

José Carlos Alberto de Pontes

# **Dinâmica de Redes de Mapas Acoplados.**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Orientador:

Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

Co-orientador:

Prof. Dr. Sérgio Roberto Lopes

**Curitiba**

2008

Deus seja Louvado.

# Resumo

Neste trabalho são abordados essencialmente dois problemas ligados à dinâmica espaço-temporal de redes de sistemas dinâmicos discretos (mapas) acoplados em uma rede unidimensional (redes de mapas acoplados). Em ambos os problemas, a dinâmica temporal dos mapas exhibe caos determinístico, ou seja, há um comportamento aperiódico com dependência sensível às condições iniciais. O elo que une ambos os problemas é a existência de alguma forma de sincronização. Além disso, as redes de mapas acoplados que consideramos têm interações não-locais, nas quais a intensidade do acoplamento decai com a distância entre os mapas na rede na forma de uma lei de potência. Os casos-limite dessa forma de acoplamento recaem nos casos bem-estudados na literatura de acoplamentos entre primeiros vizinhos (local) e do tipo campo-médio (global). O expoente da lei de potência caracteriza o alcance efetivo do acoplamento. No primeiro problema, estudamos a chamada intermitência “liga-desliga”, que ocorre em sistemas acoplados que exibem sincronização completa de caos. No espaço de fase de uma rede de mapas unidimensionais acoplados, o estado sincronizado corresponde a um sub-espaço invariante unidimensional. A intermitência liga-desliga ocorre quando uma trajetória não-sincronizada aproxima-se do sub-espaço sincronizado durante um certo intervalo de tempo (intervalo laminar) e é posteriormente ejetada para longe deste sub-espaço, para retornar à sua vizinhança após um outro intervalo de tempo. Nós investigamos as características estatísticas dos intervalos de tempo laminares, obtendo uma dependência do tipo lei de potência. Em alguns casos, obtivemos evidências de um expoente universal para a intermitência “liga-desliga” ( $3/2$ ). No segundo problema, abordamos um modelo computacional para redes de neurônios, onde o acoplamento é do tipo lei de potência, o que é sugerido pela alta conectividade de neurônios no córtex cerebral. Para modelar a dinâmica local dos neurônios nós empregamos um mapa bidimensional devido a Rulkov, que leva em conta a existência de duas escalas de tempo para a atividade neuronal: (i) uma escala rápida, que descreve os disparos (picos) do potencial de ação neuronal; (ii) uma escala lenta, que descreve as sequências de disparos (estouros). Nós associamos uma fase geométrica para a evolução do potencial de ação, e estudamos numericamente a sincronização de fase e de frequência para neurônios acoplados com uma ligeira diferença em seus parâmetros. Finalmente, investigamos a possibilidade de se controlar o estado sincronizado dos neurônios a partir da aplicação de um sinal harmônico externo, inspirados nas experiências de estimulação profunda do cérebro com sinais elétricos de baixa potência, usados para

o controle de ritmos neurológicos indesejados, como tremores e mal de Parkinson.

-Palavras chave: Intermitência *on-off*, sincronização completa, de fase e frequência, mapas de Rulkov e acoplamento tipo lei de potência.

-Áreas de conhecimento: Sistemas dinâmicos.

# Abstract

In this work we deal with essentially two problems related to the spatio-temporal dynamics of lattices of discrete dynamical systems (maps) coupled in a one-dimensional lattice (coupled map lattices). In both problems, the temporal dynamics of the maps exhibits deterministic chaos, i.e. there is an aperiodic behaviour with sensitive dependence to the initial conditions. The link connecting both problems is the existence of some form of synchronization. Moreover, the coupled map lattices we deal with have nonlocal interactions, for which the coupling strength decreases with the distance between maps in a power-law fashion. The limiting cases of this kind of coupling fall into the well-studied cases of nearest-neighbor (local) coupling and mean-field (global) coupling. The exponent of the power law characterizes the effective range of the coupling. In the first problem, we study the so-called “on-off” intermittency, which occurs in coupled systems exhibiting complete synchronization of chaos. In the phase-space of a lattice of coupled one-dimensional maps, the synchronized state corresponds to an invariant one-dimensional subspace. On-off intermittency occurs when a non-synchronized trajectory approaches the synchronization subspace during a certain time interval (laminar time) and it is ejected away from it, to eventually return to its vicinity after another time interval. We investigate the statistics of the laminar times, obtaining a power-law dependence. In some cases, we obtained evidence in favour of an universal  $(3/2)$  exponent for “on-off” intermittency. In the second problem, we present a computational model for neuronal networks, where the coupling is of the power-law type, as suggested by the high connectivity of neurons in the cortex brain. In order to model the local dynamics of the neurons we use a two-dimensional map due to Rulkov, which takes into account the existence of two timescales for the neural activity: (i) a fast scale, describing the spiking behavior of the membrane action potential; (ii) a slow scale, describing the bursts, or sequences of spikes. We introduce a geometrical phase for the action potential time evolution, and we study numerically the phase and frequency synchronization for coupled neurons with slightly different parameters. Finally, we investigate the possibility to control the synchronized state of neurons from applying an external time-periodic driving term, inspired in the deep-brain stimulation experiences with low-power electric signals used to control abnormal neuronal rhythms as tremors and Parkinson disease.

# Agradecimentos

- Aos Professores Dr. Ricardo Luiz Viana e Sérgio Roberto Lopes pela orientação no trabalho.
- À Capes pelo apoio financeiro.
- Ao Professor Carlos de Carvalho pelo apoio computacional.
- À pós graduação em Física pela oportunidade.
- Aos colegas de pós graduação e aos membros do Grupo de Física de Plasmas e Dinâmica Não-Linear pela ajuda.
- Aos meus pais, Osmar e Sueli que sempre me apoiando.
- Aos meus irmãos, Alessandro, Adriane e André, pelo incentivo que me deram.
- À minha esposa, Juliana, sempre presente nos momentos mais difíceis, com seu amor.
- À minha filha Letícia, com seu olhar me dando forças no final da elaboração dessa tese.
- Ao Ocimar e Ivanir pela hospitalidade que me receberam em Curitiba.

# Sumário

Resumo	iii
Abstract	v
Agradecimentos	vi
<b>1 Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2 Conceitos Fundamentais</b>	<b>6</b>
2.1 Redes de Mapas Acoplados . . . . .	7
2.2 Mapas . . . . .	9
2.3 Acoplamento . . . . .	9
2.3.1 Acoplamento Global . . . . .	10
2.3.2 Acoplamento Tipo Lei de Potência . . . . .	10
2.4 Sincronização . . . . .	11
<b>3 Intermitência Liga-desliga</b>	<b>13</b>
3.1 Intermitência Liga-desliga . . . . .	14
3.1.1 Modelo de intermitência liga-desliga . . . . .	14

3.2	Intermitência liga-desliga em redes com acoplamento do tipo lei de potência . . . . .	16
3.2.1	Mapa logístico . . . . .	17
3.2.2	Redes de mapas logísticos acoplados . . . . .	17
3.2.3	Variedade de Sincronização . . . . .	18
3.2.4	Distância à Variedade de Sincronização . . . . .	18
3.2.5	Parâmetro de Ordem de Kuramoto . . . . .	20
3.2.6	Expoentes de Lyapunov . . . . .	24
3.3	Regimes da Rede de Mapas Logísticos Acoplados . . . . .	25
3.4	Intermitência liga-desliga para $\varepsilon = 1$ . . . . .	30
3.5	Intermitência liga-desliga para $\varepsilon \neq 1$ . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Rede dos Mapas de Rulkov</b>	<b>37</b>
4.1	Modelos para Atividade Neuronal . . . . .	38
4.1.1	Modelo de Hodgkin e Huxley . . . . .	39
4.1.2	Modelo de FitzHugh-Nagumo . . . . .	42
4.1.3	Modelo de Bonhoeffer-van der Pol . . . . .	44
4.1.4	Modelo de Hindmarsh-Rose . . . . .	44
4.1.5	Modelo do Mapa de Rulkov . . . . .	46
4.2	Mapa de Rulkov . . . . .	46
4.3	Arquitetura das Redes de Neurônios . . . . .	54
4.4	Acoplamento Global . . . . .	56
4.5	Acoplamento Tipo Lei de Potência . . . . .	61



<b>5 Sincronização de Fase e Frequência em Redes de Mapas de Rulkov Acoplados</b>	<b>66</b>
5.1 Fase dos Disparos . . . . .	68
5.1.1 Parâmetro de ordem . . . . .	71
5.2 Frequência dos disparos . . . . .	75
5.3 Sincronização Com Um Forçamento Harmônico Externo . . . . .	79
5.4 Língua de Arnold . . . . .	82
5.4.1 Rede de Mapas de Rulkov com $\alpha = 0,5$ . . . . .	84
5.4.2 Rede de Mapas de Rulkov com $\alpha = 2$ . . . . .	87
<b>6 Conclusão</b>	<b>92</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>97</b>
<b>Anexos</b>	<b>103</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Sistemas dinâmicos são estudados, por serem de grande utilidade na modelagem e compreensão de muitos sistemas de diferentes áreas científicas. Eles podem ser definidos como um conjunto de objetos que possuem alguma interdependência e que, com a variação temporal, existam relações de causa e efeitos nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto [1]. São exemplos de sistemas dinâmicos: circuitos elétricos, sistemas nervosos, bolsa de valores, entre outros.

Estudar sistemas dinâmicos significa determinar e compreender a evolução temporal de uma dada grandeza destes sistemas, e como essa evolução temporal é afetada pelas características e parâmetros de controle do sistema, como por exemplo: o número de circuitos elétricos acoplados, o tamanho da rede, tipos de acoplamentos entre neurônios, entre outros. Para certos valores dos parâmetros de controle, um sistema dinâmico pode apresentar comportamentos sincronizados e/ou comportamentos caóticos.

O estudo de sistemas dinâmicos começa com a modelagem, sendo que os modelos de sistemas dinâmicos espaço-temporais podem ser divididos em: equações diferenciais parciais, cadeias de osciladores, redes de mapas e autômatos celulares [2]. As diferenças entre estes modelos encontram-se na forma, contínuo ou discreto, que são tratados o espaço, o tempo e a variável de estado. Nesses modelos de sistemas dinâmicos, apesar de tratar as variáveis de maneira diferente, é possível passar de uma categoria para outra por meio de um processo sistemático de discretização que leva em conta uma periodicidade natural do sistema modelado [2]. Dada uma condição inicial, estes modelos tentam prever o comportamento futuro do sistema a partir do conhecimento das regras, que governam as mudanças do sistema [1].

Na escolha do modelo deve-se ter em mente que quanto mais geral for o modelo, mais difícil é a solução do mesmo. Nesta tese será utilizado as redes de mapas acoplados, sendo sua manipulação computacional fácil, se comparada às equações diferenciais, e permitem resultados satisfatórios e observáveis na natureza. Nas redes de mapas acoplados a dinâmica local de cada sítio é dada por um mapa, equação

algébrica, e a rede é um conjunto de mapas no qual a influência de um sítio nos outros é dado por uma regra definida, o acoplamento. Os mapas utilizados nesta tese serão: o mapa logístico, utilizado para compreender que tipo de sincronização ocorre em uma rede de mapas idênticos, e o mapa de Rulkov, um modelo fenomenológico para a evolução temporal do potencial elétrico da membrana do neurônio.

Tanto, o acoplamento entre os elementos do conjunto analisado, como a função que descreve um elemento isolado (mapa) podem ser lineares ou não lineares. Os fenômenos não lineares estão presentes em muitos sistemas dinâmicos, por exemplo, pêndulo entre outros [3].

A presença de regras não lineares em sistemas dinâmicos pode levar ao comportamento caótico, ou seja, sensibilidade às condições iniciais, no qual, duas trajetórias muito próximas separam-se exponencialmente com o tempo. Esta separação exponencial é determinada através dos expoentes de Lyapunov, que são módulos dos logaritmos naturais dos autovalores dos produtos das Jacobianas dos sistemas em estudo [4].

O estudo de sistemas dinâmicos complexos tem recebido muita atenção nos últimos 20 anos, sendo que, as principais características de sistemas dinâmicos complexos são: sistemas compostos de muitas partes correlacionadas de maneiras não triviais, podendo exibir tanto comportamentos ordenados ou aleatórios e exibem hierarquias de estruturas com diferentes escalas de comprimento [5].

Recentemente, surgiu na comunidade científica o interesse pelo estudo da sincronização caótica [6]. A sincronização caótica é o ajuste de alguma variável do sistema, como por exemplo, fase, frequência ou amplitude, devido ao acoplamento do sistema ou ao forçamento a que está sujeito [6]. Aqui ocorre uma competição no sistema dinâmico, enquanto o termo não linear de cada sítio tenta retirar o sistema da sincronização, o acoplamento tende a deixar todos os sítios da rede sincronizados.

Existe o interesse de que ocorra a sincronização ou não do sistema, por exemplo, existe o interesse da sincronização caótica em um sistema de comunicação, sendo que uma comunicação caótica não pode ser interceptada, pois o erro causado pela interceptação aumenta de forma exponencial [6]. Já em um sistema de neurônios a sincronização não é interessante, pois está associada a doenças. A ocorrência ou não da sincronização faz surgir estruturas nas quais os comportamentos ordenados e desordenados coexistem simultaneamente. Um dos interesses desta tese é a transição entre comportamentos dessincronizados-sincronizados.

No estudo de uma rede de mapas logísticos acoplados serão observados três diferentes regimes, referentes à sincronização da rede. Para esta rede será possível observar que um dos mecanismos, para um certo valor dos parâmetros de acoplamento, da transição de um estado sincronizado é a intermitência *on-off* (liga-desliga). Na intermitência liga-desliga a rede alterna entre estados laminares, *off*, no qual a rede permanece por longos intervalos de tempo, e estado de estouros caóticos, *on*, que surge abruptamente na dinâmica dos sítios da rede e neste estado a rede permanece até que volta novamente para o estado laminar. Na evolução temporal a rede alterna de forma intermitente entre estado laminar e de estouro caótico.

Os exemplos de estados intermitentes são abundantes na natureza, podendo

ser citados como exemplos: inversão irregular do campo magnético terrestre, fluxo turbulento em fluidos e terremotos [7].

A sincronização também será estudada na rede de mapas de Rulkov, tentando compreender como ocorre a transição de um estado dessincronizado para um sincronizado, e como é possível controlar a sincronização. Os mapas de Rulkov são exemplos da aplicação de sistemas dinâmicos em fisiologia, na tentativa de compreender a evolução temporal da tensão elétrica nas membranas dos neurônios. Os neurônios biológicos são pequenas unidades que formam grandes sistemas, como por exemplo o cérebro humano, que possui mais de 100 regiões especializadas com diferentes funções. Cada região do cérebro forma uma rede complexa, pois é formado por um grande número de neurônios, onde cada neurônio está conectado aos demais dessa região. As atividades elétricas observadas nos conjuntos de neurônios são resultados das propriedades individuais de cada neurônio, e da forma com que estes neurônios estão acoplados. Além do mapa de Rulkov existem outros modelos dinâmicos para a evolução temporal da tensão elétrica da membrana: O modelos de Hodgkin e Huxley, Hindmarsh-Rose, FitzHugh-Nagumo e Bonhoeffer-van der Pol.

Nas redes dos mapas de Rulkov a transição de um estado dessincronizado para um estado sincronizado ocorre via uma transição de segunda ordem, semelhante as transições de fases em fenômenos magnéticos. A sincronização dos mapas de Rulkov ocorre devido à influência efetiva que um sítio exerce no outro, e essa influência efetiva possui uma regra bem definida, o acoplamento do sistema. O acoplamento depende do sistema neural que está sendo tratado, existindo diferentes tipos de topologia para a influência de um sítio (neurônio) no outro: no cérebro de primatas foi observado um acoplamento fractal [8], no córtex visual do gato no qual o acoplamento sugerido é o tipo global [9], e no sistema nervoso da *C. elegans* foi observado os acoplamentos de pequeno mundo [10]. O acoplamento fractal é semelhante ao acoplamento tipo lei de potência, acoplamento utilizado nesta tese, pois no acoplamento fractal a probabilidade de conexão diminui com o aumento da distância entre os sítios, e no acoplamento tipo lei de potência a influência entre os sítios diminui com a distância.

Em uma rede de neurônios as sincronizações estão associadas às doenças, assim, não existem interesses em estados sincronizados de uma rede neural. Para retirar uma rede do estado sincronizado será inserido um sinal externo periódico em alguns sítios, e será observado qual o valor da amplitude e da frequência necessários para retirar a rede de um estado sincronizado. Este procedimento tem sido realizado experimentalmente, através da inserção de micro eletrodos nas regiões doentes do cérebro humano.

Esta tese de doutoramento foi dividida em cinco capítulos:

No segundo capítulo é dada uma introdução sobre as redes de mapas acoplados, e os motivos de sua utilização em sistemas dinâmicos. Nesse capítulo será comentado sobre mapas e seus comportamentos que serão observados nos outros capítulos: pontos fixos, órbitas periódicas, entre outros. Também será feita uma breve introdução à sincronização de sistemas dinâmicos.

No terceiro capítulo será estudado a intermitência liga-desliga em uma rede

de mapas logísticos acoplados, com alcance variado. O interesse deste capítulo é observar se a rede de mapas logísticos perde a sincronização através de um mecanismo de intermitência ligado-desligado.

No quarto capítulo serão introduzidos os mapas de Rulkov, um mapa bidimensional que possui duas escalas de tempo: uma rápida e outra lenta. Os mapas de Rulkov são modelos fenomenológicos da dinâmica da tensão elétrica dos neurônios. No capítulo sobre os mapas de Rulkov serão introduzidos outros modelos, para uma breve comparação entre os modelos. Também serão apresentadas algumas topologias das redes de neurônios, sendo que, as simulações e análise serão feitas para os acoplamentos global e tipo lei de potência.

No quinto capítulo será estudado a sincronização de fase e de frequência para uma rede de mapas de Rulkov, com acoplamento de alcance variado. O foco deste capítulo é observar a influência do alcance e da intensidade do acoplamento na sincronização da rede de mapas, e possibilidade de retirar a rede de um estado sincronizado através da inserção de um sinal externo periódico. Para este estudo será necessário definir uma fase e frequência para os disparos de cada neurônio.

No sexto e último capítulo desta tese estão as conclusões obtidas dos trabalhos realizados nestes quatro anos, juntamente com os trabalhos futuros propostos. Nos anexos encontram-se os trabalhos publicados e aceitos para publicação.

O trabalho apresentado aqui foram feitos todos em linguagem de programação C, utilizando-se de pacotes numéricos do *Numerical Recipes*. As simulações foram feitas dentro do departamento de física da UFPR e também com a utilização do **CLUSTER CT-INFRA**.

# Capítulo 2

## Conceitos Fundamentais

As redes de mapas acoplados foram introduzidas em sistemas dinâmicos em 1983, na tese de doutoramento de Kunihiko Kaneko, como um modelo para o estudo de caos espaço-temporal [11]. Estudos com redes deste tipo vêm crescendo nos campos de caos espaço-temporal e também em outras áreas como biologia, matemática, engenharia e física [12] [13].

Em sistemas dinâmicos espaço-temporais, além das redes de mapas acoplados, podem ser citados como modelos: equações diferenciais parciais, cadeias de osciladores e os autômatos celulares, sendo que a principal diferença entre estes modelos é o tratamento dado ao tempo, ao espaço e à variável de estado. Na tabela (2.1) encontram-se os quatro modelos de sistemas dinâmicos e como o tempo, espaço e a variável de estado são tratados.

Tabela 2.1: Lista hierárquica de sistemas espacialmente estendidos [2] .

<b>Sistema</b>	<b>Espaço</b>	<b>Tempo</b>	<b>Variável de Estado</b>
Equações Diferenciais Parciais	Contínuo	Contínuo	Contínua
Cadeia de Osciladores	Discreto	Contínuo	Contínua
Redes de Mapas Acoplados	Discreto	Discreto	Contínua
Autômatos Celulares	Discreto	Discreto	Discreta

O primeiro modelo de sistemas dinâmicos são as equações diferenciais parciais, apresentando um número infinitamente denso de graus de liberdade espaciais, nas quais o tempo, o espaço e a variável de estado são contínuas [2]. Um pouco abaixo na hierarquia dos sistemas dinâmicos, encontram-se as cadeias de osciladores, que possuem o espaço discreto, e a variável de estado e o tempo contínuos. As cadeias de osciladores são equações diferenciais ordinárias acopladas. As redes de mapas acoplados são modelos dinâmicos que apresentam um número enumerável (e finito)

de graus de liberdade. A cada grau de liberdade pode ser associado uma variável de estado, caracterizando uma propriedade física do sistema [2], como por exemplo, a tensão elétrica na membrana do neurônio. Nas redes de mapas acoplados, o tempo e o espaço são tratados de forma discreta, já a variável de estado é contínua.

Abaixo das redes de mapas, na tabela (2.1), encontram-se os autômatos celulares, nestes modelos o tempo, o espaço e a variável de estado são tratados de forma discreta. Os modelos apresentados na tabela (2.1) possuem suas vantagens e desvantagens, por exemplo pode-se utilizar as equações diferenciais parciais para modelar algum problema físico devido a "generalidade" que seu tratamento proporciona, mas para isso é necessário a utilização de métodos numéricos para a solução das equações, juntamente com um longo tempo computacional necessário para a solução dos problemas. Já as redes de mapas acoplados possuem o tempo e o espaço discreto, perdendo alguma "generalidade" se comparado as equações diferenciais parciais, mas são obtidos resultados de forma mais rápida e com menos esforços computacionais, e devido a sua variável de estado ser contínua proporcionam uma geração de informação local.

Devido às suas características de fácil implementação computacional, quando comparadas ao outros sistemas hierárquicos superiores, tabela (2.1), as rede de mapas acopladas têm sido escolhidas com frequência como "laboratórios teóricos" para o estudo da dinâmica espaço-temporal.

## 2.1 Redes de Mapas Acoplados

As redes de mapas acoplados podem ser relacionadas com as equações diferenciais parciais, através de uma discretização no espaço e no tempo de uma equação do tipo reação difusão [2],

$$\frac{\partial x}{\partial t} = D \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + G(t)R(x), \quad (2.1)$$

onde  $y$  é a variável espacial,  $x$  a variável de estado,  $D$  o coeficiente de difusão,  $R(x)$  o termo não linear de reação e  $G(t)$  uma função periódica no tempo do tipo  $\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau)$ , sendo  $\tau$  o período [14].

Integrando a equação (2.1) no intervalo entre dois pulsos  $t \in [n\tau + \epsilon, (n + 1)\tau - \epsilon]$  [14],

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{n\tau - \epsilon}^{(n+1)\tau + \epsilon} \frac{\partial x}{\partial t} dt - \int_{n\tau - \epsilon}^{(n+1)\tau + \epsilon} \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} dt - \int_{n\tau - \epsilon}^{(n+1)\tau + \epsilon} R(x) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau) \right] = 0, \quad (2.2)$$

como  $\epsilon$  é muito pequeno, a integral com a segunda derivada espacial anula-se. Fazendo a integração obtem-se

$$x(y, n\tau + \epsilon) - x(y, n\tau - \epsilon) = R(x(y, n\tau)). \quad (2.3)$$

Durante o intervalo de tempo  $[n\tau + \varepsilon, (n + 1)\tau - \varepsilon]$  a função delta e a reação se anulam.

Assim a derivada de  $x$  em relação a  $t$  fica,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{(y,t=n\tau)} = \frac{x[y, t = (n + 1)\tau - \varepsilon] - x[y, t = n\tau + \varepsilon]}{\delta t}, \quad (2.4)$$

sendo  $\delta t = \tau - 2\varepsilon$ . Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtém-se

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{(y,t=n\tau)} = \frac{x_{n+1}(y) - x_n(y)}{\tau}. \quad (2.5)$$

Discretizando o espaço com um passo  $w$ , ou seja,  $y = iw$ , onde  $i = 1, 2, \dots, N$ , as variáveis espaciais ficam

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{(y=iw,t)} &= \frac{x(y = (i + 1)w, t) - x(y = iw, t)}{w} = \frac{x(y = w, t) - x(y = (i - 1)w, t)}{w}, \\ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right)_{(y=iw,t)} &= \frac{1}{w} \left[ \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{(y=(i+1)w,t)} - \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{(y=iw,t)} \right], \\ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right)_{(y=iw,t)} &= \frac{x[y = (i + 1)w, t] - 2x[y = w, t] + x[y = (i - 1)w, t]}{w^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Definindo a variável discreta na rede  $x^{(i)}(t) = x(y = iw, t)$ , e fazendo  $t = n\tau + \varepsilon$ , com  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtém-se as derivadas temporal e espacial discretizadas

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{(y,t=n\tau)} = \frac{x_{n+1}^{(i)} - x_n^{(i)}}{\tau}, \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right)_{(y=iw,t)} = \frac{x_n^{(i+1)} - 2x_n^{(i)} + x_n^{(i-1)}}{w^2}. \quad (2.8)$$

Utilizando-se dos resultados obtidos acima, a equação (2.1), fica

$$x_{n+1}^{(i)} - x_n^{(i)} - R(x_n^{(i)}) = \frac{D\tau}{w^2} \left\{ x_n^{(i+1)} + R(x_n^{(i+1)}) - 2x_n^{(i)} - 2R(x_n^{(i)}) + x_n^{(i-1)} - R(x_n^{(i-1)}) \right\}. \quad (2.9)$$

Definindo uma constante de acoplamento  $\varepsilon = \frac{D\tau}{w^2}$  e a função não linear  $f(x_n^{(i)}) = x_n^{(i)} + R(x_n^{(i)})$ , obtém-se a uma rede de mapas acoplados, com acoplamento laplaciano futuro [2],

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} \left[ f(x_n^{(i+1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-1)}) \right], \quad (2.10)$$

em que  $i$  representa o sítio e  $n$  o tempo discreto [14].

As redes dos mapas acoplados também podem ser obtidas através das seções de Poincaré (estroboscópicas) de cadeias de osciladores acoplados. Assim, pode-se obter uma rede de mapas através de uma discretização que leva em conta a periodicidade natural, tanto no espaço como no tempo, sobretudo quando há uma perturbação do tipo função delta de Dirac periódicas [2].



## 2.2 Mapas

Os mapas também são conhecidos como equações a diferenças e relação de recorrência,

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.11)$$

e têm sido utilizados em sistemas dinâmicos tanto para o estudo da formação de padrões, como para o estudo de caos [15]. No estudo de caos a utilização de mapas não-lineares fornece a vantagens da observação de comportamento caótico para sistemas unidimensionais, enquanto para equações diferenciais, isto somente é possível para sistemas em três dimensões.

Quando os parâmetros de controle dos mapas são variados surgem comportamentos do tipo: pontos fixos estáveis e instáveis, órbitas periódicas, bifurcações, entre outros .

- **Ponto fixo:** é um valor da variável de estado do mapa que mapeia nele mesmo, ou seja  $x^* = f(x^*)$ . Os pontos fixos podem ser classificados em estáveis, quando atraem as trajetórias, e instáveis quando repelem as trajetórias.
- **Órbitas periódicas:** As Órbitas periódicas são dadas pelas seguinte relação  $x^* = f^{(k)}(x^*)$ , onde  $k$  é o número de iterações necessárias para que o ponto  $x^*$  retorne a ele mesmo.
- **Bifurcações:** São mudanças qualitativas na dinâmica, e o valor do parâmetro no qual ocorre esta mudança é chamado de ponto de bifurcação [15].

## 2.3 Acoplamento

Há inúmeras formas de acoplamento entres os mapas. Para os acoplamentos locais, a dinâmica de um dado sítio  $i$  é determinada apenas pelos sítios vizinhos mais próximos:  $i + 1$  e  $i - 1$ . Assim, o acoplamento entre primeiro vizinhos fica

$$x_{n+1}^{(i)} = g(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} \left[ g(x_n^{(i+1)}) - 2g(x_n^{(i)}) + g(x_n^{(i-1)}) \right]. \quad (2.12)$$

A função  $g(x_n^{(i)})$  define a dinâmica local do acoplamento. Há apenas dois casos de interesse [2]:

1. Acoplamento linear:  $g(x_n^{(i)}) = x_n^{(i)}$ ,
2. Acoplamento futuro:  $g(x_n^{(i)}) = f(x_n^{(i)})$ .

Outra forma de acoplamento entre mapas são os acoplamentos não locais, que permitem o sítio  $i$  seja influenciado por um número arbitrariamente grande de outros sítios mais distantes. Nesta tese vão ser utilizados dois tipos de acoplamentos não locais, o acoplamento tipo lei de potência e o acoplamento global.

### 2.3.1 Acoplamento Global

No acoplamento local o alcance é pequeno, já no acoplamento global o alcance é ilimitado [16], sendo que o sítio  $i$  interage com todos os outros sítios da rede, essa interação pode ser descrita pela seguinte relação:

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n=1}^N G(x_n^{(j)}), \quad (2.13)$$

sendo  $n$  o tempo discreto e  $i(i = 1, \dots, N)$  o espaço discretizado e  $N$ , o tamanho da rede. Esse tipo de acoplamento é chamado na literatura de acoplamento campo médio [17].

O acoplamento global pode simular sistemas que possuem forças de longo alcance que ocorrem em física e biologia [16]. Pode-se citar como exemplo o processamento de informação biológica e as possíveis aplicações em engenharia [18], a dinâmica neural, em modelos de populações onde um aumento da conexão entre populações isoladas conduz a sincronização em fase da população local, e desse modo aumentando o perigo de uma extinção global [19].

### 2.3.2 Acoplamento Tipo Lei de Potência

O acoplamento tipo lei de potência leva em conta a distância entre os sítios, dado pela seguinte relação

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{f(x_n^{(i+j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-j)})}{j^\alpha}, \quad (2.14)$$

seno  $N$  o número ímpar de sítios e

$$N' = \frac{N-1}{2}, \quad (2.15)$$

$$\eta(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha}. \quad (2.16)$$

Este tipo de acoplamento foi introduzido por Rogers e Wille [20] para uma cadeia de osciladores, e estendida por Viana e Batista para uma rede de mapas acoplados [21].

O acoplamento tipo lei de potência é aplicado no estudo da sincronização em sistemas biológicos, como por exemplo ritmos cardíacos, redes neurais e espécies de vaga lumes e em sincronização de sistemas físicos, por exemplo as Junções Josephson, lasers, formação dos padrões de memória em redes de mapas acoplados [22] [23], em sistemas de *spin*, onde a sincronização seria o comportamento ferromagnético, entre outros sistemas físicos [20].

## 2.4 Sincronização

A sincronização está presente na física desde o século XVII, quando Huygens observou a sincronização entre dois relógios de pêndulos, com um acoplamento fraco, que sincronizavam em fase [6].

Nos últimos anos a sincronização tem sido inserida no estudo de sistemas caóticos, no estudo da sincronização caótica. A sincronização caótica refere-se ao processo, no qual, dois ou vários sistemas caóticos, iguais ou não entre si, apresentam comportamentos comuns entre alguma das suas variáveis de movimento devido ao acoplamento ou forçamento [6].

O acoplamento possui um papel importante na sincronização do sistema caótico, tanto quanto ao tipo de acoplamento como a direção em que ocorre esse acoplamento.

Nos últimos dez anos, diferentes tipos de sincronizações vêm sendo estudadas: A sincronização completa [24], sincronização de fase [25] e sincronização *lag* (atraso) [26], entre outras [6]. A seguir será descrito, rapidamente, três tipos de sincronização:

- **Sincronização completa:** Foi a primeira forma de sincronização caótica estudada, sendo que as variáveis de estado dos sistemas caóticos acoplados evoluem para o mesmo valor [27] [24]. Uma condição necessária para que ocorra a sincronização completa é que os sistemas sejam idênticos.
- **Sincronização de fase:** A sincronização de fase de dois sistemas oscilatórios é, geralmente, definida como o módulo da diferença entre as fases menor que um certo valor constante  $\delta$ , isto é,  $|n\phi_1 - m\phi_2| < \delta$ , sendo  $m$  e  $n$  números inteiros, enquanto as amplitudes dos sinais podem ser bem diferentes. Os sistemas não idênticos podem apresentar sincronização de fase quando o acoplamento é pequeno [6].
- **Sincronização *lag*:** A sincronização *lag* (atraso) é um tipo de sincronização intermediária entre a sincronização de fase e a sincronização completa. Na

sincronização de fase o acoplamento não é suficiente para que ocorra a sincronização completa de amplitudes. Com o aumento do acoplamento dos sistemas espera-se que exista uma relação entre as amplitudes [6]. Tem sido demonstrado que existe um regime de sincronização em atraso, para o qual as amplitudes dos sistemas são quase idênticas, sendo que uma amplitude possui um atraso no tempo em relação à outra [26].

## Capítulo 3

# Intermitência Liga-desliga

Nos últimos vinte anos o estudo do comportamento espaço-temporal em sistemas complexos tem recebido grande atenção da comunidade científica [5]. Exemplos de sistemas complexos são os sistemas espacialmente estendidos formados por mapas caóticos que apresentam diferentes tipos de comportamentos dinâmicos, por exemplo: estados caóticos e regulares, formando estruturas nas quais coexistem comportamentos coerentes e incoerentes [28].

O comportamento de sistemas complexos que apresentam a coexistência de comportamentos regulares e caóticos é o fenômeno de Intermitência. O comportamento intermitente surgiu, provavelmente, no estudo da dinâmica dos fluidos [27], onde o termo foi introduzido para descrever o comportamento de fluidos que alternam entre estados laminares e turbulentos [29]. As intermitências podem ser classificadas em quatro tipos: Intermitência do tipo I, II, III [30] e *on-off* (liga-desliga) [29]. O interesse desta tese é o estudo da Intermitência liga-desliga.

Em sistemas complexos ocorrem alternâncias entre estados regulares e caóticos, semelhantes ao comportamento de fluidos. Essa alternância entre estados regulares e caóticos ocorre na série temporal do sistema, quando o sistema possui uma evolução regular e subitamente ocorre o surgimento de um *burst* (estouro), comportamento caótico. Ele permanece neste estado caótico durante um certo intervalo de tempo retornando novamente para o comportamento regular.

A Intermitência é observada em fenômenos naturais e experimentos físicos, como por exemplo: experimentos com convecção [31] [32], oscilações em ferrofluidos [33], entre outros. O comportamento intermitente também pode ser observado em sistemas teóricos, como em redes de mapas acoplados [28] [34], equações de Ginzburg Landau [35] e no estudo de autômatos celulares [36].

No estudo da Intermitência do tipo liga-desliga será utilizado uma rede de mapas logísticos acoplados, com acoplamento do tipo lei de potência. O interesse deste estudo é a compreensão da maneira pela qual uma rede de mapas logísticos acoplados perde a sincronização, quando os parâmetros de acoplamento são variados.

## 3.1 Intermitência Liga-desliga

Este tipo de intermitência apresenta este nome pelo fato de se encontrar em um comportamento silencioso-desligado (*off*) e abruptamente ocorre um comportamento caótico-ligado (*on*).

Para compreender esta idéia, supõe-se que o sistema composto por  $N$  variáveis esteja no plano  $k$ -dimensional ( $k < N$ ), em um atrator caótico ou próximo dele. A evolução temporal do sistema leva a trajetória para esse plano ou próximo dele, caracterizando o estado desligado. Eventualmente, a trajetória encontra uma órbita instável e deixa o plano, ou as órbitas vizinhas deste plano, vagando por regiões caóticas do espaço de fase, assim caracterizando o comportamento ligado [37].

Pode-se imaginar que o sistema deixa o plano  $k$ -dimensional quando é perturbado pelos outros graus de liberdade do sistema, e se os outros graus de liberdade são caóticos o tempo em que o sistema fica fora ou dentro do plano não pode ser predito, a troca de comportamentos ocorre em um tempo aleatório [37].

A intermitência liga-desliga é encontrada em instabilidades de ondas de spin [38], equações diferenciais [29], inversão do campo magnético terrestre [37], entre outros [37].

### 3.1.1 Modelo de intermitência liga-desliga

Platt e colaboradores propuseram um modelo intermitente, composto por cinco equações diferenciais[29],

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad (3.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1^3 - 2x_1x_3 + x_1x_5 - \mu_{01}x_2, \quad (3.2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4, \quad (3.3)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = -x_1^3 - \nu_{01}x_1^2 + x_3x_5 - \nu_{02}x_4 \text{ e} \quad (3.4)$$

$$\frac{dx_5}{dt} = -\nu_{03}x_5 - \nu_{04}x_1^2 - \nu_{05}(x_3^2 - 1), \quad (3.5)$$

em que  $\mu_{01}$ ,  $\nu_{01}$ ,  $\nu_{02}$ ,  $\nu_{03}$ ,  $\nu_{04}$  e  $\nu_{05}$  são parâmetros de controle do sistema. Este sistema possui  $N = 5$  direções e  $k = 3$  direções formando um plano invariante. As direções  $x_1$  e  $x_2$  são as direções transversais à variedade e  $x_3$ ,  $x_4$  e  $x_5$  formam a variedade invariante (semelhante ao atrator de Lorentz). As dinâmicas das direções transversais são dadas pelas equações diferenciais (3.1) e (3.2), e as dinâmicas do conjunto invariante são dadas pelas equações (3.3), (3.4) e (3.5).

Nas figuras (3.1) estão as dinâmicas temporais da direção transversal  $x_1$ ,

com condições iniciais aleatórias para todas as direções, e dois conjuntos de valores para os parâmetros  $\nu_{01}$  e  $\nu_{04}$ .

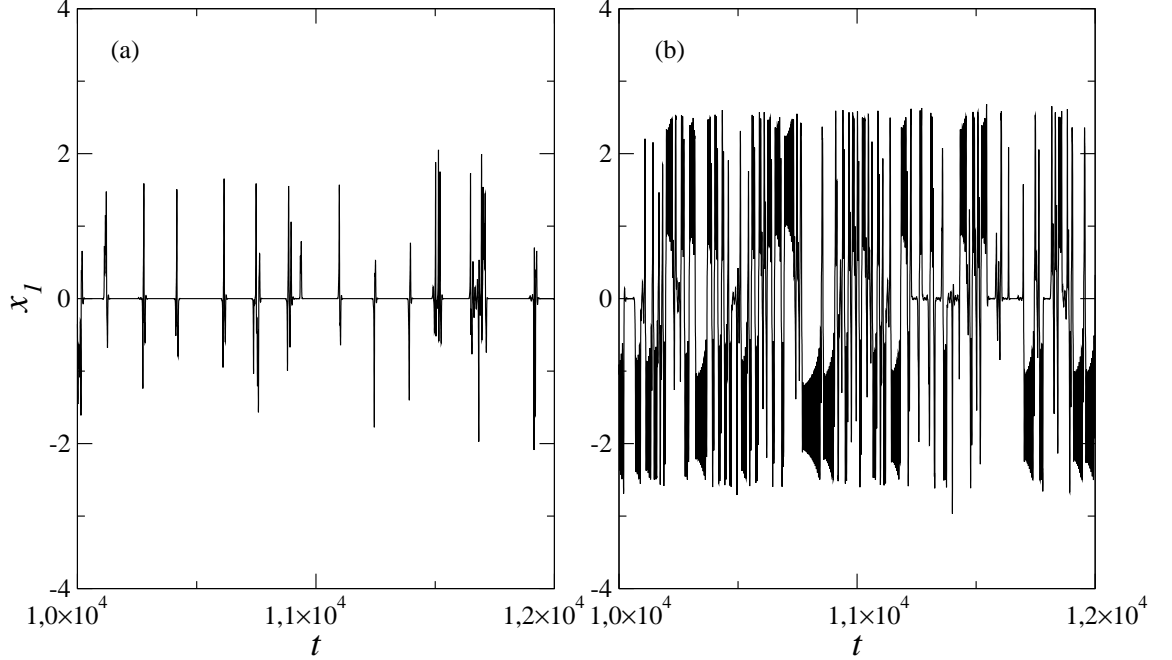


Figura 3.1:  $x_1 \times t$ , com  $\mu_{01} = 1,815$ ,  $\nu_{02} = 1,815$ ,  $\nu_{03} = 0,44$ ,  $\nu_{05} = 2,86$  e todas as condições iniciais aleatórias no intervalo  $[0, 1]$ . Em (a)  $\nu_{01} = 1$  e  $\nu_{04} = 2,86$ . (b)  $\nu_{01} = 0$  e  $\nu_{04} = 0$  [29].

Na evolução temporal de  $x_1$ , figuras (3.1), observa-se que em alguns instantes de tempo  $x_1 = 0$  e abruptamente  $x_1 \neq 0$ . Quando o valor de  $x_1$  é igual a zero, também o valor de  $x_2$  será igual a zero, e o sistema está em um estado desligado. No momento em que  $x_1 \neq 0$ , o valor é  $x_2 \neq 0$  e o sistema está em um estado ligado.

Quando o sistema encontra-se no comportamento desligado, a dinâmica das três direções  $x_3$ ,  $x_4$  e  $x_5$  encontra-se no atrator (plano invariante), semelhante ao atrator de Lorentz, e os valores  $x_1$  e  $x_2$  são nulos. Mas durante a evolução temporal do sistema as trajetórias encontram órbitas instáveis, nas quais, o valor de  $x_1 \neq 0$  e  $x_2 \neq 0$  e as direções  $x_3$ ,  $x_4$  e  $x_5$  deixam a variedade invariante e passeiam por outras regiões do espaço de fase, figuras (3.2).

Nas figuras (3.2) estão as projeções das direções  $x_3$  e  $x_5$  da variedade invariante. Com o valor inicial de  $x_1$  e  $x_2$  iguais a zero as direções  $x_3$ ,  $x_4$  e  $x_5$  permanecem na variedade invariante a "borboleta de Lorentz". Para as condições iniciais  $x_1$  e  $x_2$  diferentes de zero, a dinâmica das direções instáveis perturbam a variedade invariante, fazendo com que  $x_3$ ,  $x_4$  e  $x_5$  saiam do atrator de Lorentz para alguns instantes de tempo.

Neste modelo as direções transversais e a variedade invariante são dependentes dos parâmetros  $\nu_{01}$  e  $\nu_{04}$ , com observa-se nas figuras (3.1). Com a diminuição

dos parâmetros  $\nu_{01}$  e  $\nu_{04}$  os tempos de permanência no atrator das direções  $x_3$ ,  $x_4$  e  $x_5$  diminuem, pois o número de órbitas instáveis aumentam. Quando  $\nu_{01}$  e  $\nu_{04}$  estão próximos a um valor crítico,  $\nu_{01}^{(c)}$  e  $\nu_{04}^{(c)}$ , o número de órbitas instáveis e estáveis são aproximadamente iguais, e para  $\nu_{01}$  e  $\nu_{04}$  menores que o valor crítico o número de órbitas instáveis é maior do que das órbitas estáveis.

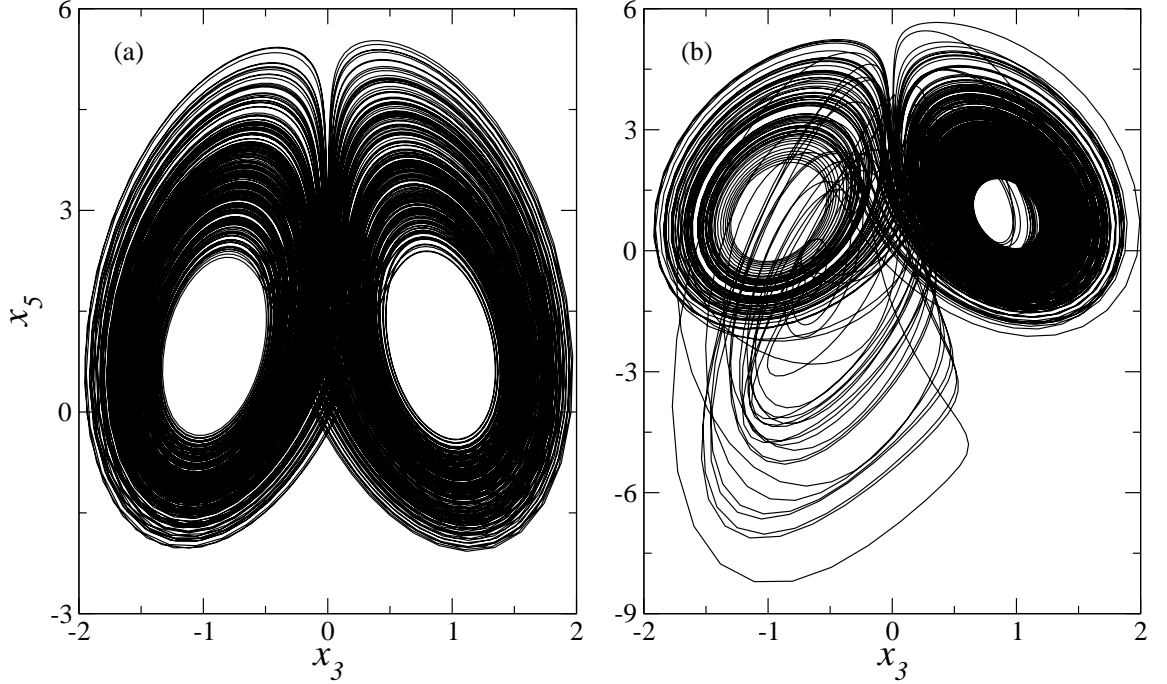


Figura 3.2:  $x_5 \times x_3$ , com  $\mu_{01} = 1,815$ ,  $\nu_{01} = 1$ ,  $\nu_{02} = 1,815$ ,  $\nu_{03} = 0,44$ ,  $\nu_{04} = 2,86$  e  $\nu_{05} = 2,86$ . (a) Os valores das condições iniciais de  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$ , e (b) os valores de  $x_1 \neq 0$  e  $x_2 \neq 0$  [29].

