

PAULO CESAR RECH

**Bifurcação, Multiestabilidade e
Sincronização em Sistemas
Dinâmicos Discretos**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física,
Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Pa-
raná, como requisito parcial à obtenção do grau de Dou-
tor em Ciências

Orientador: Prof. Dr. Jason Alfredo Carlson Gallas

Curitiba

2005

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

PARECER

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Defesa Tese de Doutorado do estudante **Paulo Cesar Rech**, são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Tese cujo título foi *Bifurcações, Multiestabilidade e Sincronização em Sistemas Dinâmicos Discretos*.

Curitiba, 13 de abril de 2005.

Prof. JASON ALFREDO CARLSON GALLAS
(Orientador/Presidente) (UFRGS)

Prof. FELIPE BARBEDO RIZZATO
(UFRGS)

Prof. JOSÉ CARLOS SARTORELLI (USP)

Prof. RICARDO LUIZ VIANA
(UFPR)

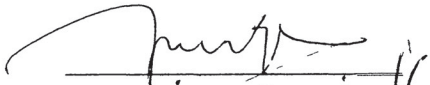
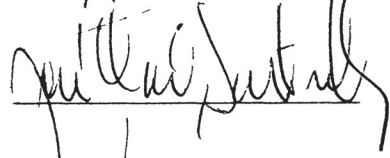
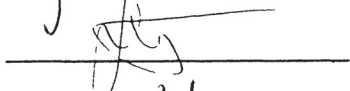


Prof. GILBERTO MEDEIROS KREMER
(UFPR)

DEFESA DE TESE DE DOUTORADO

PAULO CÉSAR RECH

TITULO: “BIFURCAÇÕES, MULTIESTABILIDADE E SINCRONIZAÇÃO EM SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS”.

Em sessão publica iniciada as quatorze horas, nesta data, apos um Seminario sob o titulo acima, e posterior arguição esta banca examinadora decidiu atribuir ao candidato o conceito global A

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. JASON ALFREDO CARLSON GALLAS (Orientador/UFRGS)		<u>A</u>
Prof. JOSE CARLOS SARTORELLI (USP)		<u>A</u>
Prof. FELIPE BARBEDO RIZZATO (UFRGS)		<u>A</u>
Prof. RICARDO LUIZ VIANA (UFPR)		<u>A</u>
Prof. GILBERTO MEDEIROS KREMER (UFPR)		<u>A</u>

Curitiba, 13 de abril de 2005

Resumo

Neste trabalho fazemos o estudo de três problemas atuais de grande impacto em dinâmica não linear envolvendo sistemas multidimensionais, conforme discutido no capítulo 1 a título de introdução. No capítulo 2 apresentamos resultados da investigação numérica da evolução do tamanho das bacias de atração, ao longo de algumas linhas especiais no espaço de parâmetros, para um modelo paradigmático de sistema multidimensional com dissipação, o mapa de Hénon. O principal resultado obtido revela que o tamanho de uma bacia de atração diminui rapidamente quando passamos do limite dissipativo para o conservativo, sendo este comportamento bastante bem representado por curvas gaussianas, independentemente do período. No capítulo 3 estudamos um sistema composto por dois mapas quadráticos idênticos acoplados linearmente. O objetivo é mostrar que tal sistema genérico exibe movimento quase-periódico, a partir de uma bifurcação de Naimark-Sacker de órbitas periódicas que acontecem fora da linha diagonal. Mostramos isto analiticamente para uma órbita de período 2, usando análise de estabilidade linear e método de formas normais. Estes resultados foram também corroborados numericamente, utilizando gráficos no espaço de fase, expoentes de Lyapunov e diagramas de bifurcação. No capítulo 4 utilizamos o mesmo modelo do capítulo anterior para mostrar que a perda de estabilidade do atrator caótico sincronizado, cujo subespaço invariante do espaço de fase xy é a diagonal $y = x$, tem início com a bifurcação de órbitas periódicas tipo sela imersas no próprio atrator. Curvas de desestabilização transversal no espaço de parâmetros foram obtidas para órbitas de períodos mais baixos, algumas analiticamente. Finalmente, no capítulo 5 apresentamos nossas conclusões.

Abstract

In this work we study three actual problems of great impact in nonlinear dynamics involving multidimensional systems, as discussed in the introduction presented in chapter 1. In chapter 2 we present results for the numerical investigation of the basins of attraction size evolution, along some special lines in the parameter space, for a paradigmatic model of multidimensional system with dissipation, namely, the Hénon map. The main result obtained shows that basin sizes shrink faster as the conservative limit is approached, being well approximated by Gaussian profiles, independently of the period. In chapter 3, we study a system composed by two linearly coupled identical quadratic maps. The goal is to show that this generic system displays quasiperiodic motion which is born from a Naimark-Sacker bifurcation of a non-diagonal periodic orbit. This is shown analytically for a period 2 orbit, using linear stability analysis and normal forms approach. These results were also numerically corroborated, using phase space portraits, Lyapunov exponents, and bifurcation diagrams. In chapter 4 we utilize the same model of chapter 3 to show that the loss of stability of the synchronized chaotic attractor, whose invariant subspace of the phase space xy is the $y = x$ diagonal, begins with the bifurcation of saddle periodic orbits embedded in the attractor itself. Transverse destabilization curves in parameter space are derived for low periodic orbits, some of them analytically. Finally, in chapter 5, conclusions are presented.

Agradecimentos

Faço abaixo um agradecimento especial à algumas pessoas e entidades que tiveram participação neste trabalho

Professor Marcus Werner Beims
Professor Jason Alfredo Carlson Gallas
(meus orientadores)

CAPES
(pela bolsa de estudos)

UDESC
(pela licença concedida)

UFPR
(em especial ao Departamento de Física)

Liliane, Amanda, Ana Paula e Rafael
(minha esposa e meus filhos)

Conteúdo

1	Introdução	7
2	Evolução das Bacias de Atração do Mapa de Hénon	10
2.1	Objetivo	10
2.2	Metodologia	13
2.3	Resultados	17
2.3.1	Variação de volume das bacias de atração	17
2.3.2	Abundância de multiestabilidade	24
3	A Bifurcação de Naimark-Sacker em Dois Mapas Quadráticos Aco-	
	plados	28
3.1	Objetivo	29
3.2	Metodologia	29
3.3	Resultados	31
3.3.1	Resultados Analíticos	31
3.3.2	Resultados Numéricos	40
3.3.3	Formas Normais	46
4	Perda de Sincronização Caótica em Dois Mapas Quadráticos Aco-	
	plados	55
4.1	Objetivo	56
4.2	Metodologia	56
4.3	Resultados	58
4.3.1	Bifurcação da órbita C^0	60
4.3.2	Bifurcação da órbita $2C^0$	61
4.3.3	Bifurcação da órbita $4C^0$	63

4.3.4	Bifurcação da órbita $6C^0$	65
4.3.5	Discussão dos Resultados	67
5	Conclusões	73
	Bibliografia	75

Capítulo 1

Introdução

Multiestabilidade é o nome dado para a coexistência de vários estados de equilíbrio dinâmico para um mesmo conjunto de parâmetros. Tais estados podem tanto ser caóticos, quanto regulares (periódicos). Como consequência da multiestabilidade, mudanças qualitativas na dinâmica do sistema podem resultar de mudanças nas condições iniciais. Multiestabilidade foi observada em vários sistemas, dentre os quais lasers [1], sistemas mecânicos [2], sistemas biológicos [3], além de também em alguns modelos padrão, como o oscilador de Duffing [4] e o mapa de Hénon [5]. Estudos recentes mostram que multiestabilidade é uma propriedade que pode ser explorada numa grande variedade de modos, em muitos campos da ciência. Multiestabilidade pode ser induzida, ou suprimida, por perturbações periódicas fracas [6, 7, 8], numa grande classe de sistemas não lineares que apresentam rota para o caos por dobramento de período. A emergência de multiestabilidade pode ser controlada e limitada [9, 10, 11]. É possível, por exemplo, estabilizar um sistema multiestável num atrator desejado [9]. O fenômeno da preferência de atratores induzida por ruído, assim como a detecção de estados de múltipla estabilidade foram também investigados [12]. Fundamental para todos os procedimentos de estabilização de sistemas não lineares é o conhecimento detalhado da estrutura e extensão das bacias de atração no espaço de fase. Por exemplo, um espaço de fase crivado (*em inglês riddled*) restringe severamente qualquer possibilidade de estabilização, e é propenso a bifurcações catastróficas de bacia crivada para bacia fractal [13, 14]. Esta restrição é particularmente severa em sistemas acoplados [15, 16]. Multiestabilidades no mapa de Hénon, que é um dos sistemas mais simples entre os que possuem a propriedade, é um dos assuntos tratados no Capítulo 2.

Embora a teoria de bifurcações seja um tema com origens matemáticas clássicas, por exemplo nos trabalhos de Euler no século XVIII, o termo bifurcação foi primeiro utilizado por Poincaré, no final do século XIX, para descrever a separação (*em inglês splitting*) das soluções de equilíbrio numa família de equações diferenciais. Qualquer sistema dinâmico que descreva um sistema físico real depende de parâmetros, os chamados parâmetros de controle. Um sistema dinâmico, portanto, além de ser função do tempo, pode ser pensado como sendo função também desses parâmetros. De fato, o comportamento dinâmico de um sistema pode ser bastante modificado se parâmetros são alterados. Uma bifurcação acontece quando há uma mudança qualitativa no comportamento de um sistema dinâmico, associada com mudanças nos parâmetros. Matrizes jacobianas também acabam dependentes de parâmetros e, em consequência, os autovalores e autovetores associados. Como sabido [4], a estabilidade de um ponto fixo de um mapa depende dos autovalores da matriz jacobiana. Autovalores $+1$ e -1 são característicos das cascatas de bifurcação por duplicação de período, enquanto um par de autovalores complexos, de módulo 1, caracteriza uma bifurcação de Naimark-Sacker, na qual uma curva fechada invariante emerge de um ponto fixo de um sistema discreto, conforme um parâmetro varia. A bifurcação de Naimark-Sacker tem sido observada em várias aplicações, como por exemplo na biologia [17], quando se considera modelos em que gerações passadas podem afetar taxas de crescimento de populações, em virtude de mudanças na qualidade do *habitat*, entre outros motivos. Outros exemplos de aplicação vem da mecânica dos fluidos, num estudo experimental de um fluxo periodicamente forçado [18], e da economia, onde a bifurcação de Naimark-Sacker aparece em modelos de economia monetária [19]. A bifurcação de Naimark-Sacker é o assunto principal do Capítulo 3, sendo estudada num acoplamento particular de dois mapas quadráticos idênticos.

A análise de fenômenos de sincronização na evolução de sistemas dinâmicos, iniciou-se no século XVII com a descoberta de Christian Huygens, de que dois pêndulos de relógio, muito fracamente acoplados, tornavam-se sincronizados em fase. Mais recentemente, desde o final da última década do século passado, a busca por sincronização moveu-se para sistemas caóticos. Fenômenos relacionados com a sincronização de sistemas caóticos acoplados [20], assim como os mecanismos que levam à perda de sincronização caótica, têm atraído muito interesse desde então. A importância do fenômeno de sincronização caótica, reside no fato de o mesmo ser observável em muitos sistemas físicos reais, como por exemplo, sistemas elétricos

[21], sistemas de lasers [22], sistemas biológicos [23] e junções Josephson [24]. Sincronização caótica também é de interesse, por exemplo, em conexão com o desenvolvimento de novos tipos de técnicas de comunicação, as quais exploram a possibilidade de mascarar uma mensagem, misturando-a com um sinal caótico [25]. Perda de Sincronização caótica num sistema de dois mapas quadráticos idênticos acoplados linearmente é assunto do Capítulo 4.

Capítulo 2

Evolução das Bacias de Atração do Mapa de Hénon

Neste capítulo investigamos numericamente a evolução do tamanho das bacias de atração do mapa de Hénon, quando parâmetros são variados entre os limites para os quais o mapa tem comportamento dissipativo. Mostramos que o volume das bacias diminui rapidamente, conforme nos aproximamos do limite conservativo, sendo as curvas representativas bem aproximadas por curvas gaussianas, independentemente do período. Mostramos também que, para uma mesma cascata de bifurcações, o volume das bacias de atração permanece constante à medida que as bifurcações vão acontecendo, quando calculado ao longo de uma linha peculiar no espaço de parâmetros. Esta é a linha que permite determinar o parâmetro de dissipação do mapa, utilizando apenas propriedades métricas de estruturas auto-similares no espaço de fase. Os resultados aqui apresentados foram publicados em um congresso na Suíça [26], e mais recentemente na revista *Physical Review E* [27].

2.1 Objetivo

É bem sabido que os sistemas dinâmicos usualmente encontrados na física possuem regiões no espaço de parâmetros caracterizadas por permitirem a coexistência de vários movimentos estáveis, periódicos ou não, cada qual possuindo uma bacia de atração com um certo volume. Tal coexistência tem sido explorada na literatura já há vários anos. Entretanto, tanto quanto sabemos, são raros os estudos sistemáticos sobre a variação do volume de bacias de atração. Exceções são os trabalhos das

Refs. [28] e [29]. Na Ref. [28] os autores usam o método de Newton para mostrar, entre outros resultados, que a área da bacia de atração de um ponto de sela periódico é proporcional à magnitude do autovalor instável associado à órbita respectiva, enquanto na Ref. [29] é estudada a evolução de uma bacia de atração na presença de outras bacias coexistentes, desde o nascimento até a morte. Ambos os trabalhos são referentes ao mapa de Hénon.

Para começar, observe-se que embora a existência de bacias de atração seja fácil de se perceber, a delimitação de tais bacias é um problema para o qual ainda não existe método analítico para tratar, a não ser através de uma determinação numérica explícita. Bacias de atração podem tanto ser formadas por uma região conectada no espaço de fase como por uma união de regiões desconectadas entre si. Também não se conhece qualquer método que permita antecipar sob quais circunstâncias as bacias serão ou não formadas por uma única região ou por um conjunto desconectado de regiões.

O objetivo específico deste trabalho é estudar o volume relativo das bacias de atração para o mapa de Hénon, o qual é definido pelas equações

$$x_{t+1} = a - x_t^2 + by_t, \quad (2.1)$$

$$y_{t+1} = x_t, \quad (2.2)$$

onde x_t e y_t são as variáveis, a e b são os parâmetros, e t é o tempo discreto.

Por volume de bacia de atração de um atrator, entendemos o conjunto de pontos condições iniciais, cujas trajetórias são levadas para o próprio atrator, após um transiente suficientemente longo.

Para estudar o volume das bacias de atração do mapa de Hénon, escolhemos algumas linhas especiais no espaço de parâmetros, e realizamos dois tipos de investigação:

- como o volume das bacias varia ao longo das linhas;
- como varia a abundância de multiestabilidade ao longo das linhas.

Estes estudos prospectivos são de importância não apenas para mapear a densidade de condições iniciais que levam a comportamentos determinados mas, sobretudo, para permitir verificar a existência ou não de relações de escala, em função dos parâmetros. Existem muitas aplicações que dependem de um conhecimento detalhado da variação do volume das bacias de atração em função dos parâmetros.

Um exemplo é o estudo da convecção oceânica modelada com mapas discretos bi ou multiestáveis [30].

De particular interesse é saber como varia o volume da bacia de atração, conforme vão acontecendo as bifurcações para a cascata 1×2^n . Começamos com a bacia de atração correspondente ao ponto fixo estável. Tal bacia nasce ao longo da linha

$$a = -\frac{1}{4}(1 - b)^2, \quad (2.3)$$

e desaparece ao longo da linha onde existe nascimento da órbita estável de período 2, a saber,

$$a = \frac{3}{4}(b^2 - 2b + 1). \quad (2.4)$$

Para derivação analítica das linhas de nascimento das órbitas de períodos 1 e 2 acima colocadas, fazemos $x_{t+1} = x_t = x$ e $y_{t+1} = y_t = y$ nas Eqs. (2.1) e (2.2) para obter

$$x^2 - (b - 1)x - a = 0. \quad (2.5)$$

Usamos também a equação de autovalores $|J - \lambda I| = 0$, onde J é a matriz jacobiana do mapa de Hénon, I é a matriz identidade e λ o autovalor, para obter

$$2\lambda x + \lambda^2 - b = 0. \quad (2.6)$$

Eliminando x entre as Eqs. (2.5) e (2.6), e fazendo $\lambda = 1$ ganhamos a equação para a curva de nascimento da órbita estável de período 1, a Eq. (2.3). De maneira alternativa, se fizermos $\lambda = -1$ após a eliminação de x , ganharemos a equação para a curva onde nasce a órbita estável de período 2, a Eq. (2.4). Esta órbita estável de período 2 desaparece ao longo da linha de nascimento da órbita estável de período 4, dada por

$$a = \frac{5}{4}(b^2 - \frac{6}{5}b + 1), \quad (2.7)$$

cujas obtenção é feita de maneira análoga a descrita acima para períodos 1 e 2.

Também de interesse é a investigação da variação do volume de bacias de atração, bem como a quantidade delas, ao longo do caminho de autovalores, que é uma linha a partir da qual é possível calcular valores numéricos de parâmetros que regem a dinâmica do sistema [31, 32]. Tal linha é obtida a partir da matriz jacobiana do sistema, relacionando duas quantidades independentes que controlam a dinâmica: i) o autovalor de maior magnitude e, ii) o determinante da matriz jacobiana. Na seqüência procedemos a derivação analítica do caminho de autovalores

para o mapa de Hénon. A taxa de dissipação é dada pelo determinante da matriz jacobiana, $J = -b$. Os autovalores associados à órbita do ponto fixo instável (x_u, x_u) são

$$\lambda_{\pm} = -x_u \pm (x_u^2 + b)^{1/2}, \quad (2.8)$$

onde

$$x_u = \frac{1}{2}\{b - 1 - [(b - 1)^2 + 4a]^{1/2}\}. \quad (2.9)$$

Substituindo x_u da Eq. (2.9) na Eq. (2.8), conseguimos uma expressão para o autovalor de maior magnitude, λ_+ , que depende apenas de a e b . Finalmente, substituindo esta última expressão obtida para λ_+ na equação

$$\lambda_+ = \frac{1}{J} = -\frac{1}{b}, \quad (2.10)$$

cuja igualdade da esquerda é uma condição imposta por nós, e que na da direita relaciona contração de volume no espaço de fase com a dissipação, após alguma álgebra obtemos a seguinte expressão para o caminho de autovalores:

$$W(a, b) = 4ab^2 - (b^2 + b + 1)(b^2 + 3b + 1)(b - 1)^2 = 0. \quad (2.11)$$

2.2 Metodologia

Conforme explicitado na seção 2.1, dois tipos de estudos estão sendo considerados neste trabalho: i) um, que se refere a variação de volume de bacias de atração, e outro, ii) que se refere a abundância de multiestabilidade. O método utilizado, que é o mesmo para ambos os estudos, descrevemos abaixo.

Na Fig. 2.1 vemos o espaço de parâmetros do mapa de Hénon, com destaque para as linhas onde nascem os movimentos de períodos 1, 2, 3 e 4. Também são mostradas as porções superior, U, e inferior, L, da linha caminho de autovalores, bem como as linhas tracejadas $b = 1$ e $b = -1$, as quais delimitam a região física do mapa. Nosso estudo sobre variação de volume de bacias de atração foi realizado nesta região, e consistiu em (i) andar sobre cada uma das linhas de nascimento de movimentos periódicos da cascata 1×2^n , medindo, de tempos em tempos, o volume da bacia respectiva no espaço de fase e, (ii) andar sobre a linha caminho de autovalores, medindo o volume das bacias de atração de todos movimentos periódicos detectados. Mais precisamente, o que fizemos foi considerar pares de valores (a, b) sobre a linha 1 da Fig. 2.1 e estudar a variação do volume da bacia de atração das

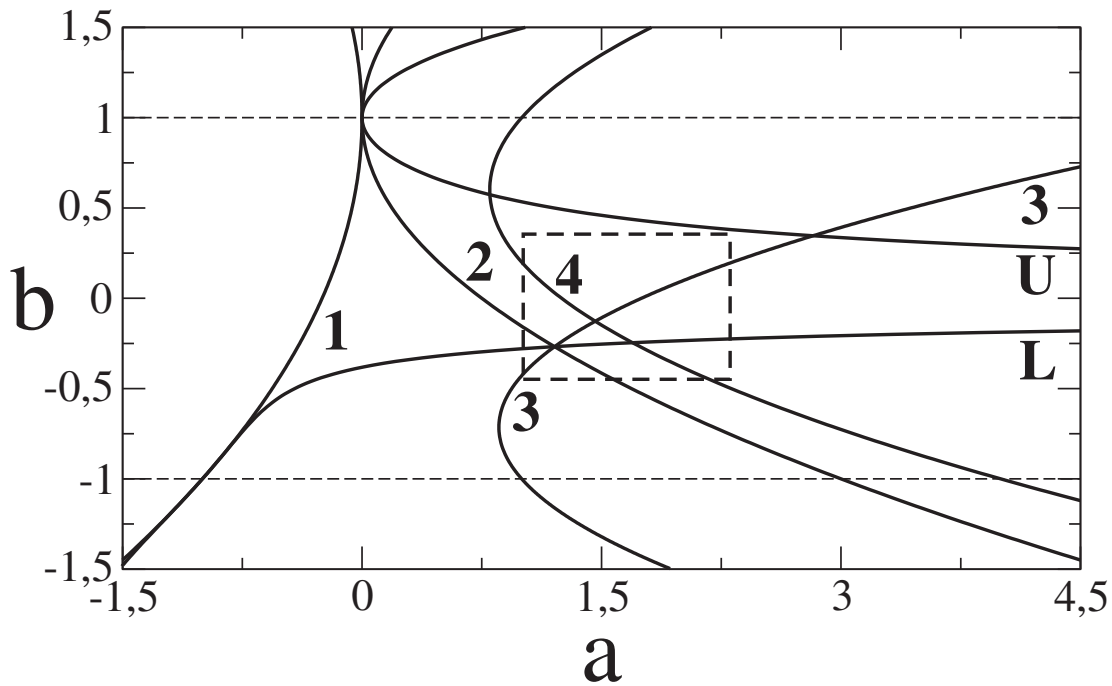


Fig. 2.1: Visão esquemática das fronteiras entre regiões de estabilidade. Números indicam locais de bifurcações: 1 e 3 indicam bifurcações sela-nó, 2 indica a bifurcação $1 \rightarrow 2$, enquanto 4 indica a bifurcação $2 \rightarrow 4$. U(L) é o ramo superior(inferior) da linha caminho de autovalores (ver o texto). As linhas tracejadas limitam a região em que o sistema é dissipativo. A caixa retangular aparece ampliada na Fig. 2.2

órbitas de período 1, para $-1 \leq b \leq 1$. Mesmo procedimento para a linha 2(4) no que se refere a período 2(4). No caso da linha caminho de autovalores, o interesse residiu nas medidas de volume de todas as bacias de atração detectadas ao longo da linha.

Na Fig. 2.2 vemos uma ampliação da região interna à caixa retangular da Fig. 2.1. É um exemplo do que pode ser entendido como uma generalização dos conhecidos diagramas de bifurcação. Como sabido, um diagrama de bifurcação de um sistema genérico tipo

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}_\lambda(\mathbf{x}_t),$$

onde λ representa coletivamente um ou vários parâmetros, é um gráfico de uma

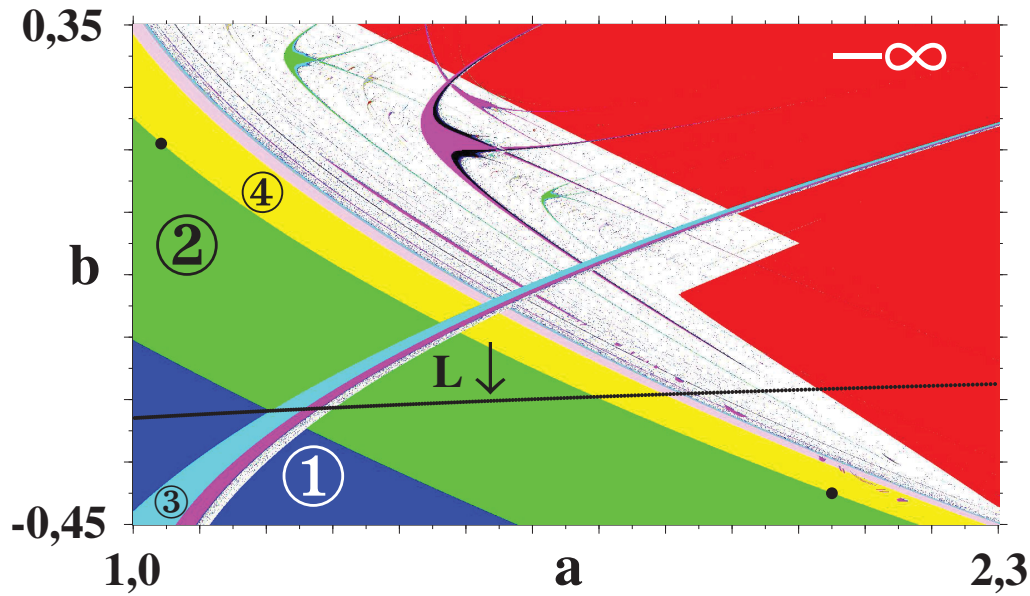


Fig. 2.2: Diagrama de fases mostrando a alternância complicada de domínios de estabilidade nas imediações do ramo L do caminho de autovalores $W(a, b) = 0$. Cores diferentes representam períodos diferentes. Os números indicam a periodicidade do domínio adjacente. Branco representa caos. A grande região vermelha à direita é a do atrator localizado no infinito.

componente x_t , como função de um dos parâmetros λ . Embora os diagramas de bifurcação de sistemas dinâmicos unidimensionais sejam gráficos de uma das variáveis em função de um parâmetro, a informação que é realmente de interesse neles é o número de diferentes ramos que aparecem como função de um dos parâmetros λ , ou, noutras palavras, a periodicidade como função de λ . Se usarmos diferentes símbolos, por exemplo, diferentes tonalidades de cores para representar diferentes períodos, a informação contida no eixo dos x pode ser comprimida numa única linha. Isto quer dizer que, usando cores, a informação contida em diagramas de bifurcação bidimensionais pode ser totalmente compactada numa linha unidimensional policromática. Portanto, na Fig 2.2, que é um exemplo de um diagrama isoperiódico, aparecem regiões limitadas do plano ab , com $1,0 \leq a \leq 2,3$ e $-0,45 \leq b \leq 0,35$, cujas diferentes cores significam diferentes periodicidades. Assim, cada ponto (a, b) da figura foi colorido de acordo com a periodicidade encontrada. Para tal, os cálculos (iterações) foram iniciados com as Eqs. (2.1) e (2.2), para uma dada condição inicial (x_0, y_0) , sendo determinada a periodicidade após um número conveniente de pré iteradas (no

caso igual a 2000) para eliminar eventuais transientes. Na Fig. 2.2 também aparece uma linha preta, que passa pelo ponto $(1, 0, -0,2815)$, e que é o ramo inferior da linha caminho de autovalores.

