

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**

**ALESSANDRO SALLES CARVALHO**

**AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DE TÉCNICAS DE AJUSTAMENTO PARA  
ANÁLISE DE DESLOCAMENTOS EM REDES GPS**

**CURITIBA**

**2009**

**ALESSANDRO SALLES CARVALHO**

**AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DE TÉCNICAS DE AJUSTAMENTO PARA  
ANÁLISE DE DESLOCAMENTOS EM REDES GPS**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências Geodésicas.

**Orientador: Prof. Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira**

**CURITIBA**

**2009**

## TERMO DE APROVAÇÃO

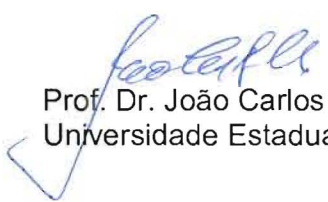
ALESSANDRO SALLES CARVALHO

### AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DE TÉCNICAS DE AJUSTAMENTO PARA ANÁLISE DE DESLOCAMENTO EM REDES GPS

Dissertação nº 226 aprovada como requisito parcial do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Setor de Ciências da Terra da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:

  
Prof. Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira  
Departamento de Geomática, UFPR

  
Prof. Dr. João Carlos Chaves  
Universidade Estadual Paulista, UNESP

  
Prof. Dr. Daniel Rodrigues dos Santos  
Departamento de Geomática, UFPR

Curitiba, 18 de fevereiro de 2009.

## **DEDICATÓRIA**

Aos meus pais, Sales e Marta.

Aos meus irmãos, Jaqueline e Luciano.

À minha namorada Daniela.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus pelo dom da vida e pela oportunidade que me foi concedida para a realização de mais este trabalho.

Ao Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira, Prof. do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná (CPGCG), pela orientação, incentivo, amizade e apoio em todas as fases do mestrado.

Ao Dr. Quintino Dalmolin, Prof. do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, pela amizade, pelas reflexões, pelos ensinamentos, sugestões e críticas apresentadas na qualificação.

Ao Dr. José Carlos Penna de Vasconcellos, Prof. do Curso de Engenharia Cartográfica da Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ), pelas sugestões e críticas apresentadas na qualificação.

Ao Dr. Daniel Rodrigues dos Santos, Prof. do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, pela amizade, conselhos e ensinamentos.

Ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas do Departamento de Geomática do Setor de Ciências da Terra, em especial à secretária Mônica por sua amizade e favores prestados.

Aos companheiros do CPGCG e amigos, Diuliana Leandro, Fabiani Abatti, Michele Beppler, Karol Jamur, Anna, Tatiana Ayako, Maria de Lurdes (Malu), Alessandra Palmeiro, Elmo Tanajura, Rodrigo Mickoz, Ângela Carraro, João Cortes, João Tavares. Cecila, Dalmar, Marco Nadal, Daniel Perozo, Silvio, Niarkios, Rogers e Maurício.

Aos grandes amigos, Sydney de Oliveira Dias e Wagner Ferreira Filho, pela boa convivência e paciência durante a permanência na república Geóide.

Aos profissionais da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), o benefício da bolsa de estudos.

## RESUMO

Este trabalho visa apresentar os diferentes modos de utilização do método paramétrico para ajustamento de observações ( $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ) de rede GNSS (*Global Navigation Satellite System*), verificando seu desempenho e potencialidade de aplicação bem como avaliar o impacto nas coordenadas estimadas, quando da imposição de deslocamentos sistemáticos em uma estação de referência ou de ligação, e a influência de três diferentes formas na montagem do modelo estocástico nos parâmetros estimados. Os diferentes modos de utilização do ajustamento paramétrico, referem-se a utilização de injunções mínimas e mais que mínimas, de modo absoluto ou relativo, emprego de pseudo-observações, da técnica da “*propriedade reprodutora*” e o ajustamento livre, seguido da transformação de Helmert para vinculação a um sistema de referência realizado. A rede GNSS implantada para a realização do estudo é composta de 7 (sete) estações, sendo três ativas (Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC), Rede MANFRA de Estações de Monitoramento Contínuo de GPS (MANFRA), Rede de Estações Ativas da Santiago & Cintra (SCNET)) e quatro estações passivas. Foram realizadas três sessões de observações do *Global Positioning System* (GPS), intercaladas de 30 minutos, de modo a dispor de linhas de base independentes superabundantes. O pós-processamento foi realizado com o aplicativo TGO (*Trimble Geomatics Office*) versão 1.62 e o ajustamento com a utilização do programa MATLAB (MATrix LABoratory) versão 5.23. Os resultados do ajustamento foram analisados estatisticamente, visando à detecção de erros grosseiros de pequena magnitude embutidos nas observações e verificação da qualidade da rede. Foram empregados os modos de utilização do método paramétrico na rede geodésica verificando o impacto nas coordenadas das estações da rede, quando da utilização ou não das variâncias dos pontos de ligação, do modelo estocástico. E por fim, foram comparados os métodos quando da imposição de deslocamentos sistemáticos em uma estação de ligação.

Palavras Chave: Rede Geodésica GPS, Ajustamento Paramétrico , Injunções.

## ABSTRACT

This work presents different ways to use the parametric method for adjustment observations ( $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ) of GNSS network (Global Navigation Satellite System), verifying the performance and potency of applications as well evaluating the impact in the esteem coordinates, when the of systematic imposition displacements in a reference station or linking, and the influence of three different forms in the assembly random model in estimated parameters. The different ways to use the parametric adjustment, mention use minimal constraint and more than minimum, in absolute or relative way, pseudo-observations, the “reproducing property” and free adjustment, followed for transformation for the transformation of points to specific coordinate system. The GNSS network implanted to study the accomplishment is composed for 7 (seven) stations, being three active (The Brazilian Network For Continuous Monitoring of GPS (RBMC), The MANFRA Network For Continuous Monitoring of GPS and The Santiago & Cintra Network For Continuous Monitoring of GPS (SCNET)) and four passive stations. Three sessions with GPS had been carried through (GPS), intercalated 30 minutes, in order to get independent base lines. Network adjustment was made with MATLAB, version 5.23. The outcome of the adjustment was statistically analyzed, detecting of errors in a small scale in the observations and finding the network quality. The parametric method in geodetic network had been used, verifying the impact in coordinates, when are used or no the variances of the tie point, the stochastic model. Finally, had been compared the methods when are impose the systematic displacements in a tie point.

Key Words: GPS Geodetic Network, Least Square Estimation, Constrain.

## LISTA DE PRINCIPAIS SIGLAS

FGCS	<i>The Federal Geodetic Control Committee</i>
GNSS	<i>Global Navigation Satellite System</i>
GPS	Global Positioning System
LABTOPO	Laboratório de Topografia
LAGE	Laboratório de Geodésia Espacial
LAIG	Laboratório de Instrumentação Geodésica
MATLAB	MATrix LABoratory
MINQUE	<i>Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimation</i>
M.M.Q	Método dos Mínimos Quadrados
NGS	<i>National Geodetic Survey</i>
MVC	Matriz Variância – Covariância
PPM	Parte Por Milhão
RMS	<i>Root Mean Square</i>
RRNN	Rede de Referência de Nível
RBMC	Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo
SCNET	Rede de Estações Ativas da Santiago & Cintra
TGO	<i>Trimble Geomatics Office</i>
UFPR	Universidade Federal do Paraná
WGS 84	World Geodetic System 1984



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – RELAÇÃO ENTRE DOIS SISTEMAS CARTESIANOS .....	49
FIGURA 2 - PRECISÃO E CORREÇÃO COMO CRITÉRIO DE ACURÁCIA .....	59
FIGURA 3 – ALGUNS PADRÕES DAS ELIPSES DE ERRO PADRÃO .....	63
FIGURA 4 - DEFINIÇÃO DOS ELEMENTOS DA ELIPSE DO ERRO OU DE CONFIANÇA .....	63
FIGURA 5 – MONOGRAMA DE BAARDA, POTÊNCIA DO TESTE $(1 - \beta_0) = 0.8$ .....	69
FIGURA 6 – CROQUI DA ÁREA DE ESTUDO .....	74
FIGURA 7 – CROQUI DA REDE GPS FORMADA.....	75
FIGURA 8 – COMPRIMENTO E <i>DESVIOS - PADRÃO</i> DAS COMPONENTES DAS LINHAS DE BASE .....	80
FIGURA 9 – CIRCUITOS FECHADOS INTERCONECTADOS .....	83
FIGURA 10 – ERRO RELATIVO (PPM) DOS CIRCUITOS VERSUS COMPRIMENTO DO CIRCUITO .....	85
FIGURA 11 – ERRO LINEAR (m) DOS CIRCUITOS VERSUS COMPRIMENTO DO CIRCUITO .....	85
FIGURA 12 – REDE GPS COM INJUNÇÃO MÍNIMA (UFPR).....	87
FIGURA 13 – VARIAÇÃO DO PONTO DE INJUNÇÃO MÍNIMA ABSOLUTA.....	89
FIGURA 14 – ACURÁCIA DAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES TRS e UNI.....	91
FIGURA 15 – ACURÁCIA DAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES UFPR e UNICENP .....	92
FIGURA 16 – ACURÁCIA DAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES TRS e UFPR .....	93
FIGURA 17 – DISCREPÂNCIAS DAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES P1,P2,P3 e P4.....	94
FIGURA 18 – ELIPSES DE ERROS (X, Y) E VETORES DE ERROS DA COMPONENTE Z.....	96
FIGURA 19 – REDE COM A INSERÇÃO DA LINHA DE BASE UNI-P3.....	102
FIGURA 20 – ELIPSES DE ERROS (X, Y) E VETORES DE ERROS DA COMPONENTE Z.....	107
FIGURA 21 – DISCREPÂNCIA DAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES DA REDE.....	112
FIGURA 22 – ACURÁCIA OBTIDA NA DETERMINAÇÃO DAS COORDENADAS TRS e UNI .....	112
FIGURA 23 – DISCREPÂNCIA ENTRE AS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES DA REDE .....	116
FIGURA 24 – RESÍDUOS DAS OBSERVAÇÕES DA REDE EM ESTUDO .....	123
FIGURA 25 – DISCREPÂNCIA DAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES DA REDE.....	125
FIGURA 26 – ACURÁCIA OBTIDA NAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES DA REDE.....	126
FIGURA 27 – COMPORTAMENTO DA VARIÂNCIA A <i>POSTERIORI</i> .....	128
FIGURA 28 – DISCREPÂNCIAS POSICIONAIS DAS ESTAÇÕES DA REDE. ....	128
FIGURA 29 – DISCREPÂNCIAS POSICIONAIS DAS ESTAÇÕES DA REDE. ....	130
FIGURA 30 – FATOR DE VARIÂNCIA A <i>POSTERIORI</i> E QUI-QUADRADO TEÓRICO E CALCULADO.....	131
FIGURA 31 – DISCREPÂNCIAS POSICIONAIS DAS ESTAÇÕES DA REDE. ....	131
FIGURA 32 – <i>DESVIOS - PADRÃO</i> DAS COORDENADAS DA REDE .....	132
FIGURA 33 – FATOR DE VARIÂNCIA A <i>POSTERIORI</i> E QUI-QUADRADO TEÓRICO E CALCULADO.....	133
FIGURA 34 – <i>DESVIOS - PADRÃO</i> DAS COORDENADAS DA REDE .....	133
FIGURA 35 – DISCREPÂNCIAS DAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES DA REDE .....	133
FIGURA 36 – FATOR DE VARIÂNCIA A <i>POSTERIORI</i> E QUI-QUADRADO TEÓRICO E CALCULADO.....	134
FIGURA 37 – <i>DESVIOS - PADRÃO</i> DAS COORDENADAS DA REDE DAS SITUAÇÕES IMPOSTAS .....	135
FIGURA 38 – DISCREPÂNCIA DAS COORDENADAS DAS SITUAÇÕES EM RELAÇÃO À ORIGINAL .....	136
FIGURA 39 – DISCREPÂNCIA ENTRE AS SOLUÇÕES DE INJUNÇÃO RELATIVA E ABSOLUTA.....	136
FIGURA 40 – VARIAÇÕES NO FATOR DE VARIÂNCIA A <i>POSTERIORI</i> .....	138
FIGURA 41 – ACURÁCIA POSICIONAL DAS ESTAÇÕES ESTIMADAS POR MEIO DA TRANSFORMAÇÃO DE HELMERT .....	139
FIGURA 42 – PARÂMETROS ESTIMADOS DA TRANSFORMAÇÃO DE HELMERT.....	140
FIGURA 43 – DISCREPÂNCIAS ENTRE AS COORDENADAS ESTIMADAS EM RELAÇÃO ÀS ORIGINAIS.....	141

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – CLASSES DE ACURÁCIA NO POSICIONAMENTO RELATIVO COM O GPS.....	23
QUADRO 2 – REGIÃO DE CONFIANÇA DE FATORES MULTIPLICATIVOS DOS SEMI-EIXOS DAS ELIPSES DE ERRO .....	61
QUADRO 3 – CONTROLABILIDADE DAS OBSERVAÇÕES POR REDUNDÂNCIAS PARCIAIS .....	68
QUADRO 4 – PARÂMETROS DE NÃO CENTRALIDADE EM FUNÇÃO DO PODER DO TESTE $1 - \beta_0$ E NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA $\alpha_0$ .....	70
QUADRO 5 – COMPRIMENTOS DAS LINHAS DE BASE .....	75
QUADRO 6 – PERÍODO DE OCUPAÇÃO EM CADA ESTAÇÃO NAS DIFERENTES SESSÕES.....	77
QUADRO 7 – DURAÇÃO DA SESSÃO PARA LEVANTAMENTO ESTÁTICO .....	77
QUADRO 8 – COORDENADAS CARTESIANAS E GEODÉSICAS DAS ESTAÇÕES DE REFERÊNCIA .....	78
QUADRO 9 – LINHAS DE BASE OBSERVADAS PARA A FIGURA 8 .....	80
QUADRO 10 – COMPARAÇÃO DE COMPONENTES DE LINHAS DE BASE FIXAS E MEDIDAS... ..	81
QUADRO 11 – ANÁLISE DE LINHAS DE BASE REPETIDAS .....	82
QUADRO 12 – ERRO DE FECHAMENTO DOS CIRCUITOS ESCOLHIDOS .....	83
QUADRO 13 – ERRO DE FECHAMENTO LINEAR (m) E RELATIVO (ppm) .....	84
QUADRO 14 – COORDENADAS AJUSTADAS DAS ESTAÇÕES E RESPECTIVOS DESVIOS PADRÃO .....	89
QUADRO 15 – COMPONENTES VETORIAIS AJUSTADAS E RESPECTIVOS <i>DESVIOS - PADRÃO</i> .....	90
QUADRO 16 – RESÍDUOS ESTIMADOS E RESPECTIVOS DESVIOS PADRÃO.....	90
QUADRO 17 – COORDENADAS AJUSTADAS DAS ESTAÇÕES E RESPECTIVOS DESVIOS PADRÃO .....	92
QUADRO 18 – COORDENADAS AJUSTADAS DAS ESTAÇÕES E RESPECTIVOS DESVIOS PADRÃO .....	93
QUADRO 19 – ELEMENTOS DAS ELIPSES DE ERRO (X, Y) E DA COMPONENTE Z. ....	95
QUADRO 20 – RESULTADO DO TESTE DATA SNOOPING PARA 1º AJUSTAMENTO .....	98
QUADRO 21 – RESULTADO DO TESTE DATA SNOOPING PARA 2º AJUSTAMENTO .....	99
QUADRO 22 – RESULTADO DO TESTE DATA SNOOPING PARA 3º AJUSTAMENTO .....	100
QUADRO 23 – RESULTADO DO TESTE DATA SNOOPING PARA 4º AJUSTAMENTO .....	101
QUADRO 24 – RESULTADO DO TESTE DATA SNOOPING PARA 4º AJUSTAMENTO .....	102
QUADRO 25 – RESULTADO DO TESTE DATA SNOOPING .....	103
QUADRO 26 – REDUNDÂNCIAS PARCIAIS BEM COMO RESPECTIVAS DECISÕES SOBRE A CONTROLABILIDADE DAS OBSERVAÇÕES.....	104
QUADRO 27 – ANÁLISE DE CONFIABILIDADE INTERNA .....	105
QUADRO 28 – ANÁLISE DE CONFIABILIDADE EXTERNA .....	105
QUADRO 29 – ANÁLISE DE CONFIABILIDADE EXTERNA.....	106
QUADRO 30 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E PRECISÕES APÓS ELIMINAÇÃO DE <i>OUTLIERS</i> .....	106
QUADRO 31 – ELEMENTOS DAS ELIPSES DE ERRO (X, Y) E DA COMPONENTE Z. ....	107
QUADRO 32 – COORDENADAS E PRECISÕES DAS ESTAÇÕES DA REDE .....	109
QUADRO 33 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E PRECISÕES APÓS ELIMINAÇÃO DE <i>OUTLIERS</i> .....	109
QUADRO 34 – COMPONENTES DAS LINHAS DE BASE E RESPECTIVAS VARIÂNCIAS .....	110
QUADRO 35 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E PRECISÕES.....	110
QUADRO 36 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E RESPECTIVAS PRECISÕES (SOLUÇÃO 1) .....	114
QUADRO 37 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E RESPECTIVAS PRECISÕES (SOLUÇÃO 2) .....	114
QUADRO 38 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E RESPECTIVAS PRECISÕES (SOLUÇÃO 3) .....	115
QUADRO 39 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E RESPECTIVAS PRECISÕES (SOLUÇÃO 4) .....	115

QUADRO 40 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E RESPECTIVAS PRECISÕES (SOLUÇÃO 5)	116
QUADRO 41 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E PRECISÕES	118
QUADRO 42 – COORDENADAS E PRECISÕES DAS ESTAÇÕES DA REDE GPS	118
QUADRO 43 – COORDENADAS E PRECISÕES DAS ESTAÇÕES DA REDE GPS	119
QUADRO 44 – COORDENADAS E PRECISÕES DAS ESTAÇÕES DA REDE GPS	119
QUADRO 45 – COORDENADAS E PRECISÕES DAS ESTAÇÕES DA REDE GPS	120
QUADRO 46 – COORDENADAS E PRECISÕES DAS ESTAÇÕES DA REDE GPS	120
QUADRO 47 – COORDENADAS E PRECISÕES DAS ESTAÇÕES DA REDE GPS	121
QUADRO 48 – COORDENADAS E PRECISÕES DAS ESTAÇÕES DA REDE GPS	121
QUADRO 49 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E PRECISÕES	122
QUADRO 50 – COMPONENTES VETORIAIS AJUSTADAS E RESPECTIVOS <i>DESVIOS - PADRÃO</i>	123
QUADRO 51 – COMPONENTES VETORIAIS AJUSTADAS E RESPECTIVOS <i>DESVIOS - PADRÃO</i>	124
QUADRO 52 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES DA REDE	125

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
1.1	JUSTIFICATIVA	15
1.2	OBJETIVOS	15
1.2.1	Objetivo Geral	15
1.2.2	Objetivos Específicos	15
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>21</b>
3.1	ESCOLHA E DETERMINAÇÕES DAS LINHAS DE BASE DA REDE	21
3.2	ANÁLISE PRELIMINAR DAS OBSERVAÇÕES DA REDE	22
3.2.1	Especificações para levantamento relativo com o GPS	22
3.2.2	Linhas de base observadas entre pontos de controle fixos	23
3.2.3	Linhas de base repetidas	24
3.2.4	Análise do fechamento do circuito (loop closures)	25
3.3	AJUSTAMENTO POR MÍNIMOS QUADRADOS	26
3.4	AJUSTAMENTO PARAMÉTRICO	30
3.4.1	Método de Ajustamento paramétrico linear	30
3.4.2	Paramétrico não linear	31
3.4.3	Estimativa da precisão dos parâmetros e dos resíduos estimados	32
3.5	MATRIZ DOS PESOS	33
3.6	INJUNÇÕES	35
3.6.1	Injunção funcional	35
3.6.1.1	Injunção funcional implícita	35
3.6.1.2	Injunção funcional explícita	35
3.6.2	Injunção relativa	36
3.6.3	Injunção Absoluta	37
3.7	AJUSTAMENTO PARAMÉTRICO COM UTILIZAÇÃO DE INJUNÇÃO RELATIVA DE POSIÇÃO	39
3.8	AJUSTAMENTO COM USO DE PSEUDO-OBSERVAÇÕES	41
3.9	AJUSTAMENTO PARAMÉTRICO COM UTILIZAÇÃO DA TÉCNICA DA PROPRIEDADE REPRODUTORA	43
3.10	INJUNÇÕES MÍNIMAS E AJUSTAMENTO LIVRE	47
3.10.1	Transformação de Helmert	49
3.11	TESTES ESTATÍSTICOS	52
3.11.1	Teste global do modelo e data snooping	52
3.11.2	Teste global do modelo	53
3.11.3	Teste data snooping	55
3.12	MEDIDAS DE QUALIDADE DE REDE GEODÉSICA	58
3.12.1	Medidas de Precisão	59
3.12.2	Região de Confiança para os Parâmetros Ajustados	60
3.12.3	Elipse de erro ou de confiança	62
3.12.4	Precisão de coordenada isolada	64
3.12.5	Precisão Posicional	65
3.12.6	Medidas de Confiabilidade	66
3.12.6.1	Confiabilidade interna	66
3.12.6.2	Confiabilidade externa	71
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>73</b>
4.1	PLANEJAMENTO	73

4.2	METODOLOGIA DE CAMPO.....	76
4.2.1	Equipamentos Utilizados .....	76
4.2.2	Técnicas de Levantamento.....	76
<b>5</b>	<b>PÓS-PROCESSAMENTO DAS OBSERVÁVEIS GPS.....</b>	<b>77</b>
<b>6</b>	<b>ANÁLISE PRELIMINAR DA REDE .....</b>	<b>80</b>
6.1	ANÁLISE DE LINHAS DE BASE FIXAS.....	81
6.2	ANÁLISE DE LINHAS DE BASE REPETIDAS.....	82
6.3	ANÁLISE DE ERRO DE FECHAMENTO DE CIRCUITOS.....	82
<b>7</b>	<b>AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES PELO MÉTODO PARAMÉTRICO .....</b>	<b>86</b>
7.1	AJUSTAMENTO COM INJUNÇÃO MÍNIMA .....	86
7.1.1	Aplicação das elipses de confiança e barra de erro .....	95
7.1.2	Análise estatística.....	96
7.1.2.1	Teste global do modelo.....	97
7.1.2.2	Teste data snooping .....	97
7.1.2.3	Análise de confiabilidade .....	103
7.1.2.4	Análise de Confiabilidade Interna .....	104
7.1.2.5	Análise de Confiabilidade Externa .....	105
7.1.2.6	Coordenadas e precisões da rede.....	106
7.2	AJUSTAMENTO COM INJUNÇÃO MÍNIMA VARIANDO O MODELO ESTOCÁSTICO.....	108
7.3	AJUSTAMENTO COM UTILIZAÇÃO DE PSEUDO-OBSERVAÇÃO .....	112
7.4	AJUSTAMENTO COM UTILIZAÇÃO DA PROPRIEDADE REPRODUTORA 117	
7.5	AJUSTAMENTO LIVRE COM A UTILIZAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO DE HELMERT .....	122
7.6	AJUSTAMENTO COM INJUNÇÃO RELATIVA DE POSIÇÃO.....	127
7.7	IMPOSIÇÃO DE DESLOCAMENTOS NAS COORDENADAS DA ESTAÇÃO UNI .....	129
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>142</b>
8.1	CONCLUSÕES .....	142
8.2	RECOMENDAÇÕES .....	145
<b>9</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>146</b>

## 1 INTRODUÇÃO

De acordo com Vanícek e Krakiwsky (1986), a determinação de coordenadas na superfície física da terra, no mar ou no espaço, em relação a um determinado sistema de referência, é chamada de posicionamento de pontos.

O posicionamento tridimensional poderá ser feito a partir de redes geodésicas estabelecidas com a utilização de observações terrestres (ângulos horizontais, verticais e distâncias) ou redes baseadas no rastreamento de satélites artificiais com a utilização do método de posicionamento relativo estático (VANÍCEK; KRAKIWSKY, 1986).

De acordo com Torge (2001), rede geodésica GPS consiste de pontos de controle monumentados, fornecendo um sistema de referência materializado para o posicionamento terrestre em todas as escalas quer sejam de caráter Global, Regional ou Local. As Redes globais permitem a realização de sistemas de referência definidos por convenções internacionais. Redes Regionais formam a base fundamental para levantamentos nacionais ou continentais, as quais formam a base dos sistemas de geo-informação e mapeamento. Redes Locais são tipicamente estabelecidas para projetos de engenharia e exploração bem como investigações geodinâmicas (TORGE, 2001).

Segundo Segantine (2005), a técnica de posicionamento relativo estático com utilização da fase da onda portadora, é o método mais utilizado para obter observações em uma rede geodésica GNSS. E de acordo com o IBGE (2008), a precisão desta técnica, utilizando a dupla diferença de pseudodistância e fase da portadora, permite obter uma precisão de 0,01 a 1 parte por milhão (ppm) a um nível de confiança de 68,3%, ou seja, um sigma.

O objetivo do posicionamento relativo estático de acordo com Hofmann-Wellenhof et al. (2008), é a determinação das coordenadas dos pontos desconhecidos em relação a ponto(s) de coordenadas conhecidas (estações de referência). Como exemplo de aplicação tem-se a implantação de redes por meio GNSS, onde são determinados vetores, observações, comumente denominadas de linha de base os quais ligam os pontos constituintes da rede geodésica.

A partir do pós-processamento das observáveis podem-se obter diferenças de coordenadas entre as estações de referência e itinerantes, bem como a Matriz

Variância-Covariância (MVC) destas diferenças. Uma vez determinado as diferenças de coordenadas entre as estações, basta somar às diferenças ( $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ) às coordenadas da estação de referência para que se obtenham as coordenadas da estação itinerante. Porém, devido a redundância de observações e necessidade de obtenção de um solução única das estações, para qualquer caminho percorrido na rede, as componentes vetoriais das linhas de base ( $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ) ou diferenças de coordenadas deverão ser ajustadas utilizando-se o Método dos Mínimos Quadrados (M.M.Q).

Os ajustamentos das componentes vetoriais da rede formada podem ser realizados com a utilização do método paramétrico do M.M.Q, de diferentes maneiras: ajustamento livre seguido da transformação Helmert ou de similaridade no espaço tridimensional, ajustamento com utilização de injunções relativas e absolutas, onde se pode variar o número destas devido o conhecimento *a priori* de três estações ativas (referência), ajustamento com a utilização de pseudo-observações e a técnica da propriedade reprodutora.

O ajustamento livre é assim denominado, pois não são utilizadas injunções mínimas para a fixação de um sistema de referência específico, deste modo, as coordenadas ajustadas estarão vinculadas a um sistema de referência arbitrário. Por este motivo, foi utilizada a transformação de Helmert para vinculação do sistema de coordenadas arbitrário realizado pelos pontos de controle.

A utilização da injunção de posição pode ser encarada de maneira absoluta e relativa ou ponderada (UOTILA, 1986). Na injunção posicional absoluta são atribuídas às coordenadas das estações de referência, variância pequena o suficiente para torná-la constante, ou seja, irá ser restringido o campo de existência da variável. Na injunção posicional relativa ou ponderada, as coordenadas das estações de referência podem variar de acordo com as incertezas atribuídas a estas, ou seja, é controlada por pesos.

A utilização de pseudo-observações é feita considerando as coordenadas das estações de referência como parâmetros e observações (KRAKIWISK, 1975; GEMAEL, 1994).

A utilização do método da propriedade reprodutora visa recuperar as coordenadas das estações de referência alteradas durante o processo de ajustamento, pois é dado às estações de referência determinado peso, permitindo que a coordenada varie dentro de um campo de existência (VASCONCELLOS,

2003, 2008; SCHAFFRIN, 2001). A diferença deste método em relação ao da utilização da pseudo-observação reside na recuperação das coordenadas das estações de ligação alteradas no processo de ajustamento.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

Quando pretende-se implantar ou densificar uma rede geodésica ou até mesmo a realização de transporte de coordenadas por meio do sistema GPS, a questão que surge é da necessidade ou não e qual a influência de se utilizar os desvios-padrão da(s) estação (s) de referência obtidos em um ajustamento anterior, ou seja, considerá-las como injunção de posição absoluta ou relativa. De maneira semelhante, questiona-se a influência do número de estações de referência a serem utilizadas no processo de ajustamento bem como o efeito de possíveis deslocamentos que podem vir ocorrer nestas, na determinação posicional das demais estações da rede ou à serem transportadas.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo Geral

Realizar análise dos modos de utilização do ajustamento de observações pelo método paramétrico em rede GPS, e proceder verificação do efeito da imposição da variação dos desvios – padrão e de deslocamentos nas estações de referência, na determinação posicional das estações da rede.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- I. Planejar e executar campanhas GPS nos pontos da rede;
- II. Proceder análise preliminar das observações da rede GPS;
- III. Impor deslocamentos nas coordenadas da estação de referência;
- IV. Atribuir diferentes valores de desvios-padrão para as coordenadas da estação de referência;
- V. Realizar o ajustamento destas pelos modos de utilização do método paramétrico;
- VI. Aplicar testes estatísticos para controle de qualidade das coordenadas da rede.



## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Xavier (2000) apresenta uma metodologia para análise da estabilidade de uma rede local GPS, constituída por 18 estações, sendo: 2 estações base materializadas em locais externos à região passiva de deformação e 16 estações relativas compostas de marcos e RRNN. As duas estações base foram determinadas utilizando como estação de referência o antiga estação ativa PARA, atualmente denominada de UFPR. Cada estação relativa foi posicionada e, pós-processada em função de duas estações base consideradas fixa no ajustamento. Foram utilizadas elipse e vetores de erros para análise gráfica da rede. Dentre as conclusões tem-se que os testes estatísticos empregados na análise de erros nas observações e da estabilidade da rede mostram-se fundamentais; e caso se trabalhem com deslocamentos muito próximos do valor mínimo detectável, as variações de precisão das observações, podem falsificar os resultados das estatísticas aplicadas na análise de deslocamentos estimados.

Teixeira (2001) com o intuito de detectar e analisar deslocamentos verticais com emprego do GPS utilizou-se da rede geodésica da COPEL sobre a qual foram simulados deslocamentos negativos e positivos. Em algumas estações não foram impostos deslocamentos com intuito de verificar a repetibilidade das medidas GPS. Foram utilizadas duas estações para o posicionamento relativo das estações da rede, onde para cada estação relativa foram obtidas duas linhas de base. Para o ajustamento das observações foi utilizado o método paramétrico, considerando fixas as estações base. O teste global do modelo foi realizado a 5% de significância, ou seja, 95% de confiança. A região de confiança adotada para elipse de erro foi de 39,3 % e vetores de erro com 68% de probabilidade. Foi concluído que a aplicação do GPS para a detecção de deslocamento vertical com o GPS é promissora, e que quanto menor o comprimento da linha de base, maior a capacidade para detecção de deslocamento vertical.

Hwang *et al.* (2001) desenvolveram um aplicativo computacional para ajustamento de medidas relativas da gravidade para determinar parâmetros gravimétricos com a utilização de “injunções” ponderadas e ajustamento livre. O modelo de ajustamento com parâmetros ponderados foi utilizado quando existiam valores de gravidade *a priori* confiáveis e que foram utilizados como valores suplementares, ou quando era requerido que a rede gravimétrica fosse vinculada à

outra de ordem superior. O ajustamento livre determina unicamente valores de gravidade relativa entre todas as estações sem a necessidade de fixar valores de gravidade, sendo adequado para detecção de variação da gravidade relativa.

De acordo com Silva e Romão (2002), devido a evolução dos equipamentos de medições geodésicas e topográficas, como a utilização de GPS e Estações Totais podem fazer com que as redes secundárias apresentem exatidão superior aos dados do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB), por isso recomendam que as observações da rede sejam ajustadas livremente, ou seja, sem influência das estações fiduciais. Quando não é possível ou não se quer inserir as injunções utilizam-se as inversas generalizadas (Moore-Penrose) ou injunções internas. Dentro deste contexto, concluíram que o ajustamento livre é conveniente sempre que a dependência de uma rede a um ponto origem não seja aconselhável. Ressaltando-se que a utilização de injunções internas requer que haja um bom conhecimento das coordenadas aproximadas das estações da rede. No caso de densificação de redes geodésicas são necessários a utilização das coordenadas das estações de controle bem como suas incertezas estimadas em um ajustamento anterior, o que poderá evitar a introdução de deformações na rede.

Schaffrin (2001) diz que o procedimento clássico para densificação de rede geodésica consistindo no ajustamento livre seguido pela transformação de Helmert em relação aos pontos fiduciais que permanecem inalterados, é um método não ótimo em termos de erro médio quadrático e apresenta uma alternativa, baseada no princípio dos mínimos quadrados, de uma solução de densificação ótima com utilização da técnica da propriedade reprodutora, onde os valores das coordenadas e precisões alteradas durante o ajustamento são recuperadas.

Erol *et al.* (2004) realizaram uma análise de deformação no viaduto Karasu, na Turquia, utilizando GPS e nivelamento de precisão. Os pontos de controle da rede foram posicionados com observações GPS e diferenças de nível obtidas por nivelamento de precisão. Como resultado das campanhas, tem-se: as coordenadas cartesianas (X, Y, Z) e diferenças de níveis determinadas por meio do GPS e nivelamento de precisão, respectivamente. As observações de cada campanha foram ajustadas separadamente utilizando o ajustamento livre. Foram feitas análises de deformação separadamente, considerando diferenças de alturas advindas do GPS e do nivelamento de precisão. Análise de deformação tridimensional (3D) usando medidas GPS também foi realizada. Concluíram que observações obtidas

por GPS podem ser utilizadas para determinação de deformações com algumas precauções (dispositivo de centragem forçada, equipamento especial para medida de altura de antena, antena que minimize o efeito de multicaminho, etc.) de forma a eliminar algumas fontes de erros, para que se obtenham melhores resultados na análise de deformação. Ressaltam ainda, para que se obtenham resultados mais confiáveis na análise de deformação, as observações GPS devem ter suporte de nivelamento geométrico de precisão.

Arancón *et al.* (2005) com a finalidade de monitoramento de deformações relacionadas com estruturas tectônicas ativas, estabeleceram uma rede GPS regional e local não permanente. A rede é composta de 16 pilares de concreto armado ancorados em rocha, e com dispositivos de centragem forçada que garantirá que a antena seja colocada sempre na mesma posição em diferentes reocupações. O teste global do modelo foi aplicado ao nível de confiança de 99%. Os elementos da elipse de erro e barra de erro foram escalados de forma a obter uma região de 99% de confiança. Os dados das campanhas foram pós-processados no programa computacional Bernese 4.2. O ajustamento foi realizado utilizando injunção mínima com o programa NETGPS. Obtiveram para a rede regional, para as coordenadas cartesianas em média um RMS de 1mm em planimetria e 3mm para altimetria.

Setan e Othaman (2006) para estudar a detecção de subsidência de uma plataforma de exploração de petróleo na Malásia, estabeleceram uma rede com 3 pontos de controle no litoral e 3 estações localizadas nos cantos da plataforma. Para pós-processamento dos dados foi utilizado o programa computacional Bernese. O ajustamento da rede foi feito livremente, sem fixar ou injuncionar totalmente coordenadas de determinadas estações. As coordenadas das estações são dadas em WGS 84. No processo de detecção, um ponto de controle no litoral foi fixado e o deslocamento de cada estação foi testado a 95% de confiança. A estratégia utilizada para detecção de deformação foi a utilização do procedimento de transformação de similaridade. Concluíram que para este estudo a utilização do programa BERNESE é adequado para o processamento de linhas de base longas, pois produz resultados com alta acurácia, os quais são considerados importantes para monitoramento de subsidência. As diferenças de nível relativa entre os pontos de monitoramento obtidas por nivelamento e GPS são similares em magnitude e orientação das inclinações, apontando para viabilidade técnica da utilização do GPS, especialmente para linhas de base longas.

Even-Tzur (2006) estudou a configuração da 2ª campanha GPS feita na rede geodésica-geodinâmica (G1) onde, esta rede foi estabelecida com intuito de monitoramento de deformação da crosta em Israel. Ressalta que o desempenho do monitoramento da rede é altamente influenciado pela configuração das linhas de base e, uma efetiva configuração poderá diminuir os custos da campanha e aumentar a acurácia e confiabilidade da rede. Aponta o critério de sensibilidade como o principal fator para planejamento da configuração da rede geodésica GPS de monitoramento.

Lima *et al.* (2006) realizaram um estudo na grande barragem Alqueva em Portugal onde compararam o posicionamento utilizando o GPS no método relativo estático com métodos geodésicos clássicos. Alguns pontos estão localizados na crista da barragem e são denominados de pontos objetos e outros três estão localizados na margem do rio (pontos de referência) ancorados em rocha. Todos os vértices são materializados por pilares de centragem forçada. Foram realizadas inicialmente duas campanhas utilizando poligonação e nivelamento para monitoramento de deslocamento horizontal e vertical respectivamente e no mesmo período foram realizadas campanhas GPS utilizando três receptores. O pós-processamento foi realizado com dois programas computacionais: TRIMBLE GPSurvey 2.35 e BERNESE v 4.2. No programa da TRIMBLE todas as linhas de base foram processadas, um vetor por vez (*single baseline processing mode*). Todos os vetores foram ajustados considerando um ponto de controle fixo (PE). No BERNESE, todos os vetores independentes foram processados no modo multi-estação, dois vetores por vez. Na realização do ajustamento foi utilizado como precisão para as coordenadas da estação PE um desvio padrão de 0,0001m. Para linhas de base pequenas os resultados obtidos de cada um dos programas foram muito similares: na planimetria uma variação média menor que 1 mm e na altimetria menor que 5 mm. A comparação das campanhas do método clássico e com GPS apresentaram concordância na ordem de 2 mm na planimetria e 5 mm na altimetria.

