

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E SETOR DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM
ENGENHARIA

RODRIGO DIAS

FORMULAÇÃO BIDIMENSIONAL DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS DE
POTENCIAL ELÉTRICO EM MEIOS ESTRATIFICADOS

Curitiba, PR

2009

RODRIGO DIAS

**FORMULAÇÃO BIDIMENSIONAL DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS DE
POTENCIAL ELÉTRICO EM MEIOS ESTRATIFICADOS**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de
Mestre em Ciências pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos
do Setor de Tecnologia / Setor de Ciências Exatas, Departamento de
Engenharia Civil / Departamento de Matemática da Universidade Federal do
Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Alkimin de Lacerda

Co-Orientador: Prof. Dr. José Antonio Marques Carrer

Curitiba, PR

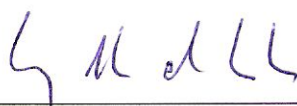
2009

TERMO DE APROVAÇÃO

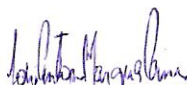
RODRIGO DIAS

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS DE POTENCIAL ELÉTRICO EM MEIOS ESTRATIFICADOS

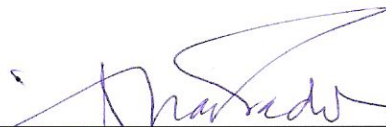
Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências, pelo Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, pela banca examinadora:



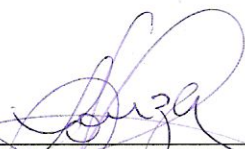
Prof. Luiz Alkimin de Lacerda, D.Sc.
LACTEC - UFPR
(Orientador)



Prof. José Antonio Marques Carrer, D.Sc.
Universidade Federal do Paraná – UFPR
(Co-orientador)



Prof. Roberto Dalledone Machado, D.Eng.
Universidade Federal do Paraná - UFPR



Prof. Luiz Antonio Soares de Souza, D.Sc.
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Curitiba, 06 de março de 2009

Dedicatória

Dedico este trabalho
A toda minha família, pelo
apoio, dedicação e compreensão

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e minha saúde.

Aos meus pais, Rosalvo e Aparecida, e o meu irmão que mesmo distantes apoiaram-me, aos meus avós João e Ana e as minhas tias Vera, Anadir e Verônica pelo apoio que sempre deram.

A minha esposa Patrícia, pelo amor carinho e compreensão que nos momentos mais angustiantes estava próxima me apoiando.

Aos meus orientadores, Prof. Alkimin e Prof. Carrer, pela orientação inestimável, pela confiança depositada em mim e pela paciência em todos os momentos de dúvidas.

Ao amigo “tio” Roberto, pelo companheirismo, amizade e bom humor.

À secretária do programa Maristela pela paciência, dedicação e alegria e principalmente muito carinho pelo programa.

Ao CNPq (Conselho nacional de desenvolvimento científico e tecnológico) pelo apoio financeiro que foi de primordial importância para a realização desse trabalho.

Aos professores e colegas do CESEC que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	X
LISTA DE TABELAS.....	XV
LISTA DE SÍMBOLOS.....	XVI
RESUMO.....	XX
ABSTRACT.....	XXII
1. Introdução.....	23
1.1 Estudo do potencial elétrico em solos.....	23
1.2 Revisão bibliográfica.....	27
1.3 Objetivos desse trabalho.....	32
2. Equações governantes.....	35
2.1 Introdução.....	35
2.2 Conservação de carga.....	35
2.3 Conservação de massa de uma espécie.....	39
2.4 A equação de Poisson ou eletroneutralidade.....	39
2.5 Lei da conservação do momento para um solvente.....	40
2.6 Conservação de massa de um solvente.....	41
2.7 Simplificações para problemas de potencial elétrico em solos....	42
2.8 Condições de contorno.....	46

2.8.1	Condição de contorno em uma superfície isolada.....	46
2.8.2	Condição de contorno em superfícies revestidas.....	47
2.8.3	Condição de contorno em eletrodos.....	47
3.	Métodos de estratificação do solo.....	48
3.1	Características elétricas do solo.....	48
3.2	Estrutura geológica.....	49
3.3	Medição da resistividade em meios homogêneos.....	51
3.4	O método de Wenner.....	54
3.4.1	Dispositivo de Schlumberger.....	62
3.4.2	Dispositivo dipolo-dipolo.....	62
3.4.3	Dispositivo de variação de uma haste.....	64
4.	O Método dos Elementos de Contorno.....	66
4.1	Segunda identidade de Green.....	67
4.2	Formulação integral por resíduos ponderados.....	69
4.2.1	Classificação das soluções.....	71
4.3	Equação integral de contorno.....	72
4.4	Método da colocação para a discretização da equação Integral de contorno.....	74
4.5	Método das imagens.....	75
4.6	Fontes pontuais.....	79
4.7	Implementação numérica.....	80
4.7.1	formação do sistema de equações.....	82

4.8	Formulação do MEC com sub-regiões.....	82
4.9	Lei de Ohm.....	89
4.9.1	Condições de interface e lei de Snell.....	89
5.	Resultados Numéricos – meios homogêneos.....	92
5.1	Distribuição de potencial em um domínio retangular.....	92
5.2	Simulação do Método de Wenner.....	97
5.3	Simulação com variação de uma haste.....	101
5.4	Simulação do Método de Wenner em semi-espaço estratificado.....	105
6.	Resultados Numéricos – meios com resistividade variável modelados com sub-regiões	113
6.1	Distribuição de potencial em um domínio retangular.....	113
6.2	Simulação do Método de Wenner em meios estratificados com resistividade variável.....	118
6.3	Distribuição de potencial em domínio retangular com resistividade não linear.....	120
7.	Considerações finais	124
7.1	Sugestões para trabalhos futuros.....	125
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	127

APÊNDICE A – Solução fundamental 2D.....136

APÊNDICE B – Transferência da equação integral para o
contorno.....140

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 3.2.1	Intervalos de variação de da resistividade de alguns materiais.....	50
FIGURA 3.2.2	Comportamento da resistividade de acordo com a umidade e na água de acordo com a temperatura.....	51
FIGURA 3.3.1	Injeção de corrente através de um eletrodo no semi-espaço.....	52
FIGURA 3.4.1	Desenho esquemático de hastes cravadas no solo para injeção e retirada de corrente e medida de diferença de potencial.....	55
FIGURA 3.4.2	Esquema gráfico adotado para a determinação da expressão para o potencial no método de Wenner.....	56
FIGURA 3.4.3	Representação da série infinita de fontes (e sumidouros) distribuídas ao longo de duas linhas sobre a superfície livre.....	60
FIGURA 3.4.4	Representação gráficas dos dispositivos comumente utilizados para o calculo da resistividade elétrica do solo.....	63
FIGURA 3.4.5	representação gráfica para uma haste deslocada entre h_1 e h_2 no método de Wenner.....	65
FIGURA 4.3.1	Cálculo do coeficiente $c(\xi)$ para um ângulo α qualquer...	74
FIGURA 4.5.1	Reflexão do ponto de aplicação da corrente elétrica Imagem do ponto ξ num domínio infinito subdividido pelo contorno Γ_h	78

FIGURA 4.6.1	Representação do domínio estudado com aplicação de fontes pontuais utilizando o método das imagens.....	80
FIGURA 4.8.1	Domínio Ω de contorno Γ modelado com sub-regiões....	83
FIGURA 4.8.2	Domínio Ω e contorno Γ discretizado em quatro sub-regiões com quatro elementos constantes cada sub-regiões.....	85
FIGURA 4.8.3	Ilustração da matriz formada pelos coeficientes de H e G para um domínio estratificado em quatro sub-regiões.....	86
FIGURA 4.8.4	Matriz formada após procedimentos descritos no item um e dois.....	87
FIGURA 4.8.5	Matriz formada após procedimentos descritos no item três.....	88
FIGURA 4.9.1	Representação gráfica da reflexão da densidade de corrente entre dois meios de resistividades diferentes.....	91
FIGURA 5.1.1	Representação do domínio retangular e das condições de contorno para o problema de potencial em uma região única.....	93
FIGURA 5.1.2	Representação do domínio retangular e das condições de contorno para o problema de potencial em duas sub-regiões.....	93
FIGURA 5.1.3	Representação do domínio retangular e das condições de contorno para o problema de potencial em três sub-regiões.....	94
FIGURA 5.1.4	Distribuição de potencial ao longo do contorno para os três casos analisados.....	95
FIGURA 5.1.5	Distribuição do erro relativo ao longo do contorno superior para os três casos analisados.....	96

FIGURA 5.2.1	Representação do domínio para simulação do método de Wenner.....	98
FIGURA 5.2.2	Distribuição de potencial na superfície do solo para as diversas configurações de espaçamento entre as hastes (caso 7).....	100
FIGURA 5.2.3	Diferença de potencial entre as duas hastes centrais nas diversas configurações de espaçamento e domínios analisados.....	100
FIGURA 5.2.4	Comparação da distribuição do Erro relativo em escala logarítmica, nas aproximações do MEC para o problema em estudo com o método das imagens e sem o método das imagens.....	101
FIGURA 5.3.1	Representação esquemática para simulação com a haste h_2 em posição variável.....	102
FIGURA 5.3.2	Diferenças de potenciais entre h_2 e h_3 , para a haste h_2 variando segundo os casos 3, 8 e 9 da tabela 5.3.1.....	104
FIGURA 5.3.3	Erro relativo entre as soluções numéricas e analítica para os três casos analisados com variação de uma haste para $n=1$ m, $n=2$ m e $n=3$ m, ambos para o caso 3.....	104
FIGURA 5.4.1	Representação do domínio para simulação do método de Wenner com duas sub-regiões.....	105
FIGURA 5.4.2	Diferença de potencial nas hastes para as diversas configurações de espaçamento entre as hastes h_2 e h_3 com uma e duas sub-regiões dimensões do caso três com uma e duas sub-regiões.....	106

FIGURA 5.4.3	Comparação da distribuição do erro relativo para as duas configurações de domínios e espaçamentos de hastes, do caso analisado na figura 5.4.3.....	107
FIGURA 5.4.4	Comparação da distribuição de potencial na superfície para o caso 7 e na interface para o caso 3 para espaçamento entre as hastes de 16 m.....	108
FIGURA 5.4.5	Representação do domínio para simulação do método de Wenner com três sub-regiões.....	109
FIGURA 5.4.6	Diferença de potencial nas hastes para os casos 3 com uma, duas e três sub-regiões para as diversas configurações de espaçamento entre as hastes h_2 e h_3	109
FIGURA 5.4.7	Comparação da distribuição do erro relativo para os casos analisados na figura anterior.....	110
FIGURA 5.4.8	Distribuição do potencial nas duas interfaces uma região, com domínio estratificado em três sub-regiões para hastes espaçadas de 16 m.....	111
FIGURA 5.4.9	Representação do domínio para simulação do método de Wenner com quatro sub-regiões.....	111
FIGURA 5.4.10	Distribuição do potencial nas três interfaces das quatro Sub-regiões, com espaçamento entre hastes de 16m.....	112

FIGURA 6.1.1	Modelo do problema de distribuição de potencial em um domínio retangular com 2 sub-regiões com condutividades diferentes.....	113
FIGURA 6.1.2	Distribuição de potencial ao longo do contorno superior do domínio retangular definido na figura 6.1.1.....	115
FIGURA 6.1.3	Modelo do problema de distribuição de potencial em um domínio retangular com 3 sub-regiões com condutividades diferentes.....	116
FIGURA 6.1.4	Distribuição de potencial ao longo do contorno superior do domínio retangular definido na figura 6.1.3.....	117
FIGURA 6.2.1	Distribuição de potencial nas interfaces em meio estratificado em quatro sub-regiões (caso 1) - hastes espaçadas de 16 m.....	119
FIGURA 6.2.2	Distribuição de potencial nas interfaces em meio estratificado em quatro sub-regiões caso 2 hastes espaçadas de 16 m.....	120
FIGURA 6.3.1	Permeabilidade em função da profundidade y	121
FIGURA 6.3.2	Representação do domínio estratificado para fluxo de Darcy com permeabilidade variável.....	121
FIGURA 6.3.3	Distribuição do potencial em função da profundidade – numérico (MEC) e analítico.....	122

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.2.1	Comportamento da resistividade do solo.....	51
Tabela 5.1.1	Comparação entre a resposta analítica e a obtida pelo MEC para os três pontos internos.....	96
Tabela 5.1.2	Comparação entre a resposta analítica e a obtida pelo MEC para os dois pontos internos.....	96
Tabela 5.1.3	Comparação entre a resposta analítica e a obtida pelo MEC para o ponto interno.....	97
Tabela 5.2.1	Representação das dimensões dos domínios analisados.....	99
Tabela 5.3.1	Representação das dimensões dos domínios analisados.....	102
Tabela 6.1.1	Comparação entre a solução analítica e a obtida pelo MEC para os pontos internos A e C.....	115
Tabela 6.1.2	Comparação entre a resposta analítica e a obtida pelo MEC para três sub-regiões.....	117
Tabela 6.2.1	Comparação dos resultados analíticos e numéricos (potencial) ao longo da profundidade.....	123

LISTA DE SIMBOLOS

a	Espaçamentos entre hastes
A_i	Taxa de produção por consumo de uma espécie
b	Função constante (ou variável)
\vec{B}	Fluxo magnético
c_i	Concentração de uma espécie
$c(\xi)$	Fator geométrico
d	Distância
ds	Diferencial de Área
dV	Diferencial de volume
D_i	Coeficiente de difusão de uma espécie
\vec{E}	Campo elétrico
$f(I_n)$	Função de polarização
F	Constante de Faraday
$G(\bullet)$ $L(\bullet)$ $S(\bullet)$	Operadores diferenciais
$L^*(\bullet)$	Operador diferencial auto adjunto
$G(r, r')$	Funções de Green
h_i	Representação da haste em forma pontual
H G	Matrizes que compõem o sistema de equações algébricas

$\left. \begin{matrix} u \\ q \end{matrix} \right\}$	Vetores que compõem o sistema de equações
i	Intensidade de corrente elétrica
i'	Imagem da intensidade de corrente elétrica
$\left. \begin{matrix} I \\ J(r) \end{matrix} \right\}$	Densidade de corrente elétrica
k	Condutividade
k^*	Permeabilidade
k_{fg}	Fator geométrico
\vec{n}	Vetor normal
$\left. \begin{matrix} N_i^{convecção} \\ N_i^{difusão} \\ N_i^{migração} \end{matrix} \right\}$	Fluxo convectivo, difusivo e migratório
p	Pressão hidrostática (ou profundidade)
q	Fluxo
Q	Densidade de carga
\vec{q}	Fluxo prescrito
q^*	Derivada do potencial
r	Raio
r'	Imagem do raio
R	Resistência elétrica
t	Tempo
u_i	Mobilidade mecânica de uma espécie
v	Velocidade

$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\}$	Coordenadas dos extremos dos elementos
$\left. \begin{matrix} x(\eta) \\ y(\eta) \end{matrix} \right\}$	Mapeamento local
$X = (x, y)$	Ponto de onde se deseja determinar o potencial.
z_i	Carga elétrica
δ	Espessura do revestimento
$\delta(\xi, \xi')$	Função Delta de Dirac
ε	Raio (ou constante dielétrica)
ε_r	Permissividade elétrica relativa
μ_r	Permeabilidade magnética relativa
μ	Coefficiente de viscosidade
ξ	Ponto de aplicação da fonte pontual
Ω_i	Domínio estratificado
Γ	Contorno
Γ_h	Contorno da superfície do solo
Γ_n	Contorno discretizado
$\sum_{i=1}^n$	Somatório de 1 a n
\int_{Γ}	Integral de contorno
\int_S	Integral de superfície
\int_V	Integral de Volume

\int_{Ω}	Integral de domínio
$\langle (\cdot), (\cdot) \rangle$	Produto escalar
ω	Função de ponderação
Φ	Potencial
$\bar{\Phi}$	Potencial prescrito
Φ^*	Solução fundamental
Φ_{cor}	Potencial de corrosão
$\vec{\nabla}$	Nabla (operador diferencial)
$\vec{\nabla}^2$	Operador diferencial Laplaciano

RESUMO

Dias, Rodrigo, Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Problemas de Potencial Elétrico em Meios Estratificados, Curitiba: Departamento de Engenharia Civil / Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná, 2009. 107 p. Dissertação de Mestrado.

O presente trabalho apresenta a formulação bidimensional do Método dos Elementos de Contorno para o estudo de problemas de potencial elétrico em solos com resistividade variável. Em específico, o trabalho enfoca características de modelagem para a simulação do ensaio de Wenner, que por sua vez visa à obtenção do perfil de resistividades de um meio heterogêneo. Nesse sentido, esse trabalho contribui para o melhor conhecimento da distribuição de potenciais em meios com resistividade variável. A formulação implementada compreende o uso de sub-regiões para simular a heterogeneidade dos meios, o método das imagens para evitar a discretização da superfície livre e fontes pontuais para a simulação da injeção e retirada de correntes elétricas no domínio do problema. Diversos exemplos numéricos são resolvidos, considerando-se meios homogêneos e não-homogêneos, para demonstrar a validade do programa computacional desenvolvido. Mostra-se que a formulação bidimensional é limitada para a simulação do Método de Wenner e obtenção de conclusões sobre o perfil de resistividades do solo.

Entretanto, permite aprimorar a compreensão sobre a distribuição do potencial elétrico em solos com perfil de resistividades variando em camadas.

Palavras-chaves: Método dos Elementos de Contorno, Resistividade, Método de Wenner.

ABSTRACT

The present work shows a two-dimensional boundary element formulation for the study of electric potential problems in soils with varying resistivity with depth. The work focuses on appropriate modeling characteristics for the simulation of the Wenner Method, which is frequently used for defining the resistivity layering profile of heterogeneous media. In this sense, this study contributes to a better knowledge about the potential distribution in varying soil resistivity. The implemented formulation comprehends the use of sub regions to simulate the heterogeneous medium, the method of images to avoid the discretization of the horizontal free surface of the medium, and point sources to simulate electrical current injection and sinking in the interior of the domain. Many numerical examples are solved to validate the developed computational program, considering homogeneous and non-homogeneous media. It is shown that the two-dimensional formulation is limited for the simulation of the Wenner method and retrieving the resistivity profile of soils. However, it allows understanding the potential distribution in layered media.

Keywords: Boundary Element Method, Resistivity, Wenner Method.

1 Introdução

1.1 Estudo do potencial elétrico em solos

Muitas são as justificativas para estudar o problema da distribuição de potencial em meios heterogêneos.

O adequado funcionamento de sistemas de aterramento, essencial para a segurança de pessoas e equipamentos, depende de uma avaliação do meio onde os sistemas estão inseridos, muitas vezes heterogêneos. As pessoas devem estar protegidas frente a uma tensão anormal imposta aos circuitos eletrônicos, de comunicação ou potência, ou ainda presentes em estruturas metálicas que possam ser tocadas e que tenham algum contato com o solo.

Um sistema de aterramento seguro deve garantir a integridade do equipamento e da continuidade dos serviços sob condições adversas, fornecendo meios, para o transporte de correntes elétricas se dissiparem no solo e para a salvaguarda de pessoas que trabalham ou caminham nas imediações dessas instalações, de modo que elas não fiquem expostas a choques elétricos perigosos. Para alcançar estes objetivos, a resistência elétrica equivalente do sistema deve ser suficientemente baixa, para garantir que a corrente elétrica se dissipe, principalmente através das malhas sob a

terra, enquanto o potencial máximo (tensão de toque) e as diferenças de potencial (tensões de passo) entre os pontos sobre a superfície da terra devem ser mantidos sob certas tolerâncias (IEEE, 2000; SVERAK, 1999). Nas últimas quatro décadas, o funcionamento dos sistemas de aterramento tem sido extensivamente analisado, e vários métodos de análise têm sido propostos.

CAPELLI (2000) faz alguns questionamentos de grande relevância de situações em que o quesito aterramento elétrico é importante e mostra alguns itens nos quais aparecem as maiores dúvidas na elaboração de um projeto de aterramento elétrico e construção do mesmo.

Outro fator de grande importância em se tratando do conhecimento da distribuição de potencial em solos é o fato de que estruturas metálicas enterradas, seja qual for a característica do meio, devem ser protegidas contra a corrosão. A resistividade do meio também é uma característica importante nesse processo.

Os estudos relacionados à corrosão de metais ganharam força a partir de 1969, quando o governo do Reino Unido criou um grupo de trabalho com fins específicos de fazer um levantamento estatístico para avaliar o custo da corrosão naquele país. Este grupo foi coordenado pelo corrosionista da Universidade de Cambridge, T. P. Hoar, houve um grande susto quando o grupo estimou que o custo da corrosão para o Reino Unido naquele ano de 1969 fora de cerca de 1,365 bilhões de Libras Esterlinas, valor esse que corresponderia a 3,5% do PIB anual. Hoar foi ainda mais adiante e estimou que

em 1974 o valor gasto com a corrosão no Reino Unido seria de 2,5 bilhões de Libras.

Seguindo o mesmo caminho do Reino Unido, os Estados Unidos em 1975, através do *National Bureau of Standards* em conjunto com o *Batelle Columbus Laboratories* (Columbus, Ohio), estimaram que a corrosão teria um custo de 70 bilhões de dólares, cerca de 4,2% do PIB daquele país. Esse mesmo órgão, nos anos de 1999 a 2001, estimou a quantia de 279 bilhões de dólares a serem gastos no controle e substituições de metais que sofreram com o processo de corrosão nos Estados Unidos, cerca de 3,1% do PIB. O Brasil usa essa mesma estimativa de 3,1% do PIB, gasto todos os anos no controle e combate a corrosão. Se aplicada essa mesma estimativa a todos os países do mundo, chega-se a valores astronômicos. Com isso, a partir da década de 70, começaram a se intensificar os estudos a respeito desse fenômeno e diversas formas de análise surgiram no aprimoramento das técnicas de proteção.

Com o avanço dos computadores nos últimos anos, foi possível o emprego de métodos numéricos para simulações de situações práticas, aprimorando as técnicas de combate à corrosão.

Outro importante campo da ciência onde se procura conhecer características elétricas do meio, entre elas a sua resistividade, é a Geofísica. Esta área tem hoje, na indústria petrolífera, uma grande importância devido ao enorme volume de riquezas naturais imerso no solo. Outra aplicação de

elevada importância é o estudo de transporte de poluentes em solos e em fluidos, que também pode ser abordado pela geofísica.

A resistividade elétrica do solo varia fundamentalmente com o conteúdo de água no mesmo, bem como depende de sua composição mineral, além de outros fatores. Este fato torna o estudo desta propriedade importante para a análise de sistemas hidrogeológicos e de outros sistemas que envolvem a resistividade do meio.

A resistividade do solo, assim como sua estratificação, é de fundamental importância para o dimensionamento de sistemas de proteção para equipamentos elétricos, uma vez que a resistência de uma malha de aterramento é diretamente proporcional à resistividade (ρ) do meio onde estão colocados os eletrodos (VISACRO, 2002). Assim, quando se pretende buscar um baixo valor da resistência de aterramento, deve-se ter um bom conhecimento do perfil de resistividades das camadas do solo (ZENG *et al.*, 2000).

Por se tratar de um fator preponderante para o bom desempenho de um sistema elétrico, e para garantir os limites toleráveis dos níveis de segurança pessoal, o quesito aterramento elétrico deve receber uma atenção especial. Entre os principais objetivos de um sistema de aterramento tem-se:

- Manter a resistência de aterramento a mais baixa possível;

- Manter os potenciais os mais baixos possíveis para a manutenção dos limites de segurança pessoal dentro dos padrões toleráveis pelas normas técnicas (NBR 5410, 1997);
- Garantir a segurança de equipamentos elétricos instalados na rede;
- Desenvolver caminhos propícios para escoamentos de descargas elétricas oriundas da atmosfera ou dos próprios equipamentos instalados na rede.

Vários são os fatores que influenciam o valor da resistividade dos solos (KINDERMANN e CAMPAGNOLO, 1995), sendo indispensável a realização de medições nos locais onde serão instalados os sistemas de segurança que se desejam, seja na indústria para proteção e bom funcionamento dos equipamentos instalados ou para a segurança das pessoas que trabalham ou transitam nas proximidades desses sistemas. O método de Wenner (WENNER, 1916; ASTM G57-95, 1995) é uma técnica comumente utilizada para a determinação do perfil de resistividades do solo.

1.2 Revisão bibliográfica

Parte dos problemas citados na seção anterior é governada pela equação de Laplace. Esta equação tem inúmeras aplicações na Física Matemática, não só por descrever uma grande quantidade de fenômenos

estacionários, mas também por servir de base para solução de outras equações mais complexas. O ramo da matemática que estuda soluções da equação de Laplace é denominado de teoria do potencial. A teoria do potencial foi uma das primeiras teorias a ter um grande número de pesquisadores trabalhando em sua solução e ganhou força à medida que se encaixava para a representação de fenômenos observados na natureza. Entre os principais pesquisadores estão aqueles que conseguiram combinar leis Físicas de gradientes fenomenológicos com relações ou equações matemáticas, sejam elas empíricas, semi-empíricas ou não, tais como a lei da transferência de calor de Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

Pierre-Simon Laplace (1749-1827) desenvolveu uma das equações mais famosas da teoria do potencial, equação na qual o conceito matemático de potencial de velocidade ou elétrico, entre outros, não é associado a qualquer quantidade física mensurável. A expressão função potencial, na verdade, é devida ao cientista George Green (1793-1841) num estudo datado de 1828 (FERRERS, 1970) sobre eletrostática e magnetismo, em que potenciais elétricos e magnéticos eram usados como ferramentas bastante convenientes para manipular a solução de forças elétricas e magnéticas.

Uma revisão histórica abrangente sobre a evolução dessa teoria até a consolidação das técnicas numéricas para solução dos problemas correlatos é apresentada por CHENG *et al.* (2005).

Soluções para os problemas governados pela equação de Laplace são obtidas através de métodos analíticos ou de métodos numéricos.

Métodos analíticos são sempre recomendados, mas há uma grande dificuldade em se obter soluções para os variados problemas, seja pela geometria, que normalmente não é simples, seja pela complexidade de condições iniciais ou de contorno relevantes para a sua solução.

Os métodos numéricos oferecem a possibilidade de respostas pontuais para solucionar problemas particulares mesmo em condições complexas, permitindo encontrar soluções para as inúmeras variantes do problema em curto tempo de processamento, devendo contar com auxílio computacional na realização de seus cálculos.

Entre os métodos numéricos mais utilizados tem-se: o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Este trabalho enfoca o uso do MEC (WROBEL e ALIABADI, 2002), para a solução de problemas de distribuição de potencial elétrico em solos. Dois aspectos contribuíram para a seleção dessa técnica numérica: a facilidade na elaboração das malhas de elementos de contorno e a forma como as regiões infinitas ou semi-infinitas podem ser abordadas.