### 3.2 Intermittência liga-desliga em redes com acoplamento do tipo lei de potência

Para tentar compreender como a passagem de um estado sincronizado para um dessincronizado nas redes de mapas acoplados de acoplamento de alcance variado, foi estudada a perda de estabilidade transversal das órbitas através do mecanismo da intermitência liga-desliga, como uma rota da dessincronização dos mapas da rede.

Um mapa é um modelo de sistemas dinâmicos que possui variável de estado contínua e o tempo discreto. O mapa utilizado para o estudo da intermitência liga-desliga foi o mapa logístico.



### 3.2.1 Mapa logístico

O mapa logístico é um mapa não linear que apresenta comportamentos dinâmicos muito interessantes, pode ser derivado de uma equação de diferenças "logísticas", como uma tentativa de exemplificar o crescimento de uma população, no qual o termo não linear impõe uma saturação ao crescimento exponencial [39]. A função do mapa logístico é dado por:

$$x_{n+1} = f(x_n) = \mu x_n(1 - x_n). \quad (3.6)$$

Este mapa tem sido utilizado nas últimas décadas como um laboratório para o estudo de fenômenos não lineares e complexos, tanto para um mapa isolado, como para uma rede de mapas acoplados.

A variável de estado do mapa logístico está compreendida no intervalo aberto  $[0, 1[$ , os seus valores nunca excedem  $x_n < 0$  ou  $x_n \geq 1$ . Se este intervalo não é respeitado, o valor de  $x_n$  diverge [40].

O parâmetro de controle do mapa logístico (3.6),  $\mu$ , possui valores no intervalo  $[0, 4]$ , e para diferentes valores de  $\mu$  o mapa logístico pode apresentar: pontos fixos, bifurcações de período, pontos periódicos, intermitência e regimes caóticos [39].

### 3.2.2 Redes de mapas logísticos acoplados

Nas redes de mapas acoplados a interação entre os mapas se dá através do acoplamento, que pode ser: local, global, tipo lei de potência, entre outros.

No estudo da intermitência liga-desliga o acoplamento utilizado foi o tipo lei de potência ou de alcance variado. No acoplamento de alcance variado a influência entre os sítios decai com a distância que os separam, obedecendo uma lei de potência,  $j^\alpha$  [20],

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{f(x_n^{(i+j)}) + f(x_n^{(i-j)})}{j^\alpha}, \quad (3.7)$$

no qual  $f(x_n^{(i)})$  é a função que descreve o mapa isolado,  $\varepsilon$  é a intensidade do acoplamento e  $\alpha$  está relacionado com o alcance do acoplamento. Quanto maior o valor de  $\alpha$  menor será o alcance do acoplamento.

O número de sítios da rede será  $N$ , que deve ser um número ímpar, sendo utilizadas condições de contorno periódicas. O parâmetro  $N'$  é dado pela equação (2.15) e o fator de normalização  $\eta(\alpha)$  pela equação (2.16).

O acoplamento do tipo lei de potência possui dois limites, um quando  $\alpha = 0$  e o outro  $\alpha \rightarrow \infty$ . Para  $\alpha = 0$  obtém-se o acoplamento global onde cada sítio  $i$  acopla com o campo médio da rede e  $\eta(\alpha) = N - 1$ . Quando  $\alpha \rightarrow \infty$  recai no acoplamento local, assim o sítio  $i$  interage apenas com os primeiros vizinhos e  $\eta(\alpha) = 2$ .

### 3.2.3 Variedade de Sincronização

A variedade (*manifold*) de sincronização é uma variedade invariante, ou seja, uma dada órbita estável que se encontra na variedade invariante continua nela a não ser que ela seja perturbada por uma órbita instável. A variedade invariante é um conjunto que localmente tem estrutura do espaço Euclidiano e é freqüentemente encontrada como uma superfície  $m$ -dimensional imersa no espaço real de ordem  $n$ , com  $m < n$  [41] [42].

Neste capítulo a variedade de sincronização é o conjunto das órbitas estáveis, no qual, as variáveis de estado dos sítios da rede possuem o mesmo valor,  $x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = \dots = x_n^{(N)}$ , ou seja, na variedade de sincronização ocorre a sincronização completa dos sítios da rede. A rede de mapas acoplados (3.7) será composta por mapas logísticos idênticos, com  $\mu = 4$ . Para este valor do parâmetro, o mapa logístico apresenta um comportamento caótico e dependendo do valor do alcance ( $\alpha$ ) e da intensidade de acoplamento ( $\varepsilon$ ) a rede de mapas acoplados pode apresentar diferentes regimes [43]:

- Órbitas caóticas completamente sincronizadas: Todas as condições iniciais aleatórias convergem de forma exponencial para a variedade de sincronização, para qual  $x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = \dots = x_n^{(N)}$ .
- Regime transiente: Todas as condições iniciais alternam entre estados sincronizados e dessincronizados.
- Órbitas caóticas completamente não sincronizadas: Neste regime, mesmo o tempo tendendo ao infinito, os sítios da rede não sincronizam.

No estudo da sincronização surge a necessidade de diagnosticar quando o sistema está, ou não, no estado de sincronização caótica. Na literatura são descritas três formas de se diagnosticar a sincronização: através da distância à variedade de sincronização, do parâmetro de ordem de Kuramoto e do espectro dos expoentes de Lyapunov [44].

### 3.2.4 Distância à Variedade de Sincronização

A distância à variedade (*manifold*) de sincronização é um dos diagnósticos da sincronização para uma rede de  $N$  mapas acoplados. A variedade de sincronização é um plano no espaço, no qual todas as variáveis de estado possuem o mesmo valor. A distância à variedade de sincronização (que será expressa  $D_n$ ) é uma distância ortogonal ao plano  $N$ -dimensional de  $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N)}$ , no qual as variáveis de estado estão sincronizadas [45]. A expressão para a distância à variedade de sincronização

em tempo fixo  $n$  é

$$D_n = \sum_{j=1}^N (x_n^{(j)})^2 - \left( \sum_{j=1}^N x_n^{(j)} \right)^2. \quad (3.8)$$

Essa distância pode ser expressa utilizando-se a variância das variáveis de estado dos sítios da rede. Assim, a equação (3.8) pode ser expressa por  $D_n^2 = N\sigma_n^2$ , em que

$$\sigma_n^2 = \langle x^2 \rangle_n - \langle x \rangle_n^2. \quad (3.9)$$

Na figura (3.3) está a evolução temporal da distância à variedade de sincronização para uma rede  $N = 21$  mapas logísticos acoplados, com acoplamento de alcance variado, condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias,  $\alpha = 0$ ,  $\varepsilon = 0,465$  e  $\mu = 4$ .

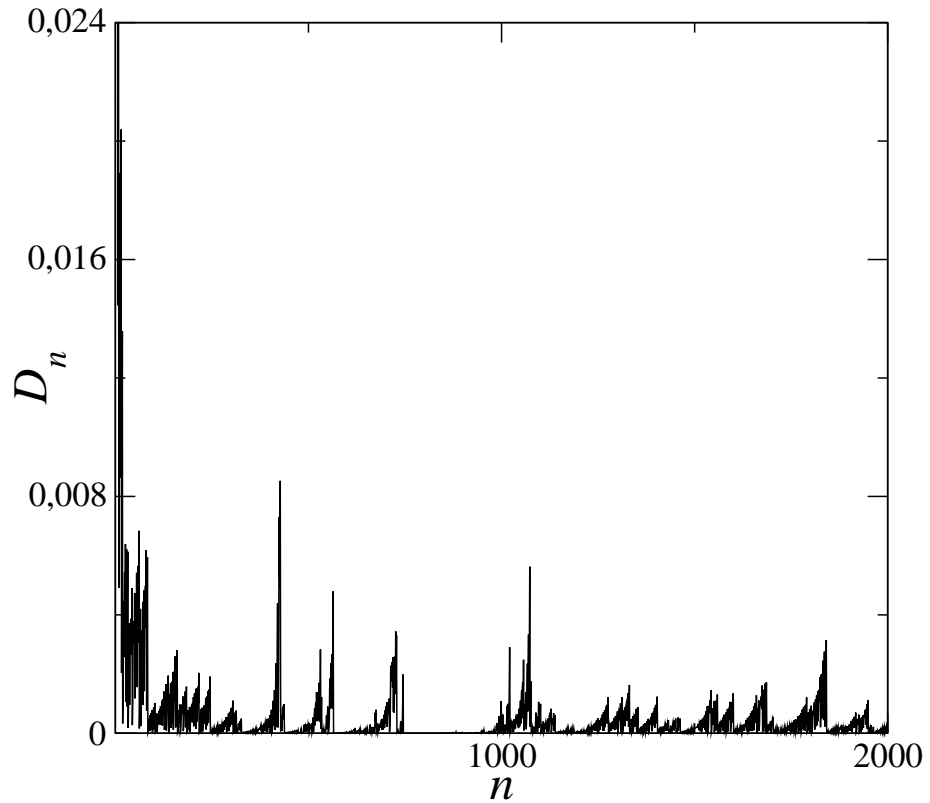


Figura 3.3: Evolução temporal da distância à variedade de sincronização, para uma rede com  $N = 21$  mapas logísticos acoplados, todos com parâmetro de controle  $\mu = 4$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\varepsilon = 0,465$ , condições iniciais aleatórias e condições de contorno periódicas.

O comportamento de  $D_n$  é proporcional ao desvio padrão dos valores das variáveis de estado dos sítios da rede, e quando o desvio padrão vai a zero a distância à variedade de sincronização é nula, ou seja, a rede está completamente sincronizada e as variáveis de estado possuem o mesmo valor. Quando as variáveis de estado

possuem valores diferentes, o desvio padrão é diferente de zero e  $D_n > 0$ .

Para os valores de  $\alpha$  e  $\varepsilon$  da figura (3.3) a rede alterna entre estados sincronizados ( $D_n = 0$ ) e estados dessincronizados ( $D_n \neq 0$ ). A passagem de um estado sincronizado para um dessincronizado ocorre de forma aleatória, como é observado na figura (3.3), e a volta para o estado sincronizado também ocorre aleatoriamente.

Tanto a equação (3.8), como a equação (3.9) são calculadas em um tempo  $n$ , caracterizando a sincronização em dado instante de tempo. Para avaliar como os parâmetro do acoplamento afetam a sincronização é necessário definir um valor médio para a distância à variedade de sincronização, para um certo valor de  $\alpha$  e  $\varepsilon$ . Assim, será feito uma média temporal da distância à variedade de sincronização, definida como,

$$\bar{d} = \frac{1}{\tau - \tau_0} \sum_{n=\tau_0}^{\tau} D_n, \quad (3.10)$$

sendo  $\tau_0$  o tempo transiente e  $\tau$  o tempo quando  $n \rightarrow \infty$ .

Através da equação (3.10) pode-se associar um certo valor de  $\bar{d}$  para cada par  $(\alpha, \varepsilon)$ . Nas figuras (3.4) encontra-se a variação do valor médio da distância em função da intensidade de acoplamento, para quatro diferentes valores de  $\alpha$ ,  $N = 21$  mapas logísticos,  $\mu = 4$ ,  $\tau_0 = 50000$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias.

O valor de  $\bar{d}$  é dependente de  $\alpha$  e  $\varepsilon$  como nota-se nas figuras (3.4), e com a diminuição do alcance do acoplamento é necessário uma intensidade de acoplamento maior para que ocorra a sincronização. Com o alcance global ( $\alpha = 0$ ), figura (3.4a), para valores  $\varepsilon \geq 0,47$  a rede apresenta a sincronização completa. Com a diminuição do alcance ( $\alpha = 0,5$ ) os valores de  $\varepsilon$  para que ocorra a sincronização são maiores ou igual a 0,62, figura (3.4b).

Para o valor de  $\alpha = 1$ , figura (3.4c), ocorre a influência mútua entre os sítios, mas a medida que aumenta a distância entre os sítios essa influência mútua vai tornando-se pequena, sendo necessário  $\varepsilon \geq 0,89$  para ocorrer a sincronização.

Quando o valor de  $\alpha = 2$ , não é mais possível a sincronização completa, como pode-se observar na figura (3.4d). Isso ocorre devido a influência dos sítios  $(j + i)$  e  $(j - i)$  no sítio  $i$  diminuírem com  $j^{-\alpha}$ . Agora, os sítios mais próximos influenciam mais intensamente no acoplamento, ocorrendo uma diminuição rápida com a distância. Para este valor de  $\alpha$  seria necessário  $\varepsilon$  maior do que um para ocorrer a sincronização.

### 3.2.5 Parâmetro de Ordem de Kuramoto

O parâmetro de ordem é um valor complexo introduzido por Kuramoto para o estudo da fase em variáveis cíclicas [46], e será utilizado como um diagnóstico da sincronização de um sistema.

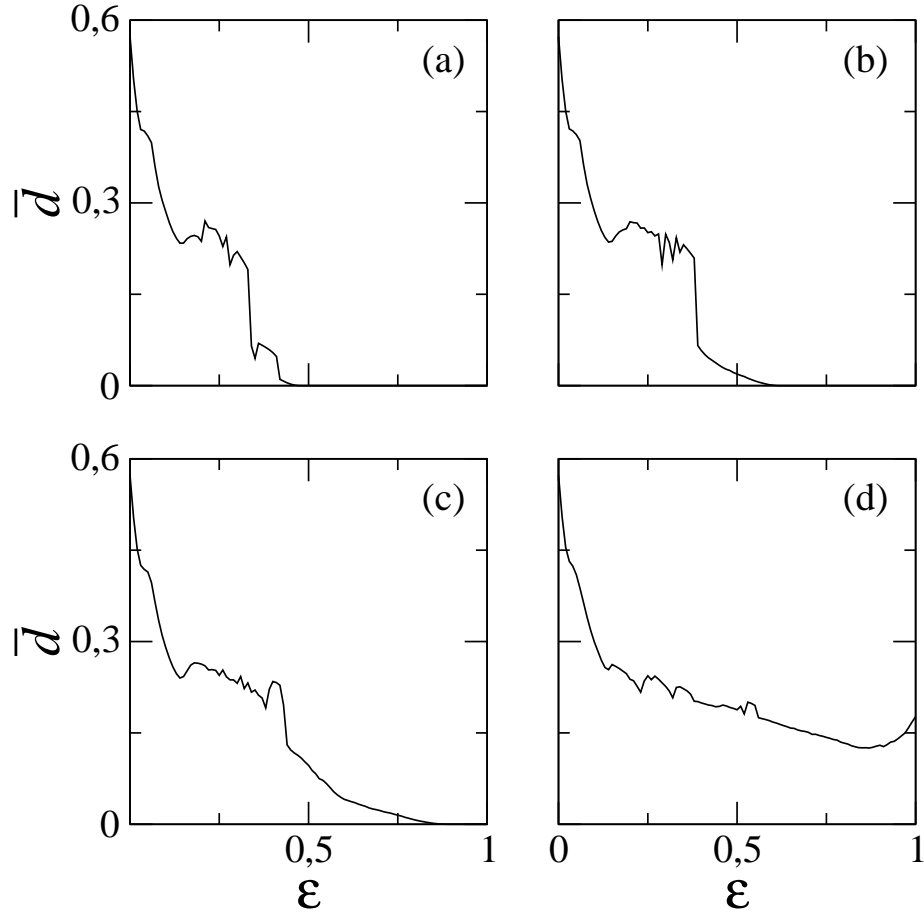


Figura 3.4: Distância média à variedade de sincronização em função da intensidade de acoplamento, para uma rede com  $N = 21$  mapas logísticos acoplados, todos com parâmetro de controle  $\mu = 4$ , condições iniciais aleatórias, condições de contorno periódicas,  $\tau_0 = 50000$  e quatro diferentes valores de  $\alpha$ . (a)  $\alpha = 0$ , (b)  $\alpha = 0,5$ , (c)  $\alpha = 1$  e (d)  $\alpha = 2$ .

A definição do parâmetro de ordem é dada por,

$$Z_n = R_n e^{i\phi_n} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i2\pi x_n^{(j)}}, \quad (3.11)$$

sendo  $R_n$  a amplitude e  $\phi_n$  o ângulo do vetor unitário em um dado tempo  $n$ , com condições de contorno periódicas [5].

A equação (3.11) pode ser modificada para uma rede de  $N$  mapas acoplados e condições de contorno periódicas,

$$R_n = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{i2\pi x_n^{(j)}} \right|, \quad (3.12)$$

trabalhando desta forma, apenas com valores reais.

O parâmetro de ordem possui dois casos limites, sendo que o primeiro ocorre quando todas as variáveis de estado possuem o mesmo valor  $x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = \dots = x_n^{(N)} = \xi$ , ou seja um estado completamente sincronizado. O módulo do somatório sobre a exponencial complexa da equação (3.12) pode ser expresso como  $|\cos(2\pi\xi) + i\text{sen}(2\pi\xi)| = N$ , assim o valor de  $R_n$  será igual a um. O outro limite ocorre quando as variáveis de estado dos sítios da rede possuem todas valores diferentes, tornando o módulo da exponencial complexa, uma média sobre todos os senos e cossenos da rede [47], como um valor menor que 1.

Na figura (3.5) está plotado  $R_n \times n$ , para uma rede de  $N = 21$  mapas acoplados, com condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias,  $\alpha = 0$  e  $\varepsilon = 0,465$ .

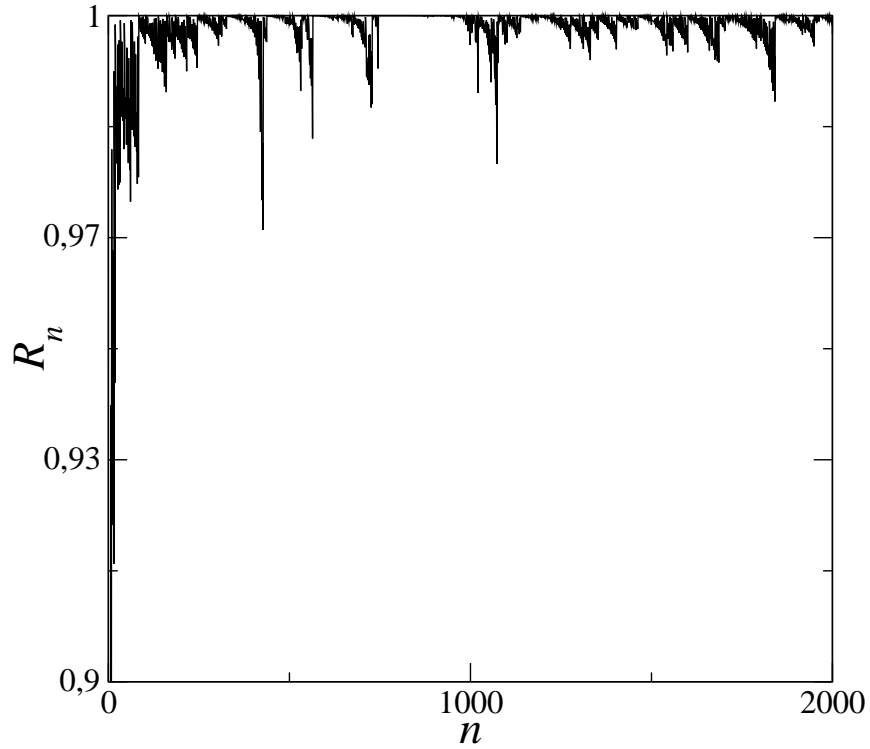


Figura 3.5: Evolução temporal do parâmetro de ordem, para uma rede  $N = 21$  mapas logísticos acoplados, todos com o parâmetro de controle  $\mu = 4$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\varepsilon = 0,465$ , condições iniciais aleatórias e condições de contorno periódicas.

Para os valores de  $\alpha$  e  $\varepsilon$  da figura (3.5) pode-se observar que a rede alterna entre estados sincronizados ( $R_n = 1$ ) e dessincronizados ( $R_n \neq 1$ ). Mas para caracterizar o estado sincronizado-dessincronizado da rede para um dado valor de  $\alpha$  e  $\varepsilon$  é necessário a utilização da média temporal do parâmetro de ordem, definido como:

$$\bar{R} = \frac{1}{\tau - \tau_0} \sum_{n=\tau_0}^{\tau} R_n, \quad (3.13)$$

sendo  $\tau$  o valor de  $n \rightarrow \infty$ .

O comportamento do parâmetro de ordem médio em função de  $\varepsilon$  para quatro diferentes valores  $\alpha$ , com  $N = 21$  mapas acoplados, condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias, estão nas figuras (3.6).

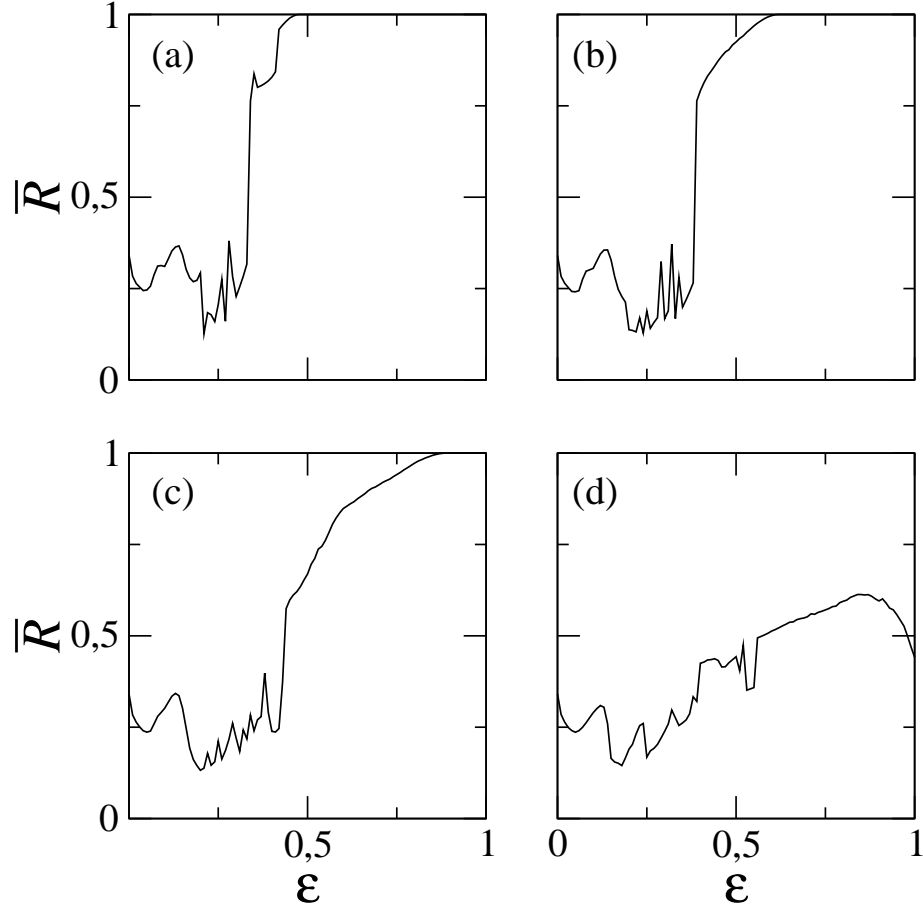


Figura 3.6: Parâmetro de ordem médio em função da intensidade de acoplamento, para uma rede  $N = 21$  mapas logísticos acoplados, todos com parâmetro de controle  $\mu = 4$ , condições iniciais aleatórias, condições de contorno periódicas,  $\tau_0 = 50000$  e quatro diferentes valores de  $\alpha$ . (a)  $\alpha = 0$ , (b)  $\alpha = 0,5$ , (c)  $\alpha = 1$  e (d)  $\alpha = 2$ .

O valor de  $\bar{R}$ , equação (3.13), depende da intensidade e do alcance do acoplamento, como observa-se nas figuras (3.6). Para o valor de  $\alpha = 0$  quando  $\varepsilon$  é pequeno,  $\bar{R}$  é próximo de zero, e para  $\varepsilon > 0,3$   $\bar{R}$  começa aumentar o seu valor até que para  $\varepsilon > 0,47$  a rede atinge o estado sincronizado, figura (3.6a). Nas figuras (3.6b) e (3.6c), nos quais os valores de  $\alpha$  são 0,5 e 1, respectivamente, as intensidades de acoplamento necessárias para que ocorra a sincronização completa da rede são 0,62 e 0,89, ou seja, com a diminuição do alcance do acoplamento a intensidade necessária para a sincronização aumenta. Quando a rede possui um alcance do acoplamento pequeno  $\alpha = 2$ , figura (3.6d), não é possível a rede alcançar a sincronização para os

valores de  $\varepsilon$  utilizados nesta tese.

Ao analisar as figuras (3.4) e (3.6) observa-se que tanto o parâmetro de ordem médio como a média da distância à variedade de sincronização fornecem a mesma informação sobre o estado sincronizado da rede, podendo ser utilizado tanto  $\bar{R}$  como  $\bar{d}$  para caracterizar a sincronização da rede.

Outra observação que pode ser retirada das figuras (3.4) e (3.6) é o resultado obtido por Anteneodo e colaboradores [44], no qual os valores de  $\bar{R}$  e  $\bar{d}$  estão relacionados,

$$(\bar{R})^2 + (\bar{d})^2 = 1, \quad (3.14)$$

para valores de  $\varepsilon$  e  $\alpha$  próximos do estado sincronizado da rede.

### 3.2.6 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov fornecem as taxas de dilatação e contração exponencial das trajetórias no espaço de fase [48]. Para uma melhor compreensão da divergência exponencial, observa-se a figura (3.7), onde duas condições iniciais separadas por infinitésimo  $\varepsilon$ ,  $x_0$  e  $x_0 + \varepsilon$ , possuem suas trajetórias separadas a uma taxa exponencial  $\lambda$  com o tempo.

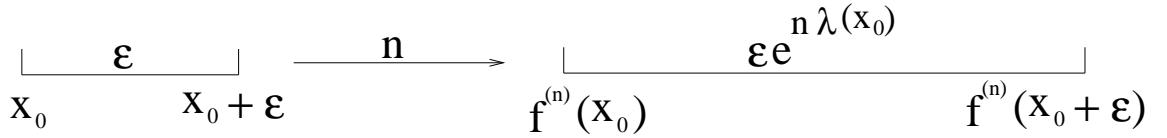


Figura 3.7: Separação exponencial de duas condições iniciais próximas, onde  $n$  é o número de iterações [49].

Assumindo que  $\mathbf{x}_n$  seja um vetor  $m$ -dimensional, e a dinâmica seja dada pelo mapa,

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n). \quad (3.15)$$

Considerando-se que um deslocamento da órbita original  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_n + \delta\mathbf{x}_n$ . A dinâmica temporal da separação entre as duas órbitas é dada por:

$$\delta\mathbf{x}_{n+1} = Df(\mathbf{x}_n)\delta\mathbf{x}_n, \quad (3.16)$$

onde  $Df(\mathbf{x}_n)$  é produto das  $n$  matrizes Jacobianas, das derivadas parciais de  $f(\mathbf{x}_n)$  em relação a cada componente do vetor  $\delta\mathbf{x}_n$ . Definindo o vetor tangente  $\mathbf{y}_n = \delta\mathbf{x}_n/|\delta\mathbf{x}_n|$  [51], obtêm-se

$$\mathbf{y}_{n+1} = Df(\mathbf{x}_n)\mathbf{y}_n. \quad (3.17)$$

A evolução temporal do vetor tangente depende da órbita do vetor  $\mathbf{x}_n$ , determinada pela condição inicial  $\mathbf{x}_0$  e da orientação de  $\mathbf{y}_0$ . Como o interesse está



na magnitude entre do aumento ou da diminuição da separação entre as órbitas durante a evolução temporal do mapa, fazendo  $|\mathbf{y}_0 \rightarrow \mathbf{0}|$  definem-se os expoentes de Lyapunov a tempo infinito [51], como

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, n), \quad (3.18)$$

no qual,

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, n) = \frac{1}{n} \ln |\mathbf{y}_n|, \quad (3.19)$$

são os expoentes de Lyapunov a tempo finito, utilizados para caracterizar a presença de instabilidade no espaço de fase do sistema.

### Espectro de Lyapunov

Para um vetor ou um mapa no espaço  $\mathbf{R}^m$ , cada órbita possui  $m$  expoentes de Lyapunov, em que cada expoente de Lyapunov mede a razão de separação (ou contração) das órbitas, em relação às  $m$  direções ortogonais [39].

Em uma rede de  $N$  mapas unidimensionais acoplados, o sistema apresenta contrações ou expansões em cada uma das  $N$  direções da rede, sendo associado a cada direção um expoente de Lyapunov. O conjunto do  $N$  expoentes de Lyapunov ordenados  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$  formam o chamado "espectro de Lyapunov" da rede. O expoente de Lyapunov a tempo finito de cada direção ( $i$ ) do mapa  $N$ -dimensional é dada por

$$\lambda^{(i)} = \frac{1}{n} \ln |\mathbf{y}_n^{(i)}| = \frac{1}{n} \ln |Df(\mathbf{x}_0^{(i)}) \cdot \mathbf{y}_0^{(i)}|. \quad (3.20)$$

Quando  $n \rightarrow \infty$  e  $|\mathbf{y}_0| \rightarrow 0$ , obtêm-se o expoente de Lyapunov a tempo infinito da direção  $i$

$$\lambda^{(i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |Df(\mathbf{x}_0^{(i)}) \cdot \mathbf{y}_0^{(i)}|. \quad (3.21)$$

## 3.3 Regimes da Rede de Mapas Logísticos Acoplados

Um dos interesses desta tese foi compreender como ocorria a perda de sincronização na rede de mapas logísticos acoplados, com a variação dos valores de  $\varepsilon$  e  $\alpha$ . A variação de  $\varepsilon$  e  $\alpha$  faz surgir três regiões com comportamentos diferentes, como podem ser observados na figura (3.8).

A figura (3.8) apresenta um rede com  $N = 21$  mapas logísticos acoplados, com acoplamento de alcance variado,  $\mu = 4$ , condições de contorno periódicas e

condições iniciais aleatórias, e duas curvas [5]:  $\varepsilon_c(\alpha) \times \alpha$  dada pela relação

$$\varepsilon_c = \frac{1}{1,75 - 0,754\alpha}, \quad (3.22)$$

e a curva  $\varepsilon^*(\alpha) \times \alpha$

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2,14 - 0,995\alpha}. \quad (3.23)$$

Estas duas curvas delimitam três regiões distintas quanto à sincronização e ao tempo necessário para obtenção do estado de sincronização completa da rede, para um dado valor de  $\alpha$  e  $\varepsilon$  [43]:

1. Órbitas caóticas completamente sincronizadas;
2. Regime transiente e;
3. Órbitas caóticas completamente não sincronizadas.

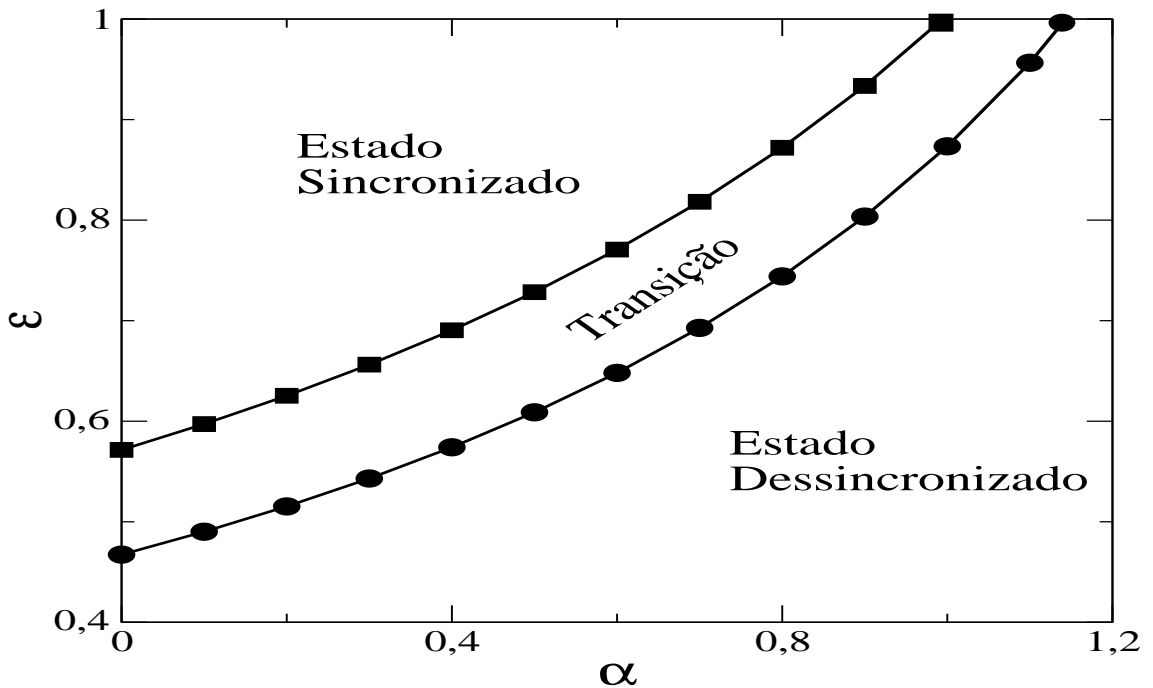


Figura 3.8:  $\varepsilon \times \alpha$ , podendo observar os três estados possíveis para os diferentes valores de  $\alpha$  e  $\varepsilon$ : estado sincronizado, estado de transição e estado dessincronizado [5].

A curva  $\varepsilon_c(\alpha) \times \alpha$  apresentada na figura (3.8) foi obtida através do parâmetro de ordem [5], e delimita duas regiões. A primeira região encontra-se à esquerda da curva é a região de sincronização completa, em que as condições iniciais convergem

exponencialmente para a variedade de sincronização. As evoluções temporais de  $R_n$  e  $D_n$ , desta região, encontram-se nas figuras (3.9), para uma rede de  $N = 21$  mapas logísticos acoplados, com  $\varepsilon = 0,55$  e  $\alpha = 0$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias.

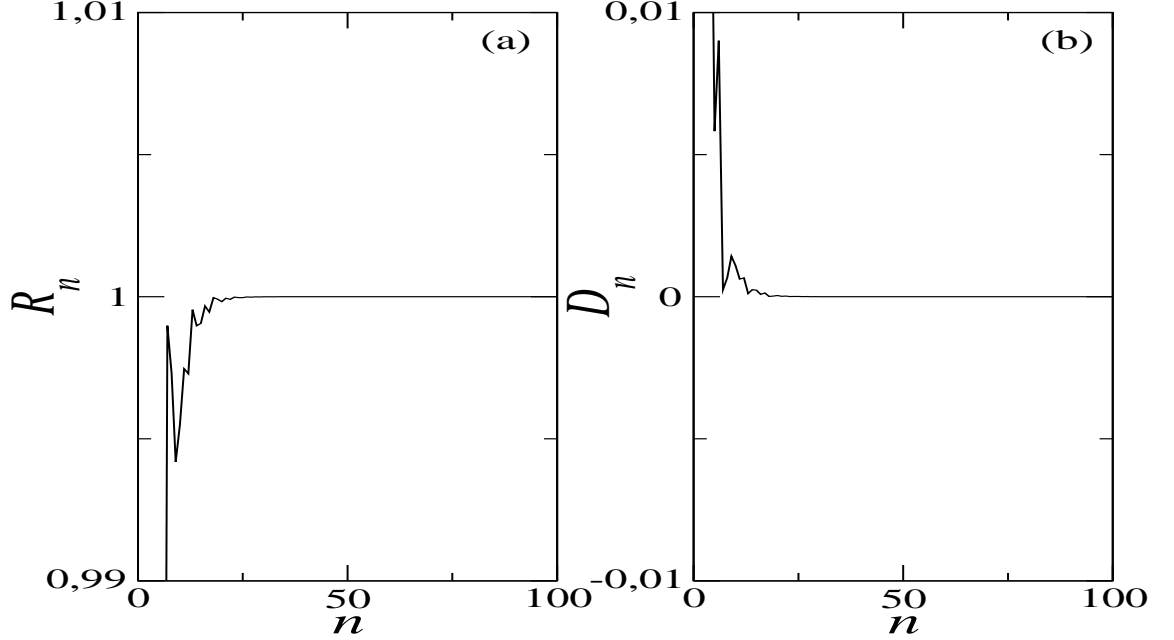


Figura 3.9: Rede de  $N = 21$  mapas logísticos acoplados,  $\mu = 4$ , condições de contorno periódicas,  $\alpha = 0$  e  $\varepsilon = 0,55$ . (a) Evolução temporal do parâmetro de ordem e (b) evolução temporal da distância a variedade de sincronização.

O valor de  $R_n \rightarrow 1$ , figura (3.9a), e  $D_n \rightarrow 0$  ocorre de forma muito rápida, sendo que em poucas iterações a rede alcança o estado sincronizado. Para os valores de  $\varepsilon$  e  $\alpha$  a rede de mapas atinge o estado sincronizado e não sai mais deste estado. O cálculo do tempo mínimo de sincronização para esta região pode ser obtido através do maior expoente de Lyapunov da rede.

O tempo de sincronização da rede pode ser obtido através dos expoentes de Lyapunov é positivo. Assumindo que os sítios da rede possuem um pequeno desvio do valor médio [50],

$$\Delta_n^{(x)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |x_n^{(j)} - \bar{x}_n|, \quad (3.24)$$

no qual  $\bar{x}_n$  é o valor médio das variáveis de estado em um dado instante de tempo  $n$ . A evolução temporal  $\Delta_n^{(x)}$  será,

$$\Delta_n^{(x)} = \frac{\Delta_0^{(x)}}{N-1} \left( e^{\lambda^{(1)}n} + e^{\lambda^{(2)}n} + \dots + e^{\lambda^{(N)}n} \right), \quad (3.25)$$

em  $\Delta_0^{(x)}$  é desvio das variáveis de estado dos sítios em relação ao valor médio [50].

Como a rede está na região de sincronização, apenas o maior expoente con-

tribui na evolução temporal de  $\Delta_n^{(x)}$ , assim a expressão (3.25), pode ser aproximada por,

$$\Delta_n^{(x)} = \frac{\Delta_0^{(x)} e^{\lambda^{(1)} n}}{N - 1}. \quad (3.26)$$

Isolando  $n$  da equação (3.26) obtém-se o tempo mínimo para a sincronização da rede [50],

$$n_{\min} = \frac{1}{\lambda^{(1)}} \left( \ln(N - 1) + \ln(\Delta_n^{(x)}) - \ln(\Delta_0^{(x)}) \right). \quad (3.27)$$

A segunda região da figura (3.8), região entre as curvas  $\varepsilon_c(\alpha) \times \alpha$  e  $\varepsilon^*(\alpha) \times \alpha$ , é denominada região transiente. Uma rede de mapas acoplados no estado transiente apresenta a alternância entre estados sincronizados e dessincronizados, sendo que a medida que os valores de  $\varepsilon$  e  $\alpha$  aproximam-se da curva  $\varepsilon^*(\alpha) \times \alpha$  os estouros intermitentes ocorrem com mais frequência[5].

A evolução temporal de  $R_n$  e  $D_n$  para uma rede com  $N = 21$  mapas logísticos acoplados, condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias, com os valores de  $\alpha = 0,67$  e  $\varepsilon = 0,64$ , região de transição, podem ser observados nas figuras (3.10). Na figura (3.10a) o parâmetro de ordem da rede possui intervalos de tempo com valor igual a um, indicando a sincronização completa, que são interrompidos por estouros intermitentes com  $R_n \neq 1$ , estados dessincronizados. O mesmo comportamento é observado para a distância à variedade de sincronização, figura (3.10b).

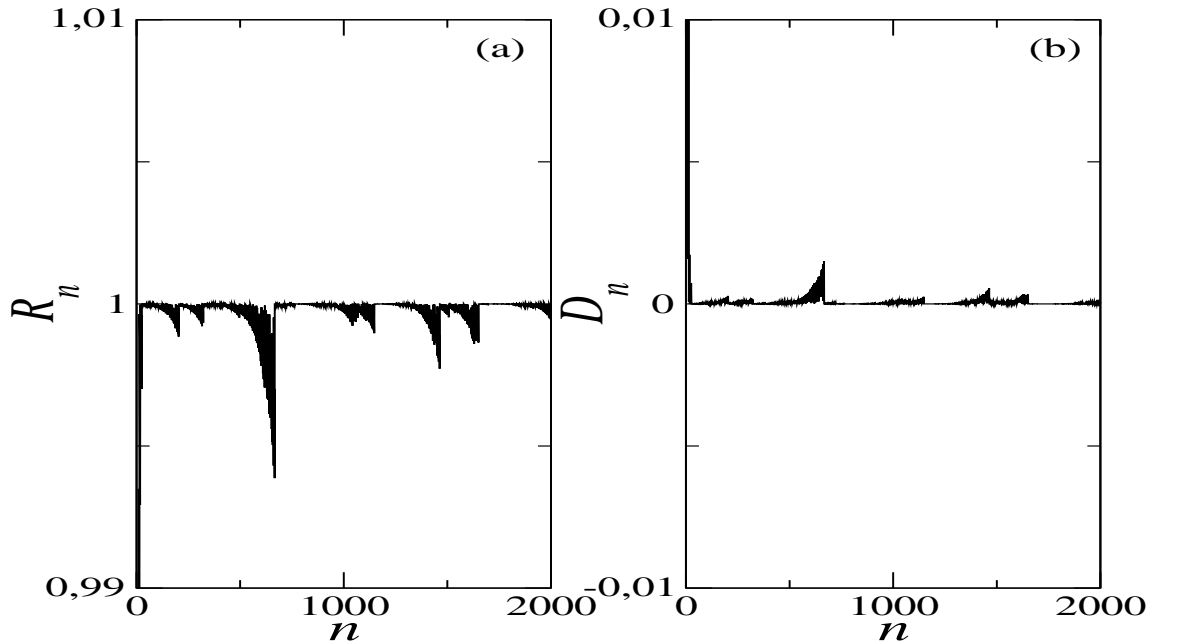


Figura 3.10: Rede de  $N = 21$  mapas logísticos acoplados,  $\mu = 4$ , condições de contorno periódicas,  $\alpha = 0,64$  e  $\varepsilon = 0,67$ . (a) Evolução temporal do parâmetro de ordem e (b) evolução temporal da distância a variedade de sincronização.

A terceira região presente na figura (3.8) é a região à direita da curva

$\varepsilon^*(\alpha) \times \alpha$ , sendo que, para os valores de  $\varepsilon$  e  $\alpha$  desta região, a rede nunca vai alcançar o estado de sincronização completa.

A evolução temporal do parâmetro de ordem e da distância à variedade de sincronização podem ser observados na figuras (3.11a) e (3.11b), respectivamente, para uma rede  $N = 21$  mapas acoplados,  $\varepsilon = 0,9$  e  $\alpha = 1,25$ . Para estes valores de  $\alpha$  e  $\varepsilon$  as órbitas caóticas se aproximam de um valor sincronizado e são repelidas por órbitas instáveis imersas na variedade de sincronização.

