

EUDA MARA DA SILVA FERREIRA

**MODELO DE ROTORES DINÂMICOS COM MANCAIS FLEXÍVEIS UTILIZANDO
MATERIAL VISCOELÁSTICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri

Curitiba
2005

Ferreira, Euda Mara da Silva
Modelo de rotores dinâmicos com mancais flexíveis utilizando
material viscoelástico / Euda Mara da Silva Ferreira - Curitiba, 2005
xi, 117 f il

Orientador Prof Dr Carlos Alberto Bavastr
Dissertação (Mestrado) – Setor de Tecnologia, Universidade
Federal do Parana
Inclui Bibliografia

1 Rotores - Dinâmica 2 Materiais viscoelásticos 3 Diagrama
de Campbell 4 Rotações críticas I Bavastr, Carlos Alberto
II Título III Universidade Federal do Parana

CDD 621 406

TERMO DE APROVAÇÃO

EUDA MARA DA SILVA FERREIRA

MODELO DE ROTORES DINÂMICOS COM MANCAIS FLEXÍVEIS UTILIZANDO MATERIAL VISCOELÁSTICO

Dissertação aprovada como requisito parcial a obtenção de grau de Mestre em Engenharia Mecânica, no Programa de Pos-Graduação em Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná

Banca Examinadora



Prof Dr William Alves Barbosa
UFPR/PG-MEC



Prof Dr Jose João de Espindola
UFSC



Prof Dr Carlos Alberto Bavastri
UFPR/PG-MEC
Presidente

Curitiba, 10 de fevereiro de 2005

DEDICATÓRIA

A DEUS, por todas as vitórias alcançadas.

À minha família, em especial ao meu esposo – Misael – e meu filho – Abner – pelo apoio, carinho e compreensão em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por mais esta vitória em minha vida.

A minha família que me deu sempre muito apoio.

Ao meu orientador, Professor Carlos Alberto Bavastri, pelo apoio, compreensão e dedicação no decorrer do mestrado.

A WEG, CEFET-PR e UFPR por acreditar e apoiar com material necessário para o desenvolvimento dessa dissertação.

Aos colegas, Marcos e Rodrigo, que contribuíram para realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	viii
LISTA DE SÍMBOLOS	ix
RESUMO	x
ABSTRACT	xi
1 INTRODUÇÃO	1
2 CARACTERÍSTICA DOS ELEMENTOS DO ROTOR	5
2.1 O DISCO.....	6
2.1.1 Energia Cinética.....	7
2.1.2 Energia Potencial.....	13
2.1.3 Formação Matricial das Equações do Disco.....	13
2.2 O EIXO.....	15
2.2.1 Energia Cinética.....	15
2.2.2 Energia Potencial.....	15
2.2.3 Formação Matricial das Equações do Eixo.....	19
2.3 O MANCAL.....	26
2.3.1 Formação Matricial das Equações do Mancal.....	32
2.4 MONTAGEM DAS MATRIZES GLOBAIS.....	33
3 RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DINÂMICAS	36
3.1 MODELO VISCOSO.....	37
3.1.1 Ortogonalidade.....	41
3.1.2 Diagrama de Campbell.....	43
3.1.3 Diagrama de Campbell Simplificado.....	44
3.1.4 Resposta no Domínio do Tempo – Desbalanceamento.....	48
3.1.4.1 Órbita.....	52
3.1.5 Resposta na Freqüência – Desbalanceamento.....	53
3.1.6 Exemplo de Aplicação.....	55
3.1.6.1 Exemplo 1.....	55
3.1.6.2 Exemplo 2.....	58
3.2 MODELO VISCOELÁSTICO.....	64
3.2.1 Problema de Autovalores.....	66
3.2.2 Ortogonalidade.....	67
3.2.3 Diagrama de Campbell.....	69
3.2.4 Diagrama de Campbell Simplificado.....	72
3.2.5 Resposta na Freqüência – Desbalanceamento.....	73
3.2.6 Resposta no Domínio do Tempo – Desbalanceamento.....	75
3.2.6.1 Órbita.....	76
3.2.7 Exemplo de Aplicação.....	78
3.2.7.1 Campbell Final e Campbell Simplificado.....	84
4 INSTABILIDADE	86
5 COMPARAÇÃO ENTRE O MODELO VISCOSO E O MODELO VISCOELÁSTICO	89

6 RESULTADOS.....	93
7 CONCLUSÃO.....	94
8 SUGESTÃO DE TRABALHO FUTURO.....	95
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	96
ANEXO 1.....	98
ANEXO 2.....	111

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – MODELO DO DISCO.....	7
FIGURA 2 – SISTEMA DE COORDENADAS PARA O DISCO GIRANDO EM TORNO DE UM EIXO FLEXÍVEL.....	9
FIGURA 3 – REPRESENTAÇÃO DA SECÇÃO TRANSVERSAL DO EIXO.....	16
FIGURA 4 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS.....	21
FIGURA 5 – MODELO DE MANCAIS COM MATERIAL VISCOELÁSTICO.....	27
FIGURA 6 – MANCAL COM MATERIAL VISCOELÁSTICO.....	30
FIGURA 7 – FORMA DA MANTA DE MATERIAL VISCOELÁSTICO.....	31
FIGURA 8 – MANTA VISCOELÁSTICA.....	32
FIGURA 9 – MALHA DO ROTOR SIMPLES APOIADO.....	33
FIGURA 10 – DIAGRAMA DE CAMPBELL.....	44
FIGURA 11 – MODELO DO ROTOR SIMPLES.....	56
FIGURA 12 – DIAGRAMA DE CAMPBELL.....	57
FIGURA 13 – RESPOSTA A UMA MASSA DESBALANCEADA.....	58
FIGURA 14 – SAÍDA GRÁFICA (TELA PRINCIPAL).....	60
FIGURA 15 – SAÍDA GRÁFICA (DADOS DE ENTRADA).....	61
FIGURA 16 – ESQUEMA SIMPLES DO ROTOR EM ESTUDO.....	61
FIGURA 17 – SAÍDA GRÁFICA (DIAGRAMA DE CAMPBELL).....	62
FIGURA 18 – SAÍDA GRÁFICA (RESPOSTA NA FREQUÊNCIA)	62
FIGURA 19 – (a) CAMPBELL FINAL - (b) CAMPBELL INTERNO.....	71
FIGURA 20 – VARIAÇÃO DO SENTIDO DE GIRO EIXO EM UM ROTOR EXCITADO COM MASSA DESBALANCEADA.....	76
FIGURA 21 – TIPOS DE GIROS FW E BW.....	78
FIGURA 22 – PROPRIEDADES DINÂMICAS – BORRACHA BUTÍLICA PURA.....	79
FIGURA 23 – FOTO DO ROTOR EM ESTUDO.....	80
FIGURA 24 – DIAGRAMA DE CAMPBELL INTERNO.....	82
FIGURA 25 – DIAGRAMA DE CAMPBELL FINAL.....	82
FIGURA 26 – DIAGRAMA DE CAMPBELL SIMPLIFICADO.....	83
FIGURA 27 – ÓRBITA DESCRITA PELO EIXO NA PRIMEIRA ROTAÇÃO CRÍTICA.....	84
FIGURA 28 – INSTABILIDADE DE UM AUTOVALOR.....	87
FIGURA 29 – RESPOSTA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA PARA O MODELO VISCOELÁSTICO.....	91
FIGURA 30 – RESPOSTA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA PARA O MODELO VISCOSO.....	91

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – CADA ELEMENTO RELACIONADO AOS NÓS DO ROTOR....	34
TABELA 2 – DADOS DOS DISCOS.....	56
TABELA 3 – FREQUÊNCIA EM HERTZ EM 25.000 RPM.....	57
TABELA 4 – COMPARAÇÃO ENTRE O EXEMPLO 1 E O EXEMPLO 2.....	63
TABELA 5 – COMPARAÇÃO ENTRE O CAMPBELL FINAL E CAMPBELL SIMPLIFICADO DAS ROTAÇÕES CRÍTICAS DO ROTOR.....	85
TABELA 6 – COMPARAÇÃO ENTRE O MODELO VISCOZO E O MODELO VISCOELÁSTICO DAS ROTAÇÕES CRÍTICAS DO ROTOR.....	90

LISTA DE SÍMBOLOS

A^i	Matriz de transformação de coordenadas
C	Matriz de amortecimento global
E_a	Módulo de elasticidade aparente
$E_c(\Omega)$	Módulo de elasticidade
G	Matriz giroscópica global
$G_c(\Omega)$	Módulo de cisalhamento
G_D	Matriz giroscópica do disco
h	Espessura do disco
I	Momento de segunda ordem do eixo
I_D	Momento de inércia do disco
K	Matriz global de rigidez
K_E	Matriz de rigidez do eixo
K_m	Matriz de rigidez do mancal
M	Matriz de inércia global
M_D	Matriz de inércia do disco
q^e	Vetor de coordenadas generalizadas do eixo
r	Raio interno do disco
R	Raio externo do disco
R_0	Sistema de coordenada inercial
R^i	Sistema de coordenada fixa no disco
T_D	Energia cinética do disco
T_E	Energia cinética do eixo
$T_{D/R}^R$	Energia cinética do disco ao redor do centro de massa
$T_{O/R_0}^{R_0}$	Energia cinética do centro de massa do disco
U_E	Energia potencial do eixo
ω	Velocidade angular instantânea do disco

RESUMO

Atualmente as máquinas girantes produzem ou absorvem uma grande quantidade de potência em pacotes físicos relativamente pequenos. O fato dessas máquinas trabalharem com grande densidade de energia e fluxos está associado às altas velocidades de rotação do eixo. O que implica em altas cargas de inércia e problemas em potencial como: deformações do eixo, vibrações e instabilidades dinâmicas. Materiais viscoelásticos são largamente utilizados para controle de vibrações e ruídos, por apresentar elevada capacidade de dissipação de energia vibratória. O modelo utilizado para descrever o comportamento dinâmico real deste material é o modelo de derivada fracionária com três, quatro ou cinco parâmetros. Através do método dos elementos finitos descreve-se a dinâmica do rotor. Conhecendo a energia cinética e a energia potencial de todos os elementos do rotor, aplicam-se às equações de Lagrange para obter a matriz elementar da inércia, matriz de rigidez e a matriz giroscópica, matrizes características do sistema em estudo. A matriz de rigidez contém a rigidez do eixo e dos mancais que podem ser hidrodinâmicos ou de rolamentos em geral, neste caso particular é complexa devido às características do material viscoelástico que faz parte dos mancais. A partir destas matrizes é possível obter o sistema de equações globais que governa o movimento de um rotor dinâmico. Um código numérico simples e claro é utilizado para calcular os parâmetros modais do sistema rotor dinâmico. Nesta implementação numérica é gerado o diagrama de Campbell final obtido através de um outro diagrama de Campbell interno, devido a matriz de rigidez ser função da frequência. Para uma excitação de desbalanceamento, cuja frequência coincide com a frequência de rotação do rotor ($\Omega_{rpm} = \Omega$), os parâmetros modais podem ser obtidos através do diagrama de Campbell Simplificado. Todos estes passos, assim como os resultados obtidos, serão apresentados e discutidos.

Palavras-chave: rotor dinâmico, material viscoelástico, diagrama de Campbell, rotações críticas.

ABSTRACT

Nowadays rotating machines produce or absorb a large amount of power in relatively small physical packages. The fact of the machines work with large density of energy and flows is associated to high speeds of axis's rotation. It can imply high inertia loads and potential problems like axis's deformations, vibrations and dynamic instabilities. Viscoelastic materials are broadly used to control vibrations and noises in dynamic rotors, to increase the area of stability. This is the cause of high dissipation capacity of vibratory energy. The widespread model, used to describe the real dynamic behavior of this type of material, is based on the fractional in three, four or five derivative. Using the method of finite elements it is possible to describe the dynamics of the rotor. Starting from the kinetic and potential energy of the elements of the rotor, and using Lagrange's equations, it is possible to obtain the inertia element's, stiffness and gyroscopic matrix these matrices are characteristic of the system for this studying. From these matrices, the system of equations that represents the dynamic movement rotor is assembled. In general, the stiffness matrix is composed by the axis's stiffness and of the bearings, these can be hydrodynamic or of rollers in general. In this particular case, this matrix is complex and it depends the frequency of the characteristics of the viscoelastic material that is part of the bearings. A clear and simple numeric code is proposed to calculate the modal parameters of a simple rotor mounted on viscoelastic bearings. A methodology to build a Campbell diagram (natural frequency versus rotation) is presented. It should be built through an internal Campbell diagram (natural frequency versus variable frequency), for what the stiffness matrix is function of the frequency. For an unbalance excitation, whose frequency coincides with the rotation frequency of the rotor ($\Omega_{rpm} = \Omega$), the modal parameters can be obtained through the diagram of Simplified Campbell. All these steps, as well as they were obtained in results, will be presented and discussed.

Keywords: dynamic rotor, viscoelastic material, Campbell diagram, critical rotations.

1 INTRODUÇÃO

Atualmente as máquinas rotativas produzem ou absorvem, cada vez mais, uma grande quantidade de potência em pacotes físicos relativamente pequenos. O fato de essas máquinas trabalharem com grande densidade de fluxos de energia está associado às altas velocidades de rotação do rotor. Isto implica em altas cargas de inércia e problemas em potencial com deformações do eixo, elevados níveis de vibrações e instabilidades dinâmicas.

Máquinas rotativas apresentam muitas vezes problemas de instabilidade trabalhando em rotações elevadas, o que pode provocar falhas sobre o sistema ou parte dele sem aviso prévio. Introduzindo amortecimento nos mancais pode-se eliminar o problema, podendo, em geral, ampliar a região de estabilidade (a região de trabalho).

Materiais viscoelásticos são amplamente utilizados a mais de 30 anos em controle de vibração e ruído devido à elevada capacidade de dissipar energia vibratória (Espíndola et al, 2003). Em rotores dinâmicos estes materiais são adicionados sob os mancais. Para tal fim, o conhecimento preciso das características dinâmicas destes materiais é fundamental.

Vários trabalhos podem ser encontrados na literatura com o propósito de modelar rotores simples apoiados sobre materiais elastoméricos ou com mancais compostos por este tipo de material. Em geral, o modelo utilizado para o material viscoelástico é o modelo de Kelvin-Voigt, como o proposto por Shabaneh e Jean (1999). Nestes trabalhos, o material viscoelástico é colocado sob os mancais, considerando-se assim a sua influência sobre a matriz de rigidez e amortecimento do rotor.

O modelo de Kelvin-Voigt apresenta dificuldades para representar as características dinâmicas da maioria dos materiais viscoelásticos encontrados na prática (Pritz, 1996 e Bagley e Torvik, 1983) quando analisados em uma ampla banda de frequência. O modelo é descrito por uma equação diferencial de ordem inteira.

No estudo realizado por Marynowski e Kapitaniak (2002) é considerado o modelo Kelvin-Voigt versus o modelo de Burgers para descrever o comportamento do material viscoelástico, sendo o primeiro um modelo com dois parâmetros (mola e amortecedor

viscoso em paralelo) e o segundo descrito por quatro parâmetros, novamente utilizando derivadas de ordem inteira para descrever seu comportamento dinâmico. Foram obtidos resultados similares para valores pequenos de amortecimento, mas para os materiais com coeficiente de amortecimento maior, o modelo de Bùrgers se mostrou mais apropriado.

Em Panda e Dutt (1999), materiais poliméricos na forma de casquilhos são colocados nos suportes dos mancais e, utilizando técnicas de otimização não linear, é possível encontrar as dimensões ótimas para reduzir a resposta vibratória do sistema ao desbalanceamento. Em Dutt e Toi (2002), utilizam-se dois modelos, com três e quatro elementos do tipo mola amortecedor e derivada de ordem inteira para prever o comportamento de um rotor dinâmico viscoelástico, estudando a redução de vibração e a condição de instabilidade.

Em geral, em todos os trabalhos pesquisados utilizados para redução de amplitude de vibração, os modelos do material viscoelástico usados não conseguem reproduzir fielmente suas características dinâmicas em uma ampla faixa da frequência.

Outros exemplos de trabalhos relacionados podem ser encontrados em Kulkarni et al (1993). Neste, são realizados estudos de resposta a desbalanceamento relacionados a rotores com mancais de deslizamento ou de rolamento, suportados por almofadas de material viscoelástico. São tratados os efeitos dos parâmetros de rigidez e amortecimento dos apoios dos mancais na redução da resposta de desbalanceamento. As características dinâmicas do material viscoelástico em função da frequência são modeladas usando um equivalente viscoso denotado por *"for element type model"*. Como resultado, o artigo mostra que com a adequada escolha das características do suporte, a resposta ao desbalanceamento pode ser reduzida e a instabilidade do sistema eliminada.

No trabalho desenvolvido por Ren e Xie (1989) é projetado e testado um suporte para rotor com amortecedor sólido simples e compacto. O amortecedor sólido é extremamente eficiente, eliminando instabilidades no rotor. O material viscoelástico foi considerado o material mais adequado para fabricar este amortecedor sólido, pois apresenta um elevado amortecimento interno.

No presente trabalho, será apresentado um modelo numérico capaz de prever as características dinâmicas de um rotor simples cujos mancais estão apoiados sobre mantas de material viscoelástico. A partir deste modelo, uma resposta dinâmica em estado permanente pode ser encontrada. O modelo utilizado para o material polimérico é o modelo de derivada fracionária com quatro parâmetros devido à capacidade deste em descrever o comportamento dinâmico real do material (Pritz, 1996 e Bagley e Torvik, 1979). Para tal fim, as características do material viscoelástico foram levantadas usando a metodologia proposta em Espíndola et al (2003), Lopes et al (2004) e Silva (2004). Assim, utilizando o método de elementos finitos, as equações de energia cinética e potencial em cada elemento que compõe o rotor e as equações de Lagrange, é possível achar a equação de movimento do sistema. Desta forma, são obtidas as matrizes de inércia (simétrica e com coeficientes constantes, tanto do eixo quanto do(s) disco(s)), a matriz giroscópica (matriz anti-simétrica e função da rotação do rotor, tanto do eixo quanto do(s) disco(s)) e a matriz de rigidez complexa (composta pela rigidez do eixo e dos mancais, função da frequência e da temperatura devido ao material viscoelástico). A dissipação interna do eixo será desconsiderada no presente trabalho, principalmente, porque é desprezível frente ao amortecimento próprio dos mancais.

Um código numérico simples e claro é utilizado para calcular os parâmetros modais do sistema. Nesta implementação numérica é gerado o diagrama de Campbell através do qual é possível determinar as rotações críticas do rotor, a resposta permanente no domínio da frequência, a resposta permanente no domínio do tempo (órbita), e os modos de vibrar além de prever a estabilidade do rotor. Devido às características do sistema, matriz de rigidez complexa e função da frequência, o diagrama de Campbell final deve ser obtido através de um outro diagrama de Campbell, aqui denominado Campbell Interno. Isto é, fixada a rotação do eixo, a matriz de inércia e a matriz giroscópica constantes, a matriz de rigidez fica ainda em função da frequência para uma temperatura dada. Para cada rotação, as frequências naturais do sistema são função da frequência, devendo por tanto ser achadas através de outro diagrama de Campbell (frequência natural versus frequência variável) de forma similar a Espíndola

e Floody (???). Para uma excitação de desbalanceamento, cuja frequência coincide com a frequência de rotação do rotor ($\Omega_{rpm}=\Omega$) os parâmetros modais podem ser obtidos através do diagrama de Campbell Simplificado, de forma similar a Espíndola e Bavastri (1997). Todos estes passos, assim como os resultados obtidos, serão apresentados e discutidos.

Para validar o modelo numérico será realizada uma simulação sobre um rotor simples. As medições experimentais serão basicamente as frequências críticas, devido a que ainda o sistema de medição não está pronto. A manta de material viscoelástico utilizada possui características dinâmicas perfeitamente conhecidas. As mesmas foram levantadas no Laboratório de Vibrações e Acústica (LVA) da Universidade Federal de Santa Catarina pelo grupo PISA-LVA da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

No capítulo 2 serão apresentadas as características dos elementos do rotor.

No capítulo 3 será introduzida a resolução do sistema de equações dinâmicas para o modelo Viscoso e o modelo Viscoelástico.

No capítulo 4 será introduzida a instabilidade para um rotor simples.

No capítulo 5 será realizada uma comparação entre o modelo Viscoso e o modelo Viscoelástico no domínio da frequência.

No capítulo 6 será apresentado o resultado obtido experimentalmente.

No capítulo 7 será apresentada a conclusão deste estudo.

No capítulo 8 será apresentada a sugestão de trabalho futuro.

2 CARACTERÍSTICAS DOS ELEMENTOS DO ROTOR

Um rotor simples está composto basicamente por um eixo, um ou mais discos e diversos mancais. Neste trabalho serão considerados mancais flexíveis compostos de material viscoelástico. Os esforços sobre o rotor podem provir de desbalanceamentos (excitação sincrônica), instabilidades de mancais hidrodinâmicos (excitação assíncrona) ou excitação pela base a uma frequência qualquer ($\Omega \neq \Omega_{rpm}$). Porém serão considerados apenas esforços provenientes de desbalanceamento (sincrônica).

O capítulo que segue trata do modelo matemático usado para identificação dos fenômenos que ocorrem em rotores. A teoria apresentada é baseada seguindo o trabalho de Lalanne e Ferraris (1990).

As equações gerais do rotor podem ser introduzidas através das equações de Lagrange (ver equação (1)) e para tal é preciso definir as equações da energia cinética T, energia potencial U de cada elemento do rotor, e o trabalho virtual das forças externas sobre os mancais e de desbalanceamento.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (1)$$

Na equação (1) q_i é a i-ésima coordenada generalizada e F_{q_i} a força generalizada associada a q_i .

Utilizando o método de elementos finitos é possível descrever a dinâmica do rotor. As equações correspondentes dos elementos se apresentam de forma matricial.

2.1 O DISCO

O disco é considerado rígido por hipótese, caracterizando-se somente pela energia cinética. O fato de desprezar a deformação do disco não implica em um erro considerável na solução, pois a deformação do disco é pequena em relação ao eixo.

A geometria adotada para identificar os discos é ilustrada na figura 1. Sendo R o raio externo, r o raio interno, h a espessura e ρ_D a densidade. Assim, pode-se calcular a massa e os momentos de inércia como segue:

Massa (M_D):

$$M_D = \pi(R^2 - r^2) \cdot h \cdot \rho_D \quad (2)$$

Inércia (I_D) formada pelas principais direções de inércia:

$$I_D = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde,

$$\begin{cases} I_{Dx} = I_{Dz} = \frac{M_D}{12}(3r^2 + 3R^2 + h^2) \\ I_{Dy} = \frac{M_D}{2}(r^2 + R^2) \end{cases}$$

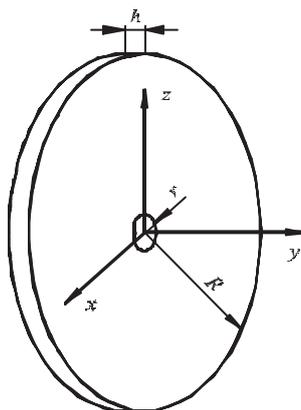


FIGURA 1 – MODELO DO DISCO

2.1.1 Energia Cinética

O movimento de translação do corpo rígido pode ser definido pelo deslocamento de um ponto de referência arbitrário (ou escolhido) que é fixado no corpo rígido.

Assumindo que o disco é rígido, define-se $R_0 (X, Y, Z)$ como o sistema de coordenada inercial coincidente com $R^i (x^i, y^i, z^i)$, um sistema fixo no disco com origem no seu centro (figura 2). As coordenadas XYZ e $x^i y^i z^i$ são relacionadas por três ângulos ψ , θ e ϕ . O vetor posição global de um ponto arbitrário sobre o corpo rígido pode ser escrito por

$$r^i = R^i + A^i \bar{u}^i \quad (4)$$

onde:

R^i - é o vetor posição global da origem do sistema de coordenada fixada no corpo ($x^i y^i z^i$);

A^i - é a matriz de transformação que define a orientação do corpo no sistema de coordenada global (XYZ);

\bar{u}^i - é o vetor posição de um ponto arbitrário com relação à origem do sistema de coordenada fixo no corpo.

A^i é uma matriz 3×3

$$R^i = [R_x^i \quad R_y^i \quad R_z^i]^T$$

$$\bar{u}^i = [\bar{u}_x^i \quad \bar{u}_y^i \quad \bar{u}_z^i]^T = [x^i \quad y^i \quad z^i]^T$$

Ao descrever a rotação de corpo rígido do rotor com respeito aos eixos X, Y ou Z é útil considerar os ângulos de Euler, ψ , θ e ϕ , que neste caso dão a orientação espacial do disco, como mostra a figura 2. A seqüência para formar um conjunto de ângulos de Euler será (Wilson e Sandler, 1991):

Rotar o sistema $x^i y^i z^i$ um ângulo ψ em torno do eixo Z e a matriz de transformação que representa o giro do disco em torno do eixo Z é:

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\text{sen} \psi & 0 \\ \text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

O sistema de coordenada $x^i y^i z^i$ é rotado um ângulo θ em torno do novo eixo x (denotado por x_1), a mudança na orientação do sistema de coordenada $x^i y^i z^i$ é dada pela matriz de transformação:

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

Finalmente o sistema de coordenada $x^i y^i z^i$ é rotado um ângulo ϕ em torno do novo eixo y, sendo a matriz de transformação dada por:

$$A_\phi = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \text{sen} \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (7)$$

Assim, a orientação final do disco (coordenada $x^i y^i z^i$) pode ser obtida no sistema XYZ pela seguinte matriz de transformação:

$$A^i = A_\psi \cdot A_\theta \cdot A_\phi \quad (7)$$

$$A^i = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \text{sen} \theta \text{sen} \phi \text{sen} \psi & -\text{sen} \psi \cos \theta & \cos \psi \text{sen} \phi + \text{sen} \theta \text{sen} \psi \cos \phi \\ \text{sen} \psi \cos \phi + \text{sen} \theta \text{sen} \phi \cos \psi & \cos \theta \cos \psi & \text{sen} \psi \text{sen} \phi - \cos \psi \text{sen} \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \text{sen} \phi & \text{sen} \theta & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (8)$$

A transformada de coordenada pode ser obtida por $R^i(x^i, y^i, z^i) = A^i R_o(X, Y, Z)$ ou $R_o(X, Y, Z) = A^{iT} R(x^i, y^i, z^i)$.