Nos últimos anos vários autores vêm adotando o MEC para resolução de problemas que envolvem proteção catódica de estruturas metálicas enterradas no solo ou em meios agressivos aos metais, projeto e diagnóstico de malhas

de aterramento, entre outros que incluem a necessidade de se conhecer a resistividade do meio.

O tratamento de problemas em que a resistividade do meio não é constante exige a adoção de técnicas específicas no MEC. Por exemplo, a técnica de sub-regiões foi utilizada por CHANG (1979) para simulações envolvendo regiões não homogêneas anisotrópicas, usando elemento constante. Outra abordagem é apresentada por SAMPAIO (1997) em simulações numéricas para problemas de percolação de água em solos homogêneos por partes, em regime permanente, adotando elementos constantes e elementos lineares descontínuos.

CHENG (1984) analisou uma formulação do MEC para problemas de fluxo de Darcy com permeabilidade variável. Nesse trabalho foram realizadas comparações do MEC de problemas avaliados com sub-regiões e com funções de Green's propostas para problemas de percolação de águas com permeabilidade variável, obtendo-se bons resultados.

CHENG e PREDELEANU (1987) e CHENG e DETOURNAY (1998) fizeram uma série de análises via MEC para problemas de permeabilidade dos solos e problemas transientes de poroelasticidade, dentre outros.

Dentro do conjunto de estudos e formulações do MEC desenvolvidas para a solução de problemas de proteção catódica, vale destacar os softwares PROCAT e BEASY. MANSUR *et al.* (1987) desenvolveram o PROCAT, software criado pelo Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ em

parceria com a PETROBRÁS, para analisar projetos de proteção catódica. O software comercial BEASY (2000) talvez seja o de maior difusão na linha de proteção catódica, apresentando características peculiares como:

- Otimização da localização do ânodo;
- Predição da vida útil do ânodo de sacrifício;
- Simulação de eletrodeposição e outros processos similares;
- Simulação de mudanças nas condições ambientais;

Os softwares de proteção catódica atualmente disponíveis, incorporam técnicas que vêm sendo pesquisadas e avaliadas nas últimas três décadas.

YAN *et al.* (1992) pesquisaram uma formulação do MEC com curvas de polarização não-linear exponenciais.

BRICHAU (1994) apresenta, em sua tese de doutorado um desenvolvimento teórico a respeito da corrosão e de suas propriedades químicas, além de uma abordagem numérica com o MEC para a prevenção da corrosão em oleodutos enterrados, utilizando corrente impressa e modelos unidimensionais para a modelagem dos dutos.

SANTIAGO e TELLES (1996) desenvolveram uma formulação do MEC para prever a evolução de densidades de corrente e a distribuição de potencial em relação ao tempo. O fenômeno é governado pela equação de Laplace ou equação de Poisson, sujeito a uma condição de contorno não-linear variando com o tempo. Os autores utilizam curvas de polarização dinâmicas,

dependente do tempo e a formação de potenciais baseados em dados de potenciostatos obtidos em experimentos.

MILTIADOU e WROBEL (2002) desenvolveram uma formulação inversa do MEC com base em algoritmos genéticos para identificar a localização de defeitos em gasodutos protegidos catodicamente. LACERDA e SILVA (2006) seguiram a mesma idéia de análise inversa com algoritmos genéticos, porém acoplada a uma formulação dual (ou mista) do MEC. Essa formulação dual (LACERDA *et al.* 2007) foi desenvolvida visando a análise de sistemas de proteção catódica de estruturas esbeltas enterradas, com o objetivo de facilitar a modelagem geométrica dos problemas.

Já em outra aplicação, COLOMINAS *et al.* (2007) desenvolveram formulações do MEC que possibilitam a análise de estruturas de aterramento, visando facilitar o desenvolvimento de projetos que envolvem estruturas de aterramento.

1.3 Objetivos desse trabalho

Esse trabalho tem por objetivo a implementação de uma formulação bidimensional do Método dos Elementos de Contorno para o estudo de problemas de potencial elétrico em solos com resistividade variável. Em específico, almeja-se conhecer a distribuição do potencial elétrico em solos, resultante da execução de ensaios normatizados (ensaio de Wenner, etc.),

comumente empregados para a determinação do perfil de resistividade de solos. Portanto, o desenvolvimento numérico será direcionado para a realização de simulações desse tipo de ensaio.

Nesse sentido, esse trabalho contribui para o melhor conhecimento do perfil de resistividade de solos, que por sua vez possibilita a realização de um projeto mais confiável para sistemas de aterramento elétrico ou sistemas de proteção catódica, entre outros.

Um fator importante que deve ser ressaltado é que as técnicas utilizadas na prática para a determinação da resistividade do solo empregam a injeção de correntes pontuais, exigindo modelos tridimensionais para a sua adequada simulação. Nesse trabalho apresenta-se uma formulação bidimensional, o que inviabiliza a verificação do modelo implementado com dados experimentais.

Ainda, esse trabalho busca uma abordagem através de sub-regiões para simular a heterogeneidade (estratificação) dos solos. Essa abordagem possibilita a inclusão de diferentes cenários, tais como meios estratificados paralelos ou não à superfície livre e elementos que facilitam a fuga de correntes, entre outros.

A formulação implementada forma a base de um ambiente computacional específico para este tipo de análise visando à definição do perfil de resistividades variáveis do solo. A implementação do método das imagens traz benefícios no desenvolvimento da solução, uma vez que não se faz

necessária a discretização da superfície livre, reduzindo o custo computacional do problema.

Nos capítulos que seguem serão apresentados as teorias e os conceitos utilizados para o desenvolvimento desse trabalho.

No capítulo 2 serão apresentadas as equações governantes e suas propriedades, no capítulo 3 são apresentados os conceitos da teoria do potencial elétrico em solos, bem como as técnicas comumente utilizadas para a determinação do perfil de resistividades do solo. No capítulo 4 são apresentados os conceitos da teoria do MEC e sua formulação integral de contorno. Nos capítulos 5 e 6 são apresentados os resultados numéricos para meios homogêneos e heterogêneos, respectivamente, em grau crescente de complexidade, até a simulação do ensaio de Wenner (ASTM, 1995).

Finalmente, no capítulo 7 são apresentadas as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

2 Equações governantes

2.1 Introdução

As equações relevantes para o transporte de cargas e para o momento de uma dada concentração ou solução de um determinado eletrólito são apresentadas a seguir, para uma solução diluída em um solvente ionizado a temperatura e pressão constantes (DECONINCK, 1992; BUTLER, 2000).

2.2 Conservação de carga

O movimento de uma partícula em um meio fluido provoca convecção. O movimento de um fluido em cada ponto do sistema é determinado pelo vetor velocidade v , em m/s , do solvente. Por outro lado, a convecção de uma determinada espécie i é proporcional à sua concentração c_i em $moles/m^3$. Assim, o fluxo convectivo, N_i , dessa espécie i devido à convecção é dado por:

$$N_i^{convecção} = c_i v \quad (2.1)$$

Quando a concentração de espécies varia em toda a região, tem-se a difusão. Espécies irão se deslocar para locais com menor concentração. Esse movimento pode ser descrito matematicamente pela primeira lei de Fick's (BOCKRIS *et al.* 1970), dada por:

$$N_i^{difusão} = -D_i \vec{\nabla} c_i \quad (2.2)$$

onde D_i é o coeficiente de difusão da espécie i , em m^2/s , normalmente da ordem de $10^{-9} m^2/s$, e $\vec{\nabla} c_i$ é o gradiente de concentração de espécies i em $moles/m^4$.

Quando uma partícula, com carga z_i é submetida a um campo elétrico \vec{E} , uma força elétrica atua sobre ela. A interação entre as partículas faz com que elas se acelerem e as forças de atrito devido a essas interações íon/solvente irão limitar a velocidade para valores proporcionais às forças. A velocidade média de uma espécie na solução submetida à ação de uma força de $1N/mole$ é chamada de mobilidade mecânica, onde u_i é dada em $m.moles/N.s$. O fluxo migratório, $N_i^{migração}$, da espécie i é dado por:

$$N_i^{migração} = z_i F u_i c_i E \quad (2.3)$$

onde F é a constante de Faraday, $F = 96.500 \text{ Coulombs/mole}$, e \vec{E} é o campo elétrico em V/m . A Lei de Faraday relaciona o rotacional do campo elétrico

com a densidade do fluxo magnético \vec{B} (HALLIDAY e RESNICK, 1990) da seguinte forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Para um sistema eletroquímico em equilíbrio, a densidade do fluxo magnético \vec{B} é constante, levando a $\partial \vec{B} / \partial t = 0$. Isso permite que a equação (2.4) seja escrita na forma $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, ou seja, não existe variação do campo magnético com decorrer do tempo. Não havendo variação com o tempo, o campo elétrico pode assim ser expresso como o gradiente de um campo escalar, conhecido como potencial elétrico ou eletroquímico Φ , de uma determinada solução, e pode ser descrito matematicamente como:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (2.5)$$

Combinando agora as equações (2.3) e (2.5), o fluxo de um líquido devido à migração é dado por:

$$N_i^{migração} = -z_i F u_i c_i \vec{\nabla}\Phi \quad (2.6)$$

O fluxo total de uma espécie i é representado matematicamente como

$$N_i = N_i^{\text{convecção}} + N_i^{\text{difusão}} + N_i^{\text{migração}} \quad (2.7)$$

Aplicando-se as equações (2.1), (2.2) e (2.6) na equação (2.7), N_i é dado por.

$$N_i = c_i v - D_i \vec{\nabla} c_i - z_i F u_i c_i \vec{\nabla} \Phi \quad (2.8)$$

Uma vez obtida a expressão para o fluxo de cada partícula carregada, a densidade de corrente é facilmente obtida através da adição de cada fluxo multiplicado pela respectiva carga por mole, assim:

$$I_i = F z_i (c_i v - D_i \vec{\nabla} c_i - z_i F u_i c_i \vec{\nabla} \Phi) \quad (2.9)$$

Admitindo que não exista interação entre as n espécies, a densidade total de corrente I para o sistema é a soma de todas as densidades de correntes, dada por:

$$I = F \sum_{i=1}^n z_i (c_i v - D_i \vec{\nabla} c_i - z_i F u_i c_i \vec{\nabla} \Phi) \quad (2.10)$$

2.3 Conservação de massa de uma espécie

Para cada espécie i em uma solução, a mudança de concentração devido a reações químicas é igual à *produção/consumo* mais um afluxo líquido.

Na forma diferencial, isto é descrito pela seguinte equação matemática:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (c_i \mathbf{v} - D_i \vec{\nabla} c_i - z_i F u_i c_i \vec{\nabla} \Phi) + A_i \quad (2.11)$$

onde A_i é a taxa de *produção/consumo* de uma espécie i , devido à maior parte das reações na solução serem homogêneas.

2.4 A equação de Poisson ou eletroneutralidade

A densidade de carga em cada ponto de uma dada solução ou concentração é dada por:

$$Q = F \sum_{i=1}^n z_i c_i \quad (2.12)$$

Para problemas eletrostáticos, a forma diferencial da lei da eletrostática de Gauss relacionando o campo elétrico \vec{E} com a densidade de carga Q da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} Q \quad (2.13)$$

onde ε_0 é a constante dielétrica da solução. Relacionando as equações (2.5) e (2.13), o resultado é a equação de Poisson para o potencial Φ , escrita como:

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = -\frac{4\pi}{\varepsilon_0} Q \quad (2.14)$$

Combinando as equações (2.12) e (2.14), obtém-se:

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = -\frac{4\pi}{\varepsilon} F \sum_{i=1}^n z_i c_i \quad (2.15)$$

2.5 Lei da conservação do momento para um solvente

A equação Navier-Stokes é a expressão da conservação da dinâmica dos fluidos viscosos incompressíveis. Admitindo que o solvente não seja ionizado, as forças elétricas e magnéticas não serão consideradas, assim, obtém-se:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \vec{\nabla} v \right) = \mu \vec{\nabla}^2 v - \vec{\nabla} p + \rho g \quad (2.16)$$

onde $\mu \vec{\nabla}^2 v$ representa as forças viscosas, $\vec{\nabla} p$ é o gradiente hidrostático de pressão e ρg é a força gravitacional que atua no fluido.

2.6 Conservação de massa de um solvente

O balanço global de massa para cada ponto de um solvente é matematicamente representado pela equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho v) \quad (2.17)$$

onde ρ é a densidade do solvente. Quando a densidade pode ser considerada como constante, a equação (2.17) reduz-se a

$$\vec{\nabla} \cdot v = 0 \quad (2.18)$$

Essa equação implica que a densidade não é afetada por diferentes concentrações.

2.7 Simplificações para problemas de potencial elétrico em solos

As expressões para transporte de cargas e para o momento de uma espécie são apresentadas em (2.19). Em seguida são feitas considerações para que as equações descritas sejam aplicadas para problemas de potenciais elétricos tendo o solo como domínio. Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} I = F \sum_{i=1}^n z_i (c_i v - D_i \vec{\nabla} c_i - z_i F u_i c_i \vec{\nabla} \Phi) \\ \frac{\partial c_i}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (c_i v - D_i \vec{\nabla} c_i - z_i F u_i c_i \vec{\nabla} \Phi) + A \\ \vec{\nabla}^2 \Phi = -\frac{4\pi}{\varepsilon} F \sum_{i=1}^n z_i c_i \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \vec{\nabla} v \right) = \mu \vec{\nabla}^2 v - \vec{\nabla} p + \rho g \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho v) \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Para diversos problemas, incluindo os que estão em consideração neste estudo, o sistema de equações acima pode ser simplificado, fazendo as seguintes hipóteses.

- 1 A condutividade elétrica é tão grande que cargas livres não existem. Isso é equivalente à equação de eletroneutralidade, $\sum_{i=1}^n z_i c_i = 0$. Este pressuposto não é correto na camada dupla, porque nessa camada o campo elétrico é muito forte e há cargas livres, (MILTIADOU, 2002). Esta segunda camada, entretanto, tem dimensões de nanômetros e pode ser considerada como

pertencente ao contorno; assim sendo, pode ser considerada como condição de contorno para o sobre-potencial de ativação.

2 Não havendo nenhuma taxa de $\frac{\text{produção}}{\text{consumo}}$ de espécies devido a reações locais no corpo da solução, todas as reações acontecem nos eletrodos; assim, tem-se $A_i = 0$.

3 O campo de velocidade da solução e a concentração de cada espécie permanecem constantes no tempo; dessa maneira, as derivadas em relação ao tempo são nulas: $\partial v / \partial t = 0$ e $\partial c_i / \partial t = 0$. Este pressuposto não conduz a erros significativos quando a relação de eletrólitos para íons de metais dissociados for muito grande.

4 A densidade global da solução permanece constante no tempo, assim $\partial \rho / \partial t = 0$.

5 O gradiente de concentração $\vec{\nabla} c_i$ pode ser negligenciado em simulações de larga escala. A razão é que o gradiente de concentração só tem uma influência significativa sobre a camada de difusão, próxima à estrutura, que é muito fina em comparação com o dimensionamento característico do sistema. Assim, os efeitos da concentração são normalmente incorporados em curvas de polarização e aplicados como condições de contorno.

Levando em conta as hipóteses anteriores o sistema de equações (2.19) pode ser reduzido para o seguinte sistema de equações:

$$I = F \sum_{i=1}^n z_i (c_i v - z_i F u_i c_i \vec{\nabla} \Phi) \quad (2.20)$$

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 0 \quad (2.21)$$

$$0 = -\vec{\nabla} \left(\sum_{i=1}^n (c_i v - z_i F u_i c_i \vec{\nabla} \Phi) \right)_i \quad (2.22)$$

$$0 = -\vec{\nabla} \cdot (\rho v) \quad (2.23)$$

$$\rho (v \vec{\nabla} v) = \mu \vec{\nabla}^2 v - \vec{\nabla} p + \rho g \quad (2.24)$$

A equação (2.21) significa que problemas de potencial no âmbito dos pressupostos anteriores são descritos pela equação Laplace. Multiplicando-se a equação (2.22) por $z_i F_i$, obtém-se:

$$0 = \vec{\nabla} \left(F \sum_{i=1}^n z_i (c_i v - z_i F u_i c_i \vec{\nabla} \Phi) \right) \quad (2.25)$$

Tendo em conta a equação de eletroneutralidade $\sum_{i=1}^n z_i c_i = 0$ e introduzindo a condutividade elétrica k , da forma

$$k = F^2 \sum_{i=1}^n z_i^2 u_i c_i \quad \left(\frac{1}{\Omega m} \right) \quad (2.26)$$

a equação (2.25) pode ser escrita como

$$0 = \vec{\nabla}(k\vec{\nabla}\Phi) \quad (2.27)$$

Se a condutividade elétrica for constante, a equação (2.27) torna-se a equação de Laplace para a representação do potencial Φ :

$$\vec{\nabla}^2\Phi = 0 \quad (2.28)$$

A equação diferencial parcial acima exposta mostra que a derivação da equação (2.22) para a conservação de massa é automaticamente satisfeita quando o potencial Φ é uma solução da equação de Laplace.

O objeto de estudo desse trabalho é a resistividade elétrica do meio. A equação (2.26) faz menção à condutividade elétrica, que é o inverso da resistividade elétrica, dada na unidade $\Omega.m$.

2.8 Condições de contorno

2.8.1 Condição de contorno em superfícies isoladas

Em superfícies isoladas, a densidade de corrente na direção normal à superfície é igual à zero. Assim, a condição de contorno para uma superfície isolada impõe que o gradiente de potencial normal à superfície seja igual a zero; essa condição é conhecida como condição de contorno de Dirichlet:

$$I_n = -k \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad em \quad \Gamma_1 \quad (2.29)$$

A mesma condição se aplica na interface eletrólito/ar ou solo/ar. Essa é uma condição de contorno mencionada em diversos trabalhos como sendo de fluxo prescrito.

Quando o potencial é prescrito em uma das faces do contorno, tem-se a condição conhecida como condição de contorno de Neumann,

$$\Phi = \bar{\Phi} \quad em \quad \Gamma_2 \quad (2.30)$$

2.8.2 Condição de contorno em superfícies revestidas

A densidade de corrente entregue a uma porção coberta da estrutura pode ser expressa como (ORAZEM *et al.*, 1997)

$$I_n = \frac{\Phi - \Phi_{corr}}{\rho\delta} \quad (2.31)$$

com Φ_{corr} sendo o potencial de corrosão do metal sob o revestimento, δ a espessura do revestimento e ρ a resistividade elétrica do revestimento. Para este caso, o revestimento pode ser considerado como sendo composto por resistores elétricos em série com a queda IR através do solo.

2.8.3 Condição de contorno em eletrodos

As condições de contorno sobre os eletrodos são dadas por uma curva de polarização não-linear ou por corrente impressa para os ânodos. As curvas de polarização são dadas, em sua forma mais geral, pela equação,

$$\Phi = f(I_n) \quad (2.32)$$

Essa condição de contorno pode ser linear ou não linear. A não linearidade pode ser devida a reações anódicas ou catódicas.

3 Métodos de estratificação do solo

3.1 Características elétricas do solo

A terra é um corpo tri-dimensional e, como consequência, a análise da distribuição da corrente que se espalha através de todo o seu meio torna-se mais complexa do que, por exemplo, a análise da corrente através de um condutor ordinário com forma geométrica bem definida.

A respeito das suas características elétricas, pode-se afirmar que apenas a permeabilidade magnética relativa μ_r pode ser considerada unitária. Já a permissividade elétrica relativa, ϵ_r , varia de forma razoável, entre 1 e 80, dependendo da natureza do solo e do tipo de formação das rochas e é um fator importante em altas frequências. A resistividade da terra, ρ , entretanto, varia entre grandes limites, de 1 a 10.000 $\Omega.m$, e é de importância decisiva em todos os problemas envolvendo a terra como condutor de retorno. Devido a esta grande variação, geralmente é necessário medir a resistividade do solo na região de interesse.

A medição da resistividade do solo é usada para traçados de perfis geológicos, em projetos de aterramento ou em outros tipos de problemas em

que a resistividade desempenha um papel importante na tomada de decisão em projetos que envolvem o solo como condutor de retorno.

3.2 Estrutura geológica

A condutividade elétrica dos materiais constituintes da superfície da terra é muito baixa comparada à alta condutividade dos metais. Dois dos principais constituintes da terra, óxido de silício e óxido de alumínio, são excelentes isolantes e a condutividade da terra é, em grande parte, devida à presença de sais e de água entre esses materiais isolantes (IEEE, 2000). Por outro lado, mesmo os materiais semicondutores podem permitir uma alta quantidade de corrente se sua seção transversal for grande o suficiente. Isto pode ser dito da terra, que praticamente não apresenta limitações de seção transversal.

Devido à alta resistividade do solo, todas as correntes que fluem através da terra sofrem uma grande queda de potencial. Fortes campos elétricos podem surgir resultando em elevados gradientes de potencial afetando grandes regiões da superfície da terra. Além disso, alterações nas condições climáticas, tais como chuva e geadas, que causam variações na temperatura do solo, produzem alterações na sua resistividade. Na Tabela abaixo 3.2.1 é apresentado o comportamento da resistividade do solo em função dos seus componentes químicos ou fatores físicos.

Componente	Resistividade
Água	Diminui
Salinidade	Diminui
Temperatura	Diminui
Areia seca	Aumenta
Areia molhada com água do mar	Diminui
Porosidade (preenchida com água)	Diminui
Argila	Diminui
Minerais metálicos	Diminui

Tabela 3.2.1. Comportamento da resistividade do solo.

A resistividade do solo tende a diminuir com a profundidade. Outra correlação pode ser feita em relação à idade geológica das estruturas do solo. Geralmente, regiões geologicamente mais antigas tendem a ter resistividades maiores. O gráfico da figura 3.2.1 mostra a variação da resistividade elétrica de alguns materiais.

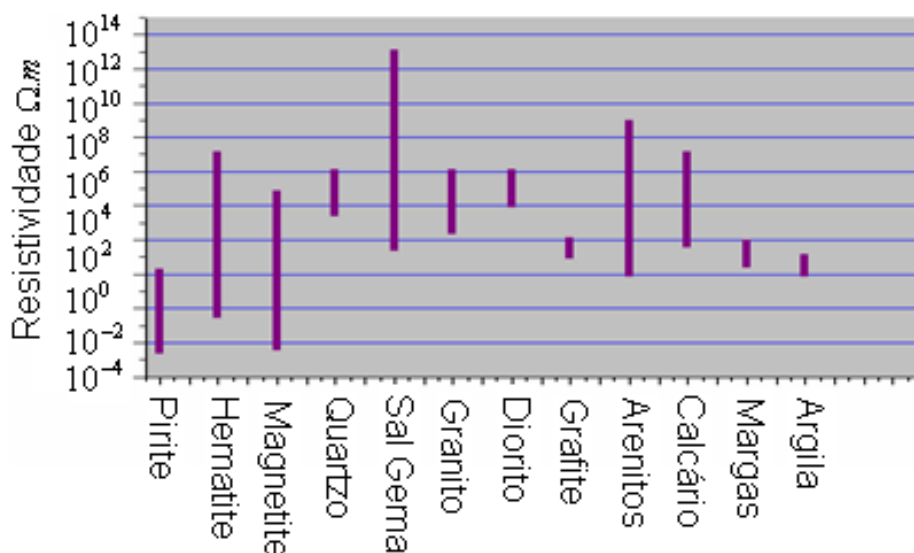


Figura 3.2.1. intervalos de variação da resistividade de alguns materiais, (MIRANDA *et al.* 2008).

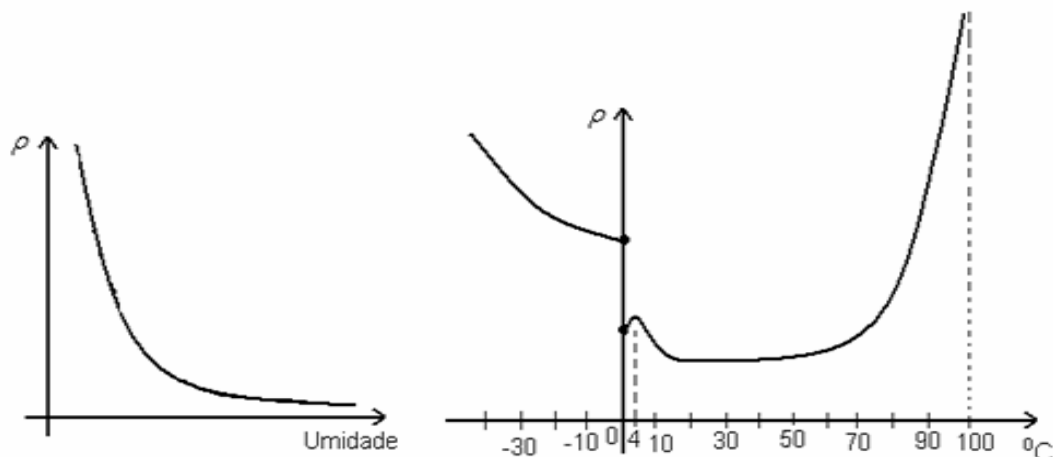


Figura 3.2.2. Comportamento da resistividade de acordo com a umidade e na água de acordo com a temperatura (KINDERMANN *et al.* 2008).

A figura acima mostra o comportamento da resistividade em um meio de acordo com a umidade do meio, e no outro gráfico o comportamento da resistividade na água de acordo com a temperatura. Devido a peculiaridade da água na temperatura entre 0 e 4 °C, a resistividade também aparenta aquele comportamento no gráfico, como mostrado na figura acima.

3.3 Medição da resistividade em meios homogêneos

Para medir a resistividade do solo, a forma mais natural é introduzir uma intensidade de corrente elétrica entre dois eletrodos inseridos na terra e medir a tensão entre dois eletrodos intermediários chamados de eletrodos de potencial. Na maioria dos casos, necessita-se da resistividade de um grande

volume de solo envolvendo grandes distâncias entre os eletrodos. Como a dimensão dos eletrodos pode ser considerada pequena quando comparada com a distância entre eles, a distribuição da corrente é praticamente a mesma de um eletrodo pontual.

As linhas de fluxo de corrente divergem no interior do solo e a resistividade é obtida de uma simples relação envolvendo resistências e distâncias entre eletrodos.

Considere um eletrodo completamente imerso na terra próximo à interface ar-solo, com uma densidade de corrente elétrica i sendo injetada no solo através de um ponto do eletrodo. A corrente se distribui radialmente no interior do semi-espaco terrestre, conforme mostra a Figura 3.3.1.