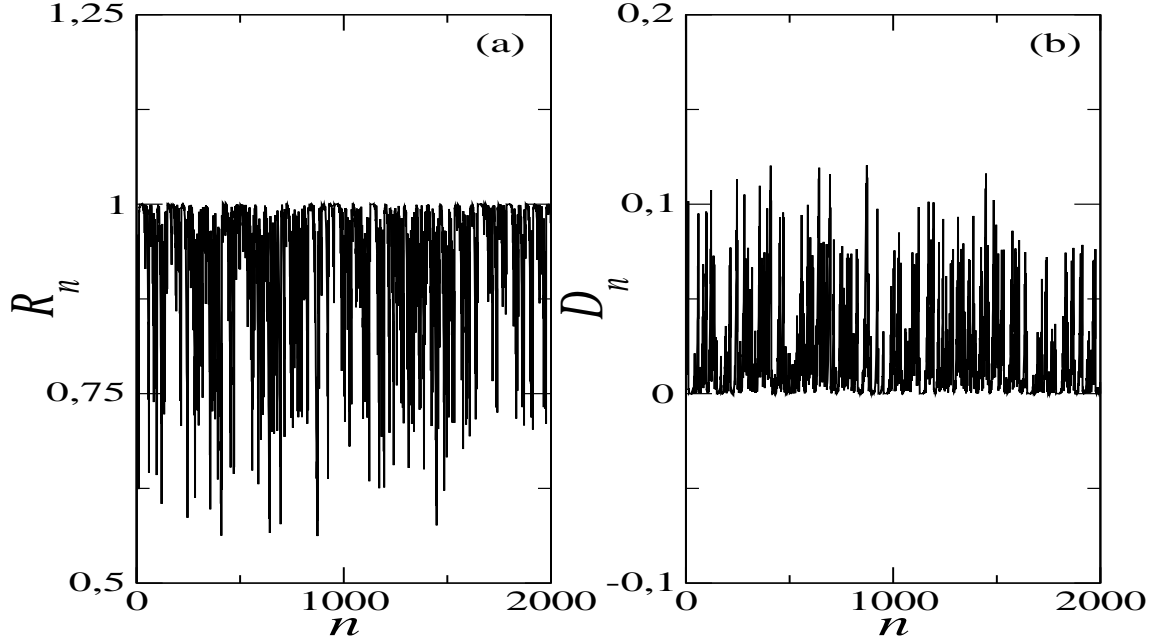


Figura 3.11: Rede de  $N = 21$  mapas logísticos acoplados,  $\mu = 4$ , condições de contorno periódicas,  $\alpha = 1,25$  e  $\varepsilon = 0,9$ . (a) Evolução temporal do parâmetro de ordem e (b) evolução temporal da distância à variedade de sincronização.

Como o interesse está no estudo da perda de sincronização da rede, quando ocorre a variação  $\alpha$  e  $\varepsilon$ , o estudo vai se concentrar na curva  $\varepsilon^*(\alpha) \times \alpha$ . Até aqui foi analisado apenas para um tamanho da rede,  $N = 21$  mapas, mas o que ocorre com a curva quando  $N$  é aumentado?

Para responder a esta pergunta deve-se olhar a figura (3.12a), na qual está plotado a curva  $\varepsilon^*(\alpha) \times \alpha$  para cinco diferentes valores de  $N$ . As curvas da intensidade de acoplamento *versus* o alcance do acoplamento foram obtidos através da seguinte expressão [52]

$$\varepsilon^* = \frac{1 - e^{\lambda_u}}{1 - \frac{2}{\eta(\alpha)} \sum_{m=1}^{N'} \frac{\cos(\frac{2\pi m}{N})}{m^\alpha}} \quad (3.28)$$

e

$$\varepsilon^{*'} = \frac{1 + e^{\lambda_u}}{1 - \frac{2}{\eta(\alpha)} \sum_{m=1}^{N'} \frac{\cos(\frac{2\pi m(N-1)}{N})}{m^\alpha}} \quad (3.29)$$

A expressão (3.28) é a curva inferior da figura (3.12a) para um dado valor de  $N$ , já a expressão (3.29) é a curva superior. A sincronização do sistema ocorre para os valores  $\varepsilon^* < \varepsilon < \varepsilon'$ . O valor de  $\varepsilon^*$  em função do número de sítios para os valores de  $\alpha = 0, 0,5$  e  $0,6$ , encontra-se na figura (3.12b). Através da figura (3.12a) observa-se que com o aumento do tamanho da rede para um mesmo alcance é necessário uma intensidade maior do acoplamento, para que ocorra a sincronização. Por exemplo: para um valor de  $\alpha = 1,5$  e uma rede com  $N = 5$  mapas a sincronização ocorre para  $\varepsilon \approx 0,5$ .

O valor de  $\varepsilon^*$  muda conforme o tamanho da rede, figura (3.12b). Para um alcance global,  $\alpha = 0$ , o valor de  $\varepsilon^*$  é aproximadamente  $0,5$ , sendo a influência do tamanho da rede muito pequena. Quando o valor de  $\alpha$  é igual a  $0,5$  ou  $0,6$ , o número de sítios da rede começam a influenciar, como pode ser observado na figura (3.12b).

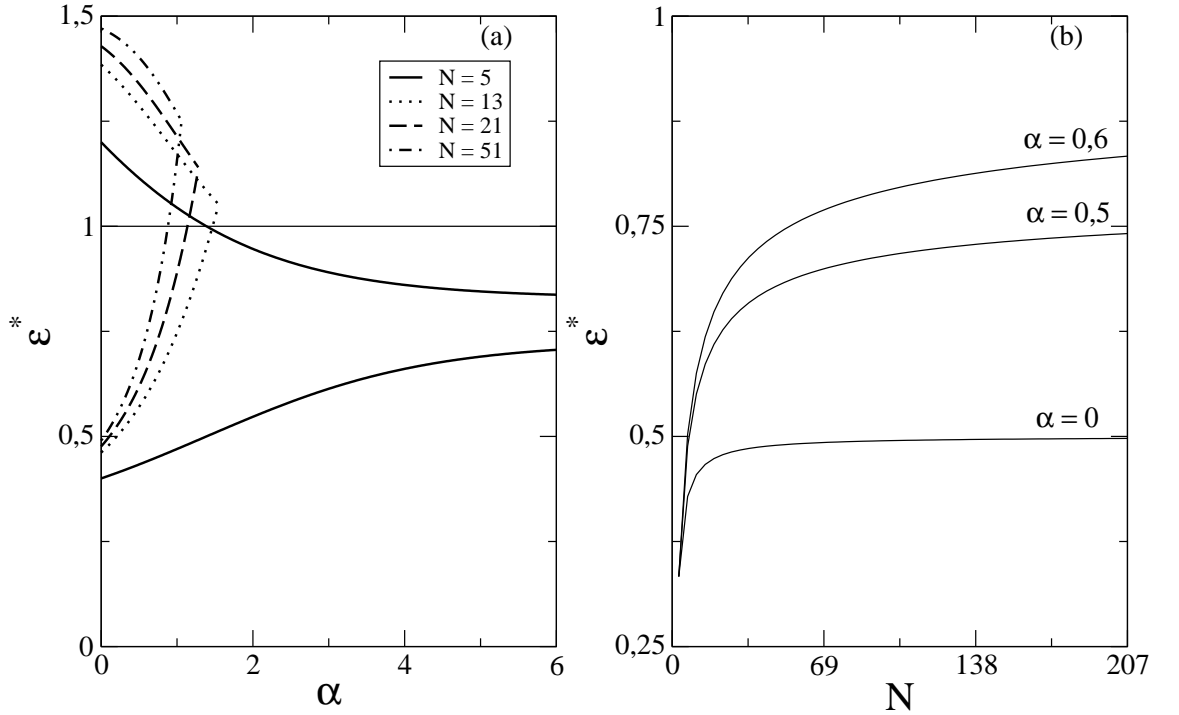


Figura 3.12: Rede de mapas logísticos acoplados,  $\mu = 4$  e condições de contorno periódicas. (a)  $\varepsilon^*(\alpha) \times \alpha$  e (b)  $\varepsilon^* \times N$  para  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 0,6$ .

### 3.4 Intermitência liga-desliga para $\varepsilon = 1$ .

O primeiro estudo sobre intermitência liga-desliga ocorreu próximo ao valor de  $\varepsilon = \varepsilon^* = 1$ . O valor de  $\alpha^*$  depende do tamanho da rede, como pode ser ob-

servado na figura (3.12a). A intermitência liga-desliga ocorre quando a variedade de sincronização perde a estabilidade,  $R_n < 1$  ou  $D_n > 0$ , retornando novamente para a variedade de sincronização após um certo intervalo de tempo. Utilizando a alternância de tempos, nos quais a rede permanece na variedade de sincronização e fora dela, será analisada a distribuição dos tempos entre os estouros caóticos, para caracterizar a perda da sincronização na rede.

Nas figuras (3.13) está o histograma dos tempos dos tempos entre os estouros caóticos, para uma rede de  $N = 21$  mapas logísticos acoplados,  $\alpha = \alpha^* + \delta\alpha = 1,147$ ,  $\epsilon = \epsilon^* = 1$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias.

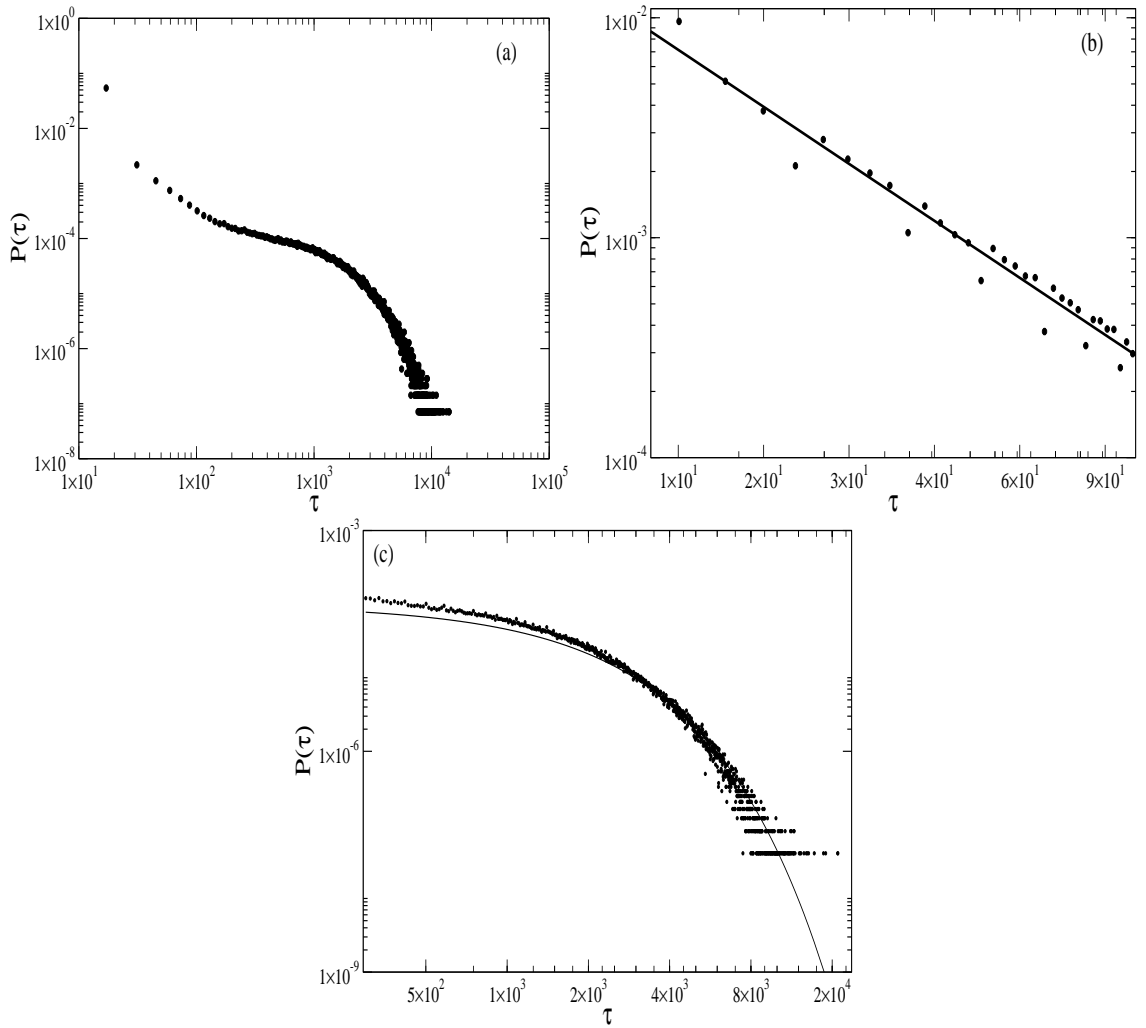


Figura 3.13: Histograma da distribuição dos tempos entre os estouros caóticos, para uma rede de mapas logísticos acoplados,  $\mu = 4$ ,  $N = 21$ ,  $\epsilon = \epsilon^* = 1$  e  $\alpha = \alpha^* + \delta\alpha = 1,147$ . (a) Histograma como todos os intervalos de tempo, onde a rede de mapas está sincronizada, (b) Histograma para os pequenos intervalos de tempo e sincronização e (c) histogramas para os longos intervalos de tempo de sincronização.

A distribuição dos tempos ( $\tau$ ) é a união de duas curvas, figura (3.13a). Quando os tempos de sincronização são pequenos, a distribuição obedece uma lei de potência, e para tempos grandes obedece uma distribuição exponencial.

Para  $\tau$  pequenos a distribuição é dada por:

$$P(\tau) = P_0\tau^\omega, \quad (3.30)$$

que pode ser observado na figura (3.13b). Os valores da distribuição tipo lei de potência são  $\omega = -1,47 \pm 0,05$  e  $P_0 = 0,2565$ . o valor do expoente  $\omega \approx -3/2$  caracteriza a perda de sincronização, ocorre via um mecanismo de intermitência liga-desliga, pois o expoente  $-3/2$  é uma característica universal deste tipo de intermitência [7].

A fração dos  $\tau$  para permanência da rede no estado sincronizado por longos períodos de tempo, para estes valores de  $\alpha$  e  $\varepsilon$ , são pequenas como são vistos na figura (3.13c). A distribuição exponencial dos tempos  $\tau$  é

$$P(\tau) = P'_0 e^{\omega'\tau}, \quad (3.31)$$

sendo  $\omega' = (74,5 \pm 0,6) \times 10^{-5}$  e  $P'_0 = 9,5 \times 10^{-5}$ .

Como a perda da sincronização ocorre via intermitência liga-desliga, a transição de dessincronizado-sincronizado ocorre mediante uma bifurcação instável-instável na variedade de sincronização [5], ocorrendo mudanças na variedade de sincronização quando a variedade torna-se transversalmente instável [7]. A existência das duas escalas na distribuição dos tempos entre estouros caóticos são indicativos da presença de ruído no cenário da intermitência liga-desliga, assim os estouros caóticos em um local da rede aparecem devido aos *kicks* aleatórios das outras partes, transmitidos pelo acoplamento [5].

Até agora foram analisados apenas os tempos entre os estouros caóticos do sistema, mas o que ocorre com o espectro dos expoentes de Lyapunov para os valores de  $\alpha = 1,147$  e  $\varepsilon = 1$ ? Para estes valores dos parâmetros de acoplamento a rede possui sempre um expoente de Lyapunov positivo, podendo ocorrer ou não um segundo expoente positivo, os demais expoentes são todos negativos. Para observar o segundo expoente deve-se olhar a figura (3.14), onde está a distribuição do segundo maior expoente de Lyapunov a tempo finito, para uma rede de  $N = 21$  mapas, condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias.

A distribuição dos Lyapunov está entre o intervalo  $-0,2$  e  $0,2$  com um valor médio positivo e próximo a zero, devido ao fato da rede estar ou não na variedade de sincronização.

Quando a rede está na variedade de sincronização, o espectro dos Lyapunov possui apenas um expoente positivo e os outros  $N - 1$  expoentes negativos, característica da sincronização caótica. Quando a rede deixa a variedade de sincronização o segundo maior expoente torna-se positivo, ou seja, perda da estabilidade transversal.



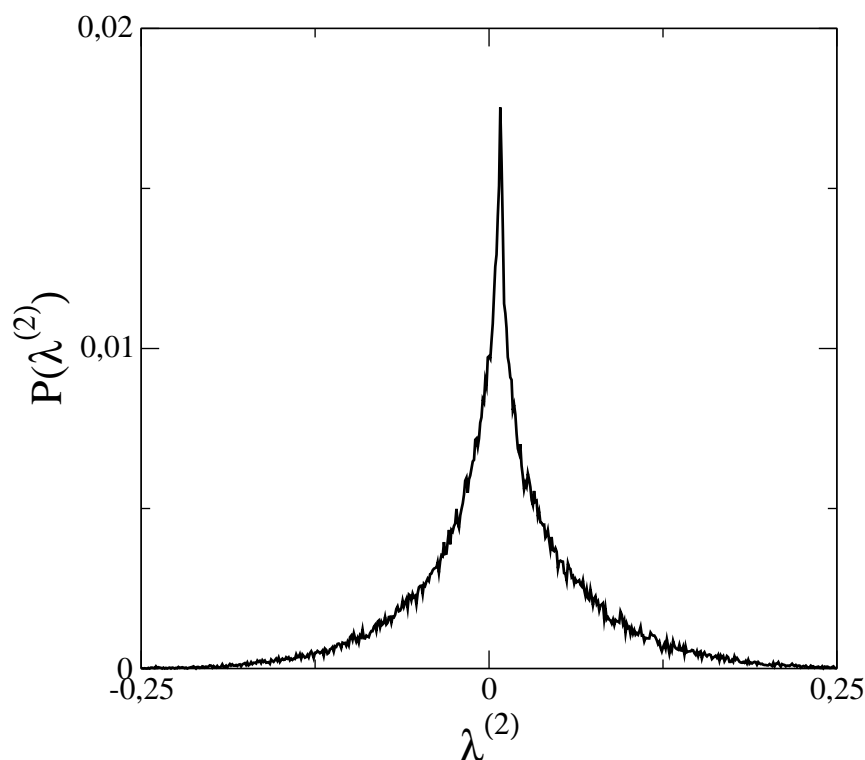


Figura 3.14: Histograma da distribuição do segundo expoente de Lyapunov, para uma rede de mapas logísticos acoplados,  $\mu = 4$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\alpha = 1,147$  e condições de contorno periódicas.

### 3.5 Intermitência liga-desliga para $\varepsilon \neq 1$ .

Para valores de  $\varepsilon = \varepsilon^* = 1$  e  $\alpha = \alpha^* = 1,147$  a rede apresenta alternância entre estados sincronizados e dessincronizados, um comportamento de intermitência liga-desliga, com uma distribuição dos tempos entre os estouros caóticos obedecendo uma lei de potência para  $\tau$  pequenos e uma cauda exponencial para  $\tau$  grandes. Outra característica é o valor médio do segundo expoente de Lyapunov aproximadamente zero.

Agora para outros valores de  $\varepsilon = \varepsilon^*$  a rede de mapas acoplados continua a apresentar um comportamento, onde ocorre a alternância entre intervalos de tempo na variedade de sincronização e fora dela. As distribuições dos tempos  $\tau$  para cinco diferentes valores do conjunto  $(\varepsilon, \alpha)$ , escolhidos próximo a curva  $\varepsilon^* \times \alpha$  da figura (3.8), podem ser observados nas figuras (3.15). Nestas figuras  $N = 21$ ,  $\mu = 4$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias. Nas figuras (3.15) a distribuição dos platôs de sincronização obedecem uma lei de potência para pequenos  $\tau$ , semelhante a equação (3.30), e uma cauda exponencial para grandes valores de  $\tau$ , equação (3.31). Na tabela (3.1) encontra-se o ajuste da equação (3.30), os valores

dos tempos médios de sincronização e o ajuste da equação (3.31) para os valores de  $\alpha$  e  $\varepsilon$  das figuras (3.15).

Tabela 3.1: Parâmetros de ajuste tipo lei de potência e exponencial, equações (3.30) e (3.31), respectivamente, para os valores de  $\varepsilon$  e  $\alpha$  da figura (3.15).

$\varepsilon$	$\alpha$	$P_0$	$w$	$\langle \tau \rangle$	$P'_0$	$w' \times 10^{-4}$
0,467290	0,00128	0,1517	$-1,09 \pm 0,01$	24	0,0037	$-14,15 \pm 0,014$
0,528751	0,25128	0,0627	$-1,00 \pm 0,02$	44	0,0006	$-41,88 \pm 0,491$
0,608828	0,50128	0,0939	$-1,07 \pm 0,02$	34	0,0004	$-50,64 \pm 1,322$
0,717489	0,75128	0,1328	$-1,12 \pm 0,03$	24	0,0015	$-98,11 \pm 1,606$
0,872620	1,00128	0,1115	$-1,09 \pm 0,03$	27	0,0010	$-79,09 \pm 1,670$

Uma observação que pode ser feita das redes das figuras (3.15) é que não ocorre a intermitência liga-desliga, pois o valor de  $\omega \neq -3/2$ . Apesar de não ocorrer a intermitência liga-desliga a distribuição dos tempos apresentam as duas escalas, caracterizando uma transição ruidosa do estado sincronizado para o estado dessincronizado nas regiões próximas à curva  $\varepsilon^*(\alpha) \times \alpha$ .

Foi efetuada a análise da distribuição do segundo maior expoente de Lyapunov a tempo finito para os cinco valores do conjunto  $\varepsilon$  e  $\alpha$ , que podem ser observados na figura (3.16), para redes com  $N = 21$ ,  $\mu = 4$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias.

Observa-se nas figuras (3.16) que o segundo maior expoente médio possui um valor diferente de zero, justificando valores pequenos do tempo de sincronização, pois quando  $\lambda_2 > 0$  a rede está dessincronizada.

Depois da análise da distribuição dos platôs de sincronização e da distribuição do segundo maior expoente de Lyapunov da rede, pode-se afirmar que a intermitência liga-desliga ocorre somente para valores de  $\varepsilon = 1$  e  $\alpha = 1,147$  não ocorrendo para os demais valores.

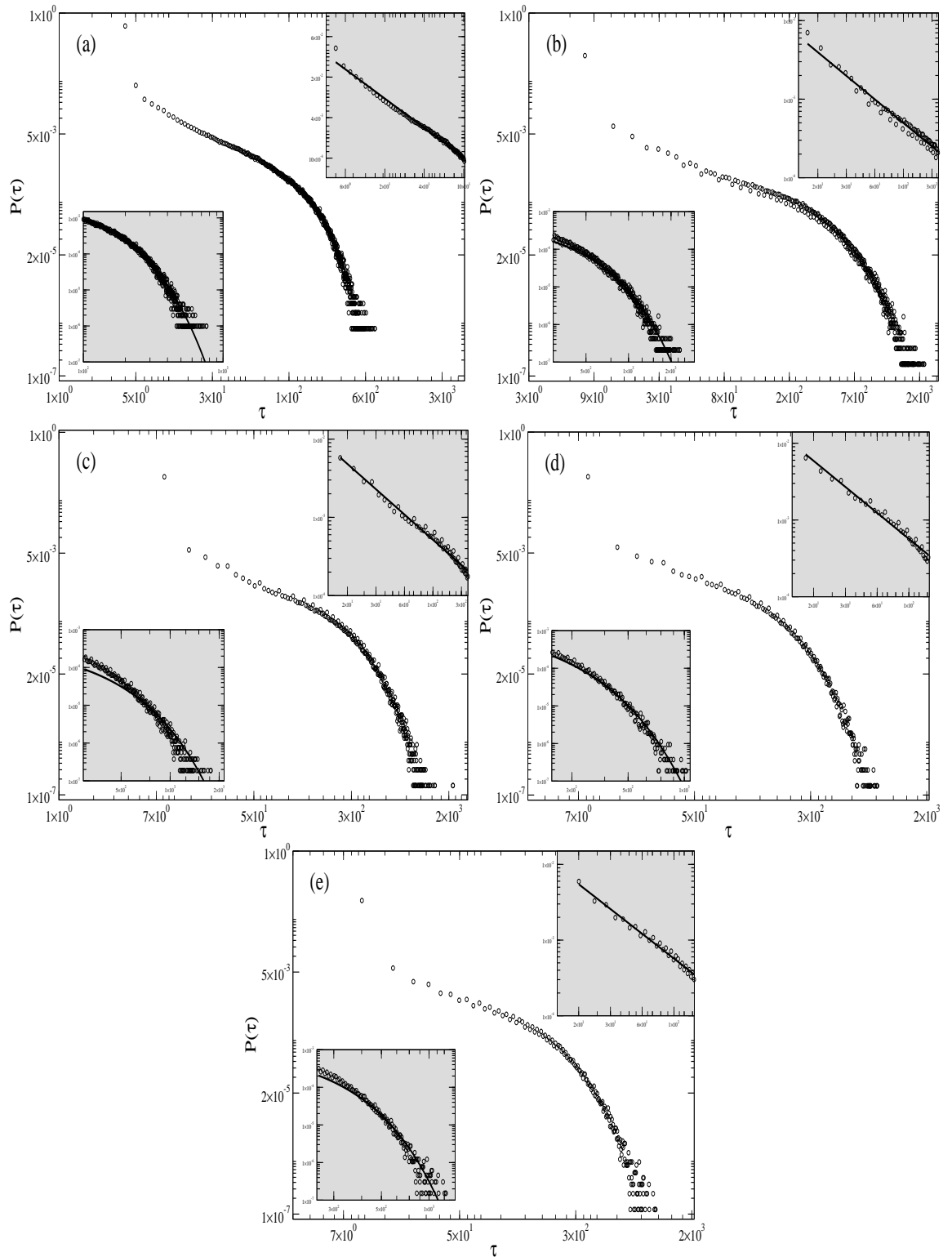


Figura 3.15: Histogramas das distribuições dos tempos entre os estouros caóticos, para uma rede de mapas logísticos acoplados,  $\mu = 4$  e  $N = 21$ . (a)  $\epsilon = 0,467290$  e  $\alpha = 0,00128$ , (b)  $\epsilon = 0,528751$  e  $\alpha = 0,25128$ , (c)  $\epsilon = 0,608828$  e  $\alpha = 0,50128$ , (d)  $\epsilon = 0,717489$  e  $\alpha = 0,75128$  e (e)  $\epsilon = 0,872262$  e  $\alpha = 1,00128$ .

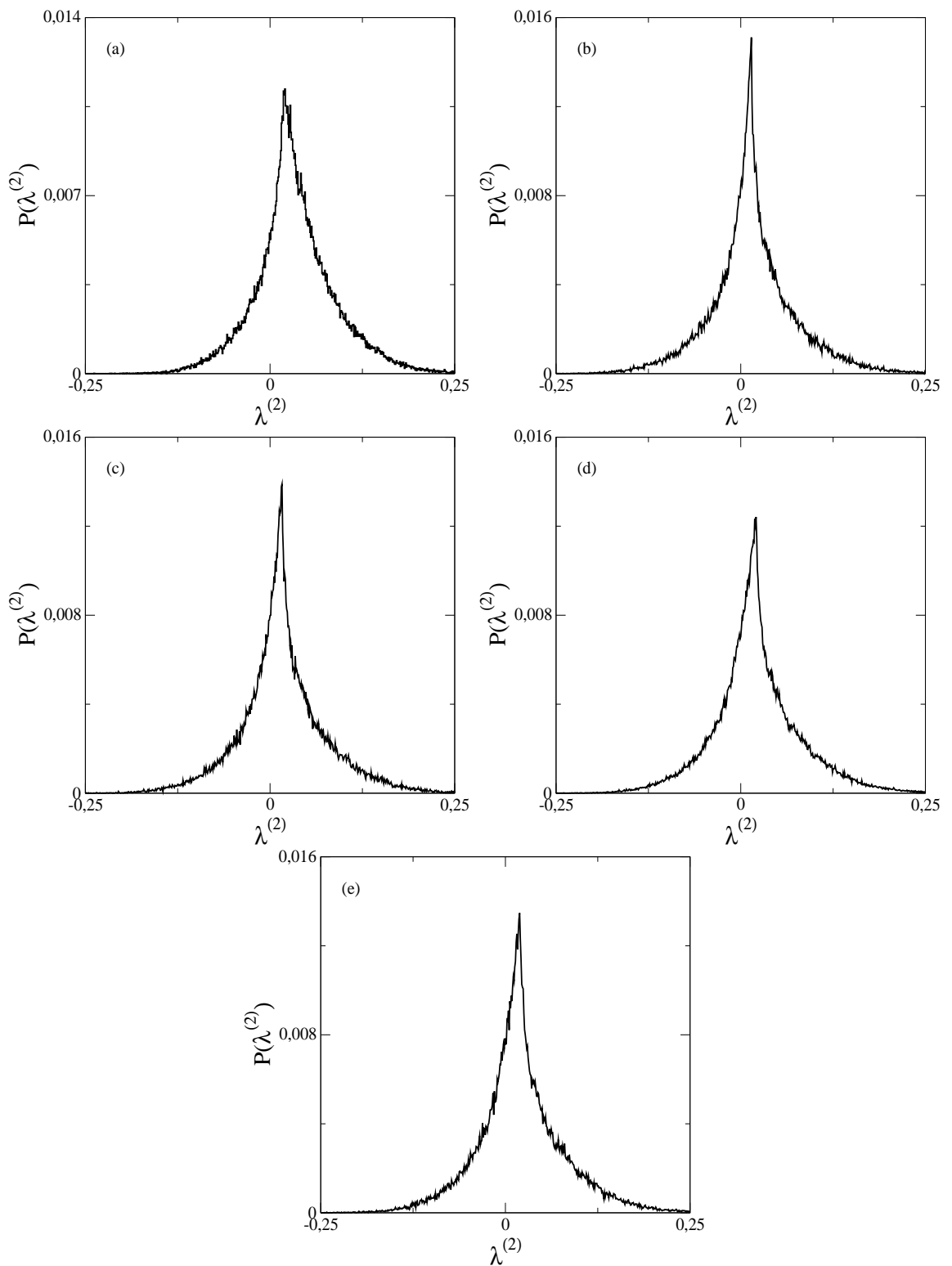


Figura 3.16: histogramas das distribuições do segundo expoente de Lyapunov, para uma rede de mapas logísticos acoplados,  $\mu = 4$  e  $N = 21$ . (a)  $\varepsilon = 0,467290$  e  $\alpha = 0,00128$ , (b)  $\varepsilon = 0,528751$  e  $\alpha = 0,25128$ , (c)  $\varepsilon = 0,608828$  e  $\alpha = 0,50128$ , (d)  $\varepsilon = 0,717489$  e  $\alpha = 0,75128$  e (e)  $\varepsilon = 0,872262$  e  $\alpha = 1,00128$ .

# Capítulo 4

## Rede dos Mapas de Rulkov

Nas últimas décadas os resultados obtidos em sistemas dinâmicos e sistemas complexos, que já eram utilizadas em física e engenharia, começaram a ser aplicados em fenômenos biológicos [53]. Um exemplo da tentativa de utilizar sistemas dinâmicos no estudo de fenômenos biológicos é o artigo de A. M. dos Santos e colaboradores, onde se fez o uso de osciladores de Van der Pol como modelos para as batidas do coração [54]. Outro exemplo da aplicação de sistemas complexos em biologia são os estudos da dinâmica dos neurônios. O cérebro é composto de muitos tipos de células, incluindo neurônio, neuroglia e células de Schwann. Acredita-se que os responsáveis pelo processamento do sinal sejam os neurônios [3], sendo propostos alguns modelos para o estudo da dinâmica dos potenciais elétricos nas membranas dos neurônios.

O cérebro humano é composto por mais de  $10^{11}$  neurônios, que são unidades simples, e cada neurônio possui mais de  $10^4$  conexões sinápticas com os outros neurônios, formando assim um sistema com grande capacidade cognitiva e de controle [3].

A comunicação entre os neurônios do cérebro humano possui mais de um mecanismo, onde os potenciais de ação nas membranas possuem um papel muito importante nos mecanismos de comunicação. As tensões elétricas de ação são geradas e mantidas através de correntes de íons, como por exemplo, os íons cálcio  $Ca^{++}$ , sódio ( $Na^+$ ) e potássio  $K^+$ , entre outros [3]. O aumento do potencial elétrico da membrana ocorre pelas ativações e correntes dos íons de  $Ca^{++}$  e/ou ( $Na^+$ ), no qual o fluxo rápido destes íons gera um abrupto aumento no potencial elétrico da membrana. O processo de redução no potencial elétrico da membrana é feito pela ativação e corrente dos íons de  $K^+$ , sendo um mecanismo mais lento [3]. Assim, a dinâmica dos íons possuem duas escalas diferentes de tempo: um rápida, por exemplo os íons  $Ca^{++}$  e ( $Na^+$ ), e outra lenta, por exemplo os  $K^+$ .

Os mecanismos de comunicação entre neurônios podem ocorrer através da utilização de outros íons, com escalas de tempo diferentes, responsáveis pelo aumento

ou diminuição do potencial de ação das membranas. A combinação desses íons faz surgir um comportamento não linear na dinâmica da tensão da membrana, sendo modelados por vários modelos [3].

Uma característica na dinâmica da tensão da membrana dos neurônios é o aumento da tensão que faz o neurônio sair de um estado de silêncio para um estado excitado, quase que abruptamente. Esse fenômeno, aumento no valor da tensão de forma abrupta, é denominado de *spike* (pico), e com a alternância contínua entre estados silenciosos e excitados tem-se os *bursts* (disparos), como é observado na figura (4.1), onde está a evolução temporal da dinâmica do potencial elétrico da membrana de dez diferentes tipos de neurônios: (1) neurônio Lobster pilórico, (2) neurônio do cérebro da ratazana, (3) neurônio do tálamo-cortical do gato, (4) neurônio olfativo inferior do porquinho-da-índia, (5) neurônio aplysia R15, (6) neurônio tálamo-reticular do gato, (7) axônio da lula gigante, (8) tálamo da ratazana, (9) neurônio neocortical piramidal do rato e (10) célula liberadora de gonadotrofinas hipofisárias da ratazana [55]. Na figura(4.1) nota-se que a dinâmica do potencial elétrico possui aumentos abruptos (estados excitados) e diminuição (estados silenciosos), no qual permanece por alguns instantes.

Existem várias tentativas de descrever a dinâmica da tensão na membrana dos neurônios, podendo ser citados como exemplo os modelos: Hodgkin-Huxley [56], FitzHugh-Nagumo [57], Hindmarsh-Rose [58] e o mapa de Rulkov [59] [60], sendo que as variáveis de estado destes modelos possuem comportamento semelhantes às evoluções temporais dos potenciais elétricos da figuras (4.1). O interesse desta tese é o estudo da dinâmica de uma rede de mapas de Rulkov acoplados, como um modelo de um sistema de neurônios biológicos.

## 4.1 Modelos para Atividade Neuronal

O comportamento da variação do potencial elétrico das membranas dos neurônios tem sido modelado através de equações diferenciais, como por exemplo, os modelos de Hodgkin e Huxley, Bonhoeffer-van der Pol, Hindmarsh-Rose, ou através da utilização de mapas, tais como, mapa de Rulkov.

Nesta seção é dada uma rápida introdução aos quatro modelos de neurônios utilizando equações diferenciais. O primeiro modelo descrito será de Hodgkin e Huxley, o mais complexo dos quatro modelos, formado pelo conjunto de quatro equações diferenciais, seis funções e sete constantes. Os modelos de Bonhoeffer-van der Pol, Hindmarsh-Rose e Fitzhugh-Nagumo são aproximações e/ou simplificações do modelo de Hodgkin e Huxley. Outro modelo que será utilizado possui o tempo como variável discreto, é o mapa de Rulkov.

Os cinco modelos que serão apresentados possuem em comum as duas escalas de tempo características, uma rápida e outra lenta, apresentando os disparos e os picos em sua dinâmica.

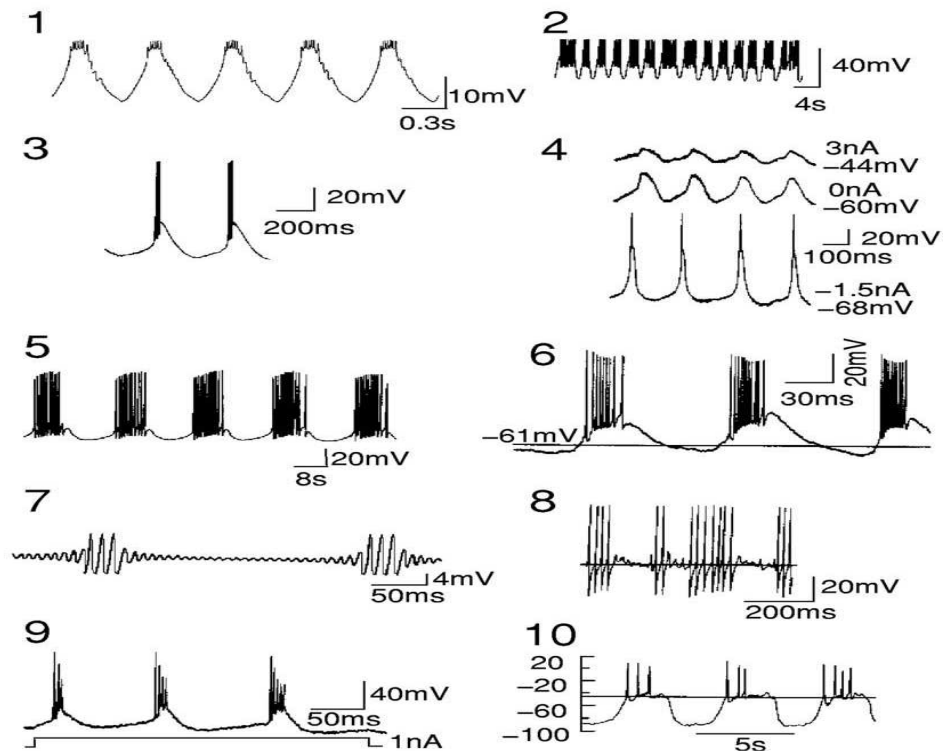


Figura 4.1: Evolução temporal da dinâmica do potencial elétrico da membrana de diferentes tipos de neurônios:(1) neurônio Lobster pilórico, (2) neurônio do cérebro da ratazana, (3) neurônio do tálamo-corticaldo gato, (4) neurônio olfativo inferior do porquinho-da-índia, (5) neurônio aplysia R15 , (6) neurônio tálamo-reticular do gato, (7) axônio da lula gigante, (8) tálamo da ratazana, (9) neurônio neocortical piramidal do rato e (10) célula liberadora de gonadotrofinas hipofisárias da ratazana [55].

#### 4.1.1 Modelo de Hodgkin e Huxley

Embora o estudo da propagação e geração de sinais tenham sido realizados intensamente pelos fisiologistas nos últimos 100 anos, o marco importante neste estudo foi o trabalho de Alan Hodgkin e Andrew Huxley, que desenvolveram o primeiro modelo quantitativo de propagação do sinal elétrico em axônios [61].

Com uma série de cinco artigos publicados no *Journal of Physiology* em 1952, Alan Hodgkin e Andrew Huxley, com a colaboração de Bernard Katz estudaram as condutâncias iônicas que são responsáveis pela geração das tensões elétricas nas membranas dos neurônios. Em 1963, Hodgkin e Huxley dividiram o prêmio Nobel de fisiologia e medicina com John C. Eccles, por seus trabalhos sobre as tensões elétricas e as condutâncias das sinapses neuro motoras.

O modelo do neurônio de Hodgkin e Huxley aproxima o comportamento

elétrico da membrana do neurônio por um circuito elétrico, semelhante ao circuito da figura (4.2). A partir deste circuito foram derivadas equações diferenciais que modelam o comportamento elétrico da membrana do neurônio.

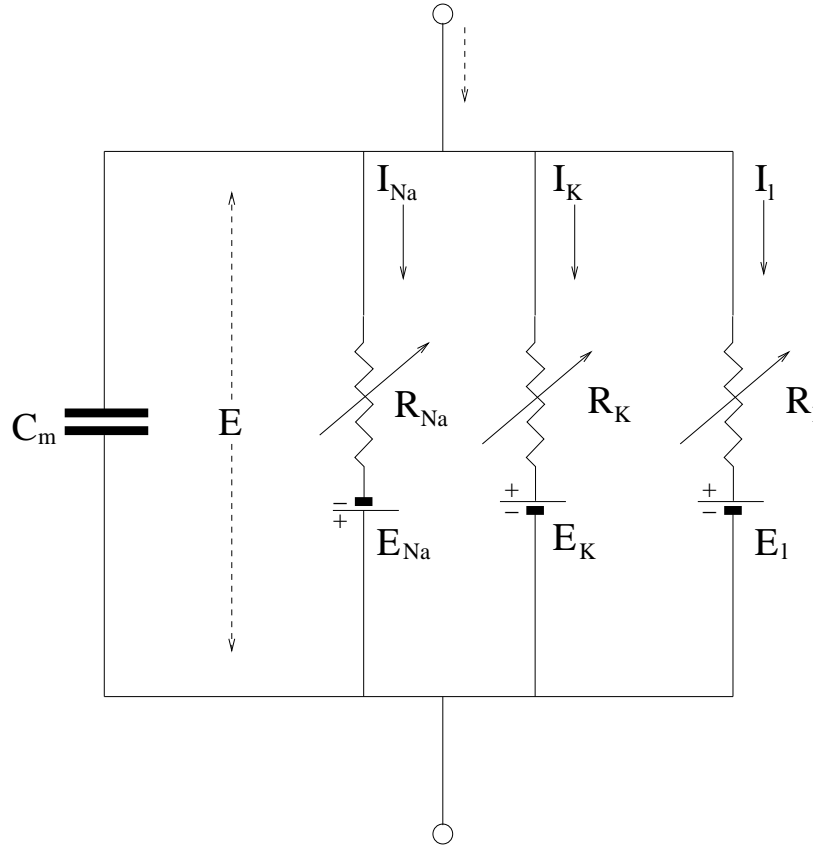


Figura 4.2: Circuito elétrico que descreve o comportamento elétrico da membrana, sendo  $R_{Na} = 1/g_{Na}$ ,  $R_K = 1/g_K$  e  $R_l = 1/g_l$  [62].

Na figura (4.2) observa-se que a membrana comporta-se como um capacitor ( $C_m$ ) em paralelo com as correntes de íons. O potencial elétrico da membrana é denotada por  $E$  e  $E_{Na}$ ,  $E_K$  e  $E_l$ , são os potenciais elétricos de equilíbrio do sódio, potássio e dos outros íons, respectivamente. Os parâmetros  $g_{Na}$ ,  $g_K$  e  $g_l$  são as condutividades de íons,  $Na$ ,  $K$  e outros, respectivamente. No modelo de Hodgkin e Huxley  $g_{Na}$  e  $g_K$  são funções da tensão da membrana,  $E_{Na}$ ,  $E_K$ ,  $E_l$ ,  $g_l$  e  $C_m$  são considerados contantes [62].

As dinâmicas das correntes de íons dentro do circuito da figura (4.2) são controladas pelas diferenças de tensão na membrana e nas concentrações dos íons de sódio e potássio. Quando a concentração de sódio possui um valor tal que  $E_{Na} < E$  a corrente de íons de sódio vai para o interior do circuito, se  $E_{Na} > E$  a corrente muda de sinal [62].

Neste modelo é associado a cada íon uma corrente, sendo que a corrente do íon é proporcional à diferença de tensão entre a membrana e a tensão de equilíbrio,



sendo a constante de proporcionalidade a condutividade do íon. Assim, a corrente para cada íon fica

$$I_{Na} = g_{Na}(E - E_{Na}), \quad (4.1)$$

$$I_K = g_K(E - E_K), \quad (4.2)$$

$$I_l = g_l(E - E_l). \quad (4.3)$$

Para deixar os potenciais na forma mais comumente encontrada efetua-se a seguinte troca de variáveis:  $V = E - E_r$ ,  $V_{Na} = E_{Na} - E_r$ ,  $V_K = E_K - E_r$  e  $V_l = E_l - E_r$ , onde  $E_r$  é o valor absoluto da tensão de repouso e  $V$ ,  $V_{Na}$ ,  $V_K$  e  $V_L$  podem ser medidos em relação à tensão de repouso [62]. Assim, as equações (4.1), (4.2) e (4.3) podem ser modificadas

$$I_{Na} = g_{Na}(V - V_{Na}), \quad (4.4)$$

$$I_K = g_K(V - V_K), \quad (4.5)$$

$$I_l = g_l(V - V_l), \quad (4.6)$$

A soma das equações (4.4), (4.5) e (4.6) é denominada de corrente iônica,  $I_i = I_{Na} + I_K + I_l$ .