Nosso estudo de multiestabilidade para o sistema Hénon consistiu em seguir a linha caminho de autovalores e fazer uma estatística dos diferentes atratores existentes no espaço de fase, para $-0,286 \leq b \leq -0,206$.

A Fig. 2.3 mostra formas e volumes de bacias de atração típicas para parâmetros representativos localizados ao longo da linha de nascimento das órbitas de período 4. Como se pode ver nas figuras, as bacias são bastante pequenas próximas do limite

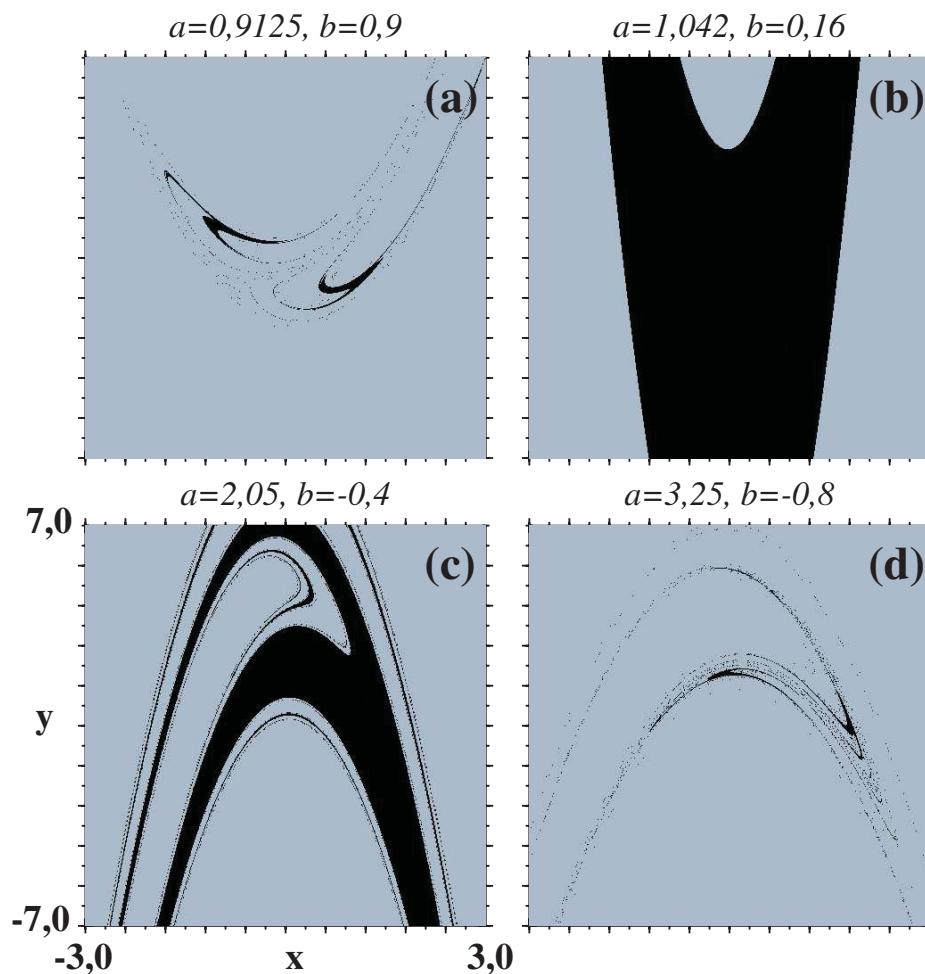


Fig. 2.3: Bacias ilustrativas calculadas para quatro diferentes conjuntos de parâmetros localizados ao longo da linha de bifurcação $2 \rightarrow 4$. Cinza indica a bacia do infinito e preto a bacia do movimento periódico. A escala mostrada aplica-se a todas as figuras.

conservativo $|b| \rightarrow 1$, o que é claramente mostrado pelas Figs. 2.3(a) e 2.3(d), embora

$b = -0,8$ e $b = 0,9$ ainda estejam longe do limite conservativo $|b| = 1$. Volumes de bacias são máximos para pontos próximos de $b = 0$. As duas figuras com regiões pretas maiores foram geradas para os parâmetros indicados pelos pontos pretos sobre a linha $2 \rightarrow 4$ da Fig. 2.2.

Todos os resultados que apresentaremos na seqüência consideraram a região do espaço de fase dentro da janela

$$-2,5 \leq x \leq 2,5 \quad \text{e} \quad -11,0 \leq y \leq 11,0,$$

discretizada com uma resolução de $100 \times 100 = 10^4$ pontos, ou seja, com um total de pontos condições iniciais (x_0, y_0) igual a 10^4 .

2.3 Resultados

Para maior clareza, vamos separar os resultados do estudo dos volumes das bacias de atração, daqueles para a multiestabilidade, em duas seções.

2.3.1 Variação de volume das bacias de atração

Como já colocado, a região de interesse no espaço de parâmetros foi a limitada entre $b = -1$ e $b = +1$. Nesta região, consideramos não apenas três das linhas que aparecem na Fig. 2.1, a saber: i) a linha 1, de nascimento das órbitas de período 1, ii) a linha 2, onde acontece a bifurcação $1 \rightarrow 2$ e, iii) a linha 4, da bifurcação $2 \rightarrow 4$, mas também linhas de nascimento de órbitas de períodos maiores para a cascata 1×2^n , até período 256, estas últimas determinadas numericamente. Cada uma dessas nove linhas foi percorrida, separadamente, desde $b = -1$ até $b = +1$, com passo igual a 10^{-3} , o que significa dizer que consideramos 2000 pontos (a, b) sobre cada uma delas. Para cada um desses pontos (a, b) , sobre cada uma das nove linhas, calculamos o número de pontos condições iniciais (x_0, y_0) que foi levado para o respectivo atrator no espaço de fase.

Em cada um dos gráficos da Fig. 2.4 aparece a fração não divergente das 10^4 condições iniciais, para dissipação b entre $-0,85$ e $0,85$, medida ao longo da linha da bifurcação sela-nó $0 \rightarrow 1$ [gráfico (a)], ao longo da linha em que acontece a bifurcação $1 \rightarrow 2$ [gráfico (b)], etc. Observamos que, independentemente do período, o volume tende a zero quando $b \rightarrow \pm 1$, assumindo valor máximo quando $b \rightarrow 0$.

Como já dito, o modelo representa um sistema dissipativo para $|b| < 1$. Ainda em relação a Fig. 2.4, observamos que cada um dos gráficos apresenta algumas poucas descontinuidades abruptas, as quais indicam domínios onde acontece multiestabilidade. Quando os volumes de todos os períodos coexistentes são somados, tais descontinuidades desaparecem.

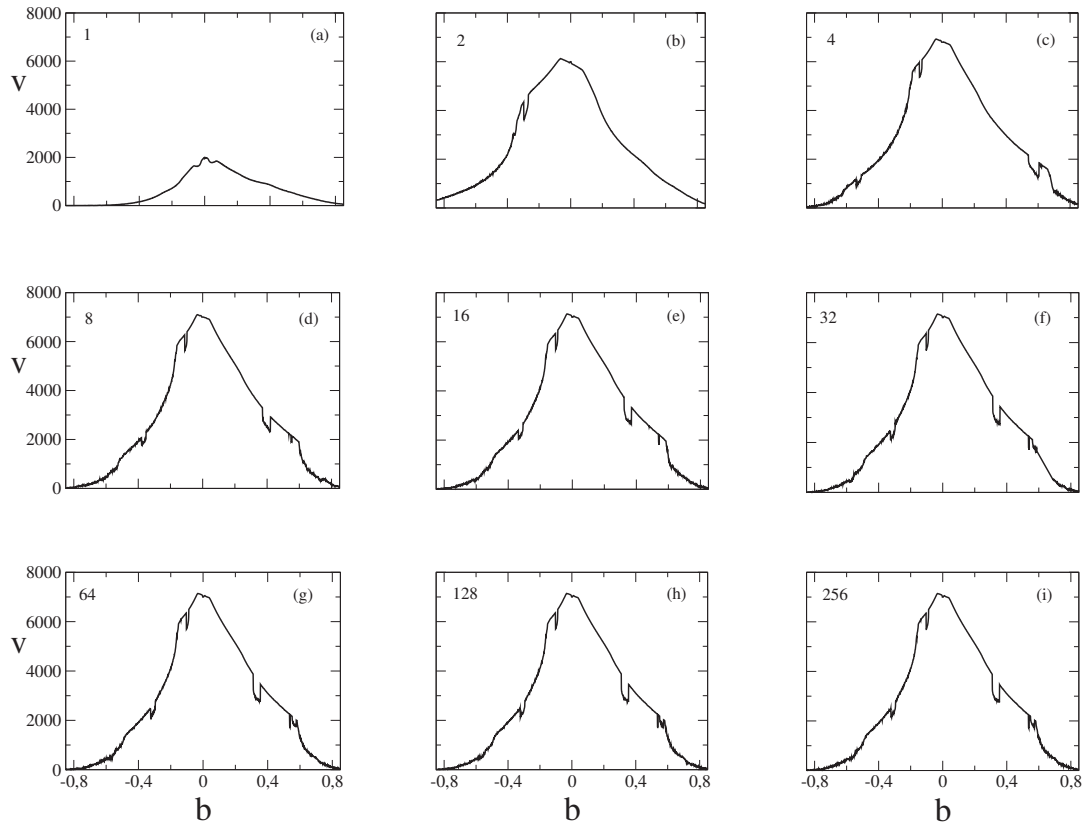


Fig. 2.4: Curvas mostrando a variação de volume das nove bacias de atração correspondentes aos nove mais baixos períodos da cascata 1×2^n , em função do parâmetro de dissipação. O número anotado no canto superior esquerdo de cada um dos gráficos significa período.

No caso da Fig. 2.4(a), que mostra a variação do volume da bacia de atração do ponto fixo, em função do parâmetro de dissipação b , as duas descontinuidades acontecem por conta de aumento (diminuição) na quantidade de pontos condições iniciais que levam o sistema para $-\infty$ na região de crescimento (decréscimo) da curva. Este aumento (diminuição) de volume na bacia do $-\infty$ acontece em virtude de diminuição (aumento) do volume da bacia do atrator do ponto fixo. A única descontinuidade que aparece na curva da Fig. 2.4(b), curva esta que representa a

variação no volume da bacia de atração do atrator de período 2, em função de b , é devida ao surgimento de uma cascata 3×2^n no local. Detectamos períodos 3, 6 e caos, na região. As discontinuidades presentes nos outros gráficos da Fig. 2.4, também tem explicação no surgimento de uma cascata 3×2^n , mas não só nisso. Adicionalmente surgem também cascatas de períodos iniciais maiores, tipo 5×2^n e 9×2^n . Foram observados períodos 3, 6, 9, 12, 18, 20, 24, 36, 48 e 96, entre outros, e caos.

Outros valores de passo foram considerados, diferentes de 10^{-3} , o que fez com que utilizássemos valores diferentes para o número de pontos considerados na confecção dos gráficos da Fig. 2.4. Tais valores, efetivamente testados para o passo, consideraram número de pontos igual a 1000 e 3000. Os resultados obtidos (gráficos) foram qualitativamente os mesmos da Fig. 2.4. Toda a computação foi também executada com outra discretização, a saber com uma resolução de $200 \times 200 = 4 \times 10^4$ pontos, sem modificação dos resultados, o que nos faz acreditar que a representação que aparece nos gráficos da Fig. 2.4 seja acurada e representativa. Os resultados obtidos para os volumes também não são afetados quando tiramos os pontos (a, b) de sobre cada uma das linhas de nascimento de cada uma das bacias, por exemplo levando-os para o ponto médio do intervalo de existência de cada um dos nove domínios de estabilidade investigados. Modificação acontece apenas no caso da bacia de atração do ponto fixo, para o qual a divergência para $-\infty$ é bastante diminuída, com conseqüente aumento no volume da bacia de atração.

Da Fig. 2.4 vemos que, independentemente do período, o volume das bacias de atração decresce muito rapidamente conforme $|b| \rightarrow 1$. Na seqüência, vamos caracterizar este decrescimento ajustando curvas gaussianas, como função de b , às distribuições de volume. Como os valores máximos de volumes não acontecem para $b = 0$, sendo levemente deslocados deste valor para o lado negativo do eixo b , é conveniente considerar distribuições gaussianas com centro fora de $b = 0$, dadas por

$$v(b) = A_0 \exp[-A_1(b - A_2)^2] \quad , \quad (2.12)$$

onde A_0 , A_1 e A_2 são constantes, diferentes para cada domínio de estabilidade. Os resultados de tal ajuste aparecem nos gráficos da Fig. 2.5 e na Tabela 2.1. Passo seguinte é o da determinação do desvio padrão para cada uma das distribuições de volume, para cada um dos períodos estudados.

Como é sabido, uma distribuição de probabilidades gaussiana $p(x)$ é definida

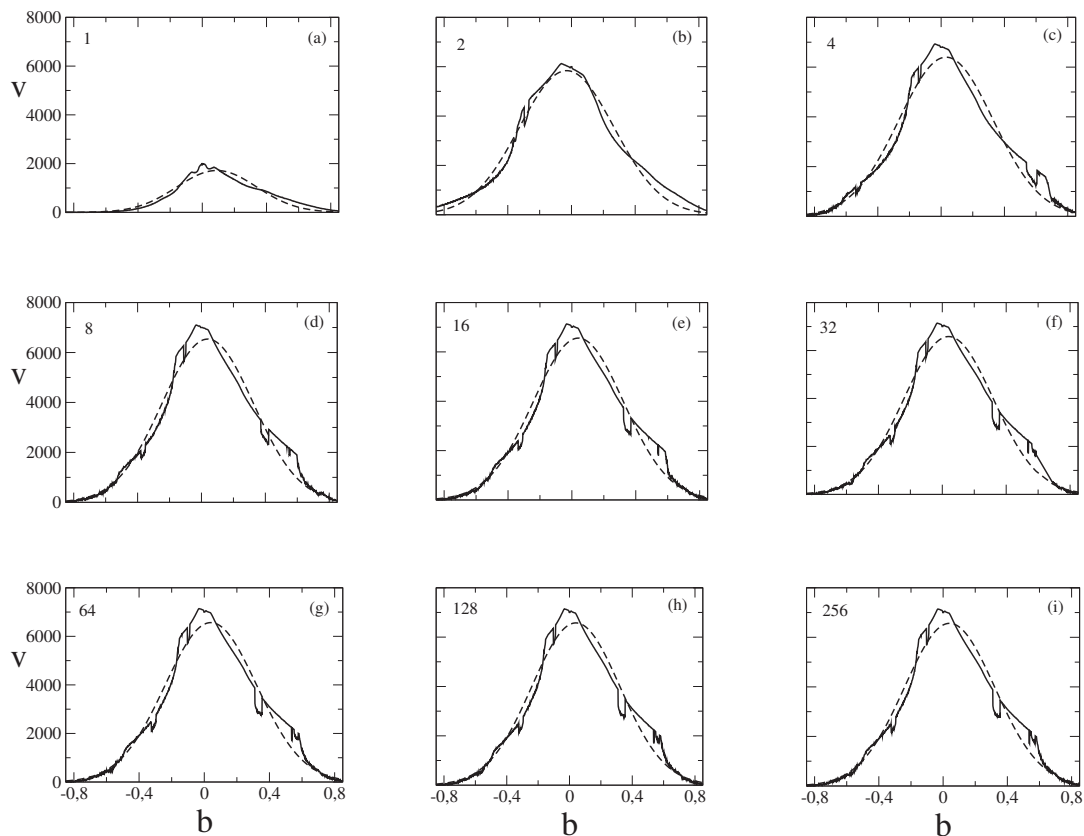


Fig. 2.5: Em tracejado aparecem curvas gaussianas com centro deslocado de $b = 0$, ajustadas às curvas dos volumes (contínuas), para os nove mais baixos períodos da cascata 1×2^n . O número anotado no canto superior esquerdo de cada um dos gráficos significa período.

por [33]

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-(x - a)^2/2\sigma^2] \quad , \quad (2.13)$$

onde σ é o desvio padrão, e a condição de normalização da probabilidade,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1 \quad , \quad (2.14)$$

é considerada satisfeita.

A distribuição proposta para o volume das bacias de atração, Eq. (2.12), não está normalizada. A constante \mathcal{N} de normalização calcula-se de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N} A_0 \exp[-A_1(b - A_2)^2]db = 1 \quad , \quad (2.15)$$

Período	A_0	A_1	A_2
1	1717,30	8,08608	0,0904671
2	5839,47	5,65612	-0,0301263
4	6398,29	5,64648	0,0312807
8	6536,91	6,11511	0,0391941
16	6558,59	6,25993	0,0404695
32	6581,64	6,39425	0,0394619
64	6565,86	6,31884	0,0405985
128	6575,98	6,30634	0,0406124
256	6565,21	6,32334	0,0405083
⋮	⋮	⋮	⋮
caos	6634,14	5,94130	0,0343366

Tab. 2.1: Valores das constantes A_0 , A_1 e A_2 que ajustam a curva definida pela Eq. (2.12) a cada uma das curvas da Fig. 2.4. Na última linha aparecem os valores para a borda do caos.

obtendo-se

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{A_1}{A_0^2 \pi}} \quad . \quad (2.16)$$

Vemos, portanto, que usando a Eq. (2.16) é possível calcular \mathcal{N} para cada um dos períodos estudados. Apenas que os valores para as constantes A_0 e A_1 utilizadas no cálculo não são aqueles que aparecem na Tabela 2.1, mas sim valores obtidos pelo uso de dados normalizados para o ajuste das gaussianas. A Tabela 2.2 mostra tais valores e o respectivo valor de \mathcal{N} para períodos que vão desde 1 até 256, e também para o final do movimento periódico da cascata 1×2^n , ou seja, para a borda do caos. Conhecidas as constantes de normalização, é possível calcular o desvio padrão, σ , característico da distribuição associada a cada um dos períodos, usando qualquer uma das duas equações

$$\sigma = \frac{1}{\mathcal{N} A_0 \sqrt{2\pi}} \quad \text{ou} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{2A_1}} \quad . \quad (2.17)$$

Os resultados para σ aparecem nas duas últimas colunas da Tabela 2.2, e na Fig. 2.6, que mostra o desvio padrão obtido quando curvas gaussianas são ajustadas aos volumes das bacias, para movimentos com períodos 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, e caos. O ponto à direita da linha tracejada na figura, indica o valor do desvio

Período	A_0	A_1	\mathcal{N}	$\sigma(A_0)$	$\sigma(A_1)$
1	0,858656	8,086050	1,868418	0,248666	0,248666
2	0,953104	5,656990	1,407918	0,297298	0,297298
4	0,923446	5,647330	1,451894	0,297552	0,297552
8	0.920810	6.114440	1.515071	0.285960	0.285960
16	0,919476	6,260120	1,535238	0,282614	0,282614
32	0,921414	6,391170	1,547961	0,279701	0,279701
64	0.919194	6.318260	1.542824	0.281310	0.281310
128	0,920464	6,306070	1,539207	0,281582	0,281582
256	0,918943	6,320150	1,543476	0,281268	0,281268
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
caos	0,928685	5,939970	1,480636	0,290130	0,290130

Tab. 2.2: Constantes A_0 e A_1 , obtidas usando dados normalizados para ajuste das gaussianas. Constante de normalização e desvio padrão para alguns movimentos periódicos da cascata 1×2^n , e para a borda do caos.

padrão do volume da bacia, calculado no final dos movimentos periódicos da cascata 1×2^n . A determinação de volumes de bacias nesta situação extrema é muito menos certa que para pontos periódicos. Parece claro da Fig. 2.6, que o desvio padrão não converge para qualquer valor limite. Este fato concorda bem com resultados [28] para o fator de redução no tamanho de bacias, calculado em função do período de atratores, levando em consideração autovalores de órbitas instáveis.

Uma vez que as linhas de nascimento no espaço de parâmetros das órbitas de períodos 1, 2 e 4 foram obtidas analiticamente, os correspondentes valores para σ da Tabela 2.2 tem a precisão dos cálculos numéricos efetuados na estatística das bacias de atração, onde utilizamos sempre programas FORTRAN de dupla precisão. Para os períodos mais altos (8, 16, ...) as linhas no espaço de parâmetros foram obtidas numericamente, mas sempre com uma precisão de seis casas decimais. Portanto, os valores para σ que aparecem na Tabela 2.2 podem ser considerados exatos nesta precisão, e a não convergência para qualquer valor limite é de fato relevante. Ressaltamos no entanto, que os ajustes gaussianos relatados aqui não são universais. Comportamentos exponenciais foram encontrados [34] para a evolução do tamanho de bacias para o mapa de Hénon, ao longo de um caminho no espaço de parâmetros

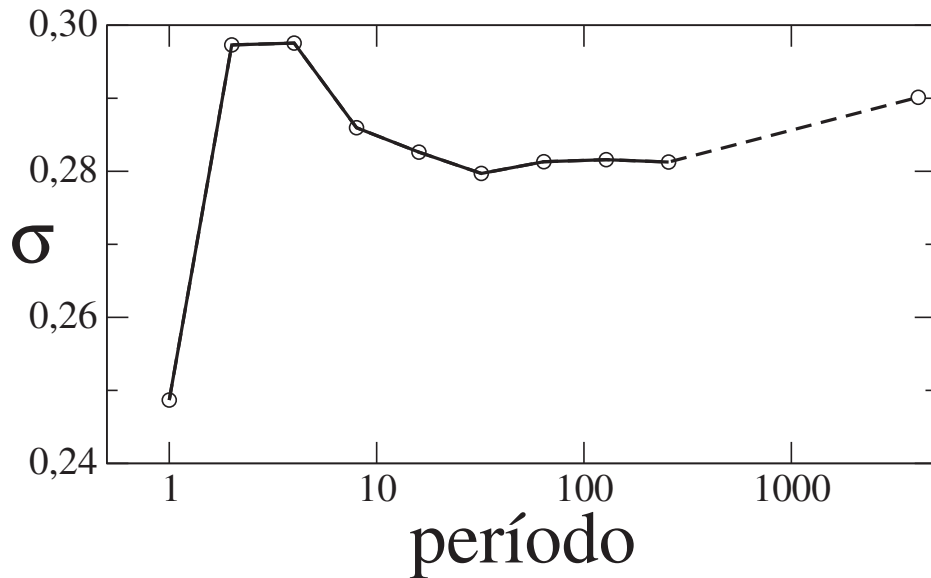


Fig. 2.6: Desvio padrão para curvas gaussianas ajustadas aos volumes das bacias de atração, como função da periodicidade. O ponto mais a direita representa o desvio padrão ao final da cascata de bifurcações 1×2^n .

onde o atrator caótico desaparece [35, 36]. Em contraste, um de nossos resultados se refere ao local no espaço de parâmetros onde o atrator caótico nasce. Adicionalmente, oferecemos aqui uma explicação para uma questão interessante colocada na Ref. [34], que diz respeito ao fato de as bacias caóticas serem raras devido à multiestabilidade. Nossas figuras mostram que não são raras apenas as bacias de atratores caóticos, mas também são raras as bacias relacionadas com órbitas periódicas, no limite conservativo do mapa de Hénon. Aparentemente, esta propriedade não é devida à multiestabilidades no sistema dinâmico, mas surge da dinâmica aberta existente no limite conservativo do mapa de Hénon. Neste limite, não há movimentos limitados. Todas as órbitas divergem (vão para menos infinito) e, sendo assim, bacias de atratores, periódicos ou não, desaparecem. Dentro do limite dissipativo muitos pontos permanecem, em virtude da dissipação, confinados numa região finita do espaço de fase.

2.3.2 Abundância de multiestabilidade

Como colocado anteriormente, nosso estudo sobre multiestabilidades no mapa de Hénon consistiu em seguir o ramo inferior L da linha caminho de autovalores, e fazer uma estatística dos diferentes atratores existentes no espaço de fase, para $-0,286 \leq b \leq -0,206$ ($0,90021 \leq a \leq 3,1575$), com passo igual a 10^{-5} . Várias cascatas de bifurcação foram detectadas, a de maior periodicidade inicial sendo 115×2^n .