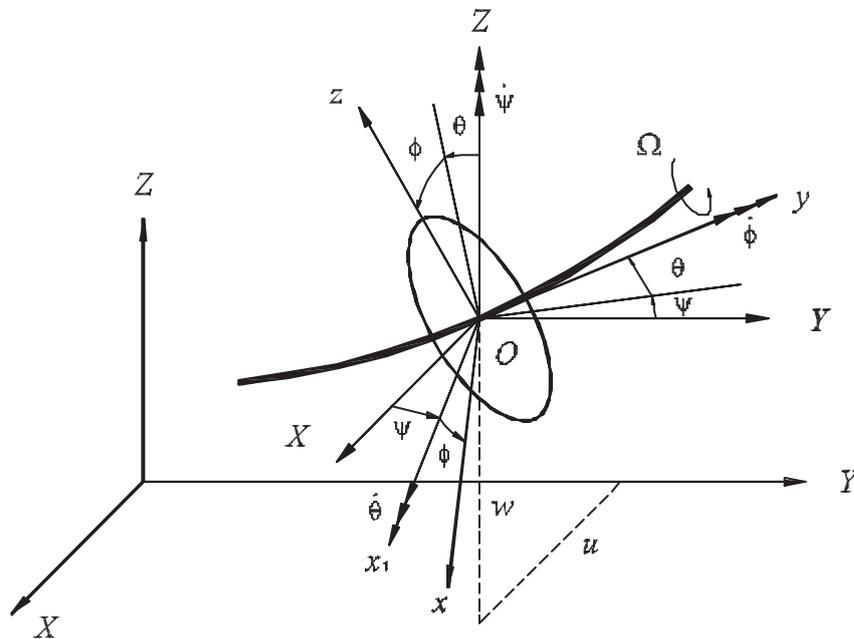


FIGURA 2 - SISTEMA DE COORDENADAS PARA O DISCO GIRANDO EM TORNO DE UM EIXO FLEXÍVEL

Considerando que \vec{K} é o vetor unitário ao longo do eixo Z, \vec{i}_1 é o vetor unitário ao longo eixo x_1 e \vec{j} o vetor unitário ao longo do eixo y. Escrevendo as componentes dos três versores nas direções \vec{i} , \vec{j} e \vec{K} do sistema de referência $R(x^i y^i z^i)$ tem-se as seguintes relações:

$$\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\vec{i}_1 = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \text{sen } \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \\ 0 \\ -\text{sen } \phi \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \text{sen } \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen } \phi \cos \theta \\ -\text{sen } \theta \\ \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (11)$$

O vetor velocidade angular instantânea do disco pode ser escrito no sistema de referência R^i como:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \begin{bmatrix} \text{sen } \phi \cos \theta \\ -\text{sen } \theta \\ \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} \cos \phi \\ 0 \\ -\text{sen } \phi \end{bmatrix} + \dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \text{sen } \phi \cos \theta & \cos \phi & 0 \\ -\text{sen } \theta & 0 & 1 \\ \cos \phi \cos \theta & -\text{sen } \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \dot{\psi} \text{sen } \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \\ -\dot{\psi} \text{sen } \theta + \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \text{sen } \phi \end{bmatrix} \quad (14)$$

A energia cinética do disco ao redor do centro de massa O é:

$$T_{D/R}^R = \frac{1}{2} [\bar{\omega}_{R/R_0}^R]^T [I_D] [\bar{\omega}_{R/R_0}^R] \quad (15)$$

$$\Rightarrow T_{D/R}^R = \frac{1}{2} [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z] \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\Rightarrow T_{D/R}^R = \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (17)$$

Supondo que as coordenadas do ponto O em R_0 são (u, Y_0, w) , onde a coordenada Y_0 na direção Y permanece constante (ver figura 2), a energia cinética no centro de massa do disco é dada por:

$$T_{O/R_0}^{R_0} = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) \quad (18)$$

A energia cinética total do disco pode expressar-se como a soma da energia cinética do centro de massa mais a energia cinética ao redor do centro de massa, como se segue:

$$T_D = T_{O/R_0}^{R_0} + T_{D/R}^R$$

$$\Rightarrow T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (19)$$

No caso particular que está sendo trabalhado, o disco é simétrico, verificando-se que $I_{Dx} = I_{Dz}$. Por outro lado, supõe-se que a velocidade angular permanece constante, isto é, $\dot{\phi} = \Omega = \text{constante}$. Por linearidade, consideram-se os ângulos θ e ψ pequenos de forma que:

$$\begin{aligned}\cos \theta &\cong 1 \\ \text{sen} \theta &\cong \theta\end{aligned}\quad (20)$$

A equação (17) pode ser escrita como:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \dot{\psi} \text{sen} \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \\ -\dot{\psi} \text{sen} \theta + \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \text{sen} \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \text{sen} \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ -\dot{\psi} \theta + \Omega \\ \dot{\psi} \cos \phi - \dot{\theta} \text{sen} \phi \end{bmatrix}\quad (21)$$

Substituindo as componentes ω_x, ω_y e ω_z , simplificadas na equação (17), a energia ao redor do centro de massa resulta em:

$$\begin{aligned}T_{D/R}^R &= \frac{1}{2} I_{Dx} [(\omega_x^2 + \omega_z^2)] + \frac{1}{2} I_{Dy} \omega_y^2 = \frac{1}{2} I_{Dx} [(\dot{\psi} \text{sen} \phi + \dot{\theta} \cos \phi)^2 + (\dot{\psi} \cos \phi - \dot{\theta} \text{sen} \phi)^2] + \frac{1}{2} I_{Dy} (\dot{\psi} \theta + \Omega)^2 \\ \Rightarrow T_{D/R}^R &= \frac{1}{2} [I_{Dx} (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) + I_{Dy} (\Omega^2 + 2\dot{\psi} \theta + \dot{\psi}^2 \theta^2)]\end{aligned}\quad (22)$$

Portanto a expressão da energia cinética do disco é:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi} \theta + \dot{\psi}^2 \theta^2)\quad (23)$$

e, desprezando o termo $\dot{\psi}^2 \theta^2$, por ser de segunda ordem,

$$T_D \cong \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi} \theta)\quad (24)$$

Na expressão anterior, pode-se observar que o termo $\frac{1}{2} I_{Dy} \Omega^2$ é uma constante, não tem nenhuma influência nas equações de Lagrange e representa a energia do disco que gira a uma velocidade Ω . O último termo $I_{Dy} \Omega \dot{\psi} \theta$ representa o efeito giroscópico.

2.1.2 Energia Potencial

Como hipótese simplificativa, considera-se neste trabalho que o disco possui uma rigidez infinita, portanto suas deformações são nulas. A contribuição da energia potencial ao disco é nula, estando o mesmo caracterizado somente pela energia cinética.

2.1.3 Formulação Matricial das Equações do Disco

Para resolução mediante ao método de elementos finitos, se considera que cada nó do rotor possui quatro graus de liberdade: dois deslocamentos u e w (nas direções X e Z , respectivamente) e dois giros θ e ψ em torno dos eixos X e Z respectivamente (ver figura 2). Portanto, para um nó i o vetor deslocamento nodal q_i é representado por:

$$q_i = [u_i, w_i, \theta_i, \psi_i]^T \quad (25)$$

A aplicação da equação de Lagrange, na expressão da energia cinética e na expressão potencial do disco, resulta na seguinte equação diferencial:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{1}{2} M_D (\dot{u}_i^2 + \dot{w}_i^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}_i^2 + \dot{\psi}_i^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi}_i \theta_i) \right] \right\} - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{1}{2} M_D (\dot{u}_i^2 + \dot{w}_i^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}_i^2 + \dot{\psi}_i^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi}_i \theta_i) \right] = \\ &= M_D \ddot{q}_i + \Omega G_D \dot{q}_i \end{aligned} \quad (27)$$

Dependendo do tipo de fixação do disco e da sua espessura com relação ao diâmetro do eixo, pode-se considerar que sua influência sobre o sistema ocorre somente em um nó. Colocada na matriz global de forma correta com o nó onde o disco está fixado, a participação do disco na matriz de massa é dada pela seguinte equação:

$$M_d = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Utilizando os comentários feitos para a matriz de inércia, o disco contribui com a matriz giroscópica com a expressão:

$$G_D = \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

logo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial q_i} = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{w}_i \\ \ddot{\theta}_i \\ \ddot{\psi}_i \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{w}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{\psi}_i \end{bmatrix} \quad (30)$$

2.2 O EIXO

O eixo foi modelado como uma viga de seção transversal circular $S = \pi d^2/4$ e momento de segunda ordem de área $I = \pi d^4/64$, e é caracterizado pela energia potencial e a energia cinética. Também se considera que o material do eixo possui uma densidade constante ρ , módulo de elasticidade E e um coeficiente de Poisson ν .

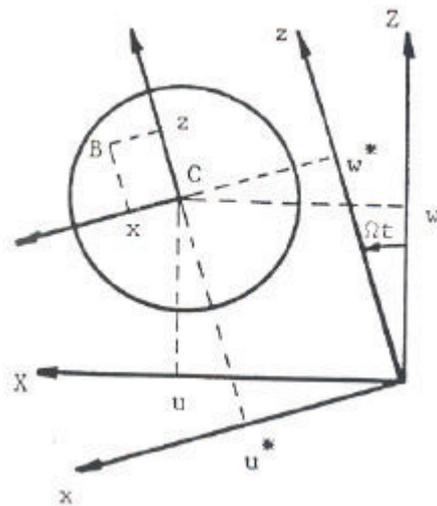
2.2.1 Energia Cinética

A expressão para a energia cinética do eixo resulta de uma extensão da energia cinética do disco (equação (24)). Se o elemento do eixo possui um comprimento L , sua energia cinética pode expressar-se da seguinte forma (Lalanne e Ferraris, 1990):

$$T_E = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho IL\Omega^2 + 2\rho I\Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (31)$$

2.2.2 Energia Potencial

Considere-se que C é o centro geométrico do eixo e $B(x, z)$ um ponto genérico de sua seção transversal (ver figura 3). Assume-se que ε e σ representam a deformação e a tensão, respectivamente, e que as coordenadas de C dos eixos x e z são u^* e w^* .



FONTE: LALANNE E FERRARIS (1990)

FIGURA 3 - REPRESENTAÇÃO DA SECÇÃO TRANSVERSAL DO EIXO

Considerando os termos de segunda ordem, a deformação do ponto B pode escrever-se como:

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (32)$$

ou

$$\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl} \quad (33)$$

sendo ε_l a deformação linear e ε_{nl} a deformação não linear.

A energia potencial se calcula como:

$$U_E = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^T \sigma d\tau \quad (34)$$

Utilizando a proporcionalidade entre a deformação unitária e a tensão, expressada mediante a Lei de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon \quad (35)$$

tem-se:

$$U_E = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\varepsilon_l + \varepsilon_{nl}) E (\varepsilon_l + \varepsilon_{nl}) d\tau \quad (36)$$

$$\Rightarrow U_E = \frac{E}{2} \int_{\tau} (\varepsilon_l^2 + 2\varepsilon_l \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) d\tau \quad (37)$$

Dada a simetria da secção transversal do eixo com respeito às coordenadas x, z ; verifica-se:

$$\int_{\tau} \varepsilon_{nl} \varepsilon_l d\tau = 0 \quad (38)$$

Por outro lado, o terceiro termo dentro da integral na equação (37) é de segunda ordem e será desprezado. Logo, a expressão para calcular a energia potencial é dada por:

$$U_E = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (39)$$

$$\Rightarrow U_E = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \quad (40)$$

Por causa da simetria que possui a secção transversal do eixo, neste trabalho serão estudados eixos simétricos, sendo o terceiro termo da expressão integral anterior nulo.

Os momentos de inércia da seção transversal com relação às coordenadas x e z são, respectivamente:

$$I_x = \int_S z^2 dS \quad (41)$$

$$I_z = \int_S x^2 dS \quad (42)$$

Introduzindo as equações (41) e (42) na equação (40) para a energia potencial, tem-se:

$$U_E = \frac{E}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 \int_S x^2 dS + \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \int_S z^2 dS \right] dy$$

$$\Rightarrow U_E = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (43)$$

Para expressar a energia potencial em função dos deslocamentos u e w medido na referência R_0 , utilizam-se as seguintes relações que podem ser deduzidas através da figura 3.

$$\begin{aligned} u^* &= u \cos \Omega t - w \operatorname{sen} \Omega t \\ w^* &= u \operatorname{sen} \Omega t + w \cos \Omega t \end{aligned} \quad (44)$$

A equação (43) pode ser escrita como

$$U_E = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \operatorname{sen} \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\operatorname{sen} \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (45)$$

Desenvolvendo a integral, pela simetria do eixo ($I_x = I_z = I$) e desconsiderando os efeitos provenientes de forças axiais sobre o rotor que levaram a um termo adicional na energia potencial (ver Lalanne e Ferraris, 1990), a expressão para energia potencial se reduz a:

$$U_E = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (46)$$

2.2.3 Formulação Matricial das Equações do Eixo

Na formulação mediante elementos finitos, o eixo se divide em n elementos de longitude Δy^e (Δy do elemento), como pode observar através da figura 4. Cada elemento possui uma secção circular constante, não sendo necessariamente iguais os diâmetros do eixo entre elementos distintos e, como citado anteriormente, cada nó possui quatro graus de liberdade: dois deslocamentos u e w , dois giros θ e ψ em torno dos eixos X e Z respectivamente, conforme ilustra a figura 4.

Se os deslocamentos u e w são pequenos, as relações entre deslocamentos e os giros são:

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (47)$$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (48)$$

Um vetor deslocamento nodal q^i , sobre o elemento i , é definido, de acordo com a notação utilizada na figura 4,

$$q^e = [u_i, w_i, \theta_i, \psi_i, u_{i+1}, w_{i+1}, \theta_{i+1}, \psi_{i+1}]^T \quad (49)$$

onde os deslocamentos δu e δw correspondem aos movimentos nas direções X e Z respectivamente,

$$\delta u = [u_i, \psi_i, u_{i+1}, \psi_{i+1}]^T \quad (50)$$

$$\delta w = [w_i, \theta_i, w_{i+1}, \theta_{i+1}]^T \quad (51)$$

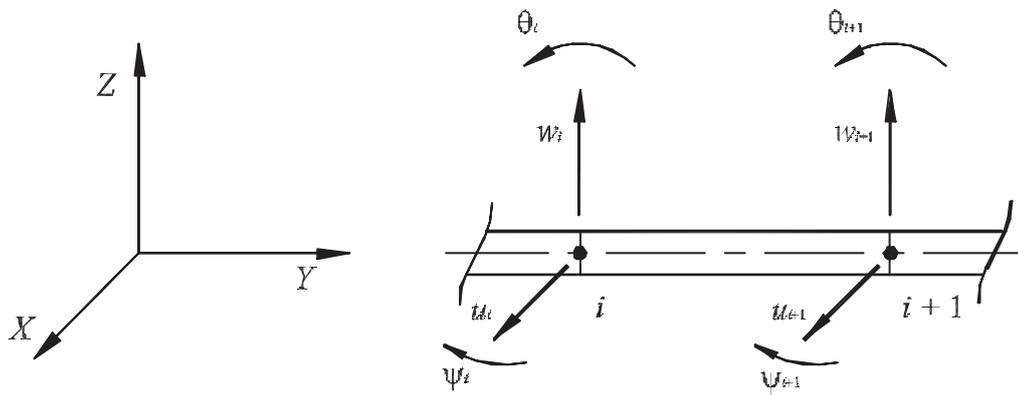


FIGURA 4 - MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

As variáveis u e w são representadas por:

$$u = N_1(y)\delta u \quad (52)$$

$$w = N_2(y)\delta w \quad (53)$$

onde $N_1(y)$ e $N_2(y)$ são funções de interpolação. Para este caso particular, foram adotadas as funções de deslocamento típico de uma viga apoiada (Lalanne e Ferraris, 1990):

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (54)$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (55)$$

onde $L = \Delta y^e$, indica a longitude do elemento.

Introduzindo as equações (52) e (53) na equação (31) da energia cinética do eixo e obedecendo as relações (47) e (48), se tem:

$$\begin{aligned}
T_E = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^T N_1^T N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T N_2^T N_2 \delta \dot{w} \right] dy + \\
& + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy - \\
& - 2\rho I\Omega \int_0^L \delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w dy + \rho IL\Omega^2
\end{aligned} \tag{56}$$

Somente N_1 , N_2 e suas derivadas são função de y , logo é possível extrair do símbolo da integral os vetores de deslocamentos nas direções X e Z , então:

$$\begin{aligned}
T_E = & \frac{\rho S}{2} \left[\delta \dot{u}^T \int_0^L N_1^T N_1 dy \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T \int_0^L N_2^T N_2 dy \delta \dot{w} \right] + \\
& + \frac{\rho I}{2} \left[\delta \dot{u}^T \int_0^L \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} dy \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T \int_0^L \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} dy \delta \dot{w} \right] - \\
& - 2\rho I\Omega \delta \dot{u}^T \int_0^L \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} dy \delta w + \rho IL\Omega^2
\end{aligned} \tag{57}$$

A equação anterior pode ser simplificada. O produto $N_1^T N_1$ forma uma matriz de 4×4 , segundo a equação (51), N_1 é um vetor com quatro elementos (quatro funções, uma para cada deslocamento na direção X contidos em δu).

$$T_E = \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T M_1 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T M_2 \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T M_3 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T M_4 \delta \dot{w} + \Omega \delta \dot{u}^T M_5 \delta w + \rho IL\Omega^2 \quad (58)$$

Onde:

M_1 e M_2 são as matrizes de massa “clássicas”;

M_3 e M_4 são as que causam os efeitos de inércia rotatória e

M_5 é a matriz que contém o efeito giroscópico (Lalanne e Ferraris, 1990).

Aplicando a equação de Lagrange na energia cinética do eixo dada pela equação (58) obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_E}{\partial \dot{q}^e} \right) - \frac{\partial T_E}{\partial q^e} = (M_{Ec} + M_{Eg}) \ddot{q}^e + G \dot{q}^e \quad (59)$$

onde q^e é o vetor de deslocamento do elemento dado pela equação (49), M_{Ec} surge de M_1 e M_2 , M_{Eg} de M_3 e M_4 e G de M_5 . A seguir são descritas estas três matrizes:

$$M_{Ec} = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$M_{Eg} = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$G = \Omega G_1 = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

Aplicando um procedimento análogo ao anterior, é possível determinar a matriz de rigidez do elemento. Substituindo na equação da energia potencial do eixo, dada pela equação (46), a definição das funções u e w , se tem:

$$U_E = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{d^2 N_1}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w^T \frac{d^2 N_2}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy$$

$$\Rightarrow U_E = \frac{EI}{2} \delta u^T \int_0^L \frac{d^2 N_1}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} dy \delta u + \delta w^T \int_0^L \frac{d^2 N_2}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} dy \delta w \quad (63)$$

Escrevendo a equação anterior em forma matricial:

$$U_E = \frac{1}{2} \delta u^T K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T K_2 \delta w \quad (64)$$

sendo K_1 e K_2 as matrizes de rigidez “clássicas” (Lalanne e Ferraris, 1990).

Aplicando a equação de Lagrange na energia potencial, obtém-se a matriz de rigidez do elemento:

$$\frac{\partial U_E}{\partial \delta} = K q^e \quad (65)$$

Para obter soluções mais “realistas”, é necessário introduzir o efeito das tensões de corte, que estão caracterizadas pela quantidade:

$$a = \frac{12EI}{GSL^2} \quad (66)$$

onde:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (67)$$

é o módulo elástico cisalhamento.

Ao introduzir os efeitos das tensões de cisalhamento na energia potencial do eixo, se obtém a seguinte matriz de rigidez:

$$K_E = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (68)$$

2.3 O MANCAL

O mesmo é composto por duas partes: mancal e material viscoelástico. O material viscoelástico pode ser adicionado no próprio mancal (entre a capa externa do rolamento e a carcaça do mancal) ou na base do mesmo, como mostram as figuras 5a e 5c. No primeiro caso a inércia do mancal pode ser desprezada, enquanto no segundo, com a manta na base, a inércia do mancal deve ser incluída na dinâmica do rotor. As figuras 5b e 5d mostram os esquemas simplificados para os dois casos acima citados.

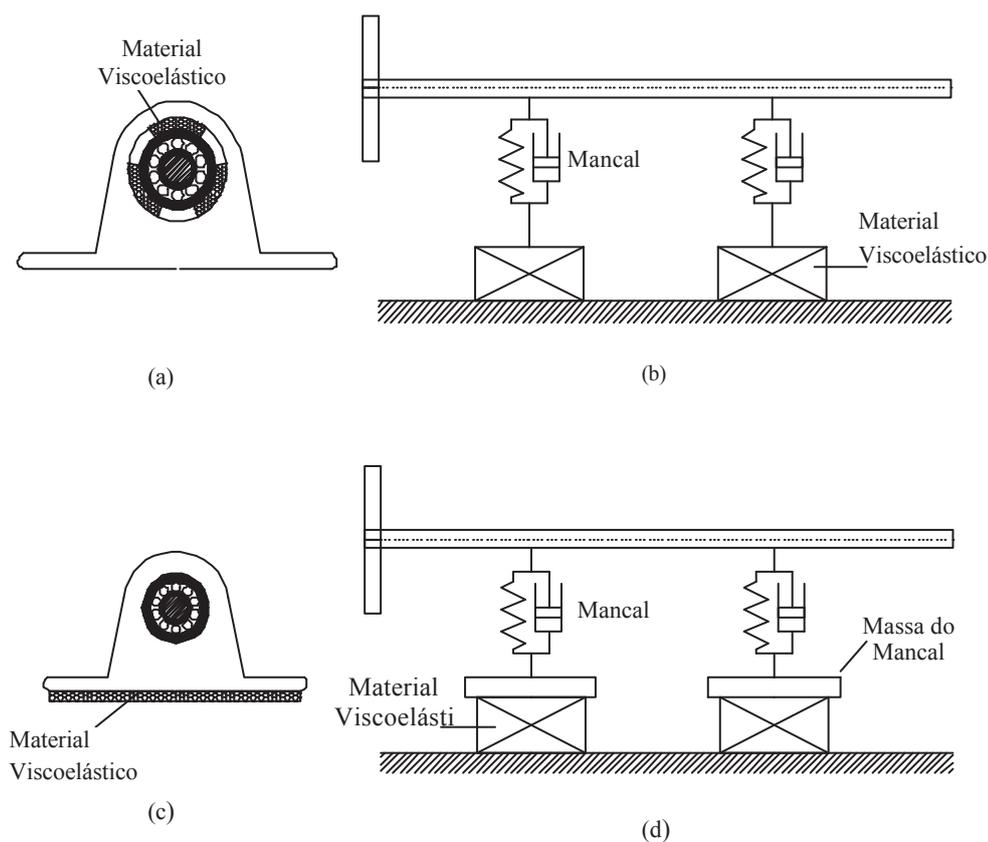


FIGURA 5 – MODELO DE MANCAIS COM MATERIAL VISCOELÁSTICO

A contribuição das mantas de material viscoelástico é dada de forma semelhante ao modelo dos rolamentos e mancais hidrodinâmicos, apresentando simultaneamente características de rigidez e amortecimento já que este material tem a característica de dissipar e armazenar energia.

O material viscoelástico e o mancal se encontram em série. Devido a rigidez do mancal com rolamento ser muito superior à da manta de material viscoelástico, a rigidez resultante equivalente será aquela do material viscoelástico. Para descrever o comportamento real do material viscoelástico é utilizado o modelo de derivada fracionária com quatro parâmetros. Sabe-se que a relação entre a tensão e a deformação do modelo geral viscoelástico linear é representada pela equação diferencial:

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m \frac{d^m \sigma(t)}{dt^m} = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n \frac{d^n \varepsilon(t)}{dt^n} \quad (69)$$

onde $\sigma(t)$ é a tensão, $\varepsilon(t)$ a deformação, b_m, E_0, E_n são os parâmetros característicos do material e m, n são números inteiros. A equação constitutiva unidimensional em derivadas fracionárias, conforme Bagley e Torvik (1983), é:

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m D^{\beta_m} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n D^{\alpha_n} \varepsilon(t) \quad (70)$$

sendo $b_m, \beta_m, \alpha_n, E_0$ e E_n os parâmetros do material considerado. As expressões D^{β_m} e D^{α_n} representam derivadas de ordem fracionária α_n e β_m . Quando $M=N=1$ e $\alpha=\beta$ a equação acima é denominada modelo de derivada fracionária com quatro parâmetros.

$$\sigma(t) + b_1 D^\alpha [\sigma(t)] = E_0 \varepsilon(t) + E_1 D^\alpha [\varepsilon(t)] \quad (71)$$

Aplicando a Transformada de Fourier na equação (71) tem-se:

$$\sigma(\Omega) + b_1 (i\Omega)^\alpha \sigma(\Omega) = E_0 \varepsilon(\Omega) + E_1 (i\Omega)^\alpha \varepsilon(\Omega) \quad (72)$$

Define-se o módulo de elasticidade por:

$$E_c(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)}{\varepsilon(\Omega)} = \frac{E_0 + E_1 (i\Omega)^\alpha}{1 + b_1 (i\Omega)^\alpha} \quad (73)$$

ou alternativamente, segundo Pritz (1996),

$$E_c(\Omega) = \frac{E_0 + E_\infty (i\Omega b)^\alpha}{1 + (i\Omega b)^\alpha} \quad (74)$$

onde $E_1 = E_\infty b_1$, $b_1 = b^\alpha$ e $E_c(\Omega)$ é o módulo complexo do material. Em geral este módulo é função da frequência e da temperatura. Neste trabalho considerar-se-á a temperatura constante, portanto não será incluída como variável independente. Ainda, o módulo de elasticidade, $E_c(\Omega)$, pode ser escrito de forma geral por

$$E_c(\Omega) = E(\Omega)(1 + i\eta(\Omega)) \quad (75)$$

onde $E(\Omega)$ é a parte real de $E_c(\Omega)$, também denominada módulo dinâmico de elasticidade e $\eta(\Omega) = \frac{\text{Im}(E_c(\Omega))}{\text{Re}(E_c(\Omega))}$ é denominado fator de perda. E_0 e E_∞ representam as assíntotas inferior e superior. O expoente α representa a inclinação da reta tangente na frequência correspondente ao ponto de inflexão da curva $E(\Omega)$ ou, também, ao ponto de máximo fator de perda e b que está relacionado com o deslocamento horizontal da curva.

