

VANESSA BUENO DA ROCHA

UMA ABORDAGEM DE *WAVELETS* APLICADA À
COMBINAÇÃO DE PREVISÕES:
UMA ANÁLISE TEÓRICA E EXPERIMENTAL

CURITIBA

2008

VANESSA BUENO DA ROCHA

UMA ABORDAGEM DE *WAVELETS* APLICADA À
COMBINAÇÃO DE PREVISÕES:
UMA ANÁLISE TEÓRICA E EXPERIMENTAL

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciências, Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Área de Concentração em Programação Matemática, Setores de Ciências Exatas e de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Eng. Volmir Eugênio Wilhelm

CURITIBA

2008

VANESSA BUENO DA ROCHA

UMA ABORDAGEM DE *WAVELETS* APLICADA À COMBINAÇÃO DE
PREVISÕES: ANÁLISE TEÓRICA E EXPERIMENTAL

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências, no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Programação Matemática, da Universidade Federal do Paraná, pela comissão formada pelos professores:

Aprovado por:

Prof. Volmir Eugênio Wilhelm, D. Eng.
Departamento de Matemática da UFPR

Prof. Raul Prado Raya, D.
Departamento de Matemática da UFPR

Prof^a. Neida Maria Patias Volpi, D. Eng.
Departamento de Matemática da UFPR

Prof. Robert Wayne Samohyl, Ph. D.
Departamento de Engenharia de Produção da UFSC

Dedico este trabalho à memória
de meus queridos avós.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade de ter concretizado mais um sonho em minha vida.

Ao meu noivo Marcio, pelo companheirismo, compreensão, incentivo, carinho e amor, essenciais para a realização deste trabalho.

Meu agradecimento especial ao Professor Volmir, pela orientação e principalmente pela confiança depositada em meu trabalho.

Aos meus queridos pais e minha família, pelo apoio e compreensão, e por todo amor que sempre me deram.

Às minhas queridas amigas Camila e Ledimara, pelo carinho e compreensão que tiveram com a minha ausência, que em nada abalou nossa amizade.

Aos meus colegas de trabalho, pela cooperação e compreensão nos momentos em que precisei estar ausente.

A todos os amigos e todas as pessoas que por mim torceram, e de uma forma ou outra contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho conceitua-se no procedimento de combinação de previsões, utilizando dois métodos clássicos de previsões, amparado por uma metodologia auxiliar baseada na análise de *wavelets* para cada modelo. De modo prático e objetivo, este estudo tem como propósito original avaliar o impacto da decomposição *wavelet* sobre o erro de uma combinação de previsões para uma determinada série temporal que é analisada. O conceito da análise via *wavelets* é introduzido através da transformada *wavelet*, a qual é aplicada através de uma técnica conhecida como *denoising*, que nada mais é que a eliminação de trechos substancialmente ruidosos da série. Tal técnica surge como um procedimento alternativo para tratar inicialmente os dados de entrada de uma série temporal. A série resultante do processo da transformada, também chamada série reconstruída, é uma versão mais “limpa” da série temporal original. E é exatamente esta nova série que é utilizada para aplicação das técnicas tradicionais de análise de séries temporais. A combinação de previsões considerou o método de suavização exponencial e o modelo auto-regressivo integrado de médias móveis (ARIMA), ambos clássicos e conhecidos na literatura acerca de previsão de séries temporais. Na análise empírica desta pesquisa foram considerados dois cenários de combinação: o primeiro trata de combinar as previsões resultantes dos métodos supracitados, as quais foram obtidas a partir da série em sua condição original. Já o segundo cenário realiza a mesma combinação, porém considerando agora a série reconstruída, também chamado de *de-noise signal*, a partir da decomposição *wavelet*. A avaliação do desempenho da abordagem *wavelet* em combinação de previsões foi feita através da mensuração e comparação do erro percentual médio (MAPE), do erro quadrático médio (MSE) e do coeficiente de desigualdade U de Theil, ambos obtidos a partir da combinação original e da combinação proposta.

Palavras-chave: transformada *wavelet*, *wavelet denoising*, combinação de previsões de séries temporais.

ABSTRACT

This work concept is based on combining forecasts, using two classical methods of forecasts, supported by an auxiliary method in *wavelets* analysis for each model. In a practical and objective way, this study has an original proposal the evaluation of the impact of *wavelet* decomposition on combining forecasts error for one determined temporal series that is analyzed. The analysis concept by *wavelets* is introduced by *wavelet* transform, which is applied through a technique called *denoising*, where some noisy ranges are eliminated from the series. This technique becomes a alternative procedure to treat data enters of a temporal series. The resultant series of the process transform, also called “reconstructed series”, is a “cleaner” version of the original series. And it is exactly this new one series that is used for the application of the traditional techniques for series analysis and posterior combined forecasts. For this process it was considered the exponential smoothing method and the autoregressive integrated moving average (ARIMA) model, both classical and known by literature about temporal series forecasts. The empirical analysis in this research considered two combining scenarios: the first one combines the resultant forecasts obtained through the abovementioned, which resulted from the series in its original condition. The second scenario calculated the same combination, however now considering the reconstructed signal, also called de-noise signal by *wavelet* decomposition. The performance evaluation of the *wavelet* approach in combining forecasts was measured and compared with the mean absolute percentage error (MAPE), mean square error (MSE) and U-Theil inequality index, both resulted from the original combining and the proposed combining.

Keywords: *wavelet* transform, *wavelet denoising*, combining forecasts.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Série S&P500 - de Janeiro/1950 a Março/2007.....	31
Figura 2: Exemplo de Tendência, Sazonalidade e Ciclo.....	36
Figura 3: Exemplificação dos grupos e subgrupos de técnicas qualitativas.....	37
Figura 4: Exemplificação dos grupos e subgrupos de técnicas quantitativas.....	38
Figura 5: Exemplo de Sazonalidade Aditiva e Multiplicativa.....	47
Figura 6: Representação da Decomposição via <i>wavelets</i>	62
Figura 7: Esquema representativo da decomposição/reconstrução <i>wavelet</i>	65
Figura 8: Representação da árvore de decomposição <i>wavelet</i> (em 3 níveis)	68
Figura 9: Representação da árvore de decomposição <i>wavelet packet</i> (em 3 níveis).....	70
Figura 10: <i>Wavelet</i> de Haar	71
Figura 11: <i>Wavelet</i> de Daubechies	72
Figura 12: <i>Wavelet</i> de Symlets	73
Figura 13: <i>Wavelet</i> de Coiflets	73
Figura 14: <i>Wavelets</i> Biortogonais	74
Figura 15: Comparativo entre um sinal original e um sinal de-noised (sem ruído)	75
Figura 16: Funções de limiar (hard e soft thresholding) de um sinal original $s=x$	79
Figura 17: Fluxograma proposta para análise e previsões de séries temporais.....	88
Figura 18: Comportamento da série de vendas original	91
Figura 19: Estatística descritiva dos dados da série de vendas original	92
Figura 20: Demanda média anual da série original (de vendas).....	93
Figura 21: Correlograma da série de vendas original.....	94
Figura 22: Gráfico comparativo de dados reais x previsto (Holt-Winter).....	97
Figura 23: Gráfico da série de vendas diferenciada uma vez	98
Figura 24: Função de Autocorrelação (ACF) da série original diferenciada uma vez.....	99
Figura 25: Função de Autocorrelação Parcial (PACF) da série original.....	100
Figura 26: Resumo das Estatísticas do modelo ARIMA da série original	101
Figura 27: Correlograma da ACF para os resíduos do modelo ARIMA (1, 1, 1).....	102
Figura 28: Correlograma da PACF para os resíduos do modelo ARIMA (1, 1, 1).....	103
Figura 29: Comparativo entre a série original e a série reconstruída (<i>wavelet</i>) sem ruído	107

Figura 30: Comparativo de coeficientes (série original x série reconstruída) – usando cores para representar a magnitude dos coeficientes	108
Figura 31: Comportamento da série <i>wavelet</i>	109
Figura 32: Estatística descritiva dos dados da série <i>wavelet</i>	110
Figura 33: Demanda média anual da série <i>wavelet</i>	111
Figura 34: Correlograma da série <i>wavelet</i>	111
Figura 35: Comparativo de dados reais x previsto (Holt-Winter) da série reconstruída.....	113
Figura 36: Função de autocorrelação da série reconstruída	114
Figura 37: Função de autocorrelação da série reconstruída diferenciada uma vez	114
Figura 38: Gráfico da série reconstruída diferenciada uma vez	115
Figura 39: Função de Autocorrelação Parcial da série reconstruída	116
Figura 40: Resumo das Estatísticas do modelo ARIMA da série reconstruída.....	117
Figura 41: Correlograma da ACF para os resíduos do modelo ARIMA (1, 1, 1).....	118
Figura 42: Correlograma da PACF para os resíduos do modelo ARIMA (1, 1, 1).....	118

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Vendas de um determinado produto no período de Jan/2000 a Dez/2006	89
Tabela 2: Comparativo dos métodos de suavização exponencial da série original.....	96
Tabela 3: Comparativo das previsões feitas para a série original.....	105
Tabela 4: Comparativo dos métodos de suavização exponencial da série reconstruída	112
Tabela 5: Comparativo das previsões feitas para a série reconstruída (<i>wavelet</i>)	120
Tabela 6: Comparativo das previsões: Série Original x Série Reconstruída.....	121

SUMÁRIO

RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	x
1 O PROBLEMA DE PESQUISA	14
1.1 Introdução	14
1.2 Apresentação do Problema	15
1.3 Hipótese Básica	17
1.4 Motivações, Justificativas e Importância do Trabalho	17
1.5 Objetivos do Trabalho	19
1.6 Metodologia e Estrutura do Trabalho	20
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	22
2.1 Revisão da Literatura.....	22
2.1.1 Conceito de Previsão	22
2.1.2 Histórico do Surgimento da Previsão	23
2.1.3 Previsões de Séries Temporais baseada em Combinação	23
2.1.4 Histórico da Análise de <i>Wavelets</i>	29
2.1.5 Previsões de Séries Temporais baseado na Teoria de <i>Wavelet</i>	31
2.2 Tópicos Teóricos	33
2.2.1 Séries Temporais	33
2.2.2 Análise de Séries Temporais	34
2.2.3 Técnicas de Previsão	36
2.2.4 Definições.....	38
2.2.4.1 Estacionariedade.....	38
2.2.4.2 Funções de Autocorrelação	39
2.2.4.3 Correlograma	41
2.2.4.4 Raízes Unitárias.....	42

2.2.4.5	Estatística de Anderson-Darling	43
2.2.4.6	Estatística de Box-Pierce (Ljung Box)	43
2.2.4.7	Teste Z	44
2.2.5	Aplicação dos Métodos de Previsão	44
2.2.6	Métodos de Suavização Exponencial	45
2.2.7	Modelos Auto-Regressivos (AR)	51
2.2.8	Modelos de Médias Móveis (MA)	51
2.2.9	Modelos Auto-Regressivos de Médias Móveis (ARMA)	52
2.2.10	Modelos Auto-Regressivos Integrados de Médias Móveis (ARIMA)	52
2.2.11	Metodologia Box-Jenkins	53
2.2.12.1	Identificação	54
2.2.12.2	Formas Alternativas de Identificação	56
2.2.12.3	Estimação	57
2.2.12.4	Verificação ou Diagnóstico	57
2.2.12	Introdução à Teoria de <i>Wavelets</i>	59
2.2.13.1	A Análise de Fourier versus Análise de <i>Wavelets</i>	60
2.2.13.2	Análise de Séries Temporais via Transformada <i>Wavelet</i>	61
2.2.13.3	Transformada Contínua <i>Wavelet</i>	66
2.2.13.4	Transformada Discreta <i>Wavelet</i>	67
2.2.13.5	Funções Base	71
2.2.13.6	Supressão de Ruído usando <i>Wavelet</i>	74
2.2.13.7	Seleção da Função <i>Wavelet</i>	76
2.2.13.8	Definição das Funções de Limiar (<i>Thresholding</i>)	78
2.2.13	Avaliação dos Erros e da Precisão da Previsão	80
3	METODOLOGIA DA PESQUISA	84
3.1	Metodologia	84
3.2	Desenvolvimento da Pesquisa	86
4	ANÁLISE EMPÍRICA	89
4.1	Apresentação da Série Temporal Original	89
4.2	Estatística Descritiva da Série Temporal Original	90
4.3	Aplicação dos Métodos de Suavização Exponencial na Série Temporal Original	94
4.4	Aplicação do Modelo ARIMA na Série Temporal Original	97
4.4.1	Estimação do Modelo ARIMA	100
4.4.2	Verificação do Modelo ARIMA	102

4.4.3	Avaliação das Previsões	103
4.5	Combinação das Previsões da Série Original	104
4.6	Aplicação da Transformada <i>Wavelet</i> à Série Temporal	105
4.7	Escolha da Função <i>Wavelet</i>	106
4.8	Estatística Descritiva da Série Temporal <i>Wavelet</i>	108
4.9	Aplicação dos Métodos de Suavização Exponencial na Série Reconstruída	112
4.10	Previsão aplicando o Modelo ARIMA na Série Temporal Reconstruída	113
4.10.1	Estimação do Modelo ARIMA.....	116
4.10.2	Verificação do Modelo ARIMA.....	117
4.10.3	Avaliação das Previsões	119
4.11	Combinação das Previsões Individuais da Série Reconstruída	119
4.12	Avaliação dos Resultados das Previsões Combinadas	120
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	122
5.1	Conclusões.....	122
5.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	123
6	REFERÊNCIAS	125
7	APÊNDICES	130

1 O PROBLEMA DE PESQUISA

1.1 Introdução

A análise de *wavelets* é uma ferramenta matemática que vem ganhando popularidade em função de sua utilidade em diversos segmentos, principalmente porque esta técnica se concentra no estudo de sinais ou séries não-estacionários, sendo assim capaz de analisar qualquer série temporal em seu estado original. Sua abrangência quanto à aplicação vem evoluindo nos ramos da ciência e da administração, tais como física, matemática, engenharia, e até mesmo na econometria, onde a técnica vem sendo utilizada como um procedimento auxiliar no ajuste e previsão de séries temporais.

A despeito disso, pode-se dizer que a estatística em si dispõe de inúmeros recursos ou métodos numéricos capazes de modelar e realizar previsões de séries temporais. Dentre as técnicas existentes, as mais difundidas são os modelos de suavização exponencial, também conhecida por amortecimento ou equalização exponencial e os modelos ARIMA, cuja sigla denomina os modelos Auto-Regressivos Integrados de Médias Móveis. Apesar dos métodos serem conhecidos, ambos apresentam características que se opõem. O método de suavização exponencial é considerado simples, pois não exige que os dados originais da série temporal sejam manipulados e ou tratados para aplicação da técnica. Além disso, o processamento computacional é reduzido para obtenção dos resultados, tornando-o assim conhecido pela sua rapidez. Já o modelo ARIMA é um método mais elaborado e que se baseia na metodologia conhecida por BOX e JENKINS (1970) para resolução, a qual exige um maior nível de conhecimento estatístico quando comparada ao modelo de suavização. Não obstante, ambos os modelos são considerados extremamente eficientes, motivo este que justifica sua grande utilização.

Mesmo com estas e outras opções existentes, a tarefa de escolha ou preferência por uma ou outra técnica é algo complexo, pois requer uma análise prévia das características originais dos dados, de modo que possam assim ser respeitadas as condições de regularidade para aplicação de cada método. Além disso, o erro ou discrepância da previsão encontrada é fator preponderante, pois através dele se faz o julgamento e a escolha pela técnica mais

adequada. Sob esta ótica, o conceito de combinar previsões torna-se então um atrativo, pois combinar tende a reduzir as discrepâncias obtidas em cada método individualmente, de modo que haja complementariedade de informações. A combinação pondera as previsões a partir das performances passadas de cada previsão individual, de modo a valorizar assim a melhor previsão obtida.

Em respeito às considerações expostas, é importante fazer menção aos trabalhos desenvolvidos por BATES e GRANGER (1969), difusores da técnica de combinar previsões, e por DOHONO e JOHNSTONE (1992,1993), precursores da introdução ao uso de *wavelets* como tratamento inicial para aplicação das metodologias tradicionais de previsão, de modo a esclarecer que ambos os trabalhos sustentam e embasam teoricamente os conceitos aqui apresentados até o momento.

Assim, visando compartilhar e extrair os benefícios provenientes de cada uma das teorias, verificou-se a oportunidade de introduzir o conceito de transformada *wavelet* antes de estimar as previsões individuais que antecedem a combinação, de modo a avaliar se a integração entre uma etapa de pré-tratamento dos dados da série original aliada à combinação poderia ser útil no sentido de aumentar a precisão dos resultados, reduzindo com isso o erro obtido. E foi justamente esta proposta que subsidiou o desenvolvimento deste projeto de pesquisa, cujo escopo propõe uma metodologia capaz de otimizar os resultados de uma combinação de previsões de séries temporais através de uma abordagem de *wavelets*. A constatação da efetividade da técnica foi feita comparando-se a previsão combinada dos modelos individuais obtidos a partir da série original com a previsão combinada dos modelos obtidos via série *wavelet*, de modo que no resultado final apresentado possa ser verificado um aumento de precisão sobre o resultado da combinação das previsões em seu estado original.

1.2 Apresentação do Problema

Os métodos convencionais para previsão de séries temporais exigem para sua aplicação o cumprimento de uma série de critérios que devem ser seguidos para que o método possa oferecer previsões aceitáveis. Tais critérios estão relacionados às características desejáveis para a série temporal que se está analisando. Dentre elas, pode-se citar a condição de estacionariedade, a adoção de um modelo linear, uma distribuição normal de dados etc.

Porém, tais características não se manifestam ou são incomuns de acontecer em séries reais, principalmente séries econométricas, relativas à finanças e vendas, por exemplo. Diante desta situação, o que normalmente ocorre é a aplicação de algumas transformações à série original, o que a princípio não afetaria o comportamento dos dados. Porém, se a natureza da série temporal realmente não fosse abalada seria natural esperar que os resultados obtidos fossem muito precisos. Contudo, na prática os resultados obtidos são considerados aceitáveis e não ótimos. Sob este ponto de vista, a aplicação de qualquer método de previsão pode se tornar ainda mais inadequada e com isso grandes discrepâncias tendem a ser inevitáveis.

O senso de utilização das previsões pode tornar o problema encontrado com os erros da previsão ainda maiores, pois na maioria das vezes a previsão é feita e utilizada para fins de planejamento, na tentativa de antever o que vai acontecer e assim poder se preparar. São várias as áreas que requerem planejamento, e com isso previsão. Logo, se a previsão for mal elaborada os riscos são amplificados. No caso da indústria, por exemplo, a previsão ou *forecast*, termo comumente utilizado neste meio, afeta diretamente a programação e planejamento dos recursos necessários (tais como matéria-prima e mão de obra, por exemplo). Uma vez feita a previsão, e se esta não for confiável, uma série de problemas podem ocorrer, desde uma falha na alocação dos recursos, tal como matéria-prima, a qual pode provocar a falta ou excesso de produção. Em tempos de “Manufatura Enxuta” produzir o que não é necessário ou além do necessário, é considerado pela filosofia de manufatura japonesa como desperdício, pois estoque (seja de matéria-prima ou de produto acabado) é capital imobilizado e, portanto prejuízo.

Diante deste exemplo, encontrou-se o interesse para o desenvolvimento desta pesquisa, que se concentra basicamente no aperfeiçoamento das técnicas existentes para obtenção de previsões. E para contornar a problemática imposta por condições de regularidade peculiares aos métodos de previsões existentes, eis então que surge a possibilidade de analisar uma série qualquer através do conceito *wavelet*.

Assim, o problema central de pesquisa deste trabalho fez a seguinte indagação: um tratamento inicial à série de dados poderia melhorar o resultado obtido através de uma combinação de previsões? O problema é determinar de que maneira os conceitos da análise *wavelet* podem contribuir na elaboração de um método de previsão mais preciso.

A abordagem de *wavelet* em combinação de previsões foi testada considerando-se os dados de uma série temporal real, a qual representa os volumes de vendas de um determinado produto fabricado em uma determinada empresa do segmento de máquinas

industriais (bens de capital). Esta série foi utilizada num primeiro momento em seu estado original e posteriormente em sua forma reconstruída – via transformada *wavelet*.

1.3 Hipótese Básica

Duas teorias foram consideradas para supor a hipótese básica deste projeto de pesquisa. A primeira teoria admitida foi a combinação de previsões, processo viável que melhora a qualidade das previsões por meio da minimização do erro, que ocorre devido à medida que se consideram simultaneamente informações oriundas de métodos distintos. Esta característica pode ser comprovada através da comparação dos erros obtidos entre os métodos individuais e o resultado combinado.

A segunda teoria que foi admitida está relacionada à análise do sinal ou série temporal via transformada *wavelet*. A transformada nada mais é que um processo capaz de representar a série original em componentes de tempo e frequência através da decomposição do sinal original. Esta representação em função do tempo é útil, pois permite ajustar a função que se deseja representar (aumentando a precisão do ajuste) quanto maior for o número de termos utilizados. Logo, se uma análise for feita sobre esta nova série isso permitirá ajustar a função e com isso é possível prever melhor o comportamento desta.

Logo, se ambas as teorias são aceitas na literatura, a hipótese feita é de que a análise conjunta destas pode ser benéfica, no sentido de poder melhorar ainda mais a qualidade das previsões combinadas, as quais foram estudadas neste projeto de pesquisa.

1.4 Motivações, Justificativas e Importância do Trabalho

O universo de aplicações envolvendo previsões presume e justifica a importância em se prever com maior precisão. Este foi um dos focos de interesse para o desenvolvimento deste trabalho, que abordou uma proposta melhorada para combinação de previsões de séries temporais através de uma abordagem de *wavelet*, a qual foi motivada pelo trabalho de TAK (1995).

Atualmente, a maior parte dos métodos quantitativos para análise de séries temporais baseiam-se em modelos estatísticos, os quais requerem alguns critérios ou características que as séries comuns normalmente não apresentam. Esta limitação acaba induzindo a abordagem de novos conceitos, na tentativa de se encontrar meios alternativos que possam servir de ferramenta auxiliar para o tratamento dos dados. Dentre as alternativas existentes, encontrou-se a possibilidade de empregar a transformada *wavelet*.

A transformada *wavelet* fornece uma representação precisa de um sinal em função de tempo e frequência simultaneamente, bem como, permite analisar qualquer tipo de sinal, seja ele não-estacionário ou descontínuo, o que comprova a tese de que para seu uso, não importam as características da série que se esteja analisando. Esta é inclusive uma grande vantagem que tem motivado a utilização da transformada *wavelet* em larga escala para inúmeras aplicações e de naturezas diversas, uma vez que isto não seria possível de se fazer utilizando as técnicas tradicionais existentes para análise de séries temporais.

Assim, pode-se dizer que o que motivou sua aplicação em meio ao conceito de combinação de previsões, foi a tentativa de determinar se a mesma seria capaz de provocar ou não um melhor desempenho para a previsão combinada do que se fosse feito diretamente na série original. Para estudar esta proposta, foi escolhido um tratamento de sinal – também baseado na transformada *wavelet*, conhecido como *denoising*, que significa supressão de ruído. A importância em remover o ruído presente em um sinal torna-se viável sob o ponto de vista de permitir que os dados possam ser analisados de uma maneira mais “limpa”, e com isso espera-se que na análise da nova série obtida se consiga identificar a natureza intrínseca aos dados. Desta forma, entendendo melhor o comportamento dos dados, logicamente a análise que se venha a realizar em torno deles será mais coerente com a sua realidade.

Quanto ao uso do conceito de combinar previsões, pode-se dizer que o mesmo foi escolhido em função de sua eficiência, já comprovada em inúmeros trabalhos na literatura. O uso da combinação torna-se atraente em razão de sua abrangência, a qual permite reunir informações de diferentes fontes – sobretudo independentes – permitindo assim aumentar a precisão dos resultados obtidos em um método individual. Este é o principal motivo que o torna satisfatório em relação às demais técnicas individuais, pois ao invés de tentar escolher a melhor técnica, formula-se o problema combinando as técnicas mais precisas e que conseqüentemente irão ajudar a melhorar a acurácia da previsão.

Por último, presume-se ainda que esta busca constante em aperfeiçoar novas técnicas de previsão que sejam mais robustas, seja impulsionada também pelo fato da previsão ser uma ferramenta estratégica utilizada para fins de planejamento em diversos

segmentos, os quais requerem a construção de cenários futuros, seja para prever consumos, vendas, índices econômicos, fatores climatológicos etc. Neste projeto de pesquisa por exemplo, o estudo de previsão concentrou-se na previsão de vendas de um determinado produto. Se comprovada a proposta deste trabalho, ela poderia vir a contribuir com o processo de gestão da demanda das indústrias, por exemplo, pois além de revelar tendências do mercado, esta poderia contribuir para o posicionamento estratégico da empresa, bem como servir de subsídio para tomadas de decisão de cunho gerencial, seja como base estratégica, tática ou operacional.

Todos os argumentos que aqui foram expostos vêm de encontro a idéia de desenvolver um trabalho que seja capaz de aprimorar o conceito da combinação de previsões, com o uso da teoria relativa à *wavelets* em conjunto com as convencionais técnicas existentes. A exemplo de outras aplicações, esta foi mais uma encontrada para divulgar e disseminar o conceito da análise de *wavelets*, mais especificamente a técnica *denoising*, a qual promove a “descontaminação” do sinal em estudo e com isso, advém a possibilidade de ajustar os dados através deste tratamento, com o intuito de ao final do processo obter uma previsão com erro mínimo.

1.5 Objetivos do Trabalho

O principal objetivo deste trabalho foi propor uma abordagem da *análise de wavelets* aplicada à combinação de previsões de séries temporais, com o intuito de melhorar a qualidade da previsão (através da minimização dos erros). Tal abordagem visou portanto verificar a possibilidade de aprimorar ainda mais os resultados previstos de uma combinação. Foram necessários para isso estabelecer alguns outros objetivos específicos para determinação da linha lógica de trabalho, dentre os quais se destacam:

- Fazer uma revisão teórica dos conceitos e formulações matemáticas referentes à análise via transformada *wavelet* e aos métodos existentes para estudo e previsão de séries temporais, em especial os modelos de suavização exponencial e ARIMA.
- Aplicar os métodos de suavização exponencial e ARIMA para obtenção das previsões individuais

- Comprovar o conceito disseminado sob a redução do erro obtido através da combinação das previsões de séries temporais (dentro e fora da amostra considerada)
- Introduzir o conceito da transformada *wavelet* utilizando a técnica *denoising*, cujo objetivo é reduzir as interferências causadas pela presença de ruído na série temporal original que se está analisando. A nova série originada (série reconstruída ou *de-noise*) passa a ser então a nova série de estudo.
- Reegerar os métodos de suavização exponencial e ARIMA, considerando como série temporal a série reconstruída obtida a partir da transformada *wavelet*
- Comparar os erros das previsões da série em seu estado original com as previsões obtidas a partir da série *wavelet*.
- Combinar as previsões individuais obtidas a partir da série *wavelet* reconstruída e posteriormente comparar os resultados das duas combinações, de modo a avaliar se foi comprovada alguma vantagem quanto à aplicação da metodologia proposta. O impacto na qualidade da previsão é avaliado através de mensuração dos erros (neste caso, o erro percentual médio – MAPE, o erro quadrático médio – MSE) e do coeficiente de desigualdade U de Theil.

1.6 Metodologia e Estrutura do Trabalho

Nesta seção é feito um breve relato sobre a metodologia e a estrutura do trabalho em si. A começar pela metodologia, este trabalho propôs o desenvolvimento de uma combinação linear de previsões obtida a partir da associação de dois métodos (suavização exponencial e auto-regressivo integrado de médias móveis - ARIMA), sendo que para aplicação de cada um dos métodos foram considerados dois cenários distintos: o primeiro analisando a série em seu estado original e o segundo analisando a série reconstruída a partir da decomposição *wavelet*. Após a obtenção das previsões individuais e combinadas para cada um dos cenários, a conclusão da pesquisa é feita através da avaliação e comparação das discrepâncias (erros) obtidas em cada uma das duas combinações.

Para promover o desenvolvimento nesta linha de pesquisa, são a seguir relatadas as etapas que foram seguidas para conclusão do projeto.

A etapa inicial deste trabalho foi o estudo de conceitos teóricos, acompanhado de uma revisão da literatura acerca de trabalhos envolvendo a aplicação da análise *wavelet*, bem como questões voltadas à análise de séries temporais e os respectivos métodos existentes para previsão das mesmas. Este estudo foi resumido no Capítulo 2, que descreve a fundamentação teórica em dois tópicos. O primeiro faz uma revisão da literatura envolvendo os assuntos e principais trabalhos desenvolvidos na área de combinação de previsões e da análise via *wavelets*. Em seguida, o segundo tópico deste mesmo capítulo apresenta alguns tópicos teóricos, os quais mostram as principais características, conceitos e formulações matemáticas existentes em relação aos assuntos que foram abordados nesta dissertação.

Já no Capítulo 3 é apresentada a metodologia seguida para o desenvolvimento deste projeto de pesquisa. Para melhor compreensão, foi desenvolvido um fluxograma esquemático com os processos chaves de cada etapa.

No Capítulo 4 são relatadas todas as análises realizadas conforme a metodologia que foi descrita. A análise empírica realizada inclui tanto a implementação numérica (relativa aos cálculos das previsões individuais, combinação e decomposição *wavelet*) quanto a discussão dos resultados estimados.

Finalmente, o Capítulo 5 apresenta as conclusões obtidas a partir da comparação dos resultados das combinações de previsões. Para completar as conclusões são levantadas ainda sugestões, com o intuito de que estas proposição sirvam de estímulo para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Revisão da Literatura

2.1.1 Conceito de Previsão

Segundo LIMA (2004), a previsão de uma série temporal é a determinação dos prováveis valores que serão assumidos pela variável de previsão, dentro de um horizonte máximo de tempo.

Já MORETTIN e TOLOI (2006) definem o significado da palavra previsão com sendo alguma coisa que se quer ver antes que ela exista. Segundo eles, alguns autores preferem a palavra predição, como forma de indicar algo que deverá existir no futuro. Outros ainda utilizam o termo projeção, já que o processo de previsão, segundo define LIMA (2004), nada mais é do que uma extrapolação feita além do modelo temporal conhecido (neste caso a série temporal).

Contudo, “é importante salientar que a previsão não constitui um fim em si, mas apenas um meio de fornecer informações para uma conseqüente tomada de decisões, visando a determinados objetivos” (MORETTIN e TOLOI, 2006, p.7).

Neste trabalho, a palavra previsão foi o termo escolhido para tratar o assunto relacionado à previsões de séries temporais.

Para exemplificar a abrangência deste assunto nos mais variados segmentos, pode-se citar sua conhecida aplicação na área de meteorologia (onde é praticamente impossível não associar o termo quando se fala em previsões de tempo), ou ainda na área econômica (onde os investidores se baseiam na previsão dos analistas de mercados para determinar quando e onde investir). Estes dois exemplos foram apenas uma pequena amostra do vasto campo de atuação dos profissionais especializados na aplicação e desenvolvimento de técnicas de previsão.

2.1.2 Histórico do Surgimento da Previsão

As técnicas usadas para realização de previsões tiveram sua origem no século XIX, quando no meio científico vigia o Determinismo Científico.

Os adeptos do Determinismo Científico postulavam que, se em um determinado momento, fosse possível conhecer as posições e velocidades exatas de cada partícula do Universo, as Leis da Física deveriam ser capazes de fornecer o estado do Universo em qualquer momento do passado ou do futuro.

O que seria possível através da criação de Modelos Matemáticos Determinísticos, que nada mais são que um conjunto de equações e inequações matemáticas, organizadas de forma que, ao serem inseridas as condições iniciais do sistema sob análise, seja possível obter as condições em um momento desejado.

Os Modelos Determinísticos são úteis para certas situações, como pequenos sistemas físicos do nosso cotidiano. Entretanto, apresentam limitações. Demonstra-se que pequenas variações nas condições iniciais podem causar grandes perturbações na condição final. Por isso, os Modelos Determinísticos são inadequados quando não é possível definir as condições iniciais com boa precisão.

O golpe final nos Modelos Determinísticos ocorreu no início do século XX, com o avanço da Física Quântica.

Para compensar as limitações das técnicas determinísticas, foram desenvolvidos Modelos Probabilísticos. Através desses Modelos, conhecendo a velocidade exata de uma partícula, é possível definir suas posições mais prováveis ou a probabilidade de uma determinada posição ocorrer.

Os Modelos Probabilísticos mostraram-se úteis em outros setores do conhecimento humano. Por exemplo, atualmente um Modelo Probabilístico auxiliou na definição das metas e consumo de energia elétrica estabelecidas pelo Plano de Contingenciamento do Governo Federal, afetando diretamente a vida de boa parte da população brasileira. (RODRIGUES, 2007)

2.1.3 Previsões de Séries Temporais baseada em Combinação

Dentre as formas disponíveis para integrar previsões, sem dúvida nenhuma a mais estudada e discutida até hoje é a combinação de métodos de previsões, ou simplesmente combinação de previsões. O principal argumento difundido na literatura segundo DE

MENEZES, BUNN E TAYLOR (2000) afirma que a técnica melhora a acurácia da previsão “tirando proveito” da disponibilidade de múltiplas informações. Isto porque os mesmos dados podem ser analisados por diferentes técnicas, tornando possível capturar informações diferentes acerca dos mesmos dados. Esta mesma idéia também foi apresentada por MARQUES (2005), que em outras palavras, afirmou que o propósito da combinação é possibilitar um aumento da precisão ou acurácia de um processo de previsão, considerando a complementaridade de informações que pode ocorrer associando-se as previsões obtidas individualmente. Logo, é de se esperar que a variância obtida a partir dos erros da previsão combinada seja inferior à menor das variâncias das previsões individuais originais.

Outra questão que favorece o uso da combinação baseia-se no fato de que as previsões podem ser abaladas por vários fatores, por essa razão cada técnica que for considerada na combinação tende a contribuir de forma a amenizar o impacto provocado por algum destes fatores. Tais argumentos segundo WERNER e RIBEIRO (2006) – citando CLEMEM (1989), reforçam a idéia de que a combinação é uma abordagem atraente para realizar previsões, pois ao invés de tentar escolher a melhor técnica, a combinação permite reunir informações oriundas de cada método individual de maneiras distintas.

A seguir apresenta-se um breve histórico de trabalhos consagrados em referência à técnica de combinar previsões.

BATES e GRANGER (1969) foram os precursores no estudo de combinação de previsões. Em seu trabalho, os autores desenvolveram um método para combinar duas previsões objetivas a partir de uma combinação linear, ponderando uma das previsões com peso w e a outra com peso $(1 - w)$. Assim, a previsão combinada (P_c) foi obtida conforme a equação (2.1):

$$P_c = w.P_1 + (1 - w).P_2 \quad (2.1)$$

onde P_1 e P_2 são as previsões a serem combinadas.

Com relação à ponderação, nada impede que o peso atribuído a cada uma das previsões seja igual, e que assim a combinação seja obtida a partir de uma média aritmética simples. A preferência em utilizar a média das previsões a utilizar um “mau” modelo também foi defendida por MAKRIDAKIS e WINKER (1983). Assim como, na opinião de TAYLOR e BUNN (1998) a média talvez fosse o método de combinação mais empregado por ser altamente compensatório.

A recomendação para uso da média aritmética em combinação de previsões também foi apoiada por MENEZES *et. al.* (2000), pois se atribui ao seu bom desempenho do método a questão de instabilidade dos pesos. Tal instabilidade é decorrente das alterações na matriz de covariância dos erros das previsões individuais – que ocorre em função da atualização dos dados da série cronológica. Em razão disso, a utilização da média aritmética na ponderação dos pesos pode se tornar uma alternativa viável (não ótima) quando comparada aos demais métodos existentes para este objetivo.

Contudo, apesar de todos estes argumentos, não se pode afirmar que a combinação por média aritmética simples seja o método mais apropriado. O que se pode considerar é que, a idéia de combinar previsões através da ponderação de métodos distintos pode contribuir para a redução do erro da previsão.

Neste sentido, a equação (2.1) – formulada no trabalho de BATES e GRANGER (1969) mostra que os autores preferiram atribuir pesos diferenciados a cada uma das previsões, de modo que o maior peso fosse atribuído à previsão individual com menor discrepância. Deste modo, os autores propuseram que para determinação do peso w fosse levada em consideração a minimização da variância dos erros da previsão combinada. Por conseguinte, definiram o método que ficou conhecido como método da mínima variância, onde a variância da previsão combinada em função do peso w é obtida conforme apresentado na equação (2.2).

$$\Omega = \sigma_c^2 = w^2 \sigma_1^2 + (1-w)^2 \sigma_2^2 + 2\rho w \sigma_1 (1-w) \sigma_2 \quad (2.2)$$

sendo σ_1^2 e σ_2^2 as variâncias dos erros de cada uma das previsões individuais e ρ o coeficiente de correlação entre os erros das previsões. Diferenciando a equação (2.2) em relação à w e igualando o resultado a zero, obtém-se então a equação que define o peso como sendo:

$$\frac{d\Omega}{dw} = 2w\sigma_1^2 + 2(1-w)(-1)\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2(1-2w) = 0 \quad (2.3)$$

$$w(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) = \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 \quad (2.4)$$

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \quad (2.5)$$

Caso não haja correlação entre os erros, o que implica em $\rho = 0$, a equação (2.5) fica reduzida à forma mostrada na equação (2.6):

$$w = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (2.6)$$

Para determinação do peso w , os autores desenvolveram dois procedimentos baseados no conhecimento ou não das variâncias. São eles:

- i) variância conhecida: verifica-se a estacionariedade das variâncias dos erros através de um gráfico de amplitude¹ (gráfico R), por exemplo. Caso as médias estejam sob controle e apresentem um padrão aleatório, admite-se então a estacionariedade. Em decorrência disso, as variâncias dos erros podem ser estimadas por uma janela temporal longa (maior que 12 meses). Porém, quando tal característica não for verificada, deve-se então investigar o tipo de não-estacionariedade, que pode ser gradual ou errática. A não-estacionariedade gradual caracteriza-se por padrões de comportamento existentes nos gráficos de controle. Tais padrões tornam-se evidentes quando se detecta uma mudança curta e repentina (tal como um crescimento ou uma diminuição) na região delimitada pelos limites superior e inferior do gráfico de controle. O fato de esta mudança ser breve não afeta as características da série de variâncias dos erros em si, permitindo assim que a variância possa agora ser estimada por uma janela temporal curta (menor que 12 meses). Independente do tipo de estacionariedade, o fato é que as variâncias são conhecidas ou podem ser estimadas. Neste caso, a equação que define os pesos de cada previsão é obtida através de equação (2.7) a seguir.

¹ A variabilidade de um processo é comumente controlada pelo gráfico R através da amplitude (R) das amostras. A amplitude é obtida através da diferença entre um valor da amostra e o valor imediatamente anterior.

$$w_i = \frac{1/\sigma_i}{\sum_{i=1}^n 1/\sigma_i} \quad (2.7)$$

onde n é o número de técnicas de previsões que estão sendo combinadas.

Porém, caso seja verificado através do gráfico de controle R que o processo está fora de controle estatístico, ou seja, apresenta pontos além dos limites superior ou inferior, diz-se então que o tipo de não-estacionariedade é errática, pois nesta situação o comportamento de uma série torna-se imprevisível.

Nestes casos em que não se pode estimar a variância, uma forma aceitável encontrada para determinar o peso da previsão é obtido através $1/n$.

- ii) variância desconhecida: a mesma dificuldade encontrada para estimar a variância em um processo não-estacionário errático é encontrada quando não se tem conhecimento a respeito das variâncias. Isto é extremamente comum acontecer quando se tratam de previsões subjetivas, pois nestas situações as variâncias são também subjetivas. Portanto, a ponderação da previsão para este caso segue a mesma tratativa citada para o caso de não-estacionariedade errática, ou seja, o peso da previsão também é obtido através $1/n$, lembrando que n é o número de previsões que estão sendo combinadas, conforme foi previamente citado.

Logo após em 1974, NEWBOLD e GRANGER deram prosseguimento ao estudo iniciado por BATES e GRANGER (1969), e admitindo todas as suposições até então feitas, desenvolveram a combinação de n técnicas, formulada pela equação (2.8) a seguir:

$$P_c = w_1 \cdot P_1 + w_2 \cdot P_2 + w_3 \cdot P_3 + \dots + w_n \cdot P_n \quad (2.8)$$

onde w_i é o peso atribuído a cada previsão P_i e P_c é a previsão combinada.

Com relação à determinação dos pesos, foram obedecidas as mesmas diretrizes formuladas no primeiro trabalho, comprovando que os procedimentos anteriormente descritos foram válidos para determinação dos pesos da combinação de n técnicas.

LIBBY e BLASHFIELD (1978) foram adeptos à proposta de BATES e GRANGER (1969) e relataram em seu trabalho que na maioria das vezes uma maior precisão da previsão foi obtida considerando-se a combinação de duas a três técnicas.

Posteriormente, foi a vez de WINKLER e MAKRIDAKIS (1983) avaliar a metodologia desenvolvida por NEWBOLD e GRANGER (1974). Em seu trabalho, os autores analisaram combinações ponderadas entre dez técnicas e assim confirmaram a proposta de NEWBOLD e GRANGER para n técnicas. Contudo, mesmo afirmando que a acurácia aumenta proporcionalmente ao número de técnicas combinadas (o que tornaria a combinação um processo compensatório), os autores verificaram que o emprego de quatro a cinco técnicas combinadas conduziria a um grau de saturação e portanto, com este número de técnicas envolvidas já seria suficiente para melhorar a acurácia. Assim, demonstraram em seu trabalho um dos melhores métodos para determinação dos pesos da combinação. Tal método considerava os resíduos das previsões individuais para obtenção do peso da respectiva previsão, e assim definiram a equação para obtenção do peso w_i como sendo:

$$w_i = \frac{\left(\sum_{i=1}^t e_i^2 \right)^{-1}}{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^t e_i^2 \right)^{-1}} \quad (2.9)$$

onde n é o número de técnicas que estão sendo combinadas, t é o número de períodos incluídos para determinação dos pesos na previsão, e_i são os resíduos da previsão – obtidos a partir das diferenças entre os dados observados e os dados previstos. A grande vantagem deste método dá-se em função da variação dos erros em diferentes períodos, permitindo que haja uma atualização dos pesos a medida que são acrescidos novos dados à série.

Mais tarde, GRANGER e RAMANATHAN (1984), verificaram que os métodos tradicionais de combinação até então desenvolvidos poderiam ser comparados a um modelo de regressão. Os autores sustentavam a idéia que a metodologia de combinação era análoga à

metodologia de Mínimos Quadrados Ordinários, sendo a previsão combinada a variável dependente e as previsões individuais as variáveis independentes.

Já em 1998, DIEBOLD verificou que era possível reduzir ainda mais a discrepância da previsão combinada, se a ela fosse acrescida os resíduos dos modelos que compunham a previsão, neste caso, os resíduos das previsões individuais.

ARMSTRONG (2001) reforçou a idéia inicial de BATES e GRANGER (1969) de que a ponderação deveria ser feita com base nas precisões individuais de cada técnica, ou seja, quanto maior fosse a precisão maior seria o peso a ela atribuído.

O trabalho de EVANS (2003) sustentou a idéia proposta por GRANGER e RAMANATHAN (1984), confirmando a possibilidade de se usar um modelo de regressão para combinar previsões, fundamentado também no trabalho de DIEBOLD (1998).

Em 2004 ARMSTRONG reforçou a idéia de ponderação dos pesos, de modo que a combinação fosse feita com pesos diferenciados para cada técnica individual.

Neste mesmo período, ZOU e YANG (2004) desenvolveram seu trabalho afirmando que resultados mais robustos podem ser obtidos ao se combinar modelos similares, pois até mesmo as técnicas objetivas ou quantitativas são passíveis de apresentar resultados distintos quando submetidas a um tratamento inicial dos dados. Isso corrobora a menção feita anteriormente de que combinar previsões aumenta a acurácia na medida em que se consegue tirar proveito de informações úteis e mais independentes relativa a cada uma das técnicas empregadas.

Passados quase quarenta anos desde o início da teoria de combinação de previsões, é possível encontrar ainda na literatura outros trabalhos mais recentes - que tem por fim um objetivo em comum: o aprimoramento ou desenvolvimento de novas técnicas. Dentre as novas propostas de metodologias para previsão e análise de séries temporais, a análise de *wavelets* é uma das técnicas com maior destaque e que vem ampliando o seu campo de atuação, o que justifica a sua aplicação neste trabalho de pesquisa.

2.1.4 Histórico da Análise de *Wavelets*

A análise de séries temporais via *wavelet* pode ser encontrada na literatura através de outros termos, tais como *Ondaletas*, *Ondelettes*, *Ondulas* e ainda como ondícula ou

ondinha, segundo MORETTIN (1999). Neste projeto de pesquisa, o termo utilizado para tratar a análise de séries através desta metodologia será *wavelet* ou transformada *wavelet*, cuja abreviação será TW.

Historicamente tem-se notícia de que o termo *wavelet* fora usado por Alfred Haar em 1909, embora num conceito semelhante ao atual – desenvolvido mais a frente – no final da década de 70 – por Jean Morlet.

Nesta época, Morlet trabalhava para a companhia de petróleo *Elf Aquitaine* e sua motivação no estudo de *wavelet* visava encontrar uma maneira de melhorar o tratamento de sinais geofísicos.

Contudo, Morlet inicialmente enfrentou críticas de vários opositores, os quais o contestavam quando a veracidade das informações, pelo simples fato de que na época não havia na literatura registros sobre o assunto, logo seria um estudo inútil e sem embasamento matemático – era o que os críticos da época alegavam.

Mesmo assim, alguns anos depois Yves Meyer retomou os estudos feitos por Morlet. Meyer contribuiu de forma a ajudar a enriquecer e amadurecer o desenvolvimento da nova teoria. Além disso, Meyer ajudou também na divulgação e disseminação da metodologia em outras áreas e segmentos da matemática.

Posteriormente, Stéphane Mallat, um estudante de processamento de imagens, foi o primeiro a desenvolver um algoritmo para calcular a transformada de *wavelet* de forma computacionalmente eficiente, abrindo as portas à comunidade de processamento de sinais (GALVÃO *et. al.*, 2001).

Esta característica interdisciplinar mostra que desde o início a teoria de *wavelets* foi aplicável em diferentes ramos da ciência – o que provocou sua popularidade em vários segmentos. Alguns autores defendem a opinião de que o estudo de *wavelets* foi o “evento matemático de maior relevância na década de 80”.

Nos últimos anos, a análise de *wavelets* vem ganhando espaço na economia, onde sua principal aplicação encontra-se na econometria, onde a metodologia é utilizada no tratamento de séries temporais para realizar previsões (TORRENCE, 1998) (MORETTIN, 1999).

2.1.5 Previsões de Séries Temporais baseado na Teoria de *Wavelet*

Uma das primeiras contribuições de grande relevância envolvendo a decomposição via *wavelets* aliada aos tradicionais métodos de previsão foi desenvolvida por DOHONO (1993) E JOHNSTONE (1996). Em seus trabalhos, estes autores formularam a aplicação de metodologias de previsão baseadas em séries “alisadas” (*denoised*), obtidas a partir da série de dados original.

Posteriormente, TAK (1995) também deu sua contribuição desenvolvendo em seu trabalho a aplicação da teoria de *wavelets* para previsão de séries temporais. Seu trabalho consistia na determinação do índice *Standard and Poor's 500* – via modelo ARIMA e de Redes Neurais, aliado à metodologia de decomposição via *wavelets*. Para análise foram considerados dados mensais do período de maio de 1980 a dezembro de 1990. Tak então decompôs a série (via *wavelets*) em dois subníveis, aplicando a cada um deles os modelos de previsão supracitados. A partir das previsões obtidas em cada subnível foi feita então a reconstrução da série original. O propósito do trabalho foi avaliar se a previsão obtida através da decomposição (via *wavelets*) foi mais precisa do que a previsão feita a partir dos dados da série original. A Figura 1 a seguir ilustra a série S&P 500.

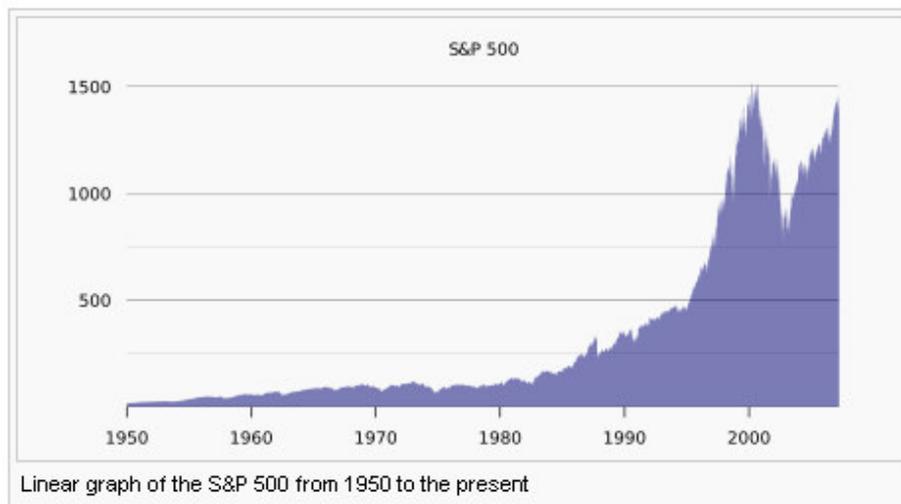


Figura 1: Série S&P500 - de Janeiro/1950 a Março/2007
Fonte: www.wikipedia.org

Como se pode observar a série é claramente não estacionária. Em seu trabalho, TAK constatou que a decomposição não alterava esta condição, pois tanto a série original como as *wavelets* obtidas da decomposição eram não estacionárias. A não estacionariedade das séries (original e decompostas) também foi evidenciada com a aplicação do teste de raiz unitária (teste de Dickey-Fuller). Depois de avaliada a questão de estacionariedade, e aplicadas as transformações cabíveis para resolver tal problema, TAK finalmente obteve os resultados das previsões realizadas. A partir destes, o autor concluiu que os erros percentuais médios medidos foram reduzidos em 17,3% para o modelo ARIMA e 26,3% para o modelo de Redes Neurais. Tais resultados comprovaram que foi possível melhorar a qualidade das previsões através da decomposição via *wavelets*.

Outro *case* envolvendo a aplicação de decomposição via *wavelets* para previsão foi analisado por ARIÑO (1995). A série investigada foi a de vendas de carros do mercado espanhol – no período de janeiro de 1974 a dezembro de 1994. Em seu estudo, ARIÑO considerou como amostra as primeiras 240 observações, e as 12 subseqüentes foram utilizadas para testar a aderência do método fora da amostra. Aplicando o modelo ARIMA à série original de dados, foi encontrado um erro quadrático médio (RMSE) de 16,7%, enquanto que o modelo aplicado às séries obtidas da decomposição ocasionou um erro de 12,9%, comprovando novamente a idéia de que a decomposição via *wavelets* traz benefícios à qualidade das previsões realizadas. Segundo o autor, estes resultados apenas confirmaram que é possível detectar melhor o comportamento cíclico de uma série a partir da análise de suas subséries.

Além destes trabalhos, pode-se encontrar na literatura acerca da aplicação de *wavelets* para previsão de séries temporais os trabalhos de HOMSY, PORTUGAL E ARAÚJO (2000), WONG *et al.* (2003) dentre outros. Todos estes trabalhos têm um objetivo em comum: decompor a série original via *wavelets* e posteriormente comparar os resultados da previsão obtidos a partir de uma metodologia de previsão conhecida (por exemplo, ARIMA), com o intuito de verificar se a decomposição contribui ou não para a qualidade das previsões. Em todos, a conclusão final foi feita a partir da determinação dos erros percentuais absolutos médios (MAPE), onde foi constatada uma redução em relação ao erro obtido da previsão com base na série original, e com isso foi confirmada a idéia de que realmente a decomposição pode trazer grande benefício à previsão.

Como se viu, ficou praticamente comprovada a eficácia do uso da teoria de *wavelets* no tratamento dos dados (da série original). Isto pode ser um forte indício de que a utilização da teoria de *wavelets* para o estudo de séries de tempo será no futuro a principal

ferramenta (e não mais auxiliar) para se fazer previsão (HOMSY, PORTUGAL e ARAÚJO. 2000).

2.2 Tópicos Teóricos

2.2.1 Séries Temporais

Conforme definem MORETTIN e TOLOI (2006) uma série temporal é qualquer conjunto de variáveis estocásticas (probabilísticas) equiespaçadas e ordenadas no tempo $\{X_t\}_{t=1}^n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Pode-se dizer que um sinal que depende do tempo e é medido em pontos particulares no tempo é sinônimo de uma série temporal (KLEIN, 1997).

No âmbito de previsão, NEWBOLD (1995) definiu que uma série temporal seria uma seqüência cronológica de observações, de uma variável de interesse particular, que quando analisadas poderiam ajudar a previsão a partir das características passadas desta série.

Segundo LIMA (2004), citando ENDERS (2003), para que uma série de observações indexadas equiespaçadamente no tempo possa ser chamada de sucessão cronológica são necessárias pelo menos 50 observações.

A partir da existência e disponibilidade de dados passados é possível então se iniciar o estudo de uma série temporal – a partir de uma abordagem matemática e estatística – capaz de modelar equações que traduzam os mecanismos responsáveis pela geração desta série, e assim investigar sua evolução e ou comportamento.

É oportuno comentar que a qualidade e a confiabilidade dos dados relevantes são importantes e devem ser consideradas como pré-requisitos para uma boa investigação, uma vez que a análise das séries assume como premissa que o passado, quando extrapolado, oferece previsões acuradas do futuro.

De posse dos dados, o passo seguinte é a construção do modelo – feita a partir da análise de sistemas matemáticos que possam descrever ou apurar o comportamento dos dados numa linha de tempo. Esta etapa deve ser realizada sem muita complexidade, porém de maneira precisa.

Num segundo momento, o modelo matemático obtido, ou melhor construído, é utilizado para a obtenção de um prognóstico num curto intervalo de tempo. Obtém-se então a previsão, isto é, a extrapolação do modelo – feita através do prolongamento da equação para além do processo temporal conhecido. Portanto, pode-se afirmar que construção e previsão constituem a análise prévia de séries temporais.

A estatística pode então ser introduzida ao modelo, com o intuito de estimar os parâmetros e testar os modelos. A comparação dos resultados obtidos a partir dos testes é que dará suporte para julgar qual deles foi mais conciso e portanto, adequado ao tipo de série em questão.

Dentre os objetivos da análise e estudo de séries temporais, tem-se: a investigação do mecanismo gerador da série; a realização de previsões de valores futuros a curto/longo prazo; descrição do comportamento da série – através da verificação gráfica de características tais como: tendência, ciclo, sazonalidade, periodicidade (MORETTIN e TOLOI, 2006).

Se a previsão dos dados da série temporal for determinada exatamente por alguma função matemática, diz-se então que esta série é determinística. Já se a previsão dos dados puder ser descrita apenas em função de termos de uma distribuição de probabilidade, a série temporal é então denominada não-determinística ou estocástico, e neste caso o modelo matemático é substituído por um modelo estatístico baseado em leis probabilísticas no tempo.

2.2.2 Análise de Séries Temporais

Os principais objetivos apontados por FERREIRA (2005) e MORETTIN e TOLOI (2006) na análise de séries temporais são:

- (a) Investigar o mecanismo gerador da série temporal; por exemplo, analisando uma série de alturas de ondas, pode-se querer saber como estas ondas foram geradas.

- (b) Fazer previsões de valores futuros da série: estas podem ser de curto prazo, como para série de vendas, produção ou estoque, ou a longo prazo, como para séries populacionais, de produtividade etc.;
- (c) Descrever apenas o comportamento da série; neste caso, a construção do gráfico, a verificação da existência de tendências, ciclos e variações sazonais, a construção de histogramas e diagramas de dispersão etc., podem ser ferramentas úteis;
- (d) Procurar periodicidades relevantes nos dados através de uma análise espectral², podendo esta ser de grande utilidade.

Assim, para iniciar a análise de uma série temporal, a maneira mais tradicional recomendada por MORETTIN e TOLOI (2006) é através da decomposição da série em componentes: tendência, ciclo e sazonalidade.

A tendência de uma série revela seu comportamento a longo prazo, pois através da extrapolação deste movimento (que pode ser crescente, decrescente ou de natureza estável) é possível prever qual será a propensão desta série.

Já os ciclos podem ser identificados através das oscilações existentes na série. São períodos não constantes e superiores à variação sazonal. Tais oscilações (que podem ser de queda ou subida, de maneira suave ou brusca) acompanham a série ao longo da componente tendência.

Por última, a componente sazonalidade se comporta de maneira análoga ao ciclo, caracterizando-se também pelas flutuações de subida e queda que ocorrem periodicamente. Aliás, esta é a grande diferença existente entre a sazonalidade e o ciclo, pois enquanto a sazonalidade é previsível pelo fato de ser periódica, o ciclo é imprevisível, pois se manifesta de modo irregular. A Figura 2 a seguir mostra as três componentes que foram descritas.

² A análise espectral consiste em decompor a série temporal dada em componentes de frequência, onde a existência do espectro é a característica fundamental que determina a periodicidade dos dados que compõem a série.

