas eram formadas em Pedagogia, sendo uma delas em área tecnológica. A atividade foi realizada em duplas, tendo sido inicialmente fornecida aos alunos a página do Cabri, de onde poderiam obter uma versão *free* do programa. Foi fornecido, anteriormente à atividade, um pequeno tutorial que planejei com a finalidade de uma rápida familiarização com o software. A concepção de construcionismo foi utilizada para a construção de conceitos geométricos, em particular o de altura de triângulo.

A disciplina iniciou com um fórum de discussão e no primeiro deles levantei uma questão que me preocupa há algum tempo, que é a dificuldade que alunos e professores encontram no conceito de altura de triângulos. Assim, optei por buscar a construção deste conceito utilizando uma ferramenta computacional, considerando que a informática é atualmente uma importante aliada às questões educacionais. De minhas leituras preliminares sobre imaginação, intuição e visualização percebi que poderia tirar proveito da atividade além de simplesmente planejar e executar uma oficina.

Para Almeida (2000, p. 20), “muitos dos desafios enfrentados atualmente têm a ver com a fragmentação do conhecimento, que resulta tanto de nossa especialidade quanto, e principalmente, do processo educacional do qual participamos". Assim é que se podem perceber os obstáculos didáticos e, consequentemente, epistemológicos criados na escola básica sobre o conceito de altura de triângulos.

Em geral, na escola básica, ao tratar do tema em apreço, o professor apresenta 'definição' de altura de triângulo [grifo o termo, pois acredito que não ocorre construção deste conceito] e apresenta o objeto de estudo como na figura 5. O aluno passa a conceber altura como sendo o segmento de reta que parte do ponto C até encontrar o lado AB, nesta posição vertical, criando-se um obstáculo epistemológico de que a altura depende da verticalidade de um segmento em relação a um lado do triângulo e não do perpendicularismo do segmento à reta suporte do lado oposto.

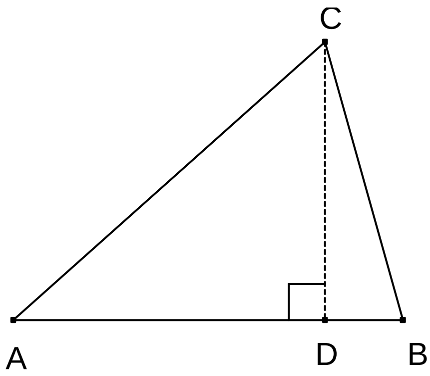


Figura 5 – Altura do triângulo ABC

É possível que uma dificuldade encontrada pelo professor esteja no processo estático de representações geométricas, por ser lento e depender de habilidades que os indivíduos deveriam ter desenvolvido nas séries iniciais de sua escolaridade e, ainda mais, de representações mentais de determinados conceito. Dessa maneira, parece ser conveniente ao professor continuar com sua forma tradicional, obtida em sua formação inicial, de definir, dar exemplos e seguir modelos. Para Sancho (2006), a sala de aula deve ser ampliada de modo a tornar-se um ambiente comunicativo onde professores e alunos possam atuar numa nova perspectiva do que seja interação entre as partes.

Segundo Borba e Villarreal (2005), existe na comunidade de educadores matemáticos um interesse em aspectos experimentais de Matemática. "Assim como no caso de matemática, diferentes perspectivas sobre a noção de experimentação também coexistem na comunidade de educação matemática." (p. 71). Dessa forma, os autores afirmam que se pode dizer que uma abordagem experimental em educação matemática implica:

- o emprego de tentativa de procedimentos e de julgamentos que suportem a geração de conjecturas matemáticas;
- a descoberta de resultados matemáticos previamente desconhecidos para experimentar;
- a possibilidade de testar maneiras alternativas de gerar um resultado;
- a chance de propor novos experimentos;
- uma maneira diferente de aprender matemática. (BORBA e VIlLARREAL, 2005, p. 75)

Dessa forma, para pensar em um experimento que vise pesquisar como o conceito de altura de triângulos pode ser reconstruído, levanto uma hipótese de que ele é dependente da verticalidade, pelo senso comum, e não do perpendicularismo da reta que contem um vértice do triângulo à reta suporte do lado oposto.

Segundo Borba e Villarreal (2005, p.75), o tratamento experimental ganha força ao se utilizar tecnologias, pois ele proporciona:

- a possibilidade de testar uma conjectura usando um número maior de exemplos e de oportunidades de repetir o experimento, devido ao rápido *feedback* proporcionado pelo computador;
- a oportunidade de fornecer diferentes tipos de representações de uma dada situação mais facilmente;
- uma maneira de aprender matemática que se alinha com modelagem e tratamento pedagógico.

No que diz respeito aos procedimentos sobre representações visuais, a utilização de um software gráfico como o Cabri-Géomètre II apresenta a possibilidade de fazer o vértice do triângulo percorrer muitas posições, de modo que a reta que passe por esse vértice encontre o lado oposto ou não, fazendo-se necessário considerar não apenas esse lado e sim sua reta suporte, o que vai dar início à construção do conceito de altura observado na tela do computador. Para realizar essa busca por métodos convencionais, talvez o aluno não tivesse o discernimento necessário para realizar muitas construções e o professor optasse por ir diretamente ao esperado para a construção do conceito, o que inviabilizaria a descoberta por parte do aluno, até mesmo pela lentidão de várias representações com uso de materiais como régua e compasso.

Para Borba e Villarreal (2005), visualização é um tema considerado em Educação Matemática como sendo uma forma de raciocínio matemático e pesquisas nessa área têm sido abundantes, embora apresentem vantagens e desvantagens. Ao buscar a compreensão de que a altura de um triângulo independe da verticalidade, a visualização proporcionada pelo computador permite que, de forma dinâmica e rápida, o triângulo possa ser movimentado e a reta que contem o vértice, pelo qual passa a reta que é perpendicular à reta suporte do lado oposto possa ocupar muitas posições além da vertical, a qual é comumente apresentada nos livros didáticos e nas salas de aula, segundo minha vivencia profissional durante observações de estagiários da Licenciatura em Matemática.

A partir dessas concepções de uso de tecnologias e da necessidade de mudança na forma de conduzir os processos de ensino e de aprendizagem na escola básica, incorporando o uso do computador na construção de um pensamento geométrico, planejei o trabalho, segundo a concepção construcionista, visando levar os participantes à construção do conceito de altura de triângulo.

3.3.1 Atividade que antecedeu a oficina

Antecipadamente à execução da oficina foi proposto um tutorial para auxiliar os participantes a se familiarizarem com o software, o qual foi disponibilizado no fórum da disciplina. Inicialmente foi indicado o processo de instalação e inicialização do programa, sendo logo a seguir propostas atividades em que houvesse uma interação entre o sujeito da aprendizagem, a máquina e o programa. Assim, encaminha-se a seguinte orientação: “**Os espaços vazios na caixinha devem ser completados sucintamente com o que encontrar por lá! Não se assuste!!!! Arrisque-se!!!! Atreva-se!!!.”**

- uma flecha:
- um ponto:
- retas:
- curvas:
- construir:
- transformar:
- macro:
- verificar propriedade:
- medir:

- exibir:
- desenhar:
- Click no menu ARQUIVO. Que comandos você encontrou por lá?
- Click no menu EDITAR. Que comandos você encontrou por lá?
- Click nos outros três menus. Você utiliza o Windows? Que comparações pode fazer neste momento entre este software e o Windows?

Desta forma, acredito que ao chegar à oficina, no dia especificado para tal, os participantes já tenham certa familiaridade com o Cabri em função da curiosidade despertada, interesse pela aprendizagem de uma nova ferramenta para o ensino e por terem a possibilidade de discussões no fórum aberto com o objetivo de que o grupo trabalhasse à distância fora dos horários de encontros presenciais.

3.3.2 A oficina

Embora fosse concebido o processo construcionista na oficina, para que o aluno buscasse, criasse, formulasse e discutusse, algumas orientações parecem ser necessárias, a fim de poder ser estabelecido diálogo entre os alunos e o professor, uma orientação das atividades. Dessa forma, orientar a nomeação de pontos e retas, por exemplo, teve exclusivamente esse objetivo.

<u>A reta</u>

• Se você está com o software disponibilizado e sua tela tem algo escrito, o que você faria?

• Com a tela limpa, desenhe uma reta [se desejar facilitar as descrições posteriores a denomine, por exemplo, por **r**].

• Que alternativas você encontrou para fazer isto?

• Compare com a construção de seu colega.

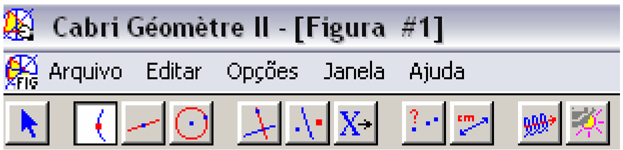
• Lembrou de algum axioma, teorema ou alguma outra idéia matemática para esta construção que fez? Se lembrar, então escreva no quadro abaixo qual foi.

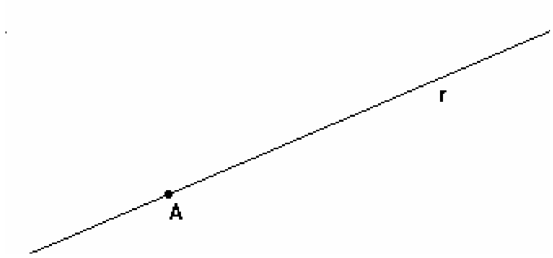
<u>Obs</u>.: Os alunos se detiveram na construção da reta por um bom tempo. Alguns não conseguiam fazer com que a reta “estacionasse”, pois não estavam se dando conta de que, ao clicar o primeiro ponto, estavam definindo um feixe de retas passando por aquele ponto e que, para que ficasse definida a reta, um segundo ponto deveria ser escolhido, clicando sobre ele. Isso ocorreu mesmo com os professores que tinham formação matemática, o que indica não terem associado a teoria aprendida na formação inicial pois, segundo a axiomática de Hilbert, uma reta fica determinada por dois pontos distintos ou por uma ponto e uma direção.

Acredito que seriam bem complicados os questionamentos tanto do professor quanto dos alunos se não houvesse a nomeação. A seguir são apontados os questionamentos e procedimentos que foram disponibilizados para a realização da oficina.

O ponto e a reta

• Desenhe um ponto sobre a reta que foi simbolizada por **r.** [denote-o, por exemplo, por **A** para facilitar as descrições futuras].





• Coloque o mouse sobre o ponteiro e o deixe iluminado, como aparece abaixo.

• Chegue próximo ao ponto A e veja o que acontece...

• O computador dialogou com você! O que ele te pergunta?

• Arraste o mouse clicando sobre A em qualquer direção.

• A reta **r** vai junto?

• Se não for, discuta com seu colega se a dele foi, ou com o professor. Busque as causas de uma situação e de outra.

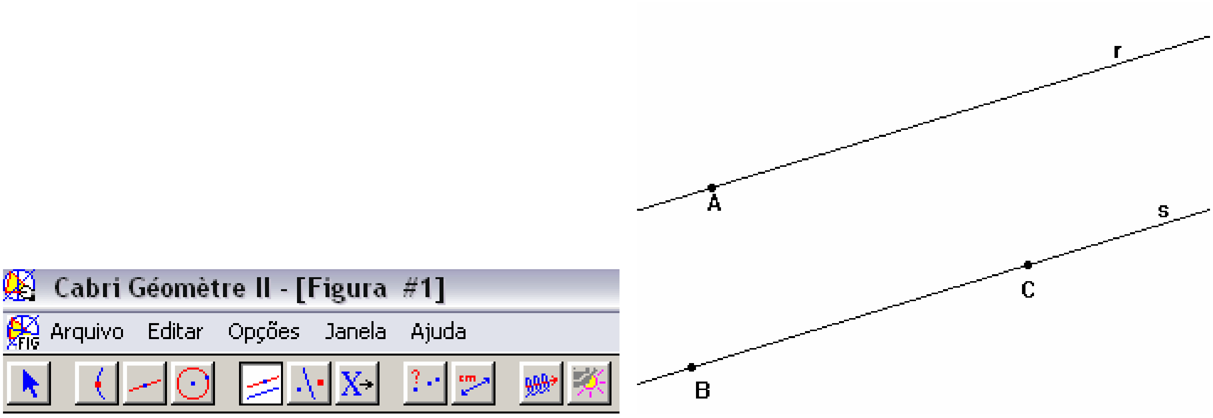
• Conclua no quadro abaixo o que se encontra por trás da máquina que faz com que o ponto se mova junto com a reta.

Obs.: Uma dificuldade inicial ocorreu antes de os alunos abrirem a janela com o comando “ponto sobre objeto”, havendo uma tendência natural em tentar clicar em um ponto sobre a reta, visualmente, não sendo levado em consideração o sistema computacional, que não é contínuo e sim discreto e, dessa forma, o programa é quem ditará o que deve ser feito e não a intuição visual.

Uma reta paralela e dois pontos sobre ela

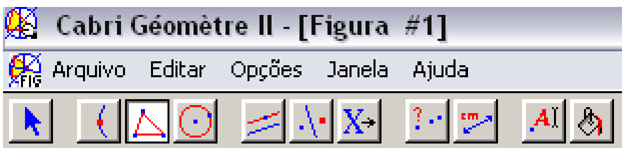
• Agora você já sabe que não pode confiar nos seus olhos, na simples ‘visualização’, pois por trás da máquina existe uma matemática discreta, isto é, são pontos isolados, embora não se perceba a separação entre eles. [O sistema binário, atualmente não mais ensinado na escola, está por trás disto.]

• Desenhe uma segunda reta denominando-a, por exemplo, por **s**, paralela a **r**, e sobre ela marque dois pontos distintos denominando-os, por exemplo, por **B** e **C**.



Obs.: Novamente, uma falta da analogia com a axiomática se fez presente nos alunos e, quando questionados sobre o que permite tal existência de paralelas e de sua unicidade, a maioria não conseguiu se expressar adequadamente na linguagem formal. Dois dos alunos se deram conta do axioma que permite enunciar a existência de uma única reta passando por um ponto fora de uma reta dada e paralela a essa. Dois disseram acreditar, pelo que foi discutido antes, existir algum axioma ou teorema garantindo a existência de uma paralela única.

• A, B e C, construídos desta forma, não estão alinhados, não pertencem a uma mesma reta. Assim, da axiomática devida a Hilbert [que dizemos Euclidiana] existe um triângulo cujos vértices são estes pontos. Como você construiria este triângulo usando o Cabri? Tente e preencha com cor o interior do triângulo.



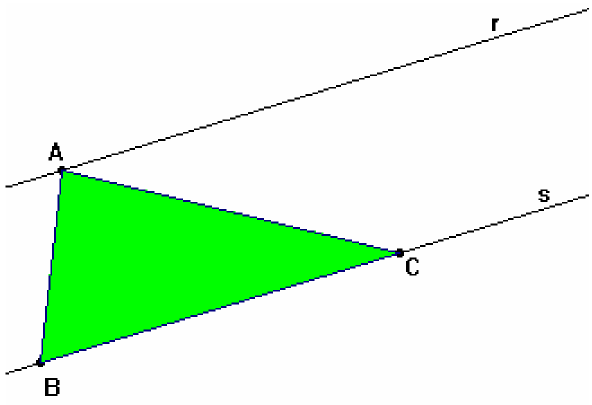


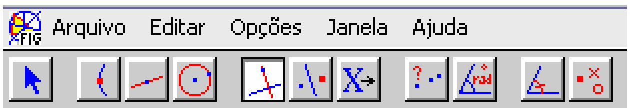
Figura 6 – Altura do triângulo

<u>O triângulo</u>

• Movimento o vértice A do triângulo ABC ao longo da reta **r**, enquanto analisa o que ocorre com o ângulo de vértice B.

• Quais tipos de triângulo se obtêm?

• Conduza por A uma perpendicular à reta **s**. Note que ao encontrar na janela "perpendicular" [quinta da esquerda para a direita] terá de colocar o cursor próximo ao ponto A ou à reta **s**. O computador vai dialogar com você. O que ele te pergunta?



<u>Obs</u>.: Não houve maior dificuldade na obtenção do triângulo e todos se empolgaram com a possibilidade de obtenção de vários tipos de triângulos a partir desse tipo de construção, tanto em relação aos lados quanto aos ângulos internos dos triângulos.

• Denote esta reta, por exemplo, por **t** e obtenha sua intersecção com s [segunda janela] e denote este ponto, por exemplo, por **D**.

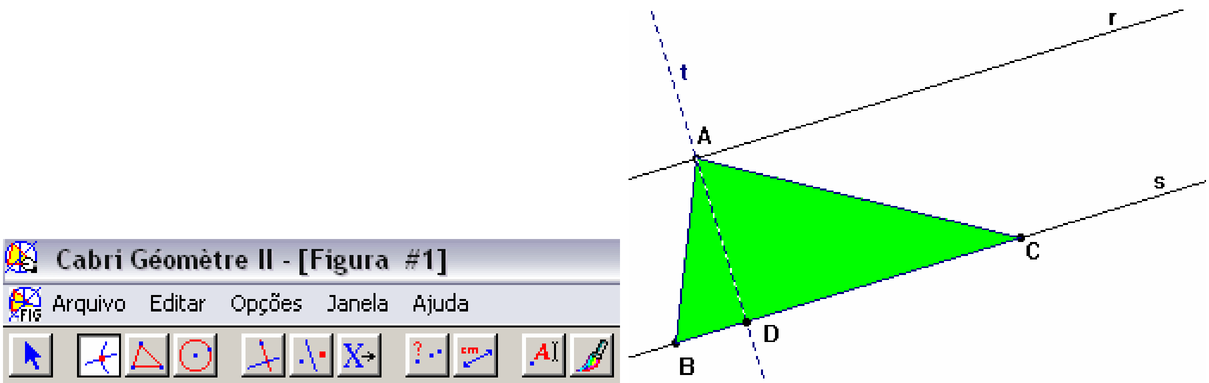
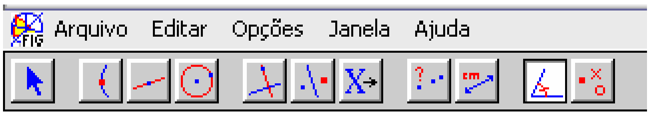


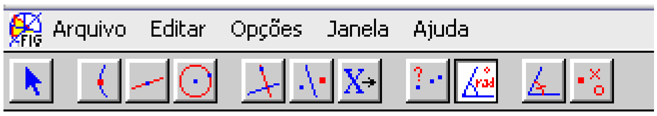
Figura 7 – Pé da perpendicular baixada do vértice do triângulo

• Na nona janela e na décima aparece a palavra ângulo. Experimente uma e outra e procure ver o que difere uma da outra.

• Vá à décima janela e clique em marcar ângulo, deixando-a luminosa. Vá ao triângulo e clique nos pontos A, D e B, nesta ordem. O que acontece? E se você tivesse clicado em outra ordem? Qual é a notação conveniente para ângulo?



• Retorne à nona janela e clique em marcar ângulo, deixando-a luminosa. Vá ao ângulo e veja o que ocorre.



• Movimente o ponto A ao longo da reta **r**, observe o que ocorre e por onde anda o ponto D. Observe também o ângulo ADB e sua medida.

• A reta **t** intersecciona sempre o lado BC do triângulo? Discuta com seu colega ou com o professor sobre isto. O que a reta **t** intersecciona? Qual a relação entre a reta **t** e o lado BC do triângulo?

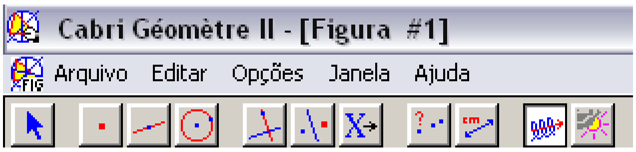
• Se desejar, obtenha o lado BC do triângulo. [Como fazer isso?!?!?!?!?]. Experimente colocar uma espessura diferente daquela do triângulo. [Como fazer isso?!?!?!?!?]

<u>Obs</u>.: Confirmações das questões refletidas anteriormente sobre classificações de triângulos quanto aos ângulos foram nesse momento realizadas. A possibilidade da reta passando por um vértice e sendo perpendicular ao lado oposto do triângulo, como é descrita em geral no senso comum ao definir alturas de triângulos associadas à verticalidade e a triângulos acutângulos, foi descartada, uma vez que a reta perpendicular ao lado oposto a um vértice do triângulo passando por esse vértice, ao movimentá-lo, nem sempre encontrava o lado e sim a reta suporte a esse lado. Esse foi o grande ponto de discussão da aula e talvez o mais importante para o conceito de altura de triângulos.

Altura do triângulo relativa a um lado.

• Marque o segmento da reta **t** de A até D, deixando-o tracejado e de uma espessura diferente daquela da reta **t**.

• Esconda a reta **t** e movimente o ponto A. É cansativo? Experimente animar colocando a mola no ponto A [décima janela – animação] e veja o que acontece. Como você deve usar a mola?



• Mande medir este segmento AD antes de movimentar o ponto A. O que se pode dizer?

• Percebeu-se que esse segmento AD é perpendicular à reta **s**, independentemente de onde se encontra o ponto A, que med (AD) é sempre a mesma, que a reta **s** contem o lado BC, oposto ao vértice A; então formule uma definição para a altura do triângulo ABC relativa ao lado BC, ou relativa ao vértice A.

Obs.: na formulação do conceito de altura de um triângulo relativa a um vértice foi levado em consideração por todos os alunos que esta se encontra sobre a reta que passa pelo vértice sendo perpendicular à reta suporte do lado oposto, o que inicialmente demonstra que a seqüência elaborada até este momento atingiu o seu objetivo.

As três alturas do triângulo.

• Agora que você já sabe o que é altura de um triângulo relativa a um lado, elabore no quadro abaixo uma estratégia para obter a altura relativa ao vértice B, ou seja, ao lado AC.

Sugestão:

• obter uma reta contendo o lado (AC).

• obter a perpendicular (u) a esta reta pelo vértice oposto (B)

• interseccionar u com a reta suporte do lado AC em E.

• Marcar o segmento de reta BE.

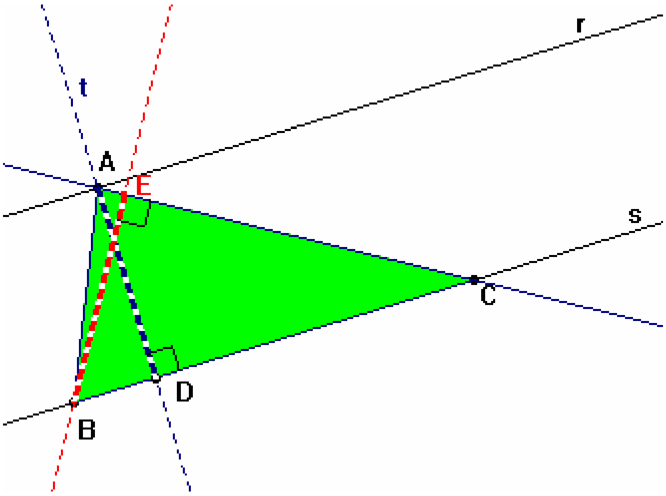


Figura 8 – Três alturas do triângulo

<u>Obs</u>.: No momento em que todos se deram conta da questão do perpendicularismo em relação à reta suporte do lado oposto, não houve maiores dificuldades para o grupo verificar a existência de três alturas de um triângulo, o que motivou uma discussão a respeito de que na escola, em geral, esse conceito é apresentado como sendo de uma única altura. Ainda mais, o conceito de ser único ocorre em virtude de ser apresentado aos alunos a partir de um triângulo com um dos lados na horizontal, acutângulo, e a partir de um vértice que se encontra no semiplano superior ao determinado por esse lado. Assim, o conceito de altura fica ‘visualmente’ associado ao de verticalidade e não de perpendicularidade, ocasionando um obstáculo epistemológico grave, no meu entender.

• Obtenha a altura do triângulo relativa ao lado AB, isto é, ao vértice C [note que a figura abaixo tem outro visual do que a anterior; você consegue movimentar a anterior e deixá-la desta nova forma?]. Experimente.

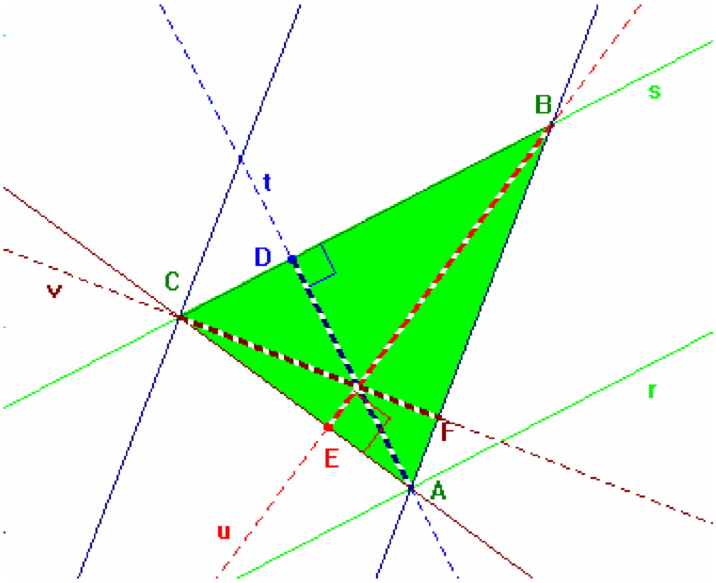


Figura 9 – Intersecção das três alturas do triângulo

<u>As alturas de triângulo concorrem em um mesmo ponto.</u>

• Obtenha a intersecção das três alturas nas construções que realizou. O que você pode concluir?

• Movimente um dos vértices e veja se a sua conclusão continua verdadeira.

• Em Matemática, demonstrações visuais já são aceitas pela comunidade científica. Até bem pouco tempo, apenas o método dedutivo servia para comprovar verdades. Uma demonstração de que as alturas de qualquer triângulo concorrem em um único ponto, denominado ortocentro, é apresentada a seguir, considerando que a realização das atividades precedentes auxiliam nesta compreensão que, via de regra, é feita apenas na forma dedutiva.

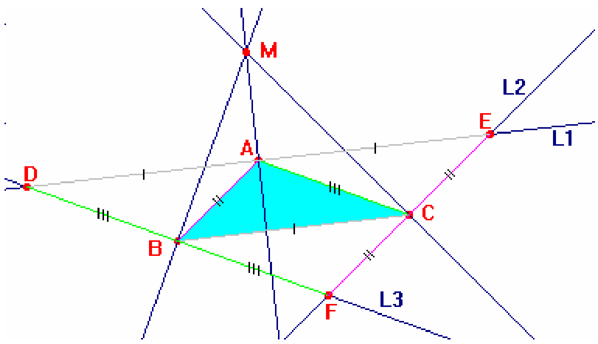


Figura 10 - Ortocentro

Considere ∆ABC.

Por cada um dos vértices A, B e C conduza paralelas ao lado que seu opõe ao vértice, gerando um novo triângulo ∆DEF.

Além disso, ficam caracterizados os paralelogramos ABFC e ADBC que, por definição, tem lados opostos de mesma medida.

Pode-se concluir que

$\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{AE}$.

Daí, a altura por A, perpendicular a $\overline{BC}$ é mediatriz de $\overline{DE}$.

De forma similar as outras duas alturas do ∆ABC são mediatrizes do ∆DEF.

Usando-se o fato que as mediatrizes de qualquer triângulo são concorrentes (Apêndice C), tem-se que as alturas são concorrentes no ponto M, o qual se localiza a 1/3 do vértice.

3.3.3 Análise da execução da oficina

A fim de que possa ser feita uma análise a posteriori da execução da oficina, os participantes, sob a orientação da professora da disciplina de Recursos Tecnológicos e Educação Matemática, antes de sua realização, delinearam categorias a serem consideradas nessa análise. São elas:

1. papel do professor (neste caso, considera-se professor como sendo o aluno responsável pela oficina) no planejamento e na execução;

2. relação professor-aluno no estabelecimento de diálogo entre ambos durante a oficina.

3. relação sujeito-tecnologias, ou seja, as relações instituídas entre o professor e as tecnologias e também dos alunos com a tecnologia;

4. aprendizagem dos participantes na reconstrução dos conceitos, na colaboração e cooperação entre os participantes e na organização da atividade pelo executor. [relação ao software, ao conceito matemático e à colaboração e cooperação].

A partir destes indicadores e do debate proporcionado pela professora da disciplina; imediatamente após a realização da oficina, cada aluno participante (à exceção de um, que por motivos particulares teve de se retirar) manifestou-se oralmente, explicitando suas expectativas e impressões, conforme descrição a seguir.

Ros, que tem formação inicial na área Tecnológica e Graduação em Pedagogia, exercendo funções de professora na escola básica, fez a seguinte manifestação “se eu tivesse aprendido Matemática desse jeito teria sido melhor”. Destaca a escassez de tempo como impedimento para chegar a conceitos ou resultados melhores.

Para **And**, que tem formação inicial em Matemática, e que fez o trabalho em dupla com Ros numa mesma máquina, a interação da dupla nas atividades desenvolvidas com o software Cabri-Géomètre II e a forma como as atividades foram desenvolvidas favoreceu a correção de erros ocorridos nas construções que a dupla ia realizando. Acusam que. ao observarem as discussões oriundas de outras duplas e também as discussões destas com o professor, numa atividade colaborativa, há uma cooperação na aprendizagem.

And diz que “o software é muito bom e com ele é possível desenvolver as atividades operatórias de forma muito interessante, proporcionando dicas envolvendo conceitos geométricos relevantes na escola básica”.

Para **Ale**, que possui formação inicial em Matemática, “gostei muito de me familiarizar com o software na atividade introdutória”. Segundo ele, foi possível durante a oficina explorar a linguagem matemática e o papel do professor na condução da oficina foi significativo para uma proposta construcionista, pois não eram fornecidas respostas diretas e sim feitos outros questionamentos que conduziam os alunos a repensarem suas dúvidas e suas construções.

Mar, que também possui formação em Matemática e que fez dupla com Ale, diz que houve uma disputa saudável pelo uso da máquina. Mar diz que foi possível durante a oficina ir além do que o professor havia indicado nas atividades e que “o professor instigou muito, não deu respostas”.

Para **Cri**, que tem formação em Pedagogia e que atua como supervisora em escola básica, a oficina foi um “petisco”. O professor mostrou, incentivando, deixando o aluno curioso e com vontade de buscar. “Permitiu a saída do lugar dos alunos para ver e discutir com outras duplas, o que ainda é considerado na escola como indisciplina”.

Ao preparar e desenvolver a oficina, preocupei-me dentro do pouco tempo disponível para a atividade, em proporcionar aos alunos uma exploração do software simultaneamente a um repensar aspectos da geometria. Não deixei de considerar que na sala havia aproximadamente 33% de alunos sem formação matemática, o que deve ser levado em consideração numa abordagem construcionista. Na minha opinião, este fato é relevante para a avaliação da apropriação de conhecimentos adquiridos pela atividade.

Neste sentido, a conclusão de Cri, de que “por um ponto podem passar infinitas retas” logo ao iniciar as atividades programadas para explorar o software, diretamente pela observação na tela do computador, chama o professor e novamente conclui “se eu tiver dois pontos clicados na tela, a reta que os contém é única”, mostrou o quanto o dinamismo da ferramenta computacional foi relevante na construção de axiomas de Geometria Euclidiana. Ao ser informada que estas duas afirmações constituíam uma “arrancada” para a construção de um modelo de Geometria em seu aspecto dedutivo, ficou observando o professor e disse “mas eu nem sei o que é isso!”.

Muito embora as atividades programadas possam ter se assemelhado a uma “instrução programada”, característica da concepção instrucionista, o fato de não terem sido fornecidas respostas e sim novos questionamentos, a partir dos questionamentos dos alunos, favoreceu o aproveitamento de tempo e a chegada ao conceito almejado.

Se se tivesse partido de um problema contextualizado em que houvesse a necessidade da construção da altura de um triângulo, a motivação para a busca de ferramentas computacionais e matemáticas para sua solução poderia motivar mais os alunos na construção de seu conhecimento, uma vez que a implementação das tecnologias, ao usar visualização para resolver problemas, é um dos indicativos que encontrei em trabalhos do PME. Acredito que este tipo de atividade desenvolvida na escola básica ou até mesmo em Curso de Formação de Professores, com maior disponibilidade de tempo, apresentariam efeitos positivos ainda maiores.

Ressalto ainda que não se pode deixar de considerar que aproximadamente 77% dos participantes, com formação matemática e em atividades na escola básica, conheciam o conceito de altura de triângulo, o que não significa que tivessem o conceito "bem construído", como se pode observar em alguns erros conceituais ocorridos durante algumas construções, ao não considerarem a reta suporte do lado oposto ao vértice do qual parte a altura. Essa construção mental de um conceito matemático é um dos conceitos que definirei nessa tese, a saber, pensamento geométrico avançado. Nessa situação, explorar imaginação para intuir um conceito pelo caminho visual de Geometria Dinâmica é um dos elementos que proporcionam um novo fazer geométrico na Licenciatura em Matemática.

A partir da análise das observações da professora da disciplina e dos participantes, as atividades exploratórias elaboradas no Cabri-Géomètre II foram relevantes para uma incursão no software e para a re-construção do conceito de altura de triângulos, confirmando o que Valente (2000) afirmou sobre o uso do computador como forma de construção de conhecimento, o que é corroborado pelo emprego da intuição por Fischbein (1987) para construir conhecimento, sendo o construcionismo, para Papert (1994), uma forma de tornar a aprendizagem mais eficiente com a exigência de um mínimo de ensino.

Além disso, o experimento confirmou o que Kilpatrick (1994) prega quanto à utilização de Tecnologias da Informação e Comunicação, como um dos elementos que devem ocorrer nas mudanças curriculares para a formação do professor de Matemática, visto que mesmo os participantes com graduação em Matemática e participantes de um programa de mestrado na linha de Educação Matemática, não tinham o conceito de altura de triângulos bem formado, de modo a poder comunicá-lo adequadamente. Skemp (1993) afirma que comunicar um conceito é difícil tanto para o comunicador como para o receptor e, dessa forma, quando os participantes puderam conscientizar-se das similaridades ocorridas durante a realização das experiências com a movimentação do triângulo para mais variadas posições, tiveram a possibilidade de abstração do papel da perpendicularidade no conceito de altura.

A partir da realização da oficina, concordo plenamente com o que Borba e Villareal (2005) apontaram quanto à relevância que aspectos experimentais têm para a Educação Matemática, fortalecendo esse tratamento experimental pela utilização dos recursos tecnológicos, especialmente pela abordagem visual proporcionada por esses recursos que propiciam um conhecimento intuitivo (FISCHBEIN, 1987), pela aquisição de certeza e confiança em fatos matemáticos que, muitas vezes, só podem ser “vistos” pela mente.

A esse respeito, o experimento realizado fortaleceu minhas concepções iniciais sobre imaginação (é uma forma de concepção mental de um conceito matemático, o qual pode vir a ser representado por um símbolo ou esquema visual, algébrico, verbal ou uma combinação dos mesmos, com a finalidade de comunicar para o próprio indivíduo ou para outros tal conceito.); intuição (é um processo de construção de estruturas mentais cognitivas para a formação de um determinado conceito matemático, a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto) e sobre visualização (é um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos).

No que diz respeito ao papel do professor ao planejar e executar a oficina, considerei que o objetivo foi atingido, tendo sido recomendado que as denominações dos objetos construídos não sejam tão especificadas como feito nas orientações das atividades ao designar a reta construída por r, o ponto por A e assim por diante, deixando os alunos independentes para criar o que melhor lhes convier.

Em relação ao diálogo que estabeleci com os alunos, as considerações dos participantes foram de que o trabalho ocorreu de forma tranqüila e que foi proporcionado o diálogo, na medida em que os alunos podiam se movimentar na sala, questionarem e serem questionados por mim em suas dúvidas e construções, ao mesmo tempo em que os diálogos também ocorriam simultaneamente entre as duplas e o professor, o que corrobora com a idéia de construcionismo de Papert (1994).

Assim, meu papel como comunicador, parece ter sido alcançado, especialmente pelo que dizem os PCN quanto às Tecnologias da Informação e Comunicação que, além de servirem de veículo de informação, possibilitam novas formas de ordenação da experiência humana, e oferecem recursos rápidos e eficientes, razão pela qual, possivelmente o conceito de altura não é alcançado pelas vias convencionais, uma vez que as construções geométricas demandam um tempo elevado, o que para Almeida (2000) corresponde à não incorporação de novos conhecimentos à cultura do professor, adquiridos pela humanidade ao longo dos tempos.

O fato de eu já possuir familiaridade com o software e com atividades de ensino facilitou o desenvolvimento da oficina e a integração dos alunos com a tecnologia computacional, conhecida por todos os alunos que dela se utilizam frequentemente. Embora a maioria não conhecesse este software, o fato de ter sido disponibilizado antecipadamente na plataforma pode ter contribuído para uma boa interação dos alunos com o mesmo. Os aspectos visuais, a ferramenta de colorir, preencher, colocar movimento (a mola), os aspectos de medir, rotular, dentre outros, foram elementos motivadores para a realização das atividades.

Até onde foi possível detectar pela observação durante a realização das atividades e pela análise oral da professora da disciplina e dos participantes, a aprendizagem desses últimos na construção, por alguns, e reconstrução, por outros, foi plenamente satisfatória, tanto em relação ao conceito de altura quanto a outros conceitos geométricos necessários para a construção principal. A colaboração e cooperação entre os participantes durante a realização da atividade foram relevantes para a oficina.

Acredito que se tivesse ocorrido uma exploração do tutorial, fornecido previamente na plataforma e um diálogo no fórum, as possibilidades de diálogo entre o professor e os alunos poderiam ter sido aprofundadas.

Concluí que atividades utilizando tecnologias computacionais por meio do Cabri-Géomètre II, feitas numa abordagem construcionista e colaborativa, facilitam a construção e apreensão do conceito de altura de triângulo deslocando a idéia de “verticalidade”, para a idéia da relação de perpendicularismo entre retas, a reta que passa por um vértice qualquer do triângulo, e perpendicular à reta suporte do lado oposto a este vértice.

4 REFORMULAÇÕES CURRICULARES X ENSINO DE GEOMETRIA

Nesse capítulo, apresento levantamento bibliográfico de estudos sobre reformulações curriculares, aspectos da legislação nacional envolvendo ensino de Geometria, bem como alguns indicativos de estudos e tendências desse ensino por alguns grupos de estudos internacionais, como o *International Group for Psychology of Mathematics Education* (PME). É importante salientar que, mesmo tendo como foco a pesquisa sobre o ensino de Geometria no nível superior, faço um breve apanhado de questões relativas ao ensino e ao currículo escolar nos vários níveis por entender que a maior parte da investigação sobre Educação Matemática debruça-se sobre proposições para a relação professor-aluno-conhecimento a ensinar.

4.1 DESENHANDO UM CENÁRIO DE REFORMULAÇÕES CURRICULARES

Propostas e processos de mudanças curriculares para a escola básica ou para as universidades, embora sejam realizados e divulgados por instâncias governamentais, são elaborados por professores, em geral universitários, indicados das mais diferentes formas. A cada mudança do corpo diretivo destas instâncias, novas propostas surgem, muitas e na maioria das vezes, sem convicções ou referências pertinentes. Schubring (1999) aponta que tais reformas não são recentes, destacando o papel desempenhado pela Alemanha, e em particular o de Félix Klein (1849-1925), que idealizou reformas curriculares a partir das universidades, inclusive para o nível médio em escolas técnicas.

Klein (1927) percebe a necessidade de promover mudanças de concepções governamentais bem como dos professores, afirmando seu propósito de não somente referir-se aos estudos da Matemática universitária, mas também a todo aquele do interesse do professor que se preocupa com o ensino da Matemática. Diz que desde as primeiras décadas do século XX os professores de Matemática e de Ciências Naturais das universidades têm manifestado interesse pela formação adequada dos futuros professores, que atendam às necessidades da Ciência. Para ele,

> Este fenômeno é bem recente; antes, durante e por muito tempo, se cultivava na Universidade exclusivamente a ciência superior sem levar em consideração em nada as necessidades da Escola e sem cuidar o mínimo da relação com o ensino de Matemática com ela. (KLEIN, 1927, p. 1).

Destaca ainda, que reclamações de professores do ensino secundário que chegam até ele, não deixam de ser razoáveis, pois "se é correto que o ensino universitário deve ter um caráter especial, também é verdade que o abuso deste sentido deixa o professor que na Universidade se forma na ignorância de muitas coisas tão importantes como gerais." (Ibid., p. 2).

Penso que, ao estruturar uma proposta curricular para a escola, em qualquer nível, não se pode esquecer que a Matemática, seja como área de conhecimento, ou como disciplina escolar, é uma prática social e, portanto a Matemática e a Educação Matemática têm um importante papel nesse processo. Em geral, a Matemática é considerada uma disciplina especial, diferente das demais, recebendo um grau de importância maior do que as outras, sendo isso internalizado por muitos professores.

Miguel (2005) diz que para conceber uma instituição escolar, professores precisam pensar sobre a cultura matemática que deve ser produzida, tratar conteúdos escolares de forma interligada, contextualizando-os dentro de um processo cultural que busque envolver a comunidade na qual a escola se encontra inserida e estabelecendo conexões entre diversas áreas do conhecimento.

É necessário valorizar a Matemática como um bem cultural, como afirma D'Ambrósio (1996), em seu papel formativo do cidadão em todas as disciplinas curriculares de um curso de Licenciatura, tanto nas ofertadas pelos Departamentos de Matemática quanto nas ofertadas pelos Departamentos de Educação, para que as ofertadas pelos primeiros não adquiram um *status* diferenciado em relação às pedagógicas, bem como nas de fundamentos matemáticos para atuação na escola básica, as quais podem ser ministradas por professores oriundos da Educação Matemática e podem estar sob responsabilidade de ambos os departamentos.

Dentre as disciplinas consideradas difíceis em um curso de Licenciatura, tanto em relação ao ensino quanto à aprendizagem, estão as da área de Geometria.

Julgo que a rejeição a elas possa ser decorrente da falta de inovações no tratamento desta área, considerando diversos aspectos que poderiam vir a desmistificar tal atributo. Um destes aspectos é o destacado por Miguel (2005), quando afirma que há na atualidade muitos campos emergentes na questão da cultura dos povos: “a cultura matemática” e a “cultura educativa em Matemática”. Esses campos deveriam ser objetos de ensino e de pesquisa na formação de professores, mas não como uma reunião de áreas específicas e sim com um tratamento de forma interdisciplinar, no sentido que, ao tratar de estruturas algébricas, por exemplo, propriedades geométricas fossem envolvidas, a fim de contribuir para uma formação geral e cultural do professor e não apenas com uma formação específica de conteúdos matemáticos, o que usualmente ocorre na maioria dos cursos de Licenciatura de Matemática.

Minha pretensão de que a área de Geometria seja atendida num currículo inovador para os cursos de Licenciatura em Matemática não segue o que consensualmente é entendido como componente curricular:

> [...] matéria ou disciplina acadêmica que compõe a grade curricular de um determinado curso de um determinado nível de ensino. São obrigatórias sua inclusão e ministração com a carga horária determinada na grade, a fim de que o curso tenha eficiência e validade. [14]

Como pensar, portanto, nos conteúdos escolares contemplando, na Educação Matemática escolar, uma educação geométrica? Nos cursos de Licenciatura de Matemática, se faz necessário que conteúdos de Matemática, de Educação Matemática, de Geometria e de Educação Geométrica sejam abordados de forma conjunta e complementar, buscando eliminar possíveis discriminações entre as disciplinas constituintes da proposta curricular do curso. Os conteúdos que constituem as grades curriculares dos cursos de formação se adequam ao seu objetivo? E ao perfil dos profissionais que estão sendo formados? Em minha tarefa de visitar estagiários do curso em que atualmente desempenho a função de supervisor, constato que muitas escolas básicas atribuem, na carga horária da disciplina Matemática, um horário específico para a Geometria, como se os dois conhecimentos fossem independentes e distintos. Mas isso não é o que ocorre nas

[14] Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Componente_curricular. Acesso em 17abr 2008.

Universidades, com a disciplinarização das áreas de conhecimento e com a departamentalização dos professores?

Sacristán (1998) diz que o conceito de conteúdo escolar apresenta diversos enfoques, por ser interpretável e depender da função que deve cumprir junto aos educandos, pela cultura adquirida de seus antecedentes e pelo papel que cada um desempenha na sociedade em que vive. Talvez esse seja um dos maiores entraves que se encontra na organização curricular de cursos. Ao se pensar numa reformulação curricular em um Curso de Licenciatura em Matemática, em geral, ocorre uma disputa pela destinação de cargas horárias para as áreas específicas de conteúdos matemáticos envolvendo disciplinas que vão do Cálculo I às Equações Diferenciais, ao longo de todo o curso, e isso não ocorre com a área de Geometria, que vai sendo colocada para preencher espaços na grade curricular, sem articulações adequadas. Acredito que uma razão histórica desse fato está na forma como os cursos de Matemática no Brasil se originaram, seguida das inúmeras aplicações do Cálculo nas Engenharias. Segundo Cury (2001, p. 12)

> Os primeiros professores das disciplinas matemáticas desses cursos eram, em sua maioria, engenheiros, pois, não havendo Licenciatura em Matemática, os mestres tinham que ser aproveitados dos cursos já existentes, a Academia Militar e a Escola Politécnica, esta formadora de engenheiros e bacharéis em Ciências Físicas e Matemáticas. Esses pioneiros, com sólida bagagem de conhecimentos na área, mas, em geral, sem formação pedagógica específica, valorizavam extremamente o conteúdo matemático em detrimento dos métodos de ensino.

Shulman (1987) pergunta “como os professores decidem o que ensinar?”, sugerindo três distinções sobre o conhecimento que o professor deve possuir:

1. conhecimento do conteúdo, referindo-se à quantidade e organização do conteúdo por si próprio na mente do professor. Não basta ao professor ter a capacidade de definir para seus alunos as verdades que são aceitas em certo domínio do conhecimento. Eles devem ser capazes de explicar porque essas verdades (proposições) são consideradas válidas na comunidade científica e como se relacionam com outras verdades (proposições), tanto interna quanto externamente à sua disciplina, tanto na teoria quanto na prática.

2. conhecimento do conteúdo pedagógico, que deve ir além do conhecimento da disciplina em si para a dimensão do conhecimento da disciplina a ensinar. Esse conhecimento inclui também uma compreensão do que faz a aprendizagem de um tópico ou disciplina específica ser fácil ou difícil.

3. conhecimento curricular, que é constituído pelo domínio de programas planejados para o ensino de assuntos e tópicos particulares em um dado nível, a variedade de materiais instrucionais disponíveis em relação a esses programas, e o conjunto de características que servem tanto como indicações como contra-indicações para o uso de um currículo particular ou de materiais de programa, em circunstâncias particulares.

Klein (1927, p. 1), logo ao iniciar suas escritas sobre Geometria diz que essa ocupa um posto de honra comparativamente ao que escreveu sobre Aritmética, Álgebra e Análise. Diz que

> [...] as linhas gerais de nosso plano estão traçadas, tendo em conta, em primeiro lugar, o que poderia chamar-se atualidade enciclopédica, que nos obriga a proporcionar uma olhada geral sobre a totalidade da Geometria, na qual se encontra todos os conhecimentos alterados que no decorrer dos vossos estudos tereis adquirido, ordenado, classificado e postos para qualquer aplicação que queira dar-lhes.

Klein ainda diz que a formação matemática geral, além do conhecimento dos detalhes adquiridos em ação continuada, precisa ter um amplo conceito das relações de dependências, tanto técnicas quanto históricas, que existem entre eles.

> Para evitar a má inteligência que pode ocasionar a aparente separação desta parte geométrica da aritmética explicada no primeiro semestre, devemos dizer que nossa tendência nestas lições, como em todas as de caráter geral, é a *fusão da Aritmética com a Geometria*, entendendo por Aritmética, não somente o estudo dos números, senão também a Álgebra e a Geometria. (KLEIN, 1927, p. 3)

Para ele, a palavra *fusão* tem um sentido muito mais amplo do que aquele utilizado na Itália, em que ela significa exclusivamente uma mistura de Geometria Plana e Geometria do Espaço. Klein diz que, ao fazer uso desse sentido para a palavra *fusão,* não está deixando que a intuição do espaço seja relegada a um segundo plano e, para que isso seja possível, propõe utilizar nas discussões abstratas da Aritmética, da Álgebra e da Análise, figuras e métodos gráficos, que tornam conceitos mais compreensíveis nessas áreas do conhecimento matemático. Concordo amplamente com essa proposta e a tenho empregado ao longo de minha experiência na Licenciatura em Matemática. Assim, acredito como Klein (1927), que a intuição espacial deve ocupar lugar de destaque nos currículos da Licenciatura em Matemática, pelo alto grau facilitador da expressão precisa dos entes e dos fatos geométricos. Uma pergunta que pode ser feita nesse momento é se a fusão preconizada por Klein (1927) não teria contribuído para a absorção da Geometria por outras áreas do conhecimento matemático.

Nesta tese proponho e defino uma **componente curricular geométrica** para um currículo de Licenciatura em Matemática como uma forma de abordar conceitos geométricos em todas as suas vertentes e possibilidades, no sentido de contemplar os três aspectos acima sugeridos por Shulman (1987). Entendo que isso possa ser realizado de forma similar ao que ocorre nos currículos com a Análise, quando há preocupação em desenvolver em cada período das grades curriculares uma disciplina da área que, usualmente, começa com o Cálculo I e estende-se até a Análise propriamente dita. Nessa proposta de componente curricular geométrica, pretendo verificar de que forma imaginação, intuição e visualização podem ser mobilizados por meio de experimentos de ensino de conteúdos matemáticos nas disciplinas que envolvem Topologia, Geometria Dinâmica e Geometria Dedutiva, a exemplo do que faz Nasser (1992, p. 71) para a escola básica, ao utilizar relações entre os modos de atividades mentais preconizados por Skemp e as fases de van Hiele.

Modos de Atividade Mental

→ Intuitivo → Reflexivo → Intuitivo →

→ Informação ↘ ↗ Explicitação ↘ ↗ Integração

Orientação dirigida   Orientação Livre

Fases

Quadro 4 – Modos de atividade mental[15]

Acredito que, nessa componente curricular geométrica, deva haver uma preocupação com o "ensinar demonstrações geométricas", a fim de que o futuro professor chegue na escola básica com uma concepção de "demonstração" como necessidade de validar afirmativas matemáticas, não ficando a demonstração apenas sendo objetivo das disciplinas específicas da área de Geometria no ensino superior. Por outro lado, ao tratar, por exemplo, os teoremas do valor médio no Cálculo, ou da classificação das cônicas, na Geometria Analítica, entendo que deva ser dada importância tanto aos aspectos visuais quanto aos algébrico- analíticos.

A questão do ensino de demonstração em Matemática tem sido objetivo de alguns currículos escolares da França e do Canadá desde as séries iniciais da escola fundamental (8ª e 9ª séries). Nos Estados Unidos, é esperado que alunos

[15] O quadro foi traduzido de forma livre por mim.

que buscam vagas nas Universidades sejam capazes de realizar demonstrações matemáticas. Em documento do *National Council of Teacher of Mathematics* (NCTM) encontra-se: “Todos os estudantes, especialmente os que pretendem a universidade, podem aprender que raciocínio dedutivo é o método pelo qual a validade de uma afirmação matemática é completamente estabelecida”. (p.143, apud BALACHEFF, 1991, p. 175).

Para Balacheff (1991) os estudantes, de alguma forma, têm conhecimento do uso de demonstração e da necessidade da lógica para as argumentações. No entanto, é provável que tal conhecimento não seja aquele que o professor espera que eles possuam. Ao resolver determinadas situações-problema, os estudantes se vêem envolvidos com argumentações e começam a adquirir segurança. Além disso, começam a perceber economia de tempo em relação ao processo de buscar soluções por tentativas. Estabelece-se aí o início de um processo que é longo e que não deve ser construído apenas em uma ou duas disciplinas de Geometria, como é freqüente se encontrar nos objetivos dessas disciplinas, muitas vezes distribuídas na grade curricular em um primeiro semestre do curso, quando o estudante ingressa no mundo da Matemática universitária.

Segundo Schoenfeld (apud Balacheff, 1991), há pesquisas que comprovam as transformações que sofrem os estudantes quando o professor elabora situações didáticas, envolvendo-os no processo de resolução, argumentação e discussão com colegas, o que denomina interação social. Ao desenvolver atividades com estudantes nessa perspectiva, pesquisas de Lampert (apud Balacheff, 1991) mostram existir nos estudantes um desenvolvimento intelectual, especialmente adquirido no debate matemático, pois desenvolvem eficiência[16] e rigor nas argumentações e contra-argumentações que o processo propicia.

Desta forma, o conceito de “eficiência” é adquirido ao ser competente nas suas argumentações convincentes e corretas para os colegas, professores, debatedores, e evoluindo para o conceito de “rigor”, desenvolvido na necessidade de evitar contra-argumentações. Isto deveria estar muito próximo ao ensino de Geometria, quando os estudantes, partindo de manipulações, observações, desenhos, isto é, de uma “Geometria prática”, passassem para o estabelecimento de relações, de conclusões, de teoremas, isto é, a uma “Geometria dedutiva”.

---

[16] Entende o autor como eficiência a capacitade de resolver, argumentar e discutir matematicamente.

O que considero relevante não é esperar que um aluno da Educação Básica, e também da Educação Superior, tenha desenvolvido ou concluído um método dedutivo rigoroso e sim que seja capaz de argumentar e contra-argumentar matematicamente de forma coerente. Para que se chegue a este estágio, o professor deve adquirir na sua formação inicial esta habilidade e maturidade para conduzir o processo, e isto pode ser feito nas disciplinas utilizando-se pesquisas individuais complementadas com a técnica de seminários coletivos. Nessa direção é que venho realizando experimentos com disciplinas de Geometria na Licenciatura e, naquelas não específicas, em que posso utilizar aspectos de imaginação, intuição e de visualização para proceder a demonstrações, como no Cálculo a várias variáveis.