Começamos a discussão dos resultados considerando a coexistência dos seguintes atratores : O atrator localizado no infinito ($-\infty$, na verdade), o atrator de período 2, e alguns dos atratores correspondentes à cascata de bifurcação 3×2^n , a saber os seis de menor periodicidade. Os seis gráficos da Fig. 2.7 ilustram o caso. Em

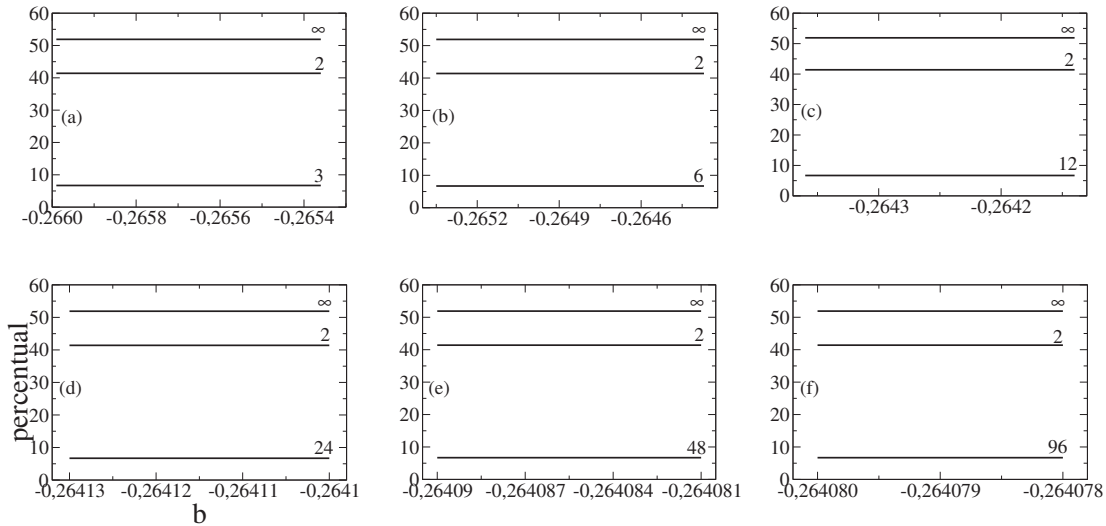


Fig. 2.7: Percentual, em relação ao total de pontos condições iniciais, dos pontos que são levados para cada atrator, em função do parâmetro b . ∞ significa atrator localizado no infinito, e o número inteiro, qualquer que seja, está associado ao período do movimento respectivo.

cada um deles aparece representado o percentual de todos os pontos (x_0, y_0) de inicialização do mapa, que foram levados para algum atrator, em função do parâmetro b . Observa-se da análise de qualquer dos gráficos, que cada um dos percentuais é constante no respectivo intervalo de variação de b . Importante notar que o intervalo em b é diferente para cada um dos gráficos da Fig. 2.7, uma vez que em cada um deles está sendo considerada a coexistência dos atratores do infinito e de período

2, com apenas um dos atratores da cascata 3×2^n . Considerados os seis gráficos, o parâmetro b teve variação entre $-0,26599$ e $-0,264078$. Em relação à cascata 3×2^n , concluímos que, conforme as bifurcações $3 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 24 \rightarrow 48 \rightarrow 96$ vão acontecendo, o volume da bacia de atração permanece constante, reproduzindo o comportamento descrito anteriormente para a cascata 1×2^n (ver Fig. 2.4). O volume da bacia de período 2 coexistente também permanece constante neste intervalo, a exemplo da bacia do infinito. Isto mostra que enquanto intervalos de estabilidade no espaço de parâmetros sofrem forte compressão conforme as bifurcações acontecem, comportamento que se pode conferir na Fig. 2.2, volumes de bacias no espaço de fase permanecem essencialmente constantes. Em outras palavras, a dificuldade para localizar movimentos estáveis de alta periodicidade está relacionada apenas ao restrito intervalo de parâmetros, e não a um possível decréscimo no volume da bacia no espaço de fase.

Continuando o movimento ao longo de L , cruzamos com outras cascatas de bifurcação, por exemplo aquelas de períodos iniciais 9, 15, 21, 27, 33, 45, 63, 75, 105 e 115. Todas estas cascatas são separadas por intervalos onde o movimento é caótico. Tudo isto acontece até $b = -0,26299$. Além deste valor de b , encontramos a seqüência de atratores resumida na Tabela 2.3, que explicamos abaixo:

Desde $b = -0,26298$, até $b = -0,24566$, apenas os atratores de período 2 e o do infinito aparecem. Em $b = -0,24565$ a órbita de período 2 bifurca para uma de período 4. Daí em diante, até $b = -0,24167$ apenas os atratores de período 4 e o do infinito existem. Na precisão considerada, a cascata 1×2^n vai até período 64, quando $b = -0,24060$. Para $-0,24059 \leq b \leq -0,24012$, acontecem o atrator do infinito e caos, algumas vezes misturados com outros atratores, cuja soma de percentuais não atinge 1%. Os cinco próximos valores de b apresentam atratores de período 12, os três primeiros, e 24, os dois seguintes, sempre acompanhados do atrator do infinito. Já no ponto seguinte, para $b = -0,24006$, aparece um atrator de período 144. Para $b = -0,24005$ coexistem o atrator do infinito e um de período 36. Daí para a frente, até $b = -0,23978$, a situação acontecida no intervalo $-0,24059 \leq b \leq -0,24012$ se repete. Começa então uma nova cascata de bifurcação, iniciando do período 6 em $b = -0,23977$, terminando no período 48 em $b = -0,23946$. Continua coexistindo, com qualquer dos atratores desta cascata, o atrator do infinito. Seguindo em frente, até $b = -0,23918$, praticamente só acontecem atrator do infinito e caos, com duas exceções. Em $b = -0,23943$, onde aparece um atrator de período 54 com percentual

Atrator(es)	Intervalo em b	Intervalo em a	%
2, 4, ..., 64	$[-0, 26298, -0, 24060]$	$[1, 30261, 1, 82574]$	35
caos	$[-0, 24059, -0, 24012]$	$[1, 82601, 1, 83878]$	35
12, 24	$[-0, 24011, -0, 24007]$	$[1, 83906, 1, 84015]$	34
144	$-0, 24006$	$1, 84042$	12
36	$-0, 24005$	$1, 84069$	34, 5
caos	$[-0, 24004, -0, 23978]$	$[1, 84097, 1, 84807]$	35
6, 12, ..., 48	$[-0, 23977, -0, 23946]$	$[1, 84835, 1, 85685]$	35
caos	$[-0, 23945, -0, 23918]$	$[1, 85713, 1, 86457]$	34
10, 20	$[-0, 23917, -0, 23914]$	$[1, 86485, 1, 86568]$	34
caos	$[-0, 23913, -0, 23643]$	$[1, 86595, 1, 94198]$	34
7, 14, 28	$[-0, 23642, -0, 23640]$	$[1, 94227, 1, 94284]$	32
caos	$[-0, 23639, -0, 23349]$	$[1, 94313, 2, 02812]$	33

Tab. 2.3: Atratores, intervalos correspondentes em a e b , e percentual de pontos condições iniciais pertencentes às respectivas bacias de atração. O intervalos correspondentes aos periodos 36 e 144 são bastante estreitos. O primeiro membro da cascata 1×2^n cai fora do intervalo de parâmetros considerado na tabela. A última coluna dá o percentual de pontos fora da bacia do infinito.

igual a 5,0%, e em $b = -0, 23924$, onde o atrator presente é de período 48, com percentual de 33,5%. Nos quatro próximos valores de b , entre, $-0, 23917$ e $-0, 23914$, acontece uma nova cascata de bifurcações, iniciada no período 10. A partir deste último valor de b , até $b = -0, 23643$, de novo só os atratores caótico e do infinito ocorrem, com exceção de quatro pontos. O primeiro, para o qual $b = -0, 23796$ onde ambos coexistem com dois atratores, um de período 24 (3,3%) e outro, de período 48 (4,8%). O segundo, no qual a coexistência é com um atrator de período 14 (25,3%) e $b = -0, 23733$. O terceiro ponto onde são companheiros apenas o atrator do infinito (66,6%) e um de período 10 (33,3%), e $b = -0, 23716$. Finalmente, o quarto ponto, para o qual $b = -0, 23702$, caracterizado por um atrator de período 9 (33,1%) e o do infinito. Em $b = -0, 23642$ aparece um nova cascata de bifurcações, 7×2^n , que se estende até o período 28 em $b = -0, 23640$. Seguindo em frente, sempre ao longo da linha L, até $b = -0, 23349$, só acontecem o atrator do infinito ($\sim 67\%$) e caos ($\sim 33\%$). Finalmente, deste ponto até $b = -0, 206$, só comparece o atrator do

infinito. Vemos então que, embora haja uma grande variação de comportamentos dinâmicos nesta região, os tamanhos das bacias de atração permanecem constantes, enquanto as bifurcações acontecem dentro de uma mesma cascata.

Capítulo 3

A Bifurcação de Naimark-Sacker em Dois Mapas Quadráticos Acoplados

Neste capítulo fazemos um estudo sistemático do espaço de parâmetros de um acoplamento linear de dois mapas quadráticos. O propósito da investigação é derivar resultados analíticos exatos para um modelo: o acoplamento linear de dois mapas quadráticos idênticos, definido por

$$x_{t+1} = a - x_t^2 + b(x_t - y_t), \quad (3.1)$$

$$y_{t+1} = a - y_t^2 + b(y_t - x_t), \quad (3.2)$$

onde x_t, y_t representam variáveis dinâmicas, a é a não linearidade local, b é o acoplamento, e $t = 0, 1, 2, \dots$ é o tempo discreto. Sistemas compostos por osciladores não lineares acoplados são atualmente usados em aplicações práticas, por exemplo, na investigação de junções p-n acopladas [37] e de conjuntos de junções Josephson [38]. Eles também servem como aproximações para equações diferenciais parciais não lineares, descrevendo, por exemplo, o início da turbulência em fluidos [39] e sistemas de reação-difusão [40]. Alguns resultados analíticos foram anteriormente obtidos para sistemas de dois mapas acoplados, usando análise de estabilidade linear [41, 42, 43] e teoria de renormalização [44]. Aqui iremos além disto, apresentando soluções analíticas exatas localizando as curvas onde acontecem as bifurcações $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 2$ e $2 \rightarrow 4$. Damos também a localização precisa do conjunto de parâmetros onde a bifurcação de Naimark-Sacker ocorre. Mediante o cálculo de coeficientes de for-

mas normais, garantimos a ocorrência da bifurcação de Naimark-Sacker, que resulta num movimento quase-periódico a partir de uma órbita de período 2 que ocorre fora da diagonal. Alguns dos resultados aqui apresentados foram publicados na revista *Physica A* [45].

3.1 Objetivo

Nosso objetivo aqui é realizar um estudo analítico, sistemático, da dinâmica do modelo definido pelas Eqs. (3.1) e (3.2). Mais especificamente, pretendemos obter expressões algébricas envolvendo os parâmetros a e b , que permitam estudar toda a dinâmica do sistema para períodos baixos. Vamos investigar uma rota alternativa para o caos, surgida em virtude do acoplamento, que tem origem na bifurcação de Naimark-Sacker de uma órbita de período 2, que ocorre fora da diagonal. Pretendemos mostrar que, conforme formos caminhando ao longo de linhas que cruzam uma determinada fronteira que separa duas regiões no espaço de parâmetros, teremos movimento quase-periódico, com dois ciclos limite originados da trajetória de período 2 não diagonal. Seguindo em frente, penetrando mais ainda na região destino, alcançaremos uma região de caos. Todos os resultados analíticos serão confirmados via simulações numéricas. Finalmente, usaremos teoria de formas normais para mostrar que a bifurcação de Naimark-Sacker realmente ocorre no sistema em estudo.

3.2 Metodologia

O procedimento aqui adotado para obter as expressões analíticas que delimitam os domínios de estabilidade para movimentos de períodos 1 e 2, consiste de dois passos:

1. O primeiro deles objetiva determinar a k -ésima composição das equações de movimento, sendo matematicamente expresso por

$$X_k(x, y, a, b) \equiv x - f_k(x, y, a, b) = 0, \quad (3.3)$$

$$Y_k(x, y, a, b) \equiv y - g_k(x, y, a, b) = 0, \quad (3.4)$$

onde $f(x, y, a, b)$ e $g(x, y, a, b)$ são as funções que definem o sistema dinâmico.

Objetiva também calcular o determinante M_k da matriz 2×2 $J_k(x, y, a, b) - \lambda I$, ou seja, calcular

$$M_k(x, y, a, b, \lambda) \equiv |J_k(x, y, a, b) - \lambda I|, \quad (3.5)$$

onde $J_k(x, y, a, b)$ é a matriz jacobiana da composição k , dada por $J_k = N_1 \otimes N_2 \dots N_k$, com

$$N_k = \begin{pmatrix} -2x_k + b & -b \\ -b & -2y_k + b \end{pmatrix},$$

I é a matriz identidade 2×2 e λ é o autovalor que controla a estabilidade da solução de período k .

Portanto, para cada valor de k iremos obter três equações, cada uma delas envolvendo as variáveis x e y , os parâmetros a e b e o autovalor λ . Em resumo, teremos

$$X_k(x, y, a, b) \equiv x - f_k(x, y, a, b) = 0, \quad (3.6)$$

$$Y_k(x, y, a, b) \equiv y - g_k(x, y, a, b) = 0, \quad (3.7)$$

$$M_k(x, y, a, b, \lambda) = 0. \quad (3.8)$$

Para um dado período k e parâmetros a e b , as primeiras duas equações, $X_k = 0$ e $Y_k = 0$, definem as soluções físicas (x, y) , enquanto a última equação, $M_k = 0$, define a estabilidade dessas soluções (uma solução é estável para todo valor de λ no intervalo $(-1, 1)$).

2. O segundo passo é o da eliminação das variáveis. Por exemplo, podemos eliminar y entre X_k e M_k e entre Y_k e M_k , obtendo duas equações, cada uma delas envolvendo as quantidades (x, a, b, λ) . Eliminando x dessas duas equações obtemos, finalmente, uma equação envolvendo apenas (a, b, λ) , que servirá para estudos envolvendo o espaço dos parâmetros. Tendo determinado esta última equação, a delimitação do intervalo para movimentos estáveis de período k no espaço de parâmetros, fica caracterizada pelas equações envolvendo a , b , $\lambda = +1$ e a , b , $\lambda = -1$.

Para definir com precisão os limites para os domínios de estabilidade de regiões de períodos 1 e 2 no espaço dos parâmetros, fazemos ainda uma análise de estabilidade linear, em termos dos autovalores da matriz jacobiana, para cada uma das órbitas existentes.

3.3 Resultados

Na apresentação dos resultados do estudo realizado com o modelo das Eqs. (3.1) e (3.2), vamos distinguir os analíticos dos numéricos. Resultados analíticos aparecem principalmente nas seções 3.3.1 e 3.3.3, enquanto resultados numéricos aparecem na seção 3.3.2.

3.3.1 Resultados Analíticos

Para o modelo aqui investigado, qual seja, o do acoplamento linear de dois mapas quadráticos idênticos, dado por

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= a - x_t^2 + b(x_t - y_t), \\y_{t+1} &= a - y_t^2 + b(y_t - x_t),\end{aligned}$$

e considerando apenas órbitas de períodos 1 e 2, das Eqs. (3.6)-(3.8) obtemos curvas $W_i^{(+,-)} = 0$, sendo os $W_i^{(+,-)}$ dados por

$$W_1^+ = (4a + 1)(4a - 4b^2 + 1)^3, \quad (3.9)$$

$$W_1^- = (4a - 3)(4a - 4b^2 - 3 - 8b)(-3 + 4a + 4b - 4b^2)^2, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}W_2^+ &= (b - 1)^8(4a - 3)^2(-3 + 4a + 4b - 4b^2)^2 \\ &\quad \times (4a - 4b^2 - 3 - 8b)^2(4a - 4b^2 - 3 - 12b)^2,\end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}W_2^- &= (b - 1)^8(4a - 5)^2(4a - 4b^2 + 4b - 5)^2 \\ &\quad \times (25 - 40a + 16a^2 + 100b - 80ba + 144b^2 \\ &\quad - 32ab^2 + 80b^3 + 16b^4)^2.\end{aligned} \quad (3.12)$$

Nas expressões acima + e - se referem a $\lambda = +1$ e -1 , respectivamente. Para ilustrar o procedimento utilizado na determinação das curvas, mostramos a seguir os detalhes da obtenção de W_1^+ e W_1^- .

Começamos escrevendo as três equações que se obtém quando executamos o primeiro passo do procedimento anteriormente descrito. Duas delas são

$$X_1(x, y, a, b) \equiv x - f_1(x, y, a, b) = 0 \quad (3.13)$$

e

$$Y_1(x, y, a, b) \equiv y - g_1(x, y, a, b) = 0, \quad (3.14)$$

que resultam em

$$x - a + x^2 - b(x - y) = 0 \quad (3.15)$$

e

$$y - a + y^2 - b(y - x) = 0. \quad (3.16)$$

A terceira vem da equação de autovalores

$$M_1(x, y, a, b, \lambda) \equiv |J_1(x, y, a, b) - \lambda I| = 0, \quad (3.17)$$

que fornece

$$\lambda^2 - 2b\lambda + 2(2y - b + \lambda)x + 2(-b + \lambda)y = 0. \quad (3.18)$$

O passo seguinte é o da eliminação das variáveis x e y . Para equações polinomiais, isto pode ser feito calculando a resultante [46] entre dois polinômios, como veremos. Calculando a resultante em x entre as Eqs. (3.15) e (3.18) ganhamos

$$\begin{aligned} & 16by^3 + [4\lambda^2 + (16b - 8)\lambda - 20b^2 + 8b - 16a]y^2 \\ & + [4\lambda^3 - 8\lambda^2 + (-16b^2 + 16b - 16a)\lambda + 8b^3 - 4b^2 + 16ab]y + \lambda^4 \\ & - (2 + 2b)\lambda^3 + (-2b^2 + 6b - 4a)\lambda^2 + (4b^3 - 4b^2 + 8ab)\lambda - 4ab^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

enquanto o cálculo da resultante em x entre as Eqs. (3.16) e (3.18) dá

$$4y^3 + (2\lambda - 6b + 4)y^2 + [(2 - 4b)\lambda + 4b^2 - 2b - 4a]y - b\lambda^2 + (2b^2 - 2a)\lambda + 2ab = 0. \quad (3.20)$$

Finalmente, se calcularmos a resultante em y entre as duas equações acima, iremos obter

$$\begin{aligned} & \lambda^8 - 8\lambda^7 + (-16a + 24a)\lambda^6 + (-16b^3 + 96a - 32)\lambda^5 + [80b^3 - (12 + 48a)b^2 \\ & + 96a^2 - 192a + 16]\lambda^4 + [(-144 + 64a)b^3 + (48 + 192a)b^2 - 384a^2 + 128a]\lambda^3 \\ & + [64b^6 - (48 + 192a)b^4 + (112 - 192a)b^3 + (-48 - 96a + 384a^2)b^2 - 256a^3 \\ & + 384a^2]\lambda^2 + [-128b^6 + (96 + 384a)b^4 + (-32 + 192a)b^3 - (192a + 768a^2)b^2 \\ & + 512a^3]\lambda - 256ab^6 + (192a + 768a^2)b^4 - 64ab^3 - (192a^2 + 768a^3)b^2 \\ & + 256a^4 = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

que é função apenas de a , b e λ . Fazendo $\lambda = 1$ nesta última equação, ganhamos $W_1^+ = 0$, e fazendo $\lambda = -1$ ganhamos $W_1^- = 0$.

As equações $W_i^{(+,-)} = 0$ definem, portanto, os limites de estabilidade de mais baixa periodicidade para a cascata 1×2^n , no espaço dos parâmetros. Do modo como

as expressões $W_i^{(+,-)}$ fatoram, vemos que as soluções para as bifurcações do mapa quadrático

$$a = -\frac{1}{4}, \quad a = \frac{3}{4}, \quad \text{e} \quad a = \frac{5}{4}$$

estão contempladas, como deveria acontecer. Outras soluções, estas exclusivas do caso acoplado, são as curvas $c_i = 0$, onde

$$c_1 = 4a - 4b^2 + 1, \tag{3.22}$$

$$c_2 = 4a - 4b^2 - 3 - 8b, \tag{3.23}$$

$$c_3 = 4a - 4b^2 - 3 + 4b, \tag{3.24}$$

$$c_4 = 4a - 4b^2 - 3 - 12b, \tag{3.25}$$

$$c_5 = 4a - 4b^2 - 5 + 4b. \tag{3.26}$$

Na figura 3.1 aparecem todas as curvas $c_i = 0$, assim como as retas verticais que definem os valores do parâmetro a para os quais acontecem as bifurcações $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 2$, e $2 \rightarrow 4$ do mapa quadrático. Nascimento de órbitas de período 1 acontece para pontos ao longo da curva c_1 , com bifurcações $1 \rightarrow 2$ acontecendo ao longo das curvas c_2 e c_3 . Uma nova órbita de período 2 nasce ao longo da curva c_4 , acontecendo sobre c_5 bifurcações $2 \rightarrow 4$. Da complexidade mostrada na Fig. 3.1, vemos que para definir com precisão os limites para os domínios de estabilidade para as regiões de períodos 1 e 2, é necessário fazer uma análise de estabilidade linear, que vem na seqüência.

As Eqs. (3.6) e (3.7), acima referidas como equações de movimento, implicam numa família de polinômios, cujos zeros definem os pontos das órbitas. Por exemplo, todos os pontos orbitais com períodos 1 e 2 são zeros de $P_1(x) \equiv p_1^{(1)}(x) p_1^{(2)}(x)$ e $P_2(x) \equiv P_1(x) p_2^{(1)}(x) p_2^{(2)}(x) p_2^{(3)}(x)$, onde

$$p_1^{(1)}(x) = x^2 + x - a, \tag{3.27}$$

$$p_1^{(2)}(x) = x^2 + (1 - 2b)x + 2b^2 - b - a, \tag{3.28}$$

$$p_2^{(1)}(x) = x^2 - x - a + 1, \tag{3.29}$$

$$p_2^{(2)}(x) = x^2 - (1 + 2b)x + (b + 1)(1 + 2b) - a, \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} p_2^{(3)}(x) = & x^8 - 4bx^7 + (8b^2 + 2b - 4a)x^6 + (-8b^3 - 8b^2 - 2b + 12ab - 2)x^5 \\ & + [4b^4 + 16b^3 + (5 - 20a)b^2 - (3 + 6a)b + 6a^2 - 2a]x^4 \\ & + [-16b^4 - (8 - 16a)b^3 + 16ab^2 + (-12a^2 + 8a + 2)b - 4a]x^3 \\ & + [8b^5 + (8 - 8a)b^4 + (6 - 24a)b^3 + (16a^2 - 10a - 2)b^2 \end{aligned}$$

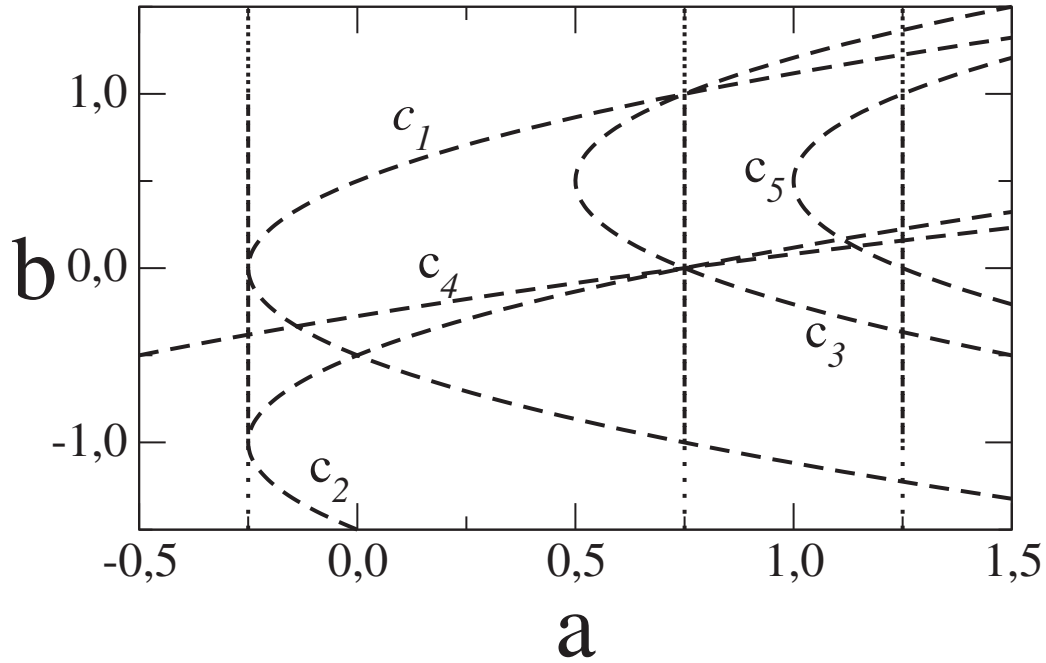


Fig. 3.1: Algumas curvas no espaço dos parâmetros para o modelo das Eqs. (3.1) e (3.2).

$$\begin{aligned}
& +(6a^2 - 2)b + 4a^2(1 - a)]x^2 \\
& +[-8b^5 - (4 - 16a)b^4 - (8a^2 - 8a - 2)b^3 - (8a^2 - 4a + 1)b^2 \\
& +(4a^3 - 6a^2 + 1)b + 2a^2 - 2a]x \\
& +4b^6 - (4 + 8a)b^5 + (7 + 4a^2)b^4 + (-2a^3 + 8a^2 - 6a - 4)b^3 \\
& +(-4a^3 + a^2 + a + 1)b^2 + (3a^2 - a)b + a^4 - 2a^3 + a^2. \quad (3.31)
\end{aligned}$$

O polinômio $P_1(x) = p_1^{(1)}(x)p_1^{(2)}(x)$ tem quatro raízes, havendo um número igual de pontos fixos. A localização destes pontos fixos é obtida a partir de algumas

combinações das raízes das Eqs. (3.27) e (3.28), raízes estas que são

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a}}{2}, \quad (3.32)$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4a}}{2}, \quad (3.33)$$

$$x_3 = \frac{2b-1}{2} + \frac{\sqrt{-4b^2+4a+1}}{2}, \quad (3.34)$$

$$x_4 = \frac{2b-1}{2} - \frac{\sqrt{-4b^2+4a+1}}{2}. \quad (3.35)$$

Devido ao sistema em estudo ser simétrico nas variáveis x e y , teremos $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ e $y_4 = x_4$. Das dezesseis combinações possíveis de pontos (x, y) envolvendo as raízes, apenas quatro resultam em pontos fixos. Tais combinações são

$$D_1 \equiv (x_1, x_1), \quad D_2 \equiv (x_2, x_2), \quad N_1 \equiv (x_3, x_4), \quad N_2 \equiv (x_4, x_3), \quad (3.36)$$

havendo, portanto, dois pontos fixos sobre a diagonal $y = x$ e dois fora dela.