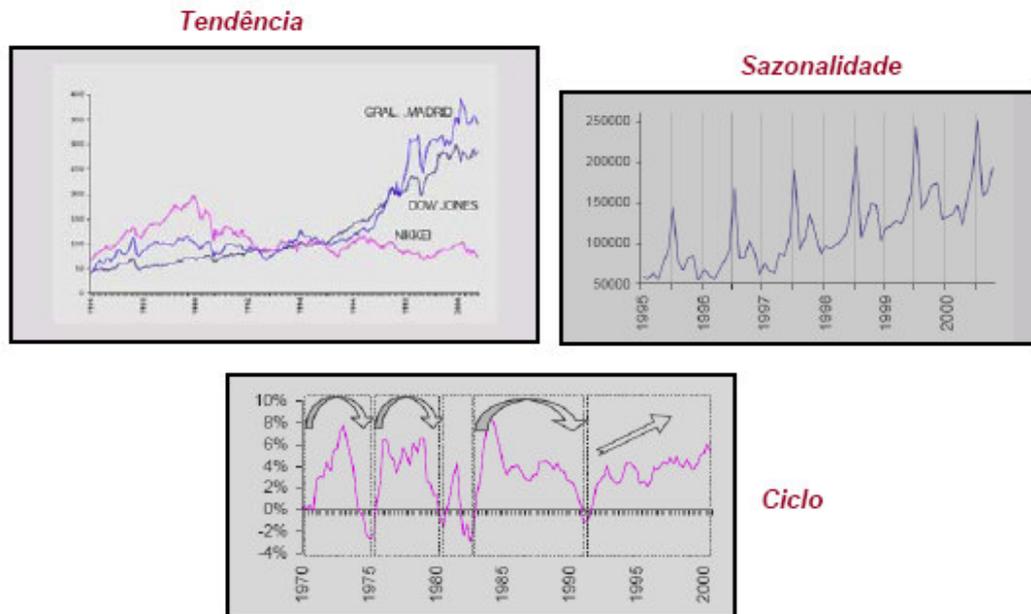


Figura 2: Exemplo de Tendência, Sazonalidade e Ciclo
 Fonte: www2.egi.ua.pt

2.2.3 Técnicas de Previsão

Define-se uma técnica de previsão como sendo um método que consiste no cálculo matemático ou estatístico empregado para converter dados históricos e parâmetros em quantidades futuras (demanda futura).

Existem dois tipos de técnicas de previsão: qualitativas e quantitativas.

As técnicas **qualitativas** são muito subjetivas e dependem da sensibilidade e da experiência do(s) previsor(es). São técnicas normalmente mais onerosas e que exigem maior trabalho e dedicação que os métodos quantitativos de previsão. Sua aplicação é indicada em situações onde não há disponibilidade de dados históricos consistentes e a interferência e arbítrio humano se fazem necessários. Este julgamento é feito com base em pesquisas de opinião, painéis e reuniões entre especialistas.

A Figura 3 ilustra as técnicas qualitativas apresentadas.



Figura 3: Exemplificação dos grupos e subgrupos de técnicas qualitativas
 Fonte: Elaborada pela autora

Com relação às técnicas qualitativas pode-se dizer que as mesmas são empregadas em casos onde há ausência de dados históricos. Esta situação ocorre por exemplo, num lançamento de um novo produto, e ainda em situações nas quais existe incerteza quanto a tendência de padrões passados se manterem no futuro.

Estas técnicas têm como objetivo principal estruturar o raciocínio de forma a apoiar a tomada de decisão – utilizando como base o julgamento e conhecimento tácito para estabelecer generalizações e extrapolações, podendo assim transformar opiniões, conhecimentos e intuições em previsões de demandas futuras.

As técnicas qualitativas requerem um recurso humano como processador de informações – em substituição aos modelos e fórmulas matemáticas existentes em métodos quantitativos.

São exemplos de técnicas qualitativas: a Técnica Delphi, a Análise de Cenários, o Júri Executivo de Opiniões, a Composição de Forças de Vendas e Pesquisa de Mercado.

Já as técnicas quantitativas são baseadas em modelos matemáticos e estatísticos. Nestas técnicas a subjetividade do(s) previsor(es) está na escolha do método que será utilizado.

As técnicas **quantitativas** estão divididas em dois grupos: séries temporais e modelos causais.

Cada um destes grupos apresenta ainda outras divisões.

As técnicas de Séries Temporais utilizam dados históricos para a determinação de padrões que podem se repetir no futuro. São exemplos destas técnicas as Médias Móveis, o Amortecimento Exponencial e a Decomposição Clássica.

Já as técnicas de Modelos Causais têm por objetivo encontrar uma relação entre a variável dependente (dados da série) e outras variáveis independentes (fatores externos a série). São exemplos de fatores externos: PIB, inflação, tempo, população, dentre outros. A exemplo de Modelos Causais pode-se citar as técnicas de Regressão Linear Simples e Múltipla. A Figura 4 ilustra as técnicas quantitativas apresentadas.

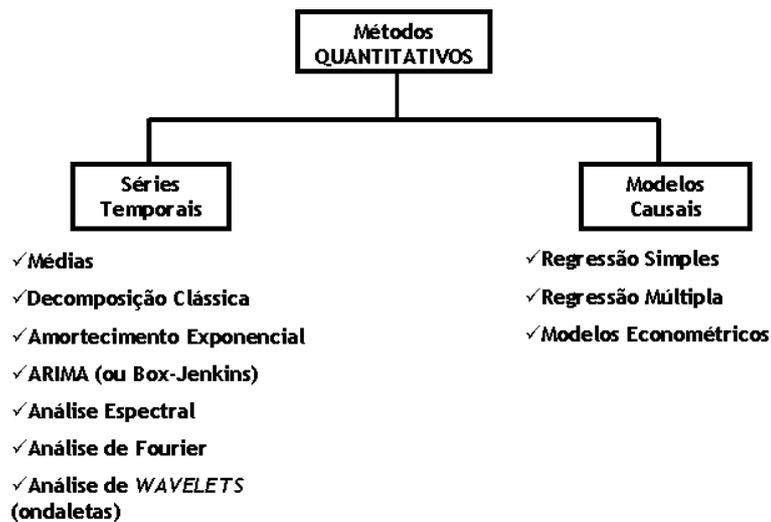


Figura 4: Exemplificação dos grupos e subgrupos de técnicas quantitativas
Fonte: Elaborada pela autora

2.2.4 Definições

2.2.4.1 Estacionariedade

Segundo MORETTIN e TOLOI (2006), uma das suposições mais freqüentes que se faz a respeito de uma série temporal é a de que ela é estacionária, ou seja, ela se desenvolve no tempo aleatoriamente ao redor de uma média constante, refletindo alguma forma de equilíbrio estável. Logo, a condição para que uma série seja estacionária implica na média do processo ser constante, bem como a variância do processo.

Contudo, na prática a maioria das séries estudadas apresenta alguma forma de não-estacionariedade. São exemplos de séries temporais não-estacionárias as séries sazonais ou com tendência linear ou exponencial.

Como a maioria das técnicas para análise de séries temporais parte do pré-suposto de que elas sejam estacionárias, é necessário então transformar os dados originais. A diferenciação é a prática mais comum aplicada para transformar uma série não-estacionária em estacionária. Esta técnica consiste em tomar diferenças sucessivas da série original, até que se obtenha uma série estacionária.

A primeira diferença de uma série é obtida através de:

$$\Delta Z(t) = Z(t) - Z(t-1) \quad (2.10)$$

E a segunda diferença é :

$$\Delta^2 Z(t) = \Delta[\Delta Z(t)] = \Delta[Z(t) - Z(t-1)] = Z(t) - 2Z(t-1) + Z(t-2) \quad (2.11)$$

Em situações normais, é suficiente tomar uma ou duas diferenças para que a série se torne estacionária.

Segundo CARVALHO (2005), usualmente o termo estacionariedade é interpretado como “fraca estacionariedade” ou “estacionariedade da covariância”. Neste sentido, estacionariedade implica que a média e a função de autocorrelação de uma série de dados não muda com o tempo. Outra questão importante na análise de uma série temporal estacionária é o fato de que a remoção da tendência permite analisar melhor as flutuações locais.

2.2.4.2 Funções de Autocorrelação

Independente do método ou técnica de previsão que se venha a utilizar, é importante conhecer a relação entre as observações atuais e anteriores. Tal importância reside no fato de se conhecer e assim estimar o processo estocástico que deu origem a série temporal

em questão. Para este propósito existe a análise das funções de autocorrelação (FAC ou ACF, do inglês *Autocorrelation Function*).

Uma função de autocorrelação (FAC ou ACF) mede a correlação entre as observações real e passada (Y_t e Y_{t-k} , respectivamente) de uma série temporal (admitida estacionária) separadas por k unidades de tempo. Assim, pode-se afirmar que uma FAC é uma medida de associação linear entre o processo e seu passado.

Representa-se uma ACF através de um conjunto de coeficientes ρ_k , que medem justamente a autocorrelação entre Y_t e Y_{t-k} - resultantes da divisão da covariância da população nas defasagens k pela variância da população, conforme demonstrado na equação (2.12):

$$\rho_k = \frac{COV(Y_t, Y_{t-k})}{VAR(Y_t)} = \frac{E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)]}{\sigma^2} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (2.12)$$

onde γ_k é a covariância da população no lag (intervalo) k e γ_0 é a variância da população.

Como usualmente trabalha-se com amostra (e não com população), então o coeficiente de autocorrelação agora amostral $\hat{\rho}_k$ é resultante da divisão da covariância amostral nas defasagens k ($\hat{\gamma}_k$) pela variância amostral ($\hat{\gamma}_0$), conforme a equação (2.13):

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=k+1}^n (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (Y_{t-k} - \bar{Y})^2} = \quad (2.13)$$

onde n é o tamanho da amostra (número de observações da série Y_t).

A representação gráfica de ρ_k e k é chamada de correlograma amostral da ACF, sendo que para cada intervalo (lag) k foi calculado um ρ_k e, portanto a seqüência de pares (k, ρ_k) , $k = 1, 2, \dots$, é denominada uma função de autocorrelação.

MORETTIN e TOLOI (2006), citando BOX, JENKINS e REINSEL (1994), relatam a possibilidade da utilização de outro parâmetro para facilitar o procedimento de

identificação do modelo gerador da série temporal, denominado função de autocorrelação parcial (FACP ou PACF, do inglês *Partial Autocorrelation Function*).

Este parâmetro, agora representado por α_k , mede também a correlação entre duas observações seriais Y_t e Y_{t-k} , excluindo porém a dependência entre os termos intermediários ($Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k+1}$). Desta forma, a PACF é definida como a seqüência de correlações entre as observações Y_t e Y_{t-1} , Y_t e Y_{t-2} , ..., Y_t e Y_{t-k+1} , sendo que os efeitos das defasagens sobre Y_t permanecem constantes. A representação da PACF α_k é apresentada na equação (2.14):

$$\alpha_k = \text{CORR}[Y_t - E(Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_{t+k}), Y_{t-k} - E(Y_{t-k} | Y_{t-1}, \dots, Y_{t-k+1})] \quad (2.14)$$

2.2.4.3 Correlograma

Conforme citado na seção 2.2.4.2, o correlograma é uma representação gráfica das funções de autocorrelação ρ_k e k . Existem ainda os correlogramas que mostram conjuntamente as funções de autocorrelação (ACF), representadas por estimativas dos coeficientes $\hat{\rho}_k$, e as funções de autocorrelação parcial (PACF), representadas por estimativas dos coeficientes $\hat{\alpha}_k$.

Numa análise de série temporal, as principais utilidades deste gráfico são:

- a) determinar a ordem de dependência dos valores da série temporal em relação aos seus valores passados, denominada ordem auto-regressiva p de um processo auto-regressivo (através da observação do comportamento da PACF)

- b) determinar a ordem de dependência entre os erros aleatórios (ruído branco) ocorridos no período atual e nos períodos passados, denominado ordem de média móvel q de um processo de média móvel (através do coeficiente de autocorrelação parcial $\hat{\alpha}_k$).

2.2.4.4 Raízes Unitárias

A fim de complementar as informações extraídas a partir da análise do correlograma, bem como testar se uma série temporal é integrada ou não, é realizado o teste de raízes unitárias. Os testes mais conhecidos para esta finalidade são o teste de Dickey-Fuller (DF) e sua extensão – Dickey-Fuller Ampliado (ADF, do inglês *Augmented Dickey-Fuller*). Ambos são considerados procedimentos formais que não só determinam, como também testam a ordem de integração de uma série. O teste consiste em determinar o número de diferenças necessárias para tornar uma série temporal estacionária através do cálculo do número de raízes unitárias do processo gerador da série.

Assim, para detalhar o teste de Dickey-Fuller considera-se o seguinte modelo:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.15)$$

onde ε_t é o termo de erro estocástico que segue as hipóteses estatísticas clássicas (média zero, variância σ^2 constante e é não-autocorrelacionado). Este erro assume, portanto o comportamento característico do que se conhece por ruído branco.

Diz-se então que a equação 2.15 apresenta uma raiz unitária quando $\rho = 1$. A hipótese nula do teste DF é a existência de uma raiz unitária ($H_0 : \rho = 1$). Se a hipótese nula for confirmada, admite-se então que a série temporal Y_t é, portanto não-estacionária.

Para realizar o teste de DF nas séries temporais foi utilizado um *software* desenvolvido por KURT ANNEN (2005), em VBA (Visual Basic) para implementação no Microsoft Excel[®] – o qual calcula de forma rápida e eficaz a estatística para este teste e seus respectivos valores para outros níveis de significância.

2.2.4.5 Estatística de Anderson-Darling

Mede quão bem os dados seguem uma distribuição normal. Quanto melhor a distribuição se ajustar aos dados, menor será o valor desta estatística. A estatística de Anderson-Darling pode ser utilizada para comparar o ajuste de várias distribuições e descobrir qual é a melhor, ou ainda para testar se uma amostra de dados vem de uma população com uma distribuição especificada, verificando também se os dados satisfazem a suposição de normalidade para um teste-t.

Se o valor-p para o teste de Anderson-Darling for menor que o nível de significância escolhido (normalmente 0,05 ou 5%), conclui-se que os dados não seguem a distribuição normal.

2.2.4.6 Estatística de Box-Pierce (Ljung Box)

É utilizada para testar se uma série de observações é aleatória e independente ao longo do tempo. Se as observações não são independentes, uma observação pode ser correlacionada com outra observação k unidades de tempo mais tarde, uma relação chamada de autocorrelação. A autocorrelação pode prejudicar a precisão de um modelo preditivo baseado no tempo, tal como um gráfico de séries temporais, e levar a uma interpretação errada dos dados.

Neste projeto de pesquisa, esta estatística foi empregada para auxiliar a escolha e ajuste de modelos de séries temporais, uma vez que esta testa a hipótese nula de que autocorrelações até uma determinada defasagem (*lag*) são iguais a zero (isto é, os valores de dados são aleatórios e independentes até um certo número de *lags*). Se estatística for maior que um valor crítico especificado, autocorrelações para um ou mais *lags* podem ser significativamente diferentes de zero, sugerindo que os valores não são aleatórios e independentes ao longo do tempo.

2.2.4.7 Teste Z

O teste Z é um método estatístico de representação de informações em amostras, bastante simples e robusto, o qual mede a diferença entre uma estatística observada e seu parâmetro populacional hipotético, em unidades de desvio padrão. A equação do teste Z é:

$$Z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S} \quad (2.16)$$

onde Z_i é o valor para cada ponto da amostra, x_i é o valor do ponto i na amostra, \bar{x} é a média e S é o desvio padrão.

A finalidade deste teste é comparar um valor Z com um valor crítico da distribuição normal padronizada, para assim determinar se a diferença entre os valores estimado e hipotético do parâmetro da população é estatisticamente significativa.

A utilização do teste Z neste projeto foi feita com base no trabalho de ARGOUD *et. al.* (2004), e a heurística envolvendo esta aplicação específica é apresentada na seção 2.2.13.7, que trata da escolha da função *wavelet*.

2.2.5 Aplicação dos Métodos de Previsão

Uma vez apresentada a diversidade de métodos existentes para o estudo de previsão de séries temporais – conforme seção 2.2.3, surge então o impasse acerca de qual método aplicar. A única convicção com relação ao método a ser utilizado é que o mesmo seja o mais preciso possível.

Por esta razão, a primeira questão a ser discutida é quanto à escolha do método ideal. Para isso é necessário primeiramente fazer uma investigação sobre as características da série temporal original. Esta investigação consiste em analisar a estatística descritiva dos dados que compõem a série, principalmente a função autocorrelação, bem como verificar as questões de estacionariedade e a necessidade ou não de transformações. Isto se faz necessário em razão de que a maioria dos métodos é criteriosa quanto a sua aplicação.

Em razão da quantidade das técnicas existentes, a explanação dos critérios pertinentes a cada uma das técnicas não foi aqui descrita, pois seria inviável explicar detalhadamente tal assunto. Por isso, o objetivo desta seção foi apenas de alertar para esta primeira fase de estudo que antecede a aplicação da técnica em si.

Após realizada esta análise preliminar sobre o comportamento da série temporal, já é possível avaliar quais técnicas serão possíveis de ser utilizadas. Porém, neste projeto de pesquisa foram admitidas ainda as sugestões apontadas no estudo de FERREIRA (2005), que levam em consideração a precisão, o horizonte temporal, os custos e a facilidade de manipular tais dados. Nas seções adiante, estes critérios foram considerados para escolha dos métodos a serem combinados.

2.2.6 Métodos de Suavização Exponencial

A suavização exponencial é um dos métodos mais conhecidos e com melhor custo-benefício entre os métodos de previsão de séries temporais, pois sua aplicação concilia baixo custo, simplicidade e velocidade de uso. O método visa ponderar e amortecer observações do passado. Para isso, o método se baseia no cálculo da média móvel³ de valores passados para fazer a predição de uma variável. Tais valores são ponderados através de um coeficiente chamado de constante de suavização, o qual decresce exponencialmente conforme se aumenta a defasagem no tempo. Isto implica na valorização (pesos maiores) para as observações mais recentes e desvalorização (pesos menores) para as observações mais antigas.

Existem três formas de aplicar a suavização, sendo que o que as difere quanto à sua aplicação é a existência ou não das componentes tendência e sazonalidade. Para as séries que não apresentam tendência nem sazonalidade, o modelo de suavização aplicado é conhecido como Suavização Exponencial Simples. Neste modelo, a suavização é feita apenas em termos do nível e de um único coeficiente de amortecimento A (de nível) – através de uma

³ A média móvel utiliza a média aritmética dos n últimos valores para prever o valor seguinte. Assim, a cada nova observação disponível, descarta-se o valor mais antigo e insere-se o valor mais recente para cálculo da nova média.

média ponderada, a qual atribui pesos menores aos valores mais antigos. A representação do modelo de suavização exponencial simples é apresentada pela equação (2.17):

$$\hat{P}_t = AR_t + A(1-A)R_{t-1} + A(1-A)^2 R_{t-2} + \dots \quad (2.17)$$

onde \hat{P}_t é previsão para o próximo período da série, A é a constante de suavização do nível e R_t é o valor real observado no período t .

Já em séries que apresentam a componente tendência este método não apresenta um bom ajuste, sendo mais adequado utilizar o método de suavização exponencial dupla, também conhecida por suavização exponencial de Brown – em homenagem ao criador da técnica. Apesar do método de Brown considerar apenas uma constante de suavização (A – para o nível), a inclusão da componente tendência é feita levando em consideração a diferença existente entre o valor suavizado simples e duplo, a qual é adicionada ao valor obtido no amortecimento simples. Assim, o modelo de Brown pode ser representado pelas seguintes equações:

$$\bar{R}_t = AR_t + (1-A)\bar{R}_{t-1} \quad (\bar{R}_t \text{ é o valor suavizado exponencialmente simples}) \quad (2.18)$$

$$\bar{\bar{R}}_t = A\bar{R}_t + (1-A)\bar{\bar{R}}_{t-1} \quad (\bar{\bar{R}}_t \text{ é o valor suavizado exponencialmente duplo}) \quad (2.19)$$

$$a_t = \bar{R}_t + (\bar{R}_t - \bar{\bar{R}}_t) = 2\bar{R}_t - \bar{\bar{R}}_t \quad (a_t \text{ é a diferença entre os dois valores suavizados}) \quad (2.20)$$

$$b_t = \frac{A}{1-A} (\bar{R}_t - \bar{\bar{R}}_t) \quad (b_t \text{ é o fator de ajuste adicional}) \quad (2.21)$$

$$\hat{P}_t(h) = a_t + b_t \cdot h \quad (\hat{P}_t(h) \text{ é a previsão } h \text{ passos a frente}) \quad (2.22)$$

Existe, porém um desdobramento bastante conhecido do método de Brown, denominado método de Holt. A diferença entre os dois é que ao invés de aplicar a suavização dupla (método Brown), o método de Holt suaviza os valores da componente tendência

diretamente através de um modelo linear. Assim, no método de Holt, além de suavizar o nível, a tendência também passa a ser suavizada através da introdução de uma nova constante C de tendência. A representação deste modelo é apresentada conforme segue:

$$\bar{N}_t = AR_t + (1-A)(\hat{N}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}) \quad (\bar{N}_t \text{ é a estimativa do fator de nível}) \quad (2.23)$$

$$\hat{T}_t = C(\bar{N}_t - \bar{N}_{t-1}) + (1-C)\hat{T}_{t-1} \quad (\hat{T}_t \text{ é a estimativa do fator de tendência}) \quad (2.24)$$

$$\hat{P}_t(h) = \bar{N}_t + h\hat{T}_t \quad (\hat{P}_t(h) \text{ é a previsão } h \text{ passos a frente}) \quad (2.25)$$

E finalmente, se for constatado tanto a presença da componente tendência quanto a componente sazonalidade, o que é comum de acontecer na prática, então se aconselha a aplicação da técnica de Holt – melhorada por Winter, conhecida por suavização exponencial sazonal de Holt-Winter ou simplesmente método de Holt-Winter, em razão de inclusão da componente sazonal ao modelo de suavização dupla.

O método de suavização exponencial de Holt-Winter apresenta ainda duas classificações de modelos: multiplicativo ou aditivo. O que caracteriza a definição ou escolha por um ou outro modelo é a maneira como os dados estão distribuídos ao redor da média. Segundo SOUZA (2005), se uma série não apresentar modificação em sua amplitude com o incremento do nível ao longo do tempo, isto significa que a mesma possui componentes aditivas, e caso contrário diz-se então que a série apresenta componentes multiplicativas. A Figura 5 apresenta estes dois casos.

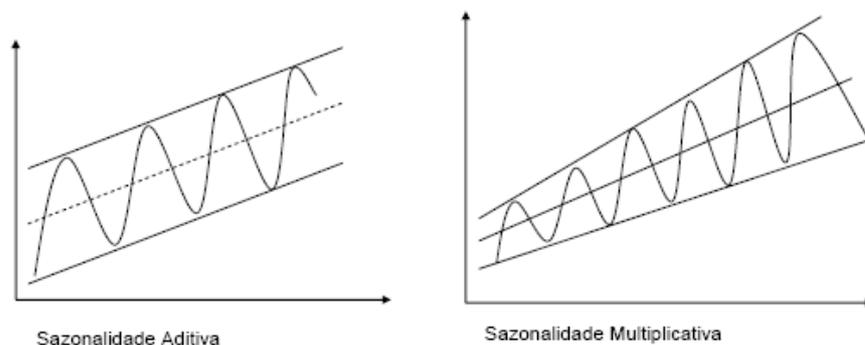


Figura 5: Exemplo de Sazonalidade Aditiva e Multiplicativa
Fonte: © DEGEI - UA, L.M.Ferreira

Assim, existem duas modelagens do algoritmo de Holt-Winter para cada um dos modelos (aditivo e multiplicativo), ambos considerando em suas equações o nível (média), a tendência e a sazonalidade.

As equações para os modelos multiplicativo e aditivo do método de Holt-Winter são apresentadas a seguir:

Modelo Multiplicativo:

$$Y_t = (\hat{N}_0 + \hat{T}_0 t) S n_t + \varepsilon_t \quad (2.26)$$

$$\bar{N}_t = A \frac{R_t}{\hat{S}_{t-s}} + (1-A)(\hat{N}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}) \quad (\text{estimativa do fator de nível}) \quad (2.27)$$

$$\hat{T}_t = C(\bar{N}_t - \bar{N}_{t-1}) + (1-C)\hat{T}_{t-1} \quad (\text{estimativa do fator de tendência}) \quad (2.28)$$

$$\hat{S}_t = D \frac{R_t}{\bar{N}_t} + (1-D)\hat{S}_{t-s} \quad (\text{estimativa do fator de sazonalidade}) \quad (2.29)$$

$$\hat{P}_t(h) = (\bar{N}_t + h\hat{T}_t) \hat{S}_{t+h-s} \quad (\text{previsão}) \quad (2.30)$$

Modelo Aditivo:

$$Y_t = \hat{N}_0 + \hat{T}_0 t + S n_t + \varepsilon_t \quad (2.31)$$

$$\bar{N}_t = A(R_t - \hat{S}_{t-s}) + (1-A)(\hat{N}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}) \quad (\text{estimativa do fator de nível}) \quad (2.32)$$

$$\hat{T}_t = C(\bar{N}_t - \bar{N}_{t-1}) + (1-C)\hat{T}_{t-1} \quad (\text{estimativa do fator de tendência}) \quad (2.33)$$

$$\hat{S}_t = D(R_t - \bar{N}_t) + (1-D)\hat{S}_{t-s} \quad (\text{estimativa do fator de sazonalidade}) \quad (2.34)$$

$$\hat{P}_t(h) = \bar{N}_t + h\hat{T}_t + \hat{S}_{t+h-s} \quad (\text{previsão}) \quad (2.35)$$

onde A, C, D são as constantes de suavização para as componentes nível (\overline{N}_t), tendência (\hat{T}_t) e sazonalidade (\hat{S}_t), respectivamente, e h é utilizado para se fazer as previsões (\hat{P}_t) h passos a frente. Na literatura estas constantes de suavização podem se apresentar na forma de α, β, γ equivalente.

A abordagem utilizada para determinação destas constantes (A, C, D) se baseia em tornar mínima a média da soma dos quadrados dos erros de ajustamento – conhecida por MSE (do inglês, *Mean Square Error*). Mais adiantes são apresentadas a definição e equação para determinação deste erro. Segundo MORETTIN e TOLOI (2006), a dificuldade em determinar os valores mais apropriados para estas constantes é uma das desvantagens apontadas para o uso deste método.

Uma vez escolhido o modelo (multiplicativo ou aditivo) a ser empregado, parte-se então para a resolução – que é composta de quatro etapas: estimativas iniciais dos componentes do modelo; atualização dos componentes do modelo; geração de valores suavizados (amortecidos) ou previsões por período; obtenção dos erros de previsão e cálculo da medida de precisão do método.

Segundo BOWERMAN e O'CONNELL (1987), as estimativas das medidas iniciais de tendência \hat{T}_0 e nível \hat{N}_0 , bem como das primeiras sazonalidades \hat{S}_t da série – para um modelo multiplicativo – são obtidas conforme as equações (2.36), (2.37) e (2.38):

$$\hat{T}_0 = \frac{(\overline{MM}_m - \overline{MM}_1)}{(m-1)s} \quad (\text{estimativa da medida inicial de tendência}) \quad (2.36)$$

$$\hat{N}_0 = \overline{MM}_1 - \frac{s}{2} \hat{T}_0 \quad (\text{estimativa da medida inicial de nível}) \quad (2.37)$$

$$\hat{S}_t = \overline{Sn}_t \left[\frac{s}{\sum_{t=1}^s \overline{Sn}_t} \right] \quad (\text{estimativas de sazonalidade no 1º período, para } t=1, \dots, s) \quad (2.38)$$

$$\overline{Sn}_t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Sn_t \quad (\text{índice sazonal médio, para } t=1, \dots, s) \quad (2.39)$$

onde \overline{MM}_i é o nível médio da série associado ao i -ésimo período sazonal, m é o número de períodos sazonais, s é o comprimento da sazonalidade e Sn_t são as estimativas iniciais dos fatores sazonais de cada período t . Tais estimativas são obtidas pela equação (2.40):

$$Sn_t = \frac{R_t}{\overline{MM}_i - \left(\frac{s+1}{2} - j\right) \hat{T}_0}, \quad \text{para } t=1, \dots, s \quad (2.40)$$

onde i o índice que está relacionado ao período sazonal e j o índice relativo à posição de uma “estação” dentro de um período. Isto implica dizer que a variação de j se repete para cada período sazonal i .

Em um modelo aditivo, as estimativas iniciais de tendência \hat{T}_0 , nível \hat{N}_0 e sazonalidades \hat{S}_t , para $t=1, \dots, s$ podem ser obtidas como as estimativas de mínimos quadrados ordinários levando em consideração o seguinte modelo de regressão:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_{s_1} x_{s_1,t} + \beta_{s_2} x_{s_2,t} + \beta_{s_3} x_{s_3,t} + \dots + \beta_{s_{(L-1)}} x_{s_{(L-1)},t} + \varepsilon_t \quad (2.41)$$

onde as variáveis $x_{s_i,t}$ são variáveis do tipo *dummy*⁴, assumindo o valor 0 ou 1 conforme se tenha a informação de Y_t do período sazonal s_i , $i=1,2,\dots,(L-1)$, ou não (neste caso é assumido que no período sazonal L não há variação sazonal em relação ao nível da série). Demais procedimentos e detalhes acerca do modelo aditivo não serão aqui detalhados em função de o modelo multiplicativo ser muito mais preponderante em aplicações práticas do que o modelo aditivo.

Com relação à atualização dos componentes (nível, tendência e sazonalidade) e à obtenção dos valores da previsão, ambos são determinados através da aplicação das equações previamente citadas, sendo as equações (2.27), (2.28), (2.29) e (2.30) aplicadas no caso de um modelo multiplicativo, e equações (2.32), (2.33), (2.34) e (2.35) para um modelo aditivo.

⁴ Variáveis *dummy* são variáveis binárias, que podem assumir apenas os valores 0 e 1. São úteis quando se deseja considerar efeitos em períodos específicos.

As etapas relativas à mensuração dos erros da previsão e precisão do método, conforme previamente citado, são abordadas numa seção mais adiante. Cabe ressaltar aqui a importância desta etapa final, que é trivial a qualquer modelo de previsão que venha a ser utilizado, pois esta se reserva a verificar e averiguar se o modelo produziu ou não boas previsões.

2.2.7 Modelos Auto-Regressivos (AR)

A definição de modelo auto-regressivo é dada pela dependência dos valores da série temporal em relação aos seus valores passados. Assim, para um modelo de ordem p , o modelo AR(p) para uma série temporal estacionária Z_t é definido pela equação (2.42):

$$Z_t = c + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.42)$$

onde ε_t é um erro aleatório (ruído branco) e ϕ é o operador auto-regressivo de ordem p

2.2.8 Modelos de Médias Móveis (MA)

Para este modelo, a definição é dada pela combinação linear existente entre os erros aleatórios (ruído branco) ocorridos no período atual e seus q períodos passados. Logo, a representação do modelo de médias móveis de ordem q – MA(q) é dada por:

$$Z_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.43)$$

onde μ é a média (finita) da série temporal estacionária, ε_t é um erro aleatório (ruído branco) e θ é um parâmetro para o qual a estacionariedade requer que $|\theta| < 1$. Tal restrição é conhecida como condição de invertibilidade.

2.2.9 Modelos Auto-Regressivos de Médias Móveis (ARMA)

Um modelo ARMA (p,q) é uma combinação dos modelos AR (p) e MA (q) , de modo que a representação para este modelo unificado é dada pela equação:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.44)$$

sendo p e q as ordens auto-regressiva e de média móvel previamente citadas. Lembrando que todos estes modelos estão condicionados a estacionariedade da série. Caso a série seja não estacionária, surge a necessidade diferenciá-la para torná-la estacionária. Neste caso, os modelos ARIMA são então os modelos direcionados para esta aplicação.

2.2.10 Modelos Auto-Regressivos Integrados de Médias Móveis (ARIMA)

O modelo ARIMA (Auto-Regressivo Integrado de Média Móvel – do inglês *Autoregressive Integrated Moving Average*) para previsão de séries temporais se baseia na análise das propriedades probabilísticas (ou estocásticas) para determinar o comportamento futuro desta série. A estacionariedade da série temporal é uma condição necessária para utilização deste modelo. Logo, nos casos onde não há evidência desta propriedade, a diferenciação da série é uma prática comum e intrínseca ao método.

Aliás, para PINHEIRO e BARRETO (2004) o que difere um modelo ARIMA de um modelo ARMA é exatamente a componente I de integração, que representa a quantidade de diferenças aplicadas para estacionarizar uma série original não-estacionária. Assim, baseado em um modelo ARMA (p,q) , o modelo ARIMA surge considerando a necessidade de diferenciar uma série para torná-la estacionária.

Considerando que W_t é a série obtida a partir da diferenciação da série original Z_t [$W_t = \Delta^d Z_t$], o modelo ARIMA (p,d,q) é definido como:

$$\phi(B)\Delta^d Z_t = \theta(B)a_t \quad (2.45)$$

$$W_t = \phi_1 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (2.46)$$

onde $\phi(B)$ representa o operador auto-regressivo de ordem p , Δ^d o operador diferença de d (número de diferenças), $\theta(B)$ o operador de médias móveis de ordem q e a_t o ruído branco.

De um modo geral, pode-se dizer então que os modelos ARIMA são direcionados para séries não-estacionárias que se tornaram estacionárias com a aplicação de n diferenças. Este número n representa então a ordem de integração e no modelo ARIMA é representado pela letra d .

Uma vez encontrada a ordem de integração d , o modelo ARIMA resultante agora é uma combinação dos modelos AR(q) (Auto-regressivo, do inglês *Autoregressive*) e MA(q) (Média Móvel, do inglês *Moving Average*), onde p e q representam as ordens auto-regressiva e de média móvel, respectivamente. Antes de definir o modelo ARIMA propriamente, são apresentados então os modelos supracitados, os quais compõem este.

2.2.11 Metodologia Box-Jenkins

A partir da definição do modelo ARIMA advém a sua análise. Para este propósito, BOX e JENKINS (1970) desenvolveram uma metodologia que se tornou clássica na literatura. O método consiste em ajustar um modelo ARIMA (p, d, q) a um determinado conjunto de dados (série Z_t), de maneira a encontrar um modelo que melhor represente a série. O modelo encontrado será o mesmo utilizado para se fazer previsões inerentes a esta mesma série, sendo que a previsão toma por base apenas o histórico dos dados.

Assim, o objetivo da metodologia de Box e Jenkins se resume em determinar as três ordens (p, d, q) que configuram a estrutura do modelo ARIMA.

Segundo MORETTIN e TOLOI (2006), a estratégia adotada para construção do modelo é baseada num ciclo iterativo composto dos seguintes passos:

- (a) identificação: nesta fase o objetivo é descobrir os valores apropriados de p , d e q com base na análise das autocorrelações simples (ACF), autocorrelações parciais (PACF) e outros critérios.
- (b) estimação: nesta fase os parâmetros ϕ e Φ do componente auto-regressivo, os parâmetros θ e Θ do componente de médias móveis e a variância do erro aleatório ε_t são estimados através do método de máxima verossimilhança;
- (c) verificação ou diagnóstico: nesta fase se verifica se o modelo encontrado se ajusta bem à série ou não. Isto é feito através da análise de resíduos, bem como através das respectivas funções de autocorrelações simples (ACF) e autocorrelações parciais (PACF).

Ao final deste ciclo iterativo, se o modelo encontrado não estiver adequado então se repete o processo novamente, desde a fase de identificação até a verificação final. É oportuno comentar que dentre estas fases, a mais crítica é a fase de identificação, pois esta é uma etapa extremamente subjetiva, sendo que cada pessoa poderá identificar um modelo diferente para a mesma série temporal.

MORETTIN e TOLOI (2006) relatam ainda que é prática comum estimar mais de um modelo, pois com as previsões feitas a partir destes modelos é possível determinar o que melhor se adequou através do cálculo do erro quadrático médio de cada uma das previsões. A seguir são detalhadas as etapas descritas segundo a metodologia.

2.2.12.1 Identificação

A identificação dos componentes p , d e q do modelo ARIMA é feita através da análise do gráfico da série original, bem como através da observação do comportamento das funções de autocorrelação simples (ACF) e autocorrelação parcial (PACF) no correlograma da série em análise.

Segundo PINHEIRO e BARRETO (2004), citando FAVA (2000, p.219), “esta é a mais difícil das etapas da metodologia de Box Jenkins”, não sendo “raros os casos em que não se consegue identificar um único modelo e sim vários modelos candidatos a gerador da série em estudo. Isto porque, trabalhando com ACF e PACF amostrais, fica difícil, muitas vezes, decidir se elas estão decrescendo ou se são truncadas.”. É justamente por isso que não se aconselha a aplicação de modelos ARIMA em séries temporais consideradas curtas. Segundo GRANGER e NEWBOLD (1986) o ideal é que a série apresente no mínimo de 40 a 50 observações. Esta mesma orientação é feita por WALLACE e STAHL (2003, p.110) “uma boa situação é ter 3 ou mais anos de histórico de demanda passada”.

A ordem d é obtida através da diferenciação da série original tantas vezes quanto necessário para torná-la estacionária. Porém, para verificar se há necessidade em diferenciar a série original, basta analisar o gráfico desta. Segundo MORETTIN e TOLOI (2006), em situações normais será suficiente tomar 1 ou 2 diferenças para que a série se torne estacionária. Porém, há casos mais distintos, onde será necessário realizar uma transformação logarítmica para que isso ocorra. Outra forma gráfica de verificar a necessidade ou não da diferenciação é através do exame do correlograma da ACF. Caso seja constatado que grandes autocorrelações apresentam decrescimento lento, isto é um indicativo de que a diferenciação precisa ser feita para que seja atingida uma média constante. Além da avaliação gráfica, outro meio de confirmar que a condição de estacionariedade foi satisfeita é através do teste de Dickey-Fuller. Caso não seja comprovada a estacionariedade, a série então é diferenciada novamente e repete-se o teste até que se verifique que a condição foi aceita.

Já as ordens p e q são obtidas através das observações dos comportamentos das funções de autocorrelação parcial (PACF) e autocorrelação simples (ACF), respectivamente. Na prática, as funções teóricas não estão disponíveis sendo portanto utilizados os estimadores amostrais destas funções.

A identificação da ordem p é feita através da análise do correlograma da PACF da série original, onde o valor para esta ordem é determinado pelo número de defasagens significativamente diferentes de zero existentes antes do truncamento da série. A mesma recomendação é válida para a identificação da ordem q , só que agora este número de defasagens é verificado analisando-se a ACF da série já estacionada. Assim, quando for observada uma queda súbita dos valores das funções de autocorrelação (ACF e PACF) a partir de um certo ponto, de modo que a partir deste *lag* os demais valores da função estejam compreendidos dentro dos limites de significância estatística fornecido pelos correlogramas deve-se associar os valores das ordens ao *lag* (intervalo ou período)correspondente.

Como pode ser observado, é a análise destas funções que permite a tomada de decisão acerca do número p de parâmetros auto-regressivos e do número q de parâmetros de médias móveis que devem ser escolhidos de modo a se obter uma estrutura parcimoniosa (ou seja, que tenha o menor número de parâmetros dentre todas as estruturas que se ajustem aos dados da série). Contudo, para comprovar que os parâmetros escolhidos para o modelo ARIMA foram adequados, deve-se submeter o modelo à etapa de verificação, a qual será descrita na seqüência.

2.2.12.2 Formas Alternativas de Identificação

Além do exame das ACF e PACF para identificação dos valores das ordens p , d e q , existem outras propostas para a seleção das ordens dos modelos ARIMA. Dentre as propostas disponíveis na literatura, as mais utilizadas são os critérios de informação de Akaike (AIC) e Schwarz ou Bayesiano (SC ou BIC). Tais critérios são estatísticas freqüentemente utilizadas e servem basicamente para comparar os modelos ARIMA obtidos a partir de uma mesma série de dados (série temporal), de modo a escolher o melhor modelo. Assim quando se quer decidir por entre dois ou mais modelos, o modelo escolhido será aquele que apresentar o menor valor para o critério.

Sendo p e q as ordens de defasamento, n o tamanho da amostra, a definição dos critérios nomeadamente é:

$$AIC(p, q) = \ln \sigma_{p,q}^2 + \frac{2(p+q)}{n} \quad (2.47)$$

$$SC(p, q) = \ln \sigma_{p,q}^2 + (p+q) \frac{\ln n}{n} \quad (2.48)$$

onde $\sigma_{p,q}^2$ é uma estimativa da variância residual obtida ajustando um modelo ARIMA (p , d , q) às n observações. As segundas parcelas das equações (2.47) e (2.48) é denominado termo penalizador, e é exatamente este termo que difere os critérios quanto à imposição da penalidade.

A grande vantagem em relação ao uso destes critérios, segundo PINHEIRO e BARRETO (2004), é que ambos penalizam os modelos sobreparametrizados, dando preferência aos modelos mais parcimoniosos. Uma vez feita a estimação do modelo a partir da escolha do menor valor para os critérios, procede-se para a etapa da estimação, que neste caso, ocorre concomitantemente à etapa de identificação.

2.2.12.3 Estimação

Após determinados os valores de p , d e q do modelo, a segunda etapa da metodologia de Box-Jenkins prevê a estimação dos parâmetros do modelo proposto e da variância do resíduo. Os parâmetros que são estimados são ϕ e Φ do componente autorregressivo, θ e Θ do componente de médias móveis e a variância do erro aleatório (ruído branco) ε_t .

A estimação destes parâmetros pode ser feita por dois métodos diferentes de estimação de parâmetros populacionais a partir de uma amostra aleatória: por mínimos quadrados e por máxima verossimilhança. Como esta etapa é a que mais demanda trabalho na metodologia Box-Jenkins, normalmente os parâmetros são estimados por *softwares* específicos. A propósito, neste trabalho os modelos identificados foram estimados no *software* Minitab[®], e a escolha do modelo foi feita com base em alguns critérios estatísticos. Por exemplo, a estatística t padrão (t-Student) e os p -valores foram usados para investigar a significância de tais parâmetros, pois ambos estão associados com o teste da razão de verossimilhança da distribuição qui-quadrado. A estatística de Box-Pierce (Ljung-Box), também mensurada em termos de p -valores foi utilizada para investigar a autocorrelação dos resíduos. Após a estimação do modelo, a etapa precedente é a verificação ou diagnóstico.

2.2.12.4 Verificação ou Diagnóstico

Nesta etapa o objetivo é verificar se o modelo identificado e agora estimado está ou não adequado para se fazer previsões. O que determina a adequação do modelo também

são critérios estatísticos, os quais se concentram na análise dos resíduos e na avaliação da ordem do modelo.

Se o modelo tiver sido adequadamente especificado, os resíduos do modelo estimado serão estatisticamente independentes, ou seja, não são autocorrelacionados. Nesta condição, diz-se que os resíduos se comportam como ruído branco. Logo, os coeficientes de autocorrelação dos resíduos neste caso serão estatisticamente iguais a zero. A verificação se completa com a inspeção do correlograma das ACF e PACF dos resíduos, onde é verificado se os resíduos não apresentam correlações fora do intervalo de confiança.

Caso o modelo não esteja adequado, um novo modelo deverá ser especificado e as etapas de identificação e estimação também deverão ser refeitas, bem como uma nova verificação.

Em relação à ordem do modelo, o objetivo é averiguar se o modelo identificado não foi superestimado ou subestimado, o que implica nas ordens p e q terem sido especificadas acima ou abaixo do ideal, contrariando assim o princípio de parcimônia dos dados. O diagnóstico da ordem é feito então com base na estatística t de *Student* dos parâmetros do modelo. Se por acaso for verificado que o valor de t é estatisticamente não significativo, isto é um indício de que o modelo foi superestimado. Logo, haverá a necessidade de se reduzir a ordem do modelo. Já a subestimação é diagnosticada através da introdução de parâmetros adicionais no modelo, e da mesma forma o parâmetro a ser avaliado é novamente a estatística t . Admite-se que valores de t superiores a 2 são indicativos de que o parâmetro associado pode ser julgado como estatisticamente significantes, pois seus valores são significativamente diferentes de zero.

Uma última observação é feita para os casos onde for encontrado ou aprovado mais um de um modelo. Nestas circunstâncias, deve-se proceder com a etapa seguinte, que é a previsão. A partir dos valores preditos determina-se então o erro quadrático médio (MSE) dos modelos, que será utilizado como parâmetro para comparação dos ajustes de diferentes modelos ARIMA, de modo que o modelo que apresentar o menor valor para este será definido como o modelo mais adequado.

2.2.12 Introdução à Teoria de *Wavelets*

Define-se *wavelet* como sendo uma forma de onda com duração limitada e um valor médio igual a zero. O comportamento de uma *wavelet* é comparável ao de uma senóide, que por sinal é a base da análise de séries de Fourier. Porém, embora as senóides apresentem comportamento tipicamente suave e previsível, as *wavelets* diferem pelo fato de se apresentarem de forma irregular e assimétrica. É por este motivo que se faz uma analogia entre a análise de *wavelets* e a análise de séries de Fourier, de modo que na análise de Fourier o sinal original é decomposto em ondas senoidais de várias frequências – via transformada de Fourier, enquanto que na análise de *wavelets* este mesmo sinal original é decomposto em versões “deslocadas” e “escaloadas” – via transformada de *wavelets*. O termo “escaloadas” significa que a *wavelet* pode ser alongada ou comprimida, enquanto que o termo “deslocadas” significa que pode ser acrescentado um retardo a esta. Esta flexibilidade permite então que a análise do sinal possa ser feita em frequências diferentes e resoluções diferentes, o que caracteriza uma forma de análise conhecida por Análise Multirresolucional (AMR).

Desta forma, a metodologia de análise de *wavelets* visa através da análise de dados fornecer informações de tempo e frequência de uma série temporal – de forma simultânea. Com isso, é possível obter a representação da série nos domínios de tempo-frequência. Essa característica distingue a metodologia de *wavelets* de outros métodos em estatística baseados em séries ortogonais, tais como as usuais séries de Fourier, onde a representação da série baseia-se somente em funções dependentes da frequência, mas não do tempo. Logo, se ocorrerem pequenas alterações no domínio da frequência, estas acarretam em distorções no domínio de tempo. Conseqüentemente, a análise de sinais desta série será prejudicada. Como no caso de *wavelets* as funções são dependentes de ambos os domínios – frequência (via dilatação) e do tempo (via translação), esta questão acaba sendo irrelevante.

Outra questão é que *wavelets* busca formular funções matemáticas capazes de ampliar o intervalo de dados, de modo a separar os diferentes componentes de frequência existentes na série, possibilitando assim a análise de cada um deles em sua escala correspondente. Tal propriedade permite que diferentes frequências sejam relevantes para distintos subintervalos do tempo, resultando em uma melhor adaptação temporal.

São estas as principais razões que tornam a metodologia *wavelets* preferida entre os pesquisadores, pois suas funções são muito mais apropriadas do que senos e cossenos para

análise de sinais. O tópico seguinte apresenta algumas vantagens para aplicação de *wavelets* em substituição às séries de Fourier.

2.2.13.1 A Análise de Fourier versus Análise de *Wavelets*

Inúmeras técnicas para análise de séries temporais foram desenvolvidas nos últimos anos. Porém, dentre todas as técnicas talvez a mais clássica e associada a este assunto, seja a Análise de Séries por Fourier, também conhecida por Análise Harmônica.

A técnica foi desenvolvida por Jean Baptiste Joseph Fourier e em 1822 foi publicada no livro *Thèorie Analitique de la Chaleur*. A metodologia desta técnica prevê que a análise seja feita a partir da decomposição ou quebra da série original em outras componentes ditas senoidais, cada qual com uma determinada frequência – obtida a partir de uma combinação linear de harmônicos. Assim, pode-se definir a Análise de Séries por Fourier como sendo um método determinístico que transforma a série temporal original baseada em frequências, as quais serão associadas às componentes senoidais por meio de um somatório.

O emprego desta técnica é recomendado em casos onde o objetivo básico é determinar a periodicidade dos dados – a qual está diretamente associada à frequência. Contudo, a transformação de um sinal temporal em um sinal frequencial pode não traduzir exatamente todas as informações temporais implícitas à série. Isto faz com que a aplicação da Análise de Fourier se restrinja às séries com comportamento estacionário, ou ainda em problemas lineares ou funções periódicas.

Estas restrições quanto à aplicação correta, aliadas à notória característica de não linearidade e não estacionariedade presentes em muitas séries práticas tornaram-se então um forte estímulo para o desenvolvimento de novas técnicas capazes de contornar estas limitações, uma vez que as bases das funções de Fourier são impróprias para o tratamento de séries que apresentam tais características.

Assim, os estudos foram evoluindo e a partir daí começaram a surgir novas ferramentas, capazes de contornar as limitações impostas pela análise de Fourier, principalmente a questão do tratamento local de dados, uma vez que as séries consideradas neste caso eram séries infinitas e que não se adaptavam à análise de funções descontínuas. Dentre as técnicas que se originaram a partir de Fourier estão a distribuição de Wigner-Ville,

a expansão de Gabor ou transformada de Fourier de curta duração e finalmente a análise de *wavelets*.

A partir daí, várias razões começaram a motivar os pesquisadores à substituição da análise de Fourier por *wavelets*. Uma das principais vantagens notadas é inerente às funções, as quais se adequam à aproximação ou ajuste de funções finitas, bem como são funções próprias para análise de séries descontínuas. Outro ponto, é que a filtragem dos sinais via *wavelets* não desloca nem deforma pontos de máximo, mínimo e inflexões da série que se está analisando.

Notou-se também que a transformada de *wavelet* contínua TWC era uma ferramenta excelente para mapear mudanças de propriedades em séries não estacionárias, uma vez que as *wavelets* são localizadas no tempo (espaço) – contrariamente do que ocorria com outras funções ortogonais ou trigonométricas. Este comportamento tornou-se ideal para analisar sinais não estacionários – que apresentavam transitoriedade ou descontinuidade. A grande problemática das séries de Fourier era que as bases das mesmas estavam localizadas no domínio de frequência, porém não no tempo. Isso provocava mudanças significativas em toda extensão da série de Fourier – caso ocorresse alguma ligeira mudança em uma observação ou componente da série, o que não ocorria em uma série de *wavelets*.

Esta comparação por si só já denota a superioridade de *wavelets* em relação à Fourier. Tais motivos foram ainda os responsáveis por motivar o uso desta análise em séries temporais, pois em termos de aderência do modelo ela torna-se perfeita também pelo seu poder preditivo.

2.2.13.2 Análise de Séries Temporais via Transformada *Wavelet*

A maior parte dos sinais incorpora a transformada como principal ferramenta de análise. Segundo OLIVEIRA (2007, p. 21) “as *wavelets* podem ser interpretadas como as transformadas lineares locais geradas por um banco de filtros de fator de qualidade constante”. Em *wavelets*, este tratamento analítico inclui a transformada contínua CWT (do inglês, *Continuous Wavelet Transform*), a transformada discreta DWT (do inglês, *Discrete Wavelet Transform*) e suas respectivas transformadas inversas, de modo que ambas possibilitam representar uma série temporal no domínio de tempo e frequência. Isto se torna

extremamente interessante principalmente em se tratando de sinais não estacionários, pois a partir desta transformação é possível melhorar a resolução nestes dois domínios, o que pode facilitar na identificação de padrões de comportamento desta mesma série.

Para compreender o princípio que rege a análise de *wavelets* para séries temporais, será feita uma analogia com a análise de Fourier. Na análise de Fourier, a série temporal que se está analisando é representada em termos de componentes senos e cossenos com suas respectivas frequências, já em *wavelets* ocorre uma separação dos componentes da série de acordo com uma determinada frequência crítica, a qual leva em consideração as dilatações (compressões de frequência) e translações (tempo) de uma onda ou série original – a qual é denominada de “*wavelet-mãe*”.

Logo, pode-se afirmar que a formulação matemática se baseia então no cálculo para obtenção desta frequência crítica, a qual irá dividir a série original em duas subséries: uma relativa a baixas frequências (onde os componentes da série original apresentam suas frequências menores ou igual ao frequência crítica) e outra relativa a altas frequências (onde os componentes da série original apresentam suas frequências maiores ou igual ao frequência crítica). A subsérie de baixa frequência é denominada “série aproximada” (*approximation part*) e denotada $\{A\}_{l=1}^n$, já a subsérie de alta frequência é denominada “série detalhada” (*detail part*) e denotada $\{D\}_{l=1}^n$ (HOMSY; PORTUGAL; ARAÚJO, 2000). A representação deste processo de decomposição é mostrada na Figura 6.

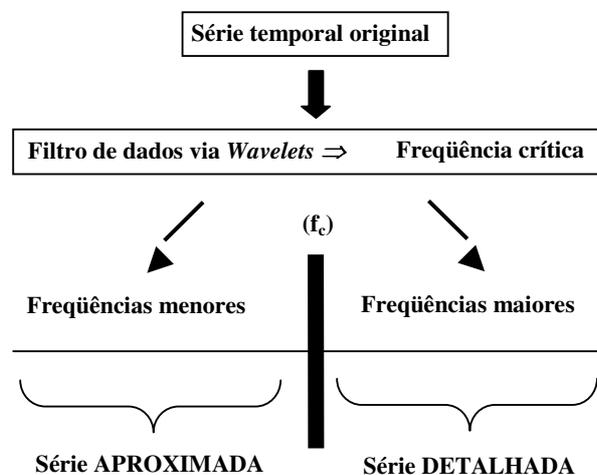


Figura 6: Representação da Decomposição via *wavelets*
Fonte: Elaborada pela autora

Uma das analogias físicas usadas para interpretar a operação das *wavelets* consiste em investigações astronômicas com telescópio ou investigações em microscópio. As lentes agem como *wavelet-mãe* e o céu como o sinal de entrada. Quando o telescópio está desfocado de modo a visualizar o céu inteiro, não há necessidade de movê-lo para caracterizar todo o firmamento com tal grau de foco. Essa visão não permite observar detalhes das estrelas ou planetas. Quando o telescópio é focalizado (uma resolução mais fina) para examinar uma região menor do céu, ele deve ser posicionado (transladado) várias vezes com o intuito de investigar o céu inteiro. A analogia é que o céu (o sinal f) é representado por múltiplos cenários (WT , *wavelets*) através de uma lente (*wavelet-mãe* $\psi(t)$) em diferentes focos de resolução (a , escala) e diferentes “direções” de observação (b , translação). A cada escala e translação (foco e posição), uma “nova” vista (WT coeficientes) do céu é observada. O conjunto de todas as “visões” pode ser combinado para reconstruir um cenário “multirresolução” do céu! (OLIVEIRA, 2007, p. 67)

Outra maneira existente para gerar *wavelets* é através da função escala Φ , a qual é também chamada de “*wavelet-pai*” definida por:

$$\Phi(t) = \sqrt{2} \sum_k l_k \Phi(2t - k) \quad (2.49)$$

sendo

$$l_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) \Phi(2t - k) dt \quad (2.50)$$

Da mesma forma que ocorre com a *wavelet-mãe*, a função l_k gera uma família ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ e a *wavelet-pai* fica:

$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \Phi(2^j x - k), j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.51)$$

Logo, as séries temporais podem, portanto ser decompostas por uma análise via *wavelets* – através de uma seqüência de projeções de *wavelets* mãe e pai (funções Ψ e Φ , respectivamente), de modo que a representação da série reconstruída X_t num espaço $L^2(\mathbb{R})$ em termos de *wavelets* é dada pela equação (2.52):

$$X_t = \sum_k a_{j,k} \Phi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j,k} \Psi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j-1,k} \Psi_{j-1,k}(t) + \dots + \sum_k d_{1,k} \Psi_{1,k}(t) \quad (2.52)$$

$$X_t = \sum_k a_{j,k} \Phi_{j,k}(t) + \sum_i \sum_k d_{i,k} \Psi_{j-i+1,k}(t) \quad (2.53)$$

com j representando o número de componentes e k variando de 1 ao número de coeficientes do componente específico. Os coeficientes $a_{j,k}, d_{j,k}, \dots, d_{1,k}$ foram valores obtidos a partir das transformadas de *wavelets* dadas pelas projeções da série aproximada

$$a_{j,k} = \int \Phi_{j,k}(t) \cdot X_t dt \quad (2.54)$$

sendo denominada parte de aproximação, e da série detalhada

$$d_{j,k} = \int \Psi_{j,k}(t) \cdot X_t dt \quad (2.55)$$

sendo denominada parte de detalhe.

A Figura 7 a seguir mostra um esquema da formulação matemática que foi apresentada.