As quatro equações diferenciais, não lineares, que são obtidas através do modelo da figura (4.2) para tentar descrever o comportamento da membrana do neurônio [62]:

$$C_m \frac{dV}{dt} = \bar{g}_K n^4 (V - V_K) + \bar{g}_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) + \bar{g}_l (V - V_l) - I, \quad (4.7)$$

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n (1 - n) - \beta_n - n, \quad (4.8)$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m (1 - m) - \beta_m - m, \quad (4.9)$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h (1 - h) - \beta_h - h. \quad (4.10)$$

E as seis funções:

$$\alpha_n = \frac{0,01(V + 10)}{e^{0,1V+1} - 1}, \quad (4.11)$$

$$\beta_n = 0,125e^{\frac{V}{80}}, \quad (4.12)$$

$$\alpha_m = \frac{0,1(V + 25)}{e^{0,1V+2,5} - 1}, \quad (4.13)$$

$$\beta_m = 4e^{\frac{V}{18}}, \quad (4.14)$$

$$\alpha_h = 0,07e^{\frac{V}{20}}, \quad (4.15)$$

$$\beta_h = \frac{1}{e^{0,1V+3} - 1}. \quad (4.16)$$

O valor da condutividade do potássio é determinado através da utilização de uma variável  $n$ , que possui sua evolução temporal dada por uma equação diferencial de primeira ordem. A variável  $n$  é o número de partículas, sendo que a condutividade do potássio depende do número de partículas,  $g_K = \bar{g}_K n^4$ , em que  $\bar{g}_K$  é uma constante. Neste modelo, os íons potássio somente podem cruzar a membrana quando estão juntas quatro partículas [62]. Na equação (4.8)  $n$  representa o número de partículas que ocupa uma certa região da membrana, por exemplo a entrada da membrana, e o termo  $(1 - n)$  é a proporção de partículas em outro lugar da membrana, a saída da membrana por exemplo. O parâmetro  $\alpha_n$  representa a taxa de transferência de fora para dentro das partículas, enquanto  $\beta_n$  a taxa em sentido contrário. Tanto  $\alpha_n$  como  $\beta_n$  são dependentes da tensão elétrica da membrana, como pode ser observado nas equações (4.11) e (4.12) [62].

A condutância do sódio supõe-se ser determinada através de duas variáveis, cada uma obedecendo uma equação diferencial de primeira ordem. Assim,  $g_{Na} = m^3 h \bar{g}_{Na}$ , sendo  $\bar{g}_{Na}$  uma constante. Os valores de  $m$  e  $h$  são soluções das equações (4.9) e (4.10). A variável  $m$  representa a proporção de íons ativos no interior da membrana e  $1 - m$  a proporção fora dela. A proporção de íons inativos fora da membrana é dada por  $h$  e dentro da membrana por  $1 - h$  [62]. Os valores de  $\alpha_m$  e  $\beta_h$  são as taxas de transferência para fora da membrana,  $\alpha_h$  e  $\beta_m$  para dentro. Pode-se observar através das equações (4.13), (4.15), (4.14) e (4.16) que  $\alpha_m$ ,  $\alpha_h$ ,  $\beta_m$  e  $\beta_h$  são funções da tensão elétrica na membrana.

Na figura (4.3) pode-se observar a evolução temporal da tensão elétrica da membrana utilizando o modelo de Hodgkin e Huxley, sendo o capacitor  $C_m = 1 \mu \frac{F}{cm^2}$ , e a corrente aplicada  $I = 10 \mu A$ , com a tensão da membrana em  $mV$  e o tempo em  $ms$ . Os valores dos parâmetros  $\bar{g}_{Na} = 120 \frac{ms}{cm^2}$ ,  $\bar{g}_K = 36 \frac{ms}{cm^2}$  e  $\bar{g}_l = 0,3 \frac{ms}{cm^2}$ . As tensões de equilíbrio dos íons são  $V_{Na} = 115mV$ ,  $V_K = -12mV$  e  $V_l = 10,6mV$  [62].

As escalas de tempo, rápidas e lentas, do potencial da membrana, semelhantes aos encontrados nas figuras (4.1), estão presentes na figura (4.3), no qual os estouros (o início do picos consecutivos) são as escalas de tempo lentas, e os picos são as escalas de tempo rápidas.

## 4.1.2 Modelo de FitzHugh-Nagumo

O modelo de FitzHugh-Nagumo é uma simplificação do modelo de Hodgkin e Huxley, sendo que o ingrediente básico deste modelo é a observação que o pulso do neurônio descrito pelo modelo de Hodgkin e Huxley possui duas escalas de tempo. Estas duas escalas podem ser formuladas de forma heurística, através da teoria da perturbação.

A chave do modelo de Hodgkin e Huxley são os íons  $Na^+$  e  $K^+$  que refletem a atividade e inatividade da bomba de potássio dos axônios. A bomba de sódio e potássio é o bombeamento do sódio para fora da membrana, enquanto o potássio é bombeado para dentro. Porém esse bombeamento não é equitativo: para cada

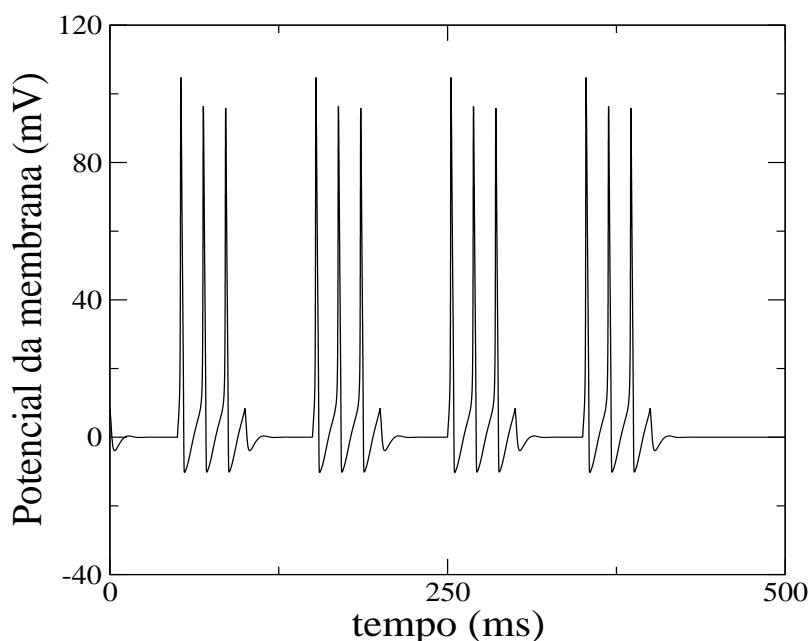


Figura 4.3: Evolução temporal da tensão elétrica da membrana do neurônio utilizando o modelo de Hodgkin e Huxley.

três íons sódio bombeados para o líquido extracelular, apenas dois íons potássio são bombeados para o líquido intracelular [63].

A escala de tempo do modelo de Hodgkin e Huxley, da atividade dos axônios, é mais rápida do que a inatividade. Assim, FitzHugh e Nagumo inseriram a inatividade do potencial elétrico da membrana como uma perturbação na dinâmica do potencial elétrico de ativação da membrana do neurônio.

No modelo de FitzHugh-Nagumo,  $v(t)$  é variável que vai descrever a atividade e  $w(t)$  a desatividade dos neurônios. A equação para a variável  $v(t)$ , sem a perturbação da desatividade, pode ser expressa por

$$\frac{dv(t)}{dt} = -v(v - a)(v - 1). \quad (4.17)$$

Na descrição da dinâmica da desatividade  $w(t)$ , que é estimulada por  $v(t)$ , admite-se que sua evolução temporal possui um valor máximo. Como  $w(t)$  possui uma escala de tempo lenta em relação a  $v(t)$ , sua variação temporal é proporcional a  $\epsilon \ll 1$ . Assim, a variação temporal da escala lenta fica

$$\frac{dw(t)}{dt} = \epsilon(v - \gamma w), \quad (4.18)$$

sendo  $\gamma w$  o limite máximo da variação de  $w$ .

Com a presença da equação (4.18) no modelo de FitzHugh-Nagumo, a dinâmica da variável rápida sofre a influência da dinâmica lenta do modelo. Os

estímulos externos do modelo são inseridos na dinâmica rápida e representado pela variável  $I$ . O modelo de FitzHugh-Nagumo é descrito pelas equações

$$\begin{aligned}\frac{dv(t)}{dt} &= -v(v-a)(v-1) - w + I, \\ \frac{dw(t)}{dt} &= \epsilon(v - \gamma w).\end{aligned}\tag{4.19}$$

### 4.1.3 Modelo de Bonhoeffer-van der Pol

O modelo de Bonhoeffer-van der Pol apresenta padrões de excitabilidade, aplicado a vários fenômenos físicos, por exemplo, propagação de pulsos ao longo do axônios nervosos, ondas na reação de Belousov-Zhabotinsky, entre outros [64].

Em neurofisiologia, a passagem de informação pelos axônios é um fenômeno não linear, no qual a sua modelagem muitas vezes exige a resolução de equações diferenciais não lineares. Um bom modelo é o de Hodgkin e Huxley, modelo este que possui um comportamento que pode ser aproximado pelas equações de Bonhoeffer-van der Pol [65].

O modelo de Bonhoeffer-van der Pol é composto por duas equações diferenciais:

$$\frac{dx}{dt} = x - \frac{x^3}{3} - y + I(t),\tag{4.20}$$

$$\frac{dy}{dt} = c(x - a - by).\tag{4.21}$$

Nas equações (4.20) e (4.21), quando aplicadas em neurofisiologia, a variável  $x$  representa o potencial elétrico da membrana do axônio e  $y$  é a mudança na direção da variação do potencial elétrico. O termo  $I(t)$  na equação (4.20) é a corrente aplicada ao axônio. Na equação (4.21)  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes representando o raio da membrana, a resistividade específica da membrana e o fator de temperatura, respectivamente [65].

### 4.1.4 Modelo de Hindmarsh-Rose

O modelo de neurônios proposto por Hindmarsh e Rose em 1984, para o estudo do surgimento dos disparos no sistema nervoso do caracol *Lymnaea*, quando este em um estado silencioso, após a aplicação de um pulso elétrico era gerado um disparo [66]. O modelo de Hindmarsh-Rose é derivado do modelo de Hodgkin e Huxley [58].

Este modelo possui três graus de liberdade, sendo sua variação dada por

três equações diferenciais reproduzindo o potencial elétrico da membrana e os canais iônicos. As três equações diferenciais do modelo de Hindmarsh-Rose são:

$$\frac{dx}{dt} = y + 3x^2 - x^3 - z + I, \quad (4.22)$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 5x^2 - y, \quad (4.23)$$

$$\frac{dz}{dt} = -rz + rS(x + 1, 6). \quad (4.24)$$

Neste modelo as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam o potencial elétrico da membrana, a dinâmica rápida e lenta dos canais de íons, respectivamente. Na equação (4.22) o parâmetro  $I$  é a corrente externa, o parâmetro  $S$  e  $r$  da equação (4.24) estão associados ao fator de influência de  $x$  na dinâmica de  $z$  e ao fator de escala, respectivamente.

Na figura (4.4) encontra-se a evolução temporal de  $x$  (potencial elétrico da membrana) do modelo de Hindmarsh-Rose para os valores de parâmetros  $S = 4$ ,  $I = 3,281$  e  $r = 0,0021$ . Nesta figura nota-se as duas escalas de tempo do modelo; rápida-picos e lenta-disparos.

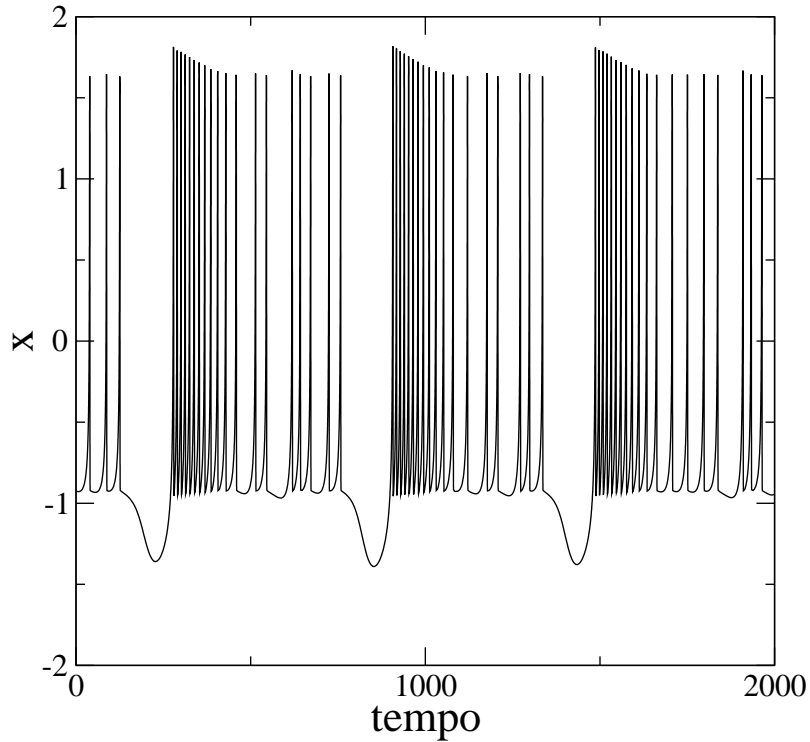


Figura 4.4: Dinâmica temporal do potencial elétrico da membrana utilizando as equações (4.22), (4.23) e (4.24).

### 4.1.5 Modelo do Mapa de Rulkov

O mapa de Rulkov é um sistema fenomenológico que tem sido utilizado como modelo para compreender a dinâmica temporal de uma rede de neurônios [67]. Assim, como os outros modelos a tempo contínuo, o mapa de Rulkov também apresenta duas escalas de tempo características, semelhantes às encontradas na evolução temporal da tensão elétrica da membrana de alguns tipos de neurônios, figuras (4.1): uma escala de tempo rápida-picos e outra lenta-disparos [67].

As escalas de tempo dos neurônios estão relacionadas com o processo de comunicação entre os neurônios, quando os neurônios estão disparando eles estão se comunicando e ao cessar o disparo eles param de se comunicar.

Para apenas um mapa de Rulkov isolado, os picos e os disparos da série temporal do mapa são controlados pelos valores de seus parâmetros. Dependendo dos valores dos parâmetros o mapa pode apresentar, desde disparos periódicos, até uma seqüência caótica de picos.

Quando se tenta modelar um sistema de neurônios, no qual os elementos deste conjunto interagem mutuamente, torna-se necessária a utilização de vários mapas acoplados com um dada topologia, as redes de mapas acoplados, para descrever estes conjuntos de células.

## 4.2 Mapa de Rulkov

O mapa de Rulkov é um mapa bi-dimensional, em que a dinâmica temporal é dada pelas relações de recorrência,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{\theta}{1 + x_n^2} + y_n \ , \\y_{n+1} &= y_n - \sigma x_n - \beta,\end{aligned}\tag{4.25}$$

onde  $x_n$  é a variável rápida e  $y_n$  é a variável lenta. No mapa (4.25) estão presentes três parâmetros que controlam a dinâmica do mapa:  $\theta$ ,  $\sigma$  e  $\beta$ .

A não linearidade do mapa de Rulkov é controlada pelo parâmetro  $\theta$ , e para valores superiores a 4 estão presentes na dinâmica do mapa duas escalas de tempo: os picos (escala de tempo rápida) e os disparos (escala de tempo lenta), figura (4.5). A periodicidade dos disparos e a duração dos picos na série temporal de  $x_n$  podem ser controladas através de alterações no valor de  $\theta$  [67], como pode ser observado nas figuras (4.5). Os parâmetros  $\sigma$  e  $\beta$  controlam as influências externas sobre o mapa e nesta tese os valores utilizados serão iguais a 0,001 [59].

Nas figuras (4.5) encontra-se a dinâmica da variável rápida do mapa de Rulkov e seus respectivos espectros de freqüências (transformada de Fourier retangular) de uma série temporal de 100000 iterações, para quatro diferentes valores de

$\theta$ ,  $\sigma = 0,001$ ,  $\beta = 0,001$  e condições iniciais aleatórias.

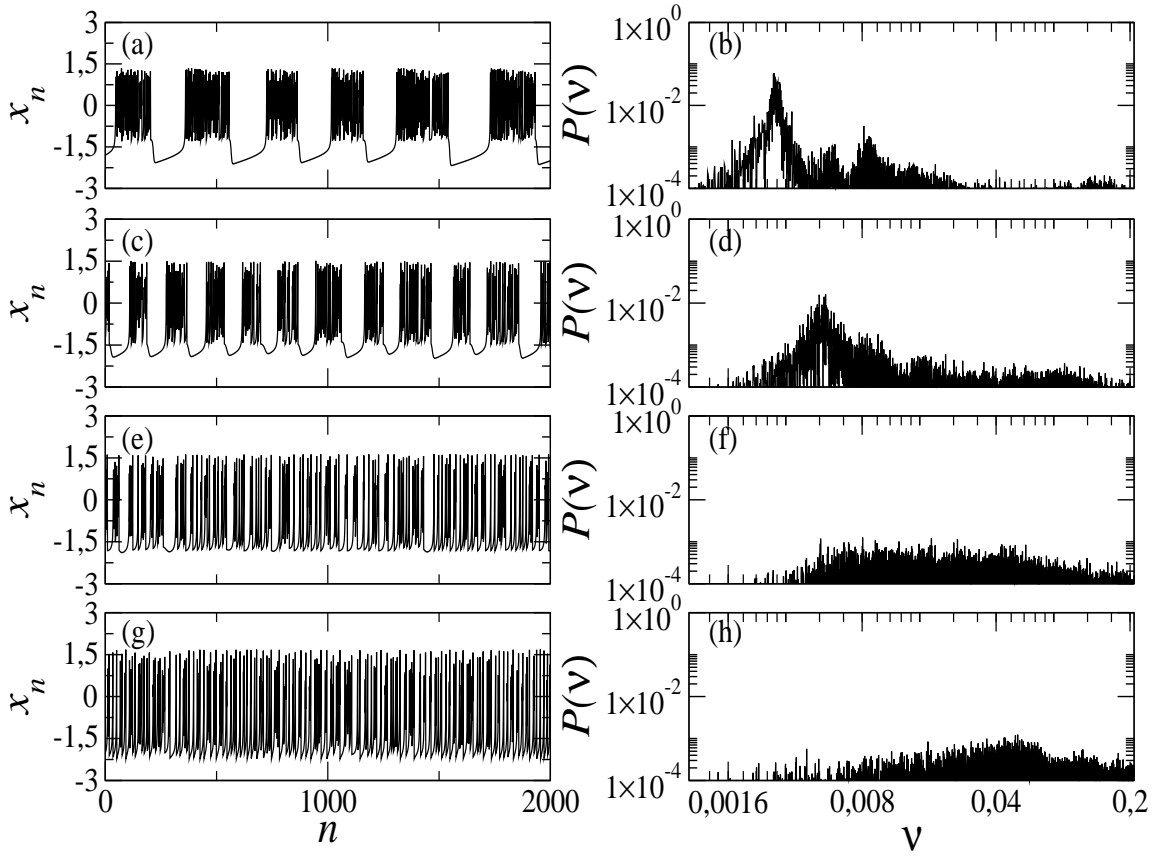


Figura 4.5: Mapa de Rulkov com condições iniciais aleatórias e  $\sigma = \beta = 0,001$ . (a)  $x_n \times n$  e (b) o espectro de frequências para  $\theta = 4, 1$ , (c)  $x_n \times n$  e (d) o espectro de frequências para  $\theta = 4, 3$ , (e)  $x_n \times n$  e (f) o espectro de frequências para  $\theta = 4, 6$ , (g)  $x_n \times n$  e (h) o espectro de frequências para  $\theta = 4, 9$ .

Quando o mapa de Rulkov possui  $\theta = 4, 1$  ocorrem os disparos periódicos, figura (4.5a), sendo que as altas frequências dos picos são moduladas pelas baixas frequências dos disparos. O espectro de potência da série temporal da figura (4.5a) apresenta três picos, sendo o pico maior a frequência dos disparos que é aproximadamente 0,0028, e os outros dois picos com frequências iguais a 0,0056 e 0,0084 são os harmônicos desta frequência. As altas frequências, na região ruidosa do espectro são as frequências dos picos.

Com o aumento de  $\theta$  o número de disparos aumenta, para um mesmo intervalo de tempo, como pode ser observado na figura (4.5c). Para o valor de  $\theta = 4, 3$  o pico do espectro de frequência alarga-se com os valores máximos de frequência próximos a 0,005, valor superior ao encontrado para  $\theta = 4, 1$ , ver figura (4.5d).

As frequências dos disparos aumentam com o valor de  $\theta$ , sendo que para valores de  $\theta$  maiores as frequências dos picos possuem uma participação maior no

espectro de frequências. Para  $\theta = 4,6$  os disparos ocorrem de forma mais aleatória, não apresentando um período bem definido entre os disparos, e a duração é pequena se comparado a valores de  $\theta$  menores, como nota-se na figura (4.5e). Quando o valor de  $\theta = 4,9$  ocorre apenas a presença de uma seqüência caótica de picos, figura (4.5g). Os espectros de frequências das séries temporais das figuras (4.5e) e (4.5g) apresentam apenas um região ruidosa de frequências como é observado nas figuras (4.5f) e (4.5h).

Para compreender a formação dos disparos e picos na série temporal é necessário olhar as duas direções do mapa. Nas figuras (4.6) encontram-se as evoluções temporais de  $x_n$  e  $y_n$ , para condições iniciais aleatórias,  $\theta = 4,1$  e  $\sigma = \beta = 0,001$ . Através das figuras (4.6) nota-se que a amplitude da variação de  $x_n$  é maior do que  $y_n$ , e durante os picos contínuos a variação no valor de  $x_n$  é muito rápida. Comparando a figura (4.6a) com (4.6b) nota-se que o começo (fim) de um disparo está relacionado com um valor máximo (mínimo) local de  $y_n$ .

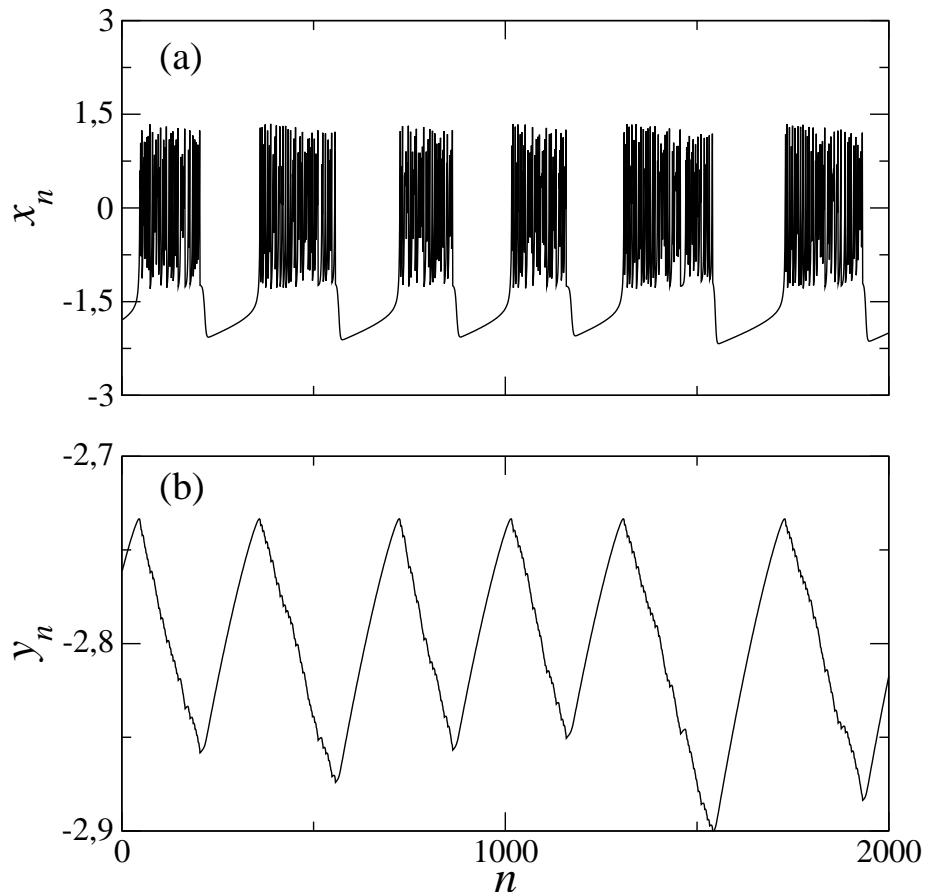


Figura 4.6: Evolução temporal da variável de estado rápida e lenta do mapa de Rulkov com condições iniciais aleatórias,  $\theta = 4,1$  e  $\sigma = \beta = 0,001$ .

A dinâmica rápida do mapa  $x_n$  apresenta um comportamento regular antes



do disparo e um comportamento irregular durante o disparo, figura (4.6a). Durante o comportamento regular, o valor da contribuição de  $x_n$  na dinâmica lenta do mapa é menor do que  $-\beta$  ( $x_n > \frac{\beta}{\sigma}$ ), e o valor de  $y_n$  aumenta de forma linear. Quando  $x_n$  está em seu comportamento irregular a contribuição na evolução temporal de  $y_n$  é maior do que  $-\beta$ , e  $y_n$  diminui linearmente com o tempo.

Devido a variação de  $x_n$  ser mais rápida do que de  $y_n$ , a variável lenta do mapa pode ser aproximado por uma constante  $\gamma$ , transformando o mapa de duas dimensões (4.25) em um mapa unidimensional,

$$f(x_n) = \frac{\theta}{1 + x_n^2} + \gamma, \quad (4.26)$$

visando uma melhor compreensão do surgimento de picos e disparos.

A constante  $\gamma$  do mapa (4.26) é um novo parâmetro de controle, e agora torna-se possível obter os pontos fixos do mapa (4.26) em função de  $\theta$  e  $\gamma$ . O ponto fixo, que será denotado por  $x^*$ , é um valor da variável de estado que mapeia nela mesma,  $x^* = f(x^*)$ , e substituindo na equação (4.26) obtém-se uma equação do terceiro grau,

$$(x^*)^3 - \gamma(x^*)^2 + x^* - \gamma - \theta = 0. \quad (4.27)$$

O mapa (4.26), que é uma simplificação do mapa de Rulkov, possui três pontos fixos que são as soluções da equação (4.27), dados em função dos parâmetros  $\gamma$  e  $\theta$ :

$$x_1^* = -\frac{A^{\frac{1}{3}}}{12} + \frac{3}{A^{\frac{1}{3}}} \left( \frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{9} \right) + \frac{\gamma}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{A^{\frac{1}{3}}}{6} + \left( \frac{A^{\frac{1}{3}}}{9} \frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{9} \right) \right], \quad (4.28)$$

$$x_2^* = -\frac{A^{\frac{1}{3}}}{12} + \frac{3}{A^{\frac{1}{3}}} \left( \frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{9} \right) + \frac{\gamma}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{A^{\frac{1}{3}}}{6} + \left( \frac{A^{\frac{1}{3}}}{9} \frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{9} \right) \right] \text{ e} \quad (4.29)$$

$$x_3^* = \frac{A^{\frac{1}{3}}}{6} - \frac{6}{A^{\frac{1}{3}}} \left( \frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{9} \right). \quad (4.30)$$

A constante  $A$  presente nas equações (4.28), (4.29) e (4.30) é expressa em função de  $\theta$  e  $\gamma$ ,

$$A = 72\gamma + 108\theta + 8\gamma^3 + 12\sqrt{12 + 24\gamma^2 + 12\gamma^4 + 108\gamma\theta + 81\theta^2 + 12\theta\gamma^3}. \quad (4.31)$$

As soluções da equação (4.26) podem estar no plano real ou complexo, como pode ser observado na tabela (4.1), onde está  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  e  $x_3^*$  em função dos parâmetros  $\theta$  e  $\gamma$ . Quando os valores de  $x_1^*$  e  $x_2^*$  são números complexos,  $x_2^*$  é o complexo conjugado de  $x_1^*$ , que não tem sentido na dinâmica do mapas (4.26). Assim para certos valores de  $\gamma$  e  $\theta$  o mapa (4.26) possuirá um ou três pontos fixos.

Tabela 4.1: Valores de  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  e  $x_3^*$  para diferentes valores de  $\theta$  e  $\gamma$ .

$\gamma$	$\theta$	$x_1^*$	$x_2^*$	$x_3^*$
-2,65	4,1	$-1,592 + 0,411i$	$-1,592 - 0,411i$	0,536
-2,85	4,1	-2,081	-1,250	0,481
-2,90	4,4	-2,062	-1,369	0,481
-2,65	4,4	$-1,660 + 0,371i$	$-1,660 - 0,371i$	0,536

Quando os três pontos fixos estão presentes na dinâmica do mapa, os pontos fixos  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  e  $x_3^*$  possuem diferentes estabilidades. A estabilidade dos pontos fixos é dada pelo auto valor do mapa (4.26),  $|f'(x^*)|$ ,

$$|f'(x^*)| = \left| \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} \right|_{x_n=x^*} = \left| \frac{-2\theta x^*}{(1+(x^*)^2)^2} \right|, \quad (4.32)$$

sendo  $x^*$  um dos pontos fixos do mapa,  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  ou  $x_3^*$ . Se o valor de  $|f'(x^*)| < 1$  o ponto fixo é estável, e para  $|f'(x^*)| > 1$  o ponto fixo é instável.

O ponto fixo  $x_1^*$  é um ponto fixo estável e  $x_2^*$  instável, o ponto fixo  $x_3^*$  é um ponto fixo instável sempre presente na dinâmica do mapa podendo estar imerso ou não em um atrator caótico, dependendo do valor de  $\gamma$ , ver figuras (4.7). Para exemplificar a estabilidade dos pontos fixos serão utilizados os valores de  $\theta$  e  $\gamma$ , nos quais os três pontos fixos estão presentes na dinâmica do mapa:

- $\theta = 4,1$  e  $\gamma = -2,85$ :  $|f'(x_1^*)| = 0,6$ ,  $|f'(x_2^*)| = 1,561$  e  $|f'(x_3^*)| = 2,6013$ .
- $\theta = 4,4$  e  $\gamma = -2,90$ :  $|f'(x_1^*)| = 0,6579$ ,  $|f'(x_2^*)| = 1,4583$  e  $|f'(x_3^*)| = 2,7916$ .

Nas figuras (4.7) estão os diagramas de bifurcação  $x_n \times \gamma$  para  $\theta$  iguais a 4,1 e 4,4. As linhas tracejadas das figuras são os pontos fixos instáveis e a linha cheia o ponto fixo estável. Os quadrados abertos são os valores de  $\gamma$  para os quais começa a ocorrer a duplicação de período do ponto fixo  $x_3^*$ , e após algumas duplicações de período o ponto fixo  $x_3^*$  fica imerso em um atrator caótico. Já os pontos  $\circ$  e  $\bullet$  são os valores de  $\gamma$ , nos quais ocorrem a crise do atrator caótico e a bifurcação sela-nó.

A primeira duplicação de período ocorre para o valor de  $\gamma$  entre 0 e 1, independente do valor de  $\theta$ , e com a diminuição no valor de  $\gamma$  ocorre outras duplicações do ponto fixo instável até a formação da região caótica. Para valores de  $\gamma$ , próximos a -4, existe outro ponto no qual tem início a duplicação de período e com o aumento de  $\gamma$  ocorre a sucessivas duplicações de período até a formação da região caótica.

As bifurcações sela-nó das figuras (4.7) dadas pelo símbolos  $\circ$  são os valores de  $\gamma$  em que ocorrem a colisão dos pontos fixos  $x_1^*$  e  $x_2^*$ , ou  $x_2^*$  e  $x_3^*$  [60], ocorrendo o desaparecimento dos dois pontos fixos que se chocam. A colisão dos pontos fixos

$x_1^*$  e  $x_2^*$  é responsável pelo início de um disparo na dinâmica do mapa, pois, após a bifurcação existe apenas o ponto fixo instável  $x_3^*$  imerso no atrator caótico, figuras (4.8).

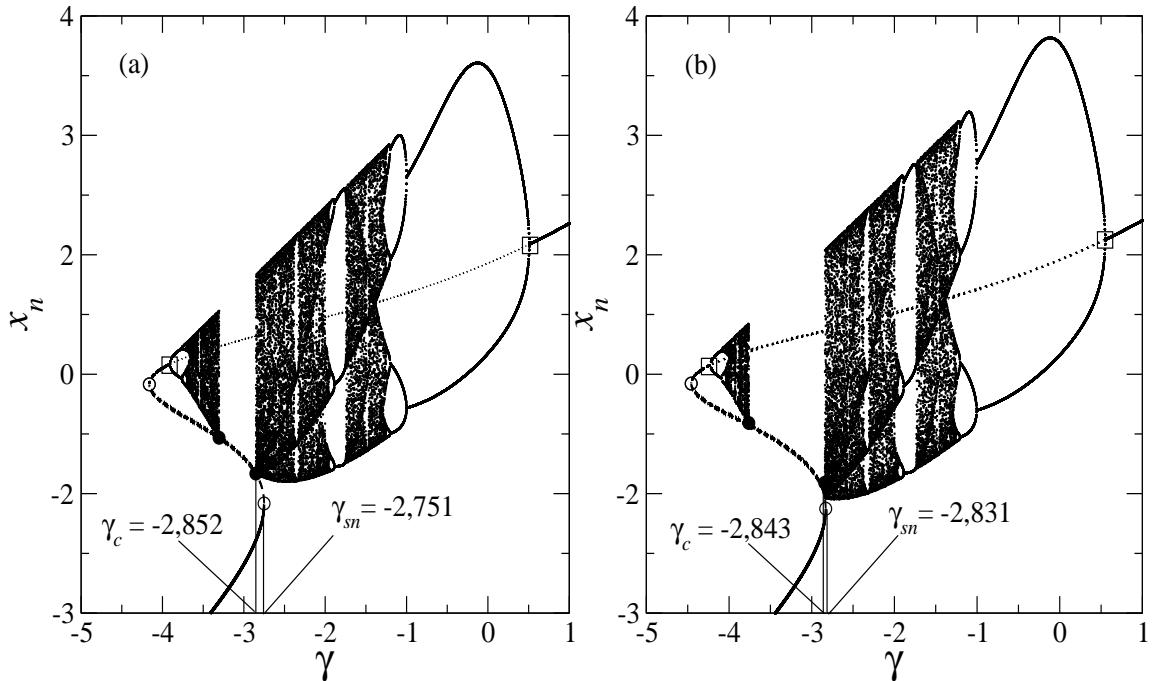


Figura 4.7: Diagrama de bifurcação do mapa (4.26), em (a)  $\theta = 4, 1$  e (b)  $\theta = 4, 4$ . Os pontos  $\circ$  são os valores de  $\gamma$  para os quais ocorrem a bifurcação sela-nó,  $\bullet$  os valores de  $\gamma$  onde ocorre a crise externa do atrator caótico e os quadrados abertos são os valores de  $\gamma$  para a duplicação de período do ponto fixo  $x_3^*$  [60].

Os símbolos  $\bullet$  são os pontos nos quais ocorrem a crise externa do atrator caótico [60], a colisão do atrator caótico com o ponto fixo instável  $x_2^*$ . A colisão do atrator caótico com o ponto fixo instável  $x_2^*$  é responsável pelo desaparecimento do atrator caótico e conseqüentemente o final de um disparo.

Para melhor compreender a dinâmica da equação (4.26) pode-se observar as figuras (4.8), onde está o mapa de retorno da equação (4.26), para três diferentes valores de  $\gamma$  e duas condições iniciais diferentes utilizadas para observar a estabilidade dos pontos fixos. No gráfico das figuras (4.8) dependendo do valor de  $\gamma$  existem um ou três pontos fixos,  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  e  $x_3^*$ .

Quando o valor de  $\gamma = -2, 65$ , figura (4.8a), apenas o ponto fixo instável  $x_3^*$  está presente na dinâmica do mapa e as duas condições iniciais vão para o atrator caótico. Para o valor de  $\gamma = -2, 75$ , surgem ou desaparecem os pontos fixos  $x_1^*$  (ponto fixo estável) e  $x_2^*$  (ponto fixo instável), bifurcação sela-nó, como pode ser observado na figura (4.8b). Aumentando o valor de  $\gamma = -2, 85$  os três pontos fixos estão presentes, e as duas condições iniciais podem ir para o ponto fixo estável ( $x_1^*$ ) ou para o atrator caótico.

A compreensão da dinâmica dos disparos e dos picos está no diagrama de bifurcação das figuras (4.7), mas para isso é necessário lembrar que  $\gamma = y_n$ . Supondo que o um valor inicial de  $y_n = \gamma$  na qual apenas o ponto fixo  $x_3^*$  exista com a dinâmica de  $x_n$  na região caótica. A o valor de  $y_n = \gamma$  vai diminuindo até o momento no qual ocorre a bifurcação sela-nó ( $y_n = \gamma = \gamma_{SN}$ ), fazendo surgir o ponto fixo  $x_1^*$  e  $x_2^*$ . Mesmo com a presença do três pontos fixos a dinâmica de  $x_n$  ainda se encontra no atrator caótico. Diminuindo ainda mais o valor até  $y_n = \gamma = \gamma_C$  o ponto fixo instável  $x_2^*$  choca-se com o atrator caótico, fazendo este desaparecer, e  $x_n$  que estava no atrator caótico é atraído para o ponto fixo estável  $x_1^*$ , fim de um disparo. Agora o valor de  $y_n = \gamma$  começa a aumentar, até o momento em que  $x_1^*$  choca-se com  $x_2^*$  ( $y_n = \gamma = \gamma_{SN}$ ) e ambos desaparecem, a dinâmica de  $x_n$  vai para o atrator caótico dando início a um novo disparo.

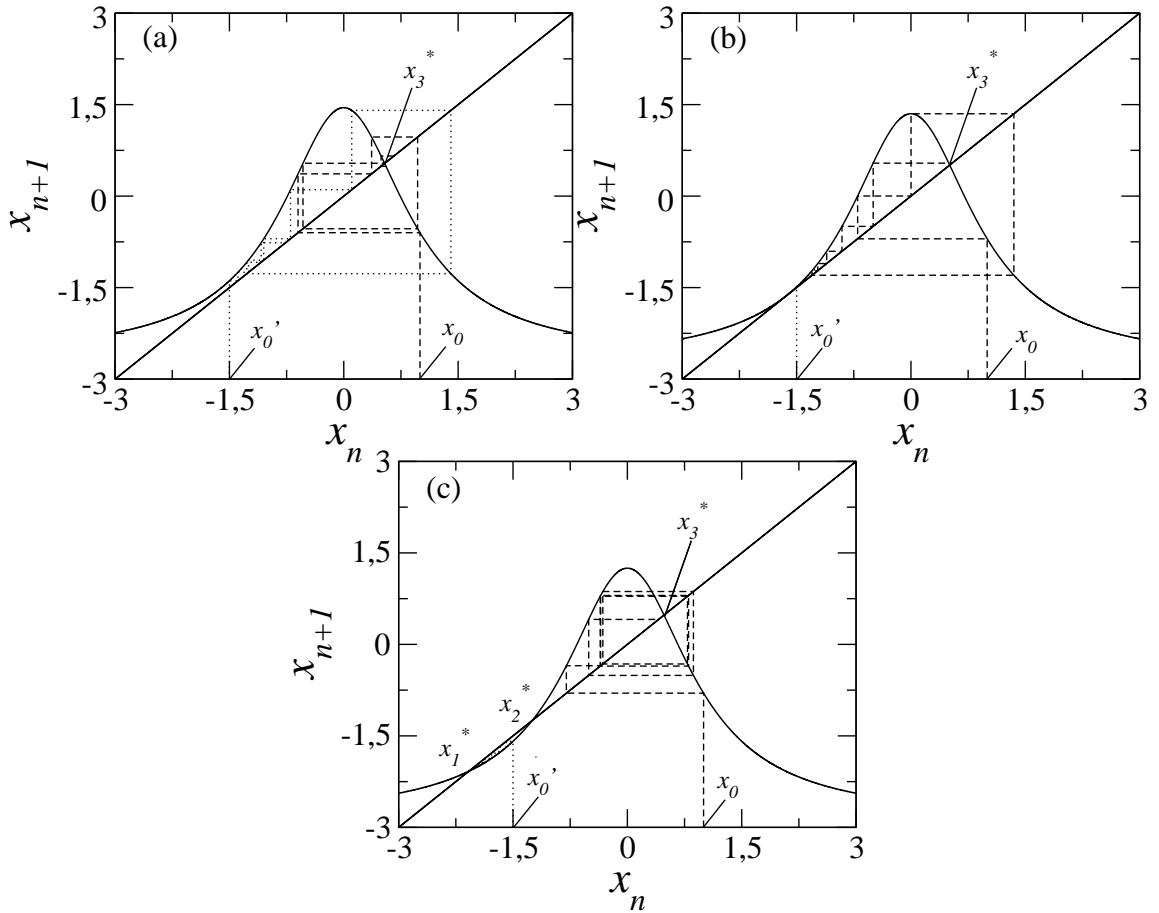


Figura 4.8: Mapa de primeiro retorno da equação (4.26) com duas condições iniciais das interações, para o valor de  $\theta = 4, 1$ , e três diferentes valores de  $\gamma$ : (a)  $\gamma = -2, 65$ , (b)  $\gamma = -2, 75$  e (c)  $\gamma = -2, 85$ .

Através das figuras (4.7) e (4.8) pode-se notar a existência de bacias de atração, para um certo intervalo de  $\gamma$ . Assim, a ocorrência ou não dos disparos é

a existência de uma região com duas bacias de atração, um atrator estável e um caótico, para o intervalo de  $\gamma$  compreendido entre  $\gamma_C < \gamma < \gamma_{SN}$  [60]. Nas figuras (4.7), quando  $\gamma_C < \gamma < \gamma_{SN}$ , todas as condições dentro do atrator caótico ficam retidas nele, já outras condições fora dele vão para o ponto fixo estável, como pode ser observado na figura (4.8c). Outra observação que deve ser feita é que o ponto fixo envolvido no surgimento e desaparecimento dos disparos é  $x_2^*$  [68].

Comparando as figuras (4.7a) e (4.7b) nota-se que os valores de  $\gamma$ , nos quais ocorrem a bifurcação sela-nó e a crise externa do atrator caótico, são dependentes do valor de  $\theta$ . Aumentando o valor de  $\theta$ , os valores de  $y_n = \gamma$  da bifurcação sela-nó e da crise externa se aproximam, diminuindo a variação de  $y_n = \gamma$  e o intervalo de tempo entre os disparos.

Efetuada esta análise para outros valores de  $\theta$  é possível montar o diagrama de bifurcação  $\theta \times \gamma$  com as curvas  $L_h$ , valores para os quais ocorre a crise externa e a curva  $L_{12}$  valores da bifurcação sela-nó. As curvas estão traçadas na figura (4.9), sendo  $g$  uma variável que informa a amplitude da variação de  $\gamma$  e pode ser relacionado com o tempo entre os disparos.