Vasconcellos (2003 e 2008) apresenta uma metodologia para ajustamento de redes GPS de densificação e extensão, a qual substitui com vantagem o ajustamento livre seguido de uma transformação de similaridade a 7 parâmetros. O método introduz o tratamento estatisticamente ótimo, com base no princípio dos mínimos quadrados, permitindo ajustar a nova rede vinculando-a a pontos fiduciais e conectando-a a pontos de ligação com redes vizinhas “hierarquicamente superiores”.

Aplica a propriedade reprodutora com a finalidade de recuperar as coordenadas iniciais dos pontos de inunção, modificadas devido à ponderação dada no ajustamento.

Granemann et al (2008) definiram e realizaram uma rede geodésica de monitoramento, onde as observações de ângulo, distâncias e desníveis foram ajustadas aplicando o método da variação de coordenadas de forma a obter as coordenadas das estações. A matriz dos pesos foi montada de três diferentes formas: matriz dos pesos definida com a precisão nominal linear do equipamento e número de séries de observações para os ângulos; matriz dos pesos igual a identidade, e matriz dos pesos definida como matriz identidade para os ângulos e precisão nominal linear do equipamento para as distâncias. Foi constatado que a matriz dos pesos não afeta o vetor das coordenadas corrigidas, porém influência significativamente na aplicação dos testes estatísticos.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

#### 3.1 ESCOLHA E DETERMINAÇÕES DAS LINHAS DE BASE DA REDE

Dependendo da natureza do projeto e sua extensão, a rede pode variar de algumas poucas estações a várias estações e vindo a ter configurações complexas (WOLF e GHILANI, 2006).

Depois da escolha do local e posterior materialização dos pontos, realiza-se o posicionamento relativo estático de acordo com a seqüência planejada para as sessões, onde são coletadas as observáveis básicas (pseudo-distância e fase da portadora).

A rede GPS geralmente é feita em sessões as quais, segundo Seeber (2003), são obtidas de um rastreamento simultâneo por certo período de tempo.

De acordo com Monico (2008) cada estação da rede deve se conectar a pelo menos um ponto da sessão anterior por uma linha de base independente.

Quando três ou mais receptores são utilizados simultaneamente em um posicionamento multi-estação pode-se otimizar o levantamento de forma que se ganhe em economia, acurácia e confiabilidade (SEEBER, 2003).

Deste modo, considerando o número  $r$  de receptores operando simultaneamente,  $n$  o número de estações que compõem a rede;  $m$  número de estações ocupadas mais de uma vez em duas diferentes sessões, ou seja, o número de estações comuns entre as sessões, e  $s$  o número de sessões segundo (SEEBER, 2003), tem-se que:

- o número de linhas de base possíveis ( $v_p$ ) em uma sessão é dado por:

$$V_p = r(r-1)/2 \quad (3.1)$$

- o número de linhas de base independentes ( $v_i$ ) em uma sessão é dado por:

$$V_i = r - 1 \quad (3.2)$$

- o número mínimo de sessões ( $s$ ) requeridas para a rede é dado por:

$$s = \left\lceil \frac{n-m}{r-m} \right\rceil \quad (3.3)$$

onde:

$$m \geq 1,$$

e  $s$  é arredondado para o valor inteiro superior.

O número total de linhas de base independentes presentes na rede é dado por:

$$s(r - 1) \quad (3.4)$$

O número de linhas de base independentes determinadas pelo menos duas vezes é dado por:

$$(s - 1)(m - 1) \quad (3.5)$$

No caso de dois receptores serem empregados em uma sessão, apenas uma linha de base é observada. Quando mais de dois receptores são utilizados, são obtidas linhas de base independente e dependente. Deste modo, do total de linhas de base resultantes, escolhem-se somente as independentes para a realização de uma análise preliminar e para posteriormente realizar o ajustamento.

### 3.2 ANÁLISE PRELIMINAR DAS OBSERVAÇÕES DA REDE

Esta análise pode incluir, segundo Wolf e Ghilani (1997): observações de linhas de base entre pontos de controle; linhas de base observadas mais de uma vez e, análise de erro de fechamento em circuitos (*loop closures*).

#### 3.2.1 Especificações para levantamento relativo com o GPS

*The Federal Geodetic Control Committee (FGCS)*<sup>1</sup> tem uma publicação intitulada de “*Geometric Geodetic Accuracy Standards and Specifications for Using GPS Relative Positioning Techniques*” e este documento tem especificado sete diferentes classes de acurácia para o posicionamento relativo com o uso do GPS bem como especificações de instrumentos e procedimentos de campo. (WOLF; GHILANI, 2006).

---

<sup>1</sup> FEDERAL GEODETIC CONTROL COMMITTEE – FGCC. **Geometric Geodetic Accuracy and Specifications for Using GPS Relative**. Rockville, Maryland: 1989. 48 p.

No QUADRO 1, encontram-se disponíveis as sete diferentes classes de acurácia para o posicionamento relativo com o uso do GPS.

Classes	Erro relativo admissível	Partes Por Milhão (ppm)
AA	1:100.000.000	0,01
A	1:10.000.000	0,1
B	1:1.000.000	1,0
C – I	1:100.000	10
C - 2 - I	1:50.000	20
C – 2 – II	1:20.000	50
C - 3	1:10.000	100

QUADRO 1 – CLASSES DE ACURÁCIA NO POSICIONAMENTO RELATIVO COM O GPS.  
FONTE: WOLF e GHILANI (2006).

O documento da FGCS traz recomendações relativas às categorias de levantamento para os quais são adequadas diferentes ordens de precisão. Algumas destas recomendações incluem: classe AA para estudo da geodinâmica global, regional e para o monitoramento de deformações; classe A para rede primária do sistema de referência espacial nacional ( NSRS), bem como para estudos da geodinâmica regional e local; classe B para redes secundárias do NSRS bem como levantamentos de alta precisão; e várias classes C para mapeamentos de controle, levantamentos de propriedades e levantamentos topográficos. Os erros relativos admissíveis fornecidos por esta especificação implicam em alta precisão que é possível de se obter com o GPS WOLF e GHILANI (2006).

### 3.2.2 Linhas de base observadas entre pontos de controle fixos

Freqüentemente, especificações de trabalho com a utilização do GPS requerem que sejam feitas observações entre pontos de controle, podendo avaliar a qualidade do posicionamento bem como as das estações tidas como fixas (WOLF e GHILANI, 2006).

Quando as discrepâncias entre elas forem maiores que a especificação do projeto, as causas devem ser investigadas, antes de procedimentos futuros (WOLF e GHILANI, 2006).

Para a aplicação desta análise procede-se da seguinte maneira (WOLF e GHILANI, 1997):



- a) Primeiramente calculam-se as diferenças de coordenadas entre as estações conhecidas I e J de acordo com a equação (3.6).

$$\begin{aligned}\Delta x_{ij}^{\text{fixo}} &= x_j - x_i, \\ \Delta y_{ij}^{\text{fixo}} &= y_j - y_i, \\ \Delta z_{ij}^{\text{fixo}} &= z_j - z_i.\end{aligned}\quad (3.6)$$

- b) Cálculo do valor absoluto das diferenças entre as linhas de base observadas e fixas.

$$\begin{aligned}dx &= |\Delta x_{ij}^{\text{obs}} - \Delta x_{ij}^{\text{fixo}}| \\ dy &= |\Delta y_{ij}^{\text{obs}} - \Delta y_{ij}^{\text{fixo}}| \\ dz &= |\Delta z_{ij}^{\text{obs}} - \Delta z_{ij}^{\text{fixo}}|\end{aligned}\quad (3.7)$$

- c) Cálculo do comprimento da linha de base, com as coordenadas dos pontos de controle.

$$IJ = \sqrt{(\Delta x_{ij}^{\text{fixo}})^2 + (\Delta y_{ij}^{\text{fixo}})^2 + (\Delta z_{ij}^{\text{fixo}})^2} \quad (3.8)$$

- d) As diferenças obtidas no item b são expressas em partes por milhão (ppm), bastando para isso, dividir a diferença pelo comprimento da linha de base calculada no item c, multiplicando por um milhão.

$$\begin{aligned}\Delta x_{\text{ppm}} &= \frac{dx}{IJ} 1.000.000 \\ \Delta y_{\text{ppm}} &= \frac{dy}{IJ} 1.000.000 \\ \Delta z_{\text{ppm}} &= \frac{dz}{IJ} 1.000.000\end{aligned}\quad (3.9)$$

Finalmente, os valores calculados no item d, dados em ppm poderão ser comparado com os valores disponíveis no QUADRO 1, permitindo verificar se o levantamento se encontra na classe especificada.

### 3.2.3 Linhas de base repetidas

Segundo Wolf e Ghilani (2006), linhas de base observadas em sessões distintas é o procedimento empregado na avaliação da consistência dos dados observados e eliminação de erros.

O procedimento é realizado da seguinte maneira (WOLF e GHILANI, 1997):

- 1) Listam-se as componentes das linhas de base a serem analisadas;
- 2) Listar os valores das componentes obtidas nas diferentes sessões de observação;
- 3) Listar os valores absolutos das diferenças das componentes das linhas de base, obtidas nas duas sessões de observação;
- 4) Transformar as diferenças em ppm, de acordo com a equação (3.9).

### 3.2.4 Análise do fechamento do circuito (loop closures)

A utilização do método relativo estático pode resultar na formação de circuitos com linhas de base independentes. Para cada circuito a soma algébrica das componentes  $\Delta x$  das linhas de base deve ser igual à zero, um valor diferente a este caracteriza erro de fechamento no eixo correspondente à componente. A mesma condição deve ser aplicada para as componentes  $\Delta y$  e  $\Delta z$ .

Para o cálculo do erro de fechamento do circuito, é interessante notar o fato de que somente são utilizados os vetores independentes, pois caso se utilize linhas de base dependentes, estas podem proporcionar uma falsa acurácia para o circuito (MONICO, 2000).

O erro de fechamento é expresso em ppm e é calculado dividindo o erro de fechamento pelo somatório dos comprimentos do circuito multiplicado por um milhão.

O valor obtido é confrontado com o especificado para o projeto e verifica-se, se o erro é aceitável para o tipo de trabalho o qual se destina. O valor do erro relativo de fechamento em ppm é dado pela equação (3.10):

$$e_r = \frac{\sqrt{cx^2 + cy^2 + cz^2}}{\text{Comp.Circuito}} 1.000.000 \quad (3.10)$$

onde:

$cx$  : erro de fechamento para a componente  $\Delta x$  ;

$cy$  : erro de fechamento para a componente  $\Delta y$  ;

$cz$  : erro de fechamento para a componente  $\Delta z$  ;

Esta análise é importante pelo fato de poder incluir na análise de um circuito, linhas de bases que já fizeram parte de outros circuitos e que não foram detectados

erros grosseiros. Deste modo facilitará a identificação de erros em determinadas linhas de base, por exclusão de linhas de base já verificadas em circuitos anteriores (WOLF e GHILANI, 1997). Ainda segundo estes autores, o valor obtido pela equação (3.10) poderá ser comparado com os valores disponíveis no QUADRO 1 para a verificar se o levantamento é está dentro da classe especificada.

### 3.3 AJUSTAMENTO POR MÍNIMOS QUADRADOS

Devido à existência de observações redundantes e a necessidade de se obter estimativa única para os parâmetros, coordenadas, bem como as respectivas estimativas de precisão, será utilizado o método paramétrico por mínimos quadrados para ajustamento das observações da rede GPS.

Segundo Krakiwsky (1975), Mikhail e Ackermann (1976), para a realização do ajustamento são necessárias observações superabundantes, ou seja, observações que excedem o mínimo necessário para a solução do sistema de equações normais.

Devido à existência de observações redundantes e a pluralidade de soluções, há a necessidade de obtenção de melhor estimativa para os parâmetros; e de acordo com Gemael (1994), os geodestas fizeram a opção seguindo os matemáticos GAUSS e LEGENDRE adotando como melhor estimativa de uma grandeza  $X$  (valor verdadeiro), a que torna mínima a soma dos quadrados dos resíduos:

$$\phi = V^T V = \text{mínimo} \quad (3.11)$$

Considerando que as observações não apresentam a mesma variabilidade, ou seja, o mesmo grau de confiança, adiciona-se uma matriz quadrada de pesos. A forma quadrática da equação (3.11) fica:

$$\phi = V^T P V = \text{mínimo} \quad (3.12)$$

onde:

$V$  é o vetor dos resíduos das observações e  $P = \sigma_0^2 \Sigma_{Lb}^{-1}$  é a matriz dos pesos,  $\sigma_0^2$  é o fator de variância *a priori* e  $\Sigma_{Lb}$  é a MVC das observações.

De acordo com Mikhail e Ackermann (1976), Leick (1995, 2004), o ajustamento por mínimos quadrados trabalha com dois componentes importantes: o modelo matemático funcional e o modelo estocástico.

O modelo matemático descreve as propriedades determinísticas da realidade física, ou seja, procura representar matematicamente as relações entre observações e parâmetros.

O modelo estocástico descreve as propriedades não determinísticas ou probabilísticas das variáveis envolvidas, ou seja, das observações.

O valor mais provável para as observações ajustadas  $L_a$  e parâmetros ajustados  $x_a$ , bem como as MVC's das observações e parâmetros ajustados ( $\Sigma_{L_a}$ ,  $\Sigma_{x_a}$ ) são determinados durante o processo de ajustamento, e são obtidos utilizando como dados de entrada para o processo, as observações  $L_b$  amostradas, e suas precisões, ou flutuações probabilísticas  $\Sigma_{L_b}$  das observações (DALMOLIN, 2004).

No contexto de rede GPS, a estrutura da MVC das observações ajustadas  $\Sigma_{L_a}$  dependerá do tipo de posicionamento utilizado (multi-estação, linha de base simples) e do aplicativo computacional utilizado para o pós-processamento das observáveis.

Considerando uma rede composta de três estações e que as mesmas foram ocupadas simultaneamente por receptores de sinais GPS, poderia ser obtidos dependendo do aplicativo computacional utilizado para a realização do pós-processamento, uma MVC das observações completa, onde na diagonal principal conterà as variâncias e, fora desta as covariâncias das componentes de todas as observações. A MVC das observações (brutas) terá a seguinte forma:

$$\Sigma_{LB} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta X_{12}}^2 & \sigma_{\Delta Y_{12}\Delta X_{12}} & \sigma_{\Delta Z_{12}\Delta X_{12}} & \sigma_{\Delta X_{12}\Delta X_{13}} & \sigma_{\Delta X_{12}\Delta Y_{13}} & \sigma_{\Delta X_{12}\Delta Z_{13}} & \sigma_{\Delta X_{12}\Delta X_{23}} & \sigma_{\Delta X_{12}\Delta Y_{23}} & \sigma_{\Delta X_{12}\Delta Z_{23}} \\ \sigma_{\Delta Y_{12}\Delta X_{12}} & \sigma_{\Delta Y_{12}}^2 & \sigma_{\Delta Z_{12}\Delta Y_{12}} & \sigma_{\Delta Y_{12}\Delta X_{13}} & \sigma_{\Delta Y_{12}\Delta Y_{13}} & \sigma_{\Delta Y_{12}\Delta Z_{13}} & \sigma_{\Delta Y_{12}\Delta X_{23}} & \sigma_{\Delta Y_{12}\Delta Y_{23}} & \sigma_{\Delta Y_{12}\Delta Z_{23}} \\ \sigma_{\Delta Z_{12}\Delta X_{12}} & \sigma_{\Delta Z_{12}\Delta Y_{12}} & \sigma_{\Delta Z_{12}}^2 & \sigma_{\Delta Z_{12}\Delta X_{13}} & \sigma_{\Delta Z_{12}\Delta Y_{13}} & \sigma_{\Delta Z_{12}\Delta Z_{13}} & \sigma_{\Delta Z_{12}\Delta X_{23}} & \sigma_{\Delta Z_{12}\Delta Y_{23}} & \sigma_{\Delta Z_{12}\Delta Z_{23}} \\ \sigma_{\Delta X_{13}\Delta X_{12}} & \sigma_{\Delta X_{13}\Delta Y_{12}} & \sigma_{\Delta X_{13}\Delta Z_{12}} & \sigma_{\Delta X_{13}}^2 & \sigma_{\Delta X_{13}\Delta Y_{13}} & \sigma_{\Delta X_{13}\Delta Z_{13}} & \sigma_{\Delta X_{13}\Delta X_{23}} & \sigma_{\Delta X_{13}\Delta Y_{23}} & \sigma_{\Delta X_{13}\Delta Z_{23}} \\ \sigma_{\Delta Y_{13}\Delta X_{12}} & \sigma_{\Delta Y_{13}\Delta Y_{12}} & \sigma_{\Delta Y_{13}\Delta Z_{12}} & \sigma_{\Delta Y_{13}\Delta X_{13}} & \sigma_{\Delta Y_{13}}^2 & \sigma_{\Delta Y_{13}\Delta Z_{13}} & \sigma_{\Delta Y_{13}\Delta X_{23}} & \sigma_{\Delta Y_{13}\Delta Y_{23}} & \sigma_{\Delta Y_{13}\Delta Z_{23}} \\ \sigma_{\Delta Z_{13}\Delta X_{12}} & \sigma_{\Delta Z_{13}\Delta Y_{12}} & \sigma_{\Delta Z_{13}\Delta Z_{12}} & \sigma_{\Delta Z_{13}\Delta X_{13}} & \sigma_{\Delta Z_{13}\Delta Y_{13}} & \sigma_{\Delta Z_{13}}^2 & \sigma_{\Delta Z_{13}\Delta X_{23}} & \sigma_{\Delta Z_{13}\Delta Y_{23}} & \sigma_{\Delta Z_{13}\Delta Z_{23}} \\ \sigma_{\Delta X_{23}\Delta X_{12}} & \sigma_{\Delta X_{23}\Delta Y_{12}} & \sigma_{\Delta X_{23}\Delta Z_{12}} & \sigma_{\Delta X_{23}\Delta X_{13}} & \sigma_{\Delta X_{23}\Delta Y_{13}} & \sigma_{\Delta X_{23}\Delta Z_{13}} & \sigma_{\Delta X_{23}}^2 & \sigma_{\Delta X_{23}\Delta Y_{23}} & \sigma_{\Delta X_{23}\Delta Z_{23}} \\ \sigma_{\Delta Y_{23}\Delta X_{12}} & \sigma_{\Delta Y_{23}\Delta Y_{12}} & \sigma_{\Delta Y_{23}\Delta Z_{12}} & \sigma_{\Delta Y_{23}\Delta X_{13}} & \sigma_{\Delta Y_{23}\Delta Y_{13}} & \sigma_{\Delta Y_{23}\Delta Z_{13}} & \sigma_{\Delta Y_{23}\Delta X_{23}} & \sigma_{\Delta Y_{23}}^2 & \sigma_{\Delta Y_{23}\Delta Z_{23}} \\ \sigma_{\Delta Z_{23}\Delta X_{12}} & \sigma_{\Delta Z_{23}\Delta Y_{12}} & \sigma_{\Delta Z_{23}\Delta Z_{12}} & \sigma_{\Delta Z_{23}\Delta X_{13}} & \sigma_{\Delta Z_{23}\Delta Y_{13}} & \sigma_{\Delta Z_{23}\Delta Z_{13}} & \sigma_{\Delta Z_{23}\Delta X_{23}} & \sigma_{\Delta Z_{23}\Delta Y_{23}} & \sigma_{\Delta Z_{23}}^2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Em um segundo modo, utilizando-se do posicionamento multi-estação com o pós-processamento no programa comercial TGO (linha de base por linha de base) resultará em uma matriz bloco diagonal, pois não será considerada a correlação

entre as componentes das linhas de base. A MVC das observações resultante do pós-processamento das observáveis terá a seguinte forma:

$$\Sigma_{LB} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta X_{12}}^2 & \sigma_{\Delta Y_{12}\Delta X_{12}} & \sigma_{\Delta Z_{12}\Delta X_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\Delta Y_{12}\Delta X_{12}} & \sigma_{\Delta Y_{12}}^2 & \sigma_{\Delta Z_{12}\Delta Y_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\Delta Z_{12}\Delta X_{12}} & \sigma_{\Delta Z_{12}\Delta Y_{12}} & \sigma_{\Delta Z_{12}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta X_{13}}^2 & \sigma_{\Delta X_{13}\Delta Y_{13}} & \sigma_{\Delta X_{13}\Delta Z_{13}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta Y_{13}\Delta X_{13}} & \sigma_{\Delta Y_{13}}^2 & \sigma_{\Delta Y_{13}\Delta Z_{13}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta Z_{13}\Delta X_{13}} & \sigma_{\Delta Z_{13}\Delta Y_{13}} & \sigma_{\Delta Z_{13}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta X_{23}}^2 & \sigma_{\Delta X_{23}\Delta Y_{23}} & \sigma_{\Delta X_{23}\Delta Z_{23}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta Y_{23}\Delta X_{23}} & \sigma_{\Delta Y_{23}}^2 & \sigma_{\Delta Y_{23}\Delta Z_{23}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta Z_{23}\Delta X_{23}} & \sigma_{\Delta Z_{23}\Delta Y_{23}} & \sigma_{\Delta Z_{23}}^2 \end{bmatrix} \quad (314)$$

Às vezes são consideradas somente as variâncias das componentes das linhas de base, que poderá ser obtida do processamento das linhas de base ou com a utilização de um método empírico, por exemplo, o (MINQUE) implicando em uma MVC das observações diagonal. No utilização deste, tem-se que as variâncias das componentes de cada linha de base em separado são iguais ( $\sigma_{\Delta X_{12}}^2 = \sigma_{\Delta Y_{12}}^2 = \sigma_{\Delta Z_{12}}^2$ ), devido ao fator comprimento da linha de base. Considerando que a rede seja constituída por três linhas de base, a MVC formada com a utilização deste método empírico, fica na forma:

$$\Sigma_{LB} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta X_{12}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\Delta Y_{12}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\Delta Z_{12}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta X_{13}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta Y_{13}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta Z_{13}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta X_{23}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta Y_{23}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta Z_{23}}^2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Quando do posicionamento utilizando somente dois receptores, linha de base simples, e pós-processamento com os aplicativos comerciais e científicos, a MVC resultante terá mesma forma que da equação 3.14.

O modelo matemático funcional expressa de maneira simplificada, a realidade física existente, bem como as relações matemáticas entre as observações e os parâmetros. Pode-se considerar como parâmetros, coordenadas, alturas entre outras; e como observações, diferenças de coordenadas ou de alturas, distâncias e ângulos (LEICK, 2004).

Segundo Krakiwsky (1975) e Leick (2004), os modelos matemáticos de ajustamento da são:  $F(X_a, L_a) = 0$ ,  $F(L_a) = 0$  e  $L_a = F(X_a)$ . No método de ajustamento combinado, as observações e os parâmetros são relacionados por uma função não explícita.

$$F(X_a, L_a) = 0 \quad (3.16)$$

O subscrito “a” indica que os parâmetros e observações são ajustados. O símbolo  $L_a$  denota um vetor ( $n \times 1$ ) das observações ajustadas, e o vetor  $X_a$  ( $u \times 1$ ) contém os parâmetros ajustados. Onde  $n$  é o número de observações e  $u$  o número de parâmetros. Os parâmetros e observações são ligados por  $r$  equações.

No método de ajustamento correlato, as observações ajustadas são ligadas por  $r$  equações de condição:

$$F(L_a) = 0 \quad (3.17)$$

E finalmente, o método de ajustamento paramétrico, também conhecido por método das equações de observações, os valores observados ajustados são expressos explicitamente como função dos parâmetros ajustados.

$$L_a = F(X_a) \quad (3.18)$$

A escolha do método de ajustamento depende do problema a ser solucionado. No caso de ajustamento de rede GPS será utilizado o método paramétrico, pois a cada observação é gerada uma equação de observação e, de acordo com Leick (2004), este método é relativamente fácil de ser implementado em um aplicativo computacional.

### 3.4 AJUSTAMENTO PARAMÉTRICO

De acordo com Dalmolin (2004) e Lugnani (1983), o método paramétrico pode ter duas abordagens que dependerá da Função F. Se F for linear, será chamado de paramétrico linear, caso contrário, não linear.

No contexto de ajustamento de rede GPS, tem-se que cada linha de base contribui com 3 observações ( $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ ). Cada estação a ser estimada contribui com três parâmetros (u). Para cada estação injuncionada, o número de injunções (I) de posição é igual a 3.

Deste modo, o número de observações são obtidas multiplicando-se o número de linhas de base por 3, o número de parâmetros multiplicando-se o número de estações a serem determinadas por 3, e finalmente, o número de injunções é dado pelo produto do número de estações injuncionadas por 3.

#### 3.4.1 Método de Ajustamento paramétrico linear

Sendo o funcional F da equação (3.18) linear, as observações ajustadas podem ser expressas diretamente de acordo com a equação (3.19).

$${}_n L_1^a = {}_n A_{u \ u} X_1^a, \quad (3.19)$$

onde:

${}_n L_1^a$ : é um vetor ( $n \times 1$ ) dos valores observados ajustados, onde n é o número de observações;

${}_n A_{u \ u}$ : matriz dos coeficientes das incógnitas ou matriz projeto de dimensão ( $3n \times 3u$ ) é composta por elementos 1, 0 e -1 em caso de redes GPS ou de nivelamento;

${}_u X_1^a$ : vetor ( $u \times 1$ ) dos parâmetros ajustados.

O sistema linear da equação (3.19) é superabundante, com ( $n > u$ ). Devido à inexistência, *a priori*, dos valores observados ajustados e, a disposição somente de observações brutas, as quais contêm os inevitáveis erros de observação faz com que o sistema da equação (3.19) se torne inconsistente; deste modo se faz necessário a introdução de um vetor de discrepâncias entre os valores observados e ajustados, sendo freqüentemente denominado de vetor dos resíduos. A equação (3.19) depois de acrescido o vetor dos resíduos toma a forma das expressões (3.20) ou (3.21).

$${}_n L_1^b + {}_n V_1 = {}_n A_{u \ u} X_1^a \quad (3.20)$$

$${}_n V_1 = {}_n A_u X_1^a - {}_n L_1^b \quad (3.21)$$

É importante notar que a inconsistência foi retirada, mas um novo problema surgiu, ou seja, dispõe-se de mais incógnitas ( $u+n > n$ ) do que observações ( $3n$ ). Para contornar o problema, aplica-se o critério de mínimos quadrados dado pela equação (3.12) na equação (3.21), resultando o sistema de equações normais (3.22) cuja solução admitindo inversa ordinária, é dada pela equação (3.23), a qual no paramétrico linear fornece diretamente os parâmetros ajustados.

$${}_u N_u X_1 - {}_n U_1 = {}_u 0_1 \quad (3.22)$$

$${}_u X_1^a = (({}_n A_u)^T {}_n P_n {}_n A_u)^{-1} ({}_n A_u)^T {}_n P_n L_1^b. \quad (3.23)$$

onde:

${}_u N_u = (({}_n A_u)^T {}_n P_n {}_n A_u)^{-1}$ : é a matriz dos coeficientes das equações normais;

${}_n U_1 = ({}_n A_u)^T {}_n P_n L_1^b$ : vetor dos termos independentes;

${}_u X_1^a$ : é o vetor dos parâmetros ajustados no caso do modelo funcional ser linear.

A matriz (simétrica) dos pesos, indicando as flutuações probabilísticas das observações, é dada por:

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_{LB}^{-1} \quad (3.24)$$

onde:

$\sigma_0^2$ : é o fator de variância *a priori*, geralmente arbitrado e igualado a 1.

De acordo com Gemael (1994) a variância *a priori* não tem influência no vetor solução dos parâmetros estimados, mas somente na matriz dos coeficientes das equações normais **N**.

Note que para estimar o vetor dos parâmetros ajustados, equação (3.23), é necessário o conhecimento da matriz das derivadas parciais das equações de observações em relação aos parâmetros.

Os valores dos resíduos podem ser calculados utilizando os valores da (3.23) na equação (3.21). Assim, os valores das observações ajustadas são dados por:

$${}_n L_1^a = {}_n L_1^b + {}_n V_1 \quad (3.25)$$

### 3.4.2 Paramétrico não linear

Quando o modelo matemático funcional  $F$  de  $L_a = F(X_a)$  é não linear, necessita-se linearizá-lo. Empregando a fórmula de Taylor, as aproximações são



introduzidas, iterações são requeridas (LUGNANI, 1983). O modelo matemático linearizado toma a seguinte forma:

$${}_nL_1^b + {}_nV_1 = {}_nL_1^0 + {}_nA_u \delta X_1 \quad (3.26)$$

$${}_nV_1 = {}_nA_u \delta X_1 - ({}_nL_1^b - {}_nL_1^0) \quad (3.27)$$

onde :

$L_0$  : é o vetor ( $nx1$ ) das observações aproximadas, calculadas a partir dos parâmetros aproximados, ou seja,  $L_0 = F(X_0)$ ;

$L$  : é o vetor dos termos independentes ( $nx1$ ), ou discrepâncias, calculados a partir dos valores dos parâmetros observados menos os valores observados aproximados sendo dado por  ${}_nL_1 = ({}_nL_1^b - {}_nL_1^0)$ ;

${}_u\delta X_1$  : é o vetor das correções a serem aplicadas aos parâmetros aproximados.

A equação (3.27) é linear e pode ser resolvida pelo mesmo procedimento do caso linear da seção 3.4.1.

Considerando  $A^T P A$  não singular, o vetor solução  ${}_u\delta X_1$  (correções aos parâmetros aproximados) é dado pela equação (3.28).

$${}_u\delta X_1 = ({}_nA_u^T P_n A_u)^{-1} {}_nA_u^T P_n L_1 \quad (3.28)$$

As coordenadas ajustadas podem ser obtidas pela equação (29), fazendo:

$${}_uX_1^a = {}_uX_1^0 + {}_u\delta X_1 \quad (3.29)$$

O vetor dos resíduos e das observações ajustadas pode ser obtido com as equações (3.27) e (3.26) respectivamente.

### 3.4.3 Estimativa da precisão dos parâmetros e dos resíduos estimados

Por meio da MVC, podem-se obter as estimativas da qualidade dos parâmetros estimados, das observações, e dos resíduos.

Segundo Lugnani (1983) e Dalmolin (2004), com a utilização do método paramétrico mede-se  $L_b$  e estima-se  $\Sigma_{L_b}$  e a partir destes são obtidos  $(X, \Sigma_X)$ , que representam os parâmetros e sua precisão.

Aplicando a lei de propagação de covariâncias na equação (3.29) resulta a equação (3.30) que é a MVC das correções aos parâmetros aproximados, e estes são constantes, então a MVC dos parâmetros estimados também é fornecida pela

mesma equação (WELLS; KRAKIWSKY, 1971, MIKHAIL; ACKERMANN, 1976, LEICK, 1995, 2004, GEMAEL, 1994, DALMOLIN, 2004).

$$\Sigma X_a = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}. \quad (3.30)$$

A MVC dos valores observados ajustados é dada pela equação (3.31) e a dos resíduos das observações pela equação (3.32).

$$\Sigma_{L_a} = \hat{\sigma}_0^2 AN^{-1}A^T \quad (3.31)$$

$$\Sigma_V = \Sigma_{L_A} - \Sigma_{L_B} \quad (3.32)$$

A variância *a posteriori* pode ser obtida pela equação (3.33)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u} \quad (3.33)$$

onde:

$n - u$ : n.º de graus de liberdade do sistema de equações.

### 3.5 MATRIZ DOS PESOS

A matriz dos pesos é obtida pelo produto do fator de variância *a priori*, geralmente arbitrado igual a 1, pela inversa da matriz variância covariância das observações brutas. Neste contexto de ajustamento de rede GPS, serão consideradas 3 formas para a construção da matriz dos pesos:

1) Será considerada a MVC das observações fornecidas pelo aplicativo computacional, resultante do pós-processamento das observáveis básicas (pseudo-distância e fase da portadora). A MVC resultante das observações para cada linha de base, forma uma matriz de dimensão (3 x 3) onde na diagonal principal encontram-se as variâncias e fora da diagonal as covariâncias.

O conjunto de vetores constituintes da rede forma uma matriz peso denominado de bloco diagonal, onde cada bloco está relacionado com um determinado vetor ou linha de base então.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \Delta X_i & \sigma \Delta X \Delta Y & \sigma \Delta X \Delta Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma \Delta Y \Delta X & \sigma^2 \Delta Y_i & \sigma \Delta Y \Delta Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma \Delta Z \Delta X & \sigma \Delta Z \Delta Y & \sigma^2 \Delta Z_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \Delta X_n & \sigma \Delta X \Delta Y & \sigma \Delta X \Delta Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma \Delta Y \Delta X & \sigma^2 \Delta Y_n & \sigma \Delta Y \Delta Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma \Delta Z \Delta X & \sigma \Delta Z \Delta Y & \sigma^2 \Delta Z_n \end{bmatrix}^n \quad (3.34)$$

2) Considerando somente as variâncias de cada bloco para a formação da matriz peso, desse modo as observações sendo consideradas independentes e terá a forma diagonal.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \Delta X_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \Delta Y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \Delta Z_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \Delta X_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \Delta Y_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \Delta Z_n \end{bmatrix}^n \quad (3.35)$$

3) Será considerado um modelo empírico para estimar a matriz variância covariância das observações, o qual é denominado de *Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimation* (MINQUE), cujo modelo é apresentado em (KUANG, 1996):

$$\sigma^2(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z) = a^2 + b^2 s^2 \quad (3.36)$$

onde:

a e b são constantes dependentes do receptor utilizado e são dadas em milímetros (mm) e partes por milhão (ppm).

s é o comprimento da linha de base (m);

$\sigma^2(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$ : variâncias das componentes das linhas de base (m<sup>2</sup>).

As variâncias das componentes da linha de base “i” serão iguais e da seguinte forma  $\sigma^2 \Delta X_i = \sigma^2 \Delta Y_i = \sigma^2 \Delta Z_i$ . É considerado a não correlação entre as componentes de cada linha de base, resultando em uma matriz diagonal do seguinte modo:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \Delta X_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \Delta Y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \Delta Z_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \Delta X_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \Delta Y_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \Delta Z_n \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

### 3.6 INJUNÇÕES

Dalmolin (2004), afirma que as injunções são de extrema importância na solução de sistemas de equações lineares que apresentam deficiência de posto (característica), ou seja, quando a matriz das equações normais é singular.

De acordo com Lugnani (1983), Andrade (1998) e Dalmolin (2004), as injunções podem ser agrupadas em três categorias: funcional (implícita e explícita), injunções absolutas e injunções relativas.

#### 3.6.1 Injunção funcional

##### 3.6.1.1 Injunção funcional implícita

De acordo com Andrade (2003), as injunções funcionais implícitas são conhecidas por modelos matemáticos onde são envolvidas observações. Elas podem ser agrupadas em três diferentes formas: modelo paramétrico, equação (3.18); modelo dos correlatos, equação (3.17) e modelo combinado, equação (3.16).

##### 3.6.1.2 Injunção funcional explícita

Denomina-se injunção funcional explícita quando a variável tem de atender a outra função além do modelo matemático (não envolvendo observação na outra função), ou seja, consistem em impor condições aos parâmetros (ANDRADE, 2003, DALMOLIN, 2004). De acordo com Andrade (2003), a injunção funcional implícita é da forma:

$$G(X_a) = 0 \quad (3.38)$$

A equação sendo não-linear pode ser linearizada utilizando o desenvolvimento em série de Taylor:

$$\frac{\partial G}{\partial X_a} \Big|_{X_a=X_0} (X_a - X_0) + G(x_0) = 0 \quad (3.39)$$

ou

$$CX + E = 0 \quad (3.40)$$

onde:

C: é a matriz das derivadas parciais das equações de injunção em relação aos parâmetros C (l x u);

X: correção às injunções;

E: vetor erro de fechamento.

Minimizando a função que envolve o modelo matemático linearizado e injunção também linearizada:

$$\phi = V^T P V - 2K^T (V + AX + W) - 2K_C^T (CX + E) \quad (3.41)$$

Uma vez calculado as derivadas parciais em relação às incógnitas e ao igualá-las a zero e resolvendo o sistema de equações por X tem-se que:

$$X = -N^{-1}U + \Delta X \quad (3.42)$$

$$\Delta X = N^{-1}C^T (CN^{-1}C^T)^{-1} (CN^{-1}U - E) \quad (3.43)$$

onde:

$X_a = X_0 + X$  = parâmetros ajustados.

Deste modo, verifica-se pela equação (3.43) que é possível calcular o efeito da injunção após a obtenção dos das correções aos parâmetros aproximados (ANDRADE, 2003).

### 3.6.2 Injunção relativa

As injunções relativas, de acordo com Dalmolin (2004), são introduzidas por meio de atribuição de pesos aos parâmetros ou observações. Deste modo, a variável deve atender além do modelo matemático uma outra função que é controlada por pesos (ANDRADE, 2003).

De acordo com Dalmolin (2004), este procedimento permite tratar as observações e parâmetros como variável aleatória, podendo ser consideradas livres (peso nulo), e fixas com peso praticamente infinito, além da ponderação em função

da MVC. Deste modo, verifica-se o grande intervalo de ponderação que se pode atribuir a estas variáveis.

A injunção relativa utilizada em Geodesia. É do tipo:

$$G(L_x, X_a) = 0 \quad (3.44)$$

Sua forma linear é da forma:

$$DV_c + CX + W_c = 0 \quad (3.45)$$

A função a minimizar, considerando o método combinado, ou seja, o modelo matemático mais completo passa a ser:

$$\phi = V^T P V + V_c^T P_c V_c - 2K^T (BV + AX + W) - 2K_c^T (DV_c + CX + W_c) \quad (3.46)$$

Derivando esta função em relação às incógnitas, igualando a zero e resolvendo o sistema para X, encontra-se (ANDRADE, 2003):

$$X = (N + N_c)^{-1} (U + U_c) \quad (3.47)$$

onde:

N = matriz dos coeficientes das equações normais;

N<sub>c</sub> = matriz da contribuição das inunções às equações normais;

U = vetor das equações normais;

U<sub>c</sub> = vetor da contribuição das inunções às equações normais;

P<sub>c</sub> = sub-matriz dos pesos das inunções de posição (relativa a um ponto);

ε = vetor do erro de fechamento.