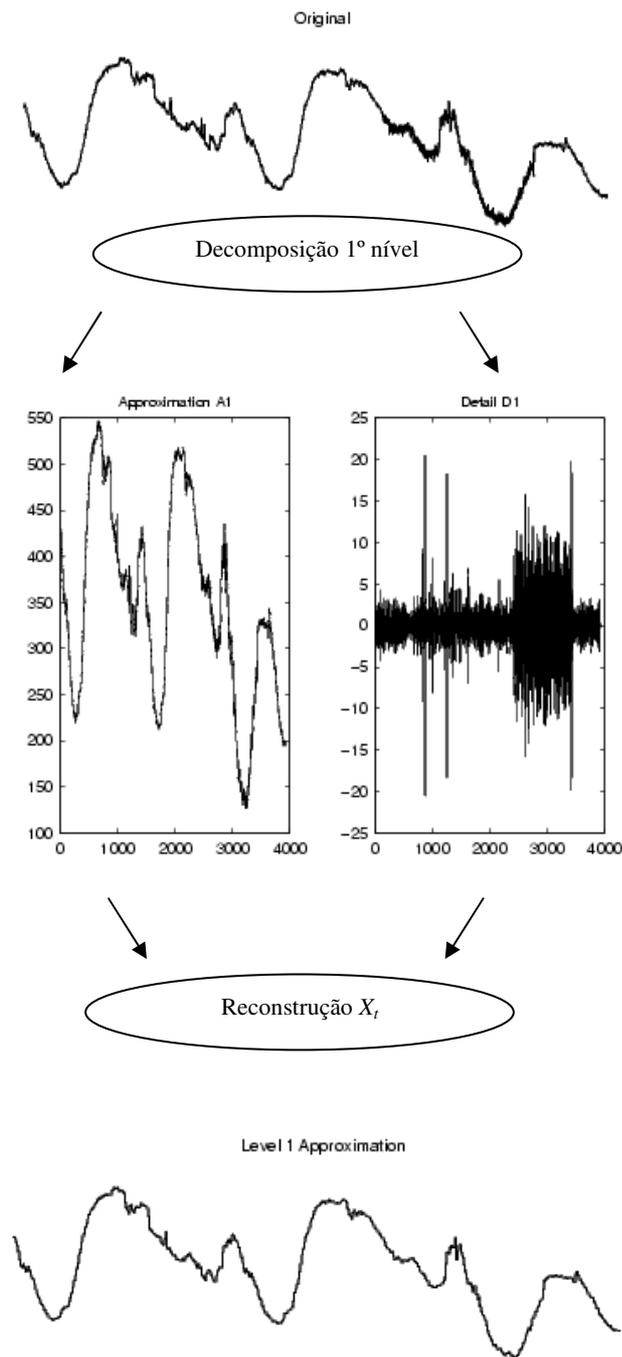


Figura 7: Esquema representativo da decomposição/reconstrução *wavelet*
 Fonte: Matlab® R2006a adaptada pela autora

Na seqüência são apresentadas as formulações matemáticas das transformadas *wavelets*.

2.2.13.3 Transformada Contínua *Wavelet*

Seja $f(t)$ e $g(t)$ duas funções em $L^2[a, b]$. Então é possível definir o produto interno destas duas funções como:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt \quad (2.56)$$

A partir desta definição, o conceito da transformada de *wavelet* contínua (CWT) pode ser introduzido, de forma que o produto interno é visto como uma correlação cruzada entre um sinal $f(t)$ e uma família de funções com características variantes (por exemplo, forma e largura), conhecidas como funções *wavelets*. Tais funções são versões dilatadas ou contraídas por uma variável contínua a , denominada escala, e por uma variável τ , denominada translação, ambas relacionadas a uma função base $\Psi(\tau, a)(t)$ denominada *wavelet-mãe*, formando assim o que se conhece por família *wavelet*. Assim, a CWT pode ser representada pela equação (2.57):

$$CWT(a, \tau) = \Psi(a, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \psi_{a, \tau}(t) dt \quad (2.57)$$

A função $\psi_{a, \tau}(t)$, chamada *wavelet*, é obtida através de uma função $\psi(t)$ através da seguinte transformação:

$$\psi_{a, \tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t - \tau}{a}\right) \quad (2.58)$$

Substituindo a função *wavelet* obtém-se:

$$CWT(a, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t - \tau}{a}\right) dt \quad (2.59)$$

$$CWT(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \psi\left(\frac{t - \tau}{a}\right) dt \quad (2.60)$$

Deste modo, a transformada contínua de *wavelets* (CWT) pode ser interpretada como a soma sobre todo domínio temporal do sinal multiplicado por versões escalonadas e deslocadas de uma função *wavelet* $\psi_{a,\tau}(t)$ adequadamente escolhida, as quais originam uma série de coeficientes *wavelet* em função da escala (frequência) e da posição (tempo).

Em razão disso, o fato da transformada contínua requerer infinitas translações e escalonamentos a torna inviável, pois isto demanda muito tempo e recursos computacionais, sem contar ainda a questão de redundância entre os resultados. Por esse motivo, recomenda-se a utilização da transformada contínua apenas nos casos onde se deseja deduzir as propriedades da transformação. Para fins de implementação é então recomendada a transformada discreta (DWT), pois esta se torna mais eficiente sob o ponto de vista computacional. A seguir são apresentadas considerações inerentes a transformada discreta.

2.2.13.4 Transformada Discreta *Wavelet*

A transformada discreta é a ferramenta mais utilizada para decomposição de sinais via *wavelets* envolvendo aplicações práticas. O termo “transformada discreta de *wavelet*” (DWT, do inglês *Discrete Wavelet Transform*) faz referência ao artigo de MALLAT (1989).

Na transformada discreta a translação e o escalonamento ocorrem em intervalos discretos, e não contínuos como no caso da transformada contínua. Isto pôde ser feito a partir de uma ligeira modificação na *wavelet* contínua, expressa através da equação (2.61) a seguir:

$$\psi_{a,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \Rightarrow \psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi\left(\frac{t-n\tau_0 a_0^m}{a_0^m}\right) \quad (2.61)$$

onde m e n são inteiros, sendo o primeiro associado às variações na escala discreta e o segundo às variações das translações discretas; $a_0 > 1$ é um parâmetro de dilatação fixo, τ_0 é um fator de translação fixo e τ depende do fator de dilatação.

Como na DWT as variações de escala e translação são diáticas (baseadas em potência de 2: $a = 2^j$, sendo j o nível de decomposição), isto elimina a redundância de informação que acontece na CWT.

Dada a definição, o princípio de resolução da DWT consiste então em dividir o sinal que está analisando em componentes de alta escala e baixa escala, sendo os componentes de alta escala denominados “aproximações” (correspondentes ao conteúdo de baixa frequência da série) e baixa escala denominados “detalhes” (correspondentes ao conteúdo de alta frequência). Esta partição da série original em duas novas subséries (uma série aproximada e outra série detalhada) aparentemente aumenta o grau de complexidade da DWT, pois agora teoricamente seria o dobro de dados a serem analisados. Contudo, para evitar que isso aconteça, a decomposição na DWT é feita reduzindo-se a taxa ou variação de amostragem proporcionalmente ao número de decomposições. Assim, o processo de decomposição pode ser repetido de forma a atuar sempre sobre as componentes de aproximação (A). Essa sucessão de decomposições origina a conhecida “árvore de decomposição *wavelet*”, conforma mostra a Figura 8.

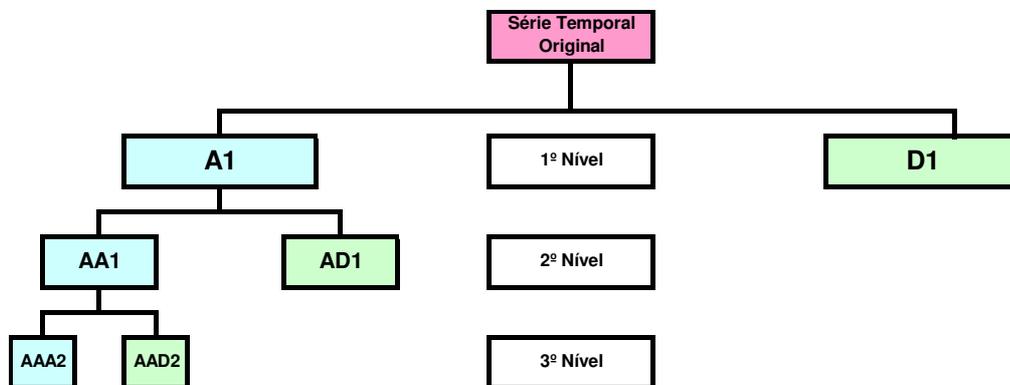


Figura 8: Representação da árvore de decomposição *wavelet* (em 3 níveis)

Fonte: Elaborada pela autora

Como se pode observar, a série original foi decomposta em duas subséries: A1 e D1, denominadas subsérie aproximada e subsérie detalhada, respectivamente. Como se trata de uma DWT, apenas a subsérie aproximada A1 foi decomposta no segundo nível, originando novamente duas novas subséries AA1 e AD1. O procedimento foi repetido no terceiro nível – novamente atuando-se sobre a componente de aproximação AA1, de modo que agora esta

subsérie originou as subséries AAA2 (aproximada) e AAD2 (detalhada). Para 3 níveis de decomposição, pode-se afirmar então que A1, AA1 e AAA2 compõem a subsérie aproximada e D1, AD1 e AAD2 a subsérie detalhada desta “árvore de decomposição *wavelet*”.

Podem ocorrer sucessivas decomposições, de modo que a limitação acontece quando no último nível de resolução a componente de detalhes consiste apenas de uma amostra. Na prática isso levaria um determinado tempo para processamento, por isso a limitação prática é determinada pela natureza do sinal, o qual apresenta um determinado nível de entropia. Segundo definem FUGIVARA *et. al.* (2005) a codificação por entropia é uma técnica genérica de codificação sem perdas, totalmente reversível que elimina total redundância do dado a ser transmitido, resultando no dado comprimido. Na literatura o critério de entropia de Shannon é bastante adotado, pois através dele é possível quantificar a energia contida no sinal em cada banda ou nível de frequência. Por isso neste trabalho este critério também foi adotado.

O critério de entropia de Shannon é dado pela equação (2.62):

$$E(y) = -\sum y_i \log(y_i) \quad (2.62)$$

onde y é o sinal e y_i é a amostra do sinal no instante i .

A partir desta quantificação de energia é possível extrair informações concisas e de forma bastante compacta. Estas mesmas informações referentes aos dados do sinal original são então utilizadas na forma de um banco de filtros – conhecido como banco de Filtros Espelhados em Quadratura de Multirresolução (QMF). Neste banco existem dois conjuntos de filtros, ambos derivados de família *wavelet* que se está utilizando na análise. Um destes filtros é responsável por extrair as características de baixa frequência (componentes de aproximação) e outro responsável pela extração das características de alta frequência (componentes de detalhe). Toda esta análise é conhecida por análise de multirresolução (MRA, do inglês *Multi-Resolution Analysis*) e é através dela que a DWT consegue implementar a decomposição.

Existe ainda outro método de decomposição que atua não só sobre as componentes de aproximação, como também sobre as componentes de detalhe. Este método é uma generalização da DWT é conhecido como Transformada de *Wavelet Packet*.

Segundo BORGES (2005) este método oferece uma gama mais rica de possibilidades pelo simples fato de que nesta situação os componentes de detalhe também serem decompostos. Com isso, a árvore de decomposição passa a chamar-se “árvore de

decomposição por pacotes *wavelet* ou *wavelet packet*. A Figura 9 a seguir ilustra esta definição”.

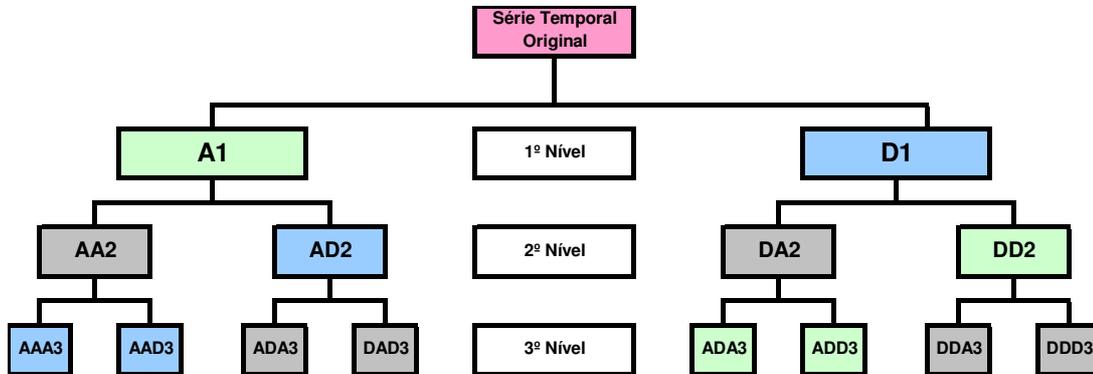


Figura 9: Representação da árvore de decomposição *wavelet packet* (em 3 níveis)
Fonte: Matlab® R2006a

Como se pode observar na Figura 9, em cada nível cada subsérie se divide em duas novas subséries, sendo uma sempre de aproximação e outra de detalhe. Desta maneira, a cada divisão sempre serão originados novos coeficientes e assim por diante. Com isso, obtém-se um resultado mais conciso, formado por um conjunto de coeficientes reajustados a cada nova decomposição ou nível – sendo um coeficiente de escala (frequência) e um coeficiente de translação (tempo). A análise *wavelet packet* permite que o sinal possa ser representado de várias maneiras, por exemplo, como a soma das componentes $A1 + ADA3 + ADD3 + DD2$, ou ainda através de $AAA3 + AAD3 + AD2 + D1$. O importante é lembrar e considerar para cada representação, a associação das componentes (aproximadas e detalhadas) para cada um dos níveis de decomposição.

Devido a estes fatores, optou-se então pela aplicação da transformada *wavelet packet* para analisar a série temporal objeto de estudo deste trabalho, pois se acredita que com esta ferramenta é possível melhorar a extração e obtenção de informações de forma compacta.

2.2.13.5 Funções Base

Existe uma infinidade de possibilidades para a função base $\psi(t)$. Cada função base existente identifica uma família de *wavelets*. Dentre a variedade existente, foram escolhidas algumas, que por se tratarem de funções base extremamente conhecidas e utilizadas para estudos envolvendo inúmeras aplicações foram aqui abordadas neste projeto. Além disso, outro aspecto considerado para escolha destas funções é que as mesmas apresentam particularidades distintas, o que também é interessante sob o ponto de vista de testar diferentes características inerentes a uma série temporal, a fim de que assim possa ser encontrada a família de *wavelets* mais apropriada para a análise. Na seqüência são ilustradas as famílias *wavelets* que foram estudadas neste trabalho. A apresentação não inclui nenhuma formalidade e serve apenas para ilustrar, como já foi citado, o formato característico de cada uma delas.

A primeira família apresentada é a de Haar, cuja função base é conhecida pela sua notória simplicidade, pois analisa um sinal constante por partes, o que muitas vezes pode se tornar mais adequado. A equação (2.63) apresenta a função base de Haar, bem com a Figura 10 mostra o gráfico desta função.

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.63)$$

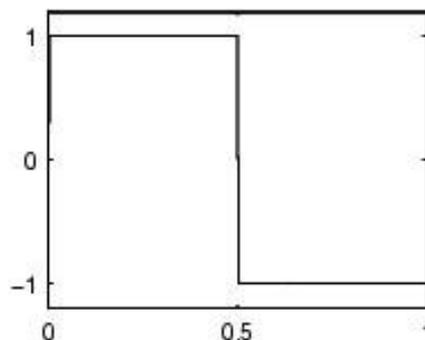


Figura 10: *Wavelet* de Haar
Fonte: Matlab® R2006a

A *wavelet* de Daubechies é outra bastante comum quanto à aplicação. Esta família apresenta como característica a utilização de funções ortogonais na decomposição. Como características, as *wavelets* Daubechies apresentam suporte compacto e normalmente não apresentam suavidade em seu comportamento, sendo, portanto não diferenciáveis. O comportamento da função *wavelet* Daubechies é mostrado em vários níveis no gráfico apresentada na Figura 11.

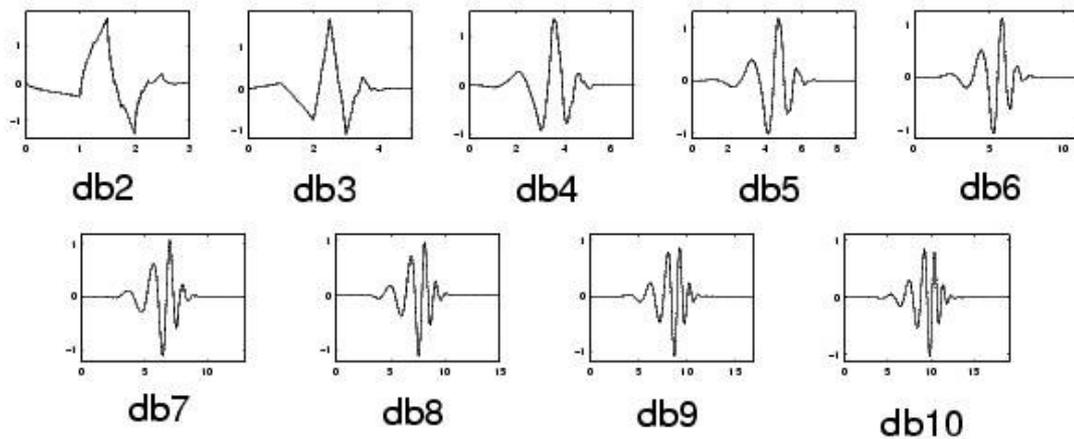


Figura 11: *Wavelet* de Daubechies
Fonte: Matlab® R2006a

A família Symlets é a próxima a ser apresentada. Esta *wavelets* são mais simétricas e derivadas da família de Daubechies, e apresentam também suporte compacto. Além da simetria, a presença de momentos nulos⁵ é uma das características notadas neste tipo de onda. A propósito, é importante comentar que freqüentemente as *wavelets* são classificadas em suas respectivas famílias conforme o número de momentos nulos (ou *vanishing moments*). A identificação é feita a partir de uma numeração – a qual acompanha a designação compacta de uma família de *wavelet*. Por exemplo, as *wavelets* de Daubechies são normalmente descritas por *dbN*, assim como as Symlets por *symN*. Para ambas, *N* representa o número de momentos nulos da função. O comportamento das Symlets pode ser visualizado na Figura 12.

⁵ O número de momentos nulos de uma *wavelet* indica a suavidade da função. Quanto maior for o número de momentos nulos, maior é a compactação do sinal representado. Por definição, diz-se que uma *wavelet* apresenta *N* momentos nulos se e somente se $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)t^k dt = 0$ para $k=0,1,\dots,N$.

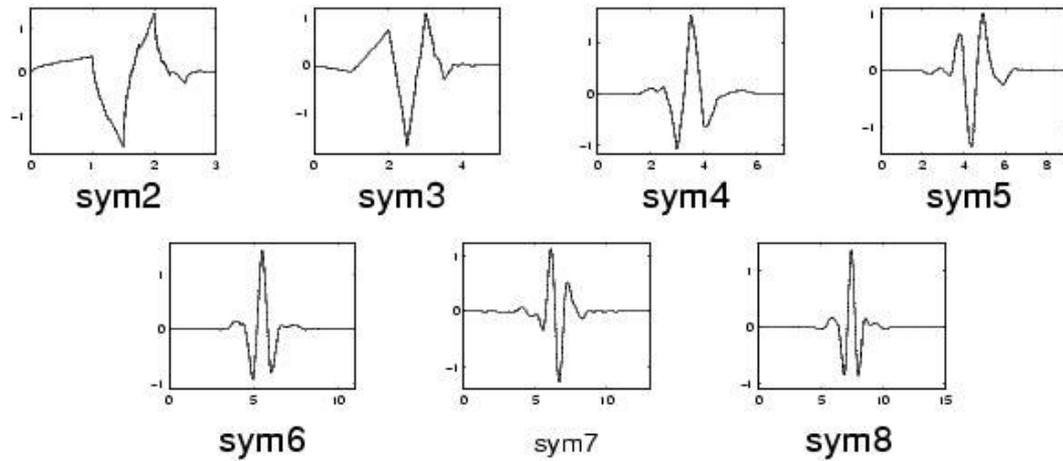


Figura 12: *Wavelet* de Symlets

Fonte: Matlab® R2006a

Quanto à família de Coiflets, são funções que apresentam momentos nulos tanto para a função escala quanto para a função base. A propósito, a notação utilizada para as Symlets e Coiflets é a mesma, ou seja, o número que acompanha a simbologia designa o número de momentos nulos desta onda. A Figura 13 ilustra as Coiflets que apresentam 1 a 5 momentos nulos.

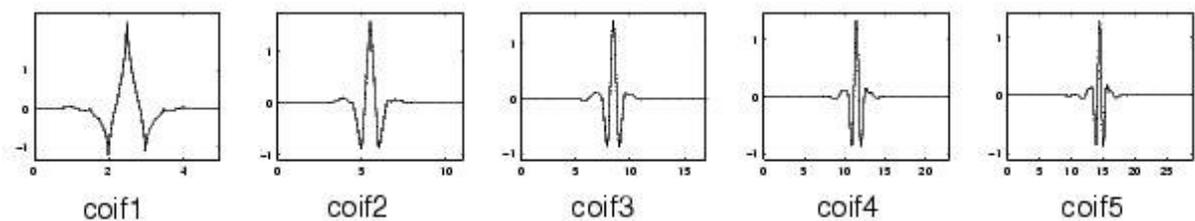


Figura 13: *Wavelet* de Coiflets

Fonte: Matlab® R2006a

A última família de *wavelets* apresentada é a Biortogonal. Esta família apresenta a propriedade de *fase linear* como sua principal característica, a qual é necessária na reconstrução de sinais e imagens. A simetria também é uma propriedade característica das *wavelets* biortogonais. Outra propriedade interessante é que esta família utiliza duas *wavelets*,

sendo uma para decomposição e outra para reconstrução, ao invés de utilizar uma mesma *wavelet* para as duas situações. A Figura 14 ilustra esta família de *wavelets*.

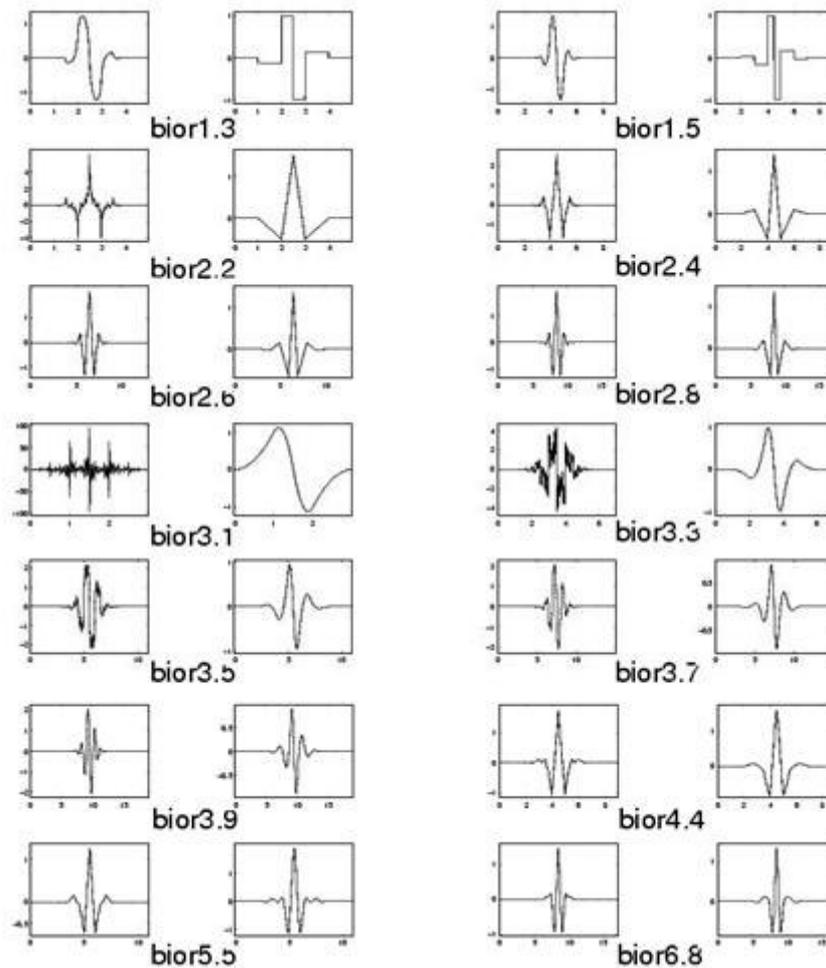


Figura 14: *Wavelets* Biortogonais
Fonte: Matlab® R2006a

2.2.13.6 Supressão de Ruído usando *Wavelet*

A idéia original de supressão de ruído foi proposta no trabalho desenvolvido por DOHONO e JOHNSTONE (1992,1994). Segundo BORGES (2005) a idéia básica da supressão de ruído, também conhecido por *denoising*, é através da transformada *wavelet* escolher quais coeficientes deverão ser mantidos para preservar a informação e consistência dos dados do sinal original. Ou seja, a idéia da supressão é remover os coeficientes que

provocam ruído no sinal. Isto se torna interessante sob o ponto de vista de melhorar o sinal, pois a eliminação do ruído pode permitir que padrões até então desconhecidos possam ser reconhecidos através desta técnica. A Figura 15 a seguir ilustra o processo *denoising*.

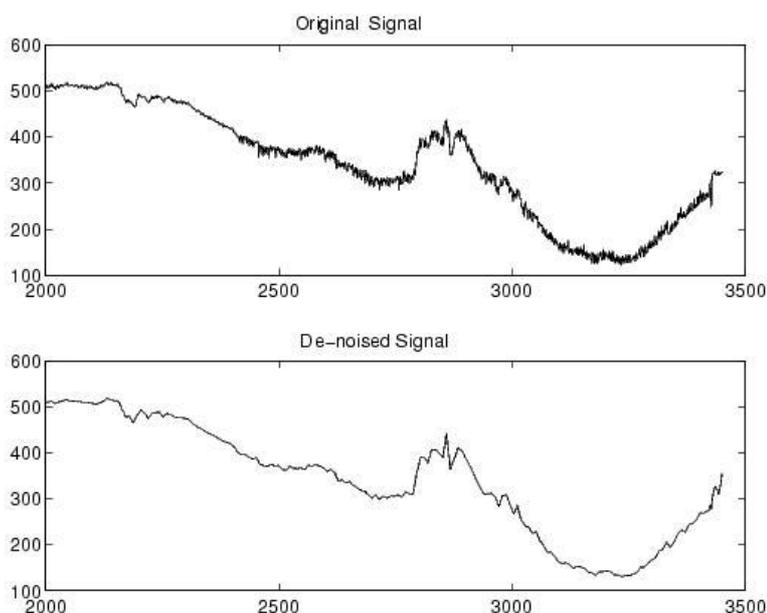


Figura 15: Comparativo entre um sinal original e um sinal de-noised (sem ruído)
Fonte: Matlab® R2006a

Pela análise da Figura 15, percebe-se que o ruído presente na série original foi eliminado. Para entender como isso aconteceu, é feito então um descritivo relacionado aos procedimentos que compreendem a técnica. Primeiramente o sinal original foi decomposto. A decomposição é feita a partir da escolha de uma determinada função base (família de *wavelet*), bem como do número de níveis que se deseja decompor a série. Posteriormente, em nível de decomposição a série detalhada (altas frequências) obtida é analisada, de modo que se faça uma seleção de coeficientes nesta série. Este procedimento de seleção é conhecido como *thresholding*, pois consiste em eliminar os coeficientes menores que um determinado valor crítico. A eliminação destes coeficientes (originados a partir da transformada *wavelet*) é análoga a uma operação de filtragem, onde a seleção dos coeficientes é feita a partir da sobreposição dos componentes oriundos do sinal e do ruído. Comparativamente, os coeficientes do sinal apresentam amplitude muito maior que os coeficientes do ruído. Desta forma, são segregados apenas os coeficientes mais representativos – os quais são definidos a

partir de um valor limiar. O objetivo principal é selecionar um número mínimo de coeficientes remanescentes, porém com alta concentração de energia – comparável à energia do sinal em seu estado original. A similaridade entre as concentrações de energia assegura que as características do sinal original estão sendo preservadas na sua integridade. É importante lembrar apenas que a quantidade de energia pode ser mensurada a partir do critério de entropia citado anteriormente. O processo *denoising* é finalmente concluído com a reconstrução da série (a partir da série aproximada de nível N com as séries detalhadas modificadas pelo processo *thresholding* – dos níveis 1 a N).

De um modo geral, o que define se a seleção dos coeficientes do sinal foi feita de forma apropriada são duas hipóteses: a primeira é que a função base *wavelet* escolhida foi adequada, de modo que somente alguns coeficientes da decomposição são não-nulos; a segunda hipótese admite que o valor crítico da filtragem dos coeficientes foi arbitrado e definido a partir de uma técnica consistente. Por essa razão, são apresentadas na seqüência algumas metodologias estabelecidas para estes dois critérios que foram apontados: seleção da função base *wavelet* e técnicas para definição das funções de limiar (valor crítico) da supressão de ruído.

2.2.13.7 Seleção da Função *Wavelet*

Determinar qual o melhor tipo de função *wavelet* para um determinado sinal é um assunto que gera ainda muita discussão, pois não existe uma sistemática elaborada que possa fornecer de maneira robusta a resposta a esta pergunta.

ARGOUD *et. al.*, citando SCHIFF *et. al.*, (1994), KALAYCI e ÖZDAMAR (1995), DÜMPELMANN e ELGER (1999), KHAN e GOTMAN (2003), relatou que a escolha da função *wavelet* a ser usada na análise pode ser feita normalmente empírica e de forma arbitrária. Já alguns autores preferem fazer a escolha a partir das funções que possuam forma analítica e função de transferência literal⁶, como por exemplo, a *wavelet spline* quadrática.

⁶ O termo função de transferência literal se refere à relação entre as transformadas da entrada e da saída de um sinal. São comumente usadas para modelar sistemas complexos de uma maneira simples, e sua representação caracteriza justamente a saída de dados como função dos dados de entrada.

E há ainda quem diga que não há diferença relevante ao se usar uma ou outra função *wavelet* na análise (KHAN e GOTMAN, 2003).

Afora estes conceitos, a literatura dispõe ainda de vários outros trabalhos que foram desenvolvidos com o intuito de elaborar uma metodologia mais adequada para escolha de tais funções *wavelet*. Tais trabalhos se baseiam em formulações matemáticas capazes de distinguir a eficiência ou opção por uma determinada família de *wavelet*.

Dentre as abordagens existentes, uma atrai a atenção dos pesquisadores pelo fato de ser parcimoniosa. Tal metodologia se baseia na separação do sinal (série temporal original) em duas componentes, de modo que ambas sejam estatisticamente independentes entre si. A separação destas subséries foi testada via transformada *wavelet*. Contudo, poderia ser feita também se analisando a amplitude ou energia do sinal, desde que os comportamentos da série a cada período não fossem tidos como semelhantes.

Neste projeto, porém, o critério adotado para determinar a escolha da melhor função *wavelet* foi o teste Z-score. Este critério foi o mesmo utilizado no trabalho de ARGOUD *et. al.* (2004), no qual um estudo comparativo foi feito justamente para determinar a escolha de uma função. Além de ser uma das estatísticas mais simples e utilizadas para fins de comparação, o teste Z-score mostrou-se eficiente para esta finalidade. A metodologia para aplicação do teste envolve a sua aplicação sobre os sinais reconstruídos (obtidos a partir do processo *denoising*). A analogia que se faz para determinar a função *wavelet* que melhor representa o sinal original é admitir que a correlação existente entre os sinais (original e reconstruído) tende a preservar no sinal reconstruído as amplitudes mais significativas nos mesmos instantes que estas se manifestam no sinal original. Logo, quanto maior for a discrepância entre as amplitudes do sinal original e do sinal reconstruído para o mesmo instante de tempo t , melhor será a representação da função *wavelet*.

A heurística seguida por ARGOUD *et. al.* (2004) referente a esta notação, estabelece que para seleção da função *wavelet* devam ser considerados como parâmetros valores de $Z \geq 4$ nos mesmos pontos em que ocorrem as maiores amplitudes no sinal original. Desta forma, as funções *wavelet* que não apresentam valores de Z superiores a 4 nos pontos de maior amplitude do sinal original devem ser desconsideradas. A mesma tratativa é válida para aquelas funções que apresentaram um valor de Z maior que 4 em outros pontos que não os de maior amplitude.

2.2.13.8 Definição das Funções de Limiar (*Thresholding*)

O objetivo do método *thresholding* é reduzir (ao até mesmo remover) o ruído presente no sinal que se está analisando, de modo a zerar ou diminuir a magnitude dos coeficientes da transformada *wavelet*. Para isso, a literatura propõe dois métodos para definição da função de limiar: *hard-thresholding* e *soft-thresholding*.

O método *hard-thresholding* (ou limiar abrupto, como também é conhecido) é o método mais simples. Neste método os coeficientes menores que o valor crítico são simplesmente anulados, ou seja, substituídos por zero. Assim, os coeficientes de detalhe provenientes da transformada do sinal limpo, representado por β_{jk} são estimados por:

$$\hat{\beta}_{jk} = \begin{cases} D_{jk}, & |D_{jk}| > \lambda \\ 0, & |D_{jk}| \leq \lambda \end{cases} \quad (2.64)$$

sendo D_{jk} o coeficiente de detalhe da transformada *wavelet* na banda k e nível j e λ é o valor limiar. Embora seja um método simples, ele pode se tornar inconsistente, pois as descontinuidades geradas ao longo da série podem gerar estimativas maiores de variância, com isso provocando instabilidade nos resultados.

Para contornar essa situação, o método *soft-thresholding* (ou limiar suave, como também é conhecido) propõe uma redução dos coeficientes (menores que o valor limiar) da transformada, porém não a zero, a fim de que assim possa inibir o surgimento de alguma descontinuidade ao longo da série. Os coeficientes reduzidos são estimados a partir da equação (2.65).

$$\hat{\beta}_{jk} = \begin{cases} \text{sign}(D_{jk})(|D_{jk}| - \lambda), & |D_{jk}| > \lambda \\ 0, & |D_{jk}| \leq \lambda \end{cases} \quad (2.65)$$

Por esse motivo o método *soft-thresholding* é preferível, pois se torna mais interessante sob o ponto de vista matemático.

A Figura 16 a seguir mostra um sinal original ($s=x$) e suas respectivas funções de limiar (*hard-thresholding* e *soft-thresholding*) apresentadas pelas equações (2.64) e (2.65).

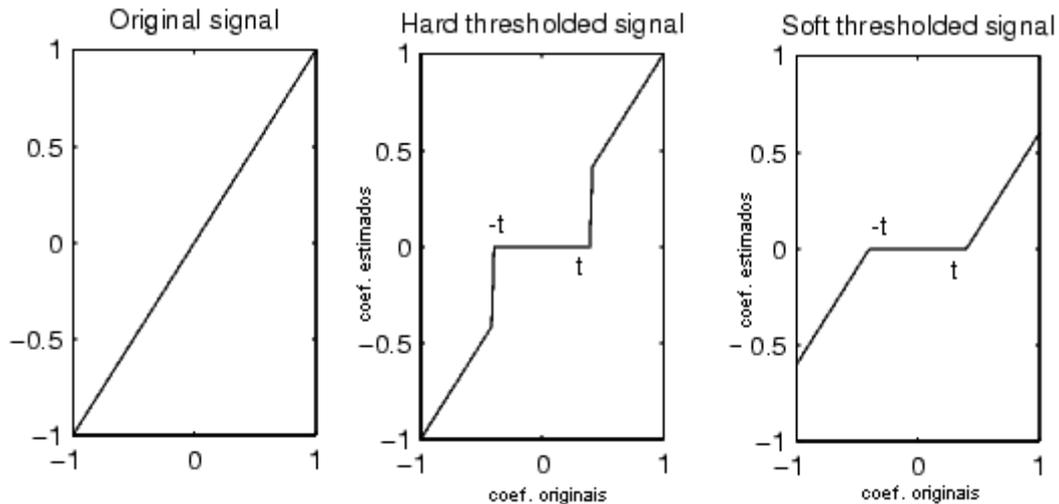


Figura 16: Funções de limiar (hard e soft thresholding) de um sinal original $s=x$
 Fonte: Matlab® R2006a adaptada pela autora

Para calcular o valor limiar λ (também denominado limiar global ou universal) que será utilizado como parâmetro no processo de seleção dos coeficientes da transformada *wavelet*, DOHONO (1995) desenvolveu um procedimento que ficou conhecido como “regra universal” ou *global thresholding*. O termo *VisuShrink* também pode ser encontrado na literatura. Segundo DIAS (2003), o termo *shrink* denota o encolhimento provocado pelo uso da função limiar *soft-thresholding*. Tal procedimento tornou-se conhecido por ser uma maneira fácil, rápida e automática de limiarização. O método considera a variância do ruído e a dimensão do sinal (série) para determinação deste parâmetro. O cálculo deste limiar é definido então conforme a equação (2.66) a seguir:

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(n)} \quad (2.66)$$

onde σ é o desvio padrão associado ao ruído e n é tamanho ou dimensão do sinal que se está analisando.

Segundo BORGES (2005), a regra de seleção *VisuShrink* usualmente suaviza de forma muito mais acentuada, porém para evitar que isso ocorra poderá ainda ser utilizado em

substituição ao *VisuShrink* um outro procedimento denominado *Stein's Unbiased Risk Estimator*, o qual considera como valor limiar o valor que apresentar o menor risco dentro de um conjunto de coeficientes. Porém, este método não será aqui aprofundado, pois fez a opção por utilizar o método tradicional *VisuShrink* neste projeto de pesquisa.

2.2.13 Avaliação dos Erros e da Precisão da Previsão

Segundo LIMA (2004), citando MAKRIDAKIS et al. (1983), a acurácia ou precisão é vista como um critério primordial na análise de seleção do melhor modelo de previsão. Quanto mais preciso for o resultado, melhor é o ajuste encontrado para os valores previsto em relação aos valores reais.

Existem muitas medidas disponíveis para avaliar a precisão de uma previsão. Não obstante, todas elas apresentam um fator comum conhecido como erro ou discrepância. Define-se o erro (E) ou discrepância da previsão como sendo a diferença encontrada entre os valores previstos (P) e os valores reais (R).

$$E = P - R \quad (2.67)$$

Se o erro E encontrado for positivo ($E > 0$) significa que o valor previsto foi superestimado, pois o valor previsto foi superior ao valor real ($P > R$). Já quando o erro encontrado for negativo ($E < 0$), significa que o valor previsto foi subestimado e, portanto o valor previsto foi menor do que o valor real ($P < R$).

Dentre os tipos de erros existentes, os mais comuns são definidos a seguir acompanhados de seus respectivos equacionamentos:

- Erro Médio (MD, do inglês *Mean Deviation*): segundo SAMOHYL (2007), é a medida mais simples de erro, porém a mais frágil, pois no cálculo médio o valor encontrado assume um valor próximo a zero. Isto ocorre porque no somatório dos termos acontece o cancelamento entre os erros negativos e positivos. Apesar disso, o MD é apresenta sua utilidade como medida de viés.

Viés é um desvio constante (positivo ou negativo) da previsão de vendas em relação às vendas reais, causado pela inexatidão do método de previsão de vendas. A existência de vieses é bastante comum em previsões de vendas, uma vez que os métodos não são exatos e que elas sofrem, com frequência, influência de julgamentos otimistas ou pessimistas. (WANKE e JULIANELLI, 2006, p. 163)

A equação para cálculo do MD é:

$$MD = \frac{\sum_{t=1}^n (P_t - R_t)}{n} \quad (2.68)$$

- Erro Absoluto Médio (MAD, do inglês *Mean Absolute Deviation*): segundo SAMOBYL (2007), também é uma medida simples de erro, porém mais robusta que o MD, pois utiliza os valores individuais na forma absoluta (em módulo) para calcular o erro absoluto médio. Assim, é possível calcular a média dos erros sem que os erros de sinais opostos sejam anulados. Esta medida é utilizada para avaliar o nível de erro na mesma unidade que a série temporal original.

$$MAD = \frac{\sum_{t=1}^n |P_t - R_t|}{n} \quad (2.69)$$

- Erro Percentual Médio (MPE, do inglês *Mean Percentual Error*): esta medida de erro é similar ao erro médio, porém calcula em termos percentuais o erro médio. Assim como ocorre no MD, esta medida também tem a finalidade de medir a existência de algum viés. Previsões que não apresentam viés apresentam um MPE próximo de zero. A interpretação de um MPE positivo percentualmente significa que a previsão foi subestimada, enquanto que um MPE negativo percentualmente representa a superestimação da previsão em relação aos dados reais.

$$MPE = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{(P_t - R_t)}{R_t}}{n} \quad (2.70)$$

- Erro Percentual Absoluto Médio (MAPE, do inglês *Mean Absolute Percentual Error*): esta medida é um dos critérios mais utilizados para verificar em termos percentuais o quanto se está errando na previsão. Portanto, esta medida de erro é a mais adequada para comparar a performance entre os modelos, pois quanto menor for o seu valor, melhor será o ajuste encontrado para um determinado modelo. O único inconveniente desta medida é que ela não se aplica a séries temporais que apresentem algum dado da série nulo, pois o denominador zero gera uma medida inconsistente matematicamente, com erro tendendo ao infinito.

$$MAPE(\%) = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{|P_t - R_t|}{R_t}}{n} \quad (2.71)$$

- Erro Quadrático Médio (MSE, do inglês *Mean Square Error*): esta medida se baseia no cálculo da média dos quadrados dos erros. A vantagem de se calcular os erros ao quadrado neutraliza também neste caso a questão do sinal. Além disso, esta medida penaliza muito mais os erros grandes do que os erros de menor magnitude. Isto pode ser tornar problemático no caso de erros considerados *outliers*. Segundo WANKE e JULIANELLI (2006), os *outliers* neste caso são considerados no cálculo do MSE, quando, entretanto, deveriam ser desconsiderados. De qualquer forma, isso não afeta a preferência ao método, que também é um dos mais usuais.

$$MSE = \frac{\sum_{t=1}^n (P_t - R_t)^2}{n} \quad (2.72)$$

Uma última observação é feita com relação ao tamanho dos erros mensurados e à unidade na qual o erro é expresso, o que pode gerar confusão quanto à interpretação em relação às demais médias de erro apresentadas. Por isso, para evitar esta situação, o MSE pode ser obtido em termos do cálculo de sua raiz quadrada, denominada RMSE (do inglês, *Rooted Mean Squared Error*).

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (P_t - R_t)^2}{n}} = \sqrt{MSE} \quad (2.73)$$

A última métrica a ser apresentada é denominada Coeficiente de Desigualdade de Theil (do inglês, *Theil Inequality Coefficient*), popularmente conhecido como U de Theil.

Segundo SAMOBYL (2007), a medida de U de Theil assume papel decisivo na determinação de utilização ou não de uma determinada técnica de previsão.

Este coeficiente mensura o quanto o resultado está ou é melhor que uma previsão ingênua ou trivial. Assim, através da medida de U de Theil é possível determinar a qualidade ou aplicabilidade de um método de previsão. Na previsão ingênua, a medida de U de Theil equivale a 1, o que significa que a melhor estimativa para o próximo período é igual ao valor atual. A equação (2.74) a seguir apresenta o cálculo para obtenção deste coeficiente:

$$U = \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{P_{t+1} - R_{t+1}}{R_t} \right)^2 \right\}}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{R_{t+1} - R_t}{R_t} \right)^2 \right\}}} \quad (2.74)$$

Assim, pode-se interpretar o U de Theil da seguinte maneira:

- Quando $U \geq 1$ significa que o erro do modelo utilizado é maior que o erro obtido na previsão ingênua ($U=1$).
- Quando $U \leq 1$ significa que o erro do modelo utilizado é menor que o erro da previsão ingênua, e neste caso este modelo é preferível ao método da previsão ingênua.

Logo, espera-se que U de Theil varie entre 0 e 1, de modo que quanto menor for o coeficiente, melhor será a previsão e o método escolhido.

Uma vez apresentadas as alternativas existentes para mensuração dos erros e da adequação de um modelo de previsão, é importante comentar que para avaliação do desempenho das previsões feitas neste trabalho foram usados como parâmetros de avaliação as medidas de MAPE, MSE e do coeficiente de U de Theil. Tais critérios são os mais utilizados em função da facilidade de manipular matematicamente os dados, bem como também por proporcionar um fácil entendimento em termos de interpretação dos resultados.

3 METODOLOGIA DA PESQUISA

“A Humanidade parece longe de estabelecer um modelo que permita prever todos os eventos do futuro de uma pessoa, mas já dá os primeiros passos nessa direção.”

Gustavo Henrique Novaes Rodrigues

3.1 Metodologia

Na fundamentação teórica foram apresentadas as abordagens envolvendo o contexto sobre a análise de *wavelets*, bem como as técnicas e ou métodos existentes para previsão de séries temporais. Com base nestas definições, a proposta deste trabalho foi verificar se a combinação de previsões individuais obtidas a partir da decomposição de uma série temporal original via *wavelets* poderia melhorar a precisão do resultado da previsão combinada.

O conceito de combinação de previsões foi abordado neste trabalho baseado na possibilidade de se beneficiar da complementaridade de informações contidas em métodos distintos, de modo a obter uma previsão final com performance superior às obtidas nos métodos individuais.

Para verificar estes conceitos, os métodos de análise e previsão de séries temporais utilizados na combinação foram a suavização exponencial de Holt-Winter e o método ARIMA, conhecido também por metodologia de Box-Jenkins.

A opção por estas técnicas foi baseada na consolidação destas na literatura, bem como quanto a sua aplicação prática, tanto em meio acadêmico quanto prático usual (empresas, indústrias, comércio, bancos etc.). Apesar de ambas caracterizarem-se por utilizar apenas os dados passados para determinar o comportamento da variável a ser predita (o que as classifica como técnicas univariadas), a maneira como os dados são analisados acaba por distingui-las.

O método de suavização exponencial de Holt-Winter assume caráter determinístico, pois não restringe à série a ser analisada quanto a sua distribuição ou característica estacionária, bem como trata de analisar a série temporal em sua condição original. Suas principais vantagens são rapidez na estimativa, simplicidade, eficiência computacional e razoável precisão.

Já o método ARIMA é um método de caráter estocástico, pois se baseia na iteração e análise das propriedades probabilísticas da série. Está restrito apenas à condição preliminar de estacionariedade da série. O método apresenta ainda algumas particularidades quanto a sua abordagem, exigindo o cumprimento de algumas estratégias para modelagem e subsequente verificação da significância estatística dos parâmetros estimados. Mesmo assim, o método ARIMA se destaca devido à precisão obtida nos resultados de previsão.

Assim, a metodologia deste trabalho foi fundamentada na análise e combinação de previsões obtidas a partir dos métodos univariados citados, de modo que o objetivo principal foi avaliar se a previsão combinada obtida a partir da série decomposta via *wavelets* foi superior à precisão da previsão combinada original. A ferramenta de suporte utilizada para o processo de obtenção das previsões individuais foi o pacote computacional Minitab[®] e para as demais análises exploratórias de dados o recurso utilizado foi o Microsoft Excel[®]. O *software* Matlab[®] R2006a foi empregado como recurso de implementação da análise via *wavelet*.

A primeira série temporal que foi analisada é constituída de 84 observações referentes às vendas mensais de um determinado produto – no período de Janeiro de 2000 a Dezembro de 2006. A segunda série temporal que foi investigada também é composta de 84 observações e representa a série que foi obtida a partir da decomposição via *wavelets*, feita a partir da série original de vendas citada. A decomposição e reconstrução da série via *wavelets* foi feita no *toolbox* de *wavelet* do *software* Matlab[®] R2006a, através da implementação do procedimento *denoising*, onde algumas famílias de *wavelets* foram comparadas. As famílias que foram selecionadas para esta análise são as funções base mais conhecidas e utilizadas na literatura, segundo descrevem ARGOUD *et. al.* (2004) citando SHENG (1996). São elas: Haar (haar), Daubechies (daub), Coiflets (coif), Symlets (sym) e Biortogonais (bior).

Com base no teste estatístico Z (teste Z-score) foi então selecionada a melhor *wavelet*, conforme relatado na seção de fundamentação teórica deste trabalho. No Apêndice A são mostradas as *wavelets* testadas.

Após definidas as bases de dados (série temporal original e série *wavelet*) procedeu-se com a estimação dos modelos de suavização de Holt-Winter e do modelo ARIMA para cada série. Para determinação das constantes de suavização do método Holt-Winter foi desenvolvido um programa de otimização em VBA (Visual Basic) no Microsoft Excel[®], o qual se encontra disponível no Apêndice B.

A identificação e estimação das ordens do modelo ARIMA foram feitas com base nos critérios de diferenciação, autocorrelação e autocorrelação parcial das séries. Além dos recursos gráficos fornecidos pelo *software* Minitab[®] 15, foi utilizado ainda um outro programa auxiliar desenvolvido também em VBA por KURT ANNEN (2005), para realizar o teste de raízes unitárias. Tal programa foi implementado no Microsoft Excel[®] e com ele foi possível calcular de forma rápida e eficaz a estatística de Dickey-Fuller, a qual confirma ou não se a condição de estacionariedade da série foi atingida.

Uma vez estimados os modelos para cada técnica, foram então feitas as análises e respectivas previsões individuais no *software* Minitab[®] 15. Os resultados das previsões para cada modelo verificados são encontrados nos Apêndices A, C, I e J.

Finalmente, após obtidos os resultados das previsões para cada método procedeu-se para o processo de combinação destas. Para implementação da combinação fez-se necessário determinar os pesos ideais para cada método, de modo que fosse atribuído maior peso à previsão com menor erro e menor peso à previsão menos precisa. Para fazer esta ponderação foi desenvolvido um programa de otimização em VBA (Visual Basic) no Microsoft Excel[®], o qual se encontra disponível no Apêndice B. A lógica do programa desenvolvido determinou os pesos ideais como sendo aqueles para os quais a combinação linear resultou na menor soma dos erros quadráticos.

Sendo encontrados os pesos, foram obtidos então os resultados finais da previsão combinada. Tais resultados foram comparados a fim de que assim pudessem ser concluídas as verificações constatadas em termos dos parâmetros de erro quadrático médio (MSE), erro percentual médio (MAPE) e U de Theil.

A parte final do trabalho foi dedicada às conclusões e observações que foram julgadas como sendo importantes e que em trabalhos futuros podem vir a aprimorar o contexto desenvolvido neste projeto de pesquisa.

3.2 Desenvolvimento da Pesquisa

O principal objetivo deste projeto de pesquisa foi estudar a possibilidade de uma contribuição da transformada *wavelet* quando aplicada à combinação de previsões. Diante desta afirmação, o trabalho foi distribuído nas seguintes etapas:

Na primeira etapa foi feito um levantamento na literatura acerca de previsão de vendas, englobando desde os métodos tradicionais existentes até as novas propostas, onde se enquadra a combinação. Para isso foram pesquisadas dissertações, teses, livros, artigos em periódicos da área. As principais fontes de pesquisa foram o *WEB Science* e o site *Google*.

Posteriormente o conceito de *wavelets* foi introduzido de modo a verificar que tipo de contribuição a decomposição via *wavelets* poderia surtir no contexto de análise de séries temporais. Foi identificada então a possibilidade de preparar os dados numa primeira instância, de modo a verificar através desta ferramenta a essência característica de uma série temporal. Segundo OLIVEIRA (2007), citando MALL (2000) o princípio fundamental consiste em analisar a série temporal através de uma combinação de uma função de escala $\phi(t)$ e das *wavelets* $\psi(t)$. Esta idéia é essencial na codificação e análise multirresolução, sendo esta um ingrediente essencial para extrair de forma eficiente as informações a partir de uma observação (série temporal).

Finalmente, introduziu-se então o conceito de decomposição via *wavelets* e sua função no processamento da série temporal para obtenção das previsões individuais e da previsão combinada. A partir daí foi estabelecido então um fluxograma esquemático representativo constituído das etapas e procedimentos que seriam realizados seqüencialmente para realização deste projeto de pesquisa. O fluxograma apresentado na Figura 17 a seguir mostra o processo metodológico descrito.

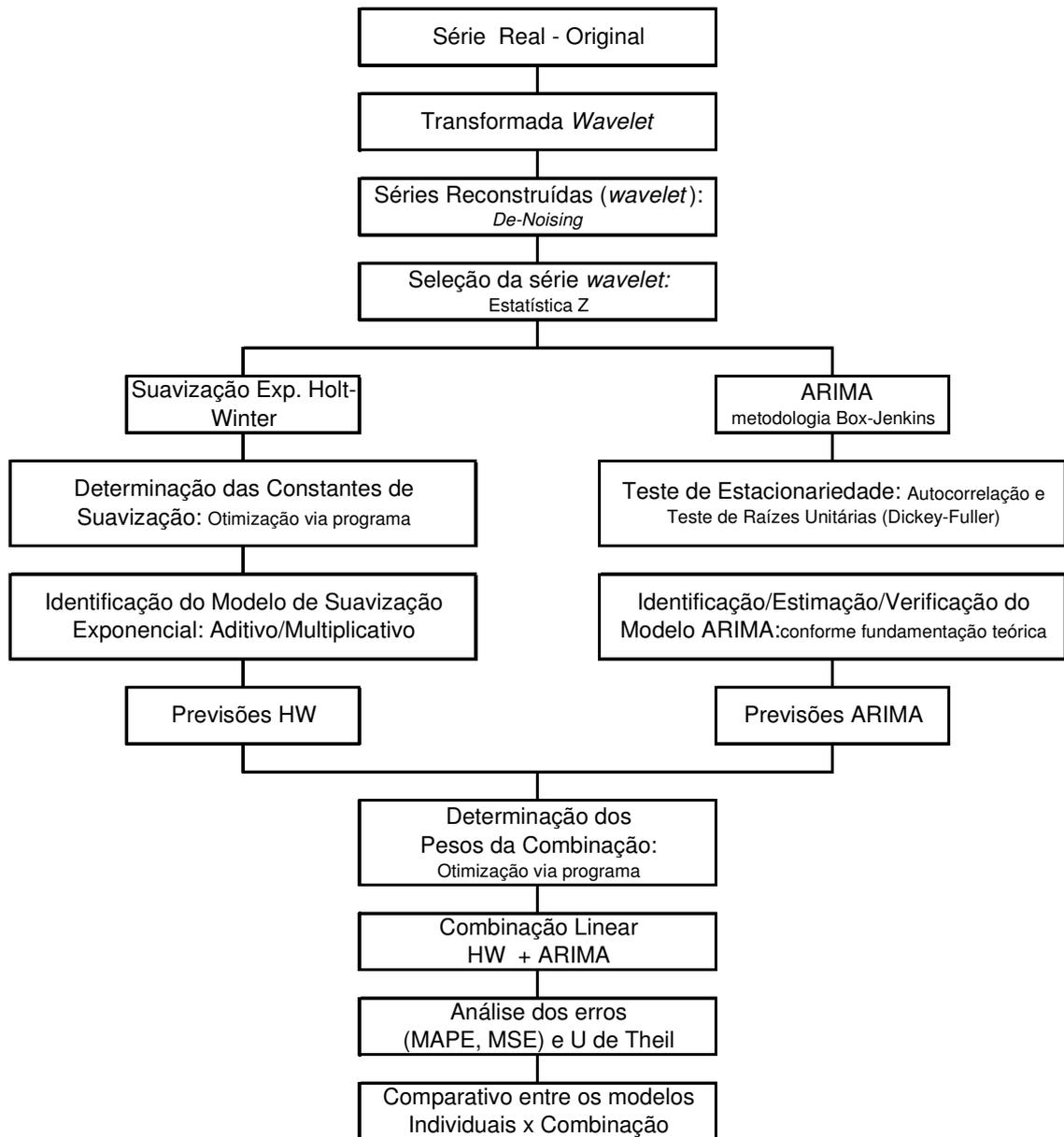


Figura 17: Fluxograma proposta para análise e previsões de séries temporais
Fonte: Elaborada pela autora

4 ANÁLISE EMPÍRICA

4.1 Apresentação da Série Temporal Original

A série temporal que foi considerada para estudo de caso neste trabalho representa o faturamento de um determinado produto ao longo de 7 anos, no período de janeiro de 2000 a dezembro de 2007. Tais dados foram disponibilizados pelo Departamento de Tecnologia de Informação (TI) da empresa. Estes dados foram obtidos do sistema de gerenciamento industrial vigente no ano de 2007 – chamado *Magnus*, onde a partir do movimento de itens em estoque foi selecionado apenas o parâmetro de NFS – nota fiscal de saída, caracterizando a natureza de faturamento/venda do produto. Os dados fornecidos são apresentados na Tabela 1, e indicam os volumes/unidades que foram faturados/vendidos em cada mês – no período citado anteriormente. Os dados considerados como amostra para estudo neste projeto de pesquisa compreendem os dados referentes ao período de janeiro de 2000 a dezembro de 2006.

Tabela 1: Vendas de um determinado produto no período de Jan/2000 a Dez/2006

Ano	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
2000	10	26	23	25	22	25	40	26	26	17	14	16
2001	23	19	25	23	16	21	18	30	6	8	11	12
2002	19	9	15	24	24	10	9	9	13	15	19	13
2003	6	15	11	18	19	14	13	6	11	13	3	8
2004	14	12	7	15	20	33	7	31	16	27	40	47
2005	8	12	8	12	14	13	19	20	16	14	14	20
2006	16	11	28	10	23	16	15	20	19	16	16	18

O modelo de combinação de previsões que foi desenvolvido procurou primeiramente analisar a série temporal em seu estado original e num segundo momento, em sua forma reconstruída – via transformada *wavelet*. Esta mesma série reconstruída foi utilizada então para calcular as previsões individuais – via método Holt-Winter e ARIMA. Na seqüência, os dados previstos obtidos a partir dos modelos individuais foram então combinados para que se pudesse avaliar a eficácia da metodologia proposta neste trabalho. É

oportuno lembrar que o objetivo principal deste projeto de pesquisa foi determinar se a decomposição por *wavelets* feita a partir dos dados da série de vendas original resultaria numa menor discrepância nas previsões individuais obtidas, que por sua vez resultaria num resultado combinado mais preciso. Foram assim comparados os resultados combinados obtidos a partir da análise original dos dados da série, bem como os resultados combinados provenientes da análise da série decomposta ou reconstruída.

