

Universidade Federal do Paraná
Curso de Pós-graduação em Física
Dissertação de Mestrado

Marcos Cesar Santos

Busca Markoviana Super Difusiva: Origens e
Relevância das Leis de Potência

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Física

Orientador: *Prof. Dr. Marcos Gomes Eleutério da Luz*

Curitiba - PR

2008

À minha Mãe Maria Helena de Lima, meu Pai José Manoel dos Santos, minha Avó Maria Souza de Lima e meu irmão Maurício Emanuel dos Santos pela paciência e compreensão em todos esses anos.

Agradecimentos

- À minha família;
- Ao meu orientador Prof. Dr. *Marcos Gomes Eleutério da Luz* (UFPR) pela motivação e influência decisiva na minha formação acadêmica e científica;
- Ao meu co-orientador Prof. Dr. *Madras Viswanathan Gandhi Mohan* (UFAL) pelas discussões, motivação e suporte;
- Ao Prof. Dr. *Ernesto Carneiro Pessoa Raposo* (UFPE) pelos projetos em colaboração;
- Ao grande amigo e colaborador *Fabiano Manoel de Andrade* pelo incentivo, ajuda nos momentos críticos e pelo suporte computacional, Linux, \LaTeX ;
- Ao grande amigo e colaborador *Cristiano Francisco Woellner* pelo incentivo, ajuda nos momentos críticos e pelo suporte computacional, Linux, \LaTeX ;
- Ao Prof. Dr. *Bin Kang Cheng* (UFPR) pelo incentivo;
- Ao Prof. Dr. *Carlos de Carvalho* (UFPR) pelo suporte computacional e incentivo;
- Aos colegas e professores da pós-graduação;
- Ao LCPAD/C3SL pela infra-estrutura computacional;
- Ao FISUX Group pelo suporte computacional. Em particular pelo template \LaTeX THESIS que formatou esta dissertação;
- Ao CNPq e a CAPES pelo apoio financeiro;
- À Universidade Federal do Paraná.

Resumo

Estudamos o problema de Busca Aleatória, sob um contexto de otimização (conhecido em Ciências Biológicas como "foraging"). Trata-se de determinar estratégias ótimas de busca que maximizam uma função de eficiência (função de "fitness") definida adequadamente para qualificar o desempenho de cada estratégia avaliada. Consideramos de forma geral processos de busca por alvos (objetos da busca) que estão distribuídos homogeneamente em posições aleatórias sobre ambientes com métrica Euclidiana em d -dimensões. Nossas simulações numéricas, entretanto, são restritas ao caso 2d. Neste modelo, os alvos são detectados pelo caminhante (entidade que realiza a busca) apenas quando este estiver nas vizinhanças da posição de cada alvo. Discutimos o sistema em termos de teoria de caminhadas aleatórias, em particular, da caminhada de Lévy, caracterizada por passos ℓ_j (deslocamentos do caminhante), distribuídos de acordo com a lei de potência $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$, onde $1 < \mu \leq 3$ (distribuição de Lévy generalizada). Processos governados por distribuições com a forma de $P(\ell)$ e com $\mu < 3$, violam o Teorema do Limite Central em razão da divergência do primeiro (ou segundo momento), levando assim à difusão anômala. A distribuição de Lévy generalizada permite-nos comparar o desempenho das estratégias de busca superdifusivas ($\mu < 3$), com as estratégias Brownianas ($\mu \geq 3$). Começamos discutindo a busca no contínuo, realizada por um caminhante isolado, este modelo já é conhecido na literatura, e o apresentamos aqui para usá-lo como referência e ponto de partida visando estender sua aplicabilidade a outros sistemas. Na seqüência discutimos a primeira contribuição deste trabalho, que constitui-se de um modelo que pretensamente descreve o processo de busca aleatória de um grupo de caminhantes, devido a forte correlação entre o líder e demais indivíduos do grupo. A segunda contribuição desta dissertação é a análise da busca em espaços discretos, redes regulares (sem defeitos) e redes fragmentadas (com defeitos), ambas redes do tipo grande-mundo "large-world network". Os sistemas que estudamos aqui puderam ser otimizados por estratégias superdifusivas.

Abstract

We study the random search problem (known in Biology as foraging) in the optimization context. It is related to the general question of optimizing the random search through a fitness function, defined so to measure the strategy efficiency. Generally, we consider the searching process of looking for target sites which are randomly and uniformly distributed in an environment with an Euclidean metric in d dimensions. However, our numerical simulations are restricted to 2d. In the model, the targets are detected only when the searcher is in their vicinity. We discuss the system based on the random walk theory, in particular, Lévy random walks, characterized by steps ℓ_j (the walker displacements), following the power law distribution $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$, where $1 < \mu \leq 3$. Processes obeying such distribution $P(\ell)$, with $\mu < 3$, do not satisfy the Central Limit Theorem because the divergence of the second (or even first) moment, resulting in anomalous diffusion. To define $P(\ell)$ in terms of the Lévy generalized distribution allow us to compare super-diffusive ($\mu < 3$) with Brownian ($\mu \geq 3$) strategies. In the specific cases discussed, we start analyzing searching in the continuous space, performed by a single searcher. This model, already known in the literature, is used to review the main aspects of the problem. Then, we present the first new contribution of this work, the searching performing in group, assuming a leader having strong correlations with the other elements of the group. The second new result is the analysis of random search in discrete spaces, regular lattices (without defects) and defected lattices (with defects), both large-world networks. In all the cases studied, we find that super-diffusive strategies lead to optimal outcomes, thus explicitly showing that Lévy-like behavior can be an advantage in certain processes in Nature.

Sumário

Agradecimentos	3
Resumo	4
Abstract	5
Sumário	6
1 Introdução	1
2 Revisão da Teoria de Busca Aleatória	4
2.1 Fundamentação Teórica	4
2.2 Processos Estocásticos	4
2.2.1 Probabilidade Condicional	4
2.2.2 Classificação dos Processos Estocásticos	5
2.3 Teorema do Limite Central (TLC)	6
2.3.1 Teorema do Limite Central - Demonstração	7
2.3.2 Difusão Normal e Super-difusão	9
2.4 Algumas Distribuições Notáveis	10
2.4.1 Distribuição Binomial	10
2.4.2 Distribuição de Poisson	11

2.4.3	Distribuição Gaussiana	12
2.4.4	Distribuição de Lévy	13
2.4.5	Expansões da Distribuição de Lévy para ($r \gg 1$) e ($r \ll 1$)	13
2.5	Teorema do Limite Central Generalizado (TLC-G)	15
2.6	Caminhada Aleatória - “Random Walk”	16
2.6.1	História e Origens	16
2.6.2	Caminhada Aleatória em 1D	17
2.6.3	Caminhada Aleatória em 2D	21
2.7	Sistemas Discretos	23
2.7.1	Redes de Pequeno Mundo (“Small-world Networks”)	23
2.7.2	Primeira Visita e Probabilidade de Retorno	25
2.8	Processos Estocásticos em Física	26
2.8.1	Einstein e o Movimento Browniano	26
2.8.2	Teoria de Langevin	28
2.8.3	Equação de Fokker-Planck	29
2.9	Processos Estocásticos em Economia	29
2.10	Processos Estocásticos em Biologia - “Foraging”	31
3	Processos de Busca no Contínuo	32
3.1	Definição de Processo de Busca	33
3.1.1	Ambientes de Busca	33
3.1.2	Heurística	35
3.2	Modelo Estatístico - Analítico	37
3.2.1	Efeitos da Concentração de Alvos sobre a Eficiência η	42
3.2.2	Balanço Energético	43
3.2.3	Vantagens das Estratégias de Lévy	44
3.3	Simulação Computacional	44

3.3.1	O Modelo - Regras Dinâmicas	45
3.3.2	Eficiência e Condição de Contorno da Simulação	45
3.3.3	Comparação com o Modelo Analítico	45
4	Processos de Busca Coletiva	48
4.1	Dinâmica “Siga o Líder”	49
4.2	Grandezas Relevantes	50
4.3	Modelo “Siga o Líder” Sem Desordem	52
4.4	Modelo “Siga o Líder” com Desordem Gaussiana	53
4.4.1	Valor Esperado do Raio do Bando $\langle R_B \rangle$	56
4.4.2	Relação entre o Raio do Bando R_B e a Caminhada do Líder	58
4.5	Modelo “Siga o Líder” Contínuo	62
4.5.1	Caminhadas Distintas para os “Foragers” e o Líder	62
4.5.2	Lévy Truncado em T_L para o Líder e em T_f para os “Foragers”	63
4.5.3	Relação entre o Raio do Bando R_B e a Caminhada do Líder	64
4.6	Modelo “Siga o Líder” Incrementativo	66
4.6.1	Caminhadas Distintas para os “Foragers” e o Líder	66
4.6.2	Lévy Truncado em T_L para o Líder e em T_f para os “Foragers”	67
4.6.3	Valor Esperado para o Raio Médio do Bando $\langle R_B \rangle$	67
4.6.4	Regras Dinâmicas - Simulação da Busca Coletiva	68
4.6.5	Extensão do Modelo Analítico	69
5	Processos de Busca em Ambientes Discretos	71
5.1	Busca em Redes	71
5.2	Construção das Redes Regulares	72
5.3	Definição do Modelo	73
5.4	Análise dos Resultados	76
5.4.1	Baixas Concentrações de Sítios-alvo $\lambda/r_v > 200$	76

5.4.2	Concentrações Intermediárias de Sítios-alvo $1 < \lambda/r_v < 200$	78
5.4.3	Alta Concentração de Sítios-alvo $0 < \lambda/r_v < 1$	79
5.4.4	“Foraging” Destrutivo e Não-Destrutivo	79
5.4.5	Eficiência na Rede Quadrada e na Triangular	80
5.4.6	“Foraging” em Ambientes Contínuos e Discretos	83
5.5	Busca em Redes Irregulares	84
5.6	Definição do Modelo	87
5.7	Análise dos Resultados	88
5.7.1	Truncamento dos Saltos de Lévy	88
5.7.2	Solução Analítica	91
5.7.3	Condição de Contorno	95
5.7.4	Otimização do “Foraging”	98
6	Conclusões	101
6.1	Considerações Finais	101
6.1.1	Resumo dos Resultados	102
6.2	Projetos Futuros	103
6.2.1	“Quantum Random Walk”	103
	Referências Bibliográficas	105

Introdução

Processos de busca podem ser fenômenos muito complexos [1–4] e o problema geral de localizar alvos distribuídos aleatoriamente em ambientes arbitrários [3–8] tem se mostrado promissor em várias áreas do conhecimento. Como exemplo citamos: biologia [3, 4, 9–12], modelando a dinâmica de seres vivos à procura de alimentos; geologia, para recuperação de poços de petróleo maduros [1]; e finalmente a teoria da informação [13–16] implementando a busca de registros em bancos de dados de alta capacidade ou redes dinâmicas como a “Internet”.

Um grande número de fenômenos em física, ecologia, química, economia [17–19] são caracterizados por distribuições com invariância de escala das variáveis relevantes, sendo em muitas situações, associados com caminhadas de Lévy e vôos de Lévy [20, 21]. Num contexto de mecanismos de difusão, estes sistemas apresentam deslocamento quadrático médio, que para tempos suficientemente longos, crescem de acordo com t^α com $\alpha > 1$. Em processos estocásticos como caminhadas aleatórias, existem diferentes razões que conduzem à observação de superdifusão e distribuições com caudas longas dadas por leis de potências. Para exemplificar alguns deles mencionamos (i) a evolução governada pela equação de Fokker-Planck fracional [17, 22]; (ii) sistemas dicotômicos, nos quais dois tipos de escalas podem ser identificadas, microscópica e macroscópica [23]; (iii) a existência de correlações entre os eventos relacionados às variáveis relevantes [24]; (iv) processos multiplicativamente randômicos, na presença de condições de contorno (barreiras repelentes) [25, 26]. Além disso, a distribuição de Lévy estável, associada a variáveis de processos randômicos pode descrever fenômenos como a diversidade de espécies em ecologia evolucionária [27–29] que contribui decisivamente para evitar eras de extinção em cenários de baixa disponibilidade de recursos energéticos [30].

A segunda metade do século XX registrou um aumento notável no interesse em mo-

delos de “foraging” ótimo. Estes modelos baseam-se na hipótese, empiricamente motivada [9, 10, 31], de que animais utilizariam estratégias de buscas que otimizam o desempenho na detecção de alimento. Modelos como o da dieta ideal, primeiramente testado por John Goss-Custard, que descreve o comportamento de um “foraging” que encontra diferentes tipos de presas e deve escolher qual atacar [32–36], os modelos de seleção de caminhos, descrevendo a dinâmica de um “foraging” cujas presas estão concentradas em pequenos aglomerados com distâncias consideráveis entre eles [3–8, 37–39]. Dados empíricos [9, 10] descrevendo a dinâmica da busca de alimento realizada por animais e publicações recentes [3, 40–42] sugerem a divergência da variância na distribuição de deslocamentos dos animais durante a busca de alimento.

Modelamos o processo de busca, baseado em caminhadas aleatórias cuja a métrica associada à distribuição de deslocamentos é $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$, com $1 < \mu \leq 3$, conhecida como distribuição de Lévy generalizada. Escolhas no intervalo $2 < \mu < 3$ resultam em distribuições com média finita e variância infinita, que por sua vez, cresce com o tempo de caminhada de acordo com $t^{4-\mu}$ (andar ℓ_j leva um tempo $t \equiv \ell_j$). Ajustando $1 < \mu \leq 2$ as distribuições têm média e variância infinita, e esta última cresce com t^2 , resultando em caminhadas de Lévy superdifusivas. O intervalo $\mu > 3$ corresponde a $P(\ell)$ com variância finita, conduzindo a caminhadas Brownianas, com difusão normal, enquanto a região divergente, ($\mu < 1$) não corresponde às distribuições normalizáveis e deve ser desprezada. Variar o parâmetro μ corresponde a considerar estratégias superdifusivas ($\mu < 3$) e as estratégias Brownianas ($\mu \geq 3$). Utilizando o conceito de função de “fitness”, que é uma função da estratégia μ e dos parâmetros que caracterizam o ambiente de busca, e que materializa-se como um critério matemático para qualificar o desempenho da busca. Em particular, definimos a função de “fitness” sob o argumento de que as estratégias e busca que otimizam a busca devem maximizar o ganho generalizado (ganho energético em calorias no caso do “foraging” biológico) e minimizar o custo generalizado envolvido na busca (queima de calorias durante a busca, no caso biológico). Estas condições de otimização manifestam-se como pontos críticos da função de “fitness” e portanto desejamos determinar que estratégias de busca (valores de μ) maximizam a função de “fitness” e conseqüentemente otimizam o processo de busca. Obtivemos aproximações estatísticas das funções de “fitness” que concordam, qualitativamente, com os resultados obtidos via simulação computacional mostrando, em todos os casos considerados, que as estratégias baseadas em caminhadas superdifusivas conduzem à otimização do processo de busca.

O crescimento populacional e tecnológico registrado no século XX, implicou na geração de inúmeros novos problemas relacionados à otimização de sistemas, tais como

ampliação das malhas rodoviárias, rotas de vôo, transporte de cargas e correios, além da implantação de redes de comunicação como telefones e "internet" a fim de manter todos os cantos do globo supridos e conectados. Estes problemas têm sido abordados e tratados no contexto da teoria de sistemas complexos, com a finalidade de compreender os fenômenos envolvidos e, portanto, possibilitando a posterior solução dos mesmos. A modelagem destes sistemas é melhor descrita via *teoria de sistemas discretos*, que por sua vez, em geral sempre foram relegados a segundo plano em favor do desenvolvimento das *teorias do contínuo*. A busca de informação na "internet" é feita por dispositivos denominados "crawlers", os quais visam minimizar os custos de inspeção do espaço de busca. Não é possível para os indexadores, varrer todo o espaço de busca tornando crítica a otimização destes dispositivos. Experimentos e simulações [8, 14–16], sustentam a hipótese de que processos definidos pela distribuição de Lévy, serem relevantes na modelagem destes sistemas. Recentemente, muitos trabalhos [7, 14–16, 43] têm sido publicados avaliando a aplicabilidade dos modelos de redes no estudo de problemas complexos como processamento neural [15, 16, 43], dinâmica de redes de computadores [16] e dinâmica de redes sociais [44]. Em consequência do grande número de trabalhos, produziu-se uma vastidão de resultados [14, 43, 45] que confirmam a hipótese de as características topológicas, especialmente a conectividade, afetarem as propriedades de transporte de informação das redes.

Neste trabalho procuramos entender como a topologia das redes afeta a eficiência dos processos de busca. Para tanto consideramos duas variações de redes do tipo "large-word network" caracterizadas por distribuições de conexões Brownianas. No primeiro caso avaliamos as redes regulares (sem defeitos) e em seguida as redes fragmentadas (com uma fração χ dos sítios substituídos por defeitos). Introduzimos a idéia de "crawlers" que usam estratégias de Lévy eficientes par otimizar a busca admitindo que não seja possível reconectar a rede. Note que se for possível renormalizar a rede para obter a rede de pequeno mundo associada ("small-world network") a arquitetura da rede será otimizada e por sua vez o processo de busca também será [43]. Considerando redes do tipo "large-word network" atacamos o problema utilizando o mesmo procedimento que adotamos no tratamento da busca no contínuo. Definimos a função de "fitness" adequada ao caso discreto e obtivemos resultado semelhantes aos vistos no contínuo sugerindo a robustez das estratégias superdifusivas. Em projetos futuros trataremos o problema da busca em redes de alto desempenho como as redes de pequeno mundo, redes cuja distribuição de conexões é dada por leis de potências.

Revisão da Teoria de Busca Aleatória

2.1 Fundamentação Teórica

Neste capítulo abordamos o problema da busca aleatória generalizada [3–8] no contexto da teoria de processos estocásticos Markovianos [46] e, portanto, fundamentado na teoria de probabilidades [47]. Nesta seção apresentamos os conceitos básicos da teoria de processos estocásticos, desenvolvidos ao longo do século XX. Começamos definindo os processos estocásticos e seguimos demonstrando um dos principais teoremas da teoria de probabilidades, conhecido como “Teorema do Limite Central” e algumas das suas generalizações mais importantes [48]. Na sequência apresentamos de forma geral as distribuições notáveis, binomial, de Poisson, Gaussiana e distribuição de Lévy, que estão certamente entre as distribuições mais frequentemente observadas na Natureza. Munidos destas informações preliminares, passamos à teoria de caminhadas aleatórias Markovianas [49] e suas aplicações em algumas áreas do conhecimento como Física [50–52], Economia [53] e Biologia [40–42].

2.2 Processos Estocásticos

2.2.1 Probabilidade Condicional

Uma definição formal de probabilidade condicional é necessária a fim de permitir definir e classificar os processos estocásticos nas seções seguintes. Vamos usar a notação de Risken [52].

Se considerarmos somente as realizações de r variáveis randômicas ξ_1, \dots, ξ_r , onde as

últimas $r - 1$ variáveis randômicas assumem os valores fixos $\xi_2 = x_2, \dots, \xi_r = x_r$, obtemos uma certa densidade de probabilidade para a primeira variável randômica. chamada densidade de probabilidade condicional, escrita como $P(x_1|x_2, \dots, x_r)$. A probabilidade $W_r(x_1, \dots, x_r)dx_1 \dots dx_r$, de a variável randômica $\xi_i (i = 1, \dots, r)$ estar no intervalo $x_i \leq \xi_i \leq x_i + dx_i$ é a probabilidade $P(x_1|x_2, \dots, x_r)dx_1$ de a primeira variável estar no intervalo $x_1 \leq \xi_1 \leq x_1 + dx_1$ e de as outras variáveis assumirem valores $\xi_i = x_i (i = 2, \dots, r)$ vezes a probabilidade $W_{r-1}(x_2, \dots, x_r)dx_2 \dots dx_r$ de as últimas $r - 1$ variáveis estarem no intervalo $x_i \leq \xi_i \leq x_i + dx_i (i = 2, \dots, r)$, ou seja

$$W_r(x_1, \dots, x_r) = P(x_1|x_2, \dots, x_r)W_{r-1}(x_2, \dots, x_r). \quad (2.1)$$

Como W_{r-1} segue de W_r (detalhes em [52] seção 2.3.2 página 30) podemos expressar a densidade de probabilidade condicional em termos de W_r

$$\begin{aligned} P(x_1|x_2, \dots, x_r) &= \frac{W_r(x_1, \dots, x_r)}{W_{r-1}(x_2, \dots, x_r)}, \\ P(x_1|x_2, \dots, x_r) &= \frac{W_r(x_1, \dots, x_r)}{\int W_r(x_1, \dots, x_r)dx_1}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.2.2 Classificação dos Processos Estocásticos

Podemos definir a densidade de probabilidade condicional de uma variável randômica ξ no instante t_n sob a condição de a variável randômica no instante $t_{n-1} < t_n$ assumir o valor x_{n-1} e no instante $t_{n-2} < t_{n-1}$ assumir o valor x_{n-2} e finalmente no instante $t_1 < t_2$ assumir valor o x_1 tal que

$$\begin{aligned} P(x_n, t_n|x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) &= \langle \delta(x_n - \xi(t_n)) \rangle |_{\xi(t_{n-1})=x_{n-1}, \dots, \xi(t_1)=x_1,} \\ &(t_n > t_{n-1} > \dots > t_1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

De acordo com a equação (2.2) podemos expressar a densidade de probabilidade condicional em termos de W_r

$$\begin{aligned} P(x_n, t_n|x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) &= \frac{W_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)}{W_{n-1}(x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1)}, \\ P(x_n, t_n|x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) &= \frac{W_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)}{\int W_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)dx_n}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Classificamos assim os processos estocásticos descritos pela variável randômica ξ segundo Wang e Uhlenbeck [46] como segue:

- **Processo Puramente Randômico:** chamamos um processo de puramente randômico, se a densidade de probabilidade condicional P_n ($n \geq 2$ arbitrário) não depender dos valores $x_i = \xi(t_i)$ ($i < n$) da variável randômica nos instantes prévios $t_i < t_n$. *O futuro é independente do presente e do passado*

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) = P(x_n, t_n). \quad (2.5)$$

- **Processo Markoviano:** para um processo Markoviano, a densidade de probabilidade condicional depende apenas do valor da variável randômica $\xi(t_{n-1}) = x_{n-1}$ no último instante e não depende de $\xi(t_{n-2}) = x_{n-2}$ e demais valores. *Neste caso o presente afeta o futuro*

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (2.6)$$

- **Processo Geral:** o processo é dito geral quando a densidade de probabilidade condicional depende dos valores da variável randômica nos dois últimos ou mais instantes. *Aqui o passado influencia o futuro.*

2.3 Teorema do Limite Central (TLC)

O teorema do limite central é um alicerce da teoria de probabilidade e de fundamental importância em Mecânica Estatística. Intuitivamente, este teorema garante que a soma de N variáveis independentes, quando $N \rightarrow \infty$, tende a uma certa lei (a qual comporta-se como um atrator no espaço das distribuições). Quando a distribuição de variáveis independentes tem variância finita, o atrator para a soma será a distribuição Gaussiana [47] (veja uma demonstração na seção-2.3.1). O TLC explica a freqüente ocorrência da distribuição normal na natureza. Sua primeira manifestação em matemática foi devida à Abraham de Moivre em 1733, seguido independentemente por Pierre-Simon de Laplace em 1774. A distribuição foi redescoberta por Robert Adrian em 1808 e então finalmente por Carl Friedrich Gauss em sua famosa teoria de erros [54]. Um resultado central é a distribuição binomial aproximar-se da distribuição Gaussiana para $N \rightarrow \infty$, após ser apropriadamente centralizada e reescalada. Isto pode ser considerado como a primeira manifestação histórica do TLC e é freqüentemente referenciado como teorema de Moivre-Laplace. Uma breve revisão histórica sobre o tema pode ser vista em [55].

2.3.1 Teorema do Limite Central - Demonstração

Nesta seção apresentamos uma demonstração simples, apropriada ao contexto de caminhada aleatória (“random-walk”), originalmente apresentada por Chris H. Rycroft e Martin Z. Bazant [56]. É uma demonstração multi-dimensional do TLC. Uma derivação mais rigorosa pode ser encontrada em [47].

Considere uma caminhada aleatória com N passos de tamanho \mathbf{r}_j independentes e identicamente distribuídos segundo $p(\mathbf{r})$, onde \mathbf{r} é um vetor com métrica Euclidiana em d -dimensões. Desejamos avaliar $P_N(\mathbf{R})$, que é a função de densidade de probabilidade (FDP) associada à probabilidade de encontrar o “random-walker” na posição \mathbf{R} após N passos. Para deslocamentos independentes e identicamente distribuídos (IID), a (FDP) de posição final satisfaz a recursão

$$P_{N+1}(\mathbf{R}) = \int p(\mathbf{r})P_N(\mathbf{R} - \mathbf{r})d^d\mathbf{r}. \quad (2.7)$$

Esta é a equação de Bachelier, onde d é a dimensão espacial ($d = 1$ recupera o caso unidimensional comumente visto em demonstrações do TLC). A premissa chave é a independência dos passos (independência condicional), a qual permite a probabilidade de uma transição de $\mathbf{R} - \mathbf{r}$ para \mathbf{R} no N -ésimo passo ser obtida pelo produto das probabilidades independentes, como informa (2.7). Note ainda que supomos a posição futura (índice $N+1$) dependente apenas da posição atual (índice N) e não de toda a trajetória (o futuro depende apenas do presente!). Estas duas características sintetizadas pela expressão *independência condicional* são as condições necessárias e suficientes que classificam este processo como um processo Markoviano.

Partindo da equação (2.7) e sob o argumento de $P_N(\mathbf{R})$ variar em escalas muito maiores que um \mathbf{r} típico, quando $N \rightarrow \infty$, expandimos $P_N(\mathbf{R} - \mathbf{r})$ em série de Taylor para obter

$$\begin{aligned} P_{N+1}(\mathbf{R}) &= \int p(\mathbf{r}) \left[P_N(\mathbf{R}) - \mathbf{r} \cdot \nabla P_N(\mathbf{R}) + \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \nabla \nabla P_N \cdot \mathbf{r} + \dots \right] d^d\mathbf{r}, \\ P_{N+1}(\mathbf{R}) &= P_N(\mathbf{R}) - 0 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \langle r_i r_j \rangle \frac{\partial^2 P_N}{\partial R_i \partial R_j} + \dots, \\ P_{N+1}(\mathbf{R}) &= P_N(\mathbf{R}) + \frac{\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \rangle}{2d} \nabla^2 P_N(\mathbf{R}) + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

O termo de primeira ordem anula-se sob o argumento isotrópico, pois admitimos que \mathbf{r} seja identicamente distribuído. Assumimos ainda que os passos são tomados em intervalos

de tempo Δt e definimos o tempo como $t = N\Delta t$, obtendo

$$\frac{P_{N+1}(\mathbf{R}) - P_N(\mathbf{R})}{\Delta t} = \frac{\langle r^2 \rangle}{2d\Delta t} \nabla^2 P_N(\mathbf{R}) + \dots \quad (2.9)$$

Com $N \rightarrow \infty$, a distribuição limite $\rho(\mathbf{R}, t)$, definida por $P_N(\mathbf{R}) = \rho(\mathbf{R}, N\Delta t)$, satisfaz a equação de difusão

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho, \quad (2.10)$$

com $D = \langle r^2 \rangle / 2d\Delta t$. Como a caminhada começa na origem, a condição inicial é $\rho(\mathbf{R}, 0) = \delta(\mathbf{R})$. Para resolver esta equação diferencial parcial, vamos tomar a transformada de Fourier, definida por

$$\hat{\rho}(\mathbf{k}, t) = \int \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t) d^d \mathbf{x}, \quad (2.11)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \hat{\rho}(\mathbf{k}, t) d^d \mathbf{k}. \quad (2.12)$$

No espaço de Fourier a equação diferencial parcial original apresenta-se como a equação

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -Dk^2 \hat{\rho}, \quad (2.13)$$

cujas solução é

$$\hat{\rho}(\mathbf{k}, t) = \exp(-Dk^2 t) \hat{\rho}(\mathbf{k}, 0) = e^{-Dk^2 t}. \quad (2.14)$$

Tomando a transformada de Fourier inversa temos

$$\rho(\mathbf{R}, t) = \frac{\exp(-R^2/4Dt)}{(4\pi Dt)^{d/2}}, \quad (2.15)$$

para termos correspondência com o problema discreto com $N \rightarrow \infty$, escrevemos

$$P_N(\mathbf{R}) = \frac{\exp(-dR^2/2\langle r^2 \rangle N)}{(2\pi \langle r^2 \rangle N/d)^{d/2}}. \quad (2.16)$$

Este é o limite de $P_N(\mathbf{R})$ para valores elevados de N , numa caminhada isotrópica em d dimensões. A FDP para a posição tende para uma distribuição Gaussiana (ou distribuição normal) cuja largura depende apenas da variância dos deslocamentos individuais - variância de $p(\mathbf{r})$. A derivação prevê o mesmo limite assintótico para qualquer FDP bastando que $\langle r^2 \rangle$ exista.

Para caminhadas isotrópicas, podemos facilmente calcular a FDP da distância \mathbf{R} a partir da origem via

$$P_N(R) = A_d R^{d-1} P_N(\mathbf{R}), \quad (2.17)$$

onde A_d é a área da superfície da esfera unitária em d dimensões ($A_1 = 1, A_2 = 2\pi, A_3 = 4\pi, \dots$). Isto conclui a demonstração. Na seção seguinte mostramos as propriedades de difusão dos processos que satisfazem (ou não) o TLC.

2.3.2 Difusão Normal e Super-difusão

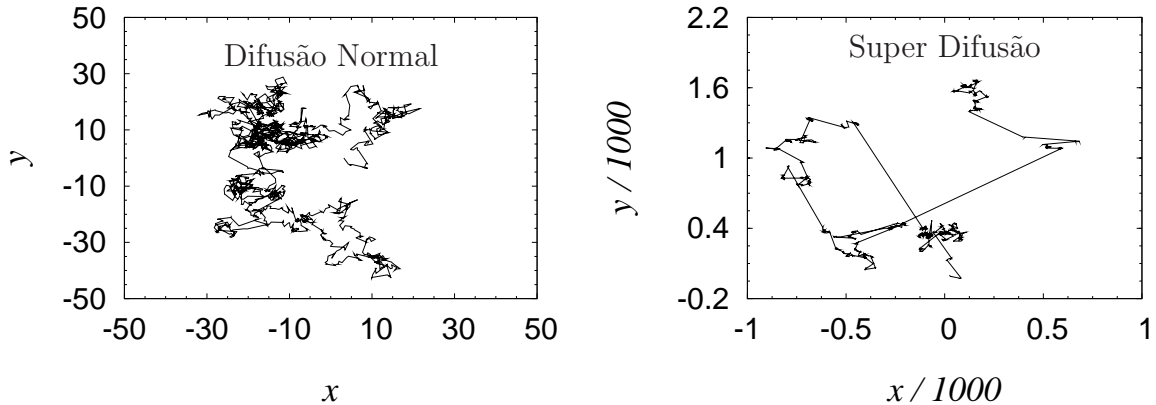


Figura 2.1: Processos onde $R \propto N^\nu$ com $\nu = 1/2$ evoluem com difusão normal e satisfazem o TLC. Com $\nu \neq 1/2$ diz-se que o processo possui difusão anômala, sendo que $\nu < 1/2$ caracteriza sub-difusão e $\nu > 1/2$ caracteriza super-difusão. A figura da esquerda é a trajetória de um “random walker” Browniano que move-se com distribuição de deslocamentos $p(r) \sim \exp(-r)$ (variância finita) em uma caminhada isotrópica ilustrando a difusão normal. A figura da direita é a trajetória de um “random walker” anômalo que move-se com distribuição de deslocamentos $p(r) \sim r^{-2}$ (variância infinita) em uma caminhada isotrópica ilustrando a super-difusão. Em ambos os casos a caminhada consiste de 2000 passos independentes começando na origem. Compare as escala e note como o processo super-difusivo afasta-se da origem mais rapidamente que no caso com difusão normal.

Como o TLC demonstrado na seção-2.3.1 sugere, as propriedades estatísticas da caminhada aleatória tendem para uma distribuição universal após um número elevado de passos. No caso da FDP da posição final $P_N(\mathbf{R})$, o resultado para caminhadas isotrópicas constitui-se em uma generalização do TLC para soma de variáveis independentes e identicamente distribuídas. Desde que o segundo momento $\langle r^2 \rangle$ exista para a distribuição de deslocamentos $p(\mathbf{r})$, a forma assintótica de $P_N(\mathbf{R})$ será dada pela equação (2.16). Como consequência do TLC a variância da posição R_n , após $N \gg 1$ passos, é proporcional a variância dos deslocamentos r

$$\text{Var}(R_N) = N \text{Var}(r), \quad (2.18)$$

válido para deslocamentos independentes e identicamente distribuídos. Este resultado

caracteriza a chamada difusão normal

$$R \propto \sqrt{\langle r^2 \rangle N} \propto N^{1/2}. \quad (2.19)$$

Sempre que $R \propto N^\nu$ com $\nu \neq 1/2$ diz-se que o processo evolui com difusão anômala, sendo que $\nu < 1/2$ caracteriza sub-difusão e $\nu > 1/2$ caracteriza super-difusão. A figura-2.1 exemplifica as duas situações no caso de caminhadas aleatórias (ver seção-2.6).

Nas situações onde as premissas do TLC não são satisfeitas podemos verificar que a distribuição assintótica para a posição final não converge para uma Gaussiana. Quando a variância da distribuição de deslocamentos $p(r)$ diverge, o atrator é frequentemente a distribuição de Lévy [47] em conformidade com o TLC-G, veja a seção-2.5. Outra forma de violar o TLC é estabelecer correlação entre os saltos ou interação entre os “random walkers” de modo que $R \propto N^\nu$ se dará com $\nu \neq 1/2$. Nestes casos o limite assintótico é mais abrupto e conduz a varias generalizações da equação da difusão.

2.4 Algumas Distribuições Notáveis

As distribuições binomial, de Poisson, Gaussiana e de Lévy estão certamente entre as mais frequentemente observadas na natureza, figura-2.2. Sem dúvida o TLC e o TLC-G ajudam a entender e justificar a onipresença destas distribuições na matemática e em sistemas reais. Como exemplo, considere repetidas tentativas independentes onde apenas dois resultados podem ser alcançados. Este experimento convencionalmente chamado de tentativas de Bernoulli “Bernoulli Trials” em homenagem a James Bernoulli (1654-1705), conduz à distribuição binomial - como mostraremos a seguir. Se o número de tentativas for elevado, então a probabilidade de k sucessos em n tentativas pode ser aproximada pela distribuição de Poisson. A distribuição binomial e a distribuição de Poisson são bem aproximadas pela distribuição normal (Gaussiana). Estas três distribuições são a base de muitas das análises de sistemas físicos para detecção, transmissão e armazenamento de informação. O mesmo se aplica à distribuição de Lévy nos sistemas onde eventos raros não são desprezíveis.

2.4.1 Distribuição Binomial

Considere um experimento booleano onde apenas dois resultados, *sucesso* e *fracasso*, podem ser obtidos, respectivamente com probabilidades p e q . Após n tentativas é possível

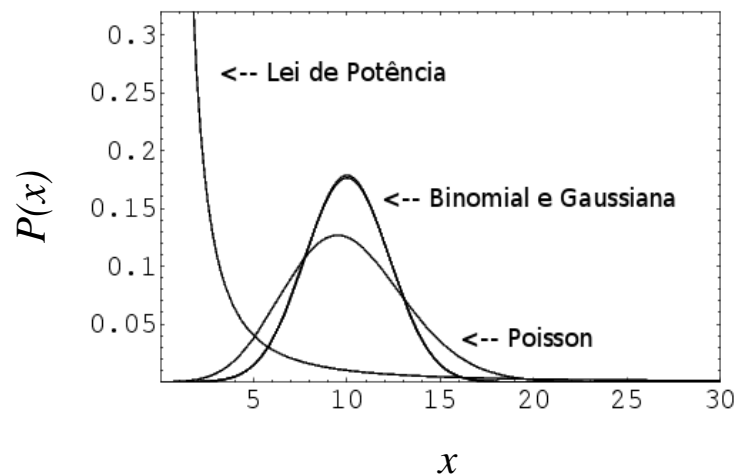


Figura 2.2: As distribuições binomial, de Poisson, Gaussiana e de Lévy estão certamente entre as mais freqüentemente observadas na natureza. Sem dúvida o TLC e o TLC-G ajudam a entender e justificar a onipresença destas distribuições na matemática e em sistemas reais. Note que as distribuições Gaussiana e binomial se sobrepõem porque plotamos a Gaussiana com média $\mu = np$ e variância $\sigma^2 = np(1 - p)$, que correspondem à média e variância da distribuição binomial. A distribuição de Poisson aparece com média e variância $\lambda = np$. A distribuição de Lévy está representada pela lei de potência $P(x) \sim x^{-2}$, com variância infinita.

obter $\binom{n}{k}$ (binômio de Newton) seqüências combinando fracassos e sucessos, em ordem diversa. Como as tentativas são independentes, a probabilidade de qualquer seqüência particular de k sucessos e $n - k$ fracassos é o produto das probabilidades $p^k(1 - p)^{n-k}$. Aqui usamos, $q = 1 - p$ e $n - k$, respectivamente como a probabilidade e a quantidade de fracassos. O número de seqüências equivalentes, $\binom{n}{k}$, multiplicada pela probabilidade de se obter cada seqüência, $p^k(1 - p)^{n-k}$, fornece a distribuição de probabilidade de se obter k sucessos com probabilidade p após n tentativas, resultando em

$$P(n, k, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}. \quad (2.20)$$

Esta é a chamada distribuição binomial. Note que a distribuição tem pico nas proximidades de np , que é uma quantidade importante na distribuição binomial. De fato, a média da distribuição é $\mu = np$ e sua variancia é $\sigma^2 = np(1 - p)$ fornecendo o desvio padrão $\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$.

2.4.2 Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson pode ser deduzida como um limite para a distribuição binomial, na qual n aumenta arbitrariamente enquanto o produto $\lambda = np$ permanece constante.

A distribuição de Poisson também pode ser derivada diretamente em diferentes processos reais. Como exemplo interessante, mencionamos o experimento onde queremos medir a probabilidade de detectar k fótons em um detector, considerando um intervalo de tempo $\lambda + d\lambda$. Encontramos então que

$$P(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad (2.21)$$

que é a distribuição de Poisson. Uma característica interessante da distribuição de Poisson é o fato de possuir média $\mu = np$ igual a sua variância $\sigma^2 = np$.

2.4.3 Distribuição Gaussiana

Essa distribuição aparece em diversos fenômenos na natureza, e em particular em processos relacionados à difusão normal ou Browniana. A razão da presença praticamente universal da distribuição Gaussiana se deve ao fato de emergir naturalmente como uma distribuição limite para processos aleatórios, como consequência do TLC (veja a seção-2.3.1). A formulação apresentada do TLC, pode ser entendida para variáveis fracamente interdependentes e para distribuições não muito heterogêneas, isto é, onde não haja domínio da variância de uma distribuição em relação às das outras. Sendo invariante por agregação de variáveis aleatórias, a distribuição Gaussiana é estável. O TLC explica assim porque distribuições com segundo momento finito convergem gradualmente para a distribuição estável Gaussiana. A distribuição Gaussiana é caracterizada por dois parâmetros: média μ e o desvio-padrão σ . Em geral a notação padrão para a variável x governada por uma distribuição Gaussiana é $x = N(\mu, \sigma)$. A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com distribuição normal dada por

$$P(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}X^2\right), \quad (2.22)$$

onde $X = \frac{x-\mu}{\sigma}$, é usualmente tomada como a distribuição Gaussiana padronizada, quando a variável aleatória X tem desvio-padrão unitário. Embora os valores $x < \sigma$ da parte central da distribuição possuam maior probabilidade de ocorrência, são as caudas das distribuições que fornecem informações relativas aos valores extremos.

2.4.4 Distribuição de Lévy

Existem muitos processos na natureza que são regidos por distribuições de Lévy, como o ritmo cardíaco de indivíduos saudáveis ou a foto-condutividade em semicondutores amorfos [53]. Para variáveis independentes e identicamente distribuídas e sob condições que serão descritas na seção-2.5, podemos encarar a distribuição de Lévy $L(\mathbf{r}; \mu, c, \alpha, \beta)$ como solução da equação de Bachelier. Sua função característica $\phi = \hat{L}(\mathbf{k}; \mu, c, \alpha, \beta)$ é

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{k}; \mu, c, \alpha, \beta) &= \exp [i|\mathbf{k}|\mu - |c\mathbf{k}|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sgn}(\mathbf{k})) \Phi(\alpha)], \\ \Phi(\alpha) &= \begin{cases} \tan(\pi\alpha/2), & \alpha \neq 1 \\ -(2/\pi) \log(|\mathbf{k}|), & \alpha = 1 \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde $c \geq 0$ é um parâmetro de escala, μ é a média, $-1 \leq \beta \leq 1$ é o terceiro cumulante “skewness” e $0 < \alpha \leq 2$ determina o comportamento assintótico da distribuição para $|k| \rightarrow \infty$. A função $\operatorname{sgn}(z) = \frac{z}{|z|}$ retorna o sinal do argumento ou zero. Estamos interessados na distribuições de Lévy simétrica ($\beta = 0$) e com média nula ($\mu = 0$), reduzindo a equação (2.23) a

$$\phi(\mathbf{k}; c, \alpha) = \exp(-c|\mathbf{k}|^\alpha), \quad (2.24)$$

e os casos especiais importantes da distribuições de Lévy surgem com $\alpha = 1, 2$

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{k}; c, 2) &= \exp(-c|\mathbf{k}|^2) && \text{Gaussiana generalizada } (\alpha = 2), \\ \phi(\mathbf{k}; c, 1) &= \exp(-c|\mathbf{k}|) && \text{Distribuição de Cauchy } (\alpha = 1). \end{aligned} \quad (2.25)$$

A representação no espaço ordinário é obtida via transformada inversa de Fourier da equação (2.23)

$$L(\mathbf{r}; \mu, c, \alpha, \beta) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \exp^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \phi(\mathbf{k}; \mu, c, \alpha, \beta) d^d\mathbf{k}. \quad (2.26)$$

2.4.5 Expansões da Distribuição de Lévy para ($r \gg 1$) e ($r \ll 1$)

A fim de obter a distribuição de Lévy em uma dimensão $\mathbf{r} \equiv x$, vamos substituir a função característica (2.24) em (2.26) e calcular a transformada inversa de Fourier no limite $x \gg 1$. Como $\phi(x; c, \alpha)$ é simétrica (e par) podemos explorar a simetria usando a transformada inversa de cossenos de Fourier, obtendo

$$L(x; c, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-ck^\alpha) \cos(kx) dk. \quad (2.27)$$

Agora, integrando por partes, encontramos

$$L(x; c, \alpha) = \frac{c\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(kx)}{|x|} k^{\alpha-1} \exp(-ck^\alpha) dk, \quad (2.28)$$

fazendo a mudança de variável $\xi = k|x|$, $d\xi = |x|dk$

$$L(x; c, \alpha) = \frac{c\alpha}{\pi|x|^{1+\alpha}} \int_0^\infty \xi^{\alpha-1} \sin(\xi) \exp\left(\frac{-c\xi^\alpha}{|x|^\alpha}\right) d\xi, \quad (2.29)$$

tomando o limite $x \rightarrow \infty$

$$L(x; c, \alpha) \sim \frac{c\alpha}{\pi|x|^{1+\alpha}} \int_0^\infty \xi^{\alpha-1} \sin(\xi) d\xi. \quad (2.30)$$

Finalmente, a solução da integral é expressa em termos da função de Euler, $\Gamma(\alpha) \sin(\frac{\pi\alpha}{2})$, fornecendo o limite assintótico ($x \gg 1$)

$$L(x; c, \alpha) \sim \frac{c\alpha \Gamma(\alpha) \sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{\pi|x|^{1+\alpha}}. \quad (2.31)$$

Assim vemos que para valores grandes de x , a distribuição de Lévy comporta-se como lei de potência, com expoente $1 + \alpha$. Verificamos também que o segundo momento diverge para processos com $0 < \alpha < 2$.