Da teoria de elasticidade de sólidos isotrópicos tem-se $E = 2(1 + \nu)G$ onde ν é a razão de Poisson e G é o módulo de cisalhamento. Para o caso especial de um material incompressível com $\nu = 0,5$, o módulo de elasticidade é $E = 3G$. Logo, da relação entre o módulo complexo do material e o módulo de cisalhamento ($G = E/3$) obtém-se a equação que representa o módulo de cisalhamento puro:

$$G_c(\Omega) = \frac{\tau(\Omega)}{\gamma(\Omega)} = \frac{G_0 + G_1(i\Omega)^\alpha}{1 + b_1(i\Omega)^\alpha} \quad (76)$$

e de forma similar ao módulo de elasticidade:

$$G_c(\Omega) = \frac{G_0 + G_\infty(i\Omega b)^\alpha}{1 + (i\Omega b)^\alpha} \quad (77)$$

ou na forma complexa:

$$G_c(\Omega) = G(\Omega)(1 + i\eta(\Omega)) \quad (78)$$

considerando que para borrachas em geral tem-se $\eta(\Omega) = \eta_E(\Omega) = \eta_G(\Omega)$ (Snowdon, 1968). Onde $G(\Omega) = \text{Re}(G_c(\Omega))$ e $\eta(\Omega) = \frac{\text{Im}(G_c(\Omega))}{\text{Re}(G_c(\Omega))}$.

No modelo considerado neste trabalho, onde o material viscoelástico é adicionado sob o mancal como mostrado na figura 6, só serão consideradas as parcelas xx e yy da rigidez e amortecimento. Na direção X , a rigidez estará representada pelo módulo de cisalhamento e, na direção Z , pelo módulo de elasticidade (tração - compressão).

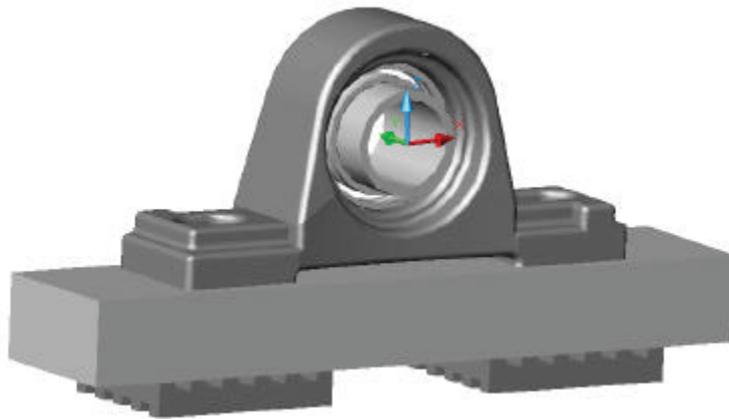


FIGURA 6 – MANCAL COM MATERIAL VISCOELÁSTICO

Desprezando a rigidez associada aos giros ψ e θ (em Z e X , respectivamente) sobre o mancal de rolamento, a matriz de rigidez do mancal viscoelástico será:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{k}_{xx} & 0 \\ 0 & \bar{k}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \quad (79)$$

Sendo

$$\bar{k}_{xx} = LG_c(\Omega) \quad (80)$$

Na direção Z, solicitação do tipo tração-compressão, a rigidez será:

$$\bar{k}_{zz} = LE_a(\Omega) = LE_a(\Omega) \quad (81)$$

onde $L = A/h$, com A área carregada e h a espessura do material viscoelástico, e $E_a = E_c \cdot k_T$ é o módulo aparente de elasticidade. Segundo Nashif (1985), o módulo de elasticidade aparente é obtido através do módulo de elasticidade e o fator de forma k_T . No presente trabalho a manta de material viscoelástico foi montada de forma tal, que permita a dilatação lateral pelo que se considera $k_T \cong 1$ (ver anexo 2), implicando que $E_c = E_a$.

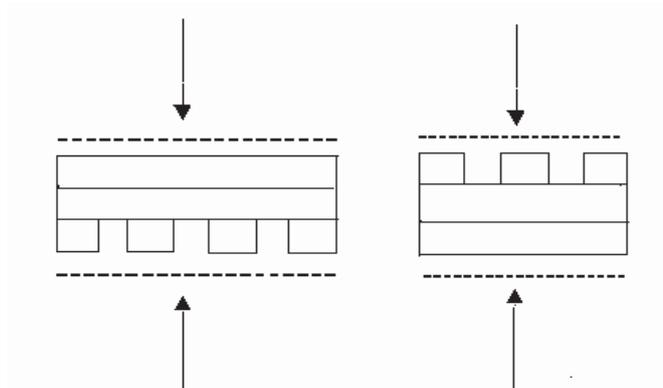


FIGURA 7 – FORMA DA MANTA DE MATERIAL VISCOELÁSTICO

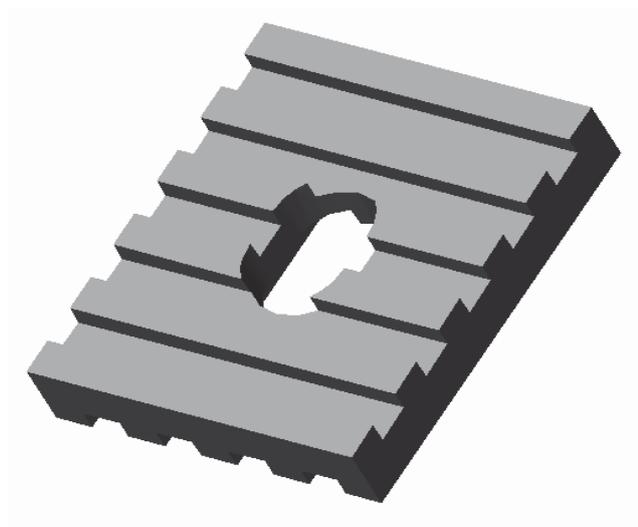


FIGURA 8 - MANTA VISCOELÁSTICA

Trabalhando na região de baixas e médias frequências (abaixo e na região de transição), pode-se considerar que o coeficiente de Poisson é aproximadamente igual a 0,5 (Silva Neto, 2004), logo $E_a = 3G_c$ e a equação (80) toma a seguinte forma:

$$\bar{k}_{zz} = 3LG_c(\Omega) \quad (82)$$

2.3.1 Formulação Matricial das Equações do Mocal

Devido a que neste trabalho foi considerado um mocal de rolamento, a matriz de rolamento, a matriz de amortecimento própria do mocal será desconsiderada. Por outro lado, a rigidez elevada deste tipo de material faz com que seja considerado apenas, pela condição de rigidez em série, a rigidez da manta viscoelástica. Em substituição, a matriz de rigidez do sistema, passar a ser complexa por serem adicionados os termos de k_{xx} e k_{zz} complexos do material viscoelástico. Essa nova matriz elementar é agora dependente da frequência, cuja responsabilidade direta é a manta de material viscoelástico nos mocalis. A matriz elementar do mocal viscoelástico é adicionada no nó correspondente do eixo.

$$K_m = \begin{bmatrix} LG(\Omega)[1+i\eta(\Omega)] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3LG(\Omega)[1+i\eta(\Omega)] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

2.4 MONTAGEM DAS MATRIZES GLOBAIS

Para obter as matrizes M , G e K globais deve-se proceder à montagem sobrepondo as matrizes de cada elemento como apresentado abaixo.

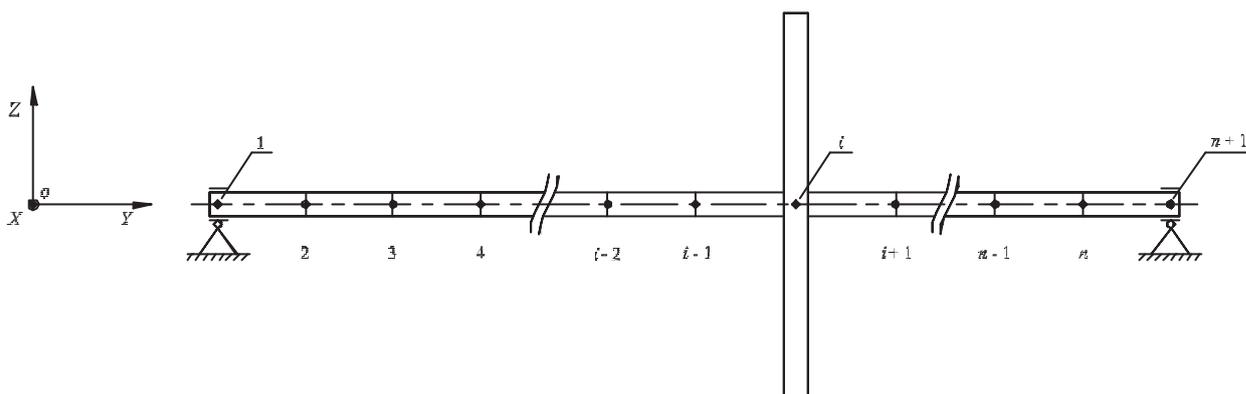


FIGURA 9 - MALHA DO ROTOR SIMPLES APOIADO

No modelo apresentado acima, os nós de cada elemento de viga ou do disco, estão relacionados aos nós do rotor segundo a tabela 1 abaixo:

TABELA 1 – CADA ELEMENTO RELACIONADO AOS NÓS DO ROTOR

Tipo de elemento	Nós do rotor	Vetor deslocamento δ
Viga (Timoshenko)	1 - 2	$u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2$
Viga (Timoshenko)	2 - 3	$u_2, w_2, \theta_2, \psi_2, u_3, w_3, \theta_3, \psi_3$
Viga (Timoshenko)	3 - 4	$u_3, w_3, \theta_3, \psi_3, u_4, w_4, \theta_4, \psi_4$
Viga (Timoshenko)	(i-2) - (i-1)	$u_{i-2}, w_{i-2}, \theta_{i-2}, \psi_{i-2}, u_{i-1}, w_{i-1}, \theta_{i-1}, \psi_{i-1}$
Disco	i	$u_i, w_i, \theta_i, \psi_i$
mancal	1	u_1, w_1
mancal	n + 1	u_{n+1}, w_{n+1}

A seguir são mostradas as matrizes de rigidez ($\bar{K}(\Omega)$), a matriz de inércia (M) e a matriz giroscópica (G) após a superposição das matrizes de cada elemento do rotor.

$$M = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_3 \end{bmatrix} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \begin{bmatrix} M_n \end{bmatrix} \end{pmatrix}_{N \times N}$$

3 RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DINÂMICAS

Após calcular a energia cinética e a energia potencial de cada elemento do rotor, aplica-se a equação de Lagrange. Desta forma, se obtém as matrizes elementares de inércia, amortecimento, matriz de rigidez complexa no caso dos mancais viscoelásticos e a matriz giroscópica.

A partir destas matrizes, obtém-se o sistema de equações globais que governa o movimento de um rotor dinâmico, considerando o efeito giroscópico. Assim, a equação do movimento é dada por:

$$M \ddot{q}(t) + (C + G) \dot{q}(t) + K q(t) = f(t) \quad (84)$$

Onde:

M é a matriz de inércia (constante e simétrica);

G a matriz giroscópica do eixo e disco (função da rotação e anti-simétrica);

C é a matriz de amortecimento interno do eixo e do mancal (constante e simétrico), neste trabalho a matriz C será considerada nula;

K a matriz de rigidez do eixo e dos mancais (simétrica, complexa e função da frequência e da temperatura);

q é o vetor de coordenadas generalizadas, que ao adotar uma discretização de n elementos, possui uma dimensão $4(n + 1) \times 1$, pois se tem $n + 1$ nós e quatro graus de liberdade por nó;

f é o vetor de forças generalizadas.

A seguir, encontra-se a resolução do problema de autovalores e autovetores para sistemas giroscópicos, com amortecimento viscoso e viscoelástico, com o intuito de comparar os resultados de ambos modelos.

3.1 MODELO VISCOSO

Este modelo é utilizado para mancais de rolamento e/ou mancais hidrodinâmicos. Neste trabalho serão considerados somente, por simplicidade, mancais com rolamento. A equação dinâmica do rotor, considerando modelo viscoso de amortecimento, é dada por:

$$M \ddot{q}(t) + (C + G(\Omega_{rpm})) \dot{q}(t) + K q(t) = f(t),$$

considerando $\Omega_{rpm} = cte$ e $G(\Omega_{rpm}) = G$.

Tomando

$$\begin{aligned} f(t) &= \{0\} \\ q(t) &= \{\phi\} e^{st} \end{aligned} \tag{85}$$

a equação (84) se transforma em uma equação algébrica do tipo:

$$\left[s^2 M + s(C + G) + K \right] \{\phi\} = \{0\} \tag{86}$$

ou

$$[D(s)] \{\phi\} = \{0\}. \tag{87}$$

Para que a equação (87) possua uma solução diferente da trivial o determinante de $D(s) = 0$.

$$\Rightarrow |D(s)| = s^{2n} + p_1 s^{2n-1} + \dots + p_{2n-1} s + p_{2n} = 0$$

sendo p_i , com $i = 1, \dots, 2n$ e s_1, s_2, \dots, s_{2n} são as raízes de $|D(s)| = 0$.

Para cada s_j corresponderá um $\{\phi\}_j$, de forma tal que $[D(s_j)]\{\phi\}_j = \{0\}$. Portanto este problema leva a uma solução de $2n$ autovalores e autovetores.

Outra forma de encontrar a solução do problema de autovalores é trabalhar no espaço de estado. Para isto, define-se um novo vetor de coordenadas:

$$y(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dots \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}_{2n \times 1} \quad (88)$$

a equação (84) toma a seguinte forma:

$$[C_1 \quad \vdots \quad M]_{n \times 2n} \dot{y}(t)_{2n \times 1} + [K \quad \vdots \quad 0] y(t) = f(t) \quad (89)$$

onde $f(t) = f(t)_{n \times 1}$ e $C_1 = C + G$.

Para levar a um sistema de equações diferenciais de ordem quadrada, utiliza-se a seguinte igualdade (equação adjunta)

$$[M \quad \vdots \quad 0]\dot{y}(t) + [0 \quad \vdots \quad -M]y(t) = \{0\}. \quad (90)$$

Assim, no espaço de estado, tem-se

$$\begin{bmatrix} C_1 & \vdots & M \\ \dots & \vdots & \dots \\ M & \vdots & 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t) + \begin{bmatrix} K & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & -M \end{bmatrix} y(t) = \begin{Bmatrix} f(t) \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (91)$$

ou, na forma simplificada,

$$A\dot{y}(t) + By(t) = \{F(t)\}. \quad (92)$$

Devido às características das matrizes M , C e K , a matriz B é uma matriz simétrica e A é uma matriz anti-simétrica. A equação (92) representa um problema de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem. Supondo a solução do tipo:

$$y(t) = \theta e^{st} \quad (93)$$

Fazendo $\{F(t)\} = 0$ (vibração livre) e sabendo que:

$$y(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dots \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\theta\} = \begin{Bmatrix} \phi \\ \dots \\ s\phi \end{Bmatrix} \quad (94)$$

a equação (92) toma a forma

$$[sA + B]\theta = \{0\}. \quad (95)$$

Assim, o problema de autovalores é representado por

$$B\theta = \lambda A\theta, \quad (96)$$

onde:

$$\lambda = -s = -i\Omega \text{ e} \quad (97)$$

λ é o autovalor;

s é o coeficiente de Laplace;

$i\Omega$ corresponde à Transformada de Fourier.

Como a matriz A em geral é assimétrica, o problema de autovalores é não-adjunto. Assim, deve-se adicionar o seguinte problema adjunto

$$B^T\Psi = \lambda A^T\Psi \quad (98)$$

sendo:

λ - autovalores;

θ - autovetor a direita;

ψ - autovetor a esquerda.

3.1.1 Ortogonalidade

Em Espíndola (1990), os autovetores ortonormalizados são obtidos fazendo $\frac{\theta_i}{\sqrt{a_i}}$ e $\frac{\Psi_i}{\sqrt{a_i}}$, com $a_i = \Psi_i^T A \theta_i$. Com estes vetores e as matrizes A e B , verifica-se a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\Psi^T A \theta = [I] \quad (99)$$

e

$$\Psi^T B \theta = [\lambda_j], \quad (100)$$

onde $[I]$ e $[\lambda_j] = \text{diag}(\lambda_j)$ representam a matriz identidade e a matriz diagonal de autovalores respectivamente. Como foi visto anteriormente, os autovalores possuem a forma:

$$\begin{aligned} \theta &= [\phi \quad : \quad s\phi]^T \\ \Psi &= [\psi \quad : \quad s\psi]^T \end{aligned} \quad (101)$$

As seguintes propriedades de ortogonalidade são demonstráveis a partir das equações (99) e (100).

a) Primeira condição:

Da equação (100), tem-se

$$-\lambda_j \lambda_k \psi_j^T M \phi_k + \psi_j^T K \phi_k = b_j \delta_{jk}. \quad (102)$$

b) Segunda condição:

Da equação (99), tem-se:

$$-(\lambda_j + \lambda_k) \psi_j^T M \phi_k + \psi_j^T (C + G) \phi_k = a_j \delta_{jk}. \quad (103)$$

Pelas características das matrizes A e B os autovalores λ_j são complexos e se apresentam em pares complexos conjugados

$$\lambda_j = \delta_j \pm i\nu_j \quad (104)$$

tomando $j \neq k$, mas com $\lambda_j = \lambda_k^*$ resulta $a_j = 0$. Aplicando estas relações nas condições de ortogonalidade obtém-se

$$2\delta_j = \frac{\Psi_j^T (C + G) \phi_k}{\Psi_j^T M \phi_k} = \frac{c_j}{m_j} \quad (105)$$

e

$$\lambda_j \lambda_j^* = |\lambda| = \delta_j^2 + \nu_j^2 = \frac{\Psi_j^T \mathbf{K} \phi_k}{\Psi_j^T \mathbf{M} \phi_k} = \frac{k_j}{m_j} = \Omega_j^2. \quad (106)$$

3.1.2 Diagrama de Campbell

Sabe-se que a característica de um sistema girante é dada pelo seu diagrama de Campbell. Como G é função da rotação, o problema de autovalores deve ser resolvido para cada Ω_{rpm} . Isto é, para cada rotação, Ω_{rpm} , deve-se calcular os parâmetros modais Ω_j, ϕ_j e ψ_j do rotor dinâmico. Uma vez resolvido o problema de autovalores para cada rotação, é possível achar o diagrama de Campbell. Este mostra as distintas frequências características de um sistema girante para distintas condições de velocidade de rotação.

Para uma excitação de massa desbalanceada, a resposta do sistema pode ser obtida através do Diagrama de Campbell, traçando uma reta a 45° entre Ω_j e Ω_{rpm} . Assim, através da intersecção desta reta (f_1) com as curvas de frequências características do Diagrama de Campbell, obtém-se as rotações críticas do sistema ($\Omega_{rpm} = \Omega$) (ver figura 10). Para qualquer outro tipo de excitação as frequências características do sistema girante, podem ser obtidas traçando uma reta que a represente. Exemplo: instabilidade dos mancais hidrodinâmicos, onde $\Omega \cong 0,5 \Omega_{rpm}$, representado, pela reta (f_2).

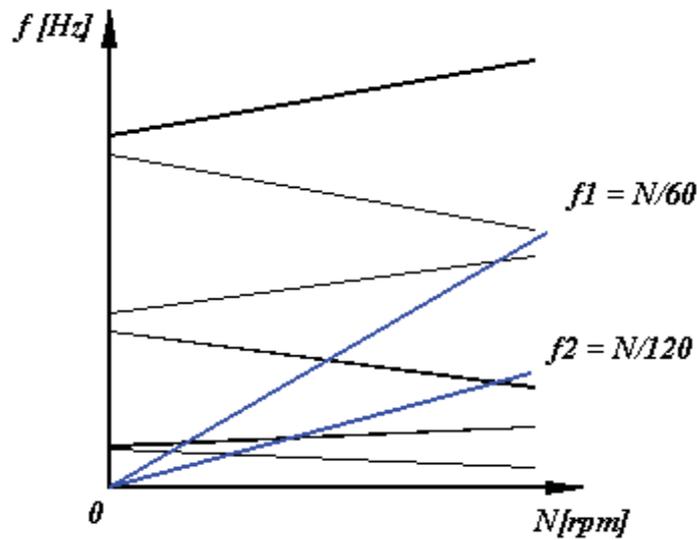


FIGURA 10 - DIAGRAMA DE CAMPBELL

3.1.3 Diagrama de Campbell Simplificado

O diagrama de Campbell Simplificado é uma ferramenta simples e poderosa que permite reduzir o tempo computacional e aumentar a precisão numérica no cálculo das frequências críticas do sistema quando a resposta desejada é exclusivamente devido a uma excitação de massa desbalanceada ($\Omega_{rpm} = \Omega$). Este conceito foi apresentado em Espíndola (1990) e Espíndola e Bavastri (1997) e aqui será brevemente apresentado para comparação com o método tradicional. A equação de movimento, de um rotor dinâmico, dada por:

$$M \ddot{q}(t) + (G + C) \dot{q}(t) + K q(t) = f(t) \quad (107)$$

pode ser escrita considerando excitação de desbalanceamento e $\Omega_{rpm} = \Omega$, onde $G = G(\Omega_{rpm}) = G(\Omega) = \Omega_{rpm} G_1 = \Omega G_1$, da seguinte forma:

$$M \ddot{q}(t) + (\Omega G_1 + C) \dot{q}(t) + K q(t) = f(t) \quad (108)$$

onde, no caso do efeito giroscópico de em disco, resulta

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \begin{bmatrix} 0 & -Ip \\ Ip & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Supondo a solução a seguir, considerando $f(t) = \{0\}$

$$q(t) = \phi e^{i\Omega t} = \phi e^{st} \quad (109)$$

e agrupando convenientemente, a equação (108) se transforma em

$$\left[-\Omega^2(M - iG_1) + i\Omega C + K \right] \phi = \{0\}. \quad (110)$$

A solução da homogênea, equação (109), leva a um problema de $2n$ autovalores. Para resolver este problema é conveniente expressá-lo em variáveis de estado. Definindo a variável de estado $y(t)$:

$$y(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dots \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}_{2n \times 1} \quad (111)$$

Considerando a solução homogênea no espaço de estado, onde:

$$q(t) = \phi e^{st} \Rightarrow y(t) = \begin{Bmatrix} \phi \\ \dots \\ s\phi \end{Bmatrix} e^{st} = \theta e^{st}, \quad (112)$$

a equação (110), em variáveis de estado, fica:

$$s[C \ : \ M - iG_1]\theta + [K \ : \ 0]\theta = \{0\}. \quad (113)$$

Chamando $M - iG_1 = \hat{M}$, tem-se:

$$s[C \ : \ \hat{M}]\theta + [K \ : \ 0]\theta = \{0\} \quad (114)$$

e adicionando a igualdade:

$$s[\hat{M} \ : \ 0]\theta + [0 \ : \ -\hat{M}]\theta = \{0\}, \quad (115)$$

chega-se a expressão

$$s \begin{bmatrix} C & : & \hat{M} \\ \dots & : & \dots \\ \hat{M} & : & 0 \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} K & : & 0 \\ \dots & : & \dots \\ 0 & : & -\hat{M} \end{bmatrix} \theta = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (116)$$

ou, ainda,

$$i\Omega \begin{bmatrix} C & : & \hat{M} \\ \dots & : & \dots \\ \hat{M} & : & 0 \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} K & : & 0 \\ \dots & : & \dots \\ 0 & : & -\hat{M} \end{bmatrix} \theta = \{0\} \quad (117)$$

ou, em forma compacta:

$$[i\Omega A + B] \theta = 0$$

ou (118)

$$[s A + B] \theta = 0$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} C & \vdots & \hat{M} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \hat{M} & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} K & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & -\hat{M} \end{bmatrix}.$$

A matriz A é não simétrica de coeficientes constantes e a matriz B é simétrica de coeficientes constantes. O problema de autovalores generalizado é definido por:

$$B \phi = \lambda A \phi \tag{119}$$

sendo,

$$\lambda = -s = -i\Omega.$$

Como A em geral é uma matriz não simétrica, deve-se resolver o problema adjunto associado, denominado autovalor à esquerda.

$$B^T \psi = \lambda A^T \psi \tag{120}$$

Desta forma as rotações críticas são calculadas através da solução de um único problema de autovalores. Estes parâmetros são os correspondentes, no diagrama de Campbell, aqueles que se encontram sobre a reta de 45° ($\Omega_{rpm} = \Omega$).

3.1.4 Resposta no Domínio do Tempo - Desbalanceamento

Considerando uma excitação por massa desbalanceada onde $\Omega_{rpm} = \Omega$, para encontrar a resposta no domínio do tempo é preciso partir da equação (84)

$$M \ddot{q}(t) + (C + G) \dot{q}(t) + K q(t) = f(t),$$

que no espaço de estado toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} C+G & \vdots & M \\ \dots & \vdots & \dots \\ M & \vdots & 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t) + \begin{bmatrix} K & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & -M \end{bmatrix} y(t) = \begin{Bmatrix} f(t) \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (121)$$

onde

$$y(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dots \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}.$$

De forma simplificada, resulta

$$A \dot{y}(t) + B y(t) = \begin{Bmatrix} f(t) \\ \cdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \{f_y(t)\}. \quad (122)$$

Fazendo a seguinte transformação de coordenadas:

$$y(t) = \theta p(t) \quad (123)$$

e pré multiplicando por Ψ^T , sendo que ambas matrizes modais foram ortonormalizadas pelos coeficientes $a_j, j=1, \dots, 2n$, obtém-se

$$\Psi^T A \theta \dot{p}(t) + \Psi^T B \theta p(t) = \Psi^T \{f_y(t)\} \quad (124)$$

ou

$$I \dot{p}(t) + \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_j & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} p(t) = \Psi^T \{f_y(t)\}. \quad (125)$$

Tomando a k -ésima linha, obtém-se

$$\dot{p}_k(t) + \lambda_k p_k(t) = N_y^k(t), \quad (126)$$

onde o valor de $N_k^y(t)$ para desbalanceamento é encontrado através da seguinte relação

$$f_y(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ F_u \\ F_w \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ m_u e \Omega^2 \sin \Omega t \\ m_u e \Omega^2 \cos \Omega t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{fila } 4(i-1)+1 \\ \leftarrow \text{fila } 4(i-1)+2 \end{matrix} \quad (127)$$

onde i representa o nó onde a excitação é aplicada.