Das Eqs. (3.32) e (3.33), concluímos que os pontos fixos da diagonal, D_1 e D_2 , são reais somente se $a \geq -1/4$. Para $a = -1/4$, temos que $D_1 = D_2 = (-1/2, -1/2)$, ou seja, as duas órbitas são coincidentes. Os dois pontos fixos de fora da diagonal, N_1 e N_2 , são reais apenas para valores de a e b que obedecem $4a - 4b^2 + 1 \geq 0$, ou seja, somente à direita da curva $c_1 = 0$, que é a curva ao longo da qual nascem as quatro órbitas de período 1, três delas instáveis, como veremos.

Passamos então a analisar a estabilidade dos pontos fixos, considerando primeiro D_1 e D_2 . Os autovalores da matriz jacobiana calculada no ponto fixo D_1 são

$$\lambda_1^{(D_1)} = 1 - \sqrt{1+4a} + 2b \quad (3.37)$$

e

$$\lambda_2^{(D_1)} = 1 - \sqrt{1+4a}. \quad (3.38)$$

Quando o ponto fixo D_2 é considerado para o cálculo da matriz jacobiana, temos

$$\lambda_1^{(D_2)} = 1 + \sqrt{1+4a} + 2b \quad (3.39)$$

e

$$\lambda_2^{(D_2)} = 1 + \sqrt{1+4a}. \quad (3.40)$$

A condição $a \geq -1/4$ permite concluir que o ponto fixo D_2 é instável, uma vez que pelo menos um dos autovalores neste caso tem módulo maior do que a unidade, a

saber $\lambda_2^{(D_2)}$. Para o ponto fixo D_1 , a situação é diferente. Há uma região do espaço de parâmetros na qual ocorre estabilidade. Esta região de estabilidade acontece se as seguintes duas condições forem simultaneamente satisfeitas:

$$-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4} \quad (3.41)$$

e

$$\frac{\sqrt{1+4a}}{2} - 1 < b < \frac{\sqrt{1+4a}}{2}. \quad (3.42)$$

Portanto, a região de estabilidade do ponto fixo D_1 é aquela limitada pelas duas parábolas, $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$, e pelas duas retas, $a = -1/4$ e $a = 3/4$.

Agora, os pontos fixos situados fora da diagonal. Os autovalores da matriz jacobiana calculada no ponto N_1 são iguais aos calculados quando o ponto N_2 é considerado. Basta, portanto, analisar para apenas um dos pontos, com o resultado aplicando-se ao outro. Teremos para os autovalores

$$\lambda_1^{(N_1)} = \lambda_1^{(N_2)} = 1 - b + \sqrt{1 + 4a - 3b^2} \quad (3.43)$$

e

$$\lambda_2^{(N_1)} = \lambda_2^{(N_2)} = 1 - b - \sqrt{1 + 4a - 3b^2}. \quad (3.44)$$

A condição de existência (ser real) para ambos os pontos fixos, dada por $4a - 4b^2 + 1 \geq 0$, implica em $\lambda_1^{(N_1)} > 1$, ou $\lambda_2^{(N_1)} > 1$. Qualquer dos resultados permite afirmar que os pontos fixos N_1 e N_2 são sempre instáveis. Sendo assim, concluímos que há apenas um ponto fixo estável, D_1 , que, como mostramos acima, tem uma região de estabilidade bem definida no espaço dos parâmetros.

Para investigação das órbitas de período 2, consideramos os polinômios $p_2^{(1)}(x)$ e $p_2^{(2)}(x)$, que compõe $P_2(x)$, e que são dados pelas Eqs. (3.29) e (3.30). As raízes do polinômio $p_2^{(1)}(x)$ são

$$x_5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3+4a}}{2}, \quad (3.45)$$

$$x_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3+4a}}{2}, \quad (3.46)$$

enquanto que as de $p_2^{(2)}(x)$ são

$$x_7 = \frac{2b+1}{2} + \frac{\sqrt{-4b^2+4a-8b-3}}{2}, \quad (3.47)$$

$$x_8 = \frac{2b+1}{2} - \frac{\sqrt{-4b^2+4a-8b-3}}{2}. \quad (3.48)$$

Novamente, por causa da simetria nas variáveis x e y , vem que $y_5 = x_5$, $y_6 = x_6$, $y_7 = x_7$ e $y_8 = x_8$. Testadas todas as combinações possíveis de formação de órbitas de período 2, resultam verdadeiras apenas duas. Uma órbita que acontece sobre a diagonal $y = x$, do tipo

$$\dots \rightarrow (x_5, x_5) \rightarrow (x_6, x_6) \rightarrow (x_5, x_5) \rightarrow \dots, \quad (3.49)$$

que representaremos por $P2D$, e outra, cujos pontos estão fora da diagonal, sendo dada por

$$\dots \rightarrow (x_7, x_8) \rightarrow (x_8, x_7) \rightarrow (x_7, x_8) \rightarrow \dots \quad (3.50)$$

Esta representaremos por $P2$.

Os autovalores correspondentes à órbita $P2D$ são

$$\lambda_1^{(P2D)} = 4(1 - a) \quad (3.51)$$

e

$$\lambda_2^{(P2D)} = 4(1 - a - b + b^2). \quad (3.52)$$

Fazendo $\lambda_1^{(P2D)} = 1$, teremos $a = 3/4$, enquanto que para $\lambda_1^{(P2D)} = -1$, resulta $a = 5/4$. Mesmas condições aplicadas para $\lambda_2^{(P2D)}$ resultarão, quando o valor 1 é utilizado, na parábola

$$4b^2 - 4b - 4a + 3 = 0, \quad (3.53)$$

ou seja, em $c_3 = 0$, e, quando o valor considerado é -1 , noutra parábola,

$$4b^2 - 4b - 4a + 5 = 0, \quad (3.54)$$

esta que é exatamente $c_5 = 0$. Vemos então que a órbita $P2D$ é estável na região do espaço de parâmetros limitada pelas duas linhas verticais, $a = 3/4$ e $a = 5/4$, e pelas duas parábolas, $c_3 = 0$ e $c_5 = 0$.

Para a órbita $P2$, os autovalores associados são

$$\lambda_1^{(P2)} = 6b^2 + 10b - 4a + 4 + 2b\sqrt{5b^2 + 10b - 4a + 4} \quad (3.55)$$

e

$$\lambda_2^{(P2)} = 6b^2 + 10b - 4a + 4 - 2b\sqrt{5b^2 + 10b - 4a + 4}. \quad (3.56)$$

As Eqs. (3.55) e (3.56) podem ser reescritas de forma compacta. Basta fazermos

$$A = 5b^2 + 10b - 4a + 4, \quad (3.57)$$

e poderemos escrever $\lambda_1^{(P2)} = (-b - \sqrt{A})^2$ e $\lambda_2^{(P2)} = (-b + \sqrt{A})^2$, equações nas quais vemos que as soluções $\lambda_1^{(P2)} = \lambda_2^{(P2)} = -1$ não são possíveis de ocorrer. Tal fato mostra que a órbita $P2$ não bifurca por duplicação de período. A órbita $P2$ torna-se instável via uma bifurcação de Naimark-Sacker [47], também chamada bifurcação de Hopf para mapas. Quando isto acontece os autovalores $\lambda_1^{(P2)}$ e $\lambda_2^{(P2)}$ são complexos conjugados, tendo ambos módulo igual a 1. Após aplicada tal condição, $|\lambda_1^{(P2)}| = |\lambda_2^{(P2)}| = 1$, obtemos a parábola

$$4b^2 + 10b - 4a + 5 = 0, \quad (3.58)$$

que é a curva para pontos da qual acontece a bifurcação de Naimark-Sacker da órbita $P2$. O resultado serão dois ciclos limite, um para cada um dos pontos da órbita primitiva, situação que aparece ilustrada nos gráficos da Fig. 3.2. Ainda em

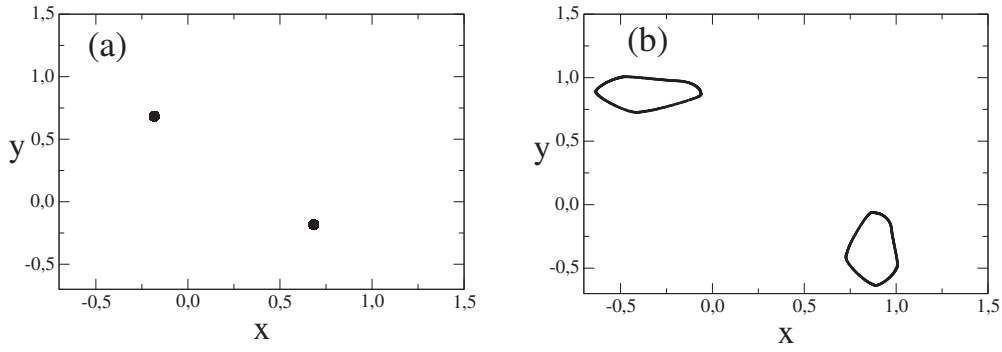


Fig. 3.2: Espaço de fase para o modelo das Eqs. (3.1) e (3.2). (a) A órbita de período 2, antes da bifurcação de Naimark-Sacker, para $(a, b) = (0, 5, -0, 25)$. (b) Os dois ciclos limite, depois da bifurcação de Naimark-Sacker, para $(a, b) = (0, 75, -0, 25)$. Foram utilizados 1000 pontos em cada um dos gráficos, com transiente de 20000 iterações e inicialização $(x_0, y_0) = (0, 1234, 0, 005)$.

relação à órbita $P2$, das Eqs. (3.47) e (3.48), vemos que a mesma só é real se a condição

$$-4b^2 + 4a - 8b - 3 \geq 0, \quad (3.59)$$

for satisfeita, ou seja, se $c_2 \geq 0$.

Para pontos sobre a curva $c_2 = 0$, ou seja, para $a = b^2 + 2b + 3/4$, os autovalores se transformam para $\lambda_1^{(P2)} = (2b + 1)^2$ e $\lambda_2^{(P2)} = (-1)^2$. Isto quer dizer que, se $b > 0$, teremos $\lambda_1^{(P2)} > 1$ e $\lambda_2^{(P2)} = 1$, implicando no nascimento de uma órbita de período

2 instável. Também quer dizer que, se $-1 < b < 0$, teremos $\lambda_1^{(P2)} < 1$ e $\lambda_2^{(P2)} = 1$, o que também implica no nascimento de uma órbita de período 2, só que desta vez estável. Para determinarmos se a órbita $P2$ nasce estável em mais algum *lugar*, fazemos $\lambda_1^{(P2)} = \lambda_2^{(P2)} = 1$. Resultados provenientes de tal condição são as parábolas

$$4a - 4b^2 - 3 - 12b = 0 \quad (3.60)$$

e

$$4a - 4b^2 - 3 - 8b = 0, \quad (3.61)$$

ou seja, $c_4 = 0$ e $c_2 = 0$. Em resumo, vemos que, para $b > 0$, nasce sobre a curva $c_2 = 0$ uma órbita $P2$ instável. Tal órbita no entanto se estabiliza para pontos sobre a curva $c_4 = 0$. Para $-1 < b < 0$ nasce sobre esta mesma curva, $c_2 = 0$, uma órbita $P2$, apenas que agora ela é estável.

A Fig. 3.3, versão atualizada da Fig. 3.1, resume toda a análise de estabilidade linear feita acima, mostrando as regiões limitadas por linhas contínuas, as quais compreendem os domínios de estabilidade para as órbitas de período 1 e 2 no espaço de parâmetros. A curva adicional, NS , que não aparecia na Fig. 3.1, é a linha de Naimark-Sacker que, como vimos antes, significa o lugar geométrico dos pontos para os quais a órbita $P2$ bifurca, originando dois ciclos limite. A pequena região limitada pelas curvas $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, $c_5 = 0$ e NS , se caracteriza pela coexistência de órbitas $P2$ e $P2D$. O resultado final, órbita $P2$ ou $P2D$, para cada um dos pontos dessa região, depende exclusivamente da inicialização. Nos gráficos da Fig. 3.4 vemos as bacias de atração das duas órbitas, para dois pontos do espaço de parâmetros pertencentes à região onde há a coexistência. Em cada um dos diagramas é nítida a separação dos pontos condições iniciais que levam o sistema para um comportamento assintótico cujas órbitas são tipo $P2D$, regiões pretas, e tipo $P2$, regiões cinzas.

Vimos então que, para o acoplamento simétrico de dois mapas quadráticos idênticos, conforme definido pelas Eqs. (3.1) e (3.2), o ponto fixo bifurca por duplicação de período, podendo produzir diferentes resultados, dependendo de a e b . Pode acontecer de a bifurcação do ponto fixo produzir uma solução tipo $P2D$, ou tipo $P2$. É esta solução tipo $P2$ que vai experimentar a bifurcação de Naimark-Sacker, que acontece sobre a linha NS , onde a órbita $P2$ desaparece, para dar lugar a duas curvas fechadas (ciclos limite). Propriedades da bifurcação de Naimark-Sacker serão discutidas mais detalhadamente nas seções 3.3.2 e 3.3.3, que vem a seguir.

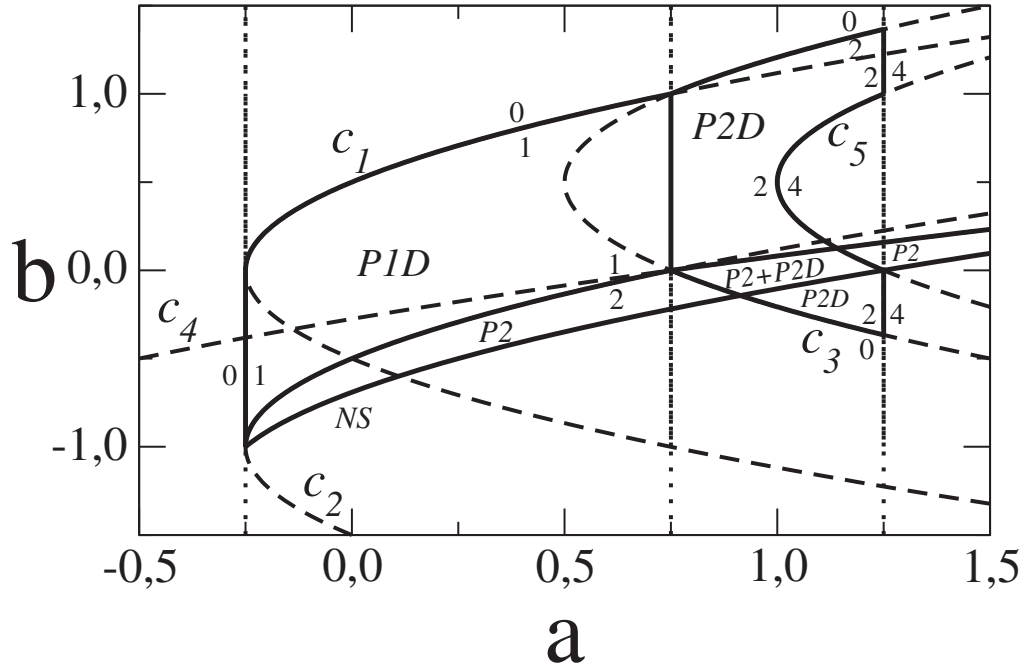


Fig. 3.3: Domínios de estabilidade para órbitas de período 1 e 2. Números indicam períodos.

3.3.2 Resultados Numéricos

O diagrama mostrando os domínios de estabilidade para os mapas quadráticos acoplados das Eqs. (3.1) e (3.2) pode também ser gerado numericamente. Tais domínios aparecem representados na Fig. 3.5, que é um bitmap colorido, obtido pela discretização do correspondente intervalo de parâmetros numa malha de 1200×600 pontos, determinando, para cada ponto, a periodicidade da solução assintótica (do atrator), após um transiente de 20000 iterações. As iterações foram realizadas ao longo de linhas de parâmetro b constante, iniciando sempre no menor valor de a , da condição inicial $(x_0, y_0) = (0, 0123, 0, 0)$. Enquanto determinando periodicidades ao longo das linhas de b constante, o ponto inicial (x_0, y_0) foi usado apenas para começar as iterações no menor valor de a . Para iniciar as iterações num novo valor de a , nós seguimos o atrator, ou seja, usamos o último valor de (x_t, y_t) , obtido com

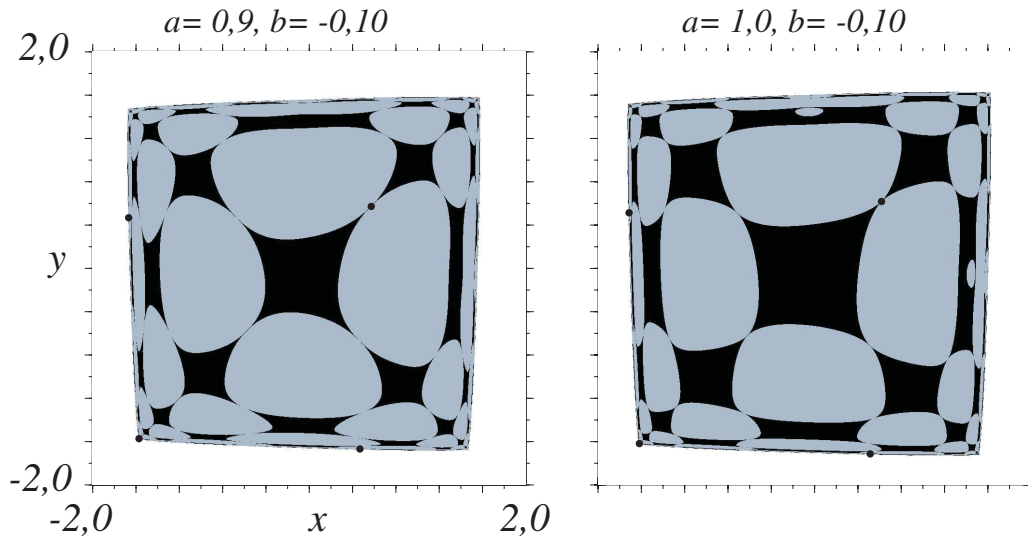


Fig. 3.4: Espaço das condições iniciais para dois conjuntos de parâmetros (a, b) , mostrando as bacias de atração para órbitas $P2$ (cinza) e $P2D$ (preto). Os pontos pretos são os atratores correspondentes.

o valor anterior de a , como a condição inicial para o a incrementado. As diferentes cores que aparecem na Fig. 3.5 significam diferentes comportamentos assintóticos, periódicos ou não. Branco significa divergência para o infinito. Azul, verde, amarelo, azul claro e magenta significam, respectivamente, órbitas $P1D$, $P2D$, $P2$, $P4D$ e $P4$. A fronteira de baixo, entre as regiões amarela e preta, é definida pela linha de Naimark-Sacker. Portanto, logo abaixo da região em amarelo, na região em preto, temos movimento quase-periódico com dois ciclos limite originados de trajetórias $P2$. Conforme penetramos mais e mais na região em preto, alcançamos a região de caos. Fato análogo acontece para a região da órbita $P4$, em magenta. Apenas que ali a região de movimento quase-periódico, no início da região em preto à direita, tem quatro ciclos limite, originados de órbitas $P4$. A pequena região cinza, imersa na região de quase-periodicidade, é um domínio de período 10, similar às estruturas tipo língua que aparecem no mapa do círculo [48], sistema padrão para o estudo da bifurcação de Naimark-Sacker, e que são chamadas línguas de Arnold.

Na seqüência, procedemos uma análise numérica que mostra a evolução da dinâmica no espaço de fase, para o sistema definido pelas Eqs. (3.1) e (3.2). Para tal, escolhemos duas linhas retas no espaço de parâmetros. Uma vertical, para $a = 0,6$

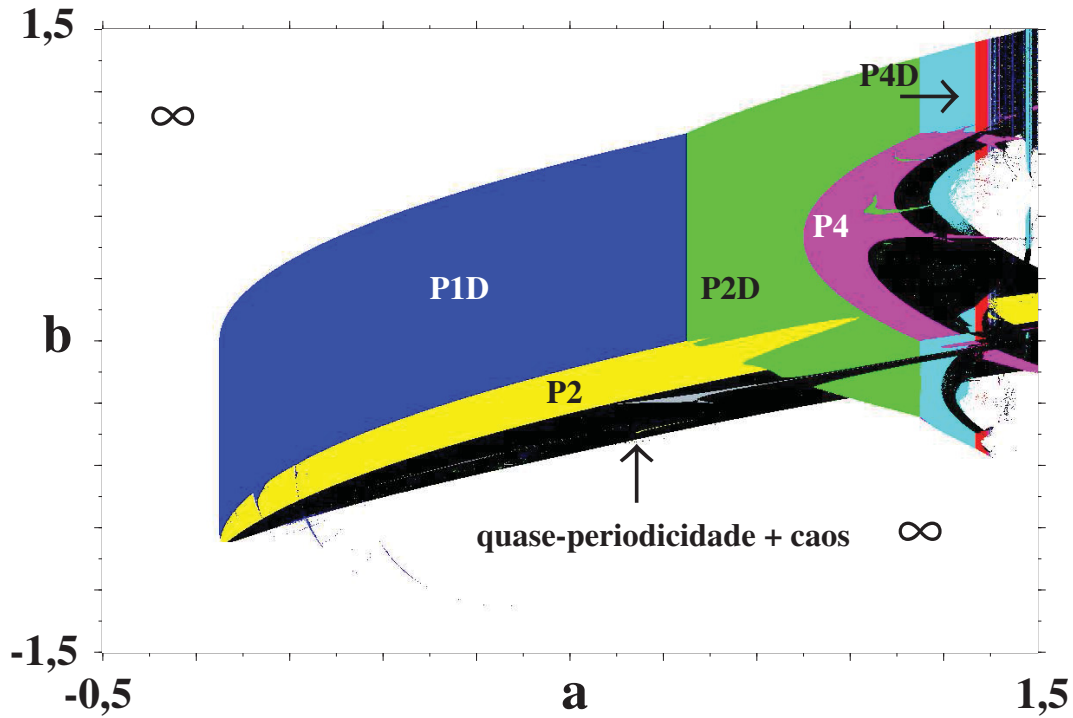


Fig. 3.5: Domínios de estabilidade obtidos numericamente para os mapas quadráticos acoplados. Veja o texto para detalhes.

e b variando num intervalo adequado, e outra, horizontal, para $b = 0,25$, agora com a variando. Para cada um dos casos, vamos caracterizar os vários regimes dinâmicos observadas no espaço de fase.

Começamos com $a = 0,6$ e $-0,5 \leq b \leq 1,0$. Uma visão geral do que acontece quando caminhamos ao longo da linha $a = 0,6$ no espaço de parâmetros, é dada pela Fig. 3.6. Nela vemos o diagrama de bifurcações correspondente, bem como também o comportamento do maior expoente de Lyapunov. Para b decrescendo, com valores entre $1,0$ e $0,9$, o sistema diverge. Continuando o decrescimento de b , desde $0,9$ até $-0,067$, o sistema converge para uma solução assintótica tipo $P1D$. Para valores de b entre $-0,067$ e $-0,29$, a solução ainda é periódica, mas agora tipo $P2$. Para $b \approx -0,2933$, os dois pontos da órbita $P2$ tornam-se instáveis e bifurcam, dando origem a dois ciclos limite [Fig. 3.7(a)]. Aqui acontece a bifurcação de Naimark-Sacker da órbita $P2$, sendo que a partir deste ponto o comportamento do sistema passa a ser quase-periódico. Valores menores de b , por exemplo $b = -0,32$, levam a

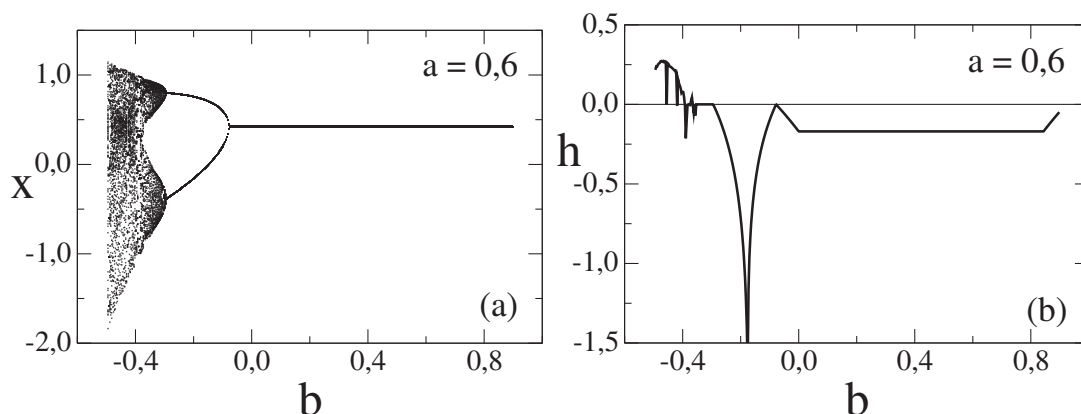


Fig. 3.6: (a) Diagrama de bifurcações para o modelo das Eqs. (3.1) e (3.2), com $a = 0,6$. 100 pontos foram utilizados no gráfico. (b) O maior expoente de Lyapunov, com a média sendo calculada sobre 10^5 iterações. Para ambos os gráficos, 500 valores de b foram considerados no intervalo. A iteração foi iniciada de $(x_0, y_0) = (0, 1234, 0, 5)$, com transiente igual a 5×10^4 .

um resultado similar [Fig. 3.7(b)], a diferença estando apenas no tamanho dos ciclos limite, agora maior, e na forma, agora um pouco distorcida. Conforme b decresce de $-0,32$ até $-0,38$ os ciclos limite continuam aumentando de tamanho e tem a forma mais distorcida ainda [Fig. 3.7(c)]. Para $b \approx -0,384$, repentinamente a trajetória converge para uma órbita de período 14 [Fig. 3.7(d)], imersa na região de regime quase-periódico. A órbita de período 14 existe até $b \approx -0,39$. Duas duplicações de período acontecem a seguir. Para $b = -0,391$ e $b = -0,392$, aparecem órbitas de período 28 e 56, respectivamente. A partir de $b = -0,393$, e num pequeno intervalo de valores, aparecem 14 órbitas invariantes [Figs. 3.8(a) e 3.8(b)], provavelmente originadas, cada uma delas, num dos 14 pontos da órbita de mesmo período que apareceu antes. Para $b = -0,398$, os 14 *pedaços* se agrupam para formar as duas estruturas da Fig. 3.8(c), que também podem ser pensadas como originadas nos dois ciclos limite. Em cada uma das estruturas da Fig. 3.8(c) há a formação de várias ilhas conectadas, nas posições ocupadas pelos segmentos mais densos da trajetória, o que pode ser interpretado como significando regiões do espaço de fase onde as trajetórias dobram-se sobre elas mesmas [49]. Se b decresce mais ainda, abaixo de $-0,412$ as duas estruturas crescem e sobrepoem-se uma a outra [Fig. 3.8(d)]. Este comportamento sobrevive até $b = -0,493$, sendo que a partir deste ponto o sistema novamente diverge.