Granger (1974, p. 47), ao apresentar características do Estilo Euclidiano, afirma que “a álgebra geométrica é justamente um estilo, caracterizado pelo papel atribuído às propriedades intuitivas das figuras e pelo modo de introdução das operações, tais como a multiplicação dos comprimentos e sua elevação ao quadrado”. O autor, entretanto, afirma no texto que depois do desenvolvimento do método de aplicação das áreas, houve um novo sentido geral para as operações sobre as áreas e os comprimentos, sendo anunciada a caducidade da álgebra geométrica. Apoiado em Duval (2004), percebi que a atividade matemática desenvolvida nas disciplinas da área de Geometria pode ocorrer ao serem utilizadas unidades geométricas elementares na decomposição de figuras geométricas, nas quais se realiza a configuração e o tratamento em seus diferentes registros e realiza-se a reconfiguração da figura inicial. Em relação a atividades no ensino superior que mobilizem esses diferentes registros, uma possibilidade de cálculo de áreas de regiões poligonais em que os aspectos geométricos são relacionados à visualização de figuras para o estabelecimento de equivalências de áreas é apresentada em Leivas (2007a).

Entendo que as abordagens de Granger e de Duval reforçam a inserção da componente curricular geométrica na Licenciatura em Matemática, defendendo a relevância dos aspectos visuais para a aprendizagem geométrica. Talvez o que eu esteja querendo destacar aqui seja um *novo estilo* para a Geometria nos cursos de Licenciatura. Por exemplo, poder-se-ia explorar o conceito de função logarítmica a partir da função exponencial, pela construção de gráficos e uso de simetrias de funções inversas, contrariamente à antiquada forma como ainda isto é feito na literatura usual, por definições, propriedades, exemplos e somente por fim é esboçado o gráfico, deixando de explorar as potencialidades desta ferramenta geométrica.

Guzmán (1993) diz que a Matemática é uma atividade velha, polivalente e que ao longo dos séculos tem sido empregada com objetivos profundamente diversos, com o que concordo, uma vez que, em um grande número de instituições de ensino, há uma intersecção enorme entre as disciplinas oferecidas aos cursos da área de ciências exatas e naturais e nas tecnologias, muito embora os objetivos do curso de formação de professores sejam completamente distintos dos objetivos de cursos de formação de engenheiros, por exemplo.

Por outro lado, Guzmán (1993) aponta a Matemática como ciência dinâmica e mutante, isto porque mudanças ocorrem de forma muito rápida e turbulenta nos próprios conteúdos dessa ciência, com o que concordo novamente, haja vista o que ocorreu com os Fundamentos da Matemática no século XIX e a criação das Geometrias Não Euclidianas, os estudos relativos à Topologia no século XX, bem como a Geometria Fractal nos tempos atuais e, mais recentemente o uso de softwares exploratórios de Geometria Dinâmica. Essas transformações não fazem parte, ainda, de muitos dos currículos da formação do professor que virão a desempenhar suas funções nas próximas décadas, quando o conhecimento matemático, com certeza, trará outras tantas inovações.

Muito embora não seja meu objetivo nesse trabalho discutir com profundidade a questão das tecnologias no currículo da Licenciatura em Matemática não posso deixar de considerar sua relevância e exemplificar como há pesquisas que mostram estudos envolvendo intuições visuais em disciplinas que compõem tal currículo, como o Cálculo Gráfico, de Tall (1991), que utiliza softwares que permitem manipulação de conceitos matemáticos utilizando abordagens cognitivas. Segundo Eisenberg e Dreyfus (1991, p. 34), a utilização de software "ajuda os alunos a interpretarem situações baseadas em intuições visuais", como no caso de declividade de curvas, áreas sob uma curva e soluções de equações diferenciais.

Os autores indicam, ainda, o trabalho de Artigue na construção de um currículo que utiliza software educacional envolvendo métodos gráficos acompanhados de métodos numéricos, para proporcionar aos alunos a obtenção de comportamento qualitativo de equações diferenciais, o que bem se sabe ser um tema não elementar em Matemática. Para Eisenberg e Dreyfus (1991), "Gráficos e informações visuais desempenham um papel para além de meras representações de um problema. Eles são os objetos centrais a partir dos quais a informação é processada tanto simbólica quanto visualmente." (p. 34). Outros pesquisadores ainda são apontados por eles quanto a utilização de tecnologias no currículo, tais como Heid (apud Eisenberg e Dreyfus, 1991, p. 34) ao desenvolver um curso de Cálculo envolvendo habilidade conceitual em que "Globalmente, os alunos mostraram melhor compreensão dos conceitos, e o desempenho muito bom em um exame final de habilidades de rotina em uma classe de estudantes que tinham praticado estas competências em todo o semestre". Assim como Schwarz, que desenvolveu uma introdução a funções no currículo baseado em um ambiente informático chamado Modelo de Representação Triplo (TRM), também Ruthven, que estudou o desenvolvimento de estudantes por um período de um ano utilizando calculadoras gráficas de forma contínua, tendo constatado que "esses alunos não só melhoraram muito mais do que seus colegas sem calculadoras, mas também que suas abordagens e argumentos matemáticos eram obtidos mais rapidamente sendo gráficos." (Ibid., p. 36)

Por fim, Eisenberg e Dreyfus (1991, p. 35), remetem a Rival (1987), para quem "Matemáticos estão redescobrindo o poder de raciocínio pictórico". Para esses autores, entender as razões pelas quais os alunos têm dificuldade para pensar em referenciais visuais deve ajudar no desenvolvimento de materiais adequados e de estratégias de ensino para promover o pensamento visual.

Dentre as recomendações para o ensino de Geometria escolar sugeridas por documento emitido pelo NCTM (PRINCÍPIOS e NORMAS, 2008) que tem servido de orientador para algumas propostas curriculares, Costa (2000) sugere que "se dê menos atenção a certos tópicos (por exemplo, a Geometria de Euclides como sistema axiomático completo) e que a Geometria Analítica não seja tratada como tema isolado e que sejam evitadas demonstrações em duas colunas" (p. 157-184). Ao concordar com tal orientação, percebo, pela vivência adquirida com formação de professores, que ainda persiste, para muitos desses que ensinam Geometria nos cursos de licenciatura nos dias atuais, o modelo de dedução ou demonstração em forma dessas duas colunas, onde na primeira são fornecidas etapas da demonstração de um teorema e na segunda coluna, a justificativa de passagem de uma etapa para a seguinte, inclusive encontrando-se este tipo de abordagem em livros de Geometria utilizados na formação de professores (BARNET, 2003).

Concordo também quanto ao que Costa (2000) diz sobre a abordagem dada à Geometria Analítica, que não explora, em geral, aspectos geométricos, trata apenas de algoritmos algébricos no enquadramento de uma dada equação numa forma geométrica, que muitas vezes não é nem mesmo representada e nem sequer são desenvolvidas habilidades visuais na formação do conceito de uma superfície hiperbólica ou parabólica, por exemplo. A Geometria Analítica continua sendo tratada como se não fosse uma das componentes da Geometria e, no meu entender, precisa de reformulação urgente nos currículos, explorando mais os aspectos de imaginação, visualização e representação geométrica.

Entendo nesta tese, **geometrização** do currículo da Licenciatura em Matemática como um processo de utilizar abordagens geométricas como um método para compreender e representar visualmente conceitos de diversas áreas do conhecimento matemático e de outras ciências, por meio de imaginação, intuição e visualização, portanto, Geometria é um ponto de vista que conduz à geometrização.

Numa primeira reformulação das normas emanadas pelo NCTM, (PRINCÍPIOS e NORMAS, 2008), foi dada ênfase ao pensamento visual identificando “a geometria e sentido espacial”, o que, segundo Costa (2000, p. 162), enfatizou no “uso da visualização e raciocínio espacial para resolver problemas tanto dentro como fora das matemáticas”.

Goldenberg e outros (1998, citados por Costa, 2000, p. 162), afirmam que “por muitos anos os cursos de Geometria têm sido apresentados como exposições dogmáticas dos Elementos de Euclides”. Entendo que isso é feito por meio do método axiomático ou então apresentando uma variante dessa forma, muito semelhante, só que não fazendo demonstrações e sim apresentando enunciados de teoremas, aplicações diretas dos enunciados como forma de memorizá-los ou até mesmo de comprová-los. Isso pode ser observado na forma como são tratados os teoremas de Tales e de Pitágoras nos livros didáticos e nos próprios currículos. Raramente se encontram aplicações do teorema de Tales, diferentes do cálculo de alturas inacessíveis, travessias de rios ou até mesmo a mera determinação do “x desconhecido” no feixe de paralelas cortado por transversais. Em Leivas (2006a) apresento exemplos de outras possibilidades de uso desses teoremas, como na representação de números irracionais na reta real.

A maioria dos alunos que ingressam em Cursos de Especialização em Educação Matemática conhecem apenas a forma canônica do Teorema de Pitágoras, aquela em que quadrados geométricos são colocados sobre os lados do triângulo retângulo, quando conhecem esse aspecto visual. Generalizações do teorema sequer são abordadas geometricamente, tais como o fato de que o teorema vale para triângulos, retângulos ou lunas construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.

A conferência de abertura do ProfMat 2008 abordou a reforma do sistema escolar português de educação básica, que está sendo implantada, e os desafios que os novos programas vêm propiciando. Dentre os blocos do programa está Geometria e Medida, que estão sendo orientados a serem desenvolvidos a partir do primeiro ciclo, que vai de primeira a quarta série, e no terceiro ciclo, que envolve da sétima à nona série do Ensino Fundamental. Assim, percebe-se uma preocupação com o desenvolvimento dessa área desde o início da escolaridade, em que há mudanças no tratamento das medidas já no primeiro ciclo e, quanto ao tratamento da Geometria como um todo, é dado um destaque ao importante papel que a visualização deve cumprir, bem como às transformações geométricas. É recomendado que o sentido espacial surja antes da elaboração do conceito, como orientado pelo NCTM (PRINCÍPIOS e NORMAS, 2008). Esse documento também é norteador de estudos e mudanças em diversos países, como por exemplo, no Brasil, especialmente na elaboração dos PCN, em que há de forma bem explícita o bloco Geometria e Formas, Grandezas e Medidas. Há necessidades de desenvolver capacidades em Geometria como as especificadas por Del Grande (1994), em que são necessárias experiências como aquelas oriundas de rotações, translações e reflexões que, quando utilizadas na sala de aula, tendem a desenvolver a visão espacial.

As percepções citadas por Del Grande (1994), oriundas de produções de materiais produzidos por outros pesquisadores são: coordenação visual-motora; percepção de figuras em campo; constância de percepção; percepção de posição no espaço; percepção de relações espaciais; discriminação visual e memória visual.

Segundo Kilpatrick, membro atuante do NCTM, em palestra realizada no ProfMat 2008, toda mudança curricular é local e pessoal; dito de forma mais direta, ela deve descrever o percurso que os alunos seguem, os níveis curriculares a que se destinam, o currículo pretendido, o implementado e o atingido. Dessa forma, um currículo pretendido representa uma maquete do real, do curso, da carreira que se pretende auxiliar a construir para as pessoas, e um currículo elaborado é diferente de um currículo colocado na prática.

Kilpatrick questiona se os *Standards* ou normas para a Matemática escolar nos Estados Unidos constituiriam uma reforma ou uma nova reforma, pois as pretendidas reformas não ocorreram naquele país, ou pelo menos, ocorreram de forma diferente do que previam seus promotores. Ele justifica que apenas 10% dos professores foram envolvidos em tais reformas e que sempre houve muitas reações a mudanças em seu país, inclusive gerando o movimento denominado “*The Math wars*”.

O NCTM surgiu em função dessas reformas e dos *Standards*, os quais enfatizavam a pedagogia ativa. Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar, tradução portuguesa dos *Standards* americanos, constituem assim um documento no qual a resolução de problemas é o foco principal e a incidência principal da Matemática no ensino secundário é no raciocínio e na construção de significado. “Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar pretende ser um recurso e servir de orientação para todos os responsáveis por decisões que ditam a educação matemática dos alunos do pré-escolar ao 12º ano de escolaridade.” (PRINCÍPIOS e NORMAS, 2008, p. xv). Indo mais além, Princípios e Normas se destinam ao seguinte público alvo:

> [...] professores de matemática; coordenadores de disciplinas e coordenadores pedagógicos a nível central; autores de materiais didáticos; **responsáveis pela elaboração dos currículos; responsáveis pela formação, inicial e contínua, dos professores de matemática**; professores estagiários; conselhos executivos e pedagógicos das escolas, direções regionais de educação e legisladores. (Idem, p. iv. Grifo do autor).

Dessa forma, não poderia deixar de me referir a este documento tão discutido e utilizado para reflexão em reformas curriculares. Busco no documento a visão que é apresentada para a Matemática Escolar, especialmente no que diz respeito ao foco deste trabalho que é a Geometria, em que a análise e a exploração de formas e da estrutura da Geometria favorecem a compreensão de outras áreas do conhecimento humano, especialmente pela utilização da visualização espacial obtida pela construção e manipulação de objetos existentes no mundo real e que permitirão uma construção de representações mentais desses objetos tanto bi e tridimensionais, bem como o uso de idéias geométricas na resolução de problemas de outras áreas além da Matemática. O raciocínio espacial, as simetrias e a visualização espacial, por exemplo, podem ser facilitadores a partir da utilização de recursos computacionais e de outros recursos didáticos.

Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2008) fornecem indicativos para a Geometria e para as medidas por níveis de escolaridade. Assim, indicam que os programas de ensino desde o pré-escolar ao último ano do Ensino Médio deverão qualificar os alunos para:

> 1. Analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tri-dimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas.
> 2. Especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação.
> 3. Aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas.
> 4. Usar a visualização e a modelação geométrica para resolver problemas. (PRINCIPIOS e NORMAS, 2008, p. 112).

Ao indicar essas habilidades esperadas para um aluno concluinte da escola básica, os Princípios e Normas fornecem, por séries, expectativas do que os alunos deverão atingir em cada um dos níveis.

No meu entender, uma idéia do que um documento de referência como este sugere para a escola básica precisa ser do conhecimento dos futuros professores que atuarão nesse nível e por isso o professor da Licenciatura em Matemática tem de conhecer princípios que norteiam a Educação Matemática no cenário mundial.

Ainda durante o ProfMat 2008, o Grupo de Trabalho de Geometria da Associação de Professores de Matemática (APM) elaborou e discutiu dez idéias para o ensino de Geometria. Em função da inexistência de referências nos anais do evento e a não disponibilidade desse material aos participantes, até a presente data, apresento uma breve sistematização dessas idéias, com a minha visão sobre o explanado pelo grupo.

1. uma experiência que se quer ampla e profunda deve contemplar a resolução de problemas; a investigação e exploração de situações diversas bem como argumentações, raciocínio geométrico, discurso lógico.

2. o mundo inesgotável dos objetos em Geometria pode e deve ser explorado por meio de experiências que sejam tão variadas o quanto possível, nas quais os alunos devam ser expostos a um grande elenco de objetos, sob diversos pontos de vista, como o quadrado colocado em diversas posições. O fato de se trabalhar com muitas figuras (incluindo figuras muito irregulares) ajuda a compreender a regularidade das figuras mais conhecidas.

3. a comunicação em Geometria, bem como o pensar, são atividades que devem estar associadas. Não é recomendável que se atribua nomes simplesmente por memorização e não para descrever objetos, como ocorre com a linguagem materna no decurso do desenvolvimento da criança. Não deve haver um abuso da linguagem e sim a utilização dessa linguagem como meio de simplificar notações e descrever o que se vê e o que se pensa.

4. a organização local, o testemunho da natureza da Matemática faz com que ela seja vista como é e como funciona, devendo ser proporcionado às crianças experimentar e classificar objetos, para que elas percebam que as classificações e definições usadas todos os dias foram construídas por conveniência e poderiam ser outras. Deve ser propiciado experimentar e utilizar pequenas axiomáticas e diferentes formas de definir os objetos, para compreender que as conclusões que se tiram dependem do contexto no qual se trabalha. A utilização de oficinas sobre transformações geométricas e simetrias é oportuna.

5. a Geometria deve ultrapassar os seus próprios limites. Um hábito do professor de Matemática deve ser o estar sempre a questionar: e se não fosse assim? Ou ainda, e se fosse de tal jeito, como seria...? E se fosse zero no denominador dessa fração o que ocorreria?

6. a história da Geometria é parte integrante da experiência geométrica. Por esse motivo é muito freqüente tê-la num certo contexto como ponto de partida e de aprofundamento das aprendizagens, mas essa não é a melhor forma de usá-la. A Geometria deve ser fonte de iluminação para a introdução de novos conceitos, como no caso do Teorema de Desargues e a Geometria Projetiva.

7. devem ser estimuladas as relações entre a Geometria e as outras áreas da Matemática, como na Álgebra, ao estudar estruturas geométricas a partir de simetrias de triângulos, por exemplo, ou nas funções, ao tratar de simetrias de

funções inversas para conceituar a função logarítmica a partir da inversa da função exponencial e suas características geométricas.

8. a Geometria deve se relacionar a outros saberes tais como a Geometria e a Astronomia; a Geometria e a Arte; o *Design* e a Arquitetura; a Geometria e a Geografia e a Geometria e a Ótica, para citar alguns.

9. deve ser usada a tecnologia, como veículo da experiência e da aprendizagem, em que os aspectos visuais favorecem a construção do conceito de altura de triângulos, por exemplo, eliminando o caráter de verticalidade, usualmente considerado pelos estudantes, e sim utilizando a idéias de perpendicularismo.

10. as transformações geométricas são importantes para a compreensão da Geometria, não como constituída de entes estáticos e sim como entes em constantes movimentos, como os de rotações, de translações e de reflexões.

4.2 DIRETRIZES, PARÂMETROS, REFERENCIAIS E ORIENTAÇÕES CURRICULARES NACIONAIS NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA.

As Diretrizes Curriculares Nacionais constituem o documento norteador para a organização dos projetos pedagógicos dos cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, indicando em seu Art. 2º:

> O projeto pedagógico de formação profissional a ser formulado pelo curso de Matemática deverá explicitar:
> a) o perfil dos formandos;
> b) as competências e habilidades de caráter geral e comum e aquelas de caráter específico;
> c) os conteúdos curriculares de formação geral e os conteúdos de formação específica;
> d) o formato dos estágios;
> e) as características das atividades complementares;
> f) a estrutura do curso;
> g) as formas de avaliação. (BRASIL, 2001, p. 7)

Essas diretrizes foram criadas a fim de orientar as melhorias e transformações necessárias aos cursos de Matemática bem como de assegurar aos futuros bacharéis e licenciados, uma preparação adequada ao exercício profissional, de forma que, para cumprirem esses objetivos, os projetos de cursos devem elaborar o perfil dos profissionais que pretendem colocar no mercado de trabalho. Para isto, uma sólida formação de conteúdos matemáticos que proporcione

> [...] uma visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, trazidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina. (BRASIL, 2001, p. 3).

Ao corroborar com esses preceitos legais, invisto neste trabalho no desenvolvimento de uma cultura geométrica permeando os currículos em abordagens modernas, com as quais os futuros professores possam desenvolver, particularmente, as competências e habilidades preconizadas no mesmo documento, a saber: a capacidade de trabalhar em equipes multidisciplinares; a capacidade de compreender, criticar e utilizar novas idéias e tecnologias para a resolução de problemas; o estabelecimento de relações entre Matemática e outras áreas do conhecimento; o conhecimento de questões contemporâneas; analisar, selecionar e produzir materiais didáticos e o desenvolvimento de estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático, segundo as Diretrizes.

Acredito que desenvolver uma proposta de projeto de curso, como pretendo indicar, vem em alinhamento com o que preconizam as Diretrizes, além dos diversos aspectos em que pretendo que a Geometria possa intervir, haja vista que nas diretrizes são considerados para a Licenciatura os conteúdos: Cálculo Diferencial e Integral; Álgebra Linear; Fundamentos de Análise; Fundamentos de Álgebra; Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica e, para o Bacharelado, os seguintes conteúdos: Cálculo Diferencial e Integral; Álgebra Linear; Topologia; Análise Matemática; Álgebra; Análise Complexa e Geometria Diferencial.

Percebi daí que, tanto no Bacharelado quanto na Licenciatura, a Geometria é conteúdo obrigatório como área específica, sem considerar que ela pode também estar presente nas outras áreas, conforme indicativos apresentados nesta tese. No Bacharelado, ela aparece explicitamente na Topologia e na Geometria Diferencial e na Licenciatura, como Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica.

Por outro lado, a Geometria está presente nas demais áreas do Bacharelado, intrinsecamente, nos espaços vetoriais reais ou complexos, nas bases de espaços vetoriais, nos produtos internos e suas projeções, por exemplo. Nos Fundamentos de Álgebra, as simetrias de triângulos e quadrados podem servir como metodologia para a construção do conceito de estruturas de grupo. Simetrias podem ser utilizadas no estudo de funções inversas como exponencial e logarítmica, teorema do valor médio, dentre outros relativos ao Cálculo Diferencial e Integral e à própria Análise, no tratamento de convergências uniformes, por exemplo.

De forma análoga, a Geometria aparece nas demais áreas que compõem a Licenciatura, particularmente no tratamento da Geometria Analítica, quando o aspecto de visualização dos entes matemáticos, ponto, reta, curvas e superfícies, podem ser muito melhor compreendidos quando aspectos de visualização prevalecem aos algorítmicos.

Os PCN constituem documentos orientadores para a escola básica brasileira, subdividindo-se em três patamares: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. A Geometria toma parte integrante nesses três patamares, como pode ser percebido facilmente ao analisar documentos oficiais.

Assim, no documento Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil – (RCNEI) encontra-se a seguinte orientação para crianças de zero a três anos:

> A abordagem da Matemática na Educação Infantil tem como finalidade proporcionar oportunidades para que as crianças desenvolvam a capacidade de estabelecer aproximações a algumas noções matemáticas presentes no seu cotidiano, como contagem, **relações espaciais**, etc.”. (BRASIL, 1998b, p.54. Grifo do autor).

Em relação à faixa etária de quatro a seis anos, o objetivo é aprofundar e ampliar o trabalho previsto para a faixa etária anterior, de forma que as crianças se tornem capazes de: reconhecer e valorizar os números, as operações numéricas, as contagens orais e as noções espaciais como ferramentas necessárias no seu cotidiano; comunicar idéias matemáticas, hipóteses, processos utilizados e resultados encontrados em situações-problema relativas a quantidades, espaço físico e medida, utilizando a linguagem oral e a linguagem matemática.

No que diz respeito à seleção dos conteúdos em Geometria (espaço e forma), há orientações para a exploração e identificação de propriedades geométricas de objetos e figuras, como formas, tipos de contornos, bidimensionalidade, tridimensionalidade, faces planas, lados retos, etc. Há também orientação para as representações dos objetos e a identificação de pontos de referência para situar-se e localizar-se no espaço, bem como a descrição e representação de percursos e trajetos.

Embora não seja objeto desta tese o tratamento da Geometria na Educação Infantil ou na Escola Básica como um todo, há preocupações com a formação do professor de Matemática que poderá atuar em cursos de formação continuada para professores. Por isso, acredito que nessa formação inicial não se pode continuar tratando apenas a Geometria Euclidiana, pois vislumbro aqui a necessidade de conhecimentos de Geometrias Não Euclidianas, como modelos para descrever o mundo concreto onde o espaço e as formas devam ser abordados na formação inicial de um pensar geométrico no desenvolvimento infantil.

Orientações didáticas são fornecidas pelos Parâmetros Curriculares quanto ao pensamento geométrico, tais como compreender relações e representações espaciais pela exploração sensorial dos objetos, ao que me reporto também como uma tarefa que pode ser desempenhada pela Geometria quando se utiliza transformações topológicas que, segundo Piaget e Inhelder (1993), são anteriores às construções euclidianas no desenvolvimento genético. Assim, o professor de Matemática deve possuir em sua formação, segundo minha concepção, esse tipo de conhecimento geométrico, de experiências sensório-motoras, que possibilitem sua interferência nos espaços escolares onde irá atuar.

Penso que um dos insucessos no desempenho em Matemática ao longo da escolaridade seja a falta de formação dessas relações espaciais na criança e que não ocorram em etapas seguintes de sua formação. Acredito que, para romper com este ciclo de inoperância na formação do pensamento geométrico, a Licenciatura deve oferecer ao futuro professor tal formação, mesmo que fora da faixa etária em que se encontra, segundo os estudos de Piaget e Inhelder.

Por minha experiência com o ensino de Matemática em cursos de Licenciatura, constato que muitos são os acadêmicos que, quando questionados sobre o porquê da escolha pelo Curso de Matemática, respondem que é por gostar de fazer contas. A grande maioria desses acadêmicos tem preferência pelo Cálculo Diferencial e Integral e também uma grande maioria não gosta das disciplinas da área de Geometria, caracterizando as marcas negativas deixadas anteriormente em sua formação.

No que diz respeito ao Ensino Fundamental, os PCN “constituem um referencial para a construção de uma prática que favoreça o acesso ao conhecimento matemático que possibilite de fato a inserção dos alunos como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura.” (BRASIL, 1998, p. 59). Além disso, o documento ainda aponta a resolução de problemas como ponto de partida para que a aprendizagem matemática deixe de ser centrada em procedimentos mecânicos.

Concordo com o referido documento quanto à necessidade de que a Matemática contribua com a formação dos indivíduos para o exercício da cidadania, no momento em que desenvolva metodologias enfatizando a construção de estratégias, a elaboração e comprovação de hipóteses, a justificativa de resultados, a criatividade, as iniciativas pessoais, o trabalho coletivo e a autonomia dentre outras habilidades que deverão fazer parte da formação inicial do professor.

Nesse sentido, a Geometria tem muito a contribuir para que esses objetivos sejam cumpridos na medida em que Espaço e Forma propicia a exploração de situações nas quais a utilização de construções geométricas, visualização, localização, deslocamentos, sistemas de coordenadas possibilitam o desenvolvimento de uma forma de pensamento que permitirá uma melhor leitura e compreensão de mundo, sendo assim essencial que sejam considerados estes aspectos na estrutura curricular de um projeto pedagógico de curso de Licenciatura em Matemática na atualidade, formando professores para atuação na escola básica nas próximas décadas. De forma similar, no bloco Grandezas e Medidas, encontram-se possibilidades de preparar os indivíduos para sua inserção social, no sentido de qualificá-los para a leitura e compreensão de informações relativas a espaço e forma.

Nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM^{+}), obtêm-se indicativos de seus propósitos, como o de complementar a formação geral dos estudantes. Entretanto, indicam que isso deve ocorrer de uma forma diferente daquela que vem sendo feita em níveis anteriores, ou seja, indicam que essa formação deve ser articulada dentro de cada área e também no conjunto das áreas que deverão constituir o Ensino Médio. Isto parece apresentar certa semelhança com que pretendo indicar nesta tese, no que diz respeito à Geometria, ou seja, um elemento de ligação entre as diversas componentes curriculares da Licenciatura, tendo imaginação, intuição e visualização como elementos interdisciplinares, o que, segundo o referido documento, não pode ocorrer de forma isolada e internamente a cada disciplina. Mudanças de concepção da formação do professor são difíceis de ocorrer, pois vencer a inércia do que está posto é bastante difícil e amedrontador.

> As características de nossa tradição escolar diferem muito do que seria necessário para a nova escola. De um lado, essa tradição compartimenta disciplinas em ementas estanques, em atividades padronizadas, não referidas a contextos reais. De outro lado, ela impõe ao conjunto dos alunos uma atitude de passividade, tanto em função dos métodos adotados quanto da configuração física dos espaços e das condições de aprendizado. Estas, em parte, refletem a pouca participação do estudante, ou mesmo do professor, na definição das atividades formativas. As perspectivas profissional, social ou pessoal dos alunos não fazem parte das preocupações escolares; os problemas e desafios da comunidade, da cidade, do país ou do mundo recebem apenas atenção marginal no ensino médio, que também por isso precisaria ser reformulado. (BRASIL, 2002, p. 6)

No que diz respeito às competências para a Matemática, os PCNEM$^+$ dizem ser necessário que a escola tenha por objetivo preparar o aluno para um aprendizado permanente e prepará-lo para a vida, corroborando com o que se espera para a formação do professor. Dentre estas competências esperadas dos alunos e que deverão ser desenvolvidas por professores preparados em cursos atuais, destacam-se:

> - reconhecer e utilizar adequadamente, na forma oral e escrita, símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica;
> - ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas;
> - consultar, analisar e interpretar textos e comunicações de ciência e tecnologia veiculados em diferentes meios, articulação dos símbolos e códigos de ciência e tecnologia;
> - relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e inter-áreas. (BRASIL, 2002, p.39)

Acredito que o ensino de Geometria tem muito a contribuir para o desenvolvimento dessas competências que se espera sejam desenvolvidas nos estudantes do Ensino Médio pela disciplina Matemática e, para que isso ocorra, o papel formador do professor de Matemática deve estar bem explícito.

O eixo denominado pelos PCNEM$^+$ de Geometria e Medidas tem papel relevante na formação dos indivíduos, por ser a Geometria elemento essencial para a descrição do mundo e das representações, bem como para as medidas e dimensionamento dos objetos, tendo por isso sua importância no desenvolvimento da Geometria Plana e Espacial no Ensino Médio, incluindo-se aí a Geometria Analítica. Em relação a esse último tópico, é possível, neste nível de escolaridade, incluir noções de Geometrias Não Euclidianas, tais como lugares geométricos oriundos da métrica não usual, de forma a explicar, por exemplo, como ocorre o deslocamento nas ruas de uma cidade urbanizada. O uso da métrica dos catetos pode estar associado ao estudo da função modular, tema abordado no currículo do Ensino Médio e que, frequentemente se apresenta sem relevância para os estudantes que não percebem sua aplicação na vida diária. Na métrica usual euclidiana, se diz que a distância entre dois pontos diagonalmente opostos de uma quadra de uma cidade urbanizada é a medida do segmento de linha reta que une os dois pontos. Entretanto, a métrica euclidiana não descreve o fenômeno, pois não é dado aos seres humanos descreverem essa trajetória em linha reta e sim deslocarem-se pelas calçadas de tal quadra. Assim, a métrica utilizada para o cálculo da distância não é a euclidiana usual e sim a métrica dos catetos, que descreverá uma outra Geometria métrica bem definida e consistente, em geral desconhecida por um grande número de professores que atuam na escola básica. Este é um dos motivos pelos quais acredito que devam ser introduzidas, na formação do professor, propriedades topológicas tais como vizinhança, separação, continuidade e outras. Ainda mais, nessa “nova” métrica uma bola não mais é representada por uma figura circular fechada (denominada comumente de circunferência ou círculo), ou seja, a bola é representada por uma figura plana comumente reconhecida como um quadrado.

Após delinear esse cenário do ensino contemporâneo de Geometria e de ter realizado experimentos de ensino que me permitiram verificar a priori em que medida aspectos imaginativos, intuitivos e visuais podem ser utilizados em disciplina da Licenciatura em Matemática bem como em disciplina de pós-graduação, no próximo capítulo aprofundo meus estudos sobre o tripé imaginação, intuição e visualização, especialmente em Geometria. Nessa caminhada, procuro explicitar minhas concepções a respeito do tema, bem como apontar maneiras de utilizar a abordagem geométrica na formação do professor de Matemática.

5 IMAGINAÇÃO, INTUIÇÃO E VISUALIZAÇÃO NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO.

Neste capítulo, inicialmente defino pensamento geométrico avançado, para posteriomente explicitar minhas concepções sobre imaginação, intuição e visualização e em seguida apresentar uma revisão de literatura sobre trabalhos que foram apresentados internacionalmente, relacionando esses temas. Realizo a seguir um levantamento mais específico sobre o tema junto ao grupo PME, para finalmente tratá-lo na Geometria, em cursos de formação de professores.

O dicionário Aurélio define pensamento como "um processo mental que se concentra nas idéias" ou "o poder de formular conceitos"; enquanto que Skemp (1993) questiona sobre inteligência e aprendizagem humana "A principal atitude exigida para os matemáticos seria a de manipular e formar idéias abstratas, e coincidir esta capacidade com o que entendemos por inteligência?" (p. 19). Para o autor, um conceito matemático é uma idéia, abstrair é uma atividade pela qual nos tornamos conscientes, pelas similaridades entre nossas experiências, de um pensamento conceitual que confere ao seu usuário um poder maior para adaptar sua conduta ao ambiente, acomodando-o às suas próprias necessidades. Esquemas (estruturas mentais) têm suas origens na experiência sensorial do mundo exterior e da atividade motora e compreender significa assimilar um determinado conceito dentro de um esquema adequado.

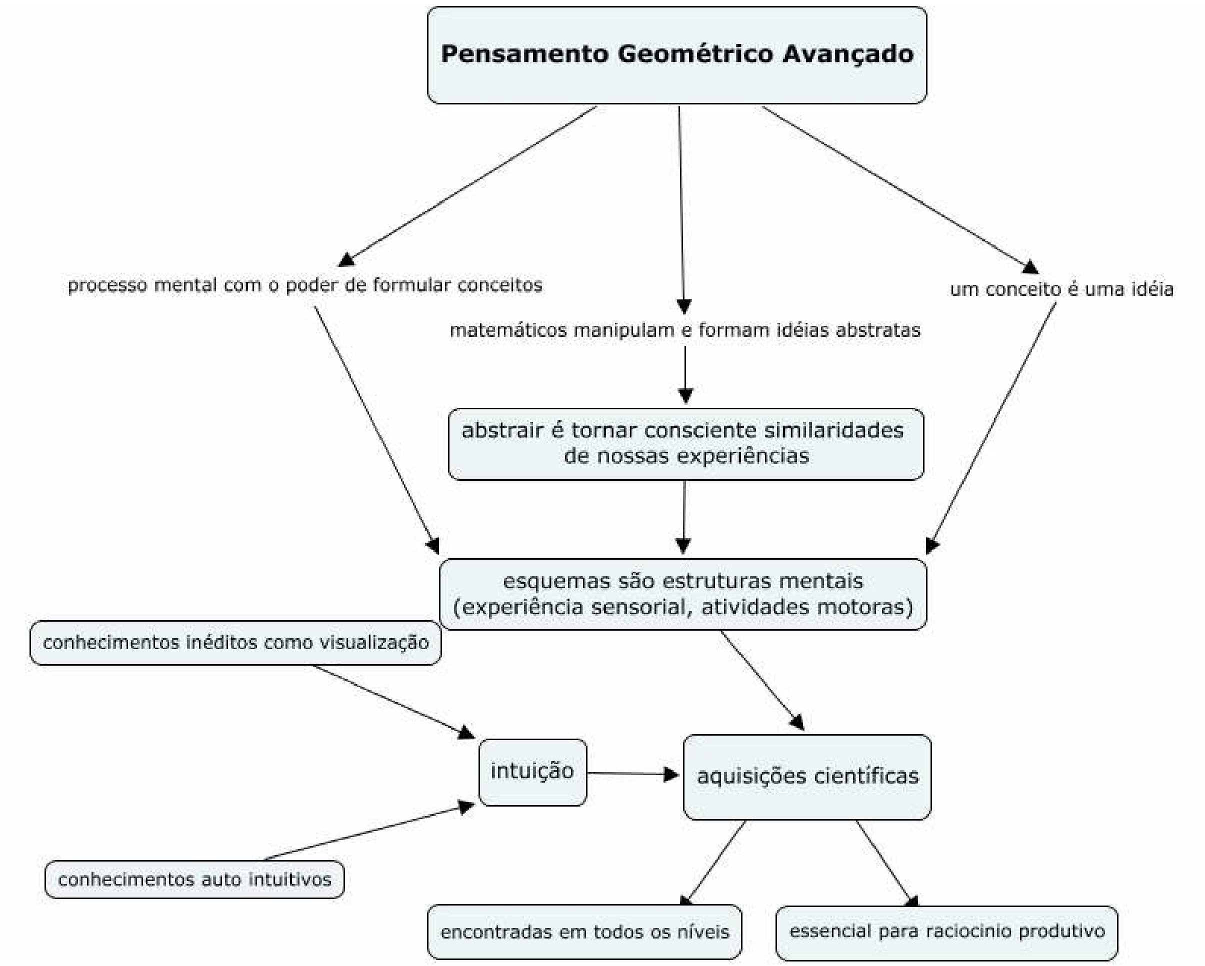
Para Fischbein

> Intuição é gerada por experiências e conhecimentos aparentemente auto evidentes e inéditos tais como visualização e a história da matemática e das aquisições científicas têm sido influenciados pela tendência de produzir dispositivos mentais que lhe permitam acreditar na validade de suas concepções mesmo antes de serem demonstradas (conhecimentos auto evidentes, evidências ou intuição) é essencial para o raciocínio produtivo. (1987, p. 21)

Para Tall (1991, p. 20) muitos dos processos de pensamento matemático avançado já são encontrados em níveis mais elementares (convencer a si próprio, a um amigo, a um inimigo e, antes de um teorema ser conjecturado e provado, há muito trabalho quanto às idéias e relações que serão frutíferas). Afirma esse autor que, para Piaget, “ações e operações tornam-se objetos de pensamento e assimilação”. (TALL, 1991, p. 49)

A partir dessas considerações elaboro minha definição de pensamento geométrico avançado e apresento um mapa conceitual sobre o assunto.

Pensamento geométrico avançado é um processo capaz de construir estruturas geométricas mentais a partir de imaginação, intuição e visualização, para a aquisição de conhecimentos matemáticos científicos.



Quadro 5 – Mapa Conceitual de Pensamento Geométrico Avançado

Embora os termos imaginação, intuição e visualização estejam interligados na literatura, tentarei elaborar algumas distinções entre eles ao longo deste capítulo incluindo exemplos matemáticos que acredito possam contribuir para uma melhor compreensão dos significados atribuídos a essas idéias nesta tese. A imaginação se encontra muito ligada à abstração, assim como à intuição, e essas podem ser complementadas pela visualização, entendendo aqui visualização não como uma forma de representação em termos de uma figura ou representação de um objeto e sim como um processo capaz de auxiliar na construção do fazer matemático, bem como na comunicação dos conceitos nas diversas áreas desse conhecimento matemático. Em geral, a literatura afirma que esses conceitos são difíceis de serem explicitados e alguns autores dão indicativos do que entendem sobre eles ou algum deles.

Para Zimmermann e Cunningham (1991) a origem do termo alemão *Anschauliche*, que dá nome ao livro Geometria e Imaginação, de Hilbert e Cohn-Vossen (1932), apresenta certa ambigüidade, riqueza e diferentes significados como, por exemplo, intuição no sentido de formação ou contemplação de imagens mentais. Para os autores, visualização matemática não é simplesmente uma apreciação da Matemática por meio de imagens e a busca de intuição que essa visualização pretende alcançar não significa apenas uma simples espécie de intuição ou um substitutivo para compreensão matemática, senão um tipo de intuição que se estabelece no ponto vital de uma idéia matemática, produzindo significado para compreender e resolver problemas. Assim, para esses autores visualização matemática não é apenas uma forma de representar objetos matemáticos. Para eles "Visualização matemática é o processo de formação de imagens (mentalmente, ou com papel e lápis, ou com o auxílio da tecnologia) e utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática." (p. 3)

Segundo Cifuentes (2005, p. 58) "O visual na matemática não deve ser entendido só em relação à percepção física, senão também a certo tipo de percepção intelectual, ligada fortemente à intuição matemática". Para o autor, a criação das Geometrias Não Euclidianas promoveu uma ruptura da Geometria com a realidade espacial, o que possibilitou desvincular os aspectos intuitivos dos formais e "Com Hilbert, a partir de sua obra *Fundamentos da Geometria* de 1899, esta tornou-se uma ciência puramente formal 'eliminando' todo apelo à intuição". (Ibid., p. 61). O autor entende visualização como um mecanismo de expressão de uma linguagem visual e considera "Visualizar é ser capaz de formular imagens mentais e está no início de todo o processo de abstração" (Ibid., p. 66).

Para Guzmán (1997, p. 16) visualização tem dois significados distintos, um para a Psicologia e outro para a Matemática, não sendo o mesmo conceito para as duas áreas. Para esse autor,

> As idéias, conceitos e métodos em matemática apresentam grande riqueza de conteúdos visuais, representáveis intuitivamente, geometricamente, cuja utilização resulta muito proveitosa, tanto em tarefas de apresentação e manejo de tais conceitos quanto na sua manipulação para a resolução de problemas. (GUZMÁN, 1997, p. 16)

Ainda mais, o autor afirma que a utilidade de manejar com objetos abstratos de origem concreta é algo conhecido de todo especialista e define “visualização em matemática como essa forma de atuar com atenção explícita às possíveis representações concretas enquanto desvelam relações abstratas que ao matemático interessam.” (p. 16)

Para Eisemberg e Dreyfus (1991), não é comum a estudantes processarem a Matemática visualmente e acreditam haver muitas explicações para que isso ocorra. Entretanto, os autores dizem que a comunidade matemática tem consciência das vantagens de se ter um conceito visual com imagens de idéias matemáticas, citando esforços de introduzir no currículo argumentações visuais por Tall, Artigue e Schwarz, por exemplo. Concluem seu artigo afirmando que as experiências curriculares realizadas podem representar um passo na direção correta de que novos currículos que contemplem a visualização como processo de construção do pensar matematicamente possibilitem aos alunos desenvolverem uma melhor e mais profunda compreensão de conceitos matemáticos. Esse é o sentido que apontamos nesta tese para o emprego dos termos imaginação, intuição e visualização nos currículos brasileiros para a Licenciatura em Matemática com o objetivo de desenvolver um p**ensamento geométrico avançado**.

Em termos internacionais, são encontradas referências sobre visualização em Geometria em Jones (1998), o qual, em artigo fundamentado em encontro realizado na *University of Birmingham*, em 1998, analisa o modelo de desenvolvimento do raciocínio geométrico, proposto por Duval (1998, p. 38-39) ao Grupo de Trabalho em Geometria, sobre o papel da visualização e da imaginação. Faz referência à visualização como componente no desenvolvimento do raciocínio geométrico, incluindo relação entre imaginação e percepção, imaginação e memorização, natureza de imagens dinâmicas e o desenvolvimento conceitual. Diz Jones (1998) que estes temas podem levantar importantes questões de pesquisa em Educação Matemática para o grupo. Entretanto trabalhos nessa perspectiva ainda não estão sendo desenvolvidos para o ensino superior, especialmente nas

Instituições de Ensino Superior (IES) do RS, como pude observar na análise dos currículos.

O estudo da *International Commission on Mathematics Instruction* (ICMI) "*Perspectives sobre la Enseñanza de la Geometría para el siglo XXI"* foi um Congresso de Estudos com vistas a uma Publicação pelo ICMI. No documento, o presidente do *International Program Committee* (IPC), Vinicio Villani, ao fazer chamada de trabalhos para o Congresso de Setembro de 1995 em Catania na Itália, diz que desde o ICME 5, de Adelaide, quando Jeremy Kilpatrick questiona "o que sabemos acerca da educação matemática em 1984 que não sabíamos em 1980", o assunto vem sendo retomado pelo ICME e pelo ICMI. Em conseqüência dos debates e estudos realizados, uma pergunta em relação à Geometria é lançada: "*O que é que já sabemos da investigação sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria e que queremos esclarecer com a investigação futura?*". (VILLANI, 2001, p. 8)

Nesse documento, há indicação de consenso entre matemáticos e educadores matemáticos de que a Geometria pode ser ensinada desde que o indivíduo nasce, mas que ainda existe, desde muito tempo, desacordos sobre os conteúdos e métodos a serem utilizados em todos os níveis, inclusive no nível universitário. O documento ainda destaca que "a geometria tridimensional quase tem desaparecido ou tem sido confinada a um papel marginal no currículo da maioria dos paises". (Ibid., p. 2). Há ainda o reconhecimento de um crescimento na importância que a Geometria tem em si mesma e para a sociedade, bem como a falta de atenção que tem recebido nos currículos escolares, sentindo-se uma necessidade urgente de estudos internacionais com os propósitos de:

> [...] discutir as metas do ensino da geometria para os diferentes níveis escolares e de acordo com os diferentes ambientes e tradições culturais; identificar caminhos importantes e tendências emergentes para o futuro e analisar seus emergentes impactos didáticos, e aproveitar e aplicar novos métodos de ensino. (ibid., p. 2)

O mesmo autor reafirma a importância notável e histórica que a Geometria desempenhou em sua forma axiomática, o que dispensa qualquer comentário, e aponta uma diversificação de aspectos que ela desempenha na atualidade, não se limitando exclusivamente a essa forma.

> 1. a geometria como ferramenta do espaço usada para descrever e medir figuras desde suas raízes primitivas tem evoluído para teorias e seus modelos tais como: geometria euclidiana, afim, projetiva, topologia, não euclidianas e combinatórias;

> 2. a geometria como um método para representação visual de conceitos e processos de outras áreas da matemática e de outras ciências;
> 3. a geometria como um ponto de encontro entre matemática como uma teoria e matemática como fonte de modelos;
> 4. a geometria como modo de pensar e compreender e, em nível mais elevado, como teoria formal;
> 5. a geometria como um exemplo paradigmático para o ensino do raciocínio dedutivo;
> 6. a geometria como uma ferramenta em aplicações;
> (VILLANI, 2001, p. 3).

Acrescenta ainda que sejam possíveis aproximações com o que se pode resolver utilizando Geometria, ou seja, aproximações manipulativas, intuitivas, dedutivas e analíticas, ao que acrescento aspectos relativos ao estilo vetorial aplicado à Geometria Analítica, o uso de recursos informáticos no tratamento sobre Geometria Fractal, o uso de tecnologias da comunicação e informação ligadas ao ensino de Geometria e estudo de teorias sobre os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, como a de van Hiele.

Concordo ainda com o que Goldenberg (1991) afirma quanto à importância do uso de fractais:

> Geometria fractal tem sido reconhecida como uma ferramenta de modelagem altamente valorizada, aplicável em grande variedade de ciências.
> [...] Estas grandes aplicações em ciências atestam a importância da geometria fractal como uma ferramenta para além do domínio da matemática acadêmica e sua posição potencialmente crucial no currículo como uma organização e força unificadora para ciência e matemática. (p. 50)

Para ele, o raciocínio baseado em abordagem visual/experimental, desde a idade pré-escolar, pode permitir o estudo de uma Geometria bem mais complexa, evoluindo até a aproximação com o nível universitário, e nesse sentido o papel do profissional que está sendo formado atualmente necessita, em meu parecer, ser reformulado profundamente, a fim de que tais professores possam suprir as necessidades e carências da escola básica. A opção do autor mencionado foi pelo uso de fractais como sendo um desses elementos inovadores no currículo, para melhorar o desempenho dos estudantes.

Ele afirma, ainda, que nenhum currículo para os anos de 7 a 12 tem a abordagem que propomos, incorporando um importante domínio da Matemática do século 20 e uma deliberada integração de problemas que utilizam Matemática experimental. Trazer a cultura e a vitalidade do nível de investigação universitário para estudantes do secundário é uma tarefa ambiciosa, mas são esforços paralelos e apoio que se invoca. Existe uma base intelectual bem desenvolvida sobre a qual o nosso currículo pode ser apoiar. (GOLDENBERG, 1991, p. 52).

Nasser (1992), em sua pesquisa de doutorado utiliza a teoria de van Hiele para investigar o ensino de Geometria na escola básica brasileira. Afirma que o modelo combina estruturas cognitivas e pedagógicas para a aprendizagem em Geometria, fornece algumas orientações para que tal processo venha a ser melhorado e que, embora questões relativas ao assunto venham sendo discutidas pelo grupo PME, mais pesquisas são necessárias a fim de dar respostas sobre o alcance dos níveis mais elevados da teoria.

Além disso, diz a autora:

> Parece que o modelo de van Hiele fornece explicações razoáveis para os problemas de aprendizagem em Geometria. Em particular, ele ajuda o professor a lidar com as dificuldades encontradas pelos alunos. Por meio de identificação dos níveis de van Hiele dos alunos, o professor tem formas de garantir que eles experimentem tipos de atividades necessárias para dar andamento na aquisição de conceitos geométricos. (NASSER, 1992, p. 52),

Concordo com suas palavras e as reitero, como sendo uma possibilidade de inserção no currículo da formação do professor de Matemática que ainda desconhece essa teoria.

5.1 GRUPO INTERNATIONAL DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – PME

Dentre os grupos internacionais anteriormente mencionados, destaco nesta tese o *International Group for Psychology of Mathematics Education* (PME), pela sua influência na pesquisa em Educação Matemática, particularmente sobre o processo de ensino e aprendizagem.

O PME foi criado durante o terceiro *International Congress on Mathematics Education* - ICME-3 em 1976, sendo um subgrupo deste último. O grupo, com aproximadamente 850 membros de 50 países, foi aberto a pesquisadores renomados e envolvidos com pesquisas relativas aos seus objetivos, bem como a interessados nas pesquisas relacionadas. Anualmente há uma conferência de quatro a cinco dias, quando os pesquisadores discutem e apresentam seus trabalhos.

Alguns objetivos do grupo são:

- Promover contatos internacionais e intercâmbio científico em Psicologia da Educação Matemática;
- Promover e estimular pesquisas interdisciplinares nessa área com a cooperação de psicólogos, matemáticos e educadores matemáticos;
- Compreender de modo mais profundo os aspectos psicológicos do ensino e da aprendizagem matemática e implicações.

Na 23ª reunião do PME, em Israel, foi sentida a ausência do professor Efraim Fischbein pelo seu falecimento a 22 de julho de 1998, sendo destacado o relevante papel que desempenhou na fundação e na condução do grupo. Natural de Bucareste, Romênia, obteve ali sua formação. Viajou para a *Transilvania* para cuidar de sobreviventes de guerra em acampamentos, voltando à Bucareste em 1948 como professor da Escola Média, passando a atuar como chefe do Departamento de Psicologia Educacional da Universidade, vindo a publicar artigos e livros na área, dentre os quais “Conceito e Imagem em Pensamento Matemático”, em 1965.

A comunidade internacional de Matemática convidou o professor Efraim Fischbein para dirigir o 1º ICME em 1969, tendo realizado a conferência “Ensinamento matemático e desenvolvimento intelectual”, conquistando lugar de destaque na comunidade de educadores matemáticos, vindo a ser fundador e condutor do PME, formalmente institucionalizado em 1978 após a segunda reunião, organizada por Hans Freudenthal em 1977, em Utrecht. (TALL, 2001)

Os trabalhos de Efraim Fischbein, que dizem respeito à intuição primária e secundária em pensamento probabilístico em crianças, no significado complexo de conceitos de infinito, na intuição matemática e na ciência, têm sido disseminados pelo mundo, fornecendo subsídios para a divulgação da Matemática como atividade humana. Para ele essa atividade envolve as seguintes componentes:

- Formal: quando utiliza axiomas, definições, teoremas e demonstrações que podem ser adaptadas a quaisquer situações da atividade humana, uma vez que as múltiplas atividades matemáticas devem produzir formalização, mesmo que não completamente técnica.

- Algorítmica: o pensamento matemático é centrado no raciocínio adquirido pela atividade prática, que pode ser oriunda de situações problemas.

- Intuitiva: o raciocínio matemático pode ser desenvolvido por meio de visualização, imaginação e até mesmo por características biológicas, segundo estudos de psicólogos, sociólogos e matemáticos. (FISCHBEIN, 1987)

A respeito de intuição e raciocínio matemático, o autor expressa que “para a idéia de conhecimento intuitivo, em geral, é utilizado o termo ‘intuição’; porém é empregado não como uma fonte, não como um método, mas como um tipo de cognição”. Diz ainda que “*cognição* são essencialmente componentes estruturais de qualquer comportamento adaptável, referindo-se a aspectos de cognição tanto de representação quanto de criatividade.” (FISCHBEIN, 1994, p. 13). Destaca ainda a importância de diferenciar percepção de intuição. A primeira corresponde a uma cognição imediata, não há necessidade de prova de sua existência, como, por exemplo, ter o conhecimento de um objeto que esteja à frente do observador, como uma mesa ou uma janela. Entretanto, esse não pode ser considerado um conhecimento intuitivo. Quanto à segunda, compreende-se uma intuição como indo além dos fatos observados, é uma teoria que implica ir além das informações disponibilizadas.

Uma maneira de dar forma ou validar os conhecimentos aceitáveis é utilizar modelos e isso é feito quando a pessoa, ao desejar contestar noções intuitivamente inaceitáveis, traduz tais noções por outras cuja aceitação é intuitiva e de forma mais natural. A esses substitutivos, Fischbein denomina *modelos intuitivos*.

Segundo Tall (2001), ao fazer um tributo a Efrain Fischbein no primeiro PME após sua morte, foi relembrado o interesse que ele teve pela Psicologia da Matemática escolar, permeando todos os níveis da Educação Matemática, inclusive destacando a criação em 1985 do grupo de trabalho do PME com foco no pensamento matemático avançado, que trata da psicologia desse pensamento, sua natureza, teoria cognitiva e progresso das pesquisas cognitivas em diferentes áreas de Matemática avançada, buscando validação na comunidade tanto de matemáticos quanto de educadores matemáticos.