Chamando esse nó com a letra k resulta em

$$N_k^y(t) = m_u d \Omega^2 [\Psi^T(k, 4i-3) \sin \Omega t + \Psi^T(k, 4i-2) \cos \Omega t]. \quad (128)$$

Se for suposto uma solução harmônica para a equação (126) da forma:

$$p_k(t) = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t \quad (129)$$

e substituindo as equações (128) e (129) na equação (126), obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & (A \Omega \cos \Omega t - B \Omega \sin \Omega t) + \lambda_k (A \sin \Omega t + B \cos \Omega t) = \\ & = m_u e \Omega^2 [\Psi^T(k, 4i-3) \sin \Omega t + \Psi^T(k, 4i-2) \cos \Omega t] \end{aligned} \quad (130)$$

onde

$$C = m_u e \Omega^2, \quad a_1 = \Psi^T(k, 4i - 3) \quad e \quad b_1 = \Psi^T(k, 4i - 2).$$

A equação (130) pode ser escrita na forma simplificada:

$$(A\Omega + \lambda_k B)\cos \Omega t + (\lambda_k A - B\Omega)\sin \Omega t = C[a_1 + \sin \Omega t + b_1 \cos \Omega t] \quad (131)$$

de onde se obtém o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} A\Omega + \lambda_k B &= b_1 C \\ \lambda_k A - B\Omega &= a_1 C \end{aligned} \quad (132)$$

Os valores dos coeficientes A e B são encontrados da seguinte forma:

$$A = \frac{b_1 C - \lambda_k B}{\Omega} \quad (133)$$

$$\frac{\lambda_k}{\Omega} [b_1 C - \lambda_k B] - B\Omega = a_1 C \quad (134)$$

da equação (134), tem-se o valor do coeficiente B

$$\begin{aligned} B &= \frac{-a_1 C + \frac{\lambda_k}{\Omega} b_1 C}{\frac{\lambda_k^2}{\Omega} + \Omega} \\ B &= \frac{-a_1 C + \frac{\lambda_k}{\Omega} b_1 C}{\frac{\lambda_k^2 + \Omega^2}{\Omega}} \end{aligned}$$

$$B = \frac{-a_1 \Omega C + b_1 C \lambda_k}{\lambda_k^2 + \Omega^2} \quad (135)$$

$$A = \frac{b_1 C - \lambda_k \left[\frac{(-a_1 C \Omega + b_1 C \lambda_k)}{(\lambda_k^2 + \Omega^2)} \right]}{\Omega}. \quad (136)$$

Nota:

➤ uma vez calculado os $p_k(t)$ com $k=1, \dots, 2n$, calcula-se $y(t) = \theta p(t)$.

➤ como $y(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dots \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}$ as primeiras n componentes representam a solução das

coordenadas generalizadas $q(t)$, a resposta do sistema a qualquer excitação do tipo desbalanceamento.

3.1.4.1 Órbita

Escolhendo um ponto do eixo (rotor), no plano transversal ao mesmo, cujas coordenadas são definidas por u (deslocamento na direção X) e w (deslocamento na direção Z), é possível montar o gráfico da órbita que descreve dito ponto para distintas rotações do eixo.

Para isto é preciso mostrar um gráfico cuja abscissa é $u(t)$ e cuja ordenada é $w(t)$. Se o rotor é simétrico (rotor, mancais, etc) a órbita é uma circunferência. Quando o rotor ou sistema girante é não simétrico, naquele plano a órbita descrita será uma elipse.

Informação mais detalhada sobre a órbita descrita pelo eixo do rotor pode ser encontrada em Lalanne e Ferraris (1990) e no próximo capítulo.

3.1.5 Resposta na Frequência – Desbalanceamento

Partindo do sistema de equações diferenciais no espaço de estado dados pela expressão abaixo:

$$A \dot{y}(t) + B y(t) = L = \begin{Bmatrix} f(t) \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (137)$$

$$\text{sendo } y(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dots \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix},$$

Para representar a equação (137),

$$y(t) = \theta p(t) \quad (138)$$

e substitui-se na equação acima além de pré multiplicar por Ψ^T (θ autovetores a direita e Ψ autovetores a esquerda). Os autovetores à esquerda e a direita correspondem àqueles obtidos considerando massa desbalanceada. Com esta transformação se leva a equação em espaço de estado para o espaço modal

$$\Psi^T A \theta \dot{p}(t) + \Psi^T B \theta p(t) = \Psi^T L \quad (139)$$

$$\begin{bmatrix} \backslash & & \\ & a_j & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \dot{p}(t) + \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & b_j & \\ & & \backslash \end{bmatrix} p(t) = \Psi^T f_y(t) \quad (140)$$

ou, ainda, se os autovetores foram ortonormalizados através da matriz A

$$I \dot{p}(t) + \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \lambda_j & \\ & & \backslash \end{bmatrix} p(t) = \Psi^T f_y(t) \quad (141)$$

No domínio da frequência, aplicando a Transformada de Fourier sobre a equação (141) resulta

$$\left[i\Omega I + \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \lambda_j & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \right] P(\Omega) = \Psi^T f_y(\Omega) = \Psi^T \begin{Bmatrix} F(\Omega) \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\left[i\Omega \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & a_j & \\ & & \backslash \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & b_j & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \right] P(\Omega) = \Psi^T f_y(\Omega). \quad (142)$$

Conseqüentemente,

$$P(\Omega) = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & i\Omega a_j + b_j & \\ & & \backslash \end{bmatrix}^{-1} \Psi^T f_y(\Omega) \quad (143)$$

o que resulta, considerando a transformação da equação (138), na solução do problema no espaço de estado

$$Y(\Omega) = \theta \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & i\Omega a_j + b_j & \\ & & \backslash \end{bmatrix}^{-1} \Psi^T f_y(\Omega). \quad (144)$$

De forma compacta,

$$Y(\Omega) = [\alpha(\Omega)] f_y(\Omega), \quad (145)$$

onde $[\alpha(\Omega)]$ é denominada matriz de receptância no espaço de estado. Seus coeficientes são complexos e dependentes da frequência.

3.1.6 Exemplo de Aplicação

3.1.6.1 Exemplo 1

O primeiro rotor utilizado para testar o modelo numérico aqui apresentado é mostrado na figura 11. Este exemplo foi apresentado pela primeira vez por Lalanne (1990). O sistema de unidades utilizado é o sistema internacional. As longitudes dos distintos segmentos do eixo são:

$$L_1 = 0,2 \text{ m}, L_2 = 0,3 \text{ m}, L_3 = 0,5 \text{ m e } L_4 = 0,3 \text{ m}.$$

O raio da seção transversal do eixo é igual a $a = 0,05 \text{ m}$ constante. Os dados geométricos do disco são apresentados na tabela 2 e a velocidade de rotação do rotor varia de 0 a 30.000 rpm. O disco e o eixo são de aço e suas características físicas são:

$$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

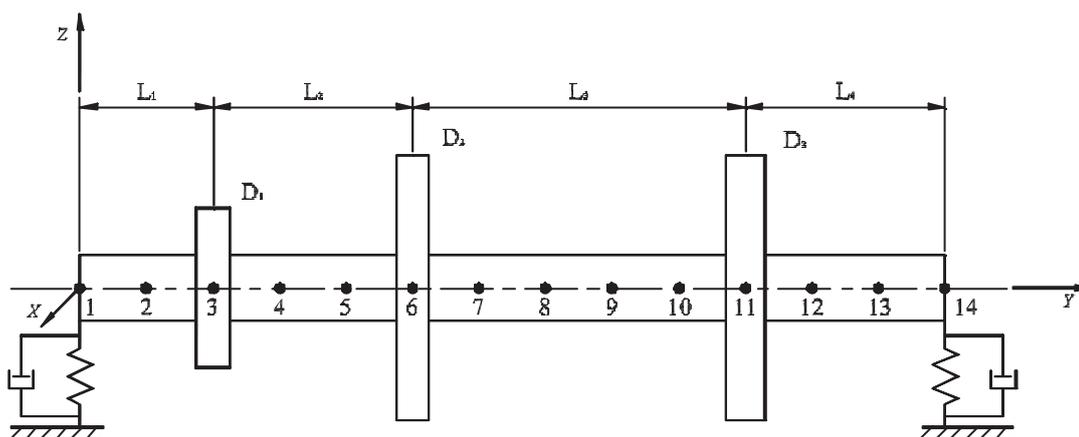
$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3 \text{ e}$$

$$\nu = 0,3 \text{ (coeficiente de Poisson)}.$$

Os dois mancais são assumidos idênticos e caracterizados por:

$$k_{xx} = 5 \times 10^7 \text{ N/m}; \quad k_{zz} = 7 \times 10^7 \text{ N/m}; \quad k_{xz} = k_{zx} = 0$$

$$c_{xx} = 5 \times 10^2 \text{ N/m}; \quad c_{zz} = 7 \times 10^2 \text{ N/m}; \quad c_{xz} = c_{zx} = 0.$$



FONTE: LALANNE E FERRARIS (1990)

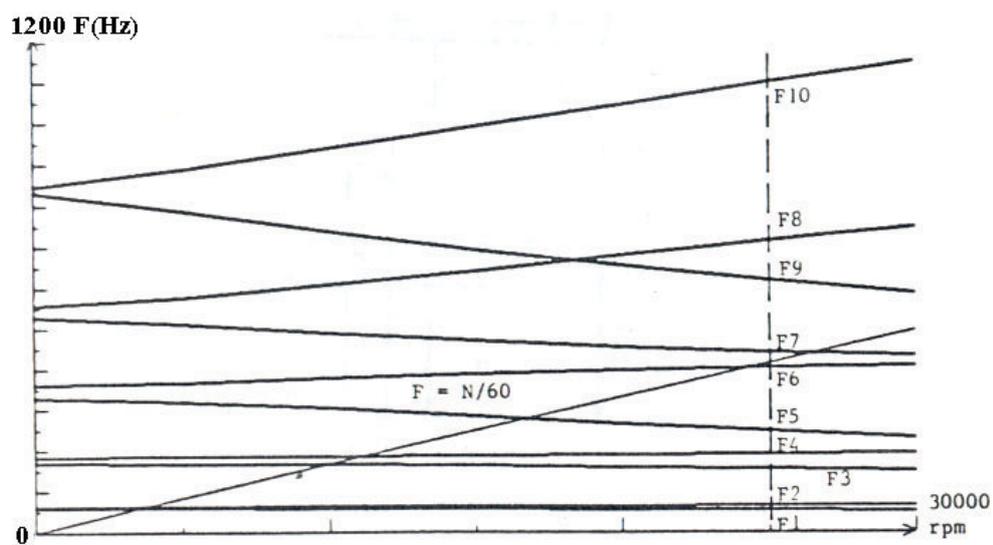
FIGURA 11 - MODELO DO ROTOR SIMPLES

TABELA 2 - DADOS DOS DISCOS

Disco	D_1	D_2	D_3
Espessura	0,05 m	0,05 m	0,06 m
Raio interno	0,05 m	0,05 m	0,05 m
Raio exterior	0,12 m	0,2 m	0,2 m

Diagrama de Campbell

O diagrama de Campbell para as dez primeiras frequências é apresentado na figura 12. As frequências naturais para uma rotação constante de 25.000 rpm podem ser visualizadas nesta mesma figura (F_i , com $i = 1$ a 10). Os valores das frequências naturais para a rotação constante acima são apresentados na tabela 3.



FONTE: LALANNE E FERRARIS (1990)

FIGURA 12 – DIAGRAMA DE CAMPBELL

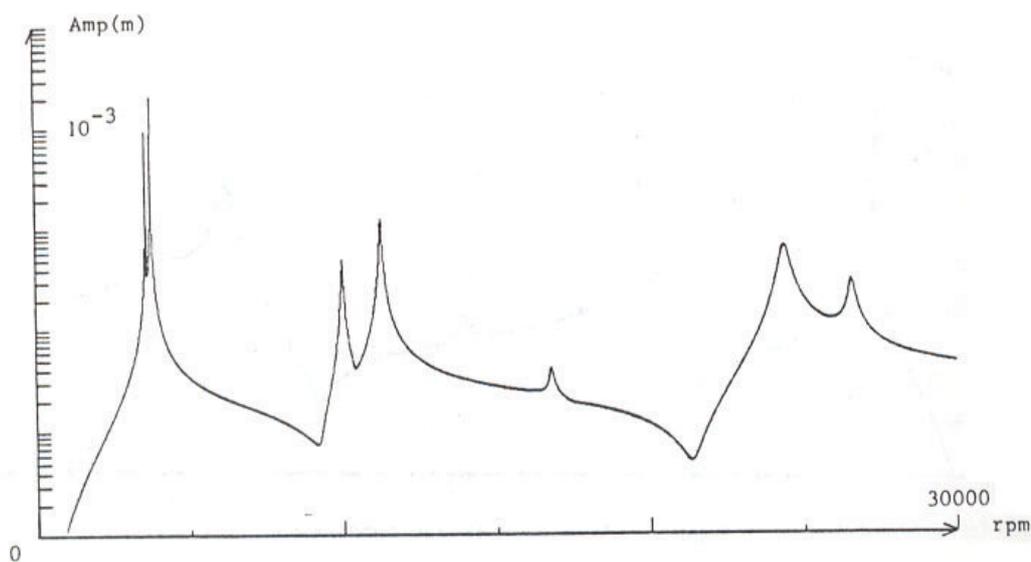
TABELA 3 – FREQUÊNCIA EM HERTZ EM 25.000 RPM

FREQUÊNCIA	VALOR DE REFERÊNCIA
F1	55,408
F2	67,209
F3	157,90
F4	193,71
F5	249,90
F6	407,62
F7	446,62
F8	715,03
F9	622,65
F10	1093,00

FONTE: LALANNE E FERRARIS (1990)

Resposta a Massa Desbalanceada

Assume-se uma excitação do tipo massa desbalanceada de 200 g mm situada sobre o disco D_2 . Os resultados para a referencia escolhida pelo autor (deslocamento no nó 6) são mostrados na figura 13.



FONTE: LALANNE E FERRARIS (1990)

FIGURA 13 – RESPOSTA A UMA MASSA DESBALANCEADA

Todos os resultados apresentados encontram-se em Lalanne e Ferraris (1990).

3.1.6.2 Exemplo 2

Neste segundo exemplo os cálculos do item 3.1.6.1 são repetidos usando um código numérico próprio, desenvolvido pelo grupo de pesquisa do CEFET-PR (LAVIB). Este código foi desenvolvido através de dois trabalhos, final de curso Lopez (2002) e Santos (2003). A saída gráfica do modelo numérico é apresentada nas figuras 14 a 18. Na figura 14 é mostrada a tela principal do programa. Nesta tela se escolhe o tipo de saída desejado e adicionam-se alguns dados que fazem parte da resposta como

dados de desbalanceamento, posição, amplitude, discretização do eixo, entre outros. As possíveis saídas gráficas que podem ser escolhidas são:

Dados de entrada;

Esquema do sistema;

Diagrama de Campbell;

Resposta permanente no domínio do tempo a desbalanceamento;

Resposta permanente no domínio da frequência a desbalanceamento;

Modos de vibrar.

A figura 15 mostra a saída gráfica dos dados de entrada. Nesta, é possível introduzir os dados físicos e dimensionais do sistema rotor como por exemplo: diâmetros internos e externos do eixo, diâmetros e outras dimensões dos discos e suas posições, distâncias entre as áreas de igual diâmetro do eixo, módulo de elasticidade do eixo e disco, densidades, características dinâmicas dos mancais, entre outros. Este modelo permite estudar diferentes configurações de rotores, com diferentes diâmetros em escalonamento, vários discos e mancais. O modelo é amplo e está em fase de testes. Os dados presentes nesta saída gráfica correspondem aos dados do exemplo apresentado anteriormente (exemplo 1 da simulação numérica) e que consta na bibliografia Lalanne e Ferraris (1990).

A figura 16 mostra a saída do programa contendo um desenho simplificado do rotor em estudo (equivalente ao exemplo 1). A mesma é construída a partir dos dados de entrada que foram fornecidos nos dados de entrada.

A figura 17 apresenta o Diagrama de Campbell e é obtida após resolver um problema de autovalores em função da rotação do eixo. Este diagrama representa a característica dinâmica do eixo a distintas rotações. É possível a partir deste diagrama determinar as rotações críticas do rotor provocadas por desbalanceamentos (traçando uma reta a 45 graus entre as frequências naturais do sistema e a rotação do mesmo). Também é possível achar as frequências naturais do sistema girante para uma dada rotação, quando a excitação é independente da rotação do eixo, subindo com uma reta

vertical sobre o diagrama de Campbell e, ainda, achar frequências características do sistema para distintas condições de serviço do sistema em análise.

Na figura 18 se apresenta uma curva típica de resposta no domínio da frequência quando este é excitado por uma força de desbalanceamento. Esta resposta pode ser obtida em qualquer ponto do sistema e coordenada devido a uma ou várias excitações de desbalanceamento distribuídas sobre o sistema.

TELA PRINCIPAL
ZOOM - MENU A - MENU B

DINAMICA DE ROTORES Y2

DADOS
Alterar Dados

ESQUEMA
MOSTRAR

Div. Maior Div. Menor
4 2

DIAGRAMA DE CAMPBELL
CALCULAR

Inicial (rpm) Final (rpm) Divisiones
0 30000 100

RESPOSTAS

Inicial (rpm) 900 Puntos de desbalanceamiento 3
Final (rpm) 30000 Excentricidade 0,0,20e
Divisiones 500 Masas Desbalanceadas 0,0,10e

SAR

FRECUENCIA

Posición de respuesta 0,5,0,5
Deslocam. u.w.tela.kpi 1,2

TEMPO

Posicao ciberna 5

MODOS

Mod 5

FIGURA 14 – SAÍDA GRÁFICA (TELA PRINCIPAL)

DADOS DE ENTRADA

MANCAIS		EIXO		DISCO	
NC	2	L	1.3	ND	3
pm	0.0,1.3	CS	1	pd	0.2,0.5,1.0
kxx	5.0e7,5.0e7	d_e	0.1	d_d	0.24,0.4,0.4
kxz	0.0,0.0	ps	1.3	h_d	0.05,0.05,0.06
kzz	7.0e7,7.0e7	E_e	200e9	rho_d	7800,7800,7800
kzx	0.0,0.0	nu_e	0.3		
cxx	5.0e2,5.0e2	rho_e	7800		
cxz	0.0,0.0				
czz	7.0e2,7.0e2				
czx	0.0,0.0				
Massa	0.0,0.0				

OK

FIGURA 15 – SAÍDA GRÁFICA (DADOS DE ENTRADA)

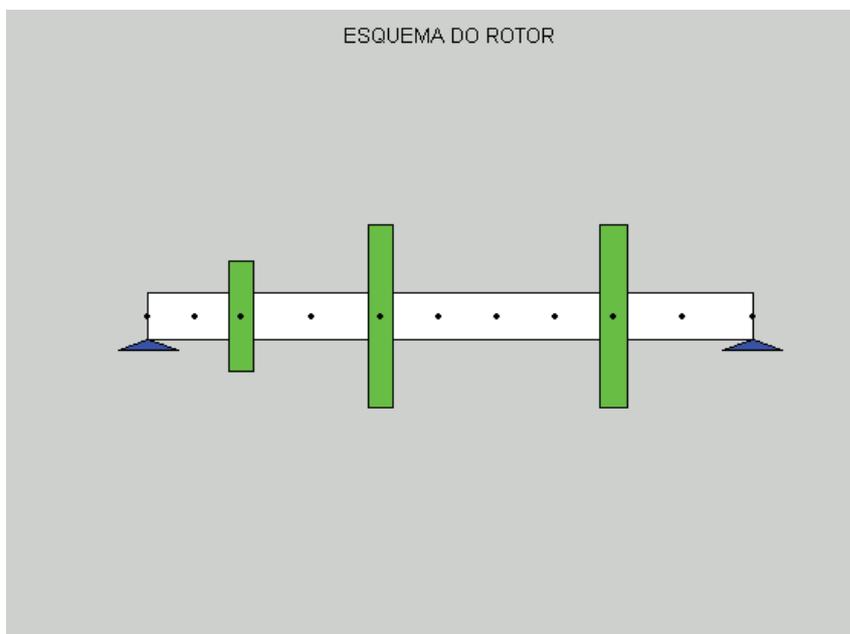


FIGURA 16 – ESQUEMA SIMPLES DO ROTOR EM ESTUDO

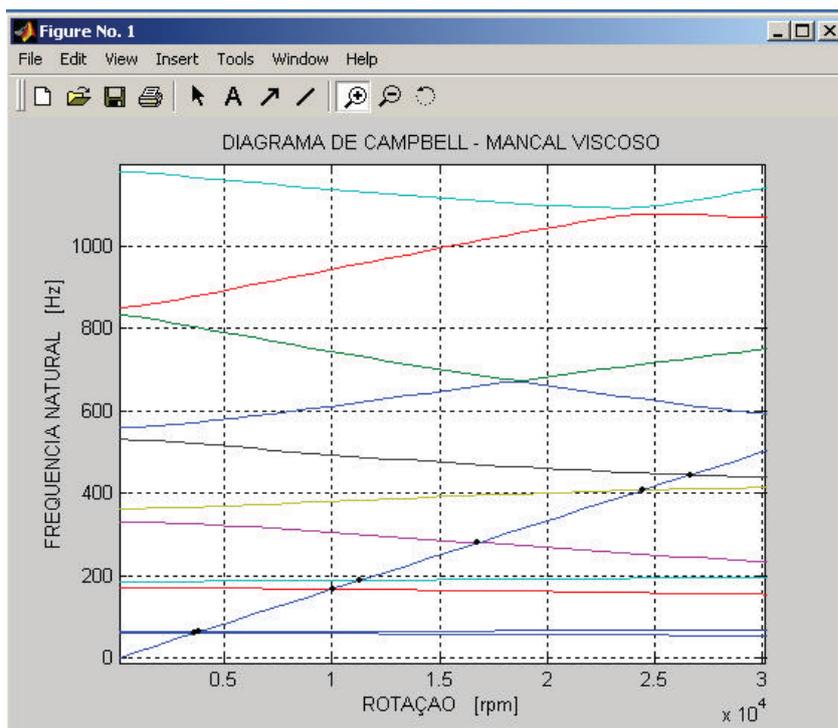


FIGURA 17 – DIAGRAMA DE CAMPBELL

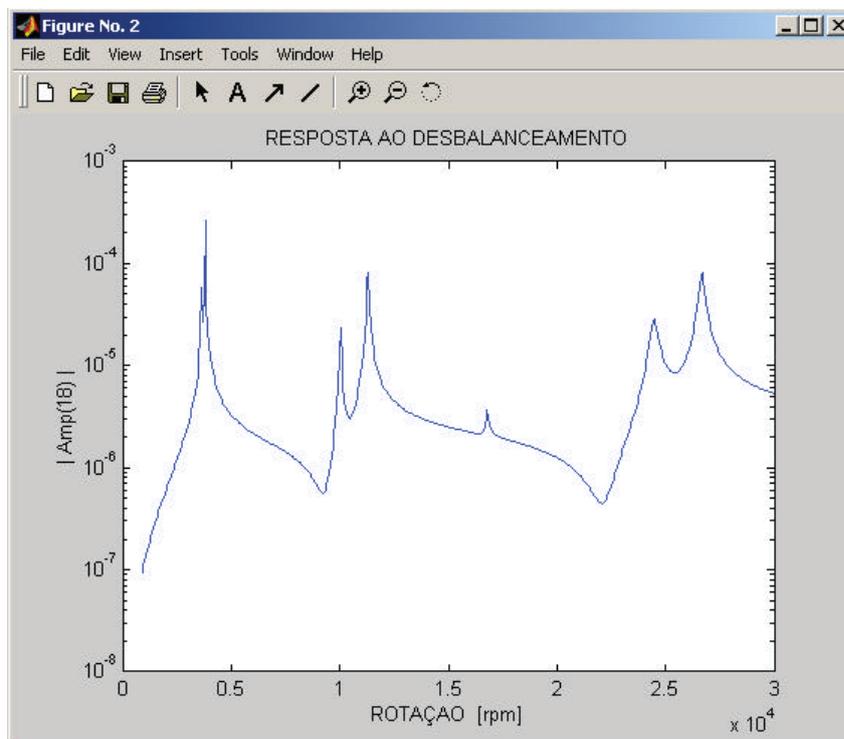


FIGURA 18 – RESPOSTA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

A tabela abaixo mostra as dez primeiras frequências naturais do rotor a 25000 rpm apresentadas em Lalanne e Ferraris (1990) e as dez primeiras frequências naturais calculadas com o código numérico em Matlab, desenvolvido no LAVIB, se observam valores totalmente equivalentes, com erros menores que 1%.

TABELA 4 – COMPARAÇÃO ENTRE O EXEMPLO 1 E O EXEMPLO 2

Frequência	Valor de referência (Lalanne (1990))	Valor calculado com o código próprio
F1	55,408 Hz	55,424 Hz
F2	67,209 Hz	67,243 Hz
F3	157,90 Hz	158,03 Hz
F4	193,71 Hz	193,95 Hz
F5	249,90 Hz	250,01 Hz
F6	407,62 Hz	408,33 Hz
F7	44662 Hz	447,83 Hz
F8	715,03 Hz	716,24 Hz
F9	622,65 Hz	624,29 Hz
F10	1093,0 Hz	1096,0 Hz

3.2 MODELO VISCOELÁSTICO

Uma vez que o efeito giroscópico é função da rotação do eixo e a matriz de rigidez $\bar{K}(\Omega)$ é complexa e função da frequência, a equação (84) toma a seguinte forma

$$M \ddot{q}(t) + (C + G(\Omega_{rpm})) \dot{q}(t) + \bar{K}(\Omega)q(t) = f(t) . \quad (146)$$

A equação (146) é válida para uma excitação senoidal de frequência Ω . Para generalizar esta expressão é possível representar a mesma no domínio da frequência através da Transformada de Fourier, como mostra a equação (147)

$$[-\Omega^2 M + i\Omega(C + G(\Omega_{rpm})) + \bar{K}(\Omega)]Q(\Omega) = F(\Omega) \quad (147)$$

onde $Q(\Omega)$ e $F(\Omega)$ são as transformadas de Fourier de $q(t)$ e $f(t)$, respectivamente.

Para determinar o problema de autovalores encontram-se algumas dificuldades adicionais:

- em geral as matrizes não são simétricas,
- existência do termo $i\Omega$ e
- a matriz de rigidez do primeiro membro da equação (147) é dependente da frequência.