Procedendo na investigação do espaço de fase do acoplamento, caminhamos

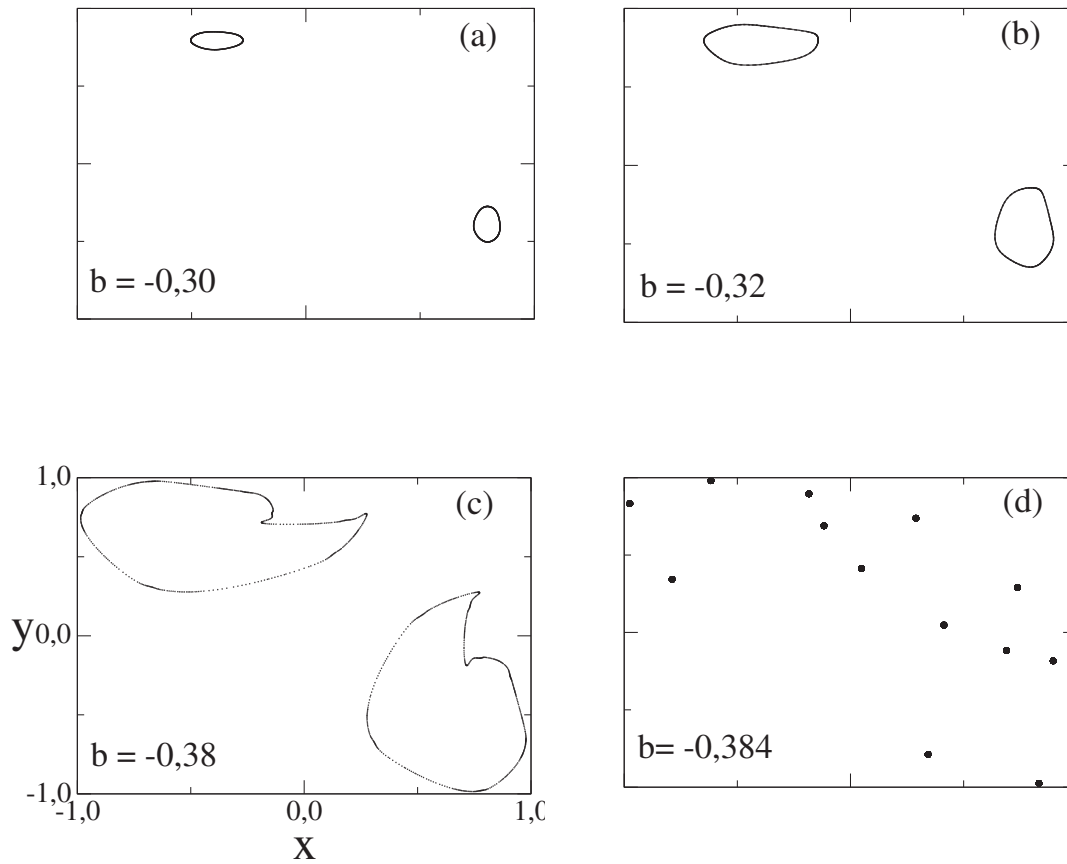


Fig. 3.7: Espaço de fase para o acoplamento das Eqs. (3.1) e (3.2), com $a = 0,6$. O sistema foi iniciado de $(x_0, y_0) = (0,1234, 0,5)$, com transiente de 5×10^4 iterações e utilização de 1000 pontos. (a) $b = -0,30$, (b) $b = -0,32$, (c) $b = -0,38$, (d) $b = -0,384$.

agora ao longo de uma linha horizontal no espaço de parâmetros, com $b = 0,25$ e $-1,0 \leq a \leq 3,0$. A Fig. 3.9 mostra o diagrama de bifurcações correspondente, bem como o comportamento do maior entre os dois expoentes de Lyapunov. Para valores de a no intervalo compreendido entre $-1,0$ e $-0,184$, o sistema diverge. No próximo intervalo, onde $-0,184 < a < 0,75$, o sistema converge para uma solução tipo $P1D$. Em $a = 0,75$ acontece uma bifurcação $1 \rightarrow 2$, gerando uma órbita tipo $P2D$, que se mantém até $a = 1,06248$. A partir deste ponto, e até $a \approx 1,179648$, a órbita é tipo $P4$, portanto com o sistema oscilando entre quatro pontos fora da diagonal. Para $a \approx 1,179648$ a órbita $P4$ deixa de ser estável e sofre uma bifurcação de Naimark-Sacker, originando quatro ciclos limite [Fig. 3.10(a)],

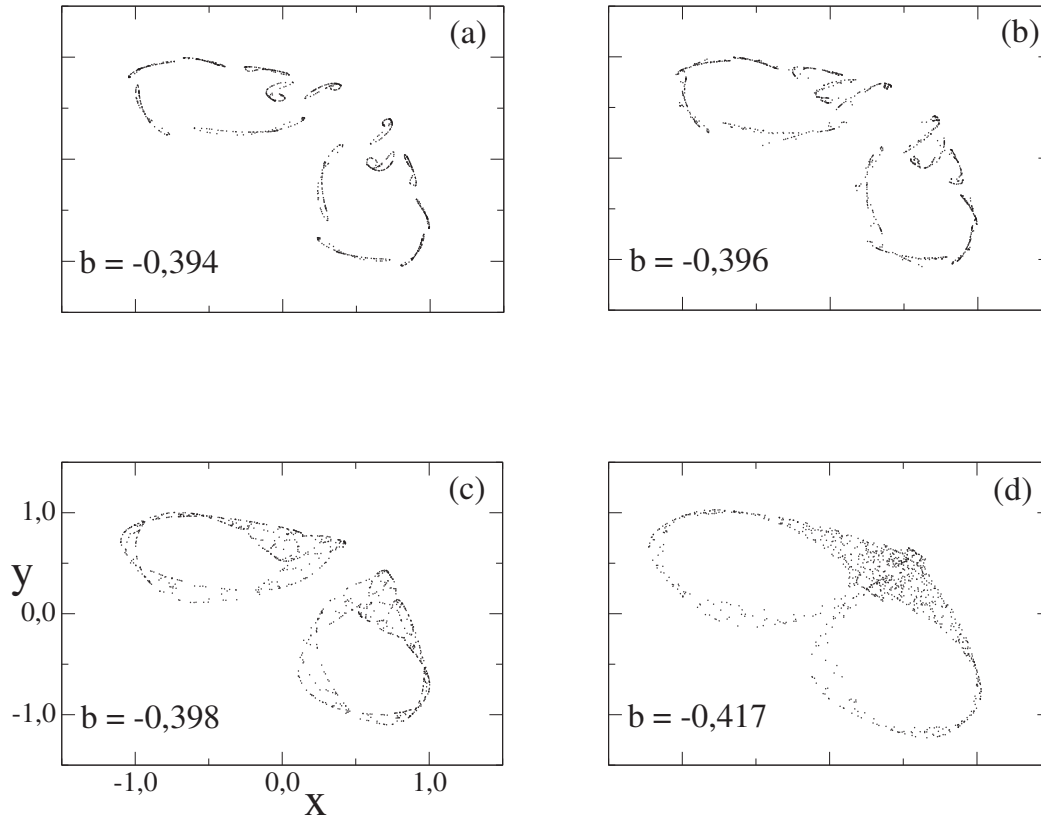


Fig. 3.8: Como a Fig. 3.7. (a) $b = -0,394$, maior expoente de Lyapunov ($\lambda_>$) igual a 0,0498. (b) $b = -0,396$, $\lambda_> = 0,0458$. (c) $b = -0,398$, $\lambda_> = 0,0778$. (d) $b = -0,417$, $\lambda_> = 0,1621$.

significando o início do regime quase-periódico. Incrementando ainda mais o valor de a , acontece como antes, ou seja, os ciclos limite crescem de tamanho e se deformam. Eventualmente são encontradas regiões de periodicidade em meio ao regime quase-periódico. Um exemplo é a região de período 68 [Fig. 3.10(b)], que se estende desde $a \approx 1,21261$ até $a \approx 1,21312$. Outras regiões periódicas aparecem: $P92$ para $1,2180 < a < 1,21824$, $P104$ para $a = 1,21944$ e $P116$ para $1,21984 < a < 1,22032$. A região caótica [Fig. 3.10(c)], que se estende desde $a \approx 1,27685$ até $a \approx 1,5585$, é atingida via uma cascata de bifurcações 18×2^n , iniciada em $a \approx 1,27506$. Há ainda duas regiões de hipercaos imersas nesta região caótica: (i) uma que se estende desde $a \approx 1,31$ até $a \approx 1,37$, e outra, (ii) que vai desde $a \approx 1,44$ até $a \approx 1,55$ [Fig. 3.10(d)]. Mais a frente encontramos a mesma região de período 2, com pontos

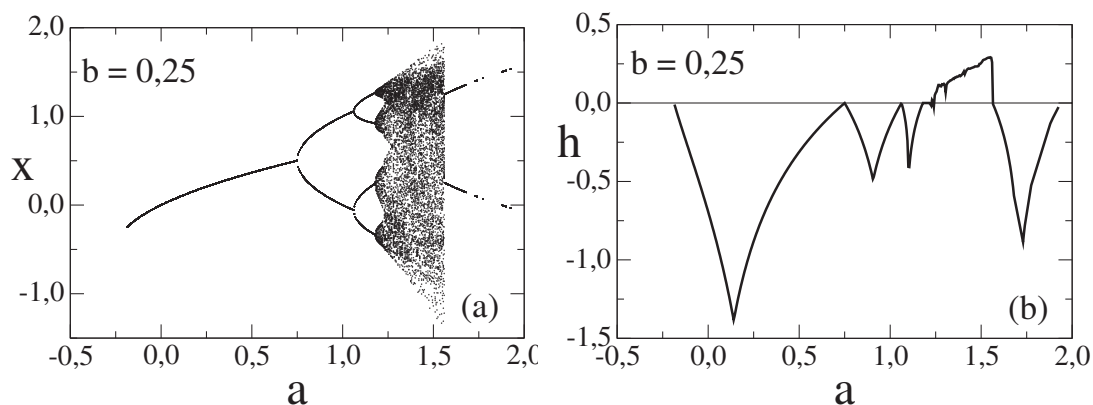


Fig. 3.9: (a) Diagrama de bifurcações e (b) maior expoente de Lyapunov para os mapas acoplados das Eqs. (3.1) e (3.2), com $b = 0,25$. Os gráficos foram construídos nas mesmas condições que aqueles da Fig. 3.6.

orbitais fora da diagonal, já encontrada na investigação para a constante, aqui para valores aproximados de a entre 1,5585 e 1,92. Finalmente, para $a > 1.92$, o sistema diverge.

3.3.3 Formas Normais

Embora existam muitos trabalhos [41, 42, 43, 44, 50, 51] descrevendo a dinâmica de dois mapas quadráticos acoplados simetricamente, a determinação de formas normais próximo a bifurcação de Naimark-Sacker ainda não foi relatada para este tipo de acoplamento. O método das formas normais [4, 47] estabelece uma maneira de encontrar um sistema de coordenadas no qual seja possível simplificar um sistema dinâmico próximo a uma bifurcação. Tal simplificação envolve procedimentos que objetivam dois aspectos: redução da dimensionalidade e eliminação da não linearidade. Nosso propósito aqui é utilizar o método como uma maneira alternativa de caracterizar a bifurcação de Naimark-Sacker sofrida pela órbita $P2$. Para isso, vamos derivar uma forma normal para o mapa obtido após a segunda iterada das Eqs. (3.1) e (3.2), e interpretar seus coeficientes. Começamos revendo as condições necessárias e suficientes para obtenção da forma normal.

De acordo com o teorema 3.5.2 da página 162 da Ref. [4], as condições (com a

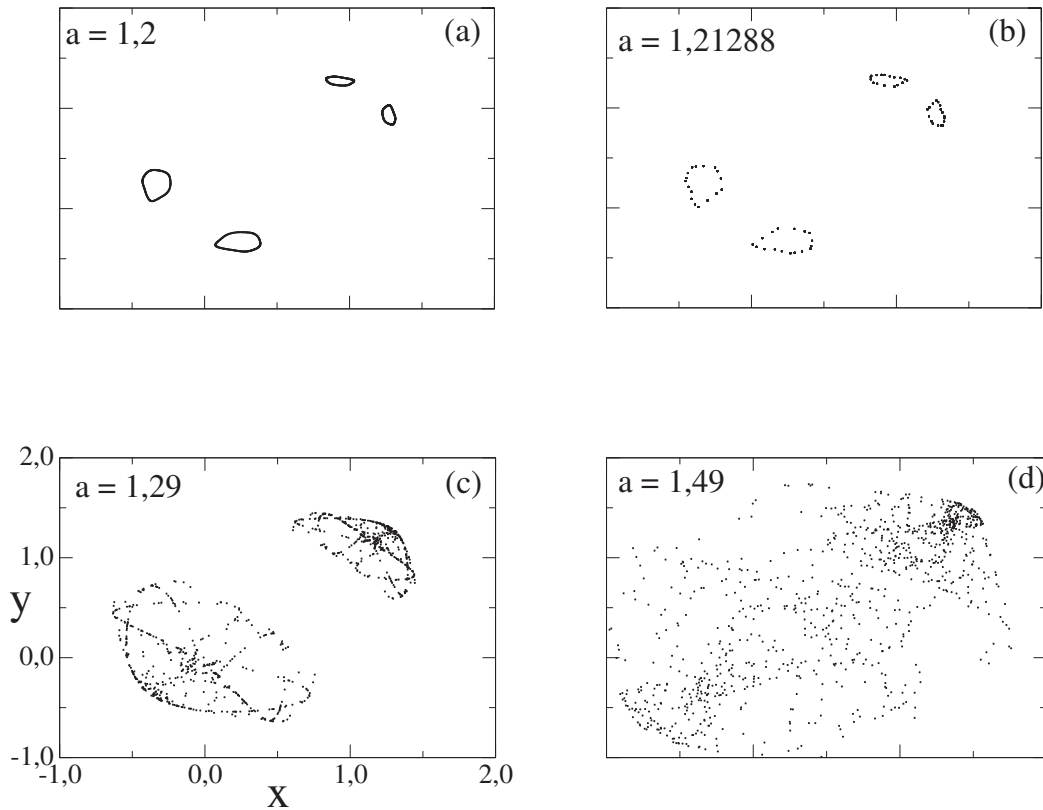


Fig. 3.10: Igual a Fig. 3.8. (a) Os quatro ciclos limite, $a = 1,2$. (b) Uma órbita periódica, $a = 1,21288$, $\lambda_1 = -0,0084$ e $\lambda_2 = -0,1104$. (c) Caos, $a = 1,29$, $\lambda_> = 0,1166$. (d) Hipercaos, $a = 1,49$, $\lambda_1 = 0,249$, $\lambda_2 = 0,122$.

sendo o parâmetro de bifurcação e b sendo considerado fixo)

- (i) $|\lambda_{1,2}(a_{NS}, b)| = 1$ mas $\lambda_{1,2}^j(a_{NS}, b) \neq 1$ para $j = 1, 2, 3, 4$,
- (ii) $\frac{d}{da}|\lambda_{1,2}(a_{NS})| = d \neq 0$,

garantem a transformação do mapa obtido após a segunda iterada das Eqs. (3.1) e (3.2) para uma forma normal, que em coordenadas polares tem o aspecto

$$r_{t+1} = r_t[1 + d(a - a_{NS}) + cr_t^2], \quad (3.62)$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t + f + hr_t^2, \quad (3.63)$$

enquanto a condição

$$(iii) \quad c \neq 0$$

garante a existência de curvas fechadas invariantes no espaço de fase, curvas estas que são os ciclos limite típicos presentes na bifurcação de Naimark-Sacker. Nas Eqs. (3.62) e (3.63) r e θ são as coordenadas polares usuais, $c = c(b)$ e $d = d(b)$ são coeficientes cujos sinais informam sobre a direção e estabilidade das órbitas periódicas bifurcando, $f = f(b)$ e $h = h(b)$ são coeficientes que dão informação assintótica sobre números de rotação, e a_{NS} é o valor do parâmetro a no ponto onde ocorre a bifurcação.

Aplicação da condição (i) deu origem, como vimos antes, à Eq. (3.58), podendo-se mostrar facilmente que $\lambda_{1,2}^j(a_{NS}, b) \neq 1$ para $j = 1, 2, 3, 4$, desde que o acoplamento b não assuma qualquer dos valores $-1, 0$ e 1 . De $|\lambda_{1,2}| = 2(-2 + 2a - 5b - 2b^2)$, obtida da Eq. (3.55) [ou da (3.56)], temos que

$$\frac{d}{da} |\lambda_{1,2}(a_{NS})| = 4 = d \neq 0.$$

Vemos, portanto, que ambas as condições, (i) e (ii), estão satisfeitas. Falta o teste da condição (iii), que envolve o cálculo do coeficiente c .

Para derivar uma expressão para o coeficiente c da Eq. (3.62), utilizamos o sistema que se obtém iterando duas vezes o mapa definido pelas Eqs. (3.1) e (3.2), que é dado por

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= -x^4 + 2bx^3 + (-b + 2a - 2by - b^2)x^2 + [2b^2 - 2(a - by)b]x + a \\ &\quad - (a - by)^2 + b(-2by + y^2), \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= -y^4 + 2by^3 + (-b + 2a - 2bx - b^2)y^2 + [2b^2 - 2(a - bx)b]y + a \\ &\quad - (a - bx)^2 + b(-2bx + x^2). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Isto se faz necessário, porque estamos estudando a bifurcação de Naimark-Sacker a partir de uma órbita de período 2, para o sistema definido pelas Eqs. (3.1) e (3.2), e a teoria de formas normais se aplica a bifurcações de órbitas de período 1. Os pontos fixos estáveis do mapa definido pelas Eqs. (3.64) e (3.65) são exatamente os pontos da órbita de período 2 do mapa original.

Utilizando $a_{NS} = b^2 + 10b/4 + 5/4$, resultado obtido da Eq. (3.58), escrevemos os autovalores sobre a linha de bifurcação no espaço de parâmetros como

$$\lambda_{1,2} = 2b^2 - 1 \pm i2\beta b, \quad (3.66)$$

onde $\beta \equiv \sqrt{1 - b^2}$. Vemos então que para $|b| < 1$, λ_1 e λ_2 são complexos conjugados,

podendo ser representados na forma polar como

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm if}, \quad (3.67)$$

onde

$$f = f(b) = \arctan \frac{2\beta b}{(2b^2 - 1)} \quad (3.68)$$

é o mesmo da Eq. (3.63), ou seja, um dos coeficientes da forma normal.

Fazemos também a mudança de coordenadas

$$(x', y') = (x - x_7, y - x_8), \quad (3.69)$$

com x_7 e x_8 dados pelas Eqs. (3.47) e (3.48), mudança esta que translada a bifurcação para a origem do novo sistema de coordenadas (x', y') .

Os autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 são dados, respectivamente, por

$$\begin{pmatrix} -i \frac{(b+1+\eta)}{\beta} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} i \frac{(b+1+\eta)}{\beta} \\ 1 \end{pmatrix},$$

onde $\eta \equiv \sqrt{2(b+1)}$. Com eles é possível construir uma nova base, que permite obter a transformação de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(b+1+\eta)}{\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

cujas transformações inversa é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta}{(b+1+\eta)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Sob estas transformações, as Eqs. (3.64) e (3.65) resultam no mapeamento

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos(f) & -\sin(f) \\ \sin(f) & \cos(f) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(u, v) \\ G(u, v) \end{pmatrix},$$

que separa a parte linear, em u e v , da não linear, esta última estando agora incluída

exclusivamente nos termos de $F(u, v)$ e $G(u, v)$, com

$$\begin{aligned}
F(u, v) = & \{ [-b^3 - 15b^2 - 31b - 17 - 4b(b+4)\eta] u^4 \\
& + (2b^3 + 6b^2 - 2b - 6 - 4\beta^2\eta) \beta u^3 \\
& + [b^5 - 2b^4 - 10b^3 - 4b^2 + 9b + 6 + (2b^4 + 6b^3 - 2b^2 - 6b) v \\
& + (-3b^3 - 5b^2 + 3b + 5 - 4v\beta^2b) \eta] u^2 \\
& + 2(-b^3 + b^2 + b - 1) \beta b u v \\
& + (-b^5 + 2b^4 - 2b^2 + b) v^2 \} / [(b-1)\eta - \beta^2] \beta
\end{aligned} \tag{3.70}$$

e

$$\begin{aligned}
G(u, v) = & - \{ \beta^2 v^4 \\
& + [2\beta^2\eta + 2(-b^3 - b^2 + b + 1)] v^3 \\
& + [2(-b^2 - b - \eta b) \beta u - b^4 - 3b^3 - b^2 + 3b + 2 \\
& + (-2b^3 - 3b^2 + 2b + 3) \eta] v^2 \\
& + [-4(1+b)\eta - 2b^2 - 8b - 6] \beta b u v \\
& + (b^4 + 3b^3 - b^2 - 3b - 2\beta^2\eta b) u^2 \} / \beta^2.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

O coeficiente c calcula-se a partir da equação [4, 52]

$$c = \Re \left[-\frac{(1-2\lambda)\bar{\lambda}^2}{1-\lambda} \xi_{11} \xi_{20} - \frac{|\xi_{11}|^2}{1-\lambda^3} - \frac{2|\xi_{02}|^2}{1-\lambda} + \bar{\lambda} \xi_{21} \right], \tag{3.72}$$

onde $\Re[z]$ significa parte real do número complexo z ,

$$\xi_{20} = \frac{1}{8}[F_{uu} - F_{vv} + 2G_{uv} + i(G_{uu} - G_{vv} - 2F_{uv})], \tag{3.73}$$

$$\xi_{11} = \frac{1}{4}[F_{uu} + F_{vv} + i(G_{uu} + G_{vv})], \tag{3.74}$$

$$\xi_{02} = \frac{1}{8}[F_{uu} - F_{vv} - 2G_{uv} + i(G_{uu} - G_{vv} + 2F_{uv})], \tag{3.75}$$

$$\xi_{21} = \frac{1}{16}[F_{uuu} + F_{uvv} + G_{uuv} + G_{vvv} + i(G_{uuu} - G_{uvv} - F_{uuv} - F_{vvv})], \tag{3.76}$$

e F_{uv} significa $(\partial^2 F / \partial u \partial v)(0, 0)$, etc. Teremos

$$\begin{aligned}
c = & [36b^4 + 210b^3 + 454b^2 + 430b + 150 \\
& + (6b^4 + 67b^3 + 209b^2 + 253b + 105) \eta] / 2(b-1)(b+1+\eta)^2,
\end{aligned} \tag{3.77}$$

cujos gráficos aparecem na Fig. 3.11, onde vemos que em todo o intervalo interessante de b ($-1 < b < 1$) temos $c < 0$. Este resultado para c , somado ao acima obtido para

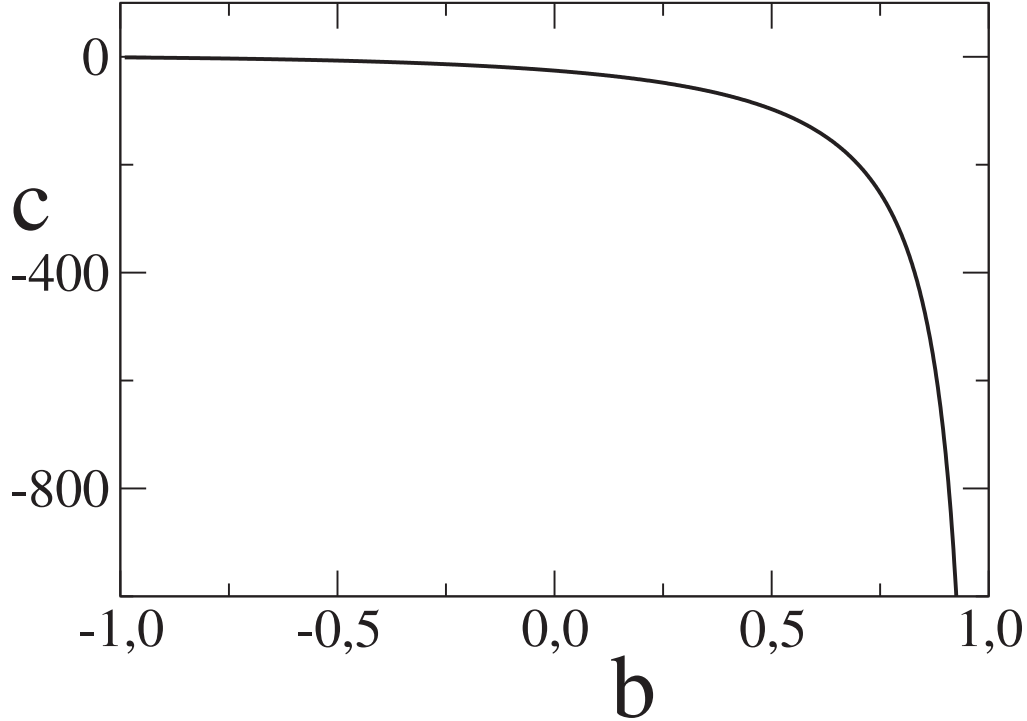


Fig. 3.11: Variação do coeficiente c com o parâmetro b , para pontos sobre a linha de Naimark-Sacker.

d ($d = 4 > 0$), permite concluir, de acordo com a Ref. [47], que a órbita $P2$ original é estável para $a < a_{NS}$, tornando-se instável para $a > a_{NS}$. Mais ainda, permite concluir que há uma curva fechada invariante circundando cada um dos dois pontos da órbita, para $a > a_{NS}$ e desde que $|(a - a_{NS})|$ seja pequeno. Vemos, portanto, que a condição (iii) [$c(b) \neq 0$] também é satisfeita pelo sistema em estudo, ficando comprovada a ocorrência da bifurcação de Naimark-Sacker.