Para obter o comportamento da distribuição de Lévy quando $x \ll 1$, considere a equação (2.27) com a expansão de Taylor para $\cos(kx)$

$$L(x; c, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-ck^\alpha) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (kx)^{2n}}{(2n)!} dk, \quad (2.32)$$

usando a mudança de variável $w = ck^\alpha$ e $dw = c\alpha k^{\alpha-1} dk$

$$L(x; c, \alpha) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \exp(-w) \frac{(-1)^n (x)^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{w}{c}\right)^{2n/\alpha} \frac{dw}{\alpha c \left(\frac{w}{c}\right)^{(\alpha-1)/\alpha}}. \quad (2.33)$$

Estamos interessados apenas em avaliar esta equação quando $x \ll 1$ e vamos portanto desprezar termos de ordem superior a zero, logo

$$L(x; c, \alpha) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (x)^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{\alpha c^{\frac{2n+1}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{2n+1}{\alpha}\right), \quad (2.34)$$

fornecendo

$$L(x; c, \alpha) \sim \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha c^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad (2.35)$$

ou seja, para $x \ll 1$ a distribuição cresce à medida que $\alpha \rightarrow 0$.

2.5 Teorema do Limite Central Generalizado (TLC-G)

Existem algumas extensões do TLC, quando a variância é finita (primeiro e segundo momentos finitos), que relaxam a condição de eventos independentes e identicamente distribuídos, permitindo a presença de certos tipos de correlação fraca entre os eventos, a exemplo da condição de Lindeberg e da condição de Lyapunov. Outra generalização muito importante do TLC é aquela que permite distribuições com variância infinita. Publicada em 1927 pelo matemático francês, *Paul Pierre Lévy* (15 de Setembro, 1886 - 15 de Dezembro, 1971) [48], esta extensão estabelece que a soma dos valores independentes e identicamente distribuídos da variável estocástica r que possui o segundo momento divergente (eventualmente também com primeiro momento divergente) e comportamento assintótico $p_\alpha(|r|) \sim \frac{1}{|r|^{\alpha+1}}$, para $r \gg 1$, é atraída para a distribuição de Lévy $L(\mathbf{r}; \mu, c, \alpha, \beta)$ [47], com mesmo parâmetro α da distribuição de deslocamentos p_α . Este teorema é conhecido como teorema do limite central generalizado (TLC-G).

Obviamente, o método apresentado na seção-2.3.1 não engloba processos onde $p(\mathbf{r})$ possui variância infinita (superdifusão). Assim, precisamos de uma argumentação diferente para resolver a equação de Bachelier

$$P_{N+1}(\mathbf{R}) = \int p(\mathbf{r})P_N(\mathbf{R} - \mathbf{r})d^d\mathbf{r}. \quad (2.36)$$

Como a equação de Bachelier é uma convolução, temos

$$P_N = p_N * P_{N-1}, \quad (2.37)$$

onde “ $*$ ” denota convolução. Note que P_{N-1} é por si mesmo o resultado de uma convolução e então podemos escrever P_N em termos de todos os passos anteriores ($1 \cdots N$) e da FDP da posição inicial P_0 , tal que

$$P_N = p_1 * p_2 * p_3 * \cdots * p_N * P_0. \quad (2.38)$$

Assumindo que a caminhada se inicia na origem, logo $P_0 = \delta(\mathbf{R})$, e usando o teorema

da convolução escrevemos

$$\begin{aligned}\hat{P}_N(\mathbf{k}) &= \hat{p}_1 * \hat{p}_2 * \hat{p}_3 * \cdots * \hat{p}_N, \\ \hat{P}_N(\mathbf{k}) &= \prod_{n=1}^N \hat{p}_n(\mathbf{k}),\end{aligned}\tag{2.39}$$

agora usando a transformada inversa, obtemos a FDP da posição final por

$$P_N(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \prod_{n=1}^N \hat{p}_n(\mathbf{k}) \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}.\tag{2.40}$$

Esta é uma solução exata, apesar de a integral não poder ser resolvida analiticamente em termos de funções elementares, exceto em alguns poucos casos. Entretanto, estamos geralmente interessados no limite de tempos longos, $N \rightarrow \infty$, onde a integral pode ser aproximada via análise assintótica. Uma demonstração formal do TLC-G foge ao escopo deste trabalho e pode ser encontrada em [47].

2.6 Caminhada Aleatória - “Random Walk”

2.6.1 História e Origens

Referências intuitivas à caminhadas aleatórias decorrentes de observações empíricas têm sido feitas a séculos. Em 1827 Robert Brown, botânico inglês, publicou suas observações a respeito dos movimentos irregulares de pequenos grãos de pólen em um líquido. Pascal, Fermat e Bernoulli trataram problemas adjacentes ainda no século XVI. Porém, foi no século XX que a teoria se concretizou logo no início do século com a publicação de trabalhos que ressaltaram o caráter de caminhadas aleatórias como processos estocásticos.

O termo “random walk” foi originalmente proposto por Karl Pearson em 1905 [49, 56]. Em uma carta à *Nature*, ele apresentou um modelo simples para descrever a infestação de mosquitos numa floresta. A cada incremento de tempo, um único mosquito move-se uma distância fixa a , em uma direção randomicamente escolhida. Pearson queria saber qual a distribuição de mosquitos após muitos vôos terem sido executados. A carta foi respondida por Lord Rayleigh, que já havia resolvido uma forma mais geral deste problema em 1880, no contexto de ondas de som em meios heterogêneos (veja a seção-2.6.3) .

Praticamente ao mesmo tempo a teoria de “random walks” foi também desenvolvida por Louis Bachelier em sua notável dissertação de doutoramento, “La Théorie de la Spécu-

lacion” publicada em 1900 [57]. Bachelier propôs a caminhada aleatória como um modelo fundamental para séries temporais em economia. Suas idéias básicas permanecem como base para a moderna teoria de finanças. Aparentemente Bachelier foi o primeiro a perceber a conexão entre caminhadas aleatórias discretas e a equação de difusão no contínuo.

Curiosamente, em 1905, no mesmo ano da carta de Pearson à *Nature*, Albert Einstein publicou seu artigo seminal sobre movimento Browniano, no qual estudou a difusão de uma partícula de impureza, cuja trajetória é governada pelas colisões da partícula com as moléculas de ar da atmosfera. O objetivo era determinar uma expressão que servisse para calcular o número de Avogadro por meio de medidas do coeficiente de difusão.

2.6.2 Caminhada Aleatória em 1D

Considere uma caminhada com N passos de mesmo tamanho a , executada ao longo de uma linha [58]. Seja p a probabilidade de um passo ser dado para a direita, e q a probabilidade do passo ser para esquerda. Assuma também n_1 o número de passos tomados para a direita e n_2 o número de passos para a esquerda. As quantidades p , q , n_1 , n_2 e N se relacionam por

$$\begin{aligned} p + q &= 1, \\ n_1 + n_2 &= N. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Examinando a probabilidade de tomar exatamente n_1 dos N passos para a direita, existem $\binom{N}{n_1} = \binom{n_1+n_2}{n_1}$ maneiras de tomar n_1 passos para a direita e n_2 para a esquerda, onde $\binom{n}{m}$ é o coeficiente binomial. A probabilidade de obter uma seqüência particular de n_1 e n_2 passos é $p^{n_1}q^{n_2}$. Por isso

$$P(n_1) = \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} p^{n_1} q^{n_2} = \frac{N!}{n_1! (N - n_1)!} p^{n_1} q^{N - n_1}, \quad (2.42)$$

onde $n!$ é o fatorial de n . Note que a equação acima é simplesmente a distribuição binomial, discutida na seção-2.4.1, portanto, o número médio de passos n_1 para a direita é

$$\langle n_1 \rangle = pN, \quad (2.43)$$

e o número médio de passo tomados para a esquerda é $\langle n_2 \rangle = N - \langle n_1 \rangle = N(1 - p) = qN$. Similarmente, a variância é dada por $\sigma_{n_1}^2 = \langle n_1^2 \rangle - \langle n_1 \rangle^2 = Npq$ e o desvio padrão é

$$\sigma_{n_1} = \sqrt{Npq}. \quad (2.44)$$

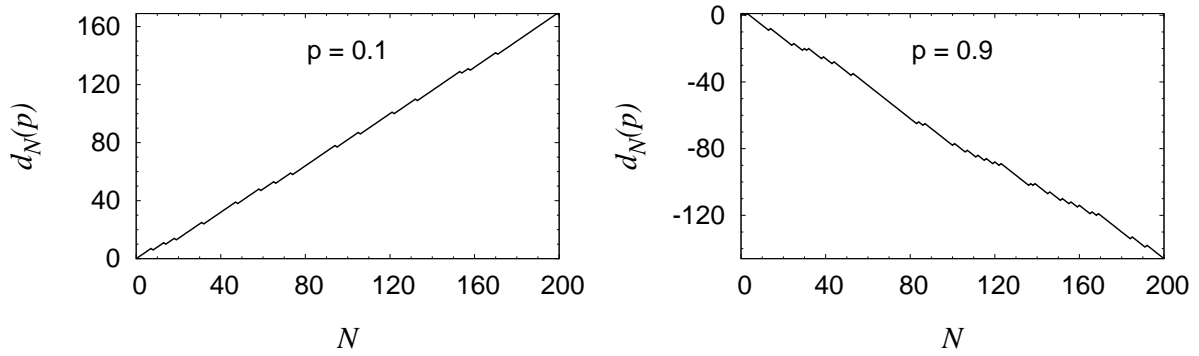


Figura 2.3: Distância percorrida $d_N(p)$ em uma caminhada aleatória unidimensional com passos unitários idênticos, partindo da origem, obtida via simulação computacional com $N = 200$. Note que representamos a caminhada ao longo do eixo x e que p é a probabilidade de ocorrer um salto no sentido negativo do eixo x e $1 - p$ a probabilidade de haver um salto no sentido positivo. A figura com $p = 0.1$ mostra um “drift” para o sentido positivo, analogamente com $p = 0.9$, o “drift” ocorre para o sentido negativo. Ambos os casos são anisotrópicos devido ao alto grau de correlação entre os deslocamentos.

Agora considere a distância d_N percorrida após um dado número de passos

$$d_N = n_1 - n_2 = 2n_1 - N, \quad (2.45)$$

como sendo a distância líquida percorrida em uma certa direção. As figuras 2.3 mostram $d_N(p)$ para $N = 200$ e dois valores de p , 0.1 e 0.9. Claramente observamos a tendência de andar em uma certa direção de acordo com o valor de p .

Para uma caminhada aleatória com $p = 1/2$, a probabilidade $P_N(d)$ de atravessar certa distância d após N passos aparece na tabela-2.1. Nesta tabela as linhas subsequentes são obtidas pela adição de metade do valor de cada célula em uma dada linha para cada uma das duas células diagonalmente abaixo. De fato, isto é simplesmente o triângulo de Pascal preenchido intercaladamente com zeros e com cada linha multiplicada por um fator $1/2$. Os valores dos coeficientes são dados por [59]

$$P_N(d) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{\frac{d+N}{2}}, \quad (2.46)$$

sendo que os momentos,

$$\mu_p = \sum_{d=-N, -(N-2), \dots, N} d^p P_N(d), \quad (2.47)$$

da distribuição de distâncias d (positivo e negativo) são dados por $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = N$, $\mu_3 = 0$

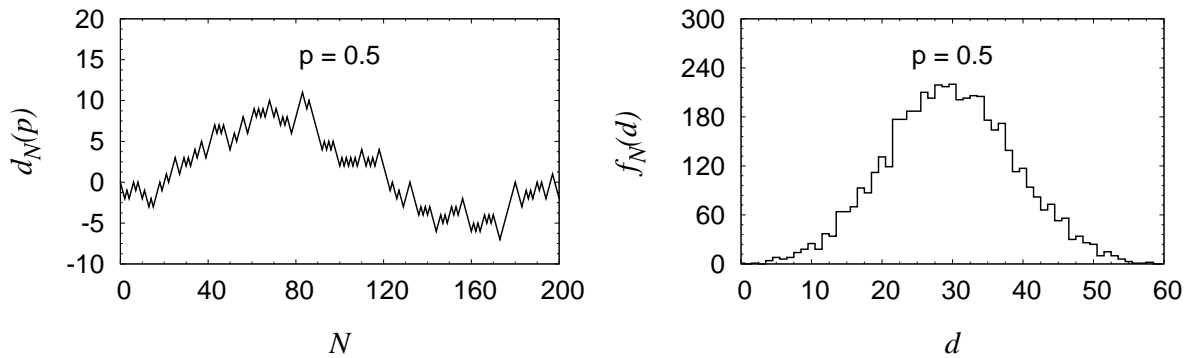


Figura 2.4: Distância percorrida $d_N(p)$ em uma caminhada aleatória unidimensional com passos unitários idênticos, partindo da origem, obtida via simulação computacional com $N = 200$. Note que representamos a caminhada ao longo do eixo x e que p é a probabilidade de ocorrer um salto no sentido negativo do eixo x e $1 - p$ a probabilidade de haver um salto no sentido positivo. A caminhada isotrópica se verifica com $p = 0.5$ de modo a obter saltos idênticamente distribuídos. Neste caso para tempos dilatados $N \gg 1$, observamos oscilação de $d_N(p)$ em torno da origem. Também mostramos um histograma da posição d , após N passos, $f_N(d)$, para uma caminhada aleatória unidimensional com passos unitários idênticos, partindo da origem. Obtida via simulação computacional com $N = 1500$ e $p = 0.5$ (caso isotrópico). $f_N(d)$ corresponde a uma aproximação de $P_N(d)$ visto na equação (2.46).

$\frac{d \Rightarrow}{\Downarrow N}$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					1/2	0	1/2				
2				1/4	0	2/4	0	1/4			
3			1/8	0	3/8	0	3/8	0	1/8		
4		1/16	0	4/16	0	6/16	0	4/16	0	1/16	
5	1/32	0	5/32	0	10/32	0	10/32	0	5/32	0	1/32

Tabela 2.1: Nesta tabela as linhas subsequentes são obtidas pela adição de metade do valor de cada célula em uma dada linha para cada uma das duas células diagonalmente abaixo. De fato, isto é simplesmente o triângulo de Pascal preenchido intercaladamente com zeros e com cada linha multiplicada por um fator $1/2$. Os valores dos coeficientes são dados pela equação (2.46). Note que os valores da tabela [58] sugerem uma distribuição normal e de fato é o que obtemos como mostra a figura-2.4.

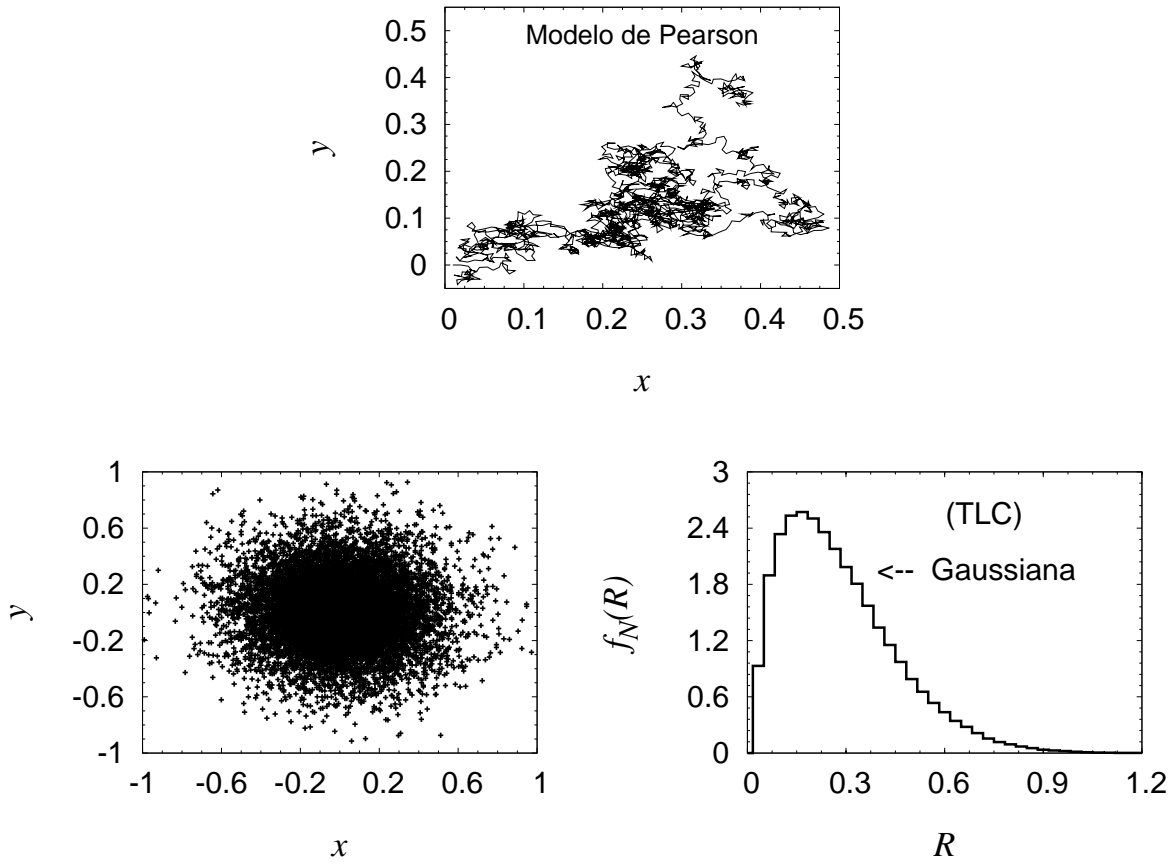


Figura 2.5: A figura inferior direita mostra o histograma da posição R após N passos $f_N(d)$ para uma caminhada aleatória bidimensional com passos idênticos de tamanho $a = 0.01$, partindo da origem. Obtida via simulação computacional com $N = 2000$ e 2000 “random walkers” independentes. $f_N(d)$ corresponde a uma aproximação de $P_N(d)$ visto na equação (2.50) proposta por Lord Rayleigh em 1905 como solução para o modelo de Pearson. A figura do topo mostra o diagrama x vs. y da trajetória de caminhada de apenas um “random-walker”, enquanto a figura inferior esquerda mostra 2000 trajetórias.

e $\mu_4 = N(3N - 2)$. O valor esperado da distância absoluta após N passos é dado por

$$\langle d_N \rangle = \sum_{d=-N, -(N-2), \dots, N}^N |d| P_N(d). \quad (2.48)$$

Esta soma pode ser feita simbolicamente, considerando-se separadamente os casos com N par e ímpar, veja os detalhes em [58]. Para valores grandes de N obtemos

$$\langle d_N \rangle = \sqrt{\frac{2N}{\pi}}. \quad (2.49)$$

2.6.3 Caminhada Aleatória em 2D

Como vimos na seção 2.6.1, o modelo de Pearson [49, 56], figura-2.5, enviado à *Nature*, propunha-se a descrever a infestação de mosquitos numa floresta. A cada incremento de tempo, um único mosquito move-se uma distância fixa a , em uma direção aleatoriamente escolhida. Pearson queria saber qual a distribuição de mosquitos após muitos passos terem sido executados. A carta foi respondida por Lord Rayleigh, que já havia resolvido uma forma mais geral deste problema em 1880, no contexto de ondas de som em meios heterogêneos. Um modelo de ondas de som se propagando por um material pode ser pensado como a soma de vetores de onda com k constante e fase aleatória. Ondas sonoras em materiais possuem vetor de onda aproximadamente constante e suas direções são alteradas por espalhadores dentro do material. Com o objetivo de encontrar a função densidade de probabilidade de uma onda de som após muitas interações, Lord Rayleigh considerou $P_N(R)dR$ como a probabilidade de atravessar a distância entre R e $R + dR$ em N interações (passos). Para passos de comprimento unitário e $N \rightarrow \infty$, encontrou

$$P_N(R) \sim \frac{2R}{N} e^{-R^2/N}. \quad (2.50)$$

Vemos que o valor esperado da distância percorrida cresce como a raiz quadrada do número de passos, $\langle R^2 \rangle \sim N$, o que é típico de fenômenos de difusão.

Encontramos a solução analítica para este problema na seção 2.3.1, onde demonstramos o TLC em um espaço d -dimensional onde o “random walker” move-se segundo a distribuição de deslocamentos $p(\mathbf{r})$ e obtemos como atrator a distribuição Gaussiana (2.17). No problema de Pearson, em duas dimensões $d = 2$, $p(\mathbf{r}) = \delta(r - a)$ e $\langle r^2 \rangle = a^2$, reduzindo a equação (2.17) a

$$P_N(R) = \frac{2R}{a^2 N} e^{-R^2/a^2 N}. \quad (2.51)$$

Este resultado concorda com a solução (2.50) encontrada por Lord Rayleigh já que considerou deslocamentos unitários $a = 1$. O problema proposto por Pearson e resolvido por Lord Rayleigh pode ser, hoje em dia, facilmente tratado via simulação computacional. Fizemos isso e o resultado para uma caminhada de Pearson (isto é, uma caminhada aleatória bidimensional com passos idênticos de tamanho $a = 0.01$, partindo da origem com $N = 2000$ passos de 2000 “random walkers” independentes) é mostrada na figura-2.5. O histograma $f_N(R)$ da posição R após N passos corresponde a uma aproximação de $P_N(d)$, visto na equação (2.50), e proposta por Lord Rayleigh.

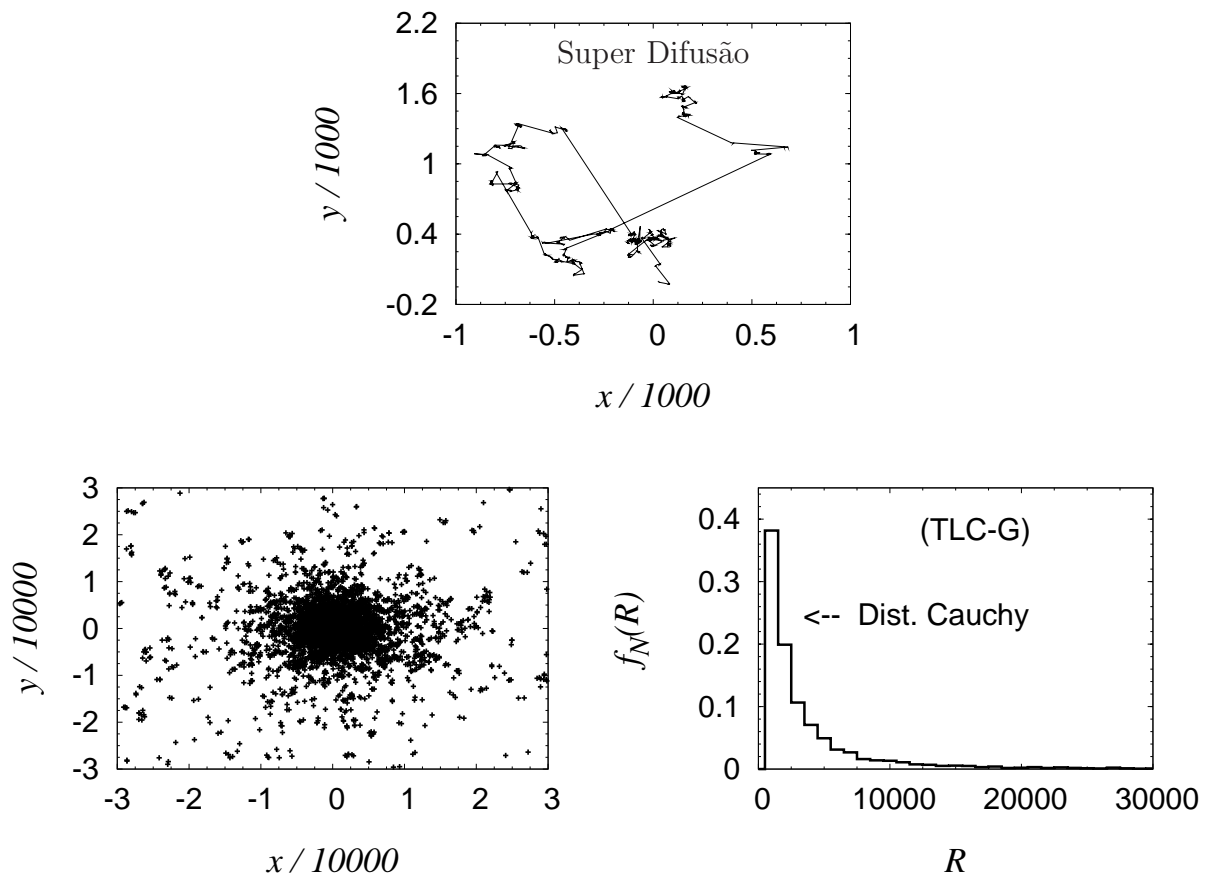


Figura 2.6: A figura inferior direita mostra o histograma da posição R após N passos $f_N(d)$ para uma versão super-difusiva do modelo de Pearson, com os deslocamentos r_j independentes e identicamente distribuídos segundo a lei de potência $p(r) \sim r^{-2}$ (variância infinita). Novamente simulamos a caminhada, partindo da origem, com $N = 2000$ passos e 2000 “random walkers” independentes. Observamos que $f_N(R) \sim L(\mathbf{R}; \mu, c, \alpha, \beta)$ com o parâmetro $\alpha \rightarrow 1$ (distribuição de Cauchy), em concordância com o TLC-G. A figura do topo mostra o diagrama x vs. y da trajetória de caminhada de apenas um “random-walker”, enquanto a figura inferior esquerda mostra 2000 trajetórias.

Consideramos também um versão superdifusiva do modelo de Pearson onde os “random walkers” (mosquitos) executam vôos identicamente distribuídos com deslocamentos r_j segundo a lei de potência $p(r) \sim r^{-2}$ (variância infinita). Novamente simulamos a caminhada, partindo da origem com $N = 2000$ passos de 2000 “random walkers” independentes, como mostra a figura-2.6, e desta vez a FDP obtida no histograma, $f_N(R)$ da posição R , após N , passos não corresponde a um atrator Gaussiano. Em vez disso vemos $f_N(R) \sim L(\mathbf{R}; \mu, c, \alpha, \beta)$ com o parâmetro $\alpha \rightarrow 1$ (distribuição de Cauchy), em concordância com o TLC-G que prevê a distribuição de Lévy como atrator para soma de varáveis independentes e identicamente distribuídas por $p(r)$ com comportamento assintótico dado por $p_\alpha(r) \sim \frac{1}{r^{1+\alpha}}$, quando $r \gg 1$.

2.7 Sistemas Discretos

O século XX registrou um dramático crescimento populacional e tecnológico, demandando a ampliação das malhas rodoviárias, rotas de vôo, transporte de cargas e correios, além da implantação de redes de comunicação como telefones e "internet" a fim de manter todos os cantos do globo supridos e conectados. A contra-partida inevitável deste avanço decorre da criação de problemas operacionais e de saturação como congestionamentos e "blackouts". Estes problemas têm sido abordados e tratados no contexto da teoria de sistemas complexos, com a finalidade de compreender os fenômenos envolvidos e, portanto, possibilitando posterior solução dos mesmos. De forma curiosa, a modelagem destes sistemas é melhor descrita via *teoria de sistemas discretos*, que por sua vez, em geral sempre foram relegados ao segundo plano em favor do desenvolvimento das *teorias do contínuo*. Tornou-se evidente então que os sistemas discretos não podiam mais ser negligenciados e isto materializou-se na atual teoria de grafos.

Apesar da primeira formulação e solução de um problema de teoria de grafos, ser atribuída à Euler, ainda no século XVIII, seus contemporâneos não viram, na época, aplicabilidade prática imediata, que justificasse desviar atenção e energia das importantes teorias do contínuo decorrentes da descoberta do cálculo diferencial por Leibniz e Newton, no século anterior. Nestas condições, durante um período de 150 anos, entre a demonstração de Euler e a última década do século XIX, surgiram na literatura poucos trabalhos nesta linha, propondo grafos como método relevante para estudar problemas físicos reais. Entre estes poucos podemos citar Kirchhoff, que em (1847) criou a teoria das árvores para estudar circuitos elétricos, seguido por Cayley que, dez anos mais tarde, aplicou a teoria em química orgânica para enumerar isômeros de hidrocarbonetos alifáticos saturados. Finalmente, Jordan (1869) utilizou-se das árvores para análises estritamente matemáticas. Nas seções seguintes falaremos brevemente sobre os avanços consideráveis, obtidos na segunda metade do século XX.

2.7.1 Redes de Pequeno Mundo ("Small-world Networks")

Recentemente grandes esforços [7, 14–16] estão sendo dispensados para avaliar a aplicabilidade dos modelos de redes no estudo de problemas complexos como processamento neural [60–62], dinâmica de redes de computadores [16] e dinâmica de redes sociais [44]. Em consequência do grande número de trabalhos, produziu-se uma vastidão de resultados [7, 43, 45] que confirmam a hipótese de as características topológicas, especialmente a conectividade, afetarem as propriedades de transporte de informação em redes permitindo

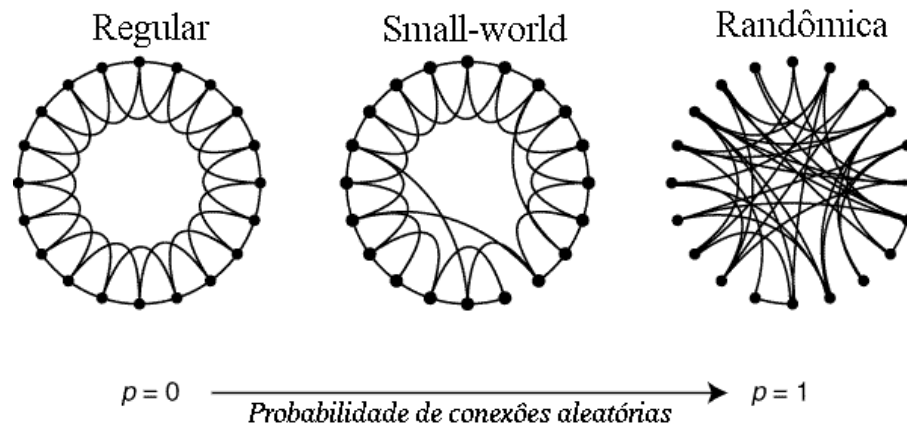


Figura 2.7: A rede da esquerda é totalmente regular (“large-world networks”) por não possuir links de longo alcance, note que todos os sítios estão conectados aos dois primeiros vizinhos de cada lado. A rede da direita é totalmente irregular tendo seus sítios ligados ao acaso de modo que conexões com vizinhos distantes são tão prováveis quanto conexões de primeiros vizinhos (“random networks”). A rede do centro é uma rede de pequeno mundo pois a maior parte das conexões liga os primeiros vizinhos porém observamos uma quantidade não desprezível (distribuídos segundo leis de potências) de “links” de longo alcance que reduzem a largura média da rede. Fonte: Steven Strogatz e Duncan Watts [43].

classificá-las em dois grandes grupos:

(i) Redes de grande-mundo (“large-world networks”), redes ineficientes contendo exclusivamente “links” de curto alcance, que ligam primeiros vizinhos e tornam as redes localmente conectadas e ricas em “clusters”. A distribuição de conexões é Browniana, isto é, uma distribuição estreita e truncada próximo à origem, conseqüentemente o diâmetro da rede [43], que é a distância média separando dois sítios arbitrários, aumenta linearmente com a quantidade total de sítios, explicando sua ineficiência;

(ii) Redes de pequeno-mundo (“small-world networks”), altamente eficientes e globalmente conectadas, redes cuja distribuição de conexões são dadas por leis de potências. A topologia destas redes revela abundante formação de “clusters” [43] devido à grande quantidade de “links” locais. O diâmetro da rede cresce apenas logaritmicamente com o número total de sítios [43], graças à existência de raros, porém preciosos, “links” de longo alcance, que criam atalhos encurtando as distâncias entre os sítios e diminuindo o tempo necessário para propagar a informação por toda a rede.

Trabalhos como de Steven Strogatz e Duncan Watts [43] sobre “small-worlds” e por Albert-László Barabási e Réka Albert sobre redes de escala livre despertaram o interesse nas chamadas redes complexas e aumentaram nosso entendimento a respeito do seu significado. Uma ilustração de diferentes redes é dada na figura-2.8.

2.7.2 Primeira Visita e Probabilidade de Retorno

A probabilidade $p(d)$ [63] de um “random walker” retornar a um sítio durante uma caminhada discreta (como mostra a figura-2.8) num ambiente d -dimensional é $p(d) = 1$ para $1 \leq d \leq 2$ indicando que todo o espaço está acessível e será visitado para tempos suficientemente longos. Já em espaços com $d > 2$ a probabilidade de retorno é menor do que a unidade, como demonstrado por Pólya em 1921.

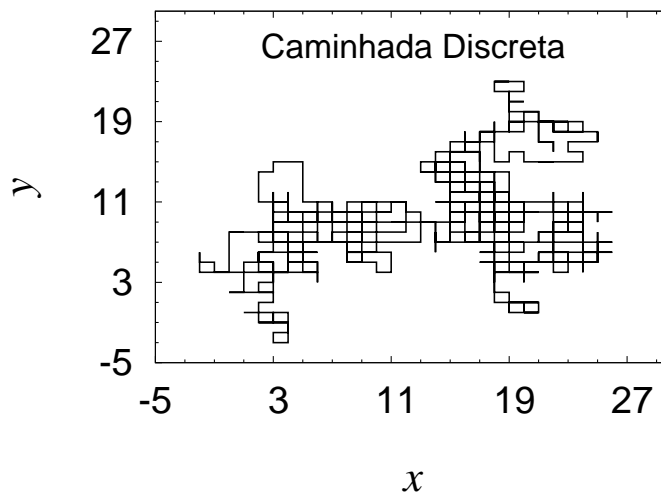


Figura 2.8: Caminhada discreta começando na origem e seguindo com 1000 passos idênticos em direções discretas e identicamente distribuídas num ambiente bidimensional.

Para dimensões superiores [64–67], Watson em 1939, McCrea e Whipple em 1940, Domb em 1954 e Glasser e Zucker em 1977 mostraram que

$$p(3) = 1 - \frac{1}{u(3)} = 0.3405373296\dots, \quad (2.52)$$

onde

$$u(3) = \frac{3}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx dy dz}{(3 - \cos x - \cos y - \cos z)} = 1.5163860592. \quad (2.53)$$

Formas analíticas para $d > 3$ não são conhecidas, mas Montroll em 1956 [68] mostrou que para $d > 3$

$$p(d) = 1 - [u(d)]^{-1}, \quad (2.54)$$

onde

$$u(d) = \int_0^{\infty} \left[I_0 \left(\frac{t}{d} \right) \right]^d e^{-t} dt. \quad (2.55)$$

$I_0(z)$ é a função de Bessel modificada de primeira ordem. De acordo com Montroll

em 1956, Flajolet e Finch em 2003, a equação (2.55) pode ser avaliada numericamente [68–70], fornecendo os resultados para $p(d \geq 3)$, mostrados na tabela-2.2

d	$p(d)$
3	0.340537
4	0.193206
5	0.135178
6	0.104715
7	0.0858449
8	0.0729126

Tabela 2.2: Valores numéricos para $p(d > 3)$ de um “random walker” retornar a um sítio durante uma caminhada discreta em ambientes com dimensão $d > 3$.

2.8 Processos Estocásticos em Física

2.8.1 Einstein e o Movimento Browniano

Em 1905, Albert Einstein publicou seu artigo seminal sobre movimento Browniano, no qual estudou a difusão de uma partícula de impureza cuja trajetória é governada pelas colisões com as moléculas de ar da atmosfera. O foco do trabalho era determinar uma expressão para o movimento das moléculas do fluido que servisse para calcular o número de Avogadro. A expressão determinada por Einstein foi $D = (RT/N_A)(1/6r)$, onde R é a constante dos gases, T é a temperatura, N_A é o número de Avogadro, e r é o raio da molécula. Medindo D e sabendo os outros valores, calcula-se N_A . Podemos reescrever a equação de forma mais geral

$$D = \mu K_B T, \quad (2.56)$$

onde K_B é a constante de Boltzmann e $\mu = \mu_d/F$ é a mobilidade definida como a velocidade de deriva μ_d induzida por uma dada força F . A lei de força para o problema tratado por Einstein é $m\dot{v} = F_{ext} - \alpha v$. A equação determinística associada à equação estocástica é

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho, \quad (2.57)$$

que é a equação de difusão com

$$D = \frac{\sigma^2}{2\tau}, \quad (2.58)$$

onde σ^2 é a variância da distribuição de deslocamentos da impureza, τ o tempo decorrido entre duas colisões. A conexão entre (2.56) e (2.58) pode ser estabelecida considerando-se

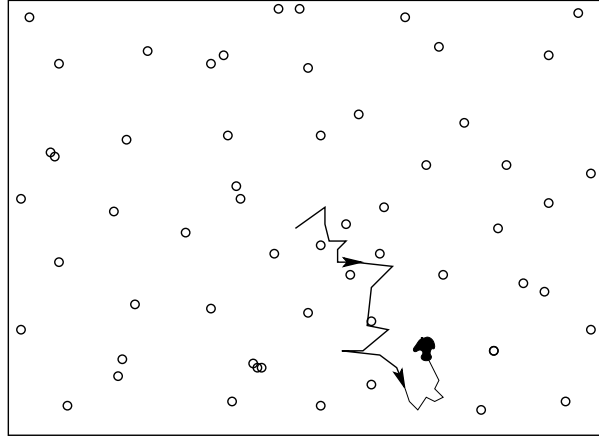


Figura 2.9: Difusão de uma partícula de impureza cuja trajetória é governada pelas colisões com as moléculas de ar da atmosfera. Veja uma simulação em Java no site <http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/gas2D/gas2D.html>.

um processo estocástico de Bernoulli unidimensional (seção-2.6.2) com a probabilidade da partícula de impureza espalhar para direita após a colisão ser $P(x = +a) = p$ e para esquerda ser $P(x = -a) = 1 - p$, definindo-se ainda velocidade de deriva como

$$v = \langle x \rangle / \tau = a(p - q) / \tau. \quad (2.59)$$

Do modelo acima, usando a equação (2.58) com $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$, obtemos

$$D = \frac{2pqa^2}{\tau}. \quad (2.60)$$

Assumindo agora os desvios proporcionais à força F , temos $p - q = \frac{a}{2K_B T} F$, (neste ponto ainda não é possível estabelecer K_B como a constante de Boltzmann e T como temperatura), e então

$$v = \frac{F}{K_B T} \left(D + \frac{v^2 \tau}{2} \right). \quad (2.61)$$

Supondo finalmente que D e v são constantes no limite $\tau \rightarrow 0$, podemos escrever

$$v \approx \frac{FD}{K_B T}, \quad (2.62)$$

e então definindo a mobilidade como $\mu = v/F$, encontramos a relação de Einstein estabelecida em (2.56).

2.8.2 Teoria de Langevin

Três anos após a publicação do artigo de Einstein, [50] seguiu-se o desenvolvimento da teoria do movimento Browniano com Langevin. Este publicou um trabalho [51] enfatizando que a partícula descrita no modelo de Einstein não experimentava deslocamentos independentes, visto que a partícula tende a preservar uma componente do momento após as colisões com as moléculas do ar, devido à sua inércia. Visando introduzir o efeito de inércia, escreveu a lei de força para a impureza como

$$m\dot{v} = F_{ext} - \alpha v + m\Gamma(t), \quad (2.63)$$

com α um coeficiente de atrito e a função $\Gamma(t)$ sendo um ruído Browniano (branco), pois

$$\begin{aligned} \langle \Gamma(t) \rangle &= 0, \\ \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle &= q\delta(t-t'), \end{aligned} \quad (2.64)$$

configurando um processo de Ornstein-Uhlenbeck para a velocidade. A solução para a distribuição ρ é assim

$$\rho(v, t) = \frac{\exp\left(-\frac{(v-\bar{v}(t))^2}{2\sigma_v(t)^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma_v(t)^2}}. \quad (2.65)$$

No estado estacionário ($t \rightarrow \infty$) temos $\bar{v} = 0$ e $\sigma_v^2 = D_c/\gamma$, então

$$\rho(v, \infty) = \frac{\exp\left(-\frac{\gamma v^2}{2D_v}\right)}{\sqrt{2\pi D_v/\gamma}}, \quad (2.66)$$

que comparando com a distribuição de Maxwell

$$\rho(v) = \exp\left(-\frac{mv^2}{2K_B T}\right), \quad (2.67)$$

leva-nos a

$$\frac{mv^2}{2K_B T} = \frac{\gamma v^2}{2D_v}, \quad (2.68)$$

ou finalmente

$$D_v = \frac{\gamma K_B T}{m} = \gamma v_{thermal}^2. \quad (2.69)$$

2.8.3 Equação de Fokker-Planck

A maneira usual de se obter a FDP de um processo estocástico é resolver a equação de Fokker-Planck associada. Para o caso unidimensional

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left[-\frac{\partial \rho}{\partial x} D^{(1)}(x) + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} D^{(2)}(x) \right] \rho, \quad (2.70)$$

onde $D^{(2)}(x) > 0$ é o coeficiente de difusão e $D^{(1)}(x)$ é o coeficiente de “drift”. Estes coeficientes também podem depender do tempo. Em N dimensões temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left[-\sum_{i=1}^N \frac{\partial \rho}{\partial x_i} D_i^{(1)}(\mathbf{r}) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) \right] \rho, \quad (2.71)$$

onde $D_i^{(1)}(x) > 0$ é o vetor de “drift” e $D^{(2)}(x)$ é o tensor de difusão.

A equação de Fokker-Planck pode ser resolvida por vários métodos, tais como: métodos de simulação; transformação da equação de Fokker-Planck em uma equação de Schrödinger; integração numérica e soluções analíticas para alguns potenciais. Para obter uma excelente revisão sobre o assunto, ver a referência [52].