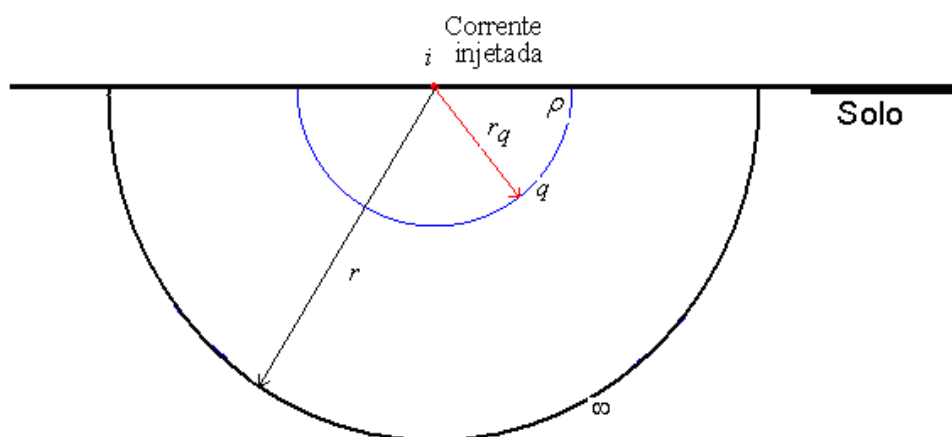


Figura 3.3.1. Injeção de corrente através de um eletrodo no semi-espaco.

A densidade de corrente J a uma distância r do centro do hemisfério é dada por

$$J(r) = \frac{i}{2\pi r^2} \quad (3.3.1)$$

onde $2\pi r^2$ é a área da casca da superfície semi-esférica com raio r abaixo da superfície do solo. Usando-se a lei de Ohm (HALLIDAY e RESNICK, 1990):

$$\vec{E}(r) = \rho J(r) \quad (3.3.2)$$

onde $\vec{E}(r)$ é o campo elétrico e ρ a resistividade. A substituição da equação 3.3.1 na equação 3.3.2 dá a distribuição do campo elétrico dentro do solo na forma:

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho i}{2\pi r^2} \quad (3.3.3)$$

O potencial $\Phi(r)$, a uma distância r , pode então ser determinado a partir da integração da função campo elétrico, dada pela equação (3.3.3), desde a superfície da semi-esfera de raio r_0 até a superfície da semi-esfera de raio r , ou seja:

$$\Phi(r) = \int_{r_0}^r \vec{E}(r) dr = \int_{r_0}^r \frac{\rho i}{2\pi r^2} dr = \left[\frac{\rho i}{2\pi r} \right]_{r_0}^r = \frac{\rho i}{2\pi} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \quad (3.3.4)$$

Tomando-se o limite da equação 3.3.4 quando r tende para o infinito, vem;

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\rho.i}{2\pi} \left(\frac{1}{r_q} - \frac{1}{r} \right) = \frac{\rho.i}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r_q} - \frac{1}{r} \right) = \frac{\rho.i}{2\pi r_q} \quad (3.3.5)$$

Assim:

$$\Phi(r) = \frac{\rho.i}{2\pi r_q} \quad (3.3.6)$$

Essa equação permite calcular o potencial em um ponto qualquer de um meio homogêneo 3D semi-infinito de resistividade constante. Essa equação é semelhante à solução fundamental tradicionalmente empregada no Método dos Elementos de Contorno (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1989). Se o meio for de dimensão infinita, a equação (3.3.6) é dada por

$$\Phi(r) = \frac{\rho.i}{4\pi r_q} \quad (3.3.7)$$

3.4 O Método de Wenner

Entre os métodos mais tradicionais para a determinação da resistividade do solo está o método de Wenner. Este método consiste em cravar no solo quatro hastes cilíndricas de mesmo comprimento e diâmetros iguais,

igualmente espaçadas por uma distância a e dispostas em linha numa determinada direção, ver figura. 3.4.1. Deve-se cuidar para que o diâmetro das hastes não exceda um décimo da distância entre as mesmas ou suas profundidades.

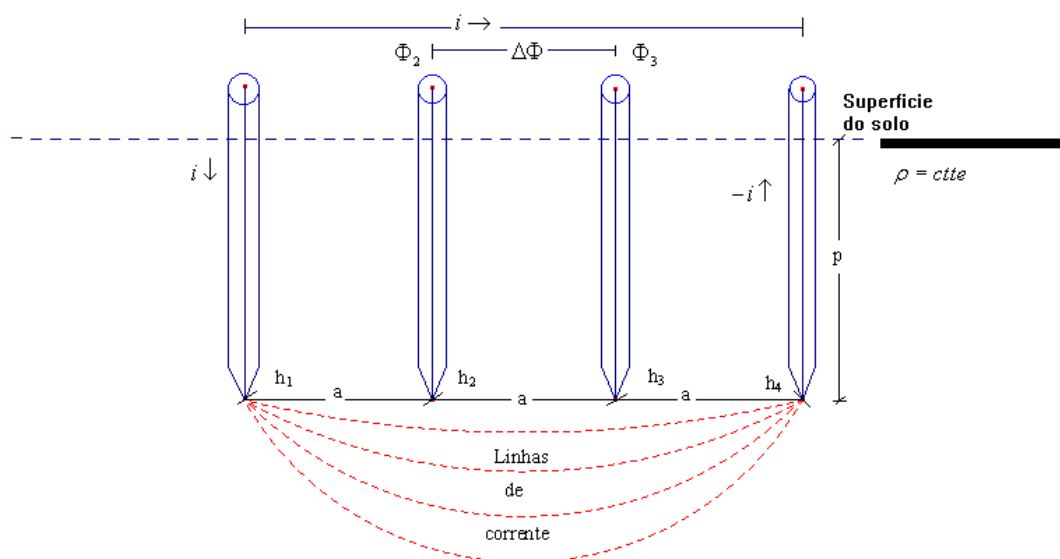


Figura 3.4.1. Desenho esquemático de hastes cravadas no solo para injeção e retirada de corrente e medida de diferença de potencial.

Pela haste h_1 injeta-se uma corrente elétrica no solo a qual tem seu retorno através da haste h_4 . Dessa forma a queda de tensão causada por esta corrente ao percorrer o solo é detectada entre os terminais das hastes h_2 e h_3 , como mostra a figura 3.4.1. Estabelecendo-se a relação entre as tensões detectadas e as correntes impressas, obtém-se o valor da resistência do solo R compreendido entre as hastes h_2 e h_3 .

O potencial no ponto 3 é dado por

$$\Phi_3 = \frac{\rho i}{4\pi} \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{\sqrt{(2a)^2 + (2p)^2}} - \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2p)^2}} \right) \quad (3.4.3)$$

A diferença de potencial entre os pontos 2 e 3 é facilmente obtida e dada por

$$\Phi_{23} = \frac{\rho i}{4\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{\sqrt{a^2 + (2p)^2}} - \frac{2}{\sqrt{(2a)^2 + (2p)^2}} \right) \quad (3.4.4)$$

Isolando-se a resistividade na equação acima, chega-se à seguinte equação

$$\rho = \frac{4\pi a R}{\left(1 + \frac{2a}{\sqrt{a^2 + (2p)^2}} - \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + (2p)^2}} \right)} \quad (3.4.5)$$

onde R é a resistência (Ohms) do solo dada por $R = \Phi_{23}/i$, a é o espaçamento entre as hastes e p é a profundidade ou o comprimento das hastes. Para um afastamento muito grande entre as hastes, $a > 20p$ adota-se a equação ($p = 0$):

$$\rho = 2\pi a R \quad (3.4.6)$$

É interessante observar que Φ_{23} decai na proporção inversa do espaçamento (a^{-1}).

Em uma análise equivalente, para o problema 2D, a expressão análoga à equação 3.4.1 é dada pela equação 3.4.7, (ver dedução da solução fundamental para o caso 2D no Apêndice A):

$$\Phi_p = \frac{\rho i / d}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r_q}\right) + \frac{\rho i' / d}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r'_q}\right) \quad (3.4.7)$$

onde d é o espaçamento em uma série infinita de correntes pontuais i ou $-i$.

Assim, tem-se para o potencial no ponto 2

$$\Phi_2 = -\frac{\rho i / d}{2\pi} \left(-\ln(2) + \frac{1}{2} \left(\ln(a^2 + (2p)^2) - \ln((2a)^2 + (2p)^2) \right) \right) \quad (3.4.8)$$

Analogamente, o potencial na haste 3 é dado por

$$\Phi_3 = -\frac{\rho i / d}{2\pi} \left(\ln(2) + \frac{1}{2} \left(\ln((2a)^2 + (2p)^2) - \ln(a^2 + (2p)^2) \right) \right) \quad (3.4.9)$$

Em particular, quando os pontos de injeção de corrente se encontram muito próximo das superfícies, o termo $(2p)^2$ é muito próximo de zero, com isso pede-se desprezar a profundidade da injeção de corrente, e considerar a injeção de

intensidade de corrente elétrica através de um elemento de contorno. Ou seja $p = 0$. Os potenciais nos pontos 2 e 3 são

$$\Phi_2 = \frac{\rho i/d}{\pi} \ln(2) \quad (3.4.10)$$

$$\Phi_3 = -\frac{\rho i/d}{\pi} \ln(2) \quad (3.4.11)$$

e a diferença de potencial entre os pontos 2 e 3 é uma constante, dada por

$$\Phi_{23} = \frac{2\rho i/d}{\pi} \ln(2) \quad (3.4.12)$$

Isolando-se a resistividade na equação acima, chega-se à equação:

$$\rho = \frac{\pi R}{2 \ln(2)} \quad (3.4.13)$$

Esse comportamento constante do potencial para a formulação 2-D é curioso, mas pode ser comprovado através de uma análise da superposição de uma série infinita de fontes pontuais 3-D, conforme ilustra a figura 3.4.3.

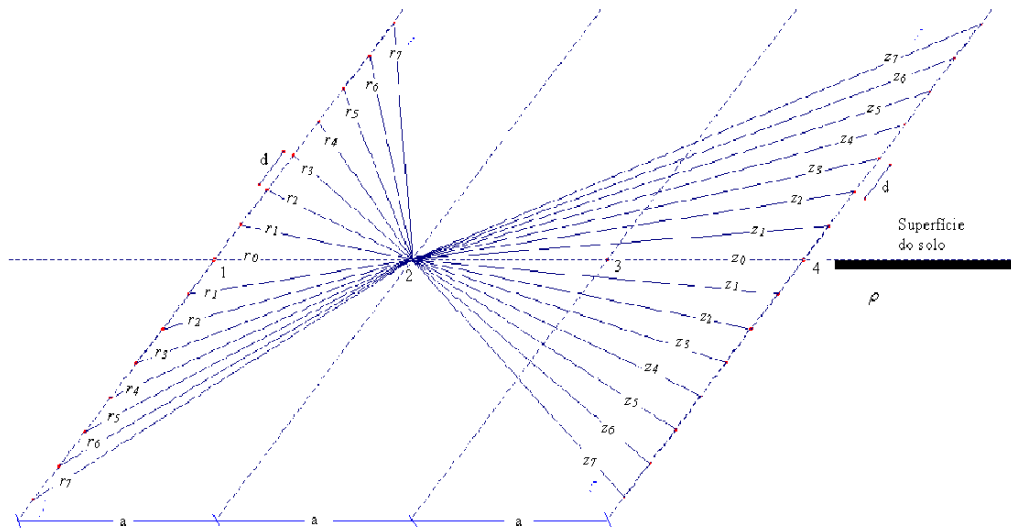


Figura 3.4.3 Representação da série infinita de fontes (e sumidouros) distribuídas ao longo de duas linhas sobre a superfície livre.

As distâncias entre as fontes pontuais e o ponto 2, por exemplo, são definidas pelas expressões (ver figura 3.4.3)

$$\begin{aligned}
 r_0 &= \sqrt{a^2 + (0d)^2} & z_0 &= \sqrt{(2a)^2 + (0d)^2} \\
 r_1 &= \sqrt{a^2 + (1d)^2} & z_1 &= \sqrt{(2a)^2 + (1d)^2} \\
 r_2 &= \sqrt{a^2 + (2d)^2} & z_2 &= \sqrt{(2a)^2 + (2d)^2} \\
 &\cdot & &\cdot \\
 &\cdot & &\cdot \\
 &\cdot & &\cdot \\
 r_n &= \sqrt{a^2 + (nd)^2} & z_n &= \sqrt{(2a)^2 + (nd)^2}
 \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Portanto, pode-se representar o potencial no ponto 2 através da série:

$$\Phi_2 = \frac{\rho i/d}{2\pi} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{z_0} + 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{z_i} \right) \right) \tag{3.4.15}$$

De modo análogo, o potencial no ponto 3 pode ser representado por

$$\Phi_3 = \frac{\rho \ i/d}{2\pi} \left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{r_0} + 2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{z_j} - \frac{1}{r_j} \right) \right) \quad (3.4.16)$$

Calculando a diferença $\Phi_2 - \Phi_3$, tem

$$\Phi_{23} = \frac{\rho \ i/d}{2\pi} \left(\frac{2}{r_0} - \frac{2}{z_0} + 4 \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{z_j} \right) \right) \quad (3.4.17)$$

Tomando o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{23}$ tem-se

$$\Phi_{23} = \frac{\rho \ i/d}{2\pi} [4 \ln(2)] = \frac{\rho \ I/d}{\pi} 2 \ln(2) \quad (3.4.18)$$

como esperado.

Entre outros métodos utilizados para a determinação do perfil de resistividade do solo, além do de Wenner, tem-se o dispositivo de Schlumberger e o dispositivo dipolo-dipolo.

3.4.1 Dispositivo de Schlumberger

O dispositivo de Schlumberger é um dos dispositivos geoeletricos de corrente contínua disponível para a determina o da resistividade do solo. Esse método de medida da resistividade tem sua origem nos anos 1920 devido ao trabalho dos irmãos Schlumberger. A partir da  continuou sendo um método utilizado para interpreta o quantitativa de pesquisas envolvendo a resistividade do solo (KOEFOED, 1979). Neste dispositivo os eletrodos h_1 , h_2 , h_3 e h_4 , são colineares e dispostos de forma simétrica em rela o a um ponto central (ver Figura 3.4.3). Uma sondagem implica a varia o progressiva do afastamento dos eletrodos de inje o e retirada de corrente, h_1 e h_4 , mantendo os eletrodos da diferença de potencial h_2 e h_3 a uma distância constante, de modo a fazer variar a contribui o das forma es mais profundas para a diferença de potencial medida nos eletrodos de leitura.

3.4.2 Dispositivo dipolo-dipolo

Neste dispositivo a inje o e a retirada de intensidade de corrente elétrica se d o pelas hastes h_1 e h_2 e as leituras dos potenciais elétricos se d o através dos eletrodos h_3 e h_4 . Para cada inje o de intensidade de corrente elétrica realizam-se várias leituras ao longo do perfil. Mudando-se a configura o dos eletrodos se faz novamente a inje o de intensidade de

corrente eléctrica e realiza-se um novo conjunto de leituras. Dessa forma, são obtidas informações sobre a variação da resistividade das formações rochosas, quer lateralmente quer em profundidade (pseudo-secção). Se a distância entre o ponto central de h_1 e h_2 e o ponto central de h_3 e h_4 for grande comparativamente à distância a , o campo eléctrico gerado pela injeção e retirada de corrente em h_1 e h_2 aproxima-se do campo gerado por um dipolo eléctrico. Como este campo varia com o inverso de r^3 , ele é muito sensível às variações da resistividade do meio. Este fato torna este dispositivo particularmente útil para a detecção de falhas com circulação de fluido. Por outro lado, torna-se difícil a realização de medidas a grandes distâncias do dipolo $h_1 h_2$, o que exige equipamentos de campo mais potentes do que os requeridos para o dispositivo de Schlumberger e pelo método de Wenner.

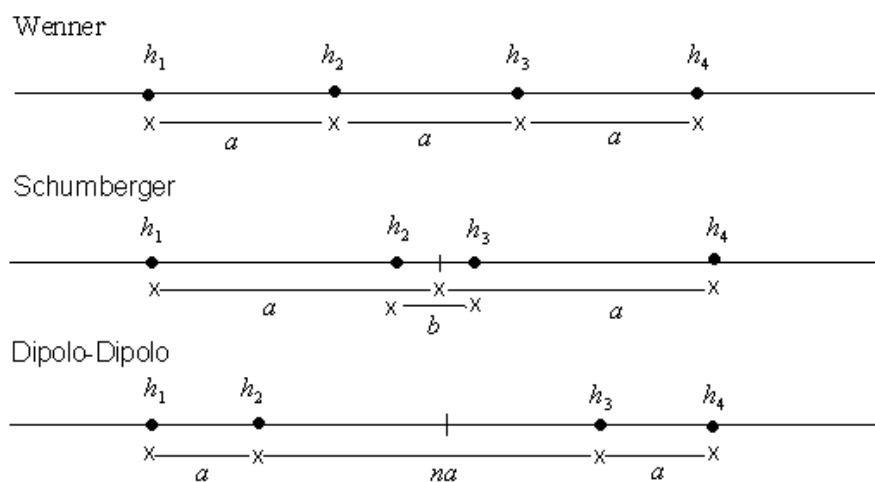


Figura 3.4.4. Representação gráfica dos dispositivos comumente utilizados para o cálculo da resistividade eléctrica do solo.

Todos os métodos acima citados diferem nos valores do fator geométrico $k_{fg} = \frac{\rho}{R}$, que são apresentados abaixo:

- $k_{fg} = 2.\pi.a$ Wenner
- $k_{fg} = \frac{2.\pi.a^2}{b} \left(1 - \frac{b^2}{4.a^2} \right)$ Schlumberger
- $k_{fg} = \pi.n(n+1)(n+2).a$ Dipolo-Dipolo

Vale observar aqui que, para o caso 2D, o valor de k_{fg} para o método de Wenner é dado por

- $k_{fg} = \frac{\pi}{2 \ln(2)}$

3.4.3 Dispositivo de variação de uma haste

Um teste realizado nesse trabalho constituiu em variar a posição de h_2 (considerando o método de Wenner) para uma posição tal que distância entre h_1 e h_2 fosse menor que a . O resultado novamente fornece uma constante para a diferença de potencial entre h_2 e h_3 .

Seguindo o mesmo procedimento adotado na seção 3.4 para a obtenção da expressão que permite calcular a resistividade no método de Wenner, com o auxílio da figura 3.4.2 com as devidas alterações na distância para h_2 na figura 3.4.5, pode-se escrever a equação abaixo:

$$\Phi_{23} = \frac{\rho i/d}{\pi} (\ln(2) + \ln(3n-1)) \quad (3.4.19)$$

onde n é um número real que define a distância entre h_1 e h_2 , ver figura 3.4.5.

Para $n = 1$, recai-se no método de Wenner. Essa expressão permite calcular o potencial entre h_2 e h_3 para a configuração mostrada na figura 3.4.5.

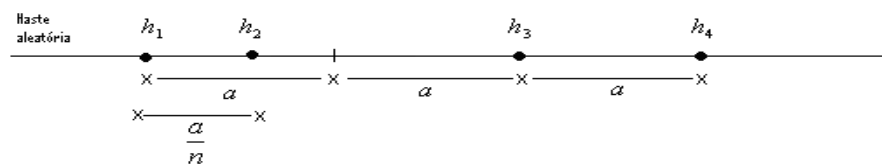


Figura 3.4.5. Representação gráfica para haste h_2 deslocada de sua posição original pelo método de Wenner.

4 O Método dos Elementos de Contorno

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem a particularidade de resolver problemas a partir das informações conhecidas no contorno; esta característica do método pode levar a um custo computacional reduzido em relação a outros métodos numéricos de domínio como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método das Diferenças Finitas (MDF).

Nas bibliografias mais usuais que tratam dos conceitos do MEC, o ponto de partida é um problema de potencial escalar em duas dimensões. Os potenciais são descritos por variáveis escalares e os fluxos são descritos pelas derivadas desses potenciais.

O MEC pode ser facilmente aplicado a problemas com domínios complexos. Na maioria das vezes, por aproximar os resultados a partir de informações conhecidas no contorno, pode-se modelar, com mais facilidade, problemas que apresentam acentuados gradientes de potencial.

De uma maneira geral, para a obtenção de uma solução aproximada de um dado problema, recorre-se a uma técnica numérica para estabelecer um modelo discreto que aproxime os campos contínuos a serem determinados. No MEC, esta solução é obtida através de um processo de discretização da equação integral que governa o problema, neste caso, escrita unicamente em

função dos potenciais, fluxos ou uma condição mista no contorno. Este processo de discretização conduz a um sistema de equações algébrico, que uma vez resolvido, fornece as incógnitas do contorno, potenciais e fluxos. Neste trabalho, a formulação ficará restrita ao caso bi-dimensional.

4.1 Segunda identidade de Green

Na análise vetorial, uma das mais valiosas ferramentas é o teorema da divergência ou de Gauss, que relaciona a integral de uma função vetorial \vec{B} avaliada sobre uma superfície S com uma integral de volume V (contido em S) do divergente dessa função vetorial $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$, ou seja:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV \quad (4.1.1)$$

onde $d\mathbf{S} = \vec{n}dS$; a equação 4.1.1 será sempre válida quando \vec{B} e suas primeiras derivadas forem contínuas nas regiões V e S consideradas.

A interpretação física do teorema de Gauss é que ele estabelece que o número de linhas de fluxo que saem da superfície fechada S (integral à esquerda) é igual ao número de linhas de fluxo criado no interior do volume limitado por S (integral à direita).

Para se chegar à segunda identidade de Green, deve-se partir do teorema de Gauss, considerando duas funções ψ e G escalares por exemplo,

que atendam todas as condições de continuidade e diferenciabilidade até a segunda ordem na região V do espaço considerado, ou seja $\psi, G \in C^2$.

Definindo uma função vetorial \vec{B} da forma

$$\vec{B} = \Psi \vec{\nabla} G \quad (4.1.2)$$

e aplicando o teorema da divergência (ou de Gauss) na equação (4.1.2), vem o seguinte resultado

$$\oint_S \Psi \vec{\nabla} G \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\Psi \vec{\nabla} G) dV \quad (4.1.3)$$

Da mesma forma pode se escrever

$$\oint_S G \vec{\nabla} \Psi \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot (G \vec{\nabla} \Psi) dV \quad (4.1.4)$$

Como

$$\vec{\nabla} \cdot (\Psi \vec{\nabla} G) = \Psi \vec{\nabla}^2 G + \vec{\nabla} \Psi \cdot \vec{\nabla} G \quad (4.1.5)$$

subtraindo-se as equações (4.1.3) e (4.1.4) chega-se à segunda identidade de Green, escrita como:

$$\oint_S (\Psi \vec{\nabla} G - G \vec{\nabla} \Psi) \cdot \vec{n} dS = \int_V (\Psi \vec{\nabla}^2 G - G \vec{\nabla}^2 \Psi) dV \quad (4.1.6)$$

4.2 Formulação integral por resíduos ponderados

Os procedimentos para a obtenção das equações integrais que compõem o método dos elementos de contorno são diversos. Um deles faz extensivamente uso de integrações por partes do produto escalar entre duas funções Φ e ω quaisquer, desde que elas estejam definidas no domínio considerado e atendam os teoremas de diferenciação e de continuidade até a ordem requerido pelo problema. Assim, seja o produto interno, definido como segue:

$$\langle \Phi, \omega \rangle = \int_{\Omega} \Phi \cdot \omega d\Omega \quad (4.2.1)$$

Considerando-se uma equação diferencial genérica, pode-se representá-la com o auxílio de um operador linear da forma:

$$L(\Phi) = b \quad (4.2.2)$$

No domínio Ω em estudo o termo do lado direito da equação acima representa o termo não homogêneo, que pode ser variável ou constante.

O operador em representado pela equação (4.2.2), associado à equação de Laplace 3D, é dado por:

$$L(\oplus) = \frac{\partial^2(\oplus)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\oplus)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\oplus)}{\partial z^2} \quad (4.2.3)$$

Considere o produto interno dado por:

$$\int_{\Omega} L(\Phi)\omega d\Omega \quad (4.2.4)$$

onde ω é uma função ponderadora definida e conhecida no domínio Ω . Se $L(\bullet)$ for um operador diferencial, após sucessivas integrações por partes na equação 4.2.4 obtém-se:

$$\int_{\Omega} L(\Phi)\omega d\Omega = \int_{\Omega} \Phi L^*(\omega) d\Omega + \int_{\Gamma} S^*(\omega)G(\Phi) d\Gamma - \int_{\Gamma} G^*(\omega)S(\Phi) d\Gamma \quad (4.2.5)$$

onde Γ é o contorno do domínio Ω , $S(\oplus)$ e $G(\bullet)$ São operadores diferenciais e o símbolo * representa um operador adjunto.

Fixados o operador $L(\bullet)$ e uma função de ponderação, a integração por partes da equação (4.2.4) produz seus termos que, comparados com a equação (4.2.5), permite determinar todos os operadores envolvidos. Se $L^*(\bullet) = L(\bullet)$, $L(\bullet)$ é chamado operador auto-adjunto e, mais ainda, pode-se

mostrar que $S(\bullet)$ e $G(\bullet)$ também são auto-adjuntos. A equação (4.2.5) permite também conhecer quais são os tipos de condições de contornos existentes: por exemplo, valores impostos de $S(\Phi)$ equivalem a condições de contorno essenciais, ou de Dirichlet. Por outro lado, valores impostos para $G(\Phi)$, equivalem a condições de contorno naturais, ou de Neumann.

4.2.1 Classificação das soluções

Os métodos numéricos podem ser classificados como:

1) Métodos de Domínio: Quando a solução aproximada satisfaz identicamente a todas as condições de contorno, porém deve ser ajustada à equação em estudo;

2) Métodos de contorno: A solução aproximada satisfaz identicamente a equação em estudo, mas deve ser ajustada às condições de contorno. As incógnitas permanecem exclusivamente no contorno. É a situação complementar da situação anterior

3) Métodos Híbridos: quando se faz uma composição das duas técnicas anteriores.

Evidentemente, o Método dos Elementos de Contorno enquadra-se na segunda classificação, com uma característica importante a ser observada: durante o procedimento de integração por partes o grau da derivada da função a ser considerada é enfraquecido e, com isso, a transferência da derivada para

a função de ponderação fica evidente; isso faz com que seja possível associar as equações integrais a outros métodos e também escolher uma função que atende as condições de contorno tal qual se deseja.

4.3 Equação integral de contorno

Admitindo-se uma função de ponderação $\omega = \Phi^*$, a sentença básica de resíduos ponderados para a equação de Poisson é escrita como:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \Phi + b) \Phi^* d\Omega = \int_{\Gamma} (q - \bar{q}) \Phi^* d\Gamma - \int_{\Gamma} (\Phi - \bar{\Phi}) q^* d\Gamma + \int_{\Omega} b \Phi^* d\Omega \quad (4.3.1)$$

A função de ponderação Φ^* é a solução fundamental do problema.