Para contornar este último problema há que se reescrever a equação (147) em espaço de estado. Para isto, define-se a variável de estado

$$Y(\Omega) = \begin{Bmatrix} Q(\Omega) \\ \dots \\ i\Omega Q(\Omega) \end{Bmatrix}. \quad (148)$$

A equação (147) pode ser escrita na forma

$$i\Omega [C + G(\Omega_{rpm}) \quad \vdots \quad M] Y(\Omega) + [\bar{K}(\Omega) \quad \vdots \quad 0] Y(\Omega) = \{F(\Omega)\}, \quad (149)$$

adiciona-se à equação (149) a seguinte identidade:

$$i\Omega [M \quad \vdots \quad 0] Y(\Omega) + [0 \quad \vdots \quad -M] Y(\Omega) = \{0\} \quad (150)$$

e a equação no espaço de estado e no domínio da frequência, resulta

$$i\Omega \begin{bmatrix} C + G(\Omega_{rpm}) & \vdots & M \\ \dots & \vdots & \dots \\ M & \vdots & 0 \end{bmatrix} Y(\Omega) + \begin{bmatrix} \bar{K}(\Omega) & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & -M \end{bmatrix} Y(\Omega) = \begin{Bmatrix} F(\Omega) \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (151)$$

Esta equação pode ser escrita na forma mais compacta

$$i\Omega AY(\Omega) + BY(\Omega) = \{F_y(\Omega)\} \quad (152)$$

ou

$$[i\Omega A + B]Y(\Omega) = \{F_y(\Omega)\} \quad (153)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} C + G(\Omega_{rpm}) & \vdots & M \\ \dots & \vdots & \dots \\ M & \vdots & 0 \end{bmatrix}_{2n \times 2n}, \quad B = \begin{bmatrix} \bar{K}(\Omega) & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & -M \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad e \quad \{F_y(\Omega)\} = \begin{Bmatrix} F(\Omega) \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}_{2n \times 1} .$$

3.2.1 Problema de Autovalores

Considere-se agora o seguinte problema de autovalores:

$$B\theta = \lambda A\theta \quad (154)$$

onde θ é denominado autovetor à direita. Considerando que A e/ou B são matrizes não simétricas, deve-se resolver o problema de autovalor adjunto, definindo-se o autovetor a esquerda com a variável Ψ .

$$B\Psi = \lambda A\Psi, \quad (155)$$

onde $\lambda = -i\Omega$.

3.2.2 Ortogonalidade

De Espíndola (1990), mostra-se que as seguintes relações devem ser satisfeitas entre os autovetores e as matrizes que os geram

$$\Psi_j^T A \theta_k = a_j \delta_{jk} \quad (156)$$

e

$$\Psi_j^T B \theta_k = b_j \delta_{jk} \quad (157)$$

$$\text{com } \delta_{jk} \begin{cases} =1 & \text{se } j = k \\ =0 & \text{se } j \neq k \end{cases}.$$

A partir das equações (156) e (157), as seguintes propriedades de ortogonalidade no espaço de configuração são (ver Espíndola, 1990):

a) Primeira condição de ortogonalidade

Da equação (157) e considerando

$$\Psi_j = [\psi_j \quad \vdots \quad -\lambda_j \psi_j]^T$$

$$\theta_k = [\phi_k \quad \vdots \quad -\lambda_k \phi_k]^T \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \bar{K}(\Omega) & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & -M \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$-\lambda_j \lambda_k \psi_j^T M \phi_k + \psi_j^T \bar{K} \phi_k = b_j \delta_{jk}. \quad (158)$$

Se os autovetores ψ_j e θ_k forem ortonormalizados através da matriz A , $b_j = \lambda_j$.

b) Segunda condição de ortogonalidade

Da equação (156) e considerando

$$\Psi_j = [\psi_j \quad \vdots \quad -\lambda \psi_j]^T$$

$$\theta_k = [\phi_k \quad \vdots \quad -\lambda \phi_k]^T \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} C + G(\Omega_{rpm}) & \vdots & M \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ M & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

obtem-se

$$-(\lambda_j + \lambda_k) \psi_j^T M \phi_k + \psi_j^T (C + G(\Omega_{rpm})) \phi_k = a_j \delta_{jk} \quad (159)$$

As equações (158) e (159) representam as condições de ortogonalidade em função das matrizes M , C , G e K . Se os autovetores forem ortonormalizados através da matriz A , $a_i = 1$. Como os valores de λ são complexos, podem ser representados pela parte real, δ_j , e pela parte imaginária v_j

$$\lambda_j = \delta_j + i v_j. \quad (160)$$

Devido às características apresentadas pelo polinômio característico, os autovalores são complexos e diferentes, por outro lado estão de alguma forma relacionados por estar trabalhando no espaço de estado. Verifica-se que os autovalores estão formados por pares λ_j e $-\lambda_j$. Assim tomando-se valores de $j \neq k$, mas com $\lambda_j = -\lambda_k$ e aplicando estes valores nas relações de ortogonalidade acima, resultam:

$$\lambda_j^2 = -\frac{\bar{k}_j}{m_j} = -\bar{\Omega}_j^2 = (i\bar{\Omega}_j)^2 \quad (161)$$

e, portanto, $\lambda_j = i\bar{\Omega}_j$.

Por definição tem-se que

$$-\lambda_j^2 = \bar{\Omega}_j^2 = \Omega_j^2(1 + i\eta_j) \quad (163)$$

logo

$$\lambda_j = \Omega_j \sqrt{1 + i\eta_j}. \quad (164)$$

Desta forma, a frequência natural não amortecida e o fator de perda são definidos por:

$$\Omega_j^2 = \text{Re}(-\lambda_j^2) \quad (165)$$

$$\eta_j = \frac{\text{Im}(-\lambda_j^2)}{\text{Re}(-\lambda_j^2)}$$

3.2.3 Diagrama de Campbell

Neste caso particular, em que o rotor está composto por mancais com material viscoelástico, a matriz A que contém a matriz giroscópica é função da rotação do eixo (Ω_{rpm}) e a matriz B que contém a matriz de rigidez é complexa e função da frequência (Ω). Desta forma, o problema de autovalores é função da rotação e da variável frequência. Isto é, para uma determinada rotação do rotor ($\Omega_{rpm} = cte$), o problema de autovalores é função da frequência e será resolvido através de um diagrama de Campbell Interno, Ω_j versus Ω , como apresentado por Espíndola (1990 a), pois

$\bar{K}(\Omega) = K(\Omega)(1 + i\eta(\Omega))$. A partir deste Campbell Interno, fazendo $\Omega = \Omega_j$, e utilizando uma reta que cruza as curvas das frequências naturais, serão extraídas as frequências naturais do sistema de forma equivalente ao trabalho Espíndola e Floody (1992) para uma viga sanduíche (metal - material viscoelástico - metal). Esse processo deve ser repetido para todas as rotações do rotor, resultando em um novo diagrama de Campbell Final, agora (Ω_j versus Ω_{rpm}), contendo as rotações críticas do rotor dinâmico viscoelástico. A partir deste diagrama de Campbell Final é possível determinar as características dinâmicas do sistema rotor dinâmico viscoelástico. Na figura 19 é apresentado um esquema mostrando a forma como o diagrama de Campbell é construído. Na figura 19b é representado o diagrama de Campbell interno e na figura 19a o resultado final. Como pode ser observado, para calcular as frequências naturais do sistema para uma rotação constante, é preciso resolver um problema de autovalores função da frequência devido à característica da matriz de rigidez.

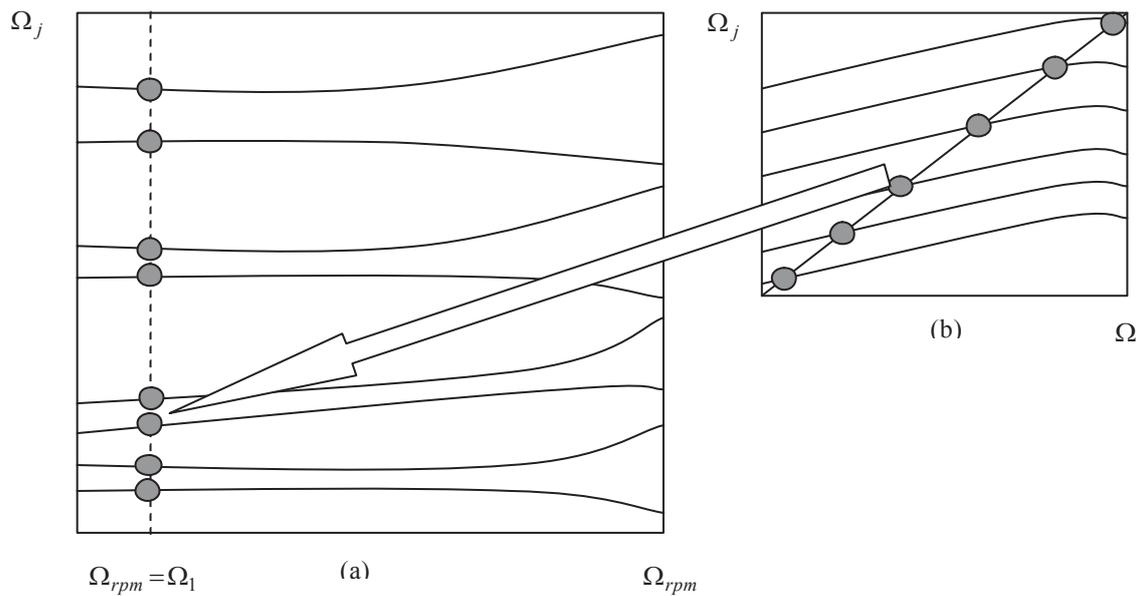


FIGURA 19 - (a) CAMPBELL FINAL - (b) CAMPBELL INTERNO

O diagrama esquemático abaixo mostra como deve ser resolvido o problema de autovalores para um sistema girante com mancais viscoelásticos.

$$\left[\begin{array}{l}
 \text{Variação da rotação } (\Omega_{rpm}) \\
 \text{Variação da frequência } (\Omega) \\
 B\theta = \lambda A\theta \\
 B^T \Psi = \lambda A^T \Psi \\
 \text{Campbell Interno} \\
 \text{Campbell Final}
 \end{array} \right.$$

Para obter o diagrama de Campbell, basta resolver o problema do autovalor a direita. No diagrama de Campbell, podem ser representadas duas retas, dadas pelas seguintes equações:

$$\Omega_1 = \Omega_{rpm} = \frac{\pi N_{rpm}}{30} \quad (166)$$

$$\Omega_2 = \Omega_{rpm} = \left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{N_{rpm}}{30} \quad (167)$$

onde N_{rpm} é a velocidade de rotação do eixo (rpm). Estas duas retas, utilizadas para encontrar as rotações críticas, representam às forças de excitação mais freqüentes que se apresentam na prática: massa desbalanceada, cuja freqüência coincide com a rotação do eixo (reta Ω_1) e a excitação produzida pela instabilidade dos mancais hidrodinâmicos, a qual possui uma freqüência aproximadamente igual a metade de N (reta Ω_2).

3.2.4 Diagrama de Campbell Simplificado

Se a excitação é unicamente devido a desbalanceamento, o diagrama de Campbell pode ser encontrado de forma simplificada.

Caso a equação que governa o movimento do rotor dinâmico contenha a matriz C (amortecimento interno do eixo e/ou do mancal), deve-se trabalhar no espaço de estado e não espaço de configurações como veremos a continuação.

Os passos a seguir estão demonstrados na equação (147) no domínio da freqüência até a equação (155).

Quando a matriz C for considerada nula (considerando, por exemplo, mancal de rolamento apoiado sobre manta de material viscoelástico), o diagrama de Campbell Simplificado é obtido, partindo da equação do movimento (146) no espaço das configurações

$$M \ddot{q}(t) + G(\Omega_{rpm}) \dot{q}(t) + \bar{K}(\Omega) q(t) = \{f(t)\}$$

Para uma excitação por massa desbalanceada, cuja freqüência coincide com a freqüência de rotação do rotor ($\Omega_{rpm} = \Omega$), o módulo de cisalhamento é $G(\Omega_{rpm}) = G(\Omega) = \Omega G_1$. No domínio da freqüência, tem-se:

$$[-\Omega^2 \hat{M} + \bar{K}(\Omega)]\phi = F(\Omega) \quad (168)$$

onde $\hat{M} = M - iG_1$ e $\lambda = -s^2$.

A solução do problema de autovalor é dada pela seguinte equação:

Autovalores à direita:

$$\bar{K}(\Omega)\phi(A\Omega) = \lambda(\Omega) \hat{M}\phi(\Omega) \quad (169)$$

Como pode ser observado na equação (168) há apenas variação na frequência, pois $\Omega_{rpm} = \Omega$ e \bar{K} é função de Ω . Logo, o problema de autovalores deve ser resolvido dependendo apenas da discretização de Ω , através de um único laço.

O diagrama de Campbell Simplificado (Ω_j vs Ω) determina a característica do sistema eixo-rotor considerando apenas excitações de desbalanceamentos.

3.2.5 Resposta na Frequência – Desbalanceamento

Partindo do sistema de equações no espaço de configurações, dado pela equação

$$M \ddot{q}(t) + G(\Omega_{rpm}) \dot{q}(t) + \bar{K}(\Omega)q(t) = f(t) \quad (170)$$

onde a matriz C de amortecimento é considerada nula e considerando que a excitação é do tipo massa desbalanceada ($\Omega_{rpm} = \Omega$), isso implica em $G(\Omega_{rpm}) = G(\Omega) = \Omega G_1$. Desta

forma a equação do movimento pode ser reescrita no domínio da frequência da seguinte forma:

$$[-\Omega^2 \hat{M} + \bar{K}(\Omega)]Q(\Omega) = F(\Omega) \quad (171)$$

onde $\hat{M} = M - iG_1$.

Devendo, então, calcular os autovetores à direita e à esquerda, lembrando que \hat{M} é uma matriz anti-simétrica. Assim, é possível achar os

$$\text{Autovetores à direita:} \quad \bar{K}(\Omega)\phi(\Omega) = \lambda(\Omega) \hat{M} \phi(\Omega)$$

$$\text{Autovetores à esquerda :} \quad \bar{K}^T(\Omega)\psi(\Omega) = \lambda(\Omega) \hat{M}^T \psi(\Omega)$$

Realizando a seguinte transformação de coordenada:

$$Q(\Omega) = \phi(\Omega)P(\Omega) \quad (172)$$

Substituindo (172) na (171) e pré-multiplicando por $\psi(\Omega)^T$, onde $\psi(\Omega)$ e $\phi(\Omega)$ são os autovetores à esquerda e à direita em função da frequência respectivamente, e ortonormalizados através da matriz de massa \hat{M} , obtém-se:

$$\begin{aligned} \psi^T(\Omega)[- \Omega^2 \hat{M} + \bar{K}(\Omega)]\phi(\Omega)P(\Omega) &= \psi^T(\Omega)F(\Omega) \\ [-\Omega^2 I + \Lambda(\Omega)]P(\Omega) &= \psi^T(\Omega)F(\Omega) \end{aligned} \quad (173)$$

Assim, no espaço modal, as coordenadas generalizadas principais podem ser determinadas por

$$P(\Omega) = [-\Omega^2 I + \Lambda(\Omega)]^{-1} \psi^T(\Omega)F(\Omega). \quad (174)$$

Substituindo a equação (174) na equação (172), a resposta do sistema em função da frequência é obtida por:

$$Q(\Omega) = \phi(\Omega)[- \Omega^2 I + \Lambda(\Omega)]^{-1} \psi^T(\Omega) F(\Omega). \quad (175)$$

3.2.6 Resposta no Domínio do Tempo – Desbalanceamento

Para achar a resposta no domínio do tempo deve-se partir da equação do movimento, equação (146). Neste caso particular, a frequência de excitação (Ω_{rpm}) e a frequência Ω de $\bar{K}(\Omega)$ são idênticas ($\Omega_{rpm} = \Omega$).

No espaço de configurações, considerando a equação do movimento com a matriz $C = 0$ obtém-se:

$$M \ddot{q}(t) + G(\Omega_{rpm}) \dot{q}(t) + \bar{K}(\Omega) q(t) = \{f(t)\} \quad (176)$$

e no domínio da frequência,

$$[- \Omega^2 \hat{M} + \bar{K}(\Omega)] Q(\Omega) = F(\Omega). \quad (177)$$

Considerando o desenvolvimento da equação (171) a equação (175), a resposta no domínio do tempo ($q(t)$) para uma excitação harmônica pode ser representada por

$$q(t) = Q(\Omega) e^{i\Omega t} + Q^*(\Omega) e^{-i\Omega t}, \quad (178)$$

onde

$Q(\Omega)e^{i\Omega t}$ é a amplitude complexa de $(q(t))$ e

$Q^*(\Omega)e^{-i\Omega t}$ é o complexo conjugado de $(Q(\Omega))$.

3.2.6.1 Órbita

A seção transversal do eixo descreve órbita circular ou elíptica ao redor do seu centro geométrico estático dado pela variação temporal dos deslocamentos u e w . Se o rotor é simétrico à órbita descrita pela resposta permanente (vibração combinada em X e Z) é uma circunferência. Se o rotor for assimétrico a órbita será uma elipse. A forma desta elipse dependerá da rigidez do mancal nas direções X e Z. O rotor em estudo está apoiado sobre mancais anisotrópicos ($K_{xx} \neq K_{zz}$) e excitado por uma massa desbalanceada, a órbita portanto é elíptica.

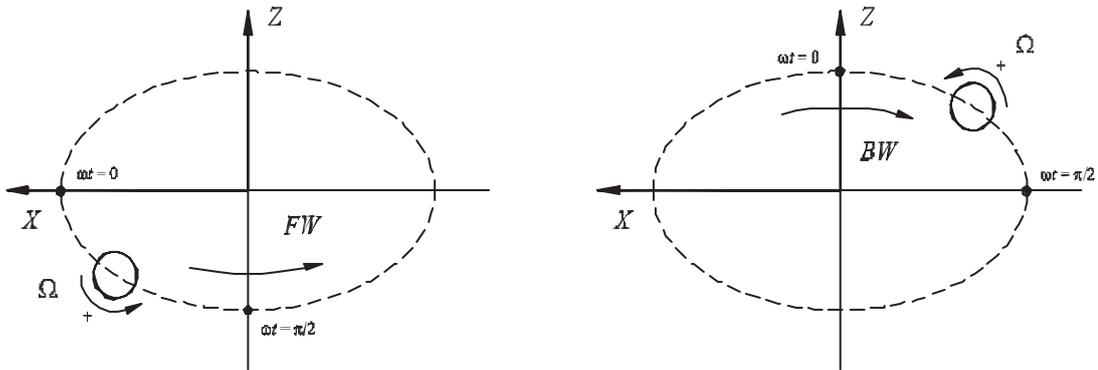


FIGURA 20 – VARIAÇÃO DO SENTIDO DE GIRO EIXO EM UM ROTOR EXCITADO
COM MASSA DESBALANCEADA

A órbita de um ponto qualquer ao longo do eixo do rotor é determinada pelo deslocamento na direção X (deslocamento u) e na direção Z (deslocamento w), descrito pelas equações abaixo:

$$u = u_R \cos \omega_i t + u_I \operatorname{sen} \omega_i t \quad (179)$$

$$w = w_R \cos \omega_i t + w_I \operatorname{sen} \omega_i t \quad (180)$$

onde R e I representam a parte real e imaginária respectivamente, substituindo os ângulos $\omega_i(t)$ de maneira a completar uma volta.

O sentido da órbita descrita por cada nó do rotor é obtido através do produto vetorial entre o vetor posição u_i e o vetor posição w_i para os tempos t e $t + \Delta t$, onde o sinal deste produto indica o movimento do rotor.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_i(t) & 0 & w_i(t) \\ u_i(t + \Delta t) & 0 & w_i(t + \Delta t) \end{vmatrix} = (u_i(t + \Delta t)w_i(t) - u_i(t)w_i(t + \Delta t))\hat{j} \quad (181)$$

Se $(u_i(t + \Delta t)w_i(t) - u_i(t)w_i(t + \Delta t)) > 0$ o movimento é *forward whirl* (FW), isto implica que o eixo gira com velocidade angular positiva e a órbita é descrita no mesmo sentido (ver figura 21).

Se $(u_i(t + \Delta t)w_i(t) - u_i(t)w_i(t + \Delta t)) < 0$ o movimento é dito *backward whirl* (BW), isto ocorre quando o sentido descrito pela órbita é contrário ao da velocidade angular de rotação do eixo ($\vec{\Omega}$), como mostra a figura 21.

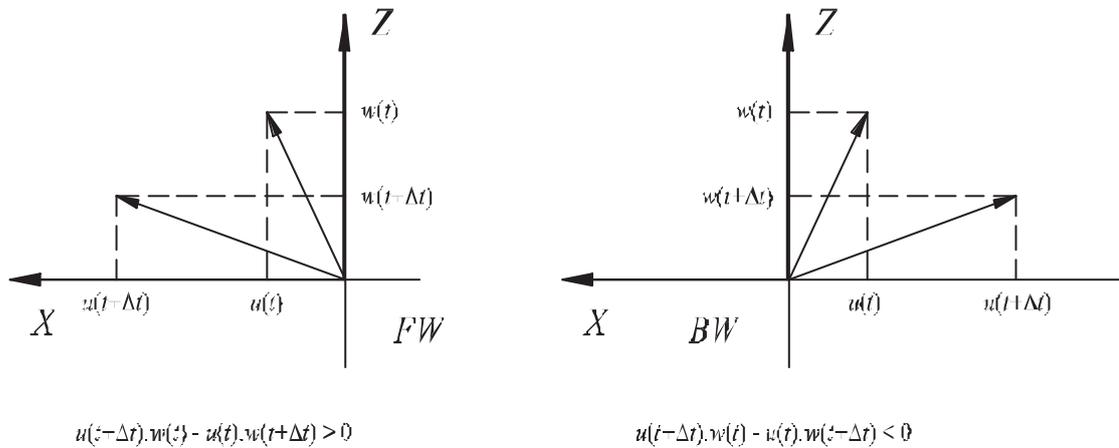


FIGURA 21 – TIPOS DE GIROS FW E BW

Para definir o tipo de giro do rotor (FW ou BW) é proposto o método de discretização contínua (Lalanne e Ferraris, 1990), onde se calcula o tipo de giro para cada nó e são todos somados. O sinal da soma define o tipo de giro em que se encontra o rotor.

3.2.7 Exemplo de Aplicação

Um exemplo numérico de um rotor dinâmico simples apoiado sobre mancais de rolamento e mantas de material viscoelástico é apresentado.

As características dinâmicas do material viscoelástico utilizado neste exemplo (borracha butílica pura) foram levantadas no Laboratório de Vibrações e Acústica da Universidade Federal de Santa Catarina (LVA-UFSC/PISA). Um modelo de derivada fracionária de quatro parâmetros foi utilizado para caracterizar dinamicamente o comportamento de uma borracha butílica pura. Estes parâmetros são, para a temperatura $T_0=273,0 K$:

$$G_0 = 3,57 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$G_\infty = 1,79 \times 10^8 \text{ Pa}$$

$$\alpha = 0,435$$

$$b_1 = 2,46 \times 10^{-3} \text{ (} T_0 = 273 \text{ K)};$$

A figura 22 mostra as curvas do módulo de cisalhamento dinâmico e do fator de perda em função da frequência e da temperatura.

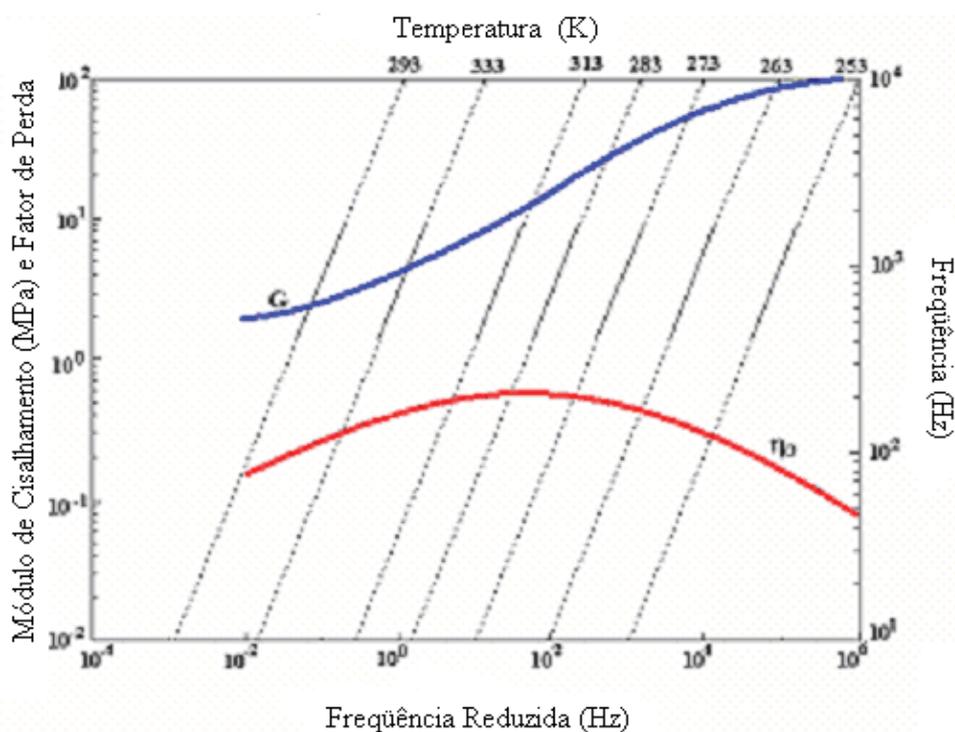


FIGURA 22 - PROPRIEDADES DINÂMICAS – BORRACHA BUTÍLICA PURA

A figura 23 é uma foto do protótipo experimental montado no LAVIB (Laboratório de Vibrações) do CEFET_PR em parceria com a empresa WEG Industrias.