2.9 Processos Estocásticos em Economia

Louis Bachelier em sua notável dissertação de doutoramento, “La Théorie de la Spéculation” publicada em 1900 [57], propôs a caminhada aleatória como um modelo fundamental para séries temporais em economia. Suas idéias ainda hoje são base para a moderna teoria de finanças. Uma discussão completa sobre processos estocásticos em economia pode ser encontrada em [53].

Em linhas gerais, modelos matemáticos e estatísticos provenientes da descrição de sistemas físicos são comumente utilizados para realizar previsões sobre o comportamento dos sistemas financeiros, obtendo leis para descrever seu comportamento esperado (médio), assim como as flutuações em torno deste comportamento padrão. Formalmente, a variação de preço dS_t no intervalo de tempo pequeno entre t e $t + dt$ é dada por

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (2.72)$$

o termo μdt caracteriza uma variação temporal determinística ou típica de preços, com taxa média no tempo μ . O termo σdW_t caracteriza a variação estocástica dos preços,

cuja amplitude σ é dada pelo desvio padrão das variações históricas do mesmo. dW_t é o ruído estocástico, Gaussiano, caracterizado por um processo de Wiener com propriedades $\langle dW_t \rangle = 0$ e $\langle dW_t^2 \rangle = dt$. (A notação utilizada é $dW \sim N(0, dt)$). A equação (2.72) caracteriza o processo Browniano Aritmético, que fornece como solução para a distribuição de variações de preços a distribuição Gaussiana, com dispersão proporcional à raiz quadrada do tempo (veja a difusão normal na seção-2.3.2).

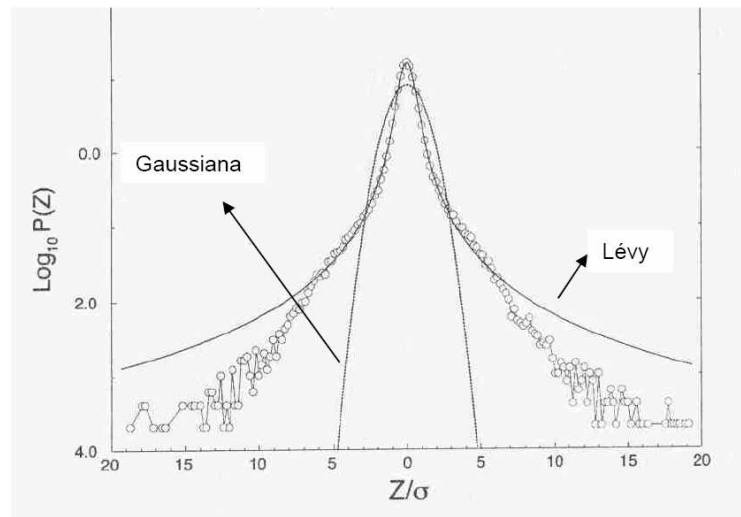


Figura 2.10: Comparação do histograma de retornos normalizados para $t = 1 \text{ minuto}$ do S&P 500 (período 84-89) com as distribuições Gaussiana e de Lévy em gráfico semi-logarítmico. Fonte [71].

A análise de Mandelbrot do mercado americano de algodão [72] mostrou que a distribuição de retorno dos preços tinha a mesma forma funcional para diversas escalas de tempo, ou seja, as distribuições possuíam propriedade de invariância por mudança de escala temporal. Além disso, estas distribuições possuíam caudas com comportamento de lei de potência, bem mais longas do que as distribuições Gaussianas. Baseado nestas duas propriedades e na auto-similaridade da série temporal, sugeriu que as distribuições empíricas fossem modeladas pelas distribuições estáveis de Lévy com $\alpha = 1.7$.

Mais recentemente, a análise de dados do S&P 500 [71] mostrou que as distribuições de retorno de alta frequência, quando reescaladas de forma conveniente, colapsam em uma mesma curva mestra podendo assim ser modeladas por uma distribuição de Lévy, figura-2.10. Espera-se assim que para longos horizontes temporais as distribuições converjam para distribuições estáveis Gaussianas, devido ao segundo momento finito das distribuições empíricas. Para horizontes de tempo curtos, devido às caudas longas em lei de potência, podemos observar também uma invariância de curto prazo da forma funcional dos dados empíricos devido à estabilidade das distribuições de Lévy. As distribuições de Tsallis [55],

que recentemente modelaram os dados de altíssima frequência do mercado americano, são exemplos de distribuições estáveis em uma dinâmica de preços com correlação.

2.10 Processos Estocásticos em Biologia - “Foraging”

Teoria de “foraging” é um ramo da ecologia comportamental que estuda as estratégias de busca de alimentos executada por animais em seus ambientes nativos. A teoria considera o comportamento de busca com relação ao custo-benefício obtido a partir de diferentes opções de procura, presumindo que as opções que maximizem os benefícios (ganho energético - nutrientes/calorias) e minimizem os custos (desgaste energético - perda de peso) favorecem o animal e maximizam a função de “fitness”¹ num contexto de seleção natural. Robert MacArthur e Eric Pianka (e num trabalho independente de J M Emlen em 1966) propuseram pela primeira vez um teoria de foraging ótimo. Existem muitas versões de “foraging” ótimo relevantes em situações distintas, algumas são:

- O modelo da dieta ideal, primeiramente testado por John Goss-Custard, que descreve o comportamento de um “forager” que encontra diferentes tipos de presas e deve escolher qual atacar;
- Modelo de seleção de caminhos, descrevendo a dinâmica de um “forager” cujas presas estão concentradas em pequenos aglomerados com distâncias consideráveis entre eles;
- Modelo de ponto central, onde o “forager” precisa retornar a um local particular a fim de consumir sua presa.

Existe grande quantidade de resultados experimentais disponíveis [9, 10], descrevendo a dinâmica da busca de alimento realizada por animais (“foraging biológico”). Trabalhos recentes [3, 40–42] sugerem que a distribuição de deslocamentos durante o “foraging” é bem aproximada por distribuições de cauda longa “Long Tail Distribution”, nas quais a probabilidade de percorrer grandes distâncias, sem eventos de re-orientação, não é desprezível. Esta verificação empírica sugere a divergência do segundo momento da distribuição de deslocamentos e qualifica as distribuição de Lévy como a escolha adequada para fitar estes resultados experimentais.

¹A função de “fitness” é o critério que a natureza utiliza para decidir que espécies prosperam e sobrevivem no contexto da seleção natural.

Processos de Busca no Contínuo

As décadas de 60 e 70, registraram um aumento notável no interesse em modelos de “foraging” ótimo. Estes modelos baseam-se na hipótese, empiricamente motivada [9, 10, 31], de que animais utilizam estratégias de buscas que otimizam o desempenho na detecção alimento. Por se tratar de uma área do conhecimento relativamente nova, informações sobre a teoria de “foraging” são escassas, uma revisão interessante sobre o tema pode ser encontrada em [73] ou [33]. Discussões sobre modelos de dieta ideal (veja seção-2.10) estão disponíveis em [32–36], enquanto alguns modelos de seleção de caminhos baseados em estratégias de movimentos podem ser vistos em [3–8, 37–39]. A busca em ambientes com alvos distribuído em aglomerados, que se constituem de pequenas “ilhas” ricas em alvos homoganeamente distribuídos, onde cada aglomerado encontra-se separado dos vizinhos por grandes distâncias, é um sistema de grande interesse no qual, foram desenvolvidos conceitos importantes como o teorema do valor marginal. Uma revisão sobre o tema pode ser vista em [35, 36, 74].

Neste capítulo apresentamos um modelo estatístico de busca por alvos distribuídos no contínuo, que nos remete à questão geral, sobre qual seria a melhor estratégia estatística para um processo de busca se adaptar a uma distribuição arbitrária de alvos randômica e homogênea. Dados empíricos [9, 10] descrevendo a dinâmica da busca de alimento realizada por animais e publicações recentes [3, 40–42] sugerem a divergência da variância na distribuição de deslocamentos dos animais durante a busca de alimento. O modelo será construído de modo a permitir comparar o desempenho da estratégia busca Browniana (busca com difusão normal) com a estratégia de busca de Lévy (busca com superdifusão) e descobrir qual estratégia oferece mais benefícios. O significado do termo benefício é ambíguo e relativo a cada sistema, e sua generalização costuma ser feita por meio da definição de uma função de “fitness” que ao ser maximizada indica que o ganho máximo

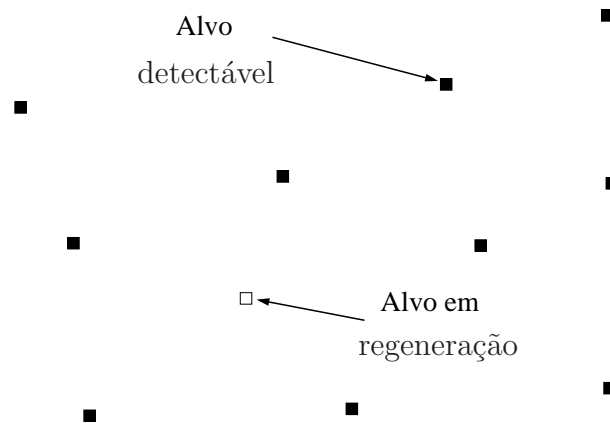


Figura 3.1: Ilustração de um ambiente de busca em duas dimensões contendo uma densidade ρ de alvos posicionados randomicamente segundo uma distribuição homogênea, garantindo que todo o espaço de busca seja igualmente preenchido (na média sobre várias configurações) resultando num espaçamento médio típico entre alvos dado por λ . O ambiente pode ter qualquer dimensão e supomos que os alvos podem ser de três tipos (veja o texto): destrutivos ($\Gamma = 2$), não destrutivos ($\Gamma = 1$) ou regenerativos ($1 < \Gamma < 2$). Assumimos que as propriedades ambientais são controladas pelos parâmetros λ e Γ , que determinam o ambiente de busca.

foi obtido para cada escolha particular de estratégia de busca.

3.1 Definição de Processo de Busca

Um processo de busca se define pelas propriedades do ambiente de busca e dos alvos que ele encerra assim como pela heurística que orienta o “forager” (entidade que realiza a busca pelos alvos) e governa a dinâmica do processo de busca.

3.1.1 Ambientes de Busca

Na busca biológica, os animais estão sujeitos a inúmeros vínculos impostos pela natureza, como limites determinados por acidentes geográficos ou por fronteiras com territórios de vizinhos concorrentes além de variantes causadas pelo clima que pode afetar drasticamente a distribuição e a disponibilidade de alimentos (alvos da busca). Em sistemas tecnológicos como busca em bancos de dados, os dispositivos de indexação podem ser limitados ou até mesmo nem existir e o ambiente pode ser dinâmico, modificando randomicamente a disposição dos alvos (como na “internet”). Certamente em primeira aproximação vamos nos limitar ao caso mais simples onde o ambiente é estático e a distribuição de alvos é homogênea.

Definimos o ambiente de busca como o espaço cartesiano d -dimensional contendo uma distribuição homogênea de alvos espalhados aleatoriamente. Os alvos são caracterizados por suas propriedades regenerativas sintetizadas no parâmetro Γ , de tal forma que com $\Gamma = 1$, os alvos são voláteis (destrutivos) indicando que cada alvo só pode ser visitado (encontrado ou consumido) uma vez, assim, ao ser detectado o alvo será completamente destruído tornando-se indisponível à visitas futuras. Com $\Gamma = 2$, o ambiente corresponde ao caso não-destrutivo onde os alvos, podem ser visitado inúmeras vezes permanecendo acessíveis a visitas futuras. Nos casos intermediários ($1 < \Gamma < 2$), obtemos o ambiente regenerativo, e neste caso podemos considerar intuitivamente que todo alvo encontrado é destruído tornando-se inacessível por um certo tempo τ , até que se promova sua auto-regeneração. Decorrido o tempo de regeneração o alvo estará novamente disponível e voltará a ser detectável exatamente na mesma posição onde foi detectado e destruído anteriormente pelo forager. O parâmetro $\Gamma = 1$, corresponde ao limite $\tau \rightarrow \infty$, enquanto que $\Gamma = 2$, corresponde a $\tau \rightarrow 0$. Na secção-3.3 realizamos simulações computacionais que justificam a conexão entre Γ e τ .

Não importando qual seja o ambiente de busca, ele sempre encerra uma densidade de alvos

$$\rho = \frac{n}{V_d}, \quad (3.1)$$

e estamos interessados em como a concentração de alvos afeta o desempenho na busca. A densidade de alvos é definida como n , a quantidade de alvos, por unidade de hiper-volume V_d , onde o índice d , é a dimensão espacial. Em uma dimensão os alvos encontram-se distribuídos ao longo de uma cadeia de comprimento $V_1 \propto L$, em duas dimensões, sobre uma área $V_2 \propto L^2$, e assim por diante, conduzindo à $V_d \propto L^d$, onde L é o diâmetro estimado do ambiente. Por meio da densidade de alvos, definimos λ , o livre caminho médio entre alvos sucessivos via

$$\lambda \equiv \frac{1}{2r_v\rho}, \quad (3.2)$$

onde r_v , é o alcance visual do “forager” e seu papel será melhor definido na seção seguinte. Adiantamos que os parâmetros λ e r_v , serão de grande importância nas seções futuras onde a razão λ/r_v será utilizada como uma espécie de parâmetro de mobilidade do “forager” indicando em unidades do alcance visual quanto é preciso caminhar em média antes de um alvo estar visível.

Nesta seção estabelecemos, em resumo, que o ambiente de busca se materializa num espaço d -dimensional preenchido com uma densidade ρ , de alvos distribuídos homoganeamente, resultando num contínuo de alvos separados pela distância relativa média λ . Os alvos apresentam propriedades de regeneração controladas pelo parâmetro Γ . Finalmente,

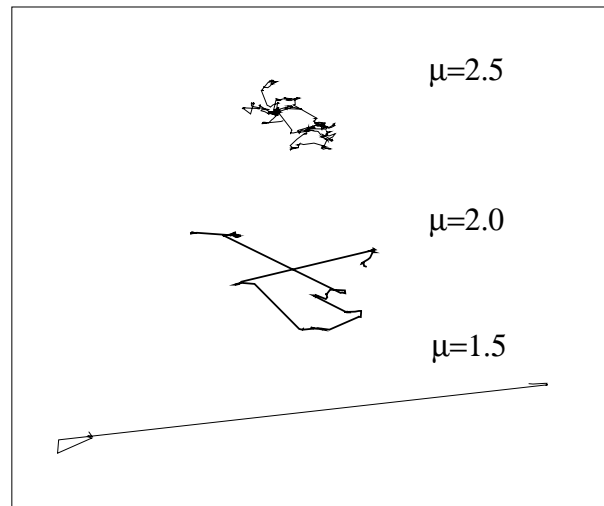


Figura 3.2: Ilustração da caminhada de Lévy governada pela distribuição de passos definida na equação (3.3). Os três exemplos mostram caminhadas percorrendo a distância total de 1000 unidades, note como μ , o expoente da lei de potência afeta a frequência dos deslocamentos com tamanho muito superior à média. No limite $\mu \rightarrow 1$, observa-se superdifusão enquanto $\mu \rightarrow 3$, recupera o comportamento Browniano.

o ambiente estará completamente determinado ao fixarmos os valores dos parâmetros $0 < \lambda < \infty$ e $1 \leq \Gamma \leq 2$. Veremos como estes parâmetros afetam o desempenho da busca.

3.1.2 Heurística

A heurística¹, determina a técnica ou estratégia que orienta o processo de busca e quanto maior a habilidade cognitiva do “forager” ou quanto maior o conhecimento das propriedades do ambiente de busca, maior será o refinamento e a complexidade da heurística. Considere como exemplo a busca de um registro particular em um banco de dados, este processo de busca pode ser muito facilitado se os dados estiverem armazenados segundo alguma regra de ordenamento (ordem alfabética, numérica, etc.). No caso biológico, habilidades de memória podem permitir que o “forager” lembre-se das fontes de alimento mais produtivas, evitando caminhadas desnecessárias e de modo geral níveis elevados de cognição podem conduzir à percepção de aspectos decisivos do ambiente de busca e fornecer pistas a respeito de onde procurar alimento. A fim de manter o modelo tão genérico quanto possível, não vamos presumir o conhecimento de qualquer particularidade do ambiente, que possa permitir o refinamento da heurística a ser escolhida, por enquanto a busca não será orientada por qualquer habilidade cognitiva como memória ou

¹A heurística (do grego *heurisko*, literalmente “descubro” ou “acho”) [75]. Define-se procedimento heurístico como um método de aproximação das soluções dos problemas, que não segue um percurso claro mas se baseia na intuição e nas circunstâncias a fim de gerar conhecimento novo. É o oposto do procedimento algorítmico.

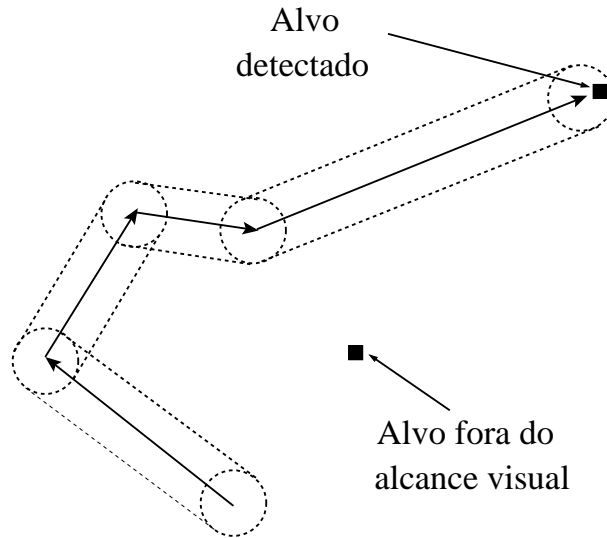


Figura 3.3: Ilustração da trajetória de busca com o “forager” inspecionando a área delimitada pelas linhas pontilhadas, o círculo demarca o alcance visual em cada evento de re-orientação, onde uma nova direção de vôo será escolhida isotropicamente e uma nova distância de vôo será sorteada aleatoriamente segundo a equação (3.3).

processamento das informações ambientais², isto corresponde a assumir que a heurística estará determinada por dois fatores:

1. o tipo de caminhada aleatória realizada pelo “forager”, que é determinado pela distribuição de deslocamentos $P(\ell)$, definido abaixo pela equação (3.3);
2. a maneira como o “forager” inspeciona o ambiente à procura dos alvos, veja a figura-3.3, no modelo proposto (veja a seção-3.2), isto será determinado exclusivamente pelo alcance visual r_v . Considere como exemplo o caso biológico, onde a interação com os alvos é feita por meio dos sentidos do animal (visão, olfato, etc.) e em sistemas tecnológicos a interação com os alvos se dá pela inspeção direta ao acessar cada um dos registros. Aqui assumiremos apenas que o “forager” detecta apenas alvos que estiverem dentro do raio de visão r_v em torno da posição do “forager”.

Definimos a heurística no processo de busca aleatória apenas pelas características dos deslocamentos do “forager” durante sua caminhada aleatória e sua interação com os alvos via alcance visual r_v . Fixamos o tipo da caminhada aleatória simplesmente definindo $P(\ell)$, a distribuição dos deslocamentos ℓ_j do “forager” e precisamos fazer isso de modo a alcançar o comportamento anômalo de Lévy (superdifusão) e o comportamento Browniano (difusão normal). Uma alternativa é considerar a lei de potência [20, 21, 77–79]

$$P(\ell) \equiv \ell^{-\mu}, \quad (3.3)$$

²para mais informações sobre processos de busca cognitiva sugerimos a referência [76].

conhecida como distribuição de Lévy generalizada, onde o parâmetro μ pode ser ajustado a fim de se obter a dinâmica difusiva ($\mu \geq 3$) ou a dinâmica super-difusiva ($1 < \mu < 3$) e a distribuição possui a propriedade de auto-afinidade, $P(\lambda \ell_j) \sim \lambda^{-\mu} P(\ell_j)$. O deslocamento quadrático médio da distribuição de Lévy cresce com o tempo t de acordo com $t^{4-\mu}$, para $2 < \mu < 3$ e com t^2 para $\mu < 2$, isto corresponde ao movimento com super-difusão anômala [20, 77]. Assumimos que deslocar-se a distância ℓ_j consome um tempo de caminhada $t = \ell_j$, [31, 80]. Esta distribuição também pode ser vista associada a difusão em sistemas caóticos e modelos de tempo contínuo [1, 81, 82]. Pretendemos apenas confrontar a heurística Browniana com a de Lévy a fim de saber qual maximiza a função de “fitness” generalizada (veja seção-3.2), por isso a princípio não exploraremos a correlação entre os saltos resultando em uma caminhada isotrópica, onde os deslocamentos ocorrem com a mesma probabilidade em todas as direções, portanto, os ℓ_j são independentes e identicamente distribuídos. Isto significa que seja na caminhada Browniana ou de Lévy desejamos que a caminhada seja isotrópica. Isto significa que $0 < \theta < 2\pi$, a direção de vôo será escolhida randomicamente sem privilegiar qualquer direção particular. Isto pode ser feito apenas arbitrando que $P(\theta)$, a distribuição de direções de vôo, é constante em relação a θ . Veja na figura-3.2 algumas trajetórias de busca para vários valores de μ .

3.2 Modelo Estatístico - Analítico

Nas seções anteriores 3.1.1 e 3.1.2 definimos o processo de busca fixando as propriedades do ambiente de busca $0 < \lambda < \infty$ e $1 \leq \Gamma \leq 2$ e a estratégia de busca, governada pela distribuição de deslocamentos do “forager” dada pela equação (3.3) onde os parâmetros $1 < \mu \leq 3$ e $0 < r_v < \infty$ determinam a heurística. Resta ainda definir η , a função “fitness” generalizada capaz de qualificar o desempenho de cada estratégia de busca μ , num dado ambiente caracterizado por λ e Γ fixos. Vamos manter em mente que o comportamento de $\eta(\mu, r_v, \lambda, \Gamma)$ deve crescer em função de B o *benefício generalizado* obtido pela busca e diminuir em virtude de C , o *custo generalizado* gerado pelo desgaste envolvido na busca, sugerindo

$$\eta(\mu, r_v, \lambda, \Gamma) \equiv \frac{B(\mu, r_v, \lambda, \Gamma, \dots)}{C(\mu, r_v, \lambda, \Gamma, \dots)}. \quad (3.4)$$

Certamente o $B(\mu, r_v, \lambda, \Gamma, \dots)$ e $C(\mu, r_v, \lambda, \Gamma, \dots)$ podem ser funções complexas dependentes de inúmeras variáveis, particulares a cada sistema, mas em favor da generalidade vamos tratá-los da forma mais simples e genérica possível. Como os alvos são o objeto da busca é natural supor que os benefícios aumentam com o aumento de Q , o número de alvos encontrados durante uma busca, por isso vamos admitir, em primeira aproximação

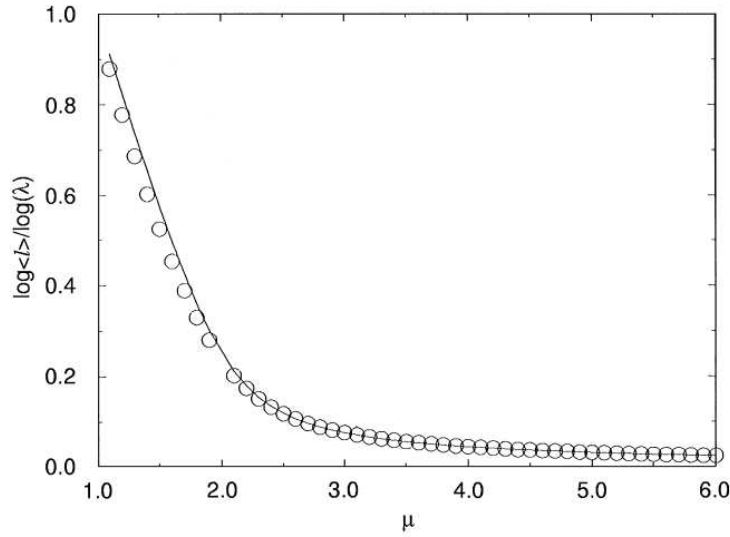


Figura 3.4: Comparação entre a simulação e a equação (3.9). Densidade $\rho = 10^{-4}$, $r_v = 1$, $\lambda/r_v = 5000$.

que $B \propto Q$. Quanto ao custo, vamos supor que seja proporcional à *distância generalizada* média $\langle L_Q \rangle$, percorrida para encontrar os Q alvos. Note $\langle L_Q \rangle$ não tem necessariamente dimensão de comprimento e sim a mesma dimensão da variável estocástica ℓ , na equação (3.3). Com isso a função de “fitness” assume a forma

$$\eta(\mu, r_v, \lambda, \Gamma) \equiv \frac{Q}{\langle L_Q \rangle} = \frac{1}{\langle d \rangle}, \quad (3.5)$$

onde $\langle d \rangle = \frac{\langle L_Q \rangle}{Q}$, é a distância média percorrida entre dois alvos sucessivos, detectados pelo “forager”. Podemos ver que $\eta(\mu, r_v, \lambda, \Gamma)$, é inversamente proporcional à distância percorrida e que tanto $\langle L_Q \rangle$ como d dependem das grandezas que caracterizam a busca, μ , r_v , λ e Γ . Vamos eliminar a dependência em Q pois não fazê-lo implicaria em avaliar o limite assintótico de η , quando $Q \rightarrow \infty$. Fazemos algo equivalente, simplesmente redefinindo $\langle d \rangle$, pela estimativa

$$\langle d \rangle = N_s \langle \ell \rangle, \quad (3.6)$$

onde N_s , é a estimativa do número de saltos necessários para percorrer a distância entre dois alvos sucessivos detectados e $\langle \ell \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \ell p(\ell) d\ell$, é o passo médio da caminhada (primeiro momento da distribuição de deslocamento do “forager” na equação (3.3)), fornecendo

$$\eta(\mu, r_v, \lambda, \Gamma) \equiv \frac{1}{N_s \langle \ell \rangle}. \quad (3.7)$$

Esta função de “fitness” foi proposta em 1999, por G. M. Viswanathan e colaboradores [3, 4].

A integral do passo médio não precisa ser avaliada em todo espaço, pois os deslocamentos são estritamente positivos, além disso vamos proibir deslocamentos menores que r_v pois não fazê-lo equivaleria a realizar a busca dentro da área já inspecionada visualmente conduzindo ao comportamento artificial de caminhada com infindáveis passos de tamanho insignificante que só fazem o “forager” oscilar dentro da área visualmente inspecionada. Segue que

$$\langle \ell \rangle \approx \frac{\int_{r_v}^{\lambda} \ell^{1-\mu} d\ell + \int_{\lambda}^{\infty} \ell^{1-\mu} d\ell}{\int_{r_v}^{\infty} \ell^{-\mu} d\ell}, \quad (3.8)$$

onde o denominador é o um fator de normalização requerido para área unitária e a segunda integral do numerador é espécie de aproximação de campo médio que se fundamenta no argumento da não provável execução de saltos muito maiores que λ já que este é o espaçamento típico entre os alvos. Em última análise esta aproximação corresponde a um truncamento na distribuição de deslocamentos do “forager” proibindo ($\ell_j > \lambda$) e isto reflete o truncamento dos saltos longos pelo ambiente. A solução da integral fornece

$$\langle \ell \rangle \approx \left(\frac{\mu - 1}{2 - \mu} \right) \left(\frac{\lambda^{2-\mu} - r_v^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}} \right) + \frac{\lambda^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}}, \quad (3.9)$$

e a concordância com a simulação é mostrada na figura-3.4.

A forma funcional de N_s , é definida num contexto da busca unidimensional [83] admitindo que a caminhada de Lévy começa numa posição arbitrária x , dentro do intervalo $[0, L]$, com condição de contorno de absorção (veja a referência [84] onde problemas similares foram tratados). O número médio de passos executados pelo “forager” antes de ser absorvido pela condição de contorno é dado por

$$N_s = C \left(\frac{x(L-x)}{r_v^2} \right)^{\frac{\mu-1}{2}}, \quad (3.10)$$

onde a constante C não depende de x , nem de L . Na caminhada Browniana ($\mu > 3$), recupera-se o resultado $N_s = x(L-x)r_v^{-2}$. Precisamos inferir o N_s , para dimensões superiores ($d > 1$) e nos parágrafos seguintes apresentamos a argumentação que conduz a este resultado partindo-se da equação (3.10).

Considere o caso destrutivo, em que todo alvo detectado é destruído tornando-se inacessível a visitas futuras. Esta situação corresponde à equação (3.10) para o caso onde considera-se que o “forager” inicia a caminhada na posição do alvo previamente destruído, o qual encontra-se afastado dos alvos vizinhos pela distância média λ , conduzindo a $L-x =$

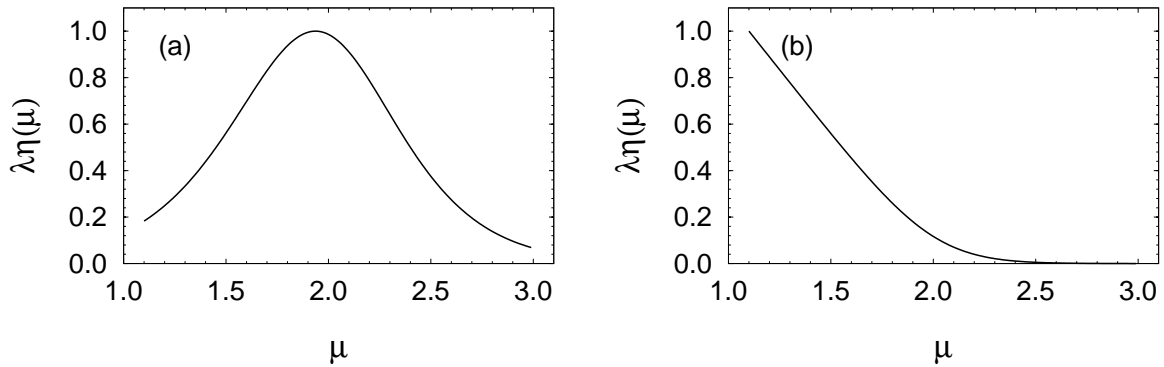


Figura 3.5: Produto entre o livre caminho médio λ e a eficiência η versus μ o expoente de Lèvy que define a estratégia de busca para o modelo analítico em duas dimensões. (a) Caso não destrutivo (b) caso destrutivo. Densidade de alvos $\rho = 10^{-4}$, alcance visual $r_v = 1$, $\lambda/r_v = 5000$.

λ , assim N_d , o número médio de passos entre dois alvos para o caso destrutivo é dado por

$$N_d \sim \left(\frac{\lambda}{r_v}\right)^{\mu-1}. \quad (3.11)$$

Para $(1 < \mu < 3)$. o expoente $\mu - 1$, é a dimensão fractal do conjunto de alvos visitados [31]. A equação (3.11) não depende de x , nem de L , que são as variáveis do problema unidimensional, em vez disso introduzimos λ , que é bem definido em qualquer dimensão pelas equações (3.1) e (3.2). A situação de interesse prático se configura quando a distribuição de alvos é esparsa ($\lambda \gg r_v$), substituindo nas equações (3.10) e (3.9) levando em (3.7) verificamos que η , não assume máximos e os menores valores de μ , conduzem ao “foraging” mais eficiente, como mostra a figura-3.5b. Note que $\mu \rightarrow 1 + \epsilon$, com $\epsilon \rightarrow 0^+$. No problema destrutivo os sítios são eliminados após serem visitados uma única vez, isto torna o foraging nas proximidade do regime Browniano, $\mu \rightarrow 3$, pouco eficiente devido seu caráter redundante que torna muito provável retornar a um mesmo local repetidas vezes. Quando $\mu \rightarrow 1$, o caráter difusivo das trajetórias torna menos relevante o fato dos sítios se destruírem pois o “forager” diverge rapidamente sem permanecer muito tempo nas proximidade de qualquer alvos destruído e isto justifica o resultado obtido onde a eficiência não possui valor μ , máximo mas aumenta a medida que $\mu \rightarrow 1$, como mostra a figura-3.5b.

Para o caso não destrutivo, também com distribuição esparsa de alvos a equação (3.11) superestima o número de passos entre dois alvos sucessivos em razão do ambiente não destrutivo permitir que os alvos sejam revisitados inúmeras vezes. Em termos da equação (3.10) esta situação corresponde ao caso onde o forager parte das proximidades da posição do último alvo visitado, mais precisamente a uma distância r_v , do alvo e o

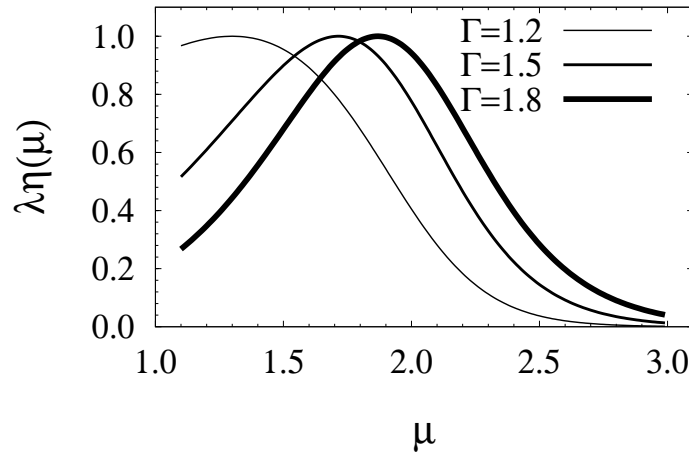


Figura 3.6: Produto entre o livre caminho médio λ e a eficiência η versus μ o expoente de Lèvy que define a estratégia de busca. As curvas mostram a eficiência para vários valores de Γ , que controla as propriedades regenerativas do ambiente, Por definição, dois valores tem significado $\Gamma \rightarrow 2$, correspondendo ao caso não destrutivo e $\Gamma = 1$, que recupera a dinâmica destrutiva. Extrapolamos valores ($1 < \Gamma < 2$) e observamos a transição suave entre a dinâmica destrutiva e não destrutiva esta extrapolação será respaldada e justificada pelos resultados da simulação computacional apresentada na seção-3.3. Densidade $\rho = 10^{-4}$, $r_v = 1$, $\lambda/r_v = 5000$.

próximo alvo da vizinhança encontra-se afastado pela distância λ , conduzindo à $x = r_v$ e $L - x = \lambda$ portanto N_n o número de passos entre dois alvos sucessivos no caso não destrutivo e dado por

$$N_n \sim \left(\frac{\lambda}{r_v} \right)^{\frac{\mu-1}{2}}. \quad (3.12)$$

Para ($1 < \mu < 3$). Note que para ($\lambda \gg r_v$), temos ($N_d \gg N_n$). Levando as equações (3.12) e (3.9) em (3.7) e derivando com relação a μ encontramos a eficiência ótima para

$$\mu_{opt} = 2 - \delta, \quad (3.13)$$

onde $\delta \sim 1/[\ln(\lambda/r_v)]^2$. Portanto na ausência de conhecimento prévio a respeito da distribuição dos alvos e quando λ/r_v assume valores grandes a estratégia ótima de busca se configura com $\mu_{opt} \approx 2$.

No problema não destrutivo os sítios são preservados e isto permite que as estratégias Brownianas, $\mu \rightarrow 3$, caracterizadas por pequenos vôos altamente frequentes, recebam o benefício de encontrar sucessivas vezes o mesmo sítio, visto que os vôos longos ocorrem com frequência desprezível. Esta aparente vantagem apresenta uma contrapartida prejudicial. Devido a distribuição esparsa de sítios o “forager” pode levar muito tempo e caminhar grandes distâncias em pequenos e infundáveis saltos até que seja capaz de encontrar outro

sítio, isto faz com que o número de vôos N , se eleve diminuindo a eficiência η . Para as estratégias difusivas, $\mu \rightarrow 1$, os vôos são extremamente longos e portanto é muito provável que o “forager” encontre um sítio durante um vôo, contudo, apesar de encontrar os sítios com certa facilidade as distâncias percorridas entre dois sítios sucessivos são gigantescas e isto naturalmente afeta a eficiência de forma muito negativa. Nos limites onde $\mu \rightarrow 1$ e $\mu \rightarrow 3$, a curva da eficiência assume valores mínimos como discutido, portanto, entre os mínimos deve haver um máximo. A eficiência máxima ocorre quando $\mu \approx 2$, como mostra a figura-3.5a, e isto deve-se ao dinamismo da estratégia que combina de forma mais equilibrada as frequências dos vôos longos e curtos, conseguindo assim encontrar muitos sítios a um baixo custo energético.

Neste ponto podemos generalizar as equações (3.11) e (3.12) introduzindo o parâmetro Γ , resultando em

$$N_s \sim \left(\frac{\lambda}{r_v} \right)^{\frac{\mu-1}{\Gamma}}. \quad (3.14)$$

Por definição Γ está restrito aos valores 1 (no caso destrutivo) ou 2 (no caso não destrutivo), porém extrapolamos os valores intermediários ($1 < \Gamma < 2$) como mostra a figura-3.6.

As equações (3.7), (3.9) e (3.14) fornecem uma aproximação estatística que permite comparar a eficiência da busca Browniana e da busca de Lévy ao variar o parâmetro μ fixando r_v , λ e Γ , permitindo plotar curvas $\eta(\mu)$ versus μ , que mostram o desempenho das estratégias de busca em cada ambiente, como mostra figura-3.5 e a figura-3.6.

3.2.1 Efeitos da Concentração de Alvos sobre a Eficiência η

Em concentrações elevadas $\lambda/r_v \approx 1$, o ambiente de busca aproxima-se do limite de saturação de alvos, indicando que não é mais necessário caminhar para detectar o alvo mais próximo nas vizinhanças, já que o alvo está imediatamente visível. Podemos verificar esse regime no modelo analítico considerando que para $\lambda/r_v \leq 1$, temos

$$\langle \ell \rangle \approx \lambda, \quad (3.15)$$

$$N_s \approx 1. \quad (3.16)$$

Levando estes valores na equação (3.7) vemos que η torna-se invariante com relação à estratégia μ , indicando que no regime de saturação de alvos, todas as estratégias serão igualmente bem sucedidas. Veja as curvas de eficiência para vários valores de concentração

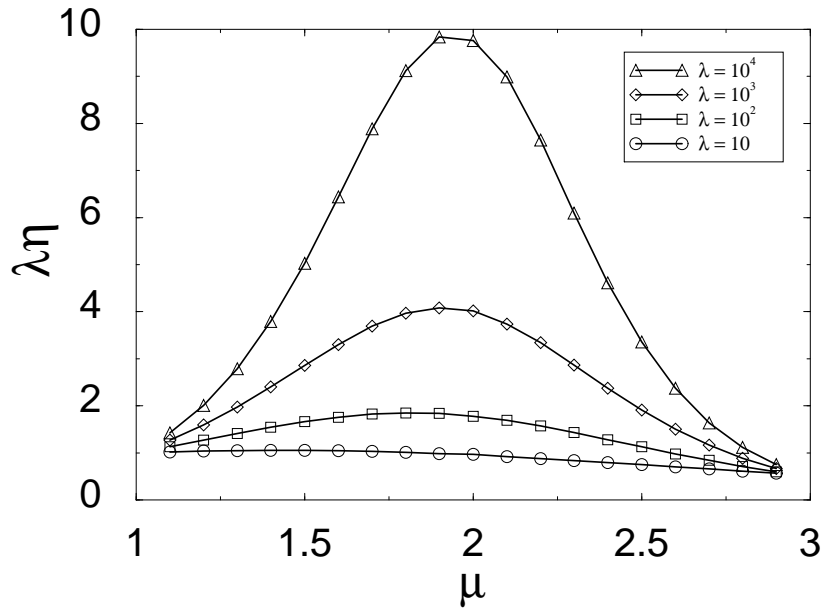


Figura 3.7: Produto entre a eficiência η e o livre caminho médio λ versus μ em uma dimensão para vários valores de λ , obtido a partir das equações (1) e (2) com $r_v = 1$ para o caso não destrutivo. Densidade $\rho = 10^{-4}$, $r_v = 1$, $\lambda/r_v = 5000$.

de alvos mostradas na figura-3.7.

3.2.2 Balanço Energético

Freqüentemente a busca ocorre vinculada a algum tipo de balanço energético que impede o “forager” de prosseguir caso não seja capaz de reabastecer suas reservas. No contexto em que o modelo analítico foi construído precisamos redefinir a função de “fitness” η , a fim de considerar adequadamente o desgaste energético e para isto introduzimos $f(\langle L \rangle)$, uma função de desgaste ou custo, arbitrária, associada à distância média percorrida entre dois alvos sucessivos. Esta função esta condicionada apenas a ser monotonicamente crescente. A nova função de eficiência passa a ser $\eta_E = \langle E \rangle / \langle L_t \rangle$, onde a distância total média percorrida durante a busca $\langle L_t \rangle$, pode ser aproximada por $Q \langle L \rangle$, onde Q denota o número de alvos visitados. A energia média, líquida, $\langle E \rangle$, obtida pelo “forager” ao encontrar alvos pode ser similarmente escrita como, $\langle E \rangle = Q \langle E_s \rangle$, com $\langle E_s \rangle = \epsilon - f(\langle L \rangle)$ é a energia líquida média por alvo encontrado e ϵ é a energia bruta por alvo. Neste ponto introduzimos o vínculo natural $\langle E \rangle > 0$, refletindo o fato de a reserva energética do “forager” ter que se manter positiva. Resultando na nova função de eficiência

$$\eta_E = (\epsilon - f)\eta, \quad (3.17)$$

onde η é a eficiência estatística definida na seção-3.2. A maximização de η_E implica em

$$F(\eta) \frac{d\eta}{d\mu} = 0, \quad (3.18)$$

com $F(\eta) = \epsilon - f - \eta df/d\eta$. Os possíveis extremos de η_E implicam ou nos extremos de η ou nos zeros de F . Evocando a condição $\langle E_s \rangle = \epsilon - f > 0$ e observando que $df/d\eta < 0$, pois f é uma função crescente de $\langle L \rangle = 1/\eta$. Portanto $F > 0$ e os extremos de η_E coincidem com os de η . Finalmente como $d^2\eta/d\mu^2 < 0$ os extremos são máximos de eficiência energética. Apesar da introdução de uma função arbitrária de custo não afetar os valores de μ_{opt} , ela pode limitar significativamente os valores μ que satisfazem a condição $\langle E \rangle > 0$.

3.2.3 Vantagens das Estratégias de Lévy

Uma questão interessante é entender de que forma a caminhada de Lévy pode favorecer o “forager” superando em eficiência energética as caminhadas Gaussianas ou de Poisson. As razões que justificam as observações empíricas, de caminhadas de Lévy no “foraging” biológico nunca foram totalmente compreendidas, mas alguns trabalhos têm oferecido algumas pistas. Levandowsky e colaboradores [9, 10] sugeriram que a razão pela qual microorganismos executam caminhadas de Lévy em ambientes tridimensionais é o fato de a probabilidade de retorno ser menor que a da caminhada Browniana independentemente do valor de μ [31]. Uma explicação relacionada, apresentada por Shlesinger [31], sugere que o “forager” pode preferir a caminhada de Lévy por aumentar o número de novos alvos visitados correspondendo à maior ergodicidade das trajetórias de busca na caminhada de Lévy superando a ergodicidade da difusão normal dos processos Brownianos [85–88]. A divergência de n , “forager” executando caminhadas de Lévy também é mais rápida evitando a competição pelos recursos (alvos). A estratégia de Lévy também é uma boa solução para o problema de n estações de radar rastreando m alvos [89].