Pela curva  $L_h$  do diagrama de bifurcação do mapa de Rulkov, a crise do atrator caótico ocorre quando o ponto fixo instável  $x_2^*$  choca-se com o atrator caótico, ou seja, o menor valor de  $x_n$  dentro do atrator caótico. O máximo valor de  $x_n$  dentro do atrator caótico é dado pela relação [60]:

$$x_{\text{máximo}} = f(0) = \theta + \gamma, \quad (4.33)$$

e a interação do valor máximo no mapa (4.26) leva ao valor mínimo, portanto o valor mínimo do atrator caótico é

$$x_{\text{mínimo}} = f(f(0)) = \frac{\theta}{1 + (\theta + \gamma)^2} + \gamma. \quad (4.34)$$

A crise ocorre quando o valor do ponto fixo instável,  $x_2^*$ , do mapa(4.26) possui o valor igual ao  $x_{\text{mínimo}}$  do atrator caótico, ou seja a equação (4.34) é igual à (4.29). Igualando as duas equações é obtido a expressão analítica da curva  $L_h$  do diagrama de bifurcação do mapa de Rulkov simplificado [59],

$$\theta = -\frac{3\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 8}}{2}. \quad (4.35)$$

Na bifurcação sela-nó o auto valor do mapa de Rulkov simplificado, equação (4.32), é igual a 1 [39]. Uma observação que deve ser feita é que para a bifurcação sela-nó os pontos fixos  $x_1^*$  e  $x_2^*$ , dados pelas equações (4.28) e (4.29) são iguais, ou seja, a parte imaginária dos pontos fixos são nulas. Substituindo qualquer um dos pontos fixos,  $x_1^*$  ou  $x_2^*$ , na equação (4.32) e igualando a 1, obtêm-se a curva  $L_{12}$  da bifurcação sela-nó [59],

$$\theta = -\frac{2}{27} \left[ \gamma(\gamma^2 + 9) - (\gamma^2 - 3)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (4.36)$$

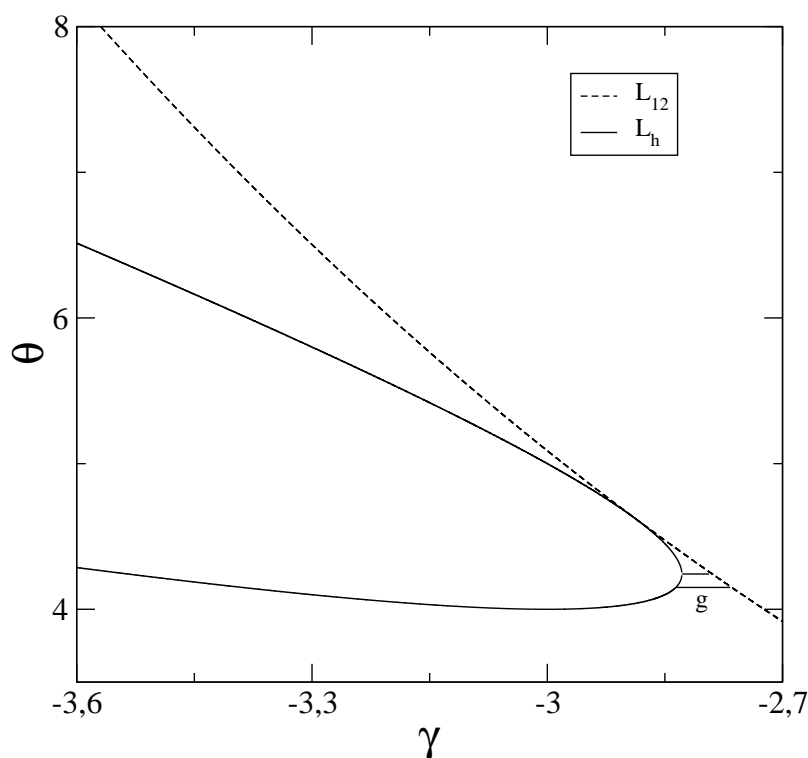


Figura 4.9:  $\theta \times \gamma$ , diagrama de bifurcação do mapa (4.26), com as curvas da bifurcação sela-nó  $L_{12}$  e da crise externa  $L_h$ .

### 4.3 Arquitetura das Redes de Neurônios

Muitos neurocientistas acreditam que sistemas biológicos, entre eles o cérebro, podem ser tratados através da utilização dos sistemas complexos [53]. Isto deve-se ao fato que muitas regiões do cérebro são formados por um grande número de neurônios interligados, por exemplo: o córtex cerebral que possui  $\approx 10^{11}$  neurônios com  $\approx 10^4$  conexões [69].

A atividade do cérebro possui um comportamento espaço-temporal, que tem sido monitorado por imagem obtidas por ressonância magnética funcional (fMRI). Os padrões espaço-temporais, formados pelos sistemas de neurônios e regiões do cérebro, são analisados através das redes complexas, considerando-os neurônios ou as regiões do cérebro como um conjunto de nós, que recebem e transmitem potenciais elétricos através de suas conexões, as junções com propriedades topológicas não triviais [69].

Um tipo de acoplamento de sistemas complexos observado por Chialvo em neurônios biológicos foi o acoplamento tipo *scale-free* (livre de escala) [69]. Nas redes livre de escala o número de conexões  $k$  por neurônios não é constante, mas são distribuídos de acordo com uma função de probabilidade  $P(k)$ , dada por uma lei de potência  $P(k) \approx k^{-\varphi}$ , sendo que para um número grande de conexões, a probabili-

dade de ocorrência nas redes com acoplamento livre de escala é baixa e um número pequeno de conexões na rede possui uma grande probabilidade de ocorrência [70].

Na rede de neurônios estudada por Chialvo foi encontrado  $\varphi = 2, 20$ , com um número médio de conexões  $\langle k \rangle = 4, 12$  por neurônio [69]. A topologia e as constantes encontradas sugerem que a cada novo neurônio colocado neste sistema terá uma maior probabilidade de se conectar com os neurônios que possuem os maiores números de conexões [71]. O acoplamento livre de escala já tem sido utilizado no estudo teórico da sincronização de fase e de frequência das redes de mapas de Rulkov por C. Batista e colaboradores [71].

As redes de neurônios descritas pelos acoplamentos do tipo livre de escala possuem seus neurônios com um número de conexões heterogêneas, ou seja, o número de conexões de um neurônio da rede é diferente dos outros neurônios. Alguns estudos experimentais têm sugerido conjuntos de neurônios com o número de conexões seja homogêneo, ou seja, iguais para todos os neurônios. Um exemplo é o estudo do córtex visual do gato, onde foi observado que regiões locais respondem a estímulos em comum, sincronizando suas fases, mesmo para regiões localizadas a grandes distâncias na rede. Estes comportamentos sugerem que as regiões do córtex visual do gato possui um mecanismo de sincronização global [9], justificando o estudo de modelos de neurônios através do acoplamento global. A utilização do acoplamento global no estudo de sistemas de neurônios, já foi realizado por N. F. Rulkov [59] e M. V. Ivanchenko e colaboradores [67], sendo estudada a dinâmica da rede dos mapas de Rulkov acoplados, e as sincronizações de fase e frequência da rede.

As conexões entre os neurônios ocorrem através dos dendritos, que possuem uma estrutura fractal [72]. As estruturas fractais dos dendritos não são bem descritas pelos acoplamentos globais e livres de escalas, sendo necessário um outro tipo de acoplamento para a descrição das conexões entre os dendritos e neurônios. A presença de conexões fractais entre os neurônios sugere que um acoplamento com características fractais sejam mais eficientes na descrição do comportamento deste sistema. O acoplamento fractal possui as probabilidades de conexões entre os sítios da rede dada por uma lei de potência em relação às distâncias entre os sítios,

$$p_{ij} = \frac{1}{|r_i - r_j|^\alpha}, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.37)$$

sendo  $r_i$  e  $r_j$  os vetores de posição de cada sítio na rede, e  $\alpha$  um número real positivo. Num acoplamento fractal a probabilidade de conexão é dependente da distância entre os sítios, tal que o número de conexões em uma esfera  $D$ -dimensional de raio  $R$  e satisfaz uma lei de escala da forma  $r^{D-\alpha}$  [72]. As conexões fractais foram encontradas recentemente em experimentos com o córtex visual V1 de furões [73].

Dando continuidade ao estudo da rede dos mapas de Rulkov será utilizado o acoplamento tipo lei de potência, que já foi descrito no capítulo sobre intermitência, que apresenta características do acoplamento fractal.

Outra forma de acoplamento que deve ser lembrando é o acoplamento tipo *small-world* (mundo pequeno), que é encontrado no cérebro de primatas [8] e no sistema nervoso de *C. elegans* [10]. As redes de pequeno mundo apresentam conexões

aleatórias e regulares, características de dois extremos das redes de mapas acoplados: redes com conexões totalmente regulares e redes totalmente aleatórias [74]. O estudo teórico dos neurônios, com redes de pequeno mundo, tem ocorrido com a utilização dos modelos de Hodgkin-Huxley [56], FitzHugh-Nagumo [57] e Hindmarsh-Rose [58].

## 4.4 Acoplamento Global

Para o estudo de uma rede dos mapas de Rulkov acoplados, com um acoplamento global, será considerado um conjunto de  $N$  mapas acoplados, em que a dinâmica do mapa local de cada sítio é dada pelo mapa (4.25). Muitos problemas envolvendo redes neurais poderiam ser tratados do ponto de vista da teoria de grafos, de forma que a distância Euclidiana entre os neurônios não tivesse papel muito importante. Contudo, os neurônios biológicos estão imersos em uma rede tridimensional no cérebro, conectados por axônios e dendritos, sendo mais conveniente a utilização de redes de mapas acoplados imersos em um espaço Euclidiano [71].

O termo de acoplamento global da rede dos mapas de Rulkov é inserido na variável rápida do mapa (4.25). O alcance deste acoplamento é ilimitado [16], pois a dinâmica do sítio ( $i$ ) influencia no valor do campo médio, afetando, todas as variáveis acopladas da rede. A rede dos mapas de Rulkov acoplados com um acoplamento tipo campo médio é dada por,

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} &= \frac{\theta^{(i)}}{1 + (x_n^{(i)})^2} + y_n^{(i)} + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N x_n^{(j)}, \\ y_{n+1}^{(i)} &= y_n^{(i)} - \sigma x_n^{(i)} - \beta, \end{aligned} \quad (4.38)$$

em que  $N$  é número de sítios acoplados da rede e  $\varepsilon$  a intensidade do acoplamento [59].

Através da equação (4.38) observa-se que o acoplamento da rede é na verdade uma média espacial entre todos os sítios da rede em um dado tempo  $n$ , denominado campo médio da rede,

$$\langle X \rangle_n = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_n^{(j)}. \quad (4.39)$$

A influência do campo médio nos sítios da rede é controlada pela intensidade de acoplamento, e a intensidade do acoplamento vai influenciar na dinâmica dos disparos e picos das variáveis de estados dos sítios da rede, como pode ser observado na figura (4.10).

Nas figuras (4.10) está a dinâmica de quatro sítios da rede, com  $\theta^{(i)}$  iguais a 4,1, 4,3, 4,6 e 4,9, e seus respectivos espectros de frequência (transformada de Fourier retangular), para uma rede  $N = 257$  mapas de Rulkov acoplados, condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias,  $\varepsilon = 0,1$  e os valores de  $\theta^{(i)}$  uniformemente distribuídos no intervalo 4,1 e 4,9. Os valores de  $\theta^{(i)}$  das figuras (4.10)



são os mesmos das figuras (4.5), sendo que nas figuras (4.10) ocorre a presença de um sincronismo nos tempos dos disparos, o que não ocorria nas figuras (4.5).

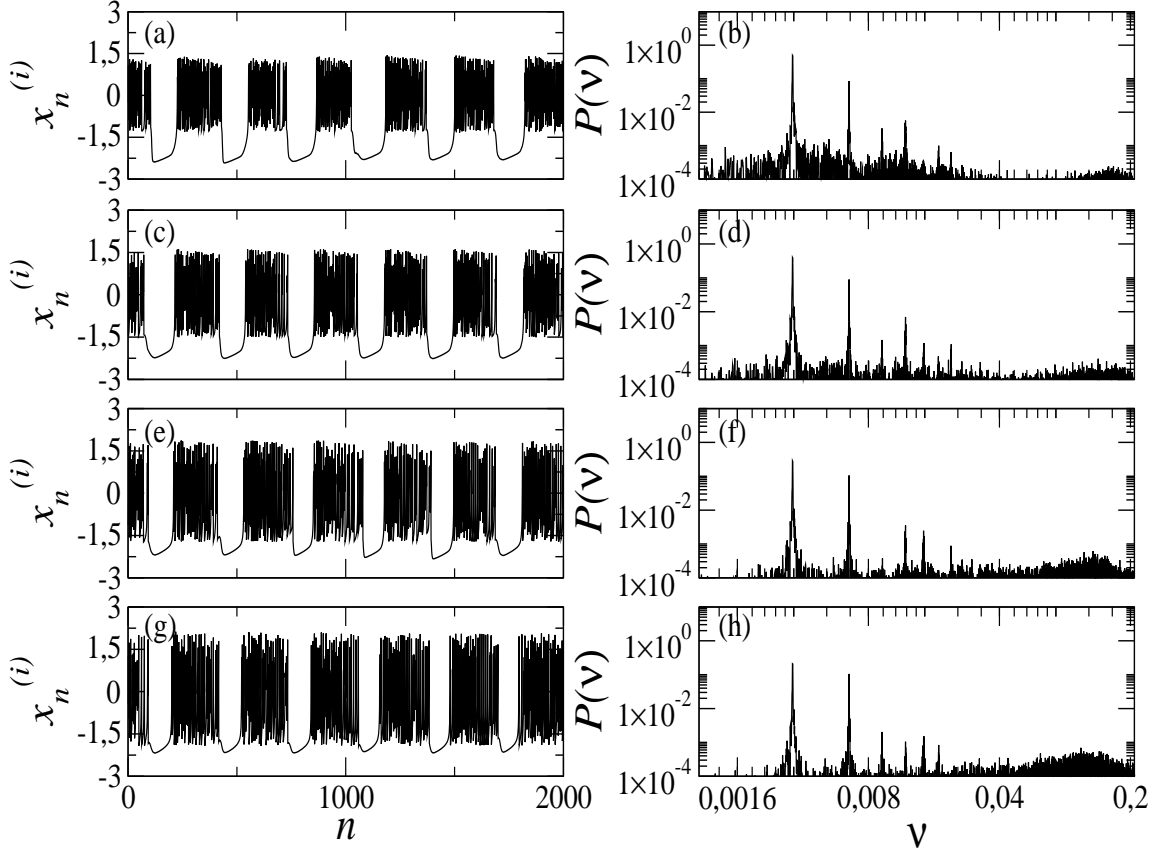


Figura 4.10: Rede de mapas de Rulkov com acoplamento global,  $\varepsilon = 0, 1$ ,  $N = 257$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias, e  $\theta^{(i)}$  distribuídos uniformemente no intervalo entre 4,1 e 4,9. (a)  $x_n^{(i)} \times n$  e (b) espectro de frequência para  $\theta^{(i)} = 4, 1$ . (c)  $x_n^{(i)} \times n$  e (d) espectro de frequência para  $\theta^{(i)} = 4, 3$ . (e)  $x_n^{(i)} \times n$  e (f) espectro de frequência para  $\theta^{(i)} = 4, 6$ . (g)  $x_n^{(i)} \times n$  e (h) espectro de frequência para  $\theta^{(i)} = 4, 9$ .

O sincronismo nos disparos ocorre com uma frequência bem definida, o pico maior dos espectros de frequência é comum a todos os sítios da rede. Os demais picos são os harmônicos desta frequência principal dos disparos. Já o valor da variável de estado durante a dinâmica rápida do mapa não sincronizam, sendo as suas dinâmicas totalmente irregulares, como é visto no espectro para as altas frequências, figuras (4.10b), (4.10d), (4.10f) e (4.10g).

Para um acoplamento global com  $\varepsilon = 0, 1$  não ocorre a sucessão de picos caóticos para nenhum valor de  $\theta^{(i)}$  no intervalo entre 4,1 e 4,9, ver figuras (4.10a), (4.10c), (4.10e) e (4.10g). Aumentando ou diminuindo a intensidade do acoplamento, a rede de mapas apresenta estados de disparos mais coerentes ou incoerentes, assim torna-se necessário um diagnóstico desta sincronização e compreender a influência

do campo médio nos disparos dos sítios da rede.

Uma forma de se medir a sincronização da rede é através do campo médio, equação (4.39), pois quando os sítios da rede estão sincronizados, o campo médio possui a evolução temporal muito semelhante aos sítios da rede que estão sincronizados. A análise do estudo da sincronização através do campo médio, para uma rede de  $N = 257$  mapas de Rulkov acoplados, com  $\theta^{(i)}$  distribuídos de forma uniforme no intervalo 4,1 e 4,9, condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias encontra-se nas figuras (4.11). Na figura (4.11a) a dinâmica do campo médio para três valores de  $\varepsilon$ , a comparação da evolução temporal de  $\langle X \rangle_n$  e  $x_n^{(i)}$  para o valor de  $\varepsilon = 0, 1$  está na figura (4.11b) e os espectros de frequência dos campos médios da figura (4.11a) encontram-se nas figuras (4.11c), (4.11d) e (4.11e).

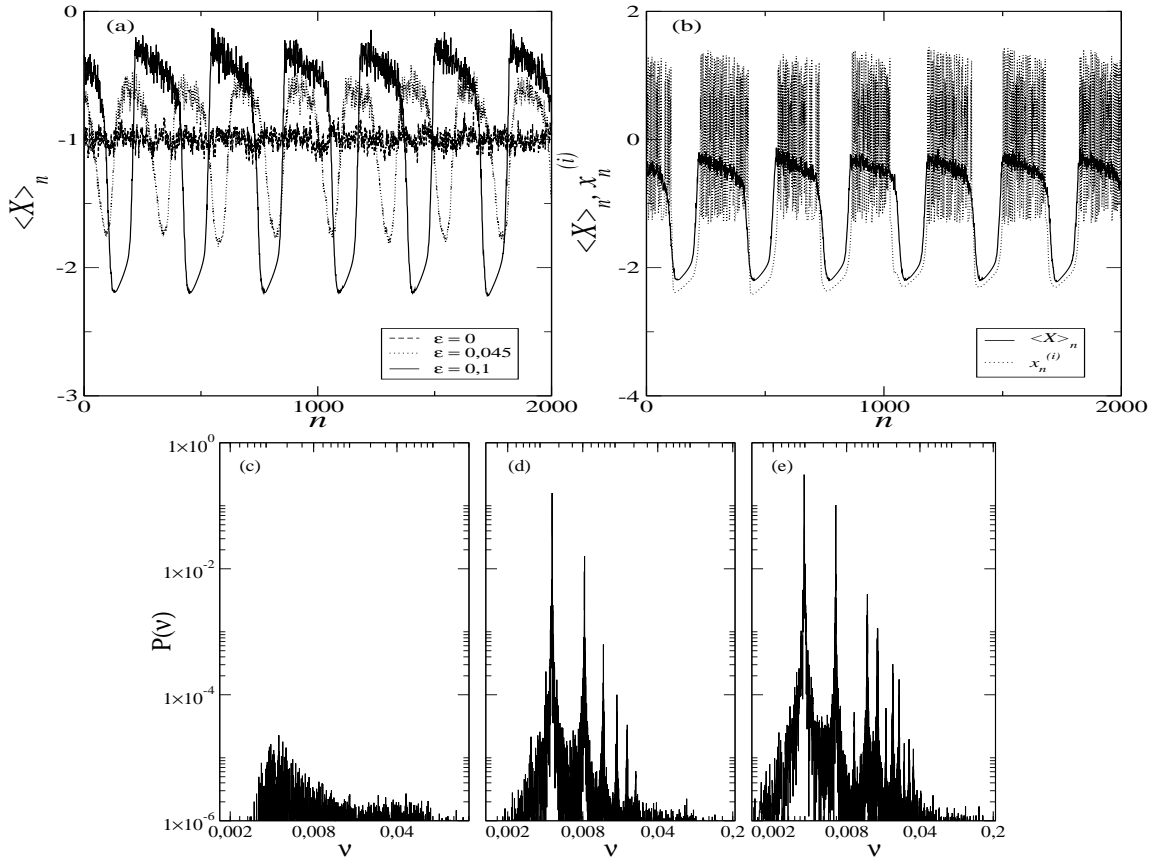


Figura 4.11: Redes de mapas de Rulkov com acoplamento global,  $N = 257$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias, e  $\theta^{(i)}$  distribuídos uniformemente no intervalo entre 4,1 e 4,9. (a)  $\langle X \rangle_n \times n$  para três valores de  $\varepsilon$ . (b) Evolução temporal de  $\langle X \rangle_n$  e  $x_n^{(i)}$  para  $\varepsilon = 0, 1$ . (c) Espectro de frequência para  $\varepsilon = 0$ . (d) Espectro de frequência para  $\varepsilon = 0,04$ . (e) Espectro de frequência para  $\varepsilon = 0,1$ .

Na rede dos mapas de Rulkov quanto maior o valor de  $\varepsilon$ , maior será o variação do valor de  $\langle X \rangle_n$ , como se observa na figura (4.11a). O aumento na variação

do valor de  $\langle X \rangle_n$  ocorre devido aos sítios da rede dispararem quase simultaneamente, e  $\langle X \rangle_n$  acompanha a dinâmica dos sítios. Para um sistema completamente dessincronizado, o campo médio oscila próximo de um valor constante, devido ao fato que todos os sítios da rede não guardarem nenhuma relação entre si.

Quando o valor de  $\varepsilon = 0, 1$  a evolução de  $\langle X \rangle_n$  acompanha os disparos, como nota-se na figura (4.11b), que estão sincronizados. Já durante o intervalo de tempo que está ocorrendo os disparos, os picos dos sítios da rede não sincronizam, assim, o valor de  $\langle X \rangle_n$  não acompanha a dinâmica dos picos, apresentando apenas uma pequena oscilação próximo de um valor constante. Como o campo médio acompanha a dinâmica dos disparos dos sítios da rede, o seu espectro de frequências é semelhante aos espectros dos sítios, com a presença de uma baixa frequência igual aos disparos, o pico maior do espectro na figura (4.39e) e seus harmônicos. As altas frequências contribuem pouco para o espectro do campo médio, pois os picos dos sítios da rede não apresentarem qualquer co-relação.

Para a rede com  $N = 257$  mapas de Rulkov com acoplamento global, para o valor de  $\varepsilon = 0, 045$  o espectro de frequência, figura (4.11d), é semelhante ao da figura (4.11e), apenas uma maior participação das altas frequências no espectro. Quando  $\varepsilon = 0$  os sítios da rede não apresentam qualquer co-relação e o espectro de frequência é muito semelhante ao espectro de um sinal ruidoso, figura (4.11c).

Para compreender a influência do campo médio da rede no surgimento e desaparecimento dos disparos, é necessário olhar para a rede de mapas bi-dimensional, equação (4.38), como uma rede de mapas unidimensionais acoplados. Quando os disparos da rede estão sincronizados, as dinâmicas regulares das variáveis rápidas estão localizadas junto ao ponto fixo  $x_1^*$ , com os valores de  $x_n^{(i)}$  e  $y_n^{(i)}$  aumentando lentamente. Neste caso a evolução de  $x_n^{(i)}$  dado pela equação (4.38) pode ser aproximado por uma rede de mapas unidimensionais [16], com o termo de acoplamento aproximado por  $\varepsilon \langle X \rangle_n = \varepsilon x_n^{(i)}$ ,

$$x_{n+1}^{(i)} = \frac{\theta^{(i)}}{1 + (x_n^{(i)})^2} + \gamma^{(i)} + \varepsilon x_n^{(i)}. \quad (4.40)$$

A partir da equação (4.40) é possível fazer o diagrama de bifurcação  $x_n^{(i)} \times \gamma^{(i)}$  para diferentes valores de  $\varepsilon$ . Nas figuras (4.12) encontra-se o diagrama de bifurcação  $x_n^{(i)} \times \gamma^{(i)}$  para  $\varepsilon = 0, 2$  e  $\theta^{(i)}$  iguais a 4,1 e 4,4. Os símbolos  $\circ$  são os pontos nos quais ocorrem a bifurcação sela-nó,  $\bullet$  são os pontos da crise do atrator caótico e os quadrados abertos são o começo da duplicação de período.

A presença do acoplamento na rede não altera o valor dos pontos para os quais ocorrem as crises do atrator caótico, apenas os pontos em que ocorrem as bifurcações sela nó são alteradas. Obtendo os pontos fixos para o mapa (4.40) e a sua equação de autovalor, substituindo o ponto fixo  $x_1^*$  ou  $x_2^*$  na equação de autovalor e igualando a 1, é obtido a equação para a bifurcação sela-nó [59],

$$\theta^{(i)} = -\frac{2}{27} \frac{\gamma^{(i)} \left[ (\gamma^{(i)})^2 + 9(1 - \varepsilon)^2 \right] - \left[ (\gamma^{(i)})^2 - 3(1 - \varepsilon)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{(1 - \varepsilon)^2}. \quad (4.41)$$

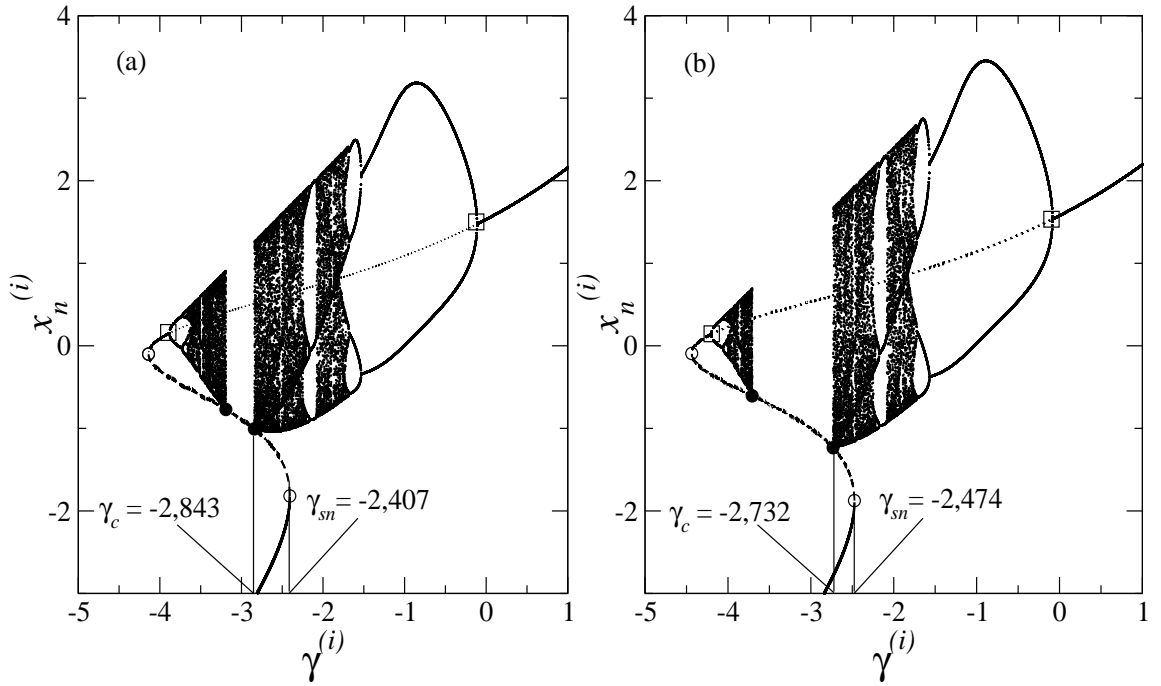


Figura 4.12: Diagrama de bifurcação,  $x_n^{(i)} \times \gamma^{(i)}$ , para  $\varepsilon = 0, 2$ , sendo  $\circ$  o pontos da bifurcação sela-nó,  $\bullet$  a crise do atrator caótico e os quadrados abertos o começa da duplicação de período . (a)  $\theta^{(i)} = 4, 1$  e (b)  $\theta^{(i)} = 4, 4$ .

Na figura (4.13) está o diagrama de bifurcação  $\theta^{(i)} \times \gamma^{(i)}$  para três diferentes valores da intensidade do acoplamento. A primeira observação seria o aumento do comprimento da reta  $g$ , que está relacionado com o aumento da duração dos disparos.

O aumento das retas  $g$  ocorre devido ao distanciamento entre as curvas  $L_{12}$  e  $L_h$ , como pode-se observar na figura (4.13). Quando o valor de  $\varepsilon$  é diferente de 0 as curvas  $L_{12}$  e  $L_h$  não se encontram, isso faz com que não ocorra mais o caos contínuo nos sítios da rede. A medida que o valor de  $\varepsilon$  vai aumentando, os valores de  $\gamma^{(i)}$  da curva  $L_{12}$  vão se aproximando.

A dinâmica rápida de cada mapa da rede é influenciada pelo campo médio e pela variável lenta do mapa,  $y_n^{(i)} \equiv \gamma^{(i)}$ . A medida em que o sítio  $(i)$  se aproxima da curva  $L_{12}$ , figura (4.13), ele torna-se mais sensível ao acoplamento, sendo influenciado pelos demais sítios da rede. Quando cada sítio cruza a curva  $L_{12}$ ,  $x_n^{(i)}$  começa a disparar, aumentando o valor do campo médio e o valor de  $\gamma$ . Dessa forma, um grande número de sítios são envolvidos simultaneamente durante essa transição, ocorrendo uma sincronização no começo e no fim de cada disparo [59].

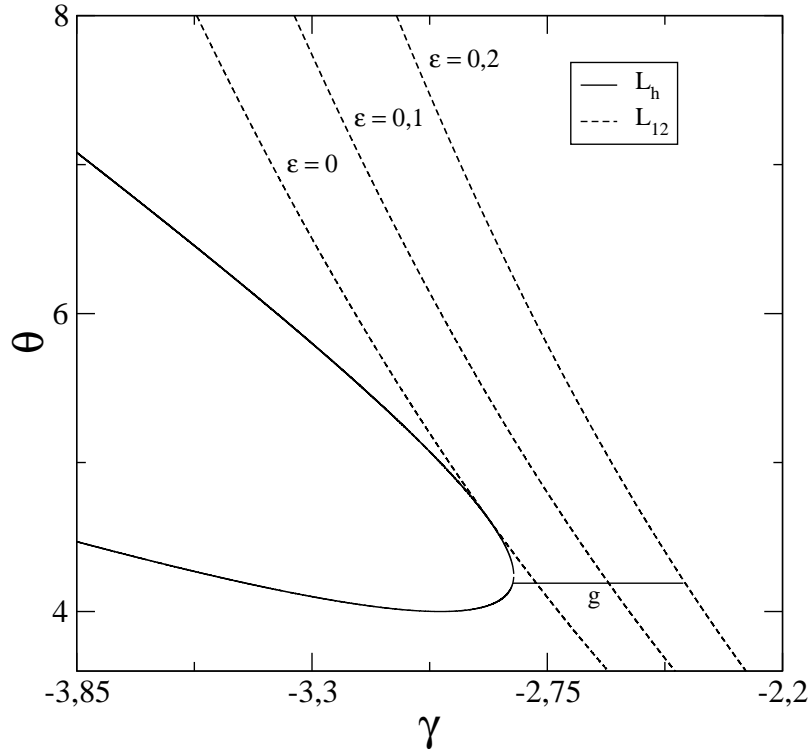


Figura 4.13:  $\theta \times \gamma$ , diagrama de bifurcação do mapa (4.40) para três valores da intensidade do acoplamento  $\epsilon$ .

## 4.5 Acoplamento Tipo Lei de Potência

Um outro acoplamento interessante no laboratório de mapas acoplados é o acoplamento de alcance variado. Este acoplamento já foi descrito no capítulo anterior desta tese. Para uma rede de mapas de Rulkov acoplados, o acoplamento de alcance variado pode ser expresso da seguinte forma,

$$x_{n+1}^{(i)} = \frac{\theta^{(i)}}{1 + (x_n^{(i)})^2} + y_n^{(i)} + \frac{\epsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1, j \neq i}^{N'} \frac{x_n^{(i+j)} + x_n^{(i-j)}}{j^\alpha},$$

$$y_{n+1}^{(i)} = y_n^{(i)} - \sigma x_n^{(i)} - \beta. \quad (4.42)$$

sendo  $\alpha$  o alcance do acoplamento linear nas variáveis rápidas dos mapas de Rulkov.

O interesse na utilização do acoplamento de alcance variado, no estudo da dinâmica dos mapas de Rulkov surge devido as conexões fractais encontradas em sistemas neurológicos reais [73]. Assim, este modelo tenta estudar qual o comportamento dos neurônios à medida que o alcance do acoplamento entre eles muda.

A dinâmica das variáveis  $x_n^{(i)}$  para os sítios com os valores dos parâmetros não lineares dos mapas iguais a 4,1 , 4,3, 4,6 e 4,9 estão nas figuras (4.14a), (4.14c),

(4.14e) e (4.14g), respectivamente, para uma rede de  $N = 257$  mapas de Rulkov acoplados,  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\alpha = 0,5$  e  $\theta^{(i)}$  distribuídos uniformemente no intervalo entre 4,1 e 4,9. Os espectros de frequência (transformada de Fourier retangular) das variáveis  $x_n^{(i)}$  encontram-se nas figuras (4.14b), (4.14d), (4.14f) e (4.14h).

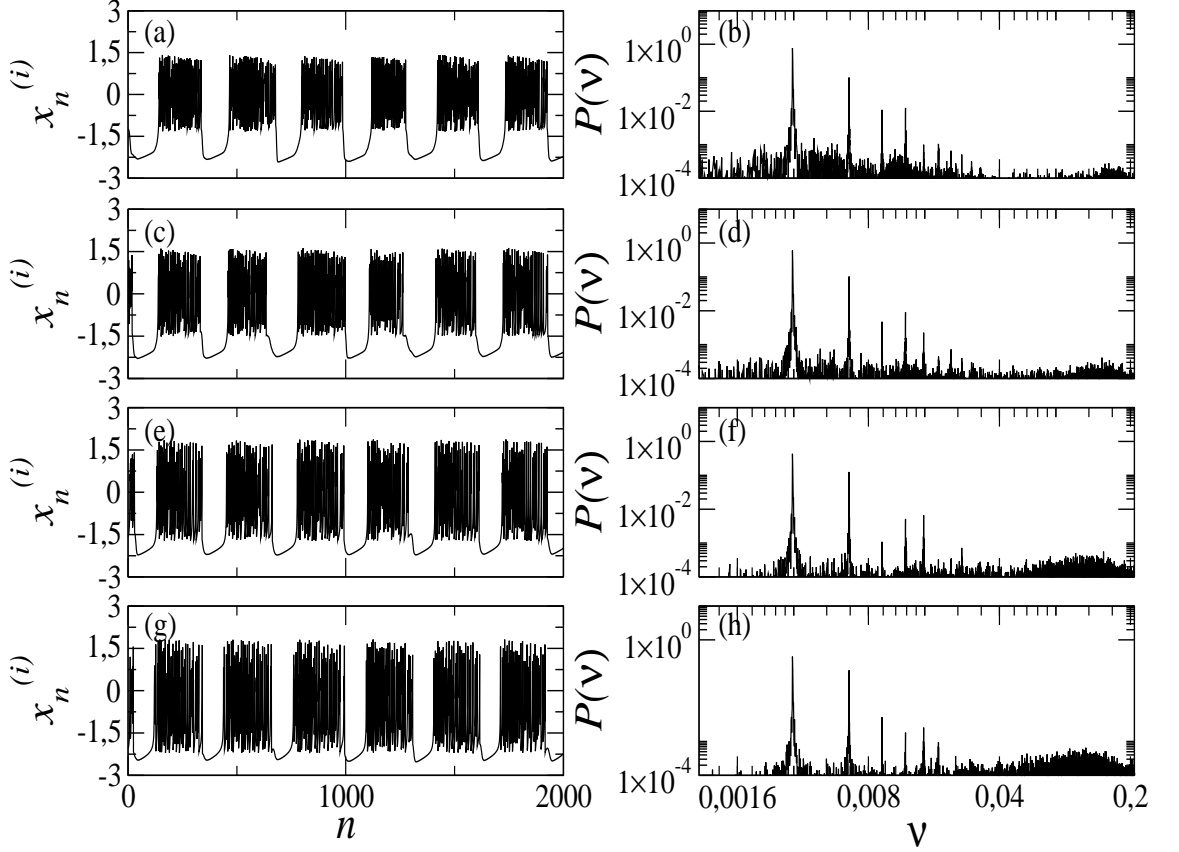


Figura 4.14: Rede de mapas de Rulkov com  $N = 257$  sítios,  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\alpha = 0,5$  e  $\theta^{(i)}$  distribuído uniformemente no intervalo 4,1 e 4,9. (a)  $x_n^{(i)} \times n$  e (b) o espectro de frequências para o mapa com  $\theta^{(i)} = 4,1$ . (c)  $x_n^{(i)} \times n$  e (d) o espectro de frequências para o mapa com  $\theta^{(i)} = 4,3$ . (e)  $x_n^{(i)} \times n$  e (f) o espectro de frequências para o mapa com  $\theta^{(i)} = 4,6$ . (g)  $x_n^{(i)} \times n$  e (h) o espectro de frequências para o mapa com  $\theta^{(i)} = 4,4$ .

Nota-se nas figuras (4.14a), (4.14c), (4.14e) e (4.14g), que as dinâmicas das variáveis de estado rápidas apresentam um comportamento semelhante, com uma frequência característica nos disparos, como pode ser observado nos espectros de frequência nas figuras (4.14b), (4.14d), (4.14f) e (4.14h), no qual todas possuem o mesmo pico de frequência. Apesar dos disparos possuírem comportamentos semelhantes, os picos não possuem nenhuma correlação.

Diminuindo o alcance do acoplamento, figuras (4.15) com  $\alpha = 2$ , os parâmetros não lineares exercem uma maior influência na dinâmica do sítio  $(i)$ , como é mostrado nas figuras (4.15a), (4.15c), (4.15e) e (4.15g), para uma rede de  $N = 257$

mapas de Rulkov acoplados e  $\epsilon = 0, 1$ .

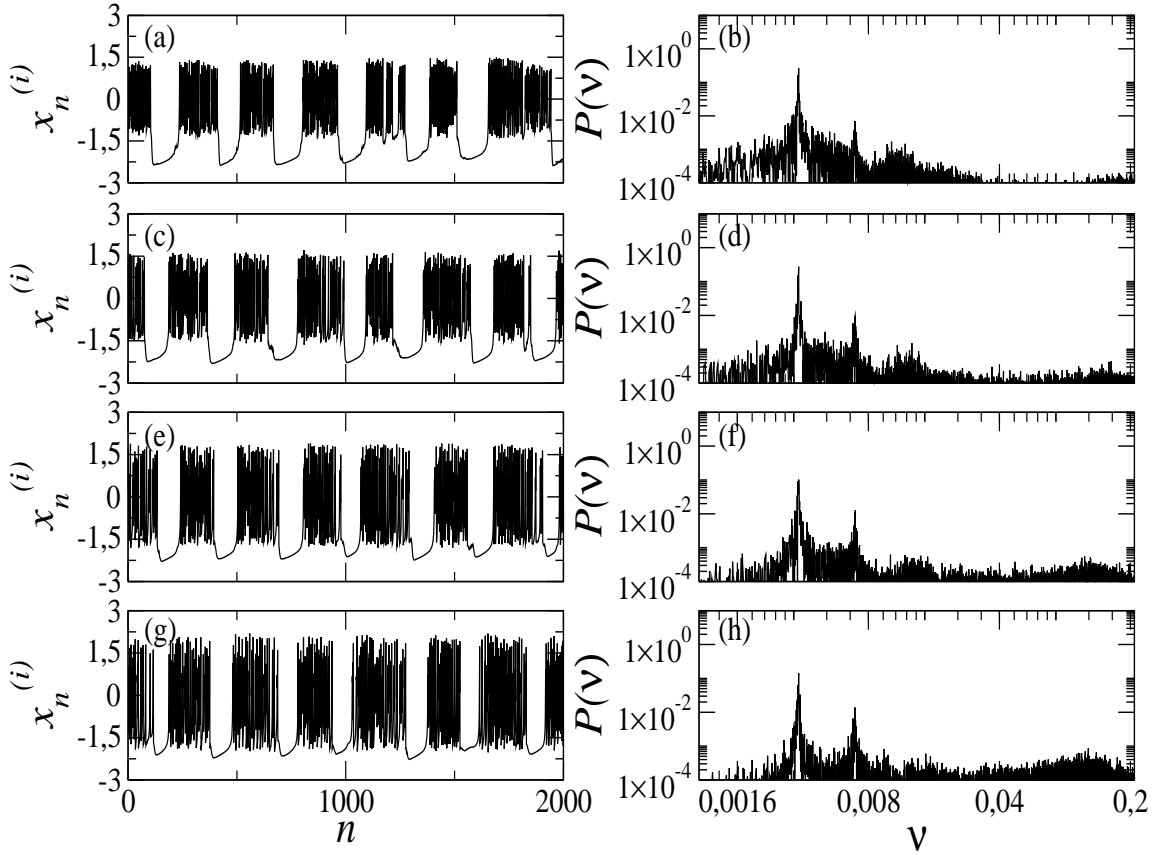


Figura 4.15: Rede de mapas de Rulkov com  $N = 257$  sítios,  $\epsilon = 0, 1$ ,  $\alpha = 2$  e  $\theta^{(i)}$  distribuído uniformemente no intervalo 4,1 e 4,9. (a)  $x_n^{(i)} \times n$  e (b) o espectro de freqüências para o mapa com  $\theta^{(i)} = 4, 1$ . (c)  $x_n^{(i)} \times n$  e (d) o espectro de freqüências para o mapa com  $\theta^{(i)} = 4, 3$ . (e)  $x_n^{(i)} \times n$  e (f) o espectro de freqüências para o mapa com  $\theta^{(i)} = 4, 6$ . (g)  $x_n^{(i)} \times n$  e (h) o espectro de freqüências para o mapa com  $\theta^{(i)} = 4, 4$ .

Nas figuras (4.15a), (4.15c), (4.15e) e (4.15g), nota-se que para este valores de  $\epsilon$  e  $\alpha$  a rede apresenta disparos em tempos defasados, ficando mais nítido para valores de  $\theta^{(i)}$  bem diferentes. Os espectros de freqüências, que encontram-se nas figuras (4.15b), (4.15d), (4.15f) e (4.15h), observa-se que apesar de dispararem em tempos diferentes os sítios apresentam a mesma freqüência de disparos.

Para o valor de  $\alpha = 4$ , ou seja, um acoplamento com curto alcance, a dinâmica das variáveis rápidas de quatro sítios da rede (com  $\theta^{(i)} = 4, 1, 4, 3, 4, 6$  e  $4, 9$ ) e seus espectros de freqüências, para uma rede de  $N = 257$  sítios,  $\epsilon = 0, 1$  e  $\theta^{(i)}$  uniformemente distribuídos, estão nas figuras (4.16).

Agora, os sítios da rede apresentam uma forte influência dos termos não lineares, e o acoplamento não é suficiente para contrabalançar a influência do termo não linear, assim, os sítios da rede não apresentam mais a coerência nos disparos.

Apesar dos sítios da rede não apresentarem coerência nos disparos, eles apresentam uma frequência comum, como pode ser observado nos espectros de frequência das figuras (4.16), nos quais existe um pico de baixa frequência com um banda larga comum aos quatro sítios analisados.

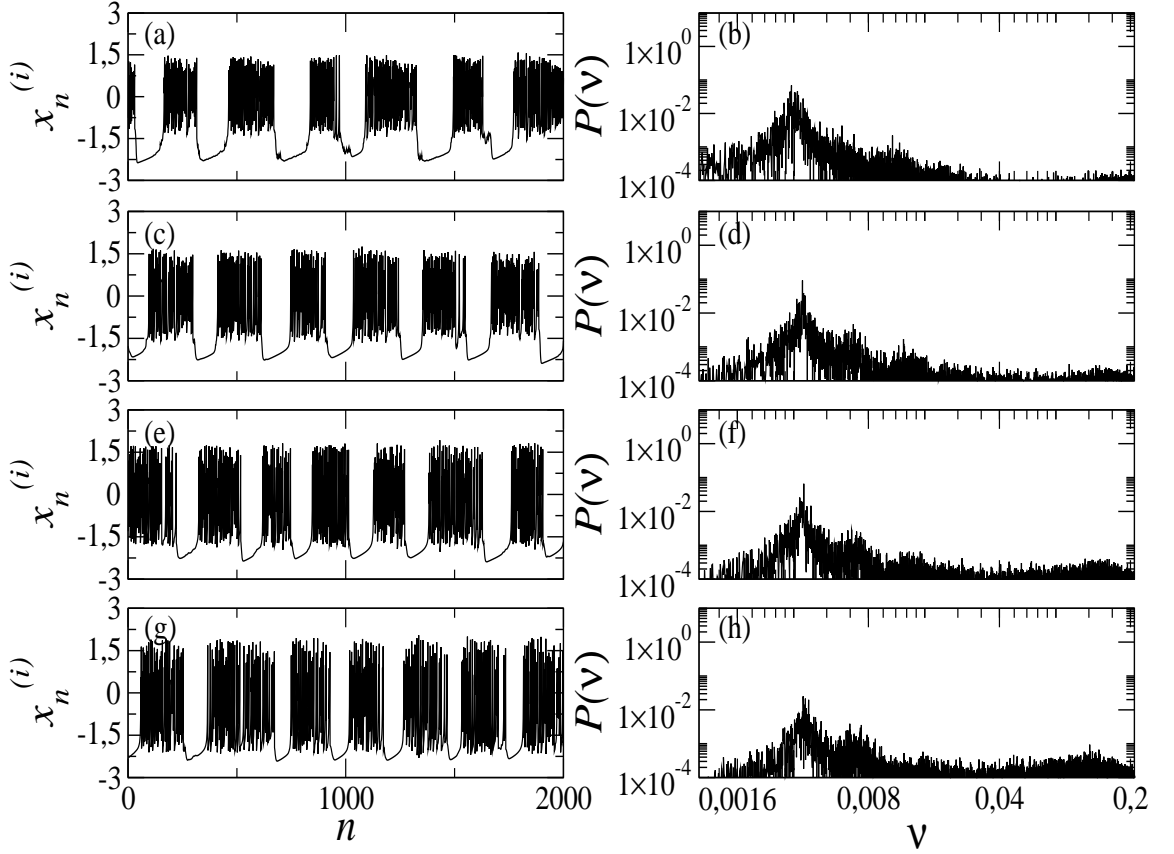


Figura 4.16: Rede de mapas de Rulkov com  $N = 257$  sítios,  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\alpha = 4$  e  $\theta^{(i)}$  distribuído uniformemente no intervalo 4,1 e 4,9. (a)  $x_n^{(i)} \times n$  e (b) o espectro de frequências para o mapa com  $\theta^{(i)} = 4,1$ . (c)  $x_n^{(i)} \times n$  e (d) o espectro de frequências para o mapa com  $\theta^{(i)} = 4,3$ . (e)  $x_n^{(i)} \times n$  e (f) o espectro de frequências para o mapa com  $\theta^{(i)} = 4,6$ . (g)  $x_n^{(i)} \times n$  e (h) o espectro de frequências para o mapa com  $\theta^{(i)} = 4,4$ .