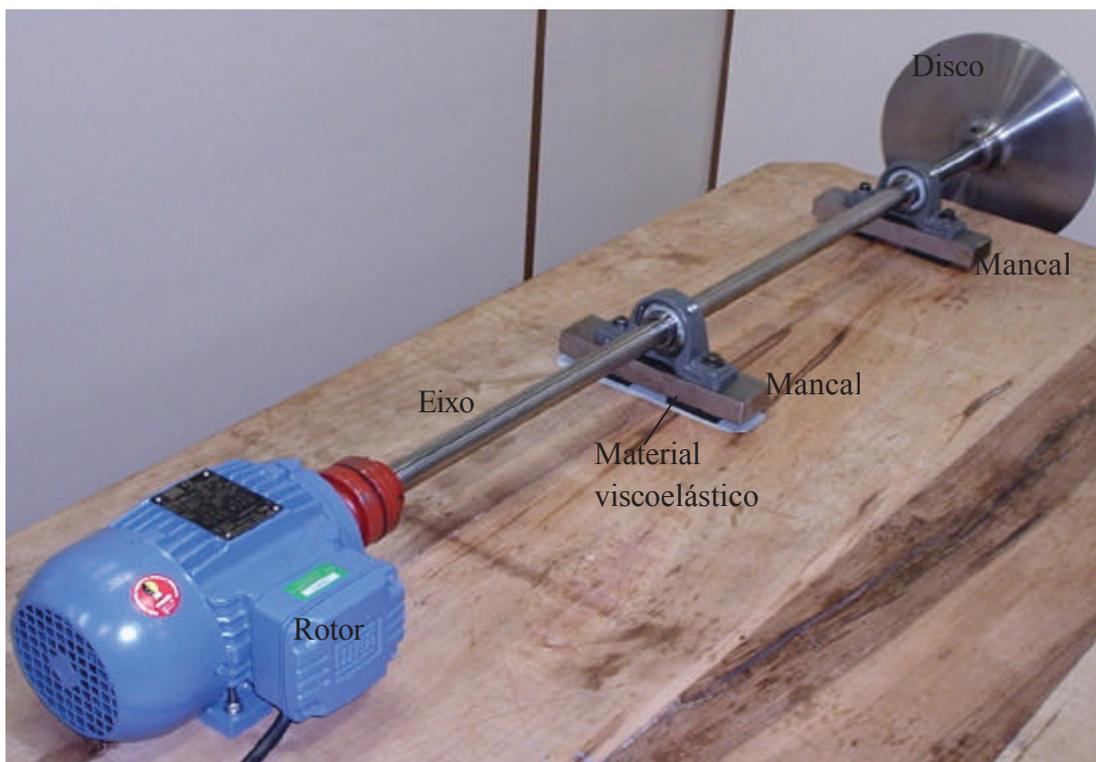


FIGURA 23 – FOTO DO ROTOR EM ESTUDO

Dados do eixo:

Longitude total, $L = 1,050$ m;

Diâmetro, $d = 0,025$ m;

Módulo de Elasticidade do aço, $E = 210 \cdot 10^9$ Mpa;

Coefficiente de Poisson, $\mu = 0,3$;

Densidade do aço, $\rho = 7840$ kg/m³.

Dados dos discos:

Número de disco, $ND = 2$;

Raio externo, $R = [0,280; 0,0445]$ m;

Raio interno, $r = [0,025; 0,25]$ m;

Densidade do aço, $\rho = 7840$ kg/m³.

Espessura dos discos, $h = [0,010; 0,035]$ m;

Posição dos discos, $pd = [0; 0,0275]$ m;

Dados dos mancais:

Número de mancais, $NC = 2$;

Posição dos mancais, $pc = [0,1835; 0,6435]$ m;

Massa dos mancais, $Mc = [0,770; 0,770]$ kg;

Inércia dos mancais (xx), $Ic_{xx} = [0,00159018; 0,00159018]$ kg.m²

Inércia dos mancais (zz), $Ic_{zz} = [0,00690495; 0,00690495]$ kg.m²

Dados da manta de material viscoelástico:

Módulo de cisalhamento e fator de perda dados pela equação (76), (79) e (80) e a figura 22.

Nas saídas gráficas abaixo, a figura 24 representa o diagrama de Campbell Interno para $\Omega_{rpm} = \Omega_1 = cte$, a figura 25 mostra-se o diagrama de Campbell Final e a reta Ω_1 (excitação do tipo massa desbalanceada) que determina dentre todas as frequências naturais do sistema, aquela que participam da resposta a massa desbalanceada, rotações críticas do rotor. Conhecendo os parâmetros modais do sistema que são cortados por esta reta, é possível achar a resposta do sistema girante para este tipo de excitação.

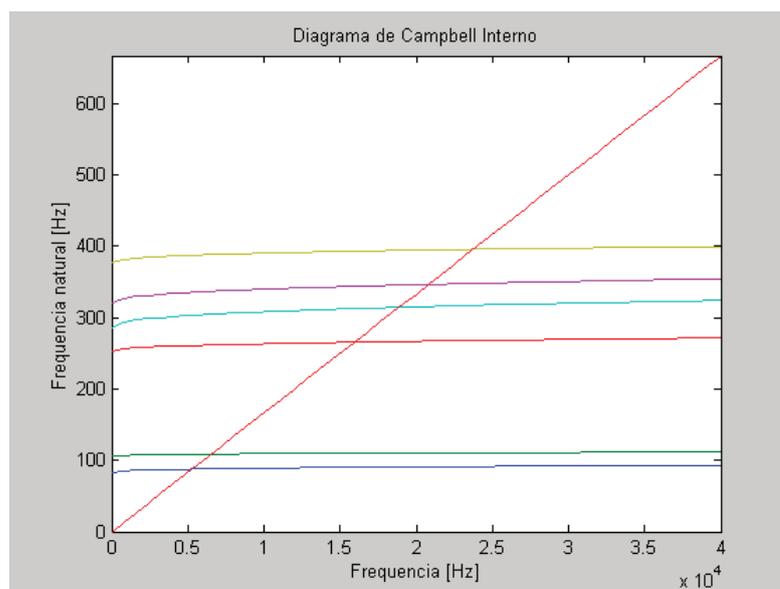


FIGURA 24 - DIAGRAMA DE CAMPBELL INTERNO

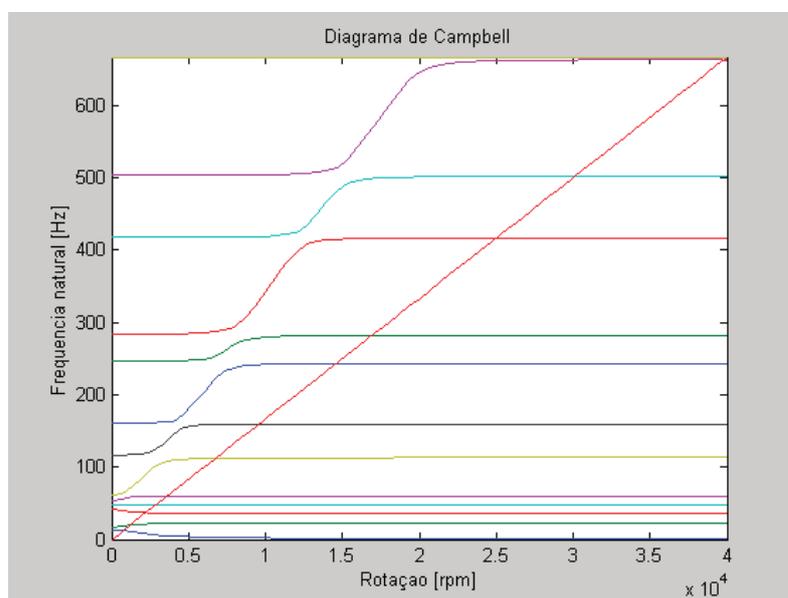


FIGURA 25 - DIAGRAMA DE CAMPBELL FINAL

A figura abaixo representa a saída gráfica do diagrama de Campbell Simplificado.

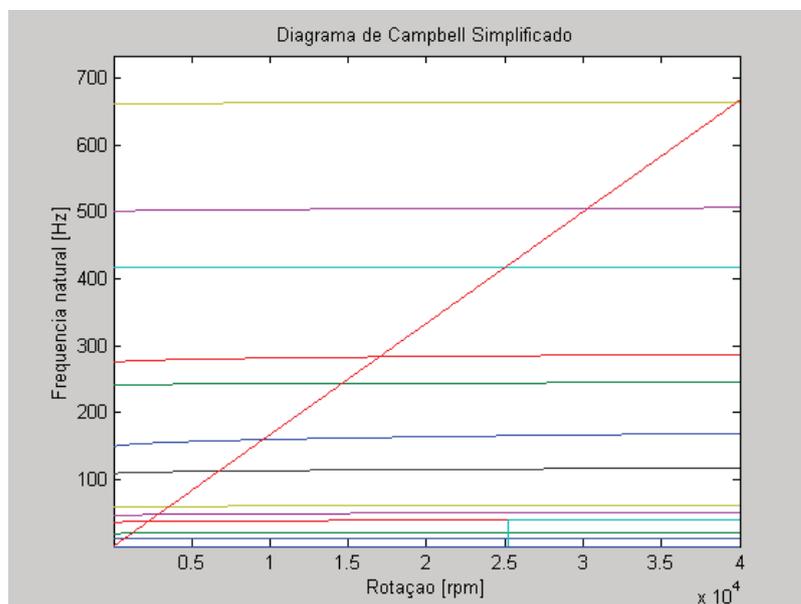


FIGURA 26 - DIAGRAMA DE CAMPBELL SIMPLIFICADO

Na figura 27 está representada a órbita descrita pelo eixo e o tipo de giro na primeira rotação crítica (712 rpm ou 11,87 Hz).

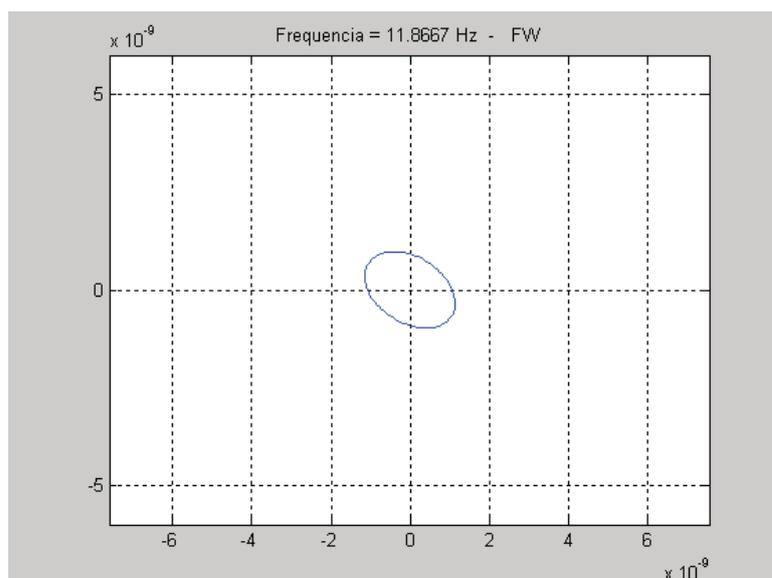


FIGURA 27 - ÓRBITA DESCRITA PELO EIXO NA PRIMEIRA ROTAÇÃO CRÍTICA

3.2.7.1 Campbell Final e Campbell Simplificado

O diagrama de Campbell Final resolve o problema de autovalores pelo modo geral, possibilitando determinar a característica do sistema a todo tipo de excitação possível sobre o rotor. O diagrama de Campbell Simplificado resolve o problema de autovalores considerando apenas excitações da massa desbalanceada, rotações crítica, ($\Omega_{rpm} = \Omega$). Ao comparar as frequências naturais devido ao desbalanceamento obtido através do Campbell Final com o Campbell Simplificado observa-se que a diferença entre um método e outro é praticamente desprezível, como pode ser percebido na tabela 5.

TABELA 5 - COMPARAÇÃO ENTRE O CAMPBELL FINAL E
CAMPBELL SIMPLIFICADO DAS ROTAÇÕES CRÍTICAS DO
ROTOR

Nº	Campbell Geral (Hz)	Campbell Simplificado (Hz)
1	11,867	11,883
2	19,467	19,482
3	37,067	37,082
4	47,533	47,482
5	59,667	59,615
6	112,40	112,413
7	159,00	159,479
8	243,133	243,543
9	281,867	283,209
10	416,40	417,806
11	501,867	505,537
12	662,80	663,334

Os erros entre ambos valores são atribuídos ao arredondamento no cálculo da intersecção entre a reta a 45° e a curva das frequências naturais, ambas curvas formadas por pontos discretos.

4 INSTABILIDADE

A instabilidade implica em um movimento livre que pode tender a um acréscimo de amplitude sem limite, quando um sistema em principio em equilíbrio é perturbado ou deslocado desta posição. Pequenos deslocamentos levam a grandes deformações. É dito então que o sistema é instável.

Os problemas de instabilidade podem estar associados também com as elevadas velocidades de rotação de máquinas girantes cujos mancais são hidrodinâmicos. Para determinar a instabilidade do sistema, deve-se estudar a solução da homogênea, através da qual encontram-se os autovalores. Da equação (146), considerando a solução da homogênea surge um polinômio característico cuja forma mais simples é:

$$a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0 \quad (182)$$

se mostra que se os coeficientes a_i são reais e a solução s_j é complexo e complexo conjugado, como apresentado abaixo:

$$s_j = -\delta_j \pm i\nu_j \quad (183)$$

como $y(t) = \theta e^{st}$, substituindo s pela equação (183), a resposta em geral toma a seguinte forma:

$$y(t) = e^{-\delta_j t} [\theta e^{i\nu_j t} + \theta e^{-i\nu_j t}] \quad (184)$$

A parte real do autovalor fornece o fator de crescimento ou decrescimento da resposta livre e a parte imaginária fornece a oscilação desta. A instabilidade é definida por um autovalor complexo com parte real positiva. Logo a solução instável é representada por:

$$y(t) = e^{\delta_j t} [\cos \omega t] \quad (185)$$

Portanto, a teoria linear de instabilidade pode prever o começo e a frequência de uma instabilidade com certa precisão.

A figura 28 representa como uma solução instável é descrita pelos seus autovalores.

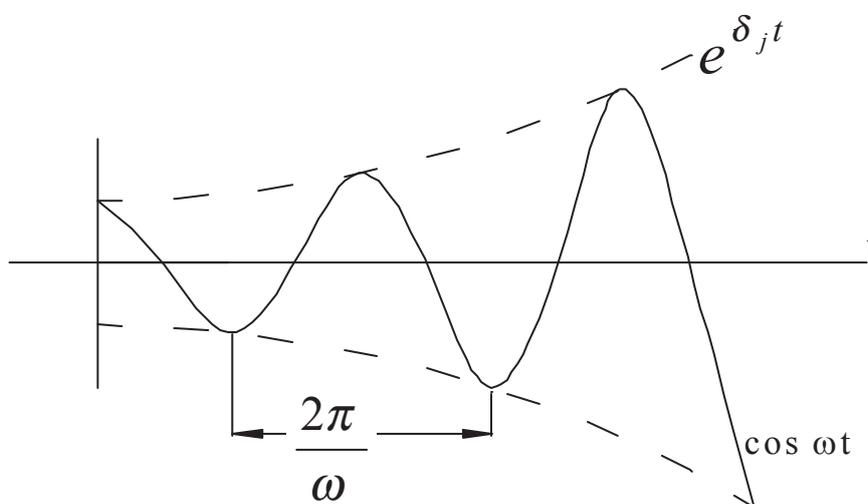


FIGURA 28 - INSTABILIDADE DE UM AUTOVALOR

A vibração com amplitude crescente causaria danos ao rotor, um funcionamento diferente com elevados níveis de vibrações ou ruídos, a não ser que esse crescimento

seja cessado devido as não linearidades do sistema. Um exemplo de tal não linearidade é o coeficiente de amortecimento que aumenta com a amplitude de vibração.

Neste trabalho, foi considerado mancal com rolamento apoiado em manta de material viscoelástico. Portanto a instabilidade do rotor, considerando a matriz de amortecimento nula ($C = 0$) do eixo e apoios, considerando mancais com material viscoelástico, não foi estudado por razões óbvias. Neste tipo de modelo não tem sentido estudos de instabilidade já que por si mesmo o modelo sempre será estável.

No futuro, considerando mancais hidrodinâmicos, onde além da matriz C de amortecimento da manta viscoelástica também existem as matrizes C e K , muitas vezes não simétricas dos mancais hidrodinâmicos, um estudo de instabilidade e regiões de estabilidade se faz necessário. Isto será proposto em trabalhos futuros.

5 COMPARAÇÃO ENTRE O MODELO VISCOSO E O MODELO VISCOELÁSTICO

Utilizando o código numérico desenvolvido por López (2002) e melhorado no convenio 01/2004 entre a empresa WEG Industrias e o CEFET_PR, para determinar os parâmetros modais do sistema rotor, em que os mancais são modelados com amortecimento viscoso, realizou-se uma comparação entre o modelo viscoso e o modelo viscoelástico. A tabela 6 apresenta esta comparação para as frequências críticas de um rotor dinâmico com os mesmos dados dos elementos do rotor salvo o mancal. Para o modelo viscoso os mancais foram considerados de rolamento, com uma matriz de rigidez de $k_{xx}=1x10^{10} N/m$, $k_{zz}=1x10^{10} N/m$, $c_{ij}=0,0$ e para o modelo viscoelástico os mancais são compostos com material viscoelástico. O que pode ser observado nesta comparação é que as frequências estão muito próximas. Pode observar-se também que os modos de corpo rígido não estão presentes no modelo viscoso.

TABELA 6 - COMPARAÇÃO ENTRE O MODELO VISCOSO E O MODELO VISCOELÁSTICO DAS ROTAÇÕES CRÍTICAS DO ROTOR

Campbell Geral – viscoelástico (Hz)	Campbell Simplificado – viscoelástico (Hz)	Campbell – viscoso (Hz)
11,8667	11,8830	
19,4667	19,4828	
37,0667	37,0824	40,2
47,5333	47,4821	51,7
59,6667	59,6152	71,8
112,4000	112,4139	77,13
159,0000	159,4793	192
243,1333	243,5439	371,8
281,8667	283,2096	376,73
416,4000	417,8062	588,66
501,8667	505,5374	594,86
662,8000	663,3334	

Outra comparação realizada entre os dois modelos foi no domínio da frequência, podendo ser observada a amplitude (figuras 29 e 30) da resposta a uma excitação de desbalanceamento para um ponto dado do rotor. No modelo viscoelástico as amplitudes de resposta na frequência são bem menores se comparado às respostas com o modelo viscoso, mancais hidrodinâmicos. Isto ocorre porque o material viscoelástico adicionado nos mancais introduz um amortecimento elevado.

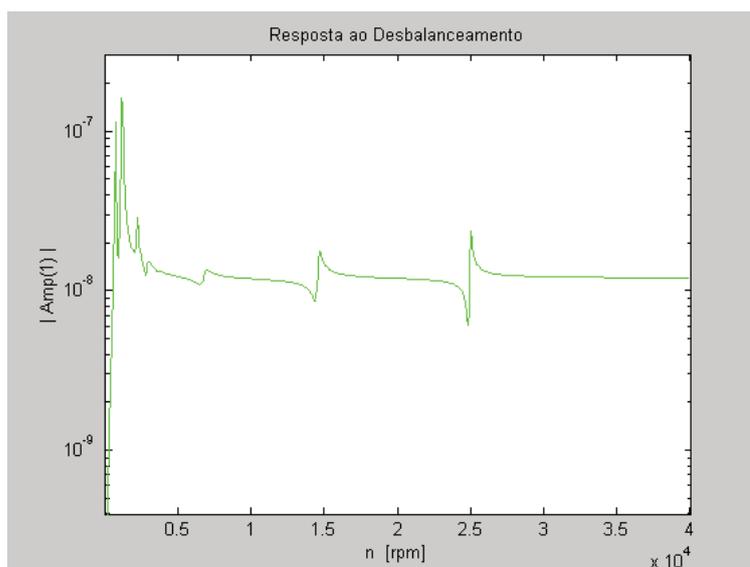


FIGURA 29 - RESPOSTA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA PARA O MODELO VISCOELÁSTICO

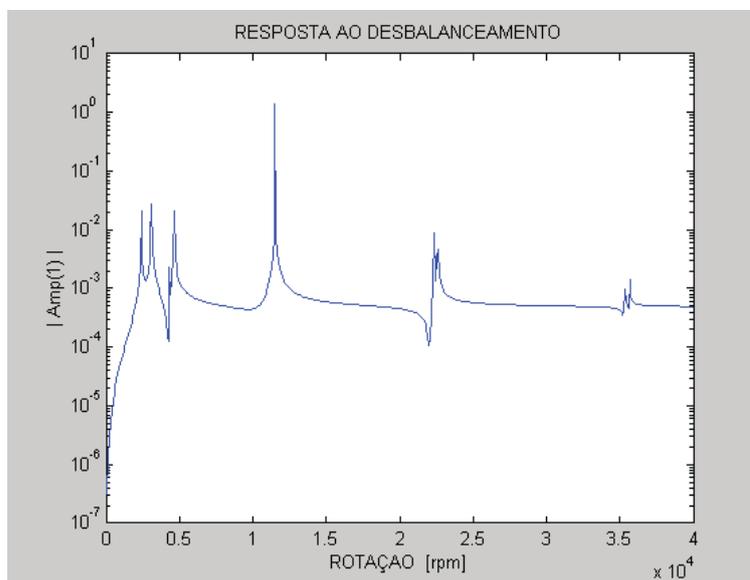


FIGURA 30 – RESPOSTA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA PARA O MODELO VISCOSO

Em ambos casos o amortecimento interno do eixo é desconsiderado ou desprezado. Portanto o amortecimento é devido, exclusivamente ao mancal do rotor. No caso do modelo viscoso utilizam-se valores reais de mancais hidrodinâmicos.

6 RESULTADOS

Foi montada uma bancada experimental para validar a teoria apresentada, devido à mesma não apresentar condições ideais de medição foi realizada somente a verificação visual das frequências críticas. O rotor montado para a validação tem capacidade para realizar medições somente até 60 Hz. Os resultados foram bem próximos dos valores das rotações críticas obtidas com o código numérico próprio, o que mostra um resultado promissor, mais ainda é preciso realizar uma medição precisa, através de sensores de medição para validação do código numérico desenvolvido.

7 CONCLUSÃO

Foi apresentada e implementada uma metodologia simples e precisa para encontrar o diagrama de Campbell de um rotor dinâmico viscoelástico. Devido às características da matriz de rigidez do rotor dinâmico viscoelástico é necessário, para construir o diagrama de Campbell, realizar um Campbell Interno para cada rotação e assim determinar as frequências naturais do sistema. Também foi apresentada uma metodologia mais simplificada para encontrar o diagrama de Campbell para rotores quando considerada uma excitação por desbalanceamento, denominada diagrama de Campbell Simplificado. Comparações mostrando os resultados obtidos (Campbell e Campbell Simplificado) foram apresentadas, mostrando que a diferença entre um método e outro é praticamente desprezível.

O material viscoelástico utilizado na composição dos mancais foi modelado por derivada fracionária com quatro parâmetros. A precisão deste modelo garantiu a precisão dos resultados obtidos.

Com o material viscoelástico nos mancais e aumento do amortecimento, a amplificação da resposta do sistema nas frequências naturais se reduz consideravelmente, como mostrado quando comparado ao modelo viscoso.

Uma simulação numérica mostra os passos a seguir para a obtenção do diagrama de Campbell, estabilidade, parâmetros modais, resposta na frequência e resposta no domínio do tempo. Através do desenvolvimento de um código numérico são encontradas as características deste tipo de sistema. A parte experimental não pode ser realizada em sua totalidade, pois a bancada experimental não apresentava condições ideais e por esse motivo somente pode ser validada visualmente a amplificação de vibração ao redor das frequências críticas.

Espera-se que este modelo possa reproduzir as características deste tipo de rotor, não só porque esta solução de material viscoelástico reduz a resposta nas frequências críticas mas, também, porque pode aumentar a região de estabilidade, em casos de mancais hidrodinâmicos trabalhando a elevadas rotações.

8 SUGESTÃO DE TRABALHO FUTURO

Devido à bancada experimental montada não ser a ideal. As rotações críticas encontradas foram próximas das obtidas pelo código numérico, porém não podem ser medidas com a suficiente precisão, como também não podem ser medidas as órbitas em diferentes pontos do eixo a diferentes rotações do eixo. Portanto, propõe-se a construção de uma bancada que contemple isolamento de vibrações, na qual serão realizados vários testes experimentais com precisão das rotações críticas, das órbitas e dos modos de vibrar do rotor. Desta forma será possível validar o código numérico desenvolvido.

O uso de mancais hidrodinâmicos deve ser melhor estudado uma vez que a instabilidade nesse tipo de configuração é mais comum. Como trabalho futuro propõe-se desenvolver um estudo sobre mancal hidrodinâmico apoiado sobre manta de material viscoelástico. No mancal hidrodinâmico encontra-se a rigidez e o amortecimento viscoso e ao adicionar o material viscoelástico introduz-se uma matriz $\bar{K}(\Omega)$ devido às características deste material. Logo, é necessário desenvolver uma metodologia numérica para encontrar os parâmetros modais do sistema com esta característica. Os resultados esperados deste estudo são a redução da resposta nas frequências críticas e o aumento da região de estabilidade ao introduzir um elevado amortecimento sob os mancais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Bagley, R.L., Torvik, P.J., 1983, "**A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity**", Journal of Rheology, Vol. 27 (3), pp. 201-210.
2. Bagley, R.L., Torvik, P.J., 1979, "**A Generalized Derivative Model for Elastomer Damper**", The Shock and Vibration Bulletin, Vol. 49, pp. 135-143.
3. Dutt, J.K., T. Toi, 2002, "**Rotor vibration reduction with polymeric sectors**", Journal of Sound and Vibration, 262 (2003) 769- 793.
4. Espíndola, J.J., Silva Neto, J.M. e Lopes, E. M. O., 2003, "**On the Measurement of Dynamics Properties of Viscoelastic Materials**", segundo congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC, 18 a 22 de agosto de 2003, São José dos Campos, Brasil.
5. Espíndola, J. J., Bavastri, C. A.. "**An Efficient Concept of Transmissibility for a General Equipment Isolation System. In: DETC'97/VIB-4120**", 1997, Sacramento, California. ASME Design Engineering Technical Conferences, 1997. v. CD ROM. p. CD-CD
6. Espíndola, J.J., 1990, "**Fundamentos de Vibrações**", Apostila do curso de Pós-Graduação, UFSC, Brasil.
7. Espíndola, J. J., 1990, "**Projeto de Isoladores Aeronáuticos**", Final Report to the Bank of Brazil Foundation, Laboratory of Vibrations and Acoustic, Federal of University of Santa Catarina.
8. Espíndola, J. J., Floody, S. E. "**On the Modeling of Metal - Elastomer Composite Structures: A Finite Element Method Approach In: Applied Mechanics in the Americas**" - PACAM IV, 1999, Rio de Janeiro. Applied Mechanics in the Americas. 1999. v.8. p.1335 – 1342
9. Ewins, D. J.. "**Modal Testing Theory and Practice**". Research Studies Press. 1984, England.
10. Jones, D.I.G., 1990, "**On Temperature- Frequency Analysis of Polymer Dynamic Mechanical Behaviour**", Journal of Sound and Vibration, 140(1), pp. 85-112.
11. Lalanne M., Ferraris G. "**Rotordynamics Prediction in Engineering**". John Wiley & Sons Ltd. New York 1990.