3.3 Simulação Computacional

Nesta seção vamos checar qualitativamente os resultados obtidos com modelo analítico. Para isso propomos uma simulação computacional baseada em poucas regras dinâmicas e que não exigem tantas simplificações quanto foi necessário no modelo da seção-3.2. Desta forma a simulação computacional é mais precisa e confiável, materializando-se em uma ferramenta indispensável para validar o modelo analítico.

3.3.1 O Modelo - Regras Dinâmicas

A simulação se desenvolve em ambiente de busca como descrito na seção-3.1.1 e é governada por três regras dinâmicas simples, ilustradas na figura-3.3 que estabelecem o comportamento requerido para satisfazer a heurística definida na seção-3.1.2. As regras dinâmicas são:

1. Se existir um alvo detectável dentro de um raio de visão r_v , então o “forager” detecta este alvo e move-se para sua posição em linha reta.;
2. Se não existir um alvo detectável dentro de um raio de visão r_v , então o “forager” escolhe randomicamente uma direção (isotropicamente) e ℓ_j , uma distância de vôo distribuída de acordo com a equação (3.3);
3. Todo alvo detectado na regra-1 é temporariamente eliminado da simulação tornando-se inacessível à visitas futuras por um tempo de regeneração τ .

3.3.2 Eficiência e Condição de Contorno da Simulação

Definimos a eficiência da busca $\eta(\mu)$ como a razão entre o número de sítios visitados Q e media da distância total percorrida em N simulações, tal que

$$\eta(\mu) = \frac{Q}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N L_j(\mu)},$$

onde L_j é a distância percorrida em uma simulação para encontrar Q sítios.

O modelo analítico, da seção-3.2, considera um ambiente infinito e sem condição de contorno resultando em caminhadas com truncamento em $\ell_j \approx \lambda$, mas a simulação não pode tratar o ambiente infinito em razão de limitações computacionais obrigando-nos à considerar condições de contorno. As condições de contorno somente são relevantes quando a trajetória de busca alcança as extremidades do ambiente repetidas vezes durante a execução do mesmo salto, isto pode ocorrer quando a distribuição é esparsa. Utilizamos uma condição de contorno periódica que transforma o ambiente em um tórus.

3.3.3 Comparação com o Modelo Analítico

O resultado da simulação para o caso não destrutivo com distribuição esparsa de alvos $\lambda/r_r v = 5000$, aparece na figura-3.8 e observamos o mesmo comportamento qualitativo

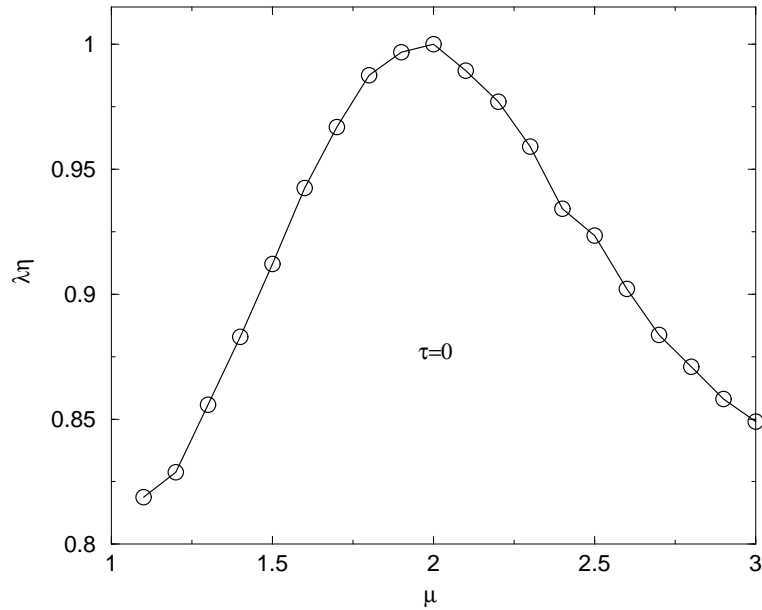


Figura 3.8: produto entre a eficiência η e o livre caminho médio λ versus μ em uma dimensão para vários valores de λ , obtido via simulação com $r_v = 1$ para o caso não destrutivo. Densidade $\rho = 10^{-4}$, $r_v = 1$, $\lambda/r_v = 5000$.

previsto pelo modelo estatístico, como mostra a figura-3.5. Novamente a eficiência máxima ocorre nas proximidades de $\mu \approx 2$, a busca Browniana $\mu \rightarrow 3$, resulta em trajetórias de busca que conduzem o “forager” à oscilar em torno da posição do último alvo encontrado beneficiando a eficiência, porém inevitavelmente conduzindo à longas caminhadas ineficientes quando o “forager” diverge lentamente (difusão normal) e precisa deslocar-se até o próximo alvo em sua trajetória rica em eventos de re-orientação caracterizados pelo efeito de “zig-zag” que resulta na cobertura de grandes distâncias antes que o próximo alvo seja detectado. As estratégias super difusivas $\mu \rightarrow 1$, induzem o “forager” à saltar cobrindo grandes distâncias em linha reta sem eventos de re-orientação e a distribuição esparsa permite longas caminhadas ao longo do corredor gerado entre os alvos, aumentando as chances de não detectar alvos adjacentes à direção de um salto longo. A busca não destrutiva permite que os alvos sejam revisitados porém isso é menos provável nas estratégias ($\mu < 2$), pois, os grandes saltos são executado com frequência levando o “forager” para longe do alvo antes de explorar adequadamente o alvo indestrutível que se configura em uma fonte renovável de nutrientes. A estratégias $\mu \approx 2$, parece ser capaz de equilibrar as vantagem e desvantagens permeando os freqüentes saltos curtos com um doze apropriada de saltos longos permitindo visitar os alvos por algum tempo e afastar-se rapidamente até o próximo alvo das vizinhanças.

Reproduzimos a simulação para o caso regenerativo à fim de justificar a possibilidade de extrapolarmos o parâmetro Γ , para valores diferentes dos casos limite 1 ou 2. Como

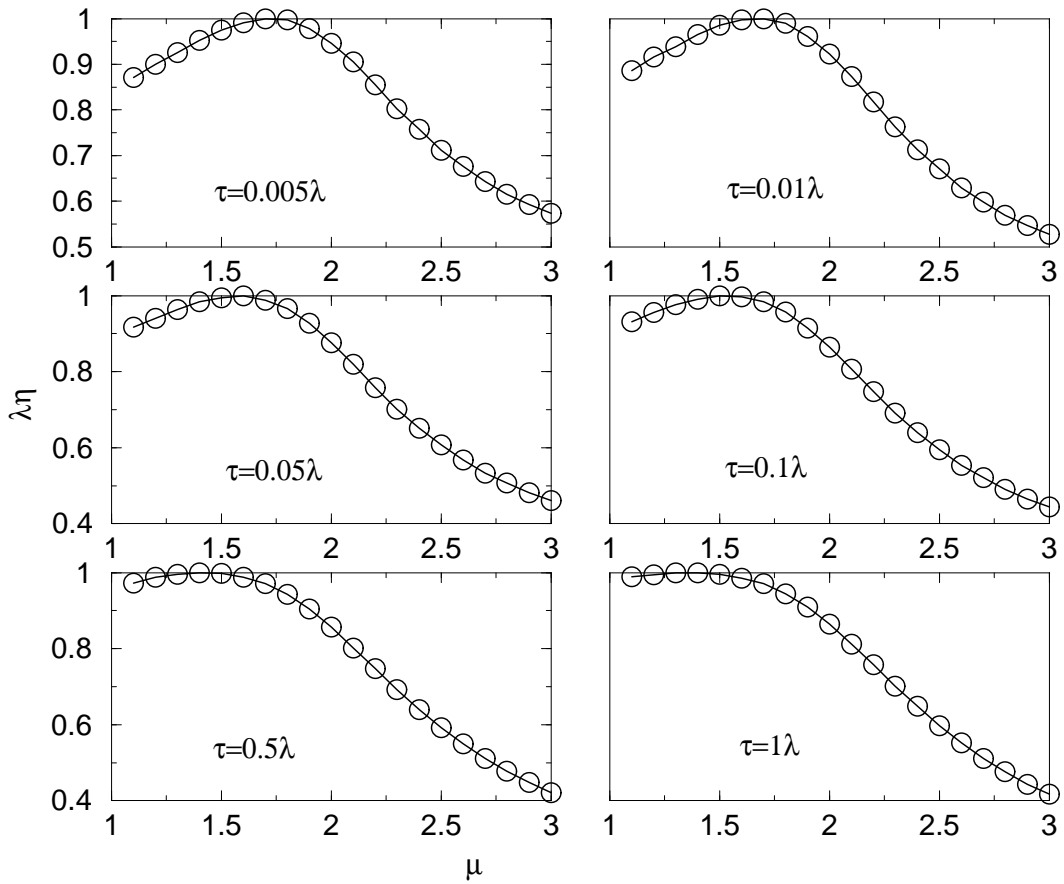


Figura 3.9: produto entre a eficiência η e o livre caminho médio λ versus μ em uma dimensão para vários valores de λ , transição entre o caso não destrutivo e o destrutivo obtido via simulação com $r_v = 1$. O parâmetro Γ , sintetiza as propriedades de regeneração dos alvos, porém sua definição original vista na equação (3.14). Densidade $\rho = 10^{-4}$, $r_v = 1$, $\lambda/r_v = 5000$.

estabelece a regra-3 do modelo da seção-3.3.1 o parâmetro livre τ , controla as propriedades regenerativas do ambiente e deve ser interpretado como o tempo necessário para um alvo detectado e consumido ser regenerado e voltar a estar disponível à visitas futuras. No modelo analítico da seção-3.2 estas mesmas propriedades são supostamente controladas por Γ quando este assume valores intermediários ($1 < \Gamma < 2$), na simulação esperamos ver o mesmo comportamento ao variar o parâmetro τ , no intervalo ($0 < \tau < \infty$). O caso destrutivo corresponde à $\tau \rightarrow \infty$, ($\Gamma = 2$) enquanto o comportamento não destrutivo é obtido quando $\tau \rightarrow 0$, ($\Gamma = 1$).

Os resultados para a simulação aparecem na figura-3.9, compare com os resultados do modelo analítico visto na figura-3.5, para verificar a concordância qualitativa dos resultados. Esta simulação da legitimidade à introdução do parâmetro Γ , como a intuição sugeria.

Processos de Busca Coletiva

Neste capítulo tratamos a busca coletiva baseada em modelos de dinâmica “Siga o Líder”, (veja a figura-4.1) onde o membro dominante da coletividade (membro alfa) determina a trajetória de busca e os outros indivíduos são induzidos a segui-lo. Isto corresponde a considerar um processo de busca com n indivíduos independentes (sem interação direta entre os membros da coletividade) realizando caminhada aleatória truncada e com alto grau de correlação com a trajetória de busca do líder. A dinâmica de grupos [90] pode representar vantagens significativas para os indivíduos, como a segurança decorrente da proteção do grupo e maiores chances de encontrar alimento, se considerarmos que o sucesso da busca de um indivíduo represente ganho calórico para todo o grupo. Antecipando os resultados, ao final desta seção mostraremos que a busca coletiva pode ser renormalizada a fim de ser descrita pelo modelo estatístico descrito na seção-3.2.

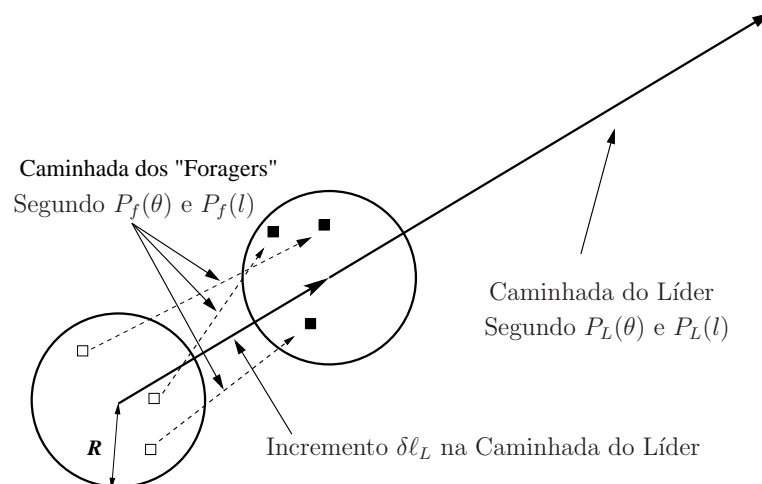


Figura 4.1: Ilustração da dinâmica “Siga o Líder”. Um deslocamento na posição do líder estimula a resposta dos membros do bando que deslocam-se na direção da nova posição do líder.

Em sistemas biológicos reais [40, 91] a dinâmica de bandos envolve interações complexas entre os indivíduos, como o comportamento protecionista das fêmeas com filhotes, ou o comportamento territorialista de machos dominantes com relação aos outros membros este tipo de relação social cria vínculos que afetam o modo como cada indivíduo do bando implementa a sua busca por alimentos, sugerindo que o comportamento de busca de cada indivíduo pode ser único. Por simplicidade e generalidade, consideramos um sistema ideal que minimiza a interação entre os indivíduos a ponto de serem independentes e assumimos ainda que os membros do bando sejam idênticos e comportem-se exatamente da mesma maneira (salvo o líder). Sob esta premissa, o sistema considerado resume-se a um conjunto de indivíduos caminhando aleatoriamente, com trajetórias que oscilam em torno da posição líder este comportamento conduz ao estabelecimento de R_B , o raio do bando, que caracteriza a busca coletiva. Coerente com o livre arbítrio que concede a cada indivíduo autonomia para tomar suas próprias decisões, os membros do bando não precisam seguir rigidamente os passos do líder e em vez disso escolhem trajetórias pessoais que tangenciam e interceptam a trajetória do líder a fim de manter-se, em média, a uma distância segura dos outros membros do grupo.

Nas próximas seções discutimos três variações dos modelos de dinâmica “Siga o Líder”, derivando para cada caso $\langle R_B \rangle$, o valor esperado do raio do bando em função da estratégia de busca μ_f e do truncamento T_f da caminhada aleatória dos indivíduos do bando.

4.1 Dinâmica “Siga o Líder”

Toda a dinâmica dos modelos “Siga o Líder” emerge da tentativa dos “foragers” de acompanhar os movimentos do seu líder gerando uma relação de estímulo (movimento do líder) e resposta (movimento dos “foragers”). Podemos calibrar a intensidade das respostas pelo ajuste dos parâmetros de desordem σ_θ e σ_l , que determinam a correlação entre a direção (ou deslocamento) da caminhada do líder e a direção (ou deslocamento) da caminhada escolhida pelos outros indivíduos. Note que $\sigma_\theta = \sigma_l = 0$ implica em desordem nula indicando que os membros do grupo movem-se seguindo rigidamente os passos do líder. Os parâmetros de desordem juntamente com a distribuição de saltos do líder e dos “foragers” definem o raio do bando R_B . Visando entender de que forma o raio do bando depende destas grandezas, faremos simulações usando três variações dos modelos “Siga o Líder”: (i) “Siga o Líder” com Desordem Gaussiana; (ii) “Siga o Líder Contínuo” com Caminhadas Distintas para os “foragers” e o Líder; (iii) “Siga o Líder Incrementativo” com Caminhadas Distintas para os “foragers” e o Líder. Acreditamos ter mostrado que o

modelo (iii), considera as variáveis fundamentais do problema a ponto de ser capaz de gerar uma aproximação de ordem zero da caminhada aleatória de um bando. Aproximamos analiticamente, para o modelo (iii) o valor esperado do raio do bando como uma função da caminhada dos “foragers” $\langle R_B \rangle(\sigma_\theta, \langle l_f \rangle)$, que por sua vez, permitirá a interpretação adequada das curvas de eficiência obtidas com futuras simulações de “Foraging” coletivo.

4.2 Grandezas Relevantes

Assim como nos capítulos anteriores definimos a caminhada aleatória pela escolha de uma direção θ_j e de um salto ℓ_j respectivamente obtidos segundo as funções de distribuição $P(\theta_j)$ e $P(\ell_j)$ (figura-4.2). Nesta seção definimos as grandezas relevantes para a determinação de $\langle R_B \rangle$.

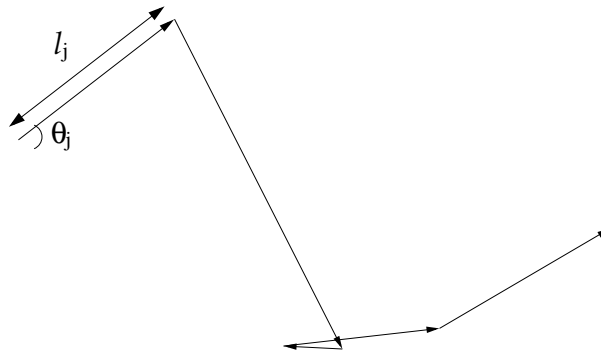


Figura 4.2: Caminhada aleatória em duas dimensões, $P(\theta_j)$ e $P(\ell_j)$ definem a caminhada.

Neste modelo consideramos caminhadas com velocidade constante e normalizada ($v = 1$) correspondendo à definição $\Delta t \equiv \Delta \ell$ (percorrer a distância $\Delta \ell$ consome o tempo Δt). Dito isto podemos discretizar o problema e monitorar o tempo transcorrido em termos da distância percorrida $t = \ell$. O Tempo total T da caminhada é a soma de todos os N_p passos da caminhada fornecendo $T = \sum_{j=1}^{N_p} \ell_j$.

Considere $f_i(\ell_j)$, como as coordenadas de posição do i -ésimo “forager” após ao executar o j -ésimo passo de comprimento ℓ_j (ou após transcorrido o tempo t_j se preferir o domínio temporal). Em duas dimensões $f_i(\ell_j) = (x_i(\ell_j), y_i(\ell_j))$, segue que o centro do bando $C(\ell_j) = (x_c(\ell_j), y_c(\ell_j))$ pode ser obtido pela média das posições de todos os N_f “foragers”, a cada passo considerado (ou a cada instante considerado pois $\Delta t \equiv \Delta \ell$)

$$C(\ell_j) = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} f_i(\ell_j) = \left(\frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} x_i, \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} y_i \right), \quad (4.1)$$

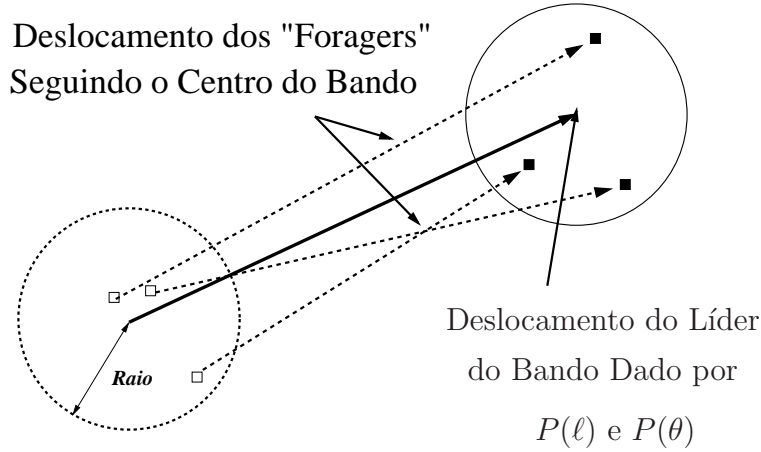


Figura 4.3: Caminhada aleatória em duas dimensões ilustrando a dinâmica “Siga o Líder”.

a distância $R_i(\ell_j)$, do i -ésimo “forager” até o centro do bando, a cada passo, fica definida como

$$R_i(\ell_j) = |f_i(\ell_j) - C(\ell_j)| = \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2}, \quad (4.2)$$

e a partir dos $R_i(\ell_j)$ podemos calcular o raio médio instantâneo do bando no j -ésimo passo

$$R_B(\ell_j) = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} R_i(\ell_j). \quad (4.3)$$

Obtemos o raio médio do bando $\langle R_B \rangle$ ao longo de uma caminhada completa tomando a média da equação (4.3) sobre todos os N_p passos da caminhada

$$\langle R_B \rangle(\ell_j) = \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} R_B(\ell_j) = \frac{1}{N_p N_f} \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_f} R_i(\ell_j), \quad (4.4)$$

o índice i soma sobre todos os “foragers” e j soma sobre todos os passos da caminhada.

Coefficiente de Separação C_S

Desejamos determinar uma variação do modelo “Siga o Líder” capaz de garantir que o centro do bando estará sempre nas proximidades da posição do líder $L(\ell_j) = (x_L(\ell_j), y_L(\ell_j))$. Se a posição do líder não coincide com o centro do bando isto indica que o grupo não estará mais seguindo o líder e o modelo perderá o seu propósito, por isso definimos o coeficiente de separação $C_S(\ell_j)$, como a distância entre o líder e o centro do bando

$$C_S(\ell_j) = |L(\ell_j) - C(\ell_j)| = \sqrt{(x_L - x_c)^2 + (y_L - y_c)^2}. \quad (4.5)$$

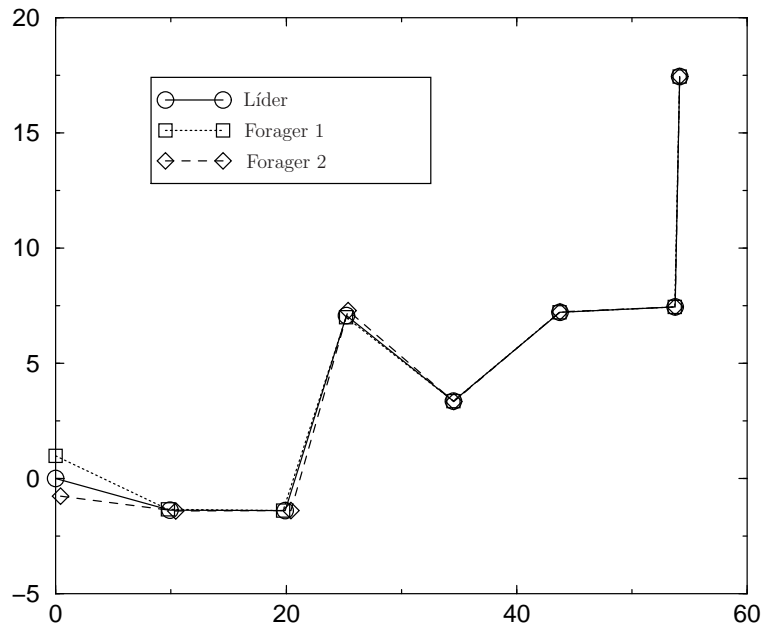


Figura 4.4: Caminhada aleatória de um bando em duas dimensões e sem desordem, $\sigma_\theta = 0$ e $\sigma_\ell = 0$, ilustrando como os “foragers” se agrupam para formar um bando de raio zero, para qualquer condição inicial. Nesta ilustração o líder realiza uma caminhada Browniana.

Devemos monitorar a evolução de C_S a cada passo do líder (evolução temporal) e interpretar o seu aumento como uma elevação na desordem do sistema já que é esperado o aumento na divergência do bando sempre que a direção ou tamanho dos saltos dos “foragers” forem muito diferentes da direção ou tamanho dos saltos do líder isto certamente aumenta a distância entre o centro do bando e o líder.

Deve ficar claro que o líder não é necessariamente um membro do bando, e sim um artifício para manter os indivíduos coesos. Para fazer o bando realizar uma caminhada aleatória basta definir a $P_L(\ell)$, a distribuição de deslocamentos do líder e $P_L(\theta)$, a distribuição de direções do líder, e os outros indivíduos farão o mesmo, como ilustra a figura-4.3. As regras que determinam a maneira como os membros do bando seguem o líder serão definidas nas seções seguintes.

4.3 Modelo “Siga o Líder” Sem Desordem

Como vimos na seção anterior, a dinâmica da caminhada do líder é definida segundo as distribuições $P_L(\theta)$ e $P_L(\ell)$ (os saltos podem ser truncados em T_L). A “resposta sem desordem” dos indivíduos aos movimentos do líder faz com que os “foragers” movam-se a fim de se posicionar sobre o líder. Este comportamento é obtido escolhendo a rota de interceptação pela direção θ_I , que conduz ao líder e o salto ℓ_I , que é a distância exata

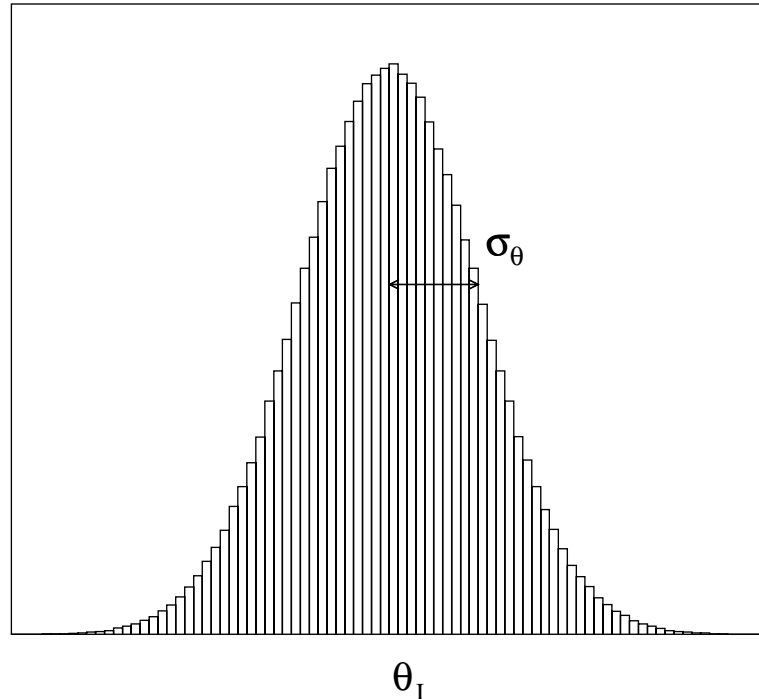


Figura 4.5: Exemplo de desordem Gaussiana na direção $P_f(\theta)$. Usamos a mesma distribuição para a desordem nos saltos $P_f(\ell)$.

até o líder, veja a figura-4.4. A expressão “resposta sem desordem” refere-se ao fato de não haver livre arbítrio envolvido na resposta dos “foragers”, eles simplesmente imitam os movimentos do líder indo precisamente aonde o líder for. Obviamente a resposta sem desordem faz com que o raio do bando seja nulo (figura-4.4) veremos adiante que quanto maior a desordem maior será o raio do bando.

Neste modelo o raio do bando independe de qualquer variável do problema, por conta de ser um uma simplificação extrema dos problemas reais, além disso este modelo é um caso particular do modelo considerado na seção seguinte e lá iremos explorar com maiores detalhes a dependência do raio do bando com relação aos parâmetros do modelo.

4.4 Modelo “Siga o Líder” com Desordem Gaussiana

Neste modelo introduzimos o conceito de desordem na direção de deslocamento e no tamanho dos deslocamentos dos indivíduos em resposta às escolhas do líder. Ao invés dos “foragers” escolherem a direção θ_I e a distancia de salto ℓ_I que conduzem exatamente à posição do líder, utilizamos a distribuição $P_f(\theta)$, centrada na direção θ_I que conduz ao líder e com desvio padrão (desordem) σ_θ e similarmente para os deslocamentos, consideramos uma distribuição de saltos arbitrária $P_f(\ell)$ com desordem σ_ℓ com relação a distância

ℓ_I escolhida pelo líder assim os “foragers” escolhem aleatoriamente direções e distâncias respectivamente nas proximidades de θ_I e ℓ_I . Por exemplo se $P_f(\theta)$ e $P_f(\ell)$ forem distribuições Gaussianas, (veja a figura-4.5) elas estarão centradas em θ_I e ℓ_I e as desordens σ_θ e σ_ℓ serão os respectivos desvios padrão das Gaussianas. Desta forma os membros do bando estarão sempre nas proximidades do líder, mas não necessariamente sobre ele.

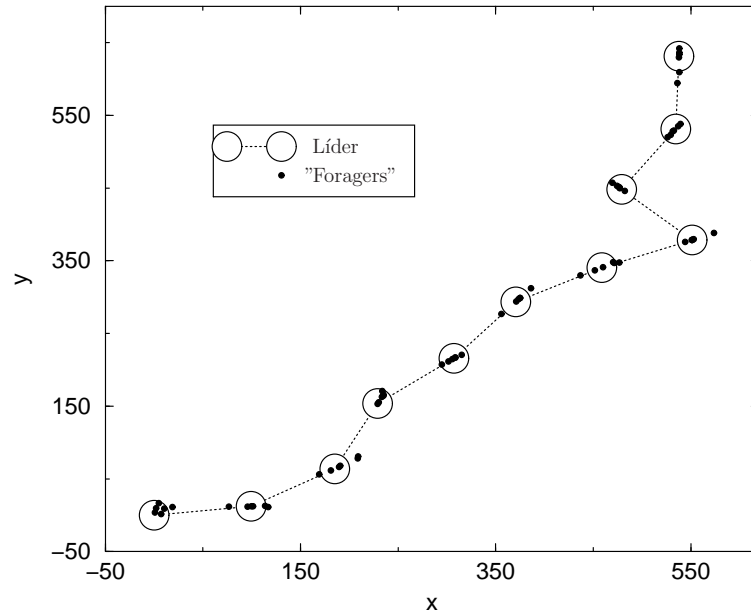


Figura 4.6: Caminhada aleatória em duas dimensões com desordem Gaussiana $\sigma_\ell = 30$, no tamanho dos deslocamentos em torno dos saltos do líder cuja média é $\ell = 100$ e desordem nula na direção, $\sigma_\theta = 0$, ilustrando como os “foragers” se agrupam ao longo da direção de deslocamento do líder para formar um bando com raio variável. O líder faz caminhada Browniana.

O modelo considerado na seção anterior tem desordem nula (figura-4.4), $\sigma_\theta = 0$ e $\sigma_\ell = 0$, e isto resulta em um bando com raio nulo porém, à medida que a desordem aumenta, menor é a coesão do grupo e o raio aumenta devido ao enfraquecimento da correlação com a caminhada do líder, isto indica que o aumento na desordem permite que o líder e os membros do grupo realizem caminhadas não idênticas. Este fenômeno pode ser visto na figura-4.6 que mostra uma caminhada com desordem no tamanho dos saltos e na figura-4.7 que mostra uma caminhada com desordem na direção em ambos os casos observamos os membros do grupo assumirem posições oscilando nas proximidades da posição do líder. Por fim a figura-4.8 mostra a caminhada com desordem de direção e deslocamento, como esperado o raio do bando cresce significativamente com relação as figuras 4.6 e 4.7.

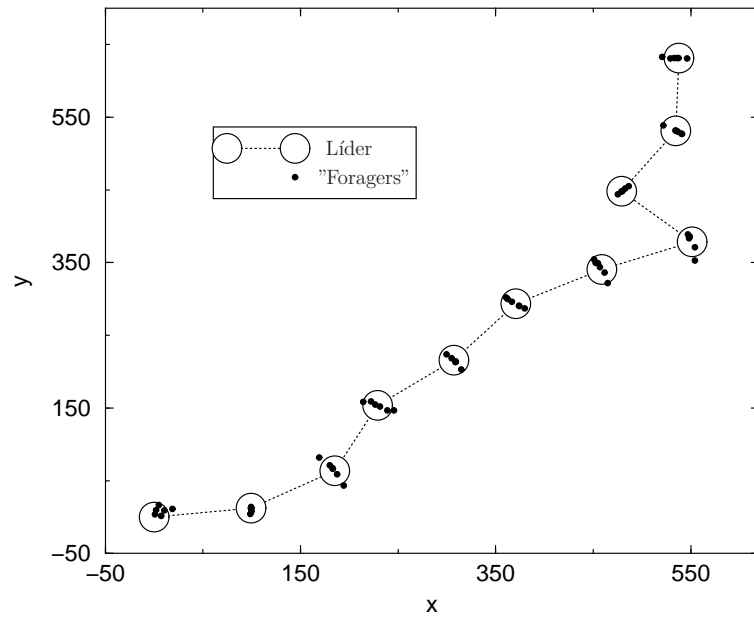


Figura 4.7: Caminhada aleatória em duas dimensões com uma pequena desordem Gaussiana na direção, $\sigma_\theta = 25^\circ$ e desordem nula no tamanho dos saltos, $\sigma_\ell = 0$, ilustrando como os “foragers” se agrupam em torno do líder para formar um bando de raio variável. O líder faz caminhada Browniana.

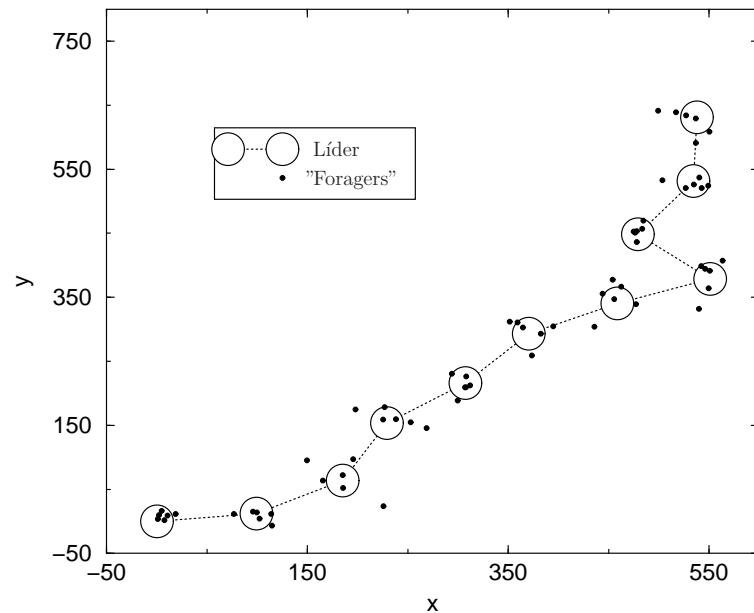


Figura 4.8: Caminhada aleatória em duas dimensões com desordem Gaussiana, $\sigma_\theta = 25^\circ$ na direção e $\sigma_\ell = 30$ em torno dos saltos do líder cuja média é $\ell = 100$, ilustrando como os “foragers” se agrupam radialmente em torno do líder para formar um bando com raio variável. O líder faz caminhada Browniana.

4.4.1 Valor Esperado do Raio do Bando $\langle R_B \rangle$

Podemos obter uma relação entre o raio do bando e a caminhada do líder considerando aproximações sobre a configuração do i -ésimo “forager” com relação ao líder no passo $j - 1$ e a sua posição com relação ao líder no j -ésimo passo, veja a figura-4.9.

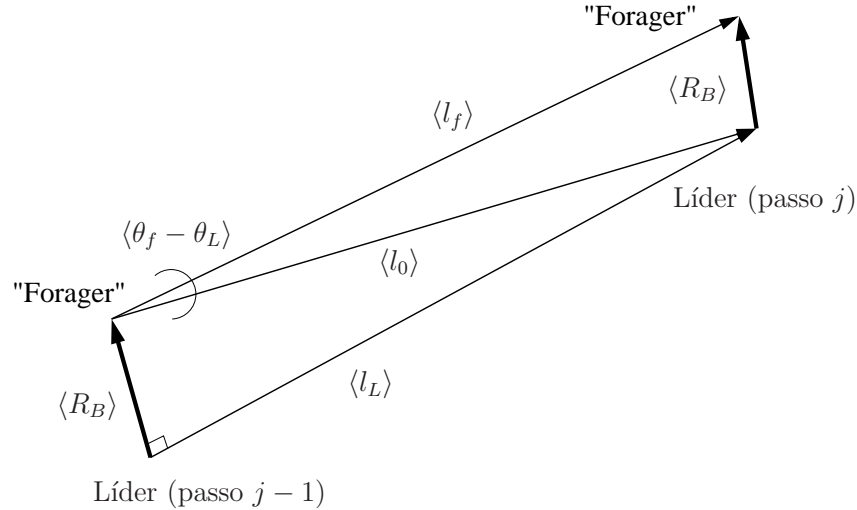


Figura 4.9: Estimativa do raio do bando em função das grandezas que caracterizam a caminhada do líder e dos membros do bando como $\langle \theta_f - \theta_0 \rangle$, o valor esperado da diferença entre a direção do salto do “forager” e a direção que leva diretamente a posição líder no passo j . $\langle l_f \rangle$ é o passo médio da caminhada dos membros do bando e $\langle l_L \rangle$, o passo médio da caminhada do líder. $\langle l_0 \rangle$ é a distância entre a posição do “forager” no passo $j - 1$ e a posição do líder no passo j , também é a hipotenusa determinada por $\langle R_B \rangle$ e $\langle l_L \rangle$.

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo de lados $\langle R_B \rangle$, $\langle l_f \rangle$, $\langle l_0 \rangle$ na figura-4.9, onde $\langle l_f \rangle$ é o passo médio da caminhada dos membros do bando, $\langle l_L \rangle$ o passo médio da caminhada do líder e $\langle l_0 \rangle$ é a distância entre a posição do “forager” no passo $j - 1$ e a posição do líder no passo j . Podemos escrever o raio do bando

$$\langle R_B \rangle^2 = \langle l_f \rangle^2 + \langle l_0 \rangle^2 - 2 \langle l_f \rangle \langle l_0 \rangle \cos \langle \theta_f - \theta_0 \rangle, \quad (4.6)$$

note que $\langle \theta_f - \theta_0 \rangle$, o valor esperado da diferença entre a direção do salto do “forager” e a direção que leva diretamente a posição líder no passo j . $\langle l_f \rangle$ é um parâmetro livre e podemos ver na figura-4.9 que $\langle l_0 \rangle$ é uma hipotenusa e encontramos $\langle l_0 \rangle = \sqrt{\langle R_B \rangle^2 + \langle l_L \rangle^2}$, então

$$\langle l_0 \rangle = \sqrt{\langle R_B \rangle^2 + \langle l_L \rangle^2}. \quad (4.7)$$

Podemos obter $\langle \theta_f - \theta_0 \rangle$ como uma função da desordem σ_θ pelo “ajuste” sobre a curva

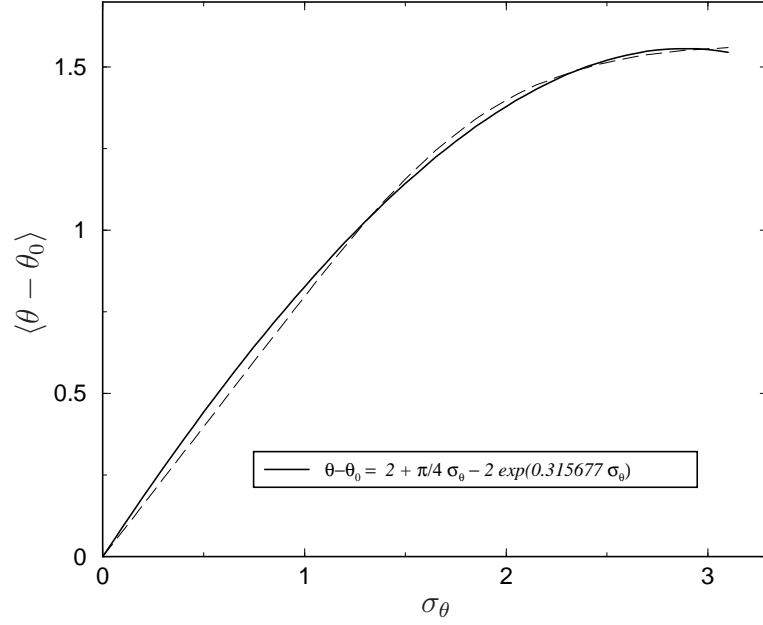


Figura 4.10: Diferença média entre a direção do líder e a direção dos “foragers” em função da desordem na direção de salto σ_θ . A curva tracejada refere-se ao resultado numérico e a curva com traço contínuo é o melhor ajuste sobre a curva tracejada.

numérica de $\langle \theta_f - \theta_0 \rangle$ versus σ_θ mostrada na figura-4.10 e sua expressão é

$$\langle \theta_f - \theta_0 \rangle = 2 + \pi/2 \sigma_\theta - 2 e^{0.315677 \sigma_\theta}, \quad (\sigma_\theta \leq \pi). \quad (4.8)$$

Ainda resta determinar $\langle l_L \rangle$, o passo médio da caminhada do líder. Vamos assumir que o Líder realiza uma caminhada de Lévy com estratégia μ_L e passos truncados em T_L . Portanto, precisamos calcular o primeiro momento da distribuição de Lévy Truncada

$$\langle l_L \rangle = \frac{(1 - \mu_L)(T_L^{2-\mu_L} - r_v^{2-\mu_L})}{(2 - \mu_L)(T_L^{1-\mu_L} - r_v^{1-\mu_L})}, \quad (4.9)$$

substituindo (4.7), (4.8) e (4.9) na equação (4.6) e resolvendo para $\langle R_B \rangle$ obtemos,

$$\langle R_B \rangle = \sqrt{(\langle \ell_f \rangle^2 + \langle \ell_L \rangle^2)^2 \left(\frac{\sec \langle \theta_f - \theta_0 \rangle}{2 \langle \ell_f \rangle} \right)^2 - \langle \ell_f^2 \rangle}. \quad (4.10)$$

Note que o raio médio do bando $\langle R_B \rangle$ depende de σ_θ , $\langle l_f \rangle$ e $\langle l_L \rangle$. A comparação entre o resultado analítico (4.10), e a simulação aparece na figura-4.11.

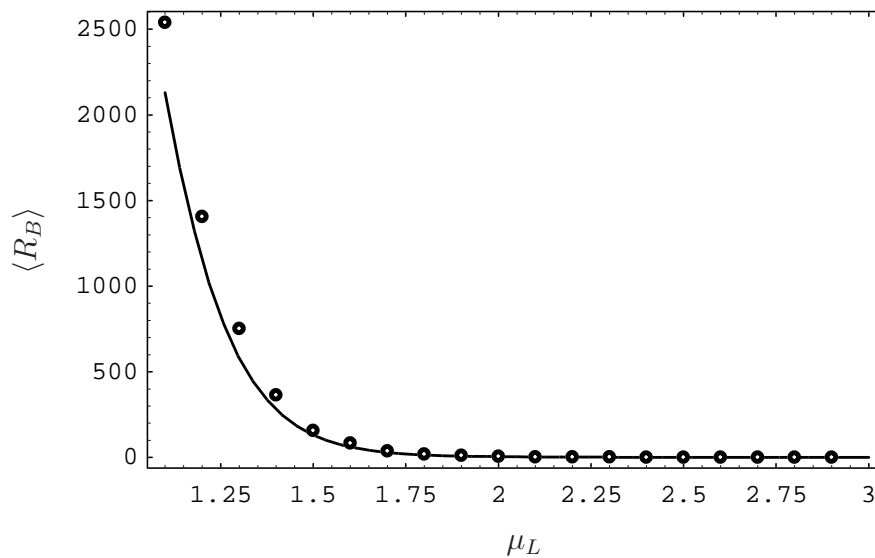


Figura 4.11: Comparação entre o resultado numérico (pontos) e o resultado analítico (traço contínuo) mostrando a equação (4.11).