Onde:

$$N_c = C^T P_c C \quad (3.48)$$

$$U_c = C^T P_c \varepsilon \quad (3.49)$$

O subscrito **c** significa que os elementos são pertinentes às inunções (*constraint*). De acordo com Andrade (2003), estas inunções são fáceis de serem adicionadas nas equações normais originais.

### 3.6.3 Injunção Absoluta

De acordo com Dalmolin (2004), quando se impõe invariabilidade a certas variáveis, fixando os valores de suas coordenadas durante o ajustamento, está aplicando-se inunção absoluta. Este tipo de inunção poderá ser aplicado atribuindo

peso excessivamente grande para as variáveis (coordenadas) que se quer fixar ou também considerar as coordenadas dos pontos de controle como constantes.

As coordenadas das estações de controle permanecerão inalteradas dependendo da variância atribuída. Caso seja restringido o campo de existência destas variáveis com variância pequena o suficiente, resultará em um peso suficientemente grande para fixá-lo no ajustamento (injunção absoluta).

### 3.7 AJUSTAMENTO PARAMÉTRICO COM UTILIZAÇÃO DE INJUNÇÃO RELATIVA DE POSIÇÃO

De acordo com Andrade e Olivas (1981), as injunções de posição podem ser aplicadas com o objetivo de fixar um sistema de coordenada, para avaliar a qualidade destes, para retirar a singularidade da matriz dos coeficientes das equações normais.

Utilizando estas como relativas ou absolutas, poderá ser observada a influência destas na determinação de outros pontos constituintes da rede.

No caso específico de rede GPS apenas uma injunção é necessária e suficiente para retirar a singularidade da matriz N, e fixar o sistema de referência. Quando mais de uma injunção de posição é utilizada, poderá ser observada a influência da geometria da rede.

As injunções de posição são aplicadas para fixar pontos de controle de acordo com seu desvio padrão sendo as equações do tipo (ANDRADE; OLIVAS, 1981, ANDRADE, 2003, GEMAEL; ANDRADE, 2004):

$$\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_b - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

onde:

os índices **a** e **b** na equação referem-se às coordenadas observadas e ajustadas.

A Matriz dos pesos poderá ser diagonal ou completa de acordo com a disponibilidade das incertezas posicionais dos pontos de controle. Na matriz dos pesos das injunções de posição estão presentes somente as variâncias e é dado por (3.51).

$$P_c = \Sigma_{x_c}^{-1} = \begin{vmatrix} 1/\sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_z^2 \end{vmatrix} \quad (3.51)$$

onde:

$\sigma_x^2$   $\sigma_y^2$   $\sigma_z^2$ : são as variâncias das coordenadas dos pontos de controle.



A sub-matriz das derivadas parciais relativas a injunção aplicada a um ponto  $i$  é da forma:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 1 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 1 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

ou

$$C = (000\dots I\dots 000) \quad (3.53)$$

A dimensão de  $C$  é dada pelo número de injunções (linhas) e o número de parâmetros (colunas).

O vetor dos erros de fechamento neste caso será:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_b - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

E por fim, as correções aos valores aproximados serão dadas por:

$$X = [N + N_c]^{-1} * [U + U_c] \quad (3.55)$$

Os elementos da equação (3.55) foram descritos na seção (3.6.2).

O fator de variância *a posteriori* pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V + V_c^T P_c V_c}{n + I - u} \quad (3.56)$$

onde:

$I$  é o número de pontos de injunção.

A matriz variância covariância dos parâmetros ajustados pode ser obtida da seguinte forma:

$$\Sigma_{x_a} = \hat{\sigma}_0^2 (N + N_c)^{-1} \quad (3.57)$$

### 3.8 AJUSTAMENTO COM USO DE PSEUDO-OBSERVAÇÕES

O objetivo é acrescentar novas observações que se referem diretamente aos parâmetros, onde são utilizadas para retirar a singularidade ou deficiência de característica das equações normais (GEMAEL, 1994; LEICK, 1995, 2004).

Como no ajustamento de observações, a estimação dos parâmetros só é possível pela álgebra de Cayley se a matriz  $A$  for positiva definida, permitindo a inversão da matriz  $N$ . Deste modo, a deficiência de característica da matriz  $A$  é eliminada através da inclusão de injunções ou pontos fiduciais, que são vértices com coordenadas conhecidas (MARINI, 2002).

A introdução das injunções na forma de pseudo-observações, é feita acrescentando à matriz  $A$ , as linhas correspondentes aos coeficientes das injunções (0 ou 1) e sendo as injunções definida na forma de sub-matriz na matriz peso (MARINI, 2002).

O vetor das observações é construído adicionando os valores das coordenadas dos pontos de injunção. A forma final deste vetor é:

$$L_b = \begin{bmatrix} L_{b1} \\ X \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

A matriz  $A$  das derivadas parciais das observações em relação aos parâmetros é obtida acrescentando-se às linhas desta matriz as derivadas parciais das pseudo-observações em relação aos parâmetros. É importante notar que no número de parâmetros já estão sendo considerados o nº de pontos de injunção.

Deste modo, ao acrescentar as linhas nesta matriz deve-se acrescentar o número de observações na hora em que for calcular o fator de variância a *posteriori*.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial X_1} \\ \frac{\partial F}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

A matriz dos pesos é formada pelas sub-matrizes das observações e pseudo-observações

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

O vetor dos resíduos é composto de valores de resíduos das observações e das pseudo-observações.

O vetor dos resíduos é obtido por:

$$V = AX - L \quad (3.61)$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Onde o índice 1 refere-se aos novos pontos sendo determinados e o índice 2 refere-se aos pontos de injeção.

O vetor dos parâmetros ajustados contém informações das novas coordenadas da rede e dos pontos de injeção.

$$X = N^{-1}U \quad (3.63)$$

$$X_a = X_0 + X \quad (3.64)$$

$$X_a = \begin{bmatrix} X_{a1} \\ X_{a2} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

O fator de variância da unidade de peso *a posteriori*  $\hat{\sigma}_0^2$  é estimado por:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u + 1} \quad (3.66)$$

O numerador é a soma acumulada dos  $V^T P V$  das observações e dos pontos de injeção incluídos como pseudo-observações, o denominador é o número de observações superabundantes, ou seja, o grau de liberdade.

A estimativa de precisão dos parâmetros ajustados é da forma:

$$\Sigma_{X_a} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T P A)^{-1} \quad (3.67)$$

Considerando-se as injeções fiduciais, corre-se o risco de ter os valores de suas coordenadas ajustadas ligeiramente modificadas. A solução deveria ser um algoritmo que levasse para o ajustamento somente a parte estocástica dos pontos de injeção, sem alterar suas coordenadas já determinadas, isto é, propagando somente suas precisões (MARINI, 2002).

Na seção 3.9 é apresentado o procedimento desenvolvido por Schaffrin (2001) para recuperação das coordenadas das estações de controle alteradas no processo de ajustamento.

### 3.9 AJUSTAMENTO PARAMÉTRICO COM UTILIZAÇÃO DA TÉCNICA DA PROPRIEDADE REPRODUTORA

Neste modelo de ajustamento é utilizada a ponderação dos pontos de controle, de modo a permitir a propagação de covariâncias para a determinação dos demais pontos da rede, devendo, portanto, ser empregado na densificação de redes.

As coordenadas das novas estações são ajustadas juntamente com as estações dos pontos de controle (fiduciais). A “técnica da propriedade reprodutora”, segundo Vasconcellos (2008), consiste em introduzir as variâncias dos pontos de inunção na determinação da nova rede, e que ao final do ajustamento tenham suas coordenadas recuperadas pela aplicação desta propriedade.

As equações para a realização deste ajustamento podem ser encontradas em (VASCONCELLOS, 2003, 2008; SCHAFFRIN, 2002; SCHAFFRIN; COTHREN, 2002).

Os modelos de equação para as observações em rede GPS, podem ser expressos de acordo com a equação (3.68)

$$\begin{aligned}\Delta X_{ij} &= X_j - X_i \\ \Delta Y_{ij} &= Y_j - Y_i \\ \Delta Z_{ij} &= Z_j - Z_i\end{aligned}\quad (3.68)$$

Para os parâmetros de ligação (controle) tem-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned}X_{ib} &= X_{ia} \\ Y_{ib} &= Y_{ia} \\ Z_{ib} &= Z_{ia}\end{aligned}\quad (3.69)$$

A matriz **A**, dos coeficientes é constituída por elementos 1, 0 e -1 com dimensão (n x u), e a matriz **K** de dimensão (l x u) é composta de 0 e 1:

$${}_n A_u \quad (3.70)$$

$${}_l K_u \quad (3.71)$$

onde:

A : matriz dos coeficientes dos parâmetros (nxu) ;

K : matriz dos coeficientes das inunções (lxu),

n : número de equações de observações (cada componente da linha de base);

l : número de inunções (estações de ligação);

$u$ : número de parâmetros (total de estações da rede + vértices de ligação);

$K$  é uma matriz ( $l \times u$ ), devendo possuir três linhas de zeros para cada ponto de injeção e, no cruzamento dessas linhas com as três colunas referentes ao ponto de injeção correspondente, contendo uma matriz identidade de dimensão (3x3) VASCONCELLOS (2008).

O vetor das observações  $L_b$  de dimensão ( $n \times 1$ ) é composto pelas componentes vetoriais das linhas de base e é apresentada na seguinte forma:

$${}_n L_1^b \quad (3.72)$$

onde:

$L^b$ : vetor das observações (componentes vetoriais das linhas de base);

$X_2$ : vetor das coordenadas das injeções (coordenadas dos pontos de ligação).

A matriz dos pesos das observações e dos pontos de ligação é dada respectivamente por:

$$P_1 = \sigma_0^2 \Sigma_{Lb}^{-1} \quad (3.73)$$

$$P_2 = \sigma_0^2 \Sigma_{X_2}^{-1} \quad (3.74)$$

onde:

$\sigma_0^2$ : fator de variância a priori, arbitrado igual a 1.

$P_1$ : é a matriz dos pesos das observações e tem índice 1.

$P_2$ : é a matriz dos pesos dos pontos de ligação (injeções).

Os parâmetros ajustados  $X_a$  são determinados pela seguinte equação:

$$X_a = (A_1^T P_1 A_1 + K_2^T P_2 K_2)^{-1} (A_1^T P_1 L_1^b + K_1^T P_2 X_2) \quad (3.75)$$

onde:

$N = A_1^T P_1 A_1$ : matriz dos coeficientes da equação normal ( $u \times u$ ).

$U = A_1^T P_1 L_1^b$ : vetor dos termos absolutos da equação normal ( $u \times 1$ ).

$NC = K_2^T P_2 K_2$ : matriz dos coeficientes da equação normal das injeções ( $u \times u$ ).

$UC = K_1^T P_2 X_2$ : vetor dos termos absolutos da equação normal da injeção ( $u \times 1$ ).

A estimativa de precisão dos parâmetros ajustados  $\Sigma_{X_a}$  é dada por (VASCONCELLOS, 2008, SCHAFFRIN; COTHREN, 2002):

$$\Sigma_{X_a} = \sigma_0^2 (N + NC)^{-1} \quad (3.76)$$

$$\Sigma_{X_a} = \hat{\sigma}_0^2 (N + NC)^{-1} \quad (3.77)$$

onde:

$\sigma_0^2$ : fator de variância *a priori* (3.45).

Com intuito de verificar a diferença da multiplicação pelo fator de variância *a priori* e *a posteriori* a MVC dos parâmetros ajustados serão calculadas pelos dois modos (3.76) e (3.77) e comparadas.

O vetor das observações ajustadas é dado por:

$$L_a = AX_a \quad (3.78)$$

A MVC das observações é dado por:

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_0^2 A(N+NC)^{-1} A^T \quad (3.79)$$

Os vetores dos resíduos das observações e dos pontos de ligação são obtidos por:

$$V_1 = A_1 X_a - L_1^b \quad (3.80)$$

$$V_2 = X_2 - K_2 X_a \quad (3.81)$$

onde:

$V_1$ : vetor dos resíduos das observações de dimensão (nx1).

$V_2$ : vetor dos resíduos referentes aos pontos de inunção de dimensão (lx1)

O fator de variância *a posteriori*  $\hat{\sigma}_0^2$  é estimado por:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V_1^T P_1 V_1 + V_2^T P_2 V_2}{n - u + l} \quad (3.82)$$

O numerador é a soma acumulada dos  $V^T P V$  das observações e dos pontos de inunção incluídos como observações, o denominador é o número de observações superabundantes, ou seja, o grau de liberdade (VASCONCELLOS, 2003).

Dependendo da ponderação imposta nas coordenadas dos pontos de inunção, estas podem sofrer alteração. Deste modo, os resíduos das inunções poderão ser diferentes de zero conforme mostra a equação (3.85).

$${}_l[V_2]^1 \neq 0 \quad (3.83)$$

Este problema pode ser contornado aplicando a técnica denominada de “propriedade reprodutora” que consiste na utilização da equação (3.84)

$$\hat{X}_a = X_a + K_2^T (K_2 K_2^T)^{-1} V_2 \quad (3.84)$$

O vetor  $\hat{X}_a$  contém as coordenadas iniciais dos pontos de injeção recuperados pela aplicação da propriedade reprodutora (SCHAFFRIN, 2001, VASCONCELLOS, 2003, 2008).

A MVC dos parâmetros após a aplicação da propriedade reprodutora é dada pela equação (3.85) (SCHAFFRIN; COTHREN, 2002):

$$\begin{aligned} \Sigma_{\hat{x}} = & \sigma_0^2(N+NC)^{-1} + \sigma_0^2 K^T (KK^T)^{-1} P_2^{-1} (KK^T)^{-1} K \\ & - \sigma_0^2 K^T (KK^T)^{-1} K (N+NC)^{-1} K^T (KK^T)^{-1} K \end{aligned} \quad (3.85)$$

### 3.10 INJUNÇÕES MÍNIMAS E AJUSTAMENTO LIVRE

As injunções mínimas (*minimal constrained*) ou a utilização do ajustamento livre (*inner constrained*) são utilizadas com o propósito de controle de qualidade das observações (LEICK, 2004; WOLF; GHILANI, 1997).

De acordo com Leick (2004), a vantagem adicional em se realizar o ajustamento livre está em que a elipse ou elipsóide de erro representará a verdadeira geometria da rede implícita na matriz projeto **A** e da matriz dos pesos **P**.

De acordo com Wolf e Ghilani (1997), antes de se realizar o ajustamento final, o qual utiliza mais de uma estação de controle, é conveniente realizar o ajuste minimamente injuncionado, onde um vértice da rede é tido como fixo com coordenada arbitrária, ficando os demais pontos livres para acomodar as observações. Deste modo, os resíduos resultantes do ajustamento estarão estritamente relacionados com as incertezas das observações.

Este tipo de ajustamento parece interessante visto a não necessidade da utilização de inversa generalizada como no caso do ajustamento livre (WOLF; GHILANI 1997).

Leick (2004) afirma que para realizar o ajustamento com injunções mínimas para a fixação da origem, basta retirar 3 coordenadas (parâmetros) de uma estação, ou seja, três colunas da matriz projeto **A** do total de parâmetros da rede o que fixará o sistema de referência.

O ajustamento livre não sofre influências externas às observações, visto que não existem pontos de injunção com suas incertezas nesta abordagem, os quais influenciam as observações na propagação de covariâncias. A falta desta acarreta deficiência de característica, ou seja, a matriz  $A^T P A$  torna singular e não admite inversa ordinária.

Segundo Leick (1995, 2004), Kuang (1996) e Snow e Schaffrin (2003) a deficiência de característica é devido ao desconhecimento de informação de parâmetros geométricos da rede (deficiência de “datum”) ou sistema de referência.

Devido ao desconhecimento das três translações (origem do sistema de coordenadas), a deficiência de característica de uma rede GPS composta basicamente por linhas de base é igual a 3, isto porque as linhas de base trazem consigo informações de escala e orientação (KUANG, 1996).



De acordo com Leick (1995, 2004) a vantagem de se realizar este tipo de ajustamento é poder avaliar a qualidade dos vetores da rede, a rigidez geométrica, a verificação da confiabilidade interna e externa da rede, e a identificação e eliminação de erros grosseiros.

A deficiência de característica em rede GPS é igual a 3, o qual indica o número mínimo de injunções necessárias para a quebra de deficiência de característica ( $u-r$ ). No caso em questão, isso é feito com a fixação de um ponto de controle (X, Y e Z).

A formulação do ajustamento, método paramétrico, na presença de deficiência de característica é (LEICK, 2004):

$${}_nV_1 = {}_nA_{u-u}X_1^E + {}_nL_1, \quad (3.86)$$

$$P = \sigma_0^2 \frac{1}{\sum L_b}, \quad (3.87)$$

$${}_{u-r}E^u X_E = 0. \quad (3.88)$$

O subscrito **E** indica que a solução dos parâmetros depende da condição especial dada pela matriz **E** expressa na equação (3.90). No caso de ajustamento de rede GPS a matriz **E** é dada da seguinte forma (LEICK, 2004):

$$E = {}_1[{}_3l_3 \quad {}_3l_3 \quad {}_3l_3 \quad {}_3l_3 \quad \dots]^u. \quad (3.89)$$

Com este recurso é possível solucionar o problema da deficiência de característica e chegar a determinação dos parâmetros ajustados. O vetor dos parâmetros ajustados é dado por (LEICK, 1995, 2004).

$$\hat{X}_E = -Q_E A^T P L_b \quad (3.90)$$

$$Q_E = (A^T P A + E^T E)^{-1} - E^T (E E^T E E^T)^{-1} E \quad (3.91)$$

A matriz  $Q_E$  é a pseudo-inversa da matriz normal e é utilizada com a seguinte notação:

$$Q_E = N^+ = (A^T P A)^+ \quad (3.92)$$

onde:

+: inversa generalizada.

A solução é dada por:

$$X_a = (A^T P A)^+ A^T P L_b \quad (3.93)$$

O vetor dos resíduos é obtido por:

$$V = A X_a - L_b \quad (3.94)$$

O fator de variância *a posteriori* é dado por (3.33). A MVC dos parâmetros ajustados pode ser obtida utilizando a pseudo-inversa da matriz normal multiplicada pelo fator de variância *a posteriori*.

$$\Sigma_{x_s} = \hat{\sigma}_0^2 N^+ . \quad (3.95)$$

### 3.10.1 Transformação de Helmert

A transformação de Helmert também conhecida como transformação de similaridade no espaço tridimensional é utilizada para relacionar dois sistemas de referencia por meio de três translações ( $x_0, y_0, z_0$ ), três rotações ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ) e um fator de escala ( $k$ ), ou seja, sete parâmetros. O Leitor interessado pode encontrar detalhes em (COSTA, 2003, LEICK, 1995, 2004, GHILANI e WOLF, 2006, SOLER; HOTHEM, 1988, MITSAKAKI et al, 2006).

Como no ajustamento livre as coordenadas estimadas são vinculadas a um referencial desconhecido e visto a necessidade das coordenadas destas estações estarem vinculadas a um referencial específico, faz-se o uso desta transformação geométrica para o seu relacionamento.

Na FIGURA 1, encontram-se os elementos que relacionam os dois sistemas de referencia cartesiano.

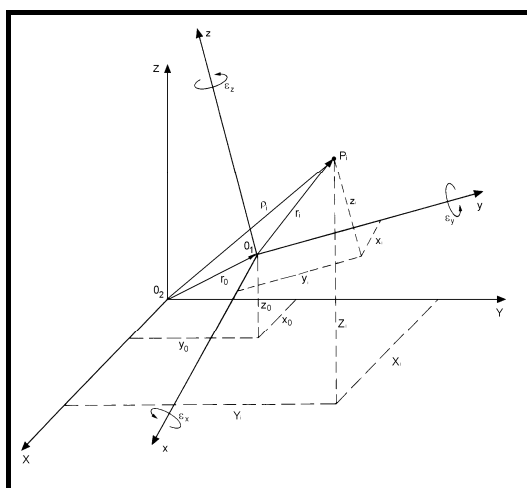


FIGURA 1 – RELAÇÃO ENTRE DOIS SISTEMAS CARTESIANOS  
 FONTE: COSTA E SANTOS (1998).

O modelo matemático da transformação de Helmert é dado por qualquer ponto genérico  $P_i$  no espaço por (LEICK, 1994; GHILANI, 2006, COSTA; SANTOS, 1998, COSTA, 2003):

$$R_i = r_0 + kR_\varepsilon r_i \quad (3.96)$$

onde:

$R_i$ : é o vetor posição de um ponto genérico  $P_i$  no referencial cartesiano  $(X, Y, Z)$ ,  $r_i$  é o vetor posição do mesmo ponto genérico no referencial cartesiano  $(x_i, y_i, z_i)$ ; o vetor  $r_0$  é composto por translações  $(x_0, y_0, z_0)$  e  $R_\varepsilon$  é uma matriz composta por rotações nos três eixos cartesianos (dadas em radianos). A matriz  $R_\varepsilon$  é dada por (COSTA, 2003):

$$R_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

O fator de escala  $K$  pode ser escrito como:

$$K = 1 + \delta \quad (3.98)$$

onde:  $\delta$  representa uma diferença de escala (expressa em ppm), e que se os referenciais possuem o mesmo padrão linear, então a diferença de escala  $\delta$  deve ser nula e o fator de escala igual à unidade (COSTA, 2003).

De acordo com Soler e Hothem (1989), Mitsakaki et al. (2006) e Costa (2003) o modelo geral na forma matricial direta é dado por:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + (1 + \delta_s) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

O modelo matemático expresso pela equação (3.99) será utilizado tanto na forma direta quanto na forma inversa. Primeiramente será utilizado na forma inversa (equações formuladas com base nas coordenadas dos pontos comuns em ambos os sistemas de referência). Na transformação direta, obtêm-se as coordenadas no sistema de referência especificado, a partir dos sete parâmetros de transformação e das coordenadas no outro sistema de referência.

A estimação dos parâmetros foi realizada com a utilização do método paramétrico  $L_a = F(X_a)$  e deste modo é mais conveniente expressar a equação (3.99), da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} X_i - x_i \\ Y_i - y_i \\ Z_i - z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & \delta & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

O procedimento foi realizado da seguinte maneira:

Determinação do vetor dos parâmetros  $X$

$$X = [x_0 \quad y_0 \quad z_0 \quad \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \delta]^T \quad (3.101)$$

Como a equação (3.100) é linear em relação aos parâmetros, pode-se atribuir um valor nulo para o vetor dos parâmetros aproximados  $X_0$  de modo que:

$$X_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.102)$$

O vetor  $L$  das observações é dado pela equação (3.103):

$$L_i = \begin{bmatrix} x_i - X_i \\ y_i - Y_i \\ z_i - Z_i \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

A matriz  $A$  das derivadas parciais dada pela equação (3.104) é obtida derivando a equação (3.101) em relação aos parâmetros. Deste modo, a para cada ponto será gerado uma sub-matriz  $A$  da forma (COSTA, 2003):

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_i & y_i & x_i \\ 0 & 1 & 0 & z_i & 0 & -x_i & y_i \\ 0 & 0 & 1 & -y_i & x_i & 0 & z_i \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

A matriz dos pesos dado pela equação (3.105) será considerada igual a identidade, pois será admitido que todas as observações tem igual precisão.

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_{L_b}^{-1} = I \quad (3.105)$$

O vetor solução dos parâmetros ajustados é dado por:

$$X_a = -(A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (3.106)$$

O vetor dos resíduos é dado por:

$$V = AX_a + L \quad (3.107)$$

Após ajustamento obtém-se o fator de variância *a posteriori* dado pela equação (3.108)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{gl} \quad (3.108)$$

onde:

gl: é o grau de liberdade do sistema.

A MVC dos parâmetros ajustados é obtida por:

$$\Sigma_{x_a} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T P A)^{-1} \quad (3.109)$$

A comparação dos fatores de variância *a priori* e *a posteriori* é apresentado na seção 3.11.2.

### 3.11 TESTES ESTATÍSTICOS

Antes da realização do ajustamento é assumido que todos os erros grosseiros e sistemáticos foram eliminados, e apenas os erros aleatórios afetam as observações. Entretanto antes da utilização dos valores estimados, ambos os modelos matemáticos e observações devem ser avaliados de modo que se possa determinar o quanto estes valores são confiáveis (KUANG, 1996).

Deste modo, esta análise estatística concentra-se na detecção, localização e eliminação de erros grosseiros pequenas magnitudes, assumindo que maiores foram detectados e eliminados antes da realização do ajustamento. A análise estatística é baseada nos resíduos das observações bem como sua respectiva MVC.

#### 3.11.1 Teste global do modelo e data snooping

De acordo com Kuang (1996), o teste global do modelo e data snooping é utilizado na detecção e localização de erros grosseiros de pequena magnitude, respectivamente. Estes testes foram propostos por Baarda (1968) para detecção de *outliers* e localização de erros grosseiros. De acordo com Monico (2008) e Caspary (1987), *outlier* ou erro grosseiro de pequena magnitude, é definido como um resíduo que contradiz a propriedade estatística preconizada. Após o ajustamento da rede é

aplicado o teste global, a qual testa a compatibilidade do fator de variância a *posteriori* ( $\hat{\sigma}_0^2$ ) com o valor do fator de variância a *priori* arbitrado.

Caso o teste falhe a certo nível de significância  $\alpha$ , deve ser realizada uma investigação verificando as possíveis causas (seção 3.11.2). Caso seja verificado as possíveis causas e a desconfiança recair sobre a hipótese da presença de erros grosseiros é aplicado teste data snooping para detecção de *outliers*. Para que seja possível a aplicação deste teste é necessário o conhecimento do fator de variância a *priori*. Caso não haja este conhecimento a *priori* é recomendada a aplicação do teste tau KUANG (1996).

### 3.11.2 Teste global do modelo

O Teste Global testa a compatibilidade da variância de referencia *posteriori* ( $\hat{\sigma}_0^2$ ) com a variância de referencia a *priori* ( $\sigma_0^2$ ), estabelecendo-se, então, a comparação entre estas duas variâncias. Esta comparação é feita levando-se em consideração que  $V^T \Sigma_b^{-1} V$  tem distribuição qui-quadrado com  $r$  graus de liberdade ( $r$  é a redundância no ajustamento) e é utilizada como indicador da qualidade do ajustamento. A estimativa imparcial do fator de variância a *priori*, ou seja, o fato de variância a *posteriori*, é calculado de acordo com a equação (3.110) (GEMAEL, 1994).

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r} . \quad (3.110)$$

onde:

$r = n - u$ ;  $n$  é o número de observações e  $u$  é o número de parâmetros.

De acordo com Mikhail e Ackermann (1976) há dois possíveis testes de hipótese a serem aplicados: 1º Teste Global Bilateral; 2º Teste Global Unilateral;

Somente o Teste Bilateral será utilizado nesta pesquisa, pois é o mais comumente utilizado em Geodésia.

Na aplicação do teste bilateral, primeiramente estabelece-se a hipótese nula ou básica ( $H_0$ ) e a hipótese alternativa ( $H_a$ ).

A hipótese básica:

$$H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2 \quad (3.111)$$

É confrontada com a hipótese alternativa

$$H_a : \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2 \quad (3.112)$$

O valor da estatística qui-quadrado calculado é dado por:

$$\chi_c^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} r = \frac{V^T P V}{\sigma_0^2} = V^T \Sigma_{Lb}^{-1} V \quad (3.113)$$

Da equação (3.113), percebe-se que o cálculo da estatística qui-quadrado independe da escolha do fator de variância a priori  $\sigma_0^2$ , dependendo apenas de duas variáveis:  $V$  e  $\Sigma_{Lb}$ . Pode ser provado que a esperança dos resíduos é zero (KUANG, 1996). Deste modo, o valor de  $\chi_c^2$  pode ser tido como inversamente proporcional a matriz variância covariância das observações  $\Sigma_{Lb}$ .

O valor calculado para esta estatística deve estar dentro do intervalo de confiança  $(1-\alpha)$  para que a hipótese básica não seja rejeitada (KRAKIWISK et al., 1999).

$$\chi_c^2 > \chi_{r;\alpha/2}^2 \quad (3.114)$$

$$\chi_c^2 < \chi_{r;1-\alpha/2}^2 \quad (3.115)$$

$$\chi_{r;\alpha/2}^2 < r\hat{\sigma}_0^2 < \chi_{r;1-\alpha/2}^2 \quad (3.116)$$

Caso o valor da estatística esteja fora do intervalo de confiança, a hipótese básica é rejeitada, ou seja, se aceita a hipótese alternativa podendo estar incorrendo em erro tipo I, ou seja, rejeita-se a hipótese nula sendo ela verdadeira a um nível de significância  $\alpha$ .

Sendo a hipótese básica rejeitada, o ajustamento apresenta problemas e as possíveis causas devem ser investigadas. De acordo com Uotila (1975); Mikhail e Ackermann (1976); Gemael (1994); Kuang (1996); Krakiwisk et al. (1999), estas são:

- a) Presença de erros grosseiros de pequena magnitude nas observações (*outliers*);
- b) O modelo determinístico (matriz projeto) usado no ajustamento está incorreto;
- c) O modelo estocástico (matriz covariância) para as observações está incorreto;
- d) Sistema mal condicionado
- e) Erro no modelo matemático;
- f) Erros de cálculo e;
- g) Problemas de linearização.

De acordo com Krakiwisk et al. (1999), o ajustamento de linhas de base GPS geralmente não passa neste teste estatístico, devido ao item (c).

Kuang (1996) diz que entre as hipóteses possíveis existem duas especiais, a saber:

- 1)  $H_{a1}$  (ponderação errônea das observações), e
- 2)  $H_{a2}$  (erros grosseiros existente nas observações).

A hipótese nula é dada como as observações são normalmente distribuídas com média  $Ax$  e variância  $\sigma_0^2 \Sigma_{Lb}$ , ou seja,  $H_0 : l \in n(Ax, \sigma_0^2 \Sigma_{Lb})$ .

A hipótese alternativa  $H_{a1}$  é dada por:  $H_{a1} : l \in n(Ax, \tilde{\sigma}_0^2 \Sigma_{Lb})$ , e a hipótese alternativa  $H_{a2}$  é dada por:  $H_{a2} : l \in n(Ax - \nabla l, \tilde{\sigma}_0^2 \Sigma_{Lb})$ .

Na hipótese alternativa  $H_{a1}$  assume-se que os pesos das observações devem ser adaptados, o que não será tratado neste trabalho.

A hipótese alternativa  $H_{a2}$  assume-se que existem erros grosseiros nas observações (i.e.,  $\nabla l \neq 0$ ).

Para a localização de erros grosseiros (*outliers*), comumente são aplicados os testes data snooping de Baarda e o teste Tau de Pope, sendo abordado neste trabalho somente o teste para localização de erros grosseiros somente o data snooping.

### 3.11.3 Teste data snooping

A aplicação da técnica data snooping é um processo combinado de detecção de *outlier* e localização e eliminação de erros grosseiros para investigar quais observações contém erros, que causam os *outlier(s)*, justificando assim, a eliminação da observação (KUANG, 1996).

Embora os resíduos após o ajustamento da rede sejam conhecidos, os erros grosseiros  $\nabla l$  não são. Deste modo, não tem como determinar quais observações estão eivadas de erros grosseiros. Portanto, se existe razão para acreditar que a hipótese nula  $H_0$  foi rejeitada pela presença de erros grosseiros nas observações (i.e.  $H_{a2}$  é verdade), uma etapa importante é localizar e eliminar os erros grosseiros presentes nas observações. Contudo, a hipótese alternativa  $H_{a2}$  é um tanto geral,



pois não fornece informações sobre elementos individuais do vetor dos erros grosseiros  $\nabla l$ .

Deste modo é necessário propor uma hipótese alternativa  $H_{a2i}$  mais simples e específica, que irá restringir a relação entre os resíduos estimados  $\hat{v}$  e os erros grosseiros  $\nabla l$  (KUANG, 1996).

A técnica data snooping de Baarda assume que apenas uma observação por vez, contém erro grosseiro. A expressão da hipótese básica e a hipótese alternativa mais específica é então dada por:

$$H_0 : \nabla l_i = 0 \text{ contra } H_{a2i} : \nabla l_i = c_i \nabla l \neq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.117)$$

onde:  $c_i = (00 \dots 010 \dots 0)^T$  é um vetor de zeros com exceção da  $i$ -ésima posição que tem valor 1, ou seja, refere-se a posição da observação analisada,  $\nabla l$  é a magnitude do erro grosseiro na  $i$ -ésima observação  $l_i$ .

A estatística escolhida para testar a hipótese nula  $H_0$  contra a hipótese alternativa  $H_{a2i}$ , considerando a correlação das observações, é dada segundo (KUANG, 1996) por:

$$w_i = \frac{-c_i^T P \hat{v}}{\sigma_0^2 \sqrt{c_i^T P Q_{\hat{v}} P c_i}} \quad (3.118)$$

onde:

$Q_{\hat{v}}$  é a matriz cofatora dos resíduos.

No caso em que as observações são não correlacionadas, a equação (3.118) reduz aos resíduos padronizados, dados por:

$$|w_i| = \frac{\hat{v}_i}{\sqrt{r_i} \sigma_{li}} = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}} \quad (3.119)$$

onde,

$$\sigma_{\hat{v}_i} = \sqrt{r_i} \sigma_{li} \quad (3.120)$$

A estatística  $w_i$  sob a hipótese nula  $H_0$  tem distribuição normal com média zero e variância igual a 1, i.e.,

$$w_i | H_0 \in n(0,1) \quad (3.121)$$

De acordo com o princípio do teste bilateral, dado o nível de significância  $\alpha_0$ ,  $H_0$  é rejeitado se:

$$w_i < n_{\alpha_0/2}(0,1) \quad (3.122)$$

ou

$$w_i > n_{1-\alpha_0/2}(0,1) \quad (3.123)$$

em outras palavras, a hipótese nula é aceita se:

$$n_{\alpha_0/2}(0,1) \leq w_i \leq n_{1-\alpha_0/2}(0,1) \quad (3.124)$$

onde:  $n_{\alpha_0/2}(0,1)$  e  $n_{1-\alpha_0/2}(0,1)$  são os limites inferior e superior respectivamente da estatística  $w_i$  calculada da função distribuição de probabilidade normal padronizada sob nível de significância  $\alpha_0$  com média zero e variância 1.

O data snooping é um teste estatístico unidimensional, examinando um resíduo padronizado por vez, e deste modo o procedimento é repetido se existir mais de um erro grosseiro. Segundo Kuang (1996), o nível de significância sugerido é  $\alpha_0 = 0,001$ , que leva a um valor limite de 3,29. Assim, a hipótese nula é aceita se o enésimo resíduo detectado como *outlier*, for:

$$|w_i| > 3,29 \quad (3.125)$$

ou

$$|v_i| > 3,29\sigma_{v_i} \quad (3.126)$$

onde:

$\sigma_{v_i}$  = é o desvio padrão da i-ésima observação.

Pode ser observado que a estatística  $w_i$  é calculada considerando o conhecimento da precisão da observação  $\sigma_{v_i}$ . Portanto, o teste data snooping só é confiável quando se tem um bom conhecimento das propriedades estocásticas das observações.

### 3.12 MEDIDAS DE QUALIDADE DE REDE GEODÉSICA

Após exame do modelo matemático e verificação da presença de *outliers* nas observações, os resultados da rede poderão ser disponibilizados para o uso das atividades a que se destinam. Em adição aos parâmetros estimados e suas precisões, medidas de qualidade da rede poderão ser apresentadas. De acordo com Kuang (1996), a medida de qualidade de uma rede de controle, de densificação ou de monitoramento é descrita em geral por critérios de precisão, confiabilidade, sensibilidade e custos.

O critério de precisão da rede descreve como as precisões das observações afetam os resultados por meio da geometria da rede. É uma medida característica da rede na propagação de erros aleatórios, considerando a ausência de erros grosseiros e sistemáticos nas observações (KUANG, 1996).

O critério de confiabilidade de acordo com Leick (2004), Moraes (2007) refere-se a controlabilidade das observações, ou seja, se um erro é detectável e qual a influência do erro não detectável nos resultados do ajustamento.

Os erros não eliminados das observações quando da aplicação de testes estatísticos ocasionam alteração das coordenadas resultantes do processo de estimação. Por isso que são necessárias medidas que proporcionem informações de quão as observações são confiáveis (MORAES, 2007, LEICK, 2004).

De acordo com Baarda (1967, 1968), Leick (1995, 2004), Kuang (1996), Moraes (2007) e Teixeira (2003), a confiabilidade se subdivide em confiabilidade interna e confiabilidade externa. A primeira quantifica a menor porção do erro existente na observação que pode ser localizado com dada probabilidade, ou seja, o limite inferior para um erro ser detectado. A segunda quantifica a influência dos possíveis erros não detectados nas coordenadas dos pontos.

O critério de sensibilidade de uma rede de monitoramento de acordo com Even-Tzur (2005) refere-se à capacidade de detectar, medir deslocamentos e deformações na área coberta pela rede.

O ultimo critério referente a custos, de acordo com Kuang (1996) refere-se aos custos para realização dos levantamentos de campo e irá depender da importância e da especificação do projeto.

Neste trabalho não será abordado o conceito de sensibilidade nem o critério custos.

### 3.12.1 Medidas de Precisão

De acordo com Leick (2004), acurácia é o grau de afastamento das observações, ou quantidade derivada destas, em relação ao valor verdadeiro e precisão é o grau de dispersão das observações repetidas em iguais condições em relação a média das repetidas observações. De maneira análoga Moraes (2007) afirma que precisão é a medida de dispersão das observações em torno de um valor médio. Acurácia é a medida de afastamento deste valor médio, em relação ao valor verdadeiro. A medida de acurácia depende destas duas componentes: precisão e correção (MORAES, 2007).