O segundo presidente do PME foi outro estudioso do ensino de Matemática, Richard Skemp. Nascido na Inglaterra em 1919, estudou em Oxford até 1937, tendo passado a trabalhar desde 1939 até 1945 no *Royal Signals*. Em Oxford, aperfeiçoa-se cientificamente, graduando-se em Matemática, tendo ensinado essa disciplina por cinco anos em escolas básicas, sentindo a necessidade de compreender como as crianças aprendem Matemática, indo se graduar em Psicologia em 1955, quando passou a desenvolver atividades no Departamento de Psicologia da Universidade Manchester, vindo a se doutorar em 1958. (TALL, 2004)

Nas atividades de ensino de Psicologia, interessou-se pelos problemas de aprendizagem de Matemática e um primeiro tema que pesquisou foi a aparente diferença qualitativa existente entre as classes de aprendizagem que denominou *aprendizagem natural* – memorística - e a aprendizagem que necessitava de compreensão, que denominou *aprendizagem inteligente*. Para Skemp (1993), a aprendizagem inteligente está na formação de estruturas conceituais comunicadas e manipuladas por meio de símbolos e, nesse sentido, a Matemática oferece um exemplo mais claro e concentrado: “Ao estudar a aprendizagem e compreensão das matemáticas, estamos estudando o funcionamento da inteligência no que é, talvez, uma forma particularmente pura e, também, amplamente disponível.” (p. 20)

Ao expressar que na formação de um conceito o indivíduo necessita de certo número de experiências vivenciadas com regularidades, oriundas do seu cotidiano, em que pode estabelecer comparações, o autor caracteriza, como Fischbein, uma orientação do grupo PME. Afirma que

> *Abstrair* é uma atividade pela qual nos fazemos conscientes de similaridades (num sentido cotidiano, não no matemático) entre nossas experiências. *Classificar* significa reunir nossas experiências sobre a base destas similaridades. Uma *abstração* é certo tipo de troca mental duradoura, o resultado de abstrair, que nos capacita para reconhecer novas experiências como possuidoras de similaridades com uma classe bem formada. Brevemente, é algo aprendido que nos capacita para classificar; é a propriedade definidora de uma classe. Para distinguir entre abstrair como atividade, e uma abstração como produto final, denominaremos a última, de agora em diante, como conceito. (SKEMP, 1993, p. 26)

Na formação do pensamento matemático os dois autores se complementam, no sentido de que Skemp aponta três tipos de atividades, percepção, ação e reflexão, enquanto Fischbein aponta três aspectos importantes: formal, intuitivo e algorítmico.

A fim de que pesquisadores e interessados pelos trabalhos desenvolvidos pelo PME possam participar das conferências foi criado o Fundo Memorial da Sustentação de Richard Skemp, destinado aos que encontram dificuldades para divulgação de seus trabalhos, especialmente por razões raciais, políticas ou filosóficas. Há abertura de propostas de trabalhos: comunicações orais, apresentação de pôster, relatórios de pesquisa, apresentação de fórum de pesquisa a convite, coordenação de sessão de trabalho, grupo de discussão ou mesmo fórum de pesquisa e abertura de inscrições para concorrer às concessões de recursos destinados a cobrir as despesas dos selecionados.

Para Tall (2004), o PME é uma organização em que muitas vozes apresentam suas concepções sobre pensamento, aprendizagem e ensino de Matemática. Para ele, Piaget contribuiu com a teoria de abstração empírica, buscando compreender como a criança constrói significados de propriedades de objetos, enquanto que a abstração reflexiva foca a idéia de “como ações e operações tornam-se objetos de pensamento e assimilação” (PIAGET, 1985, apud TALL, 2004, p. 281). Para Bruner, o indivíduo traduz experiências em um modelo de mundo, isto é, designadamente, transforma-as em ícones e símbolos (BRUNER, 1966, apud TALL, 2004, p. 281), enquanto Fischbein traz os três aspectos distintos do pensamento matemático apresentados acima: intuição fundamental que ele via como sendo amplamente ação, algoritmos que dão poder em computações e manipulação simbólica, e o aspecto formal de axiomas, definições e demonstração formal (FISCHBEIN, 1987, apud TALL, 2004, p. 282).

Quanto a Skemp, reúne seus conhecimentos de Matemática e Psicologia teóricos e práticos, não somente produzindo seus próprios textos para a escola básica, mas também produzindo teorias gerais de aprendizagem humana. (SKEMP, 1971, 1979, apud TALL, 2004, p. 282). Diz ele que o indivíduo apresenta comportamentos de receptor e de emissor e que isso conduz a três tipos distintos de aprendizagem: percepção (input), ação (output) e reflexão. No que diz respeito à Geometria, segundo Nasser (1992), a teoria dos van Hiele analisa o desenvolvimento cognitivo por meio de uma sucessão de níveis de crescimento sofisticados. Para a autora

> Os diferentes níveis e tipos de compreensão sugeridos por Skemp estão relacionados com os níveis e fases de aprendizagem de van Hiele. Em particular, a correspondência entre o modo intuitivo e o reflexivo da

> atividade mental para as fases de aprendizagem pode esclarecer como atividades, com base em van Hiele, estão relacionados com as fases de aprendizagem. (NASSER, 1992, p. 80)

Bayazit e Jakubowski (2008) discutem como problemas de construção geométrica podem ser utilizados como ferramentas de investigação da conexão entre o raciocínio geométrico e o conhecimento dos estudantes, com base no que o NCTM afirmou, que Geometria é uma área natural de Matemática para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos e que construções geométricas constituem-se em potencial para demonstrar aos estudantes oportunidades de enriquecer sua compreensão e visualização de Geometria, desenvolvendo fundamentos para análise e aplicação de sua criatividade. As pesquisas foram realizadas com professores de Matemática de nível básico e secundário e analisaram como esses estudantes estabelecem conexões com informações dadas e a esperada construção e se há algum tipo de tratamento comum nas construções. As autoras informam que buscarão olhar para evidências de conectividade interna e externa.

A respeito de métodos visuais e não visuais na resolução de problemas, o trabalho de Yin Ho (2008) apresenta resumo de um estudo de caso realizado com uma aluna, tendo por base os estudos apontados por Halmos sobre a importância da habilidade de visualização, bem como da importância, atribuída por Clements, da visualização na resolução de atividades de resolução de problemas. O estudo foi feito com base em três entrevistas realizadas com uma estudante quando esta esteve cursando do quarto ao sexto grau. Em cada ano, a menina era solicitada a resolver o mesmo conjunto de problemas verbais que exigiam um alto grau de visualização. O autor salienta ainda que teve por base estudo de Presmeg (1986, p. 42), em que esta diz que um método visual de solução é aquele que envolve imagem visual com ou sem diagramas. Um método não visual de solução é aquele que não envolve imaginação e visualização como parte essencial do método. A estudante, no quarto grau de escolaridade, resolveu todos os problemas utilizando um método visual para cada um deles, sendo que apenas o primeiro não era novo para ela. No quinto grau, ela resolveu os dois problemas utilizando um método não visual, de forma similar a que resolvera no ano anterior. Utilizou um método visual próprio para os outros quatro problemas, mesmo consideradas as situações mais complexas do que a dos dois primeiros problemas. Pode ser considerado assim o fato de que, num primeiro momento, os métodos visuais de resolução de problemas podem parecer os mais simples e, dessa forma, considero que se devam munir os futuros professores na Licenciatura em Matemática de tais ferramentas visuais. No sexto grau, a menina formalizou seu método de resolver tais problemas e resolveu cinco dos seis problemas utilizando o seu método não visual.

Em minha compreensão, esse trabalho de Yin Ho dá indicativos da perda de aspectos de visualização no avanço da escolaridade, uma vez que segundo Piaget e Inhelder (1993), o espaço é construído seguindo o desenvolvimento genético.

O mesmo Yin Ho (2008) observa em outro trabalho, intitulado *“Roles of visualization in mathematical Problem solving”*, que pesquisas em visualização não demonstram claramente sua relação com o sucesso na resolução de problemas e que Presmeg (2006) propôs questões de pesquisa em visualização as quais, de fato, produzissem efeitos na resolução de problemas matemáticos. O autor mostra resultados de um estudo do papel que a visualização desempenha na resolução de problemas com estudantes de quinto e de sexto nível de escolaridade primária. Foram feitas entrevistas individuais em que os alunos foram solicitados a resolver um conjunto de seis problemas tendo alto grau de visualização. Em entrevista individual, cada estudante foi solicitado a escrever as soluções dos problemas. Foram também questionados a explicar suas soluções. O pesquisador detectou sete papéis para visualização nesse estudo. São eles:

> [...] compreender o problema; oportunizar o trabalho com uma versão mais simples do problema; perceber conexões com um problema relacionado; como uma ferramenta para verificar soluções; atender a estilos individuais de aprendizagem; como um substituto de cálculos e como transformar uma situação em Matemática”. (YIN HO, 2008, p. 347)

Segundo Aaron (2008), alunos de Geometria são responsáveis pela sua atuação na sala de aula ao captarem avaliação positiva de seus professores para aprofundamento de sua compreensão de conceitos geométricos. Diz perceber a sala de aula de Geometria como um lugar onde professor e aluno estão juntos para realizarem trabalhos com base no contrato didático, isto é, ao alegarem que têm ‘recoberto’ parte do currículo de Geometria. Diz ainda que a análise de entrevistas com alunos de Geometria mostra que alguns trabalham com o olhar voltado aos ensinamentos do professor, enquanto que outros alunos se voltam no sentido do conteúdo matemático.

O artigo de Aaron (2008) procura dar respostas ao questionamento de quem são os alunos de Geometria e qual é o papel que eles atribuem aos significados que esses ensinamentos têm para eles, na escola secundária. Identidade acadêmica é discutida no artigo, buscando compreender o que significa “fazer escolar” em aulas de Geometria. Por meio dessas identidades, a autora compreende quais ações os alunos vêem como disponíveis e instrutivas para obter significados para eles nas tarefas que lhes são impostas. São feitas duas afirmações sobre a natureza dessa identidade, para chegar a uma concepção do que considera uma identidade para observar as maneiras com que os indivíduos se dispõem no contexto da sala de aula para criar identidades em Geometria. Segundo o autor, as identidades são experimentadas na prática e variam com o contexto.

Assim, a autora quer dizer que as crianças precisam experimentar durante seu desenvolvimento escolar, sob a orientação dos seus professores, os ensinamentos que lhe são proporcionados na sala de aula, estruturando em cada momento o que virá no momento seguinte, por não saberem ao nascer o que é ser estudante. Para ela, alunos diferentes buscam identidades diferentes de acordo com o cenário em que elas se desenvolvem, pois possuem diferentes formas de compreender o mundo figurado de distintas maneiras e esses alunos sentem que diferentes ações são apropriadas quando se defrontam com uma tarefa. Uma conseqüência deste ponto de vista da identidade é que necessitamos ter um quadro muito claro do contexto da sala de aula de Geometria. “Uma forma que pesquisadores têm de compreender o contexto da sala de aula é no engajamento dos estudantes nas tarefas instrucionais.” (AARON, 2008, p. 5).

Entendo que o procedimento adotado na busca de uma identidade para alunos da escola básica em Geometria, pesquisado e apresentado no PME, pode e deve ser introduzido no “fazer Geometria” na Licenciatura em Matemática, a fim de que se tenha, em futuro próximo, mais professores envolvidos no ensino dessa disciplina. Parece-me que o ensino dessa área não ocorre pelo fato de que professores, ou não compreendem os conteúdos de Geometria, ou não têm uma visão ampla e atual da área ou não têm metodologias diversificadas para o seu ensino. A isso associo uma falta de identificação geométrica[17] do professor.

[17] Denoto aqui identificação geométrica como uma competência do professor no trato da Geometria no seu fazer pedagógico.

Em artigo apresentado no último PME, Aspinwall, Haciomeroglu e Presmeg (2008) buscam esclarecer diferenças entre visualização e análise no pensamento matemático, indicando que os resultados de suas pesquisas no ensino de Cálculo apontam novos referenciais nas preferências individuais dos alunos para pensamento visual e analítico. Foi observado, nas entrevistas com os estudantes que obtiveram sucesso usando combinações de visualização e análise, que pensamento verbal-descritivo é fundamental para sustentar a utilização de pensamento visual e analítico. Dizem que a importância do Cálculo está na utilização de redução de problemas complexos a simples regras e procedimentos, como descrevem no projeto, e isso tem levado muitos alunos a insucesso na sua compreensão.

Aspinwall, Haciomeroglu e Presmeg (2008) afirmam que, por meio de suas entrevistas com os estudantes, o pensamento matemático visual e analítico representa mais do que uma simples dualidade, parece que estão relacionados entre si. A pesquisa exigiu instrumentos de validação dos testes aplicados quanto à natureza da compreensão de Cálculo pelos alunos, quanto à presença relativa e valor de elementos desses dois tipos de pensamentos. Foi desenvolvido e testado o instrumento *Mathematical Processing Instrument for Calculus (MPIC)*, o qual classifica os procedimentos dos alunos de acordo com suas preferências em pensamento visual e analítico. Esse teste foi conduzido por pesquisadores matemáticos, professores de Matemática e educadores matemáticos e mostrou uma extensão na forma de pensamentos, o que foi detectado nas respostas dadas e entrevistas realizadas com os pesquisados. Foram fornecidas descrições com grandes detalhes quando solicitados a desenharem gráficos de derivadas de funções, tendo sido considerados os elementos de visualização, análise e descrição-verbal na solução do problema. Por meio de soluções visuais, que são baseadas em imagens, foi possível encontrar soluções sem haver necessidade de utilização de outros recursos para visualizar pontos críticos, cúspides ou laços. Foram capazes de obter gráficos de derivadas sem os costumeiros tratamentos realizados pelo Cálculo.

No que diz respeito à solução analítica, os estudantes foram capazes de descrever o processo por meio das tarefas apresentadas graficamente. Assim, Aspinwall, Haciomeroglu e Presmeg (2008) concluem que os indivíduos investigados utilizaram uma combinação de estratégias visuais e analíticas na solução dos problemas e demonstraram a existência de um modo de *pensamento verbal-descritivo*. (ASPINWALL; HACIOMEROGLU; PRESMEG, 2008).

Segundo Biza, Nardi e Zachariades (2008), nos últimos vinte anos os debates sobre as contribuições de representações visuais para demonstração em Matemática estão sendo intensificados, principalmente porque tais representações podem ser usadas não apenas como evidência ou inspiração para afirmações matemáticas, senão também como formas de justificativas e devem ser tratadas como coadjuvantes e parte integrante de provas e demonstrações. Afirmam que trabalhos em Educação Matemática têm mostrado um crescimento nas funções em que a visualização tem sido focada, tais como: desenvolvimento curricular com destaque sobre visualização; compreensão e uso matemático. Dizem que parece não haver consenso, para muitas pessoas, sobre as funções que a visualização pode desempenhar no ensino e na aprendizagem matemática.

A pesquisa dos autores tem como finalidade mostrar o quanto a visualização pode influenciar no raciocínio e no *feedback* que os professores têm de seus alunos a esse respeito. O estudo consistiu em verificar se os métodos visuais eram mais completos do que os métodos algébricos para obter retas tangentes a uma curva em pontos de inflexão a partir dos gráficos das funções.

A pesquisa envolveu professores comprometidos com situações de Educação Matemática, os quais deveriam investigar como alunos resolviam determinadas tarefas de um exame seletivo a um programa de mestrado em Educação Matemática. As questões propostas foram retiradas de um teste seletivo para tal mestrado, em que noventa e um dos cento e cinco candidatos eram graduados em Matemática e com experiência em ensino. Os professores deveriam se expressar por escrito, registrando as mais elaboradas descrições das origens teóricas dos tipos de tarefas, e refletir sobre os objetivos da aprendizagem na resolução de problemas matemáticos, interpretações de soluções e descrição das reações dos estudantes. O primeiro conjunto de análise foi das respostas de dois desses professores com relação a dois aspectos: compreensão dos objetivos dos exercícios na tarefa; correção matemática; interpretação/análise das respostas dos dois estudantes em sua tarefa e *feedback* deles a respeito.

Na descrição da percepção de tangentes e o comportamento sobre visualização, em relação *às crenças sobre a suficiência/aceitabilidade das* *argumentações visuais* utilizadas por um dos alunos, dos vinte e cinco docentes, dez não discutiram a argumentação visual do aluno. Apenas uma professora fez referência a ambos os métodos de resolução “algébrico e gráfico”. Ela escreveu que “o objetivo do exercício é que os estudantes examinem quando a linha é tangente ou não ao gráfico ou graficamente (se for possível) ou algebricamente com o uso de derivadas” e a seguir ela observou que “o exercício não especifica qual poderia ser usado para resolver”. (BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2008, v. 2, p. 179).

Como o problema oportunizava resolução por métodos algébricos e por métodos visuais, sendo que os últimos ofereciam certos problemas, o trabalho foi conduzido pelo uso de métodos algébricos para sua solução.

Na busca de trabalhos relativos ao tema que proponho, nos encontros PME de 2001 a 2007, muito pouco foi encontrado sobre imaginação, intuição e visualização em Geometria e Álgebra e, quando isso acontece, geralmente, se refere à pesquisas envolvendo a escola básica. Dizem Mitchelmore e White (2005) que, desde o encontro de 2001, têm surgido trabalhos relacionados à abstração na aprendizagem matemática. No PME de 2001, os dois autores dizem ter encontrado três pesquisas a respeito, buscando similaridades entre o modelo de abstração empírica e o modelo RBC (*Recognizing, Building-With, Constructing*) na tentativa de refinamento entre ambos para melhorar e ampliar a abstração na aprendizagem matemática de um maior número de estudantes.

Nos últimos PME alguns trabalhos sobre imaginação, intuição e visualização já apareceram, mas sem alterar substancialmente o cenário já descrito. No PME de 2005, duas das três plenárias tocaram no assunto, sendo que na oportunidade, *Imagery and Visualization* passou a ser considerado um campo de pesquisa. No último, em trabalho ligando aspectos algébricos e geométricos, Weng San, da Universidade Pedagógica de Moçambique, discute pesquisa realizada no primeiro ano de um curso universitário em uma disciplina de Álgebra e uma de Geometria Analítica. Analisa os resultados dos pré-testes indicando que, para soluções particulares das tarefas, foi utilizado pensamento algébrico acrescido de pensamento geométrico e que, para soluções gerais, foi necessário incorporar processos de construção e de visualização. Diz ainda que tais resultados pareçam confirmar a afirmativa de que, para se desenvolver conectividade, é necessário possuir conceitos chave e procedimentos (de diferentes domínios) para estabelecer *links* entre estruturas cognitivas e representações, o que corrobora o que se está propondo inovar nos currículos da Licenciatura.

A respeito de pesquisas sobre visualização no ensino e na aprendizagem em Matemática, Presmeg (apud Gutiérrez e Boero, 2006) realiza um inventário publicado no *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*: *past, present and future*. Inicialmente indica que, no *Journal for Research in Mathematics Education* (JRME), foram apresentados em 1985 um total de 223 artigos, dos quais oito eram relacionados ao tema, enquanto que, dentre os 236 artigos publicados em 1986, sete foram relacionados.

Uma síntese desse levantamento é apresentada no quadro abaixo.

PME	ANO	LOCAL	Visualização
11	1987	Montreal, Canadá	Nenhum trabalho envolvendo visualização
12	1988	Veszprem, Hungria	Nenhum trabalho envolvendo visualização
13	1989	Paris, França	Surge o termo pesquisa em visualização ou imaginação (*imagery*)usado por Mariotti e Arcavi em trabalho versando sobre imagens de sólidos. Mariotti identifica em crianças de 11-13 anos dois níveis de complexidade de pensamento intuitivo visual por meio de métodos que incluíam o clínico. Arcavi usou métodos computacionais. Arcavi e Nachmias envolveram adultos num ambiente computacional como forma de comparar representações em eixos paralelos para representação de funções lineares e seu envolvimento com a visualização de declividade.
14	1990	Oaxteoex, México	Dreyfus e Eisenberg organizam o Grupo de Trabalho em Representações e Visualização Matemática [*Working Group on Representations and Mathematics Visualisation]*, interno ao PME.
15	1991	Assissi, Itália	Visualização tornou-se um campo frutífero de pesquisa. Pela primeira vez *imagery and visualisation* foi apresentado como categoria separada na lista de tópicos do evento, surgindo os nomes de Tall e Hershkowitz. O título de uma plenária feita por Dörfer apresenta o tema da sua pesquisa- “Significado: visualização ou imaginação, esquemas e protocolos” [*Meaning: imagery, schemata and protocols*].
16	1992	Draham, USA	Foi organizado um grupo de discussão por Mariotti e Pesci denominado Visualização na resolução de problemas e aprendizagem [*visualisation in problem solving and learning*] tendo foco na Psicologia,

			especialmente tratando com crianças.
17	1993	Tsukuba, Japão	Continuou com foco na Psicologia envolvida com visualização. Houve dois aspectos de interesses: quanto a representações, organizado por Gondin, e Geometria, por Gutiérrez, na organização de uma sessão, dentro do tópico visualização e imaginação, denominado Pensamento Geométrico Espacial. [*Geometrical and Spatial Thinking*]
18	1994	Lisboa, Portugal	Abordagens sobre visualização tenderam para o currículo e as pesquisas de Mariotti e Persi; Gutiérrez e Goldi categorizaram visualização e pensamento espacial associado a currículo.
19 e 20	1995 e 1996	Recife, Brasil e Valença, Espanha	Houve ainda concentração e atenção ao currículo e as associações oriundas da visualização, sendo que o foco de Gutiérrez era a Geometria enquanto que o de Goldi eram as representações.
21 e 22	1997 e 1998	Lahti, Finlândia e Stellenbosch, África do Sul	Ocorre uma diversificação de interesses, passando ao uso de computadores e softwares na aprendizagem e uso de visualização. Visualização é dirigida ao pensamento geométrico. Ocorre uma mudança com a introdução de teorias sobre semiótica incluindo aspectos de visualização.
23 e 24	1999 e 2000	Haifa, Israel e Hiroshima Japão	As pesquisas sobre a área foram bem ampliadas com trabalhos sobre visualização e Educação Matemática categorizados em visualização e imaginação.
25 e 26	2001 e 2002	Utrecht, Holanda e Norwich, Inglaterra.	A importância do papel de imagery é apresentada no trabalho de Gray & Tall; o uso de visualização por meio de Geometria Dinâmica aparece nos trabalhos de Hadas & Arcavi, Markopoulus & Potari. Imaginação na resolução de problemas e imaginação e formas geométricas foram alguns dos temas em trabalhos apresentados.
27	2003	Honololu, Hawaí	Doze artigos citaram o termo visualização em Educação Matemática, mostrando investigações em vários campos de conhecimento, dos quais destaco as tecnologias educacionais.
28	2004	Zérgen, Noruega	Pesquisas foram apresentadas sobre o papel que desempenham as figuras ou desenhos e outras representações na resolução de problemas.
29	2005	MelbourneAustrália	Uma tendência que ganhou espaço foi a de gestos e construção de significados matemáticos [*Gesture and the construction of mathematics meaning*] cuja conexão com visualização, segundo a organizadora, tornou-se um "fórum de pesquisa" organizado por Arzarello e Edwards.

Quadro 6 – Síntese da análise dos PME de 1987 a 2005 sobre imaginação, intuição e visualização.

Desse apanhado sobre o trabalho organizado por Presmeg, percebo uma tendência forte em pesquisas sobre visualização em Educação Matemática e muito pouco aparece sobre possibilidades no ensino superior. Como no tempo presente os recursos computacionais são muitos e bem disponibilizados, acredito que pesquisas frutíferas ainda podem ser realizadas e nos próximos capítulos procuro encaminhar algumas possibilidades. Para Stylianou (2001, apud Presmeg, 2006, p. 228), "O papel da imaginação visual na resolução de problemas matemáticos permanece uma questão atual em pesquisas educacionais".

A partir desse levantamento, feito de forma geral sobre o tema imaginação, intuição e visualização, aprofundo o assunto com guarida na literatura internacional a fim de que possa argumentar minhas pretensões de utilizar esse tema como um interlocutor da Geometria com outras áreas na Licenciatura em Matemática, numa busca de inovação curricular nesse nível de formação.

5.2 DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO E O ENSINO DE MATEMÁTICA.

Guzmán (1993) diz que a complexidade da Matemática e da Educação sugere que os teóricos da Educação Matemática, ou ao menos os agentes dela, devem permanecer constantemente atentos e abertos às mudanças profundas que são exigidas, em muitos aspectos, pelo dinamismo da situação global. Esta é uma necessidade que acredito devesse permear a prática do professor que forma professores, embora se saiba das dificuldades que se enfrenta em inovações em Educação que ultrapassem a barreira do discurso. A seguir, apresento algumas idéias sobre imaginação, intuição e visualização.

5.2.1 Imaginação

Imaginação, criatividade e abstração são termos que aparecem juntos na literatura e considero que, aliados à intuição e visualização, complementam uma tríade fundamental para um pensamento geométrico que pode ser desenvolvido na formação inicial do professor como uma das possibilidades para a melhoria da qualidade do ensino na educação básica, particularmente na busca de melhorar o *desempenho* do professor que atua naquele nível educacional.

Para Hadamard (1945), pensamentos podem ser acompanhados por outras representações concretas além de palavras e, para o autor, Aristóteles já havia admitido que não se pudesse pensar sem utilizar imagens, enquanto que Alfred Binet, à mesma época, concluiu que pensamentos também estão conectados à experimentação. Para Hadamard (1945), autores como Delacroix, James Angell, Titchener, Varendonck também têm tratado o tema relacionando palavras, imagens mentais e pensamento.

Ao admitir que as conclusões dos experimentos de Binet a respeito do fato que palavras ou imagens sensoriais podem ser úteis para dar forma precisa a sentimentos e pensamentos, Hadamard (1945, p. 74) afirma que

> na verdade, é satisfeita até certo ponto a dupla e aparentemente contraditória condição:
> (a) que a ajuda das imagens é absolutamente necessária para conduzir meus pensamentos.
> (b) que nunca estou enganado e nem mesmo tenho medo de ser enganado por eles.

Em relação à síntese para as representações mentais na resolução de problemas geométricos, Hadamard (1945, p. 80), afirma:

> Eu abstraio alguma parte especial do esquema e a considero parte essencial para o restante, isto considerando conduzir a um *relay-result*. Então, todo o argumento é, nesse caso, entendido como uma entidade única, como uma síntese na qual um *relay-result*, se existir, está incluído. Esse é um processo que, de acordo com Pierre Boutrox, Descartes afirma ser frequente na geometria grega.

Descartes também lida com imaginação na ciência e, segundo Hadamard, parece que concebeu processos semelhantes aos que utilizou. Conforme Hadamard (1945), Descartes afirmou no *Regulae ad Directionem Ingenii* “Imaginação, por si só, é incapaz de criar Ciência, mas temos de, em certos casos, recorrer a ela. Em primeiro lugar, por se concentrar sobre o objeto que queremos considerar, nos previne de nos perdermos e, além disso, pode ser útil para despertar em nós certas idéias.” Em continuação, Descartes afirma:

> “Imaginação será essencialmente útil na resolução de um problema por diversas deduções, cujos resultados têm de ser coordenados após uma enumeração completa. Memória é necessária para manter dados do problema, se não usá-los todos desde o começo. Podemos ignorá-los, se a imagem dos objetos em consideração não estiverem constantemente presentes em nossa mente e não ofereceram para nós, em cada instante.” (apud Hadamard, 1945, p. 149)

Descartes desconfiou do papel da imaginação e tentou eliminá-la da Matemática e de toda a Ciência, como bem se sabe, com a introdução de sua Geometria Analítica, a qual reduziu a Geometria a combinações numéricas. Segundo Hadamard (1945), um outro tratamento rigoroso dos princípios da Geometria eliminou qualquer apelo à intuição: o que foi desenvolvido pelo matemático Hilbert.

Logo no início do seu livro Fundamentos da Geometria, Hilbert (2003, p. 1) define os elementos da Geometria e os cinco grupos de axiomas:

> Imaginemos três sistemas diferentes de objetos: aos objetos do *primeiro* sistema chamemos pontos e representemo-los por A, B, C, ...; aos objetos do *segundo* sistema chamemos retas e representemo-los por a, b, c, ...; aos objetos do *terceiro* sistema chamemos planos e representemo-los por α, β; γ, ... Os pontos chamam-se também os *elementos da geometria linear*, os pontos e retas os *elementos da geometria plana* e os pontos, retas e planos os *elementos da geometria do espaço* ou do *espaço*.

Dessa forma, verifica-se que, nessa obra de Hilbert, há um abandono da intuição, ao contrário do que utiliza na anterior *Geometry and the Imagination*, na qual cita “Neste livro, nosso propósito é dar uma apresentação de Geometria tal como é hoje, em seus aspectos intuitivos e visuais.” (HILBERT e COHN-VOSSEN, 1932, p. iii) ou ainda, “Intuitivamente, é claro que a hipérbole é sempre convexa e tem tangente em cada ponto” (Ibid., p. 4). Nessa mesma obra o autor, ao discorrer sobre Geometria Projetiva, indica que “vamos aprender sobre fatos geométricos que possam ser formulados e provados, sem qualquer medição ou comparação de distâncias e de ângulos.” (p. 94) apontando uma outra forma de abordar Geometria que não a exclusivamente dedutiva, como na segunda obra.

Em 1985, foi criado junto ao PME um grupo de trabalho para organizar um livro sobre o pensamento avançado em Matemática, que recebeu essa expressão como título segundo Tall (1991). Afirma o autor do livro que essa expressão foi empregada tanto por matemáticos quanto por educadores matemáticos e do prefácio de seu livro destaco a seguinte consideração:

> [...] criatividade está preocupada com a forma como as idéias sutis de investigação são construídas na mente humana e uma prova disso é a forma como essas idéias são ordenadas em um desenvolvimento lógico tanto para verificar sua natureza quanto para apresentá-las à aprovação da comunidade matemática. (TALL, 1991, p. xiii).

Dreyfus (apud Tall, 1991), ao fazer considerações sobre o processo de pensamento matemático avançado, estabelece relações entre representação e abstração no processo de aprendizagem e entre representações mentais e matemáticas, podendo e devendo ser utilizadas nos procedimentos didáticos para aprendizagem. Tais processos podem consistir de quatro estágios: "usando uma única representação; usando mais que uma representação em paralelo; utilizando links entre representações paralelas e integrando representações e flexibilizando conexões entre elas." (TALL, 1991, p. 39).

Para o autor, a criatividade matemática desempenha um papel vital na formação de um pensamento matemático avançado e apresenta seu desenvolvimento em três estágios: *um estágio preliminar técnico* em que a atividade matemática pode ser precedida por estágios prévios em que regras e procedimentos matemáticos são aplicados sem a necessidade de aprofundamentos teóricos; *um estágio de atividades algorítmicas,* em que são utilizados procedimentos para realizar operações matemáticas, cálculos, manipular e resolver, os quais são essenciais para um bom desempenho de técnicas operatórias; *um estágio de atividades criativas* no qual é provável que a criatividade matemática ocorra e atue fortemente no desenvolvimento da teorização matemática. Segundo o autor, um dos ingredientes para a criatividade matemática é imaginação e inspiração.

Para Mariotti (1995, apud Jones, 1991, p. 122) o raciocínio geométrico pode ser interpretado como "processo dialético entre os aspectos figurais e conceituais", ou seja, no desenvolvimento do raciocínio geométrico há um envolvimento interdependente entre imagens e conceitos.

Bishop (1989, p. 10), ao atribuir como um objetivo da Matemática o de representar abstrações da realidade e como muitas dessas representações são de forma visual, diz que "entre outras qualidades positivas associadas a imagem visual estão sua força integradora, sua utilização e sua concretização da idéia abstrata e, algumas vezes, seu aspecto iluminado."

Visualização tem alguns ganhos que podem ser físicos ou mentais enquanto que a imaginação pode ser algo pictórico e ter relações com percepção, com memorização e com a natureza de imagens dinâmicas, além de interação com a formação de conceitos, segundo Jones (1991). No que diz respeito a imaginação e percepção, há várias formas em que a percepção pode contribuir para o desenvolvimento da imaginação e uma delas pode ser a percepção tátil, na qual o indivíduo, em contato com um determinado objeto, sem visualizá-lo, cria uma imagem mental dele por meio de descobertas exclusivamente táteis. Acredito que, com crianças em atividades pré-escolares, um bom recurso para ilustrar esse fato é a utilização de jogos com blocos lógicos.

Com relação a imaginação e memorização, Jones (1991) diz que estas são imagens mentais formadas de experiências planejadas e investigadas na mente e memorizadas a partir de experiências. Para Del Grande (apud Lindquist e Schulte, 1994, p. 158), a memória visual é uma das aptidões que parecem ter a maior importância para o desenvolvimento acadêmico além de coordenação visual-motora, percepção de figuras em campos, constância de percepção, percepção de posição no espaço, percepção de relações espaciais e discriminação visual.

Segundo Dreyfus (1995, apud Jones, 1991, p. 122) há questões interessantes de serem investigadas pelo Grupo de Trabalho em Geometria do PME, para o que é necessário:

- Compreender o papel preciso de diagramas na resolução de problemas e aprender sobre conceitos e processos matemáticos específicos precisos;
- Descobrir para que espécies de processo de raciocínio e em quais espécies de situações de aprendizagem, diagramas e/ou imaginação visual são particularmente úteis;
- Compreender o impacto no raciocínio matemático de diagramas dinâmicos disponibilizados na compreensão matemática baseada no computador;
- Descobrir quais são os significados eficientes para comunicação sobre, e pelo significado de diagramas e suas interpretações associadas.

Entendo que em relação à comunicação em Geometria, os símbolos visuais e os verbais podem desempenhar um papel que deve ser considerado, uma vez que muitas pessoas têm um tipo de imaginação mental que favorece a formação de conceitos abstratos muito mais do que outras. Para Skemp (1993), a chegada à formação de conceitos inicialmente é difícil e, para fazer com que certa idéia de um conceito se torne consciente, parece haver a necessidade de um estreito relacionamento da idéia a um símbolo. Para Skemp (1993), os símbolos visuais, embora mais difíceis de serem comunicados, são mais individuais, enquanto que os símbolos verbais, embora sendo mais fáceis de serem comunicados, necessitam do coletivo, o que muitas vezes pode tornar-se um empecilho para a aprendizagem. Ao exemplificar a vantagem e clareza dos símbolos visuais na representação de ângulos planos comparativamente à simbologia algébrica, o autor aborda os rumos para os quais parece apontar a Geometria, a saber, a de um sistema de axiomas manipulados algebricamente, e questiona: “Por que, sendo um dos ramos mais visuais das matemáticas, em suas primeiras etapas, não permanece assim?” (SKEMP, 1993, p. 107).

Como Geometria e Lógica sempre apresentaram uma forte ligação, é possível que a não utilização de imaginação e visualização, que se detectou no levantamento realizado nos programas dos cursos de Licenciatura, decorra disso, sendo a Geometria talvez o exemplo mais característico de axiomatização que tem sido utilizado por professores e estudantes, senão o único, em vários níveis de escolarização.

A história aponta que Euclides definiu, numa linguagem atual, ponto e reta da seguinte forma:

- Ponto é o que não tem partes.
- Reta é um comprimento sem largura.

A partir disso, foi construída uma axiomatização usando definições e cinco axiomas. Em função de que somente com cinco axiomas seria impossível construir sua Geometria, a fim de atender a seus propósitos, Euclides empregou outros axiomas no transcorrer de suas demonstrações. Entretanto, algumas idéias ainda não estavam completamente assimiladas, como no caso do quinto postulado, o das paralelas, permanecendo uma dúvida se ele era realmente um axioma ou um teorema, ou seja, se poderia ser demonstrado. Assim, no seu desenvolvimento a Geometria sofreu grandes transformações desde os tempos de Euclides e, em 1899, Hilbert elabora “Fundamentos da Geometria”, o qual também sofre transformações ao longo das suas várias edições. Na sua construção, as definições dadas por Euclides para ponto, reta, plano e espaço, passaram a ser consideradas como elementos primitivos não definidos, possibilitando talvez um apelo maior à imaginação. Gohenn no prefácio do livro de Hilbert (2003, p. xiv) ao se referir à última edição afirma

> Muitos matemáticos exprimiram a opinião de que este trabalho de Hilbert é de menor importância, está cheio de erros e despido de significância moderna. Sem desrespeito por todos aqueles que assim se expressaram, devo, todavia enfatizar a grande importância da tentativa de desenvolver um tratamento completo e consistente dos axiomas da geometria e de sintetizar estes axiomas no contexto da análise dos números reais.

Segundo Boyer (1996), na virada do século XIX para o XX, Poincaré e Riemann, tiveram papel relevante para o desenvolvimento da Geometria, por serem hábeis no tratamento de problemas de natureza topológica, sem se preocuparem com sua representação formal no sentido clássico. Nesse fluxo de discussões e de produções matemáticas que movimentavam a época, surgiu Hilbert que publicou seu ponto de vista

> [...] que se tornou típico de sua obra e influência: caracteriza-se por ênfase em abstração, aritmetização e desenvolvimento lógico de conceitos e teorias da matemática. Hilbert expressou a opinião de que todos os ramos da matemática exigem um grau pelo menos igual de abstração, desde que se sujeite o fundamento desses ramos ao mesmo estudo rigoroso e completo que é necessário. Enfatizou a inter relação entre teoria dos números e álgebra, bem como a existente entre teoria dos números e teoria das funções como se tornara claro durante o século dezenove. (BOYER, 1996, p. 423)

Era de se esperar uma revolução no pensar geométrico e foi com Hilbert que surgiram “Os Fundamentos da Geometria”, pois, embora tratasse de muitos assuntos, buscava concentração em um tema de cada vez. Em 1898-1899 ele publicou a obra que exerceu forte influência na Matemática do século XX. Retomando “Os Elementos”, percebeu a existência de uma estrutura dedutiva, porém contendo hipóteses ocultas, definições sem sentido, dificuldades de compreensão em linguagem inadequada e falhas lógicas. Em Boyer (1996), encontra-se que

> O caráter puramente dedutivo e formal da geometria, como dos outros ramos da matemática, ficou completamente estabelecido desde o começo do século vinte. Hilbert é o principal representante de uma escola axiomática, que foi influente na formação das atitudes contemporâneas na matemática e no ensino da matemática. Pontos, retas e planos devem ser entendidos apenas como elementos de certos conjuntos dados, abandonando o nível empírico-dedutivo das antigas concepções geométricas. (p. 424)

A partir disso, surgem novos horizontes para a Geometria, ou seja, começam a surgir novas interpretações para ponto, reta, plano e para o próprio espaço concebido por Euclides. Exemplifico com o axioma “Uma linha reta pode ser traçada de um ponto a qualquer outro”, sobre o qual a intuição (exclusivamente no sentido euclidiano) conduz a um segmento de reta. Entretanto, se o espaço geométrico em apreço for uma esfera, cujo significado é o lugar geométrico dos pontos que eqüidistam de um ponto fixo, ou parte da pseudo-esfera, que é o lugar geométrico obtido pela rotação da tractriz, a imagem mental desse axioma, não é alcançada por muitos professores, como já pude observar em várias ocasiões. A seguir destacarei alguns pontos que considero importantes para a compreensão de espaços geométricos.

Defino **espaço ambiente** como sendo o espaço geométrico no qual entes geométricos e axiomas são bem definidos e relações estabelecidas e demonstradas, como por exemplo, o plano euclidiano $\mathbf{R}^2$, usual. Dessa forma, definir o espaço ambiente deve vir em primeiro lugar, não fazendo sentido falar no axioma citado acima sem especificar a qual espaço ambiente se está referindo.

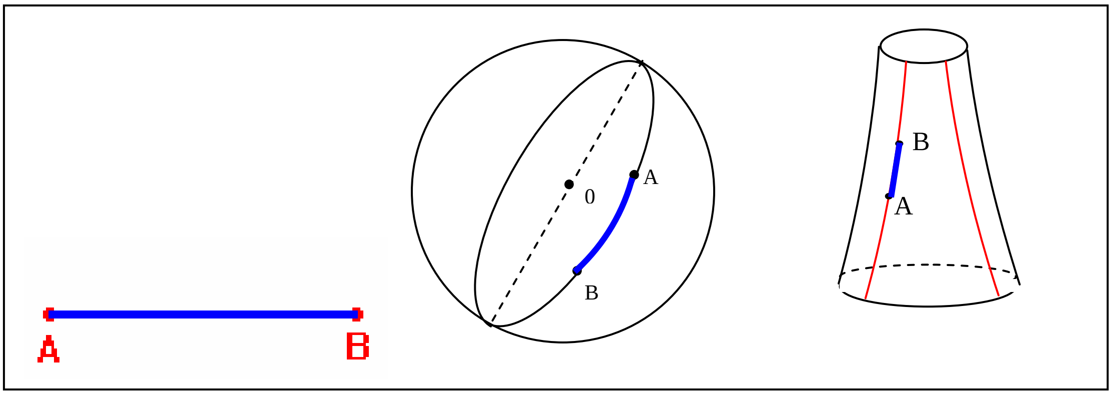


Figura 11 – Segmentos de retas unindo dois pontos

Talvez Euclides não tenha imaginado que poderia haver espaços em que esta linha não seria apenas a reta convencional, a qual usou em todo seu trabalho, a da primeira das figuras acima e que poderiam ser caracterizadas como “reta”, também as linhas das outras duas figuras. Para Euclides, a linha reta corresponde ao que hoje se denomina segmento de reta, então ele apresenta-nos o axioma “Uma linha reta pode ser prolongada nos dois sentidos”, sem, no entanto vislumbrar ou imaginar uma outra possibilidade de espaço como indicado acima. Dessa forma, o axioma seria indicado visualmente na esfera como um prolongamento do segmento de extremos A e B, em ambos os sentidos, o que faria a imaginação intuir o retorno ao ponto de partida.

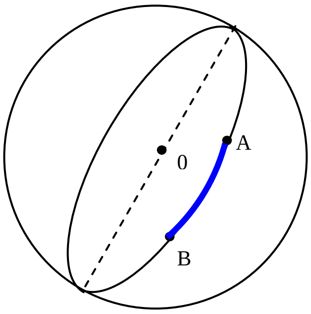


Figura 12 – Reta na superfície esférica.

A questão mais discutida, talvez, no que diz respeito a uma falta de intuição imaginativa em Euclides diz respeito ao quinto postulado, o que pode ser um dos motivos que o tornou tão famoso ao longo dos tempos. Diz “Se uma linha reta corta duas outras linhas retas, e se a soma dos dois ângulos internos de um lado dela é menor que dois retos, então as outras linhas retas cortar-se-ão do lado desses ângulos”. Esse pode ser visualizado no espaço ambiente pensado por Euclides da seguinte forma:

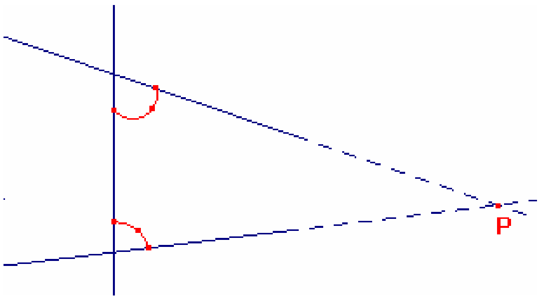


Figura 13 – Ângulo no ambiente euclidiano

Será que Euclides teve dificuldades em imaginar outros espaços ambientes?

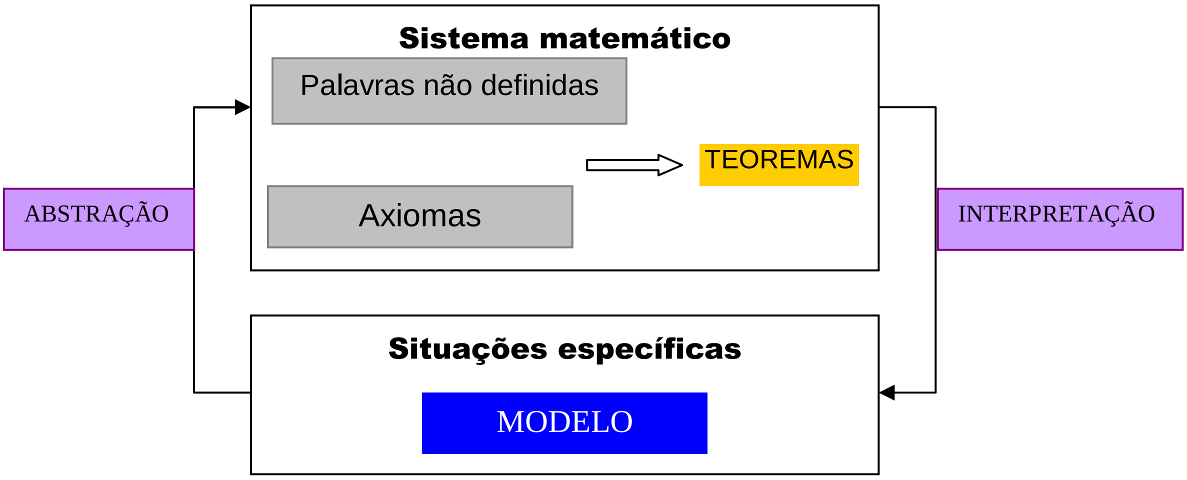
Essa construção feita no espaço ambiente esfera conduz ao triângulo tri-retângulo. Posteriormente faço essa construção utilizando métodos analíticos com geodésicas da esfera. Em virtude das dúvidas originadas quanto ao quinto postulado, o das paralelas, e as tentativas de provar a sua falsidade, duas linhas de pensamento conduziram a outras construções axiomáticas: uma negando a existência de paralelas a uma reta dada passando por um ponto não pertencente a essa reta e a outra, admitindo a existência de mais de uma paralela. Assim surgem novas geometrias, como exemplificada por sua riqueza em imaginação e aspectos visuais por Hilbert e Cohn-Vossen (1932, p. 171)

> Geometria Diferencial leva ao problema, primeiro colocado por Gauss e Riemann, da criação de um sistema geométrico completo, com base em

> conceitos e axiomas que afetam apenas uma vizinhança de cada ponto. Isto deu origem a uma abundância de possibilidades, não esgotadas atualmente, de construção de geometrias mais gerais, das quais geometria "não euclidiana" é um importante e muito especial exemplo.

Em acréscimo, surgem também os sistemas geométricos de Lobachewsky-Bolyai e de Riemann, igualmente sistemas organizados de forma consistente, com sua linguagem própria e seu corpo de axiomas e de teoremas, em modelos específicos a espaços ambientes devidamente escolhidos.

Adaptei de Barbosa (1970) um esquema de sistemas, mostrando como um dado pode ter vários modelos ou várias aplicações diferentes.



Quadro 7 – Sistema matemático

Modelos matemáticos aliados à imaginação e criatividade podem facilitar a compreensão de conceitos matemáticos, corroborando o que afirmam Courant e Robbins (2000), de que pode ocorrer um grande perigo ao se exagerar quando se dá demasiada ênfase nos aspectos postulacionais e dedutivos.

> É verdade que o elemento de invenção construtiva, de direcionar e motivar a intuição, é propenso a se esquivar de uma simples formulação filosófica; porém ela permanece o núcleo de qualquer realização matemática, mesmo nos campos mais abstratos. Se a forma dedutiva, cristalizada é a meta, a **intuição** e a construção são pelo menos as forças propulsoras. (COURANT; ROBBINS, 2000, prefácio. Grifo do autor)

Em Leivas (2006b) apresento considerações sobre alguns aspectos geométricos em alguns modelos, dos quais destaco, pelo grande interesse que desperta em estudantes e professores, o conceito de ângulo, indicado na bibliografia da escola básica, muitas vezes, de forma inconsistente e limitada. O forte aspecto imaginativo nessa construção permite, em analogia ao conceito de ângulo na Geometria Euclidiana, ampliá-lo para Geometrias Não Euclidianas.

No modelo de Klein para a Geometria de Lobatschewski o espaço ambiente, no qual os entes geométricos, os axiomas e os teoremas são definidos, corresponde ao interior de um círculo no usual plano euclidiano. O ente geométrico *ponto* tem o mesmo sentido euclidiano, mas o ente geométrico *reta* é a parte de uma reta, no sentido usual euclidiano, somente que limitada pela fronteira do círculo, isto é, a circunferência desse círculo, o que na Geometria Euclidiana corresponderia a uma corda da circunferência (aqui sem os extremos). O paralelismo de duas retas é considerado como no sentido euclidiano, ou seja, duas retas são paralelas se sua intersecção é vazia ou uma das retas. Dessa forma, considero uma “reta *c*”, e, para qualquer ponto P não pertencente a *c*, podemos traçar, pelo menos, as “retas” *a* e *b*, que passam pelas interseções da reta *c* (corda) com a circunferência. Essas duas retas *a* e *b* pelo menos não tem ponto comum com a reta *c* (ponto interior ao círculo), satisfazendo a definição de paralelismo.

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{c} \cap a = \phi \\ c \cap b = \phi \end{array}\right\} \Rightarrow a, b \,//\, c$$

$$a \cap b = \{P\}$$

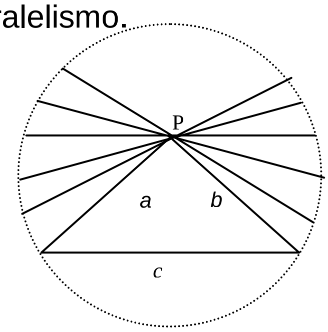


Figura 14 – Paralelismo no modelo de Klein.

Um segundo modelo de Geometria de Lobatschewski é devido a Poincaré. Enquanto que no modelo anterior o espaço ambiente era considerado o interior de um círculo, nesse modelo o espaço ambiente é um dos semi-planos do plano euclidiano usual determinado por uma reta, sem a inclusão dessa, a qual serve apenas de fronteira. Ponto, nesse modelo, corresponde ao mesmo sentido de ponto no modelo euclidiano. Reta, corresponde a cada uma das semi circunferências de centro na reta origem do semi-plano e contida nesse. Assim, dois pontos quaisquer distintos, não pertencentes à reta fronteira, pertencem a uma e a somente uma reta (semicircunferência, nesse caso). Também duas retas distintas possuem em comum no máximo um ponto.

Dados um ponto P e uma reta *r*, com as interseções A e B com a reta básica, existem em geral pelo menos a reta contendo B e P e a reta contendo A e P que não tem ponto comum com a reta r, satisfazendo a definição de paralelas

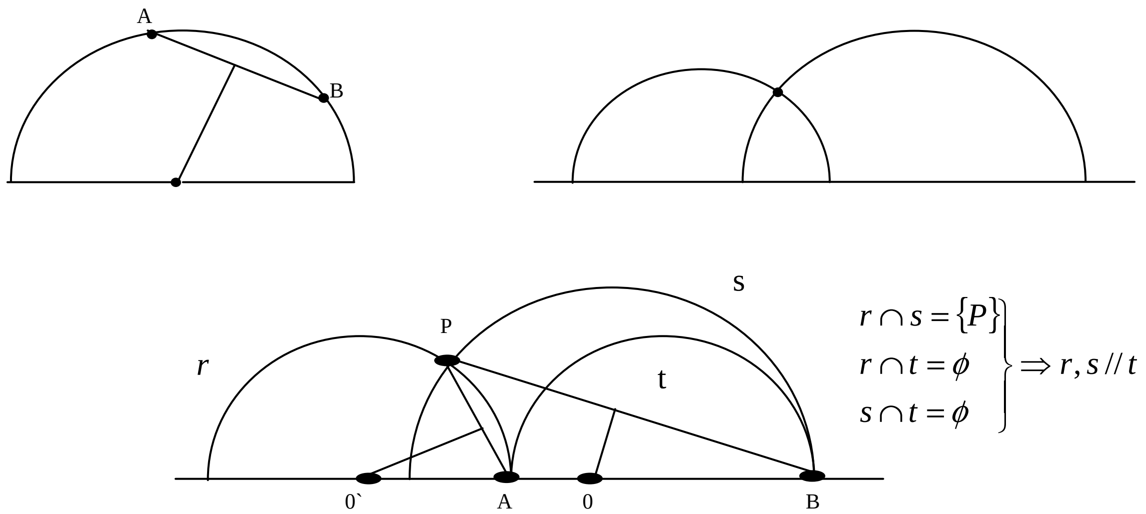


Figura 15 – Paralelismo no modelo de Poincaré.

Já o matemático alemão Bernhard Riemann propõe o axioma “Por um ponto não pertencente a uma reta não existe reta paralela” e, em um dos sistemas de Riemann, utiliza-se o axioma: “Se dois pontos são distintos, então eles pertencem a uma reta”, mas não se utiliza o axioma: “Se dois pontos são distintos então eles pertencem no máximo a uma reta”. E o que seria um plano de Riemann, que caracterizaria um outro modelo de Geometria Não Euclidiana?

O espaço ambiente, segundo a concepção riemanniana é uma esfera no sentido usual euclidiano, o ente geométrico ponto corresponde, da mesma forma, a ponto no sentido euclidiano usual e o ente reta, corresponde a uma circunferência máxima da esfera, ou seja, uma geodésica. Como qualquer ponto P da superfície esférica pertence a uma circunferência máxima *s*, que é obtida pela intersecção da esfera com um plano que passa pelo seu centro e por este ponto P, segue que passam infinitas circunferências máximas (retas nesse modelo) por P, como, na figura, as retas *s* e *r.*

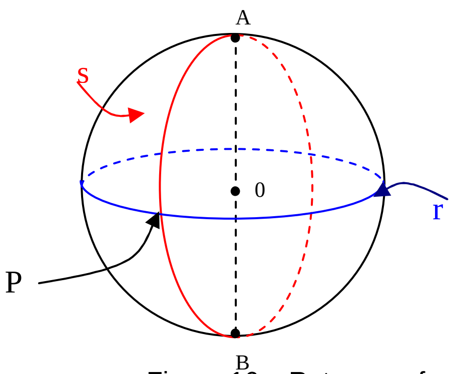


Figura 16 – Reta na esfera.

Dessa forma, dados dois pontos distintos, sempre existe um plano que passa pelo centro da esfera gerando uma circunferência máxima que os contém, portanto eles pertencem a uma “reta”. No caso dos pontos serem diametralmente opostos, como A e B, eles pertencem a mais de uma reta. Assim, dado um ponto A e uma reta *s*, qualquer plano que passe pelo centro da esfera contendo A e o centro O, interseccionará a reta, portanto não se tem “reta” paralela à reta dada, valendo o axioma de não existência de paralela.

Hilbert (2003, p. 10) define:

> Seja α um plano qualquer, e sejam h, k duas semi-retas quaisquer, diferentes, no plano α, que partem do ponto O e que pertencem a retas distintas. Ao sistema destas semi-retas h, k chamamos ângulo e representamo-lo por $\angle$(h, k) ou por $\angle$(k, h).
> As semi-retas h, k chamam-se lados do ângulo e o ponto O chama-se o vértice do ângulo.