Para completar o cálculo dos coeficientes da forma normal, resta calcular h , que é dado por [52]

$$h = \Im \left[-\frac{(1-2\lambda)\bar{\lambda}^2}{1-\lambda} \xi_{11} \xi_{20} - \frac{|\xi_{11}|^2}{1-\lambda^3} - \frac{2|\xi_{02}|^2}{1-\lambda} + \bar{\lambda} \xi_{21} \right], \quad (3.78)$$

onde $\Im[z]$ significa parte imaginária do número complexo z . Teremos

$$h = - \left[(4b^3 + 8b^2 - b - 3) (6b + \eta b + 10 + 7\eta) (3b + 5) \beta b \right] / (-1 + b)^2 (b + 1 + \eta)^2 (4b^2 - 1). \quad (3.79)$$

Paralelamente à informação sobre a ocorrência da bifurcação de Naimark-Sacker, a forma normal que, lembramos, é dada por

$$(r, \theta) = (r(1 + d(a - a_{NS}) + cr^2), \theta + f + hr^2) \quad (3.80)$$

pode fornecer outras informações. Uma delas diz respeito ao raio do ciclo limite, que se obtém da Eq. (3.62), fazendo $r_{t+1} = r_t = r$:

$$r = \sqrt{-\frac{d}{c}(a - a_{NS})}. \quad (3.81)$$

Vale observar que r é sempre real, uma vez que, como concluímos acima, as curvas invariantes estáveis existem apenas para $a > a_{NS}$, $d > 0$, e $c < 0$.

Limite de validade do raio r , obtido analiticamente e dado pela Eq. (3.81), pode ser melhor observado na Fig. 3.12, onde são plotadas duas curvas. Ambas mostram a variação do raio r com o parâmetro de bifurcação a , para $b = -0,45$. A curva tracejada corresponde ao caso analítico, enquanto a contínua ao caso numérico. As curvas coincidem apenas até pouco além de $a = 0,3275$, valor para o qual a bifurcação de Naimark-Sacker acontece. Isto mostra o caráter local da forma normal derivada, ou seja, que ela serve para descrever o sistema apenas em pontos muito próximos da bifurcação. Conforme nos afastamos do local de ocorrência da bifurcação, os ciclos limite, inicialmente de forma elíptica, sofrem deformações, o que explica as *irregularidades* presentes na curva numérica (contínua). Duas regiões periódicas são nela mostradas, as de período 6 e 14, com o movimento quase-periódico se estendendo até $a \approx 0,492$. A partir daí, o movimento é caótico.

Outra informação possível de ser obtida da forma normal diz respeito ao número de rotação. Substituindo r conforme dado pela Eq. (3.81) na Eq. (3.63), teremos que a rotação rígida sobre o círculo invariante será dada por

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \alpha(a), \quad (3.82)$$

onde

$$\alpha(a) = f - \frac{hd}{c}(a - a_{NS}) \quad (3.83)$$

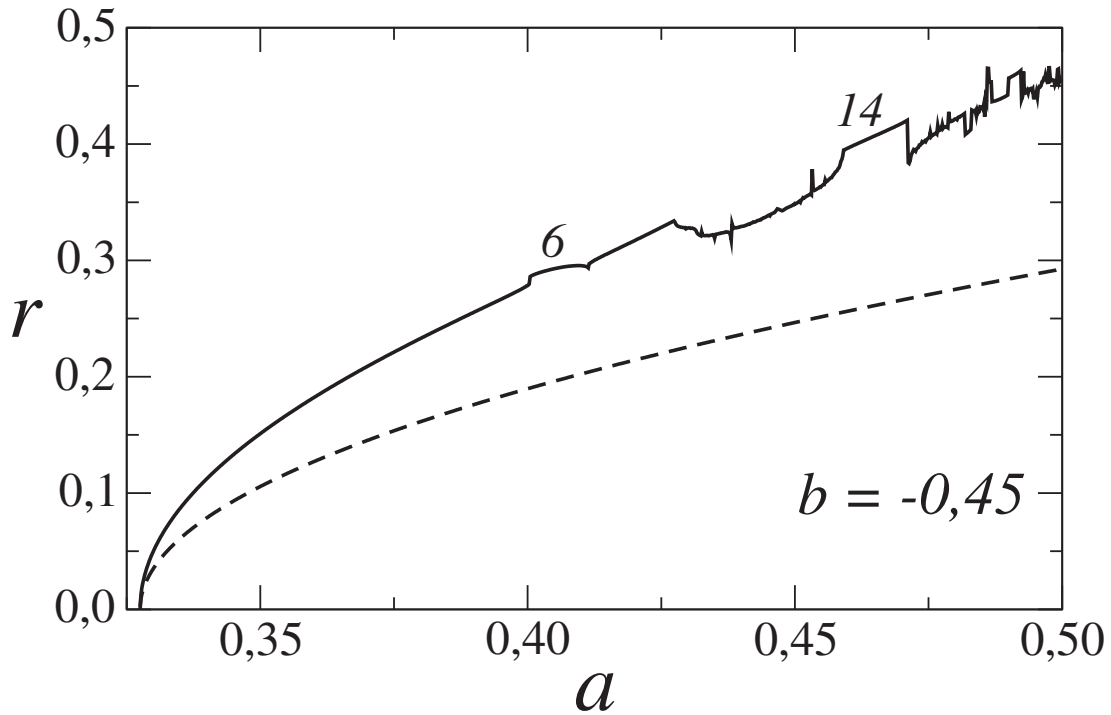


Fig. 3.12: Raios de ciclo-limite como função do parâmetro de bifurcação a , obtidos analiticamente (linha tracejada) e numericamente (linha contínua).

é o número de rotação que, se h , d , e c forem diferentes de zero, aparece como uma função linear do parâmetro a . Para pontos sobre a linha de Naimark-Sacker, ou seja, para $a = a_{NS}$, resulta

$$\alpha_{a_{NS}}(b) = f(b). \quad (3.84)$$

Há dois casos para considerar, dependendo da razão $\alpha(a)/2\pi$:

1. Quando $\alpha(a)/2\pi = m/n$ é um número racional, o regime é periódico. Dizemos então que o sistema está travado, ou que existe sincronização.
2. Quando $\alpha(a)/2\pi$ é um número irracional, o regime é dito quase-periódico.

A Fig. 3.13 mostra uma ampliação da região em torno do domínio de período 10 da Fig. 3.5. Este domínio é um exemplo de estado travado. Como dissemos antes, a região é similar às estruturas tipo língua que aparecem no mapa do círculo, as línguas

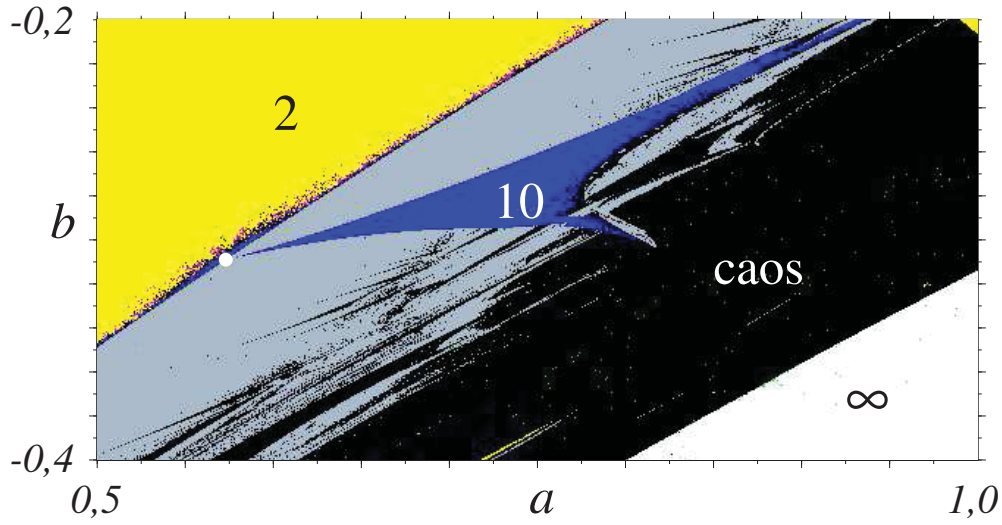


Fig. 3.13: Ampliação de uma pequena região da Fig. 3.5, mostrando a região das órbitas $P2$, a região cinza de quase-periodicidade, a região de caos, além das regiões de estado travado $P10$ e de divergência.

de Arnold. Tais línguas são regiões periódicas do plano de parâmetros, mergulhadas na região de quase-periodicidade, onde o movimento é travado, isto é, onde o número de rotação (dividido por 2π) é um número racional. Nas regiões Entre as línguas o número de rotação (dividido por 2π) é irracional. O ponto na Fig. 3.13 onde a língua de período 10 parece nascer sobre a linha de Naimark-Sacker, pode ser determinado analiticamente, substituindo f como obtido da Eq. (3.68) na Eq. (3.84). Teremos então que

$$\alpha_{a_{NS}}(b) = \arctan \frac{2\beta b}{(2b^2 - 1)}. \quad (3.85)$$

Fazendo $\alpha_{a_{NS}}/2\pi = 1/10$, ganhamos $b = -0,3090$. Este valor inserido na Eq. (3.58) (linha de Naimark-Sacker) resulta $a = 0,5730$. O ponto $(0,5730, -0,3090)$ aparece em branco na Fig. 3.13.

Capítulo 4

Perda de Sincronização Caótica em Dois Mapas Quadráticos Acoplados

Neste capítulo consideramos o mesmo acoplamento utilizado no capítulo anterior, mas com o parâmetro de não linearidade $a = 1,55$, o que caracteriza cada um dos osciladores individuais como caótico. Mostramos que um estado de completa sincronização caótica pode ser atingido, e que, em conseqüência, o movimento do sistema fica restrito a um subespaço invariante de menor dimensão que o espaço de fase total xy , a saber, a diagonal $y = x$. Alguns resultados foram obtidos anteriormente para os dois mapas quadráticos idênticos acoplados [53, 54, 55, 56], para diferentes tipos de acoplamento, no que diz respeito aos mecanismos que levam à perda de sincronização caótica. Na sua grande maioria, tais resultados foram obtidos numericamente. Aqui vamos um pouco além disto, derivando analiticamente, entre outros resultados, as curvas de desestabilização transversal para as órbitas do ponto fixo e de período 2. Investigamos o mecanismo de perda da sincronização caótica, do ponto de vista de bifurcações de órbitas periódicas tipo sela imersas no atrator caótico. Mostramos analiticamente, para órbitas de períodos baixos, que tais bifurcações são tipo duplicação de período supercrítica, ou tipo forquilha subcrítica, ambas sendo responsáveis pelo *riddling* da bacia de atração, fenômeno que acontece quando órbitas imersas no atrator caótico sincronizado tornam-se transversalmente instáveis, enquanto o atrator permanece atrativo na média.

4.1 Objetivo

Fujisaka e Yamada [57] mostraram como dois sistemas dinâmicos caóticos idênticos podem atingir um estado de sincronização, em virtude da variação do parâmetro de acoplamento. Mostraram também que o movimento caótico sincronizado do sistema acoplado tem lugar sobre um subespaço invariante do espaço de fase total. Para dois mapas unidimensionais idênticos, tipo aqueles das Eqs. (3.1) e (3.2), tal subespaço invariante do espaço de fase total xy é a diagonal $y = x$.

A estabilidade do movimento caótico sincronizado é uma questão relevante, muitos critérios já tendo sido estabelecidos na literatura para caracterizá-lo. Dentre os critérios mais populares e largamente utilizados, está aquele que usa expoentes de Lyapunov como uma medida da expansão, ou contração, de pequenos deslocamentos ao longo da trajetória sincronizada. Mais a frente, estabeleceremos com detalhes o critério que utilizaremos para caracterizar a estabilidade assintótica do estado caótico sincronizado. O objetivo central deste estudo é investigar quais as condições que levam o sistema dinâmico das Eqs. (3.1) e (3.2), que escrevemos novamente abaixo,

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= a - x_t^2 + b(x_t - y_t), \\y_{t+1} &= a - y_t^2 + b(y_t - x_t),\end{aligned}$$

a sair de estados caóticos sincronizados.

4.2 Metodologia

Para descrever a dinâmica no subespaço de sincronização, bem como na direção transversal a ele, começamos procedendo uma transformação de coordenadas do tipo

$$w = \frac{1}{2}(x + y) \quad , \quad z = \frac{1}{2}(x - y). \quad (4.1)$$

No novo sistema de coordenadas wz , o mapa das Eqs. (3.1) e (3.2) se transforma em

$$w_{t+1} = a - w_t^2 - z_t^2, \quad (4.2)$$

$$z_{t+1} = 2 z_t (b - w_t). \quad (4.3)$$

Das Eqs. (4.2) e (4.3) vemos que para $z = (x - y)/2 = 0$, condição esta que define exatamente o subespaço de sincronização caótica (eixo w), qualquer condição inicial localizada neste subespaço resultará numa órbita caótica (w_1, w_2, w_3, \dots) que jamais

escapará de lá. Isto permite concluir que $z = (x-y)/2 = 0$ é um subespaço invariante para o mapa das Eqs. (3.1) e (3.2).

Em relação às coordenadas originais, x e y , as novas coordenadas, w e z , correspondem às autodireções $\vec{u}_1 = (1, 1)$ e $\vec{u}_2 = (1, -1)$, respectivamente. Como sabido, a cada uma destas direções estão associados autovalores, λ_1 e λ_2 , a partir dos quais é possível calcular expoentes de Lyapunov. Para o caso bidimensional tais expoentes são definidos por

$$h_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\lambda_j^n|, \quad j = 1, 2, \quad (4.4)$$

onde os $|\lambda_j^n|$ são os módulos dos autovalores da matriz M definida por

$$M = \prod_{i=1}^n J(x_i), \quad (4.5)$$

com os $J(x_i)$ sendo as matrizes jacobianas calculadas nos pontos x_i da trajetória.

Como vimos acima, ao longo do eixo w a dinâmica do mapa das Eqs. (3.1) e (3.2) coincide com a do mapa quadrático. Assim sendo, se $A = \{x = y \in \mathbb{R}^1\}$ for um atrator caótico do mapa quadrático, então A será um conjunto caótico invariante para o sistema acoplado, e atrairá pontos da sua vizinhança unidimensional ao longo da diagonal $y = x$. A questão que se coloca agora é: será A também um atrator no que diz respeito à sua vizinhança bidimensional? Noutras palavras, será A um atrator no plano? A resposta à questão envolve investigar a variação do expoente de Lyapunov correspondente aos autovalores associados à direção transversal à diagonal $y = x$ (ou $z = 0$), com o parâmetro de acoplamento b . Na literatura tal expoente é dito *expoente de Lyapunov transversal*, que aqui representaremos por h_\perp . Se $h_\perp < 0$, o conjunto A atrai a vizinhança bidimensional, caracterizando a estabilidade assintótica do atrator caótico.

A Fig. 4.1 mostra, na cor cinza, alguns intervalos de estabilidade no espaço de parâmetros (a, b) . Foi obtida pela discretização do intervalo numa malha de 1200×750 pontos, determinando para cada um deles o correspondente expoente de Lyapunov. Para valores de a abaixo do ponto de acumulação de Feigenbaum ($a^* = 1.4011\dots$), o mapa individual apresenta comportamento periódico e, em consequência, o comportamento sincronizado também é periódico. Mesmo fenômeno ocorre para as janelas periódicas que o mapa individual apresenta para $a > a^*$.

Pontos onde eventualmente ocorra mudança no sinal de h_\perp , com consequente passagem pelo zero, são pontos de bifurcação *blowout* [58, 59]. Fenômenos tipo ba-

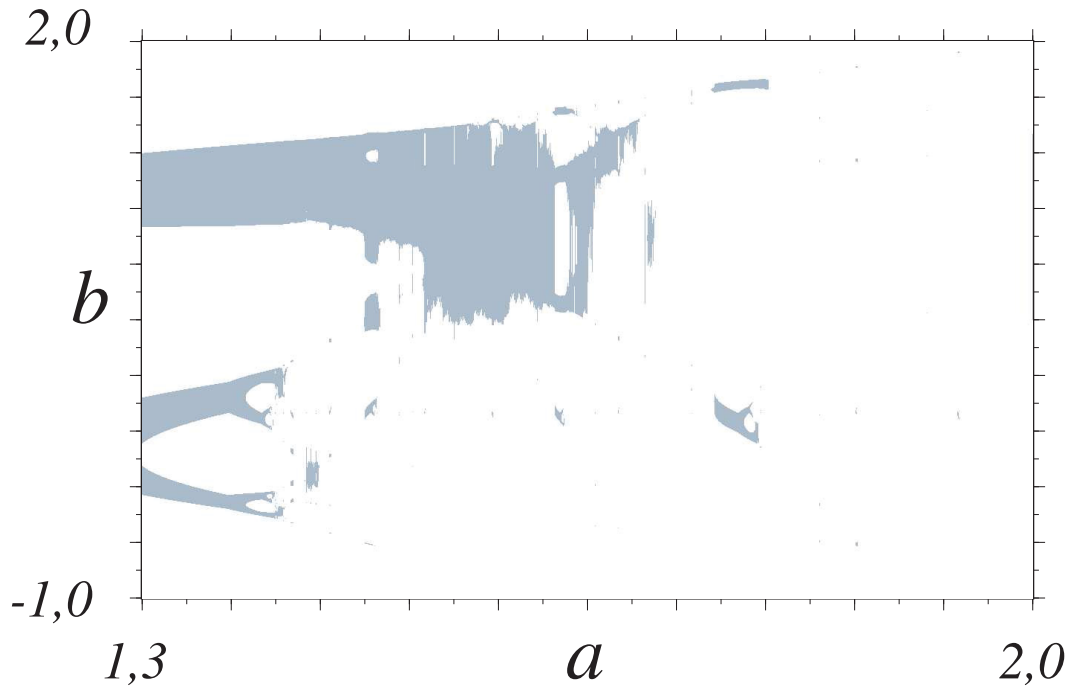


Fig. 4.1: Regiões (cinzas) no plano de parâmetros, nas quais o expoente de Lyapunov transversal é menor que zero.

cias de atração crivadas [58, 59, 60] e intermitência *on-off* [61] são então observados, dependendo do lado considerado da bifurcação *blowout*. Intermitência *on-off* ocorre de um lado da bifurcação *blowout*, para um valor positivo, pequeno, de h_{\perp} , enquanto as bacias de atração crivadas acontecem do outro lado, onde o valor de h_{\perp} é numericamente pequeno e negativo. Nas próximas seções investigaremos em detalhes o mecanismo *bifurcacional* da perda de estabilidade do regime caótico sincronizado para o sistema das Eqs. (3.1) e (3.2), usando análise de estabilidade linear.

4.3 Resultados

A Fig. 4.2 mostra o comportamento do expoente de Lyapunov transversal, h_{\perp} , como função do parâmetro de acoplamento b , para $a = 1,55$, valor para o qual o mapa quadrático exibe comportamento caótico. Os pontos 1 e 2, onde h_{\perp} muda de sinal são os pontos onde ocorre a bifurcação *blowout*, sendo portanto o estado caótico sincronizado pelo menos fracamente estável [53] para o intervalo de valores

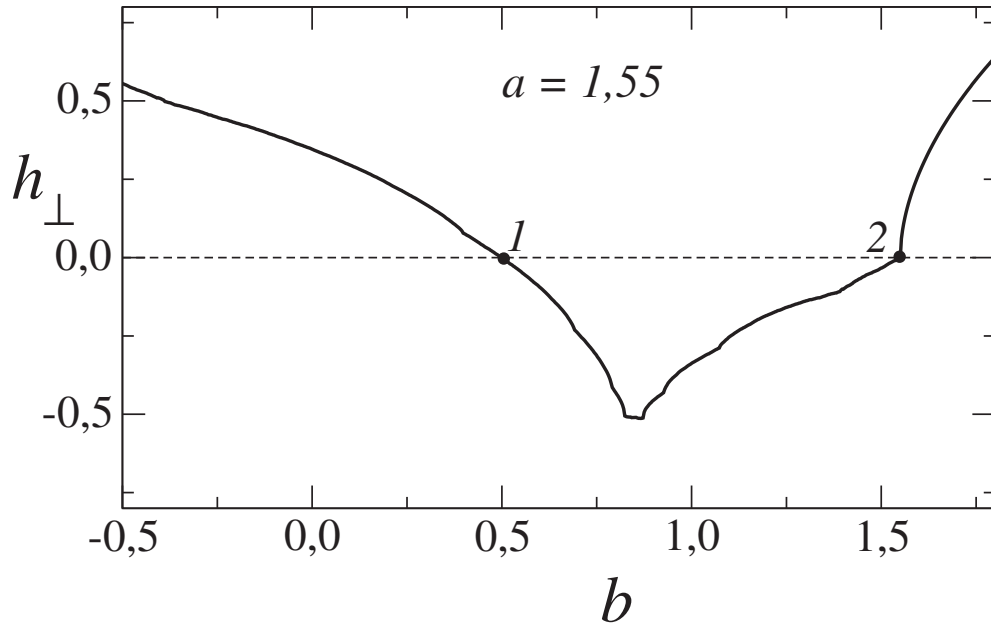


Fig. 4.2: Variação do expoente de Lyapunov transversal h_{\perp} com o parâmetro de acoplamento b , para $a = 1,55$. Os pontos 1 e 2 limitam a região de valores de b para a qual o atrator caótico sincronizado é pelo menos fracamente estável.

de b correspondente, qual seja $0,50 \lesssim b \lesssim 1,55$. Vemos então, da Fig. 4.2, que no sistema das Eqs. (3.1) e (3.2), para $a = 1,55$, a região de sincronização caótica tem um intervalo finito, com a perda de estabilidade do atrator caótico ocorrendo tanto no sentido de crescimento quanto no de decréscimo do acoplamento b . Veremos na seqüência que o mecanismo de destruição do movimento caótico sincronizado está relacionado com bifurcações de órbitas periódicas tipo sela imersas no atrator caótico, órbitas estas que determinam a estrutura do próprio atrator. Tais órbitas, que para a cascata de bifurcações 1×2^n do mapa quadrático são costumeiramente representadas por $2^n C^0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), são instáveis na direção do eixo de sincronização caótica ($y = x$), mas estáveis na direção perpendicular a ele. Estas são exatamente as órbitas antes estáveis do mapa quadrático, que agora, para $a = 1,55$, após terem bifurcado por duplicação de período, tornaram-se todas instáveis. Começamos pela órbita do ponto fixo, agora instável, C^0 .

4.3.1 Bifurcação da órbita C^0

Utilizando o sistema transformado das Eqs. (4.2) e (4.3), os autovalores correspondentes às autodireções $\vec{u}_1 = (1, 1)$ e $\vec{u}_2 = (1, -1)$ do sistema original são calculados da equação

$$|J(w, 0) - \lambda I| = 0, \quad (4.6)$$

onde I é a matriz identidade 2×2 , λ é o autovalor, e $J(w, 0)$ é a matriz jacobiana calculada em $z = 0$,

$$J(w, 0) = \begin{pmatrix} -2w & 0 \\ 0 & 2(b - w) \end{pmatrix}.$$

Os autovalores são dados respectivamente por

$$\lambda_1 = -2w \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2(b - w). \quad (4.7)$$

A condição de estabilidade transversal para o ponto fixo C^0 , para o qual $w = w_0 = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2$, está expressa na exigência do módulo de λ_2 ser menor do que 1, o que resulta em

$$\frac{-2 + \sqrt{1 + 4a}}{2} < b < \frac{\sqrt{1 + 4a}}{2}, \quad (4.8)$$

para o intervalo no qual o ponto fixo C^0 é transversalmente estável. A Fig. 4.3 ilustra esta situação, mostrando a região no espaço de parâmetros onde o ponto fixo diagonal $(x, y) = (w_0, w_0)$ é transversalmente estável. Se $a > 0,75$ (valor para o qual acontece a bifurcação $1 \rightarrow 2$ no mapa quadrático), e b cair fora do intervalo acima, teremos $|\lambda_1| > 1$ e $|\lambda_2| > 1$, significando que C^0 é um nó repulsor. Isto quer dizer que qualquer trajetória inicializada próxima do ponto fixo irá afastar-se dele.