Adicionalmente, foram avaliados os desempenhos de cada modelo ou técnica de previsão individualmente, para que assim se pudesse verificar se a decomposição via transformada *wavelet* proporcionou alguma melhora no desempenho de cada um destes métodos. Para esta avaliação foram considerados como parâmetros de comparação o erro percentual médio absoluto (MAPE), o erro quadrático médio (MSE) e o U de Theil (coeficiente de desigualdade), sendo que os dois primeiros estão relacionados ao erro da previsão e o segundo em relação à adequação do método que se está utilizando.

4.2 Estatística Descritiva da Série Temporal Original

A idéia básica de uma estatística descritiva de dados é a de se estabelecer uma descrição dos dados através de uma amostra. Para obter tal descrição foram utilizadas algumas técnicas analíticas comumente empregadas para este tipo de análise, tais como: distribuição de freqüência (através da construção de histogramas, correlogramas), medidas de tendência e medidas de dispersão. A análise conjunta destas técnicas permitiu resumir o comportamento dos dados, de maneira a investigá-lo – tirando proveito das conclusões provindas da interpretação de alguns números e gráficos.

Assim, visando obter uma prévia do comportamento estatístico dos dados da série temporal em estudo, com o intuito de também identificar possíveis e necessárias transformações – a fim de tornar segura e correta a aplicação das técnicas de previsão posteriormente, foi feita então uma análise dos dados na sua condição original. É importante salientar que esta análise objetivou caracterizar dados e ou componentes que possivelmente poderiam auxiliar quanto alguma decisão inerente à aplicação dos métodos escolhidos (suavização exponencial de Holt-Winter e ARIMA).

O gráfico da série temporal apresentado na Figura 18 mostra o comportamento da série temporal original no período de janeiro de 2000 a dezembro de 2006.

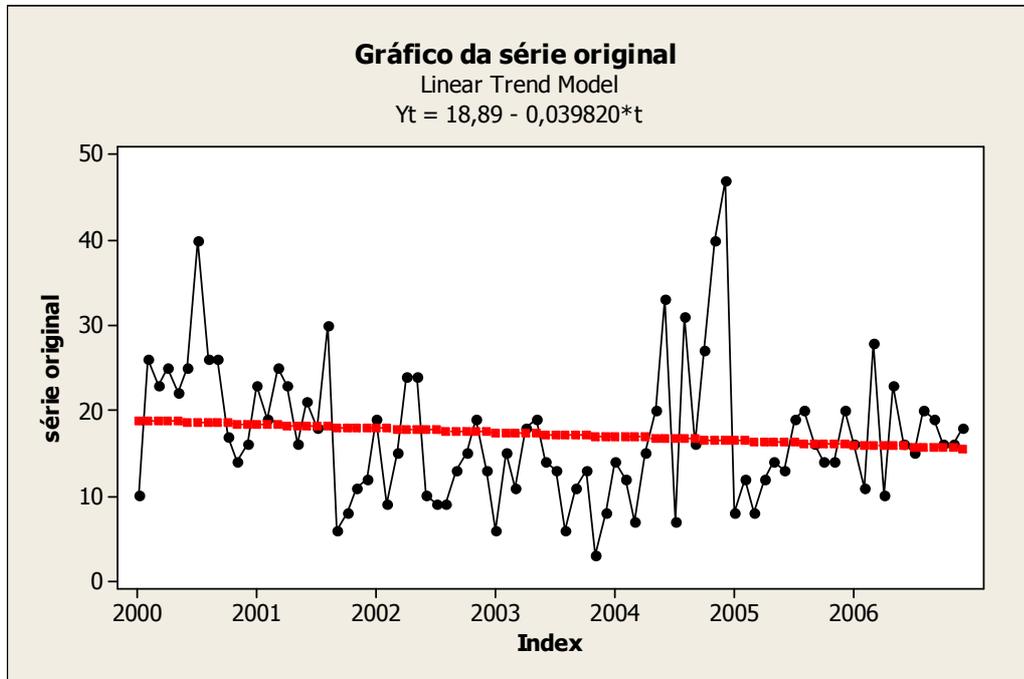


Figura 18: Comportamento da série de vendas original

A análise deste gráfico indica a presença de uma leve tendência negativa ou decrescente. Porém, como esta inclinação não é significativa, seria possível admitir a série a princípio como sendo estacionária. Porém, como esta avaliação visual não foi totalmente conclusiva, isso conduz à realização do teste de raízes unitárias (Dickey-Fuller). A estatística encontrada para este teste (-7,139) e seus respectivos valores críticos (-4,058 para um nível de significância de 1% e -3,458 para 5%) confirmam a princípio que a hipótese de um processo fracamente estacionário poderia ser admitida. No entanto, nota-se ainda no gráfico a presença de flutuações mais acentuadas em determinados períodos, o que interfere diretamente na probabilidade de uma média não constante ao longo do tempo. Caso essas flutuações fossem periódicas poder-se-ia aqui caracterizar então uma componente básica integrante da série temporal denominada então de sazonalidade. Porém, como isso não ocorre, a sazonalidade não é então uma hipótese válida. Por último, descartou-se também a possibilidade de uma componente cíclica, pois não foi identificado nenhum padrão de comportamento repetitivo ao longo da série representada neste gráfico. A partir destas constatações provindas do gráfico,

pode-se admitir ainda a possibilidade dos componentes da série ser multiplicativos, pois embora não haja uma forte tendência presente no comportamento dos dados ao longo da série, está claro que há uma variação brusca dos dados em torno da média, e com isso não há como estabelecer uma variação constante em torno desta. Com isso, há de se convir que a análise prévia feita sobre as componentes básicas (tendência, sazonalidade e ciclo) foi de suma importância, pois ela contribuiu fortemente para a modelagem de modelos de suavização exponencial e ARIMA feitos posteriormente.

Após a verificação das componentes da série, foi feita então uma análise descritiva estatística, com o intuito de investigar as propriedades inerentes a esta mesma série temporal. A Figura 19 mostra um resumo das estatísticas obtidas no *software* Minitab® a partir dos dados da série de vendas original.

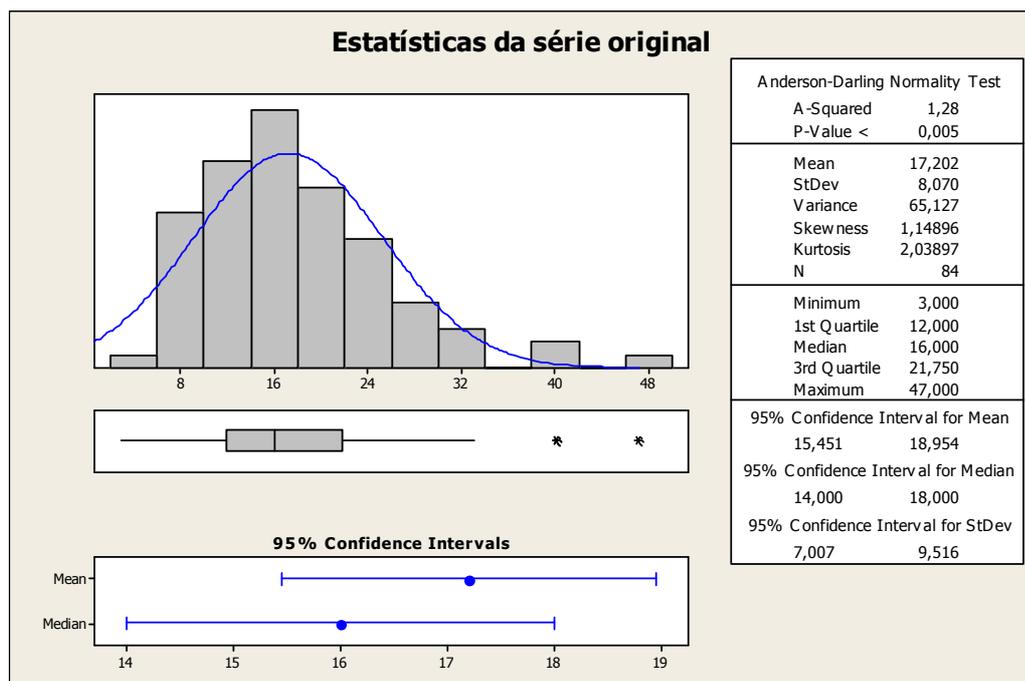


Figura 19: Estatística descritiva dos dados da série de vendas original

Verificou-se através da estatística descritiva que os dados da série de vendas original não apresentam uma distribuição normal, o que pode ser ratificado pelo teste de Normalidade de Anderson-Darling (p-valor < 0,05), pela assimetria positiva (1,14896) e pela curtose (2,03897). Tais características não são desejáveis para a análise de séries temporais. Logo, embora a hipótese de uma fraca estacionariedade tenha sido aceita, em se tratando do

modelo ARIMA, a diferenciação para este caso é uma consideração válida, o que tende a reforçar a questão de estacionariedade. Quanto à tendência central, a medida encontrada para a média foi 17,202 (com intervalos de confiança 95%: 15,451 – 18,954) e para a mediana foi 16,000 (com intervalos de confiança 95%: 14,000 – 18,000). Em relação à dispersão dos dados, o valor encontrado para o desvio padrão foi 8,070 (com intervalos de confiança 95%: 7,007 – 9,516) e para a variância foi 65,127.

A Figura 20 a seguir mostra ainda o gráfico de dados médios da série original, os quais representam a demanda média anual de produtos vendidos – no período de 2000 a 2006.

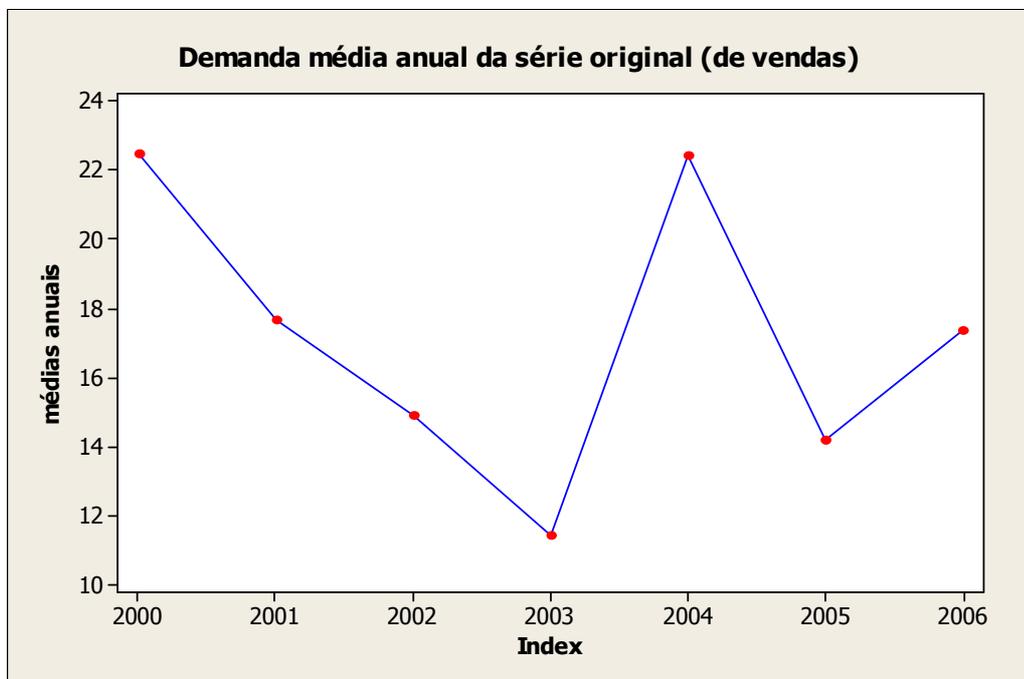


Figura 20: Demanda média anual da série original (de vendas)

Deste gráfico, verificou-se que entre os anos de 2000 a 2003 houve uma queda brusca nas vendas deste produto. Notou-se uma melhora no ano de 2004, porém seguida de instabilidade nos anos subsequentes.

Por último, foi analisado ainda o correlograma da série original, conforme mostra a Figura 21. Neste correlograma observou-se a presença de um comportamento senoidal ao longo das defasagens de toda a série, o que caracteriza tipicamente um processo autorregressivo. Este foi mais um indício ou prova de que para aplicar o modelo ARIMA será

mesmo necessário diferenciar a série para que seja eliminada a correlação residual existente no modelo.

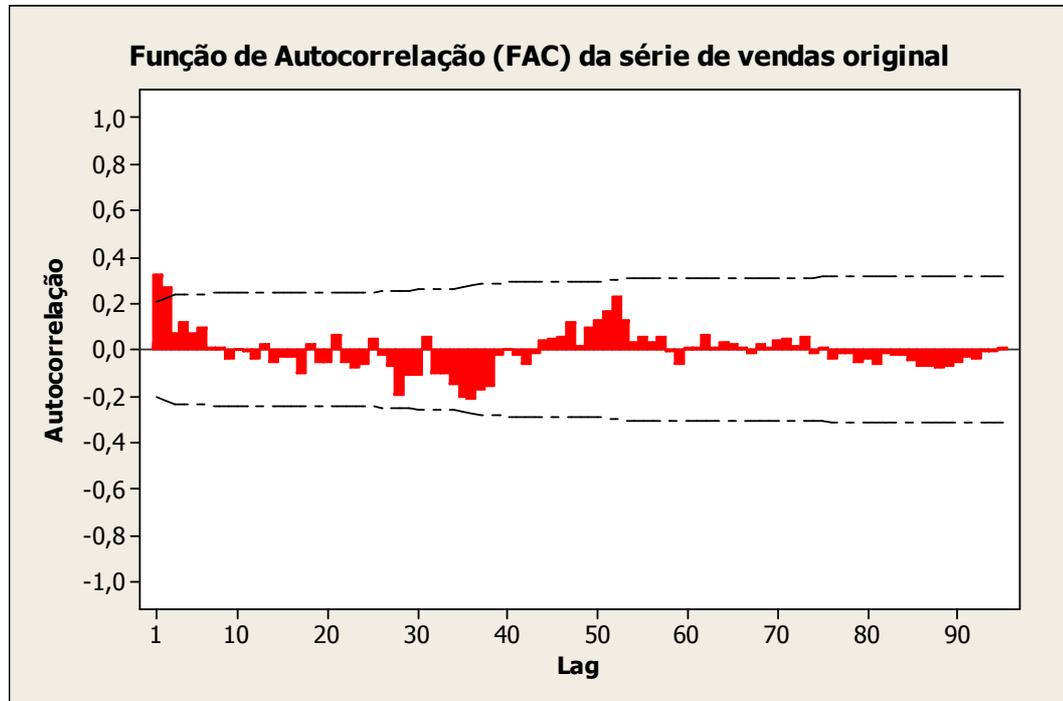


Figura 21: Correlograma da série de vendas original

4.3 Aplicação dos Métodos de Suavização Exponencial na Série Temporal Original

Na seção 2.2.11 foram apresentadas três abordagens para o método de suavização: suavização exponencial simples, suavização exponencial linear de Holt e o método de Holt-Winter. Baseada nesta teoria, esta seção avaliou estas três possibilidades para verificar aquela que apresentou o melhor ajuste. A série temporal em seu estado original foi então utilizada para estimativa das previsões dos três métodos – todos realizados no *software* Minitab®.

Primeiramente o modelo foi estimado aplicando-se o método de suavização exponencial simples. No *software* Minitab® o valor otimizado da constante de suavização do nível A é calculado automaticamente (*default*) através de *backcasting* (método de retrovisão), que consiste em calcular os valores suavizados iniciais de modo a ajustá-los da melhor possível aos dados em sua condição original. Os valores ajustados ou previstos para este modelo estão disponíveis no Apêndice A deste trabalho.

Na seqüência foi estimado, também no *software* Minitab[®], o método de suavização exponencial dupla ou método de Holt. Da mesma forma que ocorre no método de suavização exponencial simples, o método de Holt também não requer que as constantes sejam calculadas previamente, pois no Minitab[®] os valores otimizados de tais constantes (A e C) pode ser obtidos pela escolha default através de *backcasting*, de modo que o melhor ajuste apresente sempre a menor soma dos quadrados dos erros. Os valores ajustados para este modelo são apresentados no Apêndice A.

O último modelo de suavização exponencial testado foi o método de Holt-Winter. Porém, diferente dos demais métodos, desta vez o *software* Minitab[®] requer que as constantes de suavização sejam informadas como parâmetros de entrada. Além disso, é necessário informar ainda qual o modelo de Holt-Winter que será adotado: aditivo ou multiplicativo. Assim, antes de estimar propriamente o modelo no *software* Minitab[®], foram então analisados o modelo e as respectivas constantes de suavização.

Primeiramente foi definido qual modelo seria aplicado. A opção pelo modelo multiplicativo foi feita com base no gráfico do comportamento da série ao longo do tempo apresentado na seção 4.3, onde se observou uma variação na amplitude com o incremento do nível ao longo do tempo – o que é característico de um padrão multiplicativo.

Uma vez definido o modelo multiplicativo para Holt Winter, o próximo passo foi determinar as constantes de suavização A , C e D . Os valores otimizados para tais constantes foram obtidos através de um programa desenvolvido no Visual Basic do Microsoft Excel[®]. Este programa calcula as constantes de suavização por meio de interações, verificando em todas as combinações de constantes possíveis aquela que minimiza o valor da soma dos quadrados dos erros de ajustamento. No Apêndice B encontra-se o código do programa desenvolvido. Assim, para a menor soma de erros (4.557,9) calculada, as estimativas dos valores encontrados para as constantes de nível, tendência e sazonalidade foram respectivamente, $A(0,33)$, $C(0)$ e $D(0)$.

A partir da definição do modelo e suas respectivas constantes otimizadas, procedeu-se então à obtenção da previsão no *software* Minitab[®]. No Minitab[®] o cálculo da previsão é obtido através do ajuste de modelo. Para isso, são empregadas uma componente de nível, uma componente de tendência e uma componente sazonal em cada período. As constantes de suavização têm a função de atualizar as componentes em cada período. São estimados ainda os valores iniciais para as componentes de nível e de tendência através de uma regressão linear no tempo. Já os valores iniciais para a componente sazonal são obtidos a partir de uma regressão de variáveis *dummy* usando dados sem tendência. No Apêndice A

podem ser encontradas as previsões obtidas no Minitab[®] para este modelo. É importante salientar que para cada um dos métodos estimados foram determinados o erro quadrático médio (MSE) e o coeficiente de desigualdade U de Theil. Tais estatísticas foram usadas na seqüência como critério de comparação para escolha do método a ser adotado, de modo que o método que apresentasse os menores valores para estes parâmetros foi considerado como o método com melhor ajuste.

A Tabela 2 a seguir sumariza os valores do coeficiente de desigualdade U de Theil e dos erros (quadrático médio e percentual absoluto médio) encontrados para cada um dos modelos de suavização exponencial (simples, Holt e Holt-Winter) que foram testados.

Tabela 2: Comparativo dos métodos de suavização exponencial da série original

COMPARATIVO U de Theil x MSE x MAPE			
	SIMPLES	HOLT	HW
U de Theil	0,8507	0,8805	0,7736
MSE	60,8590	78,1380	53,5156
MAPE	44,5849	50,1835	42,2980

Como se pode verificar, os valores encontrados para o coeficiente U de Theil, e para os erros (quadrático médio e percentual absoluto médio) no método de Holt-Winter (HW) foram os menores – quando comparados aos métodos de suavização exponencial simples e do método de Holt. Logo, o modelo de Holt-Winter foi o escolhido, pois este parece fornecer o melhor ajuste em termos de MSE, MAPE e do coeficiente U de Theil. Esta escolha também reforça a idéia de que o método é realmente vantajoso em relação aos demais, pois não foi necessário aplicar nenhuma transformação na série temporal e ou verificação da significância estatística dos parâmetros que normalmente são estimados, pois como também já foi dito anteriormente este método não requer uma série com características de estacionariedade e ou de distribuição normal. Tais vantagens contribuem na confirmação pela escolha do método. Os resultados obtidos na previsão através do modelo de Holt-Winter estão disponíveis no Apêndice A deste trabalho. Tais valores são utilizados posteriormente para determinação da previsão combinada.

A Figura 22 a seguir mostra os gráficos para a comparação visual entres os dados reais e os dados que foram previstos no modelo de suavização exponencial de Holt Winter.

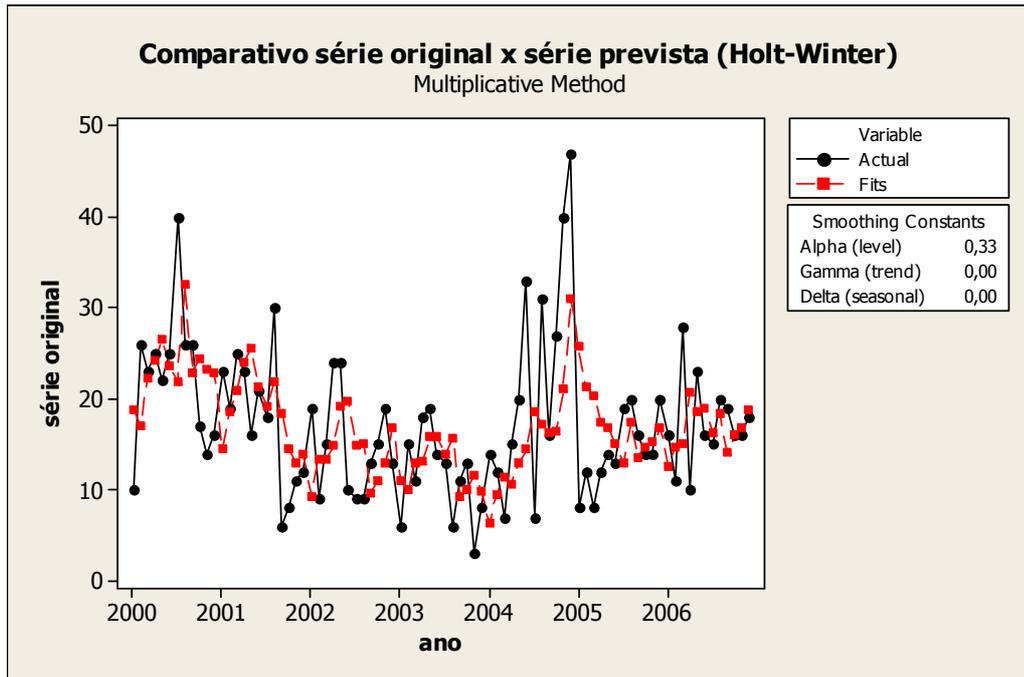


Figura 22: Gráfico comparativo de dados reais x previsto (Holt-Winter)

4.4 Aplicação do Modelo ARIMA na Série Temporal Original

Para aplicação da metodologia Box-Jenkins, ou modelo ARIMA, foi necessário verificar e analisar previamente as propriedades probabilísticas (ou estocásticas) da série temporal objeto de estudo deste trabalho.

A primeira etapa da metodologia consistiu em identificar as ordens que compõem o modelo (p, d, q) , a partir da análise da série e suas respectivas funções de autocorrelação (ACF) e autocorrelação parcial (PACF).

A ordem d de integração do modelo ARIMA depende da verificação do gráfico da série original. Na seção 4.2 a análise empírica feita a respeito do gráfico apresentado na Figura 18 a princípio sugeriu uma condição de estacionariedade, evidenciada a princípio pela análise visual no gráfico e pelo teste de raízes unitárias (Dickey-Fuller). Porém, uma avaliação subsequente feita através da análise do correlograma da ACF, confirmou que a série temporal analisada não era estacionária, pois o comportamento senoidal da função de autocorrelação sugere um modelo auto-regressivo. Por último, a condição de não-normalidade, evidenciada através da estatística descritiva dos dados, corroborou para que se

chegasse à conclusão de que a série realmente precisaria sofrer algum tipo de transformação para se tornar efetivamente estacionária.

Uma vez confirmada a condição de não estacionariedade, procedeu-se então à diferenciação da série original. A Figura 23 a seguir apresenta o gráfico da série de vendas original diferenciada uma vez.

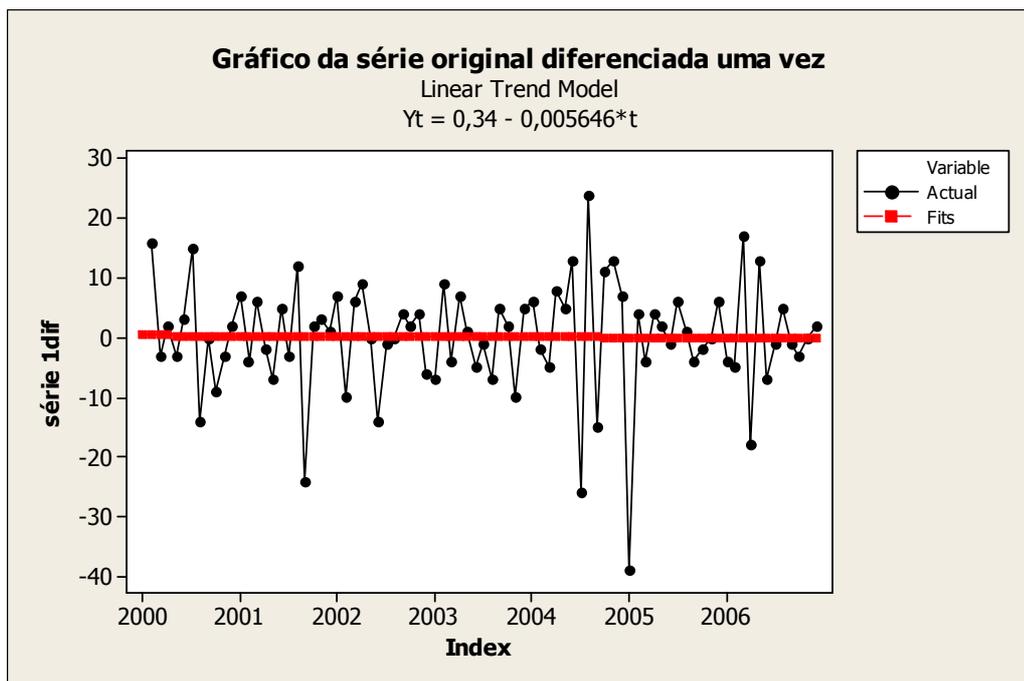


Figura 23: Gráfico da série de vendas diferenciada uma vez

Neste gráfico nota-se nitidamente que a fraca tendência crescente existente no gráfico original foi eliminada com a diferenciação da série. O teste de raízes unitárias (DICKEY-FULLER) para a série diferenciada também comprovou através do valor encontrado para a estatística (-14,477) que a condição de estacionariedade da série diferenciada é fortemente favorecida. Para completar a análise, foi averiguado o correlograma da função de autocorrelação para a série de dados diferenciada. A Figura 24 a seguir apresenta este gráfico.

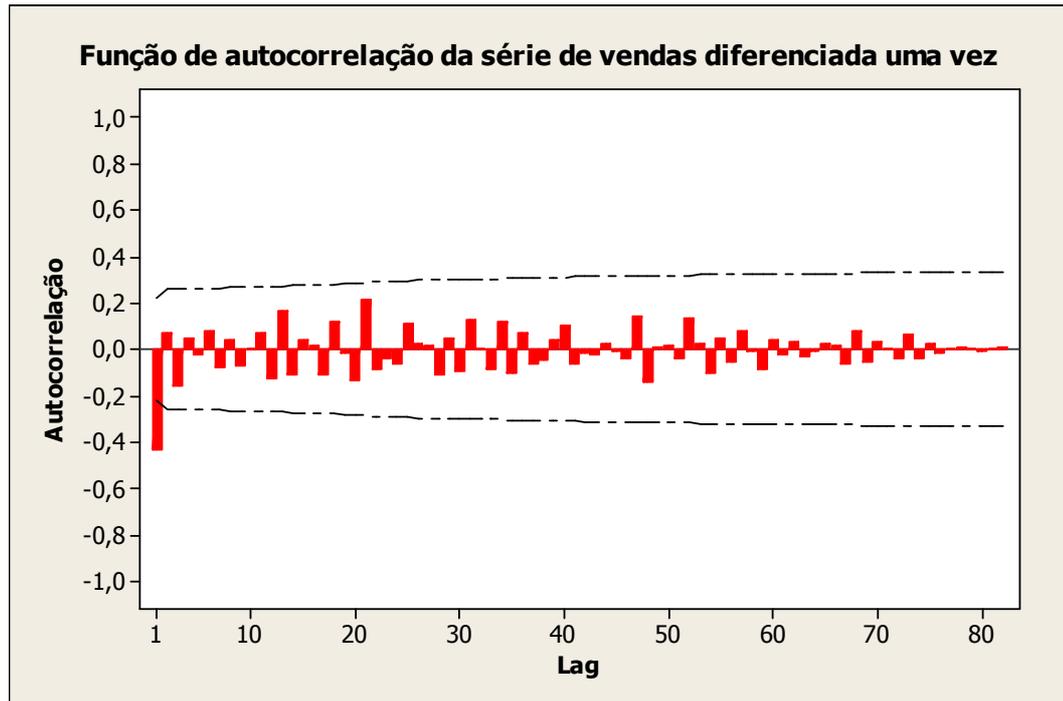


Figura 24: Função de Autocorrelação (ACF) da série original diferenciada uma vez

Do correlograma da ACF, pode-se observar que o gráfico possui agora um comportamento aleatório, constatando realmente que a série tornou-se então estacionária. Como citado na secção 2.2.3 (estacionariedade), foi suficiente apenas a primeira diferenciação para eliminar a fraca tendência (decrecente) presente na série original e assim induzir a estacionariedade à série de vendas. Logo, concluiu-se então que o valor da ordem de integração d para este modelo ARIMA vale 1.

Prosseguindo com a etapa de identificação, outra conclusão importante extraída da análise deste gráfico foi a identificação da ordem q do modelo ARIMA. Nota-se que apenas o primeiro *lag* está fora dos limites de significância estatística fornecido pelo correlograma, bem como é o único a apresentar a maior defasagem e autocorrelação significativa. Logo, isso indica que a ordem MA (q) mais adequada para este modelo é 1.

Para concluir a identificação do modelo ARIMA, resta identificar a ordem p . Para isso, procedeu-se à análise da correlograma da função de autocorrelação parcial (PACF) da série de vendas original. A Figura 25 apresenta o gráfico da PACF. Percebe-se neste gráfico que ocorre uma queda repentina após o primeiro *lag* (intervalo). Como já foi identificado no correlograma de autocorrelação que a série era unicamente auto-regressivas ARIMA ($p, 1, 0$),

era de se esperar que sua função de autocorrelação parcial apresentasse este declínio após certo *lag* – que neste caso foi o primeiro. Logo, isso implica num modelo auto-regressivo AR(1).

Uma vez identificadas todas as ordens do modelo, pode-se concluir que o modelo identificado e mais apropriado para a série de vendas original foi o modelo ARIMA (1, 1, 1). Após identificar o modelo, o passo seguinte foi verificar a consistência dos dados obtidos nesta etapa.

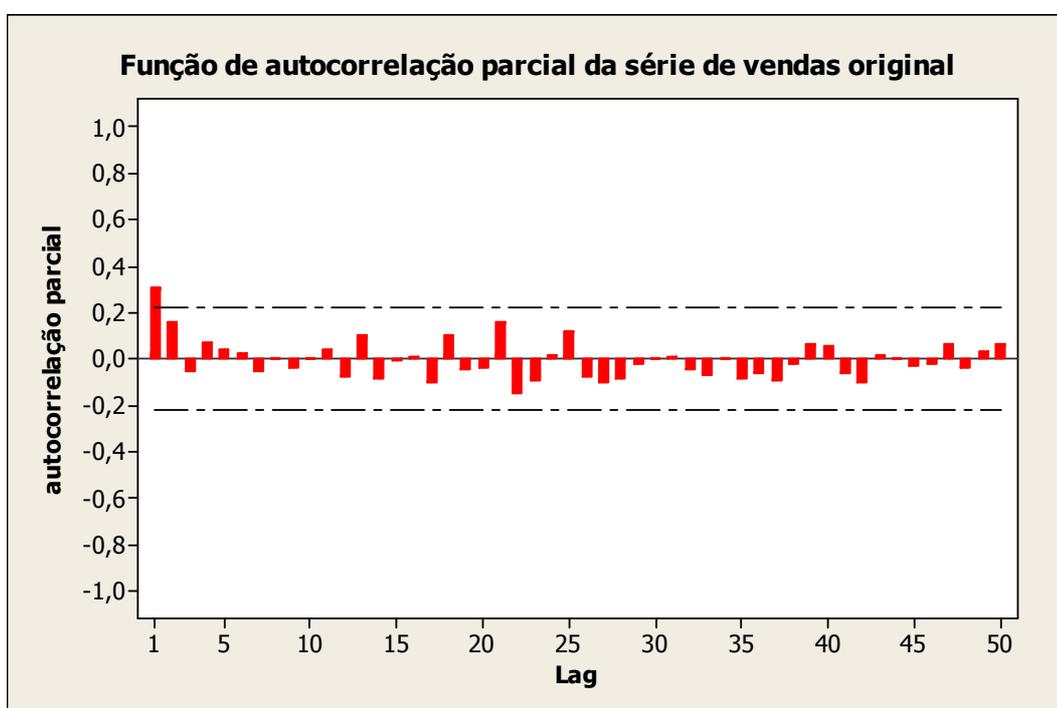


Figura 25: Função de Autocorrelação Parcial (PACF) da série original

4.4.1 Estimação do Modelo ARIMA

Uma vez indicados os valores das ordens p , d e q do modelo ARIMA, a etapa seguinte foi a estimativa dos parâmetros do modelo proposto e da variância do resíduo.

Conforme já citado neste trabalho, o modelo identificado foi estimado no *software* Minitab[®], e a avaliação deste foi feita baseando-se em alguns critérios estatísticos dos parâmetros, tais como a estatística t padrão (t de *Student*) e os p -valores. Assim, considerando

como critérios de aprovação um $|t \text{ de Student}| > 2$ e uma significância estatística mínima de 0,05 (5%) para o p -valor a partir do 20º lag na estatística de Box-Pierce (Ljung-Box), concluiu-se que para os valores 2,94 e 148,31 (encontrados para a estatística t) e demais valores p encontrados (todos maiores que 0,05), o modelo provou-se adequado por ambos os critérios.

A Figura 26 abaixo mostra um resumo da estimativa final dos parâmetros e os resultados obtidos para a estatística de Box-Pierce (Ljung-Box).

ARIMA Model: Série Original					
Final Estimates of Parameters					
Type		Coef	SE Coef	T	P
AR	1	0,3095	0,1053	2,94	0,004
MA	1	0,9887	0,0067	148,31	0,000
Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic					
Lag		12	24	36	48
Chi-Square		5,6	14,6	24,4	33,7
DF		10	22	34	46
P-Value		0,845	0,880	0,889	0,910

Figura 26: Resumo das Estatísticas do modelo ARIMA da série original

A representação literal do modelo encontrado é:

$$Y_t = 0,3085Y_{t-1} + e_t + 0,9887e_{t-1} \quad (4.1)$$

Outra possibilidade válida para estimar o modelo encontrado poderia ser feita a partir da avaliação de outros modelos identificados a partir do original. Esta alternativa se baseia no cálculo das estatísticas de Akaike e Scharz, ambas apresentadas na fundamentação teórica deste trabalho. Porém, por não haver a necessidade de se avaliar a estimação de mais de um modelo, tais critérios não foram aqui utilizados, cabendo apenas lembrar que esta seria uma opção válida para aplicação neste caso.

Após comprovar que o modelo estimado foi adequado, a etapa precedente foi a verificação ou diagnóstico.

4.4.2 Verificação do Modelo ARIMA

A etapa de verificação da metodologia Box-Jenkins consiste em se verificar por meio da análise dos resíduos, se o modelo definido satisfaz as condições de regularidade de um modelo gerado pela aplicação do método. Caso a análise do correlograma mostre que os resíduos se comportam como ruído branco, ou seja, se cada valor da série tiver média zero, variância constante e não apresente mais correlação serial, pode-se então concluir que o modelo encontrado está adequado.

Assim, para confirmar a hipótese de que os resíduos não apresentam mesma correlação, analisaram-se então os correlogramas de ACF e PACF dos resíduos do modelo ARIMA (1, 1, 1) – conforme Figuras 27 e 28.

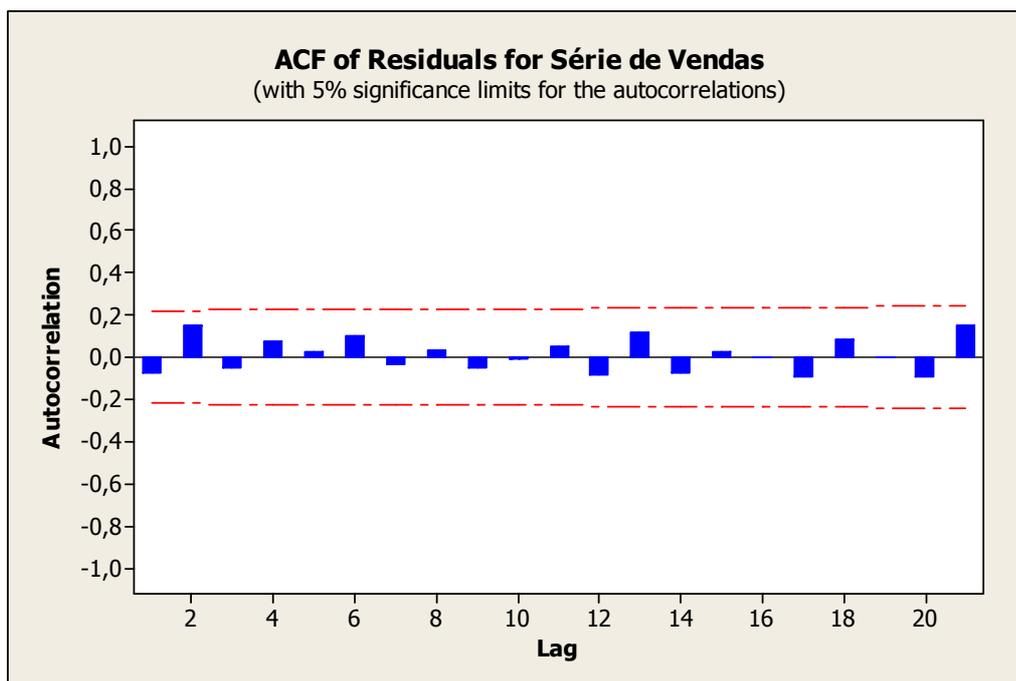


Figura 27: Correlograma da ACF para os resíduos do modelo ARIMA (1, 1, 1)

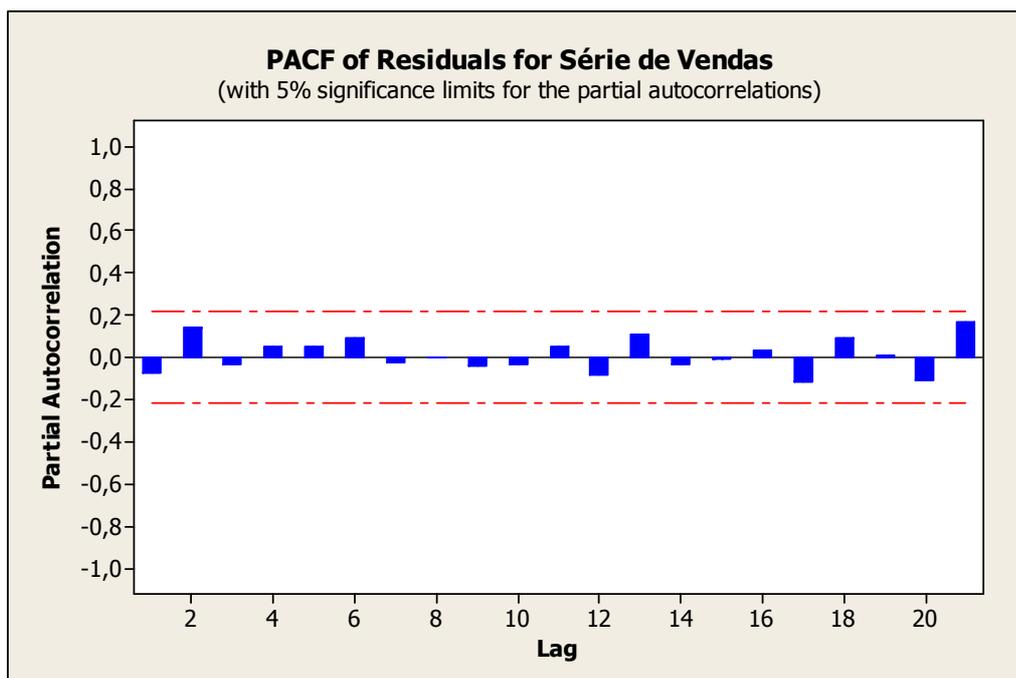


Figura 28: Correlograma da PACF para os resíduos do modelo ARIMA (1, 1, 1)

Analisando os correlogramas da ACF e PACF, pode-se observar que em ambos o comportamento dos resíduos é considerado aleatório, pois não há uma evidência quanto a um padrão específico. Além disso, não é observado mais nenhum tipo de correlação serial – tal como ocorria anteriormente. Isto é evidenciado através da análise de cada *lag*, uma vez que agora todos se apresentam dentro dos limites de significância. Com isso, pode-se afirmar que a partir da verificação feita através da análise dos correlogramas dos resíduos, o modelo ARIMA (1, 1, 1) foi julgado adequado.

4.4.3 Avaliação das Previsões

Uma vez aceito o modelo ARIMA (1, 1, 1), o mesmo foi então utilizado para calcular a previsão. As previsões obtidas para este modelo encontram-se no Apêndice C. Uma avaliação prévia deste modelo ARIMA (1, 1, 1) conduziu aos seguintes resultados: para o MAPE o valor encontrado foi 44,2433, para o MSE 59,0187 e para o U de Theil de 0,7915. Na próxima seção deste trabalho, os dados previstos foram utilizados em conjunto com as

previsões obtidas do modelo de suavização exponencial para determinar o resultado combinado das previsões.

4.5 Combinação das Previsões da Série Original

A partir dos resultados obtidos de previsões para cada um dos modelos, efetuou-se então o cálculo dos pesos para cada previsão individualmente. Para tal, foi desenvolvido um programa de otimização de pesos no Visual Basic do Microsoft Excel[®]. O critério adotado para determinação dos pesos foi baseado na combinação para o qual o resultado encontrado gerasse um erro médio percentual absoluto (MAPE) mínimo possível. Assim, uma vez encontrado os pesos, o modelo de previsão combinada obtido foi este:

$$PrevisãoComb_{s.original} = 0,5845.SuavizacaoExp + 0,4155.ARIMA \quad (4.2)$$

Comparando-se os pesos obtidos para a combinação, verificou-se que o maior peso foi atribuído ao método de Holt-Winter (suavização exponencial), bem como o menor peso ao modelo ARIMA. Isto se deve ao fato de que a combinação dos métodos determina a atribuição do maior peso ao método mais preciso e menor peso ao modelo menos preciso. Isto se comprova, quando os parâmetros avaliados para ambos os modelos individualmente (U de Theil, MSE e MAPE) são comparados.

As previsões obtidas para o modelo combinado encontram-se no Apêndice D. A avaliação deste modelo resultou em um MAPE de 41,7380, um MSE de 52,6188 e um U de Theil de 0,7507. Esta análise evidencia que os resultados encontrados para o MAPE, MSE e para o U de Theil foram satisfatórios, e que houve um progresso em relação aos valores obtidos para cada um dos métodos individualmente.

A Tabela 3 a seguir sumariza os resultados obtidos neste primeiro cenário, o qual avalia as previsões baseada em uma série temporal em sua condição original.

Tabela 3: Comparativo das previsões feitas para a série original

Resultados – Série Original			
método	U de Theil	MAPE	MSE
Holt-Winter	0,7736	42,2980	53,5156
ARIMA	0,7915	44,2433	59,0187
Combinação	0,7507	41,7380	52,6188

4.6 Aplicação da Transformada *Wavelet* à Série Temporal

O objetivo desta seção foi exatamente aplicar a transformada *wavelet packet* à série temporal. Esta abordagem testou a transformada *wavelet* em cinco famílias (funções) distintas de *wavelet* – ambas extremamente conhecidas e utilizadas na literatura, são elas: biortogonais, coiflets, daubechies, symlets e haar. A escolha pelas quatro primeiras funções supracitadas foi feita seguindo a recomendação de ARGOUD *et. al.* (2004), citando SHENG (1996). Ressalta-se apenas que a inclusão da função de Haar na análise foi feita levando-se em consideração que este tipo de função é uma das mais simples e mais usadas em inúmeras aplicações envolvendo a análise de sinais, e por isso julgou-se conveniente sua utilização na comparação.

A aplicação da transformada *wavelet packet* foi feita considerado apenas um nível para decomposição. Salienta-se aqui que, embora existam critérios estabelecidos que permitam otimizar a resolução a partir do número de níveis da decomposição, o objetivo aqui não foi verificar ou encontrar qual a melhor resolução, mas sim avaliar num primeiro instante qual o impacto da utilização de um sinal *wavelet* para métodos de análise e previsão de séries convencionais. Por isso admitiu-se que a decomposição em um único nível já seria o suficiente para revelar a viabilidade ou não ao uso de transformada *wavelet* como método de preparação dos dados.

A otimização da análise multirresolução feita durante o processo de decomposição da transformada *wavelet* adotou o critério de Shannon. Conforme definido na fundamentação teórica, tal critério permite selecionar os coeficientes durante a fase de aplicação da transformada de forma mais apropriada – a partir de um valor crítico estimado pelo mesmo (o qual também foi apresentado).

Adicionalmente à transformada, foi adotado ainda o método *denoising* – visando suprimir o ruído presente na série original, de modo a permitir que a análise fosse feita num sinal de melhor qualidade, acreditando que com isso se pudesse obter resultados mais coerentes na previsão.

Assim, considerando todos os critérios e parâmetros acima estabelecidos, procedeu-se então à análise *wavelet* no *software* Matlab[®] R2006a. Foram obtidas um total de 38 séries reconstruídas a partir da transformada realizada em cada uma das funções e suas respectivas variações de ordem. Os sinais reconstruídos podem ser encontrados no Apêndice E até H deste trabalho.

4.7 Escolha da Função *Wavelet*

Normalmente a escolha da função *wavelet* que será utilizada em um estudo é feita de forma empírica. Porém, em alguns casos esta escolha deixa de ser arbitrária e passa a ser feita baseada em alguns critérios pré-estabelecidos. Os critérios estatísticos comumente empregados para análise da adequação de uma função são desvio padrão e estatísticas, como por exemplo, a estatística Z. Neste trabalho, a escolha obedeceu a heurística do teste Z apresentada na seção 2.2.13.7 da fundamentação teórica, e pelo critério adotado, dentre as 38 séries que foram encontradas, foram escolhidas apenas duas funções que atenderam perfeitamente estes quesitos. As séries obtidas a partir da decomposição utilizando a função “db2” (daubechies de ordem 2) e “sym2” (symlets de ordem 2) apresentaram as estatísticas enquadrados nos critérios e condições de aprovação estabelecidos pelos testes. Assim, embora duas séries tenham sido classificadas, foi constatado que não haveria necessidade de se realizar simulações com estas duas séries, pois se verificou que ambas eram idênticas. Logo, uma única função permitiria aplicar os dados da série reconstruída para obtenção das novas previsões.

A Figura 29 a seguir mostra um gráfico comparativo com a sobreposição das séries original e reconstruída obtida no Matlab[®] 2006a. No Apêndice I é apresentada uma tabela contendo os dados da série original e da série reconstruída (*wavelet*) sem ruído, bem como as medidas dos respectivos erros (MAPE e MSE).

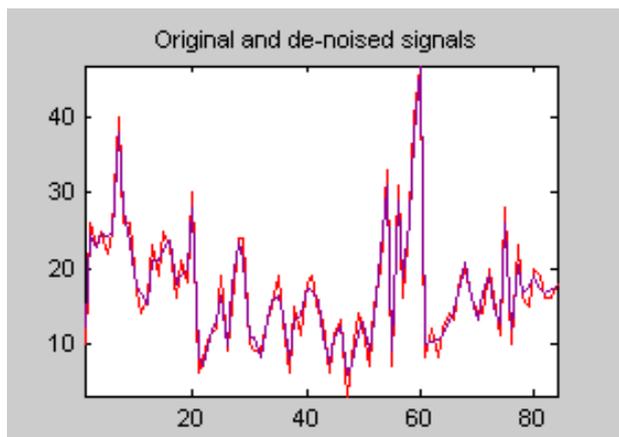


Figura 29: Comparativo entre a série original e a série reconstruída (*wavelet*) sem ruído

Como se pode observar, as características da série original foram preservadas, de modo que a semelhança de comportamento é visível entre as séries (original e reconstruída). Outra maneira de analisar e comparar as séries é através de um gráfico de coeficientes. A Figura 30 a seguir ilustra este gráfico típico, onde se observa no eixo horizontal os deslocamentos de tempo (conforme o período da série analisada) e no eixo vertical a escala e magnitude dos coeficientes (da série original e decomposta). A representação destes coeficientes em escalas de cores diferentes evidencia que os eventos com maior amplitude (localizados próximo à observação 60) ocorrem aproximadamente nos mesmos instantes (tanto para a série original quanto na série reconstruída). Este é um indício que comprova que as características do comportamento da série original foram preservadas, uma vez que a ocorrência dos eventos mais significantes da série original foram reincidentes na série reconstruída e, portanto, a adoção desta nova série é apropriada para o propósito da nova análise.

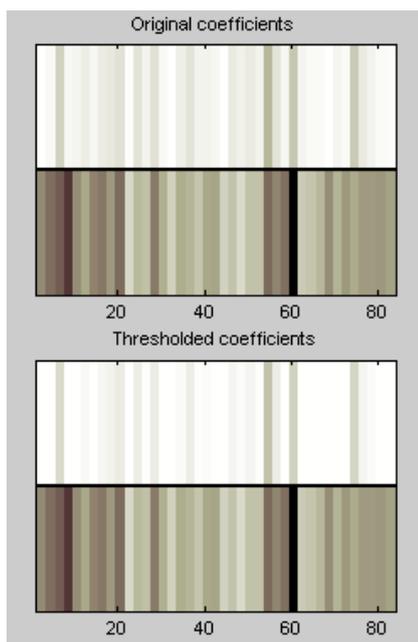


Figura 30: Comparativo de coeficientes (série original x série reconstruída) – usando cores para representar a magnitude dos coeficientes

4.8 Estatística Descritiva da Série Temporal *Wavelet*

De maneira análoga à descrita na seção 4.3, foi feita novamente uma investigação acerca dos parâmetros e comportamento estatístico dos dados da série obtida a partir da transformada *wavelet*. Lembrando que esta etapa é de suma importância, pois a partir dela são antecipadas algumas conclusões pertinentes à aplicação correta dos métodos de previsão que foram propostos.

O gráfico da série temporal *wavelet* obtida a partir da transformada é apresentado na Figura 31 a seguir.

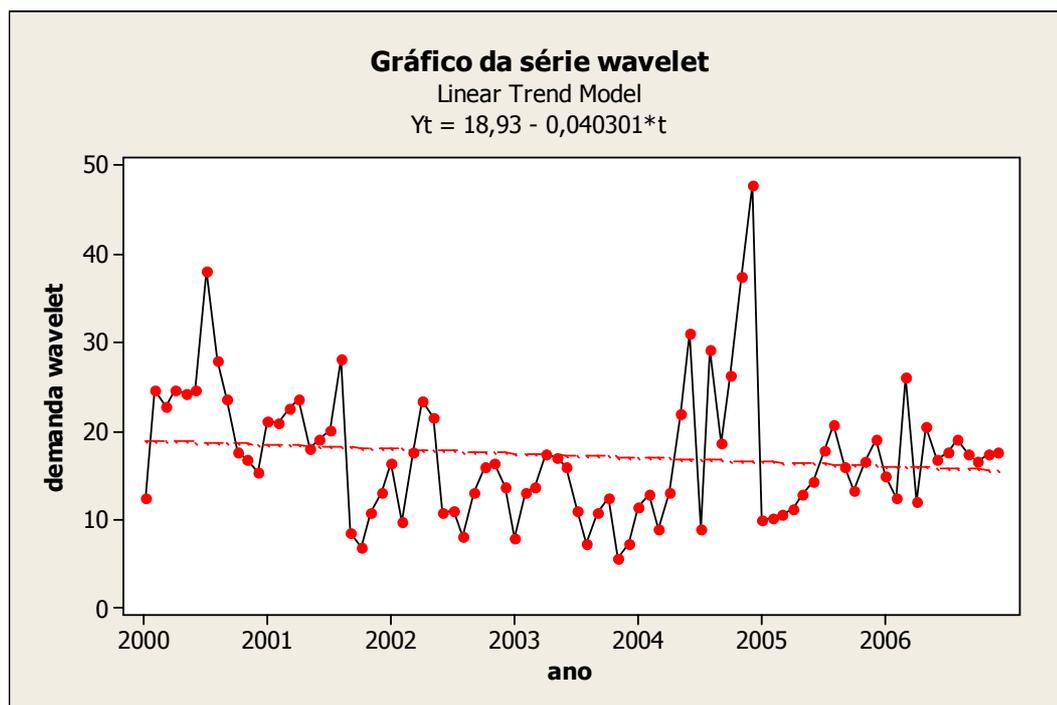


Figura 31: Comportamento da série *wavelet*

Pode-se notar no gráfico que ainda existe uma breve tendência negativa. Para verificar o nível de estacionariedade, aplicou-se novamente o teste de raízes unitárias de Dickey-Fuller. A estatística encontrada para este teste (-5,644) e seus respectivos valores de referência (-4,072 para um nível de significância de 1% e -3,464 para 5%) indicam que a estacionariedade poderia ser aceita, porém o processo é dito fracamente estacionário, pois não foi significativo o valor encontrado para a estatístico. Logo, julgou-se conveniente diferenciar a série para que o processo se tornasse fortemente estacionário. O novo valor encontrado para a estatística (-12,6496) comprovou então que para a condição de estacionariedade ser aceita foi melhor diferenciar a série. Com relação às componentes cíclica e sazonal, ambos não estão presentes na série, pois não há nenhuma característica ou padrão evidente que ressalte estas propriedades. Não obstante, a ocorrência de algumas fortes flutuações impede que a variação dos dados em torno do valor médio ocorra de maneira igual, indicando que a adoção de um modelo com componentes multiplicativos deva ser aceito para estimativa de um modelo de suavização exponencial.

O comportamento descritivo da série *wavelet* reconstruída obtido via *software* Minitab[®] é apresentado na Figura 32.

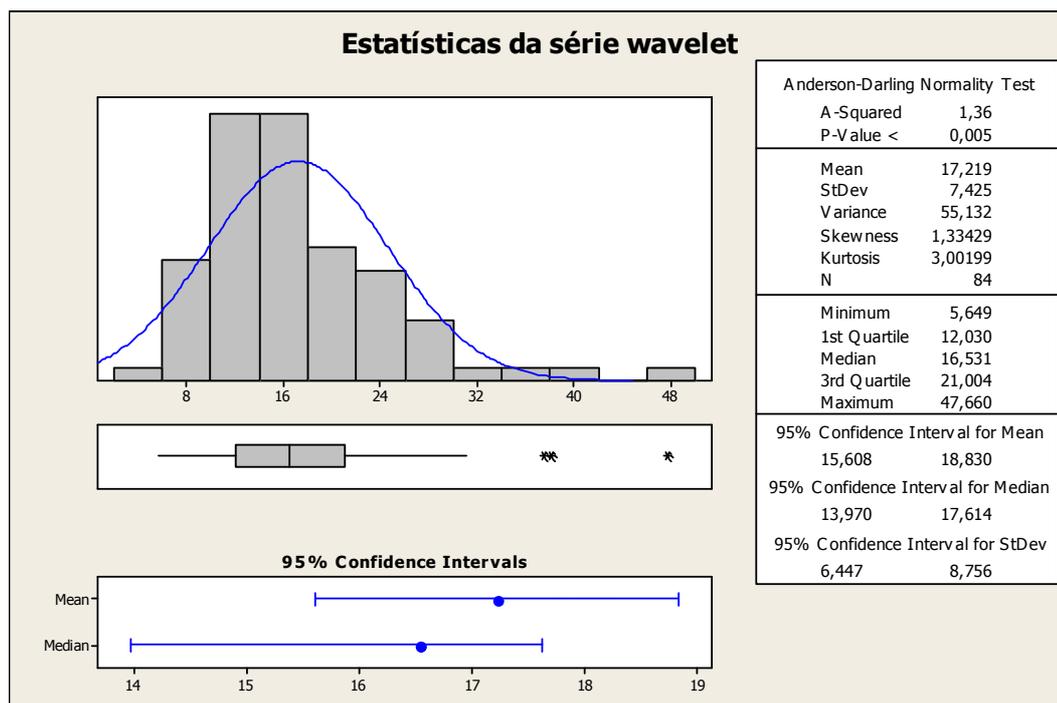


Figura 32: Estatística descritiva dos dados da série *wavelet*

Com relação às estatísticas encontradas, verifica-se que a série reconstruída também não apresenta uma distribuição normal dos dados. Esta afirmação é corroborada através do teste de Normalidade de Anderson-Darling (p -valor $< 0,05$), que é também ratificada pela assimetria positiva (1,33429) e pela curtose (3,00199). Como a normalidade é uma característica desejável quando se trata de análise de séries temporais, a questão de diferenciação da série é viável para que não ocorra nenhuma controvérsia que dificulte ou torne imprópria a aplicação do modelo ARIMA.