4.4.2 Relação entre o Raio do Bando R_B e a Caminhada do Líder

Estamos especialmente interessados em modelos onde o raio do bando não dependa da caminhada do líder por isso vamos investigar como o raio do bando se comporta quando variamos o expoente de Lévy da distribuição de saltos do líder μ_L , figura-4.11.

Podemos entender melhor o resultado da figura-4.11 se acompanharmos os detalhes mostrados nas estatísticas. Na figura-4.12 temos os resultados relacionados com o primeiro ponto da figura-4.11, quando $\mu_L = 1.1$. Notamos que sempre que o líder executa um salto longo o raio do bando diverge. O coeficiente de separação assume valores elevados, e isto é esperado já que a desordem na direção σ_ℓ depende do tamanho do salto do líder ℓ_0 , aumentando muito a distância entre o centro do bando e o líder nos saltos longos. O histograma mostra a distribuição de saltos ao longo da simulação e vemos que o desvio padrão do raio do bando é muito elevado e isto significa que há grandes variações no raio do bando. Na figura-4.13 temos os resultados relacionados com o ponto intermediário da figura-4.11, quando $\mu_L = 2.0$. Notamos que o raio do bando ainda é sensível aos movimentos do líder. Na figura-4.14 temos os resultados relacionados com o último ponto da figura-4.11, quando $\mu_L = 3.0$. Notamos que quase não há saltos longos e, por conta disso, as variações do raio causadas pelos saltos do líder são menos relevantes e por isso o raio do bando assume um valor próximo ao raio natural do bando entenda-se por “raio natural” o raio determinado somente pela dinâmica dos “foragers” sem qualquer influência do líder. Os resultados comparativos ilustrando a relação entre o raio do bando e a caminhada do líder são mostrados nas três páginas seguintes.

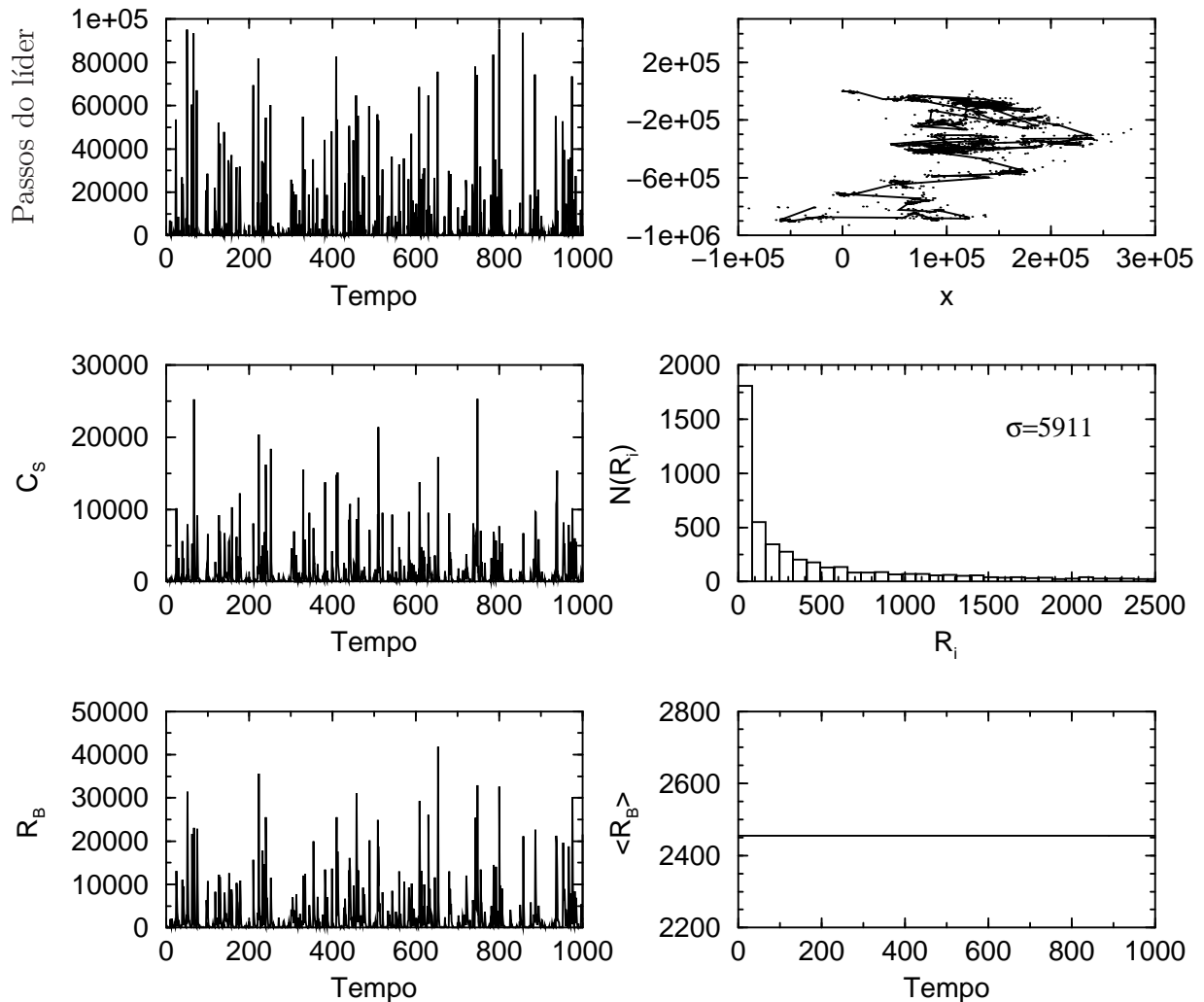


Figura 4.12: Dinâmica “Siga o Líder com Desordem” com Expoente de Lévy $\mu_L = 1.1$, Truncamento em $T_L = 100000$, $\sigma_\theta = 25^\circ$, $\sigma_l = \frac{5}{100} l_0$. (Simulação ilustrativa com apenas 1000 saltos do líder). A figura superior esquerda mostra a série temporal com todos os deslocamento do líder e a figura superior direita a trajetória correspondente. A figura intermediária esquerda, mostra o coeficiente de separação C_s , note que a cada pico nos deslocamento do “forager” produz um pico em C_s indicando que saltos muito longos do líder implicam em um atraso até que o bando possa percorrer a distância até a nova posição do líder. A figura intermediária direita, mostra a distribuição de posições de um indivíduo com relação ao centro do bando. A figura inferior esquerda, mostra a série temporal do raio do bando enquanto a figura inferior direita mostra a média da série Neste caso a caminhada do líder é superdifusiva e, portanto, a frequência dos saltos maiores que a média é elevada, e por isso observamos tantos picos em C_s .

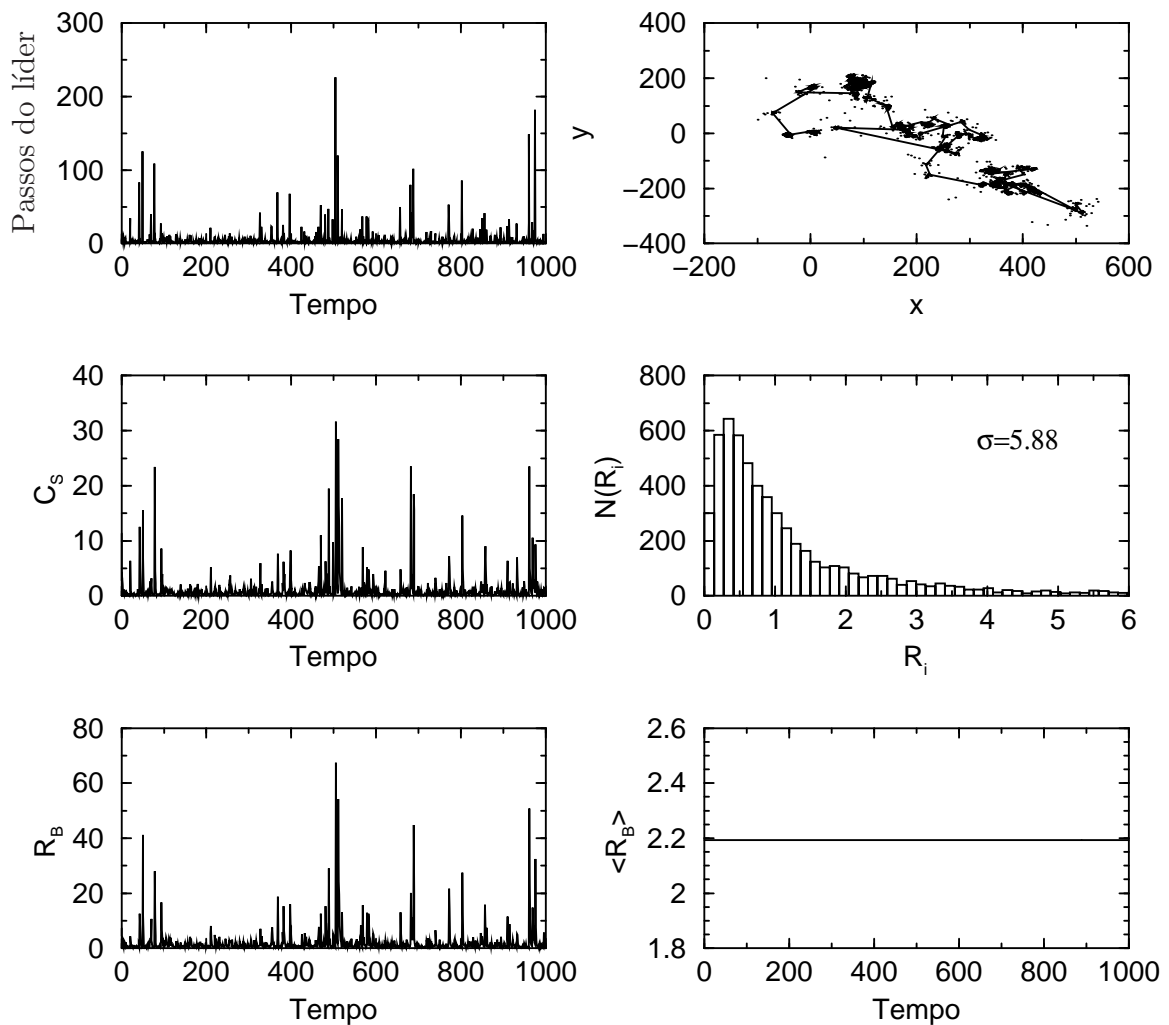


Figura 4.13: Dinâmica “Siga o Líder com Desordem” com Expoente de Lévy $\mu_L = 2$, Truncamento em $T_L = 100000$, $\sigma_\theta = 25^\circ$, $\sigma_l = \frac{5}{100} l_0$. (Simulação ilustrativa com apenas 1000 saltos do líder). A figura superior esquerda mostra a série temporal com todos os deslocamento do líder e a figura superior direita a trajetória correspondente. A figura intermediária esquerda, mostra o coeficiente de separação C_s , note que a cada pico nos deslocamento do “forager” produz um pico em C_s indicando que saltos muito longos do líder implicam em um atraso até que o bando possa percorrer a distância até a nova posição do líder. A figura intermediária direita, mostra a distribuição de posições de um indivíduo com relação ao centro do bando. A figura inferior esquerda, mostra a série temporal do raio do bando enquanto a figura inferior direita mostra a média da série.

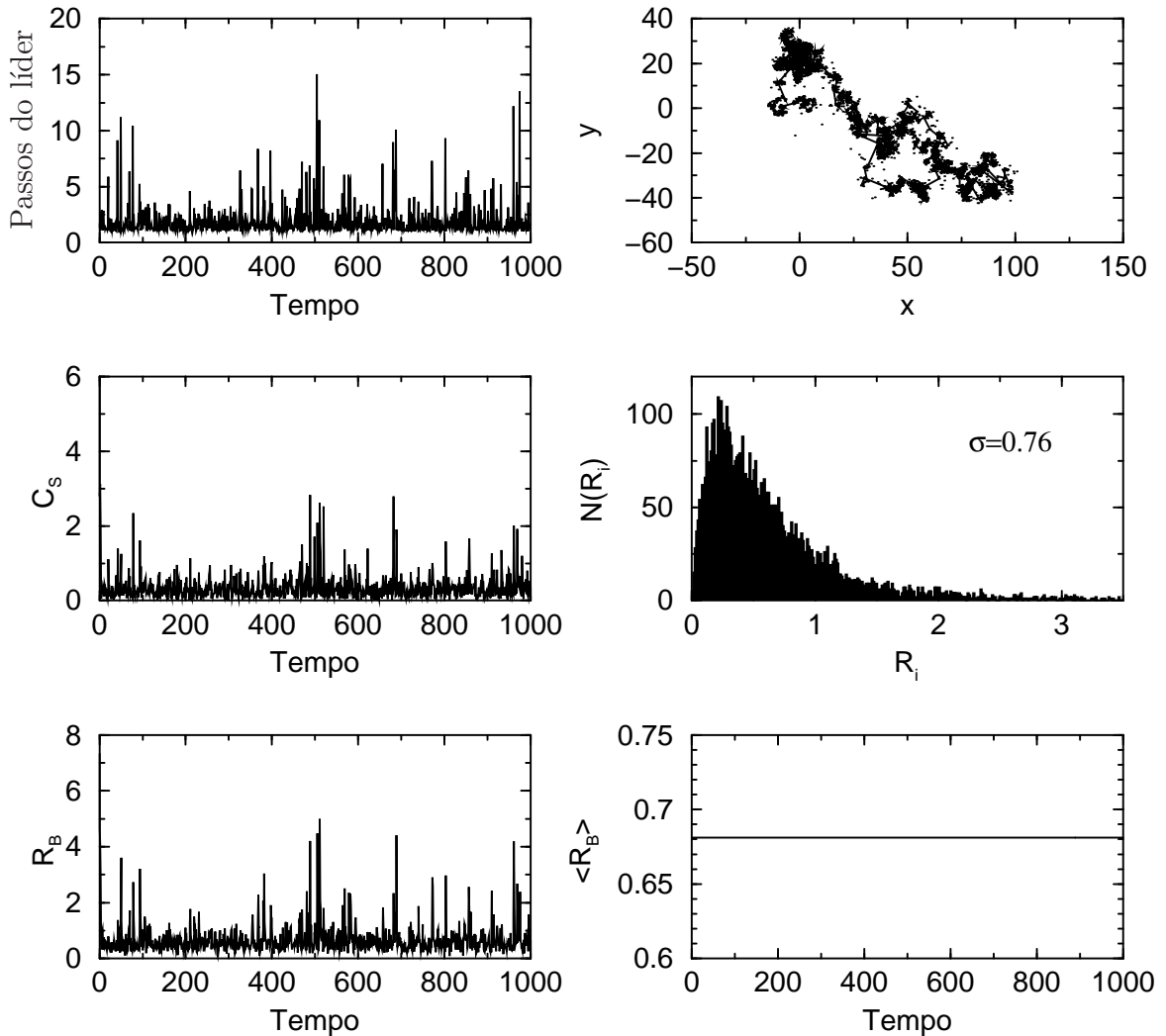


Figura 4.14: Dinâmica “Siga o Líder com Desordem” com Expoente de Lévy $\mu_L = 3$, Truncamento em $T_L = 100000$, $\sigma_\theta = 25^\circ$, $\sigma_l = \frac{5}{100} l_0$. (Simulação ilustrativa com apenas 1000 saltos do líder). A figura superior esquerda mostra a série temporal com todos os deslocamento do líder e a figura superior direita a trajetória correspondente. A figura intermediária esquerda, mostra o coeficiente de separação C_s , note que a cada pico nos deslocamento do “forager” produz um pico em C_s indicando que saltos muito longos do líder implicam em um atraso até que o bando possa percorrer a distância até a nova posição do líder. A figura intermediária direita, mostra a distribuição de posições de um indivíduo com relação ao centro do bando. A figura inferior esquerda, mostra a série temporal do raio do bando enquanto a figura inferior direita mostra a média da série. Neste caso a caminhada do líder é Browniana e portanto a frequência dos saltos maiores que a média é baixa, e por isso não observamos tantos picos em C_s .

4.5 Modelo “Siga o Líder” Contínuo

4.5.1 Caminhadas Distintas para os “Foragers” e o Líder

Agora podemos finalmente generalizar o modelo “Siga o Líder com Desordem” de modo a permitir que o líder e o “forager” realizem caminhadas de tipos diferentes. Consideramos o caso onde a trajetória do líder é no mínimo tão difusiva quanto a dos “foragers”, na verdade estamos interessados no caso onde a caminhada do líder é muito mais difusiva.

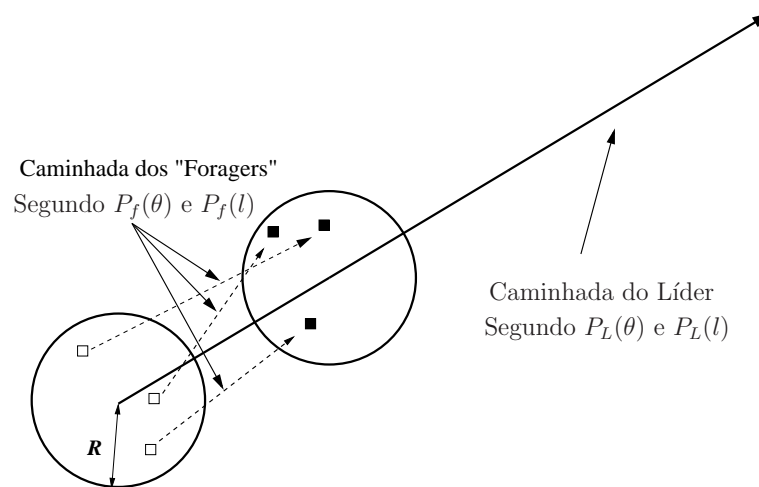


Figura 4.15: Dinâmica “Siga o Líder Contínuo” com o líder e o “foragers” realizando caminhadas distintas.

Nas duas seções seguintes apresentaremos dois métodos similares que permitem considerar caminhadas distintas nos modelos “Siga o Líder”, visando permitir que os “forager” executem uma caminhada diferente daquela realizado pelo líder, introduzimos um modelo onde o líder salta na direção e distancia escolhida e aguarda lá até que o bando o alcance. O bando se moverá na direção do líder respeitando duas regras: (i) executar a quantidade de saltos que for necessária para que a distância entre o centro do bando e o líder, coeficiente C_S , torne-se menor que o raio do bando; (ii) o bando não pode executar um número de saltos inferior a

$$N_p = \frac{\ell_L}{2/3 \langle l_f \rangle \cos \langle \theta - \theta_0 \rangle}, \quad (4.11)$$

esta estimativa basea-se no tamanho do salto do líder dividido pelo valor esperado do deslocamento do bando na direção do movimento do líder. Assim que as duas regras acima forem executadas o líder escolhe uma nova direção e uma nova distância para saltar.

4.5.2 Lévy Truncado em T_L para o Líder e em T_f para os “Foragers”

A distribuição de Lévy tem se mostrado útil na biologia para definir as distribuições de saltos de seres vivos, isto nos leva a considerar um sistema onde o líder faz uma caminhada de Lévy definida por $P_L(\theta) = \text{constante}$ e $P_L(\ell) \sim \ell^{-\mu_L}$ truncado em $T_L = 100000$ enquanto os “foragers” realizam uma outra caminhada definida por $P_f(\theta)$ que é uma Gaussiana centrada na direção do líder θ_0 , como nos modelos anteriores e $P_f^{T_f}(\ell) \sim \ell^{-\mu_f}$ é uma distribuição de Lévy truncada em $T_f \ll T_L$.

Valor Esperado para o Raio Médio do Bando $\langle R_B \rangle$

Seguindo uma argumentação análoga à que usamos seção-4.4.1 obtemos uma relação entre o raio do bando e as propriedades da caminhada dos “foragers” e do líder. Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo de lados $\langle R_B \rangle$, l_f , l_0 e ângulo $\langle \theta_f - \theta_0 \rangle$ como mostra a figura-4.9, obtemos

$$\langle R_B \rangle^2 = \langle l_L \rangle^2 + \langle l_0 \rangle^2 - 2 \langle l_L \rangle \langle l_0 \rangle \cos \langle \theta_f - \theta_0 \rangle, \quad (4.12)$$

aproximando o valor médio de $\langle l_0 \rangle$ por

$$\langle l_0 \rangle = N_p \langle l_f \rangle, \quad (4.13)$$

onde

$$\langle N_p \rangle = \frac{\langle l_L \rangle}{\langle l_f \rangle \cos \langle \theta_f - \theta_0 \rangle}, \quad (4.14)$$

a diferença média entre a direção escolhida pelo líder e a direção escolhida pelo “forager” é como antes

$$\langle \theta_f - \theta_0 \rangle = 2 + \pi/2 \sigma_\theta - 2 e^{0.315677 \sigma_\theta}, \quad (\sigma_\theta \leq \pi), \quad (4.15)$$

e o salto médio na caminhada do líder é o primeiro momento da distribuição de Lévy Truncada que é

$$\langle l_L \rangle = \frac{(1 - \mu_L)(T_L^{2-\mu_L} - r_v^{2-\mu_L})}{(2 - \mu_L)(T_L^{1-\mu_L} - r_v^{1-\mu_L})}. \quad (4.16)$$

Substituindo (4.13), (4.14), (4.15) e (4.16), na equação (4.12) e resolvendo para $\langle R_B \rangle$ obtemos

$$\langle R_B \rangle = \ln \langle l_L \rangle \sec \langle \theta - \theta_0 \rangle \gamma, \quad (\sigma_\theta > 0), \quad (4.17)$$

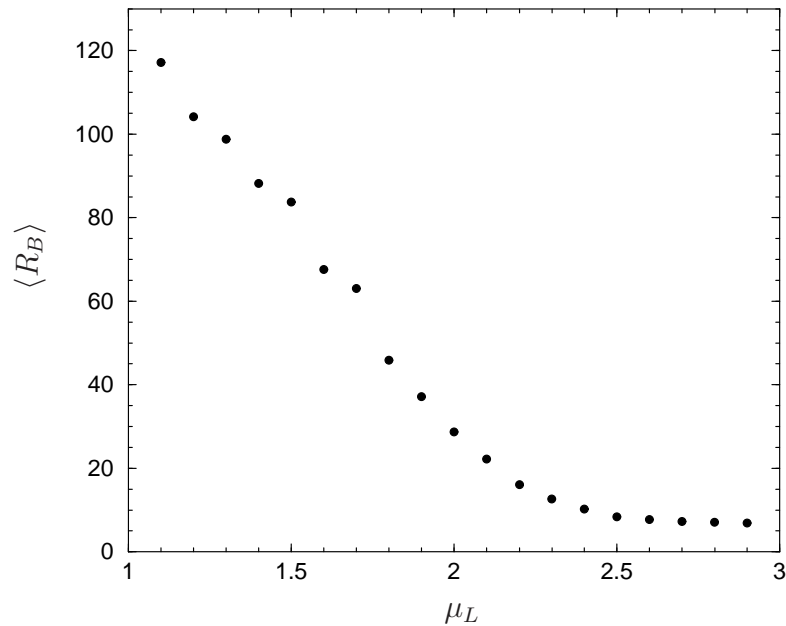


Figura 4.16: Relação entre o raio do bando $\langle R_B \rangle$ e a caminhada do líder. O Raio depende fortemente do expoente de Lévy do líder.

onde

$$\gamma = 17 \sqrt{\frac{9}{4} - 2 \cos^2 \langle \theta - \theta_0 \rangle},$$

note que o raio médio do bando $\langle R_B \rangle$ depende de σ_θ , μ_L , T_L , r_v .

4.5.3 Relação entre o Raio do Bando R_B e a Caminhada do Líder

A figura-4.16 mostra a dependência do raio do bando com relação à estratégia de caminhada do líder μ_L . Podemos entender melhor o resultado da figura-4.16 se acompanharmos os detalhes mostrados nas estatísticas da figura-4.17 onde temos os resultados relacionados com o primeiro ponto da figura-4.16, quando $\mu_L = 1.1$. Notamos que sempre que o líder executa um salto longo o raio do bando diverge. O coeficiente de separação assume valores elevados, e isto é esperado já que, nos saltos longos, o líder toma uma posição muito distante dos “foragers” e espera que o bando o alcance, aumentando muito a distância entre o centro do bando e o líder. O histograma mostra a distribuição de saltos ao longo da simulação e vemos que o desvio padrão do raio do bando é muito elevado e isto significa que há grandes variações no raio do bando.

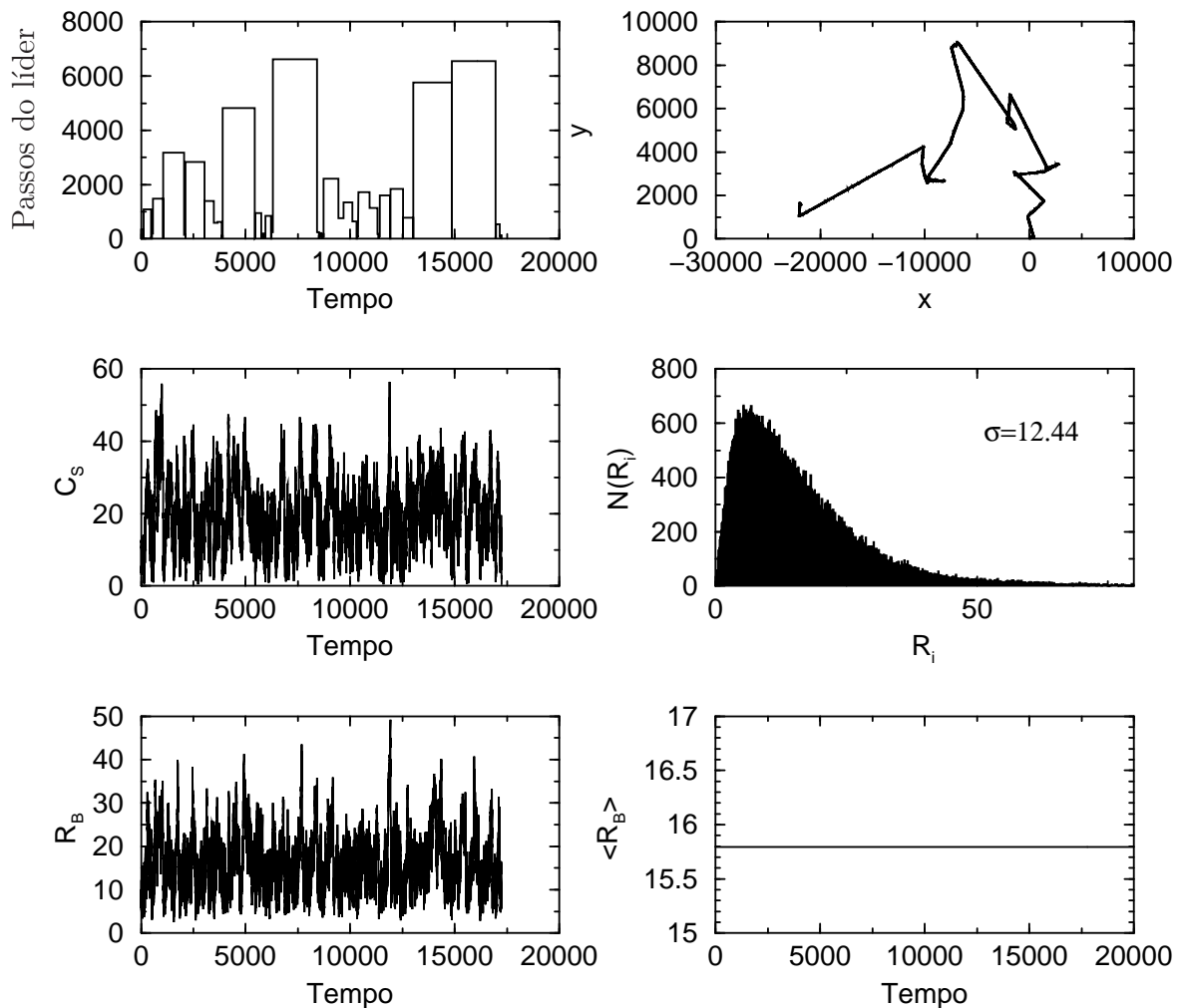


Figura 4.17: Dinâmica “Siga o Líder Contínuo” com expoente de Lévy $\mu_L = 1.1$, Truncamento em $T_L = 100000$, $\sigma_\theta = 25^0$ e expoente dos “foragers” $\mu_f = 2$, Truncamento em $T_f = 50$. (Simulação ilustrativa com apenas 1000 saltos do líder). A figura superior esquerda mostra a série temporal com todos os deslocamento do líder e a figura superior direita a trajetória correspondente. A figura intermediária esquerda, mostra o coeficiente de separação C_s . A figura intermediária direita, mostra a distribuição de posições de um indivíduo com relação ao centro do bando. A figura inferior esquerda, mostra a série temporal do raio do bando enquanto a figura inferior direita mostra a média da série. Note que C_s oscila próximo à média, indicando que a caminhada superdifusiva do líder não induz a divergências do bando.

4.6 Modelo “Siga o Líder” Incrementativo

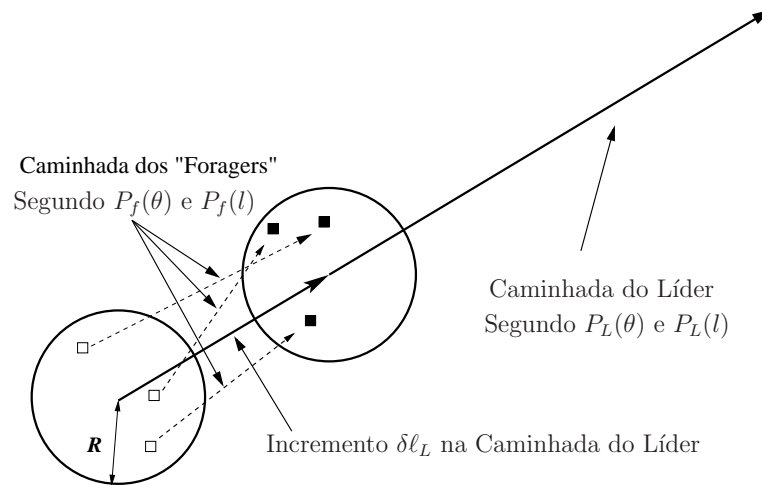


Figura 4.18: Dinâmica “Siga o Líder Incrementativo” com o líder e o “foragers” realizando caminhadas distintas. O líder executa o salto dado por $P_L(\ell)$ de forma incrementativa.

4.6.1 Caminhadas Distintas para os “Foragers” e o Líder

Nos modelos anteriores observamos a divergência do raio do bando sempre que o líder executava um salto longo este modelo foi introduzido visando eliminar a dependência entre o raio do bando e a caminhada do líder. Para isso não permitiremos que o líder execute os saltos longos de uma só vez, ao invés disso quebraremos o salto em vários saltos menores e faremos o líder mover-se incrementativamente ao longo da direção escolhida até que toda a distância do salto seja percorrida.

Mais precisamente, sempre que o líder escolher saltar uma distância maior que o valor médio da distribuição de saltos dos “foragers” este salto será executado de forma incrementativa, ilustração-4.18, e modo que o líder só escolherá uma nova direção e um novo salto quando a soma dos incrementos dados na posição do líder for igual ao último salto escolhido. O valor do incremento na posição do líder foi calibrado com a ajuda de simulações numéricas de onde tiramos $\delta\ell_L = 2/3 \langle l_f \rangle \cos \langle \theta - \theta_0 \rangle$ como o valor adequado para o incremento. Lembramos que $\langle l_f \rangle \cos \langle \theta - \theta_0 \rangle$ é o valor esperado para a projeção da caminhada do bando na direção do deslocamento do líder.

4.6.2 Lévy Truncado em T_L para o Líder e em T_f para os “Foragers”

Novamente vamos considerar um sistema onde o líder realiza caminhada de Lévy isotrópica ($P_L(\theta) = \text{constante}$) e saltos de Lévy $P_L(\ell) \sim \ell^{-\mu_L}$ truncado em $T_L = 100000$. Similarmente os membros do bando realizam caminhada de Lévy com estratégia μ_f e truncamento em $T_f \ll T_L$. Este modelo permite que o bando realize uma caminhada diferente da líder e ainda mantendo o raio do bando independente da caminhada do líder.

4.6.3 Valor Esperado para o Raio Médio do Bando $\langle R_B \rangle$

Novamente interpretamos a figura-4.9 para obter uma relação entre o raio do bando e as variáveis que definem a caminhada do líder. Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo de lados $\langle R_B \rangle$, l_f , l_0 e ângulo $\langle \theta_f - \theta_0 \rangle$ na figura-4.9, obtemos

$$\langle R_B \rangle^2 = \langle l_f \rangle^2 + \langle l_0 \rangle^2 - 2 \langle l_f \rangle \langle l_0 \rangle \cos \langle \theta_f - \theta_0 \rangle, \quad (4.18)$$

como o valor médio do ângulo $\theta = \pi/2$ temos

$$\langle l_0 \rangle = \sqrt{\langle R_B \rangle^2 + (\langle l_f \rangle \cos \langle \theta - \theta_0 \rangle)^2}, \quad (4.19)$$

lembrando que a diferença média entre a direção escolhida pelo líder e a direção escolhida pelo “forager” é como antes

$$\langle \theta_f - \theta_0 \rangle = 2 + \pi/2 \sigma_\theta - 2 e^{0.315677 \sigma_\theta}, \quad (\sigma_\theta \leq \pi), \quad (4.20)$$

e o salto médio na caminhada dos “Foragers” é o primeiro momento da distribuição de Lévy Truncada que é

$$\langle l_f \rangle = \frac{(1 - \mu_f)(T_f^{2-\mu_f} - r_v^{2-\mu_f})}{(2 - \mu_f)(T_f^{1-\mu_f} - r_v^{1-\mu_f})}, \quad (4.21)$$

e o segundo momento da distribuição de Lévy Truncada do “foragers” é

$$\langle l_f^2 \rangle = \frac{(1 - \mu_f)(T_f^{3-\mu_f} - r_v^{3-\mu_f})}{(3 - \mu_f)(T_f^{1-\mu_f} - r_v^{1-\mu_f})}, \quad (4.22)$$

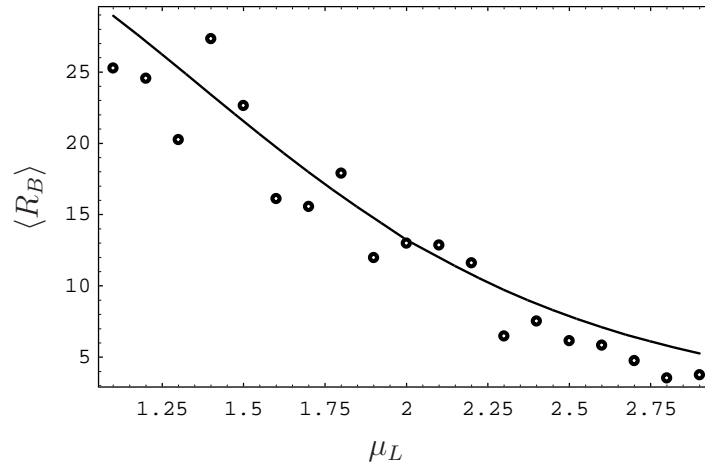


Figura 4.19: Comparação entre resultado numérico (pontos) e o resultado analítico (traço contínuo)

substituindo (4.19), (4.20), (4.21) e (4.22) na equação (4.18), e resolvendo para $\langle R_B \rangle$ obtemos

$$\langle R_B \rangle(\sigma_\theta, \langle l_f \rangle) = \langle l_f \rangle \tan(\theta - \theta_0) + \frac{3}{2} \sigma_{l_f}, \quad (\sigma_\theta > 0), \quad (4.23)$$

onde

$$\sigma_{l_f} = \sqrt{\langle l_f^2 \rangle - \langle l_f \rangle^2},$$

é o desvio padrão da caminhada dos “foragers”. O segundo termo da equação (4.23), foi introduzido para corrigir a divergência nos resultados para $\sigma_\theta \rightarrow 0$. Vemos que o raio do bando depende somente de σ_θ e $\langle l_f \rangle$, portanto depende somente da dinâmica dos “foragers” como gostaríamos que fosse. Veja a comparação entre o resultado numérico e o resultado analítico na figura-4.19.

Isto encerra a discussão sobre os modelos “Siga o Líder”. Como mostra a figura-4.20 o modelo “Siga o Líder Incrementativo” com caminhadas distintas para os “foragers” e o líder permite que a caminhada aleatória do bando evolua de forma independente entre o líder e os indivíduos do grupo. Nas seções seguintes vamos definir as regras dinâmicas para a simulação da busca em bandos.

4.6.4 Regras Dinâmicas - Simulação da Busca Coletiva

A simulação se desenvolve nos ambientes de busca descritos na seção-3.1.1 e é governada por duas regras dinâmicas simples, ilustradas na figura-3.2 que estabelecem o comportamento requerido para satisfazer a heurística definida na seção-3.1.2. As regras dinâmicas são:

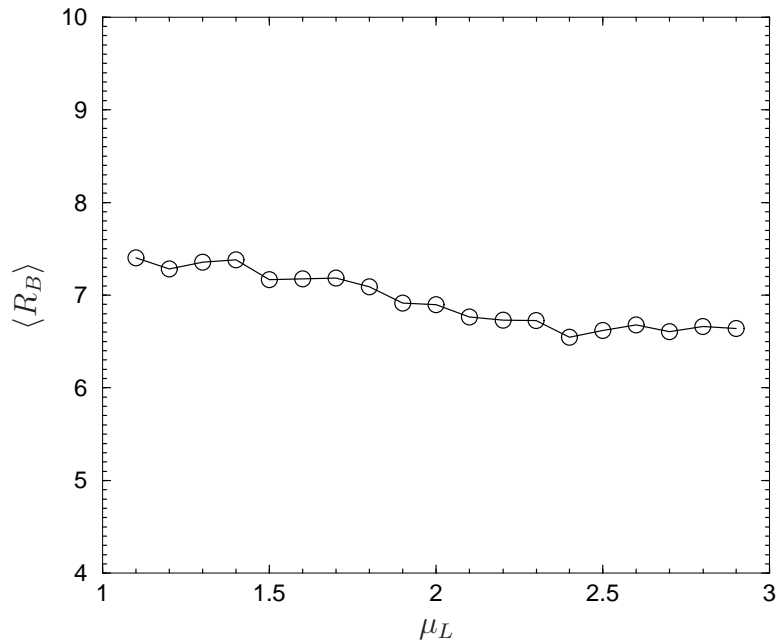


Figura 4.20: Dependência entre o raio do bando R_B e a dinâmica dos “foragers”, Truncamento na distribuição de Lévy dos “foragers” $T_f = 50$ e desordem na direção $\sigma_\theta = 25^\circ$, $\mu_L = 1.1$ com truncamento na distribuição de Lévy do líder $T_L = 100000$.

1. A coletividade caminha respeitando a dinâmica “Siga o Líder Incrementativo” ;
2. Todo alvo detectado terá uma probabilidade p_r , de ser eliminado da simulação, tornando-se inacessível a visitas futuras. $p_r = 0$, corresponde ao caso não destrutivo enquanto $p_r = 1$, corresponde ao caso destrutivo.

Definimos a eficiência da busca coletiva $\eta(\mu)$ como a razão entre o número de sítios visitados Q e media da distância total percorrida em N simulações, tal que

$$\eta(\mu) = \frac{Q}{\frac{1}{N N_f} \sum_{j=1}^N L_j(\mu)},$$

onde L_j é a distância percorrida em uma simulação para encontrar Q sítios e N_f é o número de indivíduos presentes no bando.

4.6.5 Extensão do Modelo Analítico

Os resultados para a busca coletiva, figura-4.21, onde os indivíduos da coletividade inspecionam o ambiente cobrindo a área equivalente ao do raio do bando assemelha-se qualitativamente à busca individual, como mostra a figura-3.5, onde o “forager” inspeciona o ambiente por meio do alcance visual. Esta analogia entre o raio do bando que faz busca

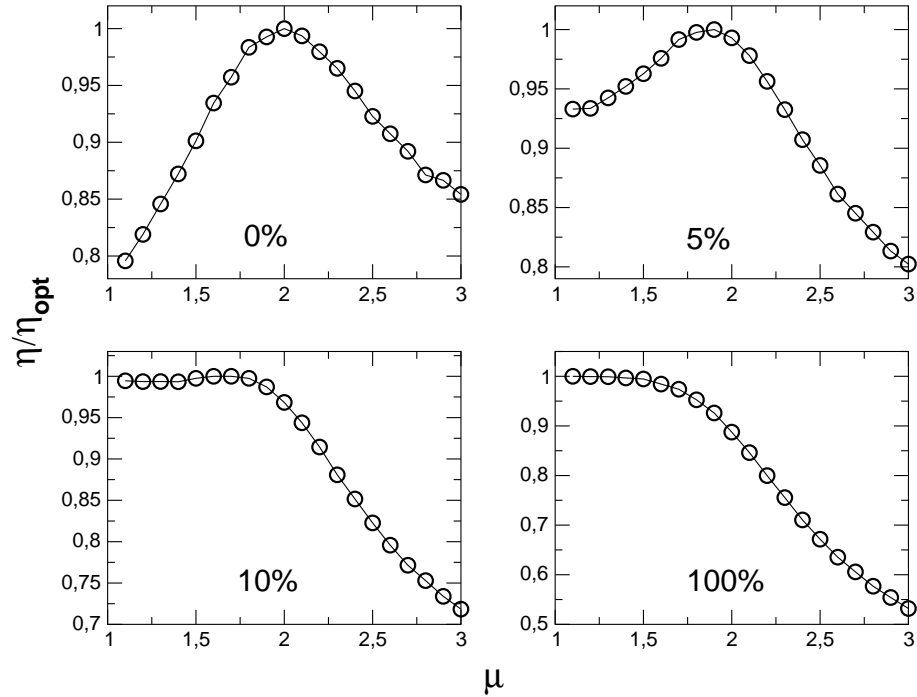


Figura 4.21: Produto entre a eficiência η e o “livre caminho médio” λ versus μ para o caso da busca coletiva com 10 indivíduos.

coletiva e a o raio de visão de um indivíduo isolado melhora quando o raio do bando não é muito grande, pois quanto maior for tanto maior será a probabilidade de os membros da coletividade não detectarem um alvo que esteja dentro do raio do bando. Note que uma coletividade só pode ser tratada como tal se preservar a unidade e isso se faz pela interação entre os indivíduos, desta forma se o raio do bando divergir o bando deixará de ser um bando e neste caso vemos buscas isoladas sem interação.