As evoluções temporais do campos médios para uma rede de  $N = 257$  sítios,  $\varepsilon = 0,09$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias e três valores de  $\alpha$ ,  $\theta^{(i)}$  distribuídos no intervalo 4,1 e 4,9, e os valores  $\alpha$  iguais a 0,5, 2 e 4 encontram-se nas figuras (4.17).

Para  $\alpha = 0,5$  a dinâmica do campo médio possui valores máximos e mínimos, maiores do que para os outros valores de  $\alpha$ . O espectro de potência do campo médio da rede para estes valores dos parâmetros de acoplamento apresentam uma frequência característica, um pico no espectro de potência em aproximadamente 0,003, sendo os demais picos harmônicos desta frequência fundamental, figura



(4.17b). O comportamento coerente dos sítios faz o campo médio possuir um comportamento mais regular quanto a frequência nas suas oscilações, apesar dos picos não apresentarem um comportamento coerente.

Quando  $\alpha = 2$ , os máximos e mínimos do campo médio diminuem em relação à rede  $\alpha = 0,5$ , isto ocorre pois os sítios da rede começam a se comportar de forma mais incoerente, mas a baixa frequência característica possui o valor 0,003, figura (4.17c), devido a diminuição na amplitude de oscilação do campo médio a dinâmica das altas frequências, devido aos picos, começam a possuir um papel importante no espectro de frequências.

Diminuindo mais o alcance do acoplamento,  $\alpha = 4$ , os disparos dos sítios estão totalmente incoerentes, como pode ser observado na dinâmica do campo médio figura (4.17a), possuindo uma grande participação do sinal ruidoso no espectro de frequência.

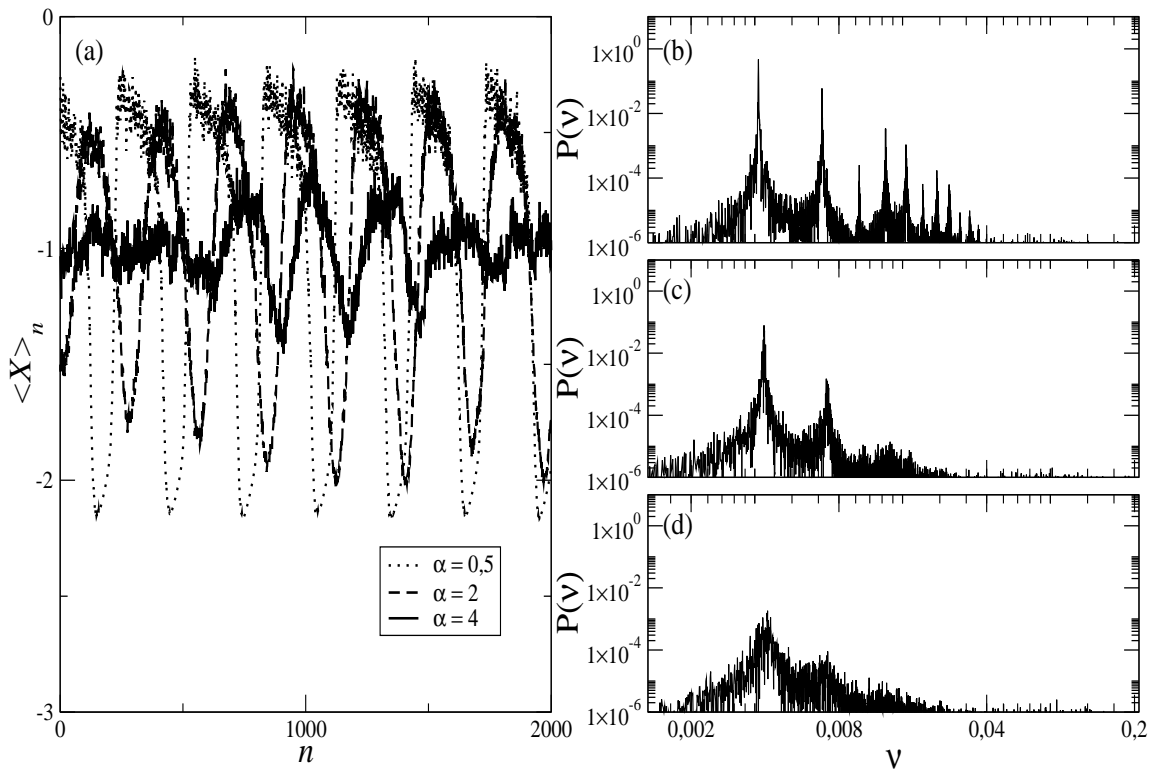


Figura 4.17: Rede de mapas de Rulkov com  $N = 257$  sítios,  $\varepsilon = 0,09$  e  $\theta^{(i)}$  distribuído uniformemente no intervalo 4,1 e 4,9. Em (a)  $\langle X \rangle_n \times n$ , para três valores de  $\alpha$ , (b) o espectro de frequências para  $\alpha = 0,5$ . (c) o espectro de frequências para  $\alpha = 2$  e (d) o espectro de frequências para  $\alpha = 4$ .

## Capítulo 5

# Sincronização de Fase e Frequência em Redes de Mapas de Rulkov Acoplados

No capítulo anterior foi estudada a dinâmica da variável rápida do mapa de Rulkov que possui duas escalas de tempo: a escala de tempo rápida (disparos) e a escala de tempo lenta (picos). As duas escalas de tempo eram influenciadas pelo parâmetro não linear, quando o mapa estava isolado, e pelos parâmetros de acoplamento quando os sítios estavam acoplados.

Neste capítulo será analisado o comportamento dos disparos e picos, quando os parâmetros do acoplamento são variados, levando o sistema de um estado dessincronizado para um estado sincronizado, e que tipos de sincronizações podem ser observadas na rede dos mapas de Rulkov em função do alcance e da intensidade do acoplamento da rede.

No estudo das transições de estados dessincronizado-sincronizado foram utilizados valores de  $\varepsilon$  pequenos, sendo que o valor máximo igual à 0,1. A utilização de valores pequenos para as intensidades do acoplamento entre os mapas é devida as observações dos potenciais elétricos pós-sinápticos dos neurônios serem menores do que  $1mV$ , valores pequenos comparados com as ddp (diferença de potencial) necessárias para as descargas dos neurônios (por volta de  $20mV$ ) ou os potenciais de ação médios (em torno de  $100mV$ ) [75].

As redes dos mapas de Rulkov desta tese possuem seus parâmetros não lineares distribuídos uniformemente, ou seja, os constituintes das redes não são idênticos, portanto não ocorre a formação de uma variedade de sincronização completa. Apesar de não ocorrer a sincronização completa e do valor de  $\varepsilon$  ser pequeno, outros tipos de sincronização são possíveis para os valores de  $\varepsilon$  inferiores à 0,1, como por exemplo, as sincronizações de fase e de frequência. Para o estudo da sincronização de fase foi necessário a definição de uma fase para os disparos em cada

instante de tempo. Através desta fase será possível retirar uma frequência, assim, será estudada a sincronização de fase e de frequência em função dos parâmetros do acoplamento. Quando os sítios da rede estão desacoplados ou com um fraco acoplamento, a fase sofre uma grande influência do parâmetro não linear do mapa, por isso serão utilizados os valores de  $\theta^{(i)}$  no intervalo entre 4,1 e 4,4 para uma melhor observação da fase dos sítios. Para uma análise quantitativa da sincronização de fase foi necessário a utilização do parâmetro de ordem de Kuramoto, e através do parâmetro de ordem se estudou a transição de fase para o estado sincronizado, semelhante à transição de Kuramoto, sendo observado o comportamento dos valores críticos da rede de diferentes tamanhos.

A partir da definição da frequência estudou-se o comportamento das frequências dos sítios da rede, quando a intensidade e o alcance do acoplamento foram variados, e para quais valores da intensidade e do alcance do acoplamento ocorre a sincronização de frequências. Outro estudo feito na rede dos mapas de Rulkov foi o controle da sincronização de frequência através da inserção de um sinal periódico externo, de amplitude  $d$  e frequência  $\omega$ , em alguns sítios da rede. Já existem referências bibliográficas deste tipo de estudo, como uma forma de controle dos ritmos patológicos do cérebro, pois a sincronização de neurônios está presente em inúmeras doenças do sistema nervoso, como por exemplo: mal de Parkinson e epilepsia [76].

Para certos valores de  $d$  e  $\omega$  ocorre a sincronização de frequências entre os sítios da rede e o sinal externo, e a região do conjunto de parâmetros  $(d, \omega)$  que satisfazem a condição de sincronização é denominada língua de Arnold. Será observado como varia a largura da língua de Arnold e sua assimetria para diferentes valores de  $d$ , e como o alcance do acoplamento influencia na largura, assimetria e na forma da língua de Arnold. A intervenção experimental de um estímulo externo no cérebro pode ser realizada através da inserção de micro-eletrodos nas regiões doentes do cérebro produzindo uma corrente elétrica nessa região. A sincronização é responsável pelo estado patológico do cérebro, assim, deseja-se suprimir a sincronização de frequência dos neurônios através do sinal externo. O interesse deste estudo é compreender como ocorre a perda da sincronização e para que valores de frequências e amplitude do sinal externo não ocorra mais a sincronização.

Na literatura já existem alguns estudos sobre a perturbação externa em um rede de neurônios, podendo ser citado o trabalho de Rosenblum e Pikosky, no qual eles utilizaram o campo médio da rede atrasado como uma perturbação externa na rede de osciladores [77]. Ivanchenko e colaboradores propuseram o estudo da inserção de um sinal senoidal com amplitude  $d$  e frequência  $\omega$  em uma rede de mapas de Rulkov acoplados com acoplamento tipo campo médio [67], e este mesmo trabalho foi estendido para outros tipos de acoplamento da rede dos mapas de Rulkov [71] [78] [79].

## 5.1 Fase dos Disparos

Na dinâmica rápida do mapa de Rulkov estão presentes os disparos e os picos. Os disparos são uma sucessão de picos, sendo que a dinâmica temporal da variável rápida do mapa deixa seu comportamento regular com o surgimento do primeiro pico, caracterizado por um máximo no valor da variável lenta do mapa, como pode ser observado nas figuras (5.1). O início da fase é definida como o instante de tempo, no qual ocorre o surgimento do disparo, figuras (5.1), e o final da fase ocorre com o começo de um novo disparo.

A dinâmica da variável rápida e da lenta para apenas um mapa de Rulkov é observada nas figuras (5.1), sendo que o surgimento do disparo  $k$  na figura (5.1a) é caracterizado por um máximo na dinâmica de  $y_n$  na figura (5.1b). Assim torna-se possível definir os tempos nos quais surge cada disparo.

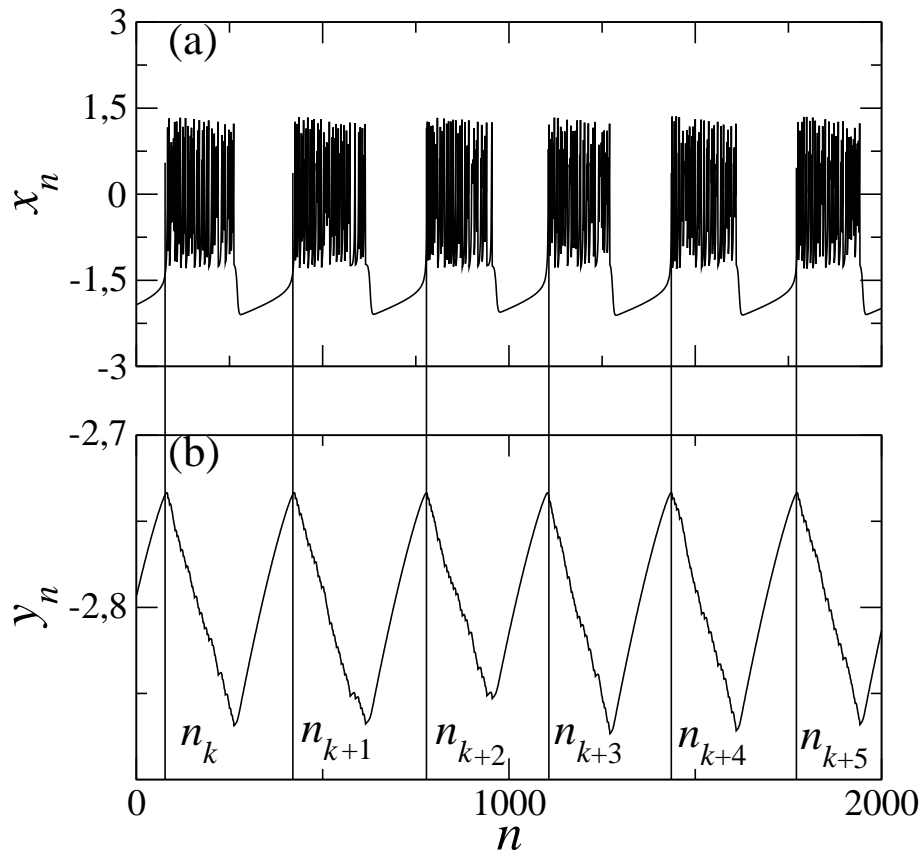


Figura 5.1: Evolução temporal das variáveis de estado do mapa de Rulkov, para  $\theta = 4,1$  e  $\sigma = \beta = 0,001$ . Em (a) evolução da variável rápida e (b) variável lenta.

A definição da fase dos disparos no tempo  $n$  é feito utilizando os tempos  $n_k$

das figuras (5.1), sendo que a expressão para a fase do sítio ( $i$ ) é dada pela relação

$$\phi_n^{(i)} = 2\pi k + 2\pi \frac{n - n_k}{n_{k+1} - n_k}. \quad (5.1)$$

O tempo  $n_k$  é o instante de tempo em que ocorre o disparo  $k$  e  $n_{k+1}$  é o instante onde surge o disparo  $k + 1$ . A fase de cada sítio aumenta linearmente com o tempo  $n$  e ao final de cada disparo a fase do sítio terá sofrido um acréscimo de  $2\pi$  em seu valor [67].

As fases dos sítios da rede são dependentes da intensidade de acoplamento, do alcance do acoplamento e do parâmetro não linear de cada sítio, como pode ser observado nas figuras (5.2). Nas figuras (5.2) são mostradas a evolução temporal das fases  $\phi_n^{(i)}$  para três sítios da rede com os valores de  $\theta^{(i)}$  iguais a 4,1 , 4,3 e 4,4 ,  $\sigma = \beta = 0,001$ , para uma rede com 251 mapas de Rulkov, com acoplamento tipo lei de potência e para nove diferentes valores do par ( $\varepsilon, \alpha$ ).

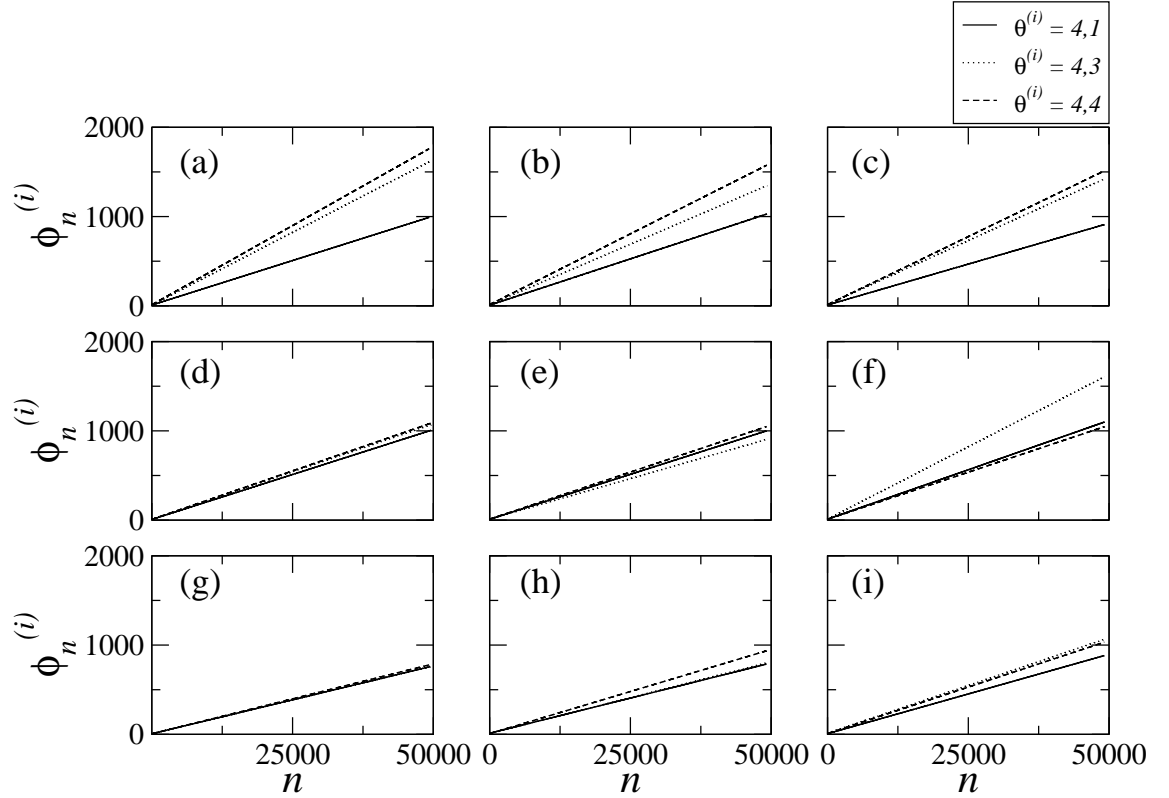


Figura 5.2: Evolução temporal das fases  $\phi_n^{(i)}$  de uma rede  $N = 251$  mapas de Rulkov acoplados, com condições iniciais aleatórias,  $\sigma = \beta = 0,001$ , com diferentes valores do alcance e da intensidade de acoplamento, para os valores do parâmetro não linear  $\theta^{(i)} = 4,1, 4,3$  e  $4,4$ . (a)  $\varepsilon = 0,015$  e  $\alpha = 0,5$ , (b)  $\varepsilon = 0,015$  e  $\alpha = 2$ , (c)  $\varepsilon = 0,015$  e  $\alpha = 4$ , (d)  $\varepsilon = 0,045$  e  $\alpha = 0,5$ , (e)  $\varepsilon = 0,045$  e  $\alpha = 2$ , (f)  $\varepsilon = 0,045$  e  $\alpha = 4$ , (g)  $\varepsilon = 0,1$  e  $\alpha = 0,5$ , (h)  $\varepsilon = 0,1$  e  $\alpha = 2$  e (i)  $\varepsilon = 0,1$  e  $\alpha = 4$ .

Quando a intensidade do acoplamento é pequena ( $\epsilon = 0,015$ ), figuras (5.2a), (5.2b) e (5.2c), independente do valor do alcance do acoplamento, as fases dos sítios da rede afastam-se umas das outras, ou seja, os sítios da rede encontram-se totalmente defasados. Com o aumento da intensidade do acoplamento, as fases dos sítios da rede tendem a aproximar os seus valores, isto fica mais evidente para um alcance elevado ( $\alpha = 0,5$ ), onde as fases dos sítios da rede são muito próximas. Para alcances menores, as fases dos sítios da rede se aproximam, mas ainda continuam defasadas, figuras (5.2d), (5.2e) e (5.2f).

Quando o valor de  $\epsilon$  é máximo para este modelo, a rede de mapas apresenta uma sincronização de fase para  $\alpha = 0,5$ , figura (5.2g). Para um alcance menor do acoplamento, a rede de mapas apresenta alguns sítios com fases iguais, mas a rede toda não apresenta um comportamento de sincronização de fases, como se observa na figura (5.2h). Diminuindo ainda mais o alcance do acoplamento ( $\alpha = 4$ ), alguns sítios da rede ainda apresentam um comportamento sincronizado, mas a rede toda não, figura (5.2i).

As figuras (5.2) mostram que o comportamento das fases da rede é dependente do parâmetro não linear, do alcance e da intensidade do acoplamento. Para uma baixa intensidade de acoplamento a evolução da fase deve-se principalmente ao valor de  $\theta^{(i)}$ , figuras (5.2a), (5.2b) e (5.2c). Aumentando a intensidade do acoplamento, agora o alcance começa a ter um papel importante, figuras (5.2c), (5.2d) e (5.2e). Para uma intensidade de acoplamento alta, apenas para alcances pequenos o sistema não apresenta um comportamento coerente entre as fases, figuras (5.2f), (5.2g) e (5.2i).

Até agora, foi analisado o comportamento sincronizado-dessincronizado de forma qualitativa, e para o estudo quantitativo será utilizando o parâmetro de ordem de Kuramoto, equação (3.12), e o parâmetro de ordem de Kuramoto médio (3.13).

A dinâmica temporal do parâmetro de ordem para uma rede de  $N = 251$  mapas de Rulkov acoplados, com condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias,  $\beta = \sigma = 0,001$ ,  $\theta^{(i)}$  distribuído de forma uniforme no intervalo 4,1 e 4,4, para dois valores de  $\epsilon$  e três valores de  $\alpha$ , encontra-se nas figuras (5.3).

Quando a intensidade do acoplamento é baixa  $\epsilon = 0,015$  não existe nenhuma coerência entre as fases dos sítios da rede, ver figuras (5.3a), (5.3c) e (5.3e). Para uma intensidade de acoplamento  $\epsilon = 0,1$  os sítios da rede podem apresentar a sincronização de fase, ou um comportamento coerente, ou fases totalmente incoerentes. Quando o valor de  $\alpha = 0,5$  a rede encontra-se em um estado de sincronização de fase, pois  $R_n = 1$ , figura (5.3b). Com a diminuição do valor de  $\alpha$  a sincronização de fase não ocorre, mas a rede apresenta instantes de tempo, em que as fases da rede possuem uma grande coerência entre si e instantes de tempo no qual esta coerência diminui, como é observado na figura (5.3d). Para o valor de  $\alpha = 4$  as fases dos sítios não apresentam nenhuma coerência entre si, como é mostrado na figura (5.3f).

A conclusão que pode ser retirada através das figuras (5.3b), (5.3d) e (5.3f) é que, para a intensidade de acoplamento  $\epsilon = 0,1$ , os disparos da rede ocorrem de forma sincronizada, ou apresentando uma certa coerência entre a maioria dos disparos ou uma total incoerência, dependendo apenas do valor da influência entre os

sítios à medida que eles estão afastados na rede, ou seja, do valor de  $\alpha$ .

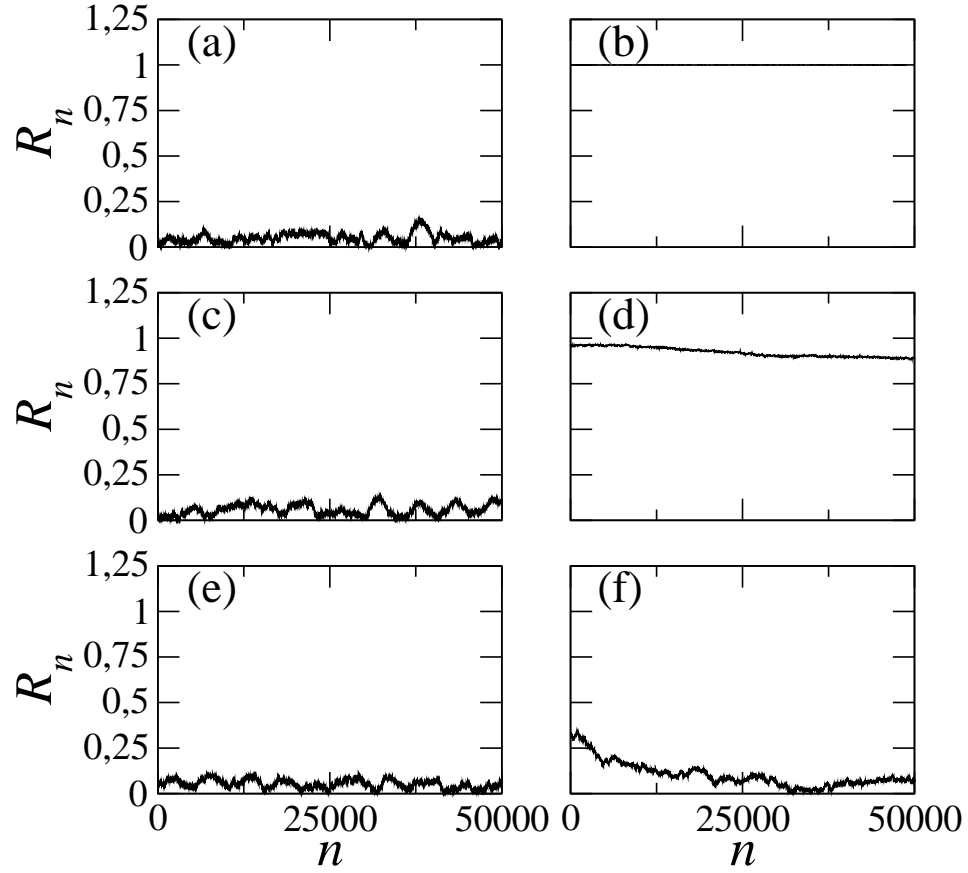


Figura 5.3: Evolução temporal do parâmetro de ordem de Kuramoto para uma rede de  $N = 251$  mapas de Rulkov acoplados,  $\beta = \sigma = 0,001$ , com  $\theta^{(i)}$  distribuídos de forma uniforme no intervalo 4,1 e 4,4 para diferentes valores do alcance e da intensidade de acoplamento. Para  $\varepsilon = 0,015$  : (a)  $\alpha = 0,5$ , (c)  $\alpha = 2$  e (e)  $\alpha = 4$ , e  $\varepsilon = 0,1$  : (b)  $\alpha = 0,5$ , (d)  $\alpha = 2$  e (f)  $\alpha = 4$ .

### 5.1.1 Parâmetro de ordem

Nas figuras (5.3) estudou-se a evolução temporal do parâmetro de ordem, para diferentes valores de  $\varepsilon$  e  $\alpha$ , observou-se que a rede de mapas de Rulkov pode apresentar um comportamento sincronizado, coerente ou incoerente entre as fases dos sítios da rede. Agora será feito uma análise do parâmetro de ordem médio para diferentes valores dos parâmetros de acoplamento, tentando compreender como ocorre a transição de um estado de fases incoerente, para um estado coerente até alcançar a sincronização de fase dos sítios da rede. A definição do parâmetro de

ordem médio é o mesmo utilizado no estudo da intermitência liga-desliga, expresso pela relação (3.13),

$$\bar{R} = \frac{1}{\tau - \tau_0} \sum_{n=\tau_0}^{\tau} R_n.$$

O acoplamento tipo lei de potência é controlado por dois parâmetros, por isso, a análise do parâmetro de ordem médio ocorrerá em duas etapas: na primeira etapa  $\alpha$  é fixado em três valores, para compreender o comportamento de  $\bar{R}$  em função  $\varepsilon$ . Na segunda etapa,  $\varepsilon$  é fixada em três diferentes valores, analisando o comportamento de  $\bar{R}$  em função  $\alpha$ .

O comportamento do parâmetro de ordem médio em função  $\varepsilon$  encontra-se na figura (5.4), para os valores de  $\alpha$  iguais à 0,5, 2 e 4, para uma rede de  $N = 251$  mapas de Rulkov acoplados, com  $\beta = \sigma = 0,001$ , com condições iniciais aleatórias e condições de contorno periódicas, para valores de  $\theta^{(i)}$  distribuídos de forma uniforme no intervalo 4,1 e 4,4. A primeira observação que pode ser retirada da figura (5.4) é para valores de  $\varepsilon$  menores do que 0,02, independe do valor de  $\alpha$ , o parâmetro de ordem médio possui um valor muito pequeno, indicando que as fases estão totalmente incoerentes. A medida que o valor de  $\varepsilon$  vai aumentando, o alcance do acoplamento começa a influenciar também no valor de  $\bar{R}$ .

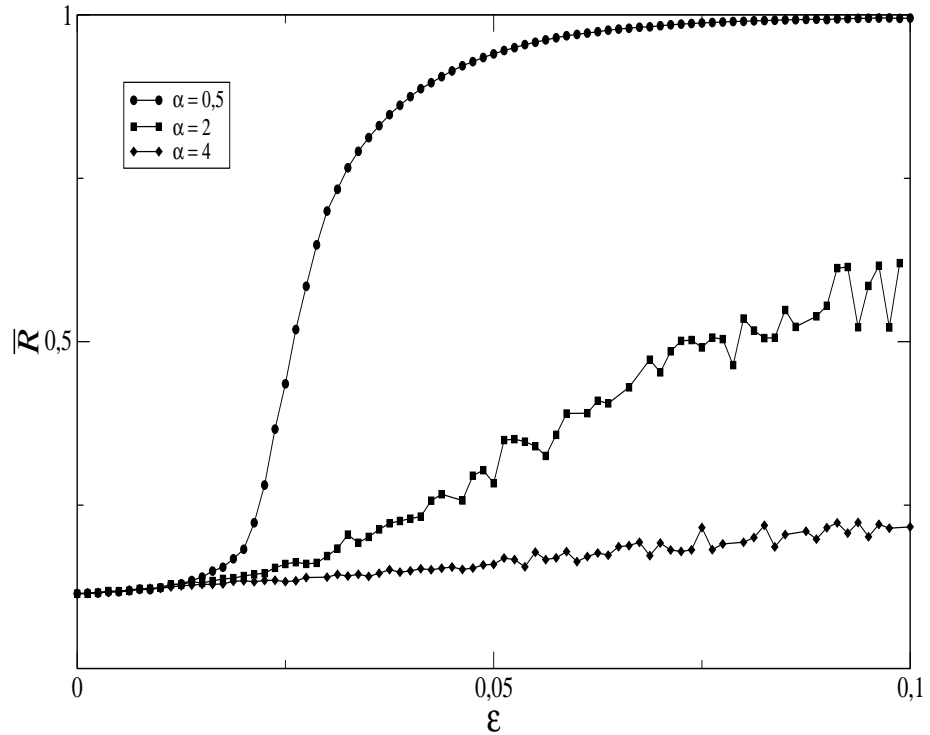


Figura 5.4: Comportamento do parâmetro de ordem de Kuramoto médio em função da intensidade do acoplamento, para um rede de 251 mapas de Rulkov acoplados com acoplamento tipo lei de potência e três diferentes alcances,  $\theta^{(i)}$  distribuídos uniformemente no intervalo 4,1 e 4,4,  $\sigma$  e  $\beta$  iguais a 0,001.



Quando o valor de  $\alpha = 0,5$  e  $0,045 > \varepsilon \geq 0,02$  o valor de  $\bar{R}$  aumenta de forma muito rápida, como pode ser observado na figura (5.4). Para valores de  $\varepsilon$  maiores do que 0,045 o valor de  $\bar{R}$  continua aumentando, mas agora este aumento ocorre mais suavemente até o valor de  $\varepsilon = 0,09$ , sendo que na rede um grande número de sítios apresentam fases coerentes. Na região de  $0,09 < \varepsilon \leq 0,1$  a rede apresenta um comportamento de  $\bar{R} = 1$ , ou seja, um comportamento de sincronização de fase. O aumento muito rápido do parâmetro de ordem médio, para o valor de  $\alpha = 0,5$  e  $\varepsilon$  no intervalo entre 0,02 e 0,045 sugere um comportamento tipo lei de potência nesta região e este comportamento será analisado nesta seção.

Para um alcance com  $\alpha = 2$  a rede de mapas de Rulkov não apresenta estado sincronizado, para o intervalo de  $\varepsilon$  da figura (5.4), sendo que o valor máximo do parâmetro de ordem no qual a rede apresenta uma maior coerência entre as fases ocorre para o valor de  $\varepsilon \approx 0,1$ . A rede de mapas com o valor de  $\alpha = 4$  apresenta comportamento incoerente das fases para este intervalo de  $\varepsilon$ .

O aumento rápido de  $\bar{R}$  em função de  $\varepsilon$ , somente foi observado para valores de  $\alpha = 0,5$ , ou seja, este aumento só ocorre para uma rede com um acoplamento de grande alcance. Para caracterizar esta rápida transição de fase incoerente-coerente será utilizado a análise da curva  $\bar{R} \times \varepsilon$  para redes com diferentes números de sítios.

A curva  $\bar{R} \times \varepsilon$  para redes de  $N$  iguais a 51, 251 e 451, e o valor de  $\alpha = 0,5$ , condições de contorno periódicas, e condições iniciais aleatórias,  $\sigma = \beta = 0,001$  e  $\theta^{(i)}$  retirados de uma distribuição uniforme entre 4,1 e 4,4 podem ser observados na figura (5.5).

Através da figura (5.5) nota-se, que independente do tamanho dos sítios da rede, e para um valor de  $\varepsilon = 0,02$ , o valor de  $\bar{R}$  começa a aumentar, ou seja, para este valor de  $\varepsilon$  tem-se uma intensidade do acoplamento crítico, representado por  $\varepsilon_c$ . Se a rede de mapas possui um valor de  $\varepsilon$  menor do que  $\varepsilon_c$  as fases dos sítios estão defasadas e quando o valor de  $N \rightarrow \infty$  o valor de  $\bar{R}$  vai a zero. Para valores de  $\varepsilon$  superiores a 0,035 o valor de  $\bar{R}$  não depende mais do tamanho da rede, possuindo o mesmo valor para os três tamanhos da rede, ver figura (5.5).

A caracterização da transição de fase incoerente-coerente é feita através da figura (5.6), onde está a curva  $\bar{R} \times |\varepsilon - \varepsilon_c|$  para uma rede de  $N = 451$  sítios acoplados, com  $\alpha = 0,5$  e  $\theta^{(i)}$  distribuídos de forma uniforme entre 4,1 e 4,4, com condições de contorno periódicas. Na região de transição incoerente-coerente existe uma lei de escala entre o parâmetro de ordem médio e a diferença entre  $\varepsilon$  e  $\varepsilon_c$ , próximo ao valor  $\varepsilon_c$ , como se observa na figura (5.6), dado pela seguinte relação matemática:

$$\bar{R} = R_0 |\varepsilon - \varepsilon_c|^\varsigma, \quad (5.2)$$

em que  $R_0 = 7,0558$  e  $\varsigma = 0,497 \pm 0,005$ .

A lei de potência, equação (5.2), é análoga ao comportamento observado no modelo de Kuramoto, um modelo de osciladores com acoplamento do tipo campo médio [80]. O valor de  $\varsigma$ , que ajusta a equação (5.2), concorda com o expoente característico da transição de fase magnética [81].

O parâmetro de ordem de Kuramoto médio depende do alcance do acoplamento, como se nota na figura (5.7) para uma rede de  $N = 251$  mapas de Rulkov

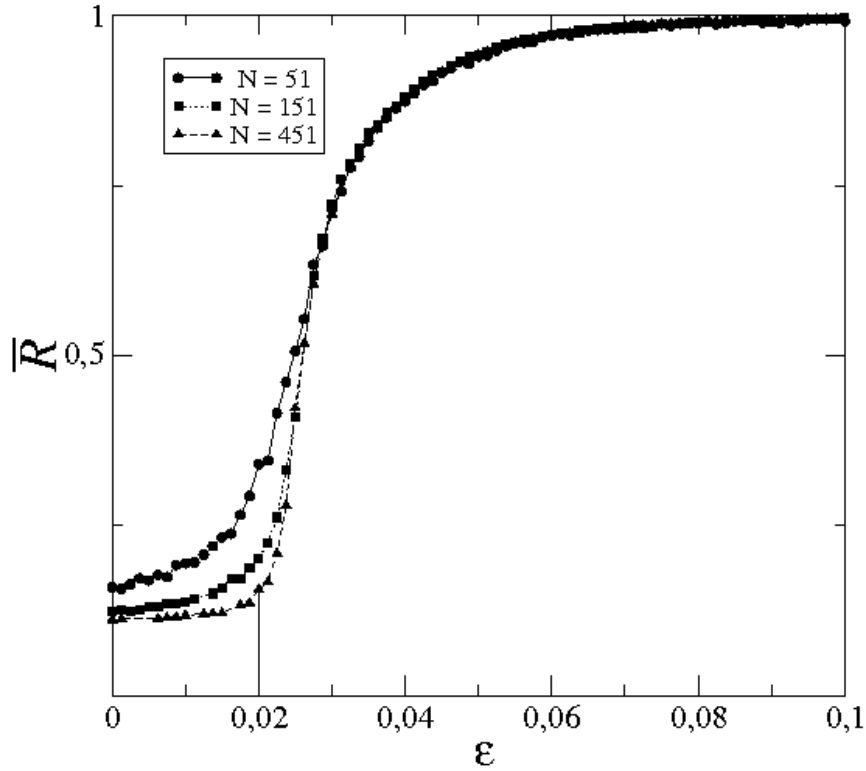


Figura 5.5: Comportamento do parâmetro de ordem médio em função da intensidade do acoplamento, para três redes do mapas de Rulkov acoplados, com  $\alpha = 0,5$ ,  $\sigma = \beta = 0,001$ , os parâmetros não lineares escolhidos no  $[4,1; 4,4]$  e condições de contorno periódicas.

acoplados,  $\sigma = \beta = 0,001$ ,  $\theta^{(i)}$  distribuído uniformemente no intervalo entre 4,1 e 4,4, com condições iniciais aleatórias e condições de contorno periódicas, para três diferentes valores da intensidade do acoplamento.

Quando o valor de  $\varepsilon$  é igual a 0,015 o alcance não influencia no valor de  $\bar{R}$ , mantendo-se constante para todos os valores de  $\alpha$  com pode ser observado na figura (5.7). Para  $\varepsilon = 0,045$ , a rede de mapas pode apresentar uma transição coerente-incoerente das fases, no qual essa transição apresenta uma rápida diminuição para valores de  $\alpha > 1$ . Com o valor de  $\varepsilon = 0,1$  a rede apresenta o estado de sincronização de fase, para valores de  $\alpha < 1$ .

No intervalo  $1 < \alpha < 3$  a rede de mapas de Rulkov com o valor de  $\varepsilon$  igual a 0,045 ou 0,1 apresenta uma transição de estado coerente-incoerente caracterizada por uma grande variação no valor de  $\bar{R}$ .

Para a observação no qual o valor de  $\alpha$  ocorre a transição de estado incoerente-coerente foi plotado na figura (5.8)  $\bar{R}$  em função de  $\alpha$  para três diferentes valores de  $N$ , com  $\varepsilon = 0,1$  e  $\theta^{(i)}$  distribuídos de forma uniforme entre 4,1 e 4,4. Através da figura (5.8) é possível obter o valor de  $\alpha$  para o qual independente do tamanho

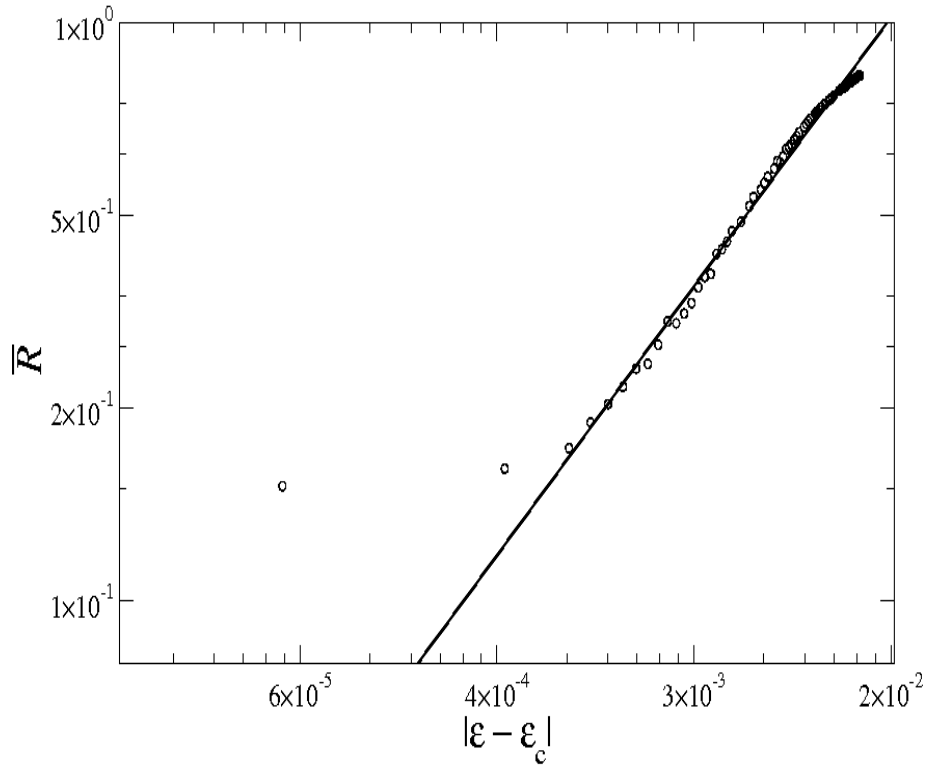


Figura 5.6: Parâmetro de ordem médio próximo ao a intensidade crítica do acoplamento, onde ocorre a transição incoerente-coerente, para uma rede dos mapas de Rulkov acoplados, com  $\alpha = 0,5$ ,  $\sigma = \beta = 0,001$ , os parâmetros não lineares escolhidos no  $[4,1; 4,4]$ ,  $N = 451$  e condições de contorno periódicas.

da rede o valor de  $\bar{R}$  começa a aumentar, este valor é  $\alpha_c \approx 3$ . As redes com valores de  $\alpha$  menores ou iguais a 1 não apresentam diferença no comportamento de  $\bar{R}$  neste intervalo.

## 5.2 Frequência dos disparos

A velocidade média do aumento no valor das fases dos disparos é a frequência [67]. A definição de frequência dos disparos, equação (5.3), é dada pela diferença entre as fases no instante de tempo em que é iniciada as medidas das fases,  $\phi_0^{(i)}$ , e as fases medidas quando  $n \rightarrow \infty$ .

$$\Omega^{(i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_n^{(i)} - \phi_0^{(i)}}{n}. \quad (5.3)$$

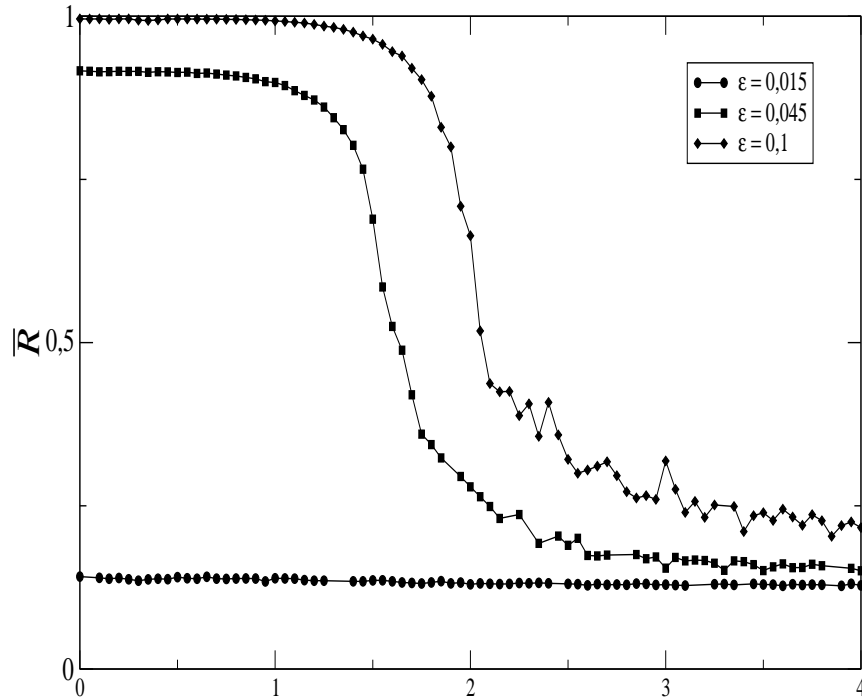


Figura 5.7: Parâmetro de ordem médio em função do alcance do acoplamento, para uma rede de  $N = 251$  mapas de Rulkov acoplados, três diferentes valores da intensidade de acoplamento,  $\sigma = \beta = 0,001$ ,  $\theta^{(i)}$  distribuídos uniformemente no intervalo  $[4,1; 4,4]$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias.