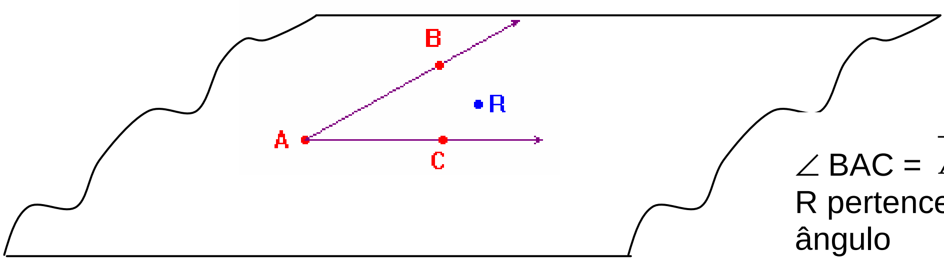
De acordo com a definição de Hilbert, ficam excluídos os ângulos raso e nulo, interior e exterior do ângulo. Além disso, o interior do ângulo fica caracterizado como a menor das regiões limitada pelas semi-retas h e k.

Filósofos gregos discutiam sobre considerar ângulos como quantidade, qualidade e relação, que foi uma categoria criada por Aristóteles. Próclus diz que é uma combinação das três, pois necessita quantidade envolvida na magnitude; qualidade que lhe é dada pela forma; relação que subsiste entre as retas e os planos que o limitam.

Em 1893, H. Shotten categoriza as definições de ângulo em diferença de direções entre duas linhas retas; medida de rotação necessária para trazer um lado de sua posição inicial para o outro; porção do plano entre as duas retas que definem o ângulo. Utilizo aqui a definição de ângulo dada por Hilbert: “é um par de semiretas com origem comum” (em que o conceito de semireta vai estar diretamente ligado ao espaço ambiente em que se está imaginando)[18], isto é, a reunião de pontos, e nesse aspecto é que acredito ser essencial a imaginação para a visualização desse conceito, especialmente por envolver união de conjuntos. Acredito ser relevante utilizar a imaginação, também, para a visualização do mesmo conceito nos modelos de Geometrias Não Euclidianas apontados acima. Para isso, faço uma comparação entre os três conceitos.

[18] Considero aqui o interior do ângulo como sendo o menor dos dois espaços limitados pelas semi retas que constituem seus lados.

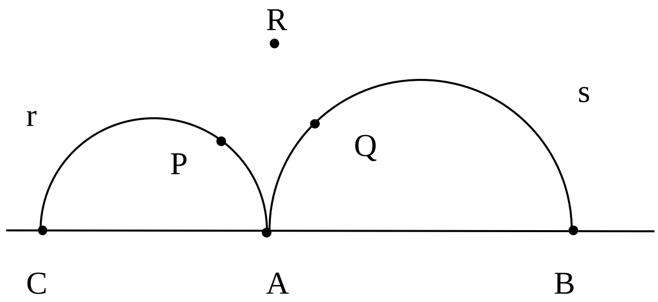
Geometria Euclidiana



∠ BAC = $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$
R pertence ao interior do ângulo

Figura 17 – Ângulo na Geometria Euclidiana.

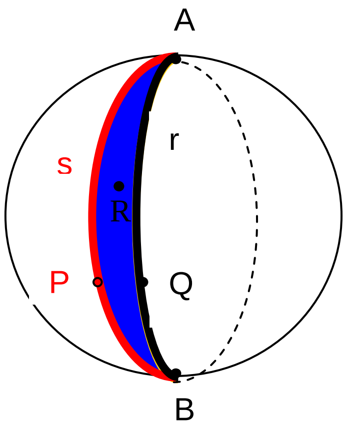
Geometria de Lobatschewski



reta r: semi-circunferência AC, contendo o ponto P.
reta s: semi-circunferência AB, contendo o ponto Q.
origem comum às duas retas: ponto A
∠ PAQ = APC ∪ AQB
R pertence ao interior do ângulo cujos lados são APC e AQB.

Figura 18 – Ângulo na Geometria de Lobatschewski

Geometria de Riemann



reta s: semi-circunferência APB
reta r: semi-circunferência AQB
origem comum: A
∠ PAQ = APB ∪ AQB
R pertence ao interior do ângulo

Figura 19 - Ângulo na Geometria de Riemann

Como já indicado anteriormente, as transformações geométricas constituem um recurso poderoso para um novo fazer em Geometria. Para Klein (1927), as transformações constituem um divisor de águas para o campo da Geometria, reiterando seus indicativos constantes do “Programa Erlangen” de 1872. Uma coordenada real num espaço unidimensional, um par ordenado de números reais num espaço bidimensional, uma terna ordenada de números reais num espaço tri-dimensional são entes matemáticos que podem ser não apenas imaginados, mas visualmente representados geometricamente, enquanto que uma n-upla de números reais num espaço n-dimensional só pode ser imaginada a partir das construções concretas visuais nos primeiros espaços. Diz o autor ainda que, na Análise, quatro das transformações do espaço têm despertado seu interesse nos cursos de Geometria, “cuja grande importância temos visto, que estão representadas por certas substituições lineares particulares de x, y, z: translação paralela, giro ao redor da origem de coordenadas, simetria relativamente à origem e homotetia relativa a origem”. (KLEIN, 1927, p. 174)

Acredito que, se a imaginação fosse explorada no desenvolvimento de um pensamento geométrico durante toda a escolaridade, a Análise não teria a conotação que muitas vezes lhe é atribuída nos diversos cursos de Licenciatura, como a disciplina mais difícil. Em razão de as disciplinas de Cálculo utilizarem desenvolvimento apenas algorítmico e elementos não visuais, quando o aluno chega à Análise, as dificuldades são imensas, haja vista, por exemplo, a representação geométrica em Álgebra Linear, quando os vetores são definidos em espaços de dimensão n, com $n \geq 3$. Até $n = 3$ ainda as representações são visuais, como feitos antes na representação do cubo tridimensional num plano bidimensional ou a representação no tri-dimensional de um cubo em quatro dimensões, o qual necessita de imaginação para poder abstrair.

De forma similar, considero um espaço vetorial real de dimensão n, cuja maior representatividade seja uma coleção de vetores geradores desse espaço, isto é,

$$\{e_1, e_2, ..., e_n\}.$$

ou até mesmo espaços de dimensão infinita. Num caso mais trivial, considero uma base ortonormal, isto é, em que os vetores geradores são ortogonais e unitários. Esses dois vetores geram o espaço $\mathbf{R}^2$, ou seja, geometricamente um plano. A visualização para o caso $n = 2$ é trivial:

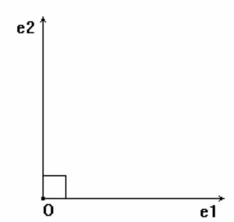


Figura 20 - Ângulo na Geometria de Riemann

No caso em que n = 3, já há necessidade de apelar para a imaginação a fim de representar um terceiro vetor ortogonal a cada um desses dois, ou seja, ortogonal ao plano gerado pelos dois primeiros, o que não ocorre de forma real, uma vez que o ângulo entre os vetores e_1 e e_3 bem como entre e_3 e e_2 são retos, porem não aparecem visualmente na representação. É necessário imaginar que o terceiro vetor é ortogonal aos dois primeiros a fim de que se possa internalizar a representação abaixo como um sistema constituído de três vetores ortogonais. Esse conjunto de vetores gera o espaço $\mathbf{R}^3$.

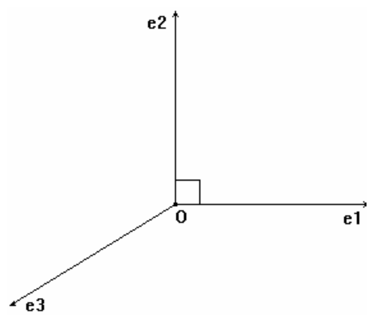


Figura 21 – Vetores ortogonais no $\mathbf{R}^3$

A partir dessa dimensão, o apelo à imaginação é inquestionável para a abstração e generalização, de forma que, ao tratar com derivadas parciais, se essa habilidade não tiver sido desenvolvida, o conceito poderá não ser construído e apenas métodos algorítmicos serão apreendidos. Ao formar a imagem visual do conceito de derivada de função real de variável real como a inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto, é possível estabelecer analogia de tal conceito para funções de várias variáveis. Por exemplo, considero a função f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Seu gráfico é o subconjunto do $\mathbf{R}^3$ dado por $\{(x,y,f(x,y)): x,y \in \mathbf{R}\}$, ou seja, tem-se superfície em $\mathbf{R}^3$, em geral denotada por z = f(x,y). Fixando a variável y, por exemplo, como $y = y_0$ e variando x, tem-se uma curva C(x) da superfície, isto é, $C(x) = f(x,y_0)$ e assim, a derivada em relação a x de C(x) corresponde à derivada parcial da função f em relação a x, ou seja, a derivada parcial em relação a x representa a inclinação da reta tangente à curva C(x) da superfície z = f(x,y) no ponto (x, y_0). A curva C(x) é usualmente denominada uma curva coordenada da superfície. De forma similar, fixando a outra variável $x = x_0$ e variando y tem-se a segunda curva coordenada da superfície $C(y) = f(x_0, y)$ e a derivada em relação a y de C(y) corresponde à derivada parcial da função f em relação a y, ou seja, a derivada parcial em relação a y representa a inclinação da reta tangente à curva C(y) da superfície z = f(x,y) no ponto (x_0, y). A curva C(y) é a segunda curva coordenada da superfície.

Assim, as derivadas parciais da função z = f(x,y), $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$, respectivamente, em relação a x e a y, são denominadas de inclinação da superfície na direção de x e inclinação da superfície na direção de y no ponto (x_0,y_0) e uma conexão interessante com os vetores que indicam essas direções pode ser estabelecida com a dependência e independência linear para a caracterização da existência de plano tangente em superfícies.

A Álgebra Linear pode trazer contribuições importantes para a imaginação de um ente matemático, usualmente apresentado em disciplinas da Licenciatura e por conseqüência na escola básica, que é o determinante de uma matriz quadrada, em geral sem trazer qualquer interpretação geométrica. Esse conceito, geralmente, não é construído, mas é apresentado algoritmicamente, em suas diversas formas, tais como o abaixamento de ordem e, quase nunca, em forma de uma função, como pode ser visto em Hoffman e Kunze (1970, p. 181). Segundo Freudenthal (1973), propriedades de espaço vetorial podem ser visualizadas em espaços de dimensão 2 e 3 e imaginadas em dimensões maiores de forma geométrica, incluindo aí o conceito de determinante.

> A primeira e mais importante conseqüência geométrica não trivial dos axiomas de espaço vetorial é a noção de volume. Em um espaço vetorial *n*-dimensional uma função de *n* vetores, chamada determinante, é explicitada por
>
> $$\det(a_1, \dots, a_n)$$
>
> para os *n* vetores (a_1,..., a_n) é para dar o 'volume orientado' (após certa normatização) do paralelepípedo gerado por a_1,..., a_n. (HOFFMAN e KUNZE, 1970, p. 424)

Exemplifico: dados os vetores u = (a_1, a_2, a_3) e v = (b_1, b_2, b_3) no espaço tri-dimensional, o produto vetorial dos dois é um vetor w, cuja direção é ortogonal aos dois vetores, cujo sentido é tal que forma uma base orientada como a canônica do $\mathbf{R}^3$ e cujo módulo é dado pelo determinante obtido com as coordenadas de u e de v.

$$w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

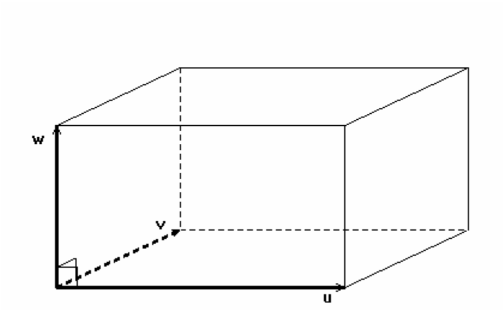


Figura 22 – O produto vetorial

Imaginação e abstração desse conceito em dimensões maiores só podem ocorrer a partir da visualização no espaço tri-dimensional.

Retomando minhas incursões na disciplina Geometria na formação de professores, em conexão com outras disciplinas do currículo, considerando aspectos intuitivos, visuais, imaginativos e criativos, descrevo mais sucintamente o que apresentei acima. Para isso, invoco ferramentas poderosas da Análise, o que, em muito, caracteriza a Geometria Diferencial, disciplina que reúne Geometria, Geometria Analítica, Álgebra Linear e Análise, por exemplo.

Enquanto que a Geometria Analítica estuda lugares geométricos definidos por certas leis, como por exemplo:

- a curva que tem curvatura constante igual a zero é a reta.

- o lugar geométrico dos pontos de um plano que estão a igual distância de dois pontos fixos desse plano é uma reta.

- o conjunto de pontos do espaço ambiente $\mathbf{R}^3$ que satisfazem a lei $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$ é um plano paralelo ao plano YOZ, uma vez que há na equação uma única raiz real e duas imaginárias.

- o conjunto de pontos do espaço gerado por uma reta que se desloca paralelamente a si mesma e eqüidistante de uma reta fixa é uma superfície de revolução,

a Geometria Diferencial trata o problema mais ou menos de uma forma inversa, ou seja, busca condições sob as quais um determinado lugar geométrico dado por uma lei de formação define uma curva ou uma superfície. Nesse sentido, uma curva parametrizada pelo comprimento de arco é uma aplicação de um intervalo aberto de **R** no $\mathbf{R}^3$, de modo que o vetor derivada em cada ponto do seu domínio tenha módulo unitário e isto tem o significado físico de pensar a curva como descrita por um ponto móvel que se desloca com velocidade escalar constante, ou ainda, o deslocamento sobre a curva corresponde ao próprio parâmetro.

Seja a função $f: (a,b) \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ dada por $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ em que $t \in (a,b) \subset \mathbf{R}$, t é denominado o parâmetro e percorre o intervalo aberto real. Quando $|f'(t)| = 1$, $\forall t$, a curva está parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, o parâmetro é o próprio arco de curva, $t = s$. O vetor $f'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$ é chamado *vetor tangente* à curva f, daqui para a frente denotado por *t*(s), enquanto que o módulo do vetor derivada desse vetor é definido como sendo a *curvatura da curva*, denotada por $k(s) = |f''(s)|$. Considerando que a derivada pode ser interpretada como taxa de variação de uma função, a derivada segunda informa como essas inclinações das retas tangentes estão ocorrendo em pontos próximos, ou seja, a taxa dessa variação permite visualizar como a curva está se curvando. Por outro lado, o vetor derivada do vetor tangente, por ser unitário, é ortogonal a esse e seu versor é denominado *vetor normal* à curva e denotado por *n*(s). Um terceiro vetor pode ser obtido pelo produto vetorial dos vetores t(s) e *n*(s), o qual será unitário e ortogonal a ambos, sendo definido como *vetor binormal* a curva. O simétrico da projeção do vetor binormal sobre o vetor normal à curva recebe o nome de *torção* da curva, sendo simbolizado por $\tau(s)$. Assim,

$$n(s) = \frac{t'(s)}{|t'(s)|}; \qquad b(s) = t(s)\ X\ n(s); \qquad \tau(s) = -< b'(s), n(s) >;$$

em que X denota o produto vetorial entre os dois vetores e < , > o produto interno.

A partir do conjunto {*t*(s), *n*(s), *b*(s), k(s), τ(s)}, denominado Aparelho de Frenét-Serret, historicamente levando o nome dos dois matemáticos que o publicaram, independentemente, e sem conhecimento um do outro (Frenét o descobriu em 1847, só o publicando em 1853, enquanto que Serret publicou em 1851), é possível imaginar e visualizar a Geometria envolvida em curvas. Além disso, é possível, a partir do conhecimento desses elementos, determinar univocamente uma curva.

Tanto na Física quanto na Matemática, é comum pensar em vetores com um ponto de aplicação. Imaginando em cada ponto da curva f(s) um conjunto de vetores com origem num ponto P(s) = f(s), obtém-se um espaço vetorial de dimensão 3 a partir dos três vetores considerados antes. Considere a base canônica do $\mathbf{R}^3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$, a qual reflete a Geometria do espaço e não a Geometria da curva. Nesse sentido é que se faz necessária a base de Frenét-Serret $\{t(s), n(s), b(s)\}$. Em Millman e Parker (1977, p. 27) encontra-se a demonstração de que essa base é ortonormal para todo s em que a curvatura da curva não é nula. Dizer que a base é ortonormal é dizer que os três vetores são unitários e ortogonais dois a dois. Como os três vetores constituem uma base móvel sobre cada ponto da curva, naturalmente cada dois deles definem um plano no espaço, com origem em um ponto qualquer da curva. O referencial é móvel no sentido de que em cada ponto há variação da sua direção e do seu sentido.

O plano determinado pelos vetores $t(s)$ e $n(s)$ é denominado *plano osculador*, o determinado por $t(s)$ e $b(s)$, é denominado *plano retificante* e o determinado por $n(s)$ e $b(s)$ por *plano normal*.

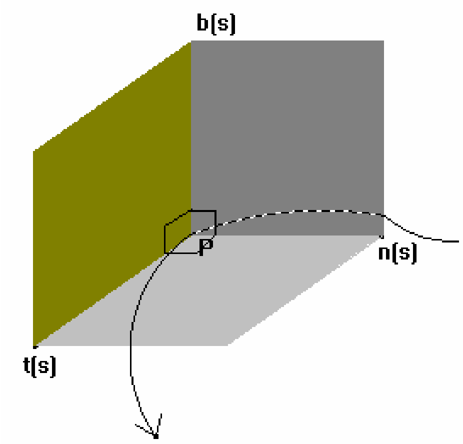


Figura 23 – Triedro de Frenét.

Como $\{t(s), n(s), b(s)\}$ é uma base do $\mathbf{R}^3$, móvel sobre a curva, qualquer vetor $v \in \mathbf{R}^3$ pode ser escrito nessa base de modo único, da seguinte forma

$$v = \langle t(s), v \rangle t(s) + \langle n(s), v \rangle n(s) + \langle b(s), v \rangle b(s).$$

Ao fazer $v = n'(s)$ na igualdade acima se obtém

$$n'(s) = \langle t(s), n'(s) \rangle t(s) + \langle n(s), n'(s) \rangle n(s) + \langle b(s), n'(s) \rangle b(s) \qquad (1)$$

O fato de $t(s) \perp n(s)$ faz com que o produto interno dos dois vetores seja nulo e derivando-se em relação a s esse produto interno, obtém-se uma equação em função da curvatura da curva.

0 = < *t* (s), *n*(s)>'= < *t'* (s), *n*(s)> + < *t* (s), *n'*(s)> = <*k*(s) *n*(s), *n*(s)> + <*t*(s), *n'*(s)>

ou ainda 0 = *k*(s) < *n*(s), *n*(s)> + <*t*(s), *n'*(s)> = *k*(s).1 + <*t*(s), *n'*(s)> o que acarreta

-*k*(s) = <*t*(s), *n'*(s)> (2)

Como *b*(s)⊥*n*(s), segue-se de um raciocínio análogo ao feito anteriormente que

<*b*(s), *n*(s)> = 0 e, derivando-se em relação a s,

0 = <*b*(s), *n*(s)>' = <*b'*(s), *n*(s)> + <*b*(s), *n'*(s)> . Mas $\tau(s) = -< b'(s), n(s) >$ e fazendo-se as substituições encontra-se

$$\tau(s) = < b(s), n'(s) > \qquad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1) encontras-se ***n'*(s) = - *k*(s)*t*(s) + 0.*n*(s) +τ(s)*b*(s)**.

Fazendo-se raciocínio semelhante e considerando *v* = *b*'(s) encontra-se

***b'*(s) = - τ(s)*n*(s)**.

Dessa forma, encontram-se três equações em derivadas dos vetores do Referencial de Frenét-Serret:

$$\begin{cases} t'(s) = \quad 0t(s) \quad + k(s)n(s) \; + 0b(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) + 0.n(s) \quad + \tau(s)b(s) \\ b'(s) = \quad 0t(s) \quad - \tau(s)n(s) + 0b(s) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} t'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{bmatrix}$$ e estas são as chamadas equações de Frenét.

Mas o que tem a ver essas equações e qual o significado geométrico que elas possuem? Para responder a isso, vou mostrar como é o comportamento da curva numa vizinhança de um de seus pontos quaisquer em relação ao referencial móvel, ou seja, como ela se comporta relativamente aos planos definidos pelo referencial. Para fazer isso, vou fazer uso da decomposição da curva em série de potências, mais especificamente numa série de MacLaurin, o que é possível, uma vez que sendo a curva regular ela é dada por uma função diferenciável de classe C^{∞}, isto é, admite derivadas sucessivas infinitamente.

Considere-se a curva regular parametrizada pelo comprimento de arco nas condições dadas anteriormente, f(s) = (x(s), y(s), z(s)) em que s $\in$ (a,b) $\subset$ **R**. Seja P = f(s_0) = (x(s_0), y(s_0), z(s_0)) um ponto qualquer da curva no qual está definido o Referencial de Frenét-Serret {*t*(s_0), *n*(s_0), *b*(s_0)}. Por economia de notação utiliza-se s_0 = 0 daqui em diante.

f(0) = (x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0);

f'(0) = (x'(0), y'(0), z'(0)) = t_0;

f''(0) = *t*'(0) = *k*(0).*n*(0) = $k_0 n_0$;

Como f''(s) = *k*(s)*n*(s) vem que

f'''(s) = *k*'(s)*n*(s) + *k*(s)*n*'(s) = *k*'(s)*n*(s) + *k*(s)[-*k*(s)*t*(s) + τ(s)*b*(s)]

f''(s) = $-k^2$(s) *t*(s) + *k*'(s)*n*(s) + *k*(s)τ(s)*b*(s),

ou no ponto considerado com a notação abreviada

f'''(0) = $-k^2_0\, t_0 + k'_0 n_0 + k_0 \tau_0 b_0$ e assim podem-se obter derivadas de ordem superior.

A série de MacLaurin para a função f(s) no ponto s = 0 é dada por:

$$f(s) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}s + \frac{f''(0)}{2!}s^2 + \frac{f'''(0)}{3!}s^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}s^4 + \ldots$$

Substituindo-se os valores encontrados acima até a terceira derivada e considerando-se um resto R(0) = (R_{10},R_{20},R_{30}) no ponto s = 0 tem-se:

f(s) = (x(s), y(s), z(s)) = $(x_0, y_0, z_0) + st_0 + \frac{s^2}{2}[k_0 n_0] + \frac{s^3}{6}[-k_0^2 t_0 + k'_0\, n_0 + k_0 \tau_0 b_0] + R(0)$, de onde se tem

x(s) = $x_0 + s - \frac{k_0^2 s^3}{6} + R_{10}$ y(s) = $y_0 + \frac{k_0 s^2}{2} + \frac{k'_0 s^3}{6} + R_{20}$ z(s) = $z_0 + \frac{k_0 \tau_0 s^3}{6} + R_{30}$

Essas três equações denominam-se equações canônicas da curva no ponto P e, embora aparentem apenas três equações, ela têm o significado exposto a seguir. A projeção da curva f sobre o vetor tangente vem dada pela componente x(s)*t*(s) e, como essa envolve apenas derivada de primeira ordem em s, pois *t*(s) está associado ao vetor f'(s), segue que a maior parte da curva está sobre sua tangente. Já a projeção de f sobre o vetor normal é dada pela componente y(s)*n*(s) que é de segunda ordem em s, uma vez que o vetor normal *n*(s) está associado ao vetor f''(s), enquanto que a projeção da curva sobre o vetor binormal é a componente z(s)*b*(s) que é de terceira ordem em s.

Como a curvatura da curva, por hipótese, é não nula, a curva se encontra de um dos lados do plano retificante, pois a componente y se comporta como s^2, não troca de sinal na vizinhança de P. De outro lado, considerando a torção não nula, então a curva atravessa o plano osculador ao passar por P, uma vez que z se comporta com s^3, trocando de sinal ao passar por P. No caso em que a torção é positiva, então o referencial móvel gira ao redor do ponto P como se fosse uma rosca direita (tipo um saca-rolha) e no caso em que a torção é negativa, o referencial móvel gira ao redor de P como uma rosca esquerda.

Admitindo-se que no ponto $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ a curva seja bem aproximada pelos primeiros termos do seu desenvolvimento em série de MacLaurin, isto é:

$$x(s) = s \qquad y(s) = \frac{k_0 s^2}{2} \qquad z(s) = \frac{k_0 \tau_0 s^3}{6},$$

então, podem ser agrupadas duas a duas essas funções projeções, obtendo-se as curvas projetantes sobre os planos de Frenét ao redor de P, conforme as figuras 23, 24, 25 e 26.

Observe-se a simplicidade das equações para identificação de suas imagens geométricas, supondo-se que a curva tenha tanto a curvatura quanto a torção positivas no ponto considerado.

- O par $\left(x(s) = s,\ y(s) = \frac{k_0 s^2}{2}\right)$ representa a projeção da curva sobre o plano osculador que é o formado pelos vetores tangente e normal. Eliminando-se o parâmetro s das equações obtém-se $y = \frac{k_0}{2}x^2$ ou seja, identifica-se como uma parábola de vértice em P (origem) com a concavidade voltada no sentido positivo do eixo YY, e cujo eixo de simetria é dado pelo vetor *n*(s), sendo que o valor da curvatura da curva vai indicar a curvatura da parábola e vice-versa. O estudo de funções quadráticas é usual desde as séries finais do Ensino Fundamental, entretanto ele é feito sem nenhuma exploração da imaginação dos estudantes e limita-se a simples classificações memorísticas. Talvez, se o professor conhecesse um pouco mais profundamente os aspectos aqui discutidos, poderia estabelecer relações profícuas, como por exemplo, entre o coeficiente do termo de mais alto grau da função quadrática e o sinal da segunda derivada da função, que informa se a curvatura da curva está voltada para cima ou para baixo, conforme esse coeficiente seja positivo ou negativo, muito embora os conceitos de derivada não sejam pertinentes para o nível de escolaridade citado.

Na representação abaixo, a parábola tem a concavidade voltada para o sentido positivo do vetor normal, o que significa que a curvatura dessa curva deve ser positiva de acordo com a equação y = $\frac{k_0}{2}x^2$. Pode-se também observar que, se o sentido de percurso sobre a curva fosse contrário, a curvatura seria negativa e nesse caso a parábola estaria voltada no sentido oposto do vetor normal.

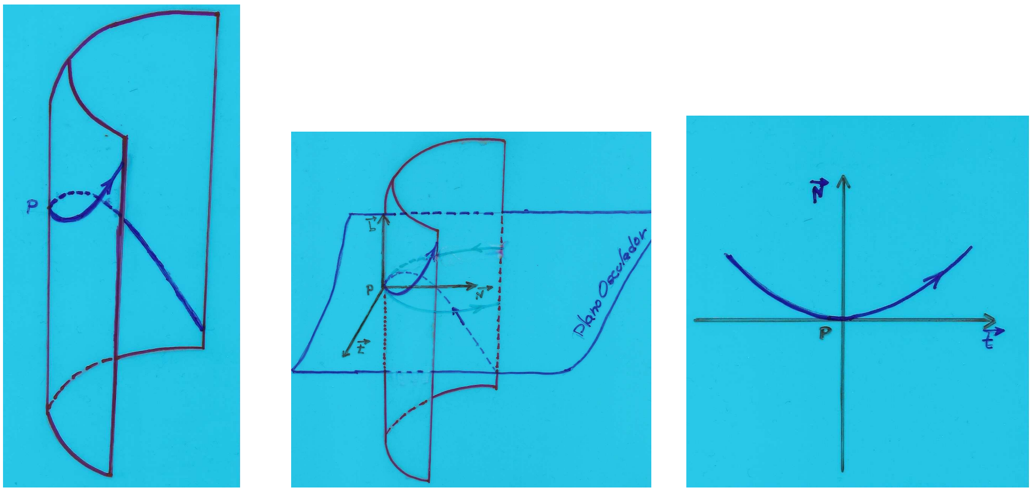


Figura 24 – Projeção da curva sobre o plano osculador

- O par (x(s) = s, z(s) = $\frac{k_0\tau_0 s^3}{6}$) representa a projeção da curva sobre o plano retificante que é o plano determinado pelos vetores tangente e binormal. Da mesma forma, eliminando-se o parâmetro s, obtém-se uma função do terceiro grau, isto é, a parábola cúbica $z = \frac{k_0\tau_0 x^3}{6}$, a qual passa por P oriunda do primeiro para o terceiro octante, por ter sido considerada a torção positiva. Essa curva desempenha um papel comum no Cálculo Diferencial ao serem abordados máximos, mínimos, pontos de inflexão, pois a mudança de concavidade corresponde a um ponto de inflexão em pontos onde a derivada se anula, enquanto que, não havendo mudança de concavidade, ocorrerão pontos de máximo ou de mínimo, como no caso precedente.

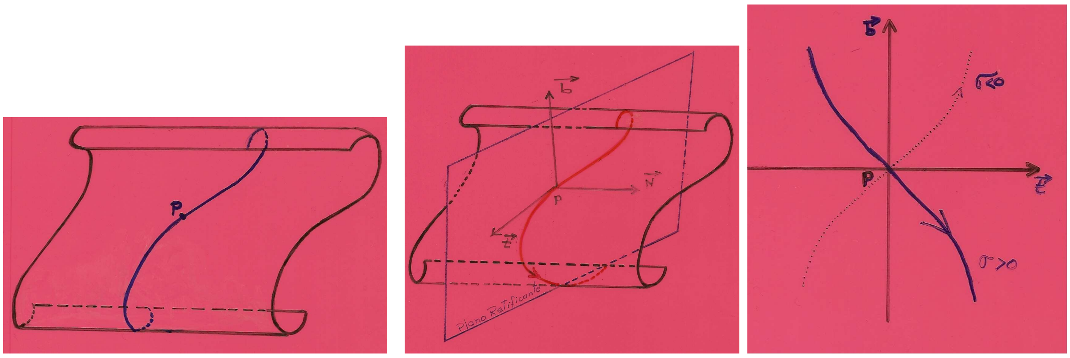


Figura 25 – Projeção da curva sobre o plano retificante

- o par (y(s) = $\frac{k_0}{2}s^2$, z(s) = $\frac{k_0\tau_0 s^3}{6}$), finalmente, representa a projeção da curva sobre o plano normal, ou seja, aquele definido pelos vetores normal e binormal. Na eliminação do parâmetro s nas equações das duas coordenadas obtém-se a parábola semi-cúbica $y^3 = \frac{9}{2}\frac{k_0}{\tau_0^2}z^2$, localizada exclusivamente em um dos semi-planos determinado pelo plano normal.

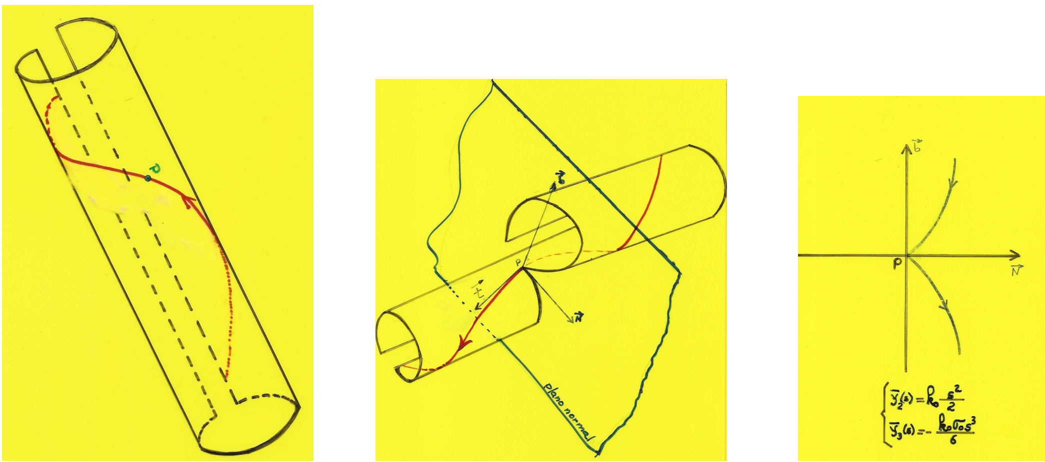


Figura 26 – Projeção da curva sobre o plano normal

As figuras, adaptadas de Valladares (1973), mostram possibilidades de obtenção dessas curvas de forma concreta a partir de construções com papel, por exemplo, mostrando que determinadas metodologias podem ser grandes aliadas do professor que tem profundo conhecimento da disciplina em que atua, bem como da área do conhecimento de sua competência. Nesse sentido é que defendo a necessidade de uma profunda cultura geométrica para o Educador Matemático.

O que pretendi foi apresentar mais uma possibilidade de construir conceitos geométricos, mesmo em níveis mais avançados, por exemplo, no tratamento de curvas no espaço e seu comportamento relativamente a uma vizinhança de um ponto, o que é corroborado pelos estudos de Hilbert e Cohn-Vossen (1932) a respeito da utilização de imaginação para tal. Ainda mais, Hilbert afirma que “A Geometria Diferencial representa um método fundamentalmente diferente de pesquisa.” (Ibid., p. 171)

Com base no exposto nesse item, pude observar que existe íntima relação entre imaginação, intuição, visualização e representação espacial para o desenvolvimento espacial (GUTIÉRREZ e BOERO, 2006) no que acompanho Bishop (1989), que acrescenta, ainda, a isso habilidade espacial e diagramas e que, embora destacando a complexidade do tema, afirma ser necessária sua compreensão e investigação na atualidade, bem como seus efeitos no currículo escolar. Para divulgar a Matemática como atividade humana, Fischbein (1987) afirma que essa atividade desenvolve, dentre outras, uma componente intuitiva, em que o raciocínio matemático pode ser desenvolvido por meio de visualização, imaginação e até mesmo por características biológicas, segundo estudos de psicólogos, sociólogos e matemáticos.

Mariotti e Arcavi identificam dois níveis de complexidade do pensamento intuitivo visual [métodos clínico e computacional], indicando imaginação e visualização como um campo de pesquisa em Educação Matemática, o que é corroborado por pesquisas de Tall, Hershkowitz e Dörfer, dentre outros, tendo o último proferido a palestra “Significado: visualização ou imaginação, esquemas e protocolos”, sempre com foco na psicologia envolvida com visualização, havendo dois aspectos de interesses apontado na organização de uma sessão no PME: quanto a representações, organizado por G. Gondin e Geometria, por A. Gutiérrez, a qual foi denominada Geometria e Pensamento Espacial, sendo que as pesquisas sobre a área foram bem ampliadas com trabalhos sobre visualização e Educação Matemática categorizados em visualização e imaginação junto ao PME.

Os exemplos matemáticos que apresentei são indicativos de mudanças curriculares na Licenciatura em Matemática que acredito possam ser viabilizados. No que segue busco outras relações, agora envolvendo a intuição para desenvolver um pensamento geométrico.

5.2.2 Intuição

Ao apontar algumas tendências de reformas em conteúdos matemáticos, Guzmán (1993, p. 14) diz que “se deve promover uma recuperação do pensamento geométrico espacial e intuitivo não somente em Geometria, mas em toda a Matemática, cujo abandono injustificado é um fenômeno universal devido à evolução dela mesma desde início do século”. Segundo ele, a Crise dos Fundamentos levou a certa dúvida sobre o papel da intuição na construção da ciência Matemática, pela ênfase no formalismo, mas que a intuição é a fonte mais importante de verdades matemáticas, seus problemas e resultados, de forma análoga ao discurso preconizado por Fischbein (1987).

Embora nos “Fundamentos da Geometria” de Hilbert exista a concepção de abandono da intuição, em muitas demonstrações as representações são fundamentais para sua compreensão o que indica, segundo minha percepção, ele não ter abandonado por completo a imaginação e a intuição que conduzem à visualização, como pode-se perceber ao indicar possibilidades de construções geométricas por meio da régua e do transferidor (HILBERT, 2003, p. 113). ”Para podermos ter uma visão de todos os problemas solúveis desta maneira, consideremos, no que segue, um sistema de coordenadas retangulares, e imaginemos as coordenadas dos pontos, como usualmente,...”

Mesmo tentando uma redução aparente no número de representações em suas demonstrações em Fundamentos de Geometria, comparativamente ao *Geometry and Imagination* algumas vezes o apelo é inevitável, como na definição de paralelismo em uma nova fundamentação da Geometria de Bolyai-Lobachewskii (Ibid., p. 152).

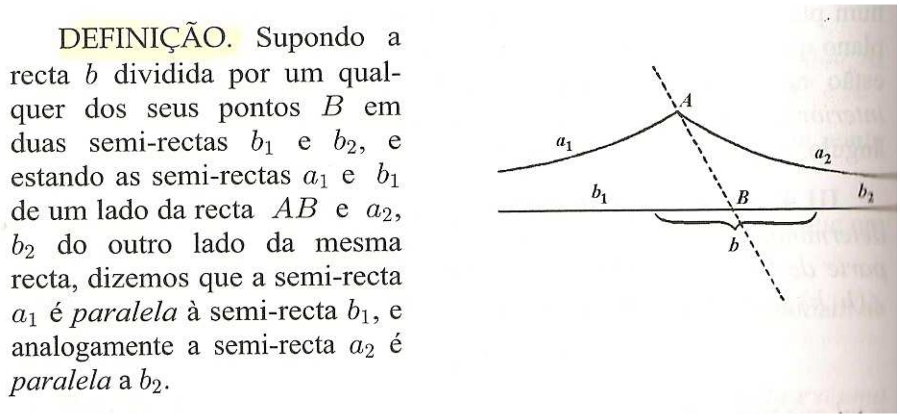

DEFINIÇÃO. Supondo a recta b dividida por um qualquer dos seus pontos B em duas semi-rectas b_1 e b_2, e estando as semi-rectas a_1 e b_1 de um lado da recta AB e a_2, b_2 do outro lado da mesma recta, dizemos que a semi-recta a_1 é *paralela* à semi-recta b_1, e analogamente a semi-recta a_2 é *paralela* a b_2.

Figura 27 – Semi-retas paralelas segundo Hilbert

Indo mais além, acredito que Hilbert, mesmo deixando seu apelo à intuição, utilizado na primeira obra, reconhece o seu valor, bem como a importância da imaginação e da experimentação, como pode ser lido ao discorrer sobre o conceito de número, por exemplo, “A minha opinião é a seguinte: apesar do alto valor heurístico e pedagógico do método genético, merece, no entanto, a minha preferência o método axiomático para a representação definitiva do nosso conhecimento e a sua plena fundamentação lógica.” (HILBERT, 2003, p. 217).

> Partindo da unidade, imaginamos criados, como se faz ordinariamente, os demais números naturais, 2, 3, 4, ... mediante o processo de contagem, e desenvolvemos as suas leis de cálculo; depois, por necessidades de generalização na prática da subtração, chega-se aos números negativos; em seguida define-se números fracionários, digamos como um par de números, com os quais toda a função linear possui um zero; e, finalmente, define-se o número real como um corte ou uma sucessão fundamental, chegando-se a que toda a função inteira racional (e até toda a função contínua) que muda de sinal possui um zero. (Ibid., p. 216).

Segundo Hadamard (1945, p. 88) “Não há dúvidas de que Hilbert, na elaboração de seus “Fundamentos de Geometria” tem sido constantemente guiado pelo seu sentido geométrico.” Haja vista, como já o disse, que o livro é repleto de representações geométricas acompanhando definições e demonstrações, como a ilustrada acima.

Intuição tem sido um tema estudado e discutido a partir da Crise dos Fundamentos, constituindo-se o intuicionismo em uma corrente filosófica na Educação Matemática. Talvez seja Leopoldo Kronecker o primeiro intuicionista com suas idéias sendo formuladas e apresentadas ao final do século XIX em oposição ao logicismo de Russel. Coube, entretanto, a Brouwer elaborar um sistema filosófico para contemplar essa corrente, em que é considerada Matemática apenas o que pode ser construído de modo finito. Ele trouxe sua contribuição ao construtivismo matemático abordando especialmente algumas noções sobre Topologia, a qual acrescenta uma nova forma de pensamento até então existente, ou seja, os espaços concretos em Matemática sendo aqueles ligados ao número natural, o que corresponde à Matemática Discreta, e se passa a pensar em superfícies como entes matemáticos abstratos.

Segundo Hersh (1997, p. 153), foi depois do advento do logicismo que surgiu o intuicionismo. “O nome intuicionismo tem sua origem na teoria intuicionista de Kant do conhecimento matemático. Brouwer seguiu Kant, afirmando que Matemática se baseia em verdades intuitivas”. Além disso, em seu manifesto denominado Primeiro Acto de Intuicionismo, explicitou o que segue:

> Separando completamente matemática de linguagem matemática e, consequentemente, a partir do fenômeno da linguagem descrita pela lógica teórica, reconhecendo que intuição matemática é essencialmente uma atividade linguística da mente tendo sua origem na percepção de uma mudança de tempo. (HERSH, 1997, p. 153).

Para Skemp (1993), um conceito é um termo utilizado de forma ampla e de difícil definição e uma distinção do nome associado a ele é essencial. Para esses autores, um conceito é uma idéia e o nome do conceito é um som ou uma marca sobre um papel associada a ele; por exemplo, números são conceitos matemáticos enquanto que numerais são os nomes que se atribui aos números; pontos ou retas são conceitos e seus desenhos numa folha de papel são representações a eles associadas. A comunicação de um conceito, muitas vezes, é difícil, como no exemplo de ponto ou de reta, por isso, muitas vezes se faz uso da intuição para atingir esse propósito. Segundo Skemp (1993), o conceito tem um poder oriundo da capacidade de combinar e relacionar muitas experiências diferentes e de classes de experiência e, portanto, grande parte do conhecimento diário dos indivíduos é apreendida diretamente daquilo que se encontra à sua volta e assim não são abstratos.

O funcionamento da inteligência, para Skemp (1993, p. 59),

> [...] pode ocorrer de duas formas: a intuitiva e a reflexiva. No nível intuitivo, somos conscientes por meio de nossos receptores (particularmente visão e audição) de dados oriundos do ambiente externo; sendo classificados estes dados automaticamente e referidos a outros dados mediante estruturas conceituais. [...]

Percebe-se assim que o desenvolvimento da inteligência em Matemática, particularmente na formação de conceitos, muito tem a ganhar se forem utilizados os métodos visuais característicos da Geometria, quando essa prioriza tais métodos em detrimento dos métodos geométrico ou algorítmico.

A marca do grande matemático Poincaré é também deixada na construção da corrente intuicionista, especialmente no que diz respeito aos estatutos dos Fundamentos da Geometria, apresentado no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris em 1900, quando divulga "*L'Intuition et la Logique em Mathématiques*", texto no qual se atém aos esclarecimentos sobre o papel que a intuição desempenha no raciocínio matemático.

O intuicionismo, para Poincaré, é uma perspectiva segundo a qual os processos matemáticos são, acima de tudo, de aspectos mentais, em que a mente é por si mesma o único instrumento que possibilita a construção de entidades matemáticas e dessa forma está estreitamente ligado ao construtivismo de Brouwer (CASTRO, 2001).

Segundo Fischbein (1987, p. 57), Poincaré descreveu intuição de três formas: (a) intuição relacionada aos sentidos e imaginação; (b) intuição expressa na indução empírica; (c) intuição puramente numérica, a qual expressa a fonte da indução matemática (e geralmente do raciocínio matemático). Bahm (apud Fischbein, 1987), por sua vez, mencionou três tipos de intuição: objetiva, como apreensão imediata do mundo externo; subjetiva, como auto-apreensão imediata; e intuição orgânica, na qual o objeto e o sujeito aparecem imediatamente juntos na apreensão.

Entretanto, para Fischbein (1987), a intuição como corrente filosófica, tem uma variedade de significados e em geral tem sido um tema polêmico, sendo aceito por uns e rejeitado por outros na ciência; sendo assim, é um tema difícil de ser abordado. Para o autor, pela necessidade imperativa da certeza implícita como uma componente de atividades normais, mentais ou formais e porque a *auto-evidência* é critério para certeza, ela possibilita e possibilitará produzir representações e interpretações de fatos matemáticos aparentemente auto-evidentes, sendo essa uma função primordial da intuição, a qual

> [...] sumariza experiências, oferece representação compacta e global de um grupo de dados, auxilia a superar a insuficiência de informações, introduz comportamentalmente interpretações com significado em um processo de raciocínio e, portanto, confere à atividade mental as qualidades de continuidade flexível, de firmeza e eficiência que caracteriza o comportamento ativo e adaptativo" (FISCHBEIN, 1987, p. 12).

Para Fischbein, a intuição é equivalente a conhecimento intuitivo, não como uma origem ou como um método, mas sim como um tipo de cognição. Para ele, a auto-evidência é uma característica do conhecimento intuitivo, que acredito ser uma componente fundamental para a aprendizagem em Matemática e necessita ser implementada em currículos atuais de Geometria, com vistas à melhoria de desempenho de professores e alunos nessa área do conhecimento matemático.

Por exemplo, a auto-evidência de que dois intervalos de números reais de amplitudes diferentes possuem a mesma cardinalidade (mesma “quantia” de elementos) parece não ser tão auto-evidente se não forem explorados os aspectos visuais intuitivos geométricos, a partir da representação dos objetos matemáticos por meios geométricos, como segue. Inicialmente considera-se a correspondência definida dos inteiros nos naturais por

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & se \quad n \geq 0 \\ -2n-1 & se \quad n < 0 \end{cases}$$

em que n $\in$ **Z**. Essa função é biunívoca e mostra que para cada número inteiro corresponde um único número natural e vice-versa, o que pode ser geometricamente expresso como na figura 28 a seguir.

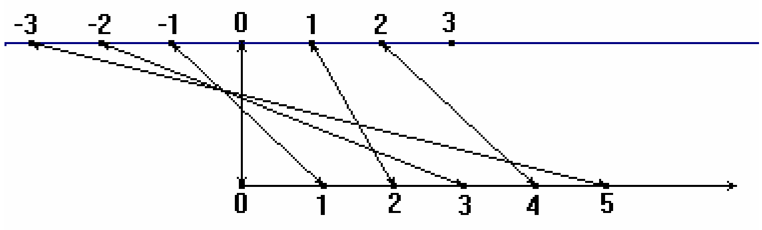


Figura 28 – Correspondência entre conjuntos

Bolzano, tirando proveito do paradoxo de Galileu sobre correspondência biunívoca entre os conjuntos, mostrou que correspondências semelhantes poderiam ser feitas entre os elementos de um conjunto infinito e subconjuntos próprios, como no exemplo

$$f : [0,1] \longrightarrow [0,2]$$

$$x \longrightarrow y = f(x) = 2x.$$

Geometricamente, esta função mostra que existem tantos pontos num segmento de reta de comprimento unitário quantos existem num segmento de comprimento igual ao dobro do anterior, conduzindo à idéia de que existem tantos números reais no intervalo [0,1] quanto no [0,2].

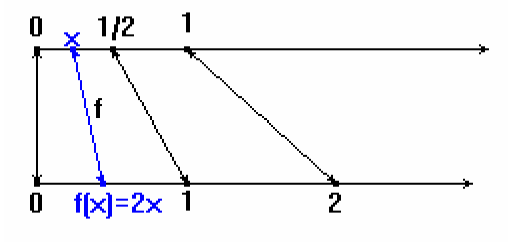


Figura 29 – Correspondência entre intervalos.

Esse parece ser um conhecimento intuitivo adquirido a partir do critério de auto-evidência possibilitando, por meio de representações geométricas, interpretações de fatos matemáticos com o uso da intuição, sem a qual não seria fácil sua compreensão. No senso comum, o primeiro intervalo tem um número menor de números reais do que o segundo ou, geometricamente, o primeiro segmento tem um número menor de pontos do que o segundo.

E o que tem isso a ver com a Crise dos Fundamentos e com a Geometria? Concomitantemente a toda discussão filosófica, em meados do século XIX surge o “mito de Euclides” que vem a ser a crença de que os livros de Euclides continham verdades sobre o universo, claras e indubitáveis e aceitas por todos, sendo o maior suporte da filosofia. Especialmente para os gregos, Matemática significava Geometria, e a filosofia da Matemática era a de Platão e de Aristóteles, logo *filosofia da Geometria*. A concepção de Platão de Geometria era um elemento-chave na concepção de mundo. Dizia ele,

> Posso estar enganado ao pensar que estou sentado à secretária a escrever esta frase, assim como posso estar claramente errado ao pensar que o Sol nascerá amanhã, mas de modo algum posso estar enganado no meu conhecimento de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. (apud DAVIS; HERSH, 1995, p. 306).

Será que a intuição não teria falhado para Platão? Pois ocorre, no século XIX, a criação de modelos de Geometrias Não Euclidianas, modelos esses obtidos a partir de construções axiomáticas, em função de que as verdades da Geometria tinham, como objeto, formas ideais cuja existência era evidente à mente; duvidar de sua existência seria sinal de ignorância ou de insanidade.

A existência de objetos matemáticos em um reino de idéias independentes das mentes humanas não apresentava dificuldades nem para Newton e nem para

Leibnitz, pois como cristãos aceitavam a existência de uma Mente Divina. Assim, a existência de objetos ideais como números ou formas geométricas não era um problema. O problema era, ao contrário, justificar a existência de objetos não ideais, materiais, pois em Matemática tem-se conhecimento de coisas que nunca são observadas.

Tall (1991), ao citar Bruner, afirma que é possível distinguir duas abordagens em qualquer campo intelectual: uma é analítica e a outra é intuitiva, a qual é menos rigorosa quanto à demonstração e mais orientada para o geral do que para as partes e ainda, menos verbalizada no que diz respeito à justificativas. Assim, para o autor

> A existência de diferentes modelos de pensamento sugere uma distinção entre os processos de pensamento intuitivo e do pensamento lógico formal exigido pela matemática. Intuição envolve processamento paralelo, completamente distinto do passo a passo exigido no processamento seqüencial da dedução rigorosa. Uma intuição chega toda na mente e pode ser difícil separar seus componentes em uma ordem lógica dedutiva. Com efeito, é sabido que a informação visual é processada em simultâneo: apenas o resultado deste tratamento é disponibilizado para a auto consciência, e não o processo pelo qual o Gestalt é formada [...]. Levado a extremos, isso sugere que a lógica da matemática pode não ser bem útil por uma abordagem intuitiva. (TALL, 1991, p. 107)

Considerando os estudos de Bruner, quanto à utilização dos dois lados do cérebro, Tall (1991, p. 108) afirma que

> Há evidências de que o melhor caminho para usar o cérebro é o de integrar as duas formas de tratamento: apelando para o lado direito (metaforicamente) do cérebro para dar ligações globais e unificar padrões, ao mesmo tempo analisando relações e construindo inferências lógicas entre conceitos com o lado esquerdo. Isto exige uma nova síntese do conhecimento matemático que dê devida importância para ambas as formas de pensamento. Em particular, é necessária uma abordagem que apele à intuição e ainda possa dar uma rigorosa formulação.

Para o autor, uma das razões pelas quais o ensino do Cálculo se encontra em desordem é que conceitos, os quais para especialistas matemáticos são considerados como intuitivos, não o são para os estudantes, sendo a razão disso algo simples, pois "Intuição é uma ressonância global no cérebro e depende da estrutura cognitiva do indivíduo, o que por sua vez, depende da experiência anterior do indivíduo." (Ibid., p. 108)

Dessa forma, muito contribui o desenvolvimento da Análise Matemática, em que a intuição geométrica vai além do conhecimento com que a humanidade conviveu por tanto tempo. Um exemplo dessa influência na Geometria é não ter havido o pensamento de que curvas pudessem preencher todo o espaço, como no caso da curva de Peano bidimensional, a qual dá idéia de preencher o interior de um quadrado, num processo infinito, como ilustrado pelos primeiros termos na seqüência abaixo.

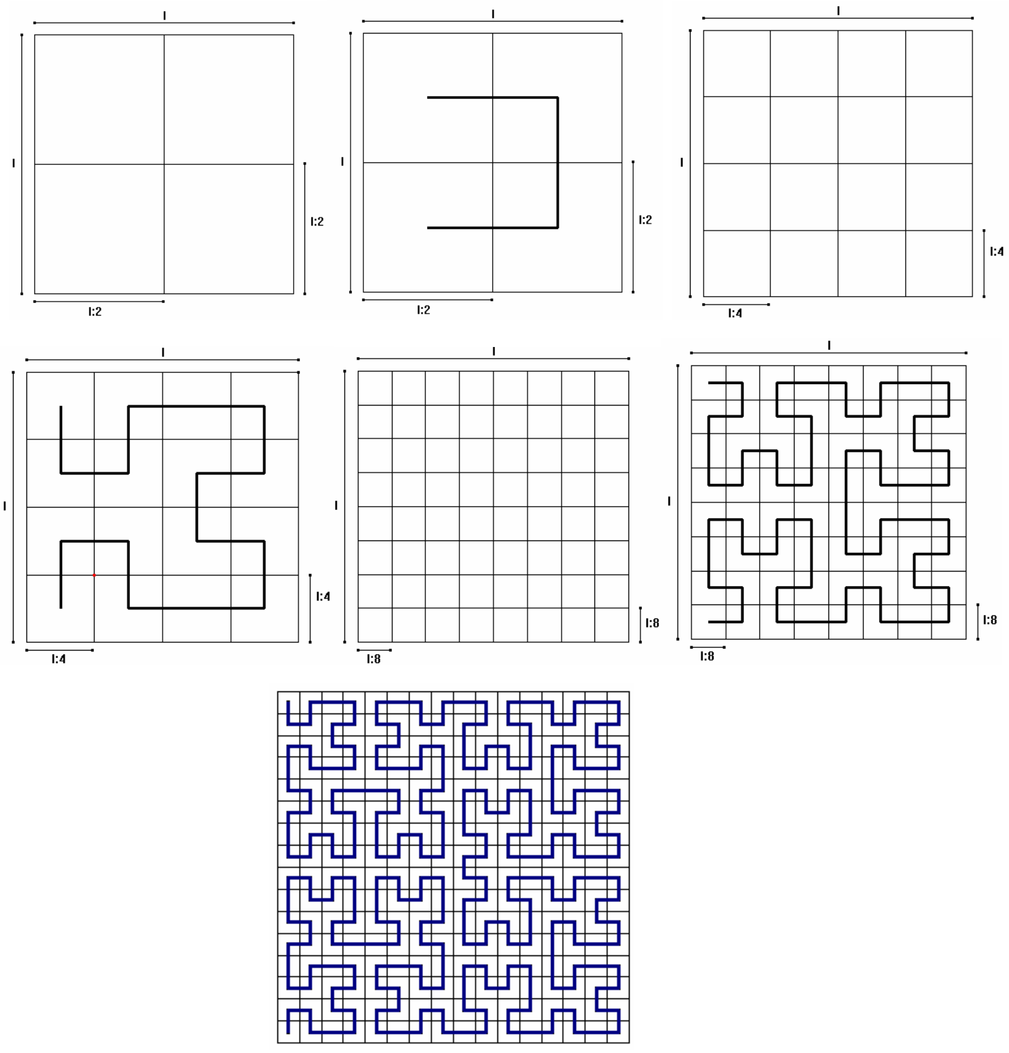


Figura 30 – Curva de Peano

Outro exemplo, existe uma função f contínua em **R** que não tem derivada em nenhum ponto. Essa função pode ser definida a partir da função ϕ: **R** $\rightarrow$ **R** dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & se\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$ e ϕ(x +2) = ϕ(x), $\forall$x, x $\in$ **R**.