A relevância da busca coletiva aparece no contexto do balanço energético, pois se admitirmos que os membros do grupo compartilham o ganho de todo alvo encontrado significa que a cada alvo visitado todo o grupo recebe um pequeno incremento em sua reserva energética. Na busca coletiva a interação é o efeito dominante gerando um conjunto complexo de regras que correlacionam os indivíduos.

A discussão do parágrafo anterior indica que se substituirmos $\langle R_B \rangle$ por r_v nas equações (3.7), (3.9) e (3.14) o modelo retorna o comportamento qualitativo observado na busca coletiva.

Processos de Busca em Ambientes Discretos

5.1 Busca em Redes

Recentemente grandes esforços [7, 14–16] têm sido dispensados para avaliar a aplicabilidade dos modelos de redes no estudo de problemas complexos como processamento neural [60–62], dinâmica de redes de computadores [16] e dinâmica de rede sociais [44]. Em consequência do grande número de trabalhos, produziu-se uma vastidão de resultados [7, 43, 45] que confirmam a hipótese das características topológicas, especialmente a conectividade, afetarem as propriedades de transporte de informação das redes permitindo classificá-las em dois grandes grupos:

(i) Redes de grande-mundo (“large-world networks”), redes ineficientes contendo exclusivamente “links” de curto alcance, que ligam primeiros vizinhos e tornam as redes localmente conectadas e ricas em “clusters”. Segue que a distribuição de conexões é Browniana, estreita e truncada próximo à origem. Conseqüentemente o diâmetro da rede [43], que é a distância média separando dois sítios arbitrários, aumenta linearmente com a quantidade total de sítios da rede e isto explica sua ineficiência;

(ii) Redes de pequeno-mundo (“small-world networks”), altamente eficientes e globalmente conectadas, redes cuja distribuição de conexões é uma lei de potência. A topologia destas redes revela abundante formação de “clusters” [43] devido a grande quantidade de “links” locais. O diâmetro da rede cresce, apenas, logaritmicamente com o número total de sítios [43], graças à existência de raros, porém preciosos, “links” de longo alcance, que criam atalhos, encurtando as distâncias entre os sítios e diminuindo o tempo necessário para propagar a informação por toda a rede.

Encontra-se fartamente disponível na literatura trabalhos relacionados à otimização

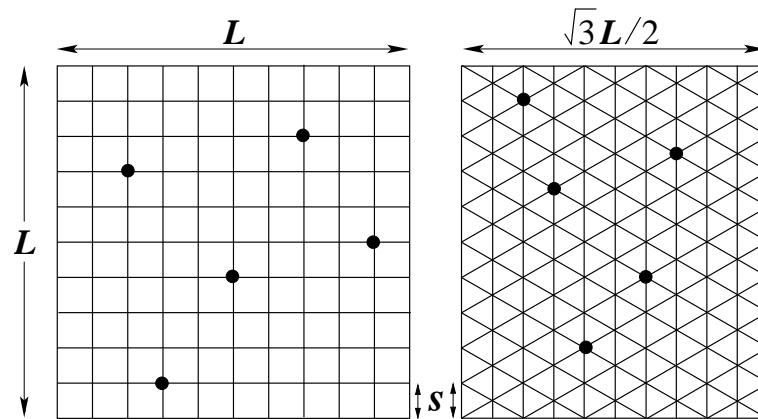


Figura 5.1: Exemplos dos dois tipos de rede consideradas nas simulações. Os pontos sobre os nós da rede representam os alvos.

de redes de alto desempenho como “small-world networks” [14, 45, 92], por outro lado trabalhos sobre otimização de redes “large-world networks” [7] são escassos. A necessidade de otimizar a busca em redes ineficientes, “large-world networks”, surge quando é inconveniente alterar as conexões da rede a fim de convertê-la em uma rede “small-word”. Neste caso é indispensável desenvolver procedimentos capazes de maximizar a mobilidade, sem alterar fisicamente a rede. Para entender que tipo de heurística deve ser implementada nas estratégias de “foraging” e maximizar a eficiência da busca em redes “large-word”, utilizamos o modelo de “foraging”, baseado em caminhadas de Lévy, detalhes na seção-5.3, que mostrou-se bem sucedido na modelagem de problemas biológicos [3, 4]. Acreditamos constituir-se em uma alternativa promissora na otimização da busca em redes ineficientes.

5.2 Construção das Redes Regulares

Consideramos que as redes são regulares, onde cada nó (ou sítio) da rede encontra-se conectando a um pequeno número de vizinhos próximos, por k , conexões de comprimento fixo s que é o parâmetro de rede. Tratamos duas topologias, redes triangulares, onde cada sítio está conectado aos seis primeiros vizinhos mais próximos $k = 6$ e redes quadrangulares onde cada sítio está conectado aos quatro sítios mais próximos $k = 4$, ambas submetidas a condição de contorno periódica, que conecta a extremidade esquerda da rede à direita e a extremidade superior da rede à inferior, transformando a rede em um tórus. A figura-5.1 ilustra as redes consideradas nas simulações.

Definimos a distância $L = (N - 1)s$, com N denotando o numero de nós ao longo da direção y . A rede quadrada possui área total LXL , enquanto a rede triangular tem dimensões $\sqrt{3}L'/2XL$, veja a figura-5.1. O parâmetro L' estabelece a diferenciação entre

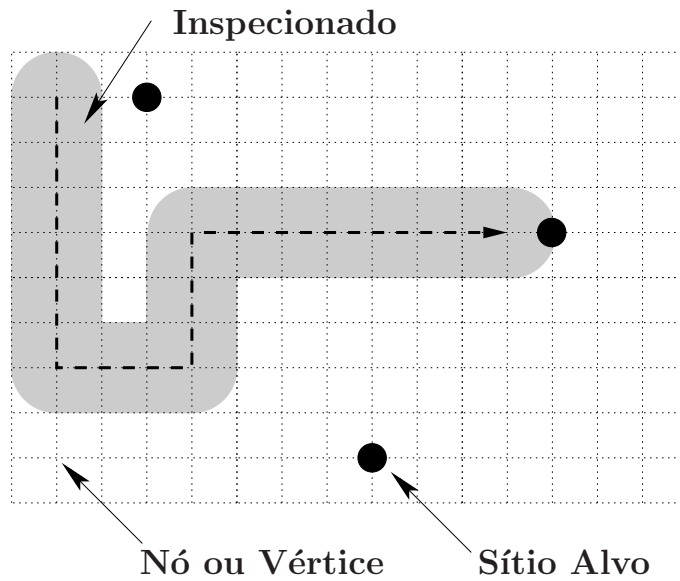


Figura 5.2: Ilustração das regras dinâmicas do processo de busca considerado no modelo.

duas variações quanto à ergodicidade da rede triangular assim definimos como a rede triangular com maior ergodicidade como a que possui $L' = Ns$ enquanto a rede triangular não ergódica (triangular-(NE)) se estabelece com $L' = L$. A diferença de ergodicidade deve-se à maneira como a condição de contorno conecta as extremidades da rede gerando trajetórias periódicas no caso triangular-(NE), isto corresponde à um circuito fechado “loop”, enquanto a rede triangular ao ser submetida à condição de contorno periódica produz trajetórias que não são periódicas de modo que saltos extremamente longos só remetem o “forager” à posição de partida após todos os sítios da rede serem visitados. É neste contexto que classificamos esta rede.

5.3 Definição do Modelo

Para modelar a busca em redes regulares podemos utilizar uma variação da busca no contínuo descrito na seção-3.3 bastando discretizar os deslocamentos do “forager” forçando saltos com comprimentos dados por quantidades inteiras do parâmetro de rede s , tal que $\ell_j = n s$, onde n é um inteiro positivo. Para considerar redes isotrópicas a escolha da direção do salto é dada por uma função de distribuição homogênea $P(\theta) = Const$. Na rede quadrangular as direções são dadas por $\theta = m \pi/2$ e na triangular $\theta = l \pi/3$, onde $(0 < m < 4)$ e $(0 < l < 6)$ são sorteados randomicamente. A figura-5.2 ilustra o processo.

O “forager” interage com os sítios-alvo que estão ao longo de sua trajetória de busca, dentro de uma distância inferior ao raio de visão r_v . Construímos um modelo numérico

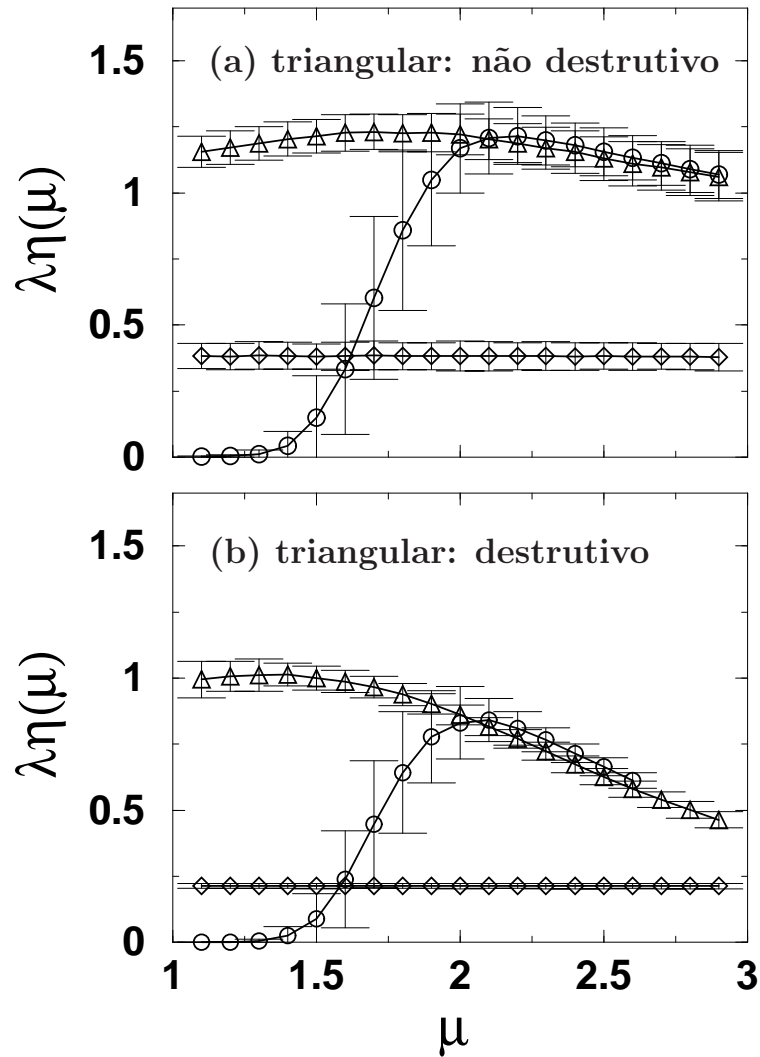


Figura 5.3: Eficiência normalizada $\lambda\eta(\mu)$ versus μ , expoente de Lévy, para a busca na rede triangular. Círculo, simulação para baixa concentração de sítios-alvo, $r_v = 5$ e $\lambda/r_v = 2000$. Triângulo, simulação para concentração intermediária de sítios-alvo, $r_v = 5$ e $\lambda/r_v = 200$. Diamante, simulação para alta concentração de sítios-alvo $r_v = 25$ e $\lambda/r_v = 0.8$. (a) busca não-destrutiva. (b) busca destrutiva.

baseado em três regras dinâmicas:

1. Se houver um sítio-alvo localizado a uma distância inferior a um raio de visão r_v , então o “forager” o detecta com certa probabilidade e se move em linha reta até a posição do sítio;
2. No “foraging” destrutivo um sítio-alvo detectado é imediatamente removido da simulação, tornando-se indetectável. No “foraging” não-destrutivo um sítio-alvo detectado é imediatamente regenerado e retorna à simulação;
3. Se não houver sítios-alvo dentro do raio de visão, então o “forager” escolhe rando-

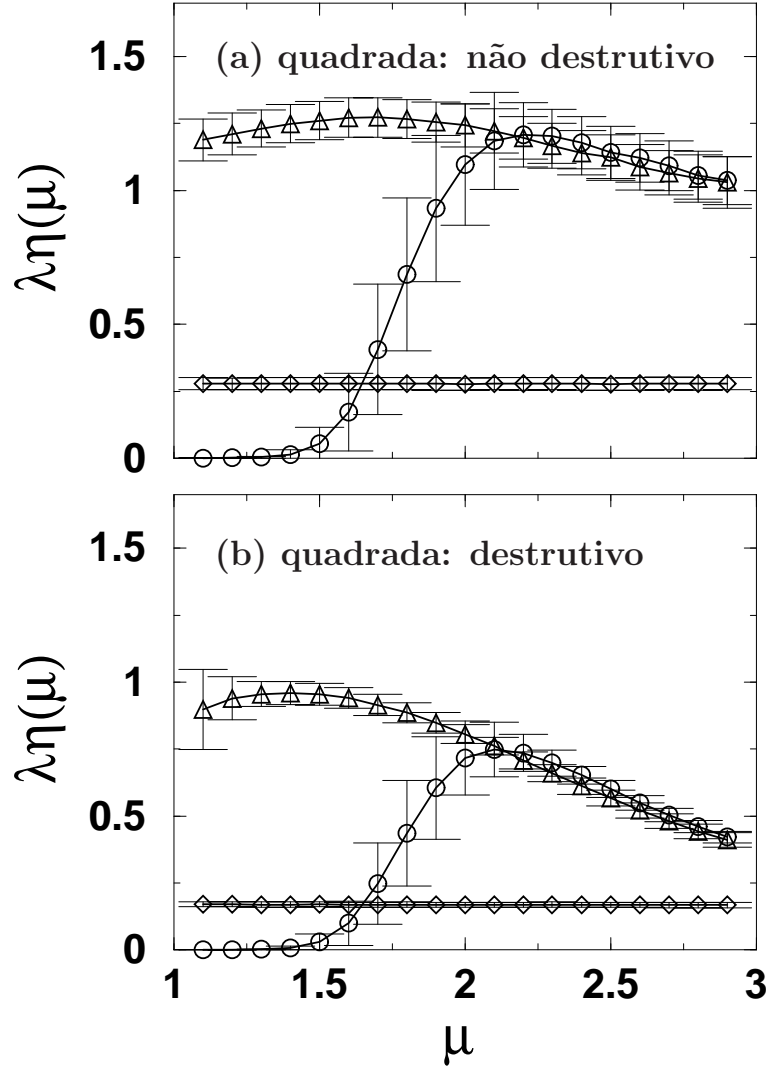


Figura 5.4: Eficiência normalizada $\lambda\eta(\mu)$ versus μ , expoente de Lévy, para a busca na rede quadrada. Círculo, simulação para baixa concentração de sítios-alvo, $r_v = 5$ e $\lambda/r_v = 2000$. Triângulo, simulação para concentração intermediária de sítios-alvo, $r_v = 5$ e $\lambda/r_v = 200$. Diamante, simulação para alta concentração de sítios-alvo $r_v = 25$ e $\lambda/r_v = 0.8$. (a) busca não-destrutiva. (b) busca destrutiva.

micamente uma nova distância ℓ_j segundo a distribuição dada pela equação (1). Em seguida, se move até a nova posição, constantemente procurando por sítios-alvo dentro de um raio r_v ao longo do caminho. Se não detectar um sítio-alvo o “forager” para após percorrer a distância ℓ_j e escolhe uma nova direção e distância ℓ_{j+1} , caso contrário procede de acordo como no passo (1).

Definimos a eficiência da busca $\eta(\mu)$ como a razão entre o número de sítios visitados N_{target} e a média da distância total percorrida em N simulações,

$$\eta(\mu) = \frac{N_{target}}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N L_j(\mu)},$$

onde L_j é a distância percorrida em uma simulação para encontrar N_{target} sítios. Em nossas simulações usamos, $N = 5000$ e $N_{target} \geq 200$.

5.4 Análise dos Resultados

Consideramos dois tipos de redes, quadrada e triangular, e dois tipos de sítios-alvo, destrutivos e não-destrutivos, resultando em quatro tipos de simulações possíveis: busca não-destrutiva na rede triangular figura-5.3a; busca não destrutiva na rede quadrangular figura-5.4a; busca destrutiva na rede triangular figura-5.3b; busca destrutiva na rede quadrangular figura-5.4b; Avaliamos a evolução das curvas de eficiência a medida que a concentração de sítios-alvo aumenta.

Antes de discutirmos os resultados daremos alguns detalhes sobre as grandezas relevantes e sobre os parâmetros de simulação. Os parâmetros de simulação foram idênticos em ambas as rede, triangular e quadrangular para permitir a comparação dos resultados, de fato a única diferença entre elas é o número de conexões k entre os sítios, para a rede triangular $k = 6$ e para a quadrangular $k = 4$. Outros parâmetros relevantes são: $L^2 = 10^8$, que é o número total de sítios da rede; $\lambda = (2r_v\rho)^{-1}$ é a estimativa do número de sítios entre dois sítios-alvo que estão distribuídos homogeneamente sobre L^2 sítios da rede; r_v é o número de sítios que estão dentro do alcance de interação com o “forager” ao longo da trajetória de busca. Ele funciona como uma espécie de “raio de visão”; n é o número de sítios-alvo distribuídos, usamos ($10^3 < n < 10^4$) e s é o parâmetro de rede, escolhido como a unidade. A eficiência do “foraging” não possui qualquer dependência em λ ou r_v exclusivamente, mas depende da razão λ/r_v , que será definida como concentração de sítios-alvo. Lembre que obtemos baixa concentração de sítios-alvo quando $\lambda/r_v \rightarrow \infty$ e obtemos alta concentração de sítios-alvo quando $\lambda/r_v \rightarrow 0$. Usamos ($0 < \lambda/r_v < 4 \times 10^3$).

5.4.1 Baixas Concentrações de Sítios-alvo $\lambda/r_v > 200$

As curvas de eficiência para as simulações numéricas em baixas concentrações de sítios alvo estão na figura-5.3 (círculo) para a rede triangular e na figura-5.4 (círculo) para a rede quadrada. Observamos $\mu_{opt} = 2$ como expoente ótimo. A condição de contorno periódica aplicada a redes regulares cria trajetórias cíclicas devido ao alto grau de simetria e isto causa “loops” na trajetória de busca confinando o “forager” na mesma linha da rede que comumente não possui nenhum sítio-alvo ao alcance visual do “forager”. Neste caso o salto escolhido será executado até que toda a distância seja percorrida isto obviamente

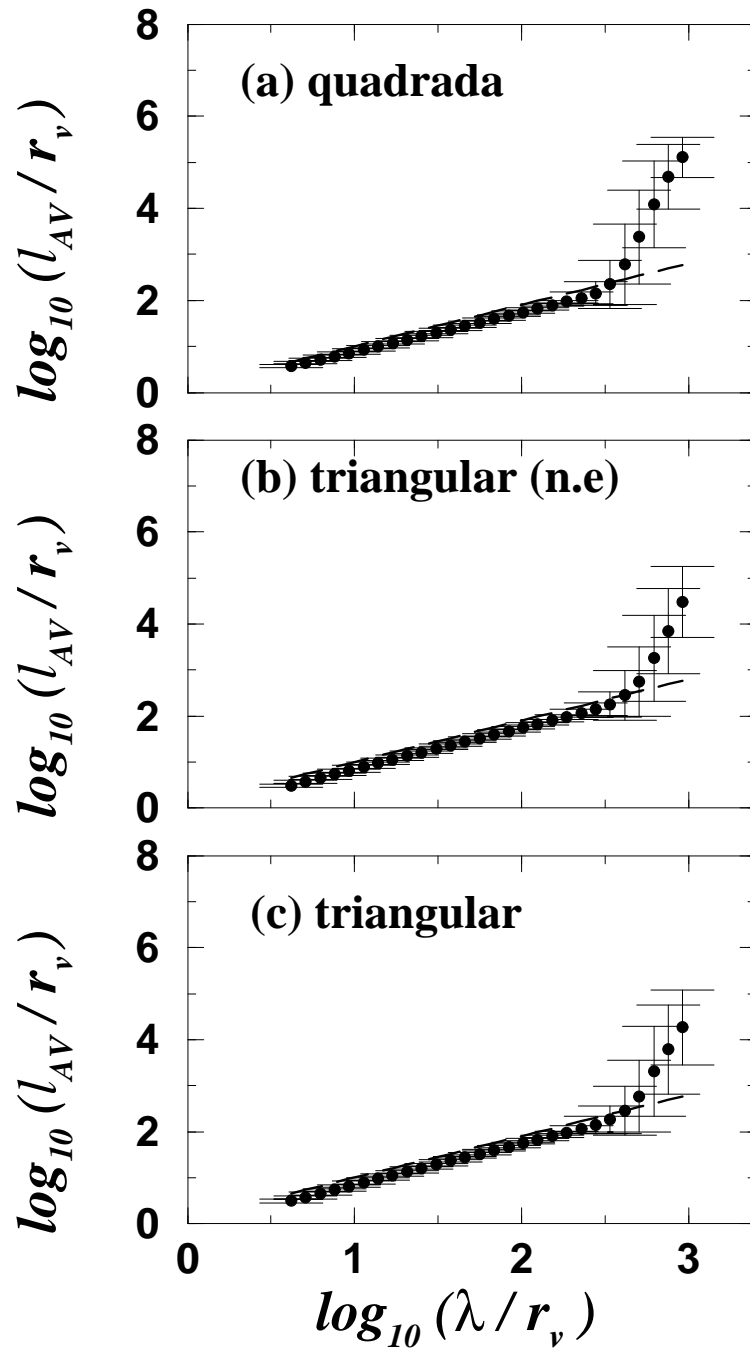


Figura 5.5: Log do passo médio l_{AV} dividido pelo raio de visão r_v versus log do livre caminho médio λ dividido pelo raio de visão r_v referente a rede triangular. Aqui usamos $\mu = 1.1$, $r_v = 5$ e as dimensões da rede 9999×10000 . A variação de λ é devida apenas à variação do número de alvos da rede.

resulta em caminhadas longas reduzindo a eficiência, portanto $\eta(\mu) \rightarrow 0$ quando $\mu \rightarrow 1$. Sempre observamos “loops” quando as condições seguintes foram verificadas: (i) baixas concentrações de sítios alvo; (ii) estratégia de busca no regime de saltos longos ($\mu < 2$); (iii) condição de contorno periódica aplicada sobre a rede. Note que para concentrações adequadas $\lambda/r_v < 200$ os “loops” não podem mais ocorrer note ainda que para os estratégias Brownianas, $\mu \rightarrow 3$, temos uma quantidade infindável de pequenos saltos em torno de uma posição de equilíbrio e é claro que isto aumenta a distância percorrida diminuindo a eficiência.

5.4.2 Concentrações Intermediárias de Sítios-alvo $1 < \lambda/r_v < 200$

As curvas de eficiência para as simulações numéricas em baixas concentrações de sítios alvo estão na figura-5.3 (curva com triângulos) para a rede triangular e na figura-5.4 (curva com triângulos) para a rede quadrada. Observamos curvas monótonas quando $\mu \rightarrow 1$. Aqui nós temos concentrações suficientemente altas $1 < \lambda/r_v < 200$ para truncar os saltos longos ℓ_j quando $\ell_j \gg \lambda$. Assim distâncias superiores a dimensão da rede L_s não são percorridas sugerindo que o “forager” realiza uma caminhada de Lévy truncada em λ . Podemos aproximar o passo médio da caminhada de Lévy [6, 21] considerando uma distribuição onde os saltos arbitrariamente longos são descartados e somente os saltos inferiores à λ são considerados, o que nos fornece

$$\langle \ell \rangle \approx \left(\frac{\mu - 1}{2 - \mu} \right) \left(\frac{\lambda^{2-\mu} - r_v^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}} \right) + \frac{\lambda^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}}. \quad (5.1)$$

Multiplicando o lado direito pelo fator unitário r_v/r_v e simplificando, temos

$$\langle \ell \rangle \approx r_v \left(\frac{1}{2 - \mu} \right) \left(\frac{\lambda}{r_v} \right)^{2-\mu} - r_v \left(\frac{\mu - 1}{2 - \mu} \right), \quad (5.2)$$

o primeiro termo do lado direito é dominante sendo sempre, ao menos uma magnitude maior (quando $\lambda = r_v$). Assim podemos descartar o segundo termo do lado direito, ficando com

$$\langle \ell \rangle \approx r_v \left(\frac{1}{2 - \mu} \right) \left(\frac{\lambda}{r_v} \right)^{2-\mu}, \quad (5.3)$$

este resultado será útil na discussão seguinte. Considerando a relação linear da figura-5.5a ou figura-5.5b, podemos escrever

$$\log \left(\frac{\ell_{AV}}{r_v} \right) = A_0 + A_1 \log \left(\frac{\lambda}{r_v} \right), \quad (5.4)$$

resolvendo para ℓ_{AV} , temos uma aproximação numérica para o passo médio da caminhada aleatória dada por

$$\ell_{AV} \approx r_v e^{A_0} \left(\frac{\lambda}{r_v} \right)^{A_1}, \quad (5.5)$$

a equação acima tem mesma forma da equação. (5.3) e por inspeção vemos que $e^{A_0} = \frac{1}{2-\mu}$. Assim o valor teórico do coeficiente é $A_0 = \log(\frac{1}{2-\mu})$, similarmente pela comparação das equações (5.3) e (5.4) nos conduz ao valor teórico de $A_1 = 2 - \mu$. Este resultado mostra que se a concentração de sítios for inferior ao valor crítico $(\lambda/r_v)_c \approx 200$ então o passo médio poderá ser aproximado pelo primeiro momento da distribuição de Lévy truncada em λ . Quando a concentração de sítios-alvo é superior ao valor críticos $(\lambda/r_v)_c$ este resultado não pode mais ser usado devido a influência da condição de contorno periódica que aumenta o passo médio da caminhada.

5.4.3 Alta Concentração de Sítios-alvo $0 < \lambda/r_v < 1$

As curvas de eficiência para as simulações numéricas em baixas concentrações de sítios alvo estão na figura-5.3 (curva com losango) para a rede triangular e na figura-5.4 (curva com losango) para a rede quadrada. Aqui temos $\lambda \approx r_v$, assim sempre haverá um sítios-alvo dentro do raio de visão r_v e a uma distância inferior a qualquer salto escolhido (lembre que saltos inferiores a r_v são descartados) então todos os saltos são truncados e para cada salto um sítio é encontrado independente da topologia da rede, quadrangular ou triangular, nem das propriedades dos sítios, destrutivos ou não-destrutivos, por isso a eficiência não possui qualquer dependência em μ .

5.4.4 “Foraging” Destrutivo e Não-Destrutivo

Comparando a figura-5.3a com figura-5.3(b) e a figura-5.4a com figura-5.4(b) podemos ver que o “foraging” não-destrutivo é 50% mais eficiente que o destrutivo lembre que a dinâmica destrutiva gera espaços na distribuição impedindo que os sítios sejam revisitados, o que obviamente aumenta as distâncias percorridas pelo “forager” entre dois sítios-alvo sucessivos. Aqui certamente a probabilidade de retorno não é relevante pois não há sítios-alvo que possam ser revisitados. O histograma não acumulativo mostrado na figura-5.7 nos mostra que a distância coberta entre dois sítios-alvo sucessivos é constante no “foraging” não-destrutivo. O histograma na figura-5.8 nos mostra que distância coberta entre dois sítios-alvo sucessivos aumenta linearmente com o número de sítios encontrados justamente em função da redução na concentração de sítios-alvo a medida que estes são destruídos.

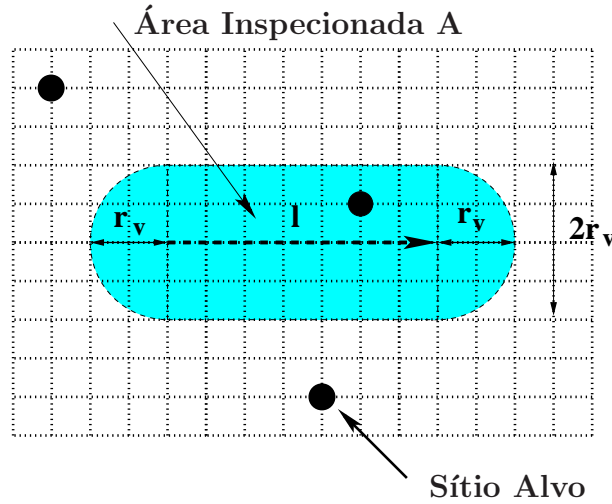


Figura 5.6: Ilustração da área inspecionada pelo forager ao longo de um salto arbitrário de tamanho l para estimar o número de sítios inspecionados.

5.4.5 Eficiência na Rede Quadrada e na Triangular

Comparando os resultados para a rede triangular com a rede quadrada, na figura-5.8, podemos ver que na rede triangular a distância coberta entre dois sítios-alvo sucessivos é quatro vezes menor que a distância coberta na rede quadrada, tanto no caso destrutivo como no não destrutivo. Esta diferença é causada pela condição de contorno periódica que pode gerar “loops” ao conectar as extremidades das linhas da rede quadrada. Note que isto ocorre somente quando $\mu \rightarrow 1$ e em distribuições esparsas de sítios-alvo, pois a combinação de saltos longos em trajetórias periódicas confinam o “forager” nos “loops”. Se a concentração de alvos for elevada os “loops” não terão efeito pois os saltos serão truncados assim que um alvo for detectado.

Intuitivamente esperamos que a rede triangular permita visitar um número maior de sítios-alvo devido ao maior número de conexões, entretanto, este não é o caso. Considere m , como o número de sítios inspecionados ao longo de um salto arbitrário de comprimento l , onde A é a área inspecionada ao longo da trajetória, figura-5.6 e $\rho = n/L^2$ é a densidade superficial de sítios-alvo,

$$\begin{aligned} m(l) &= \rho A \\ m(l) &= \rho (2r_v l + \pi r_v^2) \end{aligned}$$

suprimindo as os valores constantes em m_0 e σ ,

$$m(l) = m_0 + \sigma l, \quad (5.6)$$

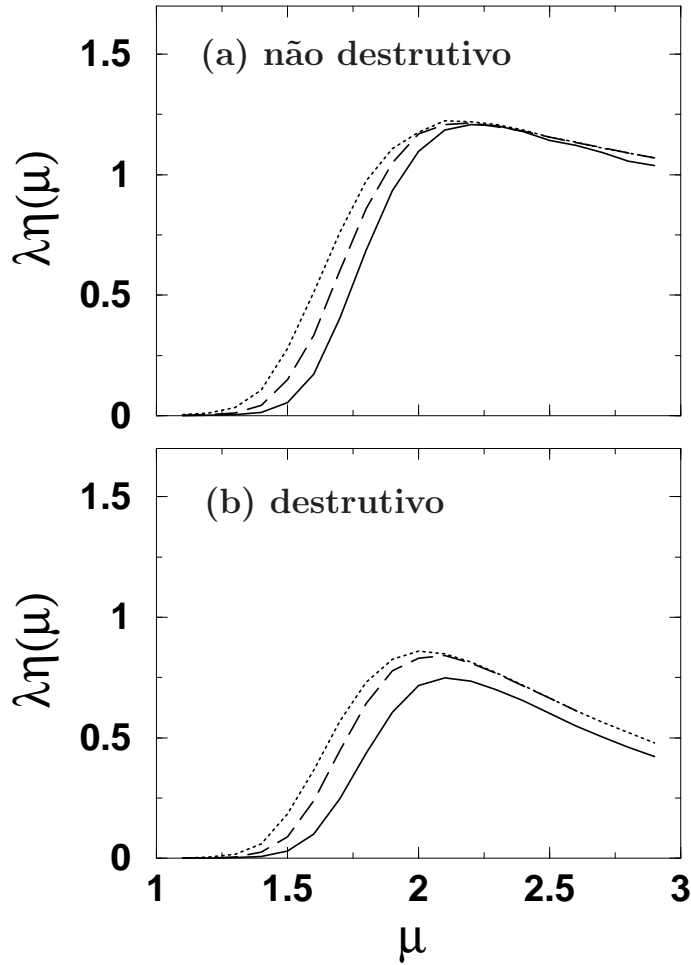


Figura 5.7: Eficiência normalizada $\lambda\eta(\mu)$ versus μ , para baixa concentração de sítios-alvo na rede triangular (traço pontilhado), rede triangular (n.e) (traço segmentado) e rede quadrada (traço sólido) para o caso (a) não destrutivo e (b) destrutivo.

onde $m_0 = n\pi r_v^2/L^2$ é o número de sítios dentro do raio de visão na posição do início do salto e $\sigma = 1/\lambda = 2nr_v/L^2$ é a densidade linear de sítios-alvo. Note que o número de sítios inspecionados depende somente dos parâmetros livres que são iguais em ambas as redes, quadrangular e triangular. É importante notar que $m(l)$ não possui qualquer dependência com k o número de conexões, portanto, aqui este parâmetro não é relevante para a eficiência do “forager”. Em geral aumentar o número de conexões aumentará o número de sítios inspecionados, mas na rede triangular este não é o caso pois ela possui geometria espacial bi-dimensional.

Os efeitos da condição de contorno periódica e k , número de conexões ligando os sítios, são as únicas diferenças entre a rede triangular e a quadrada e mostramos acima que não há qualquer efeito relevante devido a k , portanto todas as diferenças nos resultados deve ser explicada pela influência da condição de contorno periódica.

Nossos resultados para ambas as redes são muito similares. Observamos que a rede

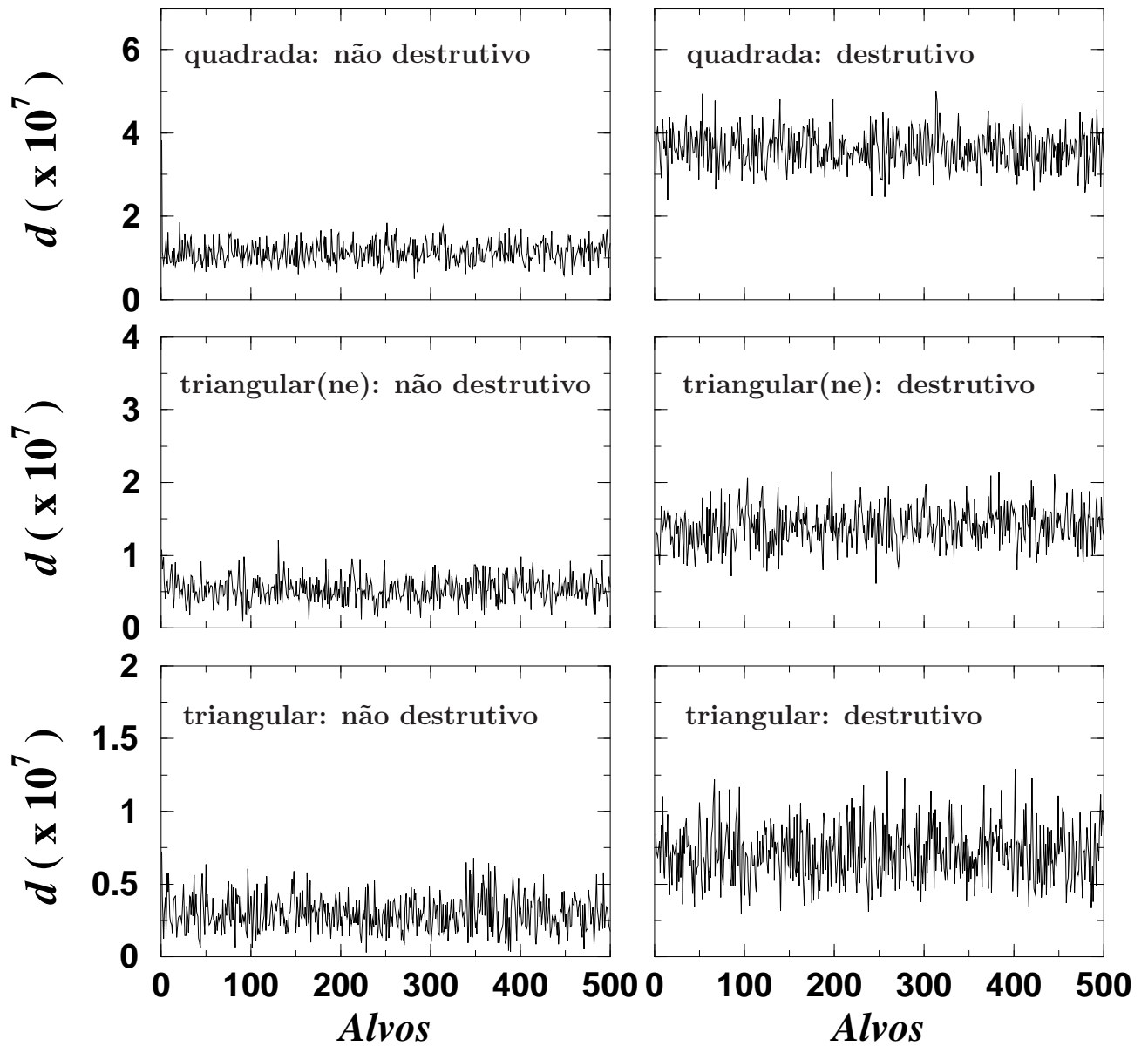


Figura 5.8: Distância percorrida entre dois alvos encontrados sucessivamente, para a rede triangular, triangular(ne) e rede quadrada. Mostrando a busca não destrutiva e destrutiva. Aqui usamos $\mu = 1.1$.

triangular é mais eficiente que a quadrangular somente quando $\mu \rightarrow 1$, este é justamente o comportamento difusivo onde os “loops” ocorrem freqüentemente. Para testar esta hipótese consideramos uma simulação tal que somente um sítio-alvo está disponível e o “forager” deve encontrá-lo N_{found} vezes enquanto monitoramos a distância percorrida até que o sítio seja revisitado. Como a probabilidade de retorno é inversamente proporcional a distância coberta pelo “forager” até retornar ao sítio previamente visitado, definimos a probabilidade de retorno como, $P \sim \frac{1}{\ell_R}$.

Para comparar a performance nas duas redes evoluímos numericamente a grandeza P_{tr}/P_{sq} , figura-5.9 e verificamos que a probabilidade de retorno na rede triangular é maior que na quadrangular justamente devido à condição de contorno periódica que transforma as linhas da rede em anéis de circunferência Ls , isto ocorre nas linhas horizontais ou verticais, portanto, ocorre em todas as linhas da rede quadrada e somente em uma das linhas da rede triangular, ver figura-5.1.

5.4.6 “Foraging” em Ambientes Contínuos e Discretos

Todas as diferenças entre o caso contínuo e o discreto, se devem aos efeitos da condição de contorno periódica, as diferenças que notamos no “foraging” discreto foram: eficiência $\eta(\mu) \rightarrow 0$ quando $\mu \rightarrow 1$ em distribuições esparsas de sítios; a rede triangular é menos afetada pela condição de contorno.; não existem diferenças qualitativas entre o “foraging” destrutivo e não-destrutivo; As estratégias ótimas do caso contínuo não destrutivo continuam as mesmas no “foraging” discreto, mas mudaram no “foraging” destrutivo.

Para baixas concentrações $\lambda/r_v > 200$ observamos $\mu_{opt} = 2$ como expoente ótimo. Aumentando a concentração para $1 < \lambda/r_v < 200$ notamos que $\mu \rightarrow 1$ torna-se a estratégia mais eficiente porque os saltos longos são truncados e a distribuição de saltos do “forager” ajusta-se aos espaçamentos entre os sítios. O número de conexões k não é relevante aos nossos resultados pois ao longo de um salto arbitrário o número de sítios inspecionados é o mesmo em ambas as rede, o parâmetro k será relevante sempre que permitir ao “forager” interagir com um número maior de sítios ao longo da trajetória de busca mostrando que a geometria espacial é importante. A condição de contorno periódica é responsável por uma variedade de fenômenos interessantes como a maior probabilidade de retorno da rede triangular com relação a rede quadrada, a ocorrência de “loops” na trajetória do “forager” no regime difusivo $\mu \rightarrow 1$ quando a concentração de sítios é esparsa e também torna muito similar a eficiência do “foraging” destrutivo e não destrutivo diferentemente do que ocorre no “foraging” contínuo. O próximo passo é estudar o que acontece quando as redes não

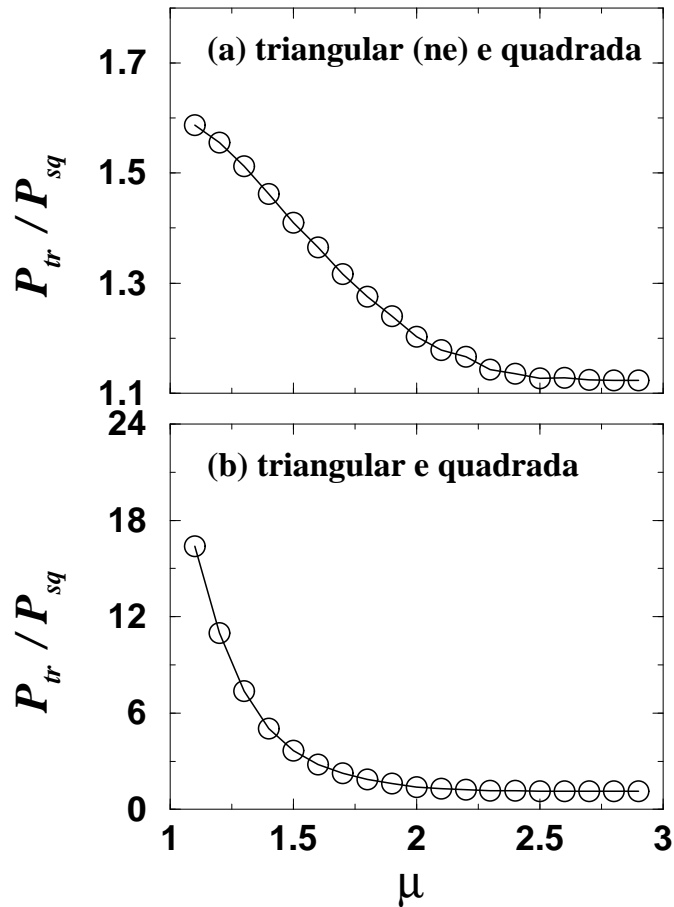


Figura 5.9: Razão entre as probabilidades de retorno na rede triangular e quadrada para o caso não destrutivo. Aqui usamos $r_v = 16$, com redes de dimensões 999×1000 e 1000×1000 , respectivamente para a rede triangular e quadrada.

são simétricas introduzindo o conceito de fragmentação que elimina sítios da rede a fim de considerarmos redes contendo qualquer distribuição de conexões.

5.5 Busca em Redes Irregulares

A seqüência natural do problema de busca em redes regulares, discutida na seção-5.1, é a busca em redes irregulares caracterizadas pela ausência de uma fração dos sítios que podem ser encarados como defeitos da rede. A presença dos defeitos implica em uma rede menos conectada e certamente as suas propriedades de transporte e mobilidade serão inferiores as da rede regular.