Assim, como para cada sítio da rede existe uma fase, também será associado uma frequência de disparos, que será dependente do valor do parâmetro não linear do mapa, do alcance e da intensidade do acoplamento, como se observa nas figuras (5.9), (5.10) e (5.11).

Nas figuras (5.9), (5.10) e (5.11) encontram-se as frequências  $\Omega^{(i)}$  dos sítios para os valores de  $\varepsilon$  iguais 0,015, 0,035, 0,045 e 0,07 em função das frequências dos sítios isolados  $\Omega_0^{(i)}$ , para  $N = 251$  mapas de Rulkov, com os valores  $\theta^{(i)}$  retirados de uma distribuição uniforme no intervalo 4,1 e 4,4, com os valores de  $\alpha$  iguais: figuras (5.9)  $\alpha = 0,5$ , figuras (5.10)  $\alpha = 2$  e figuras (5.11)  $\alpha = 4$ .

Para o valor de  $\alpha = 0,5$  e  $\varepsilon = 0,015$  as frequências dos disparos dos sítios da rede não são muito diferentes das frequências dos disparos dos sítios isolados, como pode ser observado na figura (5.9a) onde os pontos  $(\Omega^{(i)}, \Omega_0^{(i)})$  formam uma reta de  $45^\circ$  com a abscissa. A rede com valor de  $\varepsilon = 0,035$  e um mesmo alcance, já apresenta uma sincronização de frequência para valores de  $\theta^{(i)}$  próximos, apenas os extremos da distribuição não apresentam um estado sincronizado, figura (5.9b). Quando a rede possui o valor  $\varepsilon = 0,045$ , a rede está praticamente sincronizada em frequência, como é apresentado na figura (5.9c). Na figura (5.9d) a rede apresenta a sincronização de frequência, no qual todas os sítios da rede possuem a mesma frequência, para o valor  $\varepsilon = 0,07$ .

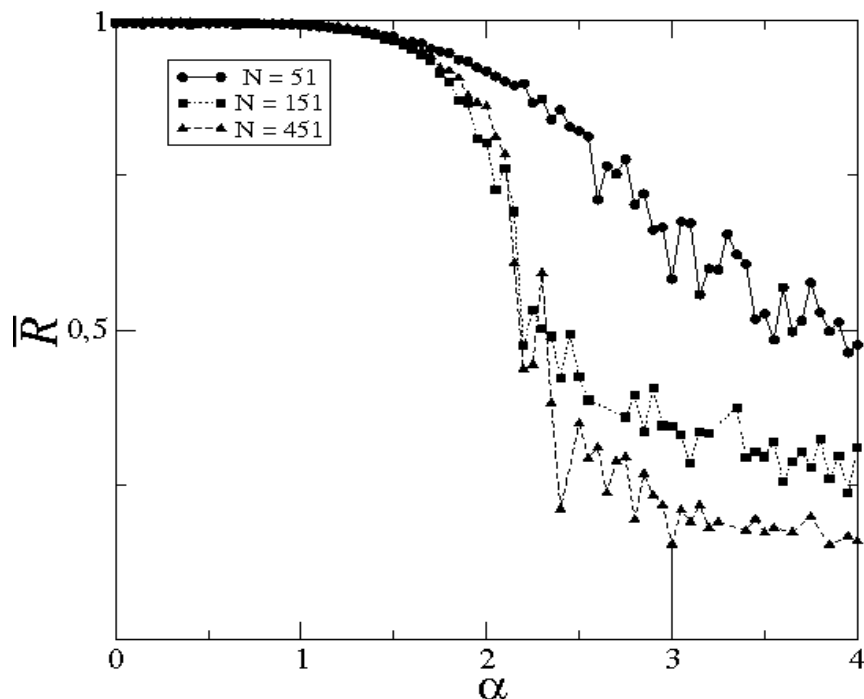


Figura 5.8: Parâmetro de ordem médio em função do alcance do acoplamento, para uma rede com  $\varepsilon = 0,1$ , três diferentes de  $N$ ,  $\sigma = \beta = 0,001$ ,  $\theta^{(i)}$  distribuídos uniformemente no intervalo  $[4,1; 4,4]$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias.

Quando o valor de  $\alpha = 2$  e a intensidade de acoplamento é igual 0,015, as frequências  $\Omega^{(i)}$  apresentam um diferença em relação às frequências dos sítios isolados, figura (5.10a). Com o valor de  $\varepsilon = 0,035$  as frequências dos sítios da rede começam a apresentar a tendência de formarem um platô de sincronização das frequências em função da frequência  $\Omega_0^{(i)}$ , como pode ser observado na figura (5.10b), comportamento diferente do apresentado na figura (5.9b), onde a rede apresentava um platô de sincronização com apenas alguns sítios fora dele. Na rede de mapas com  $\varepsilon = 0,045$ , figura (5.10c), as frequências dos sítios da rede apresentam oscilações próximas de uma frequência média  $\bar{\Omega} = 0,0229$  com um desvio de  $\sigma_{\Omega} = 0,0013$ . Para o valor de  $\varepsilon = 0,07$ , figura (5.10d), a rede de mapas não apresenta uma sincronização de frequências, como foi observado na figura (5.9d), mas as frequências  $\Omega^{(i)}$  estão próximas do valor médio  $\bar{\Omega} = 0,0197$  com um desvio de  $\sigma_{\Omega} = 0,00023$ . Para o valor de  $\varepsilon$  das figuras (5.10) as frequência dos disparos da rede não sincronizam, mas para valores próximos a 0,1 ocorre a sincronização de frequências.

Na rede no qual o valor de  $\alpha = 4$  e  $\varepsilon = 0,015$ , as frequências da rede com  $\varepsilon \neq 0$  são diferentes das frequências dos sítios isolados, como mostra a figura (5.11a). Aumentando ainda mais a a intensidade do acoplamento a rede diminui a diferença entre a menor e a maior frequência  $\Omega^{(i)}$  em função da frequência dos sítios isolados, como observa-se nas figuras (5.11b) e (5.11c) onde  $\varepsilon$  são iguais a 0,035

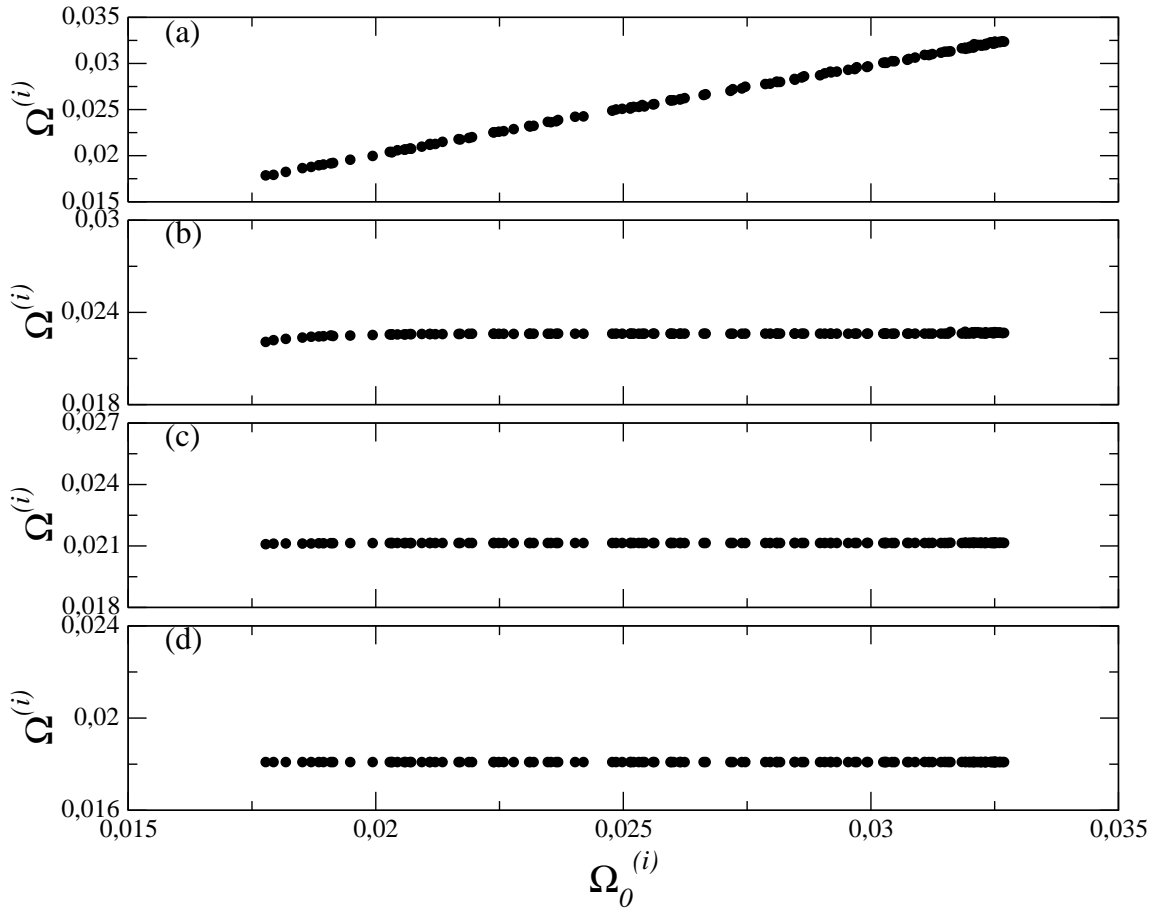


Figura 5.9: Frequências dos sítios da redes quando estão acoplados em função da frequência dos sítios isolados, para uma rede com  $N = 251$  mapas acoplados e  $\theta^{(i)}$  distribuídos uniformemente no intervalo  $[4,1; 4,4]$ ,  $\alpha = 0,5$  e quatro valores de  $\varepsilon$ : (a)  $\varepsilon = 0,015$ , (b)  $\varepsilon = 0,035$ , (c)  $\varepsilon = 0,045$  e (d)  $\varepsilon = 0,07$ , .

e 0,045, respectivamente. Quando a intensidade de acoplamento entre os sítios é igual a 0,07 as frequências  $\Omega^{(i)}$  dos sítios da rede apresentam um platô em torno da frequência média  $\bar{\Omega} = 0,0208$  com um desvio padrão de  $\sigma_{\Omega} = 0,0006$ , figura (5.11d). Na rede com  $\alpha = 4$ , não foi possível a sincronização de frequência para os valores de  $\varepsilon$  utilizados nesta tese.

Através das figuras (5.9), (5.10) e (5.11) pode-se observar que a sincronização de frequência é dependente do alcance e da intensidade do acoplamento, sendo que, quanto maior o valor de  $\varepsilon$  menores serão os valores das frequências dos sítios da rede, pois, o tempo entre os disparos aumentam.

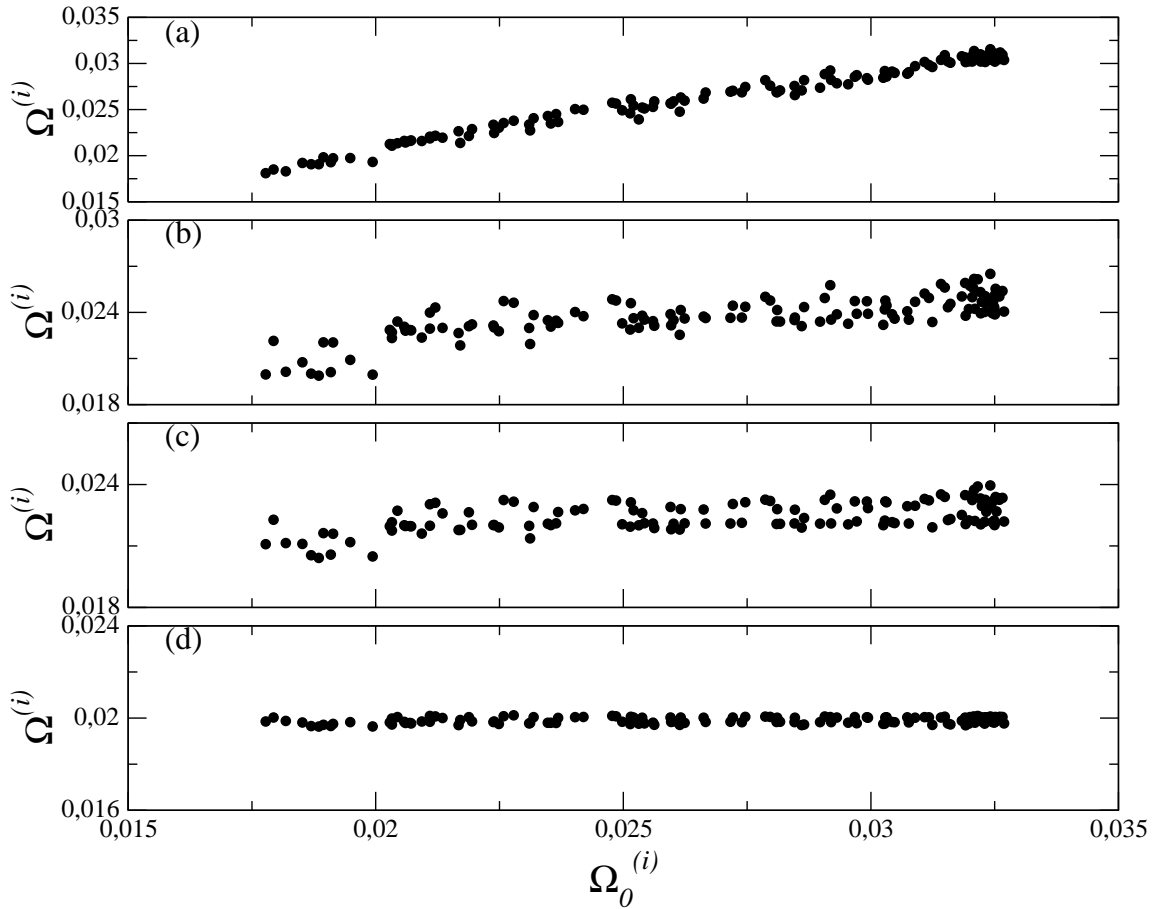


Figura 5.10: Frequência dos sítios da rede quando estão acoplados, em função das frequências dos sítios desacoplados, para uma rede com  $N = 251$  mapas acoplados e  $\theta^{(i)}$  distribuídos uniformemente no intervalo  $[4,1; 4,4]$ ,  $\alpha = 2$  e quatro valores de  $\varepsilon$ : (a)  $\varepsilon = 0,015$ , (b)  $\varepsilon = 0,035$ , (c)  $\varepsilon = 0,045$  e (d)  $\varepsilon = 0,07$ , .

### 5.3 Sincronização Com Um Forçamento Harmônico Externo

A inserção de um sinal externo em uma rede de neurônios tem sido utilizado como uma forma de controle de algumas doenças ou anomalias nessa rede, por exemplo mal de Parkinson e epilepsia [76]. A perturbação externa (*pinning*) é inserida experimentalmente através de microeletrodos na rede de neurônios [82]. Nesta tese as redes de neurônios são modeladas por uma rede de mapas de Rulkov acoplados, equações (4.42), nas quais serão introduzidas um sinal senoidal. Assim as equações

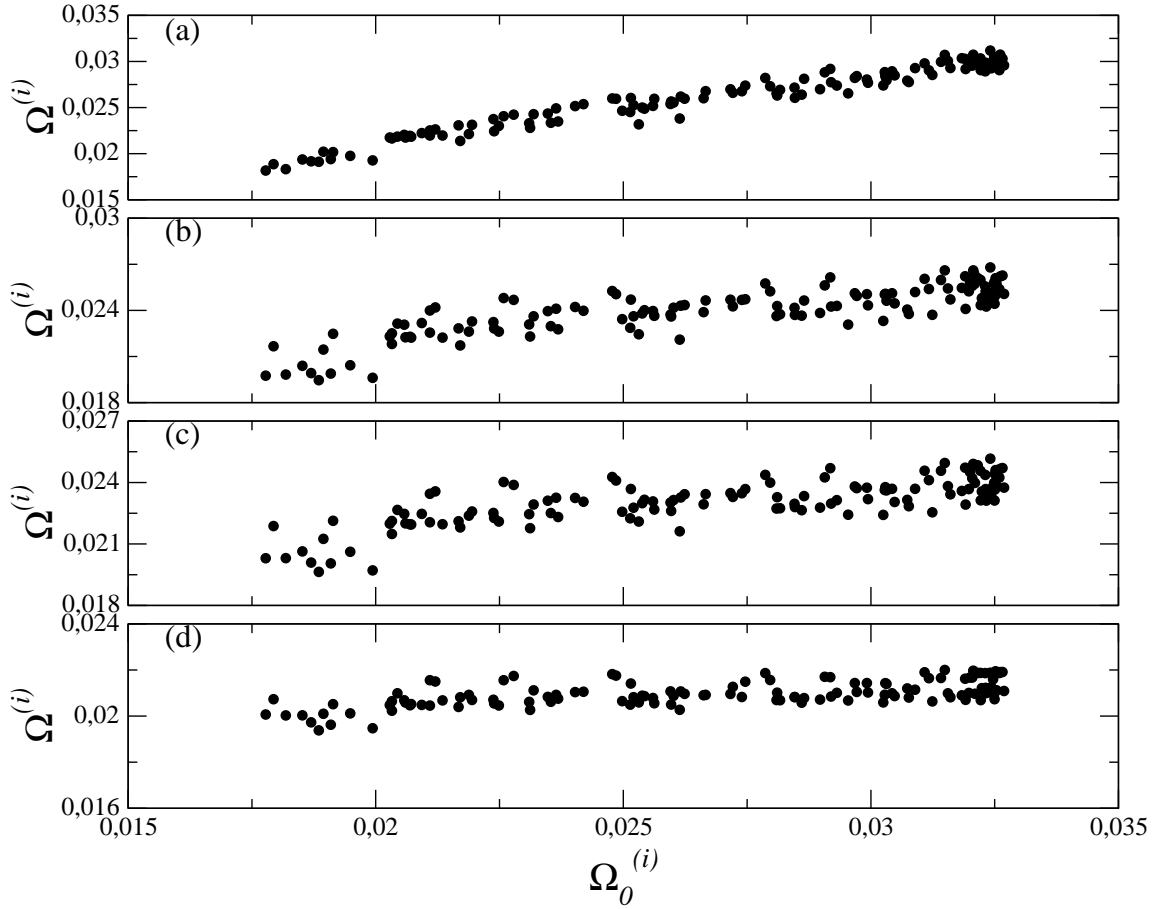


Figura 5.11: Frequência dos sítios da rede quando estão acoplados, em função das frequências dos sítios desacoplados, para uma rede com  $N = 251$  mapas acoplados e  $\theta^{(i)}$  distribuídos uniformemente no intervalo  $[4,1; 4,4]$ ,  $\alpha = 4$  e quatro valores de  $\varepsilon$ : (a)  $\varepsilon = 0,015$ , (b)  $\varepsilon = 0,035$ , (c)  $\varepsilon = 0,045$  e (d)  $\varepsilon = 0,07$ , .

(4.42) ficam:

$$x_{n+1}^{(i)} = \frac{\theta^{(i)}}{1 + (x_n^{(i)})^2} + y_n^{(i)} + \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1, j \neq i}^{N'} \frac{x_n^{(i+j)} - x_n^{(i-j)}}{j^\alpha} + d^{(i)} \text{sen}(n\omega)$$

$$y_{n+1}^{(i)} = y_n^{(i)} - \sigma x_n^{(i)} - \beta, \quad (5.4)$$

sendo  $\omega$  a frequência do sinal externo e  $d^{(i)}$  é a amplitude do sinal aplicado a cada sítio, sendo que o interesse encontra-se na obtenção da amplitude e do intervalo de frequências do sinal externo pelo qual ocorre a sincronização de frequência entre o sinal externo e os sítios da rede.

Na análise da sincronização de frequência do sinal periódico com os frequências dos sítios da rede será utilizada uma intensidade de acoplamento  $\varepsilon = 0,1$ , valor no qual a rede apresenta um estado de sincronização de frequência e de fase para



certos valores de  $\alpha$ . Para caracterizar a sincronização das frequências dos sítios da rede com o sinal externo será plotada a diferença entre as frequências dos sítios ( $\Omega^{(i)}$ ) e a frequência do sinal externo ( $\omega$ ).

Nas figuras (5.12), (5.13) e (5.14) estão  $(\Omega^{(i)} - \omega) \times \omega$ , a diferença entre as frequências dos sítios da rede e a frequência do sinal externo, para as redes dos mapas de Rulkov com valores de  $\alpha$  iguais à 0,5, 2 e 4, respectivamente. Quando  $(\Omega^{(i)} - \omega) \approx 0$  os sítios da rede estão sincronizados em frequência com o sinal externo. Todas as redes que foram analisadas possuem  $N = 51$  mapas de Rulkov acoplados, com  $\sigma = \beta = 0,001$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias,  $\theta^{(i)}$  distribuídos no intervalo entre 4,1 e 4,4 e o sinal inserido em apenas um sítio ( $I$ ), escolhido de forma aleatória entre todos os sítios da rede. A amplitude da perturbação externa possuirá quatro diferentes valores: figuras (5.12a), (5.13a) e (5.14a) o valor  $d^{(I)} = 0$ , figuras (5.12b), (5.13b) e (5.14b)  $d^{(I)} = 0,05$ , figuras (5.12c), (5.13c) e (5.14c)  $d^{(I)} = 0,1$  e figuras (5.12d), (5.13d) e (5.14d)  $d^{(I)} = 0,15$ .

Observa-se na figura (5.12a), na qual  $d^{(I)} = 0$ , que a frequência de sincronização dos sítios da rede sem a presença do sinal externo é 0,0153. Com a presença do sinal externo,  $d^{(I)} \neq 0$ , o sistema começa apresentar platôs de sincronização entre a frequência do sinal externo e a frequência dos sítios da rede. Quando  $d^{(I)} = 0,05$  o intervalo de frequência onde ocorre a sincronização é 0,01575 à 0,01565, como nota-se na figura (5.12b). Aumentando ainda mais o valor da amplitude do sinal externo, figuras (5.12c) e (5.12d), o intervalo de frequência para que ocorra a sincronização aumenta, apresentando para amplitude de  $d^{(I)} = 0,1$  e  $d^{(I)} = 0,15$  um intervalo entre 0,0152 até 0,015725.

Na figura (5.13a) o valor de  $d^{(I)} = 0$  a rede de mapas apresenta uma frequência de sincronização igual a 0,01692. Para o valor de  $d^{(I)} = 0,05$  o intervalo de frequências onde ocorre a sincronização entre as frequências dos sítios da rede e o sinal externo é 0,01695 a 0,01745, (figura 5.13b). Na figura (5.13c) o valor de  $d^{(I)} = 0,1$  e o intervalo das frequências está entre 0,017 e 0,0186, e na figura (5.13d) o valor de  $d^{(I)} = 0,15$  com a sincronização de frequências, entre o sinal externo e os sítios da rede, ocorrendo no intervalo de 0,017 à 0,019.

Admitiu-se um estado de sincronização no qual ( $|\Omega^{(i)} - \omega| < 10^{-5}$ ), assim os platôs das figuras (5.13b), (5.13c) e (5.13d) apresentam os valores das frequências do sinal, em que ocorre a sincronização de frequência. Outra observação importante que pode ser retirada das figuras (5.13c) e (5.13d) é que, após o platô de sincronização, os sítios que apresentavam sincronização de frequências tornam-se dessincronizados devido a presença da perturbação externa.

Para o valor de  $\alpha = 4$  a rede de mapas não apresenta uma sincronização de frequência quando  $d^{(I)} = 0$ , como pode ser visto através da figura (5.14a). Nas figuras (5.14b), (5.14c) e (5.14d) com o aumento do valor de  $d^{(I)}$  não ocorre a sincronização entre a frequência do sinal externo e as frequências dos sítios da rede, mas um aumento no desvio da frequência média. Quanto maior a  $d^{(I)}$  maior o desvio da frequência média.

Este comportamento observado nas figuras (5.13) e (5.14) tem sido utilizado no tratamento de algumas anomalias no sistema nervoso, como por exemplo, o mal

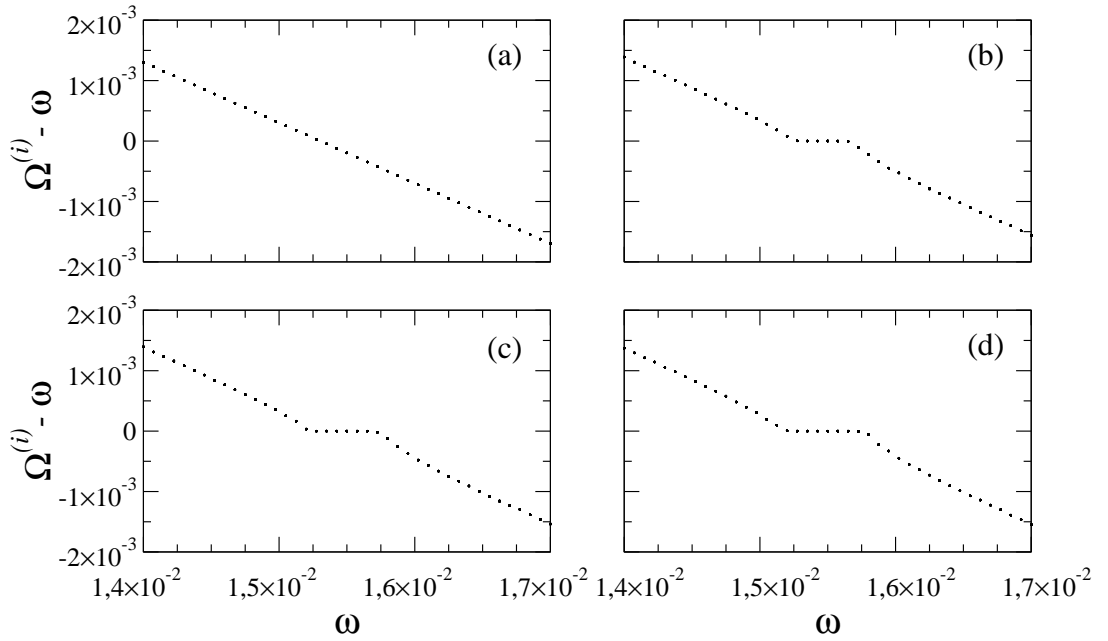


Figura 5.12: Diferença entre a frequências dos sítios da rede e a frequência do sinal externo, para uma rede com  $N = 51$  mapas acoplados,  $\sigma = \beta = 0,001$ ,  $\theta^{(i)}$  distribuídos uniformemente no intervalo  $[4,1; 4,4]$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias,  $\alpha = 0,5$ ,  $\varepsilon = 0,1$  e quatro diferentes valores de  $d^{(I)}$ : (a)  $d^{(I)} = 0$ , (b)  $d^{(I)} = 0,05$ , (c)  $d^{(I)} = 0,1$  e (d)  $d^{(I)} = 0,15$ . Quando  $(\Omega^{(i)} - \omega) \approx 0$  ocorre a sincronização de frequência do sítio ( $i$ ) e o sinal externo.

de Parkinson e alguns tipos de epilepsia.

## 5.4 Língua de Arnold

Quando, os valores dos parâmetros do acoplamento são suficientes para que ocorra a sincronização de frequência, existirão alguns valores da intensidade do sinal periódico que satisfazem,

$$\frac{\sum_{i=1}^N |\Omega^{(i)} - \omega|}{N} < 10^{-5}. \quad (5.5)$$

Os pares  $(d^{(I)}, \omega)$  que satisfazem a relação (5.5) formam a região de sincronização, conhecidas como língua de Arnold. Nesta região, a rede possui uma sincronização de frequência com a perturbação externa.

As regiões de sincronização de frequência entre o sinal externo e a rede, são dependentes da intensidade do sinal periódico, do alcance e da intensidade do acoplamento, podendo apresentar comportamentos diferentes antes e depois da língua de

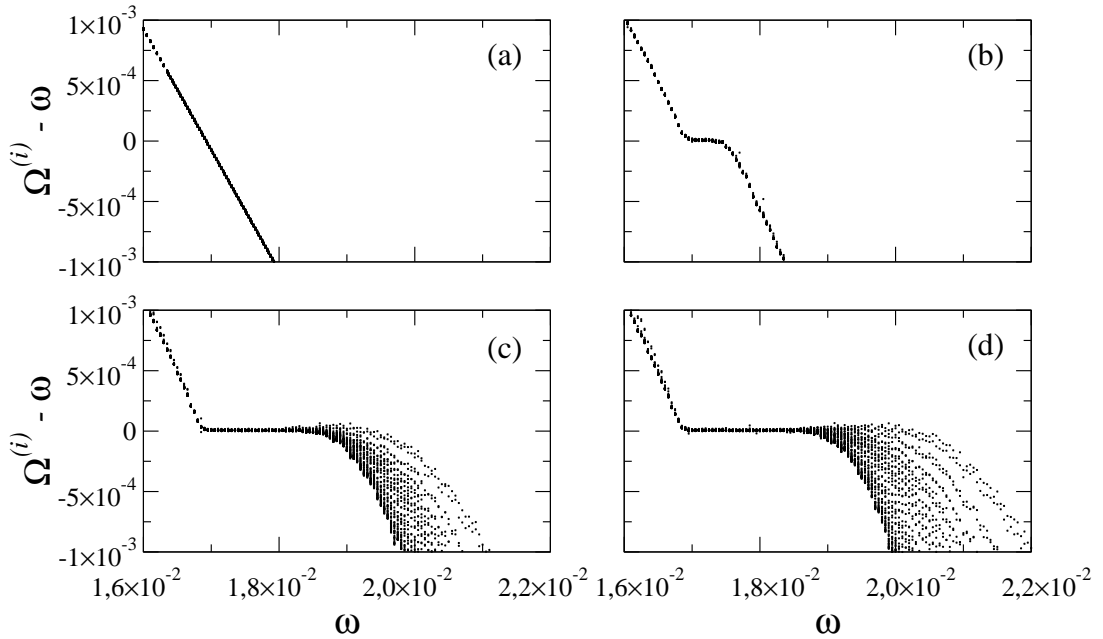


Figura 5.13: Diferença entre a frequências dos sítios da rede e a frequência do sinal externo, para uma rede com  $N = 51$  mapas acoplados,  $\sigma = \beta = 0,001$ ,  $\theta^{(i)}$  distribuídos uniformemente no intervalo  $[4,1; 4,4]$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias,  $\alpha = 2$ ,  $\varepsilon = 0,1$  e quatro diferentes valores de  $d^{(I)}$ : (a)  $d^{(I)} = 0$ , (b)  $d^{(I)} = 0,05$ , (c)  $d^{(I)} = 0,1$  e (d)  $d^{(I)} = 0,15$ . Quando  $(\Omega^{(i)} - \omega) \approx 0$  ocorre a sincronização de frequência do sítio ( $i$ ) e o sinal externo.

Arnold.

As línguas de Arnold apresentam uma assimetria, e afim de caracterizar as assimetrias das línguas de Arnold serão definidas duas quantidades, que podem ser observadas na figura (5.15): A primeira quantidade medida será  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , que relaciona a largura da língua de Arnold para um certo valor da amplitude do sinal externo. A segunda quantidade medida é  $\delta\omega = \omega_2 - \omega_0$ , mede a diferença entre a maior frequência de sincronização da rede com o sinal externo e a frequência de sincronização dos sítios da rede, sem o sinal externo para um dado valor da intensidade de acoplamento. Na definição das duas quantidades medidas foram utilizadas as seguintes variáveis:

1.  $\omega_2$  maior frequência de sincronização do sinal externo com a rede;
2.  $\omega_1$  menor frequência de sincronização do sinal externo com a rede;
3.  $\omega_0$  frequência de sincronização dos sítios da rede sem a presença do sinal externo.

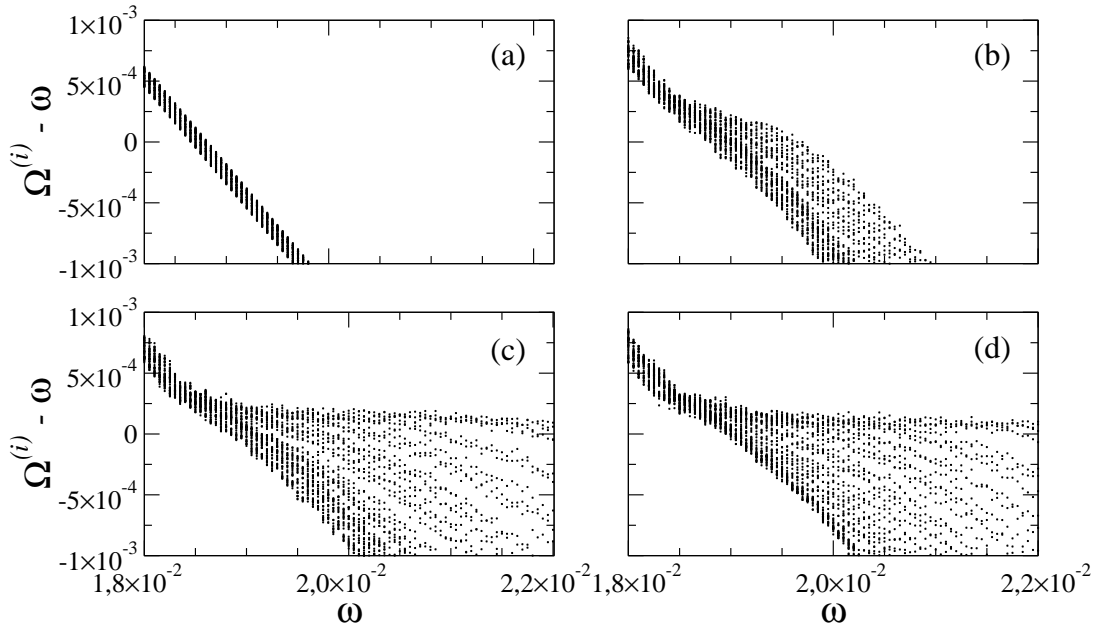


Figura 5.14: Diferença entre a frequências dos sítios da rede e a frequência do sinal externo, para uma rede com  $N = 51$  mapas acoplados,  $\sigma = \beta = 0,001$ ,  $\theta^{(i)}$  distribuídos uniformemente no intervalo  $[4,1; 4,4]$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias,  $\alpha = 4$ ,  $\varepsilon = 0,1$  e quatro diferentes valores de  $d^{(I)}$ : (a)  $d^{(I)} = 0$ , (b)  $d^{(I)} = 0,05$ , (c)  $d^{(I)} = 0,1$  e (d)  $d^{(I)} = 0,15$ . Quando  $(\Omega^{(i)} - \omega) \approx 0$  ocorre a sincronização de frequência do sítio  $(i)$  e o sinal externo.

Na seção anterior foi observado que a sincronização de frequência entre a perturbação externa e os sítios da rede ocorreriam apenas para valores de  $\alpha$  menores do que 2, assim, o estudo da língua de Arnold vai se concentrar apenas nos valores de  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 2$  na tentativa de compreender como o alcance influencia no formato das línguas e nas regiões fora da língua de Arnold.

#### 5.4.1 Rede de Mapas de Rulkov com $\alpha = 0,5$

A língua de Arnold para uma rede de  $N = 51$  mapas de Rulkov acoplados, com  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\sigma = \beta = 0,001$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias,  $\theta^{(i)}$  distribuído uniformemente no intervalo entre 4,1 e 4,2, e o valor de  $\alpha = 0,5$  pode ser observado na figura (5.16). A perturbação externa é inserida em apenas um sítio da rede, em que a amplitude do sinal será  $d$ .

Quando o valor de  $\alpha = 0,5$  para valores de  $d < 0,055$ , a região de sincronização apresenta um aumento semelhante a uma lei de potência, como pode-se observar na figura (5.16). A partir do valor de 0,055 o aumento da região de sincronização é menor, e para o valor de  $d \approx 0,17$ , começa a ocorrer uma saturação na

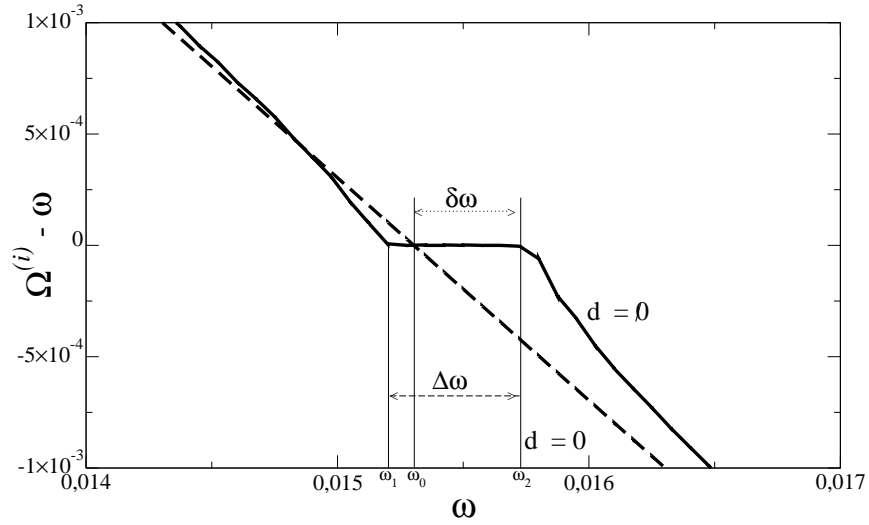


Figura 5.15: Definição das quantidades  $\Delta\omega$ ,  $\delta\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , sendo que a linha tracejada é para a rede sem a presença do sinal externo e a linha cheia com a presença da perturbação externa.

largura da língua. O valor de  $\omega_1$ , no qual inicia a região de sincronização, diminui de forma linear com o aumento da intensidade da amplitude do sinal externo, já o valor de  $\omega_2$  aumenta de forma não linear com  $d$ .

Para este valor do alcance, a língua de Arnold apresenta uma grande assimetria, como mostra a figura (5.16). Para caracterizar a assimetria da figura (5.16), encontra-se nas figuras (5.17) a largura da região de sincronização em função da amplitude do sinal externo ( $\Delta\omega \times d$ ) e a diferença entre a frequência de sincronização da rede sem a presença do sinal externo e a maior frequência de sincronização com o sinal externo ( $\delta\omega \times d$ ).

Na figura (5.17a) encontra-se a largura da língua de Arnold, na qual o aumento em função de  $d$  obedece uma lei de potência, com a presença de duas regiões: na primeira região ocorre um crescimento rápido do tamanho da língua e na segunda região este aumento é mais lento.

Tanto o aumento rápido, como o lento do tamanho da região de sincronização obedece a uma mesma lei de potência

$$\Delta\omega = \vartheta d^\varpi, \quad (5.6)$$

sendo que os valores das constantes que ajustam esta equação são: para a primeira região  $\vartheta = 0,079$  e  $\varpi = 1,75 \pm 0,04$ , e para a segunda região  $\vartheta = -0,001$  e  $\varpi = 0,317 \pm 0,004$ .

O aumento de  $\delta\omega$  em função  $d$  apresenta duas regiões: uma de crescimento rápido e outra de crescimento lento. Em ambas as regiões  $\delta\omega$  obedecem uma lei de potência em relação a amplitude do sinal periódico,

$$\Delta\omega = \vartheta' d^{\varpi'}, \quad (5.7)$$

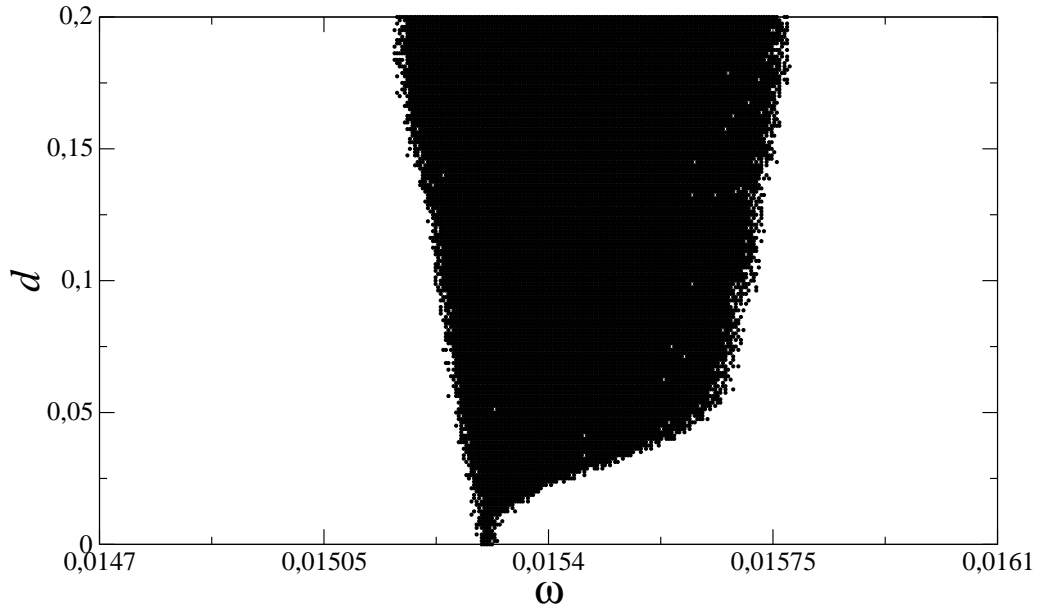


Figura 5.16: Amplitudes e freqüências do sinal externo, em que, ocorrem as sincronizações de freqüências entre o sinal externo e os sítios da rede, para uma rede de  $N = 51$  mapas de Rulkov acoplados,  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\sigma = \beta = 0,001$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias,  $\alpha = 0,5$  e  $\theta^{(i)}$  distribuídos no intervalo entre 4,1 e 4,2.

sendo que para a região de aumento rápido  $\vartheta' = 0,036$  e  $\zeta = 1,48 \pm 0,04$ , e para a região de aumento lento  $\vartheta' = 0,00065$  e  $\zeta = 0,199 \pm 0,004$ .

A largura da língua aumenta com o valor de  $d$ , mas surge o questionamento: como ocorre a variação de  $\Delta\omega$  em função do número de sinais perturbando a rede (*pinning*) e como ocorre a variação com o número de sítios presente na rede? Para responder estas duas perguntas deve-se observar a figura (5.18), na qual estão traçadas as curvas  $\Delta\omega \times \frac{1}{N}$  para redes perturbadas em um, dois e três sítios, pelo mesmo sinal periódico de amplitude igual  $d = 0,15$ . As constantes de acoplamento da rede são  $\alpha = 0,5$  e  $\varepsilon = 0,1$ , com  $\theta^{(i)}$  distribuídos no intervalo entre 4,1 e 4,2, condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias.

Observa-se na figura (5.18) que para redes com  $N$  pequenos, por exemplo 51 sítios acoplados o valor de  $\Delta\omega$  aumenta com o número de sítios perturbados. Uma rede com duas perturbações possui um  $\Delta\omega$  aproximadamente duas vezes maior do que par uma rede com apenas uma perturbação, e quando a rede é perturbada em quatro sítios  $\Delta\omega$  é aproximadamente quatro vezes maior. A medida que o número de sítios vai aumentando os valores de  $\Delta\omega$  vão diminuindo, e os valores de  $\Delta\omega$  para diferentes valores de perturbações vão se aproximando.