12. Lalanne, M., 1999, "**Modeling damping in mechanical engineering structures**", INSA de Lyon, France.
13. Lalanne, M., 1999, "**Use of the campbell diagram in rotordynamics**", DETC99/VIB-8280, Las Vegas, Nevada.
14. Lopes, E.M.O., Bavastri, C.A., Silva Neto, J.M., and Espíndola, J.J., 2002, "**Caracterização Dinâmica Integrada de Elastômeros por Derivadas Generalizadas**", III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica – CONEM, 10 a 13 de agosto de 2004, Brasil.
15. López, E. J. "**Dinâmica de rotores**" Universidade Nacional Del Conahue. 2002
16. Marynowski, K., Kapitaniak, T., 2002, "**Kelvin-Voigt versus Bürges internal damping in modeling of axially moving viscoelastic web**", International Journal of Non-Linear Mechanics 37 (2002) 1147-1161, Poland.
17. Nashif, A.D., Jones, D.I.G., Henderson, J.P., 1985, "**Vibration Damping**", John Wiley & Sons.
18. Panda, K.C., Dutt, J. K., 1999, "**Design of optimum support parameters for minimum rotor response and maximum stability limit**", Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Technology, Kharagpur 721 302, Índia.
19. Pritz, T., "**Analysis of four-parameter fractional derivate model of real solid materials**". Journal of Sound and Vibration 195 p 103-115. 1996.
20. Shabaneh, N.H., Jean W., 1999, "**Dynamic analysis of rotor- shaft systems with viscoelastically supported bearings**", Mechanism and machine theory, University of Toronto.
21. Silva Neto, J.M., 2004, "**Identificação do Modelo Fracionário de Materiais Viscoelásticos no Domínio da Freqüência**", Tese de Doutorado, maio de 2004, UFSC, Brasil.
22. Sowdon, J.C., "**Vibration and Schock in Damped Mechanical Systems**", John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.
23. Santos, H.L.V., "**Dinâmica de rotores**", Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2003.
24. Wilson, C. and Sandler, J.P., 1991, "**Cinematics and Dynamica of Machiney**", Haper Collor Publisher.

ANEXO 1 – ARTIGO ACEITO PARA PUBLICAÇÃO

MODELING OF DYNAMIC ROTORS WITH FLEXIBLE BEARINGS USING VISCOELASTIC MATERIALS

Carlos Alberto Bavastri

Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná (CEFET-PR) – Av. Sete de Setembro, 3165 – CEP: 80230-901 – Curitiba – PR

bavastri@cefetpr.br

Euda Mara da Silva Ferreira

Universidade Federal do Paraná (UFPR) – Av. Francisco H. dos Santos, s/n – CEP: 81531-990 – Curitiba - PR

eudaferreira@pop.com.br

José João de Espíndola

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) – Caixa Postal 476 – CEP: 88040-900 – Florianópolis - SC

espindol@mbox1.ufsc.br

Eduardo Márcio Oliveira Lopes

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) – Caixa Postal 476 – CEP: 88040-900 – Florianópolis - SC

lopes@pisa.ufsc.br

***Abstract.** Nowadays the rotating machines produce or absorb large amounts of power in relatively small physical packages. The fact those machines work with large density of energy and flows is associated to the high speeds of rotation of the axis, implying in high inertia loads and deformations of the axis, vibrations and dynamic instabilities. Viscoelastic materials are broadly used in vibration and noise control of dynamic rotors to increase the area of stability, due to their high capacity of dissipation of vibratory energy. The widespread model, used to describe the real dynamic behavior of this type of materials, is the fractional derivative model. By using the finite element method it is possible to describe the viscoelastic dynamics of the rotor. In general, the stiffness matrix is composed by the stiffness of the shaft and bearings. In this particular case, this matrix is complex and frequency dependent because of the characteristics of the viscoelastic material that is part of the bearings. A clear and simple numerical code is proposed to calculate the modal parameters of a simple rotor mounted on viscoelastic bearings. A methodology to build a Campbell diagram (natural frequency versus rotation frequency) is presented. It must be built through an internal Campbell diagram (natural frequency versus variable frequency), for which the stiffness matrix is a function of the frequency.*

Keywords: dynamic rotor, viscoelastic material, Campbell diagram, critical rotations.

1. Introduction

Nowadays the rotative machines produce or absorb larger and larger amounts of power in relatively small physical packages. The fact those machines work with large density of flows of energy is associated to the high speeds of rotor rotation. It implies in high inertia loads and potential problems with deformations of the axis or axle, high levels of vibrations and dynamic instabilities.

Rotative machines often have problems of instability when working at high rotations, which can result in sudden failures of the whole system or parts of it. This problem can be solved by including damping in the bearings. In general, the area of stability can be enlarged with this type of control; also, the vibration levels can be reduced as well.

Viscoelastic materials are thoroughly used to control vibration and noise due to their high capacity to dissipate vibratory energy (see Espíndola et al., 2003). In order to do so, accurate knowledge of their dynamic properties is essential to desing the control devices.

Several papers can be found in the literature, with the purpose of modeling simple rotors mounted on elastomeric materials or on bearings made of this type of material. Generally, these papers use the model of Kelvin-Voigt, as proposed by Shabaneh and Jean (1999), where the viscoelastic material is put under the bearings. This model has a difficulty to represent the dynamic characteristics of most viscoelastic materials used in practice, when analyzed in a

wide frequency band (Pritz, 1996; Bagley and Torvik, 1983). It is noticed that this model is described by a differential equation of integer order.

In the study accomplished by Marynowski and Kapitaniak (2002), the models of Kelvin-Voigt and Burgers are compared in their capacity to describe the behavior of a viscoelastic material. The first is a model with two parameters (spring and viscous shock absorber in parallel), and the second is described by four parameters. Similar results were obtained for small values of internal shock absorption, but for the materials with larger coefficients of reduction the model of Burgers proved itself more appropriate.

In Panda and Dutt (1999), polymeric materials are placed in the bearings. Using nonlinear optimization techniques, it is possible to find the optimal dimensions to reduce the vibratory response of the system to unbalance excitations. In Dutt and Toi (2002), models with three and four spring-shock absorber elements and integer order derivatives are used to predict the behavior of a viscoelastic material that is part of a dynamic rotor. In that paper the aim was to study the reduction of vibration and the changes in rotor dynamic behavior caused by the viscoelastic material.

In most of the papers mentioned above, the employed models of viscoelastic material cannot reproduce their dynamic characteristics faithfully in a wide frequency band.

Here it will be presented a numerical model capable of predicting the dynamic response of a simple rotor in steady state, whose bearings are made of layers of viscoelastic material. The model used for the polymeric material is the fractional derivative model with four parameters, due to its capacity to describe the real dynamic behavior of the material (Pritz, 1996). For this purpose, the characteristics of the viscoelastic material were determined by using the methodology proposed in Espíndola et al. (2003), Lopes et al. (2004) and Silva Neto (2004).

To describe the dynamic behavior of the system by Lagrange's equations, it is used the finite element method. By this way, the inertia (symmetrical and with constant coefficients), the gyroscopic (skew-symmetrical and a function of the rotating speed), and the complex stiffness (composed by the stiffness of the axis and the bearings, which is frequency and temperature dependent due to the viscoelastic material) matrices are obtained.

A simple strategy is proposed to calculate the modal parameters of the system. In this numeric implementation, a Campbell diagram is generated, through which it is possible to determine the critical rotations of the dynamic viscoelastic rotor. Due to the characteristics of the system - the complex stiffness matrix is a function of the frequency - the final Campbell diagram should be obtained through another internal Campbell diagram. That is, when the rotation of the axis is established, the inertia and the gyroscopic matrices are constant, but the stiffness matrix is a function of the frequency for a given temperature. For each rotation, the natural frequencies of the system are functions of the frequency, therefore, they should be found through another internal Campbell diagram (natural frequency versus variable frequency). These steps follow the sequence presented in Espíndola and Floody (1999), when the dynamic behavior of a sandwich beam (steel - viscoelastic material - steel) was studied.

To validate the numerical model, a simulation will be accomplished on a simple rotor system.

2. Elements of the rotor

The simple rotor in study is basically composed by an axis, one or more disks and several flexible bearings, made of viscoelastic material. The force upon the rotor can be caused by unbalances (synchronous excitation $\Omega = \Omega_{rpm}$), instabilities of hydrodynamic bearings (asynchronous excitation $\Omega \cong 0,5\Omega_{rpm}$) or excitation through to the base by $\Omega \neq \Omega_{rpm}$. This paper will consider only unbalance load.

The general equations of the rotor can be introduced through Lagrange's equations (see Eq. (1)). So it is necessary to define the kinetic energy T and the potential energy U of each element of the rotor, besides the virtual work done by an external force upon the bearings.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (1)$$

In equation (1), q_i is the i -th generalized coordinate and F_{q_i} is the i -th generalized force. Then, using the finite element method, it is possible to describe the rotor dynamics.

2.1 The disk

The disk is assumed to be rigid, being characterized only by the kinetic energy. Therefore, $R_0(X, Y, Z)$ is defined as the inertial coordinate system, coincident with $R(x^i, y^j, z^k)$, a fixed system in the center of the disk (see “Fig. 1”). The coordinates XYZ and $x^i y^j z^k$ are related by three angles, ψ , θ and ϕ . To describe the rigid body rotation of the rotor concerning the axis X , Y or Z , the Euler angles are considered (see “Fig. 1”).

The instantaneous angular speed vector of the disk can be written in the system of reference R as (Lalanne, 1990):

$$\bar{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \\ -\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ -\dot{\psi} \theta + \Omega \\ \dot{\psi} \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (2)$$

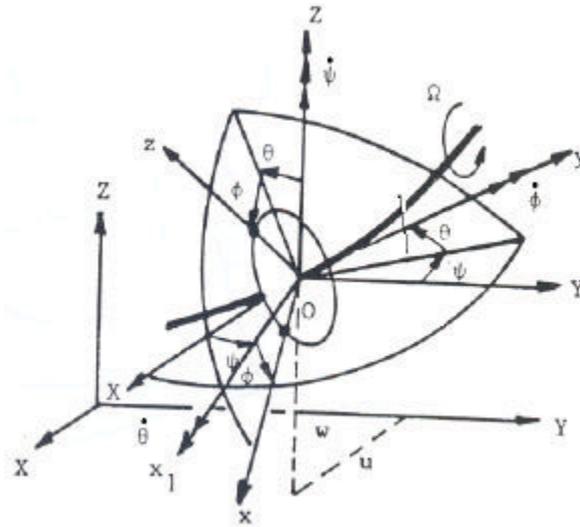


Figure 1. Systems of coordinates of the disk rotating around a flexible axis.

Considering linearity, the angles θ (rotation around axis X) and ψ (rotation around axis Z) are considered small, so that:

$$\cos \theta \cong 1 \text{ and } \sin \theta \cong \theta \quad (3)$$

The kinetic energy of the disk is given by the equation:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (4)$$

where M_D is the mass of the disk, u and w are, respectively, the displacements in the X and Z -direction (see “Fig. 1”), and, in this particular case, the disk is symmetrical, being verified that $I_{Dx} = I_{Dz}$, where I_{Dx} and I_{Dz} are the transverse inertia in the X and Z directions. On the other hand, it is supposed that the angular speed remains constant, so $\dot{\phi} = \Omega = \text{constant}$. Therefore, the expression of the kinetic energy of the disk is:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi} \theta + \dot{\psi}^2 \theta^2) \quad (5)$$

and, neglecting the term $\dot{\psi}^2 \theta^2$ for being of second-order,

$$T_D \cong \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi} \theta) \quad (6)$$

In the previous expression, it is observed that the term $(1/2) I_{Dy} \Omega^2$ is constant, not having any influence in Lagrange's equations. The last term, $I_{Dy} \Omega \dot{\psi} \theta$, represents the gyroscopic effect.

2.2. The Shaft

The shaft is characterized by the potential and kinetic energy. The expression for the kinetic energy of the shaft is the result of an extension of the kinetic energy of the disk (see Eq. (4)). If the element has length L , its kinetic energy can be expressed by the following equation:

$$T_E = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2 \rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (7)$$

where I is the transverse inertia, ρ is the density and S is the transverse area.

Considering the symmetry of the axis ($I_x = I_z = I$) and neglecting the effects of axial forces, the expression for potential energy is defined by:

$$U_E = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (8)$$

2.3. The bearings

It is composed by two parts: the bearing itself and the viscoelastic material. The viscoelastic material can be added between the external layer of the bearing roller and the bearing carcass or under its own base, as shown in "Fig. 2a" and "Fig. 2c". In the first situation, the inertia of the bearing can be neglected, while in the second, the inertia of the bearing must be considered. "Figures 2b and 2d" show the simplified outlines for both situations mentioned above.

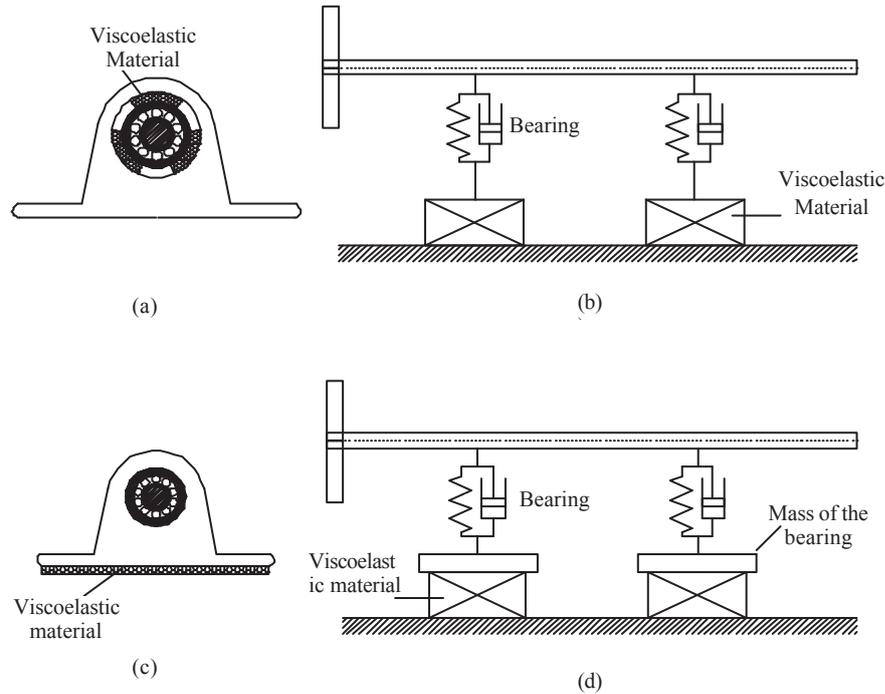


Figure 2. Model of bearings with viscoelastic material.

The viscoelastic material and the bearing are placed in sequence. Because of that, the stiffness of the bearing with roller is higher than the stiffness of the viscoelastic material layer and the resulting equivalent stiffness will be that of the viscoelastic material. The model used to describe the real dynamic behavior of the viscoelastic material is the four parameter fractional derivative model. According to Bagley and Torvik (1983), the unidimensional constitutive equation in fractional derivatives is:

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m D^{\beta_m} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n D^{\alpha_n} \varepsilon(t) \quad (9)$$

where b_m , β_m , α_n , E_0 and E_n , are the parameters of the considered material. The operators D^{β_m} and D^{α_n} represent fractional derivatives. When $M=N=1$ and $\alpha=\beta$, the equation above is denominated the four parameter fractional derivative model.

$$\sigma(t) + b_1 D^{\alpha} [\sigma(t)] = E_0 \varepsilon(t) + E_1 D^{\alpha} [\varepsilon(t)] \quad (10)$$

Applying the Fourier transform in Eq. (10), the result is:

$$\sigma(\Omega) + b_1 (i\Omega)^{\alpha} \sigma(\Omega) = E_0 \varepsilon(\Omega) + E_1 (i\Omega)^{\alpha} \varepsilon(\Omega) \quad (11)$$

The relation $\sigma(\Omega) / \varepsilon(\Omega)$ is denominated the elasticity modulus of the material (see Eq. (12)),

$$E_c(\Omega) = \sigma(\Omega) / \varepsilon(\Omega) = [E_0 + E_1 (i\Omega)^{\alpha}] / [1 + b_1 (i\Omega)^{\alpha}] \quad (12)$$

or, alternatively, according to Pritz (1996),

$$E_c(\Omega) = \frac{E_0 + E_{\infty} (i\Omega b)^{\alpha}}{1 + (i\Omega b)^{\alpha}} \quad (13)$$

where $E_1 = E_\infty b_1$, $b_1 = b^\alpha$ and $E_c(\Omega)$ is the complex modulus of the material. In general, this modulus is a function of frequency and temperature. In this paper, the temperature will be considered constant, so, it will not be included as an independent variable. Still, the elasticity modulus $E_c(\Omega)$ can be written in a general way by:

$$E_c(\Omega) = E(\Omega)(1 + i\eta(\Omega)) \quad (14)$$

where $E(\Omega)$ is the real part of $E_c(\Omega)$, and $\eta(\Omega) = \text{Im}(E_c(\Omega))/\text{Re}(E_c(\Omega))$ the loss factor. E_0 and E_∞ represent the inferior and superior asymptotes of the dynamic modulus of elasticity. The exponent α represents the slope of a tangent straight line in frequency corresponding to the point of inflection of the curve $E(\Omega)$, or, also, to the maximum point of loss factor. The parameter b is the relaxation time.

The equation that represents the complex shear modulus is written in the following way:

$$G_c(\Omega) = \tau(\Omega) / \gamma(\Omega) = [G_0 + G_1 (i\Omega)^\alpha] / [1 + b_1 (i\Omega)^\alpha] \quad (15)$$

or, in the complex form, $G_c(\Omega) = G(\Omega)(1 + i\eta(\Omega))$, where $G(\Omega) = \text{Re}(G_c(\Omega))$ and $\eta(\Omega) = \text{Im}(G_c(\Omega))/\text{Re}(G_c(\Omega))$. For elastomers, $\eta(\Omega) = \eta_E(\Omega) = \eta_G(\Omega)$ (Snowdon, 1968). In the model considered herein, where the viscoelastic material is added under the bearing ("Fig. 2c"), only the component of xx and yy of stiffness and damping will be considered. In X direction, the stiffness will be represented by the shear modulus and in Z by the elasticity modulus.

Disregarding the stiffness associated to the rotations ψ and φ (in Z and X direction, respectively) of the rolling bearing, the stiffness matrix of the viscoelastic material will be given by:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{k}_{xx} & 0 \\ 0 & \bar{k}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \quad (16)$$

where $\bar{k}_{xx} = LG_c(\Omega)$. In Z direction, the stiffness will be:

$$\bar{k}_{zz} = LE_a(\Omega) = LE_a(\Omega) \quad (17)$$

where $L = A/h$, A is the loaded area, h is the viscoelastic material thickness, and $E_a = E_c \cdot k_T$ the apparent modulus of elasticity. According to Nashif (1985), the apparent modulus of elasticity is obtained through the modulus of elasticity and the form factor k_T . In this paper, the layer of viscoelastic material was assembled in a such way that lateral expansion is allowed, or $k_T \cong 1$, what implies $E_c = E_a$ (see "Fig. 3")

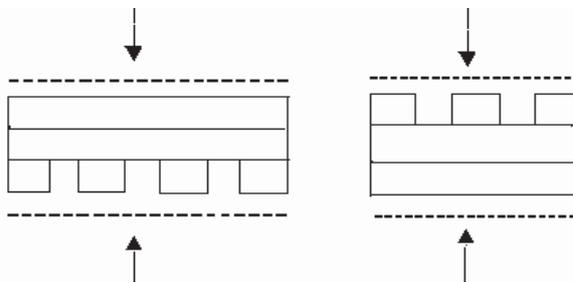


Figure 3. Form of the layer of viscoelastic material.

In the transition frequency of elastomers, it can be considered that Poisson's coefficient is approximately equal to 0,5 (Silva Neto, 2004), so $E_a = 3G_c$ and the Eq. (17) takes the following form:

$$\bar{k}_{zz} = 3 L G_c(\Omega) \quad (18)$$

2.4. Matricial representation of the rotor

According to the finite element method, it is considered that each node of each element of the rotor has four degrees of freedom: two displacements u and w (in Z and X directions, respectively) and two rotations θ and ψ around the axes X and Z , respectively. Therefore, for node i , the generalized coordinate q_i is represented by:

$$q_i = [u_i, w_i, \theta_i, \psi_i]^T \quad (19)$$

The application of Lagrange's equations on the kinetic and potential energies of the elements of a simple rotor (neglecting effects of circulation and stiffness caused by rotation), and assembling each elemental matrix conveniently, results in the following differential equations (Lalanne, 1990):

$$M \ddot{q}(t) + (C + G(\Omega_{rpm})) \dot{q}(t) + \bar{K}(\Omega) q(t) = f(t) \quad (20)$$

where:

M is the inertia matrix (constant coefficient and symmetrical);

G is the gyroscopic matrix of the axis and disk (function of rotation and skew-symmetric);

C is the damping matrix of the axis and bearings (constant coefficient and symmetric);

$\bar{K}(\Omega)$ is the stiffness matrix of the dynamic rotor and viscoelastic bearings (symmetric, complex and frequency-temperature dependent). The stiffness of the viscoelastic layer is defined by:

$$\bar{K}(\Omega)_m = \begin{bmatrix} LG(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3LG(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

3. Resolution of the system of dynamic equations

The system of equations that represents the movement of a dynamic rotor is given by Eq. (20). This equation is valid for a sinusoidal excitation of frequency $\Omega = \Omega_{rpm}$. To generalize this expression, it is possible to represent it in the frequency domain, through Fourier transform. So,

$$[-\Omega^2 M + i\Omega(C + G(\Omega_{rpm})) + \bar{K}(\Omega)]Q(\Omega) = F(\Omega) \quad (22)$$

where $Q(\Omega)$ and $F(\Omega)$ are the Fourier transforms of $q(t)$ and $f(t)$, respectively.

3.1. Eigenvalue Problem

Considering the solution of the homogeneous ($f(t) = \{0\}$), given by $q(t) = \{\phi\} e^{st} = \{\phi\} e^{i\Omega t}$, the following characteristic equation is obtained:

$$s^2 M + s(C + G(\Omega_{rpm})) + \bar{K}(\Omega) = 0, \quad (23)$$

which corresponds to a polynomial of s^{2n} order. This polynomial has the following characteristics: there will be $2n$ roots and those $2n$ roots will be complex and distinct.

To solve the eigenvalue problem, a transformation of generalized coordinates for the state space, Ewins (1984) and Espindola (1990), is proposed. A new $2n \times 1$ vector of coordinates $y(t)$ is defined.

$$y(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dots \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix} \quad (24)$$

To represent the system of equations in the state space, consider the following equality:

$$M\dot{q}(t) - M\dot{q}(t) = 0 \quad (25)$$

resulting in

$$A\dot{y}(t) + By(t) = \{f_y(t)\} \quad (26)$$

where

$$A = \begin{bmatrix} C + G(\Omega_{rpm}) & \vdots & M \\ \dots & \vdots & \dots \\ M & \vdots & 0 \end{bmatrix}_{2n \times 2n}, \quad B = \begin{bmatrix} \bar{K}(\Omega) & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & -M \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad \text{and} \quad \{f_y(t)\} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}_{2n \times 1}.$$

Assuming that the homogeneous solution in the state space is

$$y(t) = \theta e^{st}$$

where $\theta = [\phi \quad \vdots \quad s\phi]^T = [\phi \quad \vdots \quad -\lambda\phi]^T$, and replacing it in Eq. (27), it follows that

$$[sA + B]\theta = 0. \quad (27)$$

Equation (27) represents an eigenvalue problem. Considering $\lambda = -s$, this problem is defined by:

$$B\theta = \lambda A\theta \quad (28)$$

where θ is denominated right eigenvector. Considering that A and/or B are not symmetrical matrices, the adjoint problem of eigenvalues must be solved:

$$B^T \psi = \lambda A^T \psi, \quad (29)$$

where $\lambda = -s = -i\bar{\Omega}$ and ψ the left eigenvector.

3.2. Orthogonality

It is shown that the following relations are satisfied:

$$[\psi_j]^T A[\theta_k] = a_j \delta_{jk} \quad (30)$$

$$[\psi_j]^T B[\theta_k] = b_j \delta_{jk} \quad (31)$$

$$\text{with } \delta_{jk} \begin{cases} =1 & \text{se } j = k \\ =0 & \text{se } j \neq k \end{cases}.$$

Starting from Eqs. (30) and (31), the following orthogonality properties in the configuration space are obtained (see Espindola, 1990):

$$-\lambda_j \lambda_k \psi_j^T M \theta_K + \psi_j^T \bar{K} \theta_K = b_j \delta_{jk} \quad (32)$$

$$-(\lambda_j + \lambda_k) \psi_j^T M \theta_K + \psi_j^T (C + G(\Omega_{rpm})) \theta_K = a_j \delta_{jk} \quad (33)$$

Equations (32) and (33) represent the orthogonality conditions as functions of matrices M , C , G and K . As the values of λ are complex, they can be represented by the real part δ_j and the imaginary part v_j .

$$\lambda_j = \delta_j + i v_j \quad (34)$$

The eigenvalues are complex and different; on the other hand, they are in some way related for being in the state space. It is verified that the eigenvalues are formed by pairs λ_j and $-\lambda_j$. So, taking values of $j \neq k$, but with $\lambda_j = -\lambda_k$, and applying these values in the orthogonality relations above, the result is:

$$\lambda_j^2 = -\frac{\bar{k}_j}{m_j} = -\bar{\Omega}_j^2 = (i\bar{\Omega}_j)^2 \quad (35)$$

and, therefore, $\lambda_j = i\bar{\Omega}_j$. By definition:

$$-\lambda_j^2 = \bar{\Omega}_j^2 = \Omega_j^2 (1 + i\eta_j) \quad (36)$$

So, $\lambda_j = \Omega_j \sqrt{1 + i\eta_j}$, the natural frequency is $\Omega_j^2 = \text{Re}(-\lambda_j^2)$ and the loss factor is $\eta_j = \text{Im}(-\lambda_j^2) / \text{Re}(-\lambda_j^2)$.