As demais estatísticas que não foram discutidas são apresentadas no quadro que acompanha a Figura 32.

Com relação aos dados médios, a Figura 33 mostra que para a série reconstruída prevalece o padrão de comportamento verificado no gráfico de valores médios para a série original, o que implica dizer que a essência do comportamento da série original foi mantida.

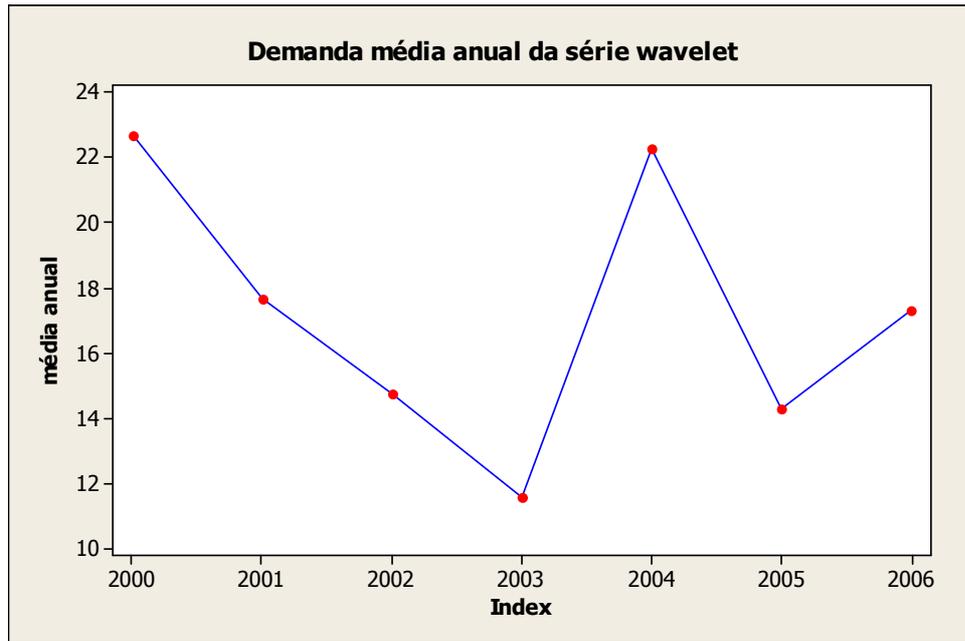


Figura 33: Demanda média anual da série *wavelet*

Por último analisou-se o correlograma da série reconstruída, conforme ilustra a Figura 34. O comportamento senoidal ao longo das defasagens de toda a série é um sinal característico de um processo auto-regressivo.

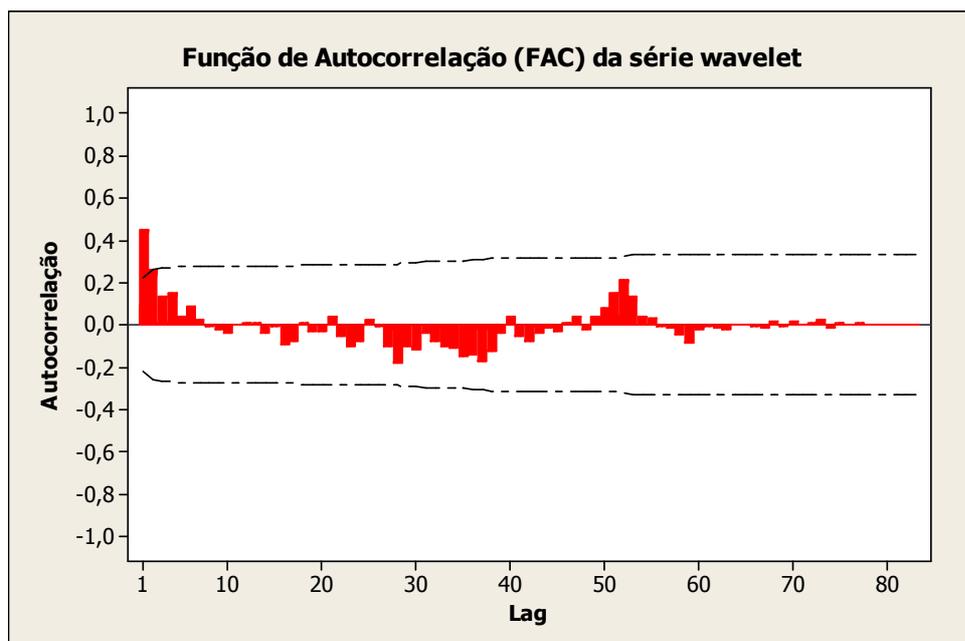


Figura 34: Correlograma da série *wavelet*

4.9 Aplicação dos Métodos de Suavização Exponencial na Série Reconstruída

De maneira análoga à seção 4.4 foram testadas novamente as três abordagens para o método de suavização: suavização exponencial simples, suavização exponencial linear de Holt e o método de Holt-Winter. Os três modelos foram estimados no *software* Minitab® com base na série temporal reconstruída. Os valores previstos para os modelos de suavização exponencial simples e linear de Holt estão disponíveis no Apêndice K deste trabalho.

Para estimar o modelo de suavização exponencial de Holt-Winter com componentes multiplicativos (conforme já havia sido elucidado na análise descritiva da série reconstruída) foi necessário antes determinar os valores das constantes de suavização através do programa desenvolvido em Visual Basic do Microsoft Excel®.

Os valores otimizados que foram encontrados para as constantes de suavização A , C e D foram 0,51, 0 e 0, respectivamente. Para este modelo a menor soma de erros calculado foi 3.544,21.

Uma vez definido o modelo de Holt-Winter, este foi então estimado no *software* Minitab®. Os valores previstos que foram obtidos encontram-se no Apêndice K.

Posteriormente foram comparados os valores dos erros (MAPE e MSE) e do coeficiente U de Theil obtidos para cada um dos modelos de suavização. A Tabela 4 a seguir sumariza tais valores.

Tabela 4: Comparativo dos métodos de suavização exponencial da série reconstruída

	COMPARATIVO U de Theil x MSE x MAPE		
	SIMPLES	HOLT	HW
U de Theil	0,8093	0,8207	0,7392
MSE	59,9466	71,0497	50,3772
MAPE	44,6498	45,7533	41,6737

Da análise dos valores da Tabela 4, verifica-se que o coeficiente U de Theil e os erros (MAPE e MSE) no método de Holt-Winter foram menores quando comparados aos demais. Por este motivo, optou-se novamente pela escolha do método de Holt-Winter para inclusão no modelo combinado proposto neste trabalho. Os valores de previsão já calculados para este modelo foram posteriormente empregados no cálculo da combinação de previsões.

A Figura 35 a seguir ilustra a série reconstruída e a série ajustada para o modelo de suavização exponencial de Holt Winter.

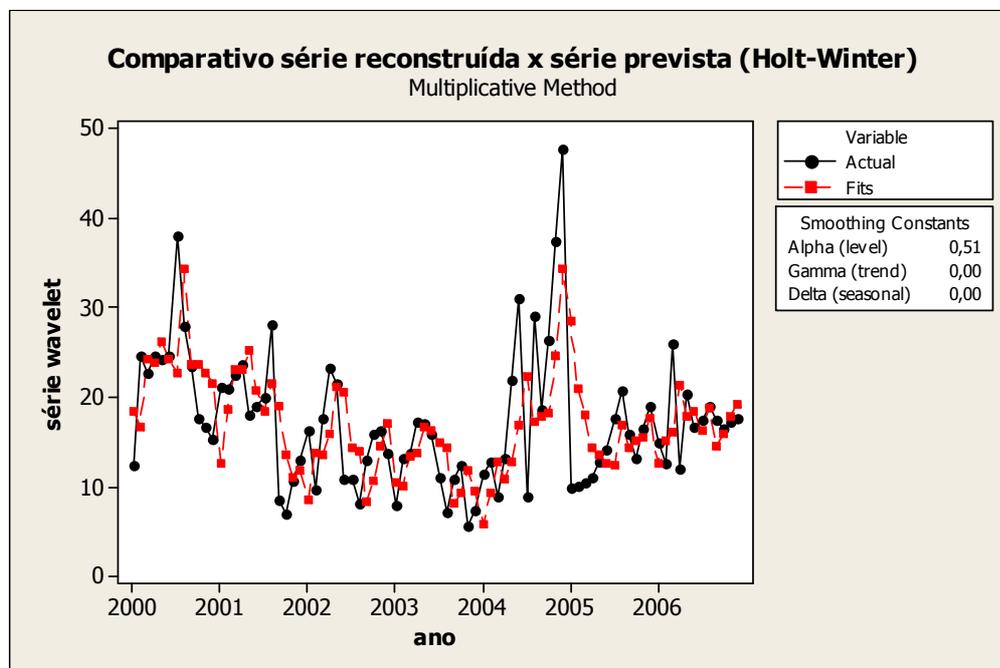


Figura 35: Comparativo de dados reais x previsto (Holt-Winter) da série reconstruída

4.10 Previsão aplicando o Modelo ARIMA na Série Temporal Reconstruída

Para aplicação da metodologia Box-Jenkins, ou modelo ARIMA primeiramente foi identificado o modelo mais apropriado. Para isso, foram de grande valia a análise descritiva feita anteriormente. O próximo passo foi então analisar as funções de autocorrelação (ACF) e autocorrelações parciais (PACF), pois ambas são úteis para ratificar a condição de estacionariedade, bem como do modelo ARIMA mais apropriado.

A Figura 36 apresenta o correlograma da função de autocorrelação da série *wavelet* reconstruída e como se pode verificar o mesmo revela um comportamento senoidal, típico de um processo auto-regressivo, o que implica também que a série é fracamente não estacionária.

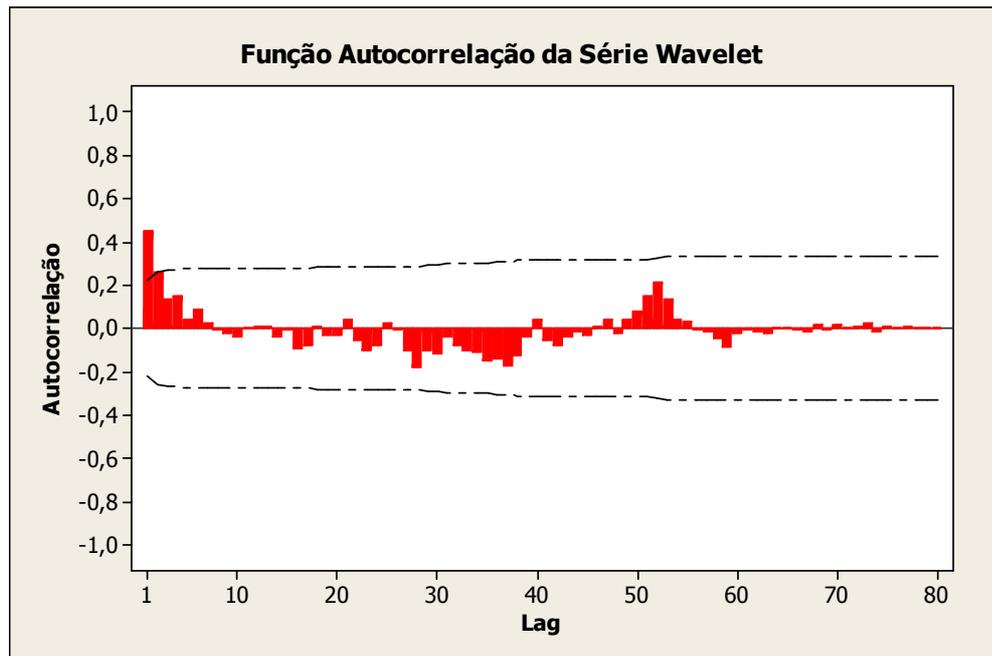


Figura 36: Função de autocorrelação da série reconstruída

Assim, para torná-la estacionária, procedeu-se com a diferenciação. O novo correlograma da série reconstruída diferenciada uma vez é apresentado a seguir, conforme Figura 37.

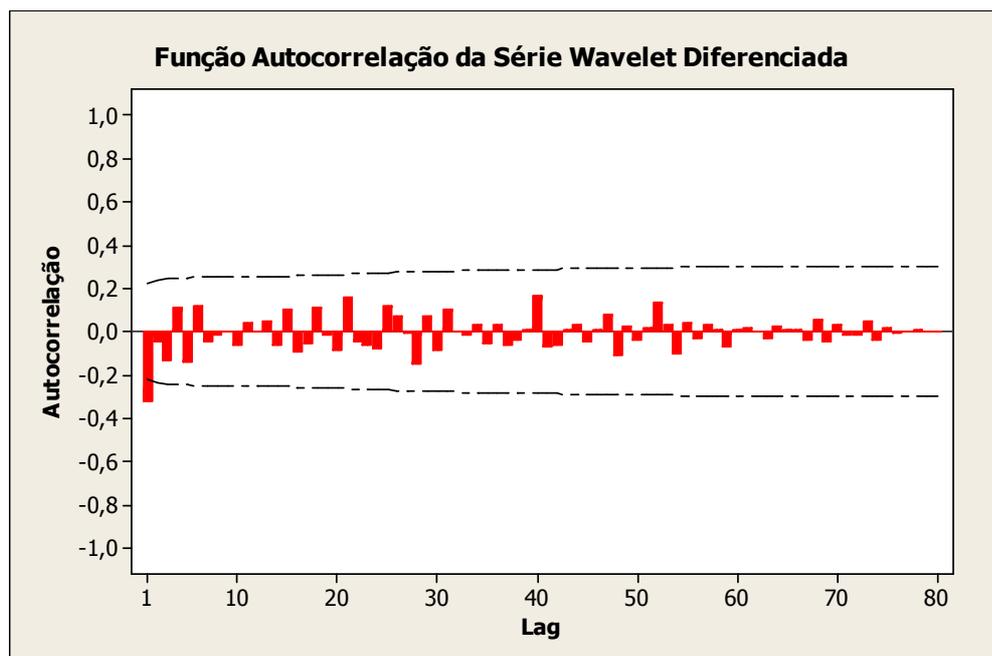


Figura 37: Função de autocorrelação da série reconstruída diferenciada uma vez

Como se pode perceber, agora o comportamento da série é nitidamente aleatório e também decai rapidamente para perto de zero, indicando que a condição de estacionariedade foi atingida. Para corroborar esta afirmação, foi realizado o teste de Dickey-Fuller, onde o valor encontrado para a estatística (-12,6496) comprova que a série realmente tornou-se estacionária. Assim, a determinação da ordem d de integração já está definida e vale 1. A seguir, a Figura 38 apresenta novamente o gráfico da série reconstruída que foi diferenciada.

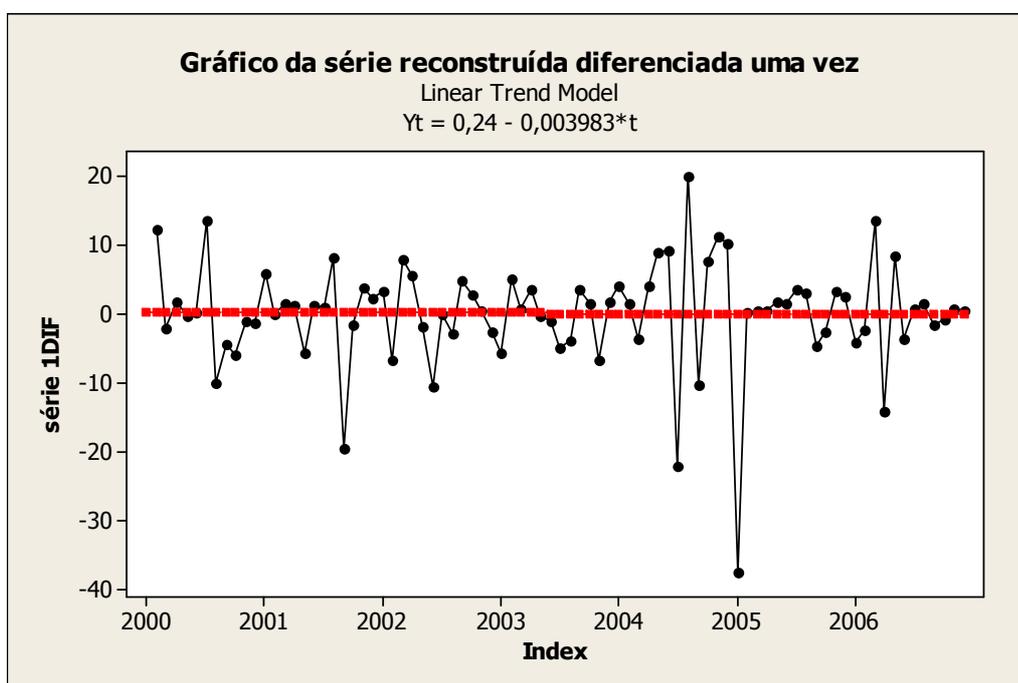


Figura 38: Gráfico da série reconstruída diferenciada uma vez

Do correlograma de função de autocorrelação (ACF) se extrai outra informação importante – a ordem q do modelo ARIMA. Na Figura 37, nota-se que apenas a primeira defasagem é significativa e está fora dos limites de significância estatística fornecido pelo correlograma. Isto implica dizer que a ordem MA (q) mais adequada para este modelo é também 1.

Resta ainda determinar a ordem p . Para tal, procedeu-se à análise da correlograma da função de autocorrelação parcial (PACF) da série reconstruída, porém não diferenciada. A Figura 39 apresenta o gráfico da PACF.

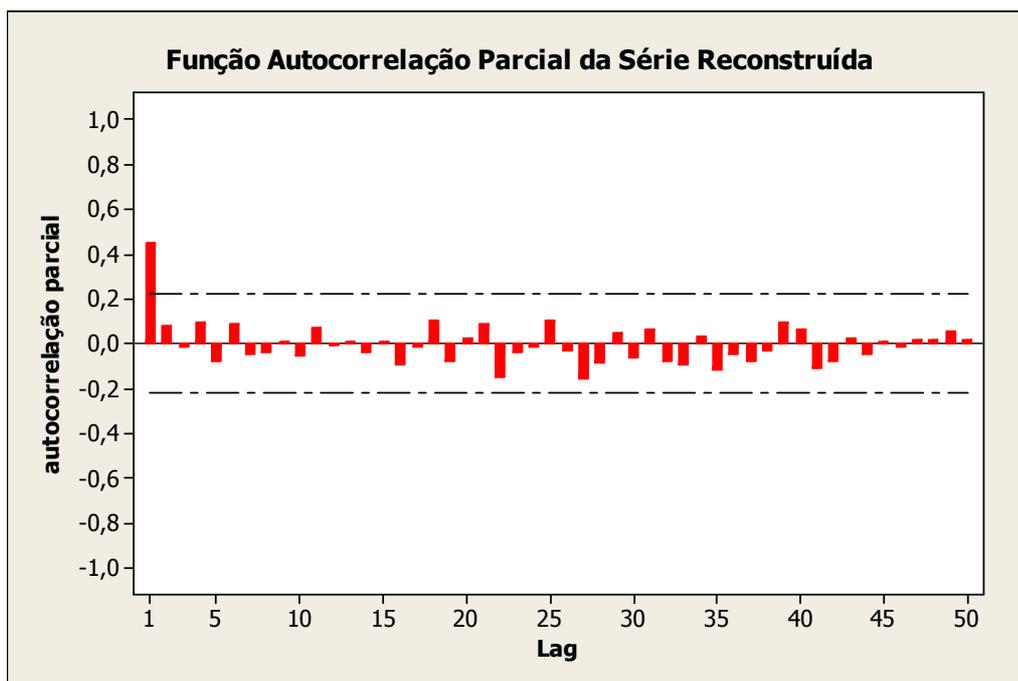


Figura 39: Função de Autocorrelação Parcial da série reconstruída

Percebe-se neste gráfico que ocorre novamente uma queda repentina após o primeira defasagem. Logo, isto implica afirmar que o modelo auto-regressivo a ser adotado é um AR(1), e portanto o modelo que foi identificado é um ARIMA (1,1,1).

Uma vez indicados as ordens do modelo ARIMA, passou-se para a fase seguinte que é a estimativa.

4.10.1 Estimação do Modelo ARIMA

Nesta fase foram estimados os parâmetros do modelo proposto, bem como a variância dos resíduos para este mesmo modelo. Para estimar tais parâmetros foi utilizado como recurso o *software* Minitab[®]. A Figura 40 a seguir apresenta um resumo das estimativas dos parâmetros e os resultados obtidos para a estatística de Box-Pierce (Ljung-Box).

ARIMA Model: Série Reconstruída					
Final Estimates of Parameters					
Type		Coef	SE Coef	T	P
AR	1	0,4456	0,0998	4,46	0,000
MA	1	1,0321	0,0003	3492,08	0,000
Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic					
Lag		12	24	36	48
Chi-Square		4,2	10,7	17,6	26,6
DF		10	22	34	46
P-Value		0,936	0,979	0,991	0,990

Figura 40: Resumo das Estatísticas do modelo ARIMA da série reconstruída

Baseados nos valores apresentados para a estatística t padrão (4,46 e 3492,08) maiores que o valor 2 e também para os p -valores (todos maiores que o nível mínimo de significância 0,05) da estatística de Box-Pierce (Ljung-Box), o modelo identificado então se provou adequado.

A representação literal para o modelo que foi encontrado é:

$$Y_t = 0,4456Y_{t-1} + e_t + 0,321e_{t-1} \quad (4.3)$$

Sendo o modelo estimado adequado, a última etapa que realmente vai determinar se o modelo atende plenamente todas as condições de regularidade impostas pela metodologia de Box-Jenkins é a verificação.

4.10.2 Verificação do Modelo ARIMA

Nesta última etapa que precede a previsão, verificou-se se o modelo estimado estava adequadamente especificado. Para isso, foram analisados os correlogramas de autocorrelação e autocorrelação parcial dos resíduos. As Figuras 41 e 42 ilustram estes gráficos.

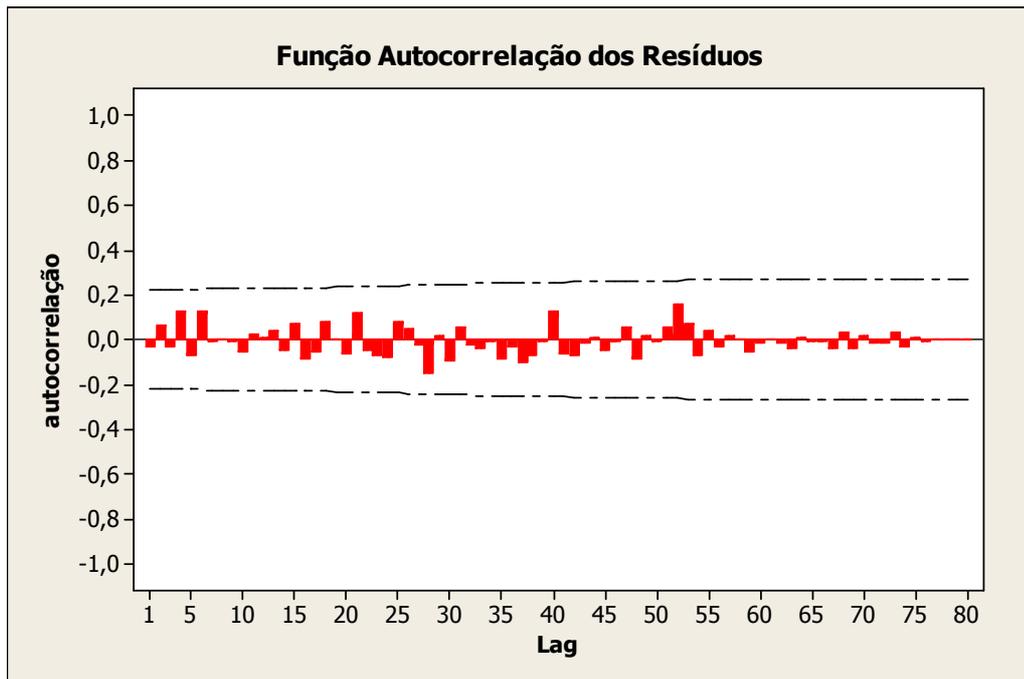


Figura 41: Correlograma da ACF para os resíduos do modelo ARIMA (1, 1, 1)

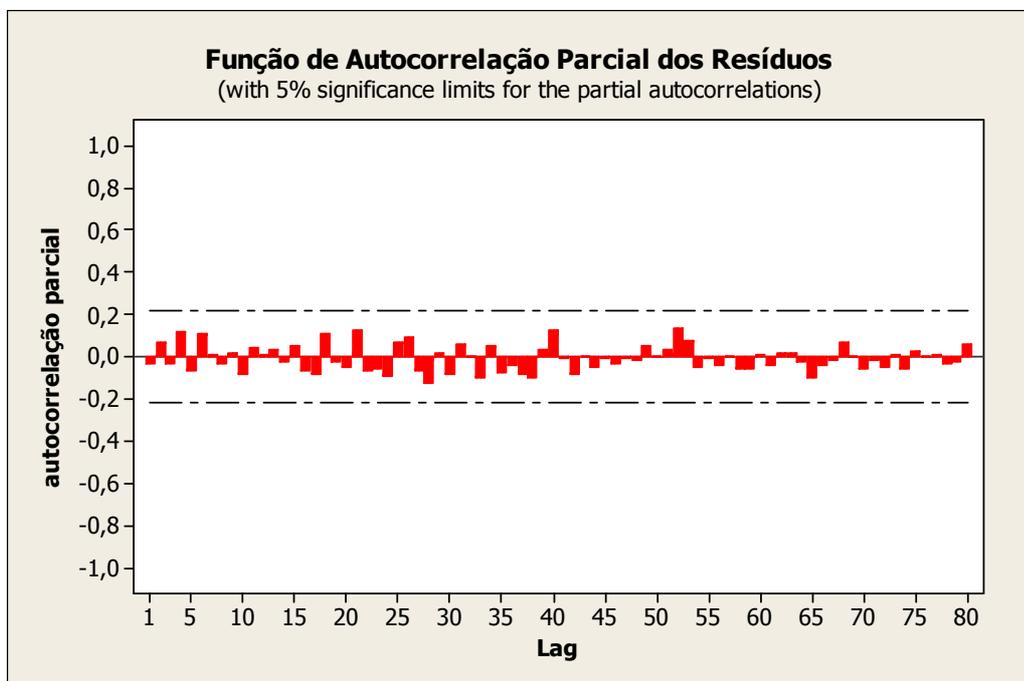


Figura 42: Correlograma da PACF para os resíduos do modelo ARIMA (1, 1, 1)

Da análise dos correlogramas da ACF e PACF, verifica-se que o comportamento de ambos revela que os resíduos apresentam um comportamento efetivamente aleatório, comportando-se portanto como ruído branco. Logo, pode-se afirmar que a partir desta constatação do comportamento dos resíduos, o modelo ARIMA (1, 1, 1) foi julgado convenientemente adequado.

4.10.3 Avaliação das Previsões

Para o modelo ARIMA (1, 1, 1), as previsões que foram obtidas conduziram aos seguintes resultados: para o MAPE o valor encontrado foi 41,7982, para o MSE 53,5648 e para o U de Theil de 0,7353. As previsões obtidas para este modelo estão no Apêndice K. A seguir, as previsões obtidas para modelo de suavização exponencial e para o modelo ARIMA são avaliadas conjuntamente para determinar a nova combinação de previsões originadas a partir da análise da série reconstruída.

4.11 Combinação das Previsões Individuais da Série Reconstruída

A combinação das previsões dos modelos de suavização exponencial e modelo ARIMA foi realizada de maneira a otimizar a previsão resultante. Para esta finalidade, a ponderação para cada método foi calculada através do programa desenvolvido em Visual Basic do Microsoft Excel®. A partir da minimização da soma dos quadrados dos erros da previsão foram então encontrados os valores para cada peso através da simulação do programa. Deste processamento foram obtidos os seguintes pesos: 0,5460 para o método de suavização exponencial e 0,4540 para o modelo ARIMA. Assim, o modelo combinado encontrado apresentou a seguinte equação:

$$Previsão_{s.original}^{Comb} = 0,5460.SuavizacaoExp + 0,4540.ARIMA \quad (4.4)$$

Comparando-se os pesos obtidos para a combinação, verificou-se novamente que o maior peso foi atribuído ao método de Holt-Winter (suavização exponencial), bem como o menor peso ao modelo ARIMA. Isto comprova novamente o desempenho mais preciso do método de Holt-Winter em relação ao ARIMA, quando comparados individualmente.

As previsões obtidas para este modelo combinado estão disponíveis no Apêndice L. Da avaliação feita encontraram-se os seguintes resultados: um MAPE de 40,5473, um MSE de 48,8917 e um U de Theil de 0,7059. Esta análise evidencia que os resultados encontrados para o MAPE, MSE e para o U de Theil foram menores que os encontrados para cada modelo individualmente. A Tabela 5 a seguir resume os resultados obtidos no segundo cenário considerado, o qual avaliou as previsões baseada em uma série temporal reconstruída via decomposição *wavelet* a partir de uma série original.

Tabela 5: Comparativo das previsões feitas para a série reconstruída (*wavelet*)

Resultados - Série Reconstruída			
método	U de Theil	MAPE	MSE
Holt-Winter	0,7392	41,6737	50,3772
ARIMA	0,7353	41,7982	53,5648
Combinação	0,7059	40,5473	48,8917

4.12 Avaliação dos Resultados das Previsões Combinadas

Uma comparação entre as previsões combinadas, obtidas a partir da análise de uma série temporal em seu estado original e outra em seu estado reconstruído, obtido a partir de um processo de decomposição aliado a uma supressão de ruído (*denoising*), evidencia que houve uma melhora em termos de minimização dos erros. A conveniência quanto à aplicação deste processo também se provou adequado em função também da redução ocorrida no coeficiente de desigualdade U de Theil – quando comparados. A Tabela 6 a seguir apresenta os valores utilizados neste comparativo.

Tabela 6: Comparativo das previsões: Série Original x Série Reconstruída

COMPARATIVO DE DESEMPENHO DAS PREVISÕES (Série Original x Série Wavelet)						
método	U de Theil		MAPE		MSE	
	original	wavelet	original	wavelet	original	wavelet
Holt-Winter	0,7736	0,7392	42,2980	41,6737	53,5156	50,3772
ARIMA	0,7915	0,7353	44,2433	41,7982	59,0187	53,5648
Combinação	0,7507	0,7059	41,7380	40,5473	52,6188	48,8917

Em termos percentuais, a previsão combinada obtida a partir da análise da série reconstruída foi 7,08% melhor que o resultado apresentado para a mesma combinação dos modelos de previsão da série em seu estado original. Esta mesma avaliação foi feita comparando-se as previsões obtidas para cada método individualmente, e para estas, a minimização encontrada para o erro ficou em torno de 7,55%.

A partir destes resultados, a avaliação que se faz é que foi possível melhorar a precisão de uma previsão através de um tratamento inicial a série de dados que se está analisando. Logo, a resposta encontrada para a hipótese que foi testada neste projeto de pesquisa foi satisfatória.

Por último, é importante lembrar ainda que não só a metodologia da análise de *wavelet* foi eficaz para tratar inicialmente os dados, como também o conceito de combinação provou-se mais uma vez viável. Segundo ZOU (2004), isto se deve ao fato de que “combinar tende a reduzir o erro de predição”.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 Conclusões

Neste projeto de pesquisa foi investigada a possibilidade de se melhorar a precisão de uma previsão através da aplicação da transformada *wavelet*, que nada mais é que uma técnica que permite decompor um sinal (ou série temporal) utilizando-se para este fim uma determinada função base (característica da família *wavelet*). Porém, para que o sinal mantivesse as características originais, esta função base deveria ser morfológicamente semelhante ao sinal que se estava analisando. Adicionalmente à transformada, foi aplicado ainda a técnica *denoising*, na tentativa de melhorar a qualidade do sinal através da remoção do ruído presente na série. Assim, após todo este processo foi então escolhida a família de Daubechies para representar a série temporal. A nova série, denominada série reconstruída – em função da união entre a série aproximada e detalhada provenientes da decomposição, foi então a nova série temporal utilizada para análise.

A partir da série original e da série reconstruída, foram obtidas as previsões individuais (via método de suavização exponencial e modelo ARIMA), as quais foram utilizadas para obtenção das combinações de previsões. Os resultados foram então comparados e mensurados. Através das medidas de erros obtidas com série reconstruída verificou-se então que o desempenho melhorou. Logo, isto mostrou que a hipótese que foi considerada para desenvolver este trabalho foi aceita, ou seja, verificou-se que para este estudo de caso, a transformada *wavelet* foi uma ferramenta matemática apropriada para o aprimoramento da técnica de combinar previsões. A viabilidade do emprego de *wavelets* comprovou ainda que a utilização desta metodologia é consistente e acerca dos demais trabalhos realizados, este se tornou mais um caso satisfatório de aplicações envolvendo este tipo de análise.

Outra observação conclusiva que se faz a respeito do trabalho desenvolvido, está relacionada ao cumprimento da metodologia proposta, na qual foi envolvida uma infinidade de conceitos (todos abordados na fundamentação teórica deste trabalho), que vão desde uma simples análise estatística descritiva até a escolha e apropriação dos métodos de previsão. Todos os tópicos teóricos foram úteis no sentido de fornecer subsídios técnicos para o perfeito

andamento e lógica propostos neste trabalho. Isto prova também que quando se deseja examinar detalhadamente um processo de previsão em si, deve-se sim considerar todo o rigor exigido pela análise de séries temporais.

A proposta deste projeto cumpriu o seu papel, de modo a não se restringir apenas aos resultados obtidos da combinação de previsões, pois estes são apenas pontos simples estimados – o que não é suficiente para prever o comportamento do modelo sob análise ou em questão. Foi preciso ir mais além, encontrando um diferencial que possibilitasse aprimorar este conceito através de um tratamento inicial aos dados, visando com isso poder capturar a essência do comportamento da série temporal que se está analisando. E isso foi possível, graças à teoria de *wavelets* abordada neste trabalho.

5.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

A realização deste trabalho comprovou a eficiência no uso da abordagem de *wavelet* aplicada ao conceito de combinação de previsões. Contudo, é importante salientar que somente dois métodos quantitativos foram envolvidos na combinação de previsões que foi realizada. Existem outros métodos não só quantitativos, como também qualitativos, como aqui foram apontados na fundamentação teórica deste trabalho, e que podem sim ser investigados em trabalhos futuros, seja envolvendo o conceito de combinação ou apenas comparando individualmente as técnicas. Seria interessante utilizar por exemplo os métodos causais, ou ainda uma abordagem de métodos qualitativos e assim também avaliar o impacto da análise de *wavelets* nestes.

Outro ponto interessante que poderia ser considerado no futuro é a investigação de novas fontes de aplicação para a tratativa de *wavelets*. Neste trabalho, a série temporal que foi utilizada foi uma série de vendas, logo para esta área a técnica provou-se viável. Entendendo assim que qualquer sucessão cronológica de dados caracteriza uma série temporal, tem-se então um universo de séries e sinais possíveis para aplicações envolvendo as situações distintas, mas que tem em comum o objetivo de analisá-las.

Portanto, são claras então as “lacunas” que ficam como oportunidade de novas pesquisas, pois através dela outros trabalhos poderão ser desenvolvidos aproveitando-se da comprovação aqui realizada neste trabalho, de que a abordagem *wavelet* em conjunto com a

utilização de qualquer modelo ou metodologia pode sim melhorar o resultado esperado de uma previsão.

Por último é interessante comentar ainda que a análise de *wavelets* não se restringe apenas à análise de sinais univariados, nem apenas a técnica de supressão de ruído aqui apresentada. Existe também os casos para duas dimensões (utilizado principalmente para tratamento de imagens), e outras técnicas passíveis de serem utilizadas, tais como o reconhecimento de padrões, a codificação e compressão de dados etc, todos baseados num princípio da análise multirresolução, a qual busca melhorar a qualidade do sinal que se está analisando. Logo, seria então interessante verificar outras situações nas quais esta abordagem de *wavelets* poderia ser introduzida e aplicada, no intuito de assim aumentar a variedade de aplicações envolvendo *wavelets*.

6 REFERÊNCIAS

ANNEN, K. **Unit root test (adf-test) add-in**. Disponível em: www.web-reg.de Acesso em: 24/03/2008.

ARGOUD, F.I.M.; DE AZEVEDO, F.M.; NETO, J.M. Estudo comparativo entre funções *wavelet* e suas diferentes aplicabilidades em reconhecimento de padrões epileptogênicos em eletroencefalograma. **Revista Brasileira de Engenharia Biomédica**, v.20, n.2-3, p. 49-59, 2004.

ARIÑO, M.A. Time series forecasts via ondaletas: an application to car sales in the Spanish market. **Discussion Paper**, 95-30, ISDS, Duke University, 1995.

ARMSTRONG, J.S. **Principles of Forecasting: A Handbook for Researchers and Practitioners**. Kluwer Academic Publishers, 2001.

ARMSTRONG, J.S. **Principles of Forecasting: A Handbook for Researchers and Practitioners**. Massachusetts: Eletronic Services <http://www.wkap.nl>, 2004.

BATES, J. M.; GRANGER, C. W. J. The Combining of Forecasts. **Operational Research Quarterly**, v. 20, n. 4, 1969, p. 451-468.

BORGES, F. B. **Codificadores de Voz a Baixas Taxas Operando em Ambientes Ruidosos e Redes IP**. Rio de Janeiro, 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ).

BOWERMAN, B. L.; O'CONNELL, R. T. **Time Series Forecasting: Unified Concepts and Computer Implementation**. 2ed. Boston: Duxbury Press, 1987, p. 272.

CARVALHO, L. M. de **Análise de Séries Temporais**. Disponível em : http://www.icess.ucsb.edu/gem/modulo_1.htm Acesso em: 12/09/2007.

CLEMEN, R.T. Combining Forecasts: A Review and Annotated Bibliography. **International Journal of Forecasting**, v.5, p. 559-583. 1989.

DIAS, M.H.C. **Estimação das respostas do canal real de propagação rádio-móvel nos domínios espacial e temporal: Análise da supressão de ruído por decomposição wavelet como técnica complementar de processamento**. Rio de Janeiro, 2003. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ).

DICKEY, D.A.; FULLER, W.A. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. **Journal of the American Statistical Association**, 74 (366), p. 427-431, 1979.

DIEBOLD, F.X. Elements of Forecasting. **South-Western College Publishing**. Cincinnati, p.349-352, 1998.

DONOHO, D.L., JOHNSTONE, I.M. Ideal Spatial Adaptation via *Wavelet* Shrinkage. **Technical Report**, Stanford University, (1992).

DONOHO, D.L., JOHNSTONE, I.M. Adapting to Unknown Smoothness via *Wavelet* Shrinkage. **Technical Report**, Stanford University, 1993.

DONOHO, D.L. De-noising by soft-thresholding. **IEEE Transactions on Information Theory**, v.41, pp. 613-627, 1995.

DONOHO, D.L., JOHNSTONE, I.M. Ideal *Denoising* in an orthonormal basis chosen from a library of bases. **Technical Report**, Stanford University, (1994).

DONOHO, D.L., JOHNSTONE, I.M., KERKYACHARIAN, G., PICARD, D. Universal near Minimality of *Wavelet* Shrinkage. **Technical Report**, Stanford University, 1995.

EVANS, M.K. **Practical Business Forecasting**. Oxford: Blackwell Publishers, 2003.

ENDERS, W. **Applied econometric time series**. 2ed. John Wiley & Sons, 2003.

FAVA, V.L. Análise de Séries de Tempo; metodologia de Box-Jenkins para modelos univariados; testes de raízes unitárias e co-integração. In: VASCONCELOS, Marco Antônio S., ALVES, Denisard (editores). **Manual de econometria**: equipe de professores da USP. Vários autores. São Paulo: Atlas, 2000. Cap. 9, p.199-204, Cap. 10, p.205-230 e Cap. 12, p.245-252.

FERREIRA, L.M. **Gestão da cadeia de abastecimento: Modelos de Previsão**. Disponível em : www2.egi.ua.pt/cursos/files/GCA/GCA_Mod_Prev.pdf Acesso em: 30/07/2007.

FISCHER, I.; HARVEY, N. Combining forecasts: What information do judges need to outperform the simple average? **International Journal of Forecasting**, v.15, p.227-246. 1999.

FUGIVARA, S. et al. Aplicação da transformada de *Wavelets* para compressão de dados de telemetria. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, XXVIII., 2005, São Paulo. Livro de Resumos. São Paulo: SBMAC, 2005.

GONÇALVES, H. de A. **Manual de Monografia, Dissertação e Tese**. São Paulo: Avercamp, 2004.

GOODWIN, P. Integration Management Judgement and Statistical Methods to Improve Short-term Forecasts. Omega. **The International Journal of Management Science**, v. 30, 2002, p. 127-135.

GRANGER, C.W.J.; RAMANATHAN, R. Improved Methods of Forecasting. **Journal of Forecasting**, v.3, p.197-204, 1984.

GRANGER, C.W.J; Newbold, P. **Forecasting Economic Time Series**. 2ed. New York: Academic Press, 1986.

HOMSY, G. V.; PORTUGAL, M. S.; ARAÚJO, J. P. Ondas e previsões de séries de tempo: uma análise empírica. **XXII Encontro Brasileiro de Econometria**. Campinas, 2000.

JOHNSTONE, I.M., SILVERMAN, B. *Wavelet* Threshold Estimators for data with Correlated Noise. **Technical Report**, Stanford University, 1996.

KLEIN, J.L. **Statistical visions in time: a history of time series analysis, 1662-1938**. New York: Cambridge University Press, 1997.

LIBBY, R., & BLASHFIELD, R. K. Performance of a composite as a function on the number of judges. **Organizational Behavior and Human Performance**, v.21, p.121-129, 1978.

LIMA, F.G. **Um método de análise e previsões de sucessões cronológicas unidimensionais lineares e não-lineares**. São Paulo, 2004. 228f. Teses (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Administração, Universidade de São Paulo (USP).

MAKRIDAKIS, S.; WHEELWRIGHT, S.C.; HYNDMAN, R.J. **Forecasting. Methods and Applications**. Third Edition. New York: John Wiley & Sons, 1998.

MALLAT, S. G. **A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation**. IEEE Pattern Analysis and machine Intelligence, v.11, (7), pp. 674-693, 1989.

MALLAT, S. **Une Exploration des Signaux en Ondelettes**, Les Editions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2000.

MARQUES, E. B. **Combinação de Previsões de Índices de Preços**. Rio de Janeiro, 2005. Dissertação (Mestrado em Finanças e Economia Empresarial) – Escola de Pós-Graduação em Economia, Fundação Getúlio Vargas (FGV).

MENEZES, L.M. de, BUNN, D.W. AND TAYLOR, J.W. Review of guidelines for the use of combined forecasts. **European Journal of Operational Research**, v.120, p. 190-204. 2000.

MORETTIN, P.A.; TOLOI, C.M. **Análise de Séries Temporais**. 2ed .São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

NEWBOLD, P.; GRANGER, C.W.J. Experience with Forecasting Univariate Time Series and Combination of Forecasts. **Journal Royal Statistical Society**, series A, v.137, n.2, p.131-165, 1974.

NEWBOLD, P., **Statistics for Business & Economics**, Prentice Hall, 4th edition, 1995.

OLIVEIRA, H.M.de **Análise de Sinais para Engenheiros: uma abordagem via wavelets**. Rio de Janeiro: Brasport, 2007.

PINHEIRO, A.F.; BARRETO, F.A.F.D. Previsão Orçamentária do FGTS com o Uso de Modelos de Séries Temporais. In: ENCONTRO REGIONAL DE ECONOMIA, IX, 2004, Fortaleza. **Anais do IX Encontro Regional de Economia**, Fortaleza: ETENE, 2004.

RODRIGUES, G.H.N. **Reflexões sobre as Previsões do Futuro**. Disponível em: http://www.guia.heu.nom.br/modelo_cientifico.htm Acesso em: 13/09/2007.

SAMOHYL, Robert. **Workshop Previsão de Vendas: por métodos quantitativos**. Florianópolis: Operational Solutions (NNQ-UFSC), 2007.

SCHIFF, S.J.; ALDOUBRI, A.; UNSER, M.; SATAO, S. Fast *wavelet* transformation of EEG. **Electroencephalography and Clinical Neurophysiology**, v.91, p.442-455, 1994.

SHENG, Y. *Wavelet* Transform, **The Transforms and Applications Handbook**. A.D. Poularikas, 1ª ed, Boca Ranton: CRC Press an IEEE Press, pp. 747-827, 1996.

SOUZA, G.P. **Previsão do Consumo Industrial de Energia Elétrica no Estado de Santa Catarina: uma aplicação da combinação de previsões entre modelos univariados e de regressão dinâmica**. Florianópolis, 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

TAK, B. **A new method for forecasting stock prices using artificial neural network and ondaleta theory**. 1995.107 f. Tese (Doutorado em Economia). Universidade de Pensilvânia, Estados Unidos, 1995.

TAYLOR, J.W.; BUNN, D.W. Combining Forecast Quantiles Using Quantile Regression: Investigating the Derived Weights, Estimator Bias and Imposing Constraints. **Journal of Applied Statistics**, v.25, p.193-206, 1998.

WALLACE, T.F.; STAHL, R.A. **Previsão de vendas: uma nova abordagem**. São Paulo: IMAM, 2003.

WANKE, P.; JULIANELLI, L.. **Previsão de vendas: processos organizacionais & métodos quantitativos e qualitativos**. São Paulo: Atlas, 2006.

WERNER, LIANE; RIBEIRO, J.L.D. Modelo composto para prever demanda através da integração de previsões. **Produção**, v.16, n.3, p. 493-509. 2006.

WINKLER, R.L.; MAKRIDAKIS, S. The Combination of Forecasts. **Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General)**, v.146 (2), p. 150-157, 1983.

WONG, H., IP. W., XIE, Z., LUI, X.. Modelling and forecasting by ondaletas, and the application to exchange rates. **Journal of Applied Statistics**, v.30, n.5, p. 537-553, 2003.

ZOU, H.; YANG, Y. Combining time series models for forecasting. **International Journal of Forecasting**, v.20, p.69-84, 2004.

7 APÊNDICES

APÊNDICE A – Valores previstos dos Métodos de Suavização Exponencial (série original)

PREVISÃO INDIVIDUAL DA SÉRIE ORIGINAL – MÉTODO SUAVIZAÇÃO EXPONENCIAL SIMPLES							
ano	mês	realizado	previsao	erro ²	$a = (Pt+1-Rt+1)/Rt)^2$	$b = (Rt+1-Rt)/Rt)^2$	erro percentual absoluto
	jan/00	10					
	fev/00	26	19,4956	42,3074	0,4231	2,5600	0,2502
	mar/00	23	20,7004	5,2881	0,0078	0,0133	0,1000
	abr/00	25	21,1264	15,0050	0,0284	0,0076	0,1549
	mai/00	22	21,8439	0,0244	0,0000	0,0144	0,0071
2000	jun/00	25	21,8728	9,7793	0,0202	0,0186	0,1251
	jul/00	40	22,4521	307,9300	0,4927	0,3600	0,4387
	ago/00	26	25,7025	0,0885	0,0001	0,1225	0,0114
	set/00	26	25,7576	0,0588	0,0001	0,0000	0,0093
	out/00	17	25,8025	77,4842	0,1146	0,1198	0,5178
	nov/00	14	24,1720	103,4696	0,3580	0,0311	0,7266
	dez/00	16	22,2878	39,5367	0,2017	0,0204	0,3930
	jan/01	23	21,1231	3,5227	0,0138	0,1914	0,0816
	fev/01	19	21,4708	6,1047	0,0115	0,0302	0,1300
	mar/01	25	21,0131	15,8953	0,0440	0,0997	0,1595
	abr/01	23	21,7516	1,5585	0,0025	0,0064	0,0543
	mai/01	16	21,9828	35,7945	0,0677	0,0926	0,3739
2001	jun/01	21	20,8746	0,0157	0,0001	0,0977	0,0060
	jul/01	18	20,8979	8,3976	0,0190	0,0204	0,1610
	ago/01	30	20,3611	92,9088	0,2868	0,4444	0,3213
	set/01	6	22,1465	260,7100	0,2897	0,6400	2,6911
	out/01	8	19,1557	124,4488	3,4569	0,1111	1,3945
	nov/01	11	17,0893	37,0793	0,5794	0,1406	0,5536
	dez/01	12	15,9613	15,6922	0,1297	0,0083	0,3301
	jan/02	19	15,2276	14,2312	0,0988	0,3403	0,1985
	fev/02	9	15,9264	47,9743	0,1329	0,2770	0,7696
	mar/02	15	14,6434	0,1272	0,0016	0,4444	0,0238
	abr/02	24	14,7094	86,3147	0,3836	0,3600	0,3871
	mai/02	24	16,4303	57,2997	0,0995	0,0000	0,3154
2002	jun/02	10	17,8325	61,3478	0,1065	0,3403	0,7832
	jul/02	9	16,3817	54,4889	0,5449	0,0100	0,8202
	ago/02	9	15,0143	36,1722	0,4466	0,0000	0,6683
	set/02	13	13,9003	0,8105	0,0100	0,1975	0,0693
	out/02	15	13,7335	1,6040	0,0095	0,0237	0,0844
	nov/02	19	13,9681	25,3198	0,1125	0,0711	0,2648
	dez/02	13	14,9002	3,6107	0,0100	0,0997	0,1462
	jan/03	6	14,5482	73,0719	0,4324	0,2899	1,4247
	fev/03	15	12,9648	4,1420	0,1151	2,2500	0,1357
	mar/03	11	13,3418	5,4840	0,0244	0,0711	0,2129
	abr/03	18	12,9080	25,9283	0,2143	0,4050	0,2829
	mai/03	19	13,8512	26,5100	0,0818	0,0031	0,2710
2003	jun/03	14	14,8049	0,6479	0,0018	0,0693	0,0575
	jul/03	13	14,6558	2,7418	0,0140	0,0051	0,1274
	ago/03	6	14,3491	69,7078	0,4125	0,2899	1,3915
	set/03	11	12,8026	3,2493	0,0903	0,6944	0,1639
	out/03	13	12,4687	0,2823	0,0023	0,0331	0,0409
	nov/03	3	12,5671	91,5296	0,5416	0,5917	3,1890
	dez/03	8	10,7950	7,8119	0,8680	2,7778	0,3494
	jan/04	14	10,2773	13,8588	0,2165	0,5625	0,2659
	fev/04	12	10,9668	1,0674	0,0054	0,0204	0,0861
	mar/04	7	11,1582	17,2907	0,1201	0,1736	0,5940
	abr/04	15	10,3880	21,2708	0,4341	1,3061	0,3075
	mai/04	20	11,2423	76,6979	0,3409	0,1111	0,4379
2004	jun/04	33	12,8645	405,4391	1,0136	0,4225	0,6102
	jul/04	7	16,5942	92,0492	0,0845	0,6208	1,3706
	ago/04	31	14,8171	261,8873	5,3446	11,7551	0,5220
	set/04	16	17,8147	3,2930	0,0034	0,2341	0,1134
	out/04	27	17,4785	90,6583	0,3541	0,4727	0,3526
	nov/04	40	19,2422	430,8856	0,5911	0,2318	0,5189
	dez/04	47	23,0872	571,8207	0,3574	0,0306	0,5088
	jan/05	8	27,5166	380,8993	0,1724	0,6885	2,4396
	fev/05	12	23,9015	141,6465	2,2132	0,2500	0,9918
	mar/05	8	21,6970	187,6074	1,3028	0,1111	1,7121
	abr/05	12	19,1599	51,2636	0,8010	0,2500	0,5967
	mai/05	14	17,8336	14,6967	0,1021	0,0278	0,2738
2005	jun/05	13	17,1235	17,0034	0,0868	0,0051	0,3172
	jul/05	19	16,3597	6,9712	0,0412	0,2130	0,1390
	ago/05	20	16,8488	9,9302	0,0275	0,0028	0,1576
	set/05	16	17,4325	2,0520	0,0051	0,0400	0,0895
	out/05	14	17,1671	10,0308	0,0392	0,0156	0,2262
	nov/05	14	16,5805	6,6589	0,0340	0,0000	0,1843
	dez/05	20	16,1025	15,1905	0,0775	0,1837	0,1949
	jan/06	16	16,8244	0,6797	0,0017	0,0400	0,0515
	fev/06	11	16,6717	32,1685	0,1257	0,0977	0,5156
	mar/06	28	15,6211	153,2362	1,2664	2,3884	0,4421
	abr/06	10	17,9141	62,6330	0,0799	0,4133	0,7914
	mai/06	23	16,4482	42,9267	0,4293	1,6900	0,2849
2006	jun/06	16	17,6618	2,7615	0,0052	0,0926	0,1039
	jul/06	15	17,3540	5,5411	0,0216	0,0039	0,1569
	ago/06	20	16,9179	9,4992	0,0422	0,1111	0,1541
	set/06	19	17,4888	2,2836	0,0057	0,0025	0,0795
	out/06	16	17,7687	3,1285	0,0087	0,0249	0,1105
	nov/06	16	17,4411	2,0768	0,0081	0,0000	0,0901
	dez/06	18	17,1742	0,6820	0,0027	0,0156	0,0459

PARÂMETROS DE AVALIAÇÃO	
U de Theil	0,8507
MSE	60,8590
MAPE	44,5849

PREVISÃO INDIVIDUAL DA SÉRIE ORIGINAL – MÉTODO DE HOLT							
ano	mês	realizado	previsao	erro ²	$a = ((Pt+1-Rt+1)/Rt)^2$	$b = ((Rt+1-Rt)/Rt)^2$	erro percentual absoluto
	jan/00	10					
	fev/00	26	21,8271	17,4128	0,1741	2,5600	0,1605
	mar/00	23	23,4561	0,2080	0,0003	0,0133	0,0198
	abr/00	25	22,9209	4,3227	0,0082	0,0076	0,0832
	mai/00	22	24,5797	6,6550	0,0106	0,0144	0,1173
2000	jun/00	25	22,2295	7,6755	0,0159	0,0186	0,1108
	jul/00	40	24,4798	240,8776	0,3854	0,3600	0,3880
	ago/00	26	37,8573	140,5963	0,0879	0,1225	0,4561
	set/00	26	27,7367	3,0161	0,0045	0,0000	0,0668
	out/00	17	26,1899	84,4537	0,1249	0,1198	0,5406
	nov/00	14	18,1361	17,1077	0,0592	0,0311	0,2954
	dez/00	16	14,3035	2,8780	0,0147	0,0204	0,1060
	jan/01	23	15,4618	56,8249	0,2220	0,1914	0,3277
	fev/01	19	21,7263	7,4325	0,0141	0,0302	0,1435
	mar/01	25	19,2124	33,4964	0,0928	0,0997	0,2315
	abr/01	23	24,0447	1,0914	0,0017	0,0064	0,0454
	mai/01	16	23,0481	49,6753	0,0939	0,0926	0,4405
2001	jun/01	21	16,8168	17,4991	0,0684	0,0977	0,1992
	jul/01	18	20,2128	4,8965	0,0111	0,0204	0,1229
	ago/01	30	18,1294	140,9117	0,4349	0,4444	0,3957
	set/01	6	28,2401	494,6215	0,5496	0,6400	3,7067
	out/01	8	8,9360	0,8760	0,0243	0,1111	0,1170
	nov/01	11	7,7300	10,6929	0,1671	0,1406	0,2973
	dez/01	12	10,1607	3,3830	0,0280	0,0083	0,1533
	jan/02	19	11,4087	57,6274	0,4002	0,3403	0,3995
	fev/02	9	17,6876	75,4750	0,2091	0,2770	0,9653
	mar/02	15	9,9642	25,3596	0,3131	0,4444	0,3357
	abr/02	24	14,0029	99,9430	0,4442	0,3600	0,4165
	mai/02	24	22,4444	2,4198	0,0042	0,0000	0,0648
2002	jun/02	10	23,7366	188,6937	0,3276	0,3403	1,3737
	jul/02	9	11,7724	7,6863	0,0769	0,0100	0,3080
	ago/02	9	9,0803	0,0064	0,0001	0,0000	0,0089
	set/02	13	8,6758	18,6984	0,2308	0,1975	0,3326
	out/02	15	12,0962	8,4318	0,0499	0,0237	0,1936
	nov/02	19	14,3623	21,5079	0,0956	0,0711	0,2441
	dez/02	13	18,1883	26,9179	0,0746	0,0997	0,3991
	jan/03	6	13,5634	57,2048	0,3385	0,2899	1,2606
	fev/03	15	6,7796	67,5756	1,8771	2,2500	0,5480
	mar/03	11	13,5685	6,5973	0,0293	0,0711	0,2335
	abr/03	18	11,1361	47,1137	0,3894	0,4050	0,3813
	mai/03	19	16,8507	4,6196	0,0143	0,0031	0,1131
2003	jun/03	14	18,5959	21,1227	0,0585	0,0693	0,3283
	jul/03	13	14,5209	2,3131	0,0118	0,0051	0,1170
	ago/03	6	13,0326	49,4576	0,2926	0,2899	1,1721
	set/03	11	6,7280	18,2497	0,5069	0,6944	0,3884
	out/03	13	10,1147	8,3250	0,0688	0,0331	0,2219
	nov/03	3	12,3754	87,8982	0,5201	0,5917	3,1251
	dez/03	8	4,0378	15,6987	1,7443	2,7778	0,4953
	jan/04	14	7,1145	47,4101	0,7408	0,5625	0,4918
	fev/04	12	12,8038	0,6461	0,0033	0,0204	0,0670
	mar/04	7	11,9399	24,4025	0,1695	0,1736	0,7057
	abr/04	15	7,4680	56,7315	1,1578	1,3061	0,5021
	mai/04	20	13,7400	39,1881	0,1742	0,1111	0,3130
2004	jun/04	33	19,0457	194,7234	0,4868	0,4225	0,4229
	jul/04	7	31,1511	583,2741	0,5356	0,6208	3,4502
	ago/04	31	10,4097	423,9619	8,6523	11,7551	0,6642
	set/04	16	28,0922	146,2218	0,1522	0,2341	0,7558
	out/04	27	17,7613	85,3539	0,3334	0,4727	0,3422
	nov/04	40	25,7387	203,3839	0,2790	0,2318	0,3565
	dez/04	47	38,2497	76,5681	0,0479	0,0306	0,1862
	jan/05	8	46,2357	1461,9714	0,6618	0,6885	4,7795
	fev/05	12	13,5641	2,4464	0,0382	0,2500	0,1303
	mar/05	8	12,0464	16,3733	0,1137	0,1111	0,5058
	abr/05	12	8,3434	13,3708	0,2089	0,2500	0,3047
	mai/05	14	11,2578	7,5197	0,0522	0,0278	0,1959
2005	jun/05	13	13,4452	0,1982	0,0010	0,0051	0,0342
	jul/05	19	12,9141	37,0388	0,2192	0,2130	0,3203
	ago/05	20	18,0486	3,8079	0,0105	0,0028	0,0976
	set/05	16	19,7034	13,7152	0,0343	0,0400	0,2315
	out/05	14	16,4816	6,1582	0,0241	0,0156	0,1773
	nov/05	14	14,2530	0,0640	0,0003	0,0000	0,0181
	dez/05	20	13,9147	37,0303	0,1889	0,1837	0,3043
	jan/06	16	19,0782	9,4751	0,0237	0,0400	0,1924
	fev/06	11	16,3930	29,0845	0,1136	0,0977	0,4903
	mar/06	28	11,6401	267,6451	2,2119	2,3884	0,5843
	abr/06	10	25,6856	246,0384	0,3138	0,4133	1,5686
	mai/06	23	12,1931	116,7886	1,1679	1,6900	0,4699
2006	jun/06	16	21,4269	29,4511	0,0557	0,0926	0,3392
	jul/06	15	16,7567	3,0861	0,0121	0,0039	0,1171
	ago/06	20	15,1750	23,2802	0,1035	0,1111	0,2412
	set/06	19	19,2788	0,0777	0,0002	0,0025	0,0147
	out/06	16	19,0376	9,2268	0,0256	0,0249	0,1898
	nov/06	16	16,3945	0,1557	0,0006	0,0000	0,0247
	dez/06	18	15,9917	4,0334	0,0158	0,0156	0,1116