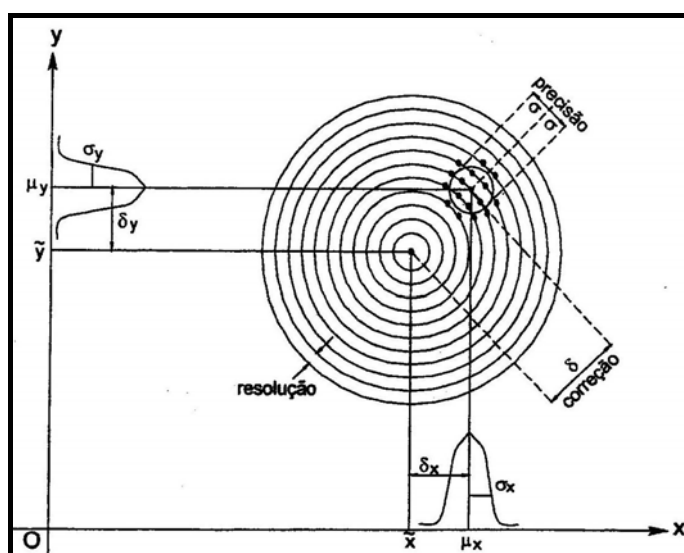


FIGURA 2 - PRECISÃO E CORREÇÃO COMO CRITÉRIO DE ACURÁCIA  
 FONTE: SCHIMIDT (1997) APUD MORAES (2007).<sup>2</sup>

Na FIGURA 2, os elementos  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\delta_x$  e  $\delta_y$  representam respectivamente a projeção do valor verdadeiro, do valor médio amostral e da correção projetados nos eixos x e y,  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ , representam o desvio padrão dos n valores observados.

Na matriz variância covariância dos parâmetros estimados  $\Sigma_{\hat{x}_a} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T P A)^{-1}$  encontram-se informações do critério de precisão, na diagonal principal encontram-se as variâncias das coordenadas e fora desta, as covariâncias.

<sup>2</sup> SCHIMIDT, H. (1997): Was ist Genauigkeit? – Szun Einfluss Systematischer Abweichung auf Mess – und Ausgleichungsergebnisse – **Vermessungswesen und Raumordnung**. Bonn, v.59, n.4, p. 212-228.

### 3.12.2 Região de Confiança para os Parâmetros Ajustados

A equação da elipse dos erros na forma matricial de acordo com Gemael (1994) é dada por:

$$(X - U_x)^T \Sigma_x^{-1} (X - U_x) = 1 \quad (3.127)$$

onde:  $X$  e  $U_x$  com dimensão  $2 \times 1$ .

ou pela translação:

$$X^T \Sigma_x^{-1} X = 1 \quad (3.128)$$

Tem-se que a equação (3.129) representa uma família de elipses dos erros (GEMAEL, 1987).

$$X_2^T \Sigma_x^{-1} X_1 = K^2 \quad (3.129)$$

Fazendo  $K^2 = K_i$  fixa-se a elipse de semi-eixos:

$$a_i = k_i \sqrt{\sigma_{\max}^2} \quad (3.130)$$

$$b_i = k_i \sqrt{\sigma_{\min}^2} \quad (3.131)$$

A forma quadrática da equação (3.129) tem distribuição qui-quadrado com dois graus de liberdade (GEMAEL, 1987).

$$k^2 \rightarrow \chi^2 \quad (3.132)$$

Prefixando o nível de significância por  $\alpha$ , a probabilidade por  $(1 - \alpha)$  e graus de liberdade igual a 2, pode-se obter das tabelas de distribuição qui-quadrado  $\chi^2$  o valor correspondente de  $k^2$  (GEMAEL, 1994).

No QUADRO 2, encontram-se os valores do nível de confiança,  $K^2$  e os fatores que serão utilizados para escalar os semi-eixos maior e menor das elipses do erro.

$P = (1 - \alpha)$	$K^2$	$k_i$ * semi – eixos
0,995	10,597	3,251
0,990	9,210	3,035
0,975	7,378	2,716
0,950	5,992	2,448
0,900	4,605	2,146
0,750	2,773	1,665
0,500	1,386	1,777
0,390	1,000	1,000

QUADRO 2 – REGIÃO DE CONFIANÇA DE FATORES MULTIPLICATIVOS DOS SEMI-EIXOS DAS ELIPSES DE ERRO  
 FONTE: ANDERSON E MIKHAIL (1998)

As componentes do vetor  ${}_2X_1$  são as coordenadas ajustadas da estação; a probabilidade de que a posição calculada caia no interior ou sobre a superfície da elipse  $k^2 = 5,992$  é de 95%.

A partir da MVC dos parâmetros ajustados calculam-se os elementos das elipses dos erros, estes irão delimitar uma região de 39,4% de probabilidade. Para que estes delimitem uma região de 95% de probabilidade, bastam ser multiplicados por 2,448 conforme apresenta o QUADRO 2.

Na distribuição marginal normal unidimensional, a probabilidade de cada variável (parâmetros estimados) encontra-se dentro de uma região limitada por mais ou menos um desvio padrão, ou seja, uma região de confiança de 68,3%.

Uma outra maneira de descrever a qualidade dos parâmetros estimados  $\hat{\Sigma}_x = \hat{\sigma}_0^2 Q_x = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$  é obtida por meio da média do traço da MVC deste, ou seja, é a média das variâncias e é dado (ANDERSON; MIKHAIL, 1998) por:

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{u} \text{tr}(\hat{\Sigma}_x) \quad (3.133)$$

Onde  $\hat{\sigma}_y^2$  é a estimativa média das precisões das coordenadas, e  $u$  é a dimensão da matriz variância covariância dos parâmetros ajustados, ou o número coordenadas (parâmetros).

### 3.12.3 Elipse de erro ou de confiança

Segundo Schofield e Breach (1972), elipse de erro é uma forma conveniente de expressar graficamente a incerteza posicional de um ponto, e sendo absoluta, fornece a medida de incerteza relativa do ponto analisado em relação ao ponto fixo da rede. Ghilani e Wolf (2006) afirmam que a maior vantagem da elipse é que ela oferece subsídios para realização de comparações de maneira visual da precisão relativa das estações. A visualização da forma, tamanho e orientação da elipse de vários levantamentos, pode ser comparada de maneira rápida e significativa GHILANI; WOLF (2006). A forma da elipse padrão depende da geometria da rede, através da matriz projeto e da matriz peso, podendo a interpretação geométrica ser avaliada se a rede e as elipses forem apresentadas em conjunto (LEICK, 2004).

A partir dos dados constantes na matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados ( $\Sigma_x = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$ ) podem-se calcular os elementos (semi-eixos maior e menor e orientação) para a construção elipse de erro padrão, com uma região de confiança de 39,4% de probabilidade.

O tamanho, a forma e a orientação das elipses dos erros padrão são determinados pelas distribuições dos parâmetros  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_{xy}$ , sendo respectivamente desvio padrão da coordenada estimada x, desvio padrão da coordenada estimada y e covariância entre elas. A orientação da elipse em relação ao eixo x e y dependem da correlação entre x e y. Sendo elas não correlacionadas, a elipse torna paralela ao eixo x e y. Se as duas coordenadas x e y têm a mesma precisão, a elipse degenera-se em um círculo.

Na FIGURA 3 são apresentadas seis diferentes combinações da distribuição dos parâmetros (MIKHAIL; GRACIE, 1981).

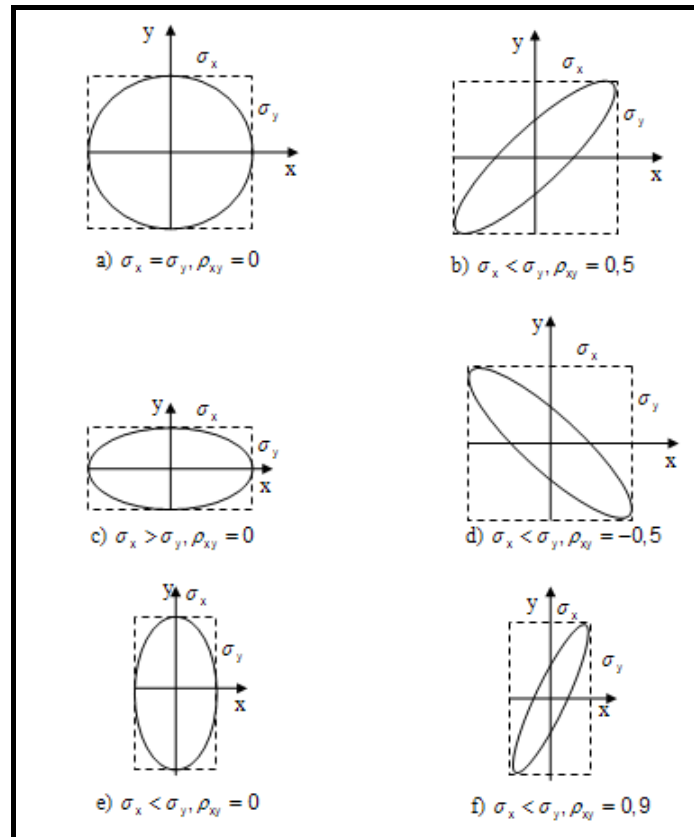


FIGURA 3 – ALGUNS PADRÕES DAS ELIPSES DE ERRO PADRÃO  
 FONTE: MIKHAIL E GRACIE (1981).

A interpretação geométrica da elipse de erro, é que ela delimita a porção do plano que com 39,4% de probabilidade, contém a posição verdadeira do ponto. A elipse de erro pode ser visualizada na (FIGURA 4).

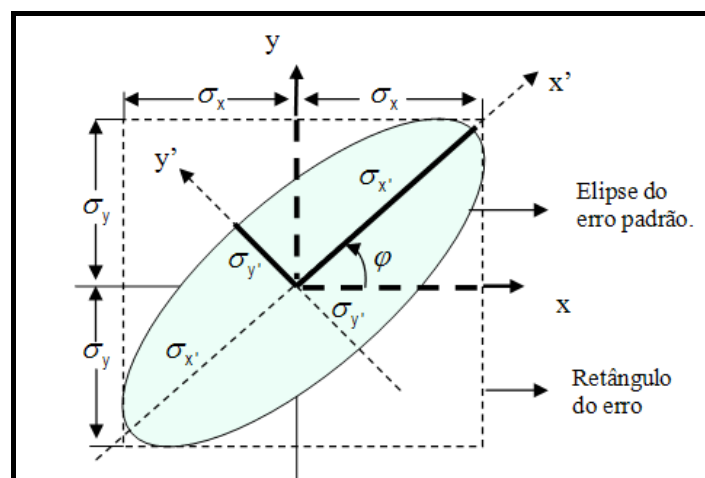


FIGURA 4 - DEFINIÇÃO DOS ELEMENTOS DA ELIPSE DO ERRO OU DE CONFIANÇA  
 FONTE: MIKHAIL E GRACIE (1981).



De acordo com Leick (2004), Ghilani e Wolf (2006), o retângulo formado pelos lados  $2\sigma_x$  e  $2\sigma_y$  é denominado de retângulo do erro padrão podendo ser utilizado como uma aproximação para a elipse de confiança. A diagonal pode se entendida como o erro de posição média  $\hat{\sigma}_p$  :

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad (3.134)$$

As equações para o cálculo dos elementos da elipse dos erros são dadas por (MIKHAIL; ACKERMANN, 1976).

Extraindo a raiz quadrada positiva das variâncias das expressões (3.135) e (3.137) são obtidos respectivamente os semi-eixos maior e menor da elipse de erro padrão.

$$\sigma_{\text{máx.}}^2 = \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}{2} + \left[ \frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2}{4} + \sigma_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (3.135)$$

$$\sigma_{x'} = a = \sqrt{\sigma_{\text{máx.}}^2} \quad (3.136)$$

$$\sigma_{\text{mín.}}^2 = \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}{2} - \left[ \frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2}{4} + \sigma_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (3.137)$$

$$\sigma_{y'} = b = \sqrt{\sigma_{\text{mín.}}^2} \quad (3.138)$$

A orientação da elipse, ângulo entre o eixo das abscissas e semi-eixo maior é calculado pela equação (3.139).

$$\tan 2\gamma = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \quad (3.139)$$

O quadrante de  $2\gamma$  é determinado por meio de análise do sinal do numerador  $2\sigma_{xy}$  e denominador  $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$  da equação (3.139). O ângulo  $\gamma$  é contado a partir do eixo das abscissas no sentido anti-horário.

### 3.12.4 Precisão de coordenada isolada

As precisões das coordenadas cartesianas dos pontos da rede estimadas no processo de ajustamento podem ser determinadas a partir das informações presentes na MVC dos parâmetros estimados e do fator de variância a *posteriori*  $\hat{\sigma}_0^2$ .

De acordo com Kuang (1996), a MVC contém todas as informações em relação às precisões dos pontos. Quanto menor a variância das componentes estimadas, melhor é a precisão do ponto estimado e quanto menor a covariância entre eles, menor é a correlação entre as coordenadas. As precisões das coordenadas dos pontos podem ser determinadas como segue:

$$\sigma_{x_i} = \hat{\sigma}_0^2 \sqrt{\sigma_{xi}^2} \quad (3.140)$$

$$\sigma_{y_i} = \hat{\sigma}_0^2 \sqrt{\sigma_{yi}^2} \quad (3.141)$$

$$\sigma_{z_i} = \hat{\sigma}_0^2 \sqrt{\sigma_{zi}^2} \quad (3.142)$$

onde:

$\sigma_{x_i}, \sigma_{y_i}, \sigma_{z_i}$  : são as medidas de precisão de um ponto isolado;

$\sigma_{xi}^2, \sigma_{yi}^2, \sigma_{zi}^2$  : são as variâncias das coordenadas x, y e z respectivamente.

É importante observar que estas coordenadas correspondem a um sigma, ou seja, 68,3% de probabilidade.

### 3.12.5 Precisão Posicional

De acordo com Leick (1995, 2004) e Kuang (1996), o erro médio posicional no espaço bidimensional é dado por:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_{xi}^2 + \sigma_{yi}^2} = \hat{\sigma}_0^2 \sqrt{\text{tr}Q_{xi}} \quad (3.143)$$

ou

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_{xi}^2 + \sigma_{yi}^2} = \sqrt{\sigma_{\text{max.}}^2 + \sigma_{\text{min.}}^2} \quad (3.144)$$

onde:

$Q_{xi}$  : é a matriz cofatora dos parâmetros estimados.

De acordo com Kuang (1996),  $\sigma_p$  representa o máximo desvio padrão esperado para o ponto.

Do mesmo modo, no espaço tridimensional, a acurácia posicional é calculada por (KUANG, 1996):

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_{x_i}^2 + \sigma_{y_i}^2 + \sigma_{z_i}^2} \quad (3.145)$$

### 3.12.6 Medidas de Confiabilidade

De acordo com Monico (2008), o termo confiabilidade em Geodésia está associado ao controle que as observações exercem sobre o sistema em que elas estão envolvidas, ou seja, as coordenadas da rede geodésica podem sofrer alterações se os erros contidos nas observações não forem eliminados. Deste modo, o teste de confiabilidade tem por objetivo a detecção de possíveis erros não detectados em testes tradicionais, como por exemplo, o teste global do modelo e data snooping (KUANG, 1996; XAVIER, 2000; TEIXEIRA, 2001).

O conceito de medida de confiabilidade introduzido por Baarda (1967, 1968) se subdivide em confiabilidade interna e externa, as quais estão associadas a elementos presentes no teste data snooping. De maneira simplificada os conceitos de confiabilidade interna e confiabilidade externa serão apresentados.

#### 3.12.6.1 Confiabilidade interna

De acordo com Monico (2008), Moraes (2007) e Kuang (1996), a medida de confiabilidade interna quantifica a menor porção do erro existente na observação que pode ser localizado a um nível de significância  $(1 - \alpha_0)$  e poder do teste  $(1 - \beta_0)$ .

Leick (2004) diz que a menor porção do erro detectável para todas as observações, é a medida da capacidade da rede para detecção de erros grosseiros com probabilidade  $(1 - \beta_0)$ .

De acordo com Kuang (1996), sob a hipótese alternativa  $H_a$  (considerando a existência de erros grosseiros nas observações) e assumindo a existência de apenas um erro grosseiro por vez, a magnitude do erro mínimo detectável  $\nabla_{0|i}$  de um erro grosseiro  $\nabla_i$  na observação  $i$ , pode ser calculada por:

$$\nabla_{0|i} = \sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda_0}{c_i^t P Q_V P c_i}} = \sigma_{ii} \sqrt{\frac{\lambda_0}{r_i}} \quad (3.146)$$

onde:  $\sigma_i$ ,  $r_i$  e  $\delta_0$  são respectivamente, o desvio padrão  $i$ -ésima observação, a redundância parcial e o parâmetro de não centralidade.

De outro modo o erro mínimo detectável pode ser obtido usando a estatística  $\nabla w_i$  (equação 3.151). A influência de um erro grosseiro  $\nabla l_i$  na observação  $l_i$  na estatística  $w_i$  é dada por (KUANG, 1996):

$$\delta_i = \nabla w_i = -\frac{\nabla v_i}{\sigma_{li}\sqrt{r_i}} = \frac{\nabla_{li}\sqrt{r_i}}{\sigma_{li}} \quad (3.147)$$

Deste modo, a influência do erro grosseiro na observação desloca a função de distribuição de probabilidade de  $w_i$  e de  $\delta_i$ . Deste modo, sob a hipótese alternativa  $H_{a2}$  a estatística  $w_i$  segue a distribuição normal não central, com parâmetro de não centralidade  $\delta_i$  e variância igual a unidade, i.e.,

$$w_i | H_a \in n(\delta_i, 1) \quad (3.148)$$

Tem-se que o valor do erro grosseiro  $\nabla l_i$  e o parâmetro de centralidade  $\delta_i$  não são conhecidos, de modo que o a probabilidade  $\beta$  não pode ser calculada na prática. A relação inversa entre potência do teste e parâmetro de não centralidade é dada por:

$$\delta = \delta(\beta, \alpha) \quad (3.149)$$

Para o nível de significância  $\alpha_0$  e potência do teste  $1 - \beta_0$  o limite inferior  $\delta_0$  de  $\delta$  que é detectável pelo teste estatístico é dado por:

$$\delta_0 = \delta(\beta_0, \alpha_0) \quad (3.150)$$

De acordo com Kuang (1996), o limite inferior para detecção de erros grosseiros  $\nabla_{0l_i}$  pode ser obtido pela substituição da influência  $\delta_i$  do erro grosseiro no teste estatístico pelo limite inferior  $\delta_0$ , i.e.

$$\nabla_{0l_i} = \sigma_{li} \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \quad (3.151)$$

As redundâncias parciais das observações são obtidas da diagonal principal da matriz redundância  $\mathbf{R}$  dada por (KUANG, 1996, LEICK, 2004):

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P} = \mathbf{Q}_v\mathbf{P} = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \sum_v \mathbf{P} \quad (3.152)$$

onde:

$\mathbf{Q}_v$  = é a matriz cofatora dos resíduos

A redundância parcial de acordo com Leick (1995) é a contribuição da  $i$ -ésima observação no grau de liberdade total e varia de 0 a 1. No caso de redes GPS, a soma da redundância parcial de cada vetor poderá variar de 0 a 3, visto que cada componente do vetor é considerado como uma observação.

A redundância parcial  $r_i$  próximo a 1, de acordo com Leick (1995, 2004) é preferida e indica que o ganho para o ajustamento é alto. Os valores próximo a 0, podem indicar erros de magnitude significativas, pois os resíduos podem não refletir de maneira significativa o erro embutido na observação.

No QUADRO 3, de acordo com Moraes (2007), encontram-se os intervalos recomendados para orientação da controlabilidade das observações de acordo com o número da redundância parcial para cada observação.

Intervalo	controlabilidade
$0 \leq r_i < 0,01$	Não há
$0,01 \leq r_i < 0,1$	ruim
$0,1 \leq r_i < 0,03$	suficiente
$0,3 \leq r_i \leq 1$	boa

QUADRO 3 – CONTROLABILIDADE DAS OBSERVAÇÕES POR REDUNDÂNCIAS PARCIAIS  
 FONTE: MURLE E BILL (1984) <sup>3</sup>CITADO POR MORAES (2007).

Tem-se que  $\beta$  é dado por (KUANG, 1996):

$$\beta = \phi(n_{\alpha/2} - \delta_i) \quad (3.153)$$

onde:  $\phi$  representa a função distribuição de probabilidade de  $w_i$  sob a hipótese alternativa.

A função distribuição de probabilidade  $\phi$  é calculada por:

$$\phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \phi(\xi) d\xi \quad (3.154)$$

Quando são fixados os valores de  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , o parâmetro de não centralidade pode ser calculado pela equação (3.155):

$$\delta_0 = n_{\alpha_0/2} - \phi^{-1}(\beta_0) \quad (3.155)$$

<sup>3</sup> MÜRLE, M.; BILL, R. (1984): Zuverlässigkeits- und Genauigkeitsuntersuchung ebener geodätischer Netze. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten*, Karlsruhe, v. 89, n. 2, p. 45-62.

Das equações (3.154) e (3.155) tem-se (KUANG, 1996):

$$\delta_0 = \sqrt{\lambda_0} \quad (3.156)$$

Deste modo, poder-se-á obter o valor de  $\delta_0$  a partir do parâmetro de não centralidade obtido no monograma de Baarda, FIGURA 5.

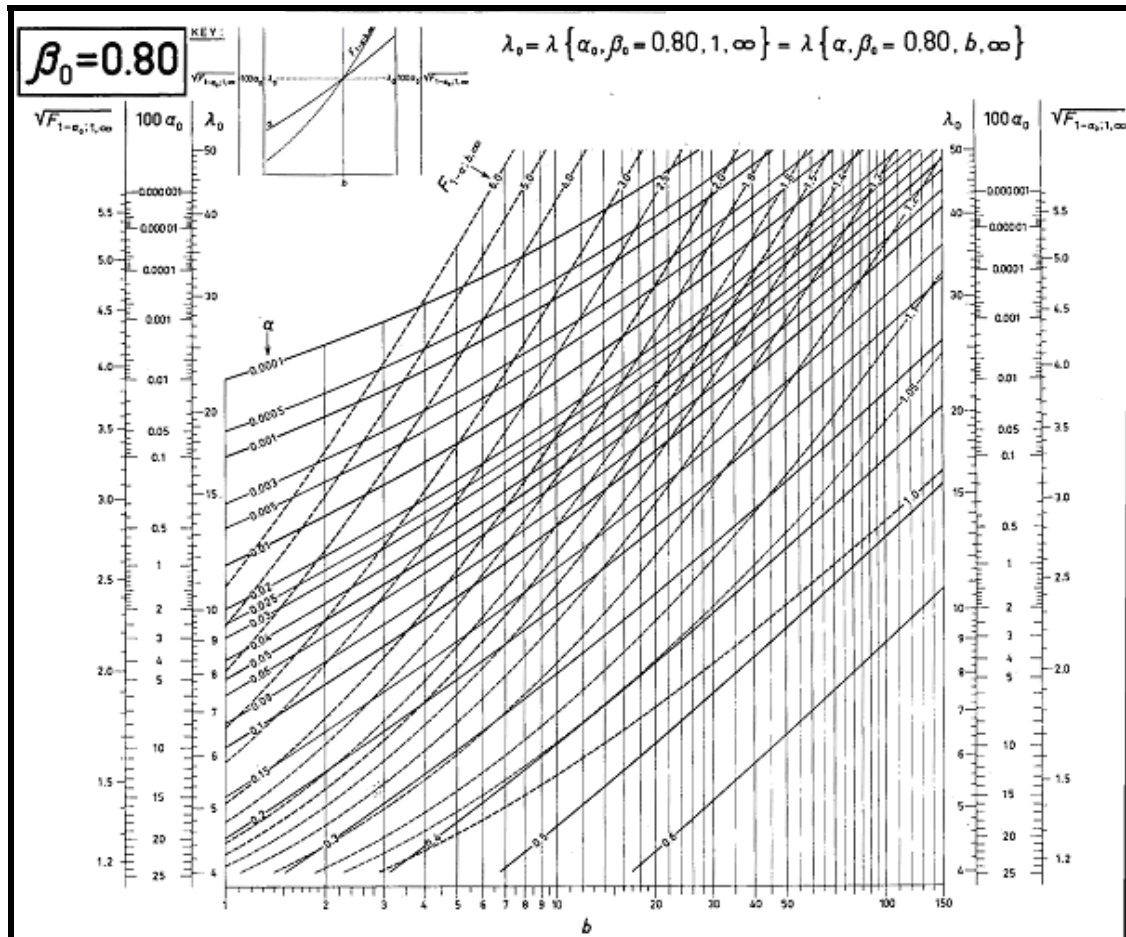


FIGURA 5 – MONOGRAMA DE BAARDA, POTÊNCIA DO TESTE  $(1 - \beta_0) = 0.8$ .

FONTE: BAARDA (1968).

Os parâmetros de não centralidade  $\delta_0$  e  $\lambda_0$  são os desvios mínimos da hipótese alternativa em relação à hipótese nula que podem ser detectados com uma probabilidade  $\beta_0$ .

Baarda (1968) propôs o teste global para a detecção e data snooping para localização de erros grosseiros de pequena magnitude. Podendo escolher diferentes níveis de significância  $\alpha$  e  $\alpha_0$  assim como potência do teste  $1 - \beta$  e  $1 - \beta_0$  para o teste global e data snooping respectivamente (KUANG, 1996).

Baarda (1968) propôs que a potência do teste fosse a mesma para ambos os testes, variando somente o nível de significância. O nível de significância para o teste global do modelo é  $\alpha$ , porém para o teste data snooping é  $\alpha_0$ . Se  $\beta = \beta_0$  (constante), os níveis de significância  $\alpha$  e  $\alpha_0$  são relacionados pelo parâmetro de não centralidade  $\lambda_0$ .

O leitor interessado em maiores detalhes poderá encontrar em (BAARDA, 1967, 1968, KAVOURAS, 1982, KUANG, 1996, LEICK, 1995, 2004, CASPARY, 1987, MORAES, 2007).

Em Geodésia, Baarda (1968) recomenda a utilização do nível de significância  $\alpha_0 = 0,001$  e, potência do teste igual a  $1 - \beta_0 = 0.80$ .

A partir do monograma proposto por Baarda (1968) apresentado na FIGURA 5 com potência do teste de  $1 - \beta_0 = 0.80$  e, escolhendo-se o nível de significância recomendado por ele de  $\alpha_0 = 0,001$ , obtém-se o parâmetro de não centralidade  $\lambda_0 = 17,1$  e como  $\delta_0 = \sqrt{\lambda_0}$ , tem-se que  $\delta_0 = \sqrt{17,1} = 4,13$ .

Kuang (1996) apresenta os valores tabelados disponíveis no QUADRO 4.

$1 - \beta_0 \cdot \alpha_0$	0,01%	0,10%	1%	5%
50%	3,72	3,29	2,58	1,96
70%	4,41	3,82	3,10	2,48
80%	4,73	4,13	3,42	2,80
90%	5,17	4,57	3,86	3,24
95%	5,54	4,94	4,22	3,61
99%	6,22	5,62	4,90	4,29
99,90%	6,98	6,38	5,67	5,05

QUADRO 4 – PARÂMETROS DE NÃO CENTRALIDADE EM FUNÇÃO DO PODER DO TESTE  $1 - \beta_0$  E NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA  $\alpha_0$

FONTE: KUANG (1996)

Pode-se observar na equação (10), que o limite inferior  $\nabla_0 |_i$ , presente na  $i$ -ésima observação depende (Förstner, 1979<sup>4</sup>, Benning, 1983<sup>5</sup> apud Moraes, 2007):

<sup>4</sup> FÖRSTNER, W. (1974): Das Programm TRINA Zur Ausgleichung um Gütebeurteilung Geodästischer Lagenetze. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, Stuttgart, v. 14, n. 2, p. 61-72.

<sup>5</sup> BENNING, W. (1983): Tunneldurchschlagsprognosen Mittel Pseudostrecken. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, Stuttgart, v. 108, n. 6, p. 220 - 226.

- a) Da precisão das observações, a qual é descrito pelo desvio padrão  $\sigma_i$ ;
- b) Da geometria da rede e das observações, sendo caracterizada pela redundância local ou parcial  $r_i$ ;
- c) Do nível de significância  $\alpha_0$ ;
- d) Do poder do teste, ou seja, a probabilidade para detectar observação com erro grosseiro; e
- e) Do parâmetro de não centralidade.

De acordo com Leick (1995, 2004), o valor estimado para o possível erro embutido na observação é dado por:

$$\nabla l_i = \left| \frac{v_i}{r_i} \right|, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.157)$$

Onde  $v_i$  é o resíduo da  $i$ -ésima observação.

De acordo com Leick (1995, 2004) e Kuang (1996), o erro mínimo detectável ao nível de significância  $\alpha_0$  e potência do teste  $1 - \beta_0$  serão verificados se:

$$\nabla l_i \geq \nabla_0 l_i \quad (3.158)$$

De acordo com Leick (1995, 2004) e Moraes (2007), os erros grosseiros são detectados em  $100(1 - \beta_0)$  dos casos; e os erros grosseiros permanecem não detectados em  $100\beta_0\%$  dos casos.

Maiores detalhes consultar (BAARDA, 1967, 1968, KAVOURAS, 1982, KUANG, 1996, LEICK, 1995, 2004, CASPARY, 1987, MORAES, 2007).

### 3.12.6.2 Confiabilidade externa

Segundo Leick (2004), a confiabilidade externa trata da influência dos erros não detectáveis nas coordenadas dos pontos. De acordo com Leick (2004) e Kuang (1996), a confiabilidade externa quantifica a influência dos erros não detectados ou localizados nos resultados finais, ou seja, nas coordenadas.

De acordo com Leick (1995) para o modelo paramétrico ou das equações de observações, o vetor das correções  $X$  (solução das equações normais no



ajustamento de observações geodésicas), na presença de um erro grosseiro  $\nabla l_i$  é expresso por:

$$X = -N^{-1}A^T P(L - e_i \nabla l_i) = -N^{-1}A^T P L + N^{-1}A^T P e_i \nabla l_i = X + \nabla X \quad (3.159)$$

O efeito do erro grosseiro das observações no vetor dos parâmetros estimados é dado por:

$$\nabla X = N^{-1}A^T P e_i \nabla l_i \quad (3.160)$$

Os valores de (3.160) são normalmente denominados de confiabilidade externa local. Os erros afetam todos os parâmetros. O efeito dos erros grosseiros mínimos detectáveis  $\nabla_{oi}$  no vetor solução é dado por:

$$\nabla X_{oi} = N^{-1}A^T P e_i \nabla_{oi} \quad (3.161)$$

onde:

**N** é a matriz dos coeficientes das equações normais, **A** é a matriz projeto, ou Matriz das derivadas das equações de observação em relação aos parâmetros, **P** é a matriz dos pesos das observações, **L** é o vetor termos independentes, ou vetor da diferença entre os valores das observações calculadas e as observadas,  $e_i$  é a i-ésima coluna de uma matriz identidade  $n \times n$ .

## 4 METODOLOGIA

Visando alcançar os objetivos propostos nas seções (1.2) foi realizada uma campanha no dia 8/8/2008 ou DOY (dia do ano) igual a 221, constando de três sessões de observação descritos na (seção 4.1). A etapa de levantamento de campo foi subdividida na fase de planejamento e metodologia de campo empregada.

### 4.1 PLANEJAMENTO

Foi definida a área a ser levantada, as estações disponíveis e necessárias para compor uma rede geodésica determinada por GPS.

Foi planejado e realizada uma campanha GPS no DOY igual a 221 sendo esta, composta de 3 sessões de observação com duração média de duas horas e intervalo de meia hora entre as mesmas. Deste modo, foi possível obter linhas de base independentes suficientes para a formação de figuras geométricas, garantindo maior rigidez e confiabilidade na determinação das coordenadas dos pontos.

A rede GPS é composta de sete (7) estações, sendo três estações ativas e 4 passivas. Das estações ativas duas são ocupadas por receptores de dupla frequência (L1+L2) e outra por um receptor de uma frequência (L1). Uma estação de dupla frequência, pertencente a Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC) denominada de UFPR, situada no campus do Centro Politécnico. A outra estação pertence à Rede MANFRA de Monitoramento Contínuo (RMMC) e é denominada de UNICENP, é ocupada por receptor de dupla frequência, situa-se na cidade de Curitiba no Centro Universitário Positivo (Unicenp) e é homologada pelo IBGE. A última estação ativa (TRS) é ocupada por receptor de uma frequência, situa-se em Curitiba e pertence a empresa Santiago e Cintra (S&C) e não é homologadas pelo IBGE. Suas coordenadas foram obtidas por meio de um ajustamento através da Rede Geodésica da SEMA/IBGE.

As demais estações ocupadas (passivas) estão localizadas no Campus Centro Politécnico da UFPR, mais especificamente nas proximidades da pista de atletismo.

As estações localizadas na UFPR são materializadas por pilares de concreto com dispositivos de centragem forçada.

Na FIGURA 6 estão indicadas as estações, localizadas na cidade de Curitiba, constituinte da rede.

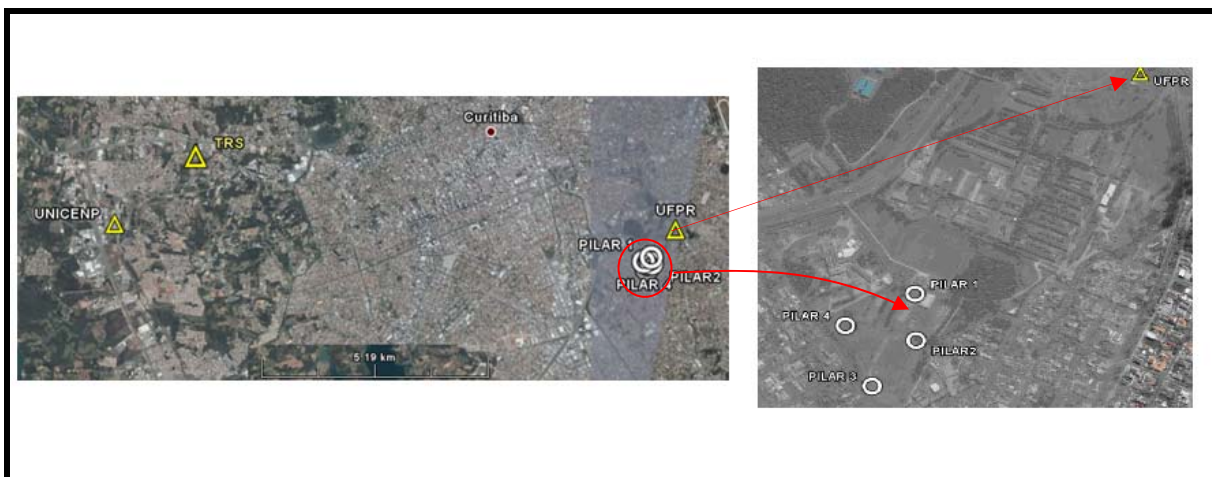


FIGURA 6 – CROQUI DA ÁREA DE ESTUDO

FONTE:GOOGLE EARTH (2008).

A FIGURA 7 ilustra o croqui da rede geodésica GPS utilizada neste trabalho, onde para sua formação foram utilizados 13 vetores ou linhas de base independentes provenientes das três sessões de observações realizadas no dia do ano 221. Um sessão era suficiente para formação da rede, contudo é necessário que a rede seja formada somente por linhas de base independentes, por isso foram realizadas três sessões, além da disponibilidade de linhas de base caso haja necessidade de eliminação de algumas observações no processo de localização de *outliers*.

De acordo com a equação (3.1) cada sessão gera 21 linhas de base, das quais, somente 6 são independentes equação (3.2). Deste modo, as três sessões fornecem 63 linhas de base possíveis, das quais somente 18 são independentes. Como pode observar na FIGURA 7, somente 13 linhas de base das 18 foram utilizadas, pois caso for necessário o descarte de alguma observação, poderá ser utilizado alguma outra linha de base disponível, desde que não seja formado um circuito com vetores de uma mesma sessão de observação.

Para a realização do procedimento descrito na seção 3.2.2 (análise de linhas de base repetidas), será considerada a linha de base (UNICENP – P3) proveniente da 3ª sessão. Este vetor somente será considerado para esta análise, deste modo, não entrará no processo de ajustamento realizado posteriormente.

As estações com triângulo hachurados têm coordenadas conhecidas, as demais coordenadas das demais estações serão estimadas no processo de ajustamento.

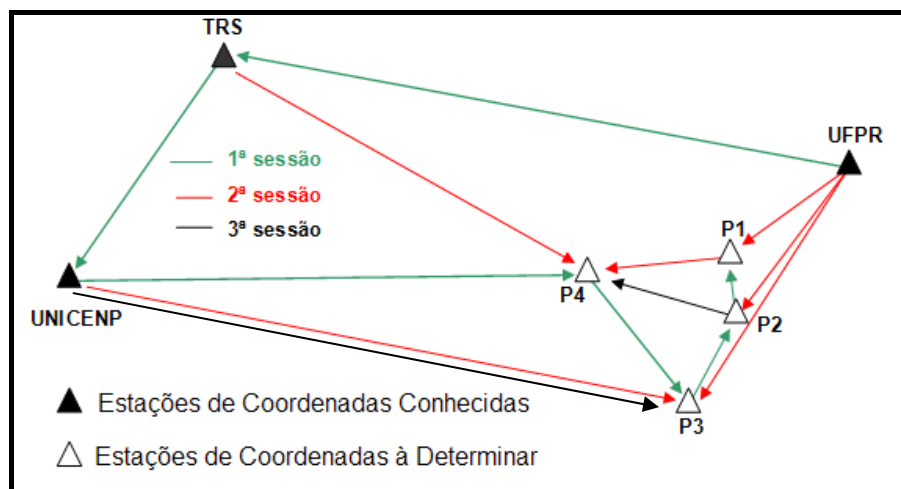


FIGURA 7 – CROQUI DA REDE GPS FORMADA

FONTE: O AUTOR (2009).