4. Campbell diagram

In this particular case, where the rotor is mounted on bearings with viscoelastic material, matrix A , which has the gyroscopic matrix, is a function of the rotation of the axis (Ω_{rpm}), and matrix B is complex and a function of the frequency (Ω). So, the eigenvalue problem is a function of the rotation and the frequency. That is, for a certain rotation of the rotor ($\Omega_{rpm} = \text{cte}$), the eigenvalue problem is a function of the frequency and will be solved through an internal Campbell diagram, $\Omega_j \times \Omega$, because $\bar{K}(\Omega) = K(\Omega)(1 + i\eta(\Omega))$. Starting from this internal Campbell diagram, considering $\Omega = \Omega_j$ and using a straight line that crosses the curves of the natural frequencies, the natural frequencies of the system are extracted in an equivalent way to Espindola and Floody (1999). This process should be repeated for all the rotor rotations, resulting in a new final Campbell diagram, now ($\Omega_j \times \Omega_{rpm}$), containing the critical rotations of the viscoelastic dynamic rotor. Starting from this final Campbell diagram, it is possible to determine the dynamic characteristics of the viscoelastic rotor system. "Figure 4" shows an outline of how the Campbell diagrams are built. "Figure 4b" represents the internal Campbell diagram and "Fig. 4a" the final result. As can be observed, to calculate the natural frequencies of the system for a constant rotation, it is necessary to solve an eigenvalue problem, function of the frequency due to the characteristic stiffness matrix.

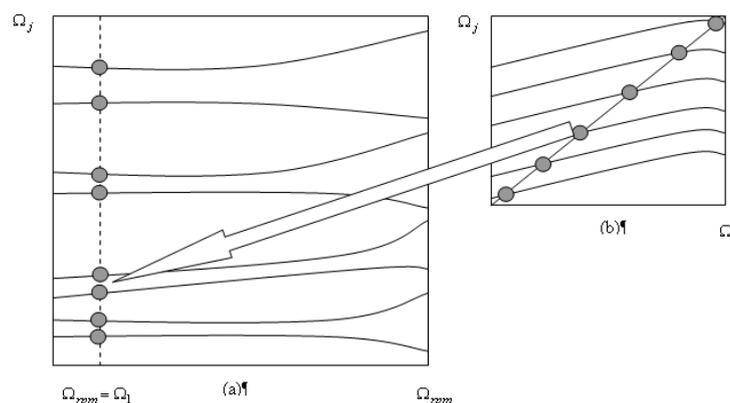


Figure 4. a) Final Campbell. b) Internal Campbell.

For the adjoint eigenvalue problem it is necessary to consider that A and/or B are nonsymmetrical. The schematic diagram below shows how the eigenvalue problem and the adjoint eigenvalue problem should be solved for a rotating system with viscoelastic bearings.

$$\left[\begin{array}{l}
 \text{Rotation loop } (\Omega_{rpm}) \\
 \text{Frequency loop } (\Omega) \\
 B\theta = \lambda A\theta \\
 B^T \psi = \lambda A^T \psi \\
 \text{Internal Campbell diagram} \\
 \text{Final Campbell diagram}
 \end{array} \right.$$

In the final Campbell diagram, two straight lines can be represented by the following equations: $\Omega_1 = \Omega_{rpm} = \pi N / 30$ and $\Omega_2 = \Omega_{rpm} = (\pi / 2)(N / 30)$, where N is the rotor spin velocity (rpm). These two straight lines, used to find out the critical rotations, represent the most frequent excitation forces that happen in practice: unbalanced mass, whose frequency matches the rotation of the axis (straight line Ω_1) and the excitation produced by the instability of the hydrodynamic bearings, which has a frequency approximately equal to the half of N (straight line Ω_2).

A numeric example of a simple dynamic rotor mounted on roller bearings and layers of viscoelastic material is presented. The dynamic characteristics of the viscoelastic material (pure butyl rubber) were determined in the Laboratory of Vibrations and Acoustics of the Federal University of Santa Catarina (LVA-UFSC/PISA). A fractional derivative model of four parameters was used to characterize dynamically the behavior of that pure butyl rubber. These parameters are, for temperature $T_0 = 273,0 K$: $G_0 = 1,53 \times 10^6 Pa$; $G_\infty = 1,11 \times 10^8 Pa$; $\alpha = 0,396$; and $b_1 = 1,34 \times 10^2$.

“Figure 5” shows the dynamic shear modulus and of the loss factor as functions of frequency and temperature.

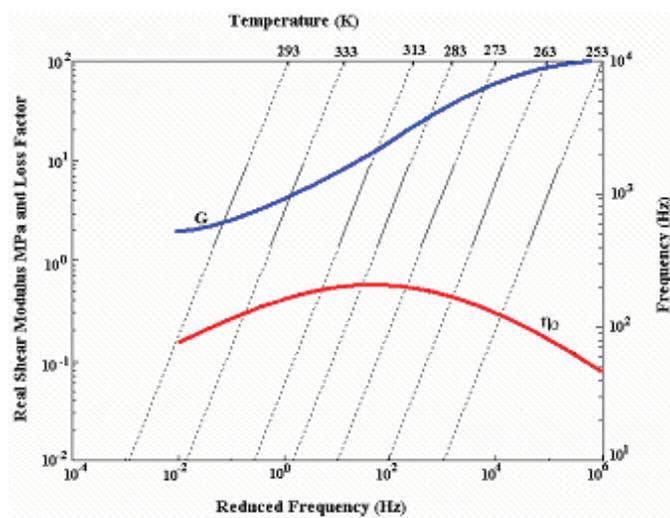


Figure 5. Dynamic properties – Pure butyl rubber.

<p>Shaft data: Total length, $L = 1,001$ m; Diameter, $d = 0,0254$ m; Modulus of Elasticity of the steel, $E=210e9$ MPa; Coefficient of Poisson, $\nu = 0,3$; Density of the steel, $\rho = 7800$ Kg/m³.</p>	<p>Disk data: External radius, $R_{ext} = 0.125$ m; Internal radius, $R_{int} = d/2$ m; Density of the steel, $\rho = 7800$ Kg/m³. Viscoelastic material data: Shear modulus and loss factor are given by Eqs. (15), (17) and “Fig. 5”.</p>
--	--

“Figure 6” shows the final Campbell diagram and the straight line Ω_1 (unbalanced mass type excitation) that determines, amongst all the natural frequencies of the system, the ones that participate in the response to the unbalanced mass and are known as the critical rotations of the rotor. Given that the modal parameters of the system are cut by this straight line, it is possible to find out the response of the rotating system for this kind of excitation. Therefore, it is observed that the proposed methodology allows the determination of the dynamic characteristics of a rotor the stiffness matrix of which varies with frequency. This variation with frequency is due to the introduction of the viscoelastic material under the bearings.

5. Conclusions

A simple and accurate methodology to find out the final Campbell diagram of a dynamic rotor, mounted on bearings made of viscoelastic material, was presented and implemented in a numeric example. Due to the characteristics of the stiffness matrix of this system, it is necessary to assemble two Campbell diagrams, one inside the other, to determine the overall dynamic behavior.

The viscoelastic material used in the bearings was represented by the four parameter fractional derivative model.

A numeric simulation showed the steps to be followed to obtain the Campbell diagram. Once the dynamic characteristics are known, it is possible to predict the response in distinct points and design a control system, among other control actions.

6. Acknowledgements

This work was partially supported by WEG, to which the authors are grateful.

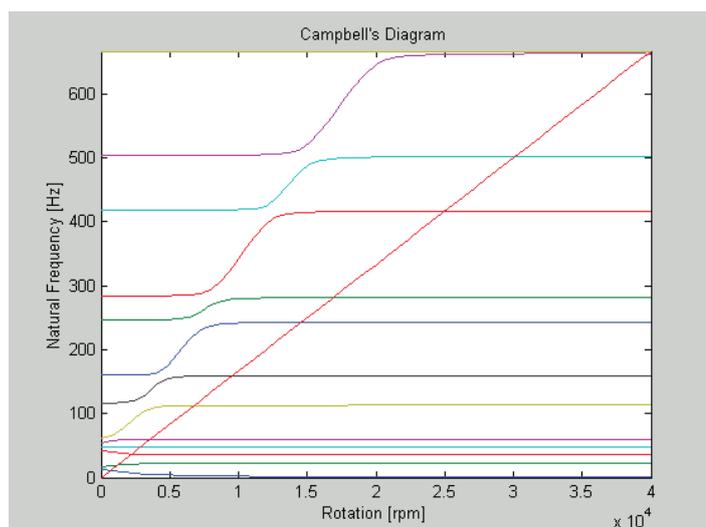


Figure 6. Final Campbell Diagram

7. References

- Bagley, R.L. and Torvik, P.J., 1983, "A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity", *Journal of Rheology*, Vol. 27 (3), pp. 201-210.
- Dutt, J.K. and Toi, T., 2002, "Rotor Vibration Reduction With Polymeric Sectors", *Journal of Sound and Vibration*, 262 (2003) 769- 793.
- Espindola, J.J., Silva Neto, J.M. and Lopes, E. M. O., 2003, "On the Measurement of Dynamics Properties of Viscoelastic Materials", 2th Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC, São José dos Campos, Brasil.
- Espindola, J.J., 1990, "Projeto de Isoladores Aeronáuticos", Final Report to the Bank of Brazil Foundation, Laboratory of Vibrations and Acoustic, Federal University of Santa Catarina, Brazil.
- Espindola, J.J. and Floody, S. E., 1999, "On the Modeling of Metal - Elastomer Composite Structures: A Finite Element Method Approach" In: *Applied Mechanics in the Americas - PACAM IV*, v.8. p.1335 – 1342
- Ewins, D.J., 1984, "Modal Testing Theory and Practice". Research Studies Press., England.
- Lalanne, M. and Ferraris, G., 1990, "Rotordynamics Prediction in Engineering", John Wiley & Sons Ltd. New York.
- Lopes, E.M.O., Bavastri, C.A., Silva Neto, J.M., e Espindola, J.J., 2004, "Caracterização Dinâmica Integrada de Elastômeros por Derivadas Generalizadas", CONEM, Brasil.
- Marynowski, K. and Kapitaniak, T., 2002, "Kelvin-Voigt versus Bürges Internal Damping in Modeling of Axially Moving Viscoelastic Web", *International Journal of Non-Linear Mechanics* 37 (2002) 1147-1161, Poland.
- Nashif, A.D., Jones, D.I.G. and Henderson, J.P., 1985, "Vibration Damping", John Wiley & Sons.
- Panda, K.C. and Dutt, J. K., 1999, "Design of Optimum Support Parameters for Minimum Rotor Response and Maximum Stability Limit", Department of Mechanical Eng., Indian Inst. of Technology, Kharagpur 721 302, Índia.
- Pritz, T., 1996, "Analysis of Four-Parameter Fractional Derivate Model of Real Solid Materials". *Journal of Sound and Vibration* 195 p 103-115.
- Shabaneh, N.H. and Jean W., 1999, "Dynamic Analysis of Rotor- Shaft Systems with Viscoelastically Supported Bearings", *Mechanism and Machine Theory*, University of Toronto.
- Silva Neto, J.M., 2004, "Identificação do Modelo Fracionário de Materiais Viscoelásticos no Domínio da Frequência", Tese de Doutorado, UFSC, Brasil.
- Snowdon, J.C., 1968, "Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems", John Wiley & Sons Inc., New York.

8. Responsibility notice

The authors are the only responsible for the printed material included in this paper.

**ANEXO 2 – ALMOFADAS DE NEOPRENE PARA ISOLAMENTO DE
VIBRAÇÕES**

ALMOFADAS DE NEOPRENE PARA ISOLAMENTO DE VIBRAÇÕES

CÁLCULO DO FATOR DE FORMA

1 OBJETIVO

Determinar o fator de forma para uma almofada com ranhuras, para fins de cálculo da rigidez em função da frequência.

Verificar a veracidade da equação teórica usada no cálculo do fator de forma usando dados experimentais como comparação.

2 METODOLOGIA

- Ensaio de compressão na almofada de NEOPRENE 45SH;
- Determinação da rigidez da almofada com base nos resultados dos ensaios;
- Cálculo do módulo de elasticidade a compressão do NEOPRENE para frequência zero;
- Cálculo do módulo de elasticidade aparente através de valores experimentais;
- Obtenção do κ_T experimental (fator de forma);
- Cálculo do κ_T teórico.

I. ENSAIO DE COMPRESSÃO

Para testar a eficiência das ranhuras nas faces de carregamento e a influência da espessura na rigidez do material isolante, foram realizados ensaios de tração com três configurações diferentes de almofadas. A figura abaixo ilustra os três modelos ensaiados.

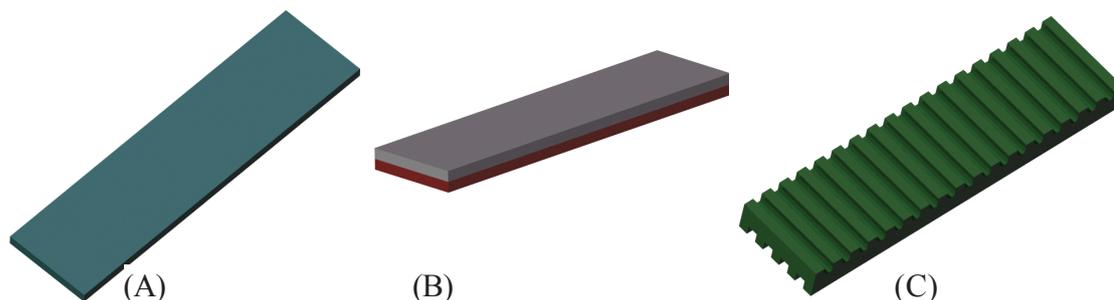


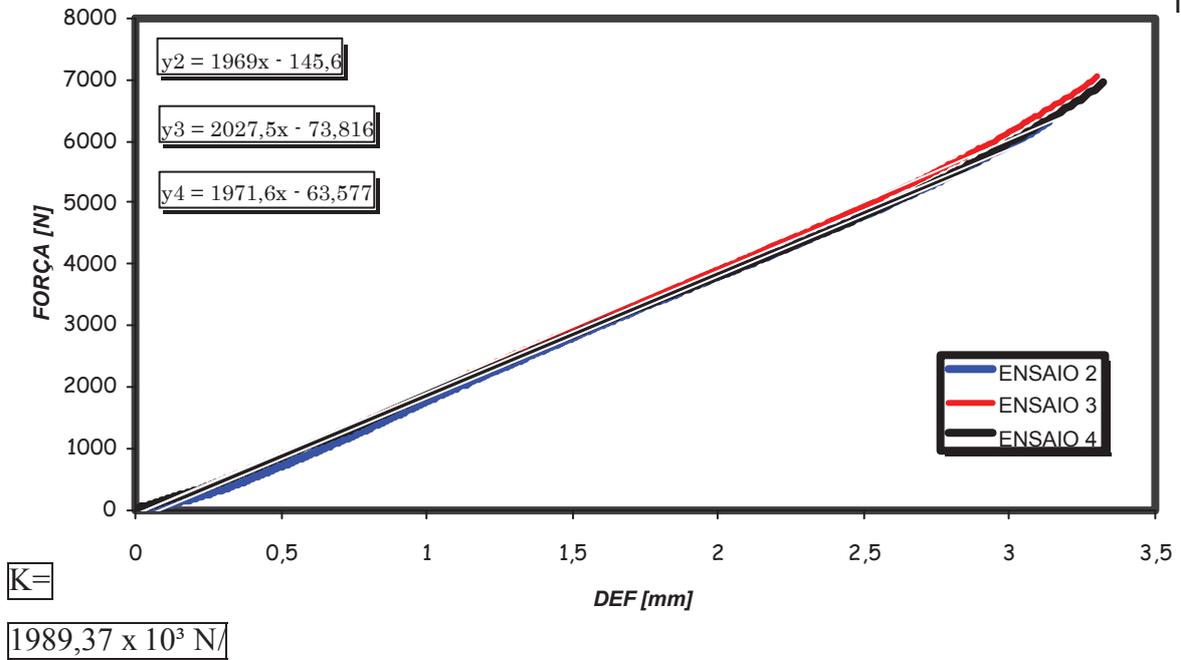
Figura 1: Almofadas de isolamento de vibrações. (A) Chapa de 4 mm, (B) Chapa de 8 mm e (C) Almofada com ranhuras

O ensaio foi realizado para uma carga máxima de 2 Ton à velocidade constante.

A duplicação da espessura de (A) para (B) implicou em uma redução proporcional na rigidez. Quando foram inseridas as ranhuras, como em (C), a rigidez cai cerca de oito vezes. Desta análise qualitativa, pode-se confirmar a eficiência de almofadas com ranhuras no isolamento de vibrações.

II. CÁLCULO DA RIGIDEZ A COMPRESSÃO

A análise completa do ensaio a compressão é ilustrada para a configuração (C) na figura 1. Os resultados são ilustrados no gráfico a seguir.



II. MÓDULO DE ELASTICIDADE A COMPRESSÃO – FREQUÊNCIA NULA

1) Características do Material Viscoelástico – NEOPRENE 45 SH^[2]

O módulo complexo de cisalhamento é expresso por:

$$\bar{G}(\omega, T) = \frac{G_L + G_H \varphi_0 [i\alpha_T(T)\omega]^\beta}{1 + \varphi_0 [i\alpha_T(T)\omega]^\beta} \quad (1)$$

Para temperatura ambiente o fator de deslocamento $\alpha_T = 1$.

Na frequência nula, o módulo de cisalhamento do NEOPRENE 45SH vale:

$$\bar{G}(0,273) = 3,57 \times 10^6 \text{ Pa}$$

O módulo de elasticidade a compressão é dado por

$$E = 3 \cdot \bar{G} \Rightarrow$$

$$E = 10,71 \times 10^6 \text{ Pa}$$

2) Geometria da Almofada

Tabela 01: Dados geométricos da almofada com ranhuras

Espessura	$12 \times 10^{-3} \text{ m}$
Transversal	$2628 \times 10^{-6} \text{ m}^2$
Longitudinal	$2800 \times 10^{-6} \text{ m}^2$
Área Total Livre	$17726 \times 10^{-6} \text{ m}^2$

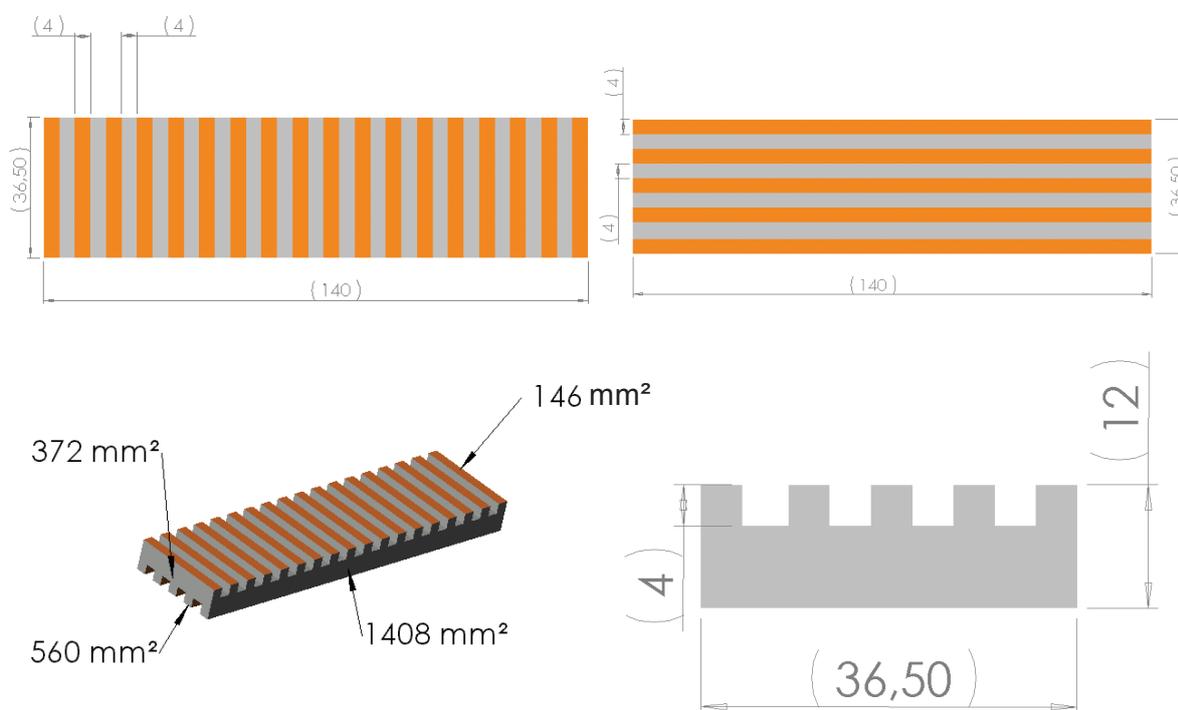


Figura 2: Dimensões da almofada com ranhuras (medidas não indicadas estão em milímetros)

3) Módulo de Elasticidade Aparente e k_T experimental^[2]

O módulo aparente da almofada é calculado por:

$$Ea = k \frac{h}{S}, \text{ onde:}$$

(2)

- S é a área da seção de transversal (Tomado o menor valor dentre as duas áreas de contato).

- h altura da almofada

Substituindo o valor da rigidez encontrada experimentalmente e os dados geométricos ilustrados no item anterior, tem-se:

$$Ea = 1989,37 \times 10^3 \frac{12 \times 10^{-3}}{2628 \times 10^{-6}} \Rightarrow$$

$$Ea = 9,08 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

A influência da geometria da almofada na rigidez é avaliada pelo fator de forma k_T pela seguinte relação:

$$k = Ea \frac{S}{h} = E \cdot k_T \frac{S}{h}$$

(3)

$$\therefore \frac{Ea}{E} = k_T$$

Para os valores calculados k_T vale:

$$k_T = 0,84$$

3 IV. FATOR DE FORMA TEÓRICO

$$k_T = 1 + \beta \left(\frac{S}{A_0} \right)^2$$

(4)

- A_0 é a área total livre de carregamento.
- β constante adimensional ($\beta = 2.0$)

Substituindo os valores em (4):

$$k_T = 1 + 2 \cdot \left(\frac{2628}{17726} \right)^2$$

Resulta:

$$k_T = 1,04$$

V. SUMÁRIO DOS RESULTADOS

A tabela abaixo ilustra um sumário dos resultados obtidos para todas as geometrias da almofadas ensaiadas.

GEOMETRIA	$K_{\text{EXPERIMENTAL}}$ [N/m]	E_a [N/m ²]	k_T EXPERIMENTAL	k_T TEÓRICO	Dif. % no k_T
A	16311,50 x 10 ³	$Ea = 12,76 \times 10^6$	1,19	27,19	-
B	8811,15 x 10 ³	$Ea = 13,79 \times 10^6$	1,28	7,54	-
C	1989,37 x 10 ³	$Ea = 9,08 \times 10^6$	0,84	1,04	19,5

VI. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Com se observa, a teoria usada para cálculo do k_T não é válida para casos em que a área livre de carga é muito menor que a área carregada. Fato ilustrado nos cálculos com almofada de 4 mm e 8 mm. Contudo, quando se utilizam ranhuras como as da geometria (C), pode-se perfeitamente adotar o k_T teórico dado pela equação (4).

O erro de 19% entre o teórico e o experimental pode ser justificado por dois fatos notados:

- a) O uso de cola na junção das partes influencia e muito na rigidez do conjunto
- b) Como as ranhuras foram feitas de maneira artesanal, a uniformidade na altura das mesmas não pode ser garantida. Isto causa o efeito ilustrado na figura 3, a favor de uma diminuição da rigidez global encontrada experimentalmente.

Como sugestão para a diminuição dos erros gerados na parte experimental, pode-se realizar o mesmo experimento usando agora almofadas já vulcanizadas na geometria (C).

A segunda sugestão para este trabalho é a realização de uma análise do ensaio de compressão usando um *software* comercial de elementos finitos.

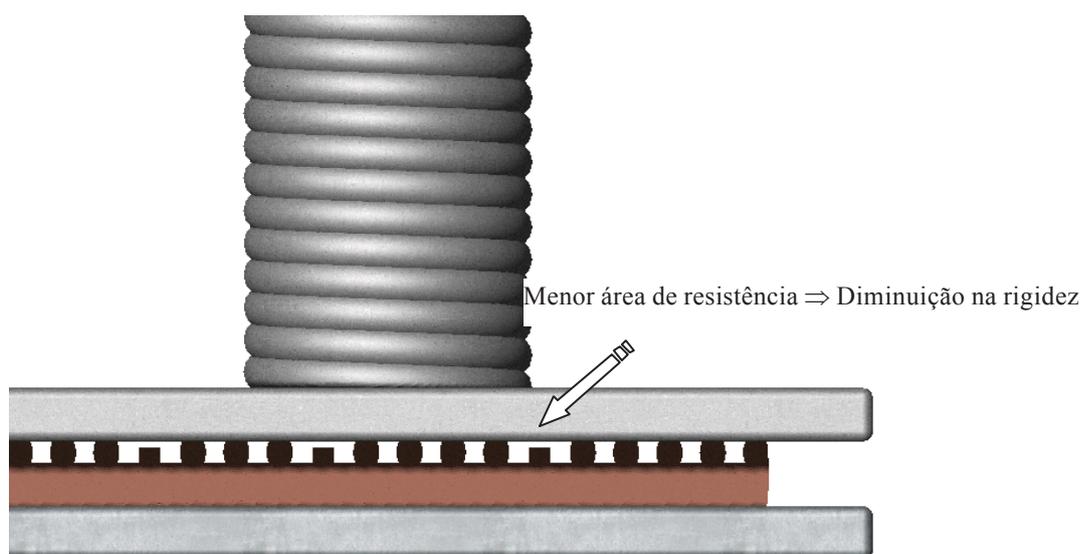


Figura 3: Figura esquemática do ensaio de compressão