Quando acontece a bifurcação transversal do ponto fixo C^0 , o autovalor λ_2 pode assumir um de dois valores, a saber -1 e $+1$. Se $\lambda_2 = -1$ a bifurcação é do tipo duplicação de período, enquanto que se $\lambda_2 = +1$ é do tipo sela-nó. Para $\lambda_2 = -1$, obtemos de

$$\lambda_2 = 2(b - w_0) = 2[b - (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2] = -1, \quad (4.9)$$

que $b = 0,3416$, valor que deve ser localizado apenas sobre a curva ① da Fig. 4.3. Para $\lambda_2 = +1$, de

$$\lambda_2 = 2(b - w_0) = 2[b - (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2] = +1, \quad (4.10)$$

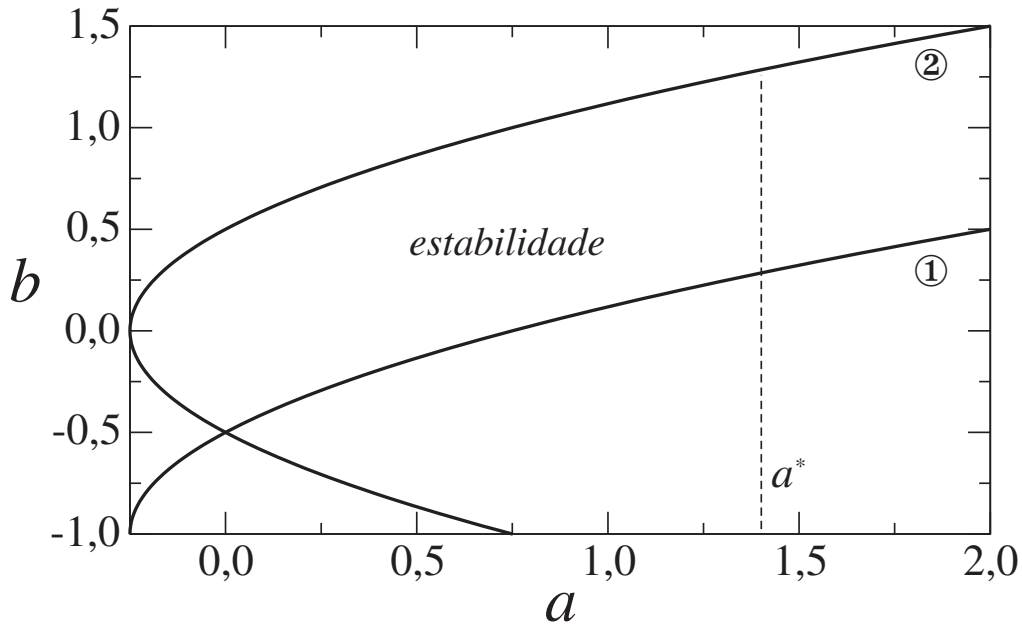


Fig. 4.3: Região de estabilidade transversal para o ponto fixo diagonal. Desestabilização ocorre ao longo de ambas as curvas. Somente a região $a > a^* = 1,4011\dots$ é de interesse. Veja o texto para detalhes.

obtemos $b = 1,3416$, o qual deve ser localizado apenas sobre a curva ② da Fig. 4.3. Ambos os pontos são localizados na mesma *longitude*, qual seja $a = 1,55$. Vemos, portanto, que a bifurcação transversal do ponto fixo C^0 por duplicação de período acontece para um valor de b fora do intervalo de sincronização, enquanto a bifurcação sela-nó acontece dentro do mesmo intervalo, sendo esta última, portanto, a que nos interessa, e que veremos em detalhes mais a frente.

4.3.2 Bifurcação da órbita $2C^0$

Novamente utilizamos o sistema transformado das Eqs. (4.2) e (4.3), para calcular os autovalores correspondentes às autodireções $\vec{u}_1 = (1, 1)$ e $\vec{u}_2 = (1, -1)$ do sistema original. Teremos de

$$|J(w_1, 0) \otimes J(w_2, 0) - \lambda I| = 0, \quad (4.11)$$

onde $J(w_1, 0) \otimes J(w_2, 0)$ é a matriz jacobiana da órbita $\dots \rightarrow w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_1 \dots$, e

com

$$w_1 = (1 + \sqrt{-3 + 4a})/2 \quad \text{e} \quad w_2 = (1 - \sqrt{-3 + 4a})/2, \quad (4.12)$$

que

$$\lambda_1 = 4w_1w_2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 4(b - w_1)(b - w_2). \quad (4.13)$$

A condição de estabilidade transversal, agora para a órbita $2C^0$, é representada pela condição $|\lambda_2| < 1$, o que define um novo intervalo para o parâmetro b , qual seja,

$$\frac{1 + \sqrt{-4 + 4a}}{2} < b < \frac{1 + \sqrt{-2 + 4a}}{2}. \quad (4.14)$$

Neste intervalo, cuja ilustração aparece na Fig. 4.4, a órbita $2C^0$ é transversalmente estável. Quando a excede o valor 1,25, valor este para o qual acontece a bifurcação

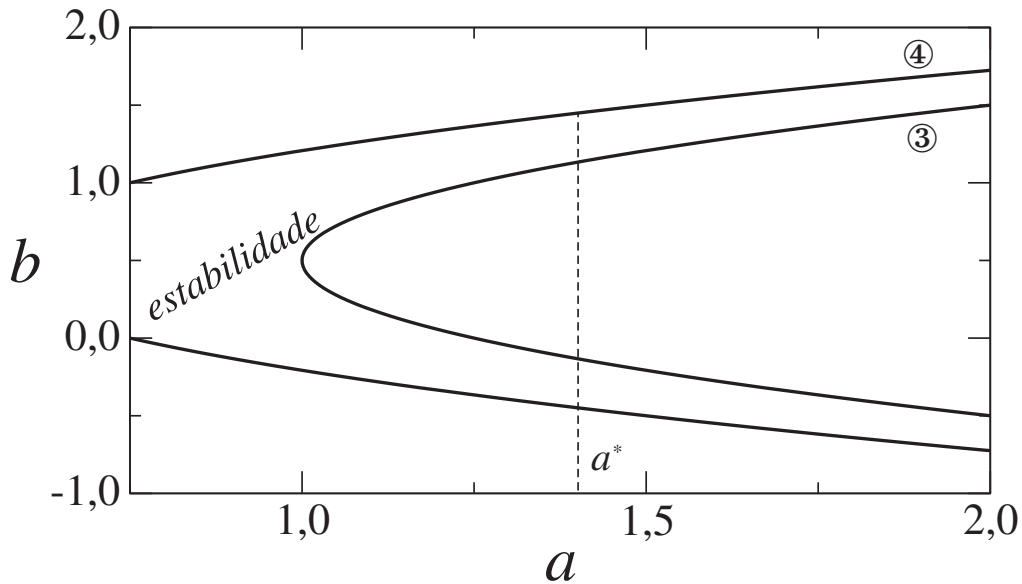


Fig. 4.4: Região de estabilidade transversal para a órbita de período 2. Desestabilização pode ocorrer ao longo de ambas as curvas, e o interesse está somente na região $a > a^*$.

$2 \rightarrow 4$ no mapa quadrático, e b cai fora do intervalo acima, acontece a perda da estabilidade transversal da órbita $2C^0$, ou seja, qualquer trajetória que seja iniciada próxima de qualquer um dos pontos da órbita, irá afastar-se dele.

Como no caso do ponto fixo C^0 , a órbita $2C^0$ pode sofrer uma bifurcação por dobramento de período, ou do tipo sela-nó. No primeiro caso teremos, de $\lambda_2 = -1$, que

$$\lambda_2 = 4[b - (1 + \sqrt{-3 + 4a})/2][b - (1 - \sqrt{-3 + 4a})/2] = -1, \quad (4.15)$$

e, em conseqüência, para $a = 1,55$, obtemos $b = 1,2416$ e $b = -0,2416$, pontos estes que devem ser localizados apenas sobre a curva ③ da Fig. 4.4. Importante notar que apenas o valor positivo de b interessa, pois o valor negativo cai fora do intervalo de sincronização. No segundo caso, quando $\lambda_2 = +1$, escrevemos

$$\lambda_2 = 4[b - (1 + \sqrt{-3 + 4a})/2][b - (1 - \sqrt{-3 + 4a})/2] = +1, \quad (4.16)$$

para ganhar os valores $b = 1,5246$ e $b = -0,5246$. Agora os pontos são localizados apenas sobre a curva ④ da Fig. 4.4. De novo, pelo mesmo motivo de antes, apenas o valor positivo de b interessa. Vemos, portanto, que há valores do acoplamento b dentro do intervalo de sincronização, para os quais ambas as bifurcações da órbita de período 2, duplicação de período e sela-nó, acontecem. Estes são $b = 1,2416$ e $b = 1,5246$, respectivamente.

4.3.3 Bifurcação da órbita $4C^0$

As regiões de estabilidade transversal para a órbita de período 4 foram determinadas numericamente. O resultado é mostrado na Fig. 4.5.

Para obtenção dos 750 pontos (a, b) , que possibilitaram a construção da Fig. 4.5, os seguintes procedimentos foram adotados, para cada um dos valores de a ($1,25 < a < 2,0$) considerados:

1. Calculamos as 4 raízes reais do polinômio de grau 12,

$$\begin{aligned} p(x) = & x^{12} - 6ax^{10} - x^9 + (15a^2 - 3a)x^8 + 4ax^7 + (-20a^3 + 12a^2 + 1)x^6 \\ & + (-6a^2 + 2a)x^5 + (15a^4 - 18a^3 + 3a^2 - 4a)x^4 + (4a^3 - 4a^2 - 1)x^3 \\ & + (-6a^5 + 12a^4 - 6a^3 + 5a^2 - a)x^2 + (-a^4 + 2a^3 - a^2 + 2a)x \\ & + 1 + 2a^2 - 3a^3 + 3a^4 - 3a^5 + a^6, \end{aligned} \quad (4.17)$$

as quais são os pontos w_1, w_2, w_3, w_4 da órbita de período 4.

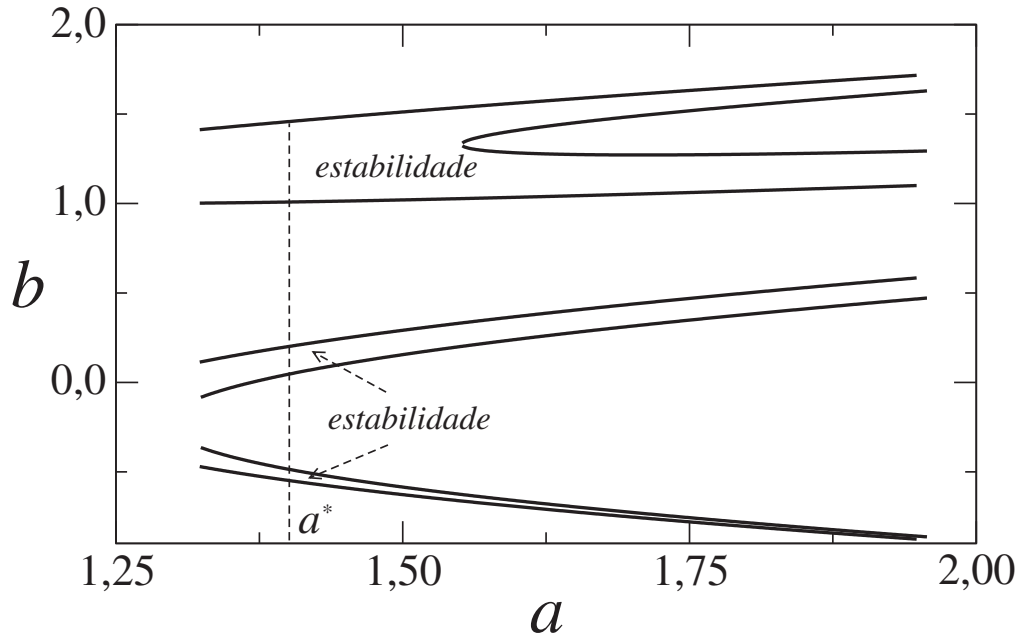


Fig. 4.5: Regiões de estabilidade transversal para a órbita de período 4. Como antes, o interesse está somente na região $a > a^*$.

2. Calculamos o autovalor λ_2 da matriz jacobiana $J(w_1, 0) \otimes J(w_2, 0) \otimes J(w_3, 0) \otimes J(w_4, 0)$, usando

$$\lambda_2 = 16(b - w_1)(b - w_2)(b - w_3)(b - w_4). \quad (4.18)$$

3. Finalmente, fazemos $\lambda_2 = -1$ ($+1$) para calcular os correspondentes valores de b , ficando assim determinadas as curvas onde acontecem bifurcações por duplicação de período (sela-nó) da órbita de período 4. Estas são as curvas mostradas na Fig. 4.5.

Quando $a = 1,55$, bifurcação por duplicação de período ($\lambda_2 = -1$) acontece para $b = -0,6253, 0,2002$, enquanto que sela-nó ($\lambda_2 = +1$) para $b = -0,6618, 0,3314, 1,0272, 1,5371$. Cada um desses valores de b pode ser facilmente localizado na curva respectiva da Fig. 4.5, vários deles caindo fora da região de sincronização caótica.

4.3.4 Bifurcação da órbita $6C^0$

Para $a = 1,55$, a órbita de período 6 já apareceu no mapa individual, como se vê claramente na Fig. 4.6. Sendo assim, comportamento caótico sincronizado com

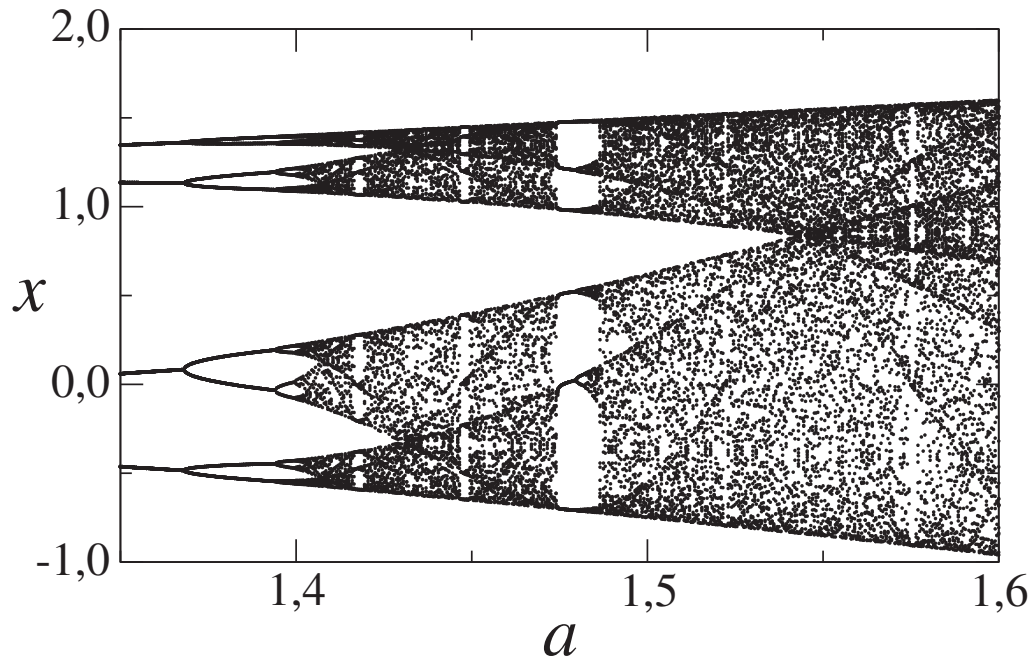


Fig. 4.6: Diagrama de bifurcação para o mapa individual $x \mapsto (a - x^2)$.

esta periodicidade pode ocorrer, o que passamos a averiguar.

A derivação das regiões de estabilidade transversal para a órbita de período 6 também é numérica. Representação gráfica de tais regiões aparece na Fig. 4.7, tendo sido utilizados 525 pontos (a, b) na sua construção. Procedimentos análogos aos utilizados para período 4 foram adotados, para cada um dos valores de a ($1,475 < a < 2,0$) considerados, quais sejam:

1. Calculamos 6 raízes reais de um polinômio de grau 54 (muito grande para mostrarmos aqui), as quais são os pontos $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$ da órbita de período 6.

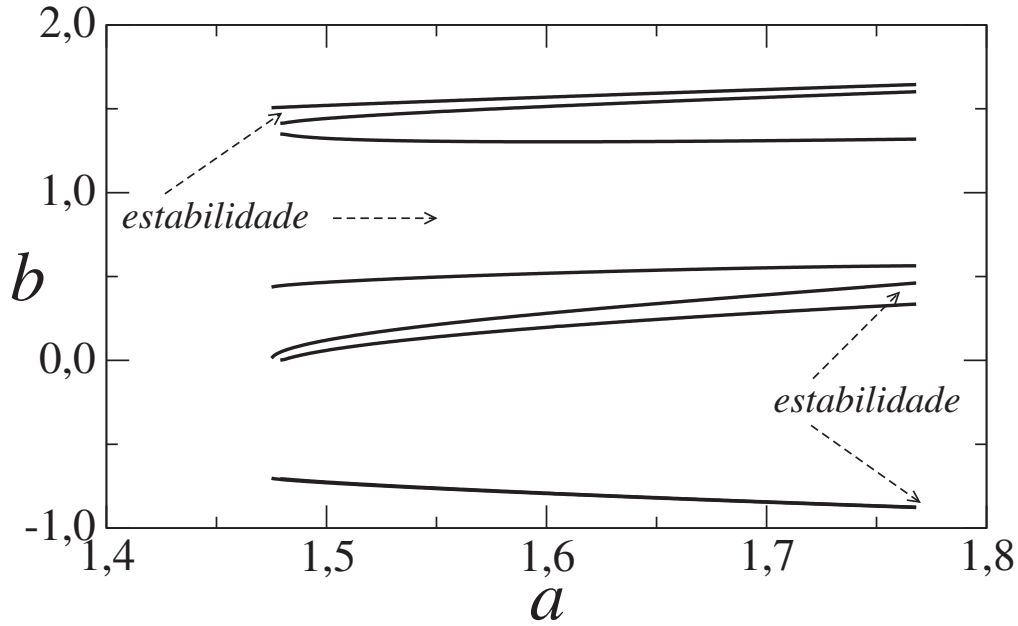


Fig. 4.7: Regiões de estabilidade transversal para a órbita de período 6. Na escala adotada, as duas curvas que definem a região de estabilidade abaixo de $b = -0,5$ se superpõem.

2. Calculamos o autovalor λ_2 da matriz jacobiana $J(w_1, 0) \otimes J(w_2, 0) \otimes J(w_3, 0) \otimes J(w_4, 0) \otimes J(w_5, 0) \otimes J(w_6, 0)$, usando

$$\lambda_2 = 64(b - w_1)(b - w_2)(b - w_3)(b - w_4)(b - w_5)(b - w_6). \quad (4.19)$$

3. Finalmente, fazemos $\lambda_2 = -1$ (+1) para calcular os correspondentes valores de b , ficando assim determinadas os pontos das curvas onde acontecem bifurcações por duplicação de período (sela-nó) da órbita de período 6. Estas são as curvas representadas na Fig. 4.7.

Quando $a = 1,55$, bifurcação por duplicação de período ($\lambda_2 = -1$) acontece para $b = -0,7612, 0,1399, 1,3065, 1,4822$, enquanto que bifurcação sela-nó ($\lambda_2 = +1$) para $b = -0,7644, 0,2130, 0,4965, 1,5454$. Cada um desses valores de b pode ser facilmente localizado na curva respectiva da Fig. 4.7, vários deles caindo fora da região de sincronização caótica.

4.3.5 Discussão dos Resultados

Neste espaço apresentamos um resumo de todos os resultados acima obtidos, para $a = 1,55$. A Fig. 4.8 mostra um diagrama de estabilidade transversa, síntese das Figs. 4.3-4.5 e 4.7, para as quatro órbitas de períodos mais baixos do mapa quadrático (note que para $a = 1,55$, as órbitas de períodos 3 e 5 ainda não apareceram no mapa quadrático), o qual considera intervalos de variação do acoplamento b e da não linearidade a mais adequados.

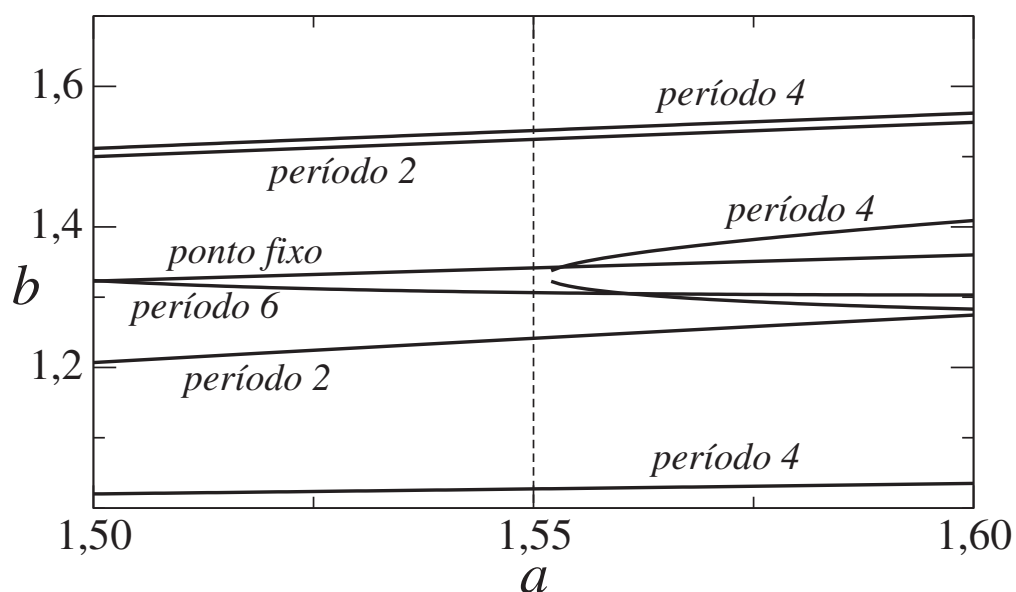


Fig. 4.8: Curvas de bifurcação para a desestabilização transversa das órbitas periódicas C^0 , $2C^0$, $4C^0$, e $6C^0$.

A linha inclinada identificada por *ponto fixo* na Fig. 4.8 representa o limite superior para estabilidade da órbita de período 1. A linha representativa do limite inferior cai fora da escala de valores de acoplamento b considerada na figura. Assim sendo, o ponto fixo é transversalmente estável para pontos abaixo da linha de período 1, com a perda de estabilidade acontecendo sobre ela, via uma bifurcação sela-nó

($\lambda_2 = +1$), em $b = 1,3416$.

As linhas de fronteira para o intervalo em que ocorre a estabilidade transversa da órbita de período 2, são identificadas na Fig. 4.8 como *período 2*. Para cima, a perda de estabilidade acontece via uma bifurcação sela-nó, em $b = 1,5246$, e para baixo via uma bifurcação por duplicação de período ($\lambda_2 = -1$), em $b = 1,2416$.

As curvas de desestabilização transversa para a órbita de período 4 também são contempladas na Fig. 4.8, identificadas como *período 4*. Neste caso, a perda de estabilidade transversa acontece por uma bifurcação sela-nó, independentemente de ser para baixo, em $b = 1,0272$, ou para cima, em $b = 1,5371$.

Na escala da Fig. 4.8, a linha identificada por *período 6* define o limite superior de estabilidade transversa para a respectiva órbita. Assim sendo, pontos abaixo desta linha são transversalmente estáveis. A perda de estabilidade acontece em consequência de uma bifurcação por duplicação de período em $b = 1,3065$.

Vemos portanto que, quando consideramos o crescimento do parâmetro de acoplamento b , a perda de estabilidade do regime caótico sincronizado começa com uma bifurcação por duplicação de período de uma órbita de período 6, em $b = 1,3065$, valor este que define o limite superior do intervalo em que o atrator caótico sincronizado é absolutamente estável [53]. A perda de estabilidade depois é intensificado por bifurcações das órbitas C^0 , $2C^0$ e $4C^0$, todas do tipo sela-nó, e que acontecem em $b = 1,3416$, $b = 1,5246$ e $b = 1,5371$, respectivamente. Por outro lado, o início da desestabilização para b decrescendo, se dá por meio de uma bifurcação por duplicação de período de uma órbita de período 2, que acontece em $b = 1,2416$, limite inferior de absoluta estabilidade para o atrator caótico sincronizado. A desestabilização é então intensificada por uma bifurcação sela-nó da órbita $4C^0$, em $b = 1,0272$. Assim, vemos que o atrator caótico sincronizado é absolutamente estável para $1,2416 < b < 1,3065$, com bacias de atração típicas aparecendo na Fig. 4.9.