A equação (4.3.1) pode ser desenvolvida com o auxílio da segunda identidade de Green, chegando-se à seguinte equação para pontos internos ao contorno Γ :

$$\Phi(\xi) = \int_{\Gamma} \Phi^*(\xi, X) q(X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} q^*(\xi, X) \Phi(X) d\Gamma(X) + \int_{\Omega} b(X) \Phi^*(\xi, X) d\Omega \quad (4.3.2)$$

A equação (4.3.2) é conhecida como terceira identidade de Green. Derivando-se a equação (4.3.2) em relação a uma direção qualquer, obtém-se a expressão que permite calcular o fluxo nessa direção (FALCÃO, 2001).

A equação (4.3.2) é normalmente aplicada em uma fase de pós-processamento. Para a solução do problema utiliza-se a equação integral de contorno, obtida tomando-se o limite da equação (4.3.2) quando o ponto fonte ξ tende ao contorno Γ . Este desenvolvimento é apresentado no Apêndice B e resulta na equação abaixo, que envolve somente variáveis de contorno:

$$c(\xi)\Phi(\xi) = \int_{\Gamma} q(X)\Phi^*(\xi, X)d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} \Phi(X)q^*(\xi, X)d\Gamma(X) + \int_{\Omega} b(X)\Phi^*(\xi, X)d\Omega(X) \quad (4.3.3)$$

onde o coeficiente $c(\xi)$ é determinado pela relação:

$$c(\xi) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (4.3.4)$$

onde α é o ângulo interno mostrado na figura (4.3.1). Para contornos suaves,

$\alpha = \pi$ e, conseqüentemente $c(\xi) = \frac{1}{2}$

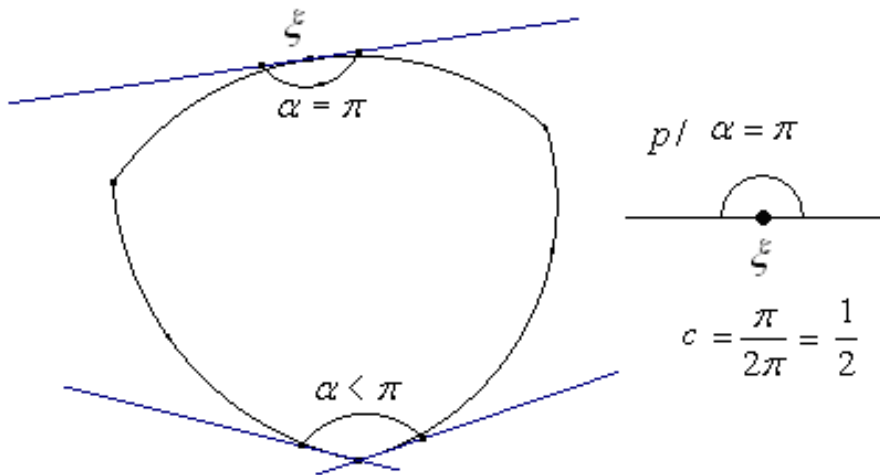


Figura 4.3.1. Cálculo do coeficiente $c(\xi)$ para um ângulo α qualquer.

4.4 Método da colocação para a discretização da equação integral de contorno.

A discretização da equação integral de contorno pode ser obtida com a aplicação de uma função de ponderação ω^i em ambos os termos da equação (4.3.3). Integrando-se a equação obtida, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} c(\xi) \Phi(\xi) \omega^i d\Gamma(\xi) &= \int_{\Gamma} \left\{ \int_{\Gamma} \Phi^*(\xi, X) q(X) d\Gamma(X) \right\} \omega^i d\Gamma(\xi) - \\
 &\int_{\Gamma} \left\{ \int_{\Gamma} \Phi(X) q^*(\xi, X) d\Gamma(X) \right\} \omega^i d\Gamma(\xi) + \\
 &\int_{\Gamma} \left\{ \sum_{j=1}^{N_f} b_j(X) \Phi^*(\xi_j^f, \xi) \right\} \omega^i d\Gamma(\xi)
 \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

onde o último termo representa a aplicação das N_f fontes pontuais, $j = 1 \dots N_f$.

Fazendo $\omega^i = \delta(\xi_j^i, \xi)$ (função delta de Dirac) na equação (4.4.1), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} c(\xi) \Phi(\xi) \delta(\xi_j^i, \xi) d\Gamma(\xi) = & \int_{\Gamma} \left\{ \int_{\Gamma} \Phi^*(\xi, X) q(X) d\Gamma(X) \right\} \delta(\xi_j^i, \xi) d\Gamma(\xi) - \\ & \int_{\Gamma} \left\{ \int_{\Gamma} \Phi(X) q^*(\xi, X) d\Gamma(X) \right\} \delta(\xi_j^i, \xi) d\Gamma(\xi) + \quad (4.4.2) \\ & \int_{\Gamma} \left\{ \sum_{j=1}^{N_f} b_j(X) \Phi^*(\xi_j^f, \xi) \right\} \delta(\xi_j^i, \xi) d\Gamma(\xi) \end{aligned}$$

Finalmente, usando a propriedade $\int_{\Omega} f(X) \delta(\xi, X) d\Gamma = f(\xi)$ da função delta de

Dirac, pode-se escrever a equação (4.4.2) da seguinte forma

$$\begin{aligned} c(\xi_i) \Phi(\xi_i) = & \int_{\Gamma} \Phi^*(\xi_i, X) q(X) d\Gamma(X) - \\ & \int_{\Gamma} \Phi(X) q^*(\xi_i, X) d\Gamma(X) + \quad (4.4.3) \\ & \sum_{j=1}^{N_f} b_j \Phi^*(\xi_j^f, \xi_i) \end{aligned}$$

4.5 Método das imagens

Problemas que envolvem as dimensões do solo abrangem regiões semi-infinitas. A discretização da superfície livre pode ser evitada, reduzindo, conseqüentemente, o custo computacional de sua solução. Neste trabalho o

Método das Imagens é utilizado para a imposição das condições de contorno dessa superfície livre. BATISTA *et al.* (2005) apresentam uma aplicação desse tipo para problemas de hidráulica.

KELLER (1953) define o Método das Imagens como um método para a construção de funções de Green, para uma região delimitada por planos, em termos de funções de Green da forma $G(r, r') = \sum_{r'' \in im} G^*(r', r'')$ válidas em todo espaço. KELLER determina regiões, equações diferenciais e condições de contorno para as quais o método é aplicável. A equação descreve a função de Green para dois pontos no espaço, r e sua imagem r' . A função G^* , por sua vez, é definida para “imagens de imagens” r'' e seus pontos originais. O autor concluiu que as geometrias das regiões admissíveis ao Método das Imagens para duas e três dimensões são dadas por uma quantidade finita e determinada de planos.

Sabendo que o Método das Imagens é um método baseado no princípio de sobreposição de soluções, as equações diferenciais para as quais o método é válido devem ser lineares.

De modo geral o Método das Imagens é aplicado para satisfazer as condições impostas ao longo de linhas equipotenciais conhecidas (denominadas também como linhas de primeiro tipo ou condição de contorno de Dirichlet) e linhas impermeáveis (denominadas conhecidas também como linhas de segundo tipo ou condição de contorno de Neumann). MAXWELL (1873) e MUSKAT (1937) mostram que o Método das Imagens pode também

ser aplicado em fronteiras entre regiões homogêneas, porém de diferentes condutividades, impondo-se simultaneamente condições do primeiro e do segundo tipos.

Portanto, a equação (4.4.3) pode ser escrita na forma (ver figura 4.5.1):

$$c(\xi)\Phi(\xi) = \int_{\Gamma-\Gamma_h} [q^*(\xi, X)\Phi(X) - \Phi^*(\xi, X)q(X)]d\Gamma + \int_{\Gamma_h} [q^*(\xi, X)\Phi(X)]d\Gamma - \int_{\Omega} [b(X)\Phi^*(\xi, X)]d\Omega \quad (4.5.1)$$

onde Γ_h é o contorno representando a superfície do solo.

Com o objetivo de eliminar a integral de contorno em Γ_h , evitando-se assim a discretização da superfície livre, procura-se uma nova solução para $q^*(\xi, X)$ tal que $q^*(\xi, X) = 0, \quad X \in \Gamma_h$.

Considere-se um domínio infinito de condutividade k ou resistividade ρ dividido por uma linha horizontal Γ_h .

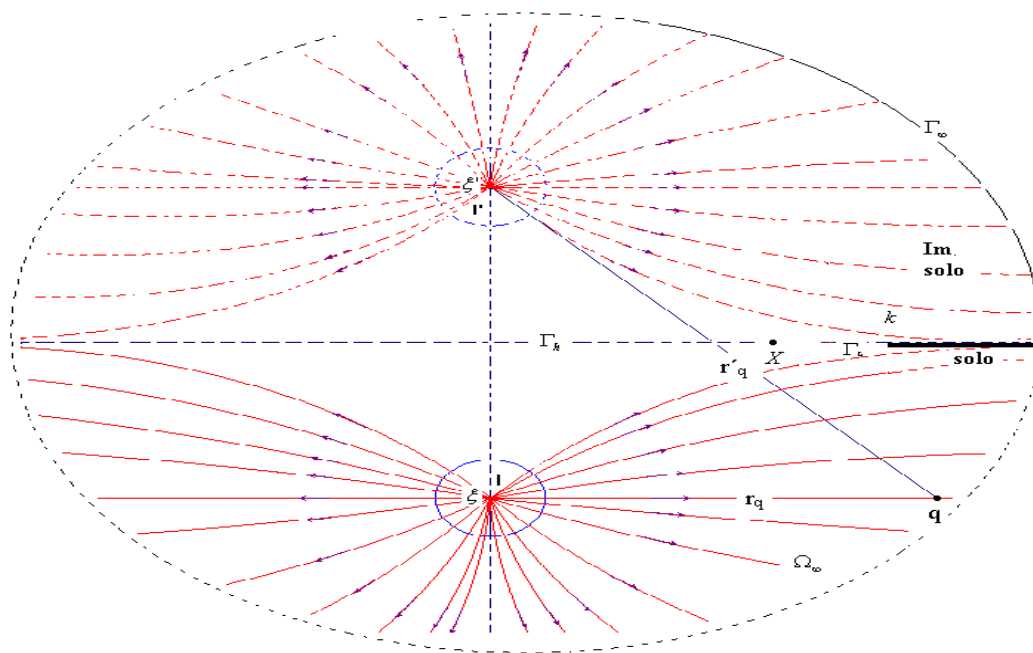


Figura 4.5.1. Reflexão do ponto de aplicação da corrente elétrica. Imagem do ponto ξ num domínio infinito subdividido pelo contorno Γ_h .

Um ponto ξ imerso sob a superfície livre de um espaço semi-infinito, homogêneo, emanando uma intensidade de corrente elétrica I , produz um perfil de distribuição do fluxo de corrente no interior do domínio como mostrado na parte inferior da figura 4.5.1.

As linhas de correntes se comportam como se houvesse uma fonte pontual simétrica em relação à superfície Γ_h do solo (figura 4.5.1 parte superior). O comportamento é idêntico a uma imagem simétrica da fonte de corrente pontual. Portanto, para determinar o potencial de um ponto qualquer em relação ao infinito, basta efetuar a superposição do efeito de cada fonte da corrente individualmente, considerando todo o solo homogêneo, inclusive a sua

imagem. Assim, para calcular o potencial de um ponto qualquer, pode-se escrever:

$$\Phi^*(\xi, X) = \frac{\rho \dot{i}/d}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r_q}\right) + \frac{\rho \dot{i}'/d}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r'_q}\right) \quad (4.5.2)$$

e sua derivada é dada em relação a normal é dada por:

$$q^*(\xi, X) = -\frac{\rho \dot{i}/d}{2\pi r_q} \frac{\partial r_q}{\partial n(X)} - \frac{\rho \dot{i}'/d}{2\pi r'_q} \frac{\partial r'_q}{\partial n(X)} \quad (4.5.3)$$

Portanto, para implementação do método das imagens basta considerar adicionalmente à fonte unitária no ponto de colocação uma fonte unitária posicionada acima da superfície do solo a uma distância igual à distância da fonte no interior do semi-espço, como mostra a figura 4.5.1.

4.6 Fontes pontuais

Para problemas com fontes pontuais, como os desenvolvidos nesse trabalho, há contribuições no vetor independente, de cada uma dessas fontes. Os termos que correspondem a fontes pontuais são apresentados na equação (4.3.2) e resultam das integrais de domínio. Essas fontes representam a injeção e retirada de correntes elétricas no interior do domínio. A figura 4.6.1

mostra um domínio com a aplicação de duas fontes pontuais e as contribuições de sua imagem no elemento considerado.

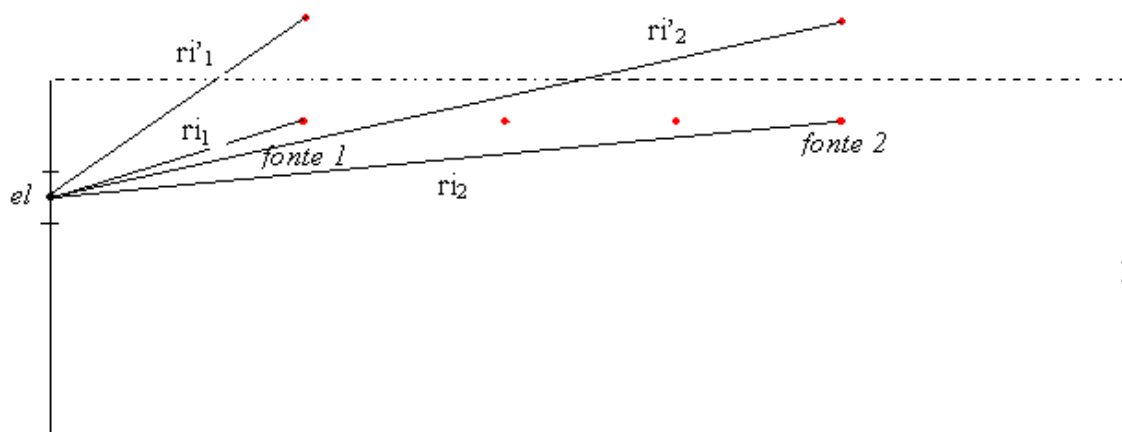


Figura 4.6.1. Representação do domínio estudado com aplicação de fontes pontuais utilizando o método das imagens.

4.7 Implementação numérica

Os elementos mais comuns utilizados para a discretização do contorno são: constantes, lineares, e quadráticos.

Neste trabalho são utilizados elementos constantes de geometria linear para a discretização do contorno e o procedimento para integração numérica é o método de integração de Gauss.

Em geral os métodos numéricos costumam fazer uso de uma coordenada local adimensional em cada elemento, para o mapeamento da geometria e funções de interpolação. Para a formulação com elementos constantes, as equações para um mapeamento local são:

$$\begin{aligned}
 x(\eta) &= \frac{1}{2}(1-\eta)x_1 + \frac{1}{2}(1+\eta)x_2 \\
 y(\eta) &= \frac{1}{2}(1-\eta)y_1 + \frac{1}{2}(1+\eta)y_2
 \end{aligned}
 \tag{4.7.1}$$

para a geometria, onde η é a coordenada local e:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\xi) &= \Phi_1 \\
 q(\xi) &= q_1
 \end{aligned}
 \tag{4.7.2}$$

para as funções de interpolação, onde Φ_1 e q_1 são os valores constante associados ao elemento considerado. Para detalhes sobre os outros tipos de elemento ver (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1989)

O primeiro passo no procedimento de discretização é dividir, ou aproximar, o contorno Γ em Ne segmentos ou elementos. Dessa forma, na ausência de fontes pontuais, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 c(\xi_i)\Phi^i(\xi) &= \sum_{n=1}^{Ne} \int_{\Gamma_n} q(X)\Phi^*(\xi, X)d\Gamma_n - \\
 &\quad \sum_{n=1}^{Ne} \int_{\Gamma_n} \Phi(X)q^*(\xi, X)d\Gamma_n
 \end{aligned}
 \tag{4.7.3}$$

Onde o contorno é dado pela soma dos Ne elementos da discretização, isto é,

$\Gamma = \sum_{n=1}^{Ne} \Gamma_n$. Retirando-se as constantes dos integrandos, tem-se:

$$c(\xi_i)\Phi^i(\xi_i) = \sum_{n=1}^{N_e} q_n(X) \int_{\Gamma_n} \Phi^*(\xi, X) d\Gamma_n - \sum_{n=1}^{N_e} \Phi_n(X) \int_{\Gamma_n} q^*(\xi, X) d\Gamma_n, \quad i = 1 \dots N_e \quad (4.7.4)$$

Observe-se que como os valores Φ_n e q_n são definidos no meio do elemento, o contorno é suave nos pontos de colocação; portanto, $c(\xi_i) = \frac{1}{2}$.

4.7.1 Formação do sistema de equações

Fazendo o ponto fonte percorrer, sucessivamente, os pontos centrais dos elementos de contorno, um sistema de equações como o representado pela equação (4.7.5) é obtido. Aplicando as N_e condições de contorno, a resolução do sistema fornece os valores incógnitos dos potenciais e fluxos:

$$H\{\Phi\} = G\{q\} \quad (4.7.5)$$

que, ao ser solucionado, resulta nos valores das incógnitas do problema.

4.8 Formulação do MEC com Sub-Regiões

Esta técnica consiste em dividir o domínio em subdomínios distintos, utilizando interfaces como mostrado na figura 4.8.1, nota-se que $(\Gamma_1, \Gamma_2) \in \Omega_1$,

$(\Gamma_4, \Gamma_6) \in \Omega_2$, $(\Gamma_8, \Gamma_{10}) \in \Omega_3$, e, $(\Gamma_{11}, \Gamma_{12}) \in \Omega_4$). Nas linhas que dividem o domínio deve-se tomar cuidado com a convenção de que o domínio deve estar sempre à esquerda ao se percorrer o contorno; outro fator importante na montagem do sistema de equações é considerar as condições de Snell para os potenciais e fluxos nas linhas que compõem as interfaces das sub-regiões adjacentes.

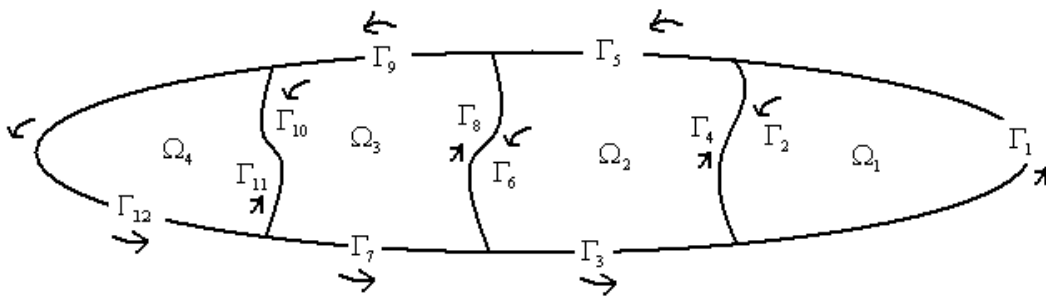


Figura 4.8.1. Domínio Ω de contorno Γ modelado com sub-regiões.

Como mostrado na figura 4.8.1, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_{12}$.

A formação do sistema de equações a partir de uma região que é dividida em subdomínios, produz matrizes H e G em bloco, com blocos diagonais de valores diferentes de zeros.

Os seguintes procedimentos devem ser adotados para a solução do sistema.

- Fazer as trocas das colunas na matriz H de coeficientes de potenciais, levando em conta a condição de compatibilidade entre os potenciais de interfaces das regiões adjacentes.

- Fazer as trocas das colunas na matriz G de coeficientes de densidades de correntes, levando em conta a condição de equilíbrio entre os fluxos nas linhas de interfaces das regiões adjacentes.
- Fazer as trocas de colunas entre as matrizes de coeficientes de potencial e fluxo devido às condições e procedimentos adotados nos itens anteriores. E, por fim:
- Fazer as trocas de colunas entre as matrizes de coeficientes de potenciais densidades de corrente de acordo com as condições de contorno prescritas. Vale lembrar que, tanto no item anterior quanto nesse, quando se trocam duas colunas entre as matrizes H e G , deve-se trocar o sinal dos coeficientes que as compõem.

Para a solução do sistema obtido após o item anterior pode ser usado um método de redução direto, de Gauss-Jordan, por exemplo ou um método iterativo, Gradientes Conjugados, por exemplo.

A seguir é apresentado um exemplo genérico para ilustrar as etapas descritas anteriormente. O domínio possui 4 sub-regiões com 4 elementos em cada sub-região, e com par de elementos em cada interface, como mostra a figura (4.8.2). As figuras (4.8.3) a (4.8.5) ilustram os procedimentos com as matrizes H e G para a formação dos sistema de equações a ser resolvido.

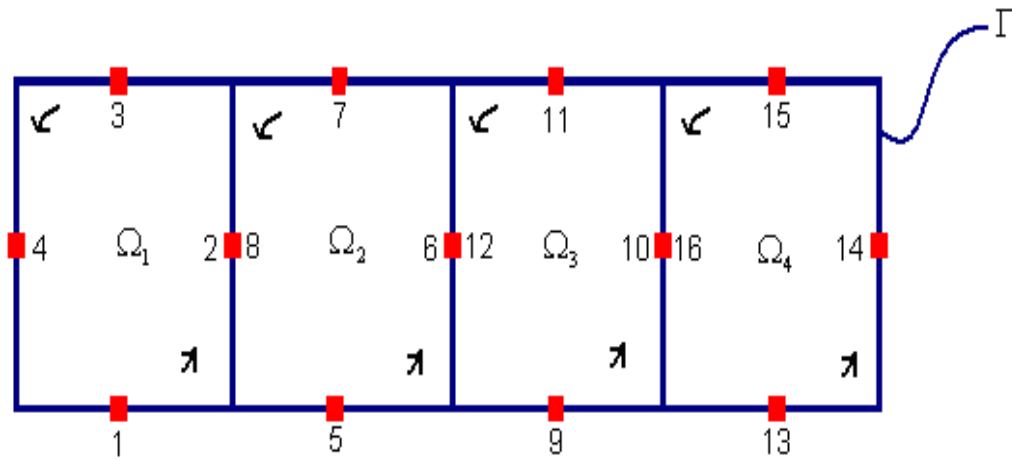


Figura 4.8.2. Domínio Ω e contorno Γ discretizado em quatro sub-regiões com quatro elementos constantes cada sub-região

Após a montagem das matrizes H e G produz-se a matriz descrita na figura (4.8.3):

h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_1
h_{21}	h_{22}	h_{23}	h_{24}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_2
h_{31}	h_{32}	h_{33}	h_{34}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_3
h_{41}	h_{42}	h_{43}	h_{44}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_4
0	0	0	0	h_{55}	h_{56}	h_{57}	h_{58}	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_5
0	0	0	0	h_{65}	h_{66}	h_{67}	h_{68}	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_6
0	0	0	0	h_{75}	h_{76}	h_{77}	h_{78}	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_7
0	0	0	0	h_{85}	h_{86}	h_{87}	h_{88}	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_8
0	0	0	0	0	0	0	0	h_{99}	h_{910}	h_{911}	h_{912}	0	0	0	0	Φ_9
0	0	0	0	0	0	0	0	h_{109}	h_{1010}	h_{1011}	h_{1012}	0	0	0	0	Φ_{10}
0	0	0	0	0	0	0	0	h_{119}	h_{1110}	h_{1111}	h_{1112}	0	0	0	0	Φ_{11}
0	0	0	0	0	0	0	0	h_{129}	h_{1210}	h_{1211}	h_{1212}	0	0	0	0	Φ_{12}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	h_{1313}	h_{1314}	h_{1315}	h_{1316}	Φ_{13}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	h_{1413}	h_{1414}	h_{1415}	h_{1416}	Φ_{14}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	h_{1513}	h_{1514}	h_{1515}	h_{1516}	Φ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	h_{1613}	h_{1614}	h_{1615}	h_{1616}	Φ_{16}

=

g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	q_1
g_{21}	g_{22}	g_{23}	g_{24}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	q_2
g_{31}	g_{32}	g_{33}	g_{34}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	q_3
g_{41}	g_{42}	g_{43}	g_{44}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	q_4
0	0	0	0	g_{55}	g_{56}	g_{57}	g_{58}	0	0	0	0	0	0	0	0	q_5
0	0	0	0	g_{65}	g_{66}	g_{67}	g_{68}	0	0	0	0	0	0	0	0	q_6
0	0	0	0	g_{75}	g_{76}	g_{77}	g_{78}	0	0	0	0	0	0	0	0	q_7
0	0	0	0	g_{85}	g_{86}	g_{87}	g_{88}	0	0	0	0	0	0	0	0	q_8
0	0	0	0	0	0	0	0	g_{99}	g_{910}	g_{911}	g_{912}	0	0	0	0	q_9
0	0	0	0	0	0	0	0	g_{109}	g_{1010}	g_{1011}	g_{1012}	0	0	0	0	q_{10}
0	0	0	0	0	0	0	0	g_{119}	g_{1110}	g_{1111}	g_{1112}	0	0	0	0	q_{11}
0	0	0	0	0	0	0	0	g_{129}	g_{1210}	g_{1211}	g_{1212}	0	0	0	0	q_{12}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{1313}	g_{1314}	g_{1315}	g_{1316}	q_{13}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{1413}	g_{1414}	g_{1415}	g_{1416}	q_{14}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{1513}	g_{1514}	g_{1515}	g_{1516}	q_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{1613}	g_{1614}	g_{1615}	g_{1616}	q_{16}

Figura 4.8.3. Ilustração da matriz formada pelos coeficientes de H e G para um domínio estratificado em quatro sub-regiões.