Pela visualização do gráfico da função e por sua expressão analítica, intuitivamente, se percebe ser contínua e periódica de período 2. Além disso, a função apresenta um número infinito de pontos onde a derivada não existe, a saber, os pontos em que x $\in$ **Z**, uma vez que as inclinações dos segmentos à esquerda e à direita de cada desses pontos (x, f(x)), são distintas

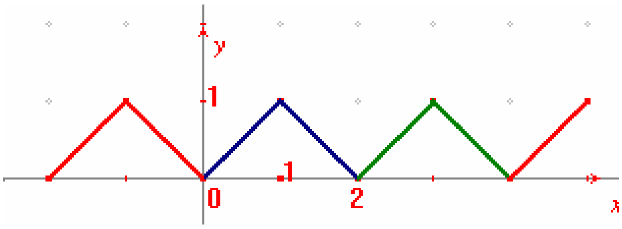


Figura 31 – Função modular

A partir da função ϕ define-se a função real de variável real:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n \phi(4^n x) \text{ , x} \in \mathbf{R},$$

para demonstrar que essa função f é contínua em todos os pontos, porém não admite derivada em nenhum deles. Intuitivamente, a função f é constituída de uma série obtida por uma seqüência de funções ϕ, com períodos convergindo para zero e cujos pontos onde não existe a derivada se aproximam infinitamente.

Seja a série geométrica $\phi(4^n x) \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n$ de razão menor do que 1, que, portanto, é uma série convergente. Assim, pelo critério de majoração de Weierstrass, f é contínua em **R**.

Seja x $\in$ **R** arbitrário e m $\in$ **N** também arbitrário. Existe um único inteiro k $\in$ **Z** tal que $k \leq 4^m x \leq k+1$. Define-se α_m e β_m:

$$\alpha_m = 4^{-m}.k \quad e \quad \beta_m = 4^{-m}.(k+1) \Rightarrow \alpha_m \leq x \leq \beta_m \quad e \quad \beta_m - \alpha_m = 4^{-m} \to 0 \quad quando \quad n \to \infty.$$

Se for provado que $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \right| \to +\infty$, então f não tem derivada em nenhum ponto x de seu domínio real.

Considera-se $f(\beta_m) - f(\alpha_m) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n [\phi(4^n \beta_n) - \phi(4^n \alpha_n)]$.

Mas, $|\phi(4^n \beta_n) - \phi(4^n \alpha_n)| = \begin{cases} 0, se\ n > m \\ 4^{n-m}\ se\ n \leq m \end{cases}$ o que implica em

$$\begin{cases} 4^n \beta_n = 4^n.4^{-m}(k+1) = 4^{n-m}(k+1) \\ 4^n \alpha_n = 4^n.4^{-m}.k = 4^{n-m}.k \end{cases} \Rightarrow \quad 4^n \beta_n - 4^n \alpha_n = 4^{n-m} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} se\ n > m \Rightarrow \phi(4^{n-m}) = 0 \\ se\ n \le m \Rightarrow \sim \exists e, e \in Z\ t.q.\ 4^{n-m}.k < e < 4^{n-m}.(k+1) \Rightarrow k < 4^{m-n}.e < k+1 \end{cases}.$$

Daí,

$$\left|\frac{f(\beta_m)-f(\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right| = 4^m\left|f(\beta_m)-f(\alpha_m)\right| = 4^m\left|\sum_0^m(\frac{3}{4})^n[\phi(4^n\beta_n)-\phi(4^n\alpha_n)]\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\frac{f(\beta_m)-f(\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right| \ge 4^m[(\frac{3}{4})^m - \sum_0^{m-1}(\frac{3}{4})^n\left|\phi(4^n\beta_m)-\phi(4^n\alpha_m)\right|] \Rightarrow$$

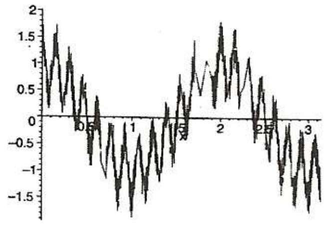
$$\Rightarrow \left|\frac{f(\beta_m)-f(\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right| \ge 4^m[(\frac{3}{4})^m - \sum_0^{m-1}(\frac{3}{4})^n.4^{n-m}] = 4^m.\frac{3^m}{4^m}[1-\sum_0^{m-1}\frac{3^n}{4^n}\frac{4^m}{3^m}\frac{4^n}{4^m}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(\beta_m)-f(\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right| \ge 3^m[1-(\frac{1}{3^m}+...+\frac{1}{3})] > 3^m[1-\sum_1^{\infty}(\frac{1}{3})^k] = 3^m[1-\frac{1}{2}] = \frac{3^m}{2}.$$

Assim, quando $m \to \infty$ tem-se $\frac{3^m}{2} \to \infty$, o que acarreta em $\left|\frac{f(\beta_m)-f(\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right| \to \infty$ e isso significa que a função f não é diferenciável em nenhum ponto, como queríamos demonstrar.

No que segue, apresento o gráfico de uma função mais simples, que pode ser útil para estabelecer uma analogia para a construção mental do gráfico da função anterior, mais difícil de ser obtido.

Uma função que também é contínua sem que tenha derivada em nenhum ponto é definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n \cos(13^n \pi x)$ [19], cujo gráfico, obtido com o auxílio do software MAPLE, é o seguinte:



[19] O exemplo foi extraído de SANTOS, A.R. dos; BIANCHINI, W.. **Aprendendo Cálculo com o MAPLE**: Cálculo de uma variável, 2002, p. 133, sendo apresentado apenas o gráfico da função com a afirmação de que seu detalhamento não se adequa ao texto.

Figura 32 – Função contínua sem derivada em nenhum ponto

Ao propor um novo tipo de intuição na busca de melhoria para o ensino do Cálculo, Tall (1991) indica um forte apelo aos fundamentos cognitivos na base da formação dos alunos, mesmo que esses fundamentos sejam mais complicados, mas que não limitem o processo formal posteriormente. Afirma ele que “A idéia é a de apelar para o poder do padrão visual da metáfora do lado direito do cérebro de tal forma que ele estabeleça intuições adequadas para servir a lógica dedutiva do lado esquerdo.” (p. 110).

Reafirmando sua consciência do grau de dificuldade na formação de alguns conceitos pertinentes ao Cálculo, mesmo para profissionais matemáticos, cita Tall (1991, p. 110):

> A razão pela qual matemáticos do século XIX encontraram o conceito de uma função não intuitiva, contínua em todos os pontos e não sendo diferenciável em nenhum era simplesmente que não tinham encontrado um exemplo amigável. Nem, creio eu, tenham muitos dos atuais matemáticos profissionais. Em uma ocasião eu pedi a todos os membros de um internacionalmente conhecido departamento de matemática se eles poderiam me fornecer uma simples prova da existência de uma função contínua em todos os pontos, porém não sendo diferenciável em nenhum desses. Nenhum deles pode fazer isso no momento, embora dois pudessem indicar um livro onde uma demonstração poderia ser encontrada e um foi mesmo capaz de dar o número da página! Eu era igualmente incapaz de formular tal prova na época. Se nós profissionais somos tão incapazes de dar uma explicação do significado de um conceito, qual esperança há para os nossos alunos? A resposta reside na eficaz utilização de visualização para dar intuição para a prova formal.

Por essa indicação de Tall e por contato com alguns profissionais que também desconhecem uma demonstração da existência dessa função, acredito que possa trazer uma contribuição para alguns matemáticos e educadores matemáticos atuais.

Klein (1927, p. 6) afirma que “antes de tudo, deve dar-se grande importância a uma *forte educação da intuição espacial*; depois se deve aumentar o ensino até chegar aos limiares do Cálculo Infinitesimal [...]”. Nesse sentido ele indica a importância, por exemplo, de começar uma familiarização imediata com os alunos “[...] sempre sobre a base do *constante emprego de métodos gráficos* na representação de quaisquer leis no plano das variáveis (x,y), que hoje se utilizam em todas as aplicações da Matemática pelo **caráter de evidência** que presta.”(KLEIN, 1927., p. 5. Grifo do autor).

Devido ao abandono do tratamento geométrico pela escolha do analítico, dificuldades na representação de gráficos de funções reais de várias variáveis são facilmente observadas em minha prática. Nesse sentido, o uso de curvas de níveis para o esboço gráfico é uma forma intuitiva relevante, que pode e deve ser inserida no currículo, até mesmo porque a intuição no esboço do gráfico de funções não é explorada a partir de função real de variável real.

Seja a função f: A $\subset$ **R** $\rightarrow$ **R** definida por y = f(x), $\forall$x, x$\in$ **A**. Geometricamente, corresponde a

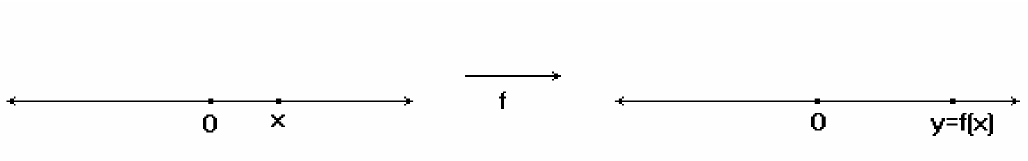


Figura 33 – Função real de variável real

O que usualmente não é feito é efetuar uma transformação geométrica intuitiva que reúna os dois conjuntos, de modo que o segundo eixo, que recebe as imagens f(x), se posicione na vertical e assim, surgindo os pares ordenados (x,f(x)) e ao fazer x variar no domínio da função se obtém o gráfico como conjunto de pontos.

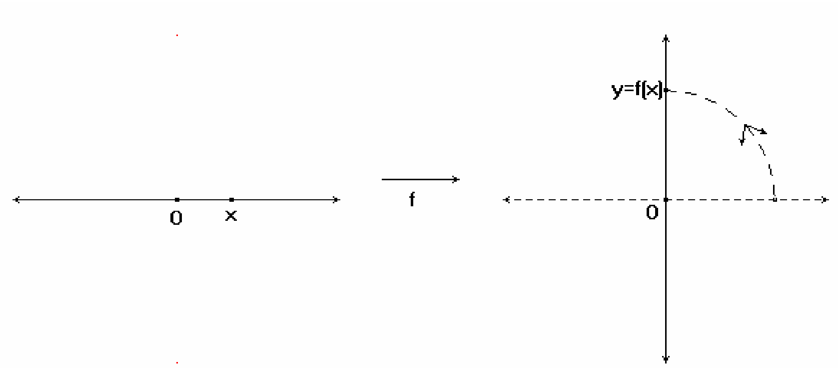


Figura 34 – Imagem de função real de variável real

e reunindo os dois conjuntos, o de partida e o de chegada em uma única representação produz:

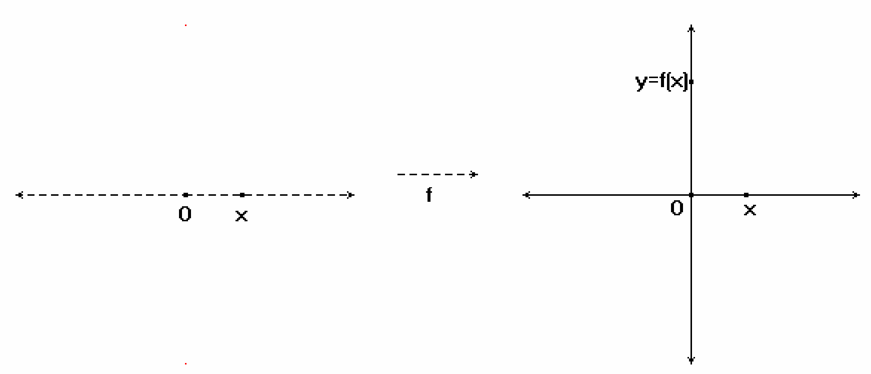


Figura 35 – Eixos coordenados.

Donde finalmente, não representando as linhas tracejadas, as quais foram deslocadas, obtém-se os pontos (x,f(x)), que constituem o gráfico da função, definido pelo conjunto graf(f) = $\{(x,f(x)): x \in A\} \subset \mathbf{R}^2$.

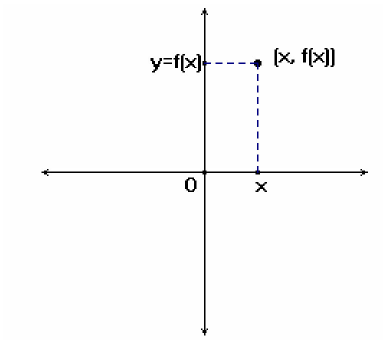


Figura 36 – Gráfico de função real de variável real

Considerando-se a função real de duas variáveis reais f: $A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, isto é, z = f(x,y), $\forall$(x,y), (x,y) $\in$ A tem-se o gráfico de f dado pelo conjunto

graf(f) = $\{(x, y, f(x)): (x,y) \in A\} \subset \mathbf{R}^3$,

o qual é denominado de superfície em $\mathbf{R}^3$. Geometricamente, o caminho feito antes pode ser repetido, com as devidas adequações. O correspondente a um intervalo aberto (a,b) de **R** é aqui uma região aberta A do plano.

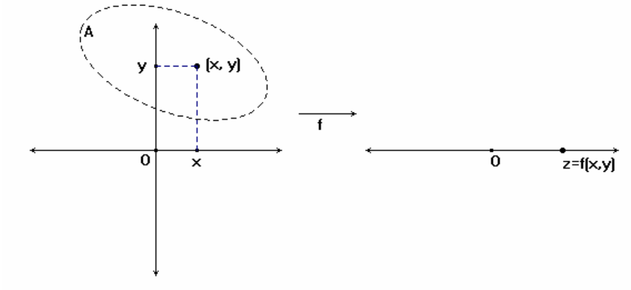


Figura 37 – Função real de duas variáveis reais.

Reunindo-se as duas partes (conjunto de partida e conjunto de chegada), tem-se o terceiro eixo representado saindo do plano do papel, perpendicular ao plano determinado pelos outros dois.

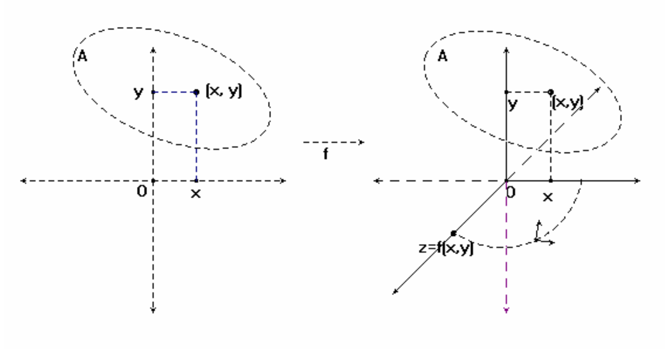


Figura 38 – Domínio e Imagem de função real de duas variáveis reais.

e deixando de representar as linhas e os semi-eixos não visíveis tem-se a representação de um ponto (x,y,f(x,y)) do gráfico da função real de duas variáveis reais, no $\mathbf{R}^3$, isto é, de uma superfície no espaço tridimensional.

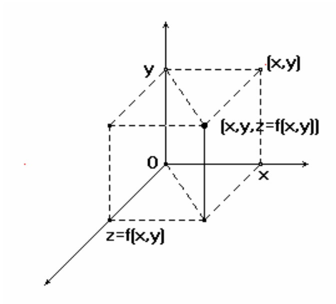


Figura 39 – Gráfico de função real de duas variáveis reais.

Uma representação gráfica da superfície pode ser a seguinte:

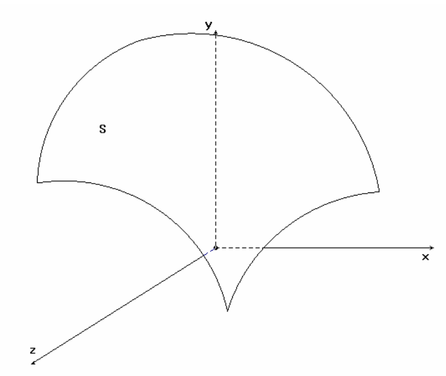


Figura 40 – Gráfico de superfície

Como o esboço de gráficos de funções a duas variáveis não é muito simples, a utilização de curvas de níveis é um caminho geométrico bastante intuitivo e eficiente, que auxilia na compreensão de derivadas direcionais, por exemplo, sem ser pelo caminho que usualmente é feito no Cálculo, por meio de algoritmos. Uma curva de nível de uma função z = f(x,y) é um conjunto de pontos (x,y) $\in$ D(f), em que D(f) significa o domínio da função, tal que f(x,y) = k, sendo k uma constante real, ou seja,

$$C_k = \{(x,y) \in D(f): f(x,y) = k\}.$$

Exemplifico com a função $f(x,y) = z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, cujo domínio é D(f) = {(x,y) $\in$ $\mathbf{R}^2$: $x^2 + y^2 \leq 4$}, ou seja, uma bola fechada de centro na origem e raio 2 (círculo) e cujo conjunto imagem é f(D) = [0,2] $\subset$ **R**. O domínio da função é dado por

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4,$$

o qual representa um disco ou bola ou círculo de centro na origem e raio 2. O gráfico da superfície pode ser obtido por meio das curvas de níveis:

- z = 0 $\Leftrightarrow$ $\sqrt{4 - x^2 - y^2} = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$; o qual representa analiticamente uma circunferência no plano z = 0, de centro (0,0,0) e raio igual a 2.

- z = ½ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{4 - x^2 - y^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 - x^2 - y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{15}{4}$; a qual representa analiticamente uma circunferência no plano z = ½ , de centro (0,0, ½) e raio $\frac{\sqrt{15}}{2}$<2.

- z = 1 $\Leftrightarrow$ $\sqrt{4 - x^2 - y^2} = 1 \Leftrightarrow 4 - x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3$; a qual representa analiticamente uma circunferência no plano z = 1, de centro (0,0,1) e raio igual a $\sqrt{3}$.

- z = 2 $\Leftrightarrow$ $\sqrt{4 - x^2 - y^2} = 2 \Leftrightarrow 4 - x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0$; a qual representa analiticamente um ponto no plano z = 2, isto é, (0,0,2).

- z > 2 ou z < 0 $\Leftrightarrow$ não há lugar geométrico.

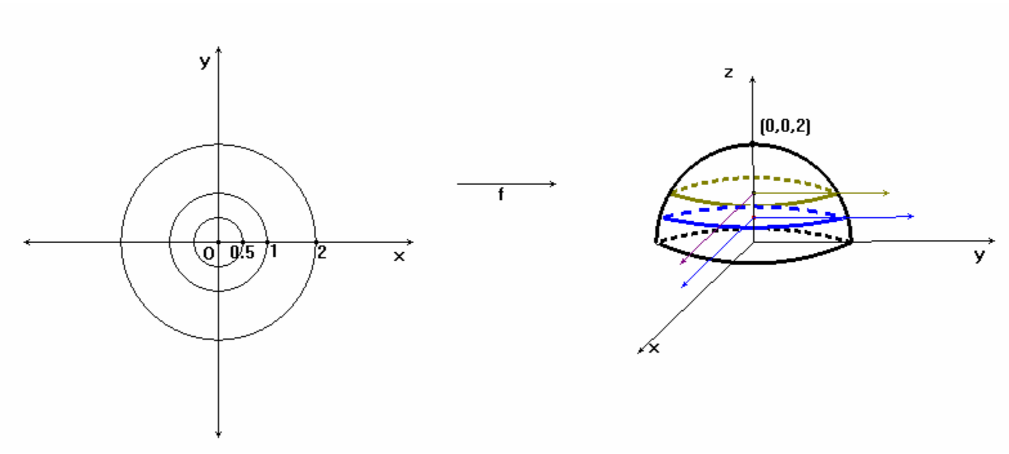


Figura 41 – Curvas de níveis de superfícies.

A intuição oriunda das transformações das curvas, no caso, circunferências no plano XOY em circunferências no espaço, contidas em planos paralelos ao plano das primeiras, me parece um recurso útil para a construção dos gráficos de superfícies.

Segundo Freudenthal (1973), se existe um motivo para preocupação com o futuro da Geometria e a possibilidade de seu desaparecimento dos currículos, isso se deve ao fato da resistência a mudanças em seu ensino. Destaco aqui um questionamento feito pelo autor que me conduz a indicar possibilidades de uso de Geometria: “porque não introduzir a geometria desde o início como ‘geometria analítica’? Teria a vantagem de que o rigor da álgebra seria transferido para a geometria”. (p. 420).

A Topologia, como um dos ramos mais modernos da Geometria, trata de curvas e superfícies não meramente em sua forma geométrica e sim como funções ou transformações definidas em intervalos de números reais. Uma função diferenciável

$$f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$$

em que A=(a,b) é um intervalo aberto no conjunto dos números reais, é definida como uma curva no espaço. Por exemplo, a função dada por

$$f(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\,t, bt)$$

com $t \in R$ e a e b números reais fixos, é chamada hélice cilíndrica, sendo uma curva contida no cilindro circular reto $x^2+y^2 = a^2$. Topologicamente, é possível transformar um plano perfurado (plano sem um ponto) em um cilindro. Essas duas superfícies são homeomorfas, uma vez que é possível transformar continuamente uma na outra. Uma reta de um plano é transformada em uma curva de um cilindro de diversas formas, uma das quais é a hélice dada por suas equações paramétricas acima ou por sua representação geométrica a seguir, a qual é denominada de geodésica da superfície cilíndrica e, portanto “uma reta dessa superfície”.

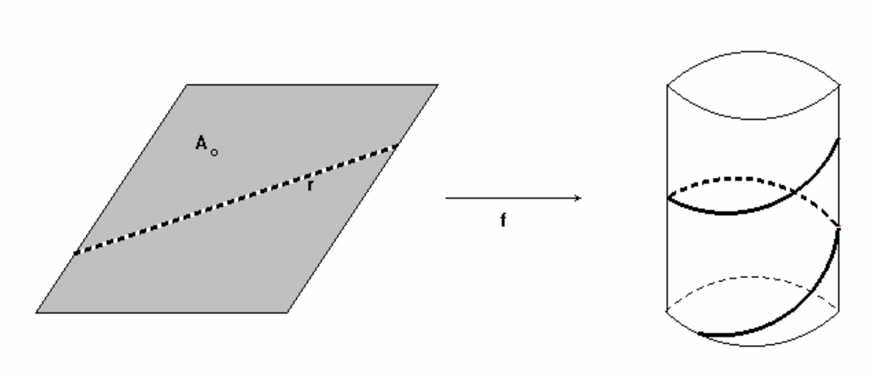


Figura 42 – Hélice cilíndrica.

Intuitivamente, pode-se pensar concretamente a reta como um fino fio de arame ou de elástico no plano. Ao transformar o plano na superfície cilíndrica, a reta transforma-se na hélice cilíndrica, curva que possui uma curvatura natural, como toda curva. Porém, há um “ente matemático” que a mantém presa ou fixa na superfície, o que não ocorre com todas as demais curvas dispostas sobre tal superfície. Esse “ente matemático” é chamado curvatura geodésica da curva e quando essa curvatura é nula, isso corresponde a existir um equilíbrio entre as componentes normais e tangenciais à curva, ou seja, o vetor aceleração da curva é paralelo ao vetor normal da superfície em cada ponto da curva. Assim a curva, em relação à superfície, não se curva, apenas se amolda a ela. Ora, se a curva não se curva em relação à superfície, então é algo similar ao que ocorre com a reta no plano, comparativamente com outras curvas, pois ela não se curva no plano, ou seja, sua curvatura é zero. Pode-se dizer que as geodésicas desempenham, em superfícies, papel análogo ao que a reta desempenha na Geometria Euclidiana. É usual referir-se às geodésicas de uma superfície como sendo as “retas” dessa. Em Dutra e Leivas (1996) encontra-se um paralelo entre alguns axiomas da Geometria Euclidiana utilizando retas e os correspondentes axiomas em superfícies utilizando geodésicas.

Exemplificando, se a superfície for um plano, então suas geodésicas são as retas desse plano; se a superfície é uma esfera, então as suas geodésicas são as circunferências máximas da esfera. Pode-se perceber que os vetores normais (n) em cada ponto da circunferência máxima (horizontal) apontam para o centro (O) da esfera sendo perpendiculares ao plano tangente (ou paralelos ao vetor normal a esse plano N) à esfera em cada ponto P.

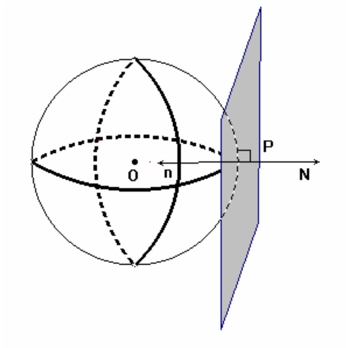


Figura 43 – Plano tangente à esfera.

Um segundo exemplo que considero relevante para ilustrar o papel da intuição na construção de conhecimento matemático consiste em "enrolar" um segmento aberto da reta real numa curva plana. Pode-se considerar o intervalo real A= $(0,2\pi)$, por exemplo, e a função:

$$f: (0, 2\pi) \to \mathbf{R}^2 \text{ dada por } f(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\,t) \text{ sendo } t \in A.$$

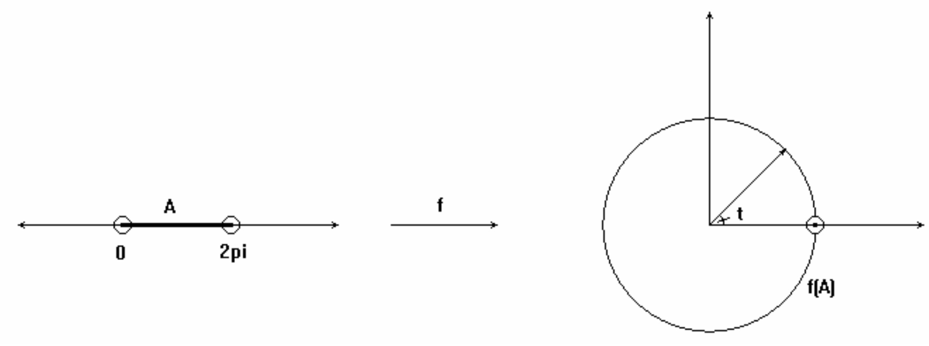


Figura 44 – Parametrização da circunferência.

Intuitivamente, a função definida tem o efeito de "enrolar" um intervalo aberto (o qual poderia ser materializado num pedaço retilíneo de arame ou de cordão) numa "circunferência" menos um ponto. Os aspectos formais matemáticos exigem que o intervalo seja aberto a fim de que seja definida a bijeção entre os dois conjuntos e a diferenciabilidade da função em todos os pontos do intervalo.

Sem dúvida, as questões relativas à intuição não foram tão bem aceitas como pode ser constatado em Hernandez (1978, p. 23):

> Não tiveram melhor acolhida a aparição de fenômenos que colocavam em dúvida o valor da intuição geométrica, de 'monstros' tais como as funções contínuas sem derivada (ou, se preferir, de curvas sem tangentes) de Weirstrass, ou como a 'curva de Peano' que enche um quadrado, passando por todos e cada um de seus pontos, ante o que Poincaré pergunta: 'Como pode a intuição enganarnos até esse ponto?'

Com certeza a intuição intervém no processo de matematização de forma bastante eficaz e a esse respeito os estreitos laços entre a Análise e a Geometria, oferecidos pela Geometria Diferencial, muito vieram enriquecer o conhecimento matemático. Inclusive Poincaré, após sua negação de existência de uma Geometria Não Euclidiana não intuitiva, veio a criar seu próprio modelo dessa "nova Geometria".

Entretanto, até os dias atuais é comum iniciar-se no Cálculo Diferencial e Integral o estudo de continuidade de funções por meio da consideração "intuitiva": uma função é contínua quando se pode obter seu gráfico sem levantar o lápis do papel, algo que só vai acontecer com funções de variável real, não servindo, por exemplo, para espaços discretos. Há de se considerar a movimentação de novos conhecimentos como o computacional, cuja base é uma Matemática Discreta e que gerou desenvolvimentos tecnológicos incontestáveis. As métricas não euclidianas passam a desempenhar um importante papel na construção do conhecimento geométrico. Reportar-me-ei a isso nos próximos capítulos, ao indicar possibilidades de inclusão de aspectos de Geometrias Não Euclidianas pelo viés da Geometria Analítica como, por exemplo, a existência de triângulos trirretângulos e circunferências cuja representação visual são quadrados, dependendo da métrica considerada.

No que diz respeito à Geometria, Luft (2006, p. 1) diz que Kant parte de que a Geometria é uma ciência capaz de determinar "sinteticamente e a priori as propriedades do espaço"; sendo assim, "o que precisa ser a representação do espaço para que, a partir dela, seja possível tal conhecimento?" Para o autor, a conclusão kantiana é a seguinte: o espaço "precisa ser originariamente intuição (...). Mas essa intuição precisa ser encontrada em nós a priori, ou seja, antes de toda percepção de um objeto". O argumento de Kant parte da constatação de um conhecimento dado como supostamente a priori, e avança – pressupondo implicitamente todo o arcabouço das teses centrais da filosofia transcendental, como a distinção entre juízos analíticos, sintéticos a priori e sintéticos a posteriori – na direção do esclarecimento de qual seria a correta leitura do conceito de "espaço" para que tal ciência seja possível. Diz Luft (2006) que o "procedimento é claramente regressivo, ao direcionar-se do condicionado (Geometria como ciência dada) ao condicionante (a estrutura transcendental que possibilita a Geometria como ciência sintética a priori)". (idem, p. 1)

Fischbein teve interesse por três aspectos distintos do pensamento matemático: *intuição fundamental* que ele via como sendo amplamente ação, *os algoritmos* que dão poder em computações e manipulação simbólica, e o *aspecto formal* de axiomas, definições e demonstração formal (FISCHBEIN, 1987, apud TALL, 2004, p. 282).

Numa primeira classificação de intuições, Fischbein (1987) as caracteriza como intuições *afirmativas*; *conjecturais*, *antecipatórias* e *conclusivas*, estabelecendo relações entre intuições e soluções de problemas. Para ele, as *intuições afirmativas* são aquelas representações ou interpretações de fatos que são aceitos como certos, evidentes e auto consistentes, as quais podem se referir a determinado conceito ou relação enquanto que as *intuições conjecturais* estão associadas a um sentimento de dúvida. No que diz respeito às *intuições antecipatórias*, elas representam uma visão preliminar de uma determinada solução de um problema, uma hipótese formulada, a qual, desde o início, está intimamente ligada a um sentimento de certeza e de evidência, características da intuição para o autor, enquanto que as *intuições conclusivas* fornecem uma visão definitiva, conclusiva e global da solução do problema.

Mas o sentido de intuição pode ser outro, na medida em que se está trabalhando com objetos presentes à vista do observador, como destaca Dieudonné (1986, p.131),

> [...] Estes criadores científicos se caracterizam por uma imaginação muito viva, à qual é unida uma compreensão profunda do material considerado, combinação à qual se poderia dar o nome de "intuição", porquanto se tenha em mente que o significado desta palavra na linguagem ordinária não tem nada em comum com ela, visto que em nosso caso se aplica aos "objetos" aos quais, em geral, não corresponde nenhuma imagem no mundo dos sentidos.

Isso é relevante no sentido, por exemplo, de experiências realizadas com alunos da Licenciatura ao trabalhar com geoplano, na busca de propriedades relacionando polígonos inscritos e circunscritos na circunferência. Nelas, partindo da representação do objeto, chega-se à abstração, com a construção de propriedades formais e demonstrações. Isso ocorre a partir do afastamento do objeto e, como caracteriza Hoffer (citado por Del Grande, 1994, p. 159), utilizando a memória visual, que "é a habilidade de se lembrar com precisão de um objeto que não está mais à vista e relacionar suas características com outros objetos, estejam eles à vista ou não".

Métodos intuitivos são utilizados por Freudenthal (1973) para o desenvolvimento do conceito de número na criança, em que considera as seguintes fases do processo de ensino, que não necessariamente ocorrem de forma seqüencial temporal: operação intuitiva, operação algorítmica, operação algébrica, organização global e subordinação ao sistema matemático. Diz ele que, após a fase intuitiva, menciona expressamente o algoritmo correspondente, o qual deve ser repetido após o algébrico e as fases seguintes.

Com relação à Geometria, Freudenthal (1973, p. 413) diz que

> [...] o espaço com seus sólidos é mais concreto que o plano e suas figuras. No plano, o caminho para a análise lógica é mais curto; o espaço é mais intuitivo e favorece atividades mais criativas. Figuras planas são desenhadas, sólidos são construídos.

Usar a intuição na construção do conhecimento geométrico espacial parece ser um bom indicativo para a construção do conhecimento geométrico na criança, segundo esse autor, com o que Piaget e Inhelder (1993) parecem concordar no que diz respeito à intuição das formas e à percepção estereognóstica. Por suas experiências com crianças de 2 a 7 anos, afirmam os autores que é possível introduzi-las "ao estudo da intuição espacial, pois ela tem efeito precisamente sobre um domínio-limite entre a percepção e a imagem". (p.33).

Fischbein (1987), numa segunda classificação de intuições, chama de *intuição primária* aquela que desenvolve os indivíduos independentemente de qualquer instrução sistemática, como um efeito da sua experiência pessoal. O autor as subdivide em *operacional* e *pré-operacional* e faz um paralelo com os estádios de desenvolvimento feito por Piaget.

> Intuições pré-operacionais são baseadas em configurações enquanto intuições operacionais são baseadas em estruturas operacionais (por exemplo, aceitação de diversos tipos de conservação evidente, a priori, a compreensão intuitiva da mecânica causalidade). Intuições operacionais que se desenvolvem durante o período operacional concreto permanecem estáveis com aquisições para o conjunto da vida. (FISCHBEIN, 1987, p. 202)

Assim, muito embora os estudos desses autores sejam analisados com crianças e o meu foco seja na formação do professor, entendo que, para a Geometria ser compreendida, construída e ensinada, tais dimensões precisam ser desenvolvidas na Licenciatura e por isso julgo pertinentes que relações espaciais anteriores ao processo de representação sejam estabelecidas. Segundo Piaget e Inhelder (1993) tais relações são: vizinhança, separação, ordem, circunscrição e continuidade, todas de natureza topológica, as quais são objeto de análise em experimento realizado com alunos da Licenciatura e que constam deste trabalho de doutorado.

Retomando significados para intuição, dos quais procurei apresentar alguns exemplos matemáticos concretos que podem ser abordados na Licenciatura em Matemática, reitero o fato de que esse conceito tem sido utilizado pelos matemáticos de forma muito diversificada, tais como as apontadas por Davis e Hersh (1995, p. 360):

> 1.) Intuitivo é o oposto de rigoroso;
> 2.) Intuitivo significa visual;
> 3.) Intuitivo significa plausível ou convincente na ausência de demonstração;
> 4.) Intuitivo significa incompleto;
> 5.) Intuitivo significa confiarmos num modelo físico ou em alguns exemplos importantes;
> 6.) Intuitivo significa holístico ou integrativo, em oposição a pormenorizado ou analítico.

Meu trabalho foca especialmente o item 2, pois como dizem os autores,

> a topologia ou geometria intuitivas diferem da topologia ou geometrias rigorosas em dois aspectos. Por um lado, a versão intuitiva tem um significado, uma referência no domínio das curvas e superfícies visualizadas, que é excluído da versão rigorosa (isto é, formal ou abstrata). Neste aspecto, a intuitiva é superior; tem uma qualidade que falta à rigorosa. Por outro lado, a visualização pode conduzir-nos a considerarmos óbvias ou evidentes afirmações que são dúbias ou mesma falsas. (DAVIS; HERSH, 1995, p. 361)

Segundo Hersh (1997), da mesma forma que Hilbert, Brouwer considerava que a Matemática deveria começar a partir de dados obtidos intuitivamente e Brouwer, assim como Hilbert em sua fase formalista, considerou que a finitude na Matemática era algo indubitável e, a forma de “dar segurança à Matemática, tornando-a livre de dúvidas, era reduzir a parte infinita - análise e teoria dos conjuntos - a uma parte finita por meio da utilização de fórmulas finitas, as quais descrevessem essas estruturas infinitas.” (HERSH, 1997, p. 162). Segundo o autor, “Intuição aqui tem o significado de intuição de contagem somente.” (Ibid.)

A seguir reporto-me ao estilo euclidiano e a noção de grandeza caracterizada por Granger (1974), no que diz respeito à transferência intuitiva necessária para sair das idéias de números e passar às idéias de grandezas como entes geométricos, o que permite operar com essas grandezas geométricas por meio de relações de igualdade e de desigualdade. No estilo euclidiano, o traço mais marcante na elaboração das grandezas, segundo Granger (1974, p. 38) “É que o ‘dado intuitivo’, longe de ser simplesmente depurado, retificado e, depois, introduzido de uma só vez no sistema, acha-se clivado, distribuído em vários níveis do edifício”. Assim, a intuição aparece na obra de Euclides nos seguintes níveis:

1. das construções espaciais, para dar significado à igualdade de grandezas (áreas) enraizando a álgebra geométrica [intuição topológica];

2. da medida das grandezas e de suas relações. (múltiplo de uma grandeza) [intuição métrica];

3. do número inteiro, para o desenvolvimento da aritmética, em que os pressupostos são retirados da teoria geral das grandezas. [intuição algébrica].

Essa estruturação da intuição na obra de Euclides, mais do que uma articulação, vai guiar a análise do estilo euclidiano, sendo que a igualdade de grandezas, especialmente no que diz respeito a áreas, vai nortear o livro I na denominada álgebra geométrica. Em Leivas (2007a), apresenta-se uma aplicação dessa álgebra geométrica para o cálculo de áreas de regiões poligonais, pela configuração e reconfiguração de figuras utilizando o Teorema de Pitágoras.

No que segue, apresento mais um indicativo de como a Geometria pode estar conectada a outras áreas do conhecimento matemático, desde que se opte por considerá-la, como estou indicando nesse trabalho, como um elemento interlocutor interdisciplinar na Licenciatura em Matemática. Os temas número complexo, matriz, vetor, trigonometria e operador linear, usualmente são abordados em disciplinas distintas na formação inicial do professor, sem conexões e sem produção de significado para os estudantes. A isso se pode definir como um estilo, ou seja, uma forma de tratar cada tema isoladamente, ao invés de integrar o individual num processo concreto, que, embora seja abstrato em Matemática, pode partir de uma situação concreta, ou ainda de uma experiência, e dessa, por meios intuitivos, produzir significados.

Quando se fala em número complexo, logo vem à mente um conjunto de operações lógicas bem definidas. Essa abordagem, na maioria das vezes, é feita em livros didáticos e até mesmo nos cursos introdutórios na formação do professor, quando esse assunto é abordado. Isso corresponde a considerar um número complexo como um par (x,y) de números reais, estabelecendo um isomorfismo entre os dois conjuntos de naturezas diferentes, ou seja

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$$

como uma coleção de pares de números e o complexo como

$$\mathbf{C} = \{z = x + i.y \mid i = \sqrt{-1}\}$$

em que **i** é a unidade dessa coleção e corresponde ao par (0,1) satisfazendo a propriedade $i^2 = -1$. Pensar nesse conjunto com a mesma estrutura considerada nos reais, por exemplo com a multiplicação, induz muito frequentemente a um erro que indica falta de conhecimento do conteúdo:

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{1} \neq -1$$

O erro ocorre porque a estrutura multiplicativa em C corresponde a

$$z = z_1.z_2 = (x_1,y_1).(x_2,y_2) = (x_1.x_2 - y_1.y_2,\ x_1.y_2+x_2.y_1)$$

o que justifica, por exemplo, i.i = (0,1).(0,1) = (0.0 – 1.1, 0.1+1.0) = -1.

Mas em que os aspectos intuitivos visuais podem contribuir para eliminar tais dificuldades? Pensar em **R** como um conjunto de números tem um sentido e pensar em R como um conjunto de pontos da reta tem outro. Entretanto, de forma análoga ao que foi feito anteriormente, estabelece-se um isomorfismo entre os dois conjuntos por meio de uma bijeção que faça corresponder ao número real zero, um ponto $O \in r$, considerado ponto origem de r, a cada número real positivo, faça corresponder um ponto $Q \in r$ distante de O, uma quantidade de unidades correspondente ao número real positivo considerado e, a cada número real negativo, faça corresponder um ponto P distante de O, à sua esquerda na figura abaixo, uma quantia de unidades correspondente ao número real negativo considerado. Daí,

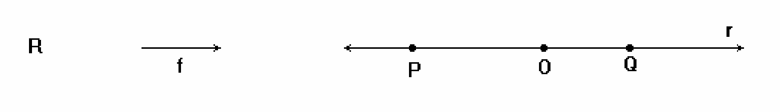


Figura 45 – Isomorfismo da reta com os números reais.

De forma análoga, tem-se uma reprentação da função f definida do $\mathbf{R}^2$ no plano:

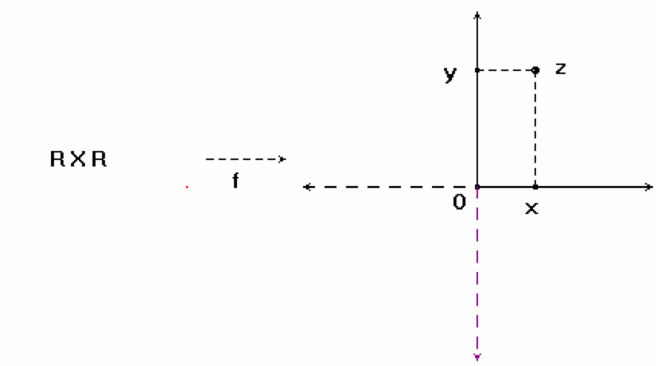


Figura 46 – Isomorfismo do plano com $\mathbf{R}^2$.

Mas, ao se estabelecer essa analogia, tem-se um isomorfismo entre o conjunto de pares ordenados de números reais e um conjunto de pontos do plano, assim, o número complexo ganha um *status* geométrico que pode ser relevante para sua compreensão. O complexo adquire um aspecto dinâmico, pois pode ser considerado em sua forma trigonométrica e isso conduz ao envolvimento com ângulo, em geral denominado argumento do número complexo, o qual traz um indicativo geométrico até certo ponto intuitivo. Em paralelo, há um indicativo do módulo do número complexo o que induz a uma outra idéia, a saber, a de grandeza.

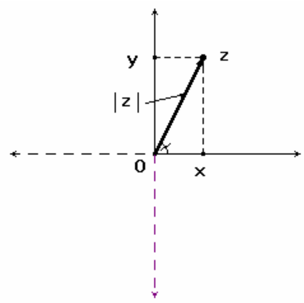


Figura 47 – Vetor.

Assim, o número complexo pode ser pensado como um elemento estático, ou seja, um vetor com seu módulo e sua direção bem definidos ou como um elemento dinâmico, ou seja, uma transformação geométrica que leva um par ordenado de números reais em um ponto do plano, sua imagem geométrica.

Ao denotar por θ o ângulo que o vetor forma com o sentido positivo do eixo horizontal, tem-se o vetor $z = |z|\cos\theta + i|z|\text{sen}\theta$, com componentes $x = |z|\cos\theta$ e $y = |z|\text{sen}\theta$, de forma que $z = (x,y)$ é um par ordenado de números reais. Dessa forma, o ente matemático denominado número complexo pode ser compreendido como um vetor, considerado um ente estático, ou como um ente dinâmico, ou seja, um operador que pode dilatar ou expandir, comprimir ou reduzir, rotacionar ou refletir o objeto, como pode ser percebido geometricamente. A primeira parte da figura 48 mostra a dinâmica da transformação do objeto conservando o seu módulo e a segunda, conservando o ângulo.

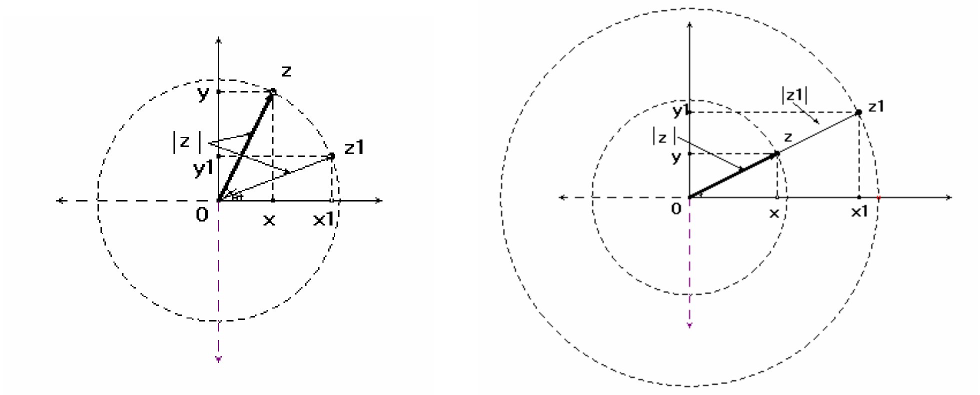


Figura 48 – Módulo do complexo.

Por outro lado, ao se tratar com matrizes, o que se pensa imediatamente é numa outra estrutura, com suas propriedades operatórias bem definidas e sem percepções geométricas envolvidas. Seja $\mathbf{R}^2$ o espaço vetorial com sua base canônica {(1,0), (0,1)} e um operador linear T que leva um vetor $z = (x,y)$ do $\mathbf{R}^2$ no vetor $z_1 = (x_1,y_1)$ do $\mathbf{R}^2$, como nas figuras 48, acima. Pode-se dispor as coordenadas do vetor z em forma de coluna, então T(z) pode ser expresso na forma T(z) = A.z em que a matriz canônica do operador T é A = [T(1,0) T(0,1)], a qual pode ser representada por [T].

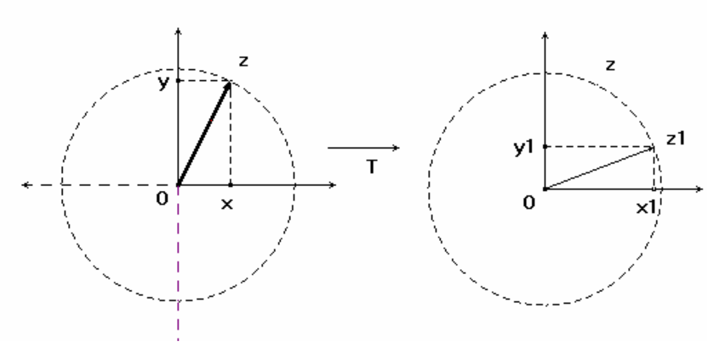


Figura 49 – Coordenadas do complexo.

Assim, considerando-se a base {1,i} do espaço vetorial E = ($\mathbf{R}^2$, .) em que a multiplicação é por escalar, tem-se o operador linear T conservando distâncias quando |z| = 1 e pode ser interpretado como uma rotação em torno da origem O = (0,0) com a multiplicação por complexo de módulo 1. Dessa forma, T(z) = [T].z é o operador que transforma o par (x,y) no número complexo z = $|z|\cos\theta + i|z|\operatorname{sen}\theta$ e tem a seguinte representação matricial

$$[T] = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} .$$

Tomando-se a unidade real, isto é, o vetor (1,0) essa matriz é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e para a unidade imaginária (0,1) tem-se $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

isto é, para o número complexo z = 1 = 1 + 0.i, tem-se, da álgebra matricial que

$$1.1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

enquanto que para o imaginário puro i = 0 + 1.i tem-se

$i.i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ = -1, obtido por uma álgebra matricial, isto é, de uma forma diferente daquela obtida acima pelo caminho da álgebra definida por pares ordenados. Mostram-se assim, utilizando as indicações de estilos preconizadas por Granger (1974), possibilidades de interligar vários tipos de representações ou formas de tratamento do ente matemático, o número complexo, em estruturas diferentes, mas que todas podem ter um elemento integrador que é a representação geométrica envolvida, haja vista que essas matrizes podem ser interpretadas como rotações em torno da origem do sistema cartesiano, como reflexões em torno de eixos coordenados ou ainda como projeções ortogonais sobre uma reta passando pela origem. Nota-se, ainda, que cada uma das estruturas tem seu sistema bem definido e é isso que se caracteriza como um estilo, segundo Granger (1974), ou seja, é uma forma específica de linguagem ou de representação de um conceito. Minha proposta é a de que uma forma de linguagem especifica, a geométrica, seja interlocutora das diversas sub-áreas do conhecimento matemático.

Granger (1974) já dizia que a intuição espacial unia os antigos, a partir da citação de Descartes de que lhes causava “escrúpulo em usar termos da Aritmética na Geometria” e que esta se encontrava conjurada. Talvez isso levou à criação do Estilo Analítico, no qual a intuição algébrica fornece subsídios para a fundamentação da Geometria e, contrariamente ao pregado por Hilbert em sua primeira obra – Geometria e Imaginação, na qual Hilbert tem por objetivo apresentar a Geometria sob um aspecto intuitivo e visual, muito embora em sua segunda obra, de acordo com Hadamard “elimina qualquer apelo à intuição” ao dar um tratamento rigoroso para essa área em seu “Fundamentos de Geometria”.

Procurei dar uma visão sobre aspectos de intuição especialmente em Matemática e particularmente em Geometria nesse item, em conexão com o que foi visto anteriormente e o que irá aparecer mais à frente uma vez que o tripé: imaginação, intuição e visualização está interligado em todo o trabalho.

Bishop (1989) salientou a importância da interligação entre os conceitos de visualização, imaginação, habilidade espacial, diagramas e intuição, os quais são úteis para a Educação Matemática e que precisam ainda ser melhor compreendidos. A partir disso, no próximo item é apresentada uma maneira em que o estilo geométrico pode interferir no tratamento da álgebra matricial de forma visual e até mesmo intuitiva, esboçando concepções de vários autores quanto ao uso da visualização na composição do tripé que estou delineando nesta tese.

5.2.3 Visualização

A Educação Matemática tem mostrado interesse nas questões relativas ao visual e à representação por figuras de idéias e conceitos matemáticos por mais de uma centena de anos, segundo Bishop (1989), recorrendo ao auxilio visual, com base no conhecimento do que pode isso representar para a construção de conceitos matemáticos complexos que, juntamente com manipulações e personificações concretas dos objetos, são elementos poderosos para o ensino de Geometria e devem fazer parte dos currículos da formação dos professores.

O *National Council of Supervisors of Mathematics* (NCSM) indicou, em 1990, competências fundamentais necessárias aos alunos para desempenharem com eficiência e eficácia suas funções no próximo século em Geometria, dentre as quais *visualizar* como os objetos se movem no mundo, indicando um aspecto fundamental, que é a necessidade de se incluir, nos currículos da Licenciatura, “Geometria de movimentos”, isto é, uso de translações, rotações e simetrias. Este aspecto, quando é estudado, é feito em Geometria Analítica pelo caminho das matrizes ou até mesmo nas disciplinas de Cálculo, sem que haja conexão explícita com os aspectos geométricos visuais.

Costa (2000) afirmou que a partir dos resultados negativos oriundos do movimento da Matemática Moderna surgiu nos Estados Unidos alguns movimentos buscando um retorno ao ensino tradicional e outros buscando métodos de ensino e de conteúdos alternativos. Essa autora discute o papel que a visualização desempenha para uma educação em Geometria e tece o seguinte comentário:

> [...] parece que as tendências contemporâneas sobre como desenvolver a compreensão do espaço e geometria sofrem uma grande influência, quer das idéias de Freudenthal sobre a educação em geometria, das Normas do NCTM, quer ainda das propostas de diferentes ambientes de aprendizagem que servem como pontos de partidas geométricos [...]. Nos conteúdos geométricos e no desenvolvimento de idéias, parece adotar-se uma visão ampla do que a visualização e a geometria poderiam ser e, esses conteúdos são desenvolvidos numa grande variedade de contextos. (COSTA, 2000, p. 168)

Os efeitos da visualização no currículo escolar são analisados por Bishop (1989), ao fornecer um panorama sobre os aspectos positivos desses efeitos ao ser nele inserida a visualização. O autor afirma a importância da visualização para a formação de conceitos em Matemática e não apenas para a transmissão de conhecimentos matemáticos. Entretanto, não descarta a realidade da existência de alunos que têm a visualização desenvolvida e dos que não a têm. Para ele, o conceito de visualização aparece na literatura com as idéias de imaginação, habilidade espacial, diagramas e intuição, com ideias úteis para a Educação Matemática e que, muito embora a visualização seja considerada um conceito complexo, é necessário ser compreendido, havendo atualmente muito interesse pela pesquisa relativa ao tema.

Para Presmeg (1986, p. 297) "uma imagem visual é definida como um esquema mental representando informações reais ou espaciais", enquanto que para Mariotti (1995, apud Costa, 2000) visualização consiste em trazer à mente imagens de coisas visíveis. Para Senechal (apud Costa, 2000, p. 262) "visualização significa em linguagem popular 'percepção espacial' e assim é uma reconstrução mental da representação de objetos a 3 dimensões".