ANÁLISE DENTRO DA AMOSTRA	
U de Theil	0,8805
MSE	78,1380
MAPE	50,1835

PREVISÃO INDIVIDUAL DA SÉRIE ORIGINAL - MÉTODO DE HOLT-WINTER							
ano	mês	realizado	previsao	erro ²	$a = ((Pt+1-Rt+1)/Rt)^2$	$b = ((Rt+1-Rt)/Rt)^2$	erro percentual absoluto
	jan/00	10					
	fev/00	26	16,9763	81,4270	0,8143	2,5600	0,3471
	mar/00	23	22,3022	0,4869	0,0007	0,0133	0,0303
	abr/00	25	24,2428	0,5733	0,0011	0,0076	0,0303
	mai/00	22	26,4647	19,9338	0,0319	0,0144	0,2029
2000	jun/00	25	23,7029	1,6824	0,0035	0,0186	0,0519
	jul/00	40	21,9088	327,2921	0,5237	0,3600	0,4523
	ago/00	26	32,5688	43,1494	0,0270	0,1225	0,2526
	set/00	26	22,7631	10,4778	0,0155	0,0000	0,1245
	out/00	17	24,3542	54,0836	0,0800	0,1198	0,4326
	nov/00	14	23,1594	83,8950	0,2903	0,0311	0,6542
	dez/00	16	22,8770	47,2931	0,2413	0,0204	0,4298
	jan/01	23	14,5428	71,5239	0,2794	0,1914	0,3677
	fev/01	19	18,6038	0,1570	0,0003	0,0302	0,0209
	mar/01	25	20,9283	16,5785	0,0459	0,0997	0,1629
	abr/01	23	23,9603	0,9222	0,0015	0,0064	0,0418
	mai/01	16	25,5399	91,0090	0,1720	0,0926	0,5962
2001	jun/01	21	21,2166	0,0469	0,0002	0,0977	0,0103
	jul/01	18	19,1753	1,3814	0,0031	0,0204	0,0653
	ago/01	30	21,8780	65,9662	0,2036	0,4444	0,2707
	set/01	6	18,3571	152,6982	0,1697	0,6400	2,0595
	out/01	8	14,5259	42,5870	1,1830	0,1111	0,8157
	nov/01	11	12,9904	3,9616	0,0619	0,1406	0,1809
	dez/01	12	13,9332	3,7373	0,0309	0,0083	0,1611
	jan/02	19	9,3311	93,4867	0,6492	0,3403	0,5089
	fev/02	9	13,3959	19,3242	0,0535	0,2770	0,4884
	mar/02	15	13,2801	2,9580	0,0365	0,4444	0,1147
	abr/02	24	14,8251	84,1796	0,3741	0,3600	0,3823
	mai/02	24	19,2337	22,7173	0,0394	0,0000	0,1986
2002	jun/02	10	19,7005	94,1005	0,1634	0,3403	0,9701
	jul/02	9	14,9223	35,0734	0,3507	0,0100	0,6580
	ago/02	9	15,0347	36,4180	0,4496	0,0000	0,6705
	set/02	13	9,6739	11,0630	0,1366	0,1975	0,2559
	out/02	15	10,9167	16,6737	0,0987	0,0237	0,2722
	nov/02	19	12,8752	37,5126	0,1667	0,0711	0,3224
	dez/02	13	16,8707	14,9820	0,0415	0,0997	0,2977
	jan/03	6	10,9691	24,6915	0,1461	0,2899	0,8282
	fev/03	15	9,9405	25,5981	0,7111	2,2500	0,3373
	mar/03	11	12,9026	3,6199	0,0161	0,0711	0,1730
	abr/03	18	13,1194	23,8205	0,1969	0,4050	0,2711
	mai/03	19	15,8329	10,0303	0,0310	0,0031	0,1667
2003	jun/03	14	15,9432	3,7761	0,0105	0,0693	0,1388
	jul/03	13	13,8261	0,6824	0,0035	0,0051	0,0635
	ago/03	6	15,7233	94,5426	0,5594	0,2899	1,6206
	set/03	11	9,2752	2,9748	0,0826	0,6944	0,1568
	out/03	13	9,9627	9,2249	0,0762	0,0331	0,2336
	nov/03	3	11,4926	72,1248	0,4268	0,5917	2,8309
	dez/03	8	9,7572	3,0877	0,3431	2,7778	0,2196
	jan/04	14	6,3962	57,8178	0,9034	0,5625	0,5431
	fev/04	12	9,4818	6,3411	0,0324	0,0204	0,2098
	mar/04	7	11,4412	19,7238	0,1370	0,1736	0,6345
	abr/04	15	10,6262	19,1305	0,3904	1,3061	0,2916
	mai/04	20	12,9356	49,9052	0,2218	0,1111	0,3532
2004	jun/04	33	14,4023	345,8761	0,8647	0,4225	0,5636
	jul/04	7	18,6209	135,0458	0,1240	0,6208	1,6601
	ago/04	31	17,1727	191,1953	3,9019	11,7551	0,4460
	set/04	16	16,2286	0,0523	0,0001	0,2341	0,0143
	out/04	27	16,4540	111,2179	0,4344	0,4727	0,3906
	nov/04	40	21,0382	359,5488	0,4932	0,2318	0,4740
	dez/04	47	31,0821	253,3787	0,1584	0,0306	0,3387
	jan/05	8	25,7521	315,1382	0,1427	0,6885	2,2190
	fev/05	12	21,3748	87,8864	1,3732	0,2500	0,7812
	mar/05	8	20,4175	154,1946	1,0708	0,1111	1,5522
	abr/05	12	17,5057	30,3132	0,4736	0,2500	0,4588
	mai/05	14	16,8772	8,2780	0,0575	0,0278	0,2055
2005	jun/05	13	15,0343	4,1383	0,0211	0,0051	0,1565
	jul/05	19	12,9665	36,4035	0,2154	0,2130	0,3176
	ago/05	20	17,3744	6,8940	0,0191	0,0028	0,1313
	set/05	16	13,5932	5,7925	0,0145	0,0400	0,1504
	out/05	14	14,6372	0,4060	0,0016	0,0156	0,0455
	nov/05	14	15,1770	1,3854	0,0071	0,0000	0,0841
	dez/05	20	16,7471	10,5814	0,0540	0,1837	0,1626
	jan/06	16	12,5564	11,8581	0,0296	0,0400	0,2152
	fev/06	11	14,6632	13,4194	0,0524	0,0977	0,3330
	mar/06	28	14,9801	169,5167	1,4010	2,3884	0,4650
	abr/06	10	20,7123	114,7525	0,1464	0,4133	1,0712
	mai/06	23	18,4980	20,2678	0,2027	1,6900	0,1957
2006	jun/06	16	18,9135	8,4883	0,0160	0,0926	0,1821
	jul/06	15	16,2522	1,5679	0,0061	0,0039	0,0835
	ago/06	20	18,4108	2,5255	0,0112	0,1111	0,0795
	set/06	19	14,1169	23,8446	0,0596	0,0025	0,2570
	out/06	16	16,0168	0,0003	0,0000	0,0249	0,0011
	nov/06	16	16,8632	0,7451	0,0029	0,0000	0,0540
	dez/06	18	18,7984	0,6375	0,0025	0,0156	0,0444

ANÁLISE DENTRO DA AMOSTRA

U de Theil	0,7738
MSE	53,5156
MAPE	42,2980

APÊNDICE B – Programas desenvolvidos

PROGRAMA 1 – Determinação das constantes de suavização método Holt-Winter no Microsoft Visual Basic ® 6.3.

Autor: Vanessa Bueno da Rocha

```
Dim I As Integer, J As Integer, K As Integer, U As Integer, O As Integer
Dim AB As Integer, ee As Integer, MM As Integer, A As Double, C As Double
Dim D As Double, IA As Double, SOMAL() As Double, SOMAM() As Double
Dim FPO As Double, FPN As Double, AA() As Double, BB() As Double
Dim CC() As Double, MSE1 As Double, erro() As Double, MSE2 As Double
Dim TI As Double, NI As Double, MAPE1 As Double, MAPE2 As Double
Dim EM() As Double, SOMAE As Double, E() As Double, X() As Double
Dim Y() As Double, M1 As Double, M2 As Double, M3 As Double
Dim M4 As Double, M5 As Double, M6 As Double, M7 As Double
Dim MEDIA() As Double, SIA() As Double, SIB() As Double, SIC() As Double
Dim SID() As Double, SIE() As Double, SIF() As Double, SIG() As Double
Dim SSA() As Double, SSB() As Double, SSC() As Double, SSD() As Double
Dim SSE() As Double, SSF() As Double, SSG() As Double
Dim L() As Double, Z() As Double, R() As Double, SOMA() As Double
Dim N() As Double, T() As Double, S() As Double, FS() As Double
Dim PL() As Double, SOMAZ() As Double
Dim ALPHA() As Double, g() As Double, MYTIME
```

```
Private Sub CommandButton1_Click()
```

```
'A = Constante de Nível
```

```
'C = Constante de Tendência
```

```
'D = Constante de Sazonalidade
```

```
'MSE = Erro Quadrático Médio
```

```
MYTIME = Time
```

```
Cells(1, 1) = MYTIME
```

```
AB = Cells(93, 4) - Cells(10, 4) + 1
```

```
U = Cells(93, 4) - Cells(22, 4) + 1
```

```
SOMAE = 1000000000000#
```

```
'Leitura de dados de Históricos
```

```
O = AB - U
```

```
ReDim N(AB), T(AB), S(AB), Y(AB), FS(AB), MEDIA(AB), SOMAM(12), SS(AB)
```

```
ReDim R(AB), erro(AB), P(AB), SOMA(AB), L(AB), SOMAL(AB), SOMAZ(AB), Z(AB)
```

```
ReDim SIA(AB), SIB(AB), SIC(AB), SID(AB), SIE(AB), SIF(AB), SIG(AB), SSA(AB)
```

```
ReDim SSB(AB), SSC(AB), SSD(AB), SSE(AB), SSF(AB), SSG(AB), EM(AB)
```

```
' Leitura dados Reais (vendas)
```

```
For K = 1 To (AB - 1)
```

```
R(K) = Cells((9 + K), 5)
```

```
Next K
```

```
'=====
```

```
'VALOR INICIAL TENDENCIA
```

```
For MM = 1 To 12: L(MM) = Cells(9 + MM, 5): SOMAL(MM) = SOMAL(MM - 1) +
```

```
L(MM): Next MM
```

```
M1 = SOMAL(12) / 12 ' MEDIA 12 PRIMEIROS TERMOS
```

```
For MM = 1 To 12: Z(MM) = Cells(9 + 12 + MM, 5): SOMAZ(MM) = SOMAZ(MM - 1) +
```

```
Z(MM): Next MM
```

```

M2 = SOMAZ(12) / 12 ' MEDIA 12 ÚLTIMOS TERMOS
For MM = 1 To 12: Z(MM) = Cells(9 + 24 + MM, 5): SOMAZ(MM) = SOMAZ(MM - 1) +
Z(MM): Next MM
M3 = SOMAZ(12) / 12 ' MEDIA 12 ÚLTIMOS TERMOS
For MM = 1 To 12: Z(MM) = Cells(9 + 36 + MM, 5): SOMAZ(MM) = SOMAZ(MM - 1) +
Z(MM): Next MM
M4 = SOMAZ(12) / 12 ' MEDIA 12 ÚLTIMOS TERMOS
For MM = 1 To 12: Z(MM) = Cells(9 + 48 + MM, 5): SOMAZ(MM) = SOMAZ(MM - 1) +
Z(MM): Next MM
M5 = SOMAZ(12) / 12 ' MEDIA 12 ÚLTIMOS TERMOS
For MM = 1 To 12: Z(MM) = Cells(9 + 60 + MM, 5): SOMAZ(MM) = SOMAZ(MM - 1) +
Z(MM): Next MM
M6 = SOMAZ(12) / 12 ' MEDIA 12 ÚLTIMOS TERMOS
For MM = 1 To 12: Z(MM) = Cells(9 + 72 + MM, 5): SOMAZ(MM) = SOMAZ(MM - 1) +
Z(MM): Next MM
M7 = SOMAZ(12) / 12 ' MEDIA 12 ÚLTIMOS TERMOS
TI = (M7 - M1) / 72
'=====
'VALOR INICIAL NÍVEL
NI = M7 + (6 * TI)
'NI = ((M1 + M2 + M3 + M4 + M5 + M6 + M7) / 7) - (6 * Abs(TI))
'ERA M1
'=====
'ESTIMATIVAS DO NÍVEL MÉDIO
For O = 1 To 12: Y(O) = M1 - ((6.5 - O) * TI): Cells(9 + O, 3) = Y(O): Next O
For O = 13 To 24: Y(O) = M2 - ((6.5 - (O - 12)) * TI): Cells(9 + O, 3) = Y(O): Next O
For O = 25 To 36: Y(O) = M3 - ((6.5 - (O - 24)) * TI): Cells(9 + O, 3) = Y(O): Next O
For O = 37 To 48: Y(O) = M4 - ((6.5 - (O - 36)) * TI): Cells(9 + O, 3) = Y(O): Next O
For O = 49 To 60: Y(O) = M5 - ((6.5 - (O - 48)) * TI): Cells(9 + O, 3) = Y(O): Next O
For O = 61 To 72: Y(O) = M6 - ((6.5 - (O - 60)) * TI): Cells(9 + O, 3) = Y(O): Next O
For O = 73 To 84: Y(O) = M7 - ((6.5 - (O - 72)) * TI): Cells(9 + O, 3) = Y(O): Next O
'=====
'ESTIMATIVAS INICIAIS DOS FATORES SAZONAIS
For O = 1 To 84: FS(O) = R(O) / Y(O): Next O
'=====
'ESTIMATIVAS DOS COMPONENTES SAZONAIS MÉDIOS
For MM = 1 To 12
MEDIA(MM) = (FS(MM) + FS(MM + 12) + FS(MM + 24) + FS(MM + 36) + FS(MM + 48)
+ FS(MM + 60) + FS(MM + 72)) / 7
Next MM: SOMAM(0) = 0
For MM = 1 To 12: SOMAM(MM) = SOMAM(MM - 1) + MEDIA(MM): Next MM
'=====
'CÁLCULO DO ÍNDICE DE AJUSTAMENTO
IA = 12 / SOMAM(12)
'=====
'ESTIMATIVAS DAS SAZONALIDADES INICIAIS A (ANO 1)
For MM = 1 To 12
SIA(MM) = MEDIA(MM) * IA
Next MM
'=====
'CÁLCULO DE A, C e D
For A = 0 To 1 Step 0.01
For D = 0 To 1 Step 0.5
For C = 0 To 1 Step 0.001
'=====
'VALOR DO NÍVEL 1
N(1) = (A * R(1) / SIA(1)) + ((1 - A) * (NI + TI))

```

```

=====
'VALOR DA TENDÊNCIA 1
T(1) = (C * (N(1) - NI)) + ((1 - C) * TI)
=====
'VALORES DOS NÍVEIS 2 A 12
For MM = 2 To 12
N(MM) = (A * R(MM) / SIA(MM)) + ((1 - A) * (N(MM - 1) + T(MM - 1)))
Next MM
=====
'VALORES DAS TENDÊNCIAS 2 A 12
For MM = 2 To 12
T(MM) = (C * (N(MM) - N(MM - 1))) + ((1 - C) * T(MM - 1))
Next MM
=====
'ESTIMATIVAS DE SAZONALIDADES MENSAIS A (ANO 1)
For MM = 1 To 12
SSA(MM) = (D * R(MM) / N(MM)) + ((1 - D) * SIA(MM))
Next MM
=====
'ESTIMATIVAS DAS SAZONALIDADES INICIAIS B (ANO 2)
For MM = 13 To 24
SIB(MM) = SSA(MM - 12)
Next MM
=====
'VALORES DOS NÍVEIS 13 A 24
For MM = 13 To 24
N(MM) = (A * R(MM) / SIB(MM)) + ((1 - A) * (N(MM - 1) + T(MM - 1)))
Next MM
=====
'VALORES DAS TENDÊNCIAS 13 A 24
For MM = 13 To 24
T(MM) = (C * (N(MM) - N(MM - 1))) + ((1 - C) * T(MM - 1))
Next MM
=====
'ESTIMATIVAS DE SAZONALIDADES MENSAIS B (ANO 2)
For MM = 13 To 24
SSB(MM) = (D * R(MM) / N(MM)) + ((1 - D) * SIB(MM))
Next MM
=====
'ESTIMATIVAS DAS SAZONALIDADES INICIAIS C (ANO 3)
For MM = 25 To 36
SIC(MM) = SSB(MM - 12)
Next MM
=====
'VALORES DOS NÍVEIS 25 A 36
For MM = 25 To 36
N(MM) = (A * R(MM) / SIC(MM)) + ((1 - A) * (N(MM - 1) + T(MM - 1)))
Next MM
=====
'VALORES DAS TENDÊNCIAS 25 A 36
For MM = 25 To 36
T(MM) = (C * (N(MM) - N(MM - 1))) + ((1 - C) * T(MM - 1))
Next MM
=====
'ESTIMATIVAS DE SAZONALIDADES MENSAIS C (ANO 3)
For MM = 25 To 36
SSC(MM) = (D * R(MM) / N(MM)) + ((1 - D) * SIC(MM))

```

```

Next MM
=====
'ESTIMATIVAS DAS SAZONALIDADES INICIAIS D (ANO 4)
For MM = 37 To 48
SID(MM) = SSC(MM - 12)
Next MM
=====
'VALORES DOS NÍVEIS 37 A 48
For MM = 37 To 48
N(MM) = (A * R(MM) / SID(MM)) + ((1 - A) * (N(MM - 1) + T(MM - 1)))
Next MM
=====
'VALORES DAS TENDÊNCIAS 37 A 48
For MM = 37 To 48
T(MM) = (C * (N(MM) - N(MM - 1))) + ((1 - C) * T(MM - 1))
Next MM
=====
'ESTIMATIVAS DE SAZONALIDADES MENSAIS D (ANO 4)
For MM = 37 To 48
SSD(MM) = (D * R(MM) / N(MM)) + ((1 - D) * SID(MM))
Next MM
=====

'ESTIMATIVAS DAS SAZONALIDADES INICIAIS E (ANO 5)
For MM = 49 To 60
SIE(MM) = SSD(MM - 12)
Next MM
=====
'VALORES DOS NÍVEIS 49 A 60
For MM = 49 To 60
N(MM) = (A * R(MM) / SIE(MM)) + ((1 - A) * (N(MM - 1) + T(MM - 1)))
Next MM
=====
'VALORES DAS TENDÊNCIAS 49 A 60
For MM = 49 To 60
T(MM) = (C * (N(MM) - N(MM - 1))) + ((1 - C) * T(MM - 1))
Next MM
=====
'ESTIMATIVAS DE SAZONALIDADES MENSAIS E (ANO 5)
For MM = 49 To 60
SSE(MM) = (D * R(MM) / N(MM)) + ((1 - D) * SIE(MM))
Next MM
=====
'ESTIMATIVAS DAS SAZONALIDADES INICIAIS F (ANO 6)
For MM = 61 To 72
SIF(MM) = SSE(MM - 12)
Next MM
=====
'VALORES DOS NÍVEIS 61 A 72
For MM = 61 To 72
N(MM) = (A * R(MM) / SIF(MM)) + ((1 - A) * (N(MM - 1) + T(MM - 1)))
Next MM
=====
'VALORES DAS TENDÊNCIAS 61 A 72
For MM = 61 To 72
T(MM) = (C * (N(MM) - N(MM - 1))) + ((1 - C) * T(MM - 1))
Next MM

```

```

=====
'ESTIMATIVAS DE SAZONALIDADES MENSAIS F (ANO 6)
For MM = 61 To 72
SSF(MM) = (D * R(MM) / N(MM)) + ((1 - D) * SIF(MM))
Next MM
=====
'ESTIMATIVAS DAS SAZONALIDADES INICIAIS G (ANO 7)
For MM = 73 To 84
SIG(MM) = SSF(MM - 12)
Next MM
=====
'VALORES DOS NÍVEIS 73 A 84
For MM = 73 To 84
N(MM) = (A * R(MM) / SIG(MM)) + ((1 - A) * (N(MM - 1) + T(MM - 1)))
Next MM
=====
'VALORES DAS TENDÊNCIAS 73 A 84
For MM = 73 To 84
T(MM) = (C * (N(MM) - N(MM - 1))) + ((1 - C) * T(MM - 1))
Next MM
=====
'ESTIMATIVAS DE SAZONALIDADES MENSAIS G (ANO 7)
For MM = 73 To 84
SSG(MM) = (D * R(MM) / N(MM)) + ((1 - D) * SIG(MM))
Next MM
=====
'CÁLCULO DA PREVISÃO 1
P(1) = (NI + TI) * SIA(1)
=====
'CÁLCULO DA PREVISÃO 2 A 12
For I = 2 To 12
'PREVISÃO
P(I) = (N(I - 1) + T(I - 1)) * SIA(I)
Next I
=====
'CÁLCULO DA PREVISÃO DE 13 A 24
For I = 13 To 24
'PREVISÃO
P(I) = (N(I - 1) + T(I - 1)) * SIB(I)
Next I
=====
'CÁLCULO DA PREVISÃO DE 25 A 36
For I = 25 To 36
'PREVISÃO
P(I) = (N(I - 1) + T(I - 1)) * SIC(I)
Next I
=====
'CÁLCULO DA PREVISÃO DE 37 A 48
For I = 37 To 48
'PREVISÃO
P(I) = (N(I - 1) + T(I - 1)) * SID(I)
Next I
=====
'CÁLCULO DA PREVISÃO DE 49 A 60
For I = 49 To 60
'PREVISÃO
P(I) = (N(I - 1) + T(I - 1)) * SIE(I)
=====

```

```

Next I
'=====
'CÁLCULO DA PREVISÃO DE 61 A 72
For I = 61 To 72
'PREVISÃO
P(I) = (N(I - 1) + T(I - 1)) * SIF(I)
Next I
'=====
'CÁLCULO DA PREVISÃO DE 73 A 84
For I = 73 To 84
'PREVISÃO
P(I) = (N(I - 1) + T(I - 1)) * SIG(I)
Next I
'=====
' For I = 1 To AB
'Cells(9 + I, 6) = N(I)
'Cells(9 + I, 7) = S(I)
'Cells(9 + I, 8) = T(I)
'Next I
For ee = 1 To AB - 1
erro(ee) = ((R(ee) - P(ee)) ^ 2)
Next ee
For ee = 1 To AB
SOMA(ee) = Abs(SOMA(ee - 1) + erro(ee))
Next ee
If SOMAE >= SOMA(84) Then
SOMAE = SOMA(84)
Cells(5, 5) = A
Cells(6, 5) = C
Cells(7, 5) = D
Cells(7, 8) = SOMAE
Cells(10, 6) = NI
Cells(10, 8) = TI
End If
Cells(5, 6) = A: Cells(6, 6) = C: Cells(7, 6) = D
Next C: Next D: Next A
MYTIME = Time
Cells(2, 1) = MYTIME
End Sub

Private Sub Worksheet_SelectionChange(ByVal Target As Range)

End Sub

```

PROGRAMA 2 – Determinação das pesos das modelos individuais para a previsão combinada no Microsoft Visual Basic ® 6.3.

Autor: Vanessa Bueno da Rocha

Dim I As Integer, P1 As Double, P2 As Double, HW() As Double, AM() As Double
 Dim MAPE1 As Double, MAPE2 As Double
 Dim R() As Long, N As Integer, COMB() As Double, ERRO() As Double
 Dim SE() As Double

```
Private Sub CommandButton1_Click()
  ReDim HW(83), AM(83), R(83), COMB(83), ERRO(83), SE(83)
  MAPE2 = 10
```

```
  For I = 1 To 83
    R(I) = Cells(1 + I, 1)
    HW(I) = Cells(1 + I, 2)
    AM(I) = Cells(1 + I, 3)
  Next I
```

```
  For P1 = 0 To 1 Step 0.0005
    P2 = 1 - P1
```

```
  For I = 1 To 83
    COMB(I) = (P1 * AM(I)) + (P2 * HW(I))
    Cells(1 + I, 4) = COMB(I)
    ERRO(I) = Abs((R(I) - COMB(I)) / R(I))
    SE(I) = Abs(ERRO(I) + SE(I - 1))
  Next I
```

```
  MAPE1 = Abs(SE(83) / 83)
```

```
  If MAPE2 >= MAPE1 Then
    MAPE2 = MAPE1
    Cells(2, 6) = MAPE2
    Cells(4, 6) = P1
    Cells(6, 6) = P2
```

```
  End If
```

```
Next P1
```

```
End Sub
```

APÊNDICE C – Valores previstos do Modelo ARIMA (série original)

PREVISÃO INDIVIDUAL DA SÉRIE ORIGINAL – MÉTODO ARIMA								
ano	mês	realizado	previsao	erro	erro ²	$a = ((P_{t+1} - R_{t+1}) / R_t)^2$	$b = ((R_{t+1} - R_t) / R_t)^2$	erro percentual absoluto
	jan/00	10						
	fev/00	26	14,4243	11,5757	133,9961	1,3400	2,5600	0,4452
	mar/00	23	19,5059	3,4941	12,2085	0,0181	0,0133	0,1519
	abr/00	25	18,6169	6,3831	40,7442	0,0770	0,0076	0,2553
	mai/00	22	19,3076	2,6924	7,2488	0,0116	0,0144	0,1224
2000	jun/00	25	18,4096	6,5904	43,4338	0,0897	0,0186	0,2636
	jul/00	40	19,4121	20,5879	423,8612	0,6782	0,3600	0,5147
	ago/00	26	24,2857	1,7143	2,9389	0,0018	0,1225	0,0659
	set/00	26	19,9726	6,0274	36,3300	0,0537	0,0000	0,2318
	out/00	17	20,0404	3,0404	9,2440	0,0137	0,1908	0,1788
	nov/00	14	17,2211	3,2211	10,3752	0,0359	0,0311	0,2301
	dez/00	16	16,2564	0,2564	0,0658	0,0003	0,0204	0,0160
	jan/01	23	16,8725	6,1275	37,5467	0,1467	0,1914	0,2664
	fev/01	19	19,1076	0,1076	0,0116	0,0000	0,0302	0,0057
	mar/01	25	17,8686	7,1314	50,8571	0,1409	0,0997	0,2853
	abr/01	23	19,8056	3,1944	10,2042	0,0163	0,0064	0,1389
	mai/01	16	19,2226	3,2226	10,3853	0,0196	0,0926	0,2014
2001	jun/01	21	17,0202	3,9798	15,8392	0,0619	0,0977	0,1895
	jul/01	18	18,6122	0,6122	0,3748	0,0008	0,0204	0,0340
	ago/01	30	17,6770	12,3230	151,8571	0,4687	0,4444	0,4108
	set/01	6	21,5292	15,5292	241,1546	0,2679	0,6400	2,5882
	out/01	8	13,9274	5,9274	35,1339	0,9759	0,1111	0,7409
	nov/01	11	14,4796	3,4796	12,1076	0,1892	0,1406	0,3163
	dez/01	12	15,3688	3,3688	11,3489	0,0938	0,0083	0,2807
	jan/02	19	15,6404	3,3596	11,2872	0,0784	0,3403	0,1768
	fev/02	9	17,8444	8,8444	78,2229	0,2167	0,2770	0,9827
	mar/02	15	14,6503	0,3497	0,1223	0,0015	0,4444	0,0233
	abr/02	24	16,5109	7,4891	56,0860	0,2493	0,3600	0,3120
	mai/02	24	19,3803	4,6197	21,3412	0,0371	0,0000	0,1925
2002	jun/02	10	19,4323	9,4323	88,9690	0,1545	0,3403	0,9432
	jul/02	9	14,9938	5,9938	35,9253	0,3593	0,0100	0,6660
	ago/02	9	14,6169	5,6169	31,5491	0,3895	0,0000	0,6241
	set/02	13	14,5536	1,5536	2,4138	0,0298	0,1975	0,1195
	out/02	15	15,7740	0,7740	0,5991	0,0035	0,0237	0,0516
	nov/02	19	16,3842	2,6158	6,8424	0,0304	0,0711	0,1377
	dez/02	13	17,6515	4,6515	21,6361	0,0599	0,0997	0,3578
	jan/03	6	15,7424	9,7424	94,9138	0,5616	0,2899	1,6237
	fev/03	15	13,4665	1,5335	2,3516	0,0653	2,2500	1,0222
	mar/03	11	16,2689	5,2689	27,7613	0,1234	0,0711	0,4790
	abr/03	18	14,9718	3,0282	9,1702	0,0758	0,4050	0,1682
	mai/03	19	17,1721	1,8279	3,3414	0,0103	0,0031	0,0962
2003	jun/03	14	17,5021	3,5021	12,2646	0,0340	0,0693	0,2501
	jul/03	13	15,9154	2,9154	8,4995	0,0434	0,0051	0,2243
	ago/03	6	15,5731	9,5731	91,6445	0,5423	0,2899	1,5955
	set/03	11	13,2992	2,2992	5,2862	0,1468	0,6944	0,2090
	out/03	13	14,8206	1,8206	3,3145	0,0274	0,0331	0,1400
	nov/03	3	15,4190	12,4190	154,2319	0,9126	0,5917	4,1397
	dez/03	8	12,1847	4,1847	17,5114	1,9457	2,7778	0,5231
	jan/04	14	13,6849	0,3151	0,0993	0,0016	0,5625	0,0225
	fev/04	12	15,5452	3,5452	12,5681	0,0641	0,0204	0,2954
	mar/04	7	14,8863	7,8863	62,1944	0,4319	0,1736	1,1266
	abr/04	15	13,2503	1,7497	3,0615	0,0625	1,3061	0,1166
	mai/04	20	15,7457	4,2543	18,0995	0,0804	0,1111	0,2127
2004	jun/04	33	17,3408	15,6592	245,2099	0,6130	0,4225	0,4745
	jul/04	7	21,5400	14,5400	211,4119	0,1941	0,6208	2,0771
	ago/04	31	13,3305	17,6695	312,2126	6,3717	11,7551	0,5700
	set/04	16	20,9563	4,9563	24,5651	0,0256	0,2341	0,3098
	out/04	27	16,2587	10,7413	115,3763	0,4507	0,4727	0,3978
	nov/04	40	19,7836	20,2164	408,7033	0,5606	0,2318	0,5054
	dez/04	47	24,0341	22,9659	527,4342	0,3296	0,0306	0,4886
	jan/05	8	26,4587	18,4587	340,7249	0,1542	0,6885	2,3073
	fev/05	12	14,1821	2,1821	4,7617	0,0744	0,2500	0,1818
	mar/05	8	15,3954	7,3954	54,6920	0,3798	0,1111	0,9244
	abr/05	12	14,0743	2,0743	4,3029	0,0672	0,2500	0,1729
	mai/05	14	15,2888	1,2888	1,6611	0,0115	0,0278	0,0921
2005	jun/05	13	15,8932	2,8932	8,3708	0,0427	0,0051	0,2226
	jul/05	19	15,5512	3,4488	11,8941	0,0704	0,2130	0,1815
	ago/05	20	17,4468	2,5532	6,5189	0,0181	0,0028	0,1277
	set/05	16	17,7850	1,7850	3,1861	0,0080	0,0400	0,1116
	out/05	14	16,5271	2,5271	6,3860	0,0249	0,0156	0,1805
	nov/05	14	15,8797	1,8797	3,5333	0,0180	0,0000	0,1343
	dez/05	20	15,8585	4,1415	17,1517	0,0875	0,1837	0,2071
	jan/06	16	17,7619	1,7619	3,1043	0,0078	0,0400	0,1101
	fev/06	11	16,5042	5,5042	30,2967	0,1183	0,0977	0,5004
	mar/06	28	14,8950	13,1050	171,7409	1,4193	2,3884	0,4680
	abr/06	10	20,3033	10,3033	106,1575	0,1354	0,4133	1,0303
	mai/06	23	14,6171	8,3829	70,2734	0,7027	1,6900	0,3645
2006	jun/06	16	18,7344	2,7344	7,4768	0,0141	0,0926	0,1709
	jul/06	15	16,5374	1,5374	2,3636	0,0092	0,0039	0,1025
	ago/06	20	16,2106	3,7894	14,3593	0,0638	0,1111	0,1895
	set/06	19	17,8006	1,1994	1,4386	0,0025	0,0036	0,0631
	out/06	16	17,5046	1,5046	2,2639	0,0063	0,0249	0,0940
	nov/06	16	16,5593	0,5593	0,3128	0,0012	0,0000	0,0350
	dez/06	18	16,5530	1,4470	2,0938	0,0082	0,0156	0,0804

ANÁLISE DENTRO DA AMOSTRA	
U de Theil	0,7915
MSE	59,0187
MAPE	44,2433

APÊNDICE D – Valores previstos do Modelo de Combinação (série original)

PREVISAO COMBINADA DA SÉRIE ORIGINAL - HW + ARIMA								
ano	mês	realizado	previsao	erro	erro ²	$a = ((P_{t+1} - R_{t+1}) / R_t)^2$	$b = ((R_{t+1} - R_t) / R_t)^2$	erro percentual absoluto
	jan/00	10						
	fev/00	26	15,9160	10,0840	101,6879	1,0169	2,5600	0,3878
	mar/00	23	21,1404	1,8596	3,4583	0,0051	0,0133	0,0809
	abr/00	25	21,9052	3,0948	9,5775	0,0181	0,0076	0,1238
	mai/00	22	23,4910	1,4910	2,2229	0,0036	0,0144	0,0678
2000	jun/00	25	21,5035	3,4965	12,2253	0,0253	0,0186	0,1399
	jul/00	40	20,8714	19,1286	365,9027	0,5854	0,3600	0,4782
	ago/00	26	29,1272	3,1272	9,7792	0,0061	0,1225	0,1203
	set/00	26	21,6036	4,3964	19,3283	0,0286	0,0000	0,1691
	out/00	17	22,5618	5,5618	30,9335	0,0458	0,1198	0,3272
	nov/00	14	20,6920	6,6920	44,7833	0,1550	0,0311	0,4780
	dez/00	16	20,1262	4,1262	17,0251	0,0869	0,0204	0,2579
	jan/01	23	15,5108	7,4892	56,0883	0,2191	0,1914	0,3256
	fev/01	19	18,8131	0,1869	0,0349	0,0001	0,0302	0,0098
	mar/01	25	19,6570	5,3430	28,5476	0,0791	0,0997	0,2137
	abr/01	23	22,2340	0,7660	0,5867	0,0009	0,0064	0,0333
	mai/01	16	22,9151	6,9151	47,8179	0,0904	0,0904	0,4322
2001	jun/01	21	19,4730	1,5270	2,3319	0,0091	0,0977	0,0727
	jul/01	18	18,9414	0,9414	0,8862	0,0020	0,0204	0,0523
	ago/01	30	20,1325	9,8675	97,3677	0,3005	0,4444	0,3289
	set/01	6	19,6751	13,6751	187,0082	0,2078	0,6400	2,2792
	out/01	8	14,2772	6,2772	39,4033	1,0945	0,1111	0,7847
	nov/01	11	13,6091	2,6091	6,8077	0,1064	0,1406	0,2372
	dez/01	12	14,5297	2,5297	6,3994	0,0529	0,0083	0,2108
	jan/02	19	11,9526	7,0474	49,6655	0,3449	0,3403	0,3709
	fev/02	9	15,2443	6,2443	38,9907	0,1080	0,2770	0,6938
	mar/02	15	13,8494	1,1506	1,3239	0,0163	0,4444	0,0767
	abr/02	24	15,5255	8,4745	71,8165	0,3192	0,3600	0,3531
	mai/02	24	19,2947	4,7053	22,1403	0,0384	0,0000	0,1961
2002	jun/02	10	19,5891	9,5891	91,9509	0,1596	0,3403	0,9589
	jul/02	9	14,9520	5,9520	35,4261	0,3543	0,0100	0,6613
	ago/02	9	14,8611	5,8611	34,3526	0,4241	0,0000	0,6512
	set/02	13	11,7014	1,2986	1,6863	0,0208	0,1975	0,0999
	out/02	15	12,9349	2,0651	4,2647	0,0252	0,0237	0,1377
	nov/02	19	14,3332	4,6668	21,7789	0,0968	0,0711	0,2456
	dez/02	13	17,1951	4,1951	17,5988	0,0488	0,0997	0,3227
	jan/03	6	12,9524	6,9524	48,3354	0,2860	0,2899	1,1587
	fev/03	15	11,4056	3,5944	12,9198	0,3589	2,2500	0,2396
	mar/03	11	14,3013	3,3013	10,8986	0,0484	0,0711	0,3001
	abr/03	18	13,8890	4,1110	16,8999	0,1397	0,4050	0,2284
	mai/03	19	16,3893	2,6107	6,8155	0,0210	0,0031	0,1374
2003	jun/03	14	16,5909	2,5909	6,7129	0,0186	0,0693	0,1851
	jul/03	13	14,6942	1,6942	2,8703	0,0146	0,0051	0,1303
	ago/03	6	15,6609	9,6609	93,3330	0,5523	0,2899	1,6101
	set/03	11	10,9472	0,0528	0,0028	0,0001	0,6944	0,0048
	out/03	13	11,9812	1,0188	1,0380	0,0086	0,0331	0,0784
	nov/03	3	13,1240	10,1240	102,4962	0,6065	0,5917	3,3747
	dez/03	8	10,7658	2,7658	7,6497	0,8500	2,7778	0,3457
	jan/04	14	9,4246	4,5754	20,9340	0,3271	0,5625	0,3268
	fev/04	12	12,0012	0,0012	0,0000	0,0000	0,0204	0,0001
	mar/04	7	12,8726	5,8726	34,4877	0,2395	0,1736	0,8389
	abr/04	15	11,7165	3,2835	10,7814	0,2200	1,3061	0,2189
	mai/04	20	14,1032	5,8968	34,7722	0,1545	0,1111	0,2948
2004	jun/04	33	15,6232	17,3768	301,9522	0,7549	0,4225	0,5266
	jul/04	7	19,8338	12,8338	164,7065	0,1512	0,6208	1,8334
	ago/04	31	15,5762	15,4238	237,8927	4,8550	11,7551	0,4975
	set/04	16	18,1930	2,1930	4,8092	0,0050	0,2341	0,1371
	out/04	27	16,3728	10,6272	112,9365	0,4412	0,4727	0,3936
	nov/04	40	20,5169	19,4831	379,5902	0,5207	0,2318	0,4871
	dez/04	47	28,1537	18,8463	355,1847	0,2220	0,0306	0,4010
	jan/05	8	26,0457	18,0457	325,6482	0,1474	0,6885	2,2557
	fev/05	12	18,3862	6,3862	40,7839	0,6372	0,2500	0,5322
	mar/05	8	18,3308	10,3308	106,7260	0,7412	0,1111	1,2914
	abr/05	12	16,0800	4,0800	16,6464	0,2601	0,2500	0,3400
	mai/05	14	16,2172	2,2172	4,9160	0,0341	0,0278	0,1584
2005	jun/05	13	15,3912	2,3912	5,7177	0,0292	0,0051	0,1839
	jul/05	19	14,0404	4,9596	24,5973	0,1455	0,2130	0,2610
	ago/05	20	17,4044	2,5956	6,7369	0,0187	0,0028	0,1298
	set/05	16	15,3349	0,6651	0,4423	0,0011	0,0400	0,0416
	out/05	14	15,4224	1,4224	2,0233	0,0079	0,0156	0,1016
	nov/05	14	15,4690	1,4690	2,1579	0,0110	0,0000	0,1049
	dez/05	20	16,3779	3,6221	13,1196	0,0669	0,1837	0,1811
	jan/06	16	14,7193	1,2807	1,6402	0,0041	0,0400	0,0800
	fev/06	11	15,4282	4,4282	19,6088	0,0766	0,0977	0,4026
	mar/06	28	14,9448	13,0552	170,4391	1,4086	2,3884	0,4663
	abr/06	10	20,5423	10,5423	111,1407	0,1418	0,4133	1,0542
	mai/06	23	16,8855	6,1145	37,3873	0,3739	1,6900	0,2658
2006	jun/06	16	18,8391	2,8391	8,0603	0,0152	0,0926	0,1774
	jul/06	15	16,3707	1,3707	1,8787	0,0073	0,0039	0,0914
	ago/06	20	17,4966	2,5034	6,2668	0,0279	0,1111	0,1252
	set/06	19	15,6475	3,3525	11,2395	0,0281	0,0025	0,1764
	out/06	16	16,6350	0,6350	0,4032	0,0011	0,0249	0,0397
	nov/06	16	16,7369	0,7369	0,5431	0,0021	0,0000	0,0461
	dez/06	18	17,8655	0,1345	0,0181	0,0001	0,0156	0,0075

ANÁLISE DENTRO DA AMOSTRA	
U de Theil	0,7507
MSE	52,6188
MAPE	41,7380

APÊNDICE E – Funções *wavelets* obtidas a partir da série original (Família BIOR)

série wavelet packet (SHANNON) – BIOR 1.1		série wavelet packet (SHANNON) – BIOR 1.3		série wavelet packet (SHANNON) – BIOR 1.5		série wavelet packet (SHANNON) – BIOR 2.2		série wavelet packet (SHANNON) – BIOR 2.4	
série recomposta	Z								
11,933305	-0,705031	11,577137	-0,750582	11,507104	-0,758107	10,000000	-0,959085	10,000000	-0,962080
24,066695	0,918600	23,686538	0,865297	23,593721	0,850868	22,908226	0,766844	23,222043	0,809600
24,000000	0,909675	24,055662	0,914553	24,078494	0,915401	24,597650	0,992733	25,270853	1,084129
24,000000	0,909675	24,055662	0,914553	24,078494	0,915401	23,125000	0,795828	23,425627	0,836879
23,500000	0,842767	23,868162	0,889533	23,916461	0,893831	21,652350	0,598924	21,580402	0,589629
23,500000	0,842767	23,868162	0,889533	23,916461	0,893831	27,744124	1,413441	27,553517	1,389993
38,066695	2,792011	38,485363	2,840054	38,637427	2,853491	38,054701	2,792044	37,699866	2,749547
27,933305	1,436010	28,375962	1,491054	28,550810	1,510757	28,056624	1,455225	27,887424	1,434735
24,066695	0,918600	23,686538	0,865297	23,454111	0,832283	24,277350	0,949906	24,248217	0,947101
18,933305	0,231675	18,577137	0,183498	18,367494	0,155151	18,451175	0,170902	18,491142	0,175686
15,000000	-0,294661	15,000000	-0,293835	15,022422	-0,290146	12,625000	-0,608103	12,734067	-0,595730
15,000000	-0,294661	15,000000	-0,293835	15,022422	-0,290146	17,013675	-0,021303	16,926766	-0,033932
21,066695	0,517154	21,304701	0,547465	21,478778	0,569326	21,402350	0,565497	21,119464	0,527866
20,499305	0,499305	21,195299	0,532866	21,392161	0,557796	21,917949	0,634436	21,730190	0,609700
24,000000	0,909675	23,513675	0,842230	23,349810	0,818399	24,652350	1,000047	24,514150	0,982735
24,000000	0,909675	23,513675	0,842230	23,349810	0,818399	21,125000	0,528413	21,209061	0,539872
17,933305	0,097860	17,577137	0,050058	17,517808	0,042040	17,597650	0,056779	17,903973	0,097008
19,066695	0,249524	18,686538	0,198097	18,604425	0,186691	18,880876	0,228356	19,153514	0,264440
19,933305	0,365490	20,063462	0,381834	20,156279	0,393275	19,945299	0,370678	20,229821	0,408659
28,066695	1,453860	28,172863	1,463953	28,242896	1,469768	27,505876	1,381585	27,686794	1,407851
7,000000	-1,365181	7,180662	-1,337248	7,158649	-1,336974	6,847650	-1,380579	6,970533	-1,368011
7,000000	-1,365181	7,180662	-1,337248	7,158649	-1,336974	8,486325	-1,161475	8,465735	-1,167662
11,500000	-0,763014	11,868162	-0,711748	12,008181	-0,691403	10,125000	-0,942372	9,960938	-0,967314
11,500000	-0,763014	11,868162	-0,711748	12,008181	-0,691403	13,701175	-0,464210	13,374262	-0,509947
17,066695	-0,018106	16,874038	-0,043763	16,723642	-0,063679	17,277350	0,013952	16,787587	-0,052581
10,933305	-0,038846	10,764637	-0,085900	10,637025	-0,073932	12,029274	-0,687756	11,969209	-0,698217
16,933305	-0,035955	16,945299	-0,034254	16,944973	-0,034216	15,000000	-0,290547	15,324065	-0,248685
22,066695	0,650969	22,054701	0,647545	22,031590	0,642917	20,109401	0,392620	20,387244	0,429753
22,066695	0,650969	22,297863	0,679992	22,448912	0,698471	24,000000	0,912823	24,277190	0,950983
11,933305	-0,705031	12,188462	-0,669007	12,362295	-0,644263	13,154274	-0,537335	13,105928	-0,545903
9,000000	-1,097551	8,631838	-1,143603	8,400099	-1,171712	7,527350	-1,289698	7,107900	-1,349605
9,000000	-1,097551	8,631838	-1,143603	8,400099	-1,171712	9,888675	-0,973970	9,688638	-1,003800
14,000000	-0,428476	14,243162	-0,394828	14,428026	-0,369272	12,250000	-0,658243	12,269377	-0,657996
14,000000	-0,428476	14,243162	-0,394828	14,428026	-0,369272	15,562500	-0,215336	15,515625	-0,223017
17,066695	-0,018106	16,936538	-0,035423	16,924737	-0,036900	18,875000	0,227571	18,761873	0,211962
14,933305	-0,303586	14,827137	-0,316902	14,838120	-0,314681	12,986325	-0,559791	12,989173	-0,561547
7,933305	-1,240291	7,458975	-1,300110	7,214781	-1,329502	7,097650	-1,347152	7,216473	-1,335057
13,066695	-0,553366	12,568376	-0,618311	12,301398	-0,652370	12,519551	-0,622202	12,756215	-0,592762
12,933305	-0,571216	13,431624	-0,503119	13,629304	-0,475598	12,722650	-0,595046	13,122723	-0,543652
16,066695	-0,151921	16,541025	-0,088200	16,715921	-0,064707	15,986325	-0,158668	16,209799	-0,130001
17,066695	-0,018106	17,541025	0,045240	17,693499	0,065428	19,250000	0,277711	19,296875	0,283649
15,933305	-0,169770	16,431624	-0,102799	16,606882	-0,079222	15,388675	-0,238578	15,108637	-0,277551
11,066695	-0,082096	10,686538	-0,086924	10,535127	-0,087496	11,527350	-0,754867	10,920400	-0,887851
7,933305	-1,240291	7,577137	-1,284343	7,448510	-1,298388	9,154274	-1,072166	8,932176	-1,105162
12,000000	-0,696106	11,513675	-0,759051	11,349810	-0,779046	11,000000	-0,825378	11,117187	-0,812383
12,000000	-0,696106	11,513675	-0,759051	11,349810	-0,779046	9,533226	-1,021497	9,708449	-1,001146
4,933305	-1,641736	5,195299	-1,602175	5,392161	-1,572130	3,847650	-1,781702	4,126475	-1,749099
6,066695	-1,490072	6,304701	-1,454137	6,478778	-1,427479	9,048825	-1,086265	9,084799	-1,084711
13,000000	-0,562291	13,000000	-0,560715	13,022422	-0,556387	14,250000	-0,390828	14,043123	-0,420324
13,000000	-0,562291	13,000000	-0,560715	13,022422	-0,556387	11,000000	-0,825378	10,886873	-0,843244
8,933305	-1,106476	8,577137	-1,150902	8,448510	-1,165268	7,750000	-1,259928	7,730623	-1,266133
13,066695	-0,553366	12,686538	-0,602544	12,535127	-0,621256	14,548825	-0,350872	14,541984	-0,353479
21,933305	0,633120	21,945299	0,632946	22,025989	0,642171	21,347650	0,558183	21,353346	0,559205
31,066695	1,855305	31,054701	1,848506	31,112606	1,851785	30,755876	1,816135	30,913357	1,840193
8,933305	-1,106476	8,945299	-1,101775	8,956691	-1,097618	8,945299	-1,100107	9,300134	-1,055858
29,066695	1,587675	29,054701	1,581625	29,043309	1,576319	28,443376	1,506936	28,485699	1,514900
17,933305	0,097860	17,945299	0,099186	17,956691	0,100465	16,722650	-0,060215	16,498031	-0,091380
25,066695	1,052415	25,054701	1,047865	25,043309	1,043838	28,722650	1,544277	28,498031	1,516552
41,933305	3,309421	41,945299	3,301748	41,956691	3,295353	40,722650	3,148770	40,498031	3,124485
45,066695	3,728716	45,054701	3,716667	45,043309	3,706244	44,443376	3,646260	44,497418	3,660380
9,933305	-0,972661	9,945299	-0,968335	9,899113	-0,972163	9,945299	-0,966399	10,323571	-0,918723
10,066695	-0,954811	10,054701	-0,953736	9,985730	-0,960632	9,693376	-1,000083	9,968044	-0,966361
9,933305	-0,972661	10,250962	-0,927547	10,344794	-0,912834	9,222650	-1,063023	9,439283	-1,037212
10,066695	-0,954811	10,360363	-0,912949	10,431411	-0,901503	11,298825	-0,785423	11,198234	-0,801523
13,500000	-0,495383	13,680662	-0,469888	13,681071	-0,468707	13,375000	-0,507822	12,957185	-0,565833
13,500000	-0,495383	13,680662	-0,469888	13,681071	-0,468707	16,062500	-0,148482	15,830155	-0,180872
19,500000	0,307507	19,562500	0,314985	19,585938	0,317351	18,750000	0,210857	18,703125	0,204090
19,500000	0,307507	19,562500	0,314985	19,585938	0,317351	17,562500	0,052079	17,564530	0,051525
15,000000	-0,294661	14,819338	-0,317943	14,715490	-0,331005	16,375000	-0,106699	16,425935	-0,101040
15,000000	-0,294661	14,819338	-0,317943	14,715490	-0,331005	15,548825	-0,217165	15,678549	-0,201186
15,933305	-0,169770	16,063462	-0,151927	16,063544	-0,151552	14,722650	-0,327631	14,931163	-0,301332
18,066695	0,115709	18,172863	0,129552	18,150161	0,126220	16,470726	-0,093899	16,667356	-0,068691
14,066695	-0,419551	14,541025	-0,355081	14,693499	-0,333933	16,000000	-0,156839	16,230315	-0,127252
12,933305	-0,571216	13,431624	-0,503119	13,606882	-0,478583	13,917949	-0,435225	13,845347	-0,446825
26,066695	1,186230	26,054701	1,181305	26,043309	1,176958	26,054701	1,187552	25,633614	1,132737
11,933305	-0,705031	11,945299	-0,701455	11,956691	-0,698257	12,056624	-0,684099	11,725392	-0,730887
21,066695	0,517154	20,568376	0,449209	20,381400	0,423243	21,277350	0,548783	20,990404	0,510573
17,933305	0,097860	17,458975	0,034291	17,294782	0,012351	18,138675	0,129118	18,122078	0,126233
16,933305	-0,035955	16,889637	-0,041682	16,947495	-0,033880	15,000000	-0,290547	15,253752	-0,258106
18,066695	0,115709	17,999038	0,106357	18,034112	0,110771	17,187500	0,001939	17,396407	0,028997
17,500000	0,039877	17,618162	0,055533	17,686854	0,064544	19,375000	0,294424	19,539063	0,316101
17,500000	0,039877	17,618162	0,055533	17,686854	0,064544	17,625000	0,060436	17,648438	0,062768
17,000000	-0,027031	16,937500	-0,035295	16,903359	-0,039755	15,875000	-0,173553	15,757813	-0,190565
17,000000	-0,027031	16,937500	-0,035295	16,903359	-0,039755	16,937500	-0,031488	16,890625	-0,038775