Iniciamos a construção do ambiente de “foraging” considerando uma rede bidimensional, com parâmetro de rede, $s = 1$ contendo, n_0 sítios equidistantes, cada qual conectado a seis de seus vizinhos mais próximos, isto confere a rede uma topologia triangular, figura-

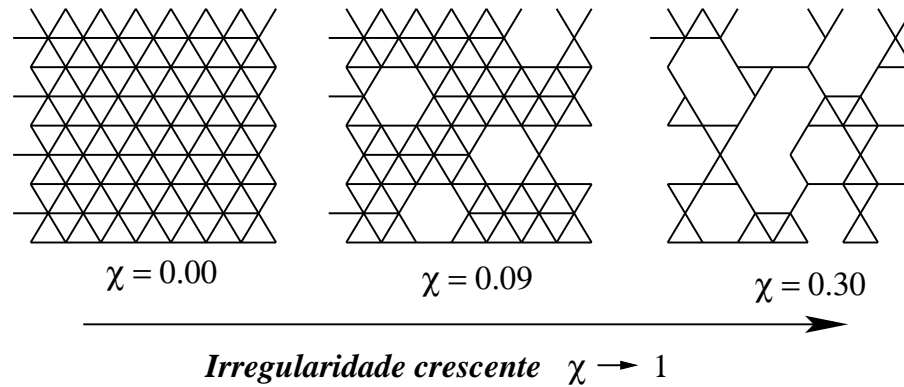


Figura 5.10: Ilustrações das redes consideradas, à medida que o percentual de fragmentação cresce ($\chi \rightarrow 1$) a rede torna-se gradativamente mais irregular e desconectada. Neste exemplo esquemático usamos $n_0 = 56$ e $k = 6$, mas nas simulações usamos valores muito maiores ($n_0 \approx 10^7$).

5.10. Seguimos eliminando sistematicamente, sítios escolhidos ao acaso, onde cada sítio eliminado constitui-se em um defeito da rede. Após eliminarmos n_f sítios, a rede contém uma fração, $\chi = n_f/n_0$ de defeitos, que chamamos de coeficiente de fragmentação. A conectividade das redes obtidas por este método, reduz-se linearmente com aumento do coeficiente de fragmentação χ de acordo com $k_f = k(1 - \chi)$, onde k_f é o número médio de conexões por sítio após introduzirmos n_f defeitos e $k = 6$ é a quantidade de conexões por sítio, na rede sem defeitos ($\chi = 0$), note que $\chi = 1$ conduz à completa destruição dos sítios e da rede.

A diminuição das conexões entre os sítios ($\chi \rightarrow 1$), leva à rápida destruição dos “clusters”, como mostra a figura-5.13 (b), onde calculamos o coeficiente de formação de “cluster” (C) em função do coeficiente de fragmentação χ [43]. Outro reflexo negativo da redução de conexões é a diminuição da mobilidade de um “random-walker” que caminha na rede. Para quantificar esta redução, mapeamos a rede em quadrantes contendo quantidades iguais de sítios e introduzimos a grandeza, $\sigma(\chi)$ que conta a a fração de quadrantes visitados pelo “random-walker”, ao menos uma vez, durante a caminhada aleatória. O resultado, figura-5.13 (a), mostra que somente para baixos percentuais de sítios fragmentados ($\chi < 0.1$) o coeficiente σ permanece unitário, indicando que todos os quadrantes continuam acessíveis e que a rede continua conectada a ponto de permitir acessar um sítio arbitrário partindo de outro sítio arbitrário. No intervalo ($0.1 < \chi < 0.5$) nota-se a rápida redução da mobilidade ($\sigma \rightarrow 0$) e quando mais da metade da rede constitui-se de defeitos ($\chi > 0.5$) o coeficiente σ anula-se, indicando que a rede encontra-se criticamente desconectada e raramente é possível sair do quadrante onde a simulação iniciou-se.

O ambiente de “foraging” abriga os alvos, que são o objeto da busca, nossas redes

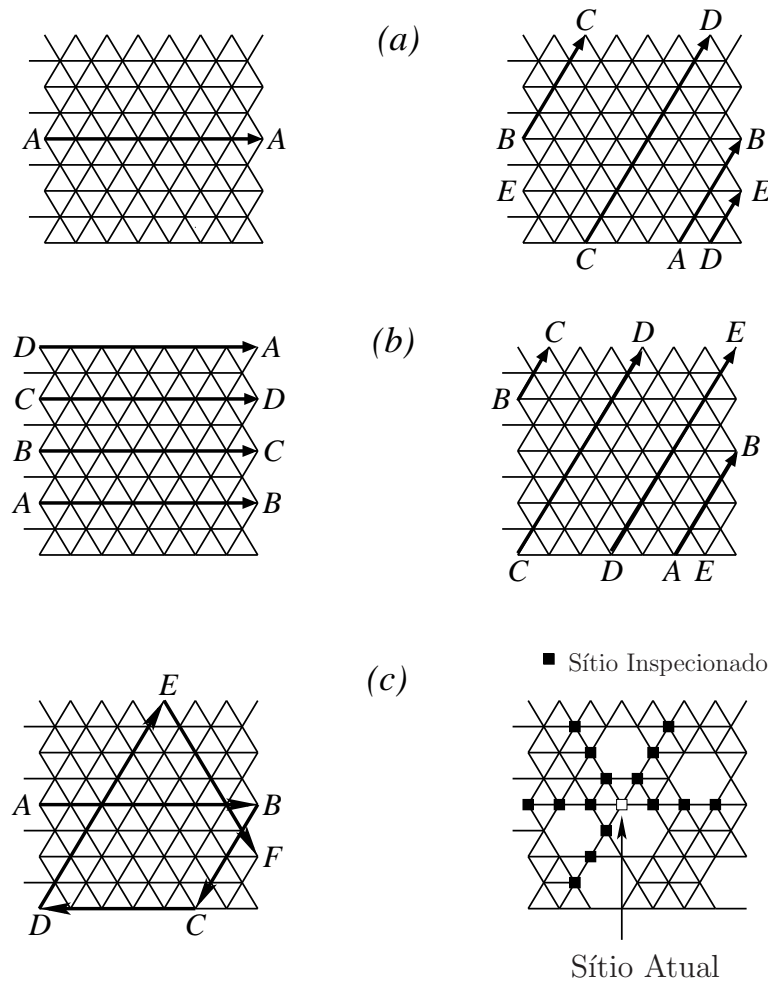


Figura 5.11: **(a)** Ilustração da condição de contorno periódica, onde o lado esquerdo é conectado ao direito e a parte superior é conectada à inferior, criando uma rede toroidal. As trajetórias horizontais (esquerda) tornam-se círculos fechados, que podem confinar o “forager” em “loops”, se a estratégia de caminhada for superdifusiva ($1 < \mu < 2$) e a busca ocorrer no regime-I, onde a distribuição de alvos e defeitos é esparsa ($\lambda/\lambda_0 > \frac{\sqrt{n_0}}{10\lambda_0}$). As trajetórias oblíquas (direita) criam um solenoide e note que a trajetória (ABCD) não se fecha, isto ocorrerá somente após todos os sítios da rede terem sido visitados, quando o a trajetória voltará para o ponto de partida A. **(b)** Ilustração da condição de contorno hélica, onde o lado esquerdo é conectado ao direito com uma translação de um sítio no sentido horário e a parte superior é conectada à inferior transladada da mesma forma, criando uma rede toroidal. As trajetórias horizontais (esquerda) criam um solenoide que se fecha após metade dos sítios da rede terem sido visitados. As trajetórias oblíquas (direita) criam um solenoide, note que a trajetória (ABCDE) não se fecha e isto ocorrerá, somente após todos os sítios terem sido visitados. **(c)** (esquerda) Ilustração da condição de contorno aleatória, onde os sítios da extremidade da rede conectam-se, ora como na (CCP), ora escolhendo, ao acaso qualquer primeiro vizinho criando uma rede complexa, porém ainda localmente conectada. (direita) Ilustração da regra dinâmica (C) de inspeção visual. Somente os sítios que estiverem a distâncias inferiores à r_v em linhas que interceptam a posição do “forager” estão visíveis. O “forager” interage com os r_v primeiros vizinhos em cada direção, repare que vários sítios dentro da área de raio r_v não são inspeccionados devido ao caráter linear do alcance visual. Neste exemplo esquemático usamos uma rede com $n_0 = 56$ e $r_v = 3$.

guardam uma distribuição homogênea de: alvos destrutíveis ($\Gamma = 1$), que são imediatamente destruídos ao serem localizados, portanto cada alvo pode ser encontrado apenas uma vez; alvos indestrutíveis ($\Gamma = 2$), que podem ser encontrados inúmeras vezes e alvos regeneráveis ($1 < \Gamma < 2$), correspondendo a considerar que os alvos destruídos regeneram-se depois de um tempo ($0 < \tau < \infty$). Submetemos a rede a três condições de contorno: periódica (CCP), condição de contorno hélica (CCH), e a condição de contorno aleatória (CCA), veja a figura-5.11, esta última sendo bastante artificial e sua utilização justifica-se em razão de dar à rede propriedades de truncamento semelhantes às de uma rede infinita (sem condição de contorno) permitindo-nos usá-la como referência. Isto encerra nossas considerações a respeito do ambiente de busca. No parágrafo seguinte definimos a heurística e apresentamos nosso modelo numérico para simulação do “foraging”.

5.6 Definição do Modelo

Nosso modelo de simulação do “foraging” em redes com defeitos usando estratégias de busca de Lévy, pode ser resumido em cinco regras:

1. Orientação: escolhe ao acaso, um dos “links” quem conduzem a um dos vizinhos¹ do sítio atual (equivale a escolher uma direção de “vôo”), em seguida sorteia uma distância de “vôo” ℓ_j com probabilidade dada pela equação (3.3) e inicia a caminhada de acordo com (B);
2. Caminhada²: enquanto a distância ℓ_j não é percorrida desloca-se para o primeiro vizinho, ao longo da direção de “vôo” e inspeciona a vizinhança, de acordo com (3); se um defeito for interceptado ao longo da direção de “vôo” trunca o salto conforme (5);
3. Inspeção Visual: Inspeciona os primeiros r_v vizinhos do sítio atual ao longo de todas as direções, figura-5.11c (direita). Se algum sítio-alvo for localizado trunca o salto segundo (4), caso contrário segue no laço da caminhada (2);
4. Truncamento (alvo): pula para o sítio-alvo e aborta (trunca) o salto ℓ_j , incrementa o número de alvos encontrados Q e a distância percorrida L . Recomeça em (1);

¹ k_f denota a quantidade média de conexões com primeiros vizinhos, $0 \leq k_f \leq 6$. Quando há um alto grau de fragmentação ($\chi \rightarrow 1$) todos os vizinhos do sítio atual podem estar fragmentados ($k_f = 0$), neste caso o “forager” permanecerá sobre o sítio atual até o fim da simulação.

²Nesta etapa o “forager” se move na direção de vôo até: (i) percorrer a distância ℓ_j ; (ii) interceptar uma fragmentação ou (iii) encontrar um sítio-alvo.

5. Truncamento (defeito): aborta (trunca) o salto ℓ_j e permanece no sítio atual, incrementa a distância percorrida L . Recomeça em (1).

A simulação termina quando o “forager” percorre a distância, $L_{max} = \sum_j \ell_j$, então calculamos a eficiência da busca, $\eta(\mu) \equiv \frac{Q}{L_{max}}$, onde Q é a quantidade de alvos encontrados. Avaliamos a média de $\eta(\mu)$ sobre N simulações.

5.7 Análise dos Resultados

5.7.1 Truncamento dos Saltos de Lévy

Durante a simulação, o “forager” caminha usando a distribuição de Lévy (3.3) como métrica associada ao tamanho dos saltos. Qualquer salto com tamanho inferior a λ_0 é rejeitado e isto justifica-se em razão do “forager” interagir com os alvos a uma distância r_v de modo que executar saltos menores que r_v significa fazer “foraging” dentro da área visualmente inspecionada. Outro argumento é o parâmetro de rede ($s = 1$) que torna impossível saltar distâncias menores que um, portanto o salto mínimo λ_0 deve ser escrito em função de todas estas restrições. O truncamento dos saltos longos em λ é determinado pelo raio de visão r_v , pela quantidade de alvos n_t e pela quantidade defeitos n_f , pois um salto é abortado e truncado quando a trajetória de busca do “forager” intercepta um defeito ou quando o “forager” detecta um alvo na nossa simulação o truncamento dos saltos é modelado pelas regras de truncamento (3) e (4) definidas na seção-5.6.

A razão entre os parâmetros de truncamento λ/λ_0 fornece uma estimativa para a liberdade de movimentos do “forager” esta razão diminui linearmente como o aumento do raio de visão, do número de alvos e do número de defeitos, consistente com o fato de o aumento do número de alvos, defeitos ou do raio de visão aumentar a probabilidade de um alvo ser visto ou de a trajetória de busca interceptar um defeito, conduzindo à redução da liberdade de movimentos ($\lambda/\lambda_0 \rightarrow 0$), em razão do aumento da frequência de truncamentos. Se o alcance visual do “forager”, r_v é da ordem do espaçamento, λ_t entre os alvos ($r_v \approx \lambda_t$), a razão entre os parâmetros de truncamento fornece $\lambda/\lambda_0 \approx 1$, isto indica que não é preciso caminhar para enxergar o alvo imediatamente vizinho, conduzindo a um rigoroso truncamento dos saltos. Fenômeno similar ocorre quando a rede possui elevadas concentrações de defeitos ($\chi > 0.1$), pois o espaçamento típico, λ_f entre os defeitos torna-se pequeno ($\lambda_f \approx \lambda_0$) conduzindo, novamente à, $\lambda/\lambda_0 \approx 1^3$. A figura-5.12-b mostra que a

³A relação entre λ , λ_t e λ_f é $\frac{1}{\lambda} \equiv \frac{1}{\lambda_t} + \frac{1}{\lambda_f}$ e será justificada nas seção-5.7.2.

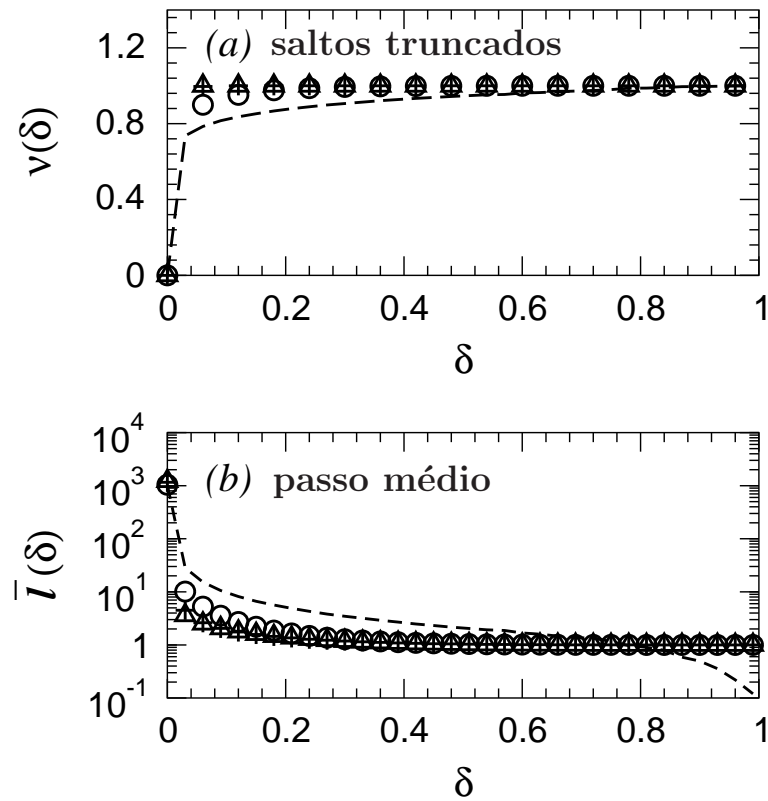


Figura 5.12: Comparação entre o poder de truncamento dos alvos e defeitos quando o alcance visual é mínimo $r_v = 0$. (o) rede populada com a fração $\delta = n_t/n_0$ de alvos (+) rede populada com a fração $\delta = n_f/n_0$ de defeitos. Em ambas as redes, quando $\delta = n_0^{-1/2}$ há em média uma fragmentação ou alvo em cada linha da rede, neste caso todos os saltos maiores que a dimensão da rede serão truncados. (a) fração ν de saltos truncados versus fração δ de alvos/defeitos. Observamos que os defeitos truncam saltos com a mesma frequência que os alvo e com apenas 10% de alvos/defeitos o percentual de saltos truncados é superior a 80%. (b) passo médio l_{av} versus fração δ de alvos/defeitos. O passo médio na rede com alvos é similar ao da rede com defeitos. Parâmetros: $r_v = 1$, ($0 \leq n_f \leq n_0$), $n_t = 0$, $n_0 = 2 \times 10^6$, $L_{max} = 2 \times 10^6$, 100 médias e condição de contorno periódica.

caminhada de Lévy em uma rede com coeficiente de fragmentação $\chi \approx 0.1$ tem cerca de 80% dos saltos truncados. Segue que quando $\lambda/\lambda_0 \approx 1$, não importando a estratégia de saltos (escolha de μ) usada pelo “forager”, o ambiente somente permite executar saltos da ordem de $\lambda \approx \lambda_0$ e a distribuição de distâncias percorridas pelo “forager” durante a busca é um desvio Browniano em torno de λ , tanto em ambientes com alvos destrutíveis como indestrutíveis. O limite $\lambda/\lambda_0 \approx 1$ é trivial, pois a caminhada certamente é Browniana e a eficiência $\eta(\mu)$ permanece invariante à estratégia de caminhada. Devemos ajustar $r_v \ll \lambda$ e limitar a concentração de sítios-alvo e defeitos a menos e de 10% a fim de evitar este limite.

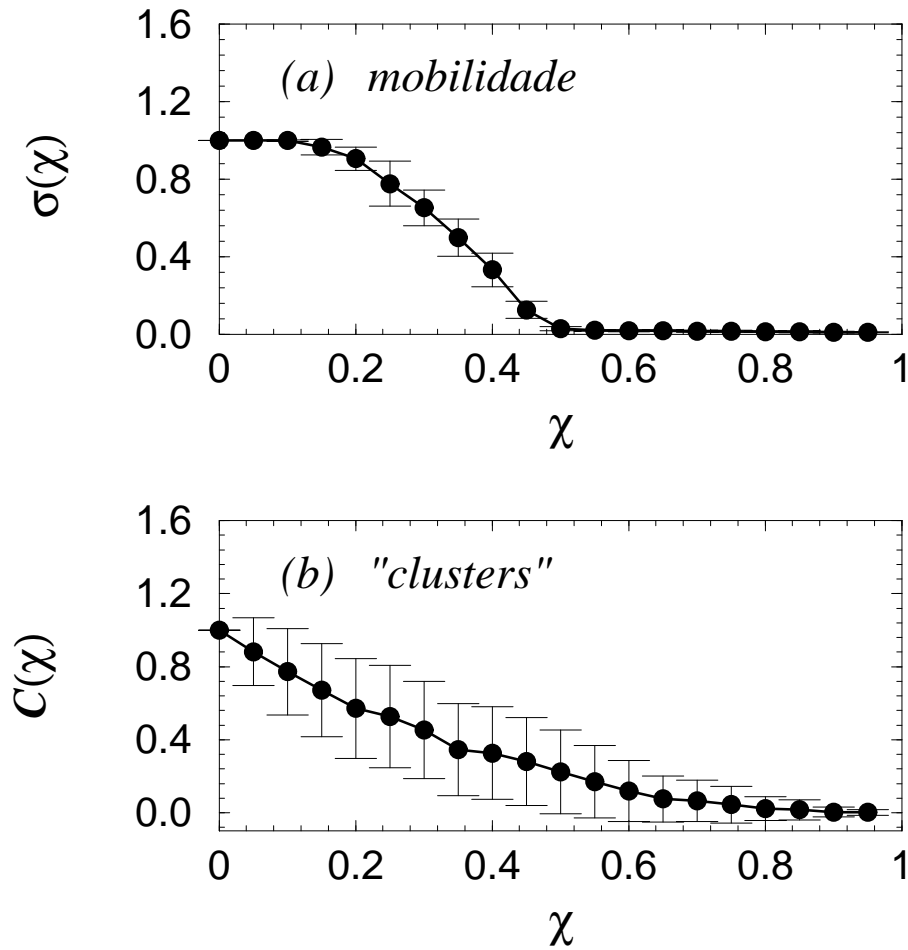


Figura 5.13: (a) Fração de quadrantes visitados $\sigma(\chi)$ versus coeficiente de fragmentações χ . A grandeza σ conta a fração de quadrantes visitados pelo “random-walker”, ao menos uma vez, durante a caminhada aleatória. O gráfico mostra que somente para baixos percentuais de sítios fragmentados ($\chi < 0.1$) o coeficiente σ permanece unitário, indicando que todos os quadrantes continuam acessíveis e que a rede continua conectada a ponto de permitir acessar um sítio arbitrário partindo de outro sítio arbitrário. No intervalo ($0.1 < \chi < 0.5$) nota-se a rápida redução da mobilidade ($\sigma \rightarrow 0$) e quando mais da metade da rede constitui-se de defeitos ($\chi > 0.5$) o coeficiente σ anula-se, indicando que a rede encontra-se criticamente desconectada e raramente é possível sair do quadrante onde a simulação iniciou-se. (b) Coeficiente de formação de “cluster” $C(\chi)$ versus coeficiente de fragmentações χ . C mede o acoplamento entre os vizinhos de um sítios arbitrário (propriedade local). Para acompanhar a destruição destes aglomerados calculamos o coeficiente de aglomeração C , definido como segue [43]. Suponha que um sítio s possua k_s vizinhos próximos então no máximo $k_s(k_s - 1)/2$ conexões podem existir entre eles (isto ocorre quando cada vizinho de s esta conectado a todos os outros vizinhos de s). C_s denota a fração destas possíveis conexões que atualmente existem e finalmente C é a média de C_s sobre todos os s . Parâmetros: $r_v = 1$, ($0 \leq n_f \leq n_0$), $n_t = 0$, $n_0 = 2 \times 10^6$, $L_{max} = 2 \times 10^6$, 100 médias e condição de contorno periódica.

regime	(CCP)	(CCH)	(CCA)
I	$\ell_j \rightarrow \infty$	$\ell_j > \lambda$	$\ell_j \approx \lambda$
II	$\ell_j \approx \lambda$	$\ell_j \approx \lambda$	$\ell_j \approx \lambda$
III	$\lambda_0 < \ell_j < 10\lambda_0$	$\lambda_0 < \ell_j < 10\lambda_0$	$\lambda_0 < \ell_j < 10\lambda_0$
IV	$\ell_j \approx \lambda_0$	$\ell_j \approx \lambda_0$	$\ell_j \approx \lambda_0$

Tabela 5.1: Truncamento dos saltos de Lévy ℓ_j para o “foraging” em todos os regimes (I, II, III e IV) e com todas as condições de contorno (CCP, CCH e CCA).

5.7.2 Solução Analítica

O modelo analítico [3, 4] proposto para o “foraging” biológico em ambientes contínuos, que abrigam uma distribuição homogênea de alvos, define a eficiência do “foraging” como

$$\eta(\mu, \lambda_0, \lambda, \Gamma) \equiv \frac{1}{N_s \langle \ell \rangle}, \quad (5.7)$$

onde μ define a estratégia de caminhada, Γ guarda as propriedade regenerativas dos alvos, λ e λ_0 resumem as propriedades de truncamento do ambiente. O produto $N_s \langle \ell \rangle$ fornece a estimativa para a distância total L percorrida durante a busca onde

$$N_s \equiv \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^{\frac{1-\mu}{\Gamma}}, \quad (5.8)$$

é a quantidade de saltos necessária para mover-se entre dois alvos encontrados sucessivamente e a grandeza $\langle \ell \rangle$ é o passo médio da caminhada de Lévy definido pela integral $\int_{\lambda_0}^{\infty} \ell^{1-\mu} d\ell$, normalizada por $\int_{\lambda_0}^{\infty} \ell^{-\mu} d\ell$. Como o ambiente trunca os saltos longos ($\ell_j > \lambda$) dividimos a região de integração em duas partes

$$\langle \ell \rangle \equiv \frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda} \ell^{1-\mu} d\ell + \int_{\lambda}^{\infty} \ell^{1-\mu} d\ell}{\int_{\lambda_0}^{\infty} \ell^{-\mu} d\ell}, \quad (5.9)$$

e observamos que a segunda integral pode ser simplificada $\int_{\lambda}^{\infty} \ell^{1-\mu} d\ell = \lambda \int_{\lambda}^{\infty} \ell^{-\mu} d\ell$ e isto equivale a considerar a distribuição de Lévy truncada em λ (“truncated Lévy flights” [93]). Os limites de integração λ_0 e λ determinam o truncamento dos saltos pelo ambiente, em particular nos ambientes onde apenas os alvos respondem pelo truncamento dos saltos, os limites da integral (5.9) são

$$\begin{aligned} \lambda_0 &\equiv r_v, \\ \lambda &\equiv \frac{1}{2r_v \rho_t} = \lambda_t, \end{aligned} \quad (5.10)$$

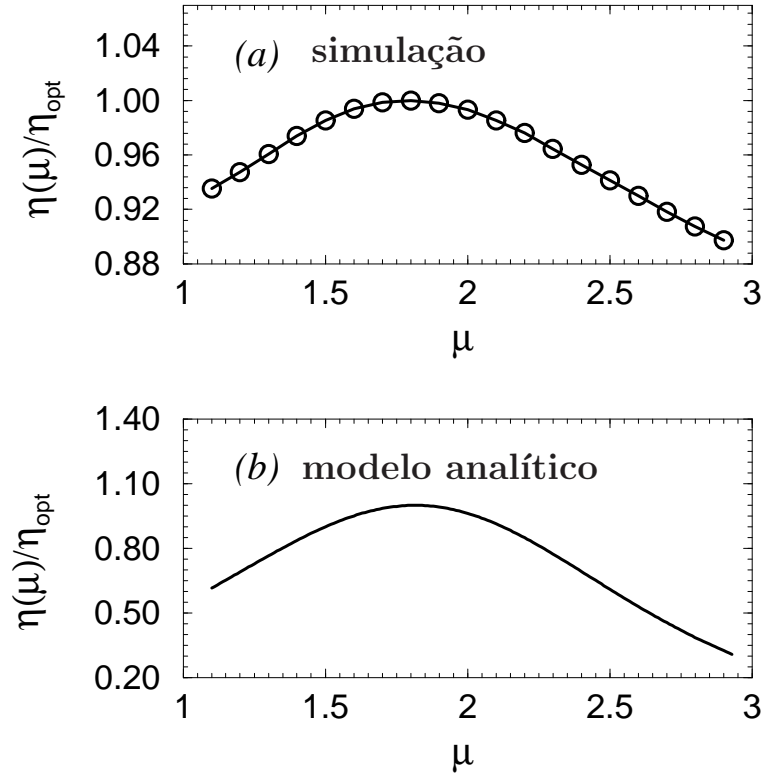


Figura 5.14: Eficiência $\eta(\mu)$, para o “foraging” não-destrutivo, normalizada pela eficiência máxima η_{opt} , versus estratégia de Lévy μ . Observe a concordância qualitativa entre a simulação (a) e o resultado analítico (b). O modelo analítico, considera uma rede infinita e sem condição de contorno, resultando em caminhadas com truncamento em $\ell_j \approx \lambda$, por isso a concordância entre os resultados aumenta no regime-II, onde a condição de contorno é irrelevante aos resultados da simulação numérica e a caminhada também se dá com truncamento em $\ell_j \approx \lambda$. Parâmetros: $r_v = 5$, $n_0 = 2.5 \times 10^7$, $n_t = 5000$, $n_f = 5000$, $\lambda/\lambda_0 = 98.04$ (regime-II), $L_{max} = 100000 \lambda$, 500 médias e condição de contorno periódica.

regime	condição de contorno	destrutivo ($\Gamma = 1$)	não-destrutivo ($\Gamma = 2$)	regenerativo ($1 < \Gamma < 2$)
I	(CCP)	$\mu_{opt} \approx 2.0$	$\mu_{opt} \approx 2.0$	$\mu_{opt} \approx 2.0$
	(CCH)	$\mu_{opt} \approx 1.8$	$\mu_{opt} \approx 2.0$	$1.8 < \mu_{opt} < 2.0$
	(CCA)	$\mu_{opt} \approx 1.5$	$\mu_{opt} \approx 2.0$	$1.5 < \mu_{opt} < 2.0$
II	qualquer	$\mu_{opt} \rightarrow 1.0$	$\mu_{opt} \approx 2.0$	$1.0 < \mu_{opt} < 2.0$
III	qualquer	$\mu_{opt} \rightarrow 1.0$	$\mu_{opt} \rightarrow 1.0$	$\mu_{opt} \rightarrow 1.0$
IV	qualquer	\nexists	\nexists	\nexists

Tabela 5.2: Estratégias de Lévy que conduzem à otimização do “foraging” em todos os regimes (I, II, III e IV), com todas as condições de contorno (CCP, CCH e CCA) e com todas as propriedades regenerativas ($1 \leq \Gamma \leq 2$).

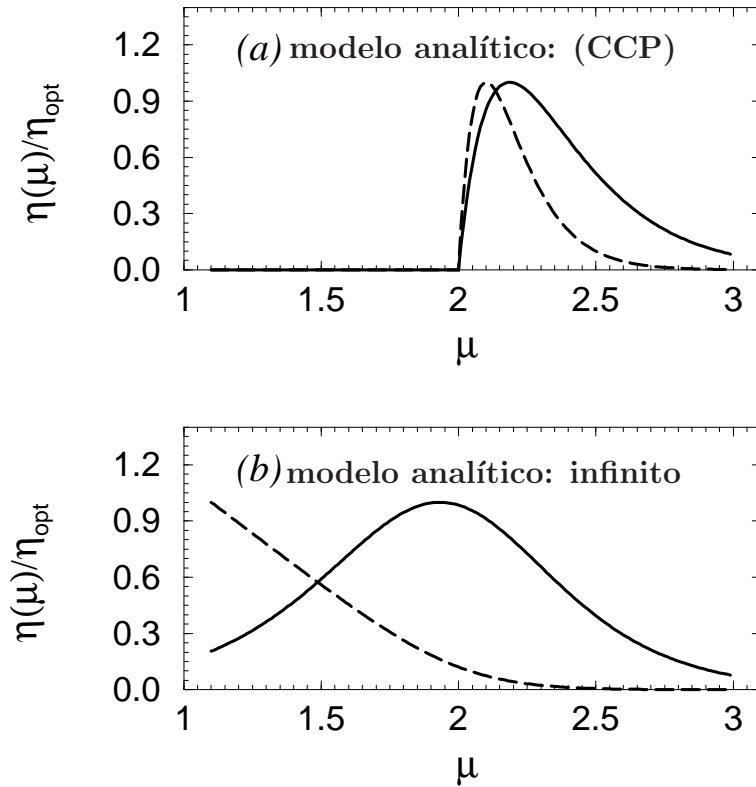


Figura 5.15: Eficiência $\eta(\mu)$, do “foraging” (modelo analítico), normalizada pela eficiência máxima, η_{opt} versus estratégia de Lévy μ . (a) Ambiente com condição de contorno periódica, a eficiência $\eta(\mu)$ anula-se, no intervalo ($1 < \mu < 2$), tanto no “foraging” destrutivo (traço-longo) como no não-destrutivo (traço-sólido), em razão de não ocorrer o truncamento dos saltos longos $\ell_j \rightarrow \infty$. (b) Ambiente infinito, neste caso a eliminação da condição de contorno periódica destrói os “loops” e a caminhada se dá com truncamento em $\ell_j \approx \lambda$. Parâmetros: $r_v = 5$, $n_0 = 2.5 \times 10^7$, $n_t = 5000$, $n_f = 5000$, $\lambda/\lambda_0 = 98.04$ (regime-II).

onde r_v é o alcance visual do “forager” e ρ_t é a concentração de alvos distribuídos no ambiente. O modelo (5.7) não se aplica a busca em redes em razão do conceito de defeitos não estar presente no “foraging” biológico. Isto conduz a diferenças no truncamento dos saltos entre o ambiente de redes e o ambiente contínuo, considerado no caso biológico. Podemos estender a validade deste modelo ao nosso problema de redes se redefinirmos as equações (5.10) de modo a assimilarem as propriedades de truncamento das redes, discutidas na seção-5.7.1. Considerando um ambiente que possui exclusivamente defeitos, o passo médio $\langle \ell_f \rangle$ da caminhada é fornecido pela equação (5.9) com $\lambda_0 = 1^4$ e $\lambda = \lambda_f$, que é o espaçamento típico entre os defeitos da rede. Num ambiente contendo apenas alvos, como no modelo biológico (5.7) ou em redes sem defeitos [7], o passo médio $\langle \ell_t \rangle$ é a equação (5.9) com, $\lambda_0 = r_v$ e $\lambda = \lambda_t$, dados pela equação (5.10). Desejamos definir λ e λ_0 ,

⁴Observe que numa rede contendo exclusivamente defeitos temos, $\lambda_0 = 1$, e na rede contendo apenas alvos temos, $\lambda_0 = r_v$, refletindo o fato de o “forager” detectar alvos à distância r_v mas detectar defeitos somente quando está à distância mínima (um parâmetro de rede $s = 1$) do defeito.

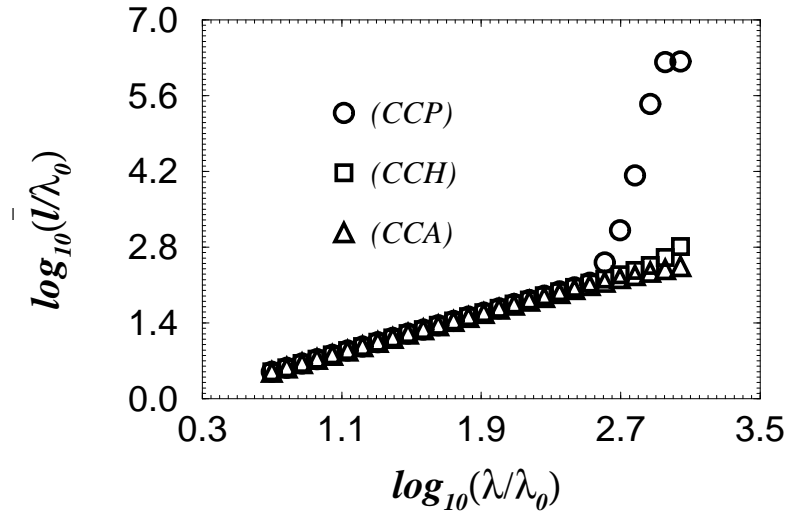


Figura 5.16: Passo médio ℓ_{av} em função de λ/λ_0 num plot log-log para o “foraging” não-destrutivo. O aumento de λ/λ_0 foi obtido somente pelo aumento no número de alvos. Observe a divergência do passo médio ao usarmos a condição de contorno periódica (CCP), o mesmo não ocorre quando usamos a condição de contorno hélica (CCH) ou a condição de contorno aleatória (CCA). A reta (tracejada) refere-se ao passo médio analítico obtido via equação (5.9). Parâmetros: $\mu = 1.1$, $r_v = 1$, $n_0 = 4 \times 10^7$, $1 < n_t < 4 \times 10^5$, $n_f = 20$, $L_{max} = 200000 \lambda$, 100 médias.

de modo que a equação (5.9) seja o passo médio da caminhada em uma rede contendo alvos e defeitos esta definição deve ser tal que, na ausência de defeitos ($\lambda_f \rightarrow \infty$) o truncamento dos saltos seja exclusivamente devido aos alvos e portanto $\lambda \rightarrow \lambda_t$ similarmente na ausência de alvos ($\lambda_t \rightarrow \infty$) o truncamento dos saltos será exclusivamente devido aos defeitos, portanto $\lambda \rightarrow \lambda_f$, duas condições similares devem ser impostas a λ_0 e podemos resumir todas estas quatro condições nas equações

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_f \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right) &= \frac{r_v}{\lambda_t}, \\ \lim_{\lambda_t \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right) &= \frac{1}{\lambda_f}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

A definição de (λ_0/λ) é arbitrária, bastando que as condições (5.11) sejam satisfeitas, em particular, definimos esta razão como a soma dos casos limite em (5.11) obtendo

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{r_v}{\lambda_t} + \frac{1}{\lambda_f}, \tag{5.12}$$

conhecida a razão, λ_0/λ resta apenas definir um dos dois, λ ou λ_0 e a equação (5.12) fornecerá o outro. A definição de λ_0 não é óbvia, porém a definição de λ pode ser estabelecida

por uma argumentação simples sobre a concentração ($\rho = \rho_t + \rho_f$) de alvos e defeitos da rede, onde ρ_t é a concentração de alvos e ρ_f a concentração de defeitos, seguimos exigindo que a definição de concentração seja inversamente proporcional ao truncamento $\rho \sim \frac{1}{\lambda}$ e isto fornece

$$\frac{1}{\lambda} \equiv \frac{1}{\lambda_t} + \frac{1}{\lambda_f}, \quad (5.13)$$

onde $\lambda_t = \frac{n_0}{2r_v n_t}$ é o truncamento dos saltos pelos alvos e $\lambda_f = \frac{n_0}{n_f}$ o truncamento devido aos defeitos, n_t , n_f e n_0 são respectivamente a quantidade alvos, defeitos e sítios da rede. A equação (5.13) é consistente com o fato de λ , o truncamento total da rede, ser menor do que ambos λ_f e λ_t . A determinação de, λ_0 segue de (5.12) e (5.13) resolvidas para λ_0 , fornecendo

$$\lambda_0 \equiv \frac{r_v + \lambda_t/\lambda_f}{1 + \lambda_t/\lambda_f}. \quad (5.14)$$

Note que, como consequência das condições (5.11) temos $1 \leq \lambda_0 \leq r_v$. É conveniente expressar as definições de λ e λ_0 em função dos parâmetros livres r_v , n_0 , n_t e n_f respectivamente raio de visão, quantidade total de sítios, alvos e defeitos da rede

$$\lambda_0 \equiv \frac{r_v + 2r_v n_t n_f}{1 + 2r_v n_t n_f} \quad \text{e} \quad \lambda \equiv \frac{n_0}{2r_v n_t + n_f}, \quad (5.15)$$

as equações (5.15) substituídas no modelo biológico (5.7), fornecem a correção necessária para aplicarmos o modelo analítico ao “foraging” em redes⁵. A concordância qualitativa entre a simulação e o modelo analítico é mostrada na figura-5.14.

5.7.3 Condição de Contorno

O modelo analítico, da seção-(3.2), considera uma rede infinita e sem condição de contorno resultando em caminhadas com truncamento em $\ell_j \approx \lambda$, mas a simulação não pode representar redes infinitas em razão de limitações computacionais obrigando-nos a considerar condições de contorno. As condições de contorno somente são relevantes quando a trajetória de busca alcança as extremidades da rede repetidas vezes durante a execução do mesmo salto. Isto ocorre com frequência quando $\left(\lambda/\lambda_0 > \frac{\sqrt{n_0}}{10\lambda_0}\right)$, neste caso as três condições de contorno que usamos (CCP, CCH e CCA) produzem trajetórias de busca diferentes que afetam diretamente a eficiência do “foraging”.

⁵Uma alternativa para corrigir o modelo, é observar que o passo médio $\langle \ell \rangle$, na rede com alvos e defeitos deve ser menor do que: (i) o passo médio na rede contendo apenas alvos $\langle \ell_f \rangle$ e (ii) o passo médio na rede contendo apenas defeitos $\langle \ell_t \rangle$, conduzindo à definição $\frac{1}{\langle \ell \rangle} \equiv \frac{1}{\langle \ell_t \rangle} + \frac{1}{\langle \ell_f \rangle}$. Preferimos manter $\langle \ell \rangle$ definido pela integral (5.9) e alterar os limites de integração λ_0 e λ .

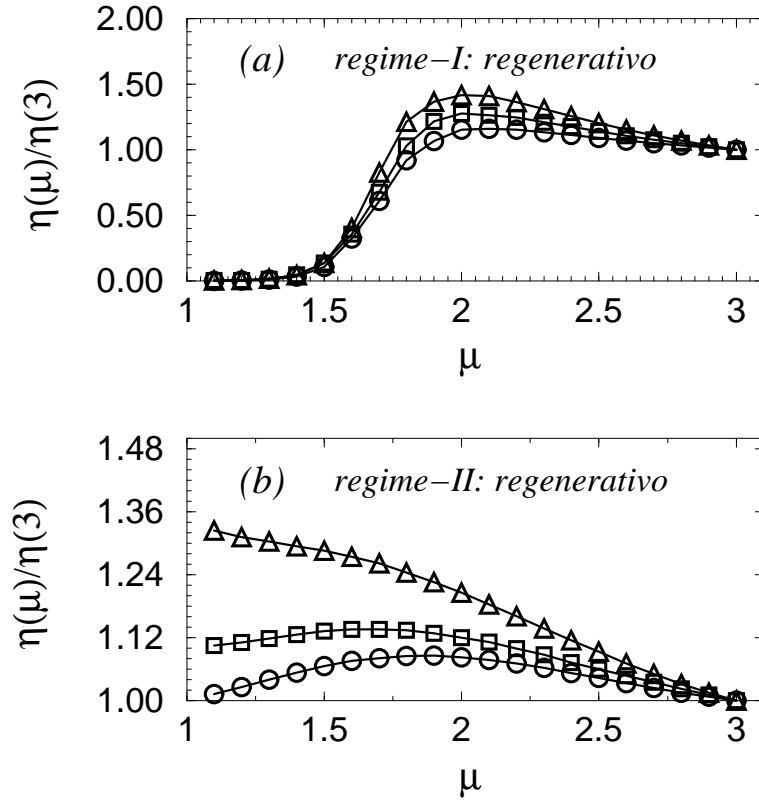


Figura 5.17: Eficiência $\eta(\mu)$ no “foraging” regenerativo (a) regime-I e (b) regime-II, normalizada pela eficiência da estratégia Browniana $\eta(3)$, versus estratégia de Lévy μ . O tempo τ necessário à regeneração dos alvos é (bola) $\tau = 0.005 \lambda$, (triângulo) $\tau = 0.025 \lambda$, (quadrado) $\tau = 0.125 \lambda$. Vimos o comportamento não-destrutivo quando $\tau \approx 0.005 \lambda$ o comportamento destrutivo quando $\tau \approx \lambda/10$. Parâmetros do regime-I: (CCP) $r_v = 1$, $n_0 = 2. \times 10^6$, $n_t = 1000$, $n_f = 1000$, $\lambda/\lambda_0 = 1331.33$, $L_{max} = 100000 \lambda$, 100 médias. Parâmetros do regime-II: (CCP) $r_v = 1$, $n_0 = 2. \times 10^6$, $n_t = 8000$, $n_f = 10000$, $\lambda/\lambda_0 = 153.61$, $L_{max} = 100000 \lambda$, 100 médias.