Arcavi (1999) considera que

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver idéias não conhecidas e avançar na compreensão.(p. 217).

Diz ainda o autor que, em muitas situações, visualização serve para ajustar intuições "erradas" e conciliá-las com a correção escura e "gelada" das argumentações simbólicas, assim como desempenhar um papel fora do contexto "simbólico".

Segundo Arcavi (1999, p. 234), parece haver concordância de que a visualização é um ponto central na aprendizagem e no fazer matemático. Esta centralidade omite o fato de que visualização não é mais relacionada apenas como meramente ilustrativa, mas está sendo reconhecida como uma componente-chave para o raciocínio (profundamente comprometido com o conceito e não apenas como percepção), para a resolução de problemas e para demonstrações. Ainda mais, existem muitos assuntos a respeito de visualização em Educação Matemática que exigem cuidadosa atenção.

O tema *visualização* é tratado por Freudenthal (1973), Eisemberg e Dreyfus (1991), Bishop (1989), Presmeg (1986), Kaput (1989), Hershkowitz (1989), Zimmermann e Cunningham (1991), Hilbert e Cohn-Vossen (1932), Hilbert (2003), Costa (2000), Fischbein (1987), Arcavi (1999) dentre outros, sob diversos enfoques e em vários níveis de escolaridade e em conteúdos diversos.

Em decorrência das orientações de Freudenthal ao casal van Hiele, esse desenvolve uma teoria que passou a ser conhecida como Teoria de van Hiele, que categoriza o desenvolvimento do raciocínio em Geometria em níveis, não caracterizados por grau de maturidade biológica e sim por uma maturidade intelectual que independe da idade do individuo. Dessa forma, uma pessoa de mais idade pode se encontrar num nível mais elementar do que uma criança, a qual pode se encontrar num nível mais avançado. O nível mais elementar dessa teoria é denominado nível de reconhecimento e tem por característica principal a comparação, a identificação e a nomenclatura, por exemplo, de figuras geométricas, pela aparência global dos objetos. Embora alguns autores utilizem apenas quatro níveis de van Hiele em seus estudos, segundo Nasser (1992, p. 47), “um modelo reduzido, com somente três níveis foi proposto por van Hiele (1986): um nível de visualização (correspondendo ao primeiro nível), um nível descritivo (correspondendo ao segundo nível original) e um nível teórico, o qual inclui os outros três níveis.” Esse fato parece fortalecer a importância da conotação visual para o desenvolvimento do raciocínio uma vez que, segundo essa teoria, um individuo não pode avançar para um nível subseqüente sem ter atingido os níveis anteriores.

Estudos de Presmeg (1986) mostram relação entre visualizadores, não visualizadores e desempenho intelectual entre estudantes do final do Ensino Médio nos Estados Unidos. Na pesquisa, foram investigados alunos cujo talento era considerado elevado por seus professores e foram submetidos a processos de resolução de problemas utilizando métodos visuais. A autora define:

> Um método visual é aquele que envolve imagem visual, com ou sem um diagrama, como uma parte essencial do método de solução, mesmo se o método de raciocínio ou algébrico são ambos empregados. Um método não-visual de solução é aquele que envolve imagem não-visual como parte essencial do método de solução. (PRESMEG, 1986, p. 298)

Os alunos foram classificados em **visualizadores** e **não visualizadores**. Os primeiros são aqueles que possuem imagem visual, isto é, “um esquema mental representando informações visuais ou espaciais” e tentam utilizar métodos visuais para a resolução de problemas que podem ser resolvidos tanto por métodos visuais quanto por não visuais; Os segundos, são aqueles que não possuem tais imagens e procuram não utilizar os métodos visuais.

Os resultados apontaram que alunos não-visualizadores obtiveram melhor desempenho, sendo considerado que tal fato pode ter sido ocasionado por terem iniciado o processo utilizando imagens visuais, mas desistindo, e isso ocorre em função de que os currículos privilegiam não visualizadores. Apontam também que professores não estimulam o uso de métodos visuais e, quando estes são utilizados, não são validados. Apontou, ainda, que os estudantes acreditam que seu sucesso ocorreu em função de estarem habituados a utilizar memorização de fórmulas e regras. Por outro lado, a pesquisa detectou que alunos visualizadores tendem a ser mais efetivos em sua aprendizagem e, ainda mais, os que estavam aptos a combinar o uso de imagens concretas com o uso de métodos não-visuais abstratos evitaram cair em certas armadilhas em relação ao uso de imagens concretas.

Presmeg (1986) afirma que levantamentos de suas pesquisas estabelecem uma consonância com as de Krutetskii no que diz respeito a uma correlação entre o tipo analítico e o sucesso de aprendizagem em Geometria, pois os tipos apresentam modos de pensamento que são independentes da disciplina:

> [...] é impossível acreditar que o tipo analítico é manifestado somente em Álgebra e o geométrico apenas em Geometria. Um trajeto analítico da mente pode ser mostrado em Geometria assim como um geométrico em Álgebra. (KRUTETSKII, 1976, apud PRESMEG, 1986, p. 306).

Análise de visualização espacial no currículo de Matemática é feita por Eisemberg e Dreyfus (1989, p. 1) que apontam a Geometria como modelo visual, sendo que “muitos conceitos e processos na matemática escolar podem ser conectados por interpretações visuais, isto é, modelos visuais podem ser construídos que reflitam (em grande parte) a estrutura matemática subjacente”. Exemplificam que equações a duas variáveis podem ser percebidas como linhas retas, frações como parte de um retângulo ou de uma circunferência, zeros de funções polinomiais contínuas podem ser vistas como pontos de intersecção do gráfico da função com o eixo dos x; integrais de funções positivas como áreas limitadas pelo gráfico da função, o eixo dos x e linhas verticais pelos pontos correspondentes aos limites de integração. Esses autores questionam quais conceitos matemáticos poderiam ser introduzidos de alguma forma visual, uma vez que afirmam ter a maioria, senão todos os conceitos matemáticos, alguma forma de representação simbólica muito mais do que representações visuais, portanto, não poderiam ser introduzidos por formas visuais?

Ainda para Eisemberg e Dreyfus (1991), os benefícios de visualização na elaboração de conceitos são evidentes, muito embora estudantes relutem em utilizá-la em detrimento do uso de processos algorítmicos, pois pensamento visual exige mais esforço do que algorítmicos. Dizem os autores que esforços curriculares estão sendo feitos na tentativa de inverter essa tendência. “Mas é só recentemente que um esforço concentrado parece estar em andamento para trazer ao currículo escolar visualização”. (p. 34)

Ao discorrer sobre visualização como um importante fator de imediatez e de globalidade para a formação do conhecimento, Fischbein (1987, p. 104) destaca a ênfase dada por Shepard à “contribuição fundamental de imagens visuais as quais podem estar relacionadas com o conhecimento intuitivo - as raízes não convencionais, pessoais, subjetivas, mesmo emocionais de imagens mentais”. Para Fischbein, o termo imediato tem uma nova dimensão, enquanto que para o termo imediatez o significado é não somente de que a realidade é um dado diretamente perceptível, mas também que o indivíduo está diretamente e pessoalmente, de alguma forma, emocionalmente envolvido em determinada realidade.

Fischbein (1987. p. 104) afirma que para ele

> Intuição implica em uma espécie de empatia, uma espécie de cognição, por meio de uma identificação direta com um fenômeno interno, enquanto que uma representação visual com seus ricos e concretos pormenores media um envolvimento pessoal, geralmente, muito melhor do que um conceito ou uma descrição formal.

Colocando-me ao lado dos autores favoráveis a essa utilização de aspectos visuais, exemplifico essa possibilidade ao tratar de um objeto a quatro dimensões, como o hipercubo. Ao se considerar um quadrado num plano, os dois lados que concorrem em um mesmo vértice constituem ângulo reto nesse vértice e na representação isso aparece em verdadeira grandeza. Mas, se o objeto for um cubo no espaço, sua representação em verdadeira grandeza só ocorre neste espaço, mas pode ter uma representação no plano, sendo que, em cada vértice, devem concorrer três arestas que, duas a duas, formam ângulos retos. Entretanto, apenas um dos três ângulos retos aparece em verdadeira grandeza.

Um ponto, um segmento e um quadrado, por exemplo, podem ser representados em verdadeira grandeza no plano como segue.

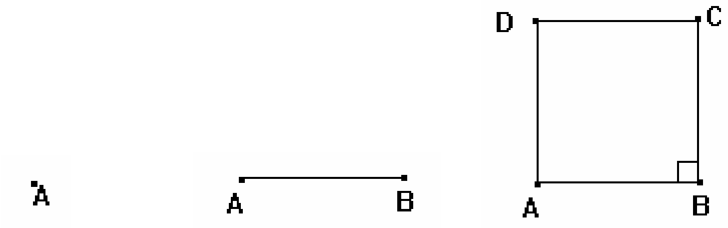


Figura 50 – Ponto, segmento de reta e quadrado.

Se for considerada a reta como espaço ambiente, o quadrado ABCD pode ser representado nela, considerando projeção ortogonal da seguinte forma:

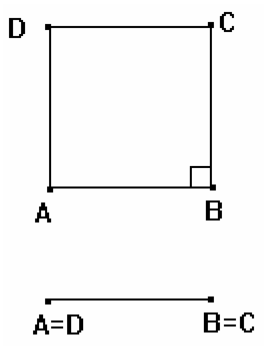


Figura 51 – Projeção do quadrado.

pois as projetantes AD e BC se reduzem aos pontos A e B, respectivamente. Há de se considerar nesse caso, que a perpendicular AD ao segmento AB se reduz a um ponto. Assim, tendo por universo a reta, o segmento AB é uma representação de um quadrado bidimensional.

Considere um cubo no espaço ambiente tridimensional, representado aqui da seguinte forma:

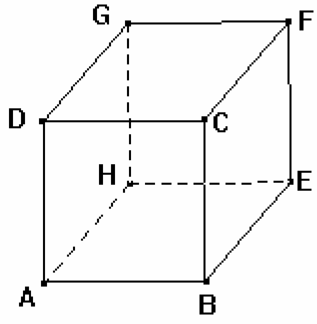


Figura 52 – Representação de um cubo.

Uma maneira de visualizá-lo no espaço ambiente bidimensional (o plano) pode ser feita considerando o observador colocado frontalmente, isto é, colocado ortogonalmente à face ABCD. Nesse caso, uma representação do cubo nesse espaço, em analogia ao feito anteriormente, pode ser

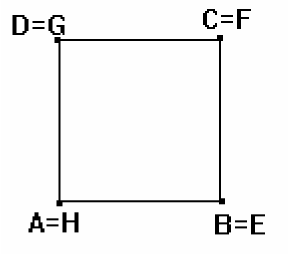


Figura 53 – Projeção de um cubo no plano.

Os segmentos AH, BE, CF e DG são ortogonais à face ABCD e por isso se reduzem, na representação, aos pontos A, B, C e D, respectivamente.

A fim de que possa ser feita uma representação mais conveniente do cubo é que se usa a primeira imagem, mesmo que não corresponda à real situação no plano, ou seja, nem todos os segmentos perpendiculares aparecem de forma natural. Os segmentos AD e CB são perpendiculares ao segmento AB, como antes, enquanto os segmentos CF e DG, são perpendiculares ao segmento DC. Entretanto, isso não aparece em verdadeira grandeza e visualmente, tais segmentos não são perpendiculares. Um indivíduo menos avisado colocaria o vértice do ângulo reto de seu esquadro no vértice C ou D e diria que não se “enquadra”, com toda propriedade. É necessário que ele faça uso da imaginação, em analogia ao anteriormente feito, para formar uma idéia abstrata desse significado. Entretanto, sua base teórica o faz perceber a existência de três direções perpendiculares no espaço que caracterizam o cubo, a saber, as direções dadas por BC, CD e CF.

A partir dessas duas representações, é possível partir para a abstração do conceito de um cubo num espaço com quatro dimensões, cuja representação no espaço com três dimensões apresenta, concorrendo em cada vértice, quatro arestas que, combinadas duas a duas, formam ângulos retos, dos quais três são visualizados em verdadeira grandeza e os constituídos com a quarta aresta, não. Assim, se pode constituir uma imagem não visual (abstrata) a partir de um conceito obtido de forma visual (o ângulo reto). Torna-se assim necessário que se constitua uma imagem visual concreta de um conceito para poder abstrai-lo, um apelo à intuição e à imaginação – é o tripé: imaginação, intuição e visualização em ação. Vê-se, pela imagem da figura 54, que três direções se comportam em verdadeira grandeza num modelo concreto e a quarta não. De forma similar, construído um tal objeto, como por exemplo, em arame, o vértice que corresponde ao ângulo reto do esquadro se "enquadraria" em três faces do hipercubo[20] em cada vértice. Entretanto, na quarta face isso não ocorreria.

Hersh (1997) questiona a existência do cubo em um espaço com quatro dimensões e sua construção, uma vez que mesmo pela indução, a partir da terceira dimensão, pode-se peguntar sobre o fazer sentido de tal construção, justificando:

> O método da Matemática é "conjectura e prova". Você chega a uma rede de conceitos e fatos, propriedades e ligações, chamada de "teoria". (Por exemplo, geometria sólida clássica, incluindo o 3-cubo.). Esta teoria existente atualmente é o resultado de uma evolução histórica. É um trabalho cooperativo e competitivo de gerações de matemáticos, associados pela amizade e rivalidade, por mútuas críticas e correções, como líderes e seguidores, mentores e protegidos. (Ibid., p. 5)

Figura 54 – Representação do hipercubo.

Dreyfus e Hadas (1991) citam investigação de Parzysz quanto a regras utilizadas pelos alunos na transição entre duas e três dimensões, os quais tendem a confundir figuras tridimensionais com bidimensionais em uma mesma representação. Afirmam ainda que os estudantes, via de regra, apresentam uma tendência em fundamentar suas argumentações em aparências. "Por exemplo, um ângulo que no sólido tridimensional é reto pode aparecer agudo (ou obtuso) e, ao contrário, um ângulo agudo pode aparecer na projeção como sendo um ângulo reto." (p. 87).

Fischbein (1987), ao associar intuições a modelos, caracteriza *modelos intuitivos* como sendo aqueles que são capazes de substituir ou traduzir um conceito em termos sensoriais comportamentais. Para ele, "Se uma noção não é representável intuitivamente, tende-se a produzir um modelo que possa substituir o conceito no processo de raciocínio" (p. 203). Para o autor, se o original e o modelo

[20] Disponível em< http://images.google.com.br/images> . Acesso em 05 out 2008.

pertencerem a sistemas diferentes, existe uma analogia, que é o que me parece ocorrer ao abordar os modelos de cubo a três dimensões e a quatro dimensões, uma vez que podem ser estabelecidas correspondências entre as duas representações de modo a passar de um a outro intuitivamente, de forma abstrata. Segundo Fischbein (1987), “O modelo deve apresentar um elevado grau de correspondência natural, consistente e estrutural com o original. Também deve corresponder às características do processo de informações humanas (representação espacial, visual, manipulabilidade comportamental, finitude, etc.)” (p. 203).

O auxilio visual geométrico, em meu entendimento, pode ser o elemento que pode percorrer a Geometria como componente curricular de forma interdisciplinar no sentido defendido por Gusdorg (citado por Pombo, 1993) de que “inter” não significa uma pluralidade ou uma justaposição, muito pelo contrário, faz uma chamada a um espaço comum, um elemento de coesão entre diferentes saberes. A interdisciplinaridade supõe a predisposição de especialistas se abrirem para o novo, de irem além do seu domínio de conhecimento específico, permitindo uma abertura de pensamento e de curiosidade.

Entendo que uma componente curricular geométrica deve ser contemplada nos currículos da licenciatura dessa forma, como uma possibilidade de desenvolver um currículo para a formação do professor de Matemática de forma interdisciplinar, tendo a Geometria como elemento de ligação entre as diversas disciplinas, como no exemplo a seguir.

Considere um operador T que transforma o vetor z num vetor z_1 realizando uma rotação de um ângulo θ, como nas figuras abaixo, obtendo-se a matriz do operador dada por

$$[T] = [T(1,0) \quad T(0,1)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

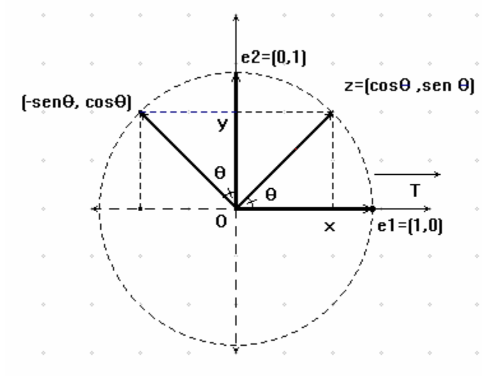


Figura 55 – Rotação no plano.

ou seja, quando o operador é aplicado no vetor (x,y) tem-se:

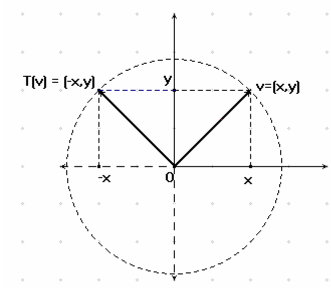
$$T(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - ysen\theta \\ xsen\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

em que θ é a variação do ângulo que o vetor sofre pela transformação.

Podem-se questionar, então, como visualizar a representação geométrica de matrizes como as seguintes?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ou } E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que, sendo A a matriz de um operador em $\mathbf{R}^2$, tem-se que esse operador atuando em um vetor (x,y) o transforma em $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$, o que pode ser visualizado por:



.

Figura 56 – Reflexão no plano

Portanto, a matriz A representa um operador linear que produz uma reflexão no eixo vertical. De maneira similar interpreta-se a matriz B como uma reflexão em torno do eixo horizontal; a C como uma reflexão na bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes; a D como uma projeção sobre o eixo horizontal e a E, como uma projeção sobre o eixo vertical.

A seguir é apresentado um exemplo de como a visualização pode contribuir para formar conceitos não euclidianos. Seja f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), com $(u,v) \in A = [0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \subset \mathbf{R}^2$, uma função definida de $A \subset \mathbf{R}$ em $\mathbf{R}^3$ por

$$f(u,v) = (a \cos u \cos v,\ a \operatorname{sen} u \cos v,\ a \operatorname{sen} v)$$

em que *a* é uma constante real positiva. O lugar geométrico é uma esfera de centro na origem (0,0,0) e raio *a*.

Por outro lado, se $t \in I \subset \mathbf{R}$, e u = u(t) e v = v(t), em que I é um intervalo, então

$$C(t) = f(u(t),v(t)) = (x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)),z(u(t),v(t)))$$

é uma curva da superfície esférica.

- Para u = 0, fixo, tem-se uma curva na superfície dada por:

$$C_1(v) = f(0,v) = (a \cos 0 \cos v,\ a \operatorname{sen} 0 \cos v,\ a \operatorname{sen} v) = (a \cos v,\ 0,\ a \operatorname{sen} v)$$

a qual está contida no plano y = 0 e pode ser visualizada como uma circunferência de centro na origem e raio igual a.

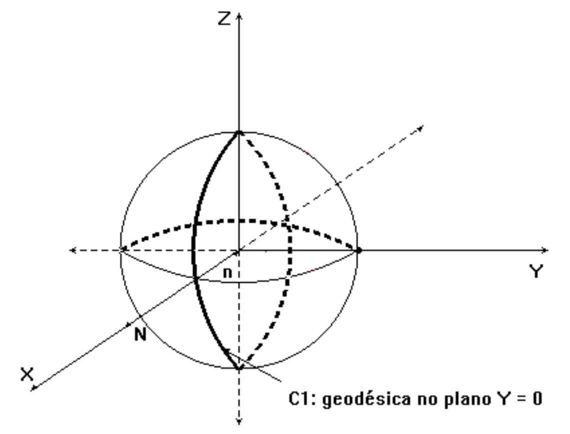


Figura 57 – Geodésica da esfera no plano Y=0.

- Para v = 0, fixo, tem-se uma curva na superfície dada por:

$$C_2(u) = f(u,0) = (a \cos u \cos 0,\ a \operatorname{sen} u \cos 0,\ a \operatorname{sen} 0) = (a \cos u,\ a \operatorname{sen} u,\ 0)$$

a qual está contida no plano z = 0 e pode ser visualizada como uma circunferência de centro na origem e raio igual a.

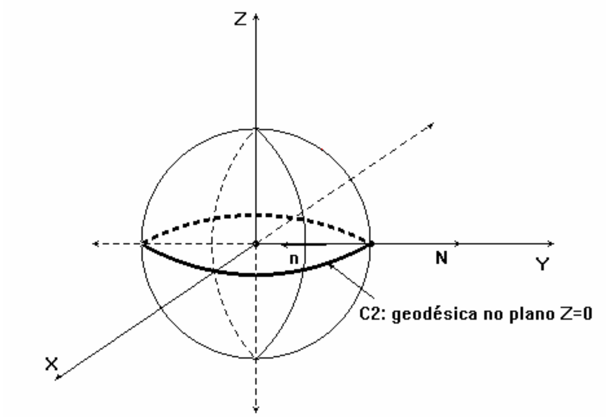


Figura 58 – Geodésica da esfera no plano Z=0.

- Para u = $\frac{\pi}{2}$, fixo, tem-se uma curva na superfície dada por:

$$C_3(v) = f(\frac{\pi}{2},v) = (a\cos\frac{\pi}{2}\cos v,\ a\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\cos v,\ a\,\mathrm{sen}v) = (0,\ a\cos v,\ a\,\mathrm{sen}v)$$

a qual está contida no plano x = 0 e pode ser visualizada como uma circunferência de centro na origem e raio igual a *a*.

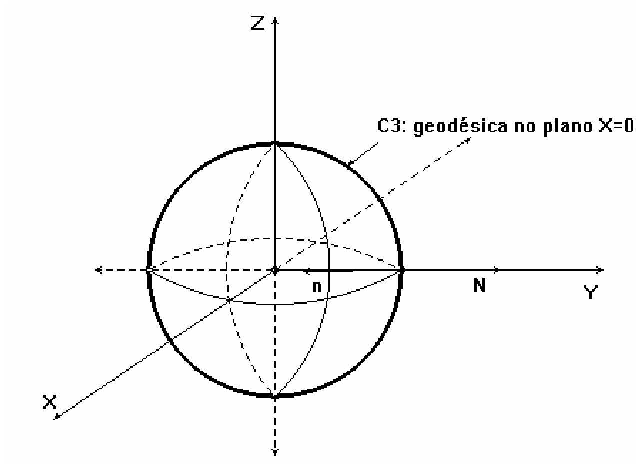


Figura 59 – Geodésica da esfera no plano X=0.

- Reunindo as três geodésicas num mesmo sistema coordenado tem-se:

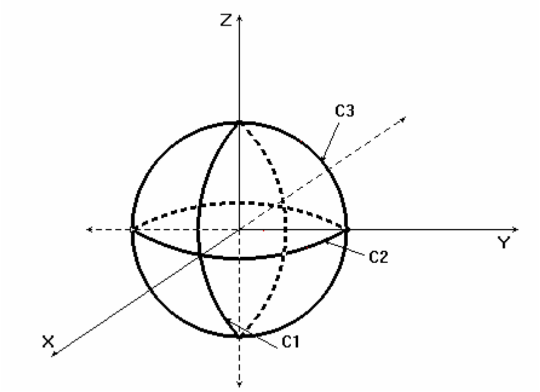


Figura 60 – Geodésica da esfera nos três planos coordenados.

- Pode-se observar, visualmente, que, duas a duas, essas geodésicas se interseccionam, ou seja, $C_1 \cap C_2 = \{A\}$; $C_1 \cap C_3 = \{B\}$ e $C_2 \cap C_3 = \{C\}$. Os três pontos determinam na superfície esférica o triângulo esférico ABC, conforme representado na figura 61.

A Geometria Analítica define o ângulo entre duas curvas em um ponto comum a ambas como sendo o ângulo formado entre os vetores tangentes a essas curvas nesse ponto. Assim, o ângulo entre dois vetores $w_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $w_2 = (a_2,b_2,c_2)$ é dado por

$$<v_1,v_2> = |v_1||v_2| \cos\theta,$$

em que θ é o ângulo entre os vetores v_1 e v_2 e “< , >” denota o produto interno entre dois vetores. Passagem essa que minha experiência profissional mostra que, de um modo geral, surge sem nenhuma contextualização para os estudantes, o que provavelmente explique sua não apresentação em livros dessa disciplina.

Os aspectos de visualização, em geral, ou são abandonados ou são poucos explorados até mesmo porque as coordenadas dos vetores surgem de forma arbitrária para poder ser realizado o algoritmo.

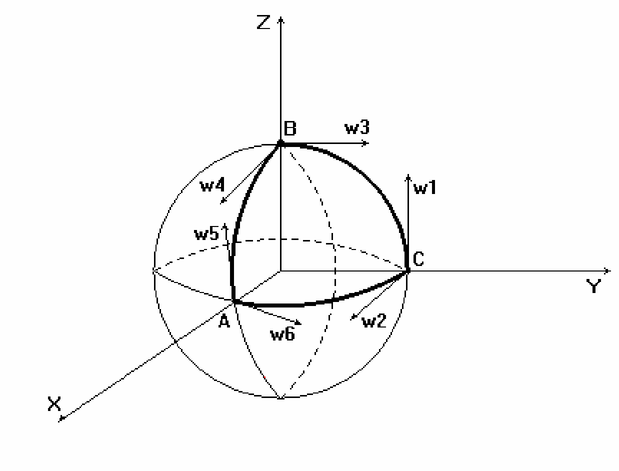


Figura 61 – Triângulo geodésico.

O Cálculo Diferencial e Integral, por outro lado, utiliza o operador diferencial para obter derivadas de funções arbitrariamente apresentadas aos estudantes, sem nem mesmo, em muitos casos, ser a derivada interpretada como um vetor tangente a uma curva, o que possibilitaria intuitivamente verificar se uma função dada por seu gráfico pode ou não admitir derivadas em todos os seus pontos.

As duas questões precedentes podem ser resolvidas pela Geometria Diferencial, no momento em que se associam as derivadas ao estudo de superfícies, ou seja, as superfícies estudadas admitem plano tangente bem definido em todos os seus pontos, o que significa dizer que as derivadas parciais existem e correspondem a dois vetores linearmente independentes, os quais são vetores tangentes a curvas coordenadas ou curvas de parâmetros da superfície, que é denominada superfície regular.

Retomo os vetores tangentes a cada par de geodésicas da esfera acima, obtendo o ângulo entre seus vetores tangentes nos pontos de intersecção.

- $C_1(v) = f(0, v) = (a\cos 0 \cos v, a \operatorname{sen} 0 \cos v, a \operatorname{sen} v) = (a\cos v, 0, a \operatorname{sen} v)$

  $C_2(u) = f(u,0) = (a\cos u \cos 0, a \operatorname{sen} u \cos 0, a \operatorname{sen} 0) = (a\cos u, a \operatorname{sen} u, 0)$

Fazendo-se v = 0 na equação de $C_1(0) = C_2(u)$ e assim,

$$(a\cos v, o, a \operatorname{sen} v) = (a\cos u, a \operatorname{sen} u, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos v = \cos u \text{ e } 0 = a \operatorname{sen} u \text{ e } a \operatorname{sen} v = 0 \Rightarrow u = v = 0 .$$

Dessa forma tem-se o ponto A = f(0,0) = ($a\cos 0 \cos 0$, $a \operatorname{sen} 0 \cos 0$, $a \operatorname{sen} 0$), A = (a,0,0).

Derivando-se $C_1(v)$ em relaçao a v, e $C_2(u)$ em relação a u, vem que:

$C'_1(v) = f'(0, v) = (-a\cos 0 \operatorname{sen} v, -a\operatorname{sen} 0 \operatorname{sen} v, a\cos v) = (-a \operatorname{sen} v, 0, a\cos v)$.

$C'_2(u) = f'(u,0) = (-a\operatorname{sen} u \cos 0, a\cos u \cos 0, a\operatorname{sen} 0) = (-a\operatorname{sen} u, a\cos u, 0)$.

Segue que $< C'_1(v), C'_2(u)> = a^2 \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u = |C'_1(v)|.|C'_2(u)|\cos\theta$.

Logo, como $u = v = 0$, tem-se

$0 = |C'_1(v)|.|C'_2(u)|.\cos\theta$ e como $|C'_1(v)| \neq 0 \neq |C'_2(u)|$.

Segue que $\cos\theta = 0$ donde, finalmente, vem que $\theta = 90º$, isto é, C_1 é ortogonal a C_2.

De maneira análoga mostra-se que C_1 é ortogonal a C_3 e também que C_2 é ortogonal a C_3. Portanto, os três ângulos do triângulo ABC são retos, ou seja, ele é um triângulo tri-retângulo, logo a soma de seus ângulos internos é igual a 180º.

Essa forma de abordar a disciplina de Geometria Analítica, utilizando métodos de Álgebra Linear e explorando visualização geométrica na mesma medida em que se exploram aspectos algébricos, possibilita, já no início da Licenciatura em Matemática, momento em que usualmente é alocada a disciplina nos projetos curriculares dos cursos, a introdução aos futuros professores de conhecimentos de Geometrias Não Euclidianas e do fato de que não existem apenas triângulos euclidianos com soma dos ângulos internos igual a 180º. Evidentemente, aspectos mais aprofundados desses conhecimentos poderão vir a ser desenvolvidos ao longo do currículo, possibilitando aos alunos, durante sua formação, investigar outras questões tais como: existem triângulos cuja soma dos ângulos internos é menor do que 180º? Ou até mesmo, quais são as Geometrias em que essa soma é maior do que 180º? Qual a relação entre esse tipo de comportamento de triângulos e a curvatura da superfície? Cabe salientar ainda que o ângulo entre curvas da superfície pode ser feito não apenas com essas curvas aqui tratadas, ou seja, as geodésicas da superfície.

Acredito que questões como essas promoveriam nos estudantes uma busca pelo aprofundamento de cultura geométrica durante sua formação, ao contrário do que se percebe atualmente, numa simples reprodução de algoritmos.

Visualização pode ser também utilizada em currículos da Licenciatura por outro viés, além da Geometria Analítica, ou seja, pelo viés da Geometria Sintética, segundo Klein (1927)

> [...] Em seu primitivo significado, as palavras análise e síntese, se referem a dois diferentes métodos de exposição. A síntese começa por examinar casos particulares, dos quais passa pouco a pouco a conceitos gerais. A análise, pelo contrário, começa pelo mais geral, procedendo depois para a decomposição. Deste ponto de vista é o que tem sido estabelecido com as denominações de Analítica e de Sintética.
> Na Geometria escolar costuma-se falar de uma Análise das construções geométricas, cujo protótipo é o seguinte: consideremos o triângulo conhecido e o decompomos em cada uma de suas partes, etc.
> Na Matemática superior, essas palavras têm outro significado muito diferente, pois se chama Geometria Sintética, aquela na qual as figuras se estudam por si mesmas, sem intervenção de fórmulas, enquanto que na analítica estas se aplicam constantemente mediante o uso dos sistemas de coordenadas. (KLEIN, 1927, v. 2, p. 73)

Para o autor, a diferença entre as duas formas de encarar a Geometria é meramente quantitativa, uma vez que a Geometria Analítica não pode prescindir da visualização geométrica e a Geometria Sintética, de utilizar algum tipo de fórmulas que facilite a compreensão do conceito em apreço. Assim, a pureza de um método ou de outro não é algo que possa ser compreendido como bom para a aprendizagem matemática.

A fim de ilustrar o que acredito ser um método misto de utilizar os dois ramos da Geometria, apresento uma visualização de um lugar geométrico que é interpretado no senso comum, intuitivamente, como uma circunferência ou bola. Para esse fim, é necessário remeter à influência do desenvolvimento da teoria dos conjuntos na Matemática, particularmente ao conceito euclidiano de distância entre dois pontos.

O próprio conceito de ponto, tendo outras conotações, pode ser pensado como um elemento de um conjunto abstrato qualquer. Assim, faz sentido calcular distâncias entre dois pontos ou de um ponto a um conjunto ou entre dois conjuntos, desde que seja definida uma função distância nesse conjunto e isso ocorre quando ele é dotado de uma estrutura matemática, sendo denominado de Espaço Métrico.

Assim, sendo M um conjunto não vazio, uma função $d : M \times M \to \mathbf{R}$, que associa a cada par de elementos (x,y) um número real não negativo satisfazendo as seguintes condições, para todo par $(x,y) \in M \times M$

(i) $d(x,x) = 0$;

(ii) Se $x \neq y$, então $d(x,y) > 0$;

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$;

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

é chamada de *métrica*, o par ordenado (M,d) é denominado de *espaço métrico* e o número real não negativo, d(x,y) para cada par (x,y) é denominado a distância de x a y. Um espaço métrico é, pois, um conjunto não vazio munido de uma métrica.

A métrica usual nos espaços euclidianos $\mathbf{R}^n$ é definida por

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

em que $x = (x_1,x_2,...,x_n)$ e $y = (y_1,y_2,...y_n)$ são pontos desses espaços $\mathbf{R}^n$. Considerando-se um ponto fixo $y = (y_{10},y_{20},...y_{n0})$, uma distância fixa r e um ponto móvel $x = (x_1,x_2,...,x_n)$, tem-se a equação de um lugar geométrico descrito por esse ponto dada por:

$$\sqrt{(x_1 - y_{10})^2 + (x_2 - y_{20})^2 + ... + (x_n - y_{n0})^2} = r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - y_{10})^2 + (x_2 - y_{20})^2 + ... + (x_n - y_{n0})^2 = r^2.$$

No caso em que n = 2, a equação representa uma circunferência no espaço bidimensional, cujo centro é dado por C = (a,b) e um ponto descrevente do lugar geométrico é X= (x,y). A equação da circunferência no plano é dada por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

a qual pode ser visualizada por:

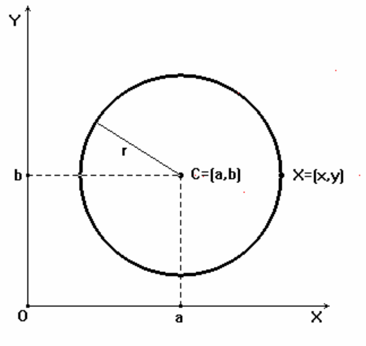


Figura 62 – Circunferência no plano euclidiano.

No caso em que n = 3, tem-se uma esfera no espaço tridimensional, cujo centro é C = (a,b,c) e cujo ponto descrevente do lugar geomético é X = (x,y,z). A equação da esfera no espaço tridimensional é dada por:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

a qual pode ser visualizada numa representação no plano por:

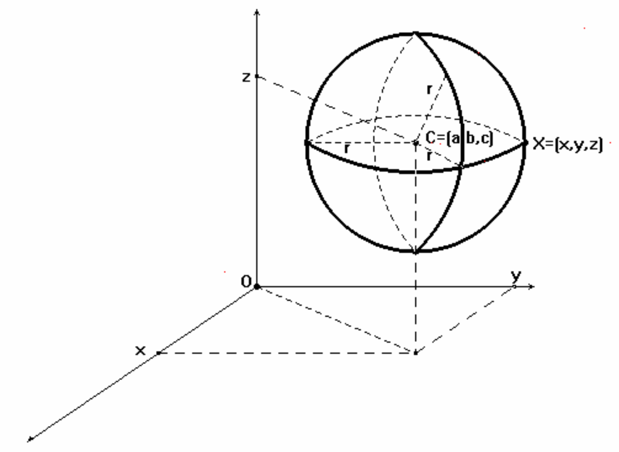


Figura 63 – Esfera no espaço euclidiano tridimensional.

Uma segunda métrica nos espaços euclidianos $\mathbf{R}^n$, denominada métrica dos catetos é definida por

$$d(x,y) = |x_1 – y_1| + |x_2 – y_2| + ... + |x_n – y_n|$$

em que $x = (x_1,x_2,...,x_n)$ e $y = (y_1,y_2,...y_n)$ são pontos desses espaços $\mathbf{R}^n$. Dados dois pontos quaisquer do plano, X e Y as duas métricas podem ser visualizadas como segue:

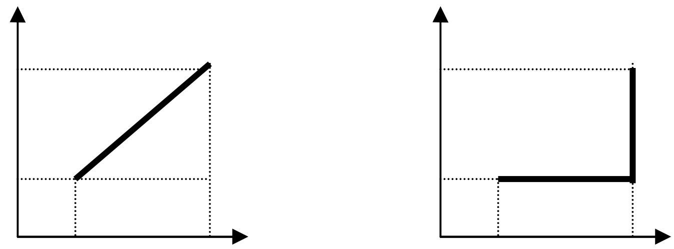


Figura 64 – Métricas.

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \qquad d(x,y) = |x_1 – y_1| + |x_2 – y_2|$$

Procuro a seguir obter a equação bem como a visualização do lugar geométrico denominado circunferência, no caso em que n = 2. Novamente considero o centro dado por C = (a,b), o raio r > o e X= (x,y) um ponto que descreva o lugar geométrico. Da mesma forma, a equação da circunferência no plano é dada pela equação:

$$d(X,C) = r \Leftrightarrow |x – a| + |y – b|= r.$$

Ainda existe muita confusão entre os conceitos de circunferência e de círculo, fato que não deveria mais ocorrer a partir da expressão algébrica de cada um desses lugares geométricos, objetos da Geometria Analítica, pois enquanto que o primeiro é dado por uma equação, o segundo é dado por uma inequação; enquanto o primeiro é visualizado como uma curva, o segundo é visualizado como uma região. Talvez em virtude dessa ambigüidade de notação que ainda perdura, modernamente se utiliza o conceito de bola para o círculo, ou seja, como a região do plano cuja fronteira é a circunferência. Essa ambigüidade parece produzir um obstáculo epistemológico quanto ao conceito de esfera, a qual, para muitos estudantes é um objeto maciço e não uma superfície. A topologia trata de forma mais precisa muitos destes conceitos.

Seja p um ponto de um espaço $\mathbf{R}^n$ no qual está definida uma função distância **d** e $\varepsilon > 0$ um número real. A *bola de centro p e raio $\varepsilon > 0$*, denotada por $B(p, \varepsilon)$ é um subconjunto de $\mathbf{R}^n$ dado por

$$B(p, \varepsilon) = \{X \in \mathbf{R}^n : d(x,p) < \varepsilon\}.$$

Por exemplo, na reta usual a função distância usual é $d(x,p) = |x - p|$. Nesse caso a bola de centro C = p e raio ε é dada pelo conjunto

$$B(p, \varepsilon) = \{x\in \mathbf{R}: d(x,p) = |x - p| < \varepsilon \} = \{x\in \mathbf{R}: - \varepsilon < x - p < \varepsilon \} =$$

$$= \{x\in \mathbf{R}: - \varepsilon + p < x < \varepsilon + p \},$$

a qual nada mais é do que um intervalo aberto de números reais ou, geometricamente, um segmento de reta sem os extremos.

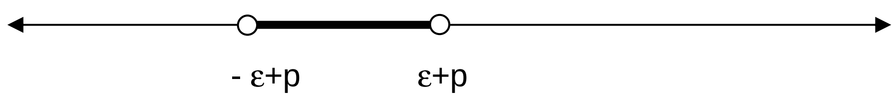


Figura 65 – Bola aberta na reta.

No caso do plano $\mathbf{R}^2$, a bola de cento centro C = (a,b) e raio ε é dada pelo conjunto $B(C, \varepsilon) = \{X\in \mathbf{R}^2: d(X,C) = |x - a| + |y - b| < \varepsilon\}$, com X = (x,y). A visualização dessa bola pode ser uma motivação para o estudo da função modular aplicada em Geometria Analítica para dar sentido à representação de equações de retas no plano.

Usando a definição de função modular, pode-se considerar quatro casos, como segue.

(i) $x - a < 0$ e $y - b > 0$ o que acarreta em $x < a$ e $y > b$.

$d(X,C) = |x - a| + |y - b| < \varepsilon \Leftrightarrow a - x + y - b < \varepsilon \Leftrightarrow y < x + (\varepsilon - a + b)$

que nada mais é do que a equação de um semi-plano limitado superiormente pela reta

$$(r_1)\ y = x + \varepsilon - a + b,$$

inclinada de 45° em relação à horizontal passando pelos pontos $P_1 = (a, b + \varepsilon)$ e $P_2 = (a-\varepsilon, b)$.

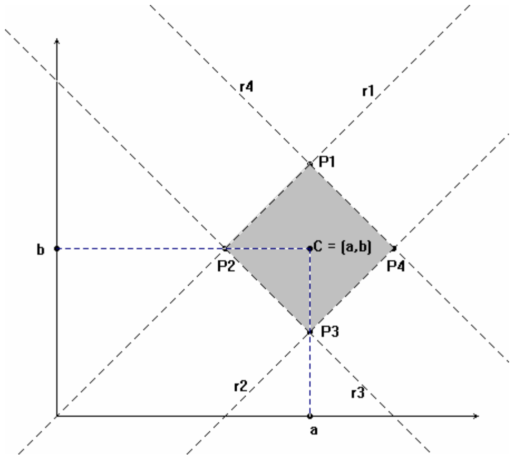


Figura 66 – Bola quadrada.

(ii) $x - a > 0$ e $y - b < 0$ o que implica em $x > a$ e $y < b$. Assim,

$d(X,Y) = |x - a| + |y - b| < \varepsilon \Leftrightarrow x - a - y + b < \varepsilon \Leftrightarrow y > x + (-\varepsilon - a + b)$

que nada mais é do que a equação de um semi-plano limitado inferiormente pela reta

$$(r_2)\ y = x + (-\varepsilon - a + b),$$

inclinada de 45° em relação à horizontal passando pelos pontos $P_3 = (a, b- \varepsilon)$ e $P_4 = (a+\varepsilon , b)$.

(iii) $x - a < 0$ e $y - b < 0$ o que implica em $x < a$ e $y < b$. Assim,

$$d(X,Y) = |x - a| + |y - b| < \varepsilon \Leftrightarrow a - x - y + b < \varepsilon \Leftrightarrow y > -x + (-\varepsilon + a + b)$$

que nada mais é do que a equação de um semi-plano limitado inferiormente pela reta

$$(r_3)\ y = - x + (- \varepsilon + a + b),$$

inclinada de 135° em relação à horizontal passando pelos pontos $P_2 = (a - \varepsilon , b)$ e $P_3 = (a, b - \varepsilon)$

(iv) $x - a > 0$ e $y - b > 0$ o que implica em $x > a$ e $y > b$. Assim,

$$d(X,Y) = |x - a| + |y - b| < \varepsilon \Leftrightarrow x - a + y - b < \varepsilon \Leftrightarrow y < -x + (\varepsilon + a + b)$$

que nada mais é do que a equação de um semi-plano limitado superiormente pela reta

$$(r_4)\ y = - x + (\varepsilon + a + b),$$

inclinada de 135° em relação à horizontal passando pelos pontos $P_1 = (a, b + \varepsilon)$ e $P_4 = (a + \varepsilon, b)$.

A bola, na métrica dos catetos, é o interior de um quadrado formado pela interseção das quatro retas acima, ou seja, é o interior do quadrado cujas diagonais, medindo 2ε, são paralelas aos eixos coordenados e cujos lados medem $\varepsilon\sqrt{2}$. Essa métrica caracteriza a chamada Geometria do Taxista.

Entendo que esse tipo de integração envolvendo uma função modular, Geometria Analítica no Plano e Geometria Sintética é viável de ser realizada com alunos do Ensino Médio e com muito maior propriedade na Licenciatura em Matemática, pois atribui significado a conceitos matemáticos. Este pode ser um dos argumentos que tenho defendido como modernizador do ensino de Geometria, ou seja, introduzir propriedades topológicas que, nesse caso, envolve as propriedades de espaços métricos.

Em síntese, do que busquei sobre visualização na literatura e dos exemplos que apresentei e que acredito possam enriquecer o currículo da Licenciatura em Matemática, percebi que, desde Hilbert, visualização em Matemática não mais é vista como uma simples forma de representação de objetos, senão como um processo para expressar uma linguagem formada mentalmente, a qual pode ser a protagonista inicial do processo de abstração, tão relevante para a construção do conhecimento matemático, cujas idéias, conceitos e métodos apresentam grande riqueza de recursos visuais.

Nos encontros do PME, o assunto visualização passou a ser tema relevante, particularmente a partir da década de 90, em que Geometria Dinâmica deu impulso às pesquisas relativas a esse tema como, por exemplo, ao ser considerado um veículo significativo na resolução de problemas em Álgebra, e em outras áreas do conhecimento. Como afirmou Skemp (1993), o símbolo visual, em qualquer circunstância, tem um vínculo mais estreito com o conceito do que o correspondente verbal, ao que Fischbein coloca como sendo a componente intuitiva na sua concepção de Matemática como atividade humana, na qual o raciocínio matemático pode ser desenvolvido também por meio de visualização.

Método visual é aquele que envolve imagem visual, com ou sem um diagrama; é considerado por Presmeg (1986) como um dos que caracterizam indivíduos ‘visualizadores’, ou seja, os que utilizam tal método, ou ainda, os que utilizam esquemas mentais com informações visuais ou espaciais, o que, nas pesquisas de Piaget e Inhelder, a respeito do desenho comum, espontâneo e inspirado em lembranças visuais, têm o objeto evocado em sua ausência. A esse respeito, citei o exemplo de evocar objetos bi e tridimensionais para, em analogia com os mesmos, obter uma imagem mental de um objeto a quatro dimensões. Além desse exemplo, busquei a formação de imagens mentais em termos de distâncias, para abstrair e construir em outros espaços geométricos conceitos análogos ao de círculo (bola quadrada), bem como de outros conceitos análogos ao de triângulo (tri retângulos) e retas (geodésicas).

Como afirmaram Dreyfus e Hadas (1991), é necessário investigar os tipos de raciocino em situações de aprendizagem, em que sejam úteis diagramas e/ou imaginação visual para formar conceitos ou esquemas mentais, o que é reiterado por Duval (2004) e por Skemp (1993) e que, para Jones (1991), são temas que podem levar à questões importantes de pesquisa em Educação Matemática.

Ao fazer o levantamento bibliográfico para as conceitos que apresentei neste trabalho sobre imaginação, intuição e visualização no ensino de alguns tópicos de Matemática, forneci exemplos matemáticos que podem ser utilizados na Licenciatura em Matemática, de forma específica a cada um dos elementos de tal tripé.

Foram considerados:

- o que Fischbein (1987) afirmou a respeito da importância de uma componente intuitiva para o desenvolvimento do raciocínio matemático a partir de visualização; o fato de que, para Poincaré (apud Fiscbein, 1987), essa pode estar ligada à imaginação, expressa pela indução empírica;

- que tanto Hilbert quanto Brouwer defendiam que a Matemática deveria começar por dados obtidos empiricamente;

- a preocupação de Freudenthal (1973) de que a Geometria poderia desaparecer dos currículos caso não ocorresse uma ruptura na resistência dos professores a mudanças em seu ensino;

- o fato de que, desde os Elementos de Euclides, uma álgebra geométrica possibilita realização de operações geométricas, inclusive com o estilo "*álgebra geométrica*" definido por Granger (1974), em que ocorre apelo à intuição de propriedades das figuras para obter conceitos e,

- finalmente, as recomendações de Klein (1927) de que seja dada importância a uma educação pela intuição espacial de forma que discussões abstratas da Aritmética, da Álgebra e da Análise possam ser feitas por métodos gráficos, tornando diversos conceitos matemáticos mais compreensíveis para os estudantes.

A partir da compreensão do papel que imaginação, intuição e visualização podem desempenhar no desenvolvimento de pensamento geométrico na Licenciatura em Matemática, no próximo capítulo apresento alguns indicativos do que considero relevante em um currículo para a formação inicial do professor de Matemática, especialmente em termos do que considerei sobre imaginação, intuição e visualização para a formação de um pensamento geométrico avançado.

6 A GEOMETRIA NO CURRÍCULO DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: ALGUMAS IMPLICAÇÕES

Ao escrever o capítulo 5, além de buscar amparo na literatura sobre os três aspectos – imaginação, intuição e visualização - que norteiam esta tese e, para definir minhas concepções a respeito, busquei apontar exemplos de possibilidades de inserir esses três elementos, especificamente para cada um deles e, finalmente, um exemplo com maior amplitude, em que os três são utilizados conjuntamente. Dessa forma cumpro meu terceiro objetivo, que é de apontar possibilidades de utilizar imaginação, intuição e visualização em disciplinas de um curso de Licenciatura em Matemática, que acredito possa ser viabilizado sem grandes mudanças na estrutura curricular dos cursos. Se mudanças demasiadamente radicais são feitas, dificilmente elas são colocadas em prática pelos professores. Dessa forma, tais mudanças precisam ser feitas de acordo com reformulações nas concepções dos professores sobre a forma como abordam suas disciplinas, estabelecendo conexões interdisciplinares, como definido antes, entre as diversas disciplinas.

É de se levar em conta que atualmente parece haver uma tendência de se tratar determinados conteúdos de forma interdisciplinar, tanto no nível federativo do Brasil, quanto em alguns estados que já apontam algumas “inovações” curriculares em que as disciplinas são agrupadas em áreas de conhecimento, como tem sido anunciado no estado do Rio Grande do Sul, sem, entretanto, preparar os professores na sua formação inicial e até mesmo em ação continuada para implementar tais “inovações” pelos órgãos governamentais.

Assim, a partir de considerações como as de Hadamard (1945), de que imagens se constituem em ajuda absolutamente necessária para conduzir pensamentos e abstrair para esquemas mentais de conceitos; ou como as de Hilbert e Cohn-Vossen (1932), de que imaginação é útil na resolução de problemas e tomada de decisões na medida em que imagens dos objetos matemáticos estejam presentes em nossa mente, ou ainda como as de Jones (1991) de que visualização apresenta ganhos físicos ou mentais, ou até mesmo as de Del Grande (1994) de que a memória visual é uma das aptidões que parecem ter a maior importância para um bom desenvolvimento acadêmico, explicitei meu entendimento do que seja espaço ambiente, no qual entes geométricos possam ser imaginados, intuídos, visualizados e até mesmo representados, por meio de exemplos envolvendo alguns conceitos matemáticos em diversas áreas, os quais, de alguma forma, apresentam certa conotação geométrica.

Dessa forma, entendo, como Fishbein (1987), que a busca na intuição por um caminho para construir um conhecimento matemático de forma ampla e atualizada pode ser o que propiciará um melhor desempenho dos futuros professores na formação de uma sociedade em que a Matemática seja mais bem compreendida, aceita e útil.

Um dos primeiros exemplos dados nesta tese, de utilização dos três elementos, foi o da existência de Geometrias Não Euclidianas, pela possibilidade de utilizar a álgebra vetorial nas disciplinas de Geometria Analítica, tais como ângulos entre vetores, entre curvas, existência de triângulos trirretângulos e até mesmo linhas retas em espaços não euclidianos, a saber, as geodésicas de superfícies.

No Cálculo, ao me apoiar em Freudenthal (1973), indiquei possibilidade de geometrizar, de forma não trivial, o conceito de derivadas parciais, o de produto vetorial, o uso de determinante conectado ao conceito de volume, para intuir dimensões mais altas em que a representação não é mais possível. No que diz respeito ao tratamento de curvas pelos métodos da Geometria Diferencial, muito bem firmados por Hilbert e Cohn-Vossen (1932), imagens mentais dos conceitos de curvatura de flexão e de torção são formadas pela visualização realizada por meio do desenvolvimento canônico da função que representa a curva em uma série e sua aproximação por projeções nos planos de Frenét-Serret, por curvas elementares que podem ser visualizadas e interpretadas num nível de conhecimento básico, a saber, as funções de segundo e terceiro grau – parábolas e parábola cúbica. Como afirmou Skemp (1993), ao abstrair tais conceitos para curvas num nível mais avançado, está-se formando uma imagem mental do conceito de forma profícua, indo muito além dos simples cálculos rotineiros por meio de algoritmos pré-estabelecidos e muitas vezes complexos, como é o desenvolvimento em séries de algumas funções parametrizadas que definem, por exemplo, hélices no espaço.

Exemplifiquei ainda uma forma de como a intuição, empregada no sentido utilizado por Fischbein (1987), pode estar presente ao fazer uma abordagem geométrica do enumerável e do não enumerável no estudo de funções, a fim de evitar a formação errada de relações entre conjuntos infinitos e respectivas cardinalidades, ao utilizar o conjunto imagem de uma função que leva cada número real no seu dobro, gerando intervalos de amplitudes diferentes, mas equipotentes entre si, logo com mesma cardinalidade. Bolzano aproveitou esse fato para tirar proveito e inovar algumas considerações para uma nova Análise, como já mostrado no exemplo da curva de Peano preenchendo um quadrado e até mesmo na função contínua e que não possui derivada em nenhum ponto, algo até hoje incompreendido por muitos, como apontado por Tall (1991), e que é uma das justificativas para minha intenção de inovar o currículo para a Licenciatura em Matemática.

As preocupações de Klein (1927), quanto à importância que deva ser dada a uma forte educação pela intuição espacial e as de Freudenthal (1973), com relação ao futuro da Geometria, podem ser minimizadas pela exemplificação que forneço de utilizar curvas de níveis no tratamento que se pode dar ao Cálculo Diferencial, explorando tanto aspectos intuitivos quanto os de imaginação e visualização em lugar dos algoritmos comumente utilizados no ensino superior.

Um processo de matematização pelo caminho da Topologia, pode ser explorado pela intervenção da intuição, tanto na Análise, quanto na Geometria Analítica ou no Cálculo, ao tratar com a métrica dos catetos. Esta, fornece outras possibilidades geométricas, como, por exemplo, a obtenção de uma bola quadrada, que vai além daquelas que vêm sendo utilizadas ao tratar apenas com a métrica usual euclidiana. Para Davis e Hersh (1995), pela exploração do intuitivo, significando visual, ocorre um procedimento interdisciplinar, no sentido de interligar conhecimentos nem sempre interpretados como geométricos, como, por exemplo, no tratamento de estrutura com números complexos em variadas formas de representação.