Funções *wavelets* obtidas a partir da série original (Família BIOR) - continuação

série wavelet packet (SHANNON) - BIOR 2.6		série wavelet packet (SHANNON) - BIOR 2.8		série wavelet packet (SHANNON) - BIOR 3.1		série wavelet packet (SHANNON) - BIOR 3.3		série wavelet packet (SHANNON) - BIOR 3.5	
série recomposta	z								
9,932275	-0,972592	9,857777	-0,983379	9,030309	-1,106675	10,250848	-0,948833	10,604006	-0,899154
23,317433	0,823351	23,346703	0,827944	23,090928	0,797525	23,825943	0,904169	24,072076	0,936233
25,572739	1,125954	25,747162	1,150284	25,221572	1,086074	25,259994	1,099917	25,320740	1,106397
23,525474	0,851264	23,569729	0,857893	23,907191	0,908070	22,944465	0,783847	22,652567	0,742786
21,478208	0,576574	21,392295	0,565502	25,032191	1,060427	23,628740	0,877251	23,192496	0,816366
27,455146	1,378525	27,405216	1,372931	28,596572	1,543144	27,312819	1,380128	26,940527	1,327136
37,561937	2,734595	37,506603	2,729368	38,060619	2,824840	37,284670	2,741287	37,139639	2,717040
27,856970	1,432439	27,857651	1,433685	27,939381	1,454141	28,152830	1,494790	28,487264	1,537921
24,281857	0,952751	24,297166	0,955575	23,153428	0,805990	23,649481	0,880082	24,046770	0,932784
18,563546	0,185502	18,604687	0,191176	16,217809	-0,133287	16,383160	-0,111772	16,515590	-0,093542
12,845235	-0,581748	12,912207	-0,573223	14,782191	-0,327710	14,616840	-0,352875	14,472942	-0,371908
16,923612	-0,034535	16,924153	-0,034490	18,846572	0,222721	18,350519	0,156773	17,918825	0,097687
21,001988	0,512678	20,936099	0,504243	21,060619	0,522565	20,901177	0,504938	20,556315	0,457116
21,658944	0,600824	21,630827	0,597533	20,939381	0,506146	21,877348	0,638186	22,082847	0,655147
24,445753	0,974742	24,414021	0,971266	21,121237	0,530774	22,561166	0,731527	22,961514	0,784889
21,226277	0,542772	21,238549	0,544857	19,121237	0,259918	20,561166	0,458527	20,889749	0,502555
18,006801	0,110801	18,063077	0,118447	17,939381	0,099862	19,048542	0,252053	19,264848	0,281119
19,203374	0,271350	19,210039	0,272464	19,060619	0,251709	19,414758	0,302042	19,389378	0,298089
20,270095	0,414477	20,268535	0,414601	19,939381	0,370718	19,732998	0,345482	19,635422	0,331619
27,700793	1,411484	27,683198	1,410259	28,060619	1,470560	27,394727	1,391309	27,305544	1,376880
7,001638	-1,365807	7,009394	-1,365866	9,096572	-1,097702	8,094069	-1,243234	7,978350	-1,256971
8,485537	-1,166706	8,514732	-1,163726	9,532191	-1,038707	8,222490	-1,225704	7,956405	-1,259961
9,969435	-0,967606	10,020069	-0,961586	11,407191	-0,784779	10,198371	-0,955996	9,949680	-0,988324
13,256739	-0,526534	13,205537	-0,533834	14,721572	-0,335919	14,021713	-0,434110	13,958173	-0,442059
16,544043	-0,085463	16,391005	-0,106082	16,903428	-0,040435	16,658656	-0,074167	16,722343	-0,065366
11,959017	-0,700655	11,954337	-0,701848	10,467809	-0,911998	10,717735	-0,885103	10,939626	-0,853477
15,503843	-0,225031	15,606135	-0,211476	12,875000	-0,585997	13,259675	-0,538128	13,466627	-0,509045
20,523360	0,448458	20,590491	0,457834	24,125000	0,937568	24,284475	0,966759	24,303345	0,967749
24,413023	0,970351	24,486381	0,980983	23,812500	0,895246	23,835938	0,905533	23,772236	0,895371
13,074080	-0,551043	13,047592	-0,555043	11,937500	-0,712960	11,914063	-0,721804	11,873297	-0,726179
6,864990	-1,384142	6,697269	-1,407779	7,125000	-1,364707	7,089844	-1,380311	7,017340	-1,387934
9,627142	-1,013533	9,604743	-1,017357	9,375000	-1,059995	9,363281	-1,069986	9,204364	-1,089893
12,389294	-0,642923	12,512218	-0,626935	12,625000	-0,619854	12,878225	-0,590196	12,765998	-0,604525
15,537281	-0,220545	15,569189	-0,216438	16,875000	-0,044285	17,634675	0,059060	17,702241	0,068171
18,685267	0,201834	18,626160	0,194059	15,780309	-0,192537	16,857679	-0,047000	17,091854	-0,015010
12,948573	-0,567882	12,913951	-0,572989	9,340928	-1,064609	10,547237	-0,908376	10,934838	-0,854069
7,211879	-1,337598	7,201743	-1,340037	7,939381	-1,254417	8,738767	-1,155232	9,032211	-1,113354
12,801048	-0,587676	12,801471	-0,588093	13,060619	-0,560859	12,823733	-0,597634	12,866539	-0,615353
13,260364	-0,526048	13,312733	-0,519440	13,909072	-0,445954	13,077763	-0,562959	12,795142	-0,600553
16,310041	-0,116860	16,367066	-0,109297	18,969691	0,239395	17,892321	0,094229	17,660587	0,062495
19,359718	0,292328	19,421398	0,300846	19,625000	0,328142	18,548919	0,183855	18,320959	0,152488
14,993556	-0,293499	14,938081	-0,301184	15,875000	-0,179713	15,047556	-0,294082	14,776257	-0,330573
10,627394	-0,879325	10,454765	-0,903214	12,062500	-0,696032	11,835256	-0,732561	11,764020	-0,741071
8,865958	-1,115664	8,842575	-1,119703	8,187500	-1,220815	8,912019	-1,131584	9,284247	-1,079007
11,234375	-0,797883	11,318851	-0,787183	7,217809	-1,352139	8,182579	-1,231152	8,589053	-1,173746
9,815854	-0,988212	9,873424	-0,981278	9,153428	-1,090002	9,646937	-1,031267	9,678436	-1,025288
4,267480	-1,732661	4,339530	-1,724382	6,471572	-1,453200	6,700038	-1,433519	6,552907	-1,451226
9,084943	-1,086282	9,070985	-1,089031	10,657191	-0,886350	10,733346	-0,882972	10,515031	-0,911279
13,902407	-0,439903	13,802440	-0,453681	11,342809	-0,793498	11,571341	-0,768586	11,473012	-0,780729
10,833413	-0,851682	10,813191	-0,855084	8,528428	-1,174644	9,214024	-1,093060	9,426848	-1,059574
7,764420	-1,263462	7,823941	-1,256487	9,221572	-1,080773	9,942226	-0,990960	10,191566	-0,953360
14,527731	-0,356000	14,520207	-0,357297	13,907191	-0,446209	14,147409	-0,416952	14,069731	-0,426856
21,291043	0,551462	21,216473	0,541892	21,092809	0,526924	21,140973	0,537670	21,036361	0,522535
30,963025	1,849192	30,974587	1,852234	30,778428	1,838628	30,922918	1,872907	31,091454	1,892812
9,505155	-1,029900	9,644235	-1,012054	8,939381	-1,118990	8,836423	-1,141902	8,964816	-1,122538
28,508638	1,519876	28,525482	1,523363	29,060619	1,605988	28,272952	1,511186	27,959012	1,465932
16,382269	-0,107169	16,318262	-0,115850	19,409072	0,298899	18,596613	0,190365	18,228621	0,139905
28,379827	1,502593	28,317957	1,495496	29,469691	1,661388	29,198871	1,637575	29,076207	1,618180
40,377386	3,112356	40,317652	3,106842	37,530309	2,753021	37,801129	2,811784	37,953090	2,827895
44,500826	3,665615	44,494705	3,667746	43,590928	3,573798	44,403387	3,712993	44,859270	3,769047
10,494413	-0,897167	10,583291	-0,885955	9,939381	-0,983562	10,586423	-0,903027	10,997280	-0,845560
10,083631	-0,952284	10,136801	-0,945911	10,060619	-0,967143	9,741702	-1,018332	9,669687	-1,026480
9,542996	-1,024823	9,601846	-1,017746	10,971572	-0,843774	10,081669	-0,971926	9,764869	-1,013509
11,145236	-0,809844	11,111191	-0,815068	13,157191	-0,547780	11,997790	-0,710375	11,585392	-0,765414
12,747476	-0,594864	12,620536	-0,612389	14,562500	-0,357462	13,685637	-0,479984	13,408111	-0,517020
15,753963	-0,191471	15,727607	-0,195165	15,187500	-0,272820	15,145212	-0,280752	15,233025	-0,268326
18,760451	0,211921	18,834678	0,222060	16,312500	-0,120463	16,781250	-0,057432	17,037823	-0,022374
17,586628	0,054425	17,610697	0,057701	17,937500	0,099607	18,593750	0,189974	18,822504	0,220837
16,412806	-0,103072	16,386716	-0,106658	17,062500	-0,018892	17,648438	0,060939	17,828363	0,085359
15,689093	-0,200175	15,672107	-0,202618	13,687500	-0,475962	13,945313	-0,444538	14,055401	-0,428809
14,965380	-0,297279	14,957497	-0,298577	14,187500	-0,408248	14,028025	-0,433248	14,042596	-0,430554
16,733132	-0,060092	16,754789	-0,057233	18,562500	0,184250	17,896575	0,094810	17,789946	0,080124
16,371031	-0,108677	16,463615	-0,096332	18,657191	0,197073	17,685290	0,065969	17,453556	0,034281
13,849660	-0,446980	13,867482	-0,444947	14,471572	-0,369776	13,394169	-0,519769	13,033423	-0,568081
25,458141	1,110578	25,359816	1,098270	26,060619	1,199705	25,366702	1,114483	25,109879	1,077661
11,614497	-0,746881	11,568798	-0,753619	11,939381	-0,712706	12,211423	-0,681214	12,380356	-0,657079
20,900706	0,499088	20,866247	0,494863	20,090928	0,391242	20,851925	0,498215	21,166284	0,540240
18,143021	0,129078	18,159983	0,131460	15,030309	-0,294108	15,896742	-0,178168	16,165097	-0,141306
15,385337	-0,240932	15,453719	-0,231943	14,750000	-0,332069	15,427644	-0,242200	15,568452	-0,222615
17,482048	0,040393	17,520065	0,045530	19,250000	0,277356	19,444631	0,306119	19,376350	0,296314
19,578759	0,321717	19,586412	0,323004	19,812500	0,353535	19,730469	0,345136	19,578876	0,323913
17,624340	0,059485	17,603019	0,056670	16,437500	-0,103535	16,285156	-0,125149	16,176032	-0,139816
15,669922	-0,202748	15,619626	-0,209665	15,812500	-0,188177	15,695313	-0,205663	15,658691	-0,210317
16,854004	-0,043874	16,832642	-0,046778	17,937500	0,099607	17,960938	0,103595	18,026855	0,112409

Funções *wavelets* obtidas a partir da série original (Família BIOR) – continuação

série wavelet packet (SHANNON) – BIOR 3.7		série wavelet packet (SHANNON) – BIOR 3.9		série wavelet packet (SHANNON) – BIOR 4.4		série wavelet packet (SHANNON) – BIOR 5.5		série wavelet packet (SHANNON) – BIOR 6.8	
série recomposta	z								
10,695264	-0,885752	10,708188	-0,883632	10,004316	-0,956648	12,068537	-0,689251	9,961829	-0,967207
24,159892	0,947167	24,196001	0,951694	23,750130	0,875151	24,117166	0,922821	23,748892	0,879439
25,371801	1,112143	25,419826	1,118224	24,949923	1,035038	24,446561	0,966893	25,321026	1,090011
22,548831	0,727856	22,516598	0,723173	23,461518	0,836690	23,117166	0,789024	23,737104	0,877860
23,016647	0,791539	22,937940	0,780506	21,729248	0,605843	24,051645	0,914055	21,553076	0,585330
26,775248	1,303192	26,683852	1,290223	27,211937	1,336479	25,000429	1,040999	27,055688	1,322353
37,074609	2,705228	37,023278	2,697139	37,885385	2,758847	38,154232	2,800941	37,584983	2,732652
28,696886	1,564782	28,819283	1,580798	27,908293	1,429277	27,860417	1,423658	27,944712	1,424129
24,277763	0,963213	24,407918	0,980530	24,682919	0,999456	24,011985	0,908748	24,835438	1,024972
16,599398	-0,802031	16,652248	-0,074806	17,610302	0,056943	17,159721	-0,008065	17,483096	0,040195
14,394034	-0,382244	14,351439	-0,387884	13,381178	-0,506639	15,841819	-0,184397	13,811123	-0,451631
17,661671	0,062574	17,505490	0,041297	16,491689	-0,092126	16,175920	-0,139695	16,388368	-0,106433
20,338031	0,426903	20,202183	0,408244	21,543044	0,581029	20,978548	0,502883	21,319614	0,554600
22,205269	0,681088	22,304582	0,694323	21,422195	0,564925	20,876997	0,489296	21,385643	0,529260
23,162217	0,811355	23,290426	0,828470	24,682785	1,000038	23,160890	0,794874	24,744479	1,012789
20,991032	0,515795	21,022779	0,519905	21,154467	0,529247	23,000000	0,773348	20,914276	0,499769
19,302492	0,285937	19,294845	0,284780	17,584764	0,053540	18,044188	0,110274	17,783263	0,080400
19,314439	0,287563	19,243558	0,277801	19,772882	0,345134	19,081932	0,249121	19,969275	0,373195
19,581242	0,323883	19,551276	0,319673	19,824703	0,352039	19,526305	0,308577	19,744010	0,343023
27,320745	1,377450	27,354932	1,381539	27,884375	1,426089	28,081002	1,453171	27,787505	1,420373
8,011034	-1,251152	8,067959	-1,242896	7,004277	-1,356440	8,037817	-1,228550	7,271023	-1,327615
7,869952	-1,270358	7,827290	-1,275644	8,163560	-1,201951	7,959569	-1,239019	8,046662	-1,223729
9,848520	-1,001018	9,785376	-1,009202	10,042135	-0,951608	9,262249	-1,064725	10,167611	-0,939645
13,946739	-0,443134	13,942217	-0,443568	13,532440	-0,486482	13,833526	-0,453101	13,343588	-0,514253
16,753436	-0,061062	16,764203	-0,059572	16,980229	-0,027022	16,949440	-0,036200	16,627324	-0,074427
11,050766	-0,837358	11,114400	-0,828358	11,507515	-0,756328	9,043181	-1,094035	11,540361	-0,755778
13,556760	-0,496221	13,602541	-0,489789	15,123648	-0,274434	17,220312	0,000042	15,395914	-0,239363
24,271416	0,962349	24,228625	0,956133	21,132641	0,526338	24,026193	0,910649	21,231252	0,542225
23,714566	0,886546	23,666587	0,879655	24,074193	0,918336	21,716120	0,601568	24,147421	0,932818
11,886209	-0,723631	11,916427	-0,719223	12,788281	-0,585650	11,118223	-0,816400	12,783881	-0,589220
7,024261	-1,385480	7,059727	-1,380089	7,795208	-1,251038	8,777003	-1,129649	7,818897	-1,254233
9,128722	-1,099003	9,096488	-1,102941	8,713934	-1,128607	9,283014	-1,061946	8,219685	-1,200551
12,680991	-0,615438	12,625767	-0,622702	12,375177	-0,640701	13,053690	-0,557440	12,609167	-0,612622
17,681067	0,065215	17,647564	0,060629	16,236873	-0,126083	16,000131	-0,163215	16,627229	-0,074440
17,158459	-0,005927	17,177404	-0,003347	18,431766	0,166413	16,903450	-0,042353	18,006985	0,110365
11,113169	-0,828863	11,215287	-0,814630	12,983710	-0,559607	12,979302	-0,567393	12,867360	-0,578039
9,181704	-1,091791	9,273319	-1,078879	7,086605	-1,345442	7,955499	-1,239564	7,248052	-1,330692
12,581907	-0,628926	12,488435	-0,641389	12,969734	-0,561469	13,120392	-0,548516	12,952260	-0,566668
12,663692	-0,617793	12,582236	-0,628625	12,726727	-0,593853	12,785206	-0,593363	12,785003	-0,589070
17,644902	0,060292	17,691657	0,066629	16,749819	-0,057727	17,754277	0,071485	17,187585	0,000614
18,299318	0,149376	18,335911	0,154295	18,924283	0,232047	17,516115	0,039619	18,864321	0,225197
14,626938	-0,305039	14,514999	-0,365628	15,289606	-0,252318	15,665027	-0,208051	14,979330	-0,295161
11,693630	-0,749846	11,614769	-0,760271	11,133334	-0,806192	11,389464	-0,780109	10,808855	-0,853756
9,499393	-1,048544	9,635221	-1,029634	8,416471	-1,168247	7,594184	-1,287907	8,462477	-1,168032
8,818805	-1,141192	8,970273	-1,120115	11,060865	-0,815849	9,442088	-1,040663	11,222490	-0,798354
9,651867	-1,027788	9,619925	-1,031715	10,287038	-0,918971	12,725877	-0,601301	10,371279	-0,912366
6,426858	-1,466804	6,337508	-1,478363	3,833711	-1,778956	5,296305	-1,593557	3,907273	-1,778158
10,361621	-0,931171	10,259956	-0,944624	9,103229	-1,076729	7,992681	-1,234589	9,211876	-1,067657
11,412243	-0,788151	11,382020	-0,791942	14,149585	-0,404240	11,614842	-0,749954	14,110638	-0,411514
9,578725	-1,037745	9,703700	-1,020316	10,675956	-0,867143	11,970958	-0,702307	13,338910	-0,916701
10,351139	-0,932597	10,470256	-0,916008	7,437806	-1,298667	9,367710	-1,050614	7,700734	-1,270026
13,947327	-0,443054	13,818623	-0,460386	15,308548	-0,249794	13,737196	-0,465989	15,127323	-0,275339
20,911943	0,505029	20,785650	0,487638	20,972809	0,505039	20,345221	0,418146	20,878266	0,494946
31,244987	1,911651	31,371335	1,928063	31,011659	1,842838	31,693085	1,936458	31,056206	1,858185
9,135339	-1,098102	9,298908	-1,075397	9,153174	-1,070073	8,845183	-1,120527	9,601416	-1,051481
27,800841	1,442804	27,705302	1,429215	28,533365	1,512575	29,097001	1,589109	28,613595	1,531020
18,012094	0,110277	17,868312	0,090667	15,868008	-0,175239	18,189201	0,129676	15,598493	-0,212230
28,986942	1,604266	28,924871	1,595165	29,762449	1,676366	26,955889	1,302634	29,584885	1,661075
38,014701	2,833202	38,044524	2,836103	39,868008	3,023056	37,719756	2,742809	39,620292	3,005263
45,095371	3,797083	45,227271	3,813481	44,498335	3,640103	46,986740	3,982705	44,487538	3,657184
11,223901	-0,813790	11,358182	-0,795185	10,131089	-0,939754	10,300735	-0,925778	10,469312	-0,899235
9,618133	-1,032380	9,574192	-1,037938	10,265323	-0,921865	11,458481	-0,770875	10,417672	-0,906152
9,603443	-1,034380	9,510318	-1,046630	9,417635	-1,034830	6,948623	-1,374281	9,663131	-1,007215
11,397672	-0,790135	11,303495	-0,802627	10,982116	-0,826344	12,939140	-0,572767	10,711993	-0,866730
13,300577	-0,531095	13,259289	-0,536496	13,218955	-0,528258	13,083248	-0,553486	12,991656	-0,561391
15,312158	-0,257261	15,377700	-0,248238	15,601422	-0,210765	14,126779	-0,413864	15,607977	-0,210959
17,171678	-0,004128	17,251841	0,006782	18,649174	0,195386	17,922673	0,094016	18,628025	0,193547
18,879135	0,228306	18,881712	0,228563	17,882055	0,093158	20,278340	0,409197	17,967920	0,105133
17,847611	0,087886	17,821829	0,084342	16,366938	-0,108750	16,513810	-0,094486	16,298774	-0,118434
14,077104	-0,425387	14,072191	-0,425882	15,463709	-0,229117	12,769972	-0,595401	15,528855	-0,221557
14,060846	-0,427601	14,076897	-0,425242	14,736982	-0,325962	15,738771	-0,198184	14,755794	-0,325101
17,798838	0,081247	17,835945	0,086263	17,272658	0,011948	18,495325	0,107635	17,303312	0,016115
17,401370	0,027140	17,402012	0,027216	16,086809	-0,146081	17,117751	-0,013681	16,301767	-0,118033
12,868444	-0,589921	12,775098	-0,602381	13,447778	-0,497764	11,397568	-0,779025	13,507824	-0,492255
24,968931	1,057301	24,872286	1,043718	25,880120	1,158998	26,238723	1,206680	25,548587	1,120491
12,484988	-0,642120	12,556639	-0,632108	11,682685	-0,732984	11,883100	-0,714062	11,611629	-0,746232
21,322718	0,560947	21,412699	0,572962	21,404993	0,562632	20,972079	0,502017	21,307426	0,552428
16,264279	-0,127651	16,303531	-0,122257	17,403085	0,029329	16,031710	-0,158990	17,341846	0,021276
15,593741	-0,218930	15,589181	-0,219461	15,593869	-0,211771	17,187544	-0,004343	15,801524	-0,185036
19,311102	0,287109	19,269648	0,281351	17,389728	0,027549	19,475583	0,301791	17,698248	0,069013
19,489465	0,311389	19,442817	0,304915	19,515707	0,310862	17,746762	0,070479	19,396588	0,296489
16,128828	-0,146089	16,108688	-0,148770	17,716905	0,071149	16,092078	-0,150913	17,664743	0,064525
15,661547	-0,209700	15,669393	-0,208546	15,764140	-0,189080	16,990607	-0,030692	15,647013	-0,205731
18,087622	0,120558	18,124932	0,125586	16,820845	-0,048262	18,092424	0,116728	16,732952	-0,060280

APÊNDICE F – Funções *wavelets* obtidas a partir da série original (Família COIF)

série wavelet packet (SHANNON) – COIF 1		série wavelet packet (SHANNON) – COIF 2		série wavelet packet (SHANNON) – COIF 3		série wavelet packet (SHANNON) – COIF 4		série wavelet packet (SHANNON) – COIF 5	
série recomposta	z								
10,106104	-0,941938	10,037487	-0,953116	9,989005	-0,961384	9,959542	-0,966612	9,949696	-0,968837
23,561766	0,849523	23,735258	0,873984	23,793706	0,883178	23,811638	0,886759	23,815931	0,888165
24,540654	0,979850	24,881284	1,026849	25,042189	1,049998	25,129396	1,063071	25,177640	1,070529
23,741728	0,873483	24,022272	0,912268	24,105954	0,924900	24,152508	0,932367	24,189682	0,938219
21,482968	0,572756	21,389534	0,561096	21,331373	0,554165	21,287945	0,549096	21,249796	0,544502
27,252735	1,340931	27,117246	1,325096	27,046156	1,317765	27,012748	1,315059	26,999763	1,314552
38,053461	2,778919	37,797960	2,749761	37,669495	2,737239	37,599496	2,731536	37,558715	2,728635
27,951060	1,433905	27,956629	1,437059	27,969835	1,441186	27,980339	1,444519	27,990106	1,447182
24,069195	0,917081	24,493983	0,975188	24,721943	1,007208	24,853149	1,026110	24,935738	1,038133
18,952047	0,235794	18,004371	0,109560	17,612893	0,057308	17,392400	0,027883	17,241555	0,007708
12,474463	-0,626619	13,337164	-0,512983	13,764159	-0,436954	14,007630	-0,424989	14,168980	-0,403779
17,080463	-0,013385	16,483557	-0,093296	16,345328	-0,112062	16,306510	-0,117406	16,298271	-0,118619
21,324860	0,551706	21,407659	0,563513	21,346922	0,556243	21,256175	0,544845	21,169451	0,533742
21,367451	0,557376	21,336192	0,553981	21,317926	0,552369	21,307939	0,551771	21,301051	0,551366
24,817995	1,016775	24,758202	1,010431	24,829313	1,021554	24,919774	1,030525	24,998893	1,046591
21,227578	0,538754	21,183048	0,533553	20,986626	0,508101	20,831638	0,488044	20,724840	0,474199
17,490447	0,041199	17,526329	0,045796	17,646227	0,061762	17,765876	0,077853	17,861179	0,090690
19,471727	0,304983	19,931252	0,366580	20,038500	0,381414	20,066790	0,385709	20,073387	0,386954
19,833335	0,353127	19,828046	0,352814	19,747288	0,342502	19,668926	0,332476	19,600752	0,323658
27,670672	1,396575	27,788861	1,414681	27,810030	1,419833	27,803560	1,420867	27,788553	1,420189
6,192647	-1,462988	6,662028	-1,403358	6,903683	-1,373639	7,076310	-1,352380	7,216360	-1,334892
9,773024	-0,986264	8,899726	-1,104878	8,541781	-1,154759	8,328897	-1,184788	8,175789	-1,206403
9,772155	-0,986399	10,097978	-0,945048	10,236903	-0,928260	10,306129	-0,920240	10,345688	-0,915805
12,990476	-0,557918	12,772317	-0,588326	12,838663	-0,580617	12,963247	-0,564725	13,092480	-0,547947
17,369255	0,025064	17,148692	-0,004576	16,940656	-0,032515	16,749598	-0,058122	16,577762	-0,081189
11,431734	-0,765446	11,451766	-0,764470	11,448910	-0,766313	11,448105	-0,767446	11,450462	-0,767850
15,172280	-0,267437	15,309050	-0,249960	15,405441	-0,237648	15,493031	-0,226247	15,574073	-0,215606
21,254331	0,542315	21,374845	0,559136	21,415022	0,565342	21,430236	0,568134	21,438450	0,569767
23,896244	0,894055	24,042945	0,915025	24,050093	0,917436	24,018083	0,914381	23,976121	0,909619
12,427322	-0,632895	12,487019	-0,626381	12,532523	-0,621523	12,553237	-0,619583	12,560023	-0,619255
7,446146	-1,296800	7,736603	-1,260024	7,953890	-1,233312	8,104968	-1,214749	8,213889	-1,201300
10,179258	-0,932198	8,961082	-1,096694	8,357631	-1,179365	8,002622	-1,228442	7,772216	-1,260451
12,418142	-0,634118	12,582407	-0,613658	12,684669	-0,601193	12,757397	-0,592267	12,815484	-0,585043
14,944751	-0,297730	15,788536	-0,186003	16,346453	-0,111912	16,719038	-0,062211	16,974057	-0,028116
18,834810	0,220185	18,400179	0,162355	18,034879	0,113693	17,764535	0,077674	17,562293	0,050662
13,393475	-0,504264	13,221839	-0,528366	13,077584	-0,548693	12,961385	-0,564974	12,868733	-0,577912
6,937522	-1,363797	7,029107	-1,354394	7,152894	-1,340340	7,295491	-1,323054	7,438340	-1,305164
12,832171	-0,578995	12,924322	-0,568051	12,943739	-0,566577	12,942252	-0,567534	12,933541	-0,569232
12,981040	-0,559175	12,909145	-0,570075	12,792106	-0,586838	12,664233	-0,604732	12,540754	-0,621836
15,819762	-0,181233	16,672413	-0,068106	17,094897	-0,011906	17,359277	0,023452	17,539053	0,047550
19,431096	0,299573	19,044583	0,248310	18,907666	0,230314	18,860718	0,224340	18,854909	0,223773
15,139190	-0,271843	15,186589	-0,266295	15,066214	-0,282975	14,936491	-0,300710	14,823739	-0,316092
11,444525	-0,763743	10,937972	-0,833004	10,793090	-0,853943	10,752137	-0,860565	10,745769	-0,862225
8,447936	-1,162703	8,342207	-1,179244	8,341330	-1,181543	8,361761	-1,180391	8,382626	-1,178703
11,140336	-0,804242	11,206518	-0,797183	11,288741	-0,787715	11,344600	-0,781295	11,378194	-0,777529
10,402733	-0,902445	10,499107	-0,891542	10,531893	-0,888844	10,542124	-0,888664	10,546750	-0,888878
3,642729	-1,802459	3,807178	-1,784157	3,781777	-1,790783	3,741913	-1,798513	3,715408	-1,803749
8,867944	-1,106784	8,915982	-1,102710	9,076818	-1,083269	9,176514	-1,071379	9,231173	-1,065031
14,083180	-0,412438	14,188985	-0,399362	14,146198	-0,405906	14,089858	-0,413987	14,026612	-0,422846
11,242836	-0,790596	10,737568	-0,859735	10,525032	-0,889761	10,424147	-0,904449	10,388740	-0,910039
7,353514	-1,308412	7,497392	-1,291931	7,637553	-1,257581	7,791065	-1,256748	7,936146	-1,238497
15,020936	-0,287587	15,087254	-0,279545	15,065610	-0,283056	14,988444	-0,293759	14,885499	-0,307821
21,111272	0,523269	20,992887	0,508188	20,876346	0,493365	20,803459	0,484273	20,764897	0,479563
30,875176	1,823216	31,018291	1,845444	31,068780	1,855262	31,083836	1,859759	31,084115	1,861539
9,023091	-1,086128	9,399115	-1,038267	9,601149	-1,013208	9,733908	-0,996801	9,828727	-0,985037
28,693298	1,532725	28,655255	1,530246	28,678151	1,538386	28,697336	1,540452	28,709552	1,543532
16,032936	-0,152851	15,647635	-0,204797	15,560459	-0,216935	15,503870	-0,224797	15,462560	-0,230540
29,291065	1,612311	29,550606	1,649674	29,449890	1,638948	29,402185	1,634758	29,377541	1,632991
40,297112	3,077634	39,827845	3,020521	39,709333	3,009799	39,660560	3,007300	39,636496	3,006896
44,550211	3,643884	44,666323	3,665909	44,665281	3,672004	44,651643	3,675093	44,640481	3,677043
9,219823	-1,059936	10,152178	-0,937818	10,340260	-0,914449	10,414031	-0,905803	10,468500	-0,899357
11,584845	-0,745061	10,321348	-0,915253	10,271992	-0,923571	10,310562	-0,919647	10,325364	-0,918526
8,588204	-1,144028	9,756338	-0,990618	9,960245	-0,965226	9,971683	-0,964988	9,946167	-0,969309
11,235978	-0,791509	10,514326	-0,889512	10,390477	-0,907740	10,416075	-0,905529	10,485513	-0,897079
13,146786	-0,537107	13,236618	-0,526395	13,162821	-0,537303	13,058631	-0,551963	12,952459	-0,566699
15,586691	-0,212263	15,529249	-0,220588	15,496446	-0,225488	15,489162	-0,226765	15,490472	-0,226802
19,090957	0,254288	18,868866	0,224872	18,816425	0,218122	18,840639	0,221654	18,848873	0,227785
17,479641	0,039761	17,837356	0,087282	17,941196	0,101175	17,958249	0,103592	17,954848	0,103234
16,229402	-0,126694	16,198221	-0,131356	16,208083	-0,130400	16,233561	-0,127166	16,251447	-0,124890
15,721957	-0,194254	15,595387	-0,211766	15,511674	-0,223453	15,461896	-0,230413	15,435537	-0,234159
14,573306	-0,347183	14,680400	-0,333714	14,701209	-0,331746	14,689082	-0,333813	14,666608	-0,337208
17,340652	0,021256	17,465818	0,037724	17,520238	0,044928	17,538455	0,047425	17,541420	0,047867
15,913860	-0,168705	16,125705	-0,141029	16,236570	-0,126594	16,308371	-0,117157	16,362050	-0,110078
13,345484	-0,510653	13,296450	-0,518414	13,304821	-0,518330	13,325316	-0,516281	13,348312	-0,513685
26,043299	1,179909	25,770090	1,145404	25,640067	1,129886	25,557659	1,120372	25,496497	1,113231
11,998267	-0,690019	11,829535	-0,714081	11,766718	-0,723849	11,738527	-0,728589	11,725039	-0,731078
21,248837	0,541584	21,188405	0,534268	21,203947	0,537139	21,225340	0,540720	21,244528	0,543796
17,724602	0,072374	17,438801	0,034120	17,314612	0,017452	17,248842	0,008676	17,208987	0,003346
15,400436	-0,237061	15,742418	-0,192154	15,872571	-0,175231	15,940006	-0,166443	15,978421	-0,161454
17,390535	0,027897	17,534761	0,046290	17,689651	0,067556	17,781516	0,079946	17,839379	0,087770
19,294388	0,281372	19,351404	0,289236	19,300183	0,282761	19,254119	0,276976	19,218042	0,272404
17,648157	0,062196	17,702583	0,069306	17,665207	0,064298	17,623644	0,058823	17,589711	0,054334
15,889098	-0,172001	15,800760	-0,184372	15,771220	-0,188773	15,771111	-0,189041	15,782378	-0,187709
16,883073	-0,039665	16,761195	-0,056263	16,708119	-0,063586	16,689455	-0,066169	16,687840	-0,066447

APÊNDICE G – Funções *wavelets* obtidas a partir da série original (Família DB)

série wavelet packet (SHANNON) – DB 1		série wavelet packet (SHANNON) – DB 2		série wavelet packet (SHANNON) – DB 3		série wavelet packet (SHANNON) – DB 4		série wavelet packet (SHANNON) – DB 5	
série recomposta	z	série recomposta	z	série recomposta	z	série recomposta	z	série recomposta	z
11,933305	-0,705031	12,300002	-0,662491	12,136353	-0,685305	11,291968	-0,795007	9,341653	-1,048856
24,066695	0,918600	24,685233	1,005553	24,710912	1,009151	24,288768	0,950936	24,507614	0,979221
24,000000	0,909675	22,671956	0,734405	23,597759	0,859151	24,849890	1,026315	24,807594	1,019336
24,000000	0,909675	24,516747	0,982862	23,141433	0,797660	22,708473	0,738645	23,928088	0,901723
23,500000	0,842767	24,237704	0,945280	24,433271	0,971738	23,376972	0,828449	21,839649	0,622446
23,500000	0,842767	24,527740	0,984342	25,327361	1,092219	26,035780	1,185623	26,303256	1,219344
38,066695	2,792011	38,033732	2,803331	37,959390	2,794420	38,099757	2,806254	37,969219	2,779382
27,933305	1,436010	27,892812	1,437550	27,466052	1,380414	27,649000	1,402338	28,492259	1,512070
24,066695	0,918600	23,524556	0,849233	24,962266	1,043022	24,912782	1,034764	24,369803	0,960792
18,933305	0,231675	17,609519	0,052595	16,264080	-0,129082	16,841584	-0,049492	17,427078	0,032372
15,000000	-0,294661	16,649244	-0,076735	15,673036	-0,208727	14,033794	-0,426680	13,418312	-0,503703
15,000000	-0,294661	15,290137	-0,259780	16,474791	-0,100689	17,155860	-0,007273	17,111303	-0,009855
21,066695	0,517154	21,038219	0,514373	21,219777	0,538711	21,154287	0,529861	20,951400	0,503664
20,933305	0,499305	20,900584	0,495836	21,317501	0,551880	21,658335	0,597573	21,910745	0,631953
24,000000	0,909675	22,495550	0,710646	22,677460	0,735138	23,168720	0,800473	23,596422	0,857371
24,000000	0,909675	23,626266	0,862931	22,814274	0,753574	22,267892	0,679459	21,859746	0,625133
17,933305	0,097860	17,939381	0,097021	17,945299	0,097467	18,009548	0,107408	17,973712	0,105471
19,066695	0,249524	19,060619	0,248029	19,054701	0,246961	19,230396	0,271413	19,406531	0,297075
19,933305	0,365490	19,939381	0,366389	19,751479	0,340854	19,839352	0,353218	20,149471	0,396426
28,066695	1,453860	28,060619	1,460151	27,584591	1,396387	27,198254	1,341786	27,040217	1,317895
7,000000	-1,365181	8,402566	-1,187399	8,494329	-1,176078	7,977690	-1,240235	7,391035	-1,309704
7,000000	-1,365181	6,862878	-1,394764	8,114900	-1,227207	8,629816	-1,152631	9,195342	-1,068422
11,500000	-0,763014	10,655172	-0,884017	9,192897	-1,081943	9,077640	-1,092472	9,054208	-1,087295
11,500000	-0,763014	13,018766	-0,565688	14,280495	-0,396376	14,178809	-0,407199	13,404274	-0,505580
17,066695	-0,018106	16,350756	-0,116935	16,525037	-0,093918	17,049365	-0,021579	17,077375	-0,014392
10,933305	-0,838846	9,709863	-1,011332	9,141149	-1,088917	10,282572	-0,930660	12,034788	-0,688715
16,933305	-0,035955	17,649244	0,057945	16,352083	-0,117224	14,102301	-0,417477	13,652186	-0,472428
22,066695	0,650969	23,290137	0,817662	24,960014	1,042718	24,656802	1,000376	22,504578	0,711364
22,066695	0,650969	21,425478	0,566529	21,581240	0,587420	23,275129	0,814767	24,680691	1,002366
11,933305	-0,705031	10,839286	-0,859221	10,301299	-0,932583	11,175521	-0,810650	11,879023	-0,709545
9,000000	-1,097551	10,869310	-0,855177	9,952726	-0,979555	7,637757	-1,285900	7,367722	-1,312821
9,000000	-1,097551	8,054728	-1,234245	9,283562	-1,069726	9,922360	-0,978995	8,998106	-1,108170
14,000000	-0,428476	12,979931	-0,570918	11,979314	-0,706466	11,993414	-0,700777	12,637579	-0,608107
14,000000	-0,428476	15,831266	-0,186900	17,114112	-0,014538	17,135774	-0,009971	16,650066	-0,071534
17,066695	-0,018106	16,350756	-0,116935	16,505671	-0,096527	17,490800	0,037722	18,295167	0,148457
14,933305	-0,303586	13,709863	-0,472611	12,885100	-0,584409	12,302539	-0,659251	11,919297	-0,704159
7,933305	-1,240291	7,939381	-1,249780	7,763719	-1,274529	7,880647	-1,253271	8,068244	-1,219144
13,066695	-0,553366	13,060619	-0,560051	12,614278	-0,620903	12,482060	-0,635134	12,641327	-0,607605
12,933305	-0,571216	13,649244	-0,480775	13,494465	-0,502295	12,978883	-0,568393	12,738828	-0,594567
16,066695	-0,151921	17,290137	0,009581	18,069225	0,114166	17,803391	0,079714	17,412265	0,030391
17,066695	-0,018106	17,013700	-0,027650	17,184649	-0,005033	18,179051	0,130179	18,570406	0,185264
15,933305	-0,169770	15,858116	-0,183284	15,288046	-0,260606	14,706041	-0,336373	14,868757	-0,309741
11,066695	-0,820996	10,995513	-0,838180	12,211564	-0,675170	11,979338	-0,702668	11,098083	-0,813977
7,933305	-1,240291	7,126202	-1,359299	7,580711	-1,299190	8,738213	-1,138069	9,310320	-1,053046
12,000000	-0,696106	10,732088	-0,873658	8,996830	-1,108364	8,836025	-1,124930	9,787728	-0,989205
12,000000	-0,696106	12,335000	-0,657778	12,132583	-0,685813	11,288119	-0,795524	10,567267	-0,884960
4,933305	-1,641736	5,649244	-1,558216	5,688149	-1,554218	5,128553	-1,622978	4,201077	-1,736283
6,066695	-1,490072	7,290137	-1,337221	8,585010	-1,163858	9,601969	-1,022035	10,182353	-0,936433
13,000000	-0,562291	11,350756	-0,790336	11,449803	-0,777819	11,939113	-0,708072	12,669113	-0,603890
13,000000	-0,562291	12,709863	-0,607291	11,749590	-0,737422	10,913287	-0,845878	10,521878	-0,891030
8,933305	-1,106476	8,939381	-1,115100	9,159426	-1,086454	9,011958	-1,101295	8,705420	-1,133937
13,066695	-0,553366	13,060619	-0,560051	13,784064	-0,463271	14,421687	-0,374572	14,191833	-0,400263
21,933305	0,633120	21,939381	0,635742	20,665574	0,464031	20,454091	0,435799	20,975700	0,506915
31,066695	1,855305	31,060619	1,864191	31,582314	1,935092	31,731683	1,950790	31,741879	1,946627
8,933305	-1,106476	8,939381	-1,115100	8,751479	-1,141426	8,780870	-1,132339	9,116685	-1,078940
29,066695	1,587675	29,060619	1,594831	28,584591	1,531140	28,016791	1,451745	27,632735	1,397130
17,933305	0,097860	18,635819	0,190817	18,688149	0,197568	18,163975	0,128154	17,222780	0,005052
25,066695	1,052415	26,266884	1,218570	27,585010	1,396444	28,711881	1,545121	29,472365	1,643135
41,933305	3,309421	37,437537	2,723035	37,363346	2,714101	37,862513	2,774384	38,779260	2,887705
45,066695	3,728716	47,659760	4,099766	46,539889	3,950666	45,370310	3,782954	44,573277	3,662514
9,933305	-0,972661	9,939381	-0,980420	10,334689	-0,928084	10,083008	-0,957414	9,247014	-1,061512
10,066695	-0,954811	10,060619	-0,964092	11,534139	-0,766455	13,232351	-0,534343	14,308192	-0,384703
9,933305	-0,972661	10,515306	-0,902854	7,112019	-1,362348	5,919445	-1,516732	6,686164	-1,403963
10,066695	-0,954811	11,058150	-0,829744	13,020808	-0,566122	11,940249	-0,707919	10,071773	-0,951220
13,500000	-0,495383	12,766747	-0,599630	12,997053	-0,569323	14,330025	-0,386885	14,795084	-0,319593
13,500000	-0,495383	14,162981	-0,411585	14,694953	-0,340526	14,923204	-0,307200	15,373904	-0,242190
19,500000	0,307507	17,696475	0,064306	17,090793	-0,017680	17,202206	-0,001047	17,675005	0,065526
19,500000	0,307507	20,657291	0,463070	19,962202	0,369250	18,903732	0,227530	18,197792	0,135436
15,000000	-0,294661	15,911815	-0,176052	17,327682	0,014241	17,907926	0,093757	17,364344	0,023983
15,000000	-0,294661	13,231234	-0,537073	12,647168	-0,616471	13,767776	-0,462416	14,907919	-0,304504
15,933305	-0,169770	16,524281	-0,093565	15,165375	-0,277136	13,984456	-0,433308	14,180808	-0,411473
18,066695	0,115709	19,073695	0,249791	19,204816	0,267190	18,375896	0,156622	17,663735	0,064019
14,066695	-0,419551	14,868393	-0,316580	16,336660	-0,119302	17,291124	0,010898	17,370306	0,024780
12,933305	-0,571216	12,473012	-0,639190	12,004478	-0,703075	11,718192	-0,737750	11,774241	-0,723557
26,066695	1,186230	26,060619	1,190790	26,248521	1,216348	26,178736	1,204828	25,881328	1,162922
11,933305	-0,705031	11,939381	-0,711060	12,415409	-0,647701	12,826883	-0,588812	12,755601	-0,592324
21,066695	0,517154	20,350756	0,421785	20,374847	0,424855	20,962905	0,504152	21,534495	0,581639
17,933305	0,097860	16,709863	-0,068571	15,567786	-0,222910	15,124359	-0,280177	15,581593	-0,214417
16,933305	-0,035955	17,519794	0,040511	17,376704	0,020874	16,726512	-0,064950	16,200380	-0,131669
18,066695	0,115709	19,065922	0,248744	19,592815	0,319474	19,387686	0,292542	18,619091	0,191775
17,500000	0,039877	17,367228	0,019963	18,091861	0,117216	19,040612	0,245918	19,518171	0,312005
17,500000	0,039877	16,537981	-0,091720	15,900683	-0,178051	16,007707	-0,161512	16,728611	-0,061031
17,000000	-0,027031	17,291266	0,009733	16,762950	-0,061858	15,958685	-0,168097	15,479481	-0,228072
17,000000	-0,027031	17,620513	0,054076	18,207404	0,132786	18,225639	0,136437	17,643689	0,061339

Funções *wavelets* obtidas a partir da série original (Família DB) – continuação

série wavelet packet (SHANNON) – DB 6		série wavelet packet (SHANNON) – DB 7		série wavelet packet (SHANNON) – DB 8		série wavelet packet (SHANNON) – DB 9		série wavelet packet (SHANNON) – DB 10	
série recomposta	z	série recomposta	z	série recomposta	z	série recomposta	z	série recomposta	z
9,619040	-1,009339	10,588995	-0,881866	11,418967	-0,774583	11,634265	-0,748321	11,248112	-0,799288
24,069234	0,919668	23,906563	0,897844	24,154221	0,931184	24,593676	0,990030	24,402661	0,963111
24,184920	0,935112	23,306086	0,817598	22,380943	0,693670	22,559465	0,717165	24,112466	0,924232
25,463027	1,105730	26,452299	1,238046	26,468804	1,241201	25,231676	1,075610	23,740362	0,874379
20,743185	0,475662	20,400293	0,429279	21,574274	0,585625	22,599784	0,722573	22,621152	0,724431
26,603662	1,257998	26,771615	1,280718	25,937949	1,170098	25,933116	1,169700	26,523860	1,247302
37,723310	2,742399	37,381262	2,698552	37,509925	2,720054	37,452287	2,714861	37,526911	2,721451
28,402999	1,498198	28,291584	1,483841	27,910701	1,434329	27,398043	1,366203	27,029354	1,315026
24,694715	1,003166	25,214406	1,072619	25,982728	1,176095	26,616489	1,261367	26,625187	1,260877
17,420569	0,032114	16,760054	-0,057189	15,986496	-0,162805	15,705781	-0,202176	16,103727	-0,148750
13,963047	-0,429442	14,719597	-0,329868	14,937117	-0,302360	14,545228	-0,357850	13,942147	-0,438351
16,199350	-0,130910	16,045260	-0,152711	16,558528	-0,086187	17,151860	-0,008201	17,345078	0,017561
21,179054	0,533848	20,898761	0,495892	20,674120	0,465058	20,724870	0,471076	21,013254	0,509010
21,692958	0,602451	21,409564	0,564154	20,976758	0,505593	20,728333	0,471540	20,728333	0,483630
24,219130	0,939678	24,815116	1,019259	24,881635	1,028614	24,611814	0,992463	24,060079	0,917213
21,504323	0,577269	21,389541	0,561478	21,739555	0,607763	22,037438	0,647141	22,351934	0,688362
17,812773	0,084471	17,770265	0,077812	17,951708	0,100416	17,895724	0,091579	17,724606	0,068409
19,455118	0,303714	19,147325	0,261837	19,041643	0,246403	19,257744	0,274278	19,452378	0,299890
20,548281	0,449644	20,411094	0,430722	19,613036	0,322935	19,548831	0,313324	19,681829	0,330631
27,070932	1,320375	27,690319	1,403490	27,899617	1,432844	27,625706	1,396741	27,422904	1,367752
6,683528	-1,401211	7,075513	-1,351395	8,563326	-1,157069	8,664045	-1,146741	8,593853	-1,154896
9,697088	-0,998920	8,294575	-1,188484	6,286103	-1,462081	6,233180	-1,472813	6,463345	-1,440334
9,434666	-1,033952	10,340863	-0,915026	11,418182	-0,774688	11,327479	-0,789473	10,718631	-0,870226
12,806453	-0,583840	13,259752	-0,524956	13,607795	-0,481410	14,302110	-0,390461	14,767239	-0,327808
16,709904	-0,062755	15,739861	-0,193524	15,194731	-0,268855	15,040845	-0,291369	15,735965	-0,198022
12,268250	-0,655687	11,976614	-0,696430	11,167648	-0,808244	10,084771	-0,956168	9,496037	-1,034025
14,907240	-0,303399	16,098641	-0,145578	17,033373	-0,025586	17,460091	0,033144	16,337056	-0,117490
21,359606	0,557950	21,484566	0,574177	22,187098	0,667707	23,088375	0,788112	24,263329	0,944444
24,216284	0,939298	22,945050	0,769351	22,114621	0,657999	21,889750	0,627331	22,165107	0,663332
12,387153	-0,639814	12,386885	-0,641603	11,740290	-0,731544	11,047784	-0,826991	11,127537	-0,815443
8,468444	-1,162936	9,803160	-0,986882	10,425268	-0,907679	10,310262	-0,925291	8,914919	-1,111881
7,527984	-1,288482	6,869683	-1,378901	7,261321	-1,331460	8,092833	-1,223362	9,138719	-1,081989
13,131568	-0,540439	12,956188	-0,565523	12,591304	-0,617559	12,093558	-0,686713	12,095569	-0,685749
16,350159	-0,110778	16,676606	-0,068341	16,752287	-0,060235	16,888323	-0,043552	16,586929	-0,084013
18,011912	0,111055	17,448017	0,034748	17,393756	0,025684	17,486188	0,036645	17,677311	0,062073
12,883622	-0,573539	13,344157	-0,513677	13,223435	-0,532891	13,009086	-0,563905	13,053040	-0,557470
7,400578	-1,305489	7,289498	-1,322799	7,443835	-1,307014	7,504088	-1,302336	7,331373	-1,324039
12,932223	-0,567051	12,979238	-0,562443	13,043501	-0,556992	13,133252	-0,547250	12,976666	-0,567783
12,634086	-0,606850	12,372259	-0,643557	12,133983	-0,678813	12,227659	-0,669381	12,822045	-0,588418
17,493231	0,041814	17,821179	0,084616	17,883989	0,091346	17,587469	0,050231	17,195982	-0,002144
18,517170	0,178504	18,474719	0,171952	18,406440	0,161323	18,388314	0,157654	18,303783	0,146005
15,116050	-0,275524	15,436521	-0,234061	15,823596	-0,184624	15,811923	-0,187938	15,638949	-0,211020
10,331771	-0,914194	9,944396	-0,968008	10,214854	-0,935862	10,846698	-0,853937	11,140665	-0,813684
9,292843	-1,052884	8,642760	-1,141954	7,862974	-1,250874	7,778375	-1,265543	8,174107	-1,211132
10,843207	-0,845921	11,234569	-0,795594	10,981765	-0,833142	10,205523	-0,939970	9,809660	-0,992007
10,575020	-0,881722	11,210952	-0,798750	11,309276	-0,789275	11,267982	-0,797454	11,147534	-0,812763
3,459916	-1,831542	4,111779	-1,747457	5,710954	-1,539117	6,405578	-1,449688	6,035115	-1,497707
9,677113	-1,001587	7,865534	-1,245819	6,560726	-1,425298	6,783033	-1,399057	7,660843	-1,279898
13,423101	-0,501522	13,572102	-0,483215	12,999239	-0,562920	12,204151	-0,671878	12,013635	-0,696726
10,899574	-0,838396	12,185322	-0,668539	13,192914	-0,536979	13,405351	-0,510751	12,873668	-0,581503
8,539174	-1,153494	8,048750	-1,221335	7,776997	-1,262390	7,904105	-1,248678	8,150180	-1,214338
13,298150	-0,518202	13,028807	-0,555819	13,191869	-0,537119	13,377317	-0,514511	13,479251	-0,500368
21,564660	0,585324	21,540008	0,581586	21,348904	0,555439	21,360442	0,556330	21,625624	0,591054
31,648986	1,931516	31,405196	1,899933	31,005690	1,848874	30,582200	1,793320	30,393325	1,765719
9,681443	-1,001009	10,150099	-0,940519	10,308428	-0,923329	10,128369	-0,950319	9,610602	-1,018676
27,691836	1,403262	28,293246	1,484063	29,005192	1,580926	29,590518	1,660298	29,780762	1,683650
16,136802	-0,139260	15,521491	-0,222706	15,327494	-0,251072	15,474079	-0,233256	16,163127	-0,140792
29,500541	1,644712	28,861601	1,560016	28,282004	1,484062	27,792226	1,419078	27,267587	1,346944
39,580009	2,990256	39,751783	3,015339	39,936832	3,045116	40,215865	3,085562	40,534144	3,124349
44,878612	3,697585	45,419996	3,772818	45,217649	3,752431	44,718078	3,698491	43,911819	3,576878
8,966300	-1,096476	10,107390	-0,946226	10,967369	-0,835070	11,385265	-0,781722	11,643816	-0,746273
12,655490	-0,603993	10,070973	-0,951093	9,955242	-0,970635	10,609938	-0,885803	11,932265	-0,707628
8,999295	-1,020701	9,995764	-0,961143	8,029849	-1,228523	6,774068	-1,400259	5,693100	-1,543529
9,534454	-1,020631	11,032451	-0,822604	13,650147	-0,475737	13,507427	-0,497059	12,221910	-0,668822
13,846283	-0,445030	12,227858	-0,662855	11,387650	-0,778777	13,392625	-0,512458	15,641822	-0,210635
15,559925	-0,216270	15,475799	-0,228812	14,697401	-0,335467	13,074075	-0,555188	12,661534	-0,609923
18,551724	0,183116	19,229943	0,272878	19,473654	0,304267	19,081824	0,250681	17,785892	0,076620
18,007238	0,110431	18,378551	0,159101	19,266650	0,276540	20,340978	0,419581	20,983972	0,505087
16,516916	-0,088517	15,832999	-0,181077	15,434702	-0,236713	15,566424	-0,220869	16,325910	-0,118983
15,077920	-0,280614	14,624156	-0,342622	13,858202	-0,447870	12,964194	-0,569927	12,257225	-0,664091
14,802265	-0,317412	15,540772	-0,220129	16,145194	-0,141549	16,365679	-0,113658	15,975495	-0,165931
17,661165	0,064232	17,778619	0,078928	18,008477	0,108020	18,615641	0,188148	19,672013	0,239316
16,889139	-0,038828	16,407832	-0,104259	15,852979	-0,180689	15,178573	-0,272894	14,539470	-0,358324
12,118716	-0,675649	12,514470	-0,624553	12,780570	-0,592209	12,797906	-0,592233	12,546326	-0,625358
25,672195	1,133653	25,749168	1,144082	26,051012	1,185241	26,379196	1,229537	26,534109	1,248675
12,367980	-0,642374	12,005617	-0,692554	11,955672	-0,702696	12,259627	-0,664436	12,815331	-0,589318
21,643475	0,595845	21,285668	0,547597	20,776489	0,478769	20,366431	0,422996	20,139303	0,391922
16,212095	-0,129209	16,551397	-0,085073	16,444374	-0,101477	16,113130	-0,147535	15,850062	-0,182735
16,406486	-0,103259	17,055291	-0,017735	17,538243	0,045037	17,583346	0,049677	17,240224	0,030513
17,815262	0,084803	17,539559	0,046981	18,028201	0,110662	18,807329	0,213860	19,352142	0,286461
19,234164	0,274218	18,450420	0,168705	17,674681	0,063311	17,450763	0,031893	17,864672	0,087175
17,538369	0,047840	17,881018	0,092612	17,545287	0,045980	16,780392	-0,058029	16,102587	-0,148903
15,660454	-0,202850	16,384085	-0,107432	17,132763	-0,009274	17,405540	-0,025827	17,035451	-0,023921
16,869310	-0,041475	16,479479	-0,094684	16,775571	-0,057116	17,535118	0,043208	18,265339	0,140855

APÊNDICE H – Funções *wavelets* obtidas a partir da série original (Família HAAR/SYM)

série wavelet packet (SHANNON) – HAAR		série wavelet packet (SHANNON) – SYM 2		série wavelet packet (SHANNON) – SYM 3		série wavelet packet (SHANNON) – SYM 4	
série recomposta	Z	série recomposta	Z	série recomposta	Z	série recomposta	Z
11,933305	-0,705031	12,300002	-0,662491	12,136353	-0,685305	10,485777	-0,892663
24,066695	0,918600	24,685233	1,005553	24,710912	1,009151	23,552137	0,847894
24,000000	0,909675	22,671956	0,734405	23,597759	0,859151	24,535427	0,978877
24,000000	0,909675	24,516747	0,982862	23,141433	0,797660	24,522202	0,977115
23,500000	0,842767	24,237704	0,945280	24,433271	0,971738	21,082405	0,518903
23,500000	0,842767	24,527740	0,984342	25,327361	1,092219	27,140675	1,325919
38,066695	2,792011	38,033732	2,803331	37,959390	2,794420	37,934871	2,763803
27,933305	1,436010	27,892812	1,437550	27,466052	1,380414	27,858097	1,421486
24,066695	0,918600	23,524556	0,849233	24,962266	1,043022	24,306742	0,948414
18,933305	0,231675	17,609519	0,052595	16,264080	-0,129082	18,308488	0,149392
15,000000	-0,294661	16,649244	-0,076735	15,673036	-0,208727	13,527453	-0,487485
15,000000	-0,294661	15,290137	-0,259780	16,474791	-0,100689	16,079141	-0,147577
21,066695	0,517154	21,038219	0,514373	21,219777	0,538711	21,436191	0,566030
20,933305	0,499305	20,900584	0,495836	21,317501	0,551880	21,292664	0,546911
24,000000	0,909675	22,495500	0,710646	22,677460	0,735138	24,802124	1,014403
24,000000	0,909675	23,626266	0,862931	22,814274	0,753574	21,538217	0,579621
17,933305	0,097860	17,939381	0,097021	17,945299	0,097467	17,350350	0,021760
19,066695	0,249524	19,060619	0,248029	19,054701	0,246961	19,618825	0,323941
19,933305	0,365490	19,939381	0,366381	19,751479	0,340854	19,987483	0,373050
28,066695	1,453860	28,060619	1,460151	27,584591	1,396387	27,941977	1,432660
7,000000	-1,365181	8,402566	-1,187399	8,494329	-1,176078	6,876805	-1,373411
7,000000	-1,365181	6,862878	-1,394764	8,114900	-1,227207	8,184717	-1,199185
11,500000	-0,763014	10,655172	-0,884017	9,192897	-1,081943	10,570931	-0,881320
11,500000	-0,763014	13,018766	-0,565688	14,280495	-0,396376	12,792989	-0,585322
17,066695	-0,018106	16,350756	-0,116935	16,525037	-0,093918	17,060325	-0,016874
10,933305	-0,838846	9,709863	-1,011332	9,141149	-1,088917	11,180878	-0,800070
16,933305	-0,035955	17,649244	0,057945	16,352083	-0,117224	15,775381	-0,188040
22,066695	0,650969	23,290137	0,817662	24,960014	1,042718	21,465473	0,569931
22,066695	0,650969	21,425478	0,566529	21,581240	0,587420	23,515790	0,843052
11,933305	-0,705031	10,839286	-0,859221	10,301299	-0,932583	12,567782	-0,615321
9,000000	-1,097551	10,869310	-0,855177	9,952726	-0,979555	7,961290	-1,228948
9,000000	-1,097551	8,054728	-1,234245	9,283562	-1,069726	8,967384	-1,094927
14,000000	-0,428476	12,979931	-0,570918	11,979314	-0,706466	12,792607	-0,585373
14,000000	-0,428476	15,831266	-0,186900	17,114112	-0,014538	15,328271	-0,247599
17,066695	-0,018106	16,350756	-0,116935	16,505671	-0,096527	18,171921	0,131200
14,933305	-0,303586	13,709863	-0,472611	12,885100	-0,584409	13,878801	-0,440682
7,933305	-1,240291	7,939381	-1,249780	7,763719	-1,274529	6,898171	-1,370565
13,066695	-0,553366	13,060619	-0,560051	12,614278	-0,620903	12,761881	-0,589466
12,933305	-0,571216	13,649244	-0,480775	13,494465	-0,502295	13,122738	-0,541396
16,066695	-0,151921	17,290137	0,009581	18,069225	0,114166	16,394464	-0,105573
17,066695	-0,018106	17,013700	-0,027650	17,184649	-0,005033	18,961175	0,236336
15,933305	-0,169770	15,858116	-0,183284	15,288046	-0,260606	15,515409	-0,222671
11,066695	-0,820996	10,995513	-0,838180	12,211564	-0,675170	10,848935	-0,844287
7,933305	-1,240291	7,126202	-1,359299	7,580711	-1,299190	8,045135	-1,217779
12,000000	-0,696106	10,732088	-0,873658	8,996830	-1,108364	11,528861	-0,753715
4,933305	-1,641736	12,335000	-0,657778	12,132583	-0,685813	10,584601	-0,879499
6,066695	-1,490072	5,649244	-1,558216	5,688149	-1,554218	4,122181	-1,740352
13,000000	-0,562291	7,290137	-1,337221	8,585010	-1,163858	7,895702	-1,237685
13,000000	-0,562291	11,350756	-0,790336	11,449803	-0,777819	14,261205	-0,389742
8,933305	-1,106476	12,709863	-0,607291	11,749590	-0,737422	11,673850	-0,734401
13,066695	-0,553366	8,939381	-1,115100	9,159426	-1,086454	7,469814	-1,294417
21,933305	0,633120	13,060619	-0,560051	13,784064	-0,463271	14,192189	-0,398936
31,066695	1,855305	21,939381	0,635742	20,665574	0,464031	21,496461	0,574059
8,933305	-1,106476	31,060619	1,864191	31,582314	1,935092	30,963319	1,835130
29,066695	1,587675	8,939381	-1,115100	8,751479	-1,141426	9,388165	-1,038875
17,933305	0,097860	29,060619	1,594831	28,584591	1,531140	28,938361	1,565387
25,066695	1,052415	18,635819	0,190817	18,688149	0,197568	15,214841	-0,262709
41,933305	3,309421	26,266884	1,218570	27,585010	1,396444	29,468404	1,635994
45,066695	3,728716	37,437537	2,723035	37,363346	2,714101	40,313254	3,080625
9,933305	-0,972661	47,659760	4,099766	46,539889	3,950666	44,503360	3,638785
10,066695	-0,954811	9,939381	-0,980420	10,334689	-0,928084	10,128015	-0,940320
10,066695	-0,954811	10,060619	-0,964092	11,534139	-0,766455	10,184012	-0,932861
13,500000	-0,495383	10,515306	-0,902854	7,112019	-1,362348	9,662192	-1,002372
19,500000	0,307507	11,058150	-0,829744	13,020808	-0,566122	11,027292	-0,820529
19,500000	0,307507	12,766747	-0,599630	12,997053	-0,569323	12,842238	-0,578761
15,000000	-0,294661	14,162981	-0,411585	14,694953	-0,340526	15,319723	-0,248738
15,000000	-0,294661	17,696475	0,064306	17,090793	-0,017680	19,248094	0,274556
15,933305	-0,169770	20,657291	0,463070	19,962202	0,369250	18,063191	0,116717
18,066695	0,115709	15,911815	-0,176052	17,327682	0,014241	15,682979	-0,200349
14,066695	-0,419551	13,231234	-0,537073	12,647168	-0,616471	15,539573	-0,219452
12,933305	-0,571216	16,524281	-0,093565	15,165375	-0,277136	15,122202	-0,275050
26,066695	1,186230	19,073695	0,249791	19,204816	0,267190	17,492364	0,040677
11,933305	-0,705031	14,868393	-0,316580	16,336660	-0,119302	15,676284	-0,201241
21,066695	0,517154	12,473012	-0,639190	12,004478	-0,703075	13,456772	-0,496900
17,933305	0,097860	26,060619	1,190790	26,248521	1,216348	25,956521	1,168179
16,933305	-0,035955	11,939381	-0,711060	12,415409	-0,647701	11,782186	-0,719970
18,066695	0,115709	20,350756	0,421785	20,374847	0,424855	20,780949	0,478746
17,500000	0,039877	16,709863	-0,068571	15,567786	-0,222910	17,872131	0,091266
17,500000	0,039877	17,519794	0,040511	17,376704	0,020847	15,816777	-0,182526
17,000000	-0,027031	19,065922	0,248744	19,592815	0,319474	17,572245	0,051318