No QUADRO 5, encontram-se os comprimentos das linhas de base, em metros, constituintes da rede GPS representada pelo croqui da FIGURA 7.

De	Para	Comprimento da Linha de Base (espacial) (m)
<b>LINHAS DE BASE DA 1ª SESSÃO</b>		
UFPR	TRS	11.159,631
TRS	UNICENP	2.436,171
UNICENP	PILAR 4	12.209,081
PILAR 4	PILAR 3	185,282
PILAR 3	PILAR 2	173,118
PILAR 2	PILAR 1	114,384
<b>LINHAS DE BASE DA 2ª SESSÃO</b>		
UFPR	PILAR 1	869,192
PILAR 1	PILAR 4	185,086
TRS	PILAR 4	10.581,107
UFPR	PILAR 2	950,558
UFPR	PILAR 3	1.123,355
UNICENP	PILAR 3	12.294,534
<b>LINHAS DE BASE DA 3ª SESSÃO</b>		
PILAR 2	PILAR 4	185,140
UNICENP	PILAR 3	12.294,536

QUADRO 5 – COMPRIMENTOS DAS LINHAS DE BASE

FONTE: O AUTOR (2009).

Do QUADRO 5 verifica-se que o maior comprimento de linha de base (UNICENP – P3) é de 12294,536 metros e a menor linha de base (PILAR2 – PILAR 1) formada é de 114,384 metros. Deste modo, verifica-se que a rede é constituída de linhas de base curtas, onde os comprimentos das linhas de base são menores que 20 km.

## 4.2 METODOLOGIA DE CAMPO

### 4.2.1 Equipamentos Utilizados

Para a realização da campanha GPS, foram empregados equipamentos pertencentes ao Laboratório de Instrumentação Geodésica (LAIG), Laboratório de Topografia (LABTOPO) e Laboratório de Geodésia Espacial (LAGE) da Universidade Federal do Paraná (UFPR). Os equipamentos utilizados para a realização do experimento são:

- 4 receptores (Leica 1200 e 2 Leica 900 CS);
- Antenas: ATX 502, AX 1202;
- Baterias, carregadores, leitores de cartão;
- Chave para retirada da proteção do dispositivo de centragem forçada;
- Programa computacional (Leica Geoffice v.5) para conversão do formato proprietário para o formato independente (*Receiver Independent Exchange Format (RINEX)*);
- Programa Computacional *Trimble Geomatic Office* (TGO) versão 1.63 para a realização do pós-processamento das observáveis GPS;
- Programa MATLAB v 5.23 e Microsoft Excel v 2003, para a realização dos cálculos.

### 4.2.2 Técnicas de Levantamento

Na área em estudo, conforme apresenta a FIGURA 7, foi empregada a técnica de posicionamento relativo estático com a utilização simultânea de sete receptores, sendo seis de dupla frequência e um de uma frequência.

Foram realizadas três sessões de observação com duração de duas horas cada. O intervalo de armazenamento dos dados foi de 5 segundos, mesmo sabendo que a estação UFPR tem intervalo de coleta de 15 segundos e que a mesma iria ditar o intervalo da realização das duplas diferenças no pós-processamento.

Os períodos de ocupação nas três sessões de observação em cada estação que compõe a rede GPS estão no QUADRO 6, a seguir.

1ª Sessão		2ª Sessão		3ª Sessão	
Estações	Período de Ocupação	Estações	Período de Ocupação	Estações	Período de Ocupação
UFPR	23 h 59'	UFPR	23 h 59'	UFPR	23 h 59'
UNICENP	4h 59' 59"	UNICENP	3h 59' 59"	UNICENP	4h 59' 59"
TRS	8h 59' 50"	TRS	8h 59' 50"	TRS	8h 59' 50"
P1	3h 36' 52"	P1	2h 00' 40"	P1	2h 04' 18"
P2	3h 15' 44"	P2	2h 00' 10"	P2	2h 05' 59"
P3	2h 04' 33"	P3	2h 00' 07"	P3	2h 01' 07"
P4	3h 12' 18"	P4	1h 59' 29"	P4	2h 11' 58"

QUADRO 6 – PERÍODO DE OCUPAÇÃO EM CADA ESTAÇÃO NAS DIFERENTES SESSÕES

A duração da sessão de observação de acordo com Hofmann-Wellenhof et al. (2001), depende do comprimento da linha de base, do número de satélites visíveis, da configuração dos satélites, ou seja, sua geometria e do método de posicionamento utilizado. Os valores padrão de duração da sessão de observação (particularmente para comprimentos de linha de base de até 20 km) encontram-se disponível no QUADRO 7.

Receptor	Convencional Estático
L1	30 minutos + 3minutos/ km
L1+L2	20 minutos + 2minutos/ km

QUADRO 7 – DURAÇÃO DA SESSÃO PARA LEVANTAMENTO ESTÁTICO  
 FONTE: HOFMANN-WELLENHOF et al.(2001)

Estes valores são tomados como base a visibilidade de pelo menos quatro satélites, geometria dos satélites favoráveis, e condições atmosféricas normais. Caso sejam rastreados mais satélites, a duração da sessão pode ser reduzida em até 20% (HOFMANN-WELLENHOF *et al*, 2001).

De acordo com Hofmann-Wellenhof *et al.* (2001), restringindo-se as linhas de base até 20 km, acurácia milimétrica poderá ser obtida.

## 5 PÓS-PROCESSAMENTO DAS OBSERVÁVEIS GPS

Inicialmente foi utilizado o programa computacional *Leica Geoffice* v.5 para conversão dos dados nativos dos receptores da Leica para formato RINEX. O pós-processamento dos dados foi realizado no programa computacional da TRIMBLE denominado de *Trimble Geomatic Office* versão 1.63.

Na etapa de realização do pós-processamento no programa computacional TGO, foram utilizadas três estações de referência (UNICENP, UFPR, TRS) para posicionamento relativo das estações P1, P2, P3 e P4.

As coordenadas cartesianas geocêntricas das estações UNICENP e TRS foram obtidas com o programa ProGrid desenvolvido pelo Programa de Mudança de Referencial Geodésico (PMRG) e Programa de Infraestrutura Geoespacial Nacional (PIGN) que permite a transformação de coordenadas entre sistemas de referência em uso no Brasil (IBGE, 2008).

As coordenadas cartesianas geocêntricas e geodésicas das estações de referência no WGS 84 e SIRGAS 2000 são apresentadas no QUADRO 8.

Estação	X (m)	Y (m)	Z (m)
UFPR (SIRGAS 2000)	3763751,681	-4365113,832	-2724404,715
UNICENP (SIRGAS 2000)	3754013,388	-4373589,728	-2724328,192
TRS (WGS 84)	3755867,290	-4372869,839	-2722920,553
Estação	Latitude ( $\varphi$ )	Longitude ( $\lambda$ )	Alt. Geométrica (h)
UFPR (SIRGAS 2000)	-25° 26' 54,1269"	-49° 13' 51,4372"	925,81
UNICENP (SIRGAS 2000)	-25°26'50,8424"	-49°21'33,4463"	960,15
TRS (WGS 84)	-25°26'00,30697"	-49°20'26,33174"	952,840

QUADRO 8 – COORDENADAS CARTESIANAS E GEODÉSICAS DAS ESTAÇÕES DE REFERÊNCIA

De acordo com Grupo de Trabalho 2 (GT2) – Definição e Estratégias para Materialização do Sistema de Referência Geodésico do Projeto de Mudança do Referencial Geodésico (PMRG), o WGS 84 (G1150) (G = utilização do GPS na realização e 1150 diz respeito a semana GPS na qual foi feita a realização) é compatível ao ITRF2000, (SIRGAS 2000), ao nível de precisão de 1 centímetro. Deste modo, foi considerada a coincidência dos dois sistemas de referência.

Como o programa computacional TGO realiza o pós-processamento de linha de base por linha de base, em vez de realizar o pós-processamento de todas as linhas de base possíveis em cada sessão equação (3.2), foram escolhidas somente as independentes para o pós-processamento o que permitiu a realização do pós-processamento em um menor tempo.

Com o objetivo de alcançar uma rede GPS com uma maior rigidez geométrica, confiabilidade e possibilidade de verificação do erro de fechamento do

circuito (seção 3.2.3), as linhas de base independentes foram escolhidas de modo a formar circuitos.

Como parâmetros na realização do pós-processamento foi utilizada uma máscara de elevação de  $15^\circ$ , efemérides transmitidas e modelo de correção troposférico de *Hopfield*. Não foi definido o tipo de algumas antenas no TGO, pois as mesmas não foram encontradas. Como resultado do pós-processamento, tem-se as observações e suas respectivas MVC, as quais são as informações de entrada para a realização do ajustamento paramétrico.

No pós-processamento cada sessão foi pós-processada isoladamente, pois o TGO processa linha de base por linha de base, o que leva a inexistência de covariância entre as componentes das linhas de base. De acordo com Monico (2000), este procedimento é um processo não rigoroso, pois são desconsideradas as covariâncias das componentes vetoriais entre as linhas de base.

As diferenças de coordenadas das linhas de base ( $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ) bem como as MVC destas obtidas na etapa de pós-processamento encontram-se disponível no Anexo 1.

Na FIGURA 8 estão apresentados os *desvios - padrão* das componentes das linhas de base (ordenada esquerda), bem como os comprimentos das linhas de base presentes na rede geodésica GPS (ordenada direita). No eixo da abscissa estão representadas as linhas de base independentes. O comprimento mínimo e máximo da linha de base é de 0,114 km e 12,294 km, respectivamente.

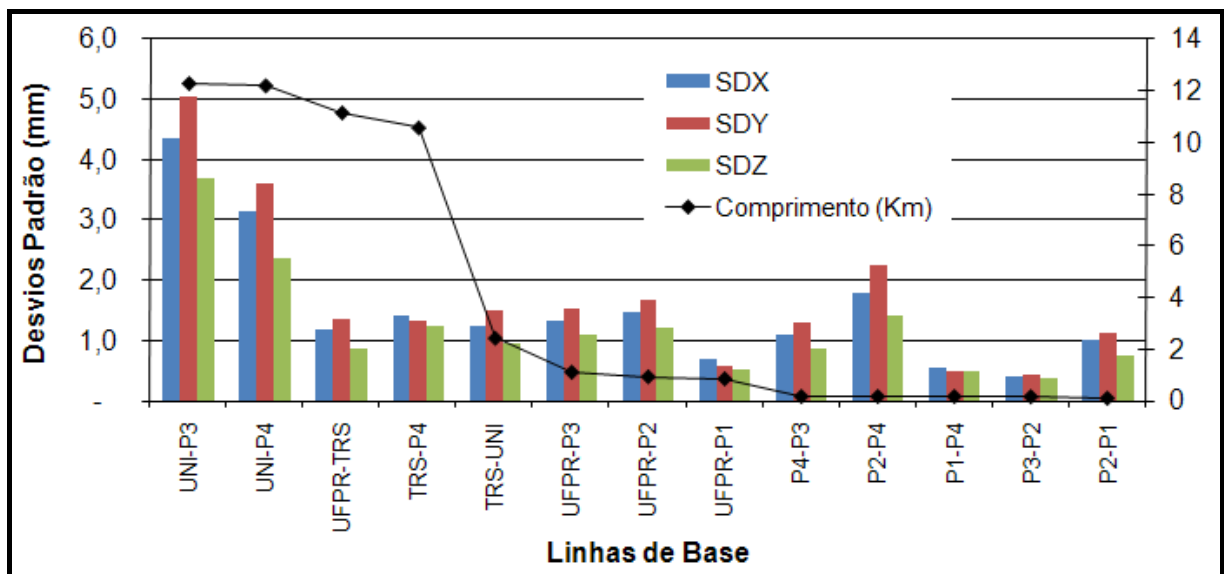




FIGURA 8 – COMPRIMENTO E *DESVIOS* - *PADRÃO* DAS COMPONENTES DAS LINHAS DE BASE

FONTE: O AUTOR (2009).

A precisão média nas componentes dx, dy, dz são da ordem de: 1,5 mm, 1,7 mm e 1,2 mm respectivamente. Nota-se que as melhores precisões (menores valores de desvios padrão) foram obtidas para a linha de base P3-P2 onde as precisões nas três componentes foram de 0,4 mm e as piores precisões (maiores valores de desvios padrão) obtidas foram detectadas na linha de base UNI-P3 onde as magnitudes foram de 4,4 mm para dx, 5,1 mm para dy e 3,7 mm para dz.

Pode-se observar na FIGURA 8, que de modo geral, as precisões melhoram à medida que as distâncias entre os receptores diminuem, o que era esperado.

De posse das observações (dx, dy, dz) bem como a MVC associada a elas, parte-se para análise preliminar da rede de acordo com as seções (3.2.1), (3.2.2) e (3.2.3) para posteriormente partir para a realização do ajustamento das observações pelo método paramétrico dos mínimos quadrados.

## 6 ANÁLISE PRELIMINAR DA REDE

De posse das observações serão realizadas três análises preliminares antes da realização do ajustamento. Estas análises encontram-se descritas na seção (3.2).

Observa-se no QUADRO 9, os vetores linhas de base obtidos na etapa de pós-processamento da rede. Note que foram observadas duas linhas de bases entre pontos de controle fixos, a saber: UF-T e T-UNI.

Linha de base obs.	DX (m)	DY (m)	DZ (m)
UF-T	-7884,916	-7756,407	1484,458
T-UNI	-1853,442	-719,407	-1407,883
UNI-P4	8973,304	8245,628	-742,349
P4-P3	3,880	107,073	-151,161
P3-P2	120,164	27,156	121,626
P2-P1	21,427	-46,065	102,482
UF-P1	-619,569	-142,034	-592,837
P1-P4	-145,469	-88,169	-72,949
T-P4	7119,888	7526,185	-2150,249
UF-P2	-640,961	-96,010	-695,351
UF-P3	-761,135	-123,157	-816,966
UNI-P3	8977,187	8352,683	-893,517
P2-P4	-124,041	-134,232	29,539
UNI-P3	8977,174	8352,700	-893,512

QUADRO 9 – LINHAS DE BASE OBSERVADAS PARA A FIGURA 8

As coordenadas cartesianas geocêntricas das estações TRS (T), UNICENP (UNI.) e UFPR (UF) estão disponíveis no QUADRO 7.

### 6.1 ANÁLISE DE LINHAS DE BASE FIXAS

De posse das diferenças das coordenadas cartesianas das estações fixas (T), (UNI) e (UF) e das diferenças de coordenadas observadas entre estas estações, procede-se o cálculo da acurácia obtida na determinação destas linhas de base de acordo com o descrito na seção 3.2.1.

O QUADRO 9, apresenta as precisões relativas em partes por milhão (ppm) entre as componentes das linhas de base observadas e calculadas a partir das coordenadas das estações fixa. As linhas de base são: (UF-T) e (T-UNI).

Componente	Medido (m)	Fixo (m)	Diferenças (m)	Comprimento (m)	ppm
$\Delta X_{UF-T}$	-7884,916	- 7884,391	0,525	11158,943	47,05
$\Delta Y_{UF-T}$	-7756,407	- 7756,007	0,40		35,85
$\Delta Z_{UF-T}$	1484,458	1484,1 62	0,296		26,53
$\Delta X_{T-UNI}$	-1853,442	-1853,902	0,460	2436,522	188,79
$\Delta Y_{T-UNI}$	-719,407	-719,889	0,482		197,82
$\Delta Z_{T-UNI}$	-1407,883	-1407,639	0,244		100,14

QUADRO 10 – COMPARAÇÃO DE COMPONENTES DE LINHAS DE BASE FIXAS E MEDIDAS

A acurácia obtida para as linhas de base da classe C tem valores maiores que 20 ppm. As finalidades dos levantamentos presentes nesta classe se destinam a: levantamentos de controle para mapeamento, levantamento de propriedades, e levantamentos para projetos de engenharia seção (3.2.1).

As diferenças em ppm entre as linhas de base observadas e fixas neste exemplo, teve uma acurácia relativa de aproximadamente 1:20000 e 1:5000 para a 1ª e 2ª linha de base analisada respectivamente. Apesar das diferenças das componentes das linhas de base serem semelhantes, o fato do comprimento da primeira linha de base ser maior, garantiu maior valor de acurácia relativa.

Convém ressaltar que o receptor instalado na estação denominada de TRS é de uma frequência. As coordenadas desta estação encontram-se no WGS 84 e das estações (UNI e UFPR) estão em SIRGAS 2000.

## 6.2 ANÁLISE DE LINHAS DE BASE REPETIDAS

Este é outro procedimento empregado para verificar a consistência dos dados observados, onde poderão ser eliminados erros grosseiros presentes nas observações. Na seção 3.2.2, encontra-se o procedimento para aplicação desta análise.

O QUADRO 11 apresenta a comparação da linha de base UNI-P3 advindas de duas sessões de observação.

Componente	2 Sessão 1ª Observação (m)	3ª Sessão 2ª observação (m)	Diferença (m)	ppm
$\Delta X_{UNI-P3}$	8.977,187	8.977,174	0,013	1,06
$\Delta Y_{UNI-P3}$	8.352,683	8.352,700	0,017	1,38
$\Delta Z_{UNI-P3}$	-893,517	-893,512	0,005	0,41

QUADRO 11 – ANÁLISE DE LINHAS DE BASE REPETIDAS

Os valores em ppm encontrados no QUADRO 11 poderão ser comparados com os valores constantes no QUADRO 1 da seção (3.2.1).

## 6.3 ANÁLISE DE ERRO DE FECHAMENTO DE CIRCUITOS

De acordo com Ghilani e Wolf (2006), redes geodésicas são geralmente constituídas de circuitos (*loop closed*) conectados. O procedimento para a realização desta análise encontra-se descrito na seção 3.2.3.

Na FIGURA 9 encontra-se numerado de um a sete os circuitos interconectados que constituem a rede GPS formada.

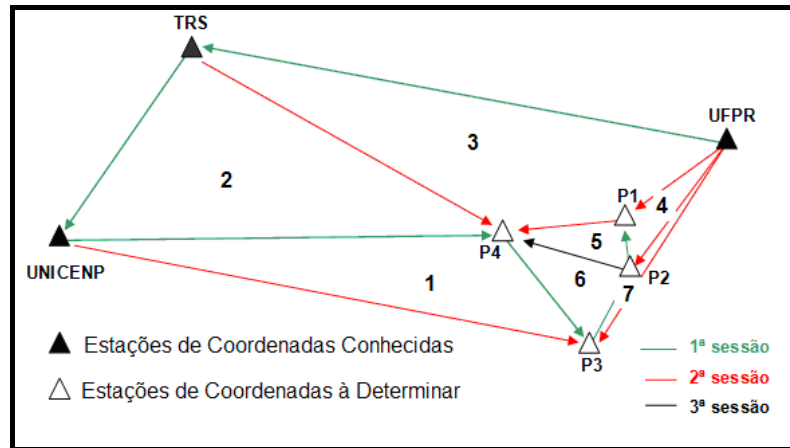


FIGURA 9 – CIRCUITOS FECHADOS INTERCONECTADOS  
 FONTE: O AUTOR (2009).

No QUADRO 12 encontram-se as componentes das linhas de base (m) bem como os erros de fechamento (m) dos circuitos que compõem a rede da FIGURA 11.

1º Circuito	DX	DY	DZ	5º Circuito	DX	DY	DZ
UNI-P4	8973,304	8245,628	-742,349	P1-P2	-21,427	46,065	-102,482
P4-P3	3,880	107,073	-151,161	P2-P4	124,041	134,232	29,539
P3-UNI	-8977,187	-8352,683	893,517	P4-P1	145,469	88,169	72,949
Erro Fechamento	-0,003	0,018	0,007	Erro Fechamento	0,001	0,002	0,006
2º Circuito	DX	DY	DZ	6º Circuito	DX	DY	DZ
UNI-P4	8973,304	8245,628	-742,349	P2-P3	120,164	-27,156	121,626
P4-T	-7119,89	-7526,19	2150,249	P3-P4	-3,88	107,073	151,161
T-UNI	-1853,44	-719,407	-1407,88	P4-P2	124,041	134,232	-29,539
Erro Fechamento	-0,026	0,036	0,017	Erro Fechamento	-0,003	0,003	-0,004
3º Circuito	DX	DY	DZ	7º Circuito	DX	DY	DZ
T-UF	7884,916	7756,407	1484,458	UF-P3	761,135	123,157	816,966
UF-P1	-619,569	-142,034	-592,837	P3-P2	120,164	27,156	121,626
P1-P4	-145,469	-88,169	-72,949	P2-UF	640,961	96,01	695,351
P4-T	7119,888	7526,185	2150,249	Erro Fechamento	-0,01	0,009	0,011
Erro Fechamento	-0,01	0,019	0,005				
4º Circuito	DX	DY	DZ				
UF-P1	-619,569	-142,034	-592,837				
P1-P2	-21,427	46,065	-102,482				
P2-UF	640,961	96,01	695,351				
Erro Fechamento	-0,035	0,041	0,032				

QUADRO 12 – ERRO DE FECHAMENTO DOS CIRCUITOS ESCOLHIDOS

De acordo com Ghilani e Wolf (2006) para propósitos de avaliação dos erros de fechamento, estes serão avaliados em ppm. Procedendo de acordo com a seção 3.2.3 obtêm-se os erros relativos de fechamento dos circuitos.

Os erros relativos de fechamento expressos em ppm são apresentados no QUADRO 13.

1º Circuito		5º Circuito	
Erro linear (m)	0,0195	Erro linear (m)	0,0064
Linhas de base	Comprimento (m)	Linhas de base	Comprimento (m)
UNI-P4	12209,081	P1-P2	114,384
P4-P3	185,282	P2-P4	185,140
P3-UNI	12294,534	P4-P1	185,085
Total	24688,897	Total	484,609
Erro relativo (ppm)	0,792	Erro relativo (ppm)	13,213
2º Circuito		6º Circuito	
Erro linear (m)	0,0475	Erro linear (m)	0,0058
Linhas de base	Comprimento (m)	Linhas de base	Comprimento (m)
UNI-P4	12209,081	UNI-P4	173,118
P4-T	10581,108	P4-T	185,282
T-UNI	2436,171	T-UNI	185,140
Total	25226,359	Total	543,540
Erro relativo (ppm)	1,885	Erro relativo (ppm)	10,728
3º Circuito		7º Circuito	
Erro total (m)	0,0220	Erro linear (m)	0,0174
Linhas de base	Comprimento (m)	Linhas de base	Comprimento (m)
T-UF	11159,631	P1-P2	1123,356
UF-P1	869,192	P2-P4	173,118
P1-P4	185,085	P4-P1	950,559
P4-T	10581,108	Total	2247,032
Total	22795,016	Erro relativo (ppm)	7,734
Erro relativo (ppm)	0,967		
4º Circuito			
Erro linear (m)	0,0627		
Linhas de base	Comprimento (m)		
UF-P1	869,192		
P1-P2	114,384		
P2-UF	950,559		
Total	1934,135		
Erro relativo (ppm)	32,412		

QUADRO 13 – ERRO DE FECHAMENTO LINEAR (m) E RELATIVO (ppm)

A FIGURA 10 ilustra os erros relativos em ppm obtidos nos circuitos avaliados. O eixo das ordenadas (esquerdo) representa o erro relativo em ppm e o da direita o comprimento dos circuitos (km) avaliados e por fim o eixo das abscissas é pertinente aos circuitos em questão.

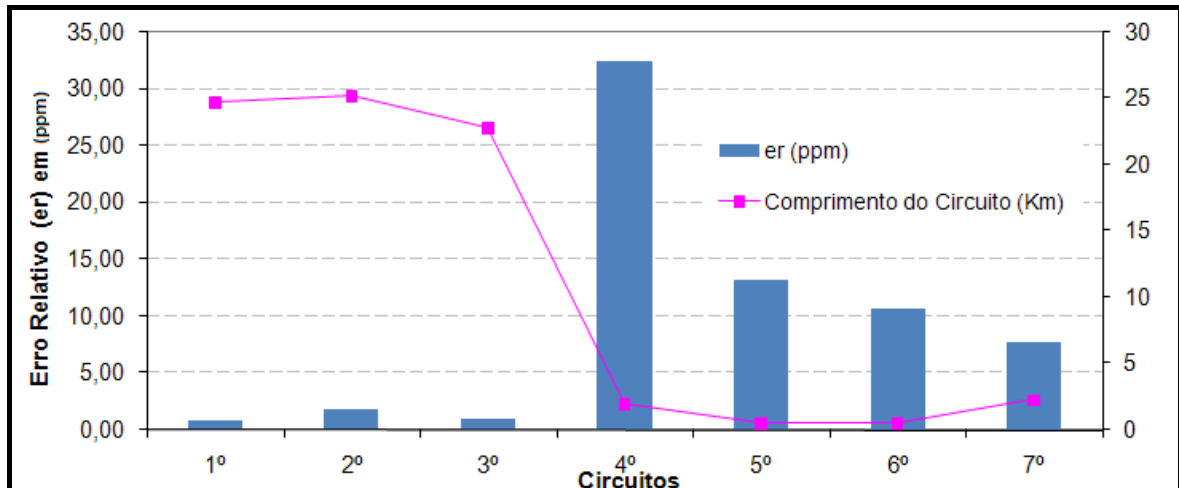


FIGURA 10 – ERRO RELATIVO (PPM) DOS CIRCUITOS VERSUS COMPRIMENTO DO CIRCUITO  
 FONTE: O AUTOR (2009).

A FIGURA 11 ilustra os erros lineares obtidos nos circuitos avaliados. O eixo das ordenadas (esquerdo) representa o erro linear em metros e o da direita o comprimento dos circuitos (km) avaliados e por fim o eixo das abscissas pertinentes aos circuitos em questão.

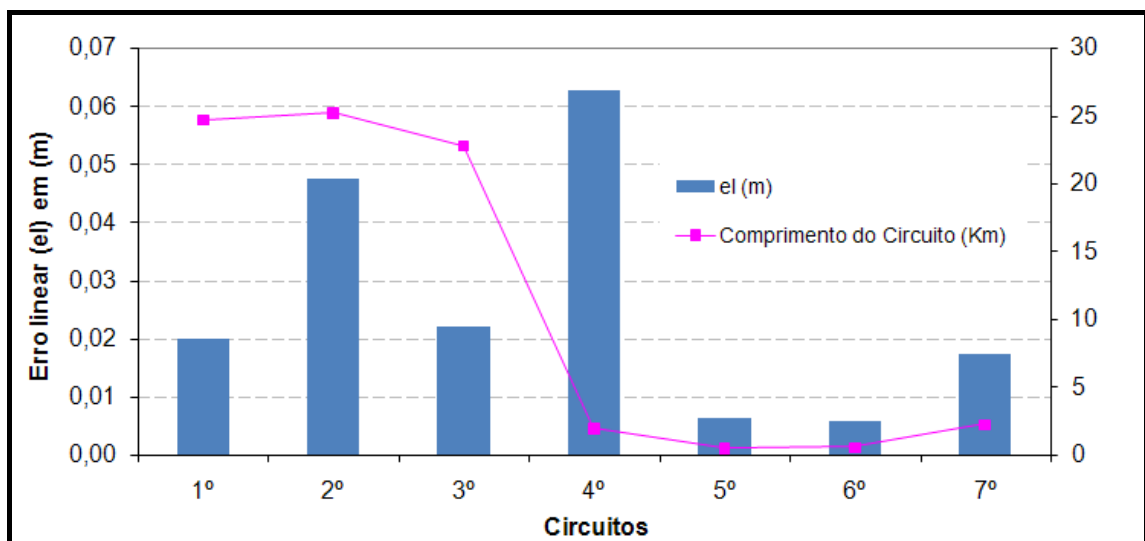


FIGURA 11 – ERRO LINEAR (m) DOS CIRCUITOS VERSUS COMPRIMENTO DO CIRCUITO  
 FONTE: O AUTOR (2009).

Os valores médios para os erros relativos, erros lineares e comprimento dos circuitos são respectivamente 9,68 ppm, 0,03m e 11,3Km. Os valores máximos são: 32,41 ppm, 0,06 m e 25,22 (km) e mínimos são: 0,81 ppm, 0,005m e 0,48 Km.

De acordo com Wolf e Ghilani (1997), os valores obtidos nos fechamentos dos circuitos podem ser comparados com valores especificados pelo FGCS, seção (3.2.1).

## 7 AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES PELO MÉTODO PARAMÉTRICO

De posse das observações (dx,dy,dz) será realizado o ajustamento sob os diferentes modos descritos na seção (3) com o emprego do método paramétrico. Inicialmente, será realizado o ajustamento com a utilização de injunção mínima, pois de acordo com Wolf e Ghilani (1997) todas as estações, além da fixa, permanecem livres, permitindo que as observações sejam acomodadas. Este procedimento permite que os resíduos sejam exclusivamente das observações e conseqüentemente permitirá uma melhor análise da qualidade da rede.

### 7.1 AJUSTAMENTO COM INJUNÇÃO MÍNIMA

A realização do ajustamento com injunção mínima, poderá ser abordada de duas formas: considerando a estação fixa (injunção absoluta) e relacioná-las com o vetor das observações, na observação que a relaciona. Ou, de modo diferente, a estação poderá ser tratada como pseudo-observação, com a consideração de um peso que permite fixá-la.

O ajustamento nesta seção será realizado considerando as coordenadas da estação de injunção absoluta, sendo utilizadas para alterar as observações que tem esta estação em sua equação de observação. Ressalta-se que Wolf e Ghilani (1997, 2006) utilizaram esta abordagem; já Monico, Matsuoka e Sapucci (2006) utilizaram a abordagem da pseudo-observação na realização de ajustamento de uma rede de nivelamento.

A FIGURA 12 apresenta a rede GPS em estudo com a consideração da estação UFPR como injunção mínima. Convém ressaltar que as coordenadas desta estação serão tratadas como fixa, ou seja, constante em todo processo de ajustamento.

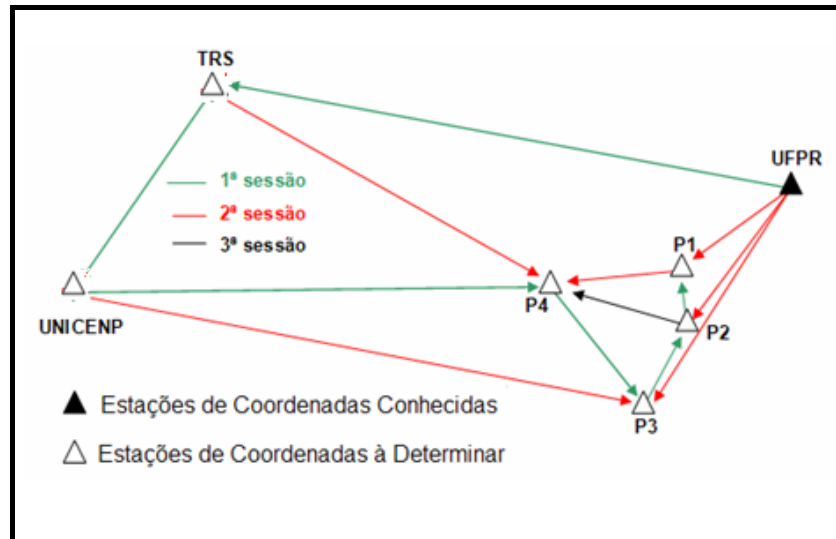


FIGURA 12 – REDE GPS COM INJEÇÃO MÍNIMA (UFPR)  
 FONTE: O AUTOR (2009).

Deste modo, está presente na rede da FIGURA 12 um total de 13 linhas de base independentes, resultando em 39 observações (13x3), pois cada linha de base, contribui com 3 observações (dx, dy, dz). O número de estações com coordenadas a estimar, somam um total de 6, contribuindo com 18 parâmetros (6x3). Assim, o número de graus de liberdade do sistema de equações é de 21.

Inicialmente serão especificadas as equações de observação que envolve os parâmetros de acordo com o modelo matemático do método paramétrico, ou seja, da forma  $L_a = F(X_a)$ .

As equações de observação da rede GPS terão a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Delta X_{ij} &= X_j - X_i \\ \Delta Y_{ij} &= Y_j - Y_i \\ \Delta Z_{ij} &= Z_j - Z_i\end{aligned}\tag{7.1}$$

onde:

i: origem do vetor;

j: destino do vetor.

O vetor dos parâmetros é da forma:

$${}_{18}X_1^a = [X_{P1}, Y_{P1}, Z_{P1}, \dots, X_{P4}, Y_{P4}, Z_{P4}, X_T, Y_T, Z_T, X_{UNI}, Y_{UNI}, Z_{UNI}]^T\tag{7.2}$$

O vetor das observações terá a forma:



$${}_{39}L_1^b = \begin{bmatrix} \Delta X_{ij} \\ \Delta Y_{ij} \\ \Delta Z_{ij} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Os elementos do vetor das observações (7.3) quando estiverem relacionados com a estação de controle (fixa) tida como injeção, deverá ser recalculado de modo a conter a informação do origem do sistema de referência.

Para a formação da matriz dos pesos foi considerada somente das variâncias das componentes das linhas de base, ou seja, terá a forma da equação (3.15). A dimensão da matriz dos pesos para este caso será:  ${}_{39}P_{39} = \sigma_0^2 \sum_{Lb}^{-1}$ . Convém ressaltar, se a estação fosse utilizada como pseudo-observação a matriz dos pesos conteria informação de precisão (muito grande, ou seja, peso praticamente infinito) desta.

O fato de se utilizar somente as variâncias reside no fato da análise de detecção de *outliers* com a técnica data snooping se restringir a observações correlacionadas e não correlacionadas. Deste modo, se fosse utilizado a matriz dos pesos bloco diagonal e considerar o modelo que considera a correlação das observações estaria cometendo erro. Por este motivo serão desconsideradas as covariâncias das componentes de linhas de base para que seja utilizada a técnica de maneira apropriada.

Na seção 7.2, serão realizados ensaios com objetivos de verificar a influência do modelo estocástico no fator de variância *a posteriori* e no traço da matriz dos parâmetros ajustados.

A matriz projeto (**A**) é obtida a partir das derivadas das equações (7.1) em relação aos parâmetros (7.2). Pode-se notar que as coordenadas da estação UF não entram no vetor dos parâmetros ajustados nem da matriz A, caso fosse utilizada como pseudo-observação ter-se-ia informações desta injeção no vetor dos parâmetros e da matriz projeto. Esta matriz, no presente caso, será composta por elementos 0, 1 e -1.

De posse do vetor das observações, da matriz peso e da matriz projeto, pode-se estimar o vetor dos parâmetros ajustados com a equação (3.23) por se tratar de um modelo matemático funcional linear.

Na FIGURA 13, pode-se observar a simulação de três situações, onde em cada uma foi alterado as estações de injeção mínima (forma absoluta). A

organização das equações de observação segue a numeração apresentada na rede GPS apresentada na FIGURA 13.

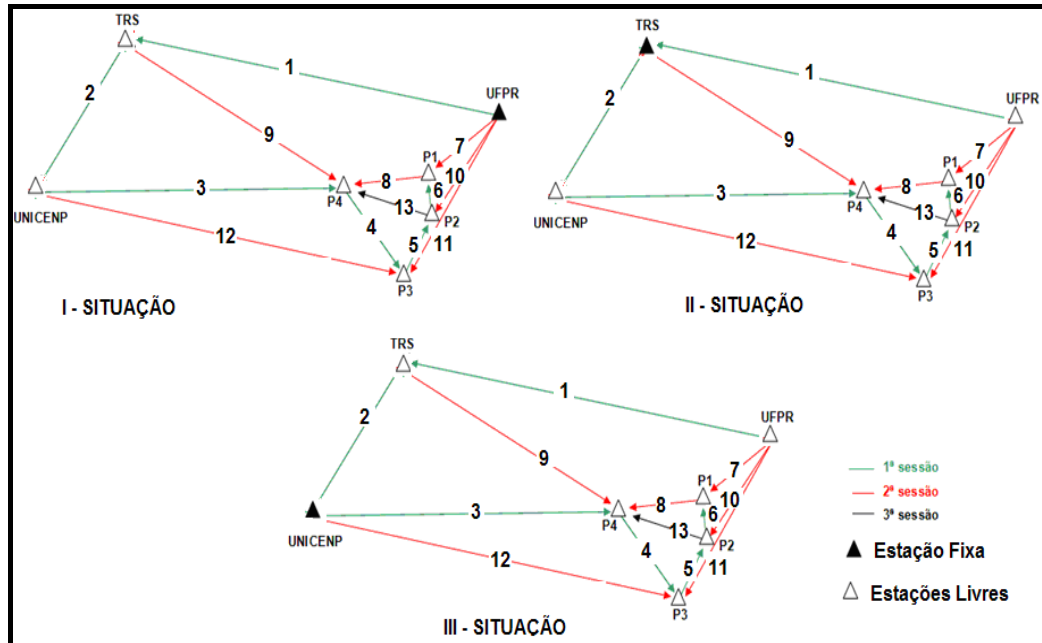


FIGURA 13 – VARIACÃO DO PONTO DE INJUNÇÃO MÍNIMA ABSOLUTA  
 FONTE: O AUTOR (2009).

Os ajustamentos realizados utilizando injunção mínima, cujas coordenadas foram tidas com o fixas. Na situação I, (FIGURA 14) foi considerada como injunção mínima, a estação UFPR. Os resultados do ajustamento para esta situação encontram-se nas QUADROS 13,14 e 15.

No QUADRO 14, observam-se as coordenadas cartesianas geocêntricas das estações ajustadas e seus respectivos desvios padrão.

Estações	X(m)	Y(m)	Z(m)	$\sigma_x$ (m)	$\sigma_y$ (m)	$\sigma_z$ (m)
P1	3.763.132,119	-4.365.255,871	-2.724.997,557	0,005	0,005	0,004
P2	3.763.110,700	-4.365.209,818	-2.725.100,046	0,006	0,007	0,005
P3	3.762.990,536	-4.365.236,975	-2.725.221,672	0,007	0,007	0,005
P4	3.762.986,651	-4.365.344,042	-2.725.070,507	0,006	0,006	0,005
TRS	3.755.866,767	-4.372.870,235	-2.722.920,259	0,008	0,009	0,007
UNI	3.754.013,329	-4.373.589,647	-2.724.328,145	0,012	0,014	0,010

QUADRO 14 – COORDENADAS AJUSTADAS DAS ESTAÇÕES E RESPECTIVOS DESVIOS PADRÃO

No QUADRO 15 observa-se as componentes de observações ajustadas bem como os respectivos desvios padrão.