A aplicação dos procedimentos descritos nos dois primeiros itens fornece a matriz apresentada na figura 4.8.4. Observa-se que os coeficientes dos potenciais (matriz H) dos elementos 8, 12 e 16 são transferidos para os potenciais idênticos dos elementos 2, 6 e 10. O mesmo é válido para os coeficientes dos fluxos desses elementos na matriz G, porém com sinais trocados. Os termos assinalados por x indicam os valores redundantes.

h_{11}	h_{12}	H_{13}	h_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_1
h_{21}	h_{22}	H_{23}	h_{24}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_2
h_{31}	h_{32}	H_{33}	h_{34}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_3
h_{41}	h_{42}	H_{43}	h_{44}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_4
0	h_{58}	0	0	h_{55}	h_{56}	h_{57}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_5
0	h_{68}	0	0	h_{65}	h_{66}	h_{67}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_6
0	h_{78}	0	0	h_{75}	h_{76}	h_{77}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_7
0	h_{88}	0	0	h_{85}	h_{86}	h_{87}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x
0	0	0	0	0	h_{912}	0	0	h_{99}	h_{910}	h_{911}	0	0	0	0	0	Φ_9
0	0	0	0	0	h_{1012}	0	0	h_{109}	h_{1010}	h_{1011}	0	0	0	0	0	Φ_{10}
0	0	0	0	0	h_{1112}	0	0	h_{119}	h_{1110}	h_{1111}	0	0	0	0	0	Φ_{11}
0	0	0	0	0	h_{1212}	0	0	h_{129}	h_{1210}	h_{1211}	0	0	0	0	0	x
0	0	0	0	0	0	0	0	0	h_{1316}	0	0	h_{1313}	h_{1314}	h_{1315}	0	Φ_{13}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	h_{1416}	0	0	h_{1413}	h_{1414}	h_{1415}	0	Φ_{14}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	h_{1516}	0	0	h_{1513}	h_{1514}	h_{1515}	0	Φ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	H_{1616}	0	0	h_{1613}	h_{1614}	h_{1615}	0	x

=

g_{11}	0	g_{13}	g_{14}	0	0	0	0	-	g_{12}	0	0	0	0	0	0	q_1
g_{21}	0	g_{23}	g_{24}	0	0	0	0	-	g_{22}	0	0	0	0	0	0	x
g_{31}	0	g_{33}	g_{34}	0	0	0	0	-	g_{32}	0	0	0	0	0	0	q_3
g_{41}	0	g_{43}	g_{44}	0	0	0	0	-	g_{42}	0	0	0	0	0	0	q_4
0	0	0	0	g_{55}	0	g_{57}	g_{58}	0	0	0	0	0	0	$-g_{56}$	0	q_5
0	0	0	0	g_{65}	0	g_{67}	g_{68}	0	0	0	0	0	0	$-g_{66}$	0	x
0	0	0	0	g_{75}	0	g_{77}	g_{78}	0	0	0	0	0	0	$-g_{76}$	0	q_7
0	0	0	0	g_{85}	0	g_{87}	g_{88}	0	0	0	0	0	0	$-g_{86}$	0	q_8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{99}	g_{911}	g_{912}	0	0	0	$-g_{910}$	q_9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{109}	g_{1011}	g_{1012}	0	0	0	$-g_{1010}$	x
0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{119}	g_{1111}	g_{1112}	0	0	0	$-g_{1110}$	q_{11}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{129}	g_{1211}	g_{1212}	0	0	0	$-g_{1210}$	q_{12}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{1313}	g_{1314}	g_{1315}	g_{1316}	q_{13}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{1413}	g_{1414}	g_{1415}	g_{1416}	q_{14}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{1513}	g_{1514}	g_{1515}	g_{1516}	q_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{1613}	g_{1614}	g_{1615}	g_{1616}	q_{16}

Figura 4.8.4. Matriz formada após procedimentos descritos no item um e dois

Os procedimentos descritos no item três estão melhores exemplificados na matriz abaixo.

h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	0	0	0	g_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_1
h_{21}	h_{22}	h_{23}	h_{24}	0	0	0	g_{22}	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_2
h_{31}	h_{32}	h_{33}	h_{34}	0	0	0	g_{32}	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_3
h_{41}	h_{42}	h_{43}	h_{44}	0	0	0	g_{42}	0	0	0	0	0	0	0	0	Φ_4
0	h_{58}	0	0	h_{55}	h_{56}	h_{57}	$-g_{58}$	0	0	0	g_{56}	0	0	0	0	Φ_5
0	h_{68}	0	0	h_{65}	h_{66}	h_{67}	$-g_{68}$	0	0	0	g_{66}	0	0	0	0	Φ_6
0	h_{78}	0	0	h_{75}	h_{76}	h_{77}	$-g_{78}$	0	0	0	g_{76}	0	0	0	0	Φ_7
0	h_{88}	0	0	h_{85}	h_{86}	h_{87}	$-g_{88}$	0	0	0	g_{86}	0	0	0	0	x
0	0	0	0	0	h_{912}	0	0	h_{99}	h_{910}	h_{911}	$-g_{912}$	0	0	0	g_{910}	Φ_9
0	0	0	0	0	h_{1012}	0	0	h_{109}	h_{1010}	h_{1011}	$-g_{1012}$	0	0	0	g_{1010}	Φ_{10}
0	0	0	0	0	h_{1112}	0	0	h_{119}	h_{1110}	h_{1111}	$-g_{1112}$	0	0	0	g_{1110}	Φ_{11}
0	0	0	0	0	h_{1212}	0	0	h_{129}	h_{1210}	h_{1211}	$-g_{1212}$	0	0	0	g_{1210}	x
0	0	0	0	0	0	0	0	0	h_{1316}	0	0	h_{1313}	h_{1314}	h_{1315}	$-g_{1316}$	Φ_{13}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	h_{1416}	0	0	h_{1413}	h_{1414}	h_{1415}	$-g_{1416}$	Φ_{14}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	h_{1516}	0	0	h_{1513}	h_{1514}	h_{1515}	$-g_{1516}$	Φ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	H_{1616}	0	0	h_{1613}	h_{1614}	h_{1615}	$-g_{1616}$	x

=

g_{11}	0	g_{13}	g_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	q_1		
g_{21}	0	g_{23}	g_{24}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x		
g_{31}	0	g_{33}	g_{34}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	q_3		
g_{41}	0	g_{43}	g_{44}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	q_4		
0	0	0	0	0	g_{55}	0	g_{57}	0	0	0	0	0	0	0	0	q_5		
0	0	0	0	0	g_{65}	0	g_{67}	0	0	0	0	0	0	0	0	x		
0	0	0	0	0	g_{75}	0	g_{77}	0	0	0	0	0	0	0	0	q_7		
0	0	0	0	0	g_{85}	0	g_{87}	0	0	0	0	0	0	0	0	q_8		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{99}	0	g_{911}	0	0	0	0	q_9		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{109}	0	g_{1011}	0	0	0	0	x		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{119}	0	g_{1111}	0	0	0	0	q_{11}		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{129}	0	g_{1211}	0	0	0	0	q_{12}		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{1313}	g_{1314}	g_{1315}	0	q_{13}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{1413}	g_{1414}	g_{1415}	0	q_{14}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{1513}	g_{1514}	g_{1515}	0	q_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	g_{1613}	g_{1614}	g_{1615}	0	q_{16}

Figura 4.8.5. Matriz formada após procedimentos descritos no item três.

Para realizar o procedimento descrito no item quatro, precisa ter disponíveis os valores de potenciais e fluxos prescritos impostos pelas condições de contorno.

4.9 Lei de Ohm

A forma da lei de Ohm

$$\vec{J} = \frac{E}{\rho} \quad (4.9.1)$$

corresponde a uma generalização da expressão ($\Delta\Phi = R.i$) simples que se escreve para o caso dos circuitos elétricos, onde $\Delta\Phi$ representa a diferença de potencial aplicada entre dois terminais de um condutor, semi-condutor etc.. R representa a resistência elétrica do condutor dada em Ohms e i a intensidade de corrente elétrica que o percorre através da área da secção transversal desse condutor.

4.9.1 Condições de interface e lei de Snell

Num domínio onde coexistem diversos tipos de regiões menores, necessariamente existem heterogeneidades. Entretanto, muitas vezes é possível considerar que cada região em si é homogênea, podendo ser tratadas como casos isotrópicos.

Quando se aplica um campo elétrico, a corrente vai atravessar os diferentes domínios homogêneos, mas de tal modo que para cada interface

entre o meio designado por reg_1 e o meio designado por reg_2 duas condições deverão se obedecidas.

A primeira condição diz respeito aos potenciais elétricos nas linhas de interface das duas regiões e traduz a condição da conservação da energia na interface:

$$\Phi_{reg_i} = \Phi_{reg_{i+1}} \quad (4.9.2)$$

A segunda condição diz respeito à componente normal da densidade de corrente na interface entre as regiões de contato

$$\vec{J} \cdot \vec{n}_1 + \vec{J} \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (4.9.3)$$

onde \vec{n}_1 representa a componente normal do vetor na interface de reg_1 e \vec{n}_2 representa a componente normal do vetor na interface de reg_2 . A equação 4.9.3 traduz o princípio da conservação da carga, ao estabelecer que não se verifica (em regime estacionário) a deposição de carga na fronteira.

A título de ilustração será considerado o caso simples de uma interface plana entre dois meios homogêneos de resistividades ρ_1 e ρ_2 , respectivamente. A direção da densidade de corrente vai sofrer uma reflexão na interface entre os dois meios de um modo semelhante ao que se conhece da óptica, e também em casos onde se estudam ondas sísmicas.

A expressão da lei de Snell pode ser obtida combinando a lei de Ohm

4.9.1 com a segunda condição de contorno 4.9.3, dando origem à equação:

$$\rho_1 \tan \theta_1 = \rho_2 \tan \theta_2 \quad (4.9.4)$$

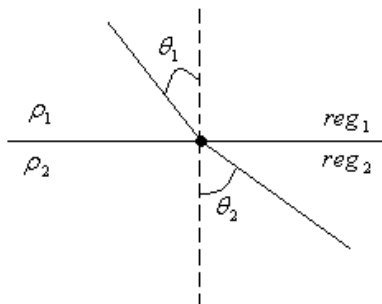


Figura 4.9.1. Representação gráfica da refração da densidade de corrente entre dois meios de resistividades diferentes.

5 Resultados numéricos – meios homogêneos

5.1 Distribuição de potencial em um domínio retangular

Inicialmente, para avaliar as rotinas implementadas, analisa-se um problema clássico de um domínio retangular com condições de contorno que simulam um problema unidimensional com solução conhecida.

As figuras 5.1.1, 5.1.2 e 5.1.3 apresentam o problema com suas dimensões e condições de contorno, considerando-se uma, duas e três sub-regiões, respectivamente. Em todas as sub-regiões as condutividades dos meios foram adotadas como constantes e unitárias, $k = k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

Por se tratar de um exemplo puramente numérico, as grandezas são apresentadas sob forma adimensional. Elementos de contorno constantes com tamanho igual a 0,5 são empregados na discretização.

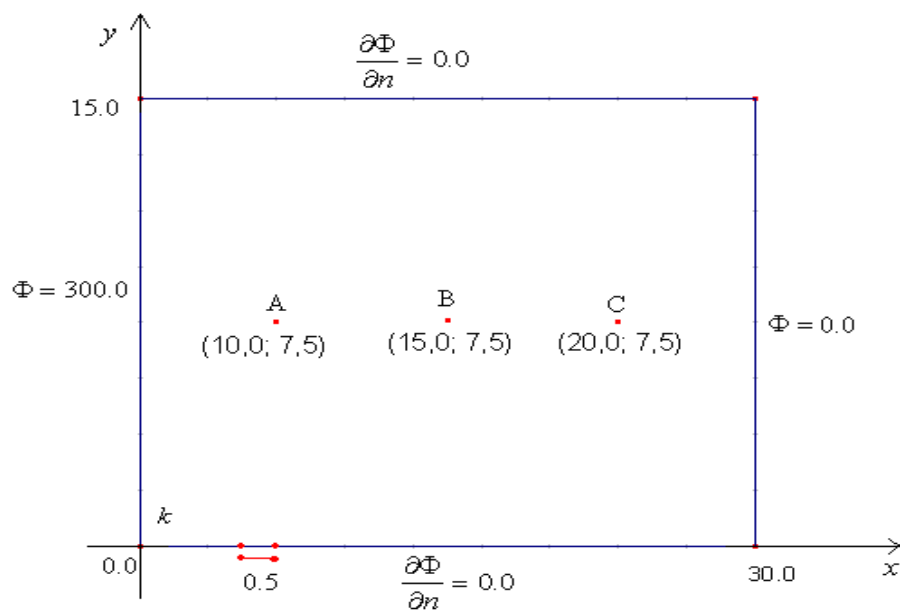


Figura 5.1.1. Representação do domínio retangular e das condições de contorno para o problema de potencial com uma região única.

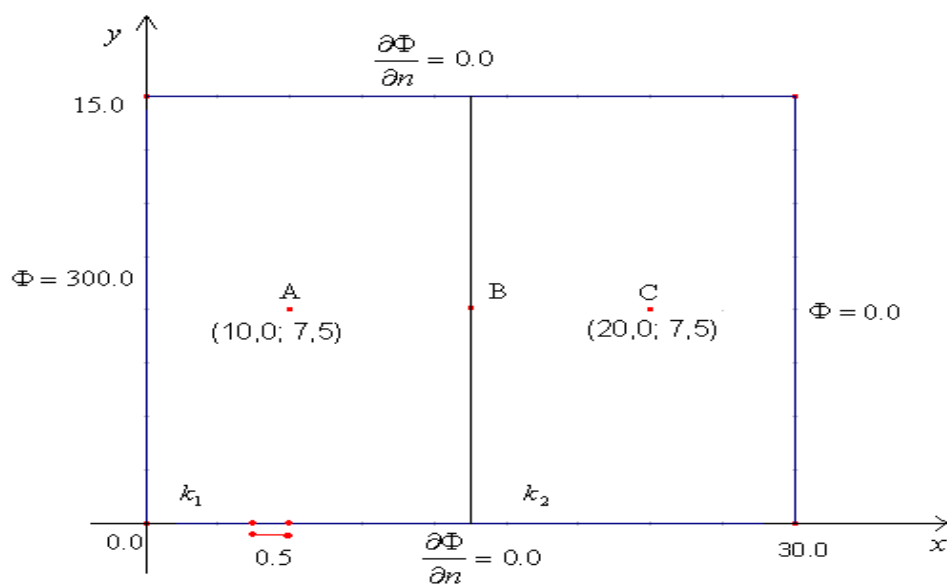


Figura 5.1.2. Representação do domínio retangular e das condições de contorno para o problema de potencial em duas sub-regiões.

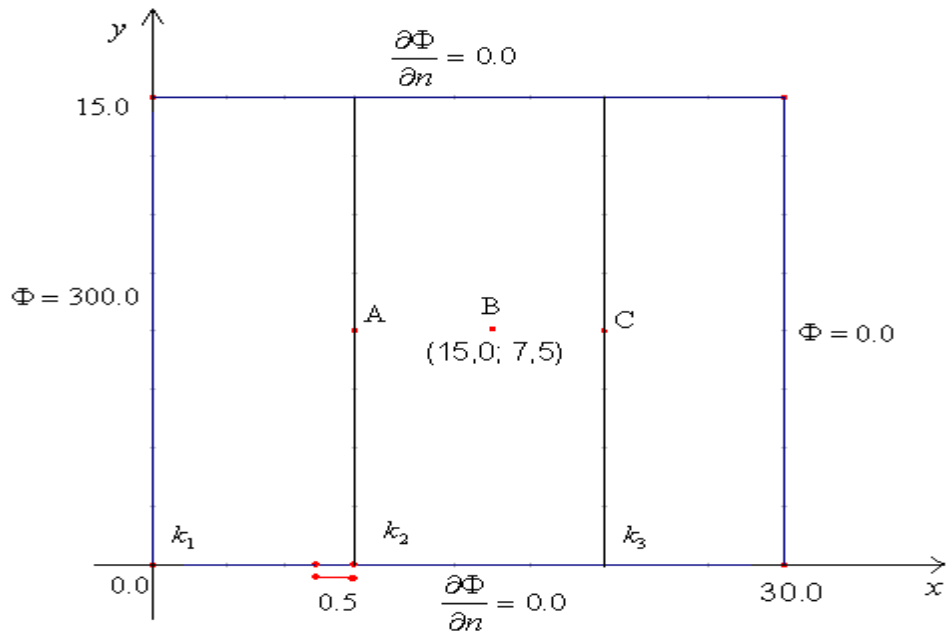


Figura 5.1.3. Representação do domínio retangular e das condições de contorno para o problema de potencial em três sub-regiões.

No problema descrito os fluxos são nulos nos contornos superiores e inferiores do domínio. Portanto, todo o fluxo deve se propagar na direção horizontal da face de maior potencial para a de menor potencial. Assim, o problema de potencial pode ser representado pela seguinte equação diferencial, e condições de contorno:

$$\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} = 0 \quad \Phi(0) = \Phi_0 \quad e \quad \Phi(L) = \Phi_1 \quad (5.1.1)$$

Resolvendo-se o problema de valor de contorno acima, tem-se,

$$\Phi(x) = -10.x + 300 \quad (5.1.1)$$

A distribuição de potencial ao longo do contorno superior dos três problemas analisados está representada na figura 5.1.4. Uma ótima concordância pode ser observada.

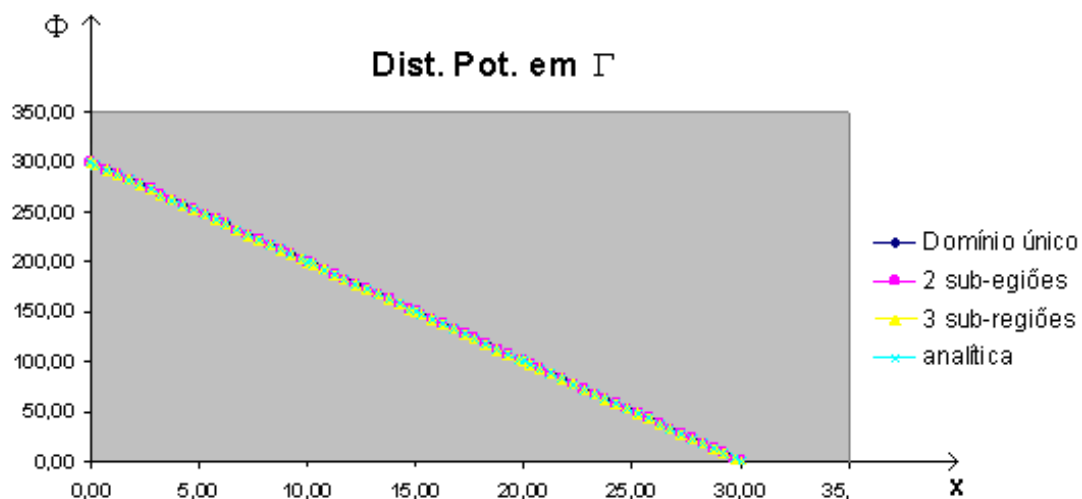


Figura 5.1.4. Distribuição de potencial ao longo do contorno para os três casos analisados.

A figura 5.1.5 mostra a distribuição do erro relativo ao longo do contorno superior para a solução com o MEC, quando comparada com a solução analítica, para os três casos descritos. Em geral, o erro observado é pequeno, mas cresce para cerca de 6% próximo da borda direita do contorno. Esse comportamento é resultante do tipo de elemento empregado. Esse erro é relativamente alto e devido ao tipo de elemento empregado.

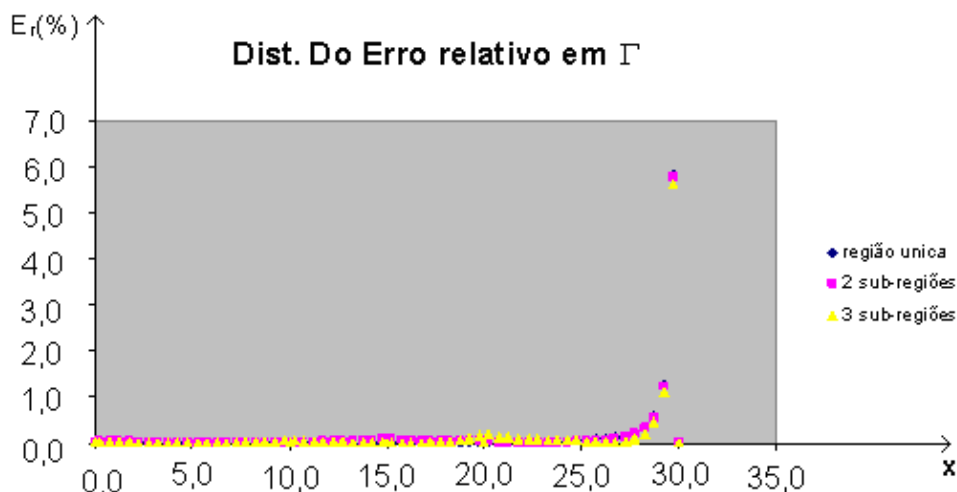


Figura 5.1.5. Distribuição do erro relativo ao longo do contorno superior para os três casos analisados.

A tabela 5.1.1 mostra os valores dos potenciais calculados nos pontos internos para a região mostrada na figura 5.1.1.

Potencial	MEC	Analítica
Φ_A	200.01	200.0
Φ_B	150.00	150.0
Φ_C	99.99	100.0

Tabela 5.1.1. Comparação entre a resposta analítica e a obtida pelo MEC para os três pontos internos.

A tabela 5.1.2 mostra os valores dos potenciais calculados nos pontos internos para a região mostrada na figura 5.1.2

Potencial	MEC	Analítica
Φ_A	199,985	200.0
Φ_C	100,018	100.0

Tabela 5.1.2. Comparação entre a resposta analítica e a obtida pelo MEC para os dois pontos internos.

A tabela 5.1.3 mostra os valores dos potenciais calculados nos pontos internos para a região mostrada na figura 5.1.3.

Potencial	MEC	Analítica
Φ_B	149,9975	150.0

Tabela 5.1.3 Comparação entre a resposta analítica e a obtida pelo MEC para o ponto interno

Do exposto, pode-se observar a boa concordância entre as respostas numéricas e analíticas. Embora de difícil percepção no exemplo acima, há também uma degradação dos resultados a medida que se aumenta o número de sub-regiões, devido a precisão numérica nas simulações.

5.2 Simulação do Método de Wenner

Para simulação do método de Wenner, considere o esquema da figura 5.2.1, que representa um meio como o solo com resistividade constante de 10hm.m e dimensões finitas, largura X e profundidade Z . Quatro eletrodos são introduzidos com espaçamento a entre os mesmos, próximos à superfície do meio, dois para injeção e retirada de corrente elétrica e outros dois para medidas de potencial.

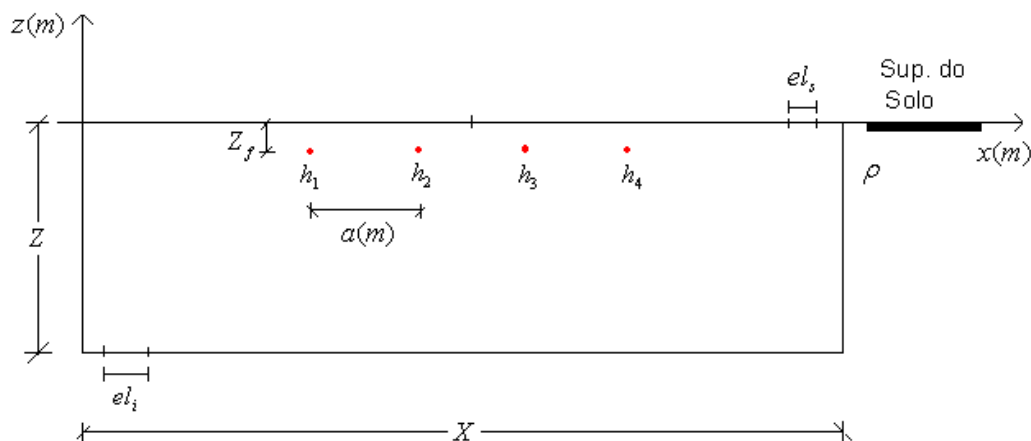


Figura 5.2.1. Representação do domínio para simulação do método de Wenner.

Diversas análises foram realizadas considerando-se espaçamentos de 1 m, 2 m, 4 m, 8 m, 16 m e 32 m entre eletrodos. Os eletrodos h_1 (fonte) e h_4 (sumidouro) são modelados como fontes pontuais de $1A$ e $-1A$, respectivamente. Os eletrodos h_2 e h_3 são representados por pontos internos onde se calculam os resultados de potencial. Os quatro pontos estão localizados a $Z_f = 0,25m$ de profundidade.

As modelagens foram realizadas com e sem o emprego do método das imagens. No segundo caso, a discretização da superfície livre foi feita com elementos constantes de tamanho $el_s = 1m$, com condição de fluxo nulo.

A condição de contorno de potencial nulo foi adotada para as laterais e base do domínio, muito embora um potencial constante e diferente de zero seria o correto como condição em uma região suficientemente afastada. Nessas linhas, a discretização foi realizada com elementos constantes de tamanho el_i variável dependendo das dimensões empregadas para a largura e profundidade do domínio.

As dimensões do problema foram variadas com o intuito de verificar sua influência nos resultados. As situações analisadas são apresentadas na tabela a seguir:

Caso	Profundidade $Z(m)$	Largura $X(m)$	Método das Imagens
1	50	500	Sim
2	125	500	Sim
3	250	500	Sim
4	500	1000	Sim
5	50	500	Não
6	125	500	Não
7	250	500	Não

Tabela 5.2.1. Representação das dimensões dos domínios analisados.

A figura 5.2.2 ilustra a distribuição dos potenciais na superfície do solo para o caso 4 da tabela 5.2.1 com os diversos espaçamentos entre hastes. É interessante observar que, apesar das diferentes distribuições de cada espaçamento, a diferença de potencial se mantém constante entre dois pontos intermediários. Segundo a expressão 3.4.12 a diferença de potencial deve ser igual a $\Phi_{23} = \frac{\rho i/d}{\pi} 2\ln(2)$. Esse fato pode ser constatado na figura 5.2.3 que mostra a diferença de potencial entre os eletrodos h_2 e h_3 para os diversos espaçamentos e casos analisados.

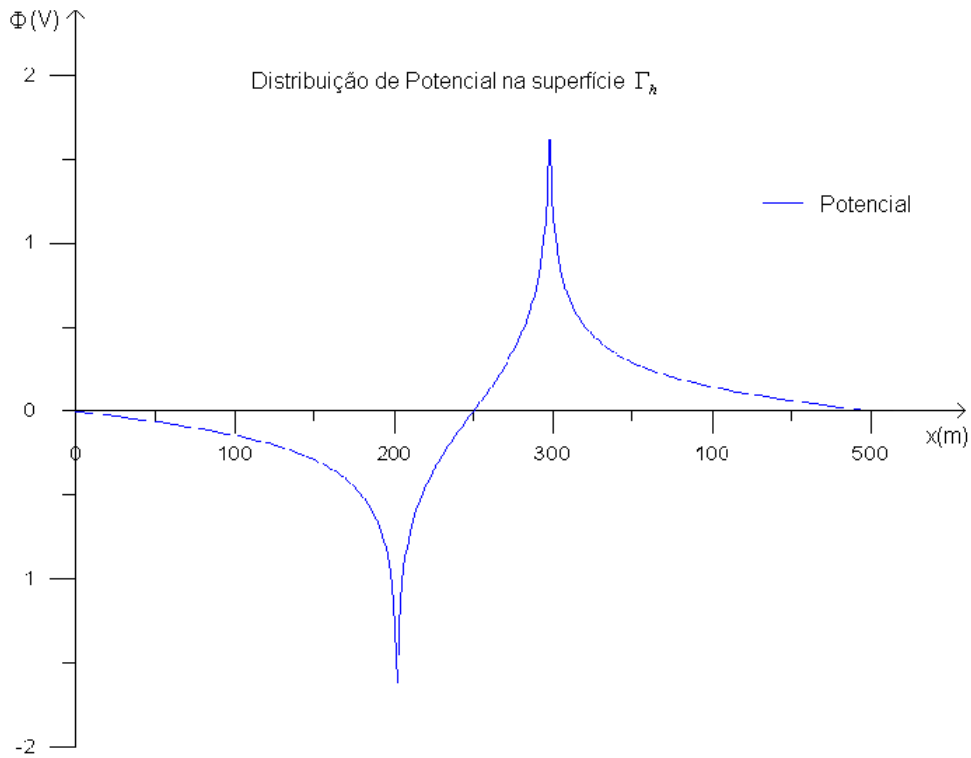


Figura 5.2.2. Distribuição de potencial na superfície do solo para as diversas configurações de espaçamento entre as hastes (caso 7).