A condição de contorno periódica transforma a rede em um tórus contendo trajetórias circulares fechadas (“loops”). Confinado em uma destas trajetórias de busca e sem haver alvos visíveis ou defeitos na rede para quebrar o “loop”, o “forager” obriga-se a percorrer totalmente a distância do salto ℓ_j , sem haver truncamento, permitindo executar saltos arbitrariamente longos ($\ell_j \rightarrow \infty$). Segue que a distribuição de distâncias percorridas não é truncada e a simplificação, $\int_{\lambda}^{\infty} \ell^{1-\mu} d\ell = \lambda \int_{\lambda}^{\infty} \ell^{-\mu} d\ell$, usada na segunda integral da equação (5.9), deixa de ser válida, em razão de não ocorrer o truncamento dos saltos longos em $\ell_j \approx \lambda$, em conseqüência a integral diverge, levando à divergência do passo médio e ao anulamento da eficiência $\eta(\mu)$, sempre que ($1 < \mu < 2$), tanto no “foraging” destrutivo, figura-5.15-a (traço-longo), como no não-destrutivo, figura-5.15-b (traço-sólido). Com esta correção o modelo analítico (5.7) reproduz a divergência do passo médio que observamos na simulação, figura-5.16 (bola). A condição de contorno hélica, transforma a rede em um tórus contendo trajetórias solenoidais, neste caso os “loops” não ocorrem,

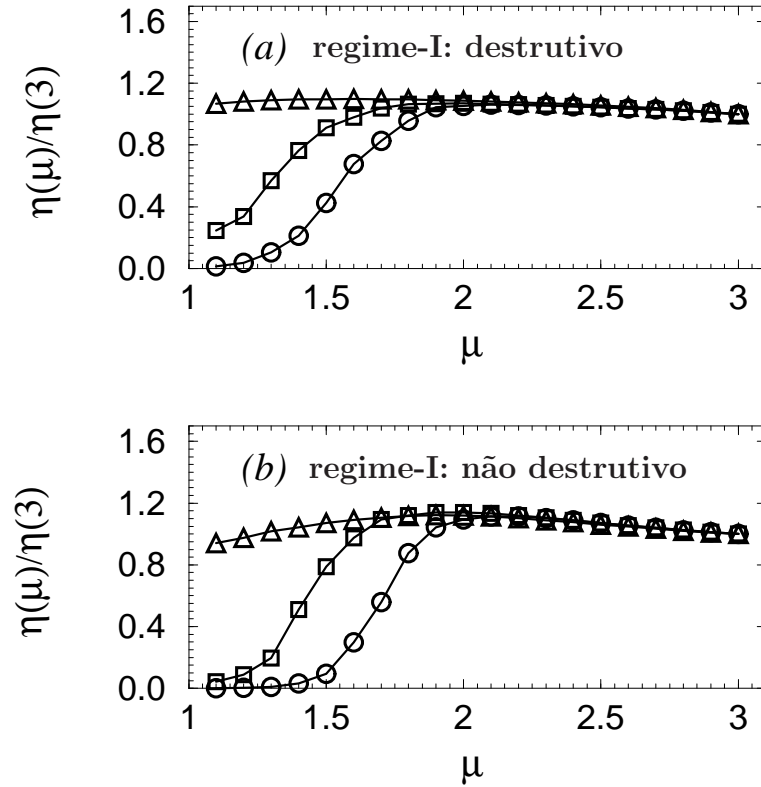


Figura 5.18: Eficiência $\eta(\mu)$ do “foraging” no regime-I (a) destrutivo e (b) não-destrutivo, normalizada pela eficiência da estratégia Brownianas $\eta(3)$, versus estratégia de Lévy μ . Note que com a condição de contorno periódica (bola), $\eta(\mu) \rightarrow 0$ quando, $\mu \rightarrow 1$ devido a ocorrência dos “loops”. A condição de contorno hélica (quadrado) produz trajetórias de busca com ergodicidade baixa, mas a eficiência não se anula. A condição de contorno aleatória (triângulo), não produz “loops” e produz trajetórias de busca com ergodicidade elevada conduzindo a alta eficiência. Parâmetros: $r_v = 1$, $n_0 = 2. \times 10^6$, $n_t = 1000$, $n_f = 1000$, $\lambda/\lambda_0 = 1331.33$, $L_{max} = 100000 \lambda$, 100 médias.

mas a trajetória de busca sobre o solenoide possui ergodicidade baixa, eventualmente, conduzindo o “forager” a longas caminhadas antes de ocorrer um truncamento. A distribuição de distâncias percorridas pelo “forager” é truncada em $\ell_j > \lambda$, o valor do truncamento não foi avaliado, porém certamente é finito⁶, segue que a convergência do passo médio é ultra-lenta, figura-5.16 (quadrado), mas estará assegurada, se o número de passos da caminhada for suficientemente elevado [93]. A condição de contorno aleatória não produz “loops” e cria trajetórias de busca com ergodicidade maior que na (CCH), beneficiando a eficiência e conduzindo a uma caminhada de Lévy truncada em $\ell_j \approx \lambda$, figura-5.16 (triângulo). A influência de todas as condições de contorno, sobre o truncamento dos saltos, encontra-se resumida na tabela-5.1 (regime-I).

⁶Se o “forager” inspecionar todos os n_0 sítios da rede (separados pelo parâmetro de rede $s = 1$), percorrerá a distância máxima $s n_0$, antes disso ocorrer, um alvo ou defeito truncará o salto.

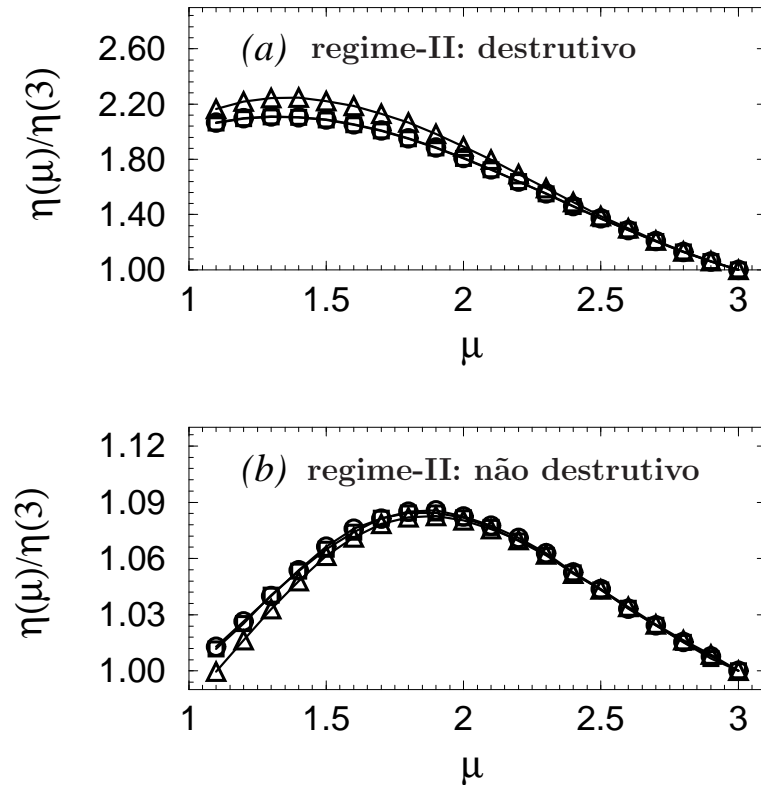


Figura 5.19: Eficiência $\eta(\mu)$ do “foraging” no regime-II (a) destrutivo e (b) não-destrutivo, normalizada pela eficiência da estratégia Brownianas $\eta(3)$, versus estratégia de Lévy μ . Note que as curvas para diferentes condições de contorno se sobrepõem demonstrando que a partir do regime-II a condição de contorno torna-se irrelevante e o mesmo vale para os regimes (III e IV). (bola) condição de contorno periódica (triângulo) condição de contorno hélica (quadrado) condição de contorno aleatória. Parâmetros: $r_v = 1$, $n_0 = 2. \times 10^6$, $n_t = 8000$, $n_f = 10000$, $\lambda/\lambda_0 = 153.61$, $L_{max} = 100000 \lambda$, 100 médias.

5.7.4 Otimização do “Foraging”

O truncamento dos saltos de Lévy (λ_0 e λ) determina a forma das curvas de eficiência, permitindo classificar os resultados em função do parâmetro de ordem, λ/λ_0 em quatro regimes. O primeiro (regime-I) verifica-se quando as condições de contorno são relevantes ($\lambda/\lambda_0 > \frac{\sqrt{n_0}}{10\lambda_0}$). Neste regime, e somente nele, o truncamento dos saltos é raro e a trajetória de busca do “forager” alcança as extremidades da rede com frequência, enquanto percorre um mesmo salto ℓ_j , afetando a eficiência do “foraging” de modo diferente para cada condição de contorno. Nos dois parágrafos seguintes discutimos o desempenho do “foraging” no regime-I com todas as condições de contorno (CCP, CCH e CCA) nos casos destrutivo e não-destrutivo.

O “foraging” destrutivo caracteriza-se por beneficiar estratégias de saltos longos, em razão de não haver vantagem em permanecer nas proximidade de um alvo previamente encontrado e permanentemente destruído, conduzindo a um movimento balístico entre os

alvos e defeitos. Na presença da condição de contorno periódica, a ocorrência de “loops”, na trajetória de busca do “forager” penaliza as estratégias de saltos longos ($1 < \mu < 2$), em razão de impedir o truncamento dos saltos, como discutido na seção-5.7.3, tornando as estratégias superdifusivas ineficientes ($\eta \rightarrow 0$ quando $\mu \rightarrow 1$), por outro lado, as estratégias Brownianas ($\mu \rightarrow 3$) também não são bem sucedidas, qualquer que seja a condição de contorno, em razão de levarem o “forager” a aguardar nas proximidades do alvo previamente encontrado, e permanentemente destruído, obrigando-o a cobrir grandes distâncias, em pequenos saltos, para afastar-se do “buraco” deixado pelo alvo destruído. Com isso $\eta(\mu)$ possui mínimos nos limites $\mu \rightarrow 1$, $\mu \rightarrow 3$ e um máximo ($\mu_{opt} \approx 2$), que ocorre entre os mínimos, figura-5.18a (bola). A condição de contorno aleatória não produz “loops” e cria trajetórias de busca com ergodicidade elevada, conduzindo a uma caminhada de Lévy truncada em $\ell_j \approx \lambda$, observamos, $\mu_{opt} \approx 1.5$ figura-5.18a (triângulo), correspondendo à um movimento balístico entre os alvos e defeitos. A condição de contorno hélica não produz “loops”, mas as trajetórias de busca possuem ergodicidade baixa conduzindo a uma caminhada de Lévy truncada em $\ell_j > \lambda$, criando um ambiente de busca, com truncamento intermediário ao caso com (CCP) e com (CCA), como mostra a tabela-5.1, resultando em uma estratégia ótima, também intermediária, $\mu_{opt} \approx 1.8$, figura-5.18a (quadrado).

No “foraging” não-destrutivo, observamos $\mu_{opt} \approx 2$ para todas as condições de contorno, figura-5.18 (b), esta estratégia resulta em uma caminhada que equilibra saltos longos e curtos em razão de ser vantajoso manter-se nas proximidades de um alvo previamente encontrado assim como é vantajoso afastar-se balisticamente até o alvo vizinho ou defeitos mais próximo. Ressaltamos que os “loops” da condição de contorno periódica diminuem drasticamente a eficiência das estratégias superdifusivas ($1 < \mu < 2$), figura-5.18 (b) (bola), fazendo $\eta(\mu) \rightarrow 0$ quando $\mu \rightarrow 1$. Apesar da dinâmica do “foraging” destrutivo e do não destrutivo serem muito diferentes, na presença da (CCP) $\eta(\mu)$ torna-se semelhante para os dois casos devido a ocorrência dos “loops”.

O regime-II ocorre quando o parâmetro de ordem esta no intervalo $\left(10 < \lambda/\lambda_0 < \frac{\sqrt{n_0}}{10\lambda_0}\right)$ e caracteriza-se pela alta frequência de truncamentos, impedindo o “forager” de interceptar as fronteiras da rede, de modo recorrente e no mesmo salto, levando à invariância de $\eta(\mu)$ à condição de contorno. O ambiente conduz o “forager” à caminhar segundo uma distribuição de saltos truncada em $\ell_j \approx \lambda$, resultando em $\mu_{opt} \rightarrow 1$ no caso destrutivo, figura-5.19 (a), correspondendo à uma estratégia de caminhada de saltos longos em um movimento balístico entre alvos e defeitos. No caso não-destrutivo, figura-5.19 (b), observamos $\mu_{opt} \approx 2$, que corresponde a uma caminhada equilibrando saltos longos e curtos.

No regime-III ($1 < \lambda/\lambda_0 < 10$), temos $\mu_{opt} \rightarrow 1$, tanto no caso destrutivo como no

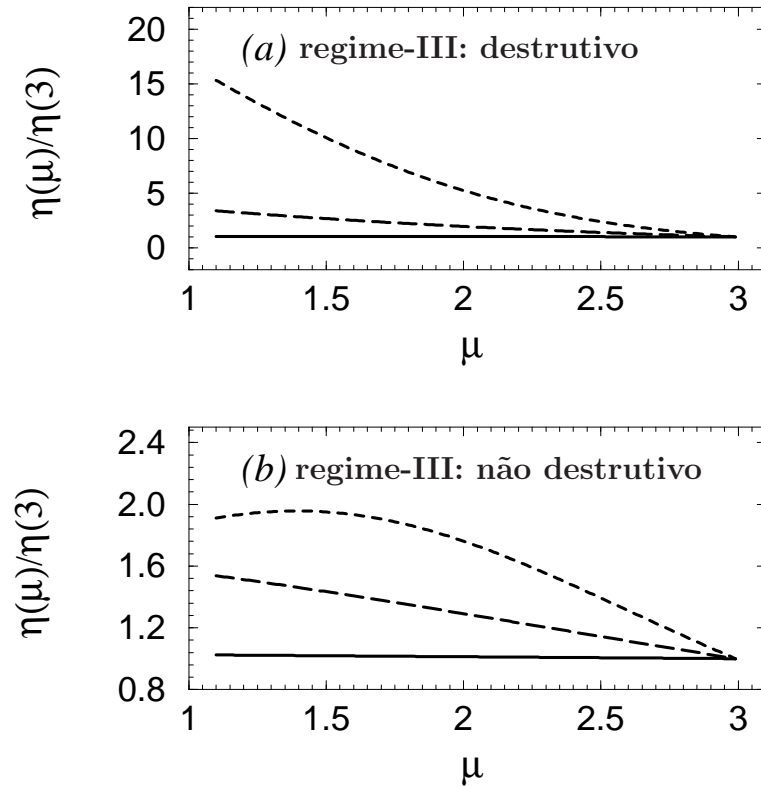


Figura 5.20: Eficiência $\eta(\mu)$ (analítico), para o “foraging” no regime-III (a) não-destrutivo e (b) destrutivo, normalizada pela eficiência da estratégia Browniana $\eta(3)$, versus estratégia de Lévy μ . Note que $\mu_{opt} \rightarrow 1$, indicando que a alta frequência de truncamento favorece a eficiência das estratégias superdifusivas ($1 < \mu < 2$). O comportamento, $\lambda/\lambda_0 \rightarrow 1$ foi obtido aumentando somente o alcance visual, r_v . Parâmetros: (traço-curto) $r_v = 6$, (traço-longo) $r_v = 12$ e (traço-sólido) $r_v = 18$ correspondendo respectivamente à $\lambda/\lambda_0 = 9.05, 2.30, 1.03$, $n_0 = 4 \times 10^7$, $n_t = 6000$, $n_f = 10000$.

não-destrutivo, indicando que a alta frequência de truncamento favorece a eficiência das estratégias superdifusivas ($1 < \mu < 2$), pois os saltos longos são truncados de modo a ajustarem-se à distribuição de espaçamentos entre os alvos e defeitos, conduzindo, novamente ao movimento balístico, como mostra a figura-5.20 (a), para o caso destrutivo e a figura-5.20 (b), para o caso não-destrutivo. No regime-IV ($\lambda/\lambda_0 \approx 1$) todos os saltos são truncados, como argumentamos na seção-5.7.1, levando ao caso trivial de invariância de $\eta(\mu)$ à estratégia de busca μ e portanto μ_{opt} não existe.

O “foraging” regenerativo ($1 < \Gamma < 2$) produz curvas de eficiência intermediárias aos casos destrutivo e não-destrutivo, qualquer que seja o regime (I, II, III ou IV) e qualquer que seja a condição de contorno (CCP, CCH ou CCA) como mostra a figura-5.17 (a) para o regime-I com (CCP) e a figura-5.17 (b) para o regime-II com (CCP). As estratégias que conduzem à otimização, em todos os regimes, encontram-se resumidas na tabela-5.2.

Conclusões

6.1 Considerações Finais

Atacamos o problema geral da busca por alvos aleatoriamente distribuídos num espaço cartesiano d -dimensional, no qual desejamos determinar as estratégias ótimas de busca que maximizam a eficiência. Discutimos uma descrição para este problema baseada em teoria de caminhadas aleatórias. Admitimos que os alvos possuem propriedades regenerativas permitindo tratar a dinâmica destrutiva e a não destrutiva como casos limites onde o tempo de regeneração é $\tau \rightarrow \infty$, e $\tau \rightarrow 0$, respectivamente. Os “foragers” interagem e detectam os alvos apenas quando eles estão nas suas proximidade, dentro do seu alcance visual r_v . A Heurística que orienta a busca é fortemente determinada pela estratégia de caminhada μ , que controla as propriedade de difusão do “forager”. A busca individual, assim como a busca coletiva governada pela “Dinâmica Siga o Líder” retornaram que as estratégias superdifusivas $1 < \mu \leq 2$, otimizam os processos de busca. A busca não-destrutiva em ambientes que encerram uma distribuição esparsa de alvos, registra eficiência máxima quando $\mu \approx 2$, enquanto no caso destrutivo observamos $\mu \rightarrow 1$. Para concentrações elevadas a eficiência deixa de depender de μ indicando que quando há saturação de alvos a busca ocorre dentro do alcance visual do “forager” de modo que não é mais necessário caminhar para detectar os alvos, portanto a eficiência de todas as estratégias $1 < \mu \leq 3$ são equivalentes.

Para a busca em sistemas discretos com baixas concentrações de alvos, observamos $\mu_{opt} = 2$, como expoente ótimo. Aumentando a concentração observamos que $\mu \rightarrow 1$ torna-se a estratégia mais eficiente porque os saltos longos são truncados e a distribuição de saltos do “forager” ajusta-se aos espaçamentos entre os sítios. O número de conexões

k não é relevante aos nossos resultados pois ao longo de um salto arbitrário o número de sítios inspecionados é o mesmo em ambas as rede, o parâmetro k será relevante sempre que permitir ao “forager” interagir com um número maior de sítios ao longo da trajetória de busca mostrando que a geometria espacial é importante. A condição de contorno periódica é responsável por uma variedade de fenômenos interessantes, como a maior probabilidade de retorno, a um sítio previamente visitado, durante um processo de busca na rede triangular comparada a probabilidade observada na rede quadrada. A ocorrência de “loops” na trajetória do “forager” no regime superdifusivo $\mu \rightarrow 1$ quando a concentração de sítios é esparsa e torna muito similares as eficiências do “foraging” destrutivo e não destrutivo, diferentemente do que ocorre no “foraging” contínuo.

Nossos resultados sugerem que a caminhada de Lévy apresenta-se como uma alternativa eficiente para otimizar o “foraging” em redes topologicamente ineficientes à busca. Observamos que as leis de potência com, $1 < \mu \leq 2$ conduzem a otimização da busca não importando quais sejam as propriedades regenerativas dos alvos presentes no ambiente nem a condição de contorno aplicada.

6.1.1 Resumo dos Resultados

Os resultados relevantes para a busca no contínuo estão relacionados abaixo:

- As estratégias ótimas observadas são superdifusivas $1 < \mu_{\text{ótimo}} < 2$;
- $\mu_{\text{ótimo}} \approx 2$ otimiza a busca não destrutiva (esparso);
- A eficiência aumenta quando $\mu \rightarrow 1$ para busca destrutiva (esparso);
- Na busca regenerativa observamos $\mu_{\text{ótimo}}$, intermediário $1 < \mu_{\text{ótimo}} < 2$;
- Na busca coletiva R_B tem significado semelhante ao alcance visual da busca individual.

Os resultados relevantes para a busca em ambientes discretos estão relacionados abaixo:

- A condição de contorno periódica gera “loops” e reduz a eficiência da busca superdifusiva (esparso);
- Os resultados para rede quadrada e triangular são semelhantes na ausência de “loops”;

- Os resultados para busca em redes são semelhantes ao caso contínuo na ausência dos efeitos da condição de contorno;
- Os defeitos das redes fragmentadas truncam saltos da mesma maneira que os alvos ($r_V \approx 1$);
- O modelo estatístico pode ser generalizado para o caso discreto apenas redefinindo-se os parâmetros de truncamento λ e λ_0 .

6.2 Projetos Futuros

6.2.1 “Quantum Random Walk”

Há um grande interesse no estudo de processos de transporte de carga em escala atômica. Do deslocamento de prótons através de membranas celulares ao funcionamento de válvulas de spin, os mecanismos que possibilitam o transporte de carga (a nível nano e mesoscópico) são os mais variados possíveis, dando origem a diversos tipos de fenômenos no domínio quântico. Devido a tal diversidade e complexidade, necessitamos usar as mais diversas técnicas teóricas e experimentais para estudar tais problemas. Assim, nos tratamentos teóricos emprega-se: cálculos *ab initio*; dinâmica molecular; métodos semi-empíricos; métodos fenomenológicos; etc.

Estes sistemas frequentemente se constituem de redes e são adequadamente tratados via teoria de grafos. A estrutura do grafo é totalmente determinada pela estrutura das conexões entre os diferentes vértices. O conceito matemático geral de um grafo (rede) como um grupo de elementos os quais estão conectados por alguma relação encontra aplicações em muitas áreas da ciência, da engenharia e também das ciências sociais. Uma rede de ruas de um engenheiro de tráfego, a rede de neurônios estudada por um neurocientista e a estrutura de um banco de dados na ciência da computação podem ser descritas por grafos.

Recentemente o Laplaciano em um grafo métrico tem ganhado grande atenção em física e matemática em termos da equação de difusão ou equação de Schrödinger. Esses sistemas tornaram-se conhecidos como *grafos quânticos* (“quantum graphs”), mas diferentes aspectos são estudados sob vários nomes como redes quânticas (“quantum networks”) ou fios quânticos (“quantum wires”). Eles têm uma história longa na matemática e na física. Na física, a sua primeira aplicação foi provavelmente no contexto de modelos de elétrons livres em moléculas orgânicas por volta de setenta anos atrás por Pauling [94],

uma metodologia que foi adicionalmente desenvolvida nos anos subseqüentes [95–99]. As moléculas eram visualizadas como um grupo de átomos fixos conectados por ligações, ao longo das quais os elétrons obedecem a equação de Schrödinger unidimensional com um potencial apropriado. O transporte de elétrons em moléculas orgânicas [100], tais como proteínas e polímeros, podem seguir “pathways” unidimensionais (as ligações), mudando de um caminho para outro devido aos centros espalhadores (os vértices). Sob certas condições [101, 102], transporte de carga em sólidos é bem descrita por uma dinâmica unidimensional, como em filmes poliméricos [103]. Grafos quânticos têm também sido aplicados com sucesso a supercondutores desordenados [104], transição de Anderson em fios desordenados [105, 106], sistemas Hall quânticos [107], super-redes [108], fios quânticos [109] e redes nanoscópicas [110]. Grafos quânticos também foram simulados experimentalmente por redes de microondas [111].

Referências Bibliográficas

- [1] D. Stephens e J. Krebs. *Foraging Theory* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987).
- [2] J. Krebs e H. Pulliam. *Foraging Behavior* (Plenum Press, New York, 1987).
- [3] G. Viswanathan, V. Afanasyev, S. Buldyrev, E. Murphy, P. Prince e H. Stanley. Lévy Flight Search Patterns of Wandering Albatrosses. *Nature* **381**, 413 (1996). doi: [10.1038/381413a0](https://doi.org/10.1038/381413a0).
- [4] G. Viswanathan, S. Buldyrev, S. Halvin, M. da Luz, E. Raposo e H. Stanley. Optimizing the Success of Random Searches. *Nature* **401**, 911 (1999). doi: [10.1038/44831](https://doi.org/10.1038/44831).
- [5] E. P. Raposo, S. V. Buldyrev, M. da Luz, M. Santos, H. Stanley e G. Viswanathan. Dynamical Robustness of Lévy Search Strategies. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 24, 240601 (2003). doi: [10.1103/PhysRevLett.91.240601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.240601).
- [6] G. M. Viswanathan, V. Afanasyev, S. Buldyrev, S. Halvin, M. da Luz, E. Raposo e H. Stanley. Lévy Flights in Random Searches. *Physica A* **282**, 1 (2000). doi: [10.1016/S0378-4371\(00\)00071-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00071-6).
- [7] M. C. Santos, E. P. Raposo, G. M. Viswanathan e M. G. E. da Luz. Optimal Random Searches of Revisitable Targets: Crossover from Superdiffusive to Ballistic Random Walks. *Europhysics Letters* **67**, 734 (2004). doi: [10.1209/epl/i2004-10114-9](https://doi.org/10.1209/epl/i2004-10114-9).
- [8] M. C. Santos, G. M. Viswanathan, E. P. Raposo e M. G. E. da Luz. Optimization of Random Searches on Regular Lattices. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)* **72**, 4, 046143 (2005). doi: [10.1103/PhysRevE.72.046143](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.046143). URL <http://link.aps.org/abstract/PRE/v72/e046143>.

- [9] M. Levandowsky, J. Klafter e B. White. Swimming Behavior and Chemosensory Responses in Protozoan Microzooplankton as a Function of Hydrodynamic Regime. *Bulletin of Marine Science* **43**, 758 (1988).
- [10] F. L. Schuster e M. Levandowsky. Chemosensory Responses of *Acanthamoeba Castellanii*: Visual Analysis of Random Movement and Responses to Chemical Signals. *The Journal of Eukaryotic Microbiology* **43**, 150 (1996). doi: [10.1111/j.1550-7408.1996.tb04496.x](https://doi.org/10.1111/j.1550-7408.1996.tb04496.x).
- [11] B. Cole. Fractal Time in Animal Behavior: the Movement Activity of *Drosophila*. *Animal Behavior* **50**, 1317 (1995).
- [12] P. Nonacs e L. Dill. Is Satisficing an Alternative to Optimal Foraging? *Oikos* **67**, 371 (1993).
- [13] P. Pirolli e S. Card. Proceedings of the 1995 Conference on Human Factors in Computing Systems ACM Press. Em *Human Factors in Computing Systems ACM Press* (1995).
- [14] L. A. Adamic, R. M. Lukose, A. R. Puniyani e B. A. Huberman. Search in Power-law Networks. *Phys. Rev. E* **64**, 4, 046135 (2001). doi: [10.1103/PhysRevE.64.046135](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.046135).
- [15] R. Guimerà, A. Diaz-Guilera, F. Vega-Redondo, A. Cabrales e A. Arenas. Optimal Network Topologies for Local Search with Congestion. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 24, 248701 (2002). doi: [10.1103/PhysRevLett.89.248701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.248701).
- [16] A. Vázquez, R. P. Satorras e A. Vespignani. Undefined (2002). Preprint.
- [17] R. Metzler e J. Klafter. *Phys. Rep.* **339**, 1 (2000).
- [18] G. M. Zaslavsky. *Phys. Rep.* **371**, 461 (2002).
- [19] I. Peterson. *The Jungles of Randomness: A Mathematical Safari* (Wiley, New York, 1997).
- [20] M. Shlesinger e G. Zaslavsky. *Lévy Flights and Related Topics in Physics* (Springer, Berlin, 1995).
- [21] C. Tsallis. Why Lévy distributions are ubiquitous in nature? *Physics World* **10**, 42 (1997).
- [22] R. Metzler e J. Klafter. *J. Phys. A* **161**, 37 (2004).

- [23] B. W. J. Bruce, P. Grigolini, R. Metzler e T. Nonnenmacher. Fractional Diffusion and Lévy Stable Processes. *Phys. Rev. E* **55**, 1, 99 (1997). doi: [10.1103/PhysRevE.55.99](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.55.99).
- [24] G. M. Viswanathan, E. P. Raposo, F. Bartumeus, J. Catalan e M. G. E. da Luz. Necessary Criterion for Distinguishing True Superdiffusion from Correlated Random Walk Processes. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)* **72**, 1, 011111 (2005). doi: [10.1103/PhysRevE.72.011111](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.011111). URL <http://link.aps.org/abstract/PRE/v72/e011111>.
- [25] M. Levy, S. Solomon e I. J. Mod. *Phys. C* **7**, 595 (1996).
- [26] D. Sornette e R. Cont. *J. Phys. I (France)* **431**, 7 (1997).
- [27] P. M. de Oliveira. *Theory in Bioscience* **120**, 1 (2001).
- [28] T. Gisiger. *Biol. Rev.* **76**, 161 (2001).
- [29] R. E. Ulanowicz. *Biosystems* **64**, 13 (2002).
- [30] C. L. Faustino, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo, L. R. da Silva, E. P. Raposo e G. M. Viswanathan. Undefined (2007). Preprint.
- [31] M. F. Shlesinger e J. Klafter. *On Growth and Form: Fractal and Non-Fractal* (Nijhoff, Dordrecht, 1986).
- [32] T. W. Schoener. Models of Optimal Size for a Solitary Predator. *Amer. Natur.* **103**, 277–313 (1969).
- [33] T. W. Schoener. Theory of Feeding Strategies. *Ann Rev. Ecol. Syst.* **2**, 369–404 (1971).
- [34] J. Emlen. The Role of Time and Energy in Food Preference. *Amer. Nature.* **100**, 611–617 (1966).
- [35] R. M. MacArthur e E. R. Koshend. On Optimal Use of Patchy Environment. *amer. Natur.* **100**, 603–609 (1966).
- [36] H. R. Polliam. On the Thery of Optimal Diets. *Amer. Natur.* **108**, 59–74 (1974).
- [37] M. L. Cody. Fnich Flocks in the Mohave Desert. *Theor. Popul. Biol.* **2**, 142–158 (1971).

- [38] G. Pyke. *Studies in the Foraging Efficiency of Animal*. Tese de Doutorado, University of Chicago (1974).
- [39] J. N. M. Smith e C. R. Dawkins. The Hunting Behaviour of Individual Great Tits in Relation to Spatia Variations in Their Food Density. *Ann. Behav.* **19**, 695–706 (1971).
- [40] D. Boyer, O. Miramontes, G. Ramos-Fernández, J. L. Mateos e G. Cocho. Modeling the Searching Behavior of Social Monkeys. *Physica A* **342**, 329 (2004). doi: [10.1016/j.physa.2004.04.091](https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.04.091).
- [41] G. Ramos-Fernandez, J. L. Mateos, O. Miramontes, G. Cocho, H. Larralde e B. Ayala-Orozco. *Behav. Ecol. Sociobiol.* **55**, 223 (2004).
- [42] D. Boyer, G. Ramos-Fernandez, O. Miramontes, J. L. Mateos, G. Cocho, H. Larralde, H. Ramos e F. Rojas. *Proc. R. Soc. B* **273**, 1743 (2006).
- [43] D. J. Watts e S. H. Strogatz. Collective Dynamics of 'Small-world' Networks. *Nature* **393**, 440 (1998). doi: [10.1038/30918](https://doi.org/10.1038/30918).
- [44] J. J. Collins e C. Chow. It's a Small World. *Nature - News and Views* **393**, 409 (1998). doi: [10.1038/30835](https://doi.org/10.1038/30835).
- [45] L. Amaral, A. Scala, M. Barthélémy e H. E. Stanley. *Applied Physical Sciences* **97**, 1 (2000).
- [46] M. Wang e G. E. Uhlenbeck. On the Theory of the Brownian Motion II. *Rev. Mod. Phys.* **17**, 2-3, 323–342 (1945). doi: [10.1103/RevModPhys.17.323](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.17.323).
- [47] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 2* (John Wiley and Sons, New York, 1971.).
- [48] P. Lévy. *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires* (Gauthier-Villars, 1927).
- [49] B. D. Hughes. *Random Walks and Random Environments: Volume 1* (Oxford University Press, 1995).
- [50] A. Einstein. Brownian Motion. *Ann. d. Physik 4° série t.* **XXI**, 371 (1905).
- [51] P. Langevin. Sur la Théorie du Mouvement Brownien. *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **146**, 530–533 (1908).
- [52] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation - Method of Solution and Applications* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989).

- [53] A. Cortines. *Dinâmica Intradiária do Mercado de Ações Brasileiro*. Tese de Mestrado, PUC, Departamento de Física - Rio de Janeiro. (2005).
- [54] S. M. Stigler. *Statistics on the Table - The History of Statistical Concepts and Methods* (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1999).
- [55] L. G. Moyan, C. Tsallis e M. Gell-Mann. Numerical Indications of a q -generalised Central Limit Theorem. *Europhys. Lett.* **73**, 813–819 (2006). doi: [10.1209/epl/i2005-10487-1](https://doi.org/10.1209/epl/i2005-10487-1).
- [56] C. H. Rycroft e M. Z. Bazant. Lecture 1: Introduction to Random Walks and Diffusion. Technical Report, Department of Mathematics, MIT (2005).
- [57] L. Bachelier. Theorie de La Especulation. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **17**, 21–86 (1900.).
- [58] E. W. Weisstein. "Random Walk–1-Dimensional". Technical Report, From MathWorld–A Wolfram Web Resource. [Walk1-Dimensional.html](http://mathworld.wolfram.com/Walk1-Dimensional.html) (2003).
- [59] A. Papoulis. *Random Walk, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, 2nd ed.* (McGraw-Hill - New York, 1984.).
- [60] A. Freking, W. Kinzel e I. Kanter. Learning and Predicting Time Series by Neural Networks. *Phys. Rev. E* **65**, 5, 050903 (2002). doi: [10.1103/PhysRevE.65.050903](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.050903).
- [61] A. Potapov e M. Ali. Neural Networks for Estimating Intrinsic Dimension. *Phys. Rev. E* **65**, 4, 046212 (2002). doi: [10.1103/PhysRevE.65.046212](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.046212).
- [62] D. Jin e H. Seung. Fast Computation with Spikes in a Recurrent Neural Network. *Phys. Rev. E* **65**, 5, 051922 (2002). doi: [10.1103/PhysRevE.65.051922](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.051922).
- [63] E. W. Weisstein. "Random Walk–2-Dimensional". Technical Report, From MathWorld–A Wolfram Web Resource. [Walk2-Dimensional.html](http://mathworld.wolfram.com/Walk2-Dimensional.html) (2003).
- [64] G. N. Watson. Three Triple Integrals. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 2* **10**, 266–276 (1939).
- [65] W. H. McCrea e F. J. W. Whipple. Random Paths in Two and Three Dimensions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **60**, 281–298 (1940).
- [66] C. Domb. On Multiple Returns in the Random-Walk Problem. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **50**, 586–59 (1954).

- [67] M. Glasser. e I. Zucker. Extended Watson Integrals for the Cubic Lattices. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A **74**, 1800–1801 (1977).
- [68] E. Montroll. Random Walks in Multidimensional Spaces, Especially on Periodic Lattices. J. SIAM **4**, 241–260 (1956).
- [69] S. Finch. *Pólya's Random Walk Constant* (Cambridge University Press, 2003.).
- [70] J. Borwein e D. Bailey. *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century* (Wellesley, 2003).
- [71] R. N. Mantegna e H. E. Stanley. Scaling Behaviour in the Dynamics of an Economic Index. Nature **376**, 46–49 (1995).
- [72] B. Mandelbrot. The Variation of Certain Speculative Prices. J. Business **36**, 394–419 (1963.).
- [73] J. R. Krebs. *Behavioral Aspects of Predation, in Perspectives in Ethology* (Plenum Press, New York, 1973).
- [74] T. Royama. Factors Governing the Hunting Behavior and Selection of Food by the Great Tit. J. Anim. Ecol. **39**, 619–668 (1970).
- [75] Wikipédia. Heurística - Wikipédia, a Enciclopédia Livre (2008). [Online - 2008].
- [76] M. C. Santos, D. Boyer, O. Miramontes, G. M. Viswanathan, E. P. Raposo, J. L. Mateos e M. G. E. da luz. Origin of Power-law Distributions in Deterministic Walks: the Influence Landscape Geometry. Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics) **75**, 1 (2007).
- [77] M. Shlesinger, G. M. Zaslavsky e J. Klafter. Strange Kinetics. Nature **363**, 31 (1993). doi: [10.1038/363031a0](https://doi.org/10.1038/363031a0).
- [78] C. Tsallis, S. V. F. Levy, A. Souza e R. Maynard. Statistical-Mechanical Foundation of the Ubiquity of the Lévy Distributions in Nature. Phys. Rev. Lett. **77**, 27, 5442 (1996). doi: [10.1103/PhysRevLett.77.5442](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.5442).
- [79] C. Tsallis, S. V. F. Levy, A. Souza e R. Maynard. Statistical-Mechanical Foundation of the Ubiquity of Lévy Distributions in Nature. Phys. Rev. Lett. **75**, 20, 3589–3593 (1995). doi: [10.1103/PhysRevLett.75.3589](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.3589).
- [80] M. F. Shlesinger e J. Klafter. Comment on "Accelerated Diffusion in Josephson Junctions and Related Chaotic Systems". Phys. Rev. Lett. **54**, 23, 2551 (1985). doi: [10.1103/PhysRevLett.54.2551](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.54.2551).

- [81] R. Kurtner. *Solid State Ionics* **119**, 84 (1999).
- [82] R. Kutne. Hierarchical Spatio-temporal Coupling in Fractional Wanderings. I. Continuous-time Weierstrass Flights. *Physica A* **264**, 84 (1999).
- [83] S. Buldyrev (1998). Preprint.
- [84] P. Drysdale. e P. Robinson. Lévy Random Walks in Finite Systems. *Phys. Rev. E* **58**, 5, 5382–5394 (1998). doi: [10.1103/PhysRevE.58.5382](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.58.5382).
- [85] G. Berkolaiko e S. Havlin. Territory Covered by N Lévy Flights on d-dimensional Lattices. *Phys. Rev. E* **55**, 2, 1395–1400 (1997). doi: [10.1103/PhysRevE.55.1395](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.55.1395).
- [86] G. Berkolaiko, S. Havlin, H. Larralde. e G. H. Weiss. Expected Number of Distinct Sites Visited by N Lévy Flights on a One-dimensional Lattice. *Phys. Rev. E* **53**, 6, 5774–5778 (1996). doi: [10.1103/PhysRevE.53.5774](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.53.5774).
- [87] H. Larralde, P. Trunfio, S. Havlin, H. Stanley e G. H. Weiss. Number of Distinct Sites Visited by N Random Walkers. *Phys. Rev. A* **45**, 10, 7128–7138 (1992). doi: [10.1103/PhysRevA.45.7128](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.7128).
- [88] H. Larralde, P. Trunfio, S. Havlin, H. Stanley e G. Eeiss. Territory Covered by N Diffusing Particles. *Nature* **355**, 423 (2002). doi: [10.1038/355423a0](https://doi.org/10.1038/355423a0).
- [89] H. Szu. *Dynamic Patterns in Complex Systems* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [90] M. Smington. *Ecological and Social Correlates of Party Size in the Black Spider Monkey, Ateles Paniscus Chamek*. Tese de Doutorado, Princeton University (1987).
- [91] E. W. Seabloom e O. J. Reichman. Simulation Models of the Interaction Between Herbivore Strategies, Social Behavior and Plant Community Dynamics. *Ann. Nat.* **157**, 76–96 (2001).
- [92] J. M. Kleinberg. Navigation in a Small World. *Nature - Brief Communications* **406**, 845 (2000). doi: [10.1038/35022643](https://doi.org/10.1038/35022643).
- [93] R. N. Mantegna e H. Stanley. Stochastic Process with Ultraslow Convergence to a Gaussian: The Truncated Lévy Flight. *Phys. Rev. Lett.* **73**, 22, 2946–2949 (1994). doi: [10.1103/PhysRevLett.73.2946](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.2946).
- [94] L. Pauling. *J. Chem. Phys.* **4**, 673 (1936).
- [95] J. R. Platt. *J. Chem. Phys.* **17** (1949).

- [96] K. Ruedenberg e C. W. Scherr. *J. Chem. Phys.* **21**, 1565 (1953).
- [97] C. A. Coulson. *Proc. Phys. Soc.* **67**, 608 (1954).
- [98] E. W. Montroll. *J. Math. Phys.* **11**, 635 (1970).
- [99] M. J. Richardson e N. L. Balazs. *Ann. Phys.* **73**, 308 (1972).
- [100] D. N. Beratan, J. N. Betts e J. N. Onuchic. *Science* **252**, 1285 (1991).
- [101] K. C. Kao e W. Hwang. *Electrical Transport in Solids* (Oxford: Pergamon, Oxford, 1981).
- [102] M. N. Kobrak e E. R. Bittner. *Phys. Rev. B* **62**, 11473 (2000).
- [103] J. A. Freire, M. G. E. da Luz, D. Ma e I. A. Hummelgen. *Appl. Phys. Lett.* **77**, 693 (2000).
- [104] S. Alexander. *Phys. Rev. B* **27**, 1541 (1985).
- [105] P. W. Anderson. *Phys. Rev. B* **23**, 4828 (1981).
- [106] B. Shapiro. *Phys. Rev. Lett.* **48**, 823 (1982).
- [107] R. Klesse e M. Metzler. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 721 (1997).
- [108] J. Vidal, G. Montambaux e B. Doucot. *Phys. Rev. B* **62**, R16294 (2000).
- [109] P. Exner. *J. Phys. A* **29**, 87 (1996).
- [110] Y. Avishal e J. M. Luck. *Phys. Rev. B* **45**, 1074 (1992).
- [111] O. Hul, S. Bauch, P. Pakoński, N. Savytskyy, K. Życzkowski e L. Sirko. *Phys. Rev. E* **69**, 056220 (2004).



Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Física

Dissertação de Mestrado

Autor

Marcos Cesar Santos

<marcos.santos@fisux.org>

<http://lattes.cnpq.br/6045589501291384>

Título da Dissertação

“Busca Markoviana Super Difusiva: Origens e Relevância das Leis de Potência”

Orientador

Prof. Dr. Marcos Gomes Eleutério da Luz

<luz@fisica.ufpr.br>

<http://lattes.cnpq.br/2883331787707769>

Curso de Pós-graduação em Física

Caixa Postal 19044, CEP 81531-990, Curitiba-PR. Brasil

Fone/Fax: +55-41-33613096 / +55-41-33613418

E-mail: posgrad@fisica.ufpr.br

URL: <http://fisica.ufpr.br/posgrad>

Defesa Realizada em 27/02/2008 - Membros da Banca

Prof. Dr. Marcos Gomes Eleutério da Luz (orientador - presidente)

Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer (UFPR)

Prof. Dr. Wagner Figueiredo (UFSC)

Template \LaTeX THESIS

THESIS © Copyright 2008-2009. FISUX Group <http://fisica.ufpr.br/fisux/> - <contato@fisux.org>