Linhas de base		Componentes Vetoriais ajustadas			Desvios Padrão		
De	Para	$\Delta X$ (m)	$\Delta Y$ (m)	$\Delta Z$ (m)	$\sigma_{\Delta X}$ (m)	$\sigma_{\Delta Y}$ (m)	$\sigma_{\Delta Z}$ (m)
UF	T	-7884,91	-7756,4	1484,456	0,008	0,009	0,007
T	UNI	-1853,44	-719,412	-1407,89	0,010	0,012	0,008
UNI	P4	8973,322	8245,605	-742,362	0,012	0,014	0,010
P4	P3	3,885	107,067	-151,166	0,006	0,007	0,005
P3	P2	120,164	27,156	121,626	0,003	0,004	0,003
P2	P1	21,419	-46,053	102,49	0,006	0,006	0,005
UF	P1	-619,562	-142,039	-592,842	0,005	0,005	0,004
P1	P4	-145,467	-88,171	-72,95	0,004	0,004	0,004
T	P4	7119,885	7526,193	-2150,25	0,009	0,009	0,007
UF	P2	-640,981	-95,986	-695,331	0,006	0,007	0,005
UF	P3	-761,145	-123,143	-816,957	0,007	0,007	0,005
UNI	P3	8977,207	8352,672	-893,528	0,013	0,015	0,010
P2	P4	-124,048	-134,224	29,539	0,006	0,007	0,005

QUADRO 15 – COMPONENTES VETORIAIS AJUSTADAS E RESPECTIVOS DESVIOS - PADRÃO

No QUADRO 16, observam-se os resíduos das componentes vetoriais (observações) estimados no processo de ajustamento.

Linhas de base		Resíduos Estimados			Desvios Padrão		
De	Para	$\Delta X$ (m)	$\Delta Y$ (m)	$\Delta Z$ (m)	$\sigma_{V\Delta X}$ (m)	$\sigma_{V\Delta Y}$ (m)	$\sigma_{V\Delta Z}$ (m)
UF	T	0,002	0,004	-0,002	0,008	0,009	0,006
T	UNI	0,004	-0,005	-0,003	0,010	0,012	0,008
UNI	P4	0,018	-0,023	-0,013	0,012	0,014	0,009
P4	P3	0,005	-0,006	-0,005	0,006	0,007	0,005
P3	P2	0,000	0,000	0,000	0,003	0,004	0,003
P2	P1	-0,008	0,012	0,008	0,006	0,006	0,005
UF	P1	0,007	-0,005	-0,005	0,005	0,005	0,004
P1	P4	0,002	-0,002	-0,001	0,004	0,004	0,004
T	P4	-0,003	0,008	0,001	0,008	0,009	0,007
UF	P2	-0,020	0,024	0,020	0,006	0,007	0,005
UF	P3	-0,010	0,014	0,009	0,006	0,007	0,005
UNI	P3	0,020	-0,011	-0,011	0,012	0,014	0,009
P2	P4	-0,007	0,008	0,000	0,006	0,006	0,005

QUADRO 16 – RESÍDUOS ESTIMADOS E RESPECTIVOS DESVIOS PADRÃO

O valor do fator de variância *a posteriori* obtido na realização deste ajustamento foi de 83,122. A média do traço da MVC dos parâmetros estimados, foi de  $5,786 \times 10^{-7} \text{m}^2$ .

Na FIGURA 14, pode ser observado o valor de acurácia obtido nas estações TRS e UNICENP. Para o cálculo da valor da acurácia obtida nas estimação das coordenadas, foram subtraídos estes valores tidos como verdadeiros (disponíveis no descritivo das estações) dos estimados no ajustamento.

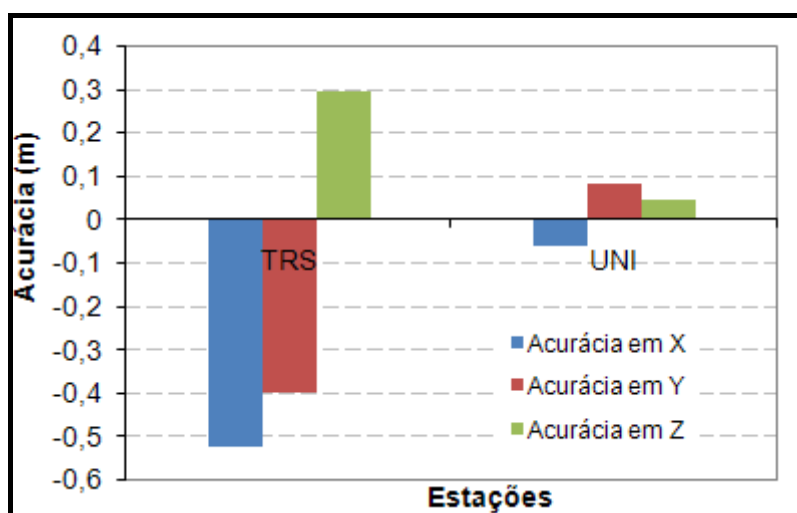


FIGURA 14 – ACURÁCIA DAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES TRS e UNI.  
FONTE: O AUTOR (2009).

Da FIGURA 14, pode ser observado que para estação TRS foi obtido um valor de acurácia média das coordenadas (X,Y,Z) de -0,208m. A maior e menor acurácia foram respectivamente de 0,294m para a coordenada Z e -0,523m para a coordenada X. Para a estação UNI foi obtido uma acurácia média para as coordenadas de 0,023 m. A maior e menor acurácia foram respectivamente de 0,047m para a coordenada Z e 0,081m para a coordenada Y.

Na situação II, (FIGURA 13) foi considerada como injunção mínima, a estação TRS. As coordenadas ajustadas da rede GPS estão disponíveis no QUADRO 17. As observações ajustadas, os resíduos bem como suas respectivas estimativas de precisão são iguais quando injuncionado a estação UFPR.

Estações	X(m)	Y(m)	Z(m)	$\sigma_x$ (m)	$\sigma_y$ (m)	$\sigma_z$ (m)
P1	3763132,642	-4365255,475	-2724997,851	0,009	0,009	0,007
P2	3763111,223	-4365209,422	-2725100,340	0,009	0,010	0,008
P3	3762991,059	-4365236,579	-2725221,966	0,010	0,010	0,008
P4	3762987,175	-4365343,646	-2725070,801	0,009	0,009	0,007
UF	3763752,204	-4365113,436	-2724405,009	0,008	0,009	0,007
UNI	3754013,852	-4373589,251	-2724328,439	0,010	0,012	0,008

QUADRO 17 – COORDENADAS AJUSTADAS DAS ESTAÇÕES E RESPECTIVOS DESVIOS PADRÃO

O valor do fator de variância *a posteriori* obtido na realização deste ajustamento foi de 83,122. A média do traço da MVC dos parâmetros estimados, foi de  $9,531 \times 10^{-7} \text{ m}^2$ .

Na FIGURA 15, observam-se a acurácia das estações UF e UNI obtidas no posicionamento.

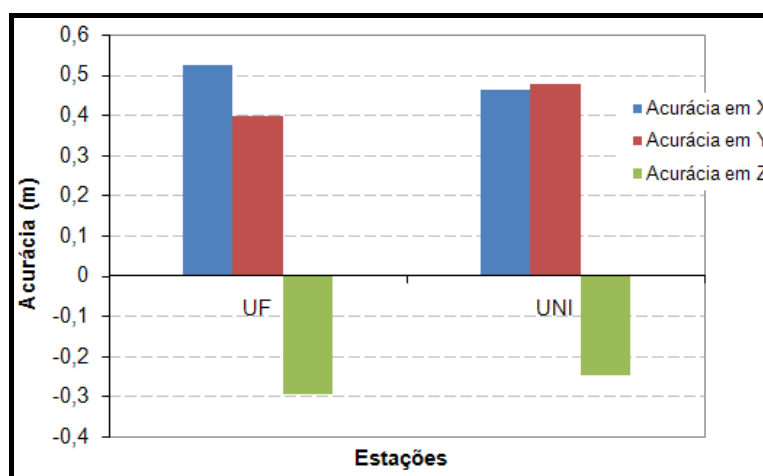


FIGURA 15 – ACURÁCIA DAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES UFPR e UNICENP  
 FONTE: O AUTOR (2009).

Da FIGURA 15, pode ser observado que para estação UF foi obtida uma acurácia média das coordenadas (X, Y, Z) de 0,208 m. A acurácia máxima e mínima foram respectivamente de -0,294m para a coordenada Z e 0,523m para a coordenada X. Para a estação UNI foi obtido uma acurácia média para as coordenadas (X, Y, Z) de 0,231m. A acurácia máxima e mínima foram respectivamente de -0,247m para a coordenada Z e 0,477m para a coordenada Y.

Na situação III, (FIGURA 14) foi considerada como injunção mínima, a estação UNICENP. As coordenadas ajustadas da rede GPS encontram-se disponíveis no QUADRO 18. As observações ajustadas, os resíduos bem como suas respectivas estimativas de precisão são iguais quando injuncionado a estação UFPR e TRS

Estações	X(m)	Y(m)	Z(m)	$\sigma_x$ (m)	$\sigma_y$ (m)	$\sigma_z$ (m)
P1	3.763.132,178	-4.365.255,952	-2.724.997,604	0,013	0,014	0,010
P2	3.763.110,759	-4.365.209,899	-2.725.100,094	0,013	0,015	0,010
P3	3.762.990,595	-4.365.237,056	-2.725.221,720	0,013	0,015	0,010
P4	3.762.986,710	-4.365.344,123	-2.725.070,554	0,012	0,014	0,010
TRS	3.755.866,826	-4.372.870,316	-2.722.920,306	0,010	0,012	0,008
UFPR	3.763.751,740	-4.365.113,913	-2.724.404,762	0,012	0,014	0,010

QUADRO 18 – COORDENADAS AJUSTADAS DAS ESTAÇÕES E RESPECTIVOS DESVIOS PADRÃO

O valor do fator de variância *a posteriori* obtido na realização deste ajustamento foi de 83,122. A média do traço da MVC dos parâmetros estimados foi de  $1,482 \times 10^{-4} \text{m}^2$

Na FIGURA 16, observa-se a acurácia obtida nas coordenadas da estação TRS e UFPR.

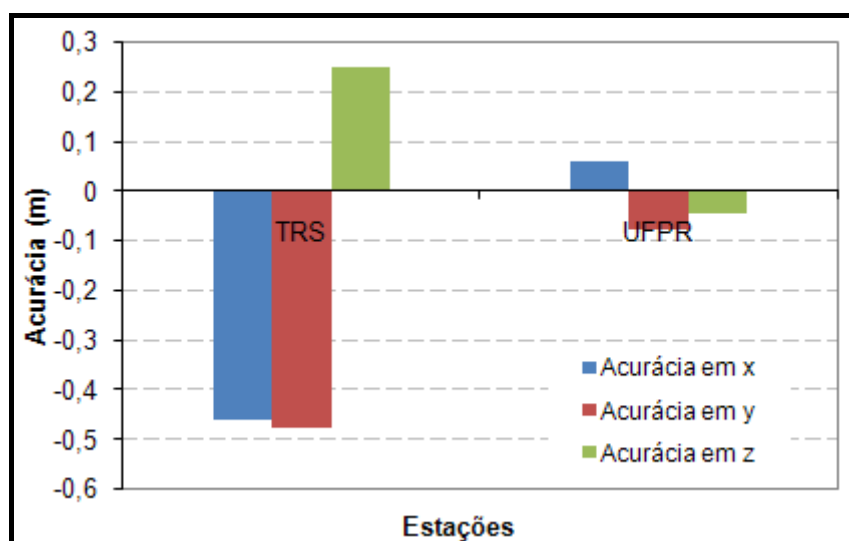


FIGURA 16 – ACURÁCIA DAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES TRS e UFPR.  
 FONTE: O AUTOR (2009).

Para a estação TRS foi obtida uma acurácia média das coordenadas de -0,231m. A acurácia máxima e mínima foram respectivamente de 0,246m para a coordenada Z e de -0,477m para a coordenada Y. Para a estação UFPR foi obtida uma acurácia média para as coordenadas de -0,023m. A acurácia máxima e mínima foram respectivamente de -0,047m para a coordenada Z e de -0,081m para a coordenada Y

De posse das coordenadas estimadas das estações P1, P2, P3 e P4 em cada uma das três situações, foram calculadas as discrepâncias das coordenadas destas estações obtidas nas situações II e III em relação às coordenadas obtidas na situação I. Para verificação destes discrepância poderiam ser adotadas qualquer uma das outras duas como referência.

Das FIGURAS 14,15 e 16 pode ser observado quando da utilização da estação TRS como inunção, foi obtido uma menor acurácia para as coordenadas das estações UNI e UFPR. Percebe-se, na FIGURA 17, que os valores das coordenadas quando se utiliza a estação TRS como inunção, apresenta maiores discrepâncias que a estação UNI em relação a UFPR.

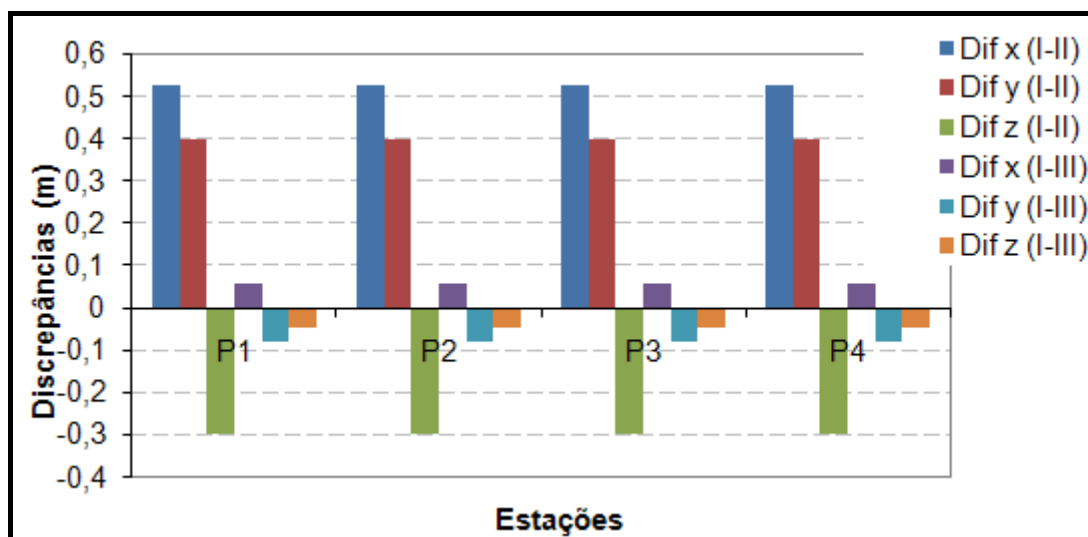


FIGURA 17 – DISCREPÂNCIAS DAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES P1,P2,P3 e P4.

FONTE: O AUTOR (2009).

Da FIGURA 17, observa-se que as maiores discrepâncias foram obtidas quando foi considerada a estação TRS como inunção, este fato pode ser devido à estação TRS ser ocupada por um receptor de monofreqüência.

Como em cada uma das três situações foi considerado um ponto de injeção diferente, foi alterado durante o ajustamento somente a matriz dos coeficientes A e alguns elementos vinculados à injeção no vetor das observações. Os valores do fator de variância *a posteriori* foram os mesmos para todas as três situações. Para fins de análise será, considerado o ajustamento com a injeção da estação UFPR.

### 7.1.1 Aplicação das elipses de confiança e barra de erro

Após a realização do ajustamento, foi obtida a estimativa de precisão dos parâmetros ajustados (QUADRO 13) de maneira numérica. Para que possa visualizar a precisão com que as coordenadas das estações da rede foram estimadas, será utilizado o conceito de elipse de erro ou de confiança apresentado na seção (3.12.3).

A partir da MVC dos parâmetros estimados e com a utilização das equações (3.136), (3.138) e (3.139) pode-se obter, respectivamente, o semi-eixo maior e semi-eixo menor da elipse e o ângulo entre o eixo das abscissas e o semi-eixo maior. Ressalta-se que estes elementos foram escalados pelo fator 2,448 presente no QUADRO 13 de modo a passar de uma região de confiança de 39,4% para 95% de probabilidade. A componente Z foi escalada por um fator de 1,96 para passar de uma região de 68,3% para 95% de probabilidade. No QUADRO 19, encontram-se estes elementos.

Estação	Semi- eixo maior $\sigma_{x'}$	Semi-eixo menor $\sigma_{y'}$	Orientação	Eixo z (m)
	(m)	(m)		
P1	0,013	0,011	0	0,008
P2	0,017	0,016	180	0,010
P3	0,017	0,016	180	0,010
P4	0,015	0,014	0	0,010
TRS	0,022	0,020	180	0,013
UNI	0,035	0,030	180	0,019

QUADRO 19 – ELEMENTOS DAS ELIPSES DE ERRO (X, Y) E DA COMPONENTE Z.

Na FIGURA 18, estão apresentadas as elipses do erro e os vetores de erros da componente Z, ambas com uma região de confiança de 95% de probabilidade para a rede GPS da FIGURA 12, onde foi considerada a estação UFPR como injeção mínima. Cabe ressaltar, que a covariância entre as coordenadas foram iguais a zero, conseqüentemente o ângulo de orientação das elipse serão 0° ou 180°



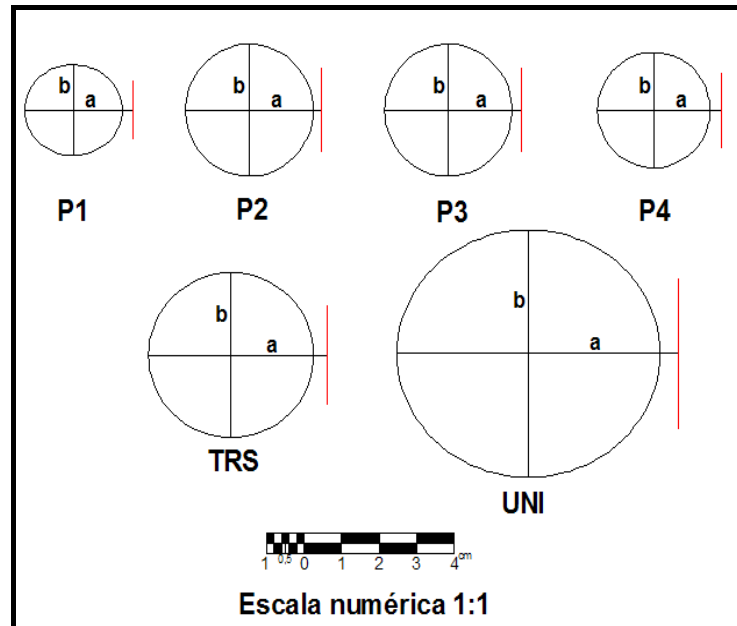


FIGURA 18 – ELIPSES DE ERROS (X, Y) E VETORES DE ERROS DA COMPONENTE Z.  
 FONTE: O AUTOR (2009).

### 7.1.2 Análise estatística

Com objetivo de verificar a qualidade do ajustamento e a possibilidade de existência de possíveis erros embutidos nas observações foram aplicados os testes estatísticos descritos na seção 3.11. Esta etapa será dividida nas seguintes fases:

- ✓ Teste Global do Modelo, para a verificação da qualidade do ajustamento;
- ✓ Data snooping, para localização de possíveis erros grosseiros de pequena magnitude (*outliers*) embutidos nas observações;
- ✓ Confiabilidade interna, para quantificar a menor porção do erro existente na observação e que pode ser localizado com dada probabilidade  $e$ ;
- ✓ Confiabilidade externa para quantificar a influência dos erros mínimos detectáveis nas coordenadas estimadas.

### 7.1.2.1 Teste global do modelo

O teste global do modelo visa avaliar a qualidade do ajustamento pela comparação dos fatores de variância a *priori* ( $\sigma_0^2$ ) e a *posteriori* ( $\hat{\sigma}_0^2$ ) a um determinado nível de confiança ( $1-\alpha$ ), vide seção 3.11.2.

Foi aplicado o teste bilateral com  $\alpha = 5\%$ , sendo inicialmente enunciada a hipótese nula e alternativa, posteriormente foi calculado a estatística  $\chi_c^2$  e comparado com os valores limites superior e inferior tabelados. Lembrando que o valor de  $\sigma_0^2$  utilizado na realização do ajustamento foi igual a 1.

$$H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$$

$$H_a : \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$$

A estatística:

$$\chi_c^2 = \frac{(n-u)\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{21(83,122)}{1} = 1745,562$$

Região de Aceitação:

$$\chi_{gl,\alpha/2}^2 \leq \chi_c^2 \leq \chi_{gl,1-\alpha/2}^2$$

$$10,28 \leq \chi_c^2 \leq 32,67$$

Como o valor da estatística está fora do intervalo rejeita-se a hipótese básica a um nível de 5% de significância.

### 7.1.2.2 Teste data snooping

Foi aplicado o teste data snooping para a detecção de possíveis *outliers* presentes nas observações conforme descrito na seção (3.11.3). O nível de significância utilizado é o proposto por Baarda de  $\alpha_0 = 0,1\%$  e potência do teste  $(1-\beta_0) = 0,8$ .

O QUADRO 20 contém os valores dos resíduos padronizados das observações (componentes vetoriais). Observa-se que somente a componente  $\Delta X$  da linha de base UF-P2 foi aceita no teste. Ressalta-se que havendo rejeição de uma componente, toda a linha de base deverá ser eliminada.

Linhas de Base		$\Delta X$ (m)	$\Delta Y$ (m)	$\Delta Z$ (m)	Aceitação das Observações		
De	Para	$(w_i)$	$(w_i)$	$(w_i)$	$(\alpha = 0,1\%, \omega_c = 3,29)$		
UF	T	0,204	0,451	0,296	Aceita	Aceita	Aceita
T	UNI	0,430	0,410	0,358	Aceita	Aceita	Aceita
UNI	P4	1,537	1,699	1,405	Aceita	Aceita	Aceita
P4	P3	0,742	0,821	0,911	Aceita	Aceita	Aceita
P3	P2	0,050	0,127	0,013	Aceita	Aceita	Aceita
P2	P1	1,395	1,859	1,647	Aceita	Aceita	Aceita
UF	P1	1,277	1,169	1,191	Aceita	Aceita	Aceita
P1	P4	0,390	0,441	0,287	Aceita	Aceita	Aceita
T	P4	0,392	0,903	0,149	Aceita	Aceita	Aceita
UF	P2	3,243	3,528	3,918	Aceita	Rejeita	Rejeita
UF	P3	1,586	2,072	1,665	Aceita	Aceita	Aceita
UNI	P3	1,623	0,756	1,125	Aceita	Aceita	Aceita
P2	P4	1,249	1,252	0,097	Aceita	Aceita	Aceita

QUADRO 20 – RESULTADO DO TESTE DATA SNOOPING PARA 1º AJUSTAMENTO

Foi aplicado o teste data snooping na primeira situação para a localização da possível presença de *outlier*, sendo localizado nas componentes  $\Delta Y$  e  $\Delta Z$  da linha de base UF-P2. Deste modo, as três componentes da linha de base foram eliminadas e um novo ajustamento realizado.

Com a eliminação da linha de base UF-P2, o número de observações ficou reduzido em três, deste modo, o grau de liberdade para a realização do próximo ajustamento foi 18. O fator de variância a *posteriori* obtido neste ajustamento com ausência da linha de base UF-P2 é de 51,263 apontando para uma redução nos valores dos resíduos das observações.

No QUADRO 21, encontram-se os resultados do teste data snooping para o caso em que foi eliminada a linha de base UF-P2.

Linhas de Base		$\Delta X$ (m)	$\Delta Y$ (m)	$\Delta Z$ (m)	Aceitação das Observações		
De	Para	$(w_i)$	$(w_i)$	$(w_i)$	$(\alpha = 0,1\%, \omega_c = 3,29)$		
UF	T	0,030	0,763	0,155	Aceita	Aceita	Aceita
T	UNI	0,495	0,482	0,394	Aceita	Aceita	Aceita
UNI	P4	1,874	2,161	1,653	Aceita	Aceita	Aceita
P4	P3	0,488	0,465	0,707	Aceita	Aceita	Aceita
P3	P2	0,359	0,435	0,370	Aceita	Aceita	Aceita
P2	P1	0,957	1,414	1,151	Aceita	Aceita	Aceita
UF	P1	0,974	0,992	0,810	Aceita	Aceita	Aceita
P1	P4	0,345	0,412	0,173	Aceita	Aceita	Aceita
T	P4	0,739	1,293	0,490	Aceita	Aceita	Aceita
UF	P3	2,796	3,345	2,990	Aceita	Rejeita	Aceita
UNI	P3	1,772	0,663	1,073	Aceita	Aceita	Aceita
P2	P4	0,935	0,818	0,568	Aceita	Aceita	Aceita

QUADRO 21 – RESULTADO DO TESTE DATA SNOOPING PARA 2º AJUSTAMENTO

Com base nos dados do QUADRO 21, observa-se que as componentes  $\Delta Y$  da linha de base UF-P3 não passou no teste, sendo detectado com uma possível presença de *outlier*, contudo será eliminado todo o vetor para a realização de um 3º ajustamento com a exceção da linha de base UF-P3.

Com a eliminação da linha de base UF-P3, o número de observações ficou reduzido em três, deste modo o grau de liberdade para a realização do 3º ajustamento foi de 15. O fator de variância a *posteriori* obtido neste ajustamento com ausência da linha de base UF-P3 é de 17,747 apresentando uma melhora significativa mesmo não passando no teste global do modelo.

No QUADRO 22 encontram-se os resultados do teste data snooping para o caso em que foi eliminada a linha de base UF-P3.

Linhas de Base		$\Delta X$ (m)	$\Delta Y$ (m)	$\Delta Z$ (m)	Aceitação das Observações		
De	Para	$(w_i)$	$(w_i)$	$(w_i)$	$(\alpha = 0,1\%, \omega_c = 3,29)$		
UF	T	0,522	1,817	0,207	Aceita	Aceita	Aceita
T	UNI	0,712	0,718	0,538	Aceita	Aceita	Aceita
UNI	P4	3,280	4,040	2,760	Aceita	Rejeita	Aceita
P4	P3	0,579	0,870	0,122	Aceita	Aceita	Aceita
P3	P2	0,084	0,190	0,014	Aceita	Aceita	Aceita
P2	P1	0,151	0,676	0,571	Aceita	Aceita	Aceita
UF	P1	0,258	0,564	0,106	Aceita	Aceita	Aceita
P1	P4	0,143	0,277	0,211	Aceita	Aceita	Aceita
T	P4	1,878	2,617	1,496	Aceita	Aceita	Aceita
UNI	P3	2,428	0,200	0,998	Aceita	Aceita	Aceita
P2	P4	0,459	0,095	2,132	Aceita	Aceita	Aceita

QUADRO 22 – RESULTADO DO TESTE DATA SNOOPING PARA 3º AJUSTAMENTO

Com base nos dados do QUADRO 22 observa-se que as componentes  $\Delta Y$  da linha de base UNI-P4 não passou no teste, sendo detectado como uma possível presença de *outlier*, contudo foi eliminado todo o vetor para a realização de um 4º ajustamento com a exceção da linha de base UNI-P4.

Com a eliminação da linha de base UNI-P4, o número de observações ficou reduzido em três, deste modo o grau de liberdade para a realização do 4º ajustamento foi de 12. O fator de variância *a posteriori* obtido neste ajustamento com ausência da linha de base UF-P4 é de 13,76 apontando para redução nos valores dos resíduos das observações.

No QUADRO 23, encontram-se os resultados do teste data snooping para o caso em que foi eliminada a linha de base UNI-P4.

Linhas de Base		$\Delta X$ (m)	$\Delta Y$ (m)	$\Delta Z$ (m)	Aceitação das Observações		
De	Para	$(w_i)$	$(w_i)$	$(w_i)$	$(\alpha = 0,1\%, \omega_c = 3,29)$		
UF	T	0,871	2,405	0,512	Aceita	Aceita	Aceita
T	UNI	0,269	0,100	0,117	Aceita	Aceita	Aceita
P4	P3	0,740	1,081	0,214	Aceita	Aceita	Aceita
P3	P2	0,092	0,209	0,018	Aceita	Aceita	Aceita
P2	P1	0,183	0,769	0,684	Aceita	Aceita	Aceita
UF	P1	0,434	0,753	0,266	Aceita	Aceita	Aceita
P1	P4	0,274	0,417	0,107	Aceita	Aceita	Aceita
T	P4	1,662	2,478	1,222	Aceita	Aceita	Aceita
UNI	P3	3,506	1,252	1,955	Rejeita	Aceita	Aceita
P2	P4	0,480	0,211	2,698	Aceita	Aceita	Aceita

QUADRO 23 – RESULTADO DO TESTE DATA SNOOPING PARA 4º AJUSTAMENTO

Com base nos dados do QUADRO 23 observa-se que as componentes  $\Delta X$  da linha de base UNI-P3 não passou no teste, sendo detectado com uma possível presença de *outlier*, contudo foi eliminado todo o vetor para a realização de um 5º ajustamento com a exceção da linha de base UNI-P3.

Com a eliminação da linha de base UNI-P3, o número de observações ficou reduzido em três, deste modo o grau de liberdade para a realização do 5º ajustamento foi de 9. O fator de variância a *posteriori* obtido neste ajustamento com ausência da linha de base UNI-P3 é de 16,486. Nota-se que o fator de variância a *posteriori* voltou a crescer quando da eliminação da linha de base localizada com uma possível presença de *outlier*.

No QUADRO 24, encontram-se os resultados do teste data snooping para o caso em que foi eliminada a linha de base UNI-P3.

Linhas de Base		$\Delta X$ (m)	$\Delta Y$ (m)	$\Delta Z$ (m)	Aceitação das Observações ( $\alpha = 0,1\%$ , $\omega_c = 3,29$ )		
De	Para	( $w_i$ )	( $w_i$ )	( $w_i$ )			
UF	T	0,920	2,191	0,524	Aceita	Aceita	Aceita
T	UNI	0,000	0,000	0,000	Aceita	Aceita	Aceita
P4	P3	0,521	0,910	0,132	Aceita	Aceita	Aceita
P3	P2	0,130	0,205	0,041	Aceita	Aceita	Aceita
P2	P1	0,280	0,730	0,664	Aceita	Aceita	Aceita
UF	P1	0,465	0,698	0,276	Aceita	Aceita	Aceita
P1	P4	0,256	0,378	0,089	Aceita	Aceita	Aceita
T	P4	1,273	2,139	0,986	Aceita	Aceita	Aceita
P2	P4	0,540	0,123	2,259	Aceita	Aceita	Aceita

QUADRO 24 – RESULTADO DO TESTE DATA SNOOPING PARA 4º AJUSTAMENTO

Verifica-se que não foi detectado nenhum erro significativo, ou seja, todos os valores dos resíduos padronizados são menores que o valor limite, mesmo não passando no teste global do modelo. Pode ser verificado que o fator de variância a *posteriori* sofreu uma redução considerável em seu valor, possivelmente pela redução das magnitudes dos resíduos e conseqüentemente da forma quadrática.

Devido a realização de três sessões e a disponibilidade de observações superabundantes além das utilizadas, foi inserido a linha de base UNI-P3 proveniente da 1ª sessão, visto que teve melhores precisões quando comparadas com a da 3ª sessão. Pode-se observar, na FIGURA 19, a inserção da linha de base UNI-P3 proveniente da 1ª sessão.

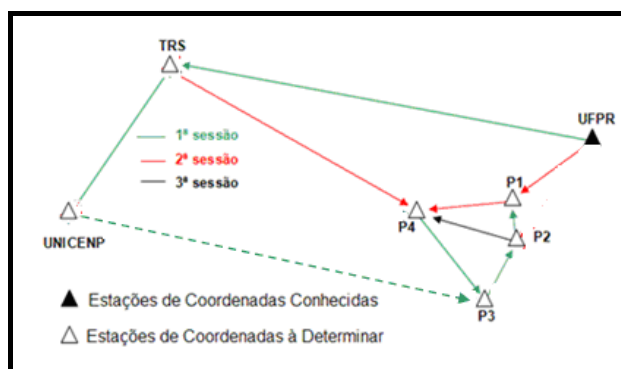


FIGURA 19 – REDE COM A INSERÇÃO DA LINHA DE BASE UNI-P3.  
FONTE: O AUTOR (2009).

Após a inserção da linha de base UNI-P3 foi realizado um novo ajustamento, onde o número de graus de liberdade do sistema é de 12. O valor do fator de variância a *posteriori* foi de 35,110. Foi aplicada também a estatística data snooping nas observações deste novo ajustamento. Mesmo o valor do fator de variância a *posteriori* aumentando, e conseqüentemente levando a falha no teste global do modelo, não foi detectado *outliers* nas observações conforme se pode observar no QUADRO 25.

No QUADRO 25 encontram-se os resultados do teste data snooping para o caso em que foi inserida a linha de base UNI-P3 proveniente da 1ª sessão.

Linhas de Base		$\Delta X$ (m)	$\Delta Y$ (m)	$\Delta Z$ (m)	Aceitação das Observações ( $\alpha = 0,1\%$ , $\omega_c = 3,29$ )		
De	Para	( $w_i$ )	( $w_i$ )	( $w_i$ )			
UF	T	0,068	1,018	0,036	Aceita	Aceita	Aceita
T	UNI	1,348	1,138	0,687	Aceita	Aceita	Aceita
P4	P3	1,031	1,164	0,440	Aceita	Aceita	Aceita
P3	P2	0,136	0,019	0,118	Aceita	Aceita	Aceita
P2	P1	0,378	0,062	0,158	Aceita	Aceita	Aceita
UF	P1	0,033	0,311	0,018	Aceita	Aceita	Aceita
P1	P4	0,136	0,256	0,105	Aceita	Aceita	Aceita
T	P4	1,921	2,186	1,260	Aceita	Aceita	Aceita
UNI	P3	1,780	1,139	1,228	Aceita	Aceita	Aceita
P2	P4	0,246	0,562	1,680	Aceita	Aceita	Aceita

QUADRO 25 – RESULTADO DO TESTE DATA SNOOPING

### 7.1.2.3 Análise de confiabilidade

Estas análises permitem a quantificação dos menores erros embutidos nas observações que podem ser localizados com determinada probabilidade e a influência destes nos parâmetros estimados. Conforme descrito na seção 3.12.6, a confiabilidade se divide em confiabilidade interna e externa.



#### 7.1.2.4 Análise de Confiabilidade Interna

O teste de confiabilidade interna encontra-se descrito na seção 3.12.6.1 e no QUADRO 26, observam-se as redundâncias parciais e a decisão sobre a controlabilidade.

Notam-se uma boa controlabilidade das observações, ou seja, quanto maior os valores de redundâncias parciais menor o número de erros grosseiros de pequena magnitudes não detectados nas observações.

Linhas de Base		Redundâncias Parciais ( $r_{ij}$ )			Controlabilidade		
		$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
UF	T	0,57	0,47	0,62	Boa	Boa	Boa
T	UNI	0,68	0,61	0,73	Boa	Boa	Boa
P4	P3	0,39	0,37	0,42	Boa	Boa	Boa
P3	P2	0,89	0,90	0,86	Boa	Boa	Boa
P2	P1	0,49	0,48	0,53	Boa	Boa	Boa
UF	P1	0,83	0,88	0,85	Boa	Boa	Boa
P1	P4	0,79	0,84	0,74	Boa	Boa	Boa
T	P4	0,40	0,46	0,34	Boa	Boa	Boa
UNI	P3	0,55	0,61	0,47	Boa	Boa	Boa
P2	P4	0,13	0,10	0,14	Suficiente	Suficiente	Suficiente

QUADRO 26 – REDUNDÂNCIAS PARCIAIS BEM COMO RESPECTIVAS DECISÕES SOBRE A CONTROLABILIDADE DAS OBSERVAÇÕES

Do QUADRO 27, observam-se que não foram detectados estatisticamente erros significativos nas observações, ou seja, os prováveis erros existentes nas observações, tem magnitude inferior às dos erros mínimos detectáveis.

Linhas de Base		$\alpha_0 = 0,1\%, (1 - \beta_0) = 0,80, \delta_0 = 4,13$						Aceitação das Observações		
		$(\nabla l_i)$	$(\nabla l_i)$	$(\nabla l_i)$	$(\nabla_{0i} l_i)$	$(\nabla_{0i} l_i)$	$(\nabla_{0i} l_i)$	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
		$\Delta X$ (m)	$\Delta Y$ (m)	$\Delta Z$ (m)	$\Delta X$ (m)	$\Delta Y$ (m)	$\Delta Z$ (m)			
UF	T	0,001	0,012	0,000	0,029	0,034	0,022	Aceita	Aceita	Aceita
T	UNI	0,012	0,013	0,005	0,031	0,038	0,024	Aceita	Aceita	Aceita
P4	P3	0,011	0,015	0,003	0,028	0,033	0,022	Aceita	Aceita	Aceita
P3	P2	0,000	0,000	0,000	0,010	0,011	0,009	Aceita	Aceita	Aceita
P2	P1	0,003	0,001	0,001	0,025	0,029	0,019	Aceita	Aceita	Aceita
UF	P1	0,000	0,001	0,000	0,017	0,014	0,013	Aceita	Aceita	Aceita
P1	P4	0,000	0,001	0,000	0,013	0,012	0,012	Aceita	Aceita	Aceita
T	P4	0,026	0,026	0,016	0,036	0,034	0,032	Aceita	Aceita	Aceita
UNI	P3	0,021	0,013	0,014	0,037	0,038	0,034	Aceita	Aceita	Aceita
P2	P4	0,007	0,024	0,038	0,048	0,062	0,038	Aceita	Aceita	Aceita

QUADRO 27 – ANÁLISE DE CONFIABILIDADE INTERNA

#### 7.1.2.5 Análise de Confiabilidade Externa

No QUADRO 28, os erros que as coordenadas das estações da rede estão sujeitas, ou seja, a influência dos erros mínimos detectáveis nas coordenadas estimadas. Estes valores foram obtidos com base nas equações (3.151) e (3.161).