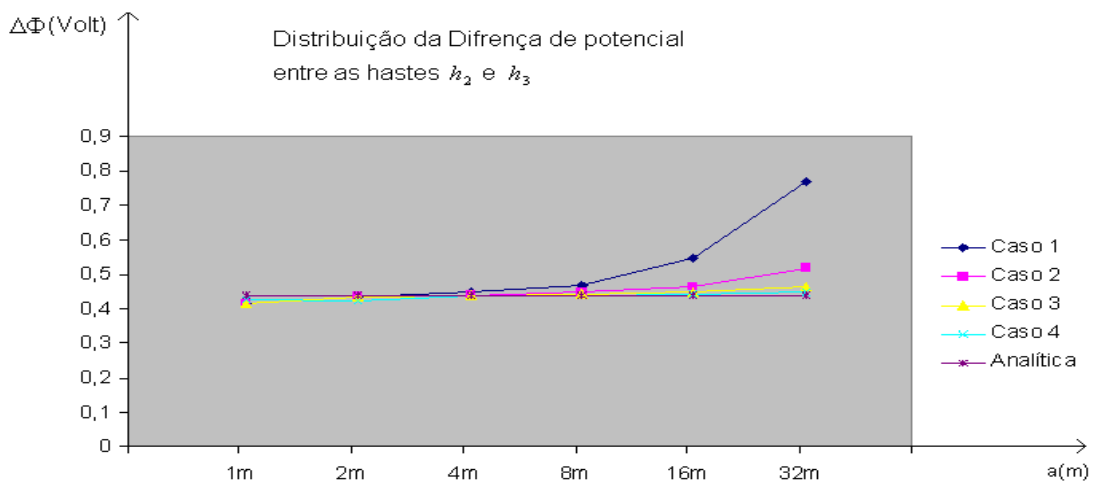


Figura 5.2.3. Diferença de potencial entre as duas hastes centrais nas diversas configurações de espaçamento e domínios analisados.

A figura 5.2.4 mostra os erros relativos, em escala logarítmica, para os casos analisados entre as configurações de domínios e espaçamentos, com o método das imagens.

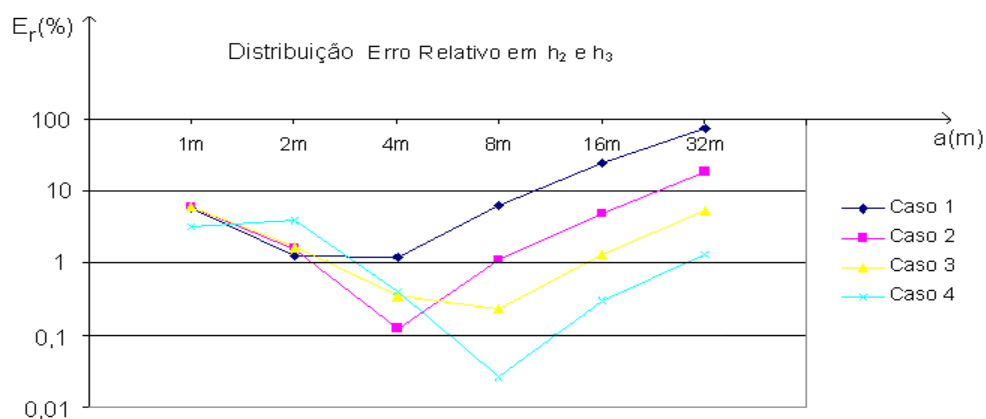


Figura 5.2.4. Comparação da distribuição do Erro relativo em escala logarítmica, nas aproximações do MEC para o problema em estudo com o método das imagens e sem o método das imagens.

Percebe-se que a qualidade dos resultados melhora com o aumento da região modelada. Para as análises seguintes será adotada a região definida como caso 3.

5.3 Simulação com variação de uma haste.

Para verificar se o valor constante para a diferença de potencial é resultante da simetria na configuração das hastes apresenta-se a análise a seguir.

A resposta analítica para a diferença de potencial entre as hastes h_2 e h_3 , onde h_2 se encontra em uma posição variável dependente de n , conforme a tabela 5.3.1, é dada pela expressão:

$$\Phi_{23} \rightarrow \frac{\rho \ i/d}{\pi} [\ln(2) + \ln(3n - 1)] \quad (5.3.1)$$

Essa expressão é válida sempre que $p \ll (a/n)$ e $n \geq 1$. Para $n=1$ recai-se no método de Wenner; para $n=2$, e $n=3$ a equação (5.3.1) fornece as seguintes diferenças de potencial, respectivamente:

$$\Phi_{23} = \frac{\rho \ i/d}{\pi} [\ln(2) + \ln(5)] \approx 0,732957215$$

$$\Phi_{23} = \frac{\rho \ i/d}{\pi} [\ln(2) + \ln(8)] \approx 0,882568429$$

A figura 5.3.2 mostra a convergência dos resultados numéricos dos três casos analisados para as respectivas soluções analíticas, com os diferentes espaçamentos entre hastes.

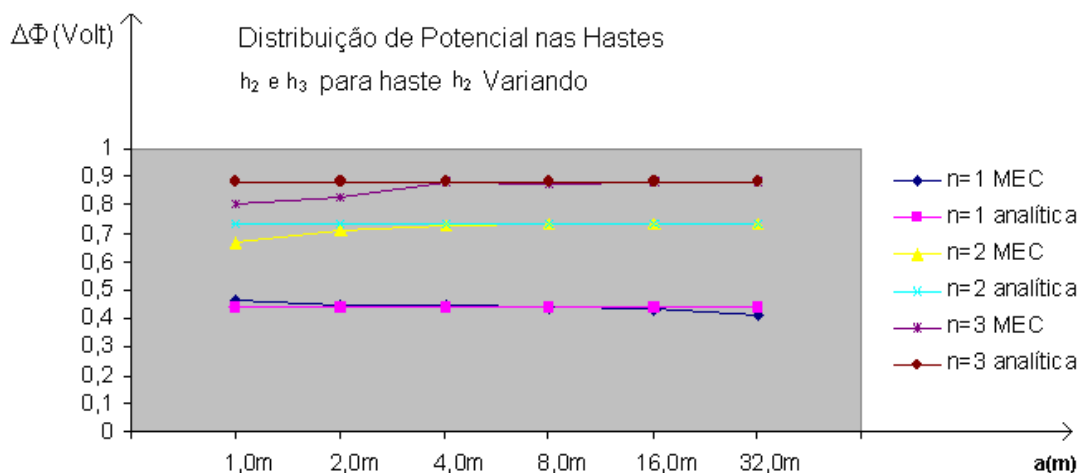


Figura 5.3.2. Diferenças de potenciais entre h_2 e h_3 , para a haste h_2 variando segundo os casos 3, 8 e 9 da tabela 5.3.1.

Observa-se na figura 5.3.3 o erro relativo na diferença de potencial entre as hastes intermediárias para os três casos analisados. Com exceção do caso relativo ao método de Wenner, erros diminuíram com o aumento dos espaçamentos.

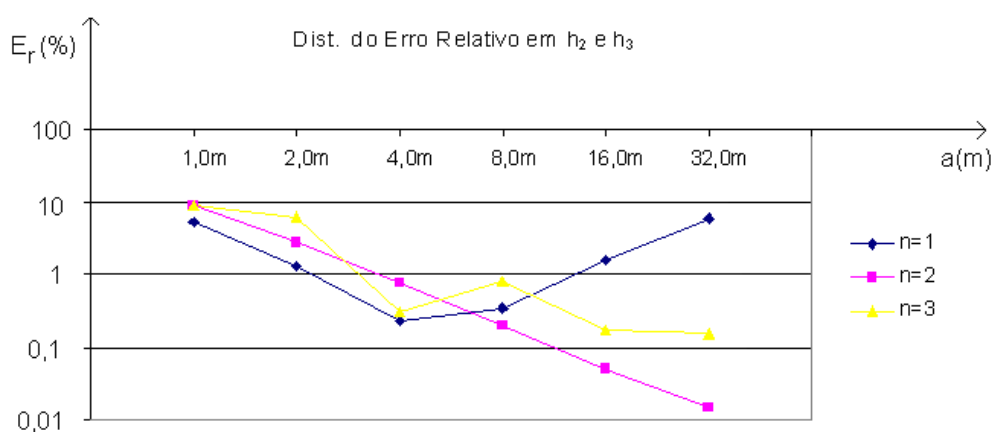


Figura 5.3.3. Erro relativo entre as soluções numéricas e analíticas para os três casos analisados com variação de uma haste para $n=1$ m, $n=2$ m e $n=3$ m, ambos para o caso 3.

5.4 Simulação do Método de Wenner em semi-espço estratificado

Novamente, com o intuito de avaliar o funcionamento das rotinas implementadas, o modelo do método de Wenner é estratificado com diferentes números de camadas, além da aplicação do método das imagens e fontes pontuais. Esse modelo é um teste preliminar ao emprego de camadas com diferentes resistividades em cada sub-região.

Seguindo o exemplo numérico do Método de Wenner, inicia-se a simulação com a estratificação em duas camadas (ver figura 5.4.1), e utilizam-se as mesmas propriedades e condições de contorno já apresentadas.

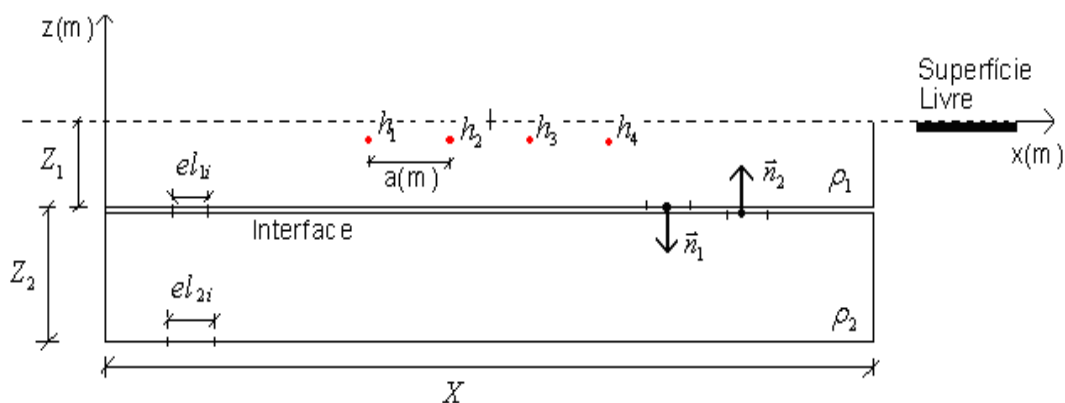


Figura 5.4.1. Representação do domínio para simulação do método de Wenner com duas sub-regiões.

Na figura 5.4.1 $el_{1i} = 10m$ e $el_{2i} = 10m$ representam os elementos de contorno de cada sub-região, \vec{n}_1 e \vec{n}_2 representam os vetores normais a cada sub-região, $\rho_1 = 10hm.m$ e $\rho_2 = 10hm.m$ representam as resistividades em cada sub-região, $Z_1 = 125m$ e $Z_2 = 125m$ a profundidade de cada sub-região, e $X = 500m$ a largura do domínio considerado. Esse modelo será designado como “Caso 3 - 2 sub-regiões”, para comparação dos resultados.

A figura 5.4.2 mostra a diferença de potencial entre as hastes h_2 e h_3 para o caso analisado e para o caso 3 analisado anteriormente com uma única sub-região. A figura 5.4.3 apresenta uma comparação da distribuição do erro relativo.

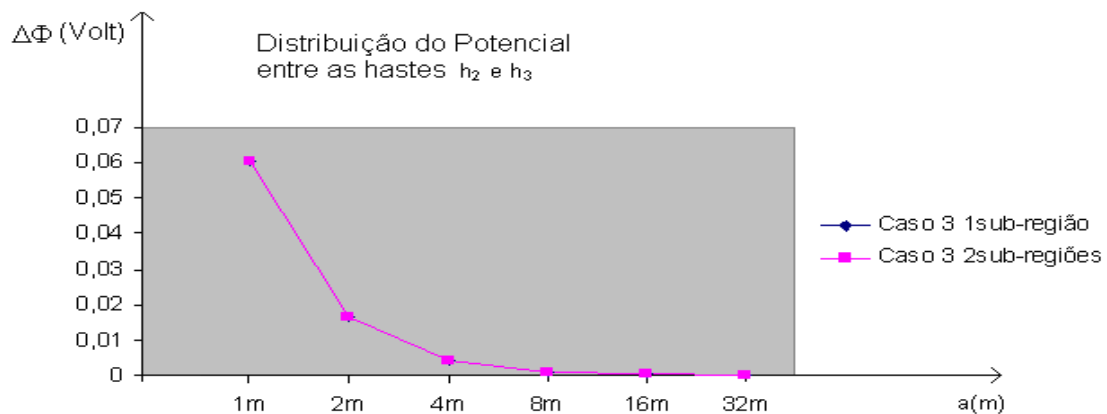


Figura 5.4.2. Diferença de potencial nas hastes para as diversas configurações de espaçamento entre as hastes h_2 e h_3 com uma e duas sub-regiões dimensões do caso três com uma e duas sub-regiões.

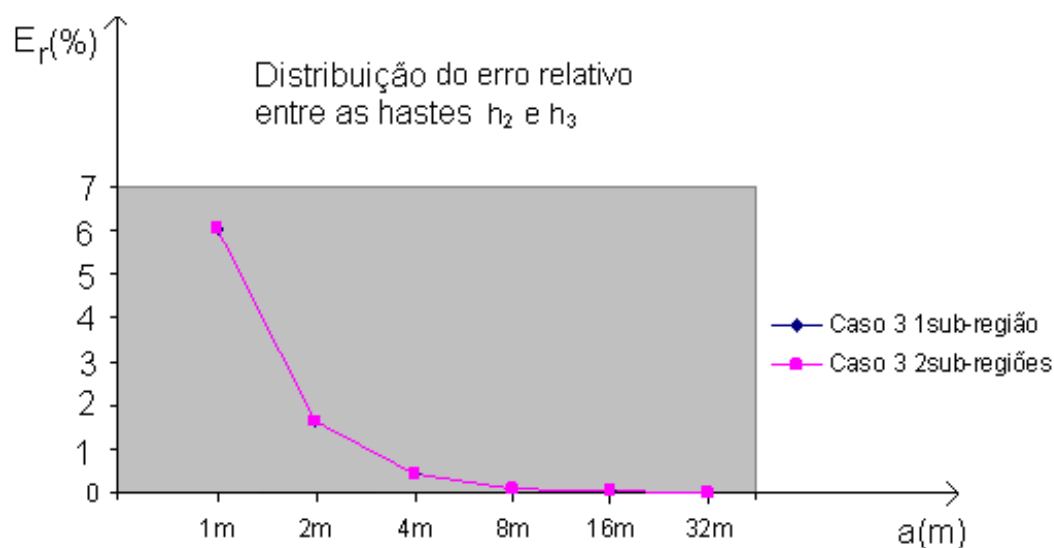


Figura 5.4.3. Comparação da distribuição do erro relativo para as duas configurações de domínios e espaçamentos de hastes, do caso analisado na figura 5.4.2.

De forma semelhante ao que ocorreu nas simulações com domínio sem estratificação da superfície livre, a convergência dos resultados foi boa validando a implementação das sub-regiões. Assim como no caso 3 com uma única região os erros foram maiores para hastes espaçadas com 1 m e 2 m.

A figura 5.4.4 ilustra a distribuição do potencial na superfície livre para o caso 7 e na interface entre sub-regiões para o caso 3 com duas sub-regiões, para espaçamento entre hastes de 16 m.

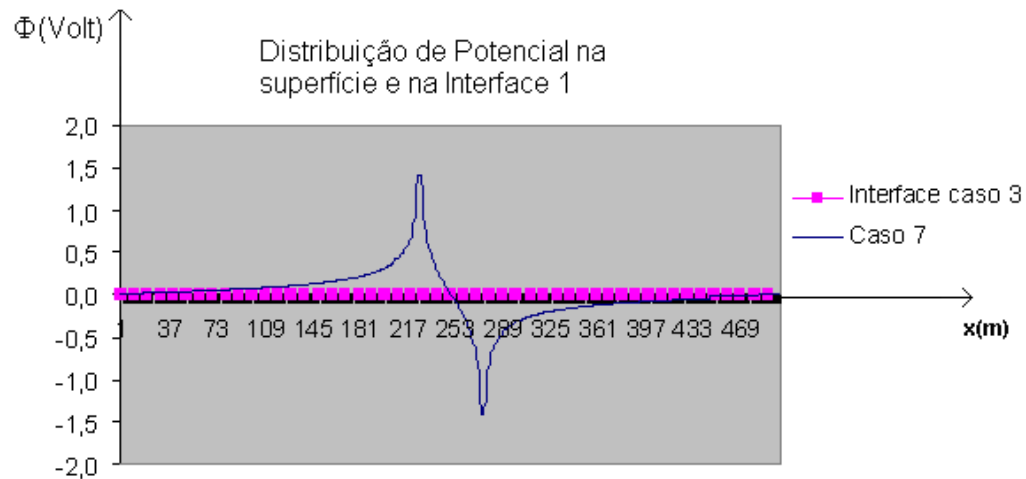


Figura 5.4.4. Comparação da distribuição de potencial na superfície para o caso 7 e na interface para o caso 3 para espaçamento entre as hastes de 16 m

Observa-se que como a interface está muito afastada das fontes pontuais o potencial é muito pequeno, a diferentemente da superfície do solo que tem o potencial mais elevado.

O mesmo problema é agora analisado com 3 sub-regiões (caso 3 – 3 regiões), com as mesmas propriedades, espessuras $Z_1 = 10m$, $Z_2 = 10m$ e $Z_3 = 230m$ para cada camada, e elementos de cada sub-região com dimensões, $el_{1i} = 2,5m$, $el_{2i} = 2,5m$ e $el_{3i} = 10m$ (ver detalhes na figura 5.4.5).

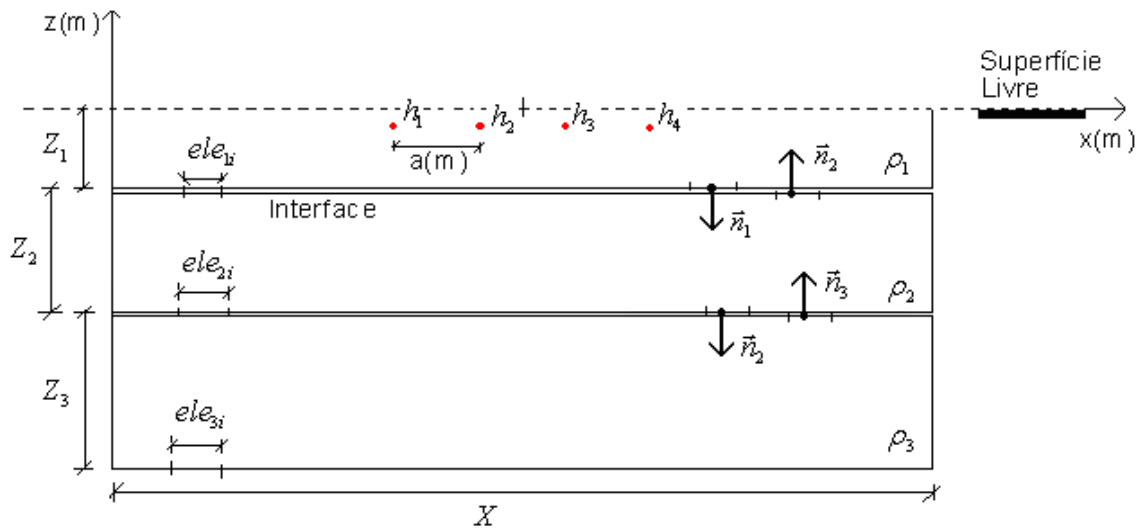


Figura 5.4.5. Representação do domínio para simulação do método de Wenner com três sub-regiões.

A figura 5.4.6 mostra a diferença de potencial entre as hastes h_2 e h_3 para o caso analisado e para os casos analisados anteriormente com uma e duas sub-regiões.

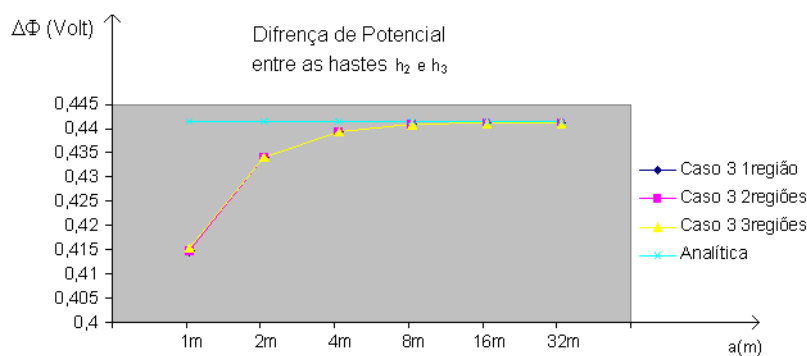


Figura 5.4.6. Diferença de potencial nas hastes para os casos 3 com uma, duas e três sub-regiões para as diversas configurações de espaçamento entre as hastes h_2 e h_3 .

Assim como nos casos analisados anteriormente, a convergência dos resultados foi boa. Novamente, como esperado, os erros foram maiores para hastes espaçadas com 1 m e 2 m (ver figura 5.4.7).

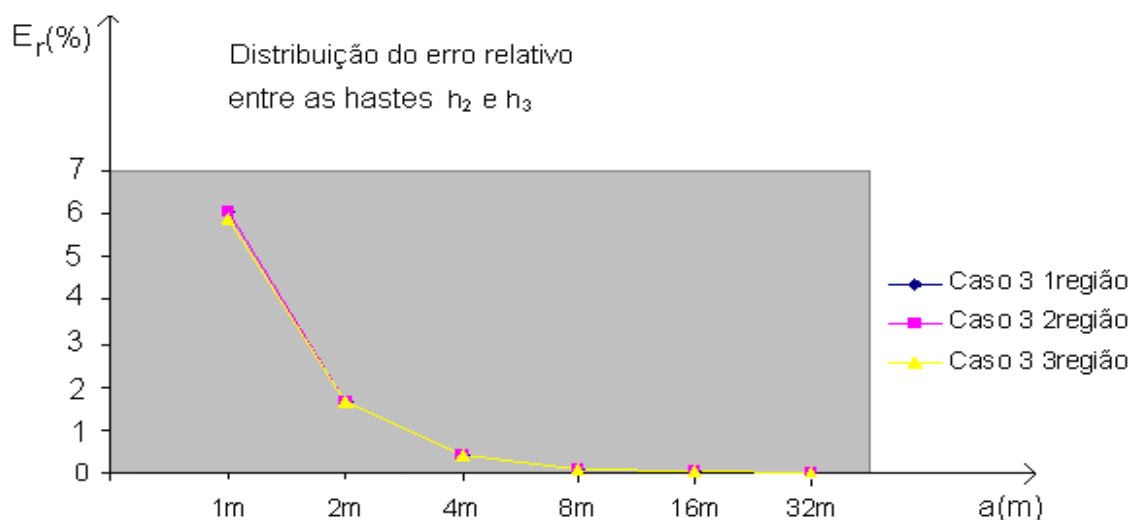


Figura 5.4.7. Comparação do erro relativo para os casos analisados com e sem sub-regiões.

A figura 5.4.8 ilustra a distribuição do potencial nas duas interfaces entre sub-regiões para o caso 3 com 3 sub-regiões, para espaçamento entre hastes de 16 m. É evidente a redução nos valores do potencial elétrico com a profundidade.

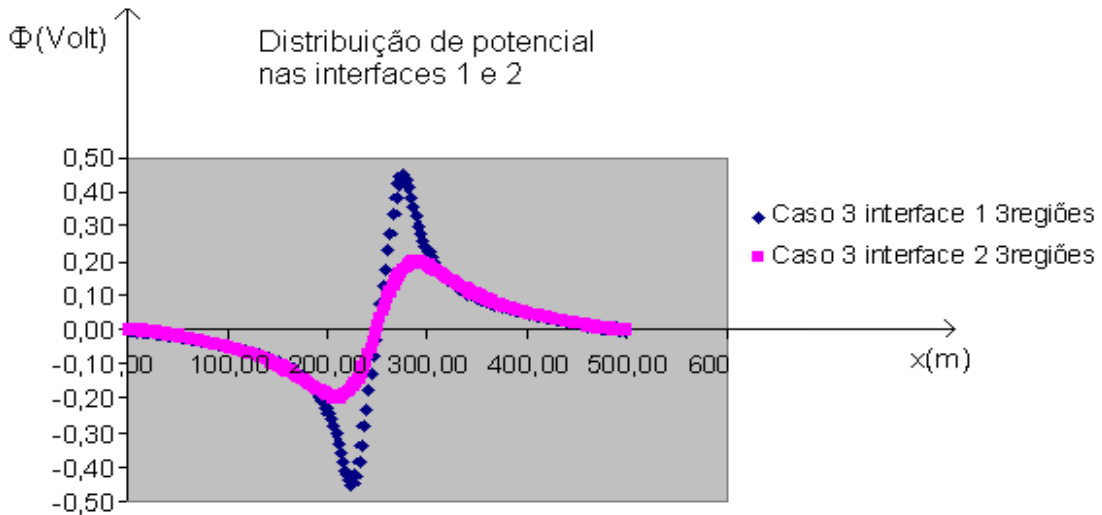


Figura 5.4.8. Distribuição do potencial nas duas interfaces do domínio estratificado em três sub-regiões para hastes espaçadas de 16 m.

O mesmo problema é agora analisado com 4 sub-regiões, caso 3 – com 4 sub-regiões, com as mesmas propriedades, espessuras $Z_1 = 1m$, $Z_2 = 1m$, $Z_3 = 1m$ $Z_4 = 247m$ para cada camada, e elementos de cada sub-região com dimensões, $el_{1i} = 1m$, $el_{2i} = 1m$, $el_{3i} = 1m$, $el_{4i} = 10m$ (ver detalhes na figura 5.4.9).