A visualização, por meio da representação, de um cubo unidimensional como sendo um segmento de reta; um bidimensional, como sendo um quadrado e um tridimensional, como o cubo propriamente dito, como feitas antes, permite estabelecer uma analogia para construir a imagem mental do hipercubo, ou seja, um cubo quadridimensional, que nossa visão não permite observar e nem representar.

Indo mais além, seguindo o que afirmou Krutetskii (1976, apud Presmeg, 1986), de ser impossível acreditar que um tipo analítico ocorra somente em Álgebra e um geométrico apenas em Geometria, foi estabelecida uma forma diversificada de representações de um mesmo objeto matemático como a matricial, a trigonométrica e as transformações de simetrias, possibilitando uma melhor formação de um conceito matemático, usualmente tratado em disciplinas distintas na Licenciatura, quando uma matriz é uma matriz por si só, não podendo ser visualizada como uma rotação, por exemplo.

Invoco ainda Klein (1927), o qual desde o início do século XX, chama a atenção para a necessidade de não se deixar de utilizar na Matemática superior tanto Geometria Analítica, quanto Geometria Sintética, de modo que não se chegue a pontos extremos de utilizar apenas representações geométricas, sem utilizar fórmulas e vice-versa, sendo um caminho misto entre as duas classificações uma forma mais conveniente e produtiva.

Complementando o que procurei caracterizar nessa tese como geometrizar o currículo da Licenciatura em Matemática, dando exemplos de como a abordagem geométrica pode interferir no ensino e na aprendizagem de conceitos em diversas áreas ou disciplinas constantes desses currículos existentes, em que imaginação, intuição e visualização constituem-se como elementos facilitadores do processo de formar um pensamento geométrico avançado, apresento a seguir, para finalizar o capítulo, algumas características dos espaços vetoriais euclidianos ou espaços vetoriais com produto interno, as quais não são, em geral, interpretadas geometricamente.

Sendo K um conjunto com a estrutura de corpo, diz-se que um conjunto não vazio V é um espaço vetorial sobre K e se denota por V(K) se:

(i) existe uma operação interna em V, denominada adição (+), que associa a cada par de elementos de V, (u , v), denominados vetores, um elemento u + v, satisfazendo as condições de ser um grupo abeliano, isto é, a operação (+) tem as seguintes propriedades: associativa, existência de um único elemento neutro, existência de elemento simetrizável para cada elemento de V e é comutativa.

(ii) existe uma operação externa, denominada multiplicação, que associa a cada para (α, u) de elementos de (K, V) um elemento αu de V, satisfazendo as seguintes propriedades: associativa em relação aos escalares; distributiva da multiplicação de um vetor em relação à adição de escalares; distributiva do escalar em relação a adição de vetores e existência do elemento neutro em K, em relação à multiplicação pelo vetor, ou seja, o elemento unidade do corpo K.

De acordo com a natureza dos elementos do conjunto V, as imagens mentais de um vetor, que são feitas, necessitam ser ampliadas a partir daquelas que usualmente são elaboradas tanto na Física quanto na própria Matemática, de se ter um vetor como um ente dado por um módulo, uma direção e um sentido, representados por uma flecha. Um vetor pode ser uma matriz, uma função, um conjunto solução de uma equação diferencial, um polinômio, uma integral, dentre outros, e para ter uma compreensão disso, é necessário que se construa uma imagem mental desse objeto matemático. Assim, a estrutura mental a ser construída para caracterizar um vetor necessariamente levará em conta os três aspectos fundamentais que norteiam esta tese – imaginação, intuição e visualização.

Em cursos introdutórios de Álgebra Linear ou Geometria Analítica, faz-se uso do produto interno usual de dois vetores do R^n, $u = (u_1,u_2,...,u_n)$ e $v = (v_1,v_2,...,v_n)$ dado por

$$<u , v> = u_1.\ v_1+ u_2.\ v_2+...+u_n.v_n = |u|.|v|.\cos\theta$$

em que θ denota o ângulo formado pelos vetores u e v e o ponto denota a multiplicação usual de números reais.

Define-se o produto interno de dois vetores em um espaço vetorial real V, qualquer, como sendo a aplicação:

$$<\ ,\ > : V \times V \to \mathbf{R}$$

satisfazendo as seguintes condições, $\forall u,v,w \in V$:

(i) $<u + v , w> = <u , w> + <v, w>$;

(ii) $<\alpha u , v> = \alpha<u , v>$,

(iii) $<u , v> = <v , u>$;

(iv) $<u , u> > 0$ sempre que $u \neq 0$.

Um espaço vetorial munido de um produto interno é chamado espaço vetorial euclidiano. Seja V = P_n(**R**) o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n sobre o corpo dos reais, então um produto interno usual nesse espaço é dado por

$$<f\ ,\ g)> = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Considerando-se um espaço vetorial com produto interno, a norma de um vetor u é definida como <u , u> = $|u|.|u|.\cos 0 = |u|^2 \Leftrightarrow |u| = \sqrt{<u,u>}$. Essa é uma forma de abstrair um conceito geométrico para espaços não triviais, a partir de um conceito usual, a saber, do módulo de um vetor, o qual em espaços vetoriais é denominado de norma no vetor e se simboliza por $\|u\|$. Dessa forma, o conceito de ângulo entre dois vetores pode também ser abstraído por uma analogia com aquele usual nos espaços reais.

Da noção de norma de um vetor, pode-se estabelecer uma analogia com um conceito usualmente empregado na escola básica, que é o conceito de desigualdade triangular ou condição de existência de um triângulo. Tomando-se o vetor u + v, tem-se

$$\|u+v\| = \sqrt{<u+v,u+v>} = \sqrt{<u,u>+2<u,v>+<v,v>} \le \sqrt{<u,u>+<v,v>} \le \|u\|+\|v\|.$$

Portanto, $\|u+v\| \le \|u\|+\|v\|$.

Assim sendo, a norma de um vetor u corresponderia à medida de um lado de um triângulo e a norma do vetor soma corresponderia a soma das medidas de dois lados do triângulo e, portanto, esse terceiro lado deve ter medida menor ou igual a soma das medidas dos outros dois, caso contrário não é possível a construção do triangulo. Vê-se, dessa forma, como é possível abstrair, intuindo imagens mentais a partir de certas representações de um conceito em um espaço ambiente mais simples. Em última análise, isso corresponde a desenvolver um pensamento geométrico avançado.

De forma semelhante, o conceito de medir comprimentos é abstraído a partir da usual distância euclidiana entre dois pontos, para o de métrica definida em espaços munidos de um produto interno. Assim, considero em um espaço euclidiano V a função d: V x V $\rightarrow$ **R**, definida por $d(u,v) = \|u-v\|, \forall u,v \in V$. A função d é denominada métrica induzida pela norma. Dessa forma, todo espaço munido de um produto interno pode ser normatizado, tornando-se o que se denomina de espaço métrico. Faz sentido, assim, obter a distância entre dois vetores quaisquer, por exemplo, entre os vetores u(t) = t e v(t) = t^2 no espaço vetorial P_n, dos polinômios de grau menor ou igual a dois com coeficientes reais, com o produto interno definido acima. Nesse exemplo, tem-se:

$$<u , v> = <t , t^2> = \int_0^1 t.t^2 dt = \int_0^1 t^3 dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\|u\|^2 = <u , u> = <t , t> = \int_0^1 t.t \ dt = \int_0^1 t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \|u\| = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\|v\|^2 = <v , v> = <t^2 , t^2> = \int_0^1 t^2.t^2 dt = \int_0^1 t^4 dt = \left.\frac{t^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \|u\| = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\|u+v\|^2 = <u+v , u+v> = <t+t^2 , t+t^2> = (\int_0^1 t + t^2)^2 dt = \sqrt{\frac{31}{30}} \Leftrightarrow \|u\| = \sqrt{\frac{31}{30}}$$

$$\cos\theta = \frac{<u,v>}{\|u\|.\|v\|} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{3}}.\sqrt{\frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \theta = \arccos\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Nesse ponto destaco a importância da imaginação, intuição e visualização, como um processo de pensamento geométrico avançado para que esses conceitos tenham significado real para os estudantes, razão pela qual acredito ser um indicador para reformulações curriculares.

Por outro lado, pelo fato de um produto interno ser um número real, existe a possibilidade de esse número ser zero. Assim, se existirem dois vetores u e v, não nulos, tais que <u , v> = 0, então pela própria definição segue que:

$$\cos\theta = \frac{<u,v>}{\|u\|.\|v\|} = \frac{0}{\sqrt{u}.\sqrt{v}} = 0 \Rightarrow \theta = \arccos 0 = 90^o$$

Sendo θ = 90º o ângulo entre os dois vetores u e v, defineremos os dois vetores como sendo ortogonais quando isso acontece. Novamente aqui, a abstração a partir do perpendicularismo de retas no plano ou no espaço geométrico usual permite abstrair para espaços não usuais como é o caso do espaço dos polinômios exemplificado acima. Em conseqüência disso, faz sentido falar em conjuntos em que os vetores sejam dois a dois perpendiculares e unitários, ou seja, o que se denomina de conjuntos ortonormais nesses espaços munidos de produto interno. Isso conduz à obtenção de bases ortonormais em espaços vetoriais de dimensão finita, sendo o processo de ortonormalização de Gram-Shimidt o mais usual em Álgebra Linear, o qual é útil na decomposição de um espaço em somas diretas a partir da diagonalização em blocos. A partir disso, é possível o trabalho com aplicações a sistemas dinâmicos, por exemplo, aproximação por projeções, projeções ortogonais, centróides, ajustes de curvas, e especialmente o estudo de isometrias.

Dessa forma, no Apêndice D, apresento uma demonstração de um dos teoremas que julgo mais importante, para a compreensão do Cálculo, que é o Teorema da Função Inversa, com o que julgo ilustrar o uso das representações visuais numa forma de demonstração, e finalizo esse capítulo acreditando ter fornecido alguns indicativos de como colocar a Geometria num patamar muito mais elevado do que aquele existente em instituições que formam professores para o exercício profissional na escola básica, o que pode também ser aproveitado para o bacharelado, que busca a formação de professores para o ensino superior de Matemática, ou seja, aqueles que atuarão como formadores de professores.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Parece-me estar clara a idéia de que uma renovação ou inovação dos currículos da formação de professores de Matemática é urgente e há de se cogitar da utilização de uma interdisciplinaridade dos saberes que permeiam as diversas disciplinas que compõem as grades curriculares dos cursos. Não estou pensando aqui na interdisciplinaridade como aquela realizada entre áreas do conhecimento distintas como Física – Química – Matemática, por exemplo. Trata-se de explicitar uma interdisciplinaridade, entre disciplinas matemáticas.

Como uma tentativa de responder à questão de pesquisa que gerou este trabalho sobre ser possível ensinar conceitos geométricos em disciplinas de cursos de Licenciatura em Matemática a partir de abordagens que envolvam imaginação, intuição e visualização, proponho a criação de uma componente curricular em Geometria que vai muito além de duas ou três disciplinas ao longo do currículo, e que possibilitará a aquisição do que se denotou antes como cultura geométrica.

Essa componente curricular seria constituída de disciplinas específicas de Geometria, de disciplinas que utilizariam a Geometria como saber matemático constituído e de disciplinas que utilizariam, para a sua construção, o saber geométrico, quando a Geometria entraria, sobretudo, como um método pedagógico (VILLANI, 2001), o que denominei de geometrização. No primeiro caso estaria, por exemplo, a abordagem de Geometria Euclidiana, Não-Euclidiana e Finita; no segundo caso, estaria uma disciplina como Álgebra, em que os conhecimentos de estruturas envolvendo simetrias de figuras geométricas de triângulos e quadrados poderiam ser empregadas para a concretização de estruturas de grupos de forma abstrata; no terceiro caso, poder-se-ia citar a Geometria de movimentos para a Álgebra e Àlgebra Linear, por exemplo, cujos aspectos teóricos estariam mais ligados com os geométricos do que com os analíticos, para citar alguns. O saber geométrico pode intervir também em vários aspectos do Cálculo e da Análise.

Esta forma de pensar a Geometria como um método (VILLANI, 2001) e, como um corpo de conhecimento conectando as diversas disciplinas matemáticas, proporcionando o estabelecimento de relações entre os diversos saberes dentro dessas especificidades, permitiria uma base cultural geométrica sólida, que propiciaria maior segurança ao professor para atuar na escola básica no ensino de Geometria. Também o conhecimento da literatura decorrente, especialmente da área da Psicologia da Educação Matemática - PME, dos trabalhos de Fischbein, Skemp e Tall, favoreceu a compreensão da riqueza de possibilidades de abordagens geométricas em disciplinas do Curso de Licenciatura, no longo trajeto de conceitualização matemática.

Cabe proporcionar aos futuros professores a reunião desses diversos saberes a fim de que lhes seja possível aprender a fazer essa construção em sua atuação profissional futura, ou seja, utilizando métodos como ferramentas pedagógicas para a aprendizagem das disciplinas e utilizando as próprias disciplinas como métodos pedagógicos para o desenvolvimento de outras.

Portanto, no trabalho aqui apresentado, busquei ir ao encontro da realidade dos professores que se preparam para o ensino de Geometria na sua formação inicial e dos currículos que frequentam. Na tentativa de apontar para a possibilidade de fazer mudanças nos currículos, no que diz respeito à Geometria, desenvolvendo uma componente como descrita acima, o experimento que fiz *in loco*, em minha própria atuação profissional, como docente num curso de Licenciatura em Matemática, mostrou-me ser possível introduzir algumas propriedades topológicas sem a necessidade de um estudo formal dessa área do conhecimento e, dessa forma, é um dos quesitos que responde à minha questão de pesquisa, inicialmente formulada nesta tese, a saber: É possível ensinar conceitos geométricos em disciplinas de cursos de Licenciatura em Matemática a partir de abordagens que envolvam imaginação, intuição e visualização?

Dentro de minhas concepções, expressas no decorrer da tese, de interdisciplinaridade, interligação entre saberes e conexões entre conteúdos abordados na Licenciatura em Matemática e aqueles a serem tratados na escola básica, a saber, um estudo de polígonos, mostrou ser viável de ser implantado na formação inicial do professor com o auxilio de propriedades topológicas. De forma similar, a função logarítmica, usualmente desenvolvida na formação do professor sem grandes significados para os alunos, na maioria das vezes, pode estar em conexão com o assunto fractal, o qual ainda não consta da maioria dos cursos investigados, conforme levantamento feito nesta tese em cursos do RS. Exemplos de como conexões entre os dois temas podem ser feitos são sugeridos em Leivas (2007b) e em Leivas e Cury (2008).

A partir disso, poderão ser feitas investigações sobre esses indicativos no que diz respeito ao desenvolvimento de um pensamento geométrico junto aos futuros professores que acompanho em seus estágios supervisionados no Curso de Licenciatura em Matemática, uma vez que atuo também como supervisor de tais estágios. Assim, entendo que poderei observar se houve desenvolvimento de uma cultura geométrica.

Entendo que uma formação não pode ser puramente técnica, deve ir além, e para tal o conhecimento, por exemplo, de Geometrias Não Euclidianas ou de Geometria Fractal poderá permitir a leitura e compreensão de mundo de forma mais atual.

Para a construção teórica da proposta curricular que indico nestas considerações finais foi necessário estabelecer alguns conceitos, tais como:

a) Cultura matemática geométrica: entendo este conceito como um conhecimento adquirido ao estabelecer conexões entre conhecimentos matemáticos de diversas subáreas específicas da Matemática.

Em tempos de especializações, tem-se o professor universitário especialista nas diversas subáreas da Matemática: Topologia e Geometria; Análise; Álgebra; Educação Matemática, Fundamentos de Matemática, Matemática Aplicada, Probabilidade e Estatística. O senso comum diz que estas disciplinas funcionam independentemente uma das outras, em geral, não havendo diálogo entre elas e tão pouco estabelecem conexões com conteúdos da escola básica.

Proponho que, em reformulações curriculares, se utilize:

1. Uma **interdisciplinaridade**, no sentido de que “inter” não significa uma pluralidade ou justaposição, muito pelo contrário, faz uma chamada a um espaço comum, um elemento de coesão entre diferentes saberes.

A interdisciplinaridade supõe a predisposição de abertura para o novo, de ir além de certo domínio de conhecimento, permitindo uma abertura de pensamento e de curiosidade. A interação entre subáreas distintas do conhecimento matemático pode ser um meio de comunicação de idéias ou integração dos conceitos e dos procedimentos de ensino, o que nos parece ser a grande possibilidade de integrar concretamente propriedades de simetrias de triângulos e quadrados com estruturas abstratas de grupos, por exemplo, além de integrações de outros conteúdos de subáreas diferentes.

2. Uma **componente curricular geométrica** ministrada ao longo do curso, por meio de disciplinas que tratem de conteúdos de Geometria, disciplinas de Geometria que abordem conteúdos de outras subáreas e disciplinas de outras subáreas que abordem conteúdos de Geometria. Nesta componente curricular devem ser contemplados os seguintes aspectos apontados por Shulman (1987):

• conhecimento do conteúdo pelo professor, não bastando a este definir aos alunos os conteúdos como verdades aceitas em certos domínios do conhecimento. Devem ser capazes de explicar porque as verdades são aceitas pela comunidade científica e como estas verdades se relacionam tanto interna quanto externamente à sua disciplina;

• conhecimento pedagógico, que deve ir além do conhecimento da disciplina em si, para uma dimensão do conhecimento da disciplina a ensinar [compreensão do que faz a aprendizagem de um tópico ou disciplina específica ser fácil ou difícil];

• conhecimento curricular, que é constituído pelo domínio de programas planejados para o ensino de assuntos e tópicos de um dado nível, variedade de materiais instrucionais disponíveis em relação ao programa e conjunto de características que indicam ou contra-indicam o uso em currículos particulares.

b.) Um elemento transversal interdisciplinar: entende-se por elemento transversal aquele que permite ser utilizado por conteúdos diferentes, desempenhando um papel de interlocutor, estabelecendo conexões possíveis entre diversas subáreas do conhecimento. No caso da componente curricular geométrica, esses elementos são **visualização e intuição**, auxiliados pela imaginação e também pela criatividade.

Estes elementos podem estar presentes em disciplinas não especificas de Geometria, mas utilizando aspectos geométricos para construção de conceitos não explicitamente geométricos, tais como simetrias de triângulo e quadrados para o conceito de grupos, ou eixo de simetria de gráficos de funções reais de variáveis reais para o estudo de funções inversas, como exponencial e logarítmica.

Elementos visuais e intuitivos podem ser utilizados juntamente com propriedades topológicas para estudo de figuras planas e espaciais, classificação de superfícies, de quadriláteros, por exemplo, ou seja, elementos integradores intrinsecamente à Geometria.

Elementos visuais e intuitivos podem ser utilizados em Geometria Analítica, propiciando uma compreensão de objetos que são usualmente tratados apenas por aspectos algébricos, tais como ângulos entre curvas, o que pode produzir conhecimentos de Geometrias Não Euclidianas. Assim, exemplifica-se uma possibilidade de que uma disciplina que não é considerada nos currículos de cursos investigados como sendo específica de Geometria, será utilizada para construir conceitos geométricos ainda não existentes em tais currículos.

A derivada ordinária ou a direcional são exemplos que podem ser citados na subárea da análise que podem fazer uso de elementos visuais e intuitivos para elaboração e compreensão de seus conceitos, em geral tratados por métodos abstratos ou por algorítmicos.

A utilização da intuição e da visualização por meio de métodos computacionais é um recurso que pode ser empregado na construção, exploração e análise de Geometria Fractal.

Acredito que, com estes exemplos, ilustro o que caracterizo como elemento transversal interdisciplinar, integrado na construção do que estou chamando de componente curricular geométrica.

O que exponho neste estudo é uma tentativa de contribuir com os projetos de cursos de formação de professores quanto a conteúdos, métodos e tendências em Geometria em suas diversas nuances, e que isso não ocorra exclusivamente em poucas disciplinas com denominações especificas como Geometria I, II, Geometria Plana, Geometria Espacial ou ainda Geometria Euclidiana, mas que perpasse pelas diversas disciplinas curriculares com vista a uma **educação geométrica** que denominei aqui de **componente curricular geométrica**, numa perspectiva de mudança ou renovação nos currículos que busquem o resgate da Geometria.

Certamente, mudanças curriculares na Licenciatura em Matemática constituem grandes desafios aos educadores matemáticos, principalmente no que diz respeito a inovações ou quebra de paradigmas e isso não é uma exclusividade brasileira, como se pode encontrar na literatura atual como, por exemplo, nos referenciais portugueses. Como o interesse aqui é em Geometria, mudanças no currículo no que diz respeito a essa área sofrem ainda maior restrição, uma vez que não se pensa em retirar disciplinas que historicamente são preservadas nos currículos brasileiros. As mudanças que acredito viáveis de serem introduzidas não exigem redução na carga horária de outras disciplinas matemáticas e sim uma integração curricular entre as disciplinas, de modo que a Geometria funcione aproximadamente como um tema transversal no currículo. É ainda válido considerar que neste momento o Ministério da Educação busca a implementação de reformas curriculares pela integração de disciplinas em áreas, o que está também sendo estudado no Rio Grande do Sul para implantação no ensino estadual a partir do ano de 2010. Entretanto, não observo o preparo do professor para fazer uso de interdisciplinaridade nessas mudanças.

Estudos como os do ICMI, de 2001, abordam perspectivas de renovação no ensino de Matemática para o século XXI, afirmando que alguns professores mais jovens estão implementando mudanças curriculares, reconstruindo a Geometria urgentemente, mas que não há reformulação no preparo desses professores para implementar tais mudanças. Acredita-se na importância de que modificações inovadoras passem pela experimentação no próprio ensino do professor, antes de serem generalizadas.

Ainda mais, em inovações curriculares devem ser levadas em consideração perspectivas epistemológicas, pedagógicas, tecnológicas e políticas. No que diz respeito ao *design* no currículo em Geometria, este deve ser introduzido desde a pré-escola, incluindo, dentre outros objetivos, o conhecimento do plano e do espaço na exploração e na descoberta de propriedades de Geometria euclidiana, topológica, fractal, não euclidiana, utilizando ferramentas e metodologias disponíveis, inclusive computacionais; a preparação dos alunos para a resolução de problemas geométricos ou não, em uma grande diversidade de áreas, dependendo do nível em que se encontram; a utilização do desenvolvimento histórico do conhecimento geométrico construído pela humanidade e suas implicações em outras áreas do conhecimento humano e da sociedade. Entendo que os elementos imaginação, intuição e visualização sejam interlocutores necessários nessa tarefa.

A seguir apresento algumas perguntas que entendo possam ser marcos de um Projeto de Licenciatura em Matemática e que devam ser consideradas:

- qual é o objetivo do curso?

- qual é o perfil desejado do profissional a ser formado?

- quais as condições mínimas necessárias para o funcionamento do curso?

- qual a matriz curricular ideal para atender aos objetivos do curso e ao perfil desejado?

Na tentativa de dar respostas aos questionamentos, pode-se buscar o conhecimento da legislação vigente a fim de que os professores envolvidos na proposta estejam bem amparados; faz-se coleta de dados junto a egressos do curso concluído, quanto à adequação para o exercício profissional, e reunem-se sugestões de mudanças que contribuam para uma melhor formação.

A busca da legislação interna da Universidade torna-se elemento fundamental para que os professores tomem conhecimento do que a Universidade tem definido como prioridade para a comunidade em que está inserida.

Com base nas experiências vivenciadas nos processos de reformulação curricular de que participei e nas leituras realizadas, acredito hoje que, para a elaboração de um projeto político pedagógico para um Curso de Licenciatura em Matemática, os seguintes itens devem ser atendidos.

1. **Atendimento ao que preconizam as diretrizes para esses cursos.**

Não é possível reformular ou criar um curso sem o conhecimento da legislação maior vigente e o que devam preconizar um plano nacional para a Educação.

2. **Alinhamento com o que estabelecem as diretrizes da Instituição de Ensino Superior à qual o curso está vinculado.**

A instituição a qual o curso está vinculado necessita ter uma Filosofia e Política estabelecidas pelos seus conselhos superiores, que norteiem de forma ampla os cursos e os profissionais que está habilitando para cumprir sua função na sociedade em que está inserida. Entendo que no projeto da instituição esteja contemplada a legislação interna atualizada, que deve ser obedecida na criação e reformulação dos cursos.

3. Levantamento das reais necessidades de formação do profissional.

A colocação de profissionais no mercado de trabalho deve ser coerente com as necessidades de sua absorção, pois em caso contrário não faz sentido investimento na formação de novos. Bastaria, no último caso, que fossem desenvolvidos programas de ação continuada para atualização e aquisição de novos conhecimentos.

4. Objetivos do curso

A partir do conhecimento das reais necessidades que a sociedade tem daquele tipo de profissional, torna-se possível estabelecer um **objetivo** para o curso, de modo a elaborar uma proposta de criação ou reformulação que contemple os anseios dessa sociedade. Os cursos de Licenciatura em Matemática devem buscar a formação de profissionais competentes evitando ser subprodutos dos bacharelados ou mesmo desenvolvidos concomitantemente com cursos de engenharia, por exemplo, o que ainda é encontrado em um grande número de instituições de ensino superior.

5. Perfil do profissional

Conhecendo o tipo de profissional que é necessário formar, os princípios filosóficos e pedagógicos que a instituição possui, o objetivo estabelecido para o curso, pode-se delinear um **perfil desejado** que se buscará construir de forma coletiva por todos os envolvidos em sua formação, desde os funcionários da instituição até os mais altos escalões diretores, passando especialmente pelos professores que serão os principais construtores.

6. Definição de conteúdos de formação geral

Os conteúdos de formação geral devem abordar aspectos de práticas sociais a serem proporcionados na formação do futuro professor de Matemática. Com isso, pretende-se formar profissionais comprometidos com as transformações sociais que se fazem necessárias. Em geral, o professor de Matemática não quer se comprometer com essa questão formativa e a delega aos professores de outras áreas, preocupando-se quase que exclusivamente com os conteúdos matemáticos, não se envolvendo na elaboração do projeto de curso. Assim, os conteúdos que devem ser tratados na escola básica devem ser de profundo conhecimento do futuro professor, a fim de que não se apóie exclusivamente no livro didático, que, em geral, atende à necessidade de mercado, não rompendo com o que está posto.

6.1 Definição de conteúdos de Matemática

A definição dos conteúdos de Matemática na formação do professor de Matemática é de extrema relevância na organização de projeto de curso uma vez que, quase sempre, esses conteúdos são desenvolvidos em disciplinas oferecidas pelos Departamentos de Matemática e se os professores responsáveis por essa tarefa não estiverem comprometidos com o objetivo do curso a ser atingido bem como com o perfil dos profissionais que estão formando, dificilmente o projeto de curso atinge sua meta.

Ainda persiste, muitas vezes, em instituições superiores, a idéia de que os conteúdos matemáticos da Licenciatura são os mesmos do Bacharelado. Assim, não há distinção na forma de tratamento dos conteúdos, sendo delegado aos professores de metodologia ensinar a forma de abordagem a ser feita na escola básica. Como são muitas as disciplinas sem preocupação com o conteúdo para o ensino na grade curricular, passa a ser apenas o conteúdo a principal formação do professor de Matemática e o modelo de professor a seguir é o de quem ministrou essas disciplinas.

Não questiono a intersecção entre conteúdos destinados ao Bacharelado e à Licenciatura. O que recomendo é que, para atingir os objetivos do curso de formação, esses conteúdos têm de ser desenvolvidos de forma diferenciada. Enquanto ao bacharel interessa a fundamentação para dar seqüência a estudos avançados de Matemática, ao licenciado interessa saber os fundamentos dessa Matemática que será utilizada para o ensino básico.

6.2 Definição dos conteúdos de Educação Matemática

A Educação Matemática, como área emergente, ainda busca se firmar dentre as diversas áreas que integram o conhecimento matemático. Assim, é necessário um meticuloso trabalho para a escolha dos conteúdos que permitam ao futuro professor clareza sobre a maneira de utilizar a Matemática como uma tarefa educacional (FREUDENTHAL, 1973). Nesse sentido, o trabalho coletivo interdisciplinar entre os professores de áreas específicas de conteúdo matemático e os professores de áreas específicas de Educação se torna um elemento diferenciador para um projeto de curso.

7 Ações

A fim de que o projeto de curso possa atender a todas as questões que se discute atualmente, acredito que deva ser contemplado com:

- atividades docentes no curso buscando a construção do conhecimento matemático, educacional, social e moral;

- atividades de pesquisa na busca do conhecimento sobre a realidade e atuação profissional;

- atividades de extensão, de forma que o futuro professor possa compreender a necessidade de atuar junto à comunidade na construção da cidadania.

Como não poderia deixar de ser, atendendo a uma característica de meu trabalho e de minha atuação profissional, que é a de aliar a teoria com exemplos práticos em que uma determinada construção teórica possa ser empregada de imediato, finalizo com um exemplo de alguns temas, cujas abordagens são feitas a partir de definição, propriedades e, finalmente pela representação gráfica, como é o caso das funções quadrática, exponencial e logarítmica. Este é feito tanto em cursos superiores, quanto na escola básica de forma muito pouco significativa para os alunos, os quais exigem razões convincentes e que justifiquem seu estudo.

Sugiro uma construção desses conceitos (apêndice E) a partir da exploração visual, de uma contextualização da função exponencial e do estudo de suas propriedades. Em particular, uso o fato de que uma função, sendo bijetora, leva à existência de sua função inversa, a qual pode ser obtida a partir de sua representação gráfica. Assim, a função logarítmica pode surgir a partir da função exponencial pelo caminho de uma representação gráfica, em que é possível utilizar a imaginação a partir da abstração da existência de uma função inversa de uma dada função; em que a intuição seja uma forma de construção de uma nova função e a visualização permita explorar a representação gráfica da função exponencial para a definição de uma outra função a partir desses aspectos visuais.

Concluindo deve ser reforçada a ideia de que a imaginação, a intuição e a visualização, contempladas em um currículo de um curso de Licenciatura em Matemática possibilita uma cobertura muito mais ampla de uma gama de disciplinas de Matemática, propiciando ainda, aos alunos, aprenderem novas maneiras de pensar e de fazer sua própria Matemática.

REFERÊNCIAS

AARON, Wendy Rose. Academic identities of geometry students. In: PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 32., 2008, Morelia, Mx. **Anais…** Morelia: PME, 2008. v. 2, p.5.

ABASCAL, E.V. **Differential Geometry.** Madrid: Nuevas, 1952.

AGUIAR, M. C. A. de. **O desenvolvimento do conceito de espaço da criança e a educação infantil:** esquemas e interações socioafetivas em situações problemas. 2006. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

ALMEIDA, Maria Elizabeth B. de. **Informática na Educação**: Proposta para uma teoria. In: ALMEIDA, M. E. B. Informática e formação de professores. Brasília, Secretaria de Educação a Distância, 2000. p. 13-24. Disponível em: <http://escola2000.net/eduardo/textos/proinfo/livro09-Elizabeth%20Almeida.pdf>. Acesso em: 10 abril 2008.

ALVES-MAZZOTTI, A.J. O método nas ciências sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A.

ANDRADE, J.A.; NACARATO, Adair M. Tendências didático-pedagógicas no ensino de geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENENs. **Educação Matemática em Revista,** Recife, v. 11, n. 17, p. 61-7, 2004.

ARAÚJO, M. A. S.. Porque ensinar geometria nas séries iniciais do 1°grau. **Educação Matemática em Revista,** Blumenau, v. 2, n. 3, p.12-16, 1994.

ARCAVI, A. Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. **For the Learning of Mathematics,** v. 14, n. 3, p. 24-35, 1994.

______. Teaching and learning algebra: past, present and future. **Journal of Mathematical Behavior**, n. 14, p. 145-162, 1995.

______. The role of visual representation in the learning of mathematics. In: NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE PME, 1999. **Proceedings**… Disponível em: <http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>. Acesso em: 30 set. 2008.

ASPINWALL, L.; HACIOMEROGLU, E. S.; PRESMEG, N. Students’ verbal descriptions that support visual and analytic thinking in calculus. In: PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 32., 2008, Morelia, Mx. **Anais…** Morelia: PME, 2008. v. 2, p. 98.

AUSLANDER, Louis. **Differential Geometry**. New York: University of New York, 1967.

BALACHEFF., N. The benefits and limits of social interaction: the case of mathematical proof. In: BISHOP, A. J.; MELLIN-OLSEN, S.; VAN DORMOLEN, J. (Eds.). **Mathematical Knowledge**: Its Growth Through Teaching. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 175-192.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Elementos de Lógica Aplicada ao Ensino Secundário**. São Paulo: Nobel, 1970.

BARBOSA, João Lucas M. **Geometria Diferencial e Cálculo das Variações.** Rio de Janeiro: IMPA, 1975.

BARNET, Rich. **Teoria e problemas de geometria**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.

BARR, Stephen. **Experiments in Topology**. New York: Dover, 1989.

BAYAZIT, N.; JAKUBOWSKI E. The use of geometric constructions to document Preservice mathematics teachers'Geometric reasoning. In: PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 32., 2008, Morelia, Mx. **Anais…** Morelia: PME, 2008. v.1, p. 238.

BISHOP, Alan J. Review of research on visualization in mathematics education**. Focus on Learning Problems in Mathematics**, v. 11, n. 1-2, p. 7-16, 1989.

BIZA I., NARDI E., ZACHARIADES T. Persistent images and teacher beliefs about visualisation: the tangent at an inflection point. In: PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 32., 2008, Morelia, Mx. **Anais…** Morelia: PME, 2008. v.2, p. 177-184.

BORBA, M.C.; VILLARREAL, M.E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**: information and communication, technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRANDÃO, L. de O. Algoritmos fractais com programas de GD. **Revista do Professor de Matemática**, n. 49, p. 27-34, 2002.

BRASIL. **Lei nº 9394 de Diretrizes e Base da Educação Nacional**. Brasília: MJ, 1996.

______. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura.** Brasília, 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2008.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil**. Brasília: MEC/SEF, 1998b. 3v.: il.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ciências Humanas e suas Tecnologias. Brasília, 2002.

CARMO, Manfredo P. do. **Elementos de geometria diferencial**. Rio de Janeiro: IMPA,1971.

CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Riemanniana**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

CASTRO, E. **O intuicionismo de Henri Poincaré**. 2001. Disponível em: <http: ecastro.com.sapo.pt>. Acesso em: 05out2008.

CIFUENTES, J.C. Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 46, p. 55-72, 2005.

COSTA, Conceição. **Visualização, veículo para a educação em geometria**. 2000. Disponível em: <httpwww.spce.org.ptsemCC.pdf.pdf> . Acesso em: 29 jul. 2007

COURANT, Richard; ROBBINS, Herber. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Editora Moderna, 2000.

CUNNINGHAM, S. The visualization environment for mathematics education. In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Eds.). **Visualization in teaching an**

learning mathematics. Washington, USA: Mathematical Association of America, 1991. p. 67-76.

CURY, H. N. A formação dos formadores de professores de Matemática: quem somos, o que fazemos, o que poderemos fazer? In: CURY, H. N. (Org.) **Formação de professores de matemática**: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001. p. 11-28.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Métodos da Topologia:** introdução e aplicações. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1977.

______. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas, São Paulo: Papirus, 1996.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A experiência matemática**. 3. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1995.

DEL GRANDE, J. J. Percepção espacial e geometria primária. In: LINDIQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Orgs.). **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994. p. 156-167.

DIENES, Z. P..**O pensamento em estruturas**. Porto Alegre: UFRGS, 1974.

______. **A geometria pelas transformações**. São Paulo: EPU, 1975.

______. **Exploração do espaço e prática da medição**. 3 ed. São Paulo: EPU, 1977.

DIEUDONNÉ, J. Debemos enseñar las “matematicas modernas”? In: PIAGET, J.; CHOQUET, G.; DIEUDONNÉ, J.; THOM, R. e outros. **La enseñanza de las matemáticas modernas**. Madrid: Alianza Editorial, 1986. p. 130-139.

DOMINGUES, Hygino H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo: Atual, 1982.

DREYFUS, T.; HADAS, N. STEREOMETRIX: a learning tool for spatial geometry. In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Eds.). **Visualization in teaching an learning mathematics**. Washington, USA: Mathematical Association of America, 1991. p. 87-94.

DRUCK, Suely. O drama do ensino da matemática. In: **Folha de São Paulo**, 25.03.2003.

DUTRA, I. M; LEIVAS, J. C. P. Geodésicas & Cia.: um paralelo entre geometria diferencial e geometria euclidiana. **Vetor,** Rio Grande**,** v. 6, p. 77-84, 1996.

DUVAL, Reymond. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizages intelectuales. 2.. ed. Cali, Colombia: Universidad Del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, 2004. Grupo de Educación Matemática.

______. Geometry from a cognitive point of view. In: MAMMANA, C.; VILLANI, V. (Eds). **Perpectives on the Teaching of Geometry for the 21st century**: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer, 1998.

EISENBERG, T.; DREYFUS, T. On the reluctance to visualize in Mathematics. In: ZIMERMANN, W. E CUNNINGHAM, S. (Eds.). **Visualization in teaching an learning mathematics**. Washington, USA: Mathematical Association of America, 1991. pp.25-37.

FEDENKO, A . S. **Problemas de Geometria Diferencial**. Moscou: Mir, 1981.

FISCHBEIN, Efraim. **Intuition in science and mathematics**: an educational approach. Dordrecht: Reidel, 1987.

______. **Intuition in science and mathematics**: an educational approach. 2. ed. Dordrecht: Reidel, 1994.

FLORY, G. **Ejercicios de topología y de análisis:** serie Reverté de problemas**.** Barcelona: Reverté, 1978.

FREIRE, Paulo. **Extensão ou comunicação?** 13. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1977.

FREUDENTHAL, Hans. **Revisiting mathematics education:** China Lectures. London: Kluwer Academic Publisher. 1973. Mathematics Education Library.

FULTON, William. **Curvas Algebraicas**. Barcelona: Reverté, 1971.

GARNICA, A. V. M. É necessário ser preciso? É preciso ser exato? In: CURY, Helena Noronha (Org.). **Formação de professores de matemática**: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001. p. 49-87.

GOLDENBERG, E. Paul. Seeing beauty in mathematics: Using Fractal Geometry to Build a Spirit of Mathematical Inquiry. In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (ed.). **Visualization in teaching an learning mathematics**. Washington, USA: Mathematical Association of America, 1991. p. 67-76.

GRANGER, G.F. **Filosofia do Estilo**. São Paulo: Perspectiva, Editora da USP, 1974.

GROENWALD, C. L. O. et al. Álgebra com geometria: um enfoque prático na 7ª série do Ensino Fundamental. **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 1, n. 1, p. 37-46, 1999.

GUTIÉRREZ, A. BOERO, P**. Handbook of research on the psychology of mathematics education:** past, present and future. Rotterdam: Sense Publishers, 2006.

GUZMÁN, Miguel de. Enseñanza de la matemática. In: GIL PÉREZ, D.; OZÁMIZ, M. G. **Enseñanza de las ciencias y la matemática: tendencias e innovaciones**. 1993. Biblioteca Virtual OEI. p. 62-89. Disponível em: <http://www.oei.org.co/oeivirt/ciencias.pdf >. Acesso em 03 nov. 2007.

______. **El rincón de la pizarra, ensayos de visualização en análisis matemática**: elementos básicos del análise. Madrid: Pirámide, 1997.

_________**..** Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. In: **Organización de Estados Iberoamericanos**: para la educación, la ciencia y la cultura. 1993. Disponível em: <http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm#F>. Acesso em: 03 nov. 2007.

__________. Tendências innovadoras em educación matemática. 2000. Disponível em: http://www.prof2000.pt/users/amma/af29/trabalhos/s7/Textos/TIEMat.pdf. 2000 Acesso em: 25 jun. 2008.

HADAMARD, Jacques. Psicología de la invención en ele campo matemático. Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina, 1945. Trad. L.A. Santaló Sores.

HELLMEISTER, A. C.; Galvão, M. E. E. L. Resolvendo fisicamente. **Revista do Professor de Matemática**, n. 38, p. 15-22, 1998.

HERSH, Reuben. **What is Mathematics, really?** New York: Oxford University Press, 1997

HERNANDEZ, J. **Introducción**. In: PIAGET, J. et al. La Enseñanza de las matemáticas modernas. Madrid: Alianza Editorial, 1978. p. 11-55.

HERSHKOWITZ, R. Visualization in geometry – two sides of the coin. Spatial visualization in Mathematics curriculum. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v. 11, n. 1-2, p. 61-76, 1989.

HILBERT, D. ; COHN-VOSSEN, S. **Geometry and the imagination**. New York: Chelsea Publishing Company, 1932

HILBERT, David. **Fundamentos da geometria**. Lisboa: Gradiva, 2003.

HIRSCH, Morris W.; SMALE, Stephen. **Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra**. New York: Academic Press, 1970.

HOFFMAN, K. M., KUNZE, R. **Linear Algebra.** 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1970.

JONES, K. **Visualisation, imagery and the development of geometrical reasoning**. Geometry Working Group. Meeting an the University of Birmingham, 20th June 1998. Disponível em: <http://www.bsrlm.org.uk>. Acesso em: 15 jan. 2008.

__________. Spatial thinking and visualization. **In**: Thinking and Learning geometry. The Royal Society. *English translation published by NCTM, 1991*. Disponível em: < http://eprints.soton.ac.uk>. Acesso em: 10 dez. 2007.

KAPUT, James J. Supporting Concrete Visual Thinking in Multiplicative Reasoning: difficulties and opportunities. Spatial visualization in Mathematics curriculum. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v. 11, n. 1-2, p. 35-47, 1989.

KILPATRICK, J.. Investigación em educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. In: KILPATRIC, J.; RICO, L.; GÓMEZ, P. (Eds.). **Educación Matemática**. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1994. p.1-18.

KLEIN, Félix. **Matemática elemental desde un punto de vista superior**. Trad. Roberto Araújo. Madrid: Biblioteca Matemática, 1927.

KLOTZ, Eugene A. Visualization in geometry:a case study of a multimedia mathematics education project. **In**: Mathematical Association of America. Washington, DC, USA, 1991, pp 95 – 104.

KRUTESKII, In: PRESMEG, Norma C. Visualization and mathematical giftedness. Educational Studies in Mathematics. v. 17, n. 3, p. 297-311, 1986.

LEIVAS, J.C.P.. Geometrias não-euclidianas. 1. Parte - uma classificação. **Vetor,** Rio Grande, v. 2, p. 99-106, 1988

______. Geometrias não-euclidianas. 2. Parte - um modelo de Geometria Hiperbólica. **Vetor,** Rio Grande, v. 3, p. 57-63, 1993.

______. Lugares Geométricos. **Vetor,** Rio Grande, v. 4, p. 49-58, 1994a.

______. Algumas estruturas algébricas. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 1994, Ijuí. **Anais...** . Ijuí: Unijuí, 1994b. p. 66.

______. Alguns aspectos geométricos da multiplicaçao. **Vetor**, Rio Grande, v. 5, p. 63-74, 1995.

______. Cardinalidade de Conjuntos Infinitos. **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 2, n. 2, p. 31-34, 2000a.

______. **Geometria das Transformações.** 2000b. Disponível em: <http//www. mathematikos.psico.ufrgs.br>. Acesso em: 20 out. 2007.

______. **Geoplano**. 2000c. Disponivel em: <http//www.mathematikos.psico.ufrgs.br>. Acesso em: 20 out. 2007.

______. Construindo o Conjunto 'Z' por Classes de Equivalência. **Educação Matemática em Revista - RS**, v. 3., n.3, 19-27, 2001.

______. Educação Matemática e Formação de Professores no Cone Sul. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 4, n.1, p. 27-35, jan./jun. 2002a.

______. Uma viagem com o Cabri-Géomètre II. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 4, n.1, p. 125-131, jan./jun. 2002b.

______. O Ensino Atual de Geometria: Concepçoes e Tendencias. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 4, n.1, p. 43-46, jan./jun. 2002c.

______. Existem bolas quadradas? **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 5, p. 21-25, 2003.

______. Desenhar ou Representar Geométricamente? **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 6, p. 39-47, 2004.

______. Tales: mil e uma utilidades. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 20/21, p. 69-76, 2006a.

______. Estimulando cultura geométrica para a escola básica. **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 7, n. 7, p. 43-51, 2006b.

______. Euclides e o cálculo de áreas de regiões poligonais. **Educação Matemática em Revista-RS**, Canoas, v. 8, n. 8, p. 17-24, 2007a.

______. Dimensão, logaritmo, fractal: estabelecendo conexões. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: SBEM, 2007b. v. 1.

______. Modelagem matemática no ensino da função do segundo grau. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 4., 2007, Canoas. **Anais...** Canoas: ULBRA, 2007c. 1 CD-ROM.

______. A aprendizagem de noções topológicas para classificação de quadriláteros na licenciatura de matemática. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL, 7. 2008, Itajaí. **Anais...**Itajaí, UNIVALI, 2008, 1 CD-ROM.

LEIVAS, J. C. P. ; CURY, H. N. . Atividades Com Fractais em uma Proposta de Inovação Curricular para Cursos de Formação de Professores. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA, 4., 2008, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: UFRJ, 2008. 1 CD-ROM.

LEIVAS, J. C. P. ; GONÇALEZ, T. T. Exploração do Espaço. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2001. Rio de Janeiro. **Anais…** Rio de Janeiro: UFRJ, 2001. 1 CD–ROM.

LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 1994.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Topologia Geral**. São Paulo: McGraw-Hill, 1980 .

LOUREIRO, C. Que formação matemática para os professores do 1º Ciclo e para os educadores de infância? In: BORRALHO, A.; MONTEIRO, C.; ESPADEIRO, R. **A matemática na formação do professor**. Évora, Sociedade Portuguesa de Ciência da Educação, 2004. p. 89-124.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E.D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

LUFT, Eduardo. A fenomenologia como metaepistemologia. **Revista Eletrônica Estudos Hegelianos**, v. 3, n. 4, junho 2006. Disponível em: http://www.hegelbrasil.org/rev04a.htm>. Acesso em: 05 out. 2008.

MALLIAVIN, Paul. **Geometria Diferencial Intrínseca**. Madrid: Tecnos,1975.

MASSEY, William S. **Introducción a la Topología algebraica** Barcelona: Reverté, 1972.

MIGUEL, Antônio. História, filosofia e sociologia na Educação Matemática na formação do professor: um programa de pesquisa. **Educação e Pesquisa,** São Paulo, v. 31, n. 1, p.137-152, jan./abr. 2005

MILLMAN, R. S.; PARKER, G. D. **Elements of Differential Geometry**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1977.

MITCHELMORE, M. WHITE, P. **Abstraction in mathematics learning**. In: PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 29., 2005. Melbourne. **Anais…** Melbourne: Australia: PME, 2005. v. 1, p. 206.

MOISE, E. E.; DOWS, F. L. **Geometria Moderna**. São Paulo: Edgard Blücher, 1971. v. 1 e 2.

MOREIRA, P.C.; DAVID, M.M.M.S. **A formação matemática do professor e a prática escolar**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

MORIN, E. **A cabeça bem-feita**: repensar a reforma, reformar o pensamento. 6. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2002.

MOTTIN, E. **A utilização de material didático-pedagógico em ateliês de matemática, para o estudo do teorema de Pitágoras**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004.

NASSER, Lilian. **Using the van Hiele theory to improve secondary school geometry in Brazil**. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – London: King's College London, Centre for Education Studies, University of London,1992.

NETTO, Cesar Dacorso. **Elementos de Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro: Interciência,1977.

PAPERT, Seymour. **A Máquina das Crianças:** repensando a escola na era da informática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PAVANELLO, R. M. Geometria e construção de conceitos aritméticos: investigando algumas inter-relações. POSTER. In: Reunião Anual da ANPEd, 23., Caxambu, MG, 2000. Disponível em: <http://paje.fe.usp.br/~anped/> Acesso em: 10 jul. 2008.

PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PIERCE, R.; STACEY, K. Monitoring progress in a CAS active context: symbol sense, algebraic insight and algebraic expectation. **International Journal for Technology in Mathematics Education**, v. 11, n. 1, p. 3-12, 2004.

POGORÉLOV, A. V.. **Geometria Diferencial**. Moscou: Mir, 1977.

POMBO, Olga (Org.). **Contribuição para um vocabulário sobre interdisciplinaridade**. 1993. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/mathesis/vocabulario-interd.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2007.

PRESMEG, Norma C. Visualization and mathematical giftedness. **Educational Studies in Mathematics,** v. 17, n. 3, p. 297-311, 1986.

______. Research on visualization in learning and teaching mathematics. In: GUTIERREZ, A.; BOERO, P. (Ed.). **Handbook of research on the psychology of mathematics education**: past, present and future. Rotterdam: Sense Publishers, 2006. p. 205-235.

PRINCÍPIOS e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa: APM, 2008. Tradução dos Principles and Standards for School Mathematics, NCTM.

REGO, Rogéria Gaudencio do; REGO, Rômulo Marinho do. **Matemáticativa II**. João Pessoa: Ed. Universitária/ UFPB, 1999.

RIVAL, I., Picture Puzzling: Mathematicians are Rediscovering the Power of Pictorial Reasoning. The Sciences, v. 27, p. 41-46, 1987).

ROCHA, Luiz Fernando Carvalho. **Introdução à Geometria Hiperbólica Plana**. Rio de Janeiro: IMPA, 1987.

RYAN, Patrick J. **Euclidean And Non-Euclidean Geometry**: an Analytic Approach. New York: Cambridge University Press, 1991.

SACRISTÁN, J. Gimeno. **Compreender e transformar o ensino**. 4. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.

SANCHO, Juana M., HERNÁNDEZ, Fernando. **Tecnologias para transformar a educação**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

SANTALÓ, Luis A. **Geometrias não Euclidianas**. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires, 1976.

SCHUBRING, Gert. O primeiro movimento internacional de reforma curricular em matemática e o papel da Alemanha: um estudo de caso na transmissão de conceitos. **Zetetiké**, v. 7, n. 11, p. 29-50, 1999.

SHULMAN, Lee S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1987. Disponível em: <http://edr.sagepub.com/cgi/framedreprint/15/2/4 >. Acesso em: 03 jun. 2007.

SKEMP, R. **Psicología del aprendizaje de las matemáticas**. 2. ed. Madrid. Ediçiones Morata, 1993.

SOMMERVILLE, D.M.Y. **The Elements of Non-Euclidean Geometry**. New York: Dover, 1914.

STRUICK, Dirk J. **Geometria Diferencial e Clássica**. Paris: Academia Romana, 1978.

TALL, D. Thinking through three worlds of mathematics. In: PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004. Bergen. **Anais…** Bergen, Noruega: PME, 2004. p. 281-288.

______. **Efraim Fischbein, 1920-1998, Founder President of PME:** A Tribute. 2001. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999b-fischbein-tribute.pdf>. Acesso em: 13 maio 2007.

______. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991.

TENENBLAT, Keti. **Introdução à geometria diferencial**. Brasília: Universidade de Brasília, 1988.

THORPE, John A . **Elementary topics in differential geometry**. Estados Unidos: Springer-Verlag, 1978.

VALENTE, W. R. Quem somos nós, professores de matemática? **Cadernos Cedes**, Campinas, n. 74, p.11-23, jan./abr. 2008.

VALENTE, José Armando. **Informática na educação**: instrucionismo x construcionismo. 2002. Disponível em: <http://www.divertire.com.br/artigos/valente2.htm>.Acesso em: 08 abril 2008.

VALENTE, José Armando. Educação a Distância: uma oportunidade para mudança no ensino. In*:* MAIA, C. (Org.). **Ead.Br**: Educação a distância no Brasil na era da Internet. São Paulo: Anhembi Morumbi Editora, 2000. p. 97-122.

VALLADARES, R. **Geometria Diferencial.**. Rio de Janeiro: IMPA, 1973. 9. Colóquio de Matemática.

VASÍLIEV,N.B. ; GUTENMÁJER, V.L. **Rectas y Curvas**. Moscou: Mir, 1980.

VILLANI, Vinício. **Perspectives en L´Ensenyament de la Geometria pel segle XXI.** [S.l.]: PMME-UNISON, Feb. 2001. Documento de discussão para um estudo ICMI. Disponível em: <http://www.xtec.es/~jdomen28/article2.htm#top> . Acesso em: 12 ago. 2008.

VRANCEANU,G. **Leçons de Géométrie Différentielle**. Paris: Academia Romana, 1964.

WOLF, Joseph A.. **Spaces of Constant Curvature**. Houston, Texas: McGraw-Hill,1964.

YIN HO, Siew. Roles of visualization in mathematical problem solving. In: PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 32., 2008, Morelia, Mx. **Anais…** Morelia: PME, 2008. v. 1, p. 347

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. **Visualization in teaching and learning mathematics**: a project sponsored by the Committee on Computers in Mathematics Education of The Mathematical Association of America. Washington, USA: Mathematical Association of America. 1991.

APÊNDICES

APÊNDICE A: SOLICITAÇÃO DE ENCAMINHAMENTO DE INFORMAÇÕES SOBRE OS CURSOS

Canoas, RS, 28 de maio de 2007.

Ilmo.(a) Sr.(a). Coordenador(a)

Estou realizando doutorado na Universidade Federal do Paraná, com um projeto intitulado "A geometria na formação inicial de professores de Matemática". Tendo exercido atividades acadêmicas por longo tempo na Fundação Universidade Federal do Rio Grande, como professor e coordenador, tive grande interesse por trabalhar na área de Geometria e Topologia na formação de professores. Como diretor da Sociedade Brasileira de Educação Matemática e como membro da diretoria nacional, pude ampliar meus conhecimentos sobre Educação Matemática e em especial sobre o ensino de Geometria. Hoje atuando numa instituição de ensino superior do RS, estou tendo oportunidade de trabalhar com a formação de professores, mais especificamente em disciplinas de Geometria, em cujas aulas tenho colocado em prática experiências adquiridas nessa área.