Nas Figs. 4.10(a)-4.10(f) vemos bacias de atração do atrator caótico sincronizado, para vários valores do acoplamento b , todos fora da região de absoluta estabilidade, mas ainda na região de expoente de Lyapunov transversal negativo. A Fig. 4.10(a) mostra a bacia de atração para acoplamento $b = 1,31$, ou seja, um pouco a direita da região de absoluta estabilidade. Nesta região, a órbita sincronizada de

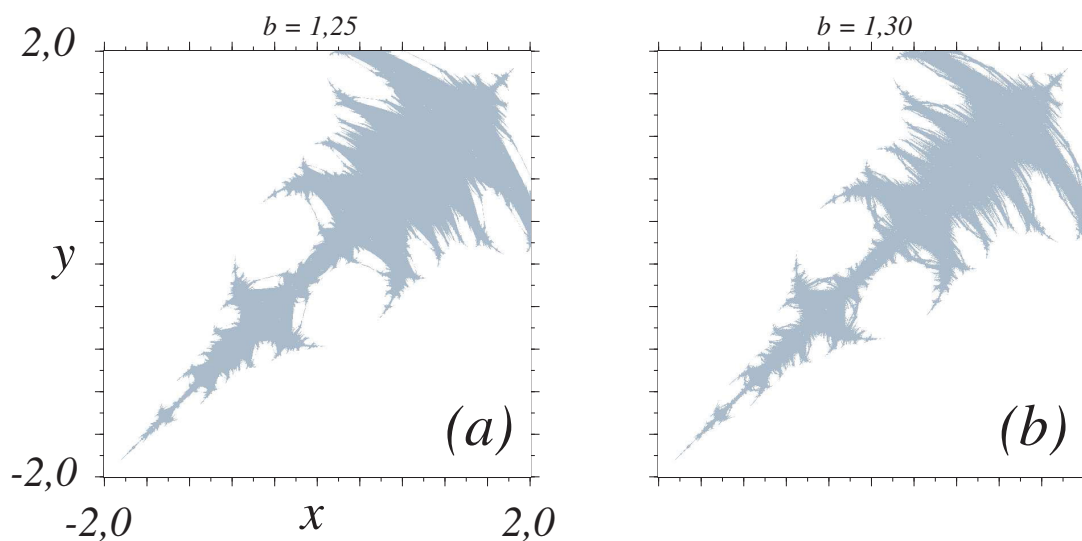


Fig. 4.9: Bacias de atração geradas para dois diferentes conjuntos de parâmetros ($a = 1,55$), cada um deles num dos extremos da região de absoluta estabilidade do atrator caótico sincronizado. Branco indica a bacia do infinito, enquanto cinza significa a bacia do atrator caótico. A escala mostrada aplica-se a ambas as figuras.

período 6,

$$\begin{aligned}
 & \dots \rightarrow (-0,76285894, -0,76285894) \rightarrow (0,96804623, 0,96804623) \\
 & \rightarrow (0,61288649, 0,61288649) \rightarrow (1,17437014, 1,17437014) \\
 & \rightarrow (0,17085477, 0,17085477) \rightarrow (1,52080864, 1,52080864) \\
 & \rightarrow (-0,76285894, -0,76285894) \rightarrow \dots,
 \end{aligned}$$

cujos pontos são mostrados na Fig. 4.10(a), já é transversalmente instável. Tal instabilidade é decorrente de uma bifurcação por duplicação de período supercrítica [14], acontecida em $b = 1,3065$, e que gera uma órbita de período duplo (período 12). Os pontos da órbita gerada são simetricamente colocados, em relação ao subespaço invariante, no que diz respeito à órbita de período 6. Neste caso, a bacia é dita localmente crivada (em inglês, *locally riddled basin*) [62]. Neste tipo de bacia, quase todas as trajetórias que eventualmente deixem a vizinhança do atrator caótico, retornam para ele. Decorrido um tempo finito, alguma fração destas trajetórias deixa a vizinhança novamente, com o processo se repetindo indefinidamente. A dinâmica de tais trajetórias mostra estouros (em inglês, *bursts*) não regulares no tempo: uma trajetória passa algum tempo próxima do atrator caótico, deixando-o. Após um

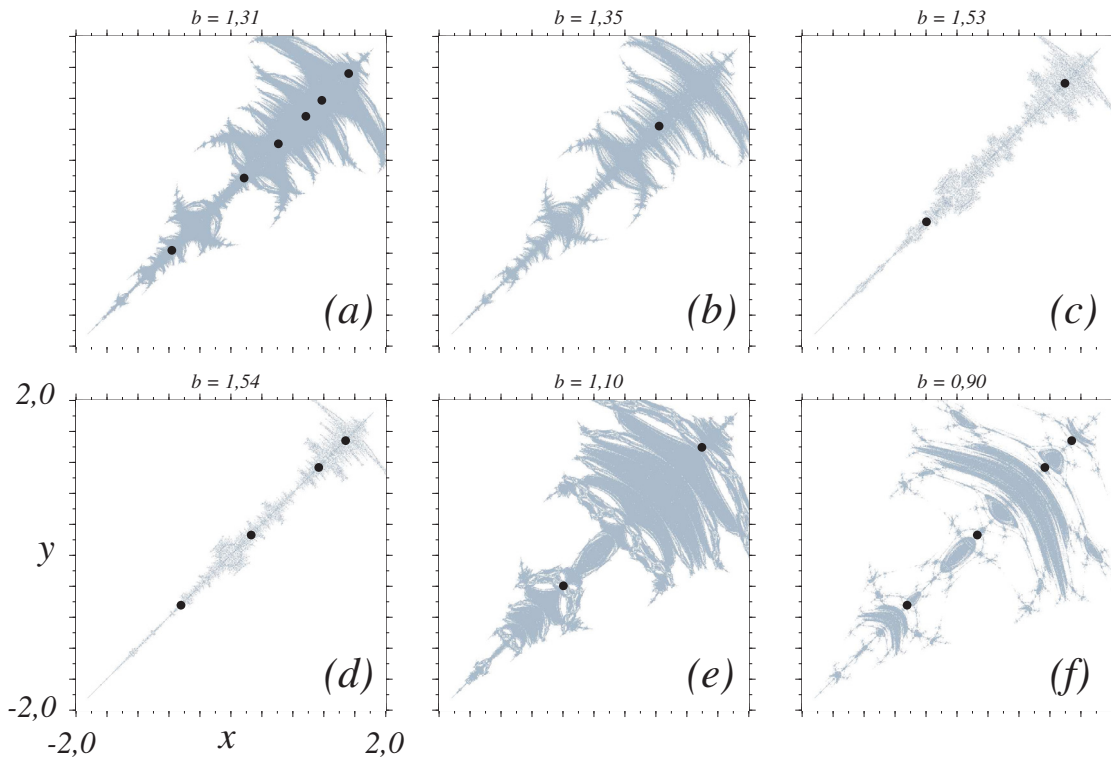


Fig. 4.10: Bacias de atração geradas para seis diferentes conjuntos de parâmetros ($a = 1,55$ para todas elas). Branco indica a bacia do infinito, enquanto cinza significa a bacia do atrator caótico. A escala mostrada aplica-se a todas as figuras.

outro intervalo de tempo a trajetória retorna para a vizinhança do atrator. Em conseqüência, a forma da bacia de atração aparece muito pouco modificada após a bifurcação por duplicação de período supercrítica da órbita de período 6, o que se comprova comparando as Figs. 4.9(b) e 4.10(a).

Na Fig. 4.10(b), vemos a bacia de atração para $b = 1.35$, quando já aconteceu a desestabilização transversal da órbita do ponto fixo

$$\dots \rightarrow (0,84164078, 0,84164078) \rightarrow (0,84164078, 0,84164078) \rightarrow \dots,$$

via uma bifurcação sela-nó. Neste caso a bacia é dita globalmente crivada (em inglês, *globally riddled basin*) [62]. Aqui, um conjunto de pontos pertencentes à bacia do atrator caótico, próximos do ponto fixo, vai para um outro atrator, no nosso modelo o atrator localizado no infinito. A forma da bacia de atração agora aparece bastante modificada na região próxima do ponto fixo, após este ter sofrido a bifurcação sela-nó.

A dinâmica da trajetória dos pontos que deixam a bacia do atrator caótico, tem como início exatamente a perda da estabilidade transversa do ponto fixo [14].

Para $b < 1,3416$, o ponto fixo é transversalmente estável, tornando-se instável para $b = 1,3416$. Como a órbita já era instável na direção do atrator, o ponto fixo irá tornar-se um repulsor no espaço de fase bidimensional, após a bifurcação. Na Fig. 4.11 vemos um esquema de como ocorre a perda da estabilidade transversa do ponto fixo $p=C^0$, quando o parâmetro b varia.

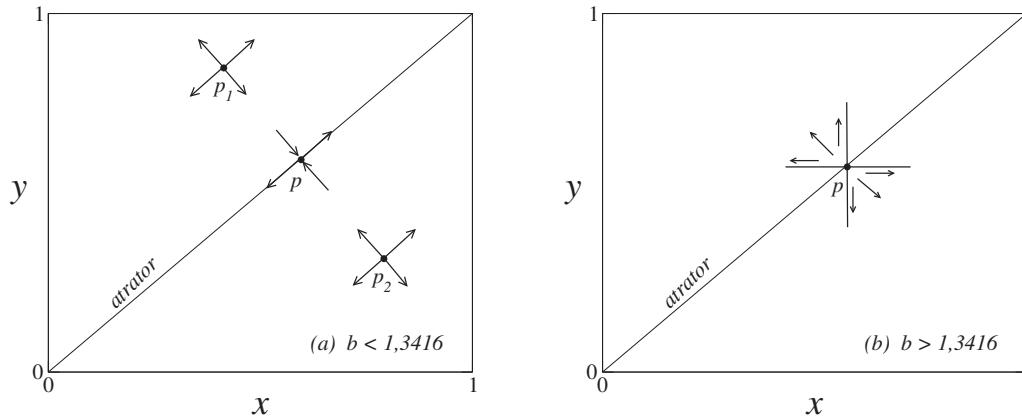


Fig. 4.11: (a) O ponto fixo de sela instável p , no subespaço invariante, e os dois repulsores, p_1 e p_2 , fora do subespaço invariante, antes da bifurcação sela-nó. (b) A estrutura tipo *língua* formada depois da bifurcação, após o início do *riddling*. Trajetórias originadas de condições iniciais dentro da *língua*, escapam do subespaço invariante.

O ponto fixo instável p , de coordenadas $x_0 = y_0 = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2$, imerso no subespaço invariante $y = x$ (atrator caótico sincronizado), é estável na direção transversal a este subespaço, como se vê na Fig. 4.11(a). *Riddling* ocorre quando p perde sua estabilidade transversa, em virtude da variação de algum parâmetro, no caso presente, quando $b = 1,3416$. Esta perda da estabilidade é ocasionada pela colisão, neste valor de b , dos dois repulsores $p_1 = (x_1, y_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2)$, onde $x_1 = y_1 = (2b - 1 + \sqrt{-4b^2 + 4a + 1})/2$ e $x_2 = y_2 = (2b - 1 - \sqrt{-4b^2 + 4a + 1})/2$, com o ponto de sela $p = (x_0, y_0)$, o que caracteriza uma bifurcação subcrítica de forquilha. Conseqüência desta bifurcação é uma *língua* que se abre em p [Fig. 4.11(b)], permitindo que trajetórias próximas do subespaço invariante escapem da vizinhança do atrator caótico, para $b > 1,3416$. Nas equações que definem as coordenadas dos repulsores p_1 e p_2 , vê-se que, para $a = 1,55$, ambos são reais apenas se $b \leq 1,3416$.

Sendo assim, temos que para $b > 1,3416$, a sela p transforma-se num repulsor, e p_1 e p_2 deixam de existir [Fig. 4.11(*b*)].

As Figs. 4.10(*c*) e 4.10(*d*) mostram, respectivamente, o aspecto da bacia de atração do atrator caótico, após a ocorrência de uma bifurcação subcrítica de forquilha da órbita de período 2,

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow (1, 39442719, 1, 39442719) \rightarrow (-0, 39442719, -0, 39442719) \\ &\rightarrow (1, 39442719, 1, 39442719) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

ocorrida em $b = 1,5246$, e da órbita de período 4,

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow (-0, 64430599, -0, 64430599) \rightarrow (0, 26207058, 0, 26207058) \\ &\rightarrow (1, 13486977, 1, 13486977) \rightarrow (1, 48131900, 1, 48131900) \\ &\rightarrow (-0, 64430599, -0, 64430599) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

ocorrida em $b = 1,5371$. Mostram também, cada um dos dois gráficos, os pontos da órbita respectiva. A perda de estabilidade transversal de qualquer dessas duas órbitas obedece a mesma dinâmica da perda da estabilidade transversal do ponto fixo, acima explicada.

As Figs. 4.10(*e*) e 4.10(*f*) mostram a bacia de atração para acoplamento $b = 1,10$ e $b = 0,90$, respectivamente. Ambos valores de b localizam pontos no espaço de parâmetros, que agora encontram-se a esquerda da região de absoluta estabilidade, porém ainda dentro da região de sincronização caótica. A desestabilização transversal da órbita de período 2, cujos pontos aparecem na Fig. 4.10(*e*), acontece em $b = 1,2416$, via uma bifurcação tipo duplicação de período supercrítica, enquanto a órbita de período 4 é desestabilizada por uma bifurcação subcrítica de forquilha. Órbitas de períodos maiores também podem contribuir para a perda de sincronização do atrator caótico, para $a = 1,55$. A órbita de período 8,

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow (1, 29561367, 1, 29561367) \rightarrow (-0, 128614774, -0, 128614774) \\ &\rightarrow (1, 53345824, 1, 53345824) \rightarrow (-0, 801494173, -0, 801494173) \\ &\rightarrow (0, 90760709, 0, 90760709) \rightarrow (0, 72624937, 0, 72624937) \\ &\rightarrow (1, 02256185, 1, 02256185) \rightarrow (0, 504367258, 0, 504367258) \\ &\rightarrow (1, 29561367, 1, 29561367) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

por exemplo, desestabiliza transversalmente por uma duplicação de período supercrítica, para acoplamento b crescendo, em $b = 1,3763$.

Capítulo 5

Conclusões

O resultado principal do presente trabalho foi a ampliação de estudos publicados nas Refs. [31, 32, 63]. A principal contribuição se refere ao entendimento e compreensão de fenômenos de sincronização e propriedades de bifurcações, mediante a obtenção de resultados analíticos. Utilizamos em toda a investigação dois mapas bidimensionais: o mapa de Hénon e um acoplamento linear particular de dois mapas quadráticos idênticos.

Estudamos o espaço de fase do mapa de Hénon. Investigamos numericamente a evolução de bacias de atração do referido mapa, quando os parâmetros são variados entre os limites dissipativo e conservativo. Mostramos que bacias de atração permanecem essencialmente constantes, conforme bifurcações acontecem ao longo de uma mesma cascata. Mostramos também que, para um dado movimento, periódico ou não, há uma diminuição drástica no volume da bacia de atração, conforme o sistema segue do limite dissipativo para o conservativo. Curvas Gaussianas representam muito bem este comportamento, quando investigado ao longo das fronteiras entre órbitas periódicas. Todos os resultados obtidos são invariantes no que diz respeito à discretização do espaço de fase utilizada nas computações, sendo também insensíveis ao tamanho do domínio retangular de condições iniciais utilizado.

Estudamos o espaço de parâmetros do acoplamento. Mostramos que o sistema exhibe movimento *quasi*-periódico em virtude de uma bifurcação de Naimark-Sacker de órbitas periódicas, cujas oscilações ocorrem fora da diagonal $y = x$. Isto foi mostrado analiticamente e numericamente para uma órbita de período 2, como pode ser visto da similaridade entre as Figs. 3.3 e 3.5. A primeira delas foi obtida analiticamente, enquanto a segunda numericamente. Mostramos também que quando a comparação

é feita com o mapa quadrático, o acoplamento produz modificações qualitativas no comportamento dinâmico do sistema. Uma dessas mudanças diz respeito à rota para o caos, que no caso unidimensional ocorre via bifurcações por duplicação de período, enquanto no caso acoplado, além desta rota, pode ocorrer também uma via bifurcação de Naimark-Sacker. Utilizando os coeficientes de uma forma normal para o acoplamento, aqui derivados analiticamente, calculamos raios de ciclos limite e números de rotação para o sistema dinâmico em estudo.

O mesmo sistema de dois mapas quadráticos idênticos acoplados linearmente foi investigado numa região em que o mapa individual é caótico (mapa quadrático, com parâmetro $a = 1,55$). Mostramos que para este sistema, um estado de completa sincronização caótica pode ser atingido, sendo o movimento então restrito a um subespaço invariante de menor dimensão que o espaço de fase total xy , a saber, a diagonal $y = x$. Determinamos regiões no plano de parâmetros onde ocorre sincronização, tanto caótica quanto regular. Para o caso caótico, determinamos o intervalo de variação do acoplamento b , para o qual o expoente de Lyapunov transversal é negativo, o que define os limites de estabilidade assintótica do atrator caótico sincronizado. Investigamos o mecanismo de perda da sincronização caótica, do ponto de vista de bifurcações de órbitas periódicas tipo sela imersas no atrator caótico. Mostramos que tais bifurcações são tipo duplicação de período supercrítica ($\lambda = -1$), ou tipo forquilha subcrítica ($\lambda = +1$). *Riddling* da bacia de atração, fenômeno que acontece quando órbitas imersas no atrator caótico sincronizado tornam-se transversalmente instáveis enquanto o atrator permanece atrativo na média, acontece independentemente do tipo de bifurcação presente. Uma bifurcação subcrítica resulta num *global riddling* da bacia de atração do atrator caótico sincronizado, enquanto uma supercrítica resulta num *local riddling*. Condições analíticas para a desestabilização transversal do ponto fixo e da órbita de período 2 foram obtidas, sendo as condições necessárias para desestabilização de algumas órbitas de períodos maiores obtidas numericamente.

Bibliografia

- [1] J. R. Tredicce, F. T. Arecchi, G. P. Puccioni, A. Poggi, e W. Gadomski, *Dynamic behavior and onset of low-dimensional chaos in a modulated homogeneously broadened single-mode laser - experiments and theory*, Physical Review A **34**, 2073(1986).
- [2] J. M. T. Thompson e H. B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, (Wiley, Chichester, 1986).
- [3] E. Simonotto, M. Riani, C. Seife, M. Roberts, T. Twitty, e F. Moss, *Visual Perception of Stochastic Resonance*, Physical Review Letters **78**, 1186(1997).
- [4] J. Guckenheimer e P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, (Springer-Verlag, New York, 1983).
- [5] M. Hénon, *A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor*, Communications in Mathematical Physics **50**, 69(1976).
- [6] A. N. Pisarchik e R. Corbalán, *Parametric nonfeedback resonance in period doubling systems*, Physical Review E **59**, 1669(1999).
- [7] A. N. Pisarchik e B. K. Goswami, *Annihilation of One of the Coexisting Attractors in a Bistable System*, Physical Review Letters **84**, 1423(2000).
- [8] V. N. Chizhevsky, *Multistability in dynamical systems induced by weak periodic perturbations*, Physical Review E **64**, 036223(2001).
- [9] S. Gadaleta e G. Dangelmayr, *Learning to control a complex multistable system*, Physical Review E **63**, 036217(2001).
- [10] I. Triandaf e I. B. Schwartz, *Tracking sustained chaos: A segmentation method*, Physical Review E **62**, 3529(2000).

- [11] A. N. Pisarchik, *Controlling the multistability of nonlinear systems with coexisting attractors*, Physical Review E **64**, 046203(2001).
- [12] S. Kraut e U. Feudel, *Multistability, noise, and attractor hopping: The crucial role of chaotic saddles*, Physical Review E **66**, 015207(2002).
- [13] Y. -C. Lai e V. Andrade, *Catastrophic bifurcation from riddled to fractal basins*, Physical Review E **64**, 056228(2001).
- [14] Y. -C. Lai, C. Grebogi, J. A. Yorke, e S. C. Venkataramani, *Riddling Bifurcation in Chaotic Dynamical Systems*, Physical Review Letters **77**, 55(1996).
- [15] V. Astakhov, A. Shabunin, W. Uhm, e S. Kim, *Multistability formation and synchronization loss in coupled Hénon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism*, Physical Review E **63**, 056212(2001).
- [16] S. Yanchuk, K. R. Schneider, e L. Recke, *Dynamics of two mutually coupled semiconductor lasers: Instantaneous coupling limit*, Physical Review E **69**, 056221(2004).
- [17] E. E. Crone, *Delayed Density Dependence and the Stability of Interacting Populations and Subpopulations*, Theoretical Population Biology **51**, 67(1997).
- [18] F. Marques, J. M. Lopes, e J. Shen, *A periodically forced flow displaying symmetry breaking via a three-tori gluing bifurcation and two-tori resonances*, Physica D **156**, 81(2001).
- [19] W. A. Brock e P. de Fontnouvelle, *Expectational diversity in monetary economies*, Journal of Economic Dynamics and Control **24**, 725(2000).
- [20] L. M. Pecora e T. L. Carrol, *Synchronization in Chaotic Systems*, Physical Review Letters **64**, 821(1990).
- [21] Y. P. Zhang e J. T. L. Sun, *Chaotic synchronization and anti-synchronization based on suitable separation*, Physics Letters A **330**, 442(2004).
- [22] L. Wu e S. Q. Zhu, *Multi-channel communication using chaotic synchronization of multi-mode lasers*, Physics Letters A **308**, 157(2003).

- [23] B. Lading, E. Mosekilde, S. Yanchuk, e Y. Maistrenko, *Chaotic synchronization in a system of two coupled beta -cells*, AIP Conference Proceedings no.502, 209(2000).
- [24] S. Watanabe, H. S. J. van der Zant, S. H. Strogatz, e T. P. Orlando, *Dynamics of circular arrays of Josephson junctions and the discrete sine-Gordon equation*, Physica D **97**, 429(1996).
- [25] C. C. Wang e J. P. Su, *A new adaptive variable structure control for chaotic synchronization and secure communication*, Chaos, Solitons and Fractals **20**, 967(2004).
- [26] P. C. Rech, M. W. Beims, e J. A. C. Gallas, *On the Abundance of multistability in the Hénon Map*, Proceedings of the 2003 Workshop of Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Edited by Ruedi Stoop, Zurich, 205(2003).
- [27] P. C. Rech, M. W. Beims, e J. A. C. Gallas, *Basin size evolution between dissipative and conservative limits*, Physical Review E **71**, 017202(2005).
- [28] J. R. Miller e J. A. Yorke, *Finding all periodic orbits of maps using Newton methods: sizes of basins*, Physica D **135**, 195(2000).
- [29] E. Eschenazi, H. G. Solari, e R. Gilmore, *Basins of attraction in driven dynamical systems*, Physical Review A **39**, 2609(1989).
- [30] P. G. Lind, S. Titz, T. Kuhlbrodt, J. Corte-Real, J. Kurths, J. A. C. Gallas, e U. Feudel, *Ocean convection modeling studied with coupled bistable maps*, International Journal of Bifurcation and Chaos **14**, 999(2004).
- [31] P. C. Rech, M. W. Beims, e J. A. C. Gallas, *Recovering parameters from self-similar structures in phase-space of dissipative systems with constant Jacobian*, Physica A **283**, 273(2000).
- [32] P. C. Rech, M. W. Beims, e J. A. C. Gallas, *Discovering parameter values by measuring self-similar structures in the phase-space of dissipative systems with constant Jacobian*, Europhysics Letters **49**, 702(2000).
- [33] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, (Springer-Verlag, New York, 1994).

- [34] U. Feudel e C. Grebogi, *Why Are Chaotic Attractors Rare in Multistable Systems?*, Physical Review Letters **91**, 134102(2003).
- [35] J. A. C. Gallas, *Structure of the Parameter Space of the Hénon Map*, Physical Review Letters **70**, 2714(1993).
- [36] J. A. C. Gallas, C. Grebogi, e J. A. Yorke, *Vertices in Parameter Space: Double Crises which Destroy Chaotic Attractors*, Physical Review Letters **71**, 1359(1993).
- [37] R. V. Buskirk e C. Jeffries, *Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators*, Physical Review A **31**, 3332(1985).
- [38] K. Wiesenfeld e P. Hadley, *Attractor Crowding in Oscillator Arrays*, Physical Review Letters **62**, 1335(1989).
- [39] I. S. Aranson, A. V. Gaponov-Grekhov, e M. I. Rabinovich, *The onset and spatial development of turbulence in flow systems*, Physica D **33**, 1(1988).
- [40] I. Waller e R. Kapral, *Spatial and temporal structure in systems of coupled nonlinear oscillators*, Physical Review A **30**, 2047(1984).
- [41] J. Frøyland, *Some symmetric, two-dimensional, dissipative maps*, Physica D **8**, 423(1983).
- [42] T. Hogg e B. A. Huberman, *Generic behavior of coupled oscillators*, Physical Review A **29**, 275(1984).
- [43] K. E. Kürten e G. Nicolis, *Bifurcation scenarios and quasiperiodicity in coupled maps*, Physica A **245**, 446(1997).
- [44] H. Kook, F. H. Ling, e G. Schmidt, *Universal behavior of coupled nonlinear systems*, Physical Review A **43**, 2700(1991).
- [45] P. C. Rech, M. W. Beims, e J. A. C. Gallas, *Naimark- Sacker bifurcations in linearly coupled quadratic maps*, Physica A **342**, 351(2004).
- [46] B. L. Van der Waerden, *Algebra, Vol. 1, 9th edn.*, (Springer, Berlin, Heidelberg, 1993).

- [47] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical systems and Chaos*, (Springer-Verlag, New York, 1990).
- [48] H. G. Schuster, *Deterministic Chaos: An Introduction*, (VCH, New York, 1995).
- [49] J. -M. Yuan, M. Tung, D. H. Feng, e L. M. Narducci, *Instability and irregular behavior of coupled logistic equations*, Physical Review A **28**, 1662(1983).
- [50] C. Reick e E. Mosekilde, *Emergence of quasiperiodicity in symmetrically coupled, identical period-doubling systems*, Physical Review E **52**, 1418(1995).
- [51] K. Kaneko, *Transition from Torus to Chaos Accompanied by Frequency Lockings with Symmetry Breaking*, Progress of Theoretical Physics **69**, 1427(1983).
- [52] Y. -H. Wan, *Computation of the Stability condition for the Hopf Bifurcation of Diffeomorphisms on \mathbb{R}^2* , SIAM Journal of Applied Mathematics **34**, 167(1978).
- [53] Y. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, A. Popovich, e E. Mosekilde, *Transverse instability and riddled basins in a system of two coupled logistic maps*, Physical Review E **57**, 2713(1998).
- [54] V. Astakhov, A. Shabunin, T. Kapitaniak, e V. Anishchenko, *Loss of Chaos Synchronization through the Sequence of Bifurcations of Saddle Periodic Orbits*, Physical Review Letters **79**, 1014(1997).
- [55] Y. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, A. Popovich, e E. Mosekilde, *Desynchronization of chaos in coupled logistic maps*, Physical Review E **60**, 2817(1999).
- [56] E. Neumann, I. Sushko, Y. Maistrenko, e U. Feudel, *Synchronization and desynchronization under the influence of quasiperiodic forcing*, Physical Review E **67**, 026202(2003).
- [57] H. Fujisaka e T. Yamada, *Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems*, Progress of Theoretical Physics **69**, 32(1983).
- [58] E. Ott e J. C. Sommerer, *Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency*, Physics Letters A **188**, 39(1994).
- [59] J. C. Sommerer e E. Ott, *A physical system with qualitatively uncertain dynamics*, Nature(London) **365**, 138(1993).

- [60] E. Ott, J. C. Sommerer, J. C. Alexander, I. Kan, e J. A. Yorke, *Scaling Behavior of Chaotic Systems with Riddled Basins*, Physical Review Letters **71**, 4134(1993).
- [61] N. Platt, E. A. Spiegel, e C. Tresser, *On-Off Intermittency: A Mechanism for Bursting*, Physical Review Letters **70**, 279(1993).
- [62] T. Kapitaniak, Y. Maistrenko, A. Stefanski, e J. Brindley, *Bifurcations from locally to globally riddled basins*, Physical Review E **57**, R6253(1998).
- [63] M. W. Beims, P. C. Rech, e J. A. C. Gallas, *Fractal and riddled basins: arithmetic signatures in the parameter space of two coupled quadratic maps*, Physica A **295**, 276(2001).