Estações	X(m)	Y(m)	Z(m)
P1	0,025	0,020	0,019
P2	0,029	0,025	0,022
P3	0,026	0,021	0,020
P4	0,035	0,030	0,027
TRS	0,006	0,003	0,005
UNI	0,018	0,012	0,015

QUADRO 28 – ANÁLISE DE CONFIABILIDADE EXTERNA

Pode ser observado no QUADRO 28 que a maior influência do erro mínimo detectável é da ordem de 0,035 m na coordenada X da estação P4 e, a menor influência (0,003 m) foi obtida na coordenada Y da estação TRS .

No QUADRO 29, encontram-se os valores da influência dos erros não detectados no teste de confiabilidade interna. Estes valores foram obtidos com base nas equações (3.158) e (3.160).

Estações	X(m)	Y(m)	Z(m)
P1	0,004	0,004	0,002
P2	0,007	0,008	0,000
P3	0,009	0,010	0,001
P4	0,005	0,006	0,005
TRS	-0,011	-0,006	-0,006
UNI	-0,004	0,002	-0,005

QUADRO 29 – ANÁLISE DE CONFIABILIDADE EXTERNA

Do QUADRO 29, observam-se que a maior influência do possível erro não detectado no teste de confiabilidade interna é da ordem de 0,01 m e a menor influência é da ordem de décimos de milímetros que arredondando para milímetros é zero.

#### 7.1.2.6 Coordenadas e precisões da rede.

Após a aplicação dos testes global do modelo, data snooping, confiabilidade interna e externa e verificada a qualidade da rede, apresentam-se no QUADRO 30 as coordenadas cartesianas e respectivos desvios padrão, um sigma, das estações da rede.

Estações	X(m)	Y(m)	Z(m)	$\sigma_x$ (m)	$\sigma_y$ (m)	$\sigma_z$ (m)
P1	3763132,112	-4365255,867	-2724997,552	0,004	0,003	0,003
P2	3763110,683	-4365209,802	-2725100,034	0,005	0,006	0,004
P3	3762990,519	-4365236,958	-2725221,660	0,006	0,006	0,004
P4	3762986,643	-4365344,037	-2725070,501	0,005	0,004	0,004
TRS	3755866,765	-4372870,233	-2722920,257	0,005	0,006	0,004
UNI	3754013,331	-4373589,648	-2724328,143	0,007	0,008	0,006

QUADRO 30 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E PRECISÕES APÓS ELIMINAÇÃO DE OUTLIERS

No QUADRO 31, Observam-se os elementos da elipse de erro escalado por 2,447 de forma a obter uma região de 95% de probabilidade.

Estação	Semi- eixo maior	Semi-eixo menor	Orientação	Eixo z (m)
	(m)	(m)	(°)	
P1	0,009	0,008	0	0,006
P2	0,014	0,013	180	0,008
P3	0,014	0,014	180	0,009
P4	0,011	0,010	0	0,007
TRS	0,014	0,013	180	0,008
UNI	0,019	0,018	180	0,011

QUADRO 31 – ELEMENTOS DAS ELIPSES DE ERRO (X, Y) E DA COMPONENTE Z.

Comparando as elipses dos erros e barras verticais da rede apresentada nas FIGURAS 18 e 20 nota-se que foram alcançadas menores valores de desvio padrão para os parâmetros estimados, ou seja, os valores estimados de modo geral são mais precisos.

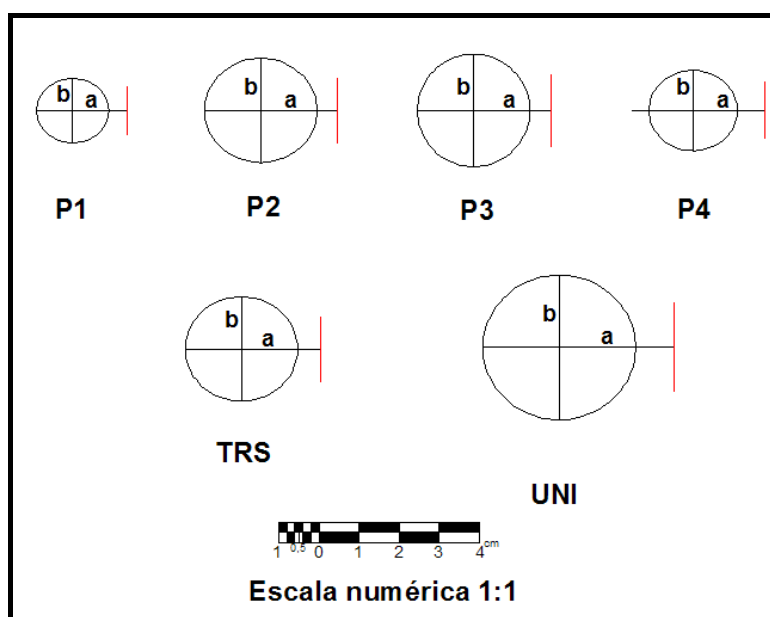


FIGURA 20 – ELIPSES DE ERROS (X, Y) E VETORES DE ERROS DA COMPONENTE Z.

## 7.2 AJUSTAMENTO COM INJUNÇÃO MÍNIMA VARIANDO O MODELO ESTOCÁSTICO

Esta seção visa apresentar a influência do modelo estocástico na determinação dos parâmetros ajustados. O modelo estocástico, dado pela matriz dos pesos foi discutido na seção 3.5. A matriz peso é formada pelo produto do fator de variância *a priori* e pela inversa da MVC das observações. Foi considerada para esta análise a matriz dos pesos na forma bloco diagonal e diagonal em dois casos: diagonal extraída da MVC do pós-processamento das linhas de base e a obtida pelo método empírico denominado de MINQUE, onde neste é levado em consideração a precisão nominal do receptor GPS (posicionamento relativo estático) bem como o comprimento da linha de base.

O ajustamento foi realizado com a utilização de injunção mínima, considerando as observações isentas de possíveis erros grosseiros de pequena magnitude.. O ajustamento segue de mesmo modo descrito na seção 7.1 considerando como ponto de injunção mínima a estação UFPR, linhas de base que obtiveram êxito no teste *data snooping* com a inclusão da linha de base UNI-P3, que em um reajustamento também passou no referido teste e utilização de três modelos estocásticos.

Em todos os três casos, o número de observações é igual a 30 e o número de parâmetros igual a 18, resultando deste modo em um grau de liberdade igual a 12.

O 1º caso a ser considerado é a utilização da matriz dos pesos na forma bloco diagonal. Como resultado do ajustamento foi obtido um fator de variância *a posteriori* de 35,403. A variância média dos parâmetros ajustados foi de 0,0004 m<sup>2</sup>, ou seja, um desvio padrão de 0,021 m.

As coordenadas cartesianas geocêntricas e suas respectivas precisões são apresentadas no QUADRO 32.

Estações	X(m)	Y(m)	Z(m)	$\sigma_x$ (m)	$\sigma_y$ (m)	$\sigma_z$ (m)
P1	3763132,110	-4365255,867	-2724997,551	0,004	0,003	0,003
P2	3763110,682	-4365209,802	-2725100,033	0,005	0,006	0,004
P3	3762990,518	-4365236,958	-2725221,658	0,005	0,006	0,004
P4	3762986,642	-4365344,036	-2725070,500	0,004	0,004	0,004
TRS	3755866,762	-4372870,233	-2722920,254	0,005	0,006	0,004
UNI	3754013,328	-4373589,648	-2724328,142	0,007	0,008	0,005

QUADRO 32 – COORDENADAS E PRECISÕES DAS ESTAÇÕES DA REDE

O 2º caso, onde foram consideradas apenas as variâncias das componentes das linhas de base provenientes do pós-processamento e apresentou um fator de variância *a posteriori* de 35,110. A variância média da MVC dos parâmetros estimado foi de  $0,0005\text{m}^2$ , ou seja, ou desvio padrão médio de 0,021m. Os resultados das coordenadas estimadas e precisões estão disponíveis no QUADRO 33.

Estações	X(m)	Y(m)	Z(m)	$\sigma_x$ (m)	$\sigma_y$ (m)	$\sigma_z$ (m)
P1	3763132,112	-4365255,867	-2724997,552	0,004	0,003	0,003
P2	3763110,683	-4365209,802	-2725100,034	0,005	0,006	0,004
P3	3762990,519	-4365236,958	-2725221,660	0,006	0,006	0,004
P4	3762986,643	-4365344,037	-2725070,501	0,005	0,004	0,004
TRS	3755866,765	-4372870,233	-2722920,257	0,005	0,006	0,004
UNI	3754013,331	-4373589,648	-2724328,143	0,007	0,008	0,006

QUADRO 33 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E PRECISÕES APÓS ELIMINAÇÃO DE OUTLIERS

O 3º caso trata da determinação das variâncias das componentes das linhas de base por meio do método empírico denominado de MINQUE, de acordo com a equação (3.36).

A precisão nominal do receptor adotado foi de  $a = 6\text{mm}$  e  $b = 0,5\text{ppm}$  (vertical). As distâncias são expressas em metros e a variância das componentes das linhas de base é dada em  $\text{m}^2$ .

Para este estudo foi utilizada a seguinte equação:  $\sigma_{\Delta X}^2 = (0,006)^2 + (0,5\text{ppm} * S)^2$  o que resulta as seguintes variâncias para as componentes das linhas de base no QUADRO 34.

No QUADRO 34, podem-se encontrar as componentes das linhas de base, seus comprimentos e as respectivas variâncias calculadas.

Linhas de Base	Componentes das Linhas de Base			Comprimento (m)	$\sigma_{\Delta X}^2 = \sigma_{\Delta Y}^2 = \sigma_{\Delta Z}^2$ (m <sup>2</sup> )	$\sigma_{\Delta X} = \sigma_{\Delta Y} = \sigma_{\Delta Z}$ (m)
	$\Delta X$ (m)	$\Delta Y$ (m)	$\Delta Z$ (m)			
UF-T	-7884,916	-7756,407	1484,458	11159,63106	$6,7134 \times 10^{-5}$	0,008
T-UNI	-1853,442	-719,407	-1407,883	2436,170811	$3,7484 \times 10^{-5}$	0,006
P4-P3	3,88	107,073	-151,161	185,2817575	$3,6009 \times 10^{-5}$	0,006
P3-P2	120,164	27,156	121,626	173,1176453	$3,6007 \times 10^{-5}$	0,006
P2-P1	21,427	-46,065	102,482	114,3838314	$3,6003 \times 10^{-5}$	0,006
UF-P1	-619,569	-142,034	-592,837	869,1922178	$3,6189 \times 10^{-5}$	0,008
P1-P4	-145,469	-88,169	-72,949	185,0852753	$3,6009 \times 10^{-5}$	0,006
T-P4	7119,888	7526,185	-2150,249	10581,10753	$6,3990 \times 10^{-5}$	0,006
UNI-P3	8977,187	8352,683	-893,517	12294,53425	$7,3789 \times 10^{-5}$	0,009
P2-P4	-124,041	-134,232	29,539	185,1403576	$3,6009 \times 10^{-5}$	0,006

QUADRO 34 – COMPONENTES DAS LINHAS DE BASE E RESPECTIVAS VARIÂNCIAS

Foi realizado o ajustamento considerando as variâncias disponíveis no QUADRO 34 e foi obtido um fator de variância a *posteriori* de 1,109. A variância média das coordenadas, obtida pelo traço da MVC dos parâmetros ajustados, foi de  $0,00085\text{m}^2$ , ou seja, um RMS de 0,029m.

Os resultados das coordenadas estimadas e precisões estão disponíveis no QUADRO 35

Estações	X(m)	Y(m)	Z(m)	$\sigma_x$ (m)	$\sigma_y$ (m)	$\sigma_z$ (m)
P1	3763132,112	-4365255,868	-2724997,552	0,006	0,006	0,006
P2	3763110,684	-4365209,804	-2725100,036	0,007	0,007	0,007
P3	3762990,518	-4365236,960	-2725221,660	0,007	0,007	0,007
P4	3762986,643	-4365344,038	-2725070,500	0,007	0,007	0,007
TRS	3755866,766	-4372870,235	-2722920,257	0,007	0,007	0,007
UNI	3754013,330	-4373589,648	-2724328,143	0,008	0,008	0,008

QUADRO 35 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E PRECISÕES

Observa-se no QUADRO 35 que as coordenadas estimadas das estações se apresentam precisões de magnitude semelhante, sinalizando uma distribuição dos erros de maneira homogênea na rede.

Aplicando o teste global do modelo para verificar o desempenho do ajustamento, segue-se enunciando a hipótese básica e alternativa e, estabelecendo um nível de significância  $\alpha$  de 5%.

$$H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$$

$$H_a : \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$$

A estatística:

$$\chi_c^2 = \frac{(n-u)\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{12(1,109)}{1} = 13,308$$

Região de Aceitação:

$$\chi_{gl,\alpha/2}^2 \leq \chi_c^2 \leq \chi_{gl,1-\alpha/2}^2$$

$$10,28 \leq \chi_c^2 \leq 32,67$$

Como o valor do qui-quadrado calculado está dentro do intervalo de confiança de 95%, a hipótese nula é aceita a 5% de significância.

Das três situações, a única situação que obteve sucesso no teste global do modelo foi com a utilização do MINQUE. Nota-se que o modelo estocástico utilizado por esta situação é mais representativo da realidade, pois tem maiores valores de desvio padrão que os fornecidos pelo programa de pós-processamento.

A FIGURA 21 apresenta as discrepâncias das coordenadas cartesianas da rede obtidas com a utilização dos três métodos. Foi tomado como referência o ajustamento em que foi utilizado o MINQUE.



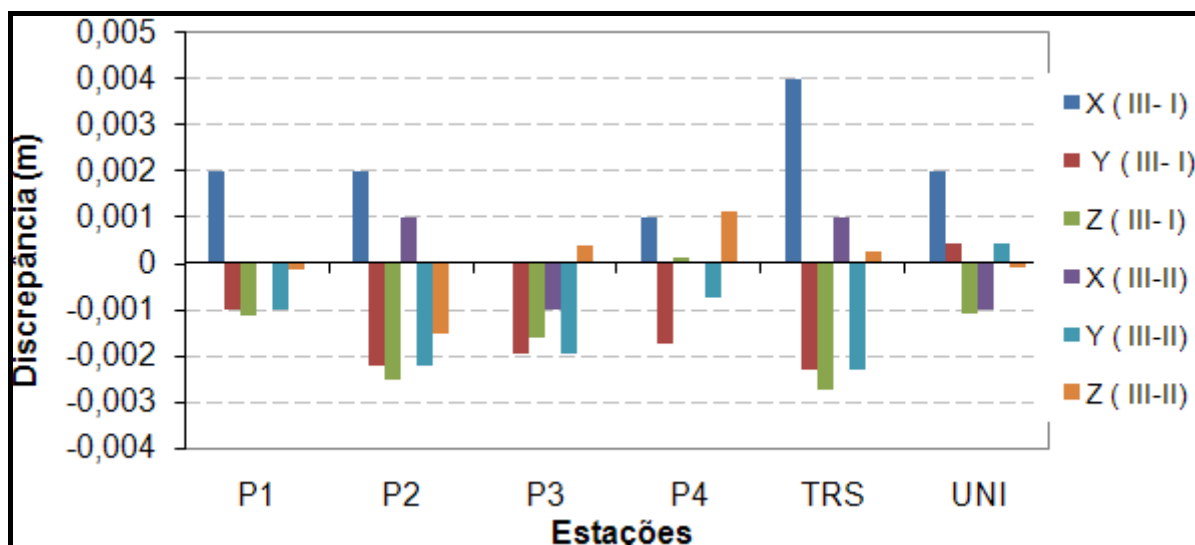


FIGURA 21 – DISCREPÂNCIA DAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES DA REDE  
 FONTE: O AUTOR (2009).

Na FIGURA 22, observa-se a acurácia obtida nas coordenadas cartesianas das estações TRS e UNI com a variação do modelo estocástico.

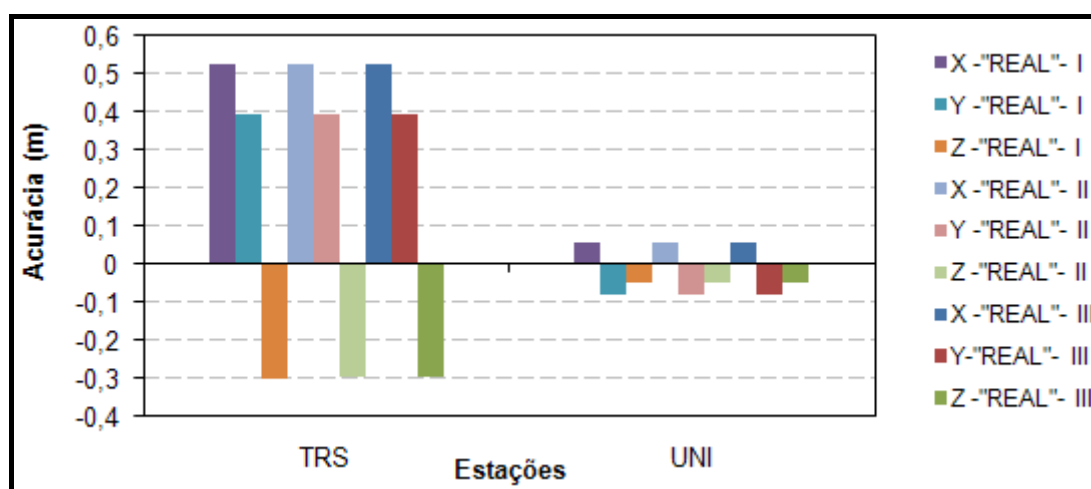


FIGURA 22 – ACURÁCIA OBTIDA NA DETERMINAÇÃO DAS COORDENADAS TRS e UNI  
 FONTE: O AUTOR (2009).

### 7.3 AJUSTAMENTO COM UTILIZAÇÃO DE PSEUDO-OBSERVAÇÃO

Para a realização deste modo de ajustamento, as coordenadas das estações de referência são consideradas como observações e parâmetros simultaneamente. Assim, as coordenadas e precisões das estações de referência/controlado serão inseridas respectivamente no vetor das observações e na matriz dos pesos. Este modo de ajustamento encontra-se descrito na seção (3.8). O

modelo estocástico utilizado na realização destes experimentos foi obtido pelo método empírico MINQUE.

Foram realizados 5 experimentos com consideração de coordenadas das estações de referência como pseudo-observações e tendo-se por finalidade verificar a influência da geometria da rede, bem como das coordenadas dos pontos de controle: no 1ª caso, foi considerada a estação TRS; no 2º caso, as estações TRS e UNI; no 3º caso, as estações TRS, UF, UNI; no 4º caso, foram consideradas as estações UNI, UF e no 5º caso as coordenadas das estações TRS e UF. O número de observações (componentes vetoriais da linha de base) é igual a 30, e 7 estações (21 parâmetros). No caso em que foi considerada apenas uma estação como pseudo-observação o grau de liberdade é dado por:  $((n - u + \mu_x) = (30 - 21 + 3) = 12$ ; nos casos em que foram consideradas duas estações de referência, o grau de liberdade é dado por:  $(n - u + \mu_x) = (30 - 21 + 6) = 15$ ; nos casos em que foram consideradas três estações, o número de graus de liberdade é dado por:  $(n - u + \mu_x) = (30 - 21 + 9) = 18$

As precisões adotadas para as coordenadas das estações de referência são iguais e tem a magnitude de  $\pm 0,007\text{m}$ , ou seja,  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0,007\text{m}$ .

Caso se não fosse inserida a pseudo-observação o sistema de equações normais teria deficiência de característica igual a 3. Como foi inserida três pseudo-observações, a mesma retirou a deficiência de característica. Percebe-se que a utilização de pseudo-observação pode ser utilizada para retirar a deficiência de característica evitando o uso de pseudo-inversa na solução do sistema de equações normais, além de inserir suas incertezas na estimação dos pontos da rede.

Foi realizado o ajustamento considerando como pseudo-observação a estação TRS (1° caso). Os resultados obtidos são: fator de variância a *posteriori* de 0,617. As coordenadas ajustadas são apresentadas no QUADRO 36.

Estações	X(m)	Y(m)	Z(m)	$\sigma_x$ (m)	$\sigma_y$ (m)	$\sigma_z$ (m)
P1	3763132,637	-4365255,474	-2724997,850	0,007	0,007	0,007
P2	3763111,210	-4365209,411	-2725100,334	0,007	0,007	0,007
P3	3762991,045	-4365236,568	-2725221,958	0,007	0,007	0,007
P4	3762987,169	-4365343,644	-2725070,798	0,007	0,007	0,007
TRS	3755867,290	-4372869,839	-2722920,553	0,005	0,005	0,005
UF	3763752,206	-4365113,437	-2724405,013	0,007	0,007	0,007
UNI	3754013,853	-4373589,249	-2724328,439	0,007	0,007	0,007

QUADRO 36 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E RESPECTIVAS PRECISÕES (SOLUÇÃO 1)

Foi realizado o ajustamento considerando como pseudo-observação as estações: TRS e UNI (2° caso). Os resultados obtidos são: fator de variância a *posteriori* de 270,99 e coordenadas e respectivas precisões são apresentadas no QUADRO 37.

Estações	X(m)	Y(m)	Z(m)	$\sigma_x$ (m)	$\sigma_y$ (m)	$\sigma_z$ (m)
P1	3.763.132,417	-4.365.255,702	-2.724.997,737	0,125	0,125	0,122
P2	3.763.110,980	-4.365.209,649	-2.725.100,216	0,123	0,123	0,120
P3	3.762.990,799	-4.365.236,821	-2.725.221,831	0,114	0,114	0,111
P4	3.762.986,945	-4.365.343,876	-2.725.070,684	0,116	0,116	0,110
TRS	3.755.867,108	-4.372.870,027	-2.722.920,455	0,090	0,090	0,090
UF	3.763.751,999	-4.365.113,651	-2.724.404,905	0,131	0,131	0,130
UNI	3.754.013,570	-4.373.589,540	-2.724.328,290	0,090	0,090	0,090

QUADRO 37 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E RESPECTIVAS PRECISÕES (SOLUÇÃO 2)

Foi realizado o ajustamento considerando como pseudo-observação as estações: TRS,UF,UNI (3° caso). Os resultados obtidos são: fator de variância a *posteriori* de 310,117 e coordenadas e respectivas precisões são apresentadas no QUADRO 38.

Estações	X(m)	Y(m)	Z(m)	$\sigma_x$ (m)	$\sigma_y$ (m)	$\sigma_z$ (m)
P1	3.763.132,285	-4.365.255,777	-2.724.997,661	0,109	0,109	0,107
P2	3.763.110,869	-4.365.209,711	-2.725.100,153	0,115	0,115	0,112
P3	3.762.990,706	-4.365.236,874	-2.725.221,778	0,109	0,109	0,106
P4	3.762.986,839	-4.365.343,936	-2.725.070,624	0,108	0,108	0,102
TRS	3.755.867,031	-4.372.870,071	-2.722.920,408	0,085	0,085	0,084
UF	3.763.751,820	-4.365.113,753	-2.724.404,799	0,093	0,093	0,092
UNI	3.754.013,508	-4.373.589,575	-2.724.328,253	0,089	0,089	0,089

QUADRO 38 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E RESPECTIVAS PRECISÕES (SOLUÇÃO 3)

Foi realizado o ajustamento considerando como pseudo-observação as estações: UNI, UFPR (4° caso) Os resultados obtidos são: fator de variância a *posteriori* de 6,418 e coordenadas e respectivas precisões são apresentadas no QUADRO 39.

Estações	X(m)	Y(m)	Z(m)	$\sigma_x$ (m)	$\sigma_y$ (m)	$\sigma_z$ (m)
P1	3763132,139	-4365255,907	-2724997,576	0,017	0,017	0,017
P2	3763110,715	-4365209,849	-2725100,063	0,018	0,018	0,018
P3	3762990,554	-4365237,011	-2725221,690	0,017	0,017	0,017
P4	3762986,675	-4365344,082	-2725070,527	0,018	0,018	0,017
TRS	3755866,797	-4372870,279	-2722920,283	0,017	0,017	0,017
UF	3763751,701	-4365113,860	-2724404,732	0,015	0,015	0,015
UNI	3754013,368	-4373589,700	-2724328,175	0,015	0,015	0,015

QUADRO 39 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E RESPECTIVAS PRECISÕES (SOLUÇÃO 4)

E por fim, foi realizado o ajustamento considerando como pseudo-observação às estações: TRS, UFPR Os resultados obtidos são: fator de variância a *posteriori* de 245,167 e coordenadas e respectivas precisões são apresentadas no QUADRO 40.

Estações	X(m)	Y(m)	Z(m)	$\sigma_x$ (m)	$\sigma_y$ (m)	$\sigma_z$ (m)
P1	3.763.132,358	-4.365.255,68	-2.724.997,7	0,109	0,109	0,107
P2	3.763.110,955	-4.365.209,6	-2.725.100,2	0,118	0,118	0,115
P3	3.762.990,807	-4.365.236,75	-2.725.221,83	0,118	0,118	0,115
P4	3.762.986,923	-4.365.343,83	-2.725.070,67	0,111	0,111	0,106
TRS	3.755.867,102	-4.372.869,98	-2.722.920,44	0,089	0,089	0,089
UF	3.763.751,869	-4.365.113,69	-2.724.404,82	0,089	0,089	0,089
UNI	3.754.013,64	-4.373.589,41	-2.724.328,32	0,117	0,117	0,116

QUADRO 40 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E RESPECTIVAS PRECISÕES (SOLUÇÃO 5)

Com o objetivo de verificar o impacto nas coordenadas estimadas com a variação dos pontos de controle foi construído o gráfico da FIGURA 24. As diferenças das soluções foram feitas em relação ao 4º caso (único aceito no teste global do modelo a 5% de significância) e independentemente do número de estações utilizadas como injunções.

Na FIGURA 23, observam-se as discrepâncias entre as soluções com o emprego de pseudo-observações. Estas discrepâncias podem ser devido à modificação da geometria da rede à medida que se alteram as pseudo-observações além da inserção das coordenadas destes.

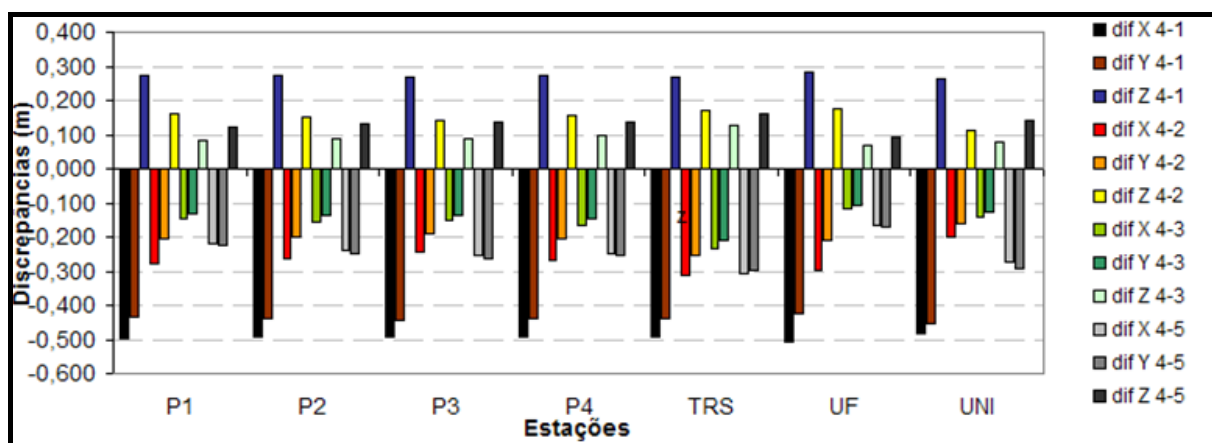


FIGURA 23 – DISCREPÂNCIA ENTRE AS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES DA REDE

FONTE: O AUTOR (2009).

Com estas simulações, pode-se perceber que à medida que se inserem pseudo-observações, a geometria da rede passa a ter influência na estimação dos

parâmetros das estações da rede. Pode também ser verificado que as coordenadas das estações de referência também têm influência nesta estimação.

#### 7.4 AJUSTAMENTO COM UTILIZAÇÃO DA PROPRIEDADE REPRODUTORA

De acordo com o descrito na seção (3.9), esta técnica visa recuperar o valor das coordenadas das estações de referência alteradas durante o processo de ajustamento. Esta variação dependerá do peso atribuído a esta estação de ligação.

Foi verificado na seção (7.3) que dependendo do peso atribuído às coordenadas das estações consideradas como pseudo-observações, estas serão modificadas ou mantidas. Ela foi mantida quando foi atribuída variância muito “pequena” de modo que o peso foi “grande” o suficiente para fixar a variável (injunção absoluta). Considerando o caso de densificação de rede onde, a precisão das coordenadas da estação de referência quase sempre são menores do que as obtidas para as componentes das linhas de base, tem-se que estas coordenadas terão seus valores iniciais alterados, devido à ponderação no ajustamento. Visando a recuperação destas coordenadas foi aplicada a técnica desenvolvida por Schaffrin (2001). As coordenadas das estações de referência, encontram-se no QUADRO 7.

No primeiro teste realizado foi considerado para a montagem do modelo estocástico o modelo empírico MINQUE, e desvio padrão para as coordenadas da estação de ligação TRS, igual a 0,007m. Escolhido de modo arbitrário.

O fator de variância *a posteriori* obtido foi de 0,616, lembrando que o número de graus de liberdade foi de 12, pois é obtido por  $(n - u + \mu_x) = (30 - 21 + 3) = 12$ .

Os resíduos resultantes da estação de injunção foram da ordem de  $1 \times 10^{-10}$  m. Deste modo, as coordenadas injuncionadas sofrerão variações desta magnitude. As precisões das coordenadas da estação de ligação permanece a mesma quando é utilizado a equação (3.76), porém quando utilizado a equação (3.71) a precisão diminui. O mesmo fato acontece para as precisões das demais estações. A contribuição da injunção no denominador do fator de variância *a posteriori* é da ordem de  $1 \times 10^{-15}$ , comprovando que as injunções neste caso, não estão influenciando na determinação dos resíduos das observações e conseqüentemente no fator de variância *a posteriori*.

No QUADRO 41, observam-se as coordenadas e respectivas precisões das estações da rede GPS.

Estações	Coordenadas Cartesianas Ajustadas (m)			Precisões (m) Multiplicado por $\hat{\sigma}_0^2$			Precisões (m) Multiplicada por $\sigma_0^2$		
	X	Y	Z	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$
P1	3763132,637	-4365255,474	-2724997,850	0,0073	0,0073	0,0071	0,0093	0,0093	0,0090
P2	3763111,210	-4365209,411	-2725100,334	0,0073	0,0073	0,0071	0,0093	0,0093	0,0090
P3	3762991,045	-4365236,568	-2725221,958	0,0071	0,0071	0,0069	0,0091	0,0091	0,0088
P4	3762987,169	-4365343,644	-2725070,798	0,0070	0,0070	0,0066	0,0089	0,0089	0,0084
TRS	3755867,290	-4372869,839	-2722920,553	0,0055	0,0055	0,0055	0,0070	0,0070	0,0070
UFPR	3763752,206	-4365113,437	-2724405,013	0,0074	0,0074	0,0073	0,0094	0,0094	0,0093
UNI	3754013,853	-4373589,249	-2724328,439	0,0069	0,0069	0,0068	0,0087	0,0087	0,0087

QUADRO 41 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E PRECISÕES

No QUADRO 42, podem-se observar as coordenadas das estações da rede após a aplicação da propriedade reprodutora, equação (3.84).

Estações	Coordenadas Cartesianas Ajustadas (m)			Precisões (m) Multiplicado por $\hat{\sigma}_0^2$			Precisões (m) Multiplicada por $\sigma_0^2$		
	X	Y	Z	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$
P1	3763132,637	-4365255,474	-2724997,850	0,0073	0,0073	0,0071	0,0093	0,0093	0,0090
P2	3763111,210	-4365209,411	-2725100,334	0,0073	0,0073	0,0071	0,0093	0,0093	0,0090
P3	3762991,045	-4365236,568	-2725221,958	0,0071	0,0071	0,0069	0,0091	0,0091	0,0088
P4	3762987,169	-4365343,644	-2725070,798	0,0070	0,0070	0,0066	0,0089	0,0089	0,0084
TRS	3755867,290	-4372869,839	-2722920,553	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070
UFPR	3763752,206	-4365113,437	-2724405,013	0,0074	0,0074	0,0073	0,0094	0,0094	0,0093
UNI	3754013,853	-4373589,249	-2724328,439	0,0069	0,0069	0,0068	0,0087	0,0087	0,0087

QUADRO 42 – COORDENADAS E PRECISÕES DAS ESTAÇÕES DA REDE GPS.

No segundo teste realizado, foram consideradas como injunções as estações TRS e UNI, cujas precisões iniciais foram consideradas igual a 0,007m. O número de graus de liberdade para este caso aumentou em três, pois foi adicionado mais uma estação como injunção. Deste modo, o grau de liberdade é igual a  $(n - u + \mu_x) = (30 - 21 + 6) = 15$ . O valor do fator de variância a *posteriori* foi de 270,992. Os resíduos das coordenadas da estação injuncionada variam de 1 a 2 decímetros. Assim, as coordenadas das estações sofrerão alteração conforme poderá ser visualizado no QUADRO 42. A contribuição do ponto de ligação, no fator de variância a *posteriori* é da ordem de 212,131 e das observações é de 58,861.

No QUADRO 43, observam-se as coordenadas de todas as estações da rede, bem como as respectivas precisões obtidas.

Estações	Coordenadas Cartesianas Ajustadas (m)			Precisões (m) Multiplicado por $\hat{\sigma}_0^2$			Precisões (m) Multiplicada por $\sigma_0^2$		
	X	Y	Z	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$
P1	3763132,417	-4365255,702	-2724997,737	0,1250	0,1250	0,1217	0,0076	0,0076	0,0074
P2	3763110,980	-4365209,649	-2725100,216	0,1234	0,1234	0,1195	0,0075	0,0075	0,0073
P3	3762990,799	-4365236,821	-2725221,831	0,1136	0,1136	0,1107	0,0069	0,0069	0,0067
P4	3762986,945	-4365343,876	-2725070,684	0,1163	0,1163	0,1098	0,0071	0,0071	0,0067
TRS	3755867,108	-4372870,027	-2722920,455	0,0899	0,0899	0,0896	0,0055	0,0055	0,0054
UFPR	3763751,999	-4365113,651	-2724404,905	0,1309	0,1309	0,1299	0,0080	0,0080	0,0079
UNI	3754013,570	-4373589,540	-2724328,290	0,0899	0,0899	0,0896	0,0055	0,0055	0,0054

QUADRO 43 – COORDENADAS E PRECISÕES DAS ESTAÇÕES DA REDE GPS.

No QUADRO 44, pode-se observar as coordenadas das estações da rede após a aplicação da propriedade reprodutora. Nota-se que os valores iniciais das coordenadas e precisões dos pontos de ligação são recuperados.

Estações	Coordenadas Cartesianas Ajustadas (m)			Precisões (m) Multiplicado por $\hat{\sigma}_0^2$			Precisões (m) Multiplicada por $\sigma_0^2$		
	X	Y	Z	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$
P1	3763132,417	-4365255,702	-2724997,737	0,1250	0,1250	0,1217	0,0076	0,0076	0,0074
P2	3763110,980	-4365209,649	-2725100,216	0,1234	0,1234	0,1195	0,0075	0,0075	0,0073
P3	3762990,799	-4365236,821	-2725221,831	0,1136	0,1136	0,1107	0,0069	0,0069	0,0067
P4	3762986,945	-4365343,876	-2725070,684	0,1163	0,1163	0,1098	0,0071	0,0071	0,0067
TRS	3755867,290	-4372869,839	-2722920,553	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070
UFPR	3763751,999	-4365113,651	-2724404,905	0,1309	0,1309	0,1299	0,0080	0,0080	0,0079
UNI	3754013,388	-4373589,728	-2724328,192	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070

QUADRO 44 – COORDENADAS E PRECISÕES DAS ESTAÇÕES DA REDE GPS.

No terceiro teste, foram consideradas como injunções as coordenadas das estações UFPR e UNI, cujo *desvios - padrão* foram consideradas igual a 0,007m. O grau de liberdade é igual a  $(n - u + \mu_x) = (30 - 21 + 6) = 15$ . O valor do fator de variância *a posteriori* foi de 6,418 m<sup>2</sup>. Os resíduos resultantes das estações de injunção variaram de 1 a 2 centímetros. Assim, as coordenadas das estações sofrerão alteração. A contribuição da injunção no fator de variância *a posteriori* é da ordem de 3,853 e das observações é de 2,565.



No QUADRO 45, observam-se as coordenadas de todas as estações da rede.

Estações	Coordenadas Cartesianas Ajustadas (m)			Precisões (m) Multiplicado por $\hat{\sigma}_0^2$			Precisões (m) Multiplicada por $\sigma_0^2$		
	X	Y	Z	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$
P1	3763132,139	-4365255,907	-2724997,576	0,0173	0,0173	0,0171	0,0068	0,0068	0,0068
P2	3763110,715	-4365209,849	-2725100,063	0,0182	0,0182	0,0180	0,0072	0,0072	0,0071
P3	3762990,554	-4365237,011	-2725221,690	0,0174	0,0174	0,0172	0,0069	0,0069	0,0068
P4	3762986,675	-4365344,082	-2725070,527	0,0175	0,0175	0,0170	0,0069	0,0069	0,0067
TRS	3755866,797	-4372870,279	-2722920,283	0,0168	0,0168	0,0165	0,0066	0,0066	0,0065
UFPR	3763751,701	-4365113,860	-2724404,732	0,0146	0,0146	0,0146	0,0058	0,0058	0,0057
UNI	3754013,368	-4373589,700	-2724328,175	0,0146	0,0146	0,0146	0,0058	0,0058	0,0057

QUADRO 45 – COORDENADAS E PRECISÕES DAS ESTAÇÕES DA REDE GPS.