Pelas razões apontadas acima, pretendo, em minha pesquisa de doutorado, investigar o seguinte problema: **Qual Geometria deve ser ensinada na formação inicial de professores de Matemática?**

Na busca de respostas para esse questionamento, proponho-me, entre outros objetivos da pesquisa, a fazer uma análise documental de projetos pedagógicos no que diz respeito à componente curricular de Geometria e investigar como essa está sendo trabalhada em cursos de formação inicial de professores de Matemática.

Para obter elementos que me permitam cumprir os objetivos a que me propus investigar, gostaria de poder contar com sua colaboração no sentido de disponibilizar o currículo e as ementas das disciplinas que envolvem a área de Geometria (Geometria Euclidiana e Não Euclidiana, Desenho Geométrico, Geometria Descritiva, Geometria Analítica, etc.) no curso que coordena.

Antecipadamente agradeço.

José Carlos Pinto Leivas
e-mail: leivasjc@yahoo.com.br
Rua Ernesto Witrock, 141, ap. 202 – B, Canoas, RS – CEP: 92310-280

APÊNDICE B: SÍNTESE DA ANÁLISE DOS CURRÍCULOS

INST	PER	DISCIPLINA	C.H.	EMENTA
UCPEL	1º	Fundamentos de Geometria	60	Análise e discussão do processo de construção do pensamento geométrico. O uso de instrumentos na construção de figuras geométricas planas.
	2º	Geometria Euclidiana I	60	Estudo descritivo da reta e do círculo. Linhas proporcionais; semelhanças. Relações métricas em triângulos e em polígonos regulares. Cálculo de comprimentos e áreas de figuras planas.
	3º	Geometria Euclidiana II	60	Estudo teórico-operacional do plano e da reta no espaço, de poliedros convexos, prismas, pirâmides, cilindro, cone e esfera.
	4º	Geometria Analitica	60	Estudo e aplicação de processos algébricos na análise, interpretação e resolução de problemas geométricos em diferentes situações.
	5º	Metodologia da Matemática II	60	Análise de procedimentos metodológicos necessários ao desenvolvimento da Prática de Ensino de Matemática no Ensino Médio; discussão de tendências metodológicas contemporâneas no ensino de Matemática Encontram-se nos últimos itens do programa: "7. Análise de procedimentos metodológicos necessários ao desenvolvimento a Prática de Ensino de Matemática no Ensino Médio; discussão de tendências metodológicas contemporâneas no ensino de Matemática. 8. Planejamento, execução e aplicação de atividades com uso de material concreto em Matemática. 9. Demonstração das Áreas das Figuras Planas. 10. Operações com Polinômios utilizando o conceito de Área. 11. Produtos Notáveis."
	6º	Laboratório de Matemática I	60	Planejamento de atividades relacionados com o processo de ensino e aprendizagem de Matemática em classes do Ensino Fundamental. Ao analisar o programa da disciplina encontra-se alternativas metodológicas para o ensino de tópicos diversos de matemática dentre os quais 2. A importância do lúdico em sala de aula: Jogos didáticos, desafios lógicos, brincadeiras matemáticas e curiosidades matemáticas envolvendo conteúdos de álgebra, aritmética e Geometria. 5. Dedução das fórmulas para cálculo das áreas das principais figuras planas a partir da área do retângulo 6. Cálculo de áreas utilizando o tangram 7. Expressões algébricas - confecção de polígonos e representação algébrica dos seus respectivos perímetros, áreas e volumes - uso de canudos de refrigerante para confecção dos polígonos. 8. Operações com polinômios através do cálculo de áreas 9. Produtos notáveis 10. Demonstrações do Teorema de Pitágoras 11. Confecção do geoplano retilíneo e circular para trabalhar conceitos relacionados a Geometria plana: como ângulos, polígonos, perímetro, áreas, números de diagonais, soma dos ângulos internos de um polígono, elementos da circunferência, polígonos inscritos na circunferência.

				12. Dobraduras para explorar conceitos relacionados com frações, Geometria plana e espacial. 13. Confecção de quebra-cabeças geométricos - Tangrans 14. Estudo de simetria através de espelhos. Construção do caleidoscópio.
	7º	Laboratório de Matemática II	60	Planejamento de atividades relacionados com o processo de ensino e aprendizagem de Matemática em classes do Ensino Médio. Na análise do programa da disciplina encontra-se também atividades relacionadas ao conteúdo de Geometria. 7. Construção do Ciclo Trigonométrico. 8. Construção do Quadrante. 9. Funções Linear e Quadrática: Aplicação, visualização e construção. 10. Princípio Multiplicativo: utilização e visualização. 11. Seqüências e Progressões: utilização e visualização. 12. Poliedros regulares e estrelados: construção por dobraduras (Platão), por canudos e por palitos. 13. Relação de Euler: demonstração e considerações.
	8º	Elementos de Geometria Diferencial	S.E.	Estudo e compreensão dos fundamentos da Geometria Diferencial como conhecimento integrador dos processos matemáticos.
U P F	2º	Geometria Analítica	S.E	Introdução à Geometria Analítica. Estudo da reta. Circunferência. Parábola. Elipse. Coordenadas cartesianas no espaço tridimensional. Equação do plano. Superfícies quádricas: esfera, elipsóide, parabolóide. Superfície cilíndrica.
	2º	Geometria Euclidiana	S.E	Sistema de unidades de medidas. Ângulos. Polígonos. Semelhança. Triângulos retângulos. Círculo e circunferência. Área das figuras planas. Prismas. Cilindro. Pirâmides. Cone. Esfera.
		Geometria Descritiva	S.E	Geometria Descritiva e projetiva. Noções básicas. Estudo do ponto. Estudo da reta. Métodos descritivos ou deslocamento. Estudo do plano. Verdadeira grandeza de figuras planas. Representações de superfícies. Na página do curso foram localizados os níveis em que as disciplinas são oferecidas. Encontrou-se no nível 1 a disciplina Desenho Geométrico e no elenco de disciplinas optativas a escolher 44 créditos, encontrou-se no nível oito duas disciplinas: Geometria Descritiva e Projetiva e a disciplina Perspectiva. Não foi encontrada a disciplina encaminhada com ementa e programa denominada Geometria Descritiva.
U F R G S	1º	Geometria I	4 cred.	Geometria plana: pontos, retas, ângulos. Triângulos congruentes, construções com régua e compasso. Triângulos semelhantes. Funções trigonométricas de ângulos. Círculos. Lugares geométricos. Decomposição de regiões poligonais.
	1º	Geometria Analítica B	4 cred.	Vetores, operações em vetores; distâncias, áreas e volumes. Sistemas de coordenadas. Estudo da reta e de curvas planas. Estudo da reta, do plano, de curvas e de superfícies no espaço.
	2º	Geometria II	4 cred.	Geometria espacial: paralelismo de retas e planos, perpendicularidade de retas e planos, ângulos.

				Secções cômicas e propriedades óticas. Semelhança e homotetia, área de figuras planas, área e comprimento de círculo, volumes e áreas de sólidos de revolução. Transformações geométricas. Polígonos, poliedros, simetrias. Teorema de Euler. Sólidos platônicos.
	3º	Cálculo e Geometria Analítica I-A	6 cred.	Estudo da reta e de curvas planas. Cálculo diferencial de uma variável real. Cálculo integral das funções de uma variável real.
	4º	Cálculo e Geometria Analítica II-A	6 cred.	Geometria Analítica Espacial. Derivadas Parciais. Integrais Múltiplas. Séries
	8º	Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática II	8 cred.	Geometria sintética no plano e no espaço. Medidas: comprimentos, áreas e volumes. Geometria Analítica. Transformações geométricas. Preparação, execução e avaliação de experiências de prática de ensino nesses conteúdos especificados.
FURG	1º	Geometria Analítica	180 h.	Matrizes e sistemas de equações lineares. Vetores no R^2. A reta no R^2. Transformações Lineares do R^2 no R^2. Vetores no R^3. A reta no R^3 . O plano no R^3. Transformações Lineares de R^3 em R^3. Equações de 2° grau a duas e três variáveis. Superfícies e curvas no espaço. Curvas cônicas. Superfícies de rotação, cilindros e cones. Superfícies quádricas. Outras curvas e superfícies.
	2º	Geometria I	180 h.	Tecnologias educacionais para o ensino de Geometria. A teoria de Van Hiele. Geometria de transformações. Uso de material concreto para o ensino de Geometria. Manipulação de figuras. Representação e planificação de sólidos. Reconstrução e resignificação de conceitos geométricos. Morfologia das figuras planas. Traçado das figuras planas. Relações entre elementos das figuras planas. Morfologia dos sólidos geométricos. Relações e aplicações entre sólidos. Geometria Fractal.
	3º	Geometria II	120 h	Geometria de Euclides: a origem da Geometria; método axiomático. Geometria da incidência: revisão de lógica; teoremas e demonstrações. Axiomas de Hilbert: falhas dos axiomas de Euclides. Geometria sem o axioma das paralelas de Euclides. História do axioma das paralelas. A descoberta de Geometrias Não Euclidianas: a Geometria hiperbólica. Consistência da Geometria hiperbólica e modelos de Geometria. Implicações filosóficas da descoberta de Geometrias Não Euclidianas.
	S.E.	Topologia	S.E.	S.E.
	S.E.	Geometria Diferencial	S.E.	S.E.
	S.E.	Tópicos de Geometria	S.E.	S.E.
UNISINO	1º	Geometria Plana	60 h	Os conceitos primitivos (ponto e reta); Noções de planos no espaço; Principais axiomas da Geometria Euclidiana plana; Demonstrações de propriedades geométricas a partir de axiomas; Relações posicionais (pertinência, continência, paralelismo e perpendicularismo); Ângulos: definição congruência e comparação; Medida e classificação; Triângulos: classificação, congruência, semelhança, linhas traçadas no triângulo; Introdução aos polígonos

S				convexos; Discussão sobre o conceito de área em polígonos convexos: princípio de Cavalieri para áreas; Paralelismo e perpendicularismo e suas relações com os ângulos; Estudo dos quadriláteros; Estudo dos polígonos e polígonos regulares; Estudo das circunferências e círculos; Exemplos de Geometrias Não Euclidianas.
	3º	Geometria Espacial	60 h	Polígonos regulares: conceituação, principais elementos, relações angulares e métricas em polígonos regulares, inscrição e circunscrição de polígonos regulares na circunferência, relações entre raio, lado e apótema; Poliedros: conceituação, principais elementos, poliedros convexos, relação de Euler; Estudo dos prismas: área, volume, Princípio de Cavalieri; Estudo dos cilindros: área e volume; Estudo das pirâmides: área, volume, tronco de pirâmide; Estudo dos cones: área, volume, tronco de cone; Estudo da esfera: área, volume, principais porções; Inscrição e circunscrição de sólidos geométricos
	4º	Geometria Analítica	60 h.	Conceito de vetores como classes de equivalência; módulo, direção e sentido de um vetor; Operações com vetores: Adição, multiplicação por escalar, produto escalar, produto vetorial e produto misto; ângulo entre vetores, projeção ortogonal; estudo da reta no espaço e no plano; posições relativas entre retas e planos; ângulos entre duas retas, entre reta e plano, e entre plano e plano; distância entre dois pontos, entre ponto e reta, e entre ponto e plano; cônicas.
U F S M	1º	Geometria Plana e Desenho Geométrico	90 h.	Geometria plana: noções básicas, segmentos de reta e ângulos – perpendicularismo de retas; triângulos e congruências de triângulos; teorema do ângulo externo e congruências; paralelismo de retas e conseqüências; polígonos; teorema de Tales e conseqüências; circunferência – ângulos na circunferências; comprimento de uma circunferência; área de figuras planas. Desenho geométrico: construções geométricas fundamentais; métodos do desenho geométrico; semelhanças, equivalências de áreas e construções aproximadas; cônicas;
	2º	Tópicos e Ensino de Geometria Espacial	90 h.	Geometria espacial: noções básicas; posições relativas; perpendicularismo; construção de figuras espaciais (sólidos geométricos); problemas métricos no espaço; poliedros convexos; volumes e áreas de figuras espaciais. Geometria descritiva: estudo geométrico das projeções cilíndricas; projeções cilíndricas ortogonais; conceitos básicos em Geometria descritiva; estudo da reta; estudo do plano; rebatimento.
	2º	Geometria Analítica I-A	90 h.	Vetores, estudo da reta; estudo do plano; cônicas e quádricas.
	4º	Instrumentação para o Ensino de Matemática I	90 h.	UNIDADE 6: O ENSINO DA GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL A Geometria como modelo abstrato para descrição do espaço físico; a necessidade de uma estrutura axiomática-dedutiva; aplicações da Geometria como modelo na resolução de problemas concretos; relações da Geometria com a

				álgebra
	5º	Instrumentação para o Ensino de Matemática II	90 h.	UNIDADE 7: GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO Geometria espacial e Geometria analítica.
UNIJUI	1º	Geometria I	60 h.	Revisão da morfologia geométrica plana. Estudo axiomático da Geometria plana: primitivas; paralelismo; perpendicularidade; ângulos; polígonos e proporcionalidade. Teorema de Tales. Teorema de Pitágoras. Teorema da Bissetriz. Circunferência e círculos, sendo o círculo apresentado com ênfase na inscrição e circunscrição de polígonos, bissetrizes, construções geométricas elementares. Este componente curricular proporciona atividades de resolução de situações problema, com discussões dos conceitos de Geometria plana através de demostrações, priorizando o raciocínio e estabelecendo relações com o cotidiano. As tecnologias de informação e comunicação serão utilizadas como recurso didático do componente curricular e como ferramenta para a matemática.
	2º	Geometria II	60 h.	A Geometria Espacial inicia com um estudo dos poliedros e relação de Eüller nesses poliedros. A seguir, são trabalhados os prismas e os cilindros, as pirâmides e os cones e a esfera. O estudo dos cilindros é feito logo após o estudo dos prismas já que, basicamente, o que os diferencia, são os tipos de bases, e isto não possui uma influência decisiva nas demonstrações relativas a tais sólidos. O mesmo argumento serve para propor o estudo dos cones logo após o estudo das pirâmides. As demonstrações relativas aos cálculos dos volumes dos sólidos estudados neste componente curricular estão propostas para uma mesma seção já que, à parte as semelhanças mencionadas acima, todas utilizam como suporte comum o princípio de Cavalieri.
	2º	Geometria Analítica e Vetotes	60 h.	Este componente curricular desenvolve os conceitos básicos de Geometria Analítica, atrelados ao conceito de vetor como um segmento orientado e utiliza este conceito no estudo da Geometria Analítica com interpretação vetorial. Os conhecimentos adquiridos são aplicados em situações práticas nas áreas de Física e Matemática.
	3º	Geometria Analítica no Espaço	60 h.	Este componente centra-se no estudo da Geometria Analítica no espaço. Desenvolvendo em coordenadas cartesianas, o plano, a reta e superfícies no espaço: Superfície esférica; superfície cilíndrica; superfície cônica; superfícies quádricas, fornecendo subsídios importantes para as disciplinas posteriores. Geralmente ausente da Educação Básica, esta disciplina é fundamental para o desenvolvimento do professor em seu trabalho com Geometria Analítica e Geometria em geral na escola.
PUCRS	1º	Geometria I	60h.	Elementos fundamentais de Geometria Euclidiana. Ângulos. Polígonos. Circunferência e círculo. Relações métricas no triângulo retângulo.
	1º	Desenho Geométrico para Matemática	30 h.	Uso dos Instrumentos Convencionais; Construções Geométricas Fundamentais; Circunferência; Concordância; Tangência; Polígonos; Semelhança;

				Homotetia; Método Algébrico; Método dos Lugares Geométricos; Curvas Cônicas.
	1º	Disciplina Integradora I	60 h.	Uso de metodologias alternativas (resolução de problemas, uso de material concreto, modelagem) nas práticas de temas de matemática básica referente às disciplinas do 1º semestre.
	2º	Geometria II	60 h.	Resolução de triângulos quaisquer. Áreas das figuras planas. Retas e planos no espaço. Poliedros.
	2º	Disciplina Integradora II	30 h.	Uso de metodologias alternativas (resolução de problemas, uso de material concreto, modelagem) nas práticas de temas de matemática básica referente às disciplinas do 2º semestre.

Quadro 22 – Síntese da análise dos Programas de Licenciaturas e Matemática do RS

APENDICE C: O CIRCUNCENTRO DE UM TRIÂNGULO

Definição: Duas retas se dizem **perpendiculares** quando, estando no mesmo plano, se interseccionam formando ângulos retos.

Construção de perpendiculares: Dada uma reta **r** de um plano e um ponto P, qualquer e que não pertença à **r**, obter a reta **s** que seja perpendicular a **r** e passando por **P**.

Com centro em **P** trace uma circunferência que corte a reta **r** em dois pontos distintos, denotando-os por **A** e **B**. Com centro em **A** e em **B**, respectivamente, obtenha dois arcos que se interseccionem em um ponto **Q**, diferente de **P**. Unindo **P** e **Q** obtém-se a reta **s**, procurada que é perpendicular a **r**.

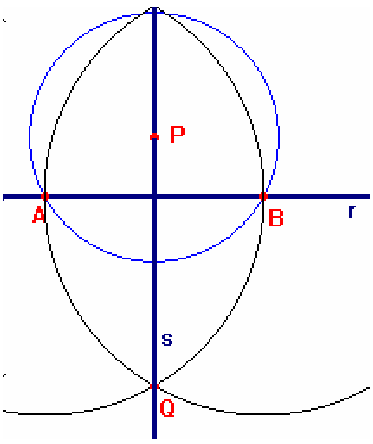


Figura 67 – Retas perpendiculares

Definição: Chama-se mediatriz de um segmento de reta AB como sendo a reta que passa pelo ponto médio deste segmento, M, sendo perpendicular a AB. As mediatrizes de um triângulo são as mediatrizes dos segmentos que formam os lados do triângulo. É comum se referir a mediatriz relativa a um lado do triângulo.

Construção de mediatrizes de um triângulo:

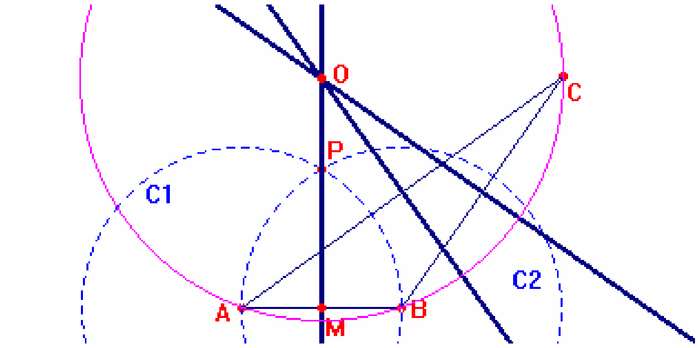


Figura 68 – Mediatrizes do triângulo

Considera-se o triângulo de vértices A, B e C e se determina os pontos médios dos três lados do triângulo, como feito para determinar M, ponto médio do segmento AB.

Como na construção anterior, determina-se a perpendicular ao segmento AB, passando por M. Para tal, obtém-se um ponto P, eqüidistante de A e de B. Assim, a reta que passa por M e P é a mediatriz procurada.

As três mediatrizes se encontram num ponto O, o que pode ser percebido visualmente, quando de uma construção feita com precisão, utilizando instrumentos de desenho adequados ou um software de Geometria Dinâmica. Entretanto, uma demonstração rigorosa, utilizando o método dedutivo, pode ser obtida como se pode acompanhar a seguir.

Proposição: As mediatrizes de um triângulo se encontram num ponto O, o qual é denominado **circuncentro** do triângulo.

Uma demonstração:

Dado um triângulo ΔABC. Sejam M_1, M_2 e M_3 as três mediatrizes dos lados AB, AC e BC, respectivamente. Se M_1 e M_2 fossem paralelas, então $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ seriam paralelas. Mas $\overleftrightarrow{AB}$ $\text{int}\,ercepta$ $\overleftrightarrow{AC}$. Logo, M_1 e M_2 se interceptam em um ponto P. Como $\overline{PA} = \overline{PB}$, porque P$\in$ M_1 (está na mediatriz de AB) e $\overline{PC} = \overline{PB}$, porque P $\in$ M_2 vem que $\overline{PC} = \overline{PB}$ o que implica em P $\in$ M_3.

Desta forma, as mediatrizes são concorrentes e o ponto de concorrência é eqüidistante dos extremos, justificando a existência de uma circunferência de centro neste ponto e raio igual a esta distância comum, logo contendo os três vértices do triângulo, como na figura a seguir.

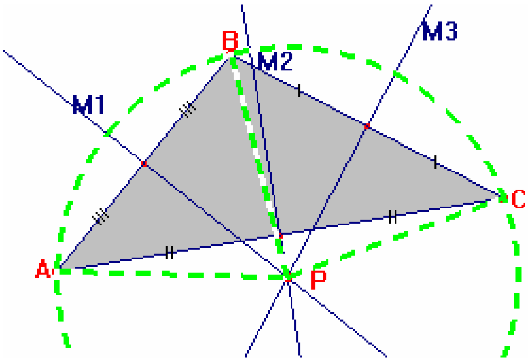


Figura 69 – Intersecção de Mediatrizes do triângulo

Observação: o ponto de intersecção das mediatriz de um triângulo, o circuncentro desse triângulo, corresponde ao centro de uma circunferências que passa pelos vértices do mesmo, deixando-o inscrito nesta circunferência ou, ainda, a circunferência é circunscrita a ele.

APENDICE D: TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

O teorema da função inversa, juntamente com o teorema fundamental do Cálculo, me parece serem dois dos principais resultados que devam ser muito bem trabalhados no ensino dessa disciplina. Aqui apresento algumas considerações sobre o primeiro a partir do triedro imaginação, intuição e visualização uma vez que, na maioria dos livros relativos ao tema o abordam de uma forma meramente analítica deixando de considerar tais aspectos que julgo serem por demais relevantes para sua construção.

1 Continuidade e Diferenciabilidade

Retomando o conceito de continuidade de função real de variável real, considero uma função f: $X \to \mathbf{R}$ uma função e $a \in X \subset \mathbf{R}$. Diz-se que f é **contínua** em $a \in X$ quando é possível tomar f(x) arbitrariamente próxima de f(a) desde que se tome x suficientemente próximo de a, numa linguagem formal simboliza-se por:

$$f \text{ é continua em } a \Leftrightarrow \forall\ \delta > 0, \exists\ \varepsilon > 0 \text{ tal que } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Aqui estou tratando de "arbitrariamente próximo" na reta real, no sentido usual. No entanto, se utilizarmos outras formas de "arbitrariamente próximo", ainda teremos o conceito acima. Faço este comentário a fim de salientar a importância deste conceito de continuidade e não somente o conceito de ser contínua quando se pode traçar o gráfico da função sem tirar o lápis do papel, como é comumente introduzido nos cursos de Cálculo. Um conceito mais "apurado" de continuidade é feito em topologia, inclusive introduzindo a continuidade em espaços discretos.

Proposição 1. Se f: $X \to \mathbf{R}$ é contínua em $t_o \in X \subset \mathbf{R}$ e $f(t_o) \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(t) \neq 0$ em $]\,t_o - \delta, t_o + \delta\,[$.

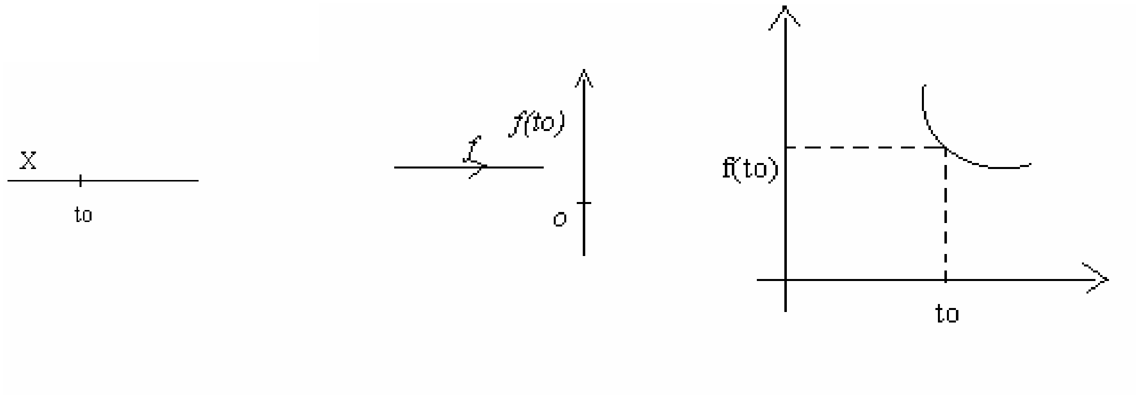


Figura 70 – Gráfico de uma função em um ponto dado

Demonstração:

Tome $\varepsilon = 1/2|f(t_0)| \neq 0$. Como f é contínua em t_0, é possível se tomar f(x) arbitrariamente próximo de $f(t_0)$ desde que x esteja arbitrariamente próximo de t_o, isto é,

$$f(x) \in]f(t_o) - \varepsilon, f(t_o) + \varepsilon[, \text{ quando } x \in]t_o - \varepsilon, to + \varepsilon[.$$

Assim, para mostrar que $f(t) \neq 0$ em $]t_o - \varepsilon, t_o + \varepsilon[$, tome

$|f(t_o)| = |f(t_o) - f(x) + f(x)| \leq |f(t_o) - f(x)| + |f(x)| \leq \varepsilon + |f(x)|$.

$|f(t_o)| \leq 1/2\, |f(t_o)| + |f(x)|$.

$0 < 1/2\, |f(t_o)| < f(x)|$.

$|f(x)| > 0 \Rightarrow f(x) \neq 0, \forall\, x \in]t_o - \varepsilon, t_o + \varepsilon[$.

Como já denotamos antes, nessa tese, o gráfico de f(x) é o conjunto

$$\text{graf(f)} = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

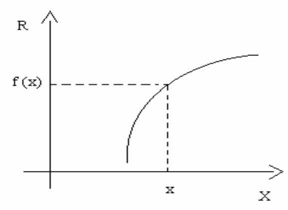


Figura 71 – Gráfico de uma função num ponto qualquer

Dado $a \in \mathbf{R}$ tem-se A = (a , f(a)) $\in$ graf(f) bem como B = (x, f(x)) $\in$ graf(f).

A reta “s” passando por A e B e chamada reta secante ao graf (f) nos pontos A e B.

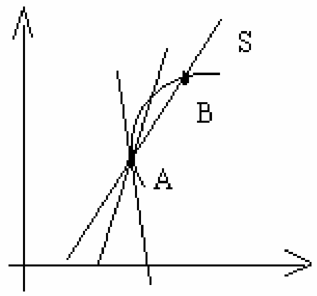


Figura 72 – Secantes ao gráfico de uma função

Definindo–se a função coeficiente angular da secante por

$$q : X - \{a\} \rightarrow R$$
$$x \quad \rightarrow q(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot$$

Quando se toma o ponto A fixo e se faz x estar suficientemente próximo de “a”, o valor q(x) medirá a posição limite das inclicações das retas secantes ao graf(f) em A, ou seja,

$\lim\limits_{x \to a} q(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ é o coeficiente angular da reta tangente ao graf (f) em A. A esta função chama-se derivada de f em A , ou seja, $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} q(x)$ e, quando f tem derivada em todo ponto de seu domínio dizemos que é derivável em X. Por outro lado, quando a função derivada de f for contínua em X, diz-se que f é uma função de classe C^1 em X. Quando a derivada de f for nula em “a”, o ponto a $\in$ X é dito ponto singular para f ou singularidade para f. Os pontos do domínio de f que não são singulares são chamados pontos regulares. Uma função é dita regular se ela for C^1 e se todos os seus pontos forem regulares.

2 Regularidade e injetividade

Proposição 2. Se f: X $\rightarrow$ **R** é regular em $t_o \in$ X, então existe uma vizinhança de t_o em X na qual f é definida.

<u>Demonstração</u>:

Como f é regular em t_o segue que $f'(t_o) \neq 0$ e $f \in C^1$. Sendo f' contínua e $f'(t_o) \neq 0$, segue da proposição 1 que $f'(t) \neq 0$, $\forall t \in \overline{X} \subset X$ em que $\overline{X}$ é um conjunto contendo t_o (vizinhança de t_o). Suponha que f: $\overline{X} \rightarrow$ R não seja injetiva. Isto significa, que existem t_1, $t_2 \in \overline{X}$ tais que

$$t_1 \neq t_2 \Rightarrow f(t_1) = f(t_2).$$

Portanto, pelo teorema do valor médio do Cálculo, existe $\bar{t} \in \overline{X}$,

$$t_1 < \bar{t} < t_2 \text{ e tal que } f'(\bar{t}) = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2}.$$

Mas isto contradiz a primeira parte, logo f é injetiva.

Uma função f: X $\rightarrow$ **R** é dita crescente em X quando $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in$ X e decrescente em X quando $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in$ X.

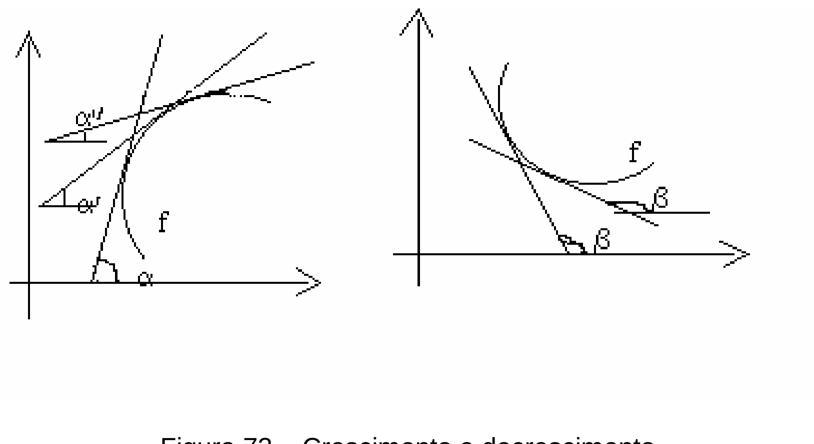


Figura 73 – Crescimento e decrescimento

A função f é dita estritamente crescente quando $f'(x) > 0$, $\forall x \in$ X e estritamente decrescente quando $f'(x) < 0$, $\forall x \in$ X. Nestes casos será injetiva em X.

A seguir retomo o conceito de função inversa e o relaciono com derivadas.

3 Função inversa e derivação

Sendo a f : X $\rightarrow$ **R** injetiva em X, temos que a função f: X $\rightarrow$ f(X), isto é, a função definida no seu conjunto imagem é sempre uma função bijetiva, logo é uma função inversivel, isto é, existe uma função

$$f^{-1} : f(X) \rightarrow X$$
$$y \rightarrow f^{-1}(y) = x = f^{-1}(f(x))$$

a qual é uma bijeção de f(X) em X, e se denominada função inversa de f.

No que segue procuro relacionar geometricamente as funções f e f^{-1}.

Como graf(f) = {(x, f(x)): x $\in$ X} e graf(f^{-1}) = {(f(x), x): x $\in$ X} e como os pares (x, f(x)) e (f(x), x) são simétricos em relação à reta y = x, segue que para obter graf(f^{-1}) basta efetuar uma reflexão em torno de tal reta do gráfico da primeira.

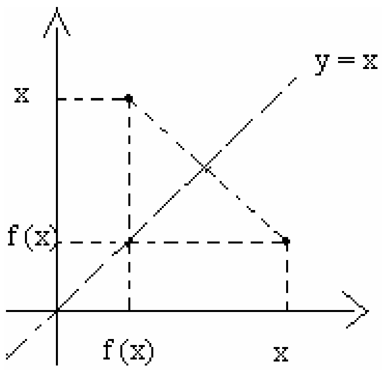


Figura 74 – Gráfico de função inversa

Exemplificando geometricamente, duas figuras T e T' são simétricas em relação à bissetriz do 1º quadrante quando se apresentam visualmente representadas da seguinte forma:

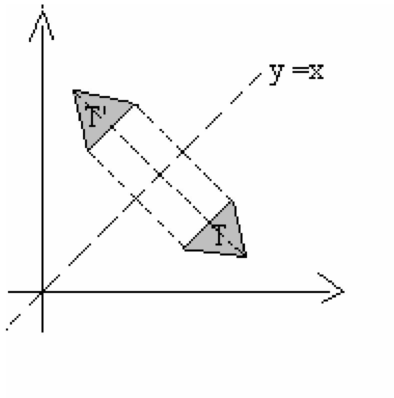


Figura 75 – Imagens inversas

Proposição 3: Seja f: X $\rightarrow$ **R** uma função de classe C^1 em X e $f'(x_o) \neq 0$. Então f é inversivel numa vizinhança de x_o.

Demonstração: Sejam $x_o \in X$ e $y \in$ **R** tais que $y = f(x_o)$. Como $f'(x_o) \neq 0$, então $f'(x) \neq 0\ \forall x \in\ ]x_o - \varepsilon , x_o + \varepsilon[$ pela proposição 1. Assim, f é estritamente crescente ou estritamente decrescente em $]x_o - \varepsilon , x_o + \varepsilon[$, logo é uma função injetiva neste intervalo.

Portanto, f: $]x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon[\rightarrow f(]x_o - \varepsilon , x_o + \varepsilon[)$ é uma função bijetiva, logo é inversivel.

4 Teorema da função inversa

Seja f uma função derivável no seu domínio tal que f é estritamente crescente (ou estritamente decrescente). Nestas condições:

$$(f^{-1})'(f(x) = \frac{1}{f'(x)}\text{, ou ainda, } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

ou seja, a derivada da função inversa é igual ao inverso da derivada da função direta. No que segue vou mostrar o Teorema da Função Inversa, fazendo uso dos conceitos elaborados anteriormente de derivada, de gráficos e de simetrias das duas funções f e f^{-1}. Tomemos os gráficos de f e de f^{-1} e os pontos simétricos M e M^{-1}.

Tracemos a tangente à f por M com inclinação α. Tracemos a tangente à f^{-1} por M^{-1} com inclinação β. Chamemos de 2φ ao ângulo entre as duas tangentes.

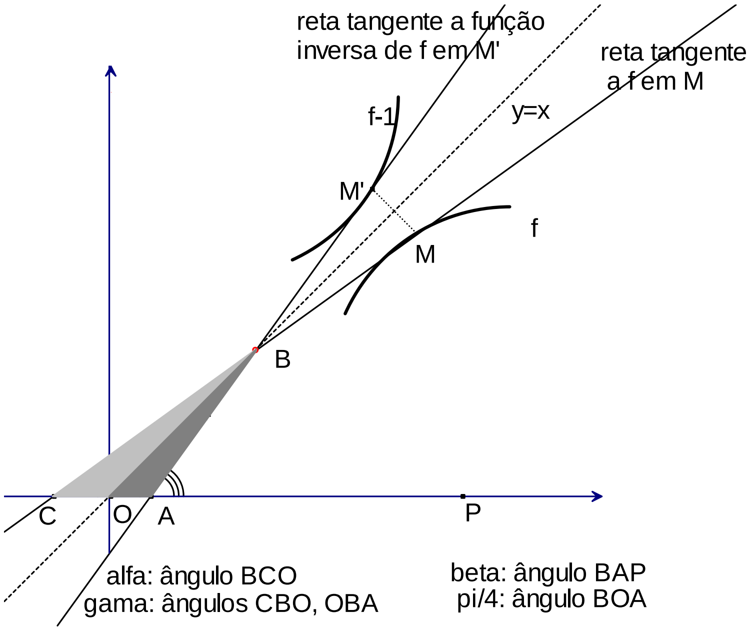


Figura 76 – Relações entre inclinações

Do triângulo OBC vem que $\alpha + \gamma = \dfrac{\pi}{4}$ (1)

Do triângulo OAB vem que $\dfrac{\pi}{4} + \gamma = \beta$ (2)

Subtraindo-se membro a membro vem que $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ de modo que $\tan\beta = \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$. Como f é estritamente crescente, $\alpha \neq 0$, implica em tan $\alpha \neq 0$. Da definição de derivada vem que

$$(f^{-1})'(f(x) = \frac{1}{f'(x)},$$

O que apresentei, neste apêndice, corresponde a uma aula de Cálculo Diferencial e Integral, na qual os aspectos que foram apresentados nesta tese a respeito de imaginação, intuição e visualização podem ser colocados em prática em uma disciplina que, poucas inovações tem apresentado, especialmente na Licenciatura em Matemática e que, foca o curso em aplicações de fórmulas de derivação e integração, muitas vezes.

5 Bibliografia consultada

BARTLE, Robert G. **Elementos de análise real**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1983.

DOMINGUES, Hygino H. **Espaços métricos e introdução à topologia**. SP: Editora Atual, 1982.

KUELKAMP, Nilo. **Introdução à topologia geral**. Florianópolis. Editora daU.F.S.C., 1988.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real**, v.1. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.

APÊNDICE E: EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Chama-se função ao terno constituído de:

- um conjunto A denominado de conjunto de partida ou domínio;

- um conjunto B denominado de conjunto de chegada;

- uma lei f que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$.

Usa-se a notação $y = f(x)$ e o conjunto $f(A) = \{y \in B | y = f(x) \text{ com } x \in A\}$ é denominado conjunto imagem da função. Quando o conjunto A é o conjunto dos números reais ou um subconjunto dele, a função f é dita de variável real e, quando o conjunto B é o conjunto dos números reais ou um subconjunto dele, a função é dita função real. Dessa forma, quando tanto A quanto B forem o conjunto dos reais ou subconjunto dele, a função é dita função real de variável real.

O gráfico cartesiano de uma função é um conjunto de pontos (x, f(x)) do plano cartesiano, correspondentes aos valores que x assume no campo de definição da função (domínio). As figuras abaixo mostram gráficos de três funções diferentes, expressas pela mesma lei f, porém com conjuntos domínios diferentes. Esse tipo de consideração, usualmente, não é feito, nem na escola básica e até mesmo no ensino superior em disciplinas ditas de fundamentos matemáticos.

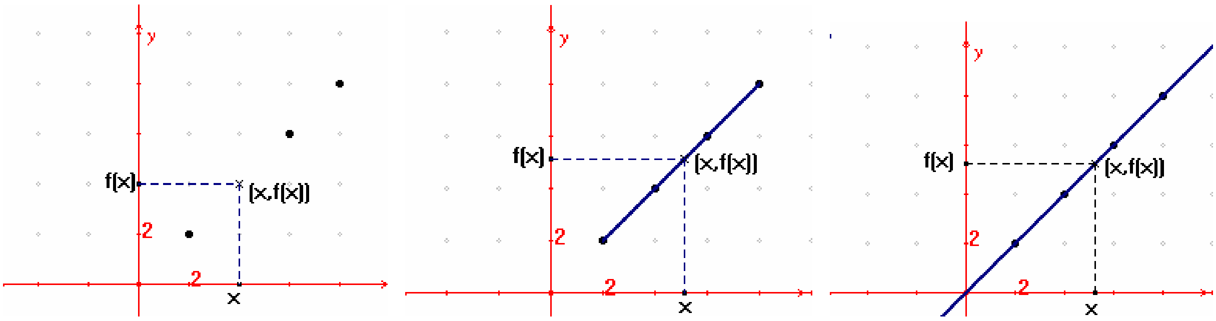


Figura 77 – Gráficos lineares

Considero que seja relevante para a aprendizagem matemática que os aspectos visuais sejam levados em consideração no estudo e análise de funções como, por exemplo, no estudo da função quadrática $f: R \to R$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e b, c reais quaisquer, cujo gráfico é denominado parábola. Algumas propriedades geométricas são importantes de serem destacadas, como é o caso de verificar que a parábola separa o plano em duas regiões, sendo uma convexa e outra não convexa (côncava). Uma região do plano é dita convexa se unindo dois quaisquer de seus pontos o segmento de reta está totalmente contido nessa região. Dessa forma, a primeira das figuras abaixo apresenta uma região com a concavidade voltada para baixo enquanto que a segunda apresenta uma região com a concavidade voltada para cima.

Outra característica que é fundamental de ser analisada nos gráficos de função é a existência de simetrias, ou seja, diz-se que o gráfico de uma função y = f(x) apresenta uma simetria em relação a um eixo paralelo ao eixo vertical, por exemplo, como nas figuras abaixo (fig. 78), se os valores da função são iguais, em pontos simétricos a um dado ponto do domínio da função.

No caso da função quadrática, estudar as simetrias do gráfico da função pode levar a uma compreensão do que seja um ponto de máximo ou de mínimo da função, ou um vértice da parábola e isso permite que as coordenadas do vértice possam ser determinadas de forma elementar, sem recursos das ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral, a saber, o operador derivação, o que não é usual e não faz parte dos currículos da escolar básica, nem a simples utilização de fórmulas previamente apresentada aos alunos. Entretanto, uma conexão dessa forma, feita nos cursos de formação de professores, pode ser um dos indicativos de melhoria do ensino básico. Atrelando-se um comparativo com os coeficientes da lei que define a função quadrática o auxilio visual pode permitir uma conceituação adequada para os estudantes.

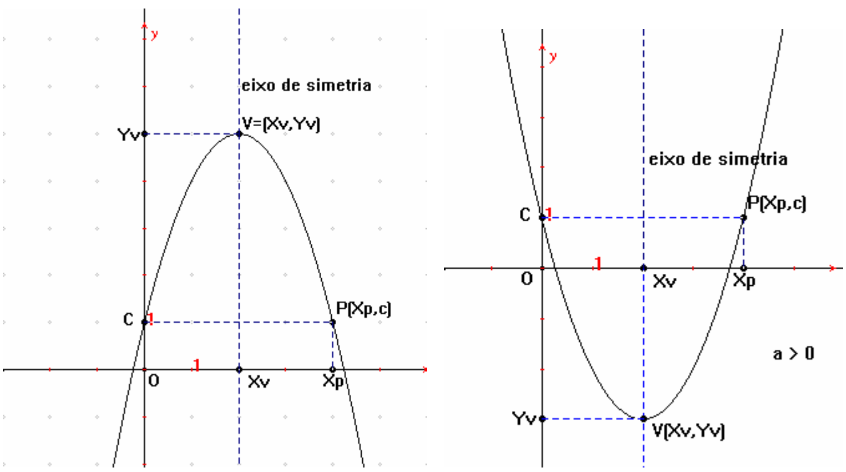


Figura 78 – Gráficos de funções quadráticas a < 0 (concavidade para baixo – vértice é ponto de máximo) figura 78 (esquerda)

a > 0 (concavidade para cima – vértice é ponto de mínimo) figura 78 (direita).

Em geral, não é analisado no estudo da função quadrática o significado geométrico que possui a constante real c, na lei que define a função quadrática, pelo fato de que esse estudo, usualmente, se limitar a processos algorítmicos e não ao que foi denominado nessa tese de geometrização do currículo matemático. Assim, c denota a ordenada do ponto em que o gráfico da função corta o eixo vertical (variável dependente), e corresponde no gráfico da função a um ponto P = (x_p, c). Calculando-se abscissa do ponto que corresponde à ordenada c, isto é:

f(x) = $ax^2 + bx + c = c \Leftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b)= 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\Leftrightarrow ax + b= 0$ e como $a \neq 0$ vem que $x_p = \frac{-b}{a}$. Mas a parábola é simétrica em relação a um eixo que passa pelo vértice. Assim, a abscissa do vértice corresponde ao ponto médio entre (0, c) e P = (x_p, c), ou seja:

$$x_V = \frac{-b}{2a}.$$

Busca-se, a partir disso, a ordenada desse vértice, isto é, o valor da função f correspondente ao valor x_V. Calculando-se:

$$f(x_V) = f(\frac{-b}{2a}) = a.(\frac{-b}{2a})^2 + b.(\frac{-b}{2a}) + c = \frac{b^2}{4a} + \frac{b^2}{2a} + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = y_V$$

As coordenadas do vértice são dadas por:

$$V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a})$$

Finalizando, uma conexão entre aspectos algébricos e geométricos pode ser feita por meio dos zeros da função quadrática, os quais são, exatamente, os valores das abscissas dos pontos em que o gráfico da função corta o eixo horizontal (variável independente), ou seja, são os pontos (x, 0), logo para obtê-los basta igualar f(x) = 0 e resolver a equação.

Agora, supondo que o crescimento de um cachorro esteja sendo analisado por um pesquisador. No início da pesquisa, o cão pesa 30 kg. No mês seguinte o peso aumentou em 10%. Na terceira medição aumentou novamente 10% e assim sucessivamente por um período de um ano de observação.

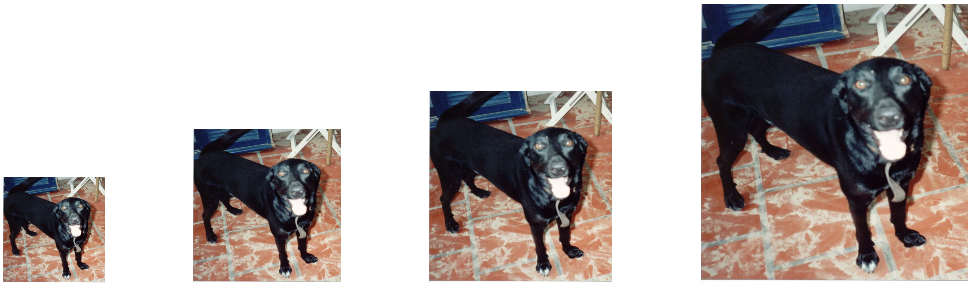


Figura 79 – Crescimento

Na resolução de tal situação-problema, uma tabela pode ser montada, em que a cada mês o acréscimo de peso, considerado em 10% ao mês, é acrescido ao peso do mês anterior. Os dados podem ser escritos em uma forma de produto. Assim, o terceiro termo pode ser escrito a partir do segundo e conseqüente a partir do termo inicial, gerando o que se denomina uma seqüência. Assim, se pode escrever a seqüência (1º , 2º , 3º , ..., 10º , ..., x-ésimo termo)

Período (meses)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Peso (kg)	30	33											

Pode-se pensar que existe uma função f: {0,1,2,3,....} $\rightarrow$ **R** que é denominada seqüência de números reais. Sua lei é dada por

$$f(x) = x_0(1 + \frac{p}{100})^x ,$$

em que x denota a variação em meses, x_0 denota o peso inicial e p a taxa de crescimento. A partir disso é possível esboçar o gráfico dessa função, isto é, representar os pontos (x, f(x)) do gráfico dessa função, como a seguir.

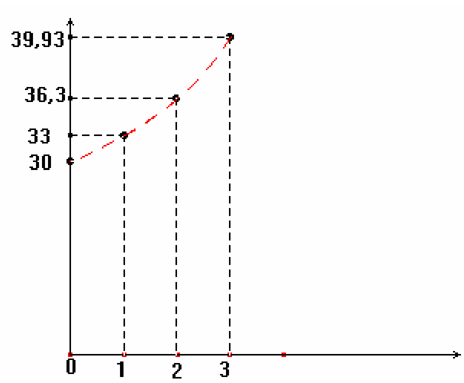


Figura 80 – Gráfico do crescimento exponencial

Como o animal não cresce por etapas em tempos isolados depois de cada mês, é preciso generalizar o que foi feito anteriormente com seqüências para a função obtida. Assim, o domínio de tal função pode ser modificado, reduzido ou ampliado. Observando que não faria sentido um problema de crescimento a uma taxa nula, a função f dada acima pode ser definida por:

$$f: R \to R \quad por \quad f(x) = m.a^x,$$

em que m e a são números reais fixos e a > 0. Note que se fosse a = 0 ou a = -1 teríamos

$$0^{-1} = \frac{1}{0} \, que\ não\ é\ uma\ operação\ definida\ nos\ reais.$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1} \, que\ também\ não\ é\ operação\ definida\ nos\ reais.$$

A função assim definida é denominada função exponencial.

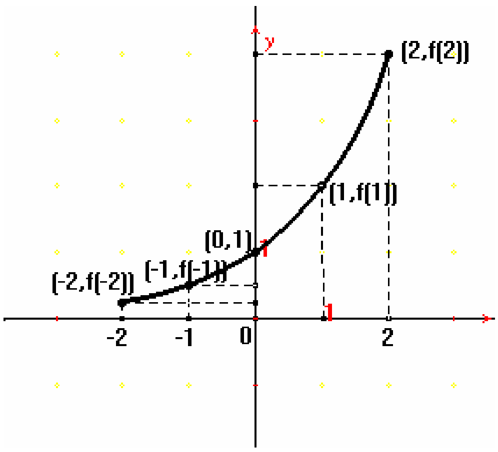


Figura 81 – Gráfico da função exponencial

O gráfico acima foi representado apenas no intervalo [-2,2], porém a função é definida em **R**, o que faz com que se aproxime, assintoticamente do eixo horizontal quando x é infinitamente pequeno e cresce infinitamente quando x é infinitamente grande.

Uma função f: A $\rightarrow$ B dada por y = f(x) é dita bijetora quando:

(i) a todo elemento x $\in$ A corresponder um e somente um elemento y $\in$ B tal que f(x) = y;

(ii) de modo recíproco, todo elemento y $\in$ B é imagem de pelo menos um x $\in$ A pela lei f.

A parte (i) diz que a função é injetora e a (ii), que é sobrejetora. Assim, a cada elemento de A corresponde um único elemento de B (definição de função de A em B) e vice-versa, isto é, a cada elemento de B corresponde um único elemento de A (definição de função de B em A). A função f^{-1}: B $\rightarrow$ A dada por $f^{-1}(y) = x$ tal que f(x) = y é denominada função inversa de f.

Exemplificando:

f: R $\rightarrow$ R dada por f(x) = 2x tem por inversa $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

g: R $\rightarrow$ R dada por g(x) = x3 tem por inversa $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Para obter a lei que define a função inversa de uma determinada função, em geral, o livro didático do Ensino Médio segue a seguinte seqüência de raciocínio:

- troque x(variável independente do domínio) por y(variável dependente do contradomínio) pois a nova função tem por domínio o conjunto imagem da primeira e por conjunto imagem o domínio da primeira;

- Isole a nova variável dependente (novo y) para poder expressar uma lei y = g(x). Com isto você estará mostrando que a função inicial é injetiva e que está bem definida.

Um detalhe que é importante aqui salientar é de que se a função inicial não for sobrejetiva, basta neste momento se redefinir a função f, inicial, colocando no lugar do contradomínio de f o conjunto imagem f(A), que passará a ser o domínio da nova função. Portanto, o essencial para uma função admitir uma função inversa é que seja injetiva. Muitas vezes, o significado geométrico nessa situação não é levado em consideração, ficando, como em tantas outras situações, unicamente a exploração algorítmica.

Considerando-se os dois exemplos acima, temos

- f: R $\rightarrow$ R dada por f(x) = 2x. Nota-se que f(**R**) = **R** e, portanto, a função é sobrejetora, seu contradomínio coincide com seu conjunto imagem.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2\,x_1 = 2\,x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow$ f é injetiva.

Troca-se em y = f(x) = 2x, x por y e vice-versa. Assim, x = 2y. Isolando-se y nessa última igualdade se obtém $\frac{x}{2} = y$. Daí, $g(x) = \frac{x}{2}$ é a função inversa de f(x) = 2x.

- g: R $\rightarrow$ R dada por g(x) = x^3. Nota-se novamente que g(**R**) = **R** e, portanto, a função é sobrejetora, seu contradomínio coincide com seu conjunto imagem.

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow (x_1)^3 = (x_2)^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow$ f é injetiva.

Trocando-se em y = g(x) = x^3, x por y e vice-versa, tem-se x = y^3. Ao isolar y nessa última igualdade se obtém $\sqrt[3]{x} = y$. Daí, $y = \sqrt[3]{x}$ é a lei da função inversa de g(x) = x^3.

Isto feito, considera-se a função exponencial, dada pelo seu gráfico (fig. 60). A análise permite concluir que ela é estritamente crescente, tem domínio **R** e contra-domínio **R** no qual não é sobrejetora – não há pontos no gráfico abaixo do eixo horizontal. Pode-se redefinir a função no seu conjunto imagem, f(**R**) = $\mathbf{R}^+$-{0}, no qual passa a ser tanto sobrejetora e injetora, logo admitindo inversa.

A partir dos pontos plotados (fig. 81) do gráfico da função exponencial, f: **R** $\rightarrow$ **R** dada por f(x) = a^x (a > 0 e a$\neq$ 1), considerando-se a existência de sua inversa, pode-se plotar o gráfico dessa inversa:

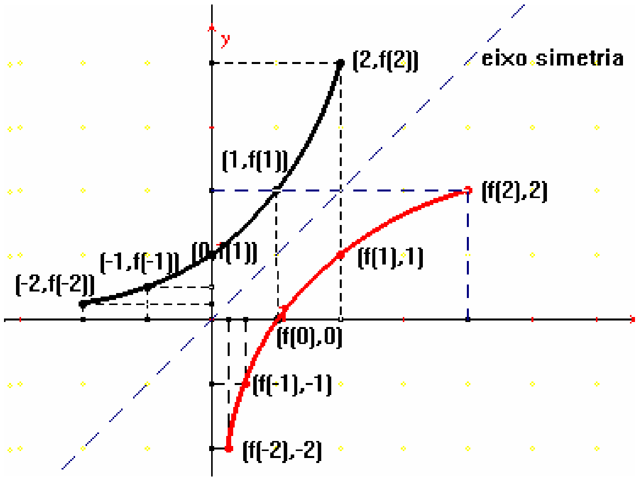


Figura 82 – Gráfico da função exponencial e logarítmica

f^{-1}: $\mathbf{R}^{+}$-{0} $\rightarrow$ **R** é dada por $f^{-1}(y) = x$ de tal forma que $y = f(x) = a^x$, cuja notação é:

$$y = \log_a (x) \Leftrightarrow a^y = x.$$

Essa função se chama **função logarítmica** e, dessa forma, concluo minhas considerações finais com um exemplo mostrando que os aspectos visuais obtidos a partir de imaginação, intuição e visualização podem ser utilizados na construção de inúmeros conceitos matemáticos, reafirmando minha resposta a meu problema de pesquisa dos por quês utilizar o tripé acima na construção de conceitos matemáticos em diversas áreas do conhecimento matemático.