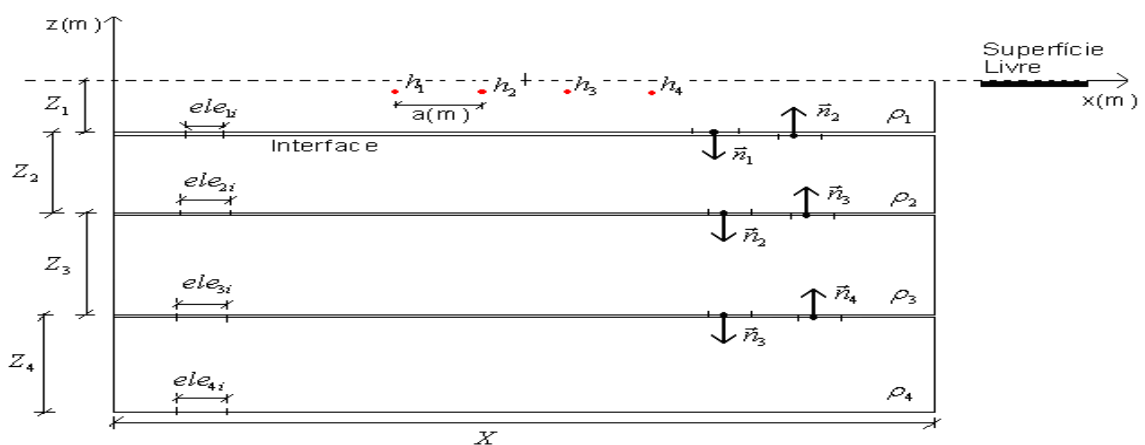


Figura 5.4.9. Representação do domínio para simulação do método de Wenner com quatro sub-regiões.

A figura 5.4.10 ilustra a distribuição do potencial nas três interfaces entre sub-regiões, para espaçamento entre hastes de 16 m. É evidente a redução nos valores do potencial elétrico nas interfaces mais profundas.

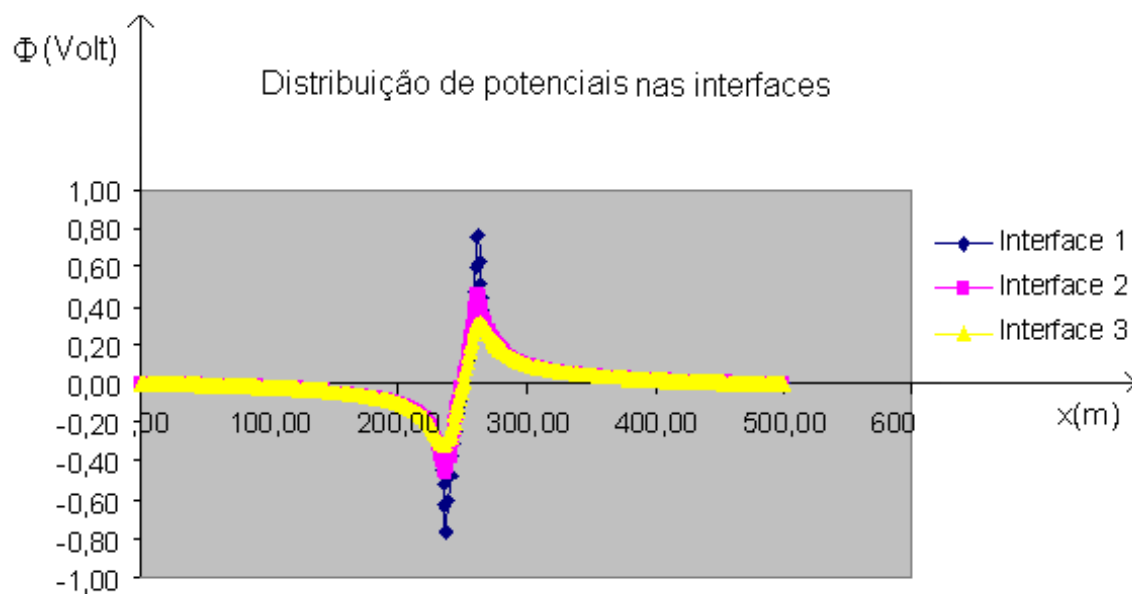


Figura 5.4.10. Distribuição do potencial nas três interfaces das quatro sub-regiões, com espaçamento entre hastes de 16 m.

6 Resultados Numéricos – meios com resistividade variável modelados com sub-regiões

Neste capítulo faz-se uma análise de problemas com meios heterogêneos, simulados com a técnica de sub-regiões e resistividades (ou condutividades) diferentes para cada uma.

6.1 Distribuição de potencial em domínio retangular

A primeira análise é semelhante àquela realizada no capítulo 5, seção 5.1, figura 5.1.2, porém com condutividades diferentes nas duas sub-regiões (ver figura 6.1.1).

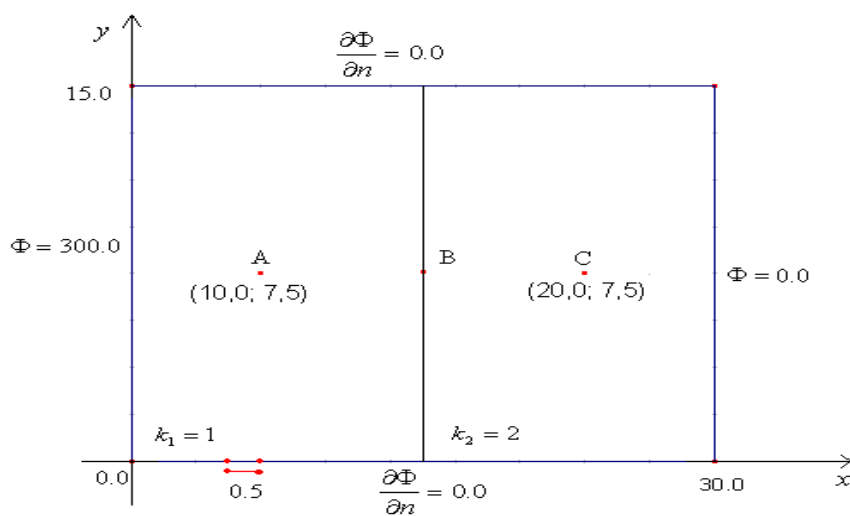


Figura 6.1.1. Modelo do problema de distribuição de potencial em um domínio retangular com 2 sub-regiões com condutividades diferentes.

Os elementos constantes utilizados na discretização possuem tamanho 0,5. Conforme mencionado anteriormente, por se tratar de um exemplo numérico simples, as grandezas do problema são tratadas de forma adimensional. As soluções analíticas para o problema unidimensional correspondente são dadas por,

$$\Phi_{reg_1}(x) = -\frac{100}{15} \cdot x + 300 \quad (6.1.1)$$

na primeira sub-região e

$$\Phi_{reg_2}(x) = -\frac{200}{15} \cdot x + 400 \quad (6.1.2)$$

na segunda sub-região.

Conforme visto na seção 4.8.1, as condições de continuidade e de Snell na interface devem ser satisfeitas. De acordo com as equações (6.1.1) e (6.1.2) essas condições são facilmente verificadas como,

$$\Phi_{Interf_1}(15) = \Phi_{Interf_2}(15) = 200 \quad (6.1.3)$$

e

$$\frac{1}{k_1} \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{1}{k_2} \operatorname{tg} \theta_2 \quad \text{ou} \quad \frac{\operatorname{tg} \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1} = \frac{k_2}{k_1} \quad (6.1.4)$$

Na figura 6.1.2 é apresentada a distribuição de potencial ao longo do contorno superior do domínio. Observa-se uma ótima concordância entre as soluções analíticas e a resposta numérica com o MEC. Na tabela 6.1.1 tem-se a comparação para os pontos internos A e C definidos no modelo. Os resultados foram coerentes e indicam a validade das rotinas implementadas.

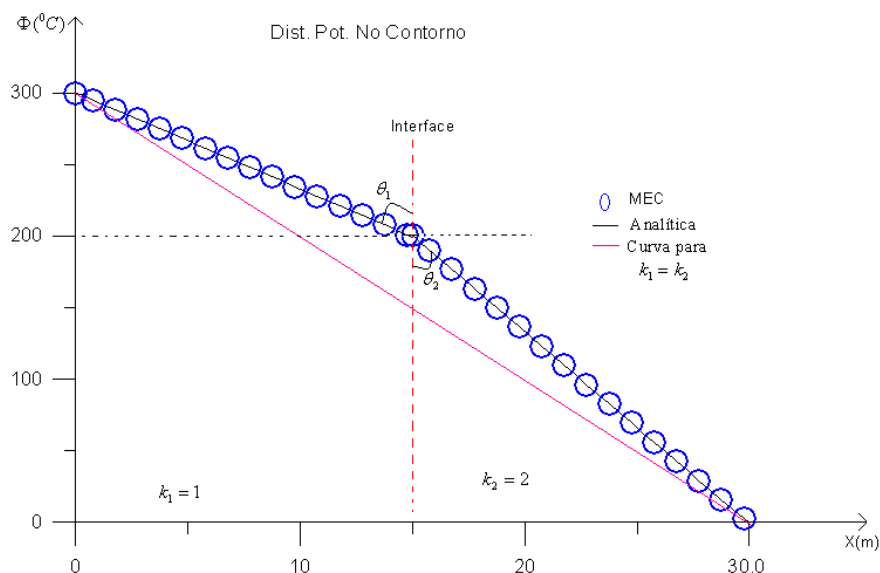


Figura 6.1.2. Distribuição de potencial ao longo do contorno superior do domínio retangular definido na figura 6.1.1.

Potencial	MEC	Analítica
Φ_A	232.92	233.33
Φ_C	133.175	134.0

Tabela 6.1.1. Comparação entre a solução analítica e a obtida pelo MEC para os pontos internos A e C.

Com o mesmo intuito, analisa-se também o mesmo domínio, mas com três sub-regiões com resistividades distintas, como mostra a figura 6.1.3 abaixo.

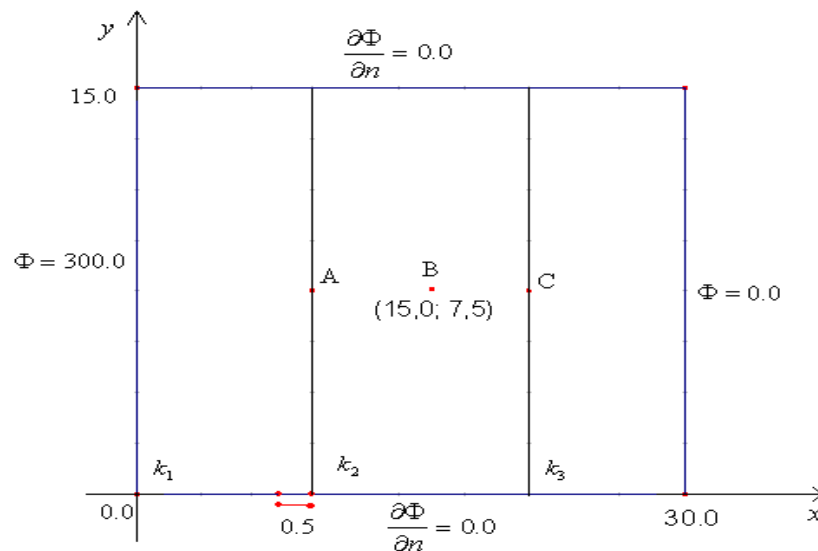


Figura 6.1.3. Modelo do problema de distribuição de potencial em um domínio retangular com 3 sub-regiões com condutividades diferentes.

As funções analíticas que representam a distribuição do potencial na direção horizontal nas três sub-regiões são dadas por

$$\Phi_{reg_1}(x) \approx -\frac{42.87}{10} \cdot x + 300 \quad (6.1.5)$$

$$\Phi_{reg_2}(x) \approx -\frac{85.71}{10} \cdot x + 342.84 \quad (6.1.6)$$

e

$$\Phi_{reg_3}(x) \approx -\frac{171.42}{10} \cdot x + 514.26 \quad (6.1.7)$$

Na figura 6.1.4 é apresentada a distribuição de potencial ao longo do contorno superior do domínio. Observa-se uma ótima concordância entre as soluções analíticas e a resposta numérica com o MEC. Na tabela 6.1.2 tem-se a comparação para o ponto interno B.

O valor do potencial em cada interface, pontos A e C, são $\Phi_{Interface_1} = 257.13$, $\Phi_{Interface_2} = 171.42$, respectivamente. Novamente, observa-se a boa concordância entre os resultados.

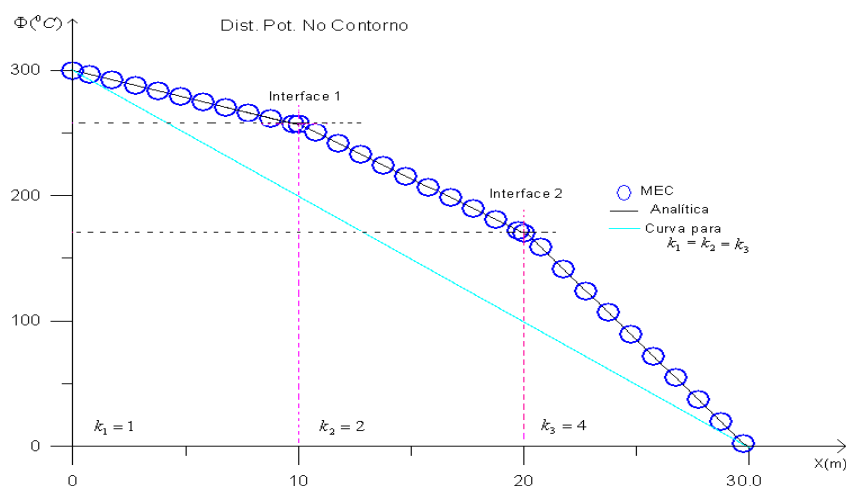


Figura 6.1.4. Distribuição de potencial ao longo do contorno superior do domínio retangular definido na figura 6.1.3.

A tabela abaixo mostra o potencial no ponto interno tanto com a formulação do MEC quanto com a resposta analítica.

Potencial	MEC	Analítica
Φ_B	213.61	214.275

Tabela 6.1.2. Comparação entre a resposta analítica e a obtida pelo MEC para três sub-regiões.

6.2 Simulação do método de Wenner em meios estratificados com resistividade variável

Problemas que permitem a estratificação de seu domínio permitem trabalhar com propriedades diferentes para cada sub-região. Assim é possível simular de maneira aproximada, uma não homogeneidade de uma determinada região de estudo.

Apresentam-se agora duas análises do método de Wenner com o emprego do modelo de quatro sub-regiões definido na seção 5.4, figura 5.4.11. Na primeira análise, caso 1, empregam-se as seguintes resistividades: $\rho_1 = 1$; $\rho_2 = 2$, $\rho_3 = 4$, $\rho_4 = 8$. Na segunda análise, caso 2, os valores utilizados são: $\rho_1 = 8$, $\rho_2 = 4$, $\rho_3 = 2$, $\rho_4 = 1$.

Nas duas situações avalia-se a distribuição de potencial nas linhas de interface, considerando-se um espaçamento entre hastes de 16 m.

A figura 6.2.1 mostra a distribuição de potencial nas interfaces para o primeiro caso e a figura 6.2.2 mostra a distribuição para o segundo. É interessante observar a semelhança da forma geométrica dos resultados. Contudo, é nítida a diferença na magnitude dos potenciais na interface em cada caso. A maior resistividade nas camadas superiores faz com que os valores dos potenciais sejam maiores nas interfaces superiores.

Observa-se também que a distribuição de potencial nas interfaces mais próximas às fontes são maiores, e a medida que as interfaces estão mais distantes das fontes, o potencial tende a diminuir.

Nos dois casos foi também investigada a diferença de potencial para o método de Wenner, não havendo qualquer mudança em relação aos resultados já obtidos para meios homogêneos. Interessante destacar que, apesar da variação das resistividades, o valor da diferença de potencial entre as hastes intermediárias permaneceu constante.

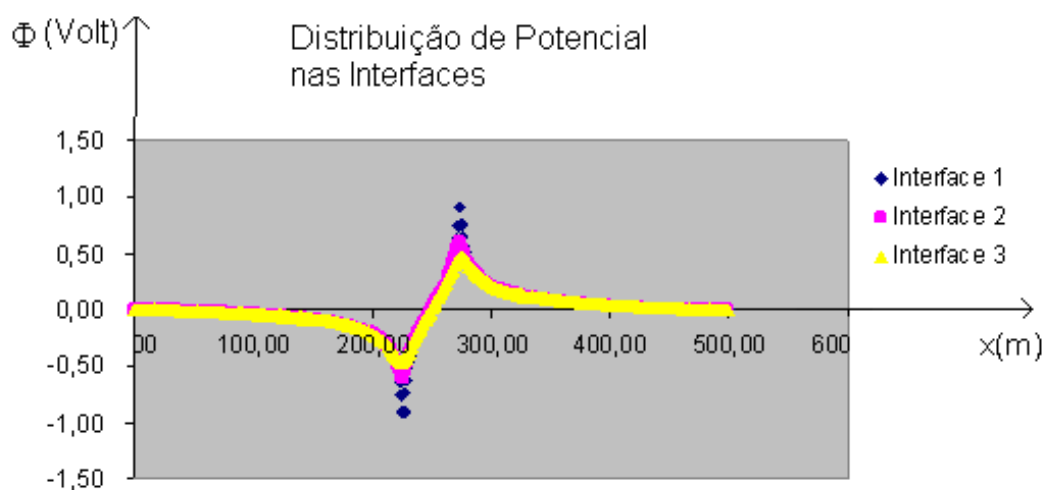


Figura 6.2.1. Distribuição de potencial nas interfaces em meio estratificado em quatro sub-regiões (caso 1) - hastes espaçadas de 16 m.

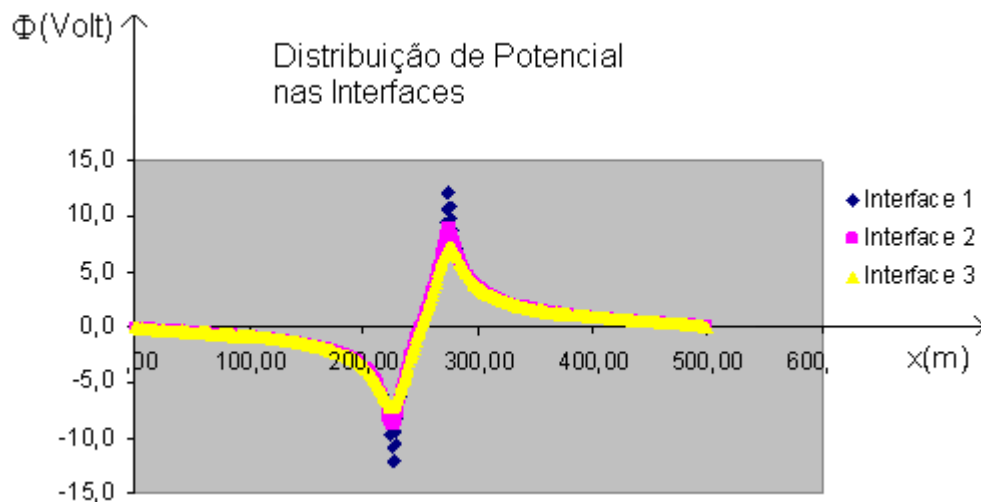


Figura 6.2.2. Distribuição de potencial nas interfaces em meio estratificado em quatro sub-regiões (caso 2) - hastes espaçadas de 16 m.

6.3 Distribuição de potencial em domínio retangular com resistividade não linear

A última análise realizada é a de um modelo proposto por CHENG (1984) correspondente a um problema de fluxo de Darcy com permeabilidade variável.

Trata-se de um problema de fluxo vertical em um meio com permeabilidade (condutividade) definida pela equação

$$k^*(y) = (\cos(\beta \cdot y) + \eta \cdot \text{sen}(\beta \cdot y))^2 \quad (6.3.1)$$

onde $\beta = 2.0$ e $\eta = -1.2$, cujo gráfico é ilustrado na figura 6.3.1.

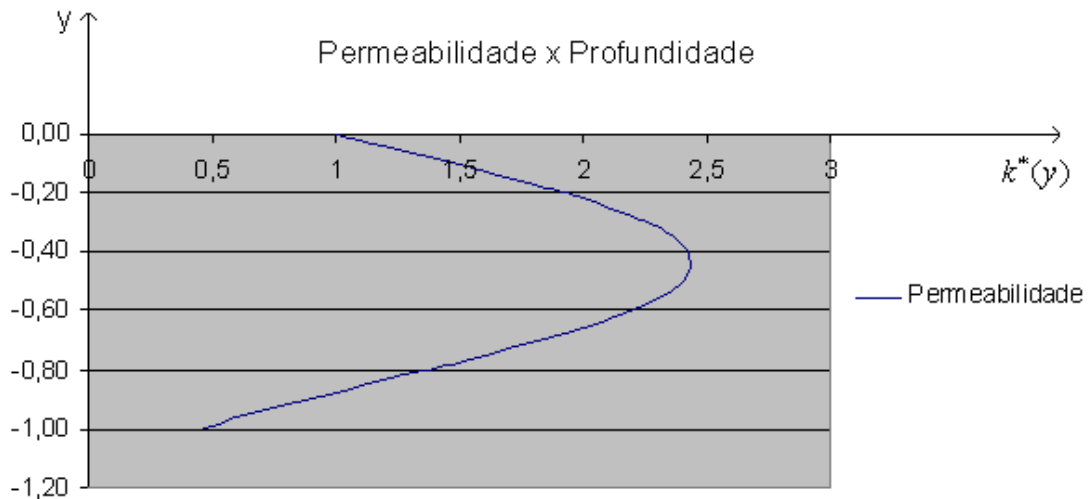


Figura 6.3.1. Permeabilidade em função da profundidade y .

A figura 6.3.2 apresenta o modelo analisado com as respectivas condições de contorno e os valores discretos de k^* adotados em cada sub-região, de acordo com a curva mostrada na figura 6.3.1.

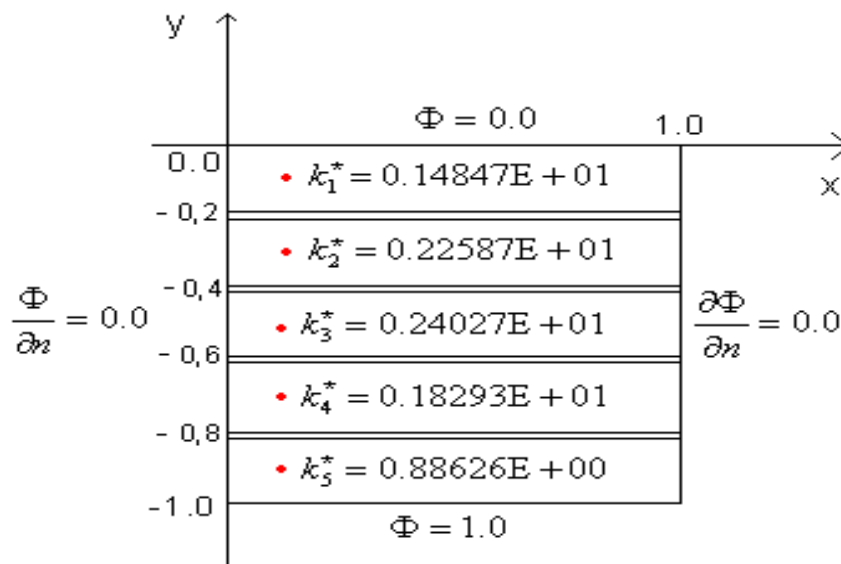


Figura 6.3.2. Representação do domínio estratificado para fluxo de Darcy com permeabilidade variável.

A solução analítica do problema unidimensional correspondente é dada pela expressão:

$$\Phi = \frac{-\cot(\beta) + \eta}{-\cot(\beta \cdot y) + \eta} \quad (6.3.2)$$

A figura 6.3.3 mostra a distribuição de potencial em função da profundidade obtida com o MEC, bem como a resposta analítica do problema.

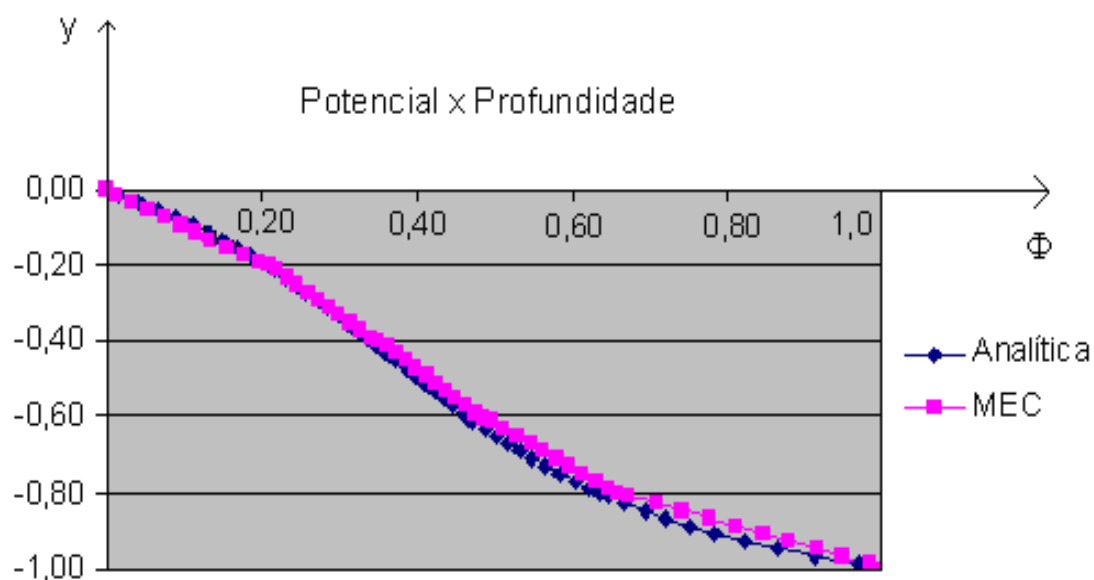


Figura 6.3.3. Distribuição do potencial em função da profundidade – numérico (MEC) e analítico.

A tabela abaixo mostra os valores dos potenciais apresentados por CHENG (1984) e os valores obtidos nesse trabalho.

y	Analítica	MEC (CHENG)	E_r (CHENG)	MEC (Dissert.)	E_r (Dissert.)
0,0	0,0	0,0	0	0,0	0,0
-0,25	0,245	0,245	0,002487562	0,24621	0,004915
-0,50	0,403	0,402	0,0	0,418135	0,036196
-0,75	0,584	0,584	0,0	0,61334	0,047836
-1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0

Tabela 6.2.1. Comparação dos resultados analíticos e numéricos (potencial) ao longo da profundidade.