O valor de  $\Delta\omega$  diminui de forma linear com o inverso do tamanho da rede,

$$\Delta\omega = K_1 + \frac{K_2}{N}, \quad (5.8)$$

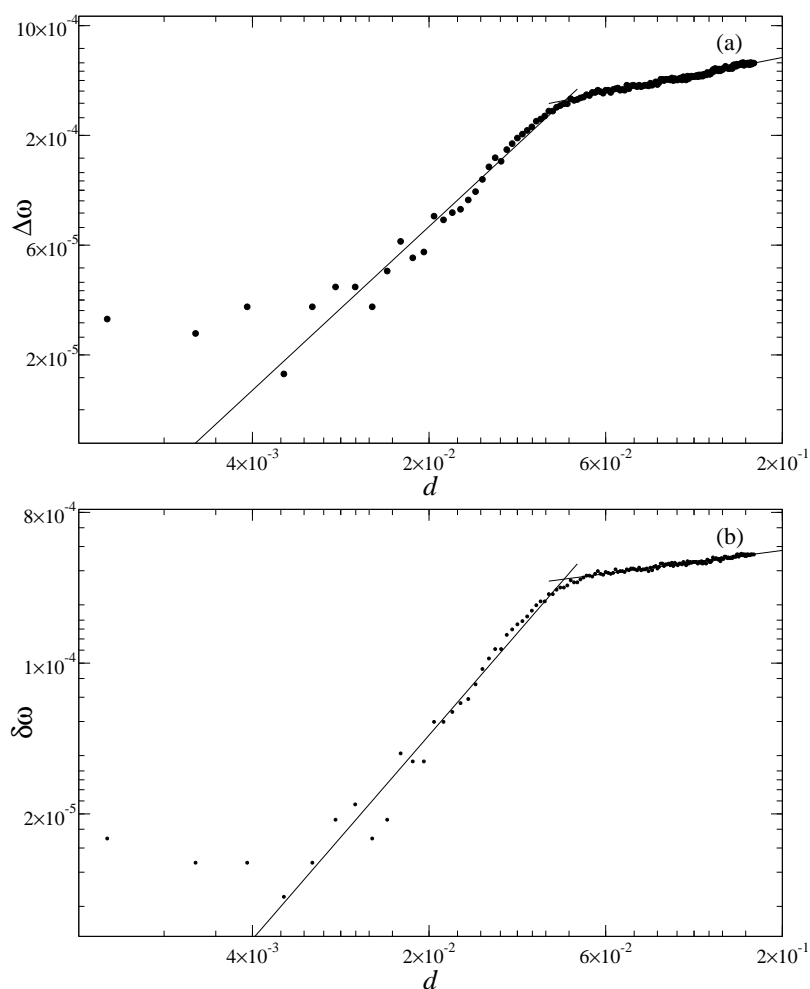


Figura 5.17: (a) Largura da língua de Arnold e (b) diferença entre a maior frequência de sincronização da rede com o sinal externo e a frequência de sincronização dos sítios da rede sem o sinal externo, em função da amplitude do sinal externo para a rede da figura (5.16).

como pode ser observado na figura (5.18), sendo que os valores de  $K_1$  e  $K_2$  dependem do número de sítios a serem perturbados. Os valores dos parâmetros  $K_1$  e  $K_2$  que ajustam a equação (5.8) para as três redes com números diferentes de sítios que sofrem uma perturbação externa encontram-se na tabela (5.18).

#### 5.4.2 Rede de Mapas de Rulkov com $\alpha = 2$

Na figura (5.19) encontra-se  $d \times \omega$  para um rede de  $N = 51$  mapas de Rulkov acoplados, com  $\sigma = \beta = 0,001$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\varepsilon = 0, 1$ , condições de contorno periódicas e

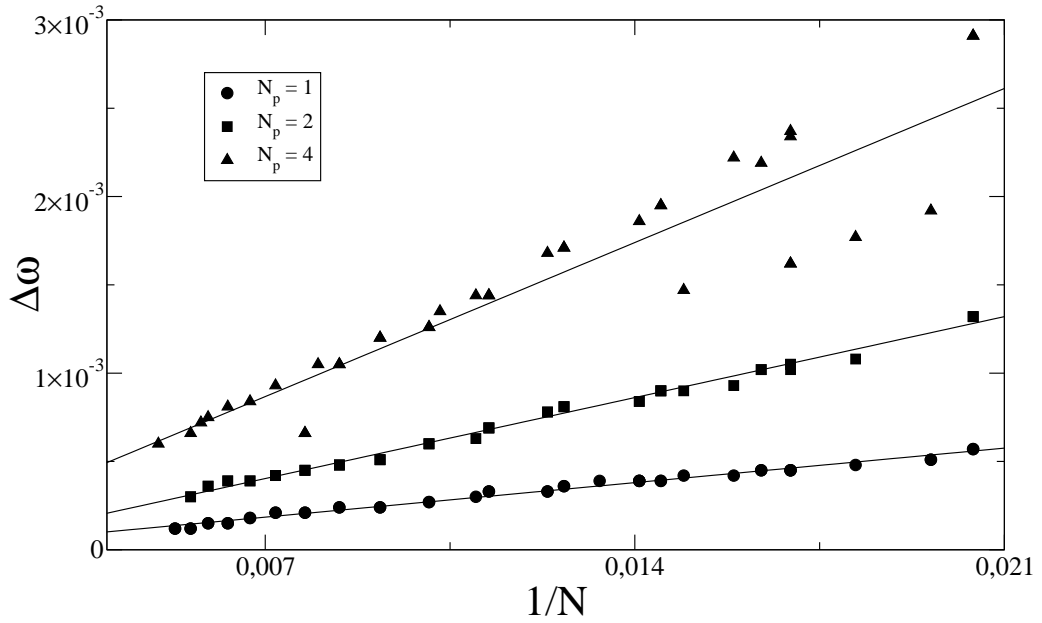


Figura 5.18: Largura da língua de Arnold em relação ao inverso do número de sítios da rede, para redes com  $\alpha = 0,5$ ,  $\varepsilon = 0,1$ ,  $d = 0,15$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias.

Tabela 5.1: Valores dos parâmetros  $K_1$  e  $K_2$  que ajustam as curvas da figura (5.18).

$N_p$	$K_1$	$K_2$
1	$-1,081 \times 10^{-5}$	$0,0179 \pm 0,0005$
2	$-5,511 \times 10^{-5}$	$0,0655 \pm 0,0008$
4	$-8,081 \times 10^{-6}$	$0,125 \pm 0,0009$

condições iniciais aleatórias, e  $\theta^{(i)}$  distribuído de forma uniforme no intervalo entre 4,1 e 4,2.

Observa-se na figura (5.19) que o início da língua de Arnold ocorre muito próximo a  $\omega_0$  e a língua possui valores dos pares  $(d, \omega)$  entre  $\omega_1$  e  $\omega_2$  nos quais não ocorre a sincronização de frequência entre a perturbação externa e os sítios da rede. Para uma rede com o valor de  $\alpha = 2$  a língua de Arnold formada apresenta uma assimetria, e para valores de  $d < 0,08$  a região de sincronização aumenta de forma não linear.

Comparando as figuras (5.16) e (5.19) nota-se que o alcance do acoplamento influencia no formato da língua, pois, para  $\alpha = 2$  ocorre um grande aumento nos valores de  $(d, \omega)$  entre  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , para os quais não ocorre a sincronização, o valor de  $\omega_1$  fica muito próximo a  $\omega_0$  e  $\omega_2$  possui valores maiores do para  $\alpha = 0,5$ .

O aumento de  $\omega_2$  faz os valores de  $\Delta\omega$  e  $\delta\omega$  aumentarem, e nas figuras



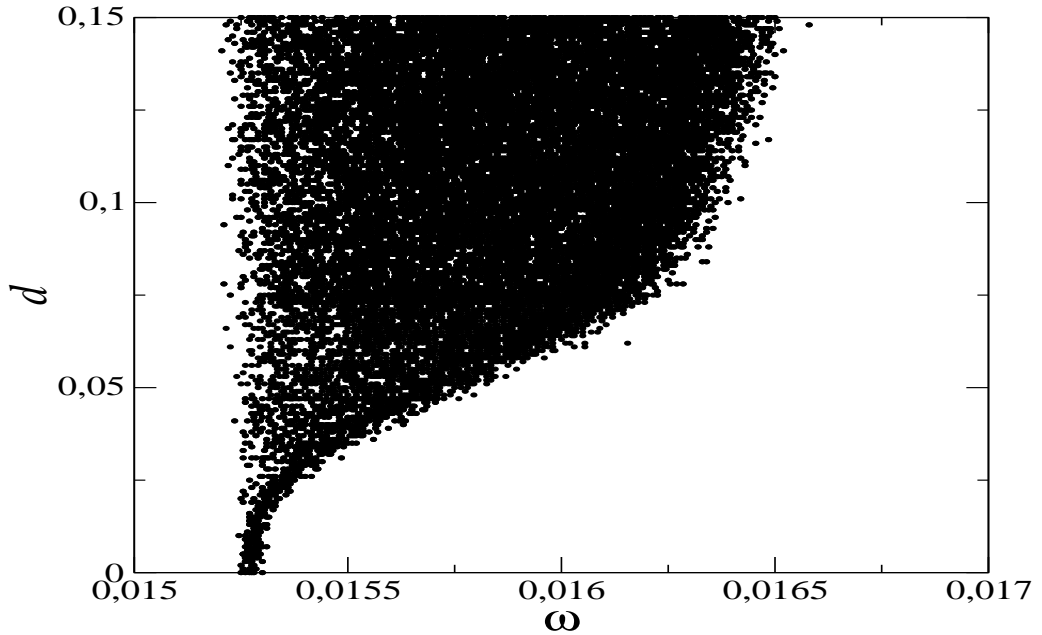


Figura 5.19: Amplitudes e freqüências do sinal externo, em que, ocorrem as sincronizações de freqüências entre o sinal externo e os sítios da rede, para uma rede de  $N = 51$  mapas de Rulkov acoplados,  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\sigma = \beta = 0,001$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias,  $\alpha = 2$  e  $\theta^{(i)}$  distribuídos no intervalo entre 4,1 e 4,2.

(5.20) observa-se o comportamento tipo lei de potência para  $\Delta\omega$  e  $\delta\omega$  em função da amplitude do sinal externo.

Para a rede de mapas de Rulkov com  $\alpha = 2$ , tanto  $\Delta\omega$  como  $\delta\omega$  apresentam dois comportamentos para o aumento em função de  $d$ , semelhante ao que foi para a rede com  $\alpha = 0,5$ . O comportamento das curvas da figura (5.20a) obedecem à equação (5.6), sendo que os parâmetros que ajustam a equação são: para o aumento rápido  $\vartheta = 0,00225$  e  $\varpi = 2,06 \pm 0,06$ , e para a região de aumento mais lento  $\vartheta = 0,00279$  e  $\varpi = 0,41 \pm 0,02$ . O ajuste para  $\delta\omega$  que está na figura (5.20b) é dado pela equação (5.7), como o valores de  $\vartheta' = 0,104$  e  $\zeta = 1,78 \pm 0,03$  para a região de aumento rápido e  $\vartheta' = 0,0026$  e  $\zeta = 0,370 \pm 0,014$  para a região de aumento lento.

Assim, como a largura da língua de Arnold depende da amplitude da perturbação externa, ela também dependerá do número de sítios que estão sujeitos ao sinal externo, como pode ser observado na figura (5.21),  $\Delta\omega \times \frac{1}{N}$  para três redes com o número sítios perturbados pelo mesmo sinal externo iguais à um, dois e quatro. A intensidade de acoplamento da rede é igual a 0,1, com  $\alpha = 2$ ,  $\theta^{(i)}$  distribuído entre 4,1 e 4,2, com condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias.

A variação de  $\Delta\omega$  em função do  $1/N$  é dado pela equação (5.8), sendo que os valores de  $K_1$  e  $K_2$  depende do número de sítios da rede que estão sobre a influência do sinal externo. Os valores de  $K_1$  e  $K_2$  para as três redes da figura (5.21) estão na

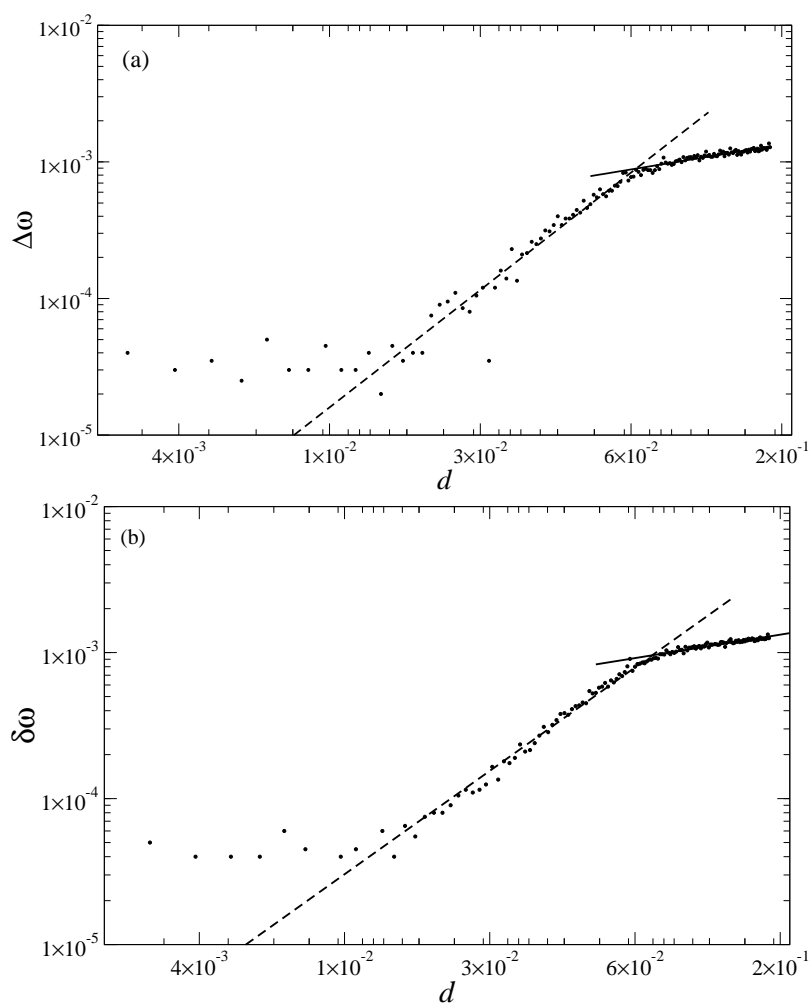


Figura 5.20: (a) Largura da língua de Arnold e (b) diferença entre a maior frequência de sincronização da rede com o sinal externo e a frequência de sincronização dos sítios da rede sem o sinal externo, em função da amplitude do sinal externo para a rede da figura (5.19).

tabela (5.2).

Tabela 5.2: Valores dos parâmetros  $K_1$  e  $K_2$  que ajustam as curvas da figura (5.21).

$N_p$	$K_1$	$K_2$
1	$36,6 \times 10^{-5}$	$0,057 \pm 0,003$
2	$62,6 \times 10^{-5}$	$0,068 \pm 0,007$
4	$56,5 \times 10^{-5}$	$0,129 \pm 0,009$

Dos valores de  $K_1$  e  $K_2$  da tabela observa-se que a diferença no valor da

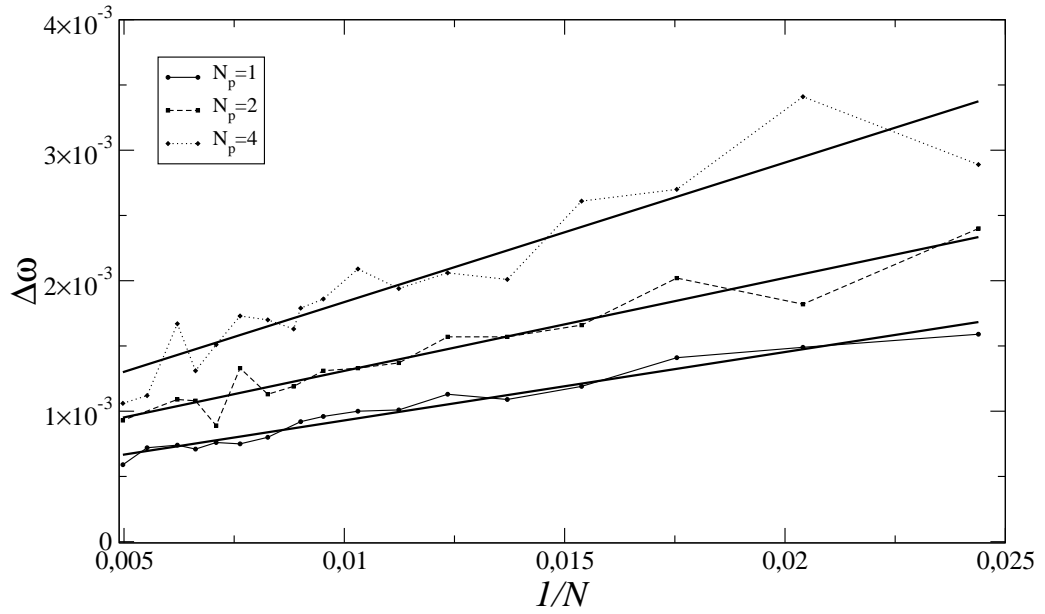


Figura 5.21: Largura da língua de Arnold em relação ao inverso do número de sítios da rede, para redes com  $\alpha = 2$ ,  $\varepsilon = 0, 1$ ,  $d = 0, 15$ , condições de contorno periódicas e condições iniciais aleatórias.

potência para apenas um ou dois sítios perturbados não ocorre uma variação significativa, já para quatro sítios perturbados o valor da potência é o dobro do valor para apenas dois sítios perturbados, isto dentro do erro. Isto ocorre pois para este alcance do acoplamento é necessário um número maior de perturbações para que ocorra um aumento considerável de  $\Delta\omega$ .

# Capítulo 6

## Conclusão

A elaboração desta tese foi feita através da utilização de redes de mapas logísticos e de Rulkov acoplados, em que o principal objetivo foi a observação e compreensão de como ocorrem os estados coerentes e/ou sincronizados, e o mecanismos das transições de estados coerentes-incoerente e/ou sincronizados-dessincronizados.

No terceiro capítulo desta tese estudou-se a rede de mapas logísticos acoplados, com um acoplamento do tipo lei de potências, que apresentava três regiões distintas, quando os parâmetros de acoplamento eram variados: regiões de regimes completamente sincronizado, transição e dessincronizado. Estes regimes foram observados em um gráfico  $\varepsilon \times \alpha$ , sendo que estes regimes eram delimitados por duas curvas:  $\varepsilon_c(\alpha) \times \alpha$ , delimitando os estados sincronizados dos estados transientes, e  $\varepsilon^*(\alpha) \times \alpha$ , estados transientes dos estados dessincronizados.

Na região de estados sincronizados, o tempo necessário para que ocorra a sincronização é muito rápido, no qual condições iniciais aleatórias totalmente dessincronizadas encontram órbitas estáveis e evoluem para a variedade de sincronização  $x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = \dots = x_n^{(N)}$ . Na região de transição, as condições iniciais aleatórias do sistema encontravam órbitas estáveis evoluindo para a variedade de sincronização e fica nela até o momento em que encontram uma órbita instável saindo da variedade, retornando novamente após encontrarem uma órbita estável fora da variedade. Na região dessincronizada as órbitas dos sítios da rede não encontram nenhuma órbita estável, portanto não vão para o atrator de sincronização.

Como esta tese objetiva o estudo da perda de sincronização na rede de mapas, foi realizado o estudo na região da curva  $\varepsilon^*(\alpha) \times \alpha$ , que separava o regime de transição e do regime dessincronizado, analisando as distribuições dos intervalos de tempos entre os estouros caóticos da rede. As distribuições dos tempo entre os estouros, para os valores de  $\alpha$  e  $\varepsilon$  próximos a curva  $\varepsilon^*(\alpha) \times \alpha$ , são compostas por duas curvas: uma exponencial, para longos intervalos de tempos com  $R \approx 1$ , e outra uma lei de potência, para pequenos tempos em  $R \approx 1$ .

Na análise das distribuições tipo lei de potência, apenas para o valor de

$\varepsilon = 1$  o expoente era igual à  $3/2$ , uma característica universal da intermitência liga-desliga, ou seja o mecanismo da perda de sincronização para a rede de mapas logísticos acoplados para este valor de  $\varepsilon$  ocorre pelo mecanismo da intermitência liga-desliga. Para os demais valores de  $\varepsilon$  estudados os valores das potências encontradas eram próximas a  $-1$ , assim não ocorrendo a intermitência liga-desliga. Outra observação que pode ser feita é quanto maior o valor médio do segundo expoente de Lyapunov menor o módulo do valor do expoente das distribuição tipo lei de potência.

No quarto capítulo desta tese foi realizado o estudo do mapa de Rulkov, juntamente com o estudo das evoluções temporais das redes destes mapas. O mapa de Rulkov apresentava duas variáveis de estado, uma rápida e outra lenta, em que, a variável de estado rápida apresentava duas escalas de tempo. Através do diagrama de bifurcação deste mapa observou-se sua dinâmica com diferentes comportamentos dinâmicos como: bifurcação sela-nó, crises, atratores caóticos, pontos fixos instáveis e estáveis, e biestabilidade de atratores.

O mapa de Rulkov apresentava sua dinâmica temporal junto ao ponto fixo estável ou ao atrator caótico, apresentando um comportamento regular ou caótico respectivamente. Os dois comportamentos surgem devido a presença de duas bacias de atração, a bacia do ponto fixo estável e do atrator caótico, sendo que dependendo da condição inicial a dinâmica vai para o atrator caótico ou para o ponto fixo estável. Quando a dinâmica está no ponto fixo estável ele permanece nela até o momento em que ocorre a bifurcação sela-nó, com o desaparecimento do ponto fixo estável e a dinâmica vai para o atrator caótico. Uma vez no atrator caótico a evolução temporal da variável rápida permanece nele, pois com a variação de variável lenta todas as condições ficam nessa bacia de atração até o momento em que ocorre a crise do atrator caótico resultando no desaparecimento da bacia do atrator caótico. Os valores da variável lenta do mapa para que ocorra a bifurcação sela-nó e a crise depende do valor do parâmetro não linear do mapa ( $\theta$ ). Quanto menor for o valor de  $\theta$ , maior será a variação da variável lenta do mapa, permitindo estouros caóticos regulares, com uma baixa frequência em seu espectro de frequências. Com o aumento do valor de  $\theta$  a variação do valor de variável lenta diminui, assim os estouros perdem sua regularidade, e para  $\theta$  próximos a  $4,9$  somente existem os picos caóticos, com um espectro de frequência ruidoso.

Um mapa de Rulkov é um modelo fenomenológico para apenas um neurônio, quando deseja-se modelar um sistema de neurônio é necessário um acoplamento entre os neurônios do sistema. Para modelar alguns aspectos da arquitetura complexas de neurônios biológicos, que possuem uma grande dimensão de interconectividade são necessários os acoplamentos não locais, como por exemplo: acoplamento global, livres de escalas, entre outros. Em algumas redes a probabilidade de acoplamentos sinápticos elétricos e químicos possuem uma dependência espacial, permitindo a utilização do acoplamento tipo lei de potência no modelamento destes sistemas.

Agora, para uma rede de mapas de Rulkov a série temporal dos sítios da rede apresentam um comportamento que depende de  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  e  $\theta^{(i)}$ . Como foi observado no capítulo quatro a presença do acoplamento faz surgir estouros mais regulares nos sítios da rede, pois, quanto maior o valor de  $\varepsilon$  mais susceptíveis ao acoplamento

ficam as dinâmicas dos sítios da rede próximos a bifurcação sela-nó. A influência do alcance do acoplamento nas dinâmicas dos sítios fornece o fator com que os sítios da rede mais distantes influenciam no acoplamento, assim, para  $\alpha$  pequenos os sítios mais distantes da rede influenciam quase igual aos sítios mais próximos, permitindo assim que ocorram disparos quase simultâneos.

As simulações das redes de mapas de Rulkov apresentam comportamentos dinâmicos observáveis em neurônios biológicos, tais como: sincronização de fase e frequência. A análise da sincronização de fase e de frequência foi feita no capítulo cinco desta tese, com interesse no comportamento coerente da rede de mapas não idênticos, em função do alcance e da intensidade de acoplamento entre os sítios da rede.

Nas redes com acoplamento do tipo lei de potência a sincronização de fase e de frequência dos mapas de Rulkov é dependente da combinação entre os valores do alcance e da intensidade do acoplamento. Quanto menor o valor de  $\alpha$  maior a influência dos sítios mais distantes na dinâmica do sítio ( $i$ ), e com valores de  $\varepsilon$  altos torna-se possível a sincronização das fases dos sítios da rede, caracterizada por  $\bar{R} \approx 1$ ). Para valores de  $\varepsilon$  pequenos independente do alcance do acoplamento as fases dos sítios da rede possuem comportamentos incoerentes. Para alcances pequenos não ocorre o comportamento coerente dos sítios da rede, para os valores de  $\varepsilon$  utilizados nesta tese.

Para o valor de  $\alpha = 0,5$ , valor do alcance no qual é possível obter um estado de sincronização de fase, foi estudado como ocorria a transição de um estado coerente para um incoerente. Nesta análise observou-se que para  $\varepsilon = 0,02$  as redes dos mapas de Rulkov começavam a aumentar o valor de  $\bar{R}$ , ou seja,  $\varepsilon_c = 0,02$ . Para os valores de  $\varepsilon$  próximos de  $\varepsilon_c$  foi possível que a passagem de um estado dessincronizado para um estado sincronizado ocorre através de um mecanismo de transição de fase. Nas regiões próximas de  $\varepsilon_c$  o valor de  $\bar{R}$  obedece uma lei de potência em relação a variação  $|\varepsilon - \varepsilon_c|$ . O valor do expoente obtido para esta transição de fase foi, semelhantes ao observado no modelos de Kuramoto e igual as transições de fase magnéticas.

Quando o valor de  $\alpha < 1$  o alcance do acoplamento é muito semelhante ao acoplamento global, e para  $\alpha = 0$  o alcance é global retornando aos resultados estudados por Ivanckenko e colaboradores, com os valores  $\bar{R} \approx 1$  para  $\varepsilon$  se aproxima de 0,1. Para valores de  $\alpha > 1$  o valor de  $\bar{R}$  começa a diminuir até  $\alpha \approx 3$ , a partir deste valor de  $\alpha$  o parâmetro de ordem médio tende a oscilar em um valor constante, portanto só foi possível um estado quase-sincronizado para os valores de  $\alpha < 1$ .

As redes de mapas de Rulkov apresentam estados de sincronização de frequências, semelhante ao que ocorre em neurônios biológicos, que depende do acoplamento. Para valores de  $\alpha < 1$  e  $\varepsilon > 0,5$  a rede apresenta a sincronização de frequências, e a medida que o alcance do acoplamento diminui, a intensidade necessária para a sincronização de frequências aumenta, mas para  $\alpha > 3$  não ocorre mais a sincronização de frequências, para os intervalos de  $\varepsilon$  utilizados nesta tese.

A sincronização de frequência não é interessante que ocorra em uma rede de neurônios biológicos, por tanto inseriu-se uma perturbação externa na rede de mapas de Rulkov com uma forma de controle para retirar a rede de um estado de sincronização de frequências. A perturbação externa era um sinal senoidal de

frequência  $\omega$  e amplitude  $d$ , inserido aleatoriamente em um ou mais sítios. Para valores de  $\alpha < 1$  e  $\varepsilon = 0,1$  os sítios da rede sincronizam em frequência entre si e com o sinal externo, quando a frequência do sinal externo é igual ou superior a frequência dos sítios comum dos sítios da rede. Quando a frequência do sinal externo é muito superior a frequência comum dos sítios da rede sem a perturbação, não a sincronização da rede como o sinal externo. Quando o valor de  $\alpha = 2$  e  $\varepsilon = 0,1$  a rede sincronizam em frequência com o sinal externo, para frequências do sinal externo maiores ou igual a frequência comum dos sítios da rede. Os sítios da rede apresentam um platô de sincronização das frequências com o sinal externo, até que para altas frequências a rede perde a sincronização de frequência com o sinal externo e entre os sítios da rede. Este tipo de comportamento é utilizado no tratamento de algumas anomalias do sistema nervoso. Outra observação seria que as frequências dos sítios da rede começa a diminuir com o aumento de  $\varepsilon$ , pois com o aumento de  $\varepsilon$  os sítios tende a sincronizar e o intervalo entre os estouros começa a aumentar.

Na rede de mapas acoplados com a presença da perturbação externa existe uma disputa entre o acoplamento, que tende a sincronizar em frequência os sítios da rede, e a perturbação aplicada em alguns sítios, que tende a retirar-os do estado sincronizado. Para  $\varepsilon > d$  o acoplamento é maior que a perturbação externa, e mesmo para altas frequências amplitude os sítios da rede permanecem sincronizados. Agora para  $\varepsilon \leq d$  a amplitude do sinal é suficiente para retirar os sítios da rede do estado sincronizado.

Os platôs de sincronização entre as frequências dos sítios da rede e a frequência do sinal periódico são dependentes da amplitude do sinal periódico, sendo que, quanto maior a amplitude do sinal maior será o intervalo das frequências de sincronização entre sinal e a rede. Assim, a partir da obtenção das frequências do sinal externo, para os quais a rede sincroniza em frequência com o sinal externo, para uma dada amplitude da perturbação foi possível construir as línguas de Arnold  $d \times \omega$ . As línguas de Arnold apresentam uma certa assimetria, tanto para  $\alpha = 0,5$  com  $\alpha = 2$ , devido ao fato que os platôs de sincronização do sinal externo com a rede iniciam-se para frequência aproximadamente iguais ou superiores a frequência dos sítios, para rede não perturbada, e terminam para frequências bem mais altas que a frequência da rede sem a perturbação. O tamanho da língua de Arnold apresenta um aumento não linear, tipo lei de potência, com a amplitude do forçamento externo, apresentando duas regiões: um região de crescimento rápido e outra de crescimento lento. Outra dependência do tamanho da língua é o número de perturbações externa que está sujeita a rede, sendo mais evidente para as redes pequenas.

Os mapas de Rulkov são bons modelos para os neurônios biológicos, podendo ser comparados a outros modelos de tempo contínuo, fornecendo informações importantes sobre a perda da sincronização de fase e o controle da sincronização de frequências, observados em fenômenos reais.

Como continuação dos trabalhos pode-se utilizar o acoplamento de pequeno mundo na rede dos mapas de Rulkov. Outro trabalho que pode ser citado é a utilização de uma perturbação, que ao invés de ser um sinal periódico, fosse o campo médio da rede ou de um conjunto de sítios, mas com um tempo de atraso. Outra

perturbação será a utilização de um sinal binário observando o que este sinal ocasionaria na sincronização.

Ainda no estudo dos modelos de neurônios seria interessante utilizar o acoplamento do tipo lei de potência, livre de escala, pequeno mundo e outros, mas utilizando no lugar de mapas as equações diferenciais como por exemplo os modelos de: FitzHugh-Nagumo, Bonhoeffer-van der Pol, Hindmarsh-Rose e Hodgkin e Huxley.



# Bibliografia

- [1] L. H. A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos*, Livraria da Física Editora, São Paulo, 2002.
- [2] R. L. Viana, *Introdução às Redes de Mapas Acoplados - Modelos para o Estudo de Caos Espaço-Temporal*, Departamento de Física da Universidade Federal do Paraná, Notas de Aula do mini-curso ministrado no Instituto de Física de São Paulo de 21 à 25/02/2000, IFUSP, publicação, 1527, 2001.
- [3] E. M. Izhikevich, *Neural Excitability, Spiking and Bursting*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 10: 1171, 2000.
- [4] J. Guckenheimer e P. Holmes, *Nonlinear Oscillation, Dynamics Systems, and Bifurcations of Vector*, Springer-Verlag, 1983.
- [5] R. L. Viana, C. Grebogi, S. E. de S. Pinto, S. R. Lopes, A. M. Batista e J. Kurths, *Bubbling bifurcation: Loss of synchronization and shadowing in complex systems*, Physica D, 206:94, 2005.
- [6] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares e C. S. Zhou, *The synchronization of chaotic systems*, Physics Reports, 366:1, 2002.
- [7] N. Platt, S. M. Hammel e J. F. Heagy, *Effects of Additive Noise on On-Off Intermittency*, Physical Review Letters, 72:3498, 1994.
- [8] C. C. Hilgetag, G. A. Burns, M. A. O. Neill, J. W. Scannell e M. P. Young, *Anatomical connectivity and the organization of clusters of cortical areas in the macaque monkey and the cat*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. B Biol. Sci., 355, 91-110. Brain Res., 147, 173, 2000.
- [9] D. Hansel, *Synchronization and Comutation in Chaotic Neural Networks*, Physical Review Letters, 68:718, 1992.
- [10] L. A. Amaral, A. Scala, M. Barthelemy e H. E. Stanley, *Classes of small-world networks*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 97:11149, 2000.

- [11] K. Kaneko, *Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems*, PhD. Thesis, p. 222, 1983 (uma versão publicada pela editora World Scientific Singapore, 1986).
- [12] G. Bub e L. Glass, *Bifurcation in a discontinuous circle map: A theory for a chaotic cardiac arrhythmia*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 5:359, 1995.
- [13] P. M. Gade e C. K. Hu, *Synchronization and coherence in thermodynamically coupled map lattices with intermediate-range coupling*, Physical Review E, 60:4966, 1999.
- [14] S. E. de S. Pinto, *Platôs de sincronização em sistemas dinâmicos com tempo discreto*, Universidade Federal do Paraná, 2000.
- [15] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos With Application to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Perseus Books Publishing, New York, E.U.A., 1999.
- [16] M. Y. Choi, *Globally coupled chaos violates the law of large numbers but not the central-limit theorem*, Physical Review Letters, 86:134101-1, 2004.
- [17] K. Kaneko, *Globally coupled circle map*, Physica D, 54:5, 1991.
- [18] K. Kaneko, *Chaotic but Regular Posi-Nega Switch among Code Attractors by Cluster-Size Variation*, Physical Review Letters, 63:219, 1989.
- [19] A. C. Martí e C. Masoller, *Delay-induced synchronization phenomena in an array of globally coupled logistic map*, Physical Review Letters, 67:056119, 2003.
- [20] J. L. Rogers e L. T. Wille, *Phase transitions in nonlinear oscillator chains*, Physical Review E, 76:1804, 1996.
- [21] R. L. Viana e A. M. Batista, *Synchronization of Coupled Kicked Limit Cycle Systems*, Chaos, Solitons and Fractal, 9:1931, 1998.
- [22] J. C. A de Pontes, A. M. Batista, R. L. Viana e S. R. Lopes, *Self-organized memories in coupled map lattices*, Physica A, 368:387, 2006.
- [23] J. C. A. de Pontes, A. M. Batista, R. L. Viana e S. R. Lopes, *Short-term memories with a stochastic perturbations*, Chaos, Solitons and Fractal, 23:1689, 2005.
- [24] L. M. Pecora e T. L. Carroll, *Synchronization in Chaotic Systems*, Physical Review Letters, 64:821, 1990.
- [25] M. G. Roseblum, A. S. Pikovsky e J. Kurths, *Phase Synchronization of Chaotic Oscillators*, Physical Review Letters, 76:1804, 1996.

- [26] M. G. Roseblum, A. S. Pikovsky e J. Kurths, *From Phase to Lag Synchronization in Coupled Chaotic Oscillators*, Physical Review Letters, 78:4193,1997.
- [27] A. A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
- [28] K. Kaneko, *Theory and Applications of Coupled Map Lattices*, editado por Wiley, New York, 1993.
- [29] N. Platt, E. A. Spiegel e C. Tresser, *On-Off Intermittency: A Mechanism for Bustin*, Physical Review Letters, 70:279, 1993.
- [30] P. Bergé, Y. Pomeau e C. Vidal, *Order within chaos: towards a deterministic approach to turbulence*, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [31] S. Ciliberto e P. Bigazzi, *Spatiotemporal Intermittency in Rayleigh-Bénard Convection*, Physical Review Letters, 72:016202, 2005.
- [32] F. Daviaud, M. Bonetti e M. Dubois, *Transition to turbulence via spatiotemporal intermittency in one-dimensional Rayleigh-Bénard convection*, Physical Review Letters, 42:3388, 1990.
- [33] P. Rupp, R. Richter e I. Rehberg, *Critical exponents of directed percolation measured in spatiotemporal intermittency*, Physical Review E, 67:036209, 2003.
- [34] A. Sharma e N. Gupte, *Spatiotemporal intermittency and scaling laws in inhomogeneous coupled map lattices*, Physical Review E, 66:036210, 2002.
- [35] H. Chaté, *Spatiotemporal intermittency regimes of the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation*, Nonlinearity, 7:185, 1987.
- [36] H. Chaté e P. Manneville, *Spatio-temporal Intermittency in Coupled Map Lattices*, Physica D, 32:409, 1988.
- [37] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press, New York, 1991.
- [38] F. Rödelsperger, A. Cenys e H. Benner, *On-Off Intermittency in Spin-Wave Instabilities*, Physical Review Letters, 75:2594, 1995.
- [39] K. T. Alligood, T. D. Sauer e J. A. York, *Chaos an introduction to dynamics systems*, Springer, New York, 1996.
- [40] R. May, *Simple mathematical model with very complicated dynamics*, Nature, 262:459, 1976.
- [41] A. M. dos Santos, *Caos Espaço-Temporal em Sistemas Dinâmicos Acoplados*, tese de doutorado, Universidade Federal do Paraná, 2006.

- [42] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, 1990.
- [43] R. L. Viana, C. Grebogi, S. E. de S. Pinto, A. M. Batista e J. Kurths, *Validity of numerical trajectories and synchronization in coupled map lattices with long-range interaction*, *Physica A*, 343:201, 2004.
- [44] C. Anteneodo, A. M. Batista e R. L. Viana, *Synchronization threshold in coupled logistic map lattices*, *Physical Review E*, 74:021118, 2006.
- [45] D. B. Vasconcelos, R. L. Viana, S. R. Lopes, A. M. Batista e S. E. de S. Pinto, *Spatial correlations and synchronization in coupled map lattices with long-range interactions*, *Physica A*, 343:201, 2004.
- [46] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [47] S. E. de S. Pinto e R. L. Viana, *Synchronization plateaus in a lattice of coupled sine-circle maps*, *Physical Review E*, 61:5154, 2000.
- [48] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, University of Maryland, College Park, Maryland, 2<sup>o</sup>, USA, 2002.
- [49] A. M. Batista, *Mapas Acoplados na Rede e Sincronização*, dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná, 1996.
- [50] G. X. Qi, H. B. Huang, C. K. Shen, H. J. Wang e L. Chen, *Predicting the synchronization time in coupled-map networks*, *Physical Review E* 77:056205, 2008.
- [51] E. Ott, T. Sauer e A. Yorke, *Coping with Chaos: Analysis of Chaotic Data and The Exploitation of Chaotic Systems Coping with Chaos: Analysis of Chaotic Data and The Exploitation of Chaotic Systems*, John Wiley & Sons, 1994.
- [52] C. Anteneodo, S. E. de S. Pinto, A. M. Batista e R. L. Viana, *Analytical results for coupled map lattices with long-range interactions*, *Physical Review E*, 68:045202, 2003. Erratum: *Phys. Rev. E* 69, 045202(E), 2004.
- [53] P. Faure e H. Korn, *Is the chaos brain? I concepts of nonlinear dynamics and methods of investigation*, Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS, junho, 173, 2001.
- [54] A. M. dos Santos, S. R. Lopes e R. L. Viana, *Rhythm synchronization and chaotic modulation of coupled Van der Pol oscillations in a model for the heartbeat*, *Physica A*, 338: 335, 2007.
- [55] M. I. Rabinovich, P. Varona, A. I. Serverston e H. D. I. Abaruel, *Dynamical principles in neuroscience*, *Reviews Of Modern Physics*, 78:1213, 2006.

- [56] L. F. Lago-Fernández, R. Huerta, F. Corbacho e J. A. Sigüenza, *Fast Response and Temporal Coherent Oscillations in Small-world Networks*, Physical Review Letters, 84:2758, 2000.
- [57] L. F. Lago-Fernández, F. J. Corbacho e R. Huerta, *Connection topology dependence of synchronization of neural assemblies on class 1 and 2 excitability*, Neural Networks, 14:687, 2001.
- [58] M. Buccolo, L. Fortuna e M. La Rosa, *Network self-organization through “small-world” topologies*, Chaos, Solitons and Fractal, 14:1059, 2002.
- [59] N. F. Rulkov, *Modelling of spiking-bursting neural behavior using two-dimension map*, Physical Review E, 65:41922, 2002.
- [60] G. de Vries, *Bursting as an emergent phenomenon in coupled chaotic maps*, Physical Review E, 64:051914, 2001.
- [61] J. Keener e J. Sneyd, *Mathematical Physiology*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [62] A. L. Hodgkin e A. F. Huxley, *A quantitative description of membrane current its application to conduction and excitation in nerve*, Journal Physiology, 117:500, 1952.
- [63] <http://www.afh.bio.br/nervoso/nervoso1.asp>, acessado 17 de outubro de 2008.
- [64] R. Kobayashi, T. Ohta e Y. Hayase, *Self-organized pulse generator*, Physica D, 84:162, 1995.
- [65] A. Ravinovitch, R. Thieberger e M. Friedman, *Forced Bonhoeffer-van der Pol oscillator in its excited node*, Physical Review E, 50:1572, 1994.
- [66] J. L. Hindmarsh e R. M. Rose, *A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations*, Proceeding of the Royal Society B, 221:87, 1984.
- [67] M. V. Ivanchenko, G. V. Osipov, V. D. Shalfeev e J. Kurths, *Phase Synchronization in Ensembles of Bursting Oscillations*, Physical Review Letters, 93:134101-1, 2004.
- [68] N. F. Rulkov, *Regularization of Synchronized Chaotic Burst*, Physical Review Letters, 86:134101-01, 2004.
- [69] D. R. Chialvo, *Critical brain networks*, Physica A, 340:756, 2004.
- [70] R. Albert e A. L. Barabási, *Statistical mechanics of complex networks*, Review of Modern Physics, 74:11149, 2000.

- [71] C. A. S. Batista, A. M. Batista, J. C. A. de Pontes, R. L. Viana e S. R. Lopes, *Chaotic phase synchronization in scale-free networks of bursting neurons*, Physical Review E, 76:016218, 2007.
- [72] S. Raghavachari e J. A. Glazier, *Spatially Coherent States in Fractally Coupled Map Lattices*, Physical Review Letters, 74:3297, 1995.
- [73] C. Wagner e R. Stoop, *Neocortex's small world of fractal coupling*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 17:2409, 2007.
- [74] K. V. Srinivas, R. Jain, S. Saurav e S. K. Sikdar, *Small-world network topology of hippocampal neuronal network is lost, in an in vitro glutamate injury model of epilepsy*, European Journal of Neuroscience, 25:3276, 2007.
- [75] F. C. Hoppensteadt e E. M. Izhikevich, *Weakly Connected Neural Networks*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [76] *Epilepsy as a Dynamic Disease*, editado por J. Milton e P. Lung, editora Springer-Verlag, New York, 1997.
- [77] M. Rosenblum e A. Pikovsky, *Delayed feedback control of collective synchrony: An approach to suppression of pathological brain rhythms*, Physical Review E, 70:041904, 2004.
- [78] J. C. A. de Pontes, R. L. Viana, S. R. Lopes, C. A. S. Batista e A. M. Batista, *Bursting synchronization in non-locally coupled networks*, Physica A, 387:4417, 2008.
- [79] J. C. A. de Pontes, R. L. Viana, S. R. Lopes, C. A. S. Batista e A. M. Batista, *Bursting synchronization in scale-free networks*, aceito para publicação na revista Chaos, Solitons and Fractal, 2008.
- [80] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. D. P. Vicente, F. Ritort e R. Spiger, *The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena*, Reviews of Modern Physics, 77:137, 2005.
- [81] J. M. Yeomans, *Statistic Mechanics of Phase Transition*, Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [82] A. L. Benabid, P. Pollak, D. Hoffmann, C. Gervason, M. Hommenl, J. E. Perret, J. de Rougemont e D. M. Gao, *Long-term suppression of tremor by chronic stimulation of the ventral intermediate thalamic nucleus*, Lancet, 337:403, 1991.

# Anexos

## Artigos Publicados no doutorado

- C. A. S. Batista, A. M. Batista, J. C. A. de Pontes, R. L. Viana e S. R. Lopes, *Chaotic phase synchronization in scale-free networks of bursting neurons*, Physical Review E, 76:016218, 2007.
- J. C. A. de Pontes, R. L. Viana, S. R. Lopes, C. A. S. Batista e A. M. Batista, *Bursting synchronization in non-locally coupled networks*, Physica A, 387:4417, 2008.

## Artigo aceito para publicação

- J. C. A. de Pontes, R. L. Viana, S. R. Lopes, C. A. S. Batista e A. M. Batista, *Bursting synchronization in scale-free networks*, aceito para publicação na revista Chaos, Solitons and Fractal, 2008.