Funções *wavelets* obtidas a partir da série original (Família SYM) – continuação

série wavelet packet (SHANNON) – SYM 5		série wavelet packet (SHANNON) – SYM 6		série wavelet packet (SHANNON) – SYM 7		série wavelet packet (SHANNON) – SYM 8	
série recomposta	z	série recomposta	z	série recomposta	z	série recomposta	z
11,953336	-0,701946	10,333737	-0,914123	12,781051	-0,597787	10,233518	-0,928607
23,490977	0,839901	23,667156	0,864615	23,799220	0,884345	23,736639	0,874935
23,656813	0,862062	24,540106	0,981071	24,400666	0,965250	24,523433	0,980023
24,609630	0,989393	24,775778	1,012510	23,068677	0,786074	24,921581	1,033202
23,416938	0,830006	21,066331	0,517654	23,545203	0,850175	21,052822	0,516471
24,500179	0,974767	26,947738	1,302260	25,762650	1,148460	26,836657	1,288989
38,155864	2,799661	37,799976	2,749997	37,516561	2,729562	37,692256	2,738915
28,592599	1,521662	27,937353	1,434279	28,690340	1,542284	28,037168	1,449335
23,781742	0,878758	24,653435	0,996189	24,131965	0,929105	24,852782	1,024013
18,040897	0,111573	17,666857	0,064148	17,002483	-0,029932	17,274632	0,011838
15,058824	-0,286941	13,926830	-0,434788	14,717779	-0,337264	14,162940	-0,403775
15,308058	-0,253634	16,160370	-0,136824	16,773215	-0,060773	16,274561	-0,121736
21,199564	0,533685	21,314805	0,550801	20,854960	0,488292	21,163964	0,531316
21,329562	0,551057	21,279332	0,546069	21,464155	0,570239	21,269597	0,545425
23,689475	0,866427	24,909893	1,030402	23,456452	0,838237	25,007504	1,044678
23,097882	0,787369	21,184128	0,533368	22,055395	0,649771	20,946668	0,502293
17,415267	0,027966	17,619351	0,057811	18,755913	0,205934	17,836725	0,086914
18,878754	0,223541	19,569375	0,317953	18,595510	0,184357	19,508119	0,310153
19,983001	0,371108	20,095742	0,388173	19,762650	0,341357	20,152976	0,396284
28,048280	1,448922	27,863586	1,424438	28,076341	1,459691	27,786348	1,415834
7,900772	-1,243516	6,968435	-1,363069	7,531677	-1,303918	7,009169	-1,359267
6,621501	-1,414473	8,159207	-1,204215	7,763096	-1,272788	8,180460	-1,202824
11,725538	-0,732388	10,478348	-0,894831	10,009639	-0,970589	10,406641	-0,905484
12,415611	-0,640170	13,005363	-0,557716	14,157042	-0,412693	13,182969	-0,534664
16,768597	-0,058453	16,732220	-0,060536	16,837117	-0,052177	16,482409	-0,093975
10,364468	-0,914277	11,240789	-0,793118	8,954498	-1,112524	11,311032	-0,784689
17,054438	-0,020254	15,789640	-0,186281	16,160761	-0,143158	15,803207	-0,184693
22,290339	0,679452	21,548602	0,581991	24,852464	1,026024	21,595109	0,588902
22,085546	0,652084	23,586667	0,853878	21,662219	0,596882	23,598263	0,856453
12,254880	-0,661649	12,513993	-0,623267	11,452639	-0,776481	12,475129	-0,629207
9,001857	-1,096371	8,226801	-1,195197	8,514704	-1,171684	8,421231	-1,170665
8,449390	-1,170200	8,415736	-1,169993	9,171785	-1,083295	8,060508	-1,218845
13,041051	-0,556588	12,766856	-0,589534	12,552773	-0,628494	12,747748	-0,592794
15,745530	-0,195196	15,915156	-0,169536	16,729389	-0,066668	16,336732	-0,113432
16,955856	-0,033428	18,045702	0,114688	17,217316	-0,001034	17,926395	0,098891
14,066538	-0,419546	13,505439	-0,491003	12,375264	-0,652372	13,228724	-0,528553
7,816590	-1,254766	6,970178	-1,362836	8,562876	-1,165204	7,091772	-1,348234
12,254194	-0,661741	12,895928	-0,572315	12,453880	-0,641797	12,977077	-0,562164
13,083418	-0,550926	12,876309	-0,574932	12,633081	-0,617692	12,665782	-0,603742
17,136226	-0,009324	16,956256	-0,030649	17,721469	0,066784	17,300199	0,015253
18,143848	0,125330	18,834714	0,219946	18,054989	0,111648	18,780715	0,212998
15,811824	-0,186312	15,410027	-0,236923	15,249657	-0,265717	15,292925	-0,252848
10,955394	-0,835308	10,611741	-0,877036	11,685786	-0,745119	10,499433	-0,893090
7,189910	-1,338513	8,128475	-1,208314	8,234386	-1,209391	8,230713	-1,196112
11,503640	-0,762042	11,450540	-0,765136	8,968018	-1,110705	11,409546	-0,771531
11,451329	-0,769033	10,723360	-0,862145	11,871713	-0,720109	10,786867	-0,854699
5,229688	-1,600469	4,063588	-1,750589	5,682942	-1,552604	4,001946	-1,760926
6,883218	-1,379498	8,143891	-1,206258	8,591999	-1,161286	8,330364	-1,182802
12,277353	-0,658646	14,174315	-0,401772	11,390935	-0,784781	14,043540	-0,419722
13,474614	-0,498648	11,458928	-0,764017	11,490272	-0,771419	11,359626	-0,778199
8,443317	-1,171012	7,691842	-1,266563	9,659626	-1,017672	7,888962	-1,241757
12,511402	-0,627368	13,942474	-0,432701	14,650669	-0,346292	13,757414	-0,457939
22,055993	0,648135	21,510801	0,576948	18,830511	0,215969	21,517843	0,578582
31,040722	1,848820	31,046845	1,849099	32,456791	2,048936	31,082645	1,856103
8,969162	-1,100740	9,638548	-1,006864	9,163855	-1,084362	9,789472	-0,987916
29,054856	1,583437	28,806666	1,550249	28,306793	1,490691	28,703392	1,538319
17,956691	0,100320	15,234748	-0,260306	17,880228	0,088139	15,291820	-0,252996
25,043309	1,047348	29,399739	1,629368	28,133993	1,467446	29,352021	1,625110
41,956691	3,307589	40,058094	3,051240	37,536353	2,732224	39,886119	3,031938
45,043309	3,720073	44,641176	3,662644	46,573573	3,947884	44,753380	3,682033
9,819409	-0,987116	10,212768	-0,930260	10,610779	-0,889726	10,276939	-0,922808
10,191572	-0,937382	10,215660	-0,929875	10,836436	-0,859371	10,203760	-0,932582
10,082433	-0,951967	9,683253	-1,009090	7,644531	-1,288737	9,643753	-1,007379
11,121275	-0,813140	11,192302	-0,799586	11,808034	-0,728674	11,377324	-0,775835
12,317568	-0,653272	12,637214	-0,606828	14,457760	-0,372241	12,439153	-0,634012
14,859817	-0,313535	15,251459	-0,258076	13,908549	-0,446119	15,241066	-0,259775
19,152535	0,260128	19,223311	0,271786	17,429460	0,027503	19,222888	0,272057
19,586799	0,318161	18,122645	0,124953	20,190634	0,398928	18,169215	0,131323
15,067138	-0,285830	15,778718	-0,187738	17,175549	-0,006652	15,856888	-0,177523
14,298543	-0,388542	15,372140	-0,241977	12,918744	-0,579265	15,240129	-0,259900
15,962364	-0,166195	15,192081	-0,265998	14,966490	-0,303808	15,214649	-0,263303
18,422733	0,162600	17,490455	0,040616	18,119774	0,120362	17,483208	0,039697
15,011185	-0,293307	15,906002	-0,170758	17,662404	0,058838	16,065485	-0,149661
13,097914	-0,548989	13,328646	-0,514588	11,660762	-0,748485	13,239296	-0,527141
26,098680	1,188384	25,876957	1,159413	25,551443	1,120049	25,815865	1,152647
11,905752	-0,708305	11,760968	-0,723724	12,683999	-0,610842	11,775906	-0,722598
20,823566	0,483438	20,954826	0,502778	21,220922	0,537520	21,059256	0,517331
16,803316	-0,053813	17,388164	0,026970	15,564428	-0,223375	17,094291	-0,012249
17,131593	-0,009943	16,117241	-0,142577	16,638287	-0,078923	16,353051	-0,111253
18,149790	0,126125	17,694173	0,067793	19,807305	0,347364	17,724448	0,071651
17,617112	0,054939	18,788138	0,213732	18,028287	0,108056	18,760718	0,210327
17,487785	0,037657	17,917212	0,097547	15,941931	-0,172595	17,903045	0,095772
17,160349	-0,006101	16,136786	-0,139970	16,832243	-0,052832	16,126359	-0,141531
16,874014	-0,044365	16,528697	-0,087687	18,313599	0,146435	16,479064	-0,094422

APÊNDICE I – Comparativo entre a série original e a série reconstruída sem ruído

COMPARATIVO ENTRE AS SÉRIES ORIGINAL E WAVELET (SEM RUÍDO)			
série original	série wavelet	erro2	erro percentual absoluto
10,0000	12,3000	5,2900	0,2300
26,0000	24,6852	1,7286	0,0506
23,0000	22,6720	0,1076	0,0143
25,0000	24,5167	0,2335	0,0193
22,0000	24,2377	5,0073	0,1017
25,0000	24,5277	0,2230	0,0189
40,0000	38,0337	3,8662	0,0492
26,0000	27,8928	3,5827	0,0728
26,0000	23,5246	6,1278	0,0952
17,0000	17,6095	0,3715	0,0359
14,0000	16,6492	7,0185	0,1892
16,0000	15,2901	0,5039	0,0444
23,0000	21,0382	3,8486	0,0853
19,0000	20,9006	3,6122	0,1000
25,0000	22,4955	6,2723	0,1002
23,0000	23,6263	0,3922	0,0272
16,0000	17,9394	3,7612	0,1212
21,0000	19,0606	3,7612	0,0924
18,0000	19,9394	3,7612	0,1077
30,0000	28,0606	3,7612	0,0646
6,0000	8,4026	5,7723	0,4004
8,0000	6,8629	1,2930	0,1421
11,0000	10,6552	0,1189	0,0313
12,0000	13,0188	1,0379	0,0849
19,0000	16,3508	7,0185	0,1394
9,0000	9,7099	0,5039	0,0789
15,0000	17,6492	7,0185	0,1766
24,0000	23,2901	0,5039	0,0296
24,0000	21,4255	6,6282	0,1073
10,0000	10,8393	0,7044	0,0839
9,0000	10,8693	3,4943	0,2077
9,0000	8,0547	0,8935	0,1050
13,0000	12,9799	0,0004	0,0015
15,0000	15,8313	0,6910	0,0554
19,0000	16,3508	7,0185	0,1394
13,0000	13,7099	0,5039	0,0546
6,0000	7,9394	3,7612	0,3232
15,0000	13,0606	3,7612	0,1293
11,0000	13,6492	7,0185	0,2408
18,0000	17,2901	0,5039	0,0394
19,0000	17,0137	3,9454	0,1045
14,0000	15,8581	3,4526	0,1327
13,0000	10,9955	4,0180	0,1542
6,0000	7,1262	1,2683	0,1877
11,0000	10,7321	0,0718	0,0244
13,0000	12,3350	0,4422	0,0512
3,0000	5,6492	7,0185	0,8831
8,0000	7,2901	0,5039	0,0887
14,0000	11,3508	7,0185	0,1892
12,0000	12,7099	0,5039	0,0592
7,0000	8,9394	3,7612	0,2771
15,0000	13,0606	3,7612	0,1293
20,0000	21,9394	3,7612	0,0970
33,0000	31,0606	3,7612	0,0588
7,0000	8,9394	3,7612	0,2771
31,0000	29,0606	3,7612	0,0626
16,0000	18,6358	6,9475	0,1647
27,0000	26,2669	0,5375	0,0272
40,0000	37,4375	6,5662	0,0641
47,0000	47,6598	0,4353	0,0140
8,0000	9,9394	3,7612	0,2424
12,0000	10,0606	3,7612	0,1616
8,0000	10,5153	6,3268	0,3144
12,0000	11,0582	0,8871	0,0785
14,0000	12,7667	1,5209	0,0881
13,0000	14,1630	1,3525	0,0895
19,0000	17,6965	1,6992	0,0686
20,0000	20,6573	0,4320	0,0329
16,0000	15,9118	0,0078	0,0055
14,0000	13,2312	0,5910	0,0549
14,0000	16,5243	6,3720	0,1803
20,0000	19,0737	0,8580	0,0463
16,0000	14,8684	1,2805	0,0707
11,0000	12,4730	2,1698	0,1339
28,0000	26,0606	3,7612	0,0693
10,0000	11,9394	3,7612	0,1939
23,0000	20,3508	7,0185	0,1152
16,0000	16,7099	0,5039	0,0444
15,0000	17,5198	6,3494	0,1680
20,0000	19,0659	0,8725	0,0467
19,0000	17,3672	2,6659	0,0859
16,0000	16,5380	0,2894	0,0336
16,0000	17,2913	1,6674	0,0807
18,0000	17,6205	0,1440	0,0211

AVALIAÇÃO DOS ERROS	
MSE	2,9146
MAPE	0,1150

APÊNDICE J – Valores previstos dos Métodos de Suavização Exponencial (série reconstruída)

PREVISÃO INDIVIDUAL DA SÉRIE RECONSTRUÍDA – MÉTODO SUAVIZAÇÃO EXPONENCIAL SIMPLES								
ano	mês	realizado	previsao	erro	erro2	$a = ((Pt+1-Rt+1)/Rt) 2$	$b = ((Rt+1-Rt)/Rt) 2$	erro percentual absoluto
	jan/00	10						
	fev/00	26	17,5606	8,4394	71,2234	0,7122	2,5600	0,3246
	mar/00	23	20,0158	2,9842	8,9055	0,0132	0,0133	0,1297
	abr/00	25	20,9311	4,0689	16,5558	0,0313	0,0076	0,1628
	mai/00	22	22,1667	0,1667	0,0278	0,0000	0,0144	0,0076
2000	jun/00	25	22,8804	2,1196	4,4927	0,0093	0,0186	0,0848
	jul/00	40	23,4481	16,5519	273,9658	0,4383	0,3600	0,4138
	ago/00	26	28,4744	2,4744	6,1226	0,0038	0,1225	0,0952
	set/00	26	28,2740	2,2740	5,1709	0,0076	0,0000	0,0875
	out/00	17	26,6373	9,6373	92,8775	0,1374	0,1198	0,5669
	nov/00	14	23,5263	9,5263	90,7499	0,3140	0,0311	0,6804
	dez/00	16	21,1564	5,1564	26,5886	0,1357	0,0204	0,3223
	jan/01	23	19,1349	3,8651	14,9393	0,0584	0,1914	0,1680
	fev/01	19	19,7908	0,7908	0,6253	0,0012	0,0302	0,0416
	mar/01	25	20,1732	4,8268	23,2978	0,0645	0,0997	0,1931
	abr/01	23	20,9735	2,0265	4,1067	0,0066	0,0064	0,0881
	mai/01	16	21,8877	5,8877	34,6646	0,0655	0,0926	0,3680
2001	jun/01	21	20,5271	0,4729	0,2237	0,0009	0,0977	0,0225
	jul/01	18	20,0217	2,0217	4,0873	0,0093	0,0204	0,1123
	ago/01	30	19,9933	10,0067	100,1332	0,3091	0,4444	0,3336
	set/01	6	22,7734	16,7734	281,3460	0,3126	0,6400	2,7956
	out/01	8	17,8211	9,8211	96,4543	2,6793	0,1111	1,2276
	nov/01	11	14,0448	3,0448	9,2711	0,1449	0,1406	0,2768
	dez/01	12	12,8767	0,8767	0,7687	0,0064	0,0083	0,0731
	jan/02	19	12,9257	6,0743	36,8973	0,2562	0,3403	0,3197
	fev/02	9	14,1060	5,1060	26,0711	0,0722	0,2770	0,5673
	mar/02	15	12,5911	2,4089	5,8030	0,0716	0,4444	0,1606
	abr/02	24	14,3341	9,6659	93,4289	0,4152	0,3600	0,4027
	mai/02	24	17,4204	6,5796	43,2908	0,0752	0,0000	0,2741
2002	jun/02	10	18,8006	8,8006	77,4503	0,1345	0,3403	0,8801
	jul/02	9	16,0571	7,0571	49,8024	0,4980	0,0100	0,7841
	ago/02	9	14,2693	5,2693	27,7660	0,3428	0,0000	0,5855
	set/02	13	12,1278	0,8722	0,7608	0,0094	0,1975	0,0671
	out/02	15	12,4214	2,5786	6,6491	0,0393	0,0237	0,1719
	nov/02	19	13,5965	5,4035	29,1981	0,1298	0,0711	0,2844
	dez/02	13	14,5456	1,5456	2,3889	0,0066	0,0997	0,1189
	jan/03	6	14,2576	8,2576	68,1881	0,4035	0,2899	1,3763
	fev/03	15	12,0803	2,9197	8,5246	0,2368	2,2500	0,1946
	mar/03	11	12,4181	1,4181	2,0111	0,0089	0,0711	0,1289
	abr/03	18	12,8424	5,1576	26,6010	0,2198	0,4050	0,2865
	mai/03	19	14,3751	4,6249	21,3897	0,0660	0,0031	0,2434
2003	jun/03	14	15,2844	1,2844	1,6496	0,0046	0,0693	0,0917
	jul/03	13	15,4821	2,4821	6,1608	0,0314	0,0051	0,1909
	ago/03	6	13,9360	7,9360	62,9800	0,3727	0,2899	1,3227
	set/03	11	11,5893	0,5893	0,3473	0,0096	0,6944	0,0536
	out/03	13	11,2939	1,7061	2,9108	0,0241	0,0331	0,1312
	nov/03	3	11,6527	8,6527	74,8687	0,4430	0,5917	2,8842
	dez/03	8	9,5839	1,5839	2,5086	0,2787	2,7778	0,1980
	jan/04	14	8,7934	5,2066	27,1084	0,4236	0,5625	0,3719
	fev/04	12	9,6747	2,3253	5,4070	0,0276	0,0204	0,1938
	mar/04	7	10,7206	3,7206	13,8431	0,0961	0,1736	0,5315
	abr/04	15	10,1068	4,8932	23,9434	0,4886	1,3061	0,3262
	mai/04	20	11,1247	8,8753	78,7709	0,3501	0,1111	0,4438
2004	jun/04	33	14,8515	18,1485	329,3680	0,8234	0,4225	0,5500
	jul/04	7	20,4373	13,4373	180,5598	0,1658	0,6208	1,9196
	ago/04	31	16,4750	14,5250	210,9750	4,3056	11,7551	0,4685
	set/04	16	20,8121	4,8121	23,1562	0,0241	0,2341	0,3008
	out/04	27	20,0621	6,9379	48,1340	0,1880	0,4727	0,2570
	nov/04	40	22,2003	17,7997	316,8284	0,4346	0,2318	0,4450
	dez/04	47	27,4512	19,5488	382,1575	0,2388	0,0306	0,4159
	jan/05	8	34,4151	26,4151	697,7601	0,3159	0,6885	3,3019
	fev/05	12	25,9807	13,9807	195,4590	3,0540	0,2500	1,1651
	mar/05	8	20,4945	12,4945	156,1133	1,0841	0,1111	1,5618
	abr/05	12	17,0556	5,0556	25,5594	0,3994	0,2500	0,4213
	mai/05	14	14,9889	0,9889	0,9779	0,0068	0,0278	0,0706
2005	jun/05	13	14,2231	1,2231	1,4960	0,0076	0,0051	0,0941
	jul/05	19	14,2024	4,7976	23,0171	0,1362	0,2130	0,2525
	ago/05	20	15,4065	4,5935	21,1005	0,0585	0,0028	0,2297
	set/05	16	17,2159	1,2159	1,4785	0,0037	0,0400	0,0760
	out/05	14	16,7665	2,7665	7,6537	0,0299	0,0156	0,1976
	nov/05	14	15,5482	1,5482	2,3971	0,0122	0,0000	0,1106
	dez/05	20	15,8846	4,1154	16,9366	0,0864	0,1837	0,2058
	jan/06	16	16,9836	0,9836	0,9674	0,0024	0,0400	0,0615
	fev/06	11	16,2547	5,2547	27,6116	0,1079	0,0977	0,4777
	mar/06	28	14,9515	13,0485	170,2636	1,4071	2,3884	0,4660
	abr/06	10	18,7798	8,7798	77,0841	0,0983	0,4133	0,8780
	mai/06	23	16,4225	6,5775	43,2632	0,4326	1,6900	0,2860
2006	jun/06	16	17,7762	1,7762	3,1549	0,0060	0,0926	0,1110
	jul/06	15	17,4087	2,4087	5,8021	0,0227	0,0039	0,1606
	ago/06	20	17,4470	2,5530	6,5177	0,0290	0,1111	0,1276
	set/06	19	18,0049	0,9951	0,9902	0,0025	0,0025	0,0524
	out/06	16	17,7852	1,7852	3,1868	0,0088	0,0249	0,1116
	nov/06	16	17,3554	1,3554	1,8370	0,0072	0,0000	0,0847
	dez/06	18	17,3333	0,6667	0,4445	0,0017	0,0156	0,0370

ANÁLISE DENTRO DA AMOSTRA	
U de Theil	0,8093
MSE	59,9466
MAPE	44,6498

PREVISÃO INDIVIDUAL DA SÉRIE RECONSTRUÍDA - MÉTODO DE HOLT								
ano	mês	realizado	previsao	erro	erro2	$a = (Pt+1-Rt+1)/Rt^2$	$b = (Rt+1-Rt)/Rt^2$	erro percentual absoluto
	jan/00	10						
	fev/00	26	21,9486	4,0514	16,4140	0,1641	2,5600	0,1558
	mar/00	23	23,6145	0,6145	0,3777	0,0006	0,0133	0,0267
	abr/00	25	22,4362	2,5638	6,5730	0,0124	0,0076	0,1026
	mai/00	22	24,1112	2,1112	4,4574	0,0071	0,0144	0,0960
2000	jun/00	25	23,9537	1,0463	1,0948	0,0023	0,0186	0,0419
	jul/00	40	24,2207	15,7793	248,9868	0,3984	0,3600	0,3945
	ago/00	26	37,0208	11,0208	121,4579	0,0759	0,1225	0,4239
	set/00	26	28,2212	2,2212	4,9336	0,0073	0,0000	0,0854
	out/00	17	23,5423	6,5423	42,8017	0,0633	0,1198	0,3848
	nov/00	14	17,6561	3,6561	13,3674	0,0463	0,0311	0,2612
	dez/00	16	16,3842	0,3842	0,1476	0,0008	0,0204	0,0240
	jan/01	23	15,0217	7,9783	63,6527	0,2486	0,1914	0,3469
	fev/01	19	20,3795	1,3795	1,9030	0,0036	0,0302	0,0726
	mar/01	25	20,5848	4,4152	19,4943	0,0540	0,0997	0,1766
	abr/01	23	22,1093	0,8907	0,7933	0,0013	0,0064	0,0387
	mai/01	16	23,2764	7,2764	52,9461	0,1001	0,0926	0,4548
2001	jun/01	21	17,9694	3,0306	9,1843	0,0359	0,0977	0,1443
	jul/01	18	18,7031	0,7031	0,4944	0,0011	0,0204	0,0391
	ago/01	30	19,5828	10,4172	108,5177	0,3349	0,4444	0,3472
	set/01	6	27,3253	21,3253	454,7685	0,5053	0,6400	3,5542
	out/01	8	9,2053	1,2053	1,4528	0,0404	0,1111	0,1507
	nov/01	11	6,6249	4,3751	19,1414	0,2991	0,1406	0,3977
	dez/01	12	10,0565	1,9435	3,7771	0,0312	0,0083	0,1620
	jan/02	19	12,5096	6,4904	42,1255	0,2925	0,3403	0,3416
	fev/02	9	15,8180	6,8180	46,4856	0,1288	0,2770	0,7576
	mar/02	15	9,7417	5,2583	27,6496	0,3414	0,4444	0,3506
	abr/02	24	16,8802	7,1198	50,6912	0,2253	0,3600	0,2967
	mai/02	24	22,6646	1,3354	1,7834	0,0031	0,0000	0,0556
2002	jun/02	10	21,2615	11,2615	126,8217	0,2202	0,3403	1,1262
	jul/02	9	11,1582	2,1582	4,6580	0,0466	0,0100	0,2398
	ago/02	9	10,5613	1,5613	2,4378	0,0301	0,0000	0,1735
	set/02	13	7,8635	5,1365	26,3840	0,3257	0,1975	0,3951
	out/02	15	12,3596	2,6404	6,9718	0,0413	0,0237	0,1760
	nov/02	19	15,3400	3,6600	13,3956	0,0595	0,0711	0,1926
	dez/02	13	16,0192	3,0192	9,1158	0,0253	0,0997	0,2322
	jan/03	6	13,5646	7,5646	57,2229	0,3386	0,2899	1,2608
	fev/03	15	7,9536	7,0464	49,6514	1,3792	2,2500	0,4698
	mar/03	11	12,4541	1,4541	2,1143	0,0094	0,0711	0,1322
	abr/03	18	13,2933	4,7067	22,1527	0,1831	0,4050	0,2615
	mai/03	19	16,7934	2,2066	4,8690	0,0150	0,0031	0,1161
2003	jun/03	14	16,7515	2,7515	7,5709	0,0210	0,0693	0,1965
	jul/03	13	15,6575	2,6575	7,0621	0,0360	0,0051	0,2044
	ago/03	6	10,9900	4,9900	24,8998	0,1473	0,2899	0,8317
	set/03	11	7,0406	3,9594	15,6765	0,4355	0,6944	0,3599
	out/03	13	10,2103	2,7897	7,7826	0,0643	0,0331	0,2146
	nov/03	3	11,9267	8,9267	79,6859	0,4715	0,5917	2,9756
	dez/03	8	5,7088	2,2912	5,2497	0,5833	2,7778	0,2864
	jan/04	14	6,8779	7,1221	50,7248	0,7926	0,5625	0,5087
	fev/04	12	10,7959	1,2041	1,4498	0,0074	0,0204	0,1003
	mar/04	7	12,3280	5,3280	28,3880	0,1971	0,1736	0,7611
	abr/04	15	8,8574	6,1426	37,7317	0,7700	1,3061	0,4095
	mai/04	20	12,5442	7,4558	55,5893	0,2471	0,1111	0,3728
2004	jun/04	33	21,1778	11,8222	139,7634	0,3494	0,4225	0,3582
	jul/04	7	30,3479	23,3479	545,1225	0,5006	0,6208	3,3354
	ago/04	31	9,9847	21,0153	441,6436	9,0131	11,7551	0,6779
	set/04	16	27,7626	11,7626	138,3582	0,1440	0,2341	0,7352
	out/04	27	19,0034	7,9966	63,9453	0,2498	0,4727	0,2962
	nov/04	40	25,6821	14,3179	205,0019	0,2812	0,2318	0,3579
	dez/04	47	36,6696	10,3304	106,7162	0,0667	0,0306	0,2198
	jan/05	8	47,0267	39,0267	1523,0839	0,6895	0,6885	4,8783
	fev/05	12	11,9740	0,0260	0,0007	0,0000	0,2500	0,0022
	mar/05	8	9,9119	1,9119	3,6552	0,0254	0,1111	0,2390
	abr/05	12	10,2162	1,7838	3,1819	0,0497	0,2500	0,1486
	mai/05	14	10,7511	3,2489	10,5555	0,0733	0,0278	0,2321
2005	jun/05	13	12,4034	0,5966	0,3559	0,0018	0,0051	0,0459
	jul/05	19	13,8295	5,1705	26,7345	0,1582	0,2130	0,2721
	ago/05	20	17,2639	2,7361	7,4863	0,0207	0,0028	0,1368
	set/05	16	20,2810	4,2810	18,3267	0,0458	0,0400	0,2676
	out/05	14	15,9791	1,9791	3,9170	0,0153	0,0156	0,1414
	nov/05	14	13,1767	0,8233	0,6778	0,0035	0,0000	0,0588
	dez/05	20	16,1207	3,8793	15,0488	0,0768	0,1837	0,1940
	jan/06	16	18,7180	2,7180	7,3876	0,0185	0,0400	0,1699
	fev/06	11	14,9013	3,9013	15,2203	0,0595	0,0977	0,3547
	mar/06	28	12,3990	15,6010	243,3925	2,0115	2,3884	0,5572
	abr/06	10	25,1037	15,1037	228,1228	0,2910	0,4133	1,5104
	mai/06	23	12,5311	10,4689	109,5984	1,0960	1,6900	0,4552
2006	jun/06	16	19,7113	3,7113	13,7741	0,0260	0,0926	0,2320
	jul/06	15	16,7135	1,7135	2,9362	0,0115	0,0039	0,1142
	ago/06	20	17,2952	2,7048	7,3160	0,0325	0,1111	0,1352
	set/06	19	18,7960	0,2040	0,0416	0,0001	0,0025	0,0107
	out/06	16	17,2831	1,2831	1,6464	0,0046	0,0249	0,0802
	nov/06	16	16,4058	0,4058	0,1647	0,0006	0,0000	0,0254
	dez/06	18	17,0656	0,9344	0,8731	0,0034	0,0156	0,0519

ANÁLISE DENTRO DA AMOSTRA

U de Theil	0,8207
MSE	71,0497
MAPE	45,7533

PREVISÃO INDIVIDUAL DA SÉRIE RECONSTRUÍDA - MÉTODO DE HOLT-WINTER									
ano	mês	realizado	previsao	erro	erro2	a = ((Pt+1-Rt+1)/Rt) 2	b = ((Rt+1-Rt)/Rt) 2	erro percentual	absoluto
	jan/00	10							
	fev/00	26	16,7218	9,2782	86,0852	0,8609	2,5600	0,3569	
	mar/00	23	24,3129	1,3129	1,7236	0,0025	0,0133	0,0571	
	abr/00	25	23,7875	1,2125	1,4701	0,0028	0,0076	0,0485	
	mai/00	22	26,0984	4,0984	16,7968	0,0269	0,0144	0,1863	
2000	jun/00	25	24,3094	0,6906	0,4770	0,0010	0,0186	0,0276	
	jul/00	40	22,6731	17,3269	300,2221	0,4804	0,3600	0,4332	
	ago/00	26	34,2598	8,2598	68,2239	0,0426	0,1225	0,3177	
	set/00	26	23,6874	2,3126	5,3482	0,0079	0,0000	0,0889	
	out/00	17	23,6962	6,6962	44,8391	0,0663	0,1198	0,3939	
	nov/00	14	22,6647	8,6647	75,0776	0,2598	0,0311	0,6189	
	dez/00	16	21,5266	5,5266	30,5430	0,1558	0,0204	0,3454	
	jan/01	23	12,6529	10,3471	107,0617	0,4182	0,1914	0,4499	
	fev/01	19	18,5188	0,4812	0,2316	0,0004	0,0302	0,0253	
	mar/01	25	23,0751	1,9249	3,7054	0,0103	0,0097	0,0770	
	abr/01	23	23,0758	0,0758	0,0058	0,0000	0,0064	0,0033	
	mai/01	16	25,2239	9,2239	85,0796	0,1608	0,0926	0,5765	
2001	jun/01	21	20,7596	0,2404	0,0578	0,0002	0,0977	0,0114	
	jul/01	18	18,4326	0,4326	0,1871	0,0004	0,0204	0,0240	
	ago/01	30	21,4797	8,5203	72,5948	0,2241	0,4444	0,2840	
	set/01	6	18,9352	12,9352	167,3202	0,1859	0,6400	2,1559	
	out/01	8	13,5420	5,5420	30,7134	0,8531	0,1111	0,6927	
	nov/01	11	11,0573	0,0573	0,0033	0,0001	0,1406	0,0052	
	dez/01	12	11,8247	0,1753	0,0307	0,0003	0,0083	0,0146	
	jan/02	19	8,5269	10,4731	109,6863	0,7617	0,3403	0,5512	
	fev/02	9	13,6489	4,6489	21,6124	0,0599	0,2770	0,5165	
	mar/02	15	13,5308	1,4692	2,1585	0,0266	0,4444	0,0979	
	abr/02	24	15,7718	8,2282	67,7028	0,3009	0,3600	0,3428	
	mai/02	24	21,1387	2,8613	8,1872	0,0142	0,0000	0,1192	
2002	jun/02	10	20,5413	10,5413	111,1199	0,1929	0,3403	1,0541	
	jul/02	9	14,4055	5,4055	29,2193	0,2922	0,0100	0,6006	
	ago/02	9	14,0203	5,0203	25,2038	0,3112	0,0000	0,5578	
	set/02	13	8,2732	4,7268	22,3430	0,2758	0,1975	0,3636	
	out/02	15	10,6193	4,3807	19,1901	0,1136	0,0237	0,2920	
	nov/02	19	14,5449	4,4551	19,8476	0,0882	0,0711	0,2345	
	dez/02	13	16,9435	3,9435	15,5509	0,0431	0,0997	0,3033	
	jan/03	6	10,5232	4,5232	20,4598	0,1211	0,2899	0,7539	
	fev/03	15	9,9940	5,0060	25,0601	0,6961	2,2500	0,3337	
	mar/03	11	13,4341	2,4341	5,9248	0,0263	0,0711	0,2213	
	abr/03	18	13,6390	4,3610	19,0187	0,1572	0,4050	0,2423	
	mai/03	19	16,6671	2,3329	5,4424	0,0168	0,0031	0,1228	
2003	jun/03	14	16,2111	2,2111	4,8890	0,0135	0,0693	0,1579	
	jul/03	13	14,8155	1,8155	3,2961	0,0168	0,0051	0,1397	
	ago/03	6	14,3202	8,3202	69,2257	0,4096	0,2899	1,3867	
	set/03	11	8,0219	2,9781	8,8693	0,2464	0,6944	0,2707	
	out/03	13	9,3355	3,6645	13,4288	0,1110	0,0331	0,2819	
	nov/03	3	11,8672	8,8672	78,6271	0,4652	0,5917	2,9557	
	dez/03	8	9,4325	1,4325	2,0522	0,2280	2,7778	0,1791	
	jan/04	14	5,6699	8,3301	69,3901	1,0842	0,5625	0,5950	
	fev/04	12	9,2895	2,7105	7,3469	0,0375	0,0204	0,2259	
	mar/04	7	12,8161	5,8161	33,8265	0,2349	0,1736	0,8309	
	abr/04	15	10,8752	4,1248	17,0142	0,3472	1,3061	0,2750	
	mai/04	20	12,8423	7,1577	51,2322	0,2277	0,1111	0,3579	
2004	jun/04	33	16,8332	16,1668	261,3669	0,6534	0,4225	0,4899	
	jul/04	7	22,3625	15,3625	236,0073	0,2167	0,6208	2,1946	
	ago/04	31	17,3150	13,6850	187,2781	3,8220	11,7551	0,4415	
	set/04	16	17,7575	1,7575	3,0890	0,0032	0,2341	0,1098	
	out/04	27	18,2363	8,7637	76,8022	0,3000	0,4727	0,3246	
	nov/04	40	24,5962	15,4038	237,2775	0,3255	0,2318	0,3851	
	dez/04	47	34,3391	12,6609	160,2975	0,1002	0,0306	0,2694	
	jan/05	8	28,5552	20,5552	422,5178	0,1913	0,6885	2,5694	
	fev/05	12	20,8715	8,8715	78,7035	1,2297	0,2500	0,7393	
	mar/05	8	17,9152	9,9152	98,3114	0,6827	0,1111	1,2394	
	abr/05	12	14,2494	2,2494	5,0599	0,0791	0,2500	0,1875	
	mai/05	14	13,5309	0,4691	0,2201	0,0015	0,0278	0,0335	
2005	jun/05	13	12,6008	0,3992	0,1593	0,0008	0,0051	0,0307	
	jul/05	19	12,3490	6,6510	44,2359	0,2618	0,2130	0,3501	
	ago/05	20	16,8171	3,1829	10,1309	0,0281	0,0028	0,1591	
	set/05	16	14,2725	1,7275	2,9842	0,0075	0,0400	0,1080	
	out/05	14	15,1044	1,1044	1,2197	0,0048	0,0156	0,0789	
	nov/05	14	15,5126	1,5126	2,2878	0,0117	0,0000	0,1080	
	dez/05	20	17,5677	2,4323	5,9162	0,0302	0,1837	0,1216	
	jan/06	16	12,6458	3,3542	11,2507	0,0281	0,0400	0,2096	
	fev/06	11	15,0420	4,0420	16,3382	0,0638	0,0977	0,3675	
	mar/06	28	15,9976	12,0024	144,0571	1,1906	2,3884	0,4287	
	abr/06	10	21,3901	11,3901	129,7354	0,1655	0,4133	1,1390	
	mai/06	23	17,8317	5,1683	26,7109	0,2671	1,6900	0,2247	
2006	jun/06	16	18,4270	2,4270	5,8902	0,0111	0,0926	0,1517	
	jul/06	15	16,2393	1,2393	1,5358	0,0060	0,0039	0,0826	
	ago/06	20	18,8700	1,1300	1,2769	0,0057	0,1111	0,0565	
	set/06	19	14,4220	4,5780	20,9578	0,0524	0,0025	0,2409	
	out/06	16	15,9292	0,0708	0,0050	0,0000	0,0249	0,0044	
	nov/06	16	17,8333	1,8333	3,3609	0,0131	0,0000	0,1146	
	dez/06	18	19,2633	1,2633	1,5959	0,0062	0,0156	0,0702	

ANÁLISE DENTRO DA AMOSTRA	
U de Theil	0,7392
MSE	50,3772
MAPE	41,6737

APÊNDICE K – Valores previstos do Modelo ARIMA (série reconstruída)

PREVISÃO INDIVIDUAL DA SÉRIE DECOMPOSTA WAVELET – MÉTODO ARIMA								
ano	mês	realizado	previsao	erro	erro ²	$a = ((P_{t+1} - R_{t+1}) / R_t)^2$	$b = ((R_{t+1} - R_t) / R_t)^2$	erro percentual absoluto
	jan/00	10						
	fev/00	26	15,8863	10,1137	102,2874	1,0229	2,5600	0,3890
	mar/00	23	21,1228	1,8772	3,5239	0,0052	0,0133	0,0816
	abr/00	25	20,1760	4,8240	23,2711	0,0440	0,0076	0,1930
	mai/00	22	20,8588	1,1412	1,3024	0,0021	0,0144	0,0519
2000	jun/00	25	20,6260	4,3740	19,1316	0,0395	0,0186	0,1750
	jul/00	40	20,6301	19,3699	375,1929	0,6003	0,3600	0,4842
	ago/00	26	26,0900	0,0900	0,0081	0,0000	0,1225	0,0035
	set/00	26	21,5134	4,4866	20,1293	0,0298	0,0000	0,1726
	out/00	17	19,5024	2,5024	6,2622	0,0093	0,1198	0,1472
	nov/00	14	16,9275	2,9275	8,5701	0,0297	0,0311	0,2091
	dez/00	16	16,5085	0,5085	0,2586	0,0013	0,0204	0,0318
	jan/01	23	15,9420	7,0580	49,8156	0,1946	0,1914	0,3069
	fev/01	19	18,3398	0,6602	0,4359	0,0008	0,0302	0,0347
	mar/01	25	18,1963	6,8037	46,2900	0,1282	0,0997	0,2721
	abr/01	23	18,7691	4,2309	17,9004	0,0286	0,0064	0,1840
	mai/01	16	19,1171	3,1171	9,7166	0,0184	0,0926	0,1948
2001	jun/01	21	16,6209	4,3791	19,1766	0,0749	0,0977	0,2085
	jul/01	18	17,0422	0,9578	0,9173	0,0021	0,0204	0,0532
	ago/01	30	17,3409	12,6591	160,2535	0,4946	0,4444	0,4220
	set/01	6	20,6158	14,6158	213,6204	0,2374	0,6400	2,4360
	out/01	8	12,2481	4,2481	18,0460	0,5013	0,1111	0,5310
	nov/01	11	11,7347	0,7347	0,5398	0,0084	0,1406	0,0668
	dez/01	12	13,4592	1,4592	2,1292	0,0176	0,0083	0,1216
	jan/02	19	14,5265	4,4735	20,0121	0,1390	0,3403	0,2354
	fev/02	9	15,9527	6,9527	48,3401	0,1339	0,2770	0,7725
	mar/02	15	13,1938	1,8062	3,2622	0,0403	0,4444	0,1204
	abr/02	24	16,5886	7,4114	54,9282	0,2441	0,3600	0,3088
	mai/02	24	18,8872	5,1128	26,1406	0,0454	0,0000	0,2130
2002	jun/02	10	17,9749	7,9749	63,5991	0,1104	0,3403	0,7975
	jul/02	9	13,4867	4,4867	20,1303	0,2013	0,0100	0,4985
	ago/02	9	13,5840	4,5840	21,0132	0,2594	0,0000	0,5093
	set/02	13	12,5072	0,4928	0,2428	0,0030	0,1975	0,0379
	out/02	15	14,6867	0,3133	0,0982	0,0006	0,0237	0,0209
	nov/02	19	15,9205	3,0795	9,4832	0,0421	0,0711	0,1621
	dez/02	13	16,1382	3,1382	9,8483	0,0273	0,0997	0,2414
	jan/03	6	15,0393	9,0393	81,7097	0,4835	0,2899	1,5066
	fev/03	15	12,6958	2,3042	5,3093	0,1475	2,2500	0,1536
	mar/03	11	14,9661	3,9661	15,7299	0,0699	0,0711	0,3606
	abr/03	18	15,2706	2,7294	7,4495	0,0616	0,4050	0,1516
	mai/03	19	16,8282	2,1718	4,7167	0,0146	0,0031	0,1143
2003	jun/03	14	16,6991	2,6991	7,2850	0,0202	0,0693	0,1928
	jul/03	13	16,2111	3,2111	10,3114	0,0526	0,0526	0,2470
	ago/03	6	14,2117	8,2117	67,4320	0,3990	0,2899	1,3686
	set/03	11	12,7149	1,7149	2,9407	0,0817	0,6944	0,1559
	out/03	13	14,3852	1,3852	1,9188	0,0159	0,0331	0,1066
	nov/03	3	15,1652	12,1652	147,9931	0,8757	0,5917	4,0551
	dez/03	8	12,4914	4,4914	20,1725	2,2414	2,7778	0,5614
	jan/04	14	13,3894	0,6106	0,3728	0,0058	0,5625	0,0436
	fev/04	12	15,2642	3,2642	10,6549	0,0544	0,0204	0,2720
	mar/04	7	15,9517	8,9517	80,1335	0,5565	0,1736	1,2788
	abr/04	15	14,4966	0,5034	0,2534	0,0052	1,3061	0,0336
	mai/04	20	16,3790	3,6210	13,1113	0,0583	0,1111	0,1810
2004	jun/04	33	20,1570	12,8430	164,9430	0,4124	0,4225	0,3892
	jul/04	7	23,8716	16,8716	284,6497	0,2614	0,6208	2,4102
	ago/04	31	14,4935	16,5065	272,4642	5,5605	11,7551	0,5325
	set/04	16	22,9921	6,9921	48,8893	0,0509	0,2341	0,4370
	out/04	27	18,4866	8,5134	72,4777	0,2831	0,4727	0,3153
	nov/04	40	21,6374	18,3626	337,1857	0,4625	0,2318	0,4591
	dez/04	47	26,1081	20,8919	436,4719	0,2728	0,0306	0,4445
	jan/05	8	29,9717	21,9717	482,7547	0,2185	0,6885	2,7465
	fev/05	12	13,8064	1,8064	3,2630	0,0510	0,2500	0,1505
	mar/05	8	13,9805	5,9805	35,7670	0,2484	0,1111	0,7476
	abr/05	12	14,2943	2,2943	5,2639	0,0822	0,2500	0,1912
	mai/05	14	14,6400	0,6400	0,4096	0,0028	0,0278	0,0457
2005	jun/05	13	15,4614	2,4614	6,0587	0,0309	0,0051	0,1893
	jul/05	19	16,1253	2,8747	8,2642	0,0489	0,2130	0,1513
	ago/05	20	17,6494	2,3506	5,5256	0,0153	0,0028	0,1175
	set/05	16	18,8722	2,8722	8,2494	0,0206	0,0400	0,1795
	out/05	14	16,8526	2,8526	8,1373	0,0318	0,0156	0,2038
	nov/05	14	15,7743	1,7743	3,1482	0,0161	0,0000	0,1267
	dez/05	20	17,2176	2,7824	7,7417	0,0395	0,1837	0,1391
	jan/06	16	18,2941	2,2941	5,2628	0,0132	0,0400	0,1434
	fev/06	11	16,5301	5,5301	30,5822	0,1195	0,0977	0,5027
	mar/06	28	15,5929	12,4071	153,9362	1,2722	2,3884	0,4431
	abr/06	10	21,3116	11,3116	127,9533	0,1632	0,4133	1,1312
	mai/06	23	15,3200	7,6800	58,9828	0,5898	1,6900	0,3339
2006	jun/06	16	18,9066	2,9066	8,4486	0,0160	0,0926	0,1817
	jul/06	15	17,3548	2,3548	5,5449	0,0217	0,0039	0,1570
	ago/06	20	17,7104	2,2896	5,2424	0,0233	0,1111	0,1145
	set/06	19	18,3558	0,6442	0,4150	0,0010	0,0025	0,0339
	out/06	16	17,6306	1,6306	2,6589	0,0074	0,0249	0,1019
	nov/06	16	17,2962	1,2962	1,6800	0,0066	0,0000	0,0810
	dez/06	18	17,6320	0,3680	0,1354	0,0005	0,0156	0,0204

ANÁLISE DENTRO DA AMOSTRA	
U de Theil	0,7353
MSE	53,5648
MAPE	41,7982

APÊNDICE L – Valores previstos do Modelo de Combinação (série reconstruída)

PREVISAO COMBINADA DA SÉRIE RECONSTRUÍDA - HW + ARIMA								
ano	mês	realizado	previsao	erro	erro ²	$a = ((P_{t+1} - R_{t+1}) / R_t)^2$	$b = ((R_{t+1} - R_t) / R_t)^2$	erro percentual absoluto
	jan/00	10						
	fev/00	26	16,3425	9,6575	93,2680	0,9327	2,5600	0,3714
	mar/00	23	22,8646	0,1354	0,0183	0,0000	0,0133	0,0059
	abr/00	25	22,1479	2,8521	8,1346	0,0154	0,0076	0,1141
	mai/00	22	23,7196	1,7196	2,9570	0,0047	0,0144	0,0782
2000	jun/00	25	22,6371	2,3629	5,5831	0,0115	0,0186	0,0945
	jul/00	40	21,7456	18,2544	333,2242	0,5332	0,3600	0,4564
	ago/00	26	30,5507	4,5507	20,7088	0,0129	0,1225	0,1750
	set/00	26	22,7004	3,2996	10,8874	0,0161	0,0000	0,1269
	out/00	17	21,7922	4,7922	22,9655	0,0340	0,1198	0,2819
	nov/00	14	20,0600	6,0600	36,7238	0,1271	0,0311	0,4329
	dez/00	16	19,2484	3,2484	10,5519	0,0538	0,0204	0,2030
	jan/01	23	14,1462	8,8538	78,3904	0,3062	0,1914	0,3849
	fev/01	19	18,4375	0,5625	0,3164	0,0006	0,0302	0,0296
	mar/01	25	20,8601	4,1399	17,1386	0,0475	0,0997	0,1656
	abr/01	23	21,1206	1,8794	3,5322	0,0057	0,0064	0,0817
	mai/01	16	22,4514	6,4514	41,6207	0,0787	0,0926	0,4032
2001	jun/01	21	18,8806	2,1194	4,4918	0,0175	0,0977	0,1009
	jul/01	18	17,8014	0,1986	0,0395	0,0001	0,0204	0,0110
	ago/01	30	19,6007	10,3993	108,1455	0,3338	0,4444	0,3466
	set/01	6	19,6982	13,6982	187,6404	0,2085	0,6902	2,2830
	out/01	8	12,9545	4,9545	24,5474	0,6819	0,1111	0,6193
	nov/01	11	11,3648	0,3648	0,1331	0,0021	0,1406	0,0332
	dez/01	12	12,5668	0,5668	0,3212	0,0027	0,0083	0,0472
	jan/02	19	11,2507	7,7493	60,0515	0,4170	0,3403	0,4079
	fev/02	9	14,6948	5,6948	32,4312	0,0898	0,2770	0,6328
	mar/02	15	13,3778	1,6222	2,6314	0,0325	0,4444	0,1081
	abr/02	24	16,1427	7,8573	61,7377	0,2744	0,3600	0,3274
	mai/02	24	20,1165	3,8835	15,0815	0,0262	0,0000	0,1618
2002	jun/02	10	19,3762	9,3762	87,9127	0,1526	0,3403	0,9376
	jul/02	9	13,9883	4,9883	24,8836	0,2488	0,0100	0,5543
	ago/02	9	13,8222	4,8222	23,2541	0,2871	0,0000	0,5358
	set/02	13	10,1954	2,8046	7,8656	0,0971	0,1975	0,2157
	out/02	15	12,4659	2,5341	6,4215	0,0380	0,0237	0,1689
	nov/02	19	15,1695	3,8305	14,6731	0,0652	0,0711	0,2016
	dez/02	13	16,5779	3,5779	12,8012	0,0355	0,0997	0,2752
	jan/03	6	12,5736	6,5736	43,2116	0,2557	0,2899	1,0956
	fev/03	15	11,2206	3,7794	14,2837	0,3968	2,2500	0,5250
	mar/03	11	14,1296	3,1296	9,7945	0,0435	0,0711	0,2845
	abr/03	18	14,3797	3,6203	13,1063	0,1083	0,4050	0,2011
	mai/03	19	16,7402	2,2598	5,1065	0,0158	0,0031	0,1189
2003	jun/03	14	16,4326	2,4326	5,9178	0,0164	0,0693	0,1738
	jul/03	13	15,4491	2,4491	5,9982	0,0306	0,0051	0,1884
	ago/03	6	14,2709	8,2709	68,4085	0,4048	0,2899	1,3785
	set/03	11	10,1525	0,8475	0,7183	0,0200	0,6944	0,0770
	out/03	13	11,6281	1,3719	1,8822	0,0156	0,0331	0,1055
	nov/03	3	13,3645	10,3645	107,4230	0,6356	0,5917	3,4548
	dez/03	8	10,8213	2,8213	7,9595	0,8844	2,7778	0,3527
	jan/04	14	9,1746	4,8254	23,2848	0,3638	0,5625	0,3447
	fev/04	12	12,0020	0,0020	0,0000	0,0000	0,0204	0,0002
	mar/04	7	14,2397	7,2397	52,4126	0,3640	0,1736	1,0342
	abr/04	15	12,5193	2,4807	6,1539	0,1256	1,3061	0,1654
	mai/04	20	14,4480	5,5520	30,8247	0,1370	0,1111	0,2776
2004	jun/04	33	18,3422	14,6578	214,8519	0,5371	0,4225	0,4442
	jul/04	7	23,0476	16,0476	257,5265	0,2365	0,6208	2,2925
	ago/04	31	16,0341	14,9659	223,9792	4,5710	11,7551	0,4828
	set/04	16	20,1340	4,1340	17,0902	0,0178	0,2341	0,2584
	out/04	27	18,3500	8,6500	74,8233	0,2923	0,4727	0,3204
	nov/04	40	23,2529	16,7471	280,4658	0,3847	0,2318	0,4187
	dez/04	47	30,6022	16,3978	268,8865	0,1681	0,0306	0,3489
	jan/05	8	29,1983	21,1983	449,3680	0,2034	0,6885	2,6498
	fev/05	12	17,6639	5,6639	32,0801	0,5013	0,2500	0,4720
	mar/05	8	16,1289	8,1289	66,0786	0,4589	0,1111	1,0161
	abr/05	12	14,2698	2,2698	5,1520	0,0805	0,2500	0,1891
	mai/05	14	14,0344	0,0344	0,0012	0,0000	0,0278	0,0025
2005	jun/05	13	13,8996	0,8996	0,8092	0,0041	0,0051	0,0692
	jul/05	19	14,0634	4,9366	24,3699	0,1442	0,2130	0,2598
	ago/05	20	17,1949	2,8051	7,8684	0,0218	0,0028	0,1403
	set/05	16	16,3608	0,3608	0,1302	0,0003	0,0400	0,0225
	out/05	14	15,8981	1,8981	3,6027	0,0141	0,0156	0,1356
	nov/05	14	15,6314	1,6314	2,6615	0,0136	0,0000	0,1165
	dez/05	20	17,4088	2,5912	6,7146	0,0343	0,1837	0,1296
	jan/06	16	15,2101	0,7899	0,6239	0,0016	0,0400	0,0494
	fev/06	11	15,7176	4,7176	22,2560	0,0869	0,0977	0,4289
	mar/06	28	15,8139	12,1861	148,5016	1,2273	2,3884	0,4352
	abr/06	10	21,3545	11,3545	128,9248	0,1644	0,4133	1,1355
	mai/06	23	16,6914	6,3086	39,7984	0,3980	1,6900	0,2743
2006	jun/06	16	18,6447	2,6447	6,9946	0,0132	0,0926	0,1653
	jul/06	15	16,7457	1,7457	3,0475	0,0119	0,0039	0,1164
	ago/06	20	18,3435	1,6565	2,7439	0,0122	0,1111	0,0828
	set/06	19	16,2080	2,7920	7,7954	0,0195	0,0025	0,1469
	out/06	16	16,7016	0,7016	0,4923	0,0014	0,0249	0,0439
	nov/06	16	17,5894	1,5894	2,5262	0,0099	0,0000	0,0993
	dez/06	18	18,5227	0,5227	0,2732	0,0011	0,0156	0,0290

ANÁLISE DENTRO DA AMOSTRA	
U de Theil	0,7059
MSE	48,8917
MAPE	40,5473