Percebe-se que os resultados obtidos nessa simulação estão muito próximos dos valores analíticos, apesar do pequeno número de sub-regiões empregado. CHENG (1984) utiliza em seu trabalho funções de Green apropriadas para a permeabilidade do meio e obtém, por isso, uma melhor aproximação dos resultados. Nesse trabalho emprega-se a solução fundamental clássica 2D e modelo de estratificação do solo com sub-regiões.

7 Considerações finais

Esse trabalho envolveu a apresentação e implementação de uma formulação bidimensional do Método dos Elementos de Contorno para problemas escalares, com enfoque em problemas de distribuição de potenciais elétricos em meios como o solo.

Vários tipos de problema podem ser abordados com essa formulação, mas a atenção foi direcionada à simulação do método de Wenner, que tem por objetivo a identificação do perfil de resistividades do solo.

A formulação desenvolvida compreendeu a implementação do método das imagens, que possibilitou evitar a modelagem da superfície livre horizontal do solo, de fontes pontuais, para simular os locais de injeção e retirada de corrente, e de sub-regiões, para modelagem de meios não homogêneos.

Apresentou-se também, nesse estudo, os fundamentos do Método de Wenner, visando a melhor compreensão das simulações com o Método dos Elementos de Contorno.

Todas as análises e testes numéricos, efetuados com um programa desenvolvido em Fortran, apresentaram resultados próximos das soluções analíticas, quando disponíveis, validando as implementações efetuadas.

Constatou-se que a formulação bidimensional é limitada para a simulação do Método de Wenner e obtenção de conclusões sobre o perfil de

resistividades do solo; contudo, permite aprimorar a compreensão sobre a distribuição do potencial elétrico em solos com perfil de resistividades variando em camadas.

Um aspecto que ficou evidenciado nas simulações do Método de Wenner foi à importância em escolher um tamanho adequado para o domínio do problema, especialmente se a implementação não considerar domínios infinitos ou semi-infinitos. Esse cuidado se deve à aproximação das fontes pontuais aos contornos do problema, tanto aos contornos laterais como a base do domínio. A escolha desse domínio se deve a experiências do técnico e se deve também à distância entre a haste de injeção e retirada de corrente, se a distância entre a injeção e retirada de corrente tiver dimensões próximas à largura ou a profundidade, tem-se a influência do Domínio no modelo numérico e conseqüentemente a resposta também será influenciada.

Com relação à modelagem da resistividade elétrica com sub-regiões ficou claro sua influência na distribuição do potencial elétrico ao longo do contorno e da superfície, trazendo uma aproximação boa dos resultados.

7.1 Sugestões para trabalhos futuros

As seguintes abordagens podem contribuir significativamente para a continuidade desse trabalho:

- Implementar funções Green que considerem funções específicas para a variabilidade da resistividade do meio – Isso poderá minimizar a quantidade de sub-regiões reduzindo o tamanho das malhas;
- Implementar as adaptações necessárias para contemplar espaços semi-infinitos – Basicamente, incluir a equação de conservação de densidade de corrente na região infinita ou semi-infinita;
- Implementar a formulação tridimensional com as adaptações citadas acima – Possibilitando a simulação do Método de Wenner conforme acontece na prática;
- Implementar as formulações com elementos de ordem superiores, (lineares, quadráticos, etc.).
- Acoplar ao modelo numérico rotinas de otimização visando a identificação do perfil de resistividades do solo a partir de dados experimentais.

Referências Bibliográficas

ASTM G57-95a. Standard Test Method for Field Measurement of Resistivity Using the Wenner Four-Electrode Method. American Society for Testing and Materials, 1918.

BEASY User Guide, Computational Mechanics BEASY. Southampton, 2000.

BREBBIA, C A, and DOMINGUEZ, J. Boundary Elements, An introductory Course. New York, McGraw-Hill Book Company, 1989.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; and WROBEL, L.C. Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering. Berlin, Springer – Verlag, 1984.

BUTLER, M. B. Modeling of the interaction between electrochemical dissolution and externally applied stress field. PhD Thesis, University of Central Florida, Orlando, Florida, 2000.

BOCK'S, J. O. M. and REDDY, A. K. N. Modern Electrochemistry. Volumes 1&2 Plenum Press, New York, 1970.

BATISTA, J. A. N. e SCHULZ, W. H. E. **Acoplamento de Expressão Unidimensional de Recarga a Modelos de Elementos Analíticos** TEMA Tend. Mat. Apl. Comp., 6, No. 1 (2005), 43-53.

BRICHAU, F. **A Mathematical Model for the Cathodic Protection of Underground Pipelines Including Stray Currents.** Vrije Universities, Brussel, 1994.

CHANG, O. F. **Boundary Elements Applied to Seepage Problems in Zone Anisotropic Soils.** Master's Thesis, University of Southampton, London, 1979.

CHENG, A. H. D. **Darcy's Flow Variable Permeability: A Boundary Integral Solution** Water Resources Research, Vol. 20, NO. 7, pg. 980-984, July 1984.

CHENG, A. H. D. and LIGGETT. **A Boundary Integral equation Method for Linear Poro-elasticity with applications to solid consolidations.** Int. J. Number. Methods Eng. 20(2), 255-278, 1984.

CAPALLI, A. **Aterramento elétrico.** Saber Eletrônica, São Paulo, n.329, p.56-9, 2000.

CHENG, A. H. D.; PREDELEANU, M. **Transient boundary element formulation for linear Poroelasticity.** Int J Apply Math Modeling 1987; 11: 285–390.

CHENG, A. H. D.; DETOURNAY, E. **On singular integral equation and fundamental solutions of Poroelasticity**. *Int J Solid Struct* 1998; 35(34/35):4521–55.

CHENG, A. H. D.; CHENG, D. T. **Heritage and Early history of the Boundary Element Method**. 2004.

COMPTON, K. G. **Corrosion of Buried Pipes and Cables, Techniques of Study, Survey and Mitigation**. *Underground Corrosion, Proceedings Symposium ASTM Williamsburg, Va., 26-27 Nov. 1979*, Editor E. Escelante.

DAS, P. C. **A Disc Based Block Elimination Technique used for the Solution of Nonsymmetrical fully populated Matrix systems encountered in the Boundary Element Method**. *Recent Developments in BEM*, pp. 391-402, 1978.

DE BROIJWER, R. **Etude sur l'electrolyse des canalisations souterraines par les courants vagabondes**. *Bulletin des Gaziers Belges*, apr11935.

DECONINCK, J. **Current Distributions and Electrode Shape Changes in Electrochemical Systems**. Springer-Verlag, New York, 1992. 145.

FALCÃO, T. C. **Aplicação da Função de Green Numérica a Problemas de Descontinuidade de Potencial via MEC**. COPPE Rio de Janeiro 2001. Dissertação mestrado.

FERRERS, N. M.; ed., **Mathematical papers of George Green**. 1981 reprint, Chelsea, New York, 1970.

FOURIER, J. B. J. **Theorie Analytique de la Chaleur (The analytical theory of heat)** 1822.(books.googl.com.br)

GERASOULIS, A. **The use of Piecewise Quadratic Polynomials for the Solution of Singular Integral Equations of the Cauchy type** Comp Math Apply 1982; 8: 15-22.

GREEN, G. **An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism**". Ed. Wheelhouse, Nothinghan; 1828.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física** vol. 4 4^o edição Ed. LTC Livros técnicos e Científico 1990.

HESS, J. L. **Calculations of Potential Flow About Bodies of Revolution Having Axés Perpendicular to the Free Stream Direction.** J Aero Sci. 1962; 29:726-42

HESS, J. L.; SMITH, A. M. O. **Calculations of Nonlifting Potential Flow About Arbitrary Three-Dimensional Bodies.** J Ship. J ship Res 1964; 8: 22-44.

IEEE Std.80. **Guide for Safety in AC Substation Grounding.** New York; 2000.

JASWON, M. A.; PONTER, A. R. N. **An Integral Equation Solution of the Torsion Problem.** Proc R Soc, A 1963; 275:23-32

JASWON, M. A.; SYMM, G. T. **Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastics.** London: Academic Press; 1977

NBR 5410 /1997. **Instalações elétricas de baixa tensão.** Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1997.

KELLER, J. B., **The Scope of the Image Method,** Comm. on Pure and Appl. Math, 4 (1953), 505-512.

KINDERMANN, G.; CAMPAGNOLO, J. M. **Aterramento Elétrico.** Sagra-DC Luzzato, 3ª Edição, Porto Alegre, 214 pp, 1995.

KOEFOED, O. **Geosounding Principles 1: Resistivity sounding measurements.** Elsevier Science Publishing Company, Amsterdam, 1979.

LACERDA, L. A.; SILVA, J. M. **A Dual BEM Genetic Algorithm Scheme for the Identification of Polarization Curves of Buried Slender Structures** Computer Modeling In Engineering Sciences, Irvine, California, v. 14, n. 3, p.153-160, 2006.

TELLES, J. C. F.; MANSUR, W. J.; WROBEL, L. C. and .MARINHO, M. G.
**Numerical simulation of a Cathodically protected semi submersible platform
using the Procat System.** Corrosion 46, 513-518, 1990

TELLES, J. C. F.; MANSUR, W. J.; WROBEL, L. C. and AZEVEDO, J. P. S.
Boundary elements for Cathodic protection problems Boundary Elements. VII,
Springer-Verlag, Berlin, 1985.

LACERDA, L. A.; SILVA, J. M.; LÁZARIS, J. L. **Dual Boundary Element
Formulation for Half-space Cathodic Protection Analysis** Engineering Analysis
with Boundary Elements, v.31, p.559 - 567, 2007.

LACERDA, L. A.; SILVA, J. M.; LÁZARIS, J. L. **Dual Boundary Element
Formulation for Half-space Cathodic Protection Analysis.** Engineering Analysis
with Boundary Elements, v.31, p.559 - 567, 2007.

LAHIRI, BY B. N.; and PRICE, A. T. **“Electromagnetic Induction in Non-Uniform
Conductorsn and the Determination of the Conductivity of the Earth from
Terrestrial Magnetic Variations.** Imperil college, London 1938

MANSUR, W.J., WROBEL, L.C., TELLES, J.C.F., AZEVEDO, J.P.S., **The
PROCAT System for CP Design,** Southampton, CML Publications, 1987.

MASSONET, C. E. **Numerical Use of Integral Procedures. Stress Analysis.** In: Sienkiewicz OC, Hollister GS, editors. New York: Wiley; 1965. P. 198-235. Chapter 10.

MATHON, R.; JOHNSTON, R. L. **The Approximate Solution of Elliptic Boundary-Value Problems by Fundamental Solutions.** SIAM J Number Anal 1977; 14: 638-50.

MILTADOU, P. **Inverse Analysis Formulations for Cathodic Protection Systems.** Thesis Doctor of Philosophy Department of Mechanical Engineering, Brunel University, 2002.

MILTADOU, P.; WROBEL, L. C. **Identification of Coating Defects in Cathodically protected underground pipelines.** Inter Science 2002.

MIRANDA, J. M.; LUIS J. F.; COSTA P. T.; SANTOS F. M. **Fundamentos de Geofísica.** Disponível em: <Referências Bibliográficas 93 http://www.iag.usp.br/~marcelo/agg232/moddata//Apostilas%20do%20monitor/Fund_Geofisica4.pdf >. Acesso em 30 jun. 2008.

MUSKAT, M. **The Flow of Homogeneous Flow Through Porous Média.** McGraw-Hill, Ann Arbor., 1937.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Mac Tutor History of Mathematics Archive**. <http://www.grounps.dcs.st-and.ac.uk/history/;2003> (item fora do ar no momento)

ORAZEM M. E.; EESTEBAM, J. M.; KENNELLEY, K. J. and DEGERSTEDT, R. **M. Mathematical models for Cathodic protection of an underground pipeline with coating holidays: Part 1 – Theoretical development**, Corrosion, 53, 264-272, 1997.

SANTIAGO, J. A. F.; TELLES, J. C. F. **On Boundary Elements for Simulation of Cathodic Protection Systems with Dynamic Polarization Curves**. 1996.

SAMPAIO, W. P. B. **Simulação Computacional de Percolação em Regiões Homogêneas por Partes com Uso de Elementos de Contorno Descontínuos**. Tese de M. Sc. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 1997.

SYMM, G. T. **Integral Equation Methods in Potential Theory**. II. Proc R Soc, A 1963; 275: 33-46.

SVERAK, J. G. **Progress in Step and Touch Voltage Equations of ANSI/IEEE Std.80**. IEEE Trans Power Deliv 1999; 13: 762–7.

VISACRO, S. F. **Aterramentos Elétricos, Conceitos Básico, Técnicas de Medição e Instrumentação, Filosofias de Aterramento.** Artlibe, São Paulo, 2002.

VOLTERRA, V. **Sur l'équilibre des Corps Elastiques Multiplement Connexes.** Anna Sci de l'École Norm Super, Paris 1907; 24: 401-517.

WENNER, F. A. **Method of Measuring Earth Resistivity.** Bulletin of the National Bureau of Standards, Washington D.C., vol. 12, 1916.

WROBEL, L. C.; ALIABADI, M. H. **The Boundary Element Method,** Wiley, Chichester, London, 2002.

YAN, J. F.; PAKALAPATI, S. N. R.; NGUYEN, T. V.; WHITER, E.; GRIFFIN R. **B. Mathematical Modeling of Cathodic Protection Using The Boundary Element Method with a Nonlinear Polarization Curve.** Department of Chemical Engineering, Texas A&M University, College Station, Texas 77843-3122, 1992.

ZENG, R.; JINLIANG, H. E.; WANG, Z.; YANGING, G. A. O.; SUN, W.; SU, Q. **Analysis on influence of long vertical grounding electrodes on grounding system for substation.** IEEE, Beijing, China, 2000.

APÊNDICE A

Solução fundamental 2D

A solução fundamental é comumente utilizada como sendo a função de ponderação nos processos de integrações do MEC, para o enfraquecimento das derivadas de uma função desconhecida e transferência dessas derivadas para uma função conhecida.

A equação que descreve o problema de potencial escalar, válida para todos os pontos X de um domínio Ω homogêneo bidimensional isotrópico com condutividade k (ou resistividade ρ) constante, e um contorno Γ que pode possuir diferentes formas geométricas e condições de contorno, é a equação de Poisson:

$$k\nabla^2\Phi(X) + b(X) = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde $\Phi(X)$ é o potencial no ponto $X = (x, y)$ de um domínio 2D; o fluxo é dado pela derivada do potencial:

$$q(X) = \frac{\partial\Phi(X)}{\partial n} \quad (\text{A.2})$$

O termo $b(X)$ é um vetor independente que, para o problema estudado, representa fontes pontuais. Se $b(X)$ for nulo recai-se na equação de Laplace:

$$k\nabla^2\Phi(x) = 0 \quad (\text{A.3})$$

A solução de um problema de potencial estará completa quando os valores dos potenciais e dos fluxos normais ao contorno forem determinados em Γ :

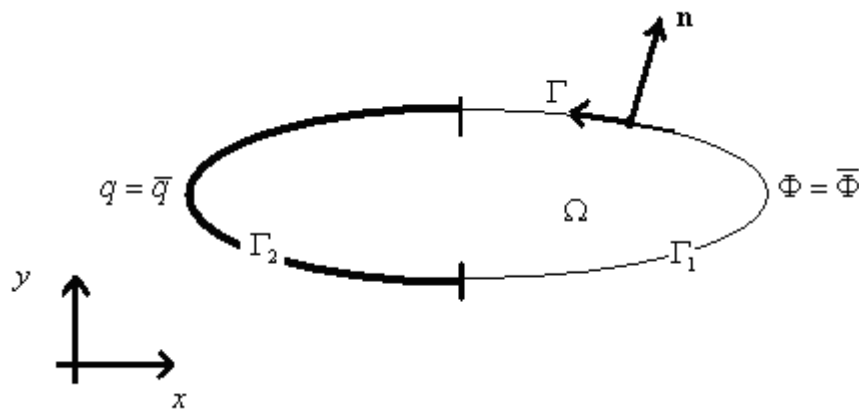


Figura A1. Divisão do contorno Γ em duas partes, em Γ_1 com potencial prescrito e em Γ_2 com fluxo prescrito.

As condições de contorno para potenciais e fluxos prescritos no contorno Γ de um domínio Ω como exemplifica a figura A.1 são descritas como:

Condições de contorno essenciais ou de Dirichlet (potencial prescrito)

$$\Phi(x) = \bar{\Phi} \quad X \in \Gamma_1 \quad (\text{A.4})$$

Condições de contorno naturais ou de Neumann (fluxo prescrito)

$$q(x) = k \frac{\partial \Phi(x)}{\partial n} = \bar{q} \quad X \in \Gamma_2 \quad (\text{A.5})$$

O primeiro procedimento a fazer para obter a solução fundamental Φ^* a partir da equação de Poisson é escrever tal equação na forma polar, com $b(X)$ sendo uma fonte unitária pontual e concentrada Delta de Dirac:

$$\nabla^2 \Phi^* + \Delta^i = \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \quad (\text{A.6})$$

esta equação é válida para qualquer ponto do domínio Ω . Tomando:

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Fazendo a mudança de variável

$$h = \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} = 0 \quad (\text{A.7})$$

vem

$$\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r} h = 0 \quad (\text{A.8})$$

Logo

$$\frac{\partial h}{\partial r} = -\frac{h}{r} \rightarrow \frac{\partial h}{h} = -\frac{\partial r}{r} \quad (\text{A.9})$$

o que leva à equação

$$\ln(h) = -\ln(r) \rightarrow h = -A \cdot \frac{1}{r} \quad (\text{A.10})$$

Levando a equação A.10 à equação A.7, vem:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial r} = A \cdot \frac{1}{r} \rightarrow \Phi^* = A \cdot \ln(r) + B \quad (\text{A.11})$$

com A e B constantes.

Para o problema 2D o valor de $A = -\frac{1}{2\pi}$ e $B = 0$; assim a solução

fundamental é da forma

$$\Phi^* = \frac{1}{2k\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (\text{A.12})$$

onde r é a distância entre o ponto fonte e o ponto campo.

APÊNDICE B

Transferência da equação integral para o contorno.

A equação de Poisson 4.2.1 desenvolvida para o domínio do problema pode ser escrita em função das grandezas conhecidas no contorno. Esta é uma das principais idéias para a formulação do Método dos Elementos de Contorno.

Uma das técnicas comumente utilizadas para obtenção das equações integrais de contorno é a técnica dos Resíduos Ponderados, que consiste em trabalhar com uma função de ponderação $\omega(X)$ do erro.

Multiplicando a equação (4.2.1) pela função de ponderação e integrando ambos os lados vêm.

$$k \int_{\Omega} \left[(\nabla^2 \Phi(X)) \bullet \omega(X) + b(X) \bullet \omega(X) \right] d\Omega = 0 \quad (\text{B.1})$$

onde $\omega(X)$, é uma função de ponderação do erro, e k é uma constante de condutividade do meio. Se $b(X) = 0$ recaí-se na equação de Laplace.

Escrevendo a equação anterior explicitamente vem;

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \bullet \omega(X) \right] d\Omega + \int_{\Omega} [b(X) \bullet \omega(X)] d\Omega = 0 \quad (\text{B.2})$$

Usando integração por partes e desenvolvendo o integrando da equação acima, vem:

$$\int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \cdot \omega(X) \right] d\Gamma - \int_{\Gamma} \left[\left(\Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} + \Phi \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] d\Gamma + \int_{\Omega} \left[\left(\Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \right] d\Omega = 0 \quad (\text{B.3})$$

ou, de forma mais compacta, pode-se escrever

$$\int_{\Gamma} [(\nabla \cdot \Phi(X))\omega(X)] d\Gamma - \int_{\Omega} [(\nabla \cdot \omega(X))\Phi(X)] d\Omega + \int_{\Omega} [(\nabla^2 \omega(X))\Phi(X)] d\Omega = 0 \quad (\text{B.4})$$

assim

$$\int_{\Omega} [(\nabla^2 \omega(X))\Phi(X)] d\Omega = \int_{\Gamma} [(\nabla \cdot \omega(X))\Phi(X)] d\Gamma - \int_{\Gamma} [(\nabla \cdot \Phi(X))\omega(X)] d\Gamma \quad (\text{B.5})$$

Simplificando a equação b.5, tem-se

$$\int_{\Omega} [(\nabla^2 W)\Phi] d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial W}{\partial n} \Phi d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial n} W d\Gamma \quad (\text{B.6})$$

Subtraindo (B.6) de (B.1), vem:

$$\int_{\Omega} [(\nabla^2 \Phi)W - (\nabla^2 W)\Phi] d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial W}{\partial n} \Phi d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial n} W d\Gamma \quad (\text{B.7})$$

Obtenção das equações integrais de contorno

O conceito principal do Método dos Elementos de Contorno está na função ponderadora ω , que irá fazer a composição na equação B.7. A solução fundamental Φ^* é uma função de ponderação, conhecida também como funções de Green, que atende a equação de Poisson e representa o campo gerado por uma carga pontual concentrada em um ponto ξ , que é infinito no próprio ponto e zero nos demais pontos do domínio, que é aproximado por uma função Delta de Dirac.

A solução fundamental deve obedecer à seguinte equação:

$$\nabla^2 \Phi^* + \Delta^i = 0 \quad (\text{B.8})$$

onde Δ^i é uma função Delta de Dirac.

Substituindo a equação (B.8) na equação (B.6) tem-se

$$\int_{\Omega} [(\nabla^2 \Phi^*)\Phi] d\Omega = \int_{\Gamma} \Phi q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q \Phi^* d\Gamma \quad (\text{B.9})$$

A equação acima pode ser escrita na forma

$$\int_{\Omega} [(-\Delta^i)\Phi] d\Omega = \int_{\Gamma} \Phi q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q\Phi^* d\Gamma \quad (\text{B.10})$$

e, usando a propriedade da função Delta de Dirac que estabelece que a integral de uma função multiplicada pela função Delta de Dirac é a própria função calculada no ponto de aplicação da Delta, pode-se finalmente escrever a equação integral do potencial para os pontos internos à partir dos potenciais e fluxos conhecidos no contorno:

$$\Phi^i = \int_{\Gamma} q\Phi^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \Phi q^* d\Gamma \quad (\text{B.11})$$

A equação integral para pontos do contorno.

A equação B.11 determina o potencial em um ponto qualquer do domínio Ω a partir das informações conhecidas no contorno Γ do problema, que são potenciais, fluxos ou uma condição mista.

Para a solução do problema no contorno, torna-se necessário encontrar uma forma limite da equação B.11 na qual o ponto QUISI pertença ao contorno.

Uma forma de considerar isso para problemas bi-dimensionais é adicionar um círculo de raio ε ao domínio Ω em questão, ver figura B1.

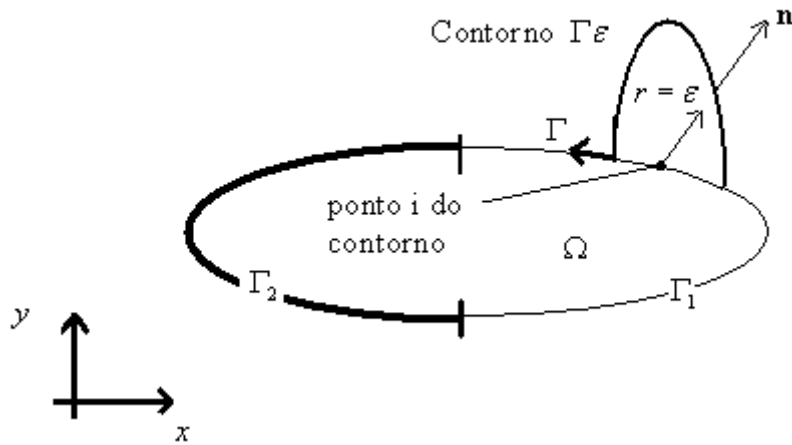


Figura B1. Contorno auxiliar para obtenção das equações integrais para pontos do contorno.

Tomando a equação B.11 considerando contorno auxiliar, vem que

$$\Phi^i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} q \Phi^* d\Gamma - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \Phi q^* d\Gamma - \int_{\Gamma_\varepsilon} q \Phi^* d\Gamma_\varepsilon + \int_{\Gamma_\varepsilon} \Phi q^* d\Gamma_\varepsilon \right\} \quad (\text{B.12})$$

Operando matematicamente nos dois primeiros limites vem

$$\Phi^i = \int_{\Gamma} q \Phi^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \Phi q^* d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma_\varepsilon} q \Phi^* d\Gamma_\varepsilon + \int_{\Gamma_\varepsilon} \Phi q^* d\Gamma_\varepsilon \right\} \quad (\text{B.13})$$

Agora operando nos dois últimos termos da equação (B.13) separadamente,

com a substituição de $\Phi^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, vem:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \Phi^* d\Gamma_\varepsilon \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\Gamma_\varepsilon \right\} =$$

$$q \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \int_{\Gamma_\varepsilon} d\Gamma_\varepsilon \right\} = q \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) * \varepsilon \Big|_0^\pi \right\}$$
(B.14)

O último termo do limite acima pode ser escrito como um quociente, para que fique evidente a indeterminação; com isso, pode-se aplicar a regra de L'HÔPITAL:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \Phi^* d\Gamma_\varepsilon \right\} = \frac{q}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) * \pi\varepsilon \right\} =$$

$$\frac{q}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\frac{1}{\varepsilon}} \right\} = \frac{q}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\varepsilon * \frac{-1}{\varepsilon^2}}{\frac{1}{\varepsilon}} \right\} = \frac{q}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon) = 0$$
(B.15)

Esse é um limite calculado no sentido de valor principal de Cauchy.

Já o limite do último termo da equação (B.13) após a substituição da derivada do potencial $q^* = -\frac{1}{2\pi\varepsilon}$, é calculado como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \Phi q^* d\Gamma_\varepsilon \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \Phi \left(-\frac{1}{2\pi\varepsilon} \right) d\Gamma_\varepsilon \right\} =$$

$$-\Phi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} d\Gamma_\varepsilon \right\} = -\Phi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\pi\varepsilon} * \pi\varepsilon \right\}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \Phi q^* d\Gamma_\varepsilon \right\} = -\Phi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \right\} = -\frac{\Phi}{2}$$
(B.16)

passando ao limite temos:

Assim,, a equação integral de contorno (B.13) reduz-se a seguinte equação:

$$\Phi^i = \int_{\Gamma} q\Phi^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \Phi q^* d\Gamma + \frac{\Phi^i}{2} \quad (\text{B.17})$$

que pode ser escrito como:

$$\frac{\Phi^i}{2} = \int_{\Gamma} q\Phi^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \Phi q^* d\Gamma \quad (\text{B.18})$$

Essa é a equação básica do método dos elementos de contorno.