No QUADRO 46, podem-se observar as coordenadas das estações da rede com seus valores iniciais após a aplicação desta técnica. Nota-se que os valores iniciais das coordenadas e precisões dos pontos de ligação foram recuperados.

Estações	Coordenadas Cartesianas Ajustadas (m)			Precisões (m) Multiplicado por $\hat{\sigma}_0^2$			Precisões (m) Multiplicada por $\sigma_0^2$		
	X	Y	Z	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$
P1	3763132,139	-4365255,907	-2724997,576	0,0173	0,0173	0,0171	0,0068	0,0068	0,0068
P2	3763110,715	-4365209,849	-2725100,063	0,0182	0,0182	0,0180	0,0072	0,0072	0,0071
P3	3762990,554	-4365237,011	-2725221,69	0,0174	0,0174	0,0172	0,0069	0,0069	0,0068
P4	3762986,675	-4365344,082	-2725070,527	0,0175	0,0175	0,0170	0,0069	0,0069	0,0067
TRS	3755866,797	-4372870,279	-2722920,283	0,0168	0,0168	0,0165	0,0066	0,0066	0,0065
UFPR	3763751,681	-4365113,832	-2724404,715	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070
UNI	3754013,388	-4373589,728	-2724328,192	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070

QUADRO 46 – COORDENADAS E PRECISÕES DAS ESTAÇÕES DA REDE GPS.

No quarto teste, foram consideradas como estações de ligação ou injunção, as estações TRS, UFPR e UNI, cujas precisões iniciais foram consideradas igual a 0,007m. O grau de liberdade é igual a  $(n - u + \mu_x) = (30 - 21 + 9) = 18$ . O valor do fator de variância a *posteriori* foi de 310,117. Os resíduos dos pontos de ligação variam de 6 a 26cm. Deste modo, suas coordenadas irão se alterar. A contribuição da injunção no fator de variância a *posteriori* é da ordem de 244,594 e das observações é de 65,523.

No QUADRO 47, observam-se as coordenadas e respectivas precisões de todas as estações da rede.

Estações	Coordenadas Cartesianas Ajustadas (m)			Precisões (m) Multiplicado por $\hat{\sigma}_0^2$			Precisões (m) Multiplicada por $\sigma_0^2$		
	X	Y	Z	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$
P1	3763132,285	-4365255,777	-2724997,661	0,1091	0,1091	0,1066	0,0062	0,0062	0,0061
P2	3763110,869	-4365209,711	-2725100,153	0,1151	0,1151	0,1119	0,0065	0,0065	0,0064
P3	3762990,706	-4365236,874	-2725221,778	0,1087	0,1087	0,1064	0,0062	0,0062	0,0060
P4	3762986,839	-4365343,936	-2725070,624	0,1078	0,1078	0,1018	0,0061	0,0061	0,0058
TRS	3755867,031	-4372870,071	-2722920,408	0,0849	0,0849	0,0841	0,0048	0,0048	0,0048
UFPR	3763751,82	-4365113,753	-2724404,799	0,0925	0,0925	0,0922	0,0053	0,0053	0,0052
UNI	3754013,508	-4373589,575	-2724328,253	0,0890	0,0890	0,0889	0,0051	0,0051	0,0051

QUADRO 47 – COORDENADAS E PRECISÕES DAS ESTAÇÕES DA REDE GPS.

No QUADRO 48, podem-se observar as coordenadas das estações da rede após a aplicação da propriedade reprodutora. Nota-se que os valores iniciais das coordenadas são recuperados.

Estações	Coordenadas Cartesianas Ajustadas (m)			Precisões (m) Multiplicado por $\hat{\sigma}_0^2$			Precisões (m) Multiplicada por $\sigma_0^2$		
	X	Y	Z	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_x$
P1	3763132,285	-4365255,777	-2724997,661	0,1091	0,1091	0,1066	0,0062	0,0062	0,0061
P2	3763110,869	-4365209,711	-2725100,153	0,1151	0,1151	0,1119	0,0065	0,0065	0,0064
P3	3762990,706	-4365236,874	-2725221,778	0,1087	0,1087	0,1064	0,0062	0,0062	0,0060
P4	3762986,839	-4365343,936	-2725070,624	0,1078	0,1078	0,1018	0,0061	0,0061	0,0058
TRS	3755867,29	-4372869,839	-2722920,553	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070
UFPR	3763751,681	-4365113,832	-2724404,715	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070
UNI	3754013,388	-4373589,728	-2724328,192	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070	0,0070

QUADRO 48 – COORDENADAS E PRECISÕES DAS ESTAÇÕES DA REDE GPS.

Neste mesmo caso foi atribuído variância pequena para as coordenadas da estação TRS e foi observado que o fator de variância a *posteriori* foi para 1155m<sup>2</sup>.

## 7.5 AJUSTAMENTO LIVRE COM A UTILIZAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO DE HELMERT

Para a realização do ajustamento livre (solução do sistema de equações normais), discutido na seção (3.10), foi utilizado a função implementada no MATLAB que utiliza a inversa de Moore-Penrose, comumente denominada de pseudo-inversa. A utilização da pseudo-inversa foi necessária, pois a matriz normal dos coeficientes (N) possui deficiência de característica igual a três. O peso das observações foi o mesmo utilizada para o 2º caso discutido na seção (7.2). Como resultado do ajustamento foi obtido um valor de variância a *posteriori* de 35,118, onde este valor, tem similar magnitude da obtida com a utilização do ajustamento com inunções mínimas. A variância média das coordenadas estimadas é de  $1,187 \times 10^{-5} \text{m}^2$ .

No Quadro 49, encontram-se as coordenadas e precisões das estações da rede obtidas no ajustamento livre. Verifica-se que as coordenadas estão em um sistema de referência arbitrário.

Estações	X(m)	Y(m)	Z(m)	$\sigma_x$ (m)	$\sigma_y$ (m)	$\sigma_z$ (m)
P1	2296,150	2261,330	-420,000	0,003	0,003	0,002
P2	2274,721	2307,395	-522,483	0,003	0,003	0,003
P3	2154,557	2280,239	-644,108	0,003	0,003	0,003
P4	2150,681	2173,160	-492,949	0,003	0,003	0,002
TRS	-4969,197	-5353,037	1657,295	0,004	0,004	0,003
UNI	-6822,631	-6072,451	249,408	0,005	0,006	0,004
UFPR	2915,719	2403,365	172,837	0,004	0,003	0,003

QUADRO 49 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES E PRECISÕES

Na FIGURA 24, observa-se o gráfico de frequência dos resíduos das observações obtidas no ajustamento livre. Nota-se que estes resíduos tendem a serem normalmente distribuídos.

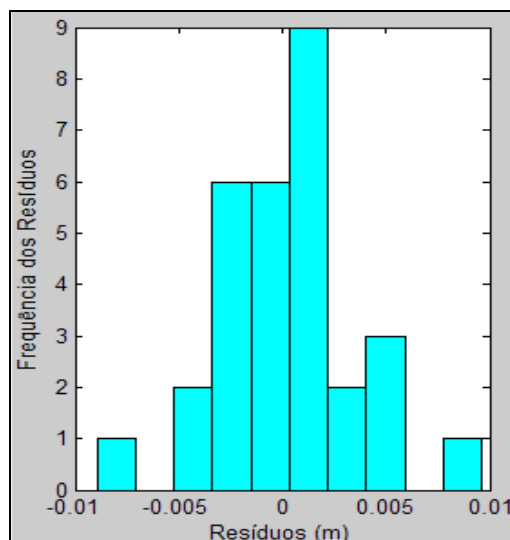


FIGURA 24 – RESÍDUOS DAS OBSERVAÇÕES DA REDE EM ESTUDO

FONTE: O AUTOR (2009).

No QUADRO 50, observa-se as componentes vetoriais das linhas de base, bem como os respectivos desvios padrão.

Linhas de base		Componentes Vetoriais ajustadas			Desvios Padrão		
De	Para	$\Delta X$ (m)	$\Delta Y$ (m)	$\Delta Z$ (m)	$\sigma_x$ (m)	$\sigma_y$ (m)	$\sigma_z$ (m)
UF	T	-7884,916	-7756,401	1484,458	0,005	0,006	0,004
T	UNI	-1853,434	-719,415	-1407,886	0,006	0,007	0,005
P4	P3	3,876	107,078	-151,160	0,004	0,005	0,003
P3	P2	120,164	27,156	121,626	0,002	0,003	0,002
P2	P1	21,429	-46,065	102,483	0,004	0,005	0,003
UF	P1	-619,569	-142,035	-592,837	0,004	0,003	0,003
P1	P4	-145,469	-88,170	-72,949	0,003	0,003	0,003
T	P4	7119,878	7526,197	-2150,244	0,005	0,006	0,005
UNI	P3	8977,188	8352,690	-893,517	0,007	0,007	0,006
P2	P4	-124,040	-134,234	29,534	0,004	0,005	0,003

QUADRO 50 – COMPONENTES VETORIAIS AJUSTADAS E RESPECTIVOS DESVIOS - PADRÃO

A determinação das coordenadas das estações P1, P2, P3, P4 no sistema de referência definido pelas estações UFPR, UNICENP e TRS, foi utilizado a transformação de HELMERT, discutida na seção (3.10.1) para obtenção dos parâmetros de transformação entre os sistemas de referência.

Como se tem coordenadas de três pontos de controle (9 equações de observações) e 7 parâmetros a determinar, existem 2 graus de liberdade, deste modo, foi realizado o ajustamento pelo método paramétrico. Após a realização

deste, foi aplicado o teste global do modelo para verificar a qualidade do mesmo. Foi utilizado fator de variância a priori  $\sigma_0^2$  igual à unidade e matriz dos pesos igual a matriz identidade. Testando a hipótese nula contra a hipótese alternativa a  $\alpha = 5\%$  tem-se que:

$$H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$$

$$H_a : \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$$

A estatística:

$$\chi_c^2 = \frac{(n-u)\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{2(0.141)}{1} = 0,282$$

Região de Aceitação:

$$\chi_{2,0,05/2}^2 \leq \chi_c^2 \leq \chi_{2,1-0,05/2}^2$$

$$0,05 \leq \chi_c^2 \leq 7,38$$

Não rejeita-se a hipótese nula, pois a estatística qui-quadrado calculado encontra-se dentro do intervalo de confiança  $(1-\alpha)$  de 95%.

Os parâmetros de transformação e as respectivas precisões obtidas no processo de ajustamento estão disponíveis no QUADRO 51.

Parâmetros de Transformação		Precisões (1 sigma)
Translação em X (m)	3760836,049	0,287 (m)
Translação em Y(m)	-4367517,112	0,293 (m)
Translação em Z(m)	-2724577,618	0,280(m)
Escala (ppm)	0,999977576	0,0000376951
Rotação em X	-0°00'07,93383"	0°00'48,54517"
Rotação em Y	-0°00'05,76385"	0°00'44,24066"
Rotação em Z	-0°00'01,45978"	0°00'08,49403"

QUADRO 51 – COMPONENTES VETORIAIS AJUSTADAS E RESPECTIVOS *DESVIOS* - PADRÃO

De posse dos parâmetros de transformação, foi aplicada a transformação inversa para obtenção das coordenadas das estações no sistema de referência especificado. No QUADRO 52, encontra-se as coordenadas da estação da rede no sistema de referência especificado.

Estações	X(m)	Y(m)	Z(m)
P1	3763132,119	-4365255,800	-2724997,586
P2	3763110,688	-4365209,732	-2725100,064
P3	3762990,523	-4365236,884	-2725221,684
P4	3762986,653	-4365343,966	-2725070,532
TRS	3755867,048	-4372870,127	-2722920,428
UNI	3754013,621	-4373589,485	-2724328,259
UFPR	3763751,690	-4365113,787	-2724404,774

QUADRO 52 – COORDENADAS DAS ESTAÇÕES DA REDE

A FIGURA 25, ilustra as discrepâncias das coordenadas da rede obtida com o ajustamento livre, seguido da transformação de Helmert e obtidas como ajustamento utilizando injunção mínima tratada na seção (7.2) 2º caso.

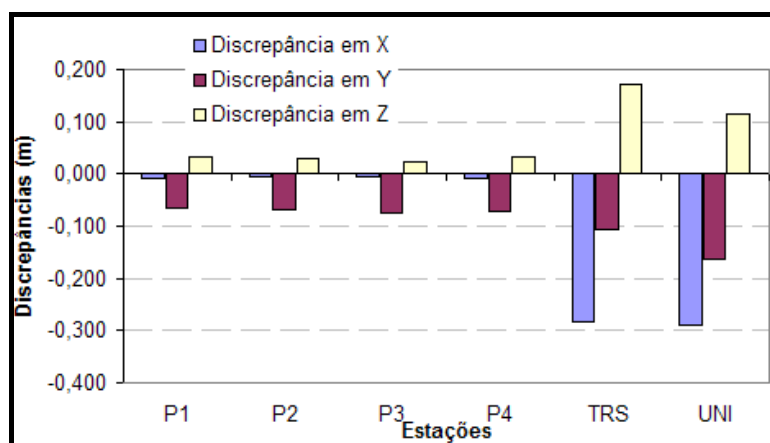


FIGURA 25 – DISCREPÂNCIA DAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES DA REDE  
 FONTE: O AUTOR (2009).

Podem-se observar pela FIGURA 25, que as discrepâncias das coordenadas dos pontos P1, P2, P3, e P4 são em média menores que 0,008m. As maiores discrepâncias obtidas foram nas estações de controle (TRS e UNI). Este fato pode ser devido a configuração das estações na rede.

Por meio da FIGURA 26, pode-se observar a acurácia obtida nas coordenadas das estações de referência.

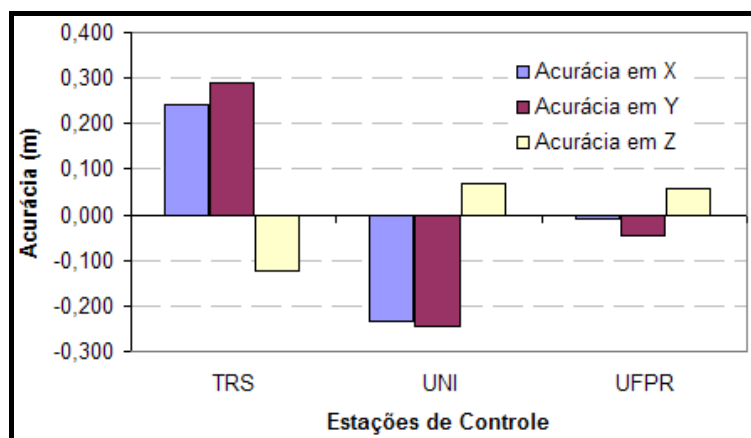


FIGURA 26 – ACURÁCIA OBTIDA NAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES DA REDE  
FONTE: O AUTOR (2009).

Na FIGURA 26, pode ser observado que as coordenadas da estação de controle UFPR obteve um menor valor da medida de acurácia, ou seja, sua determinação foi mais acurada. Foi obtido uma acurácia média de 0,002m. A acurácia média obtida na estação TRS foi de 0,135m e na UNI de -0,136m. Convém ressaltar que estas medidas de acurácia podem ser justificadas pelas precisões obtidas na estimação dos parâmetros da transformação de Helmert.

## 7.6 AJUSTAMENTO COM INJUNÇÃO RELATIVA DE POSIÇÃO

De acordo com os modos de ajustamento descrito, há possibilidade de trabalhar com injunções relativas de duas maneiras: considerando as coordenadas das estações como pseudo-observações ou inserindo as injunções relativas de posição de acordo com o descrito na seção (3.7).

Os *desvios - padrão* das estações foram admitidas variarem de  $\pm 0,01$  a  $\pm 0,05$  m com incremento de 1 cm a cada novo ajustamento. Realizado os ajustamentos com apenas uma injunção no modo relativo (UFPR), pode-se verificar que a modificação das incertezas posicionais destes, não tem influência significativa na determinação do fator de variância *a posteriori* nem nas coordenadas dos parâmetros ajustados da rede, mas influencia significativamente as precisões das coordenadas das estações da rede.

Também foi realizado o ajustamento com a utilização de duas estações como injunção relativa. A estação UFPR foi fixada com precisão de  $\pm 0,007$  e a estação UNI com precisão de  $\pm 0,01$  a  $\pm 0,05$  m com incremento de 1 cm a cada novo ajustamento. Com esta nova condição, foi verificado que a precisão do ponto de injunção tem influência na determinação do fator de variância *a posteriori*, na estimação dos parâmetros e suas precisões. Essa variação poderá levar o ajustamento da condição de aceitação da hipótese nula no teste global do modelo como a rejeição. Nas simulações realizadas verificou-se que as variações levaram da condição de aceitação para a rejeição da hipótese nula do teste global do modelo a um nível de significância  $\alpha$  de 5% .

Na FIGURA 27, observa-se o comportamento do fator de variância *a posteriori* e conseqüentemente no valor do qui-quadrado calculado  $\chi_c^2$  com a variação do desvio padrão das coordenadas estação UNI.



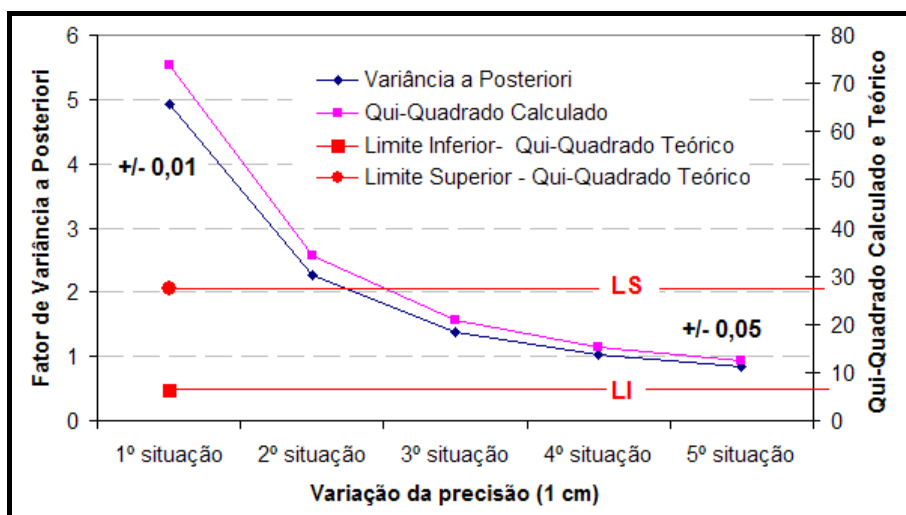


FIGURA 27 – COMPORTAMENTO DA VARIÂNCIA A *POSTERIORI*.

FONTE: O AUTOR (2009).

Neste contexto foi verificado que as incertezas atribuídas aos pontos de injeção têm influência na determinação do fator de variância a *posteriori*, nas precisões e nas coordenadas estimadas.

Na FIGURA 28, observam-se as diferenças de coordenadas das estações da rede, em cada situação.

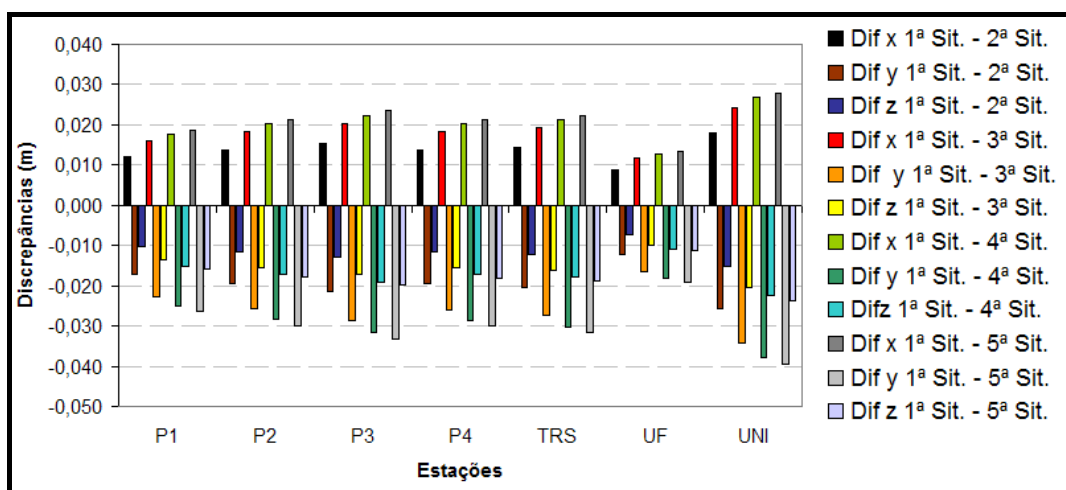


FIGURA 28 – DISCREPÂNCIAS POSICIONAIS DAS ESTAÇÕES DA REDE.

Na FIGURA 28, observa-se que as discrepâncias entre as estações crescem a medida que os valores dos *desvios - padrão* das coordenadas da estação UNI são aumentados. Ao aumentar o valor o desvio padrão da estação UNI e permitindo deste modo, uma maior variação posicional, resulta-se nas maiores discrepâncias. Conforme foi discutida na seção (3.6.2), a injeção relativa de posição permite a

variação posicional, dentro do espaço de probabilidade de existência da variável. Também foi constatado que os *desvios - padrão* das coordenadas também sofrem alterações.

## 7.7 IMPOSIÇÃO DE DESLOCAMENTOS NAS COORDENADAS DA ESTAÇÃO UNI

Inicialmente, será verificado somente com a utilização de injunção mínima (pseudo-observação) o impacto do deslocamento da estação de controle (UFPR) nas determinações das coordenadas estimadas bem como do fator de variância a *posteriori*. Os deslocamentos irão variar de 0,01m a 0,05m com incremento de 0,01m a cada novo ajustamento.

Foi utilizado como pseudo-observação a estação UFPR e a cada ajustamento foi imposto o deslocamento supracitado. Considerando as coordenadas iniciais desta estação e a precisão de  $\pm 0,007$  m, foi obtido um fator de variância a *posteriori* de 0,617 para todas as situações. A variação entre estes fatores de variância é da ordem de  $1 \times 10^{-14}$ . A variação das coordenadas das estações da rede após cada variação em relação às coordenadas originais (sem deslocamento), tiveram a mesma magnitude do deslocamento da estação de referência. Deste modo, um erro sistemático na coordenada dos pontos de referência (injunção mínima) será transmitido para toda a rede, fazendo com que a estrutura sofra deslocamento de mesma magnitude ocorrida no ponto de injunção.

A FIGURA 29, apresenta as discrepâncias entre as coordenadas obtidas nos incrementos de 0,01m nas coordenadas da estação UFPR (pseudo-observação). Nota-se que o deslocamento se propaga de maneira igual para todos os pontos da rede, ou seja, a estrutura sofre um deslocamento igual em todas as direções. Na FIGURA 29, a palavra Orig. refere-se às coordenadas das estações sem deslocamentos, e de 1ª Sit. a 5ª Sit. Com imposição de deslocamentos com 0,01m de incremento.

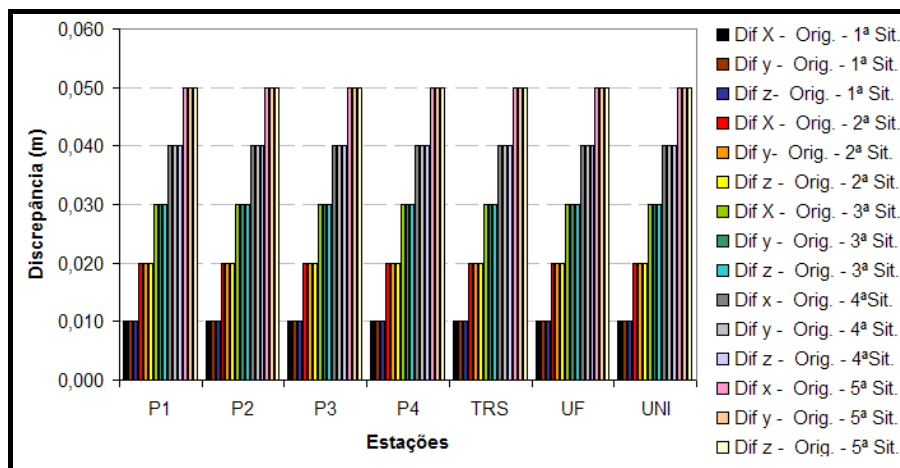


FIGURA 29 – DISCREPÂNCIAS POSICIONAIS DAS ESTAÇÕES DA REDE.

FONTE: O AUTOR (2009).

Com intuito de verificar o impacto do deslocamento de uma estação de referência, foram utilizadas as estações UFPR e UNI, sendo que os deslocamentos de mesma magnitude do caso da utilização de somente uma injeção (pseudo-observação), serão aplicados na estação UNI. Serão utilizados os diferentes modos de aplicação do ajustamento paramétrico.

Será chamado de 1º caso, o modo de ajustamento com a utilização de pseudo-observações (UFPR, UNI.). Foram impostos deslocamentos de 0,01m a 0,05m nas coordenadas da estação UNI, de modo a verificar o impacto na determinação das coordenadas das estações da rede. A cada ajustamento foi subtraído 0,01m de cada coordenada da estação UNI.

Na FIGURA 30, pode ser observado que a cada situação, ou seja, a cada momento que foi subtraído 0,01m das coordenadas da estação UNI o novo ajustamento teve como resultado um fator de variância a *posteriori* maior que o anterior.

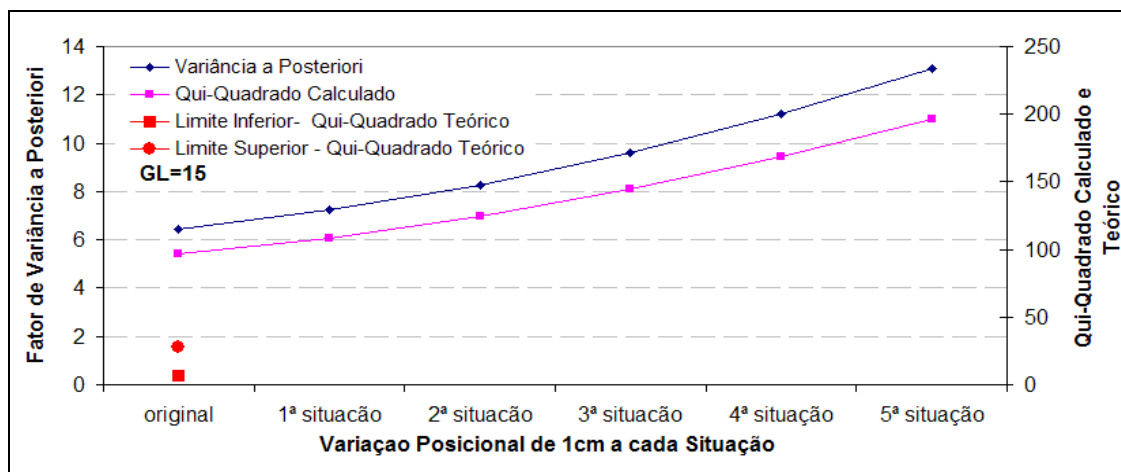


FIGURA 30 – FATOR DE VARIÂNCIA A *POSTERIORI* E QUI-QUADRADO TEÓRICO E CALCULADO  
 FONTE: O AUTOR (2009).

Na FIGURA 31, observa-se o efeito do deslocamento imposto na estação UNI não é transmitido para as demais estações da rede com mesma magnitude, como no caso em que foi considerado injunção mínima. Deste modo, pode-se dizer que a geometria da rede está interferindo na propagação dos erros e na estimação dos parâmetros.

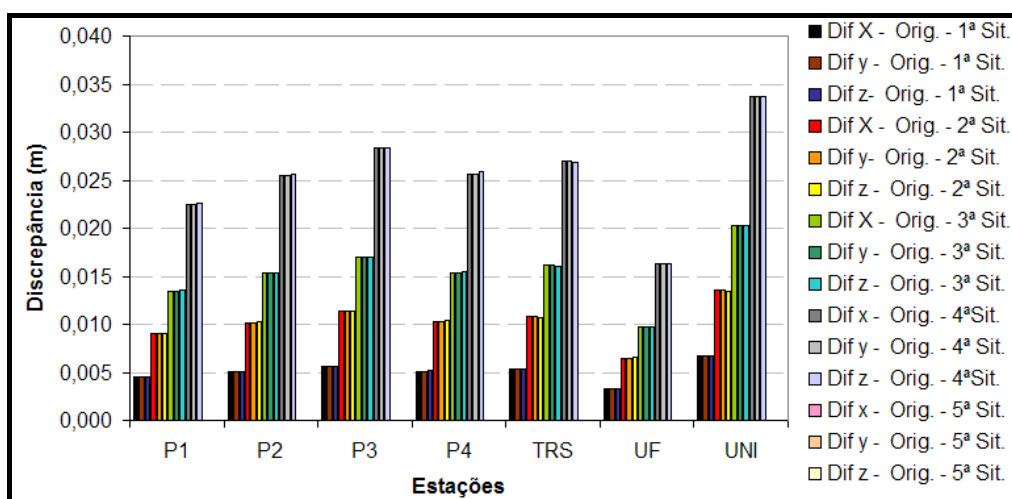


FIGURA 31 – DISCREPÂNCIAS POSICIONAIS DAS ESTAÇÕES DA REDE.  
 FONTE: O AUTOR (2009).

Da FIGURA 32, nota-se que a medida que os deslocamentos nas coordenadas das estações em relação às coordenadas originais foram aumentando, os *desvios - padrão* também aumentaram. Este fato pode ser devido a obtenção de um fator de variância a *posteriori* maior em cada ajustamento e que, ao ser

multiplicado pela MVC dos parâmetros ajustados, resultou em um valor maior de desvio padrão. Também se pode observar que as precisões não tiveram a mesma magnitude nos pontos da rede, mas tiveram o mesmo padrão das precisões originais.

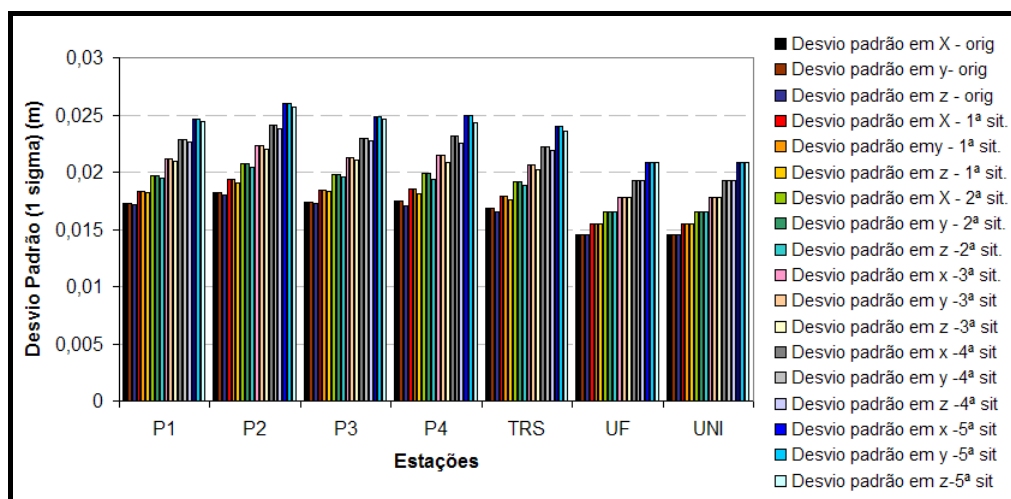


FIGURA 32 – DESVIOS - PADRÃO DAS COORDENADAS DA REDE

FONTE: O AUTOR (2009).

No segundo caso, foi utilizada a forma de aplicação de injeção relativa, descrita na seção (3.7). No cálculo do  $U_C$  foi utilizado, o vetor dos pontos utilizados como injeção ou de ligação, visto que, caso não fosse utilizado as coordenadas não estariam vinculadas ao sistema de referência do ponto de controle ou injeção relativa.

Na FIGURA 33, verifica-se o fator de variância a *posteriori*, e os valores do qui-quadrado calculado e teórico a 5% de significância e 15 graus de liberdade.

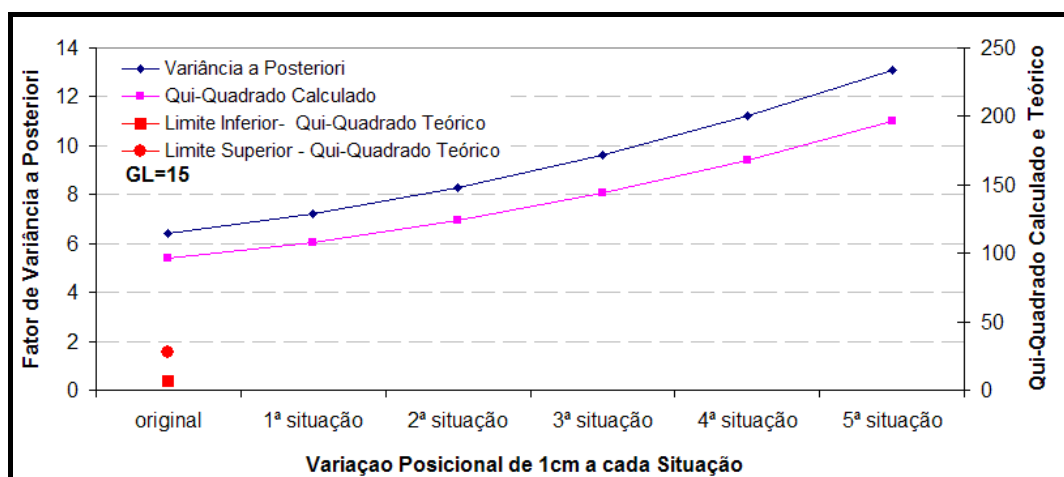


FIGURA 33 – FATOR DE VARIÂNCIA A *POSTERIORI* E QUI-QUADRADO TEÓRICO E CALCULADO

FONTE: O AUTOR (2009).

Podem-se observar na FIGURA 34 as precisões obtidas nas estações da rede. Convém ressaltar que se fosse utilizado um peso grande, os desvios - padrão desta estação, utilizada como injeção relativa, seria bem próximo a zero.

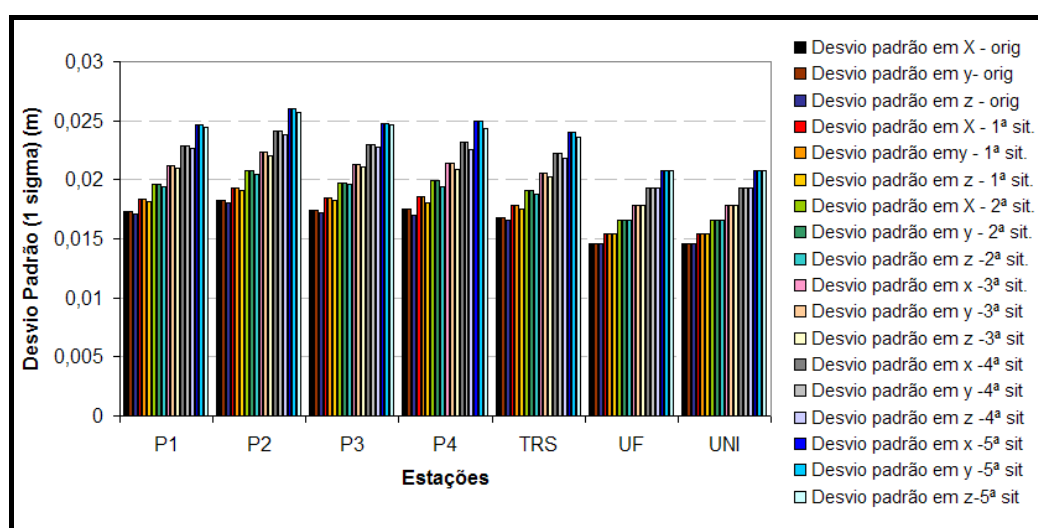


FIGURA 34 – DESVIOS - PADRÃO DAS COORDENADAS DA REDE

FONTE: O AUTOR (2009).

Na FIGURA 35, observam-se as discrepâncias das coordenadas obtidas nas simulações de deslocamentos em relação à situação original, ou seja, quando não havia imposição de deslocamento nas coordenadas.

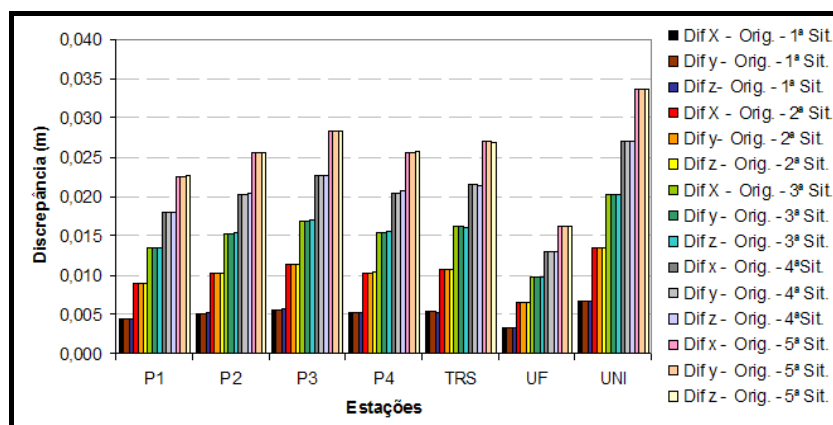


FIGURA 35 – DISCREPÂNCIAS DAS COORDENADAS DAS ESTAÇÕES DA REDE.

FONTE: O AUTOR (2009).

A forma de aplicação do ajustamento que utiliza a propriedade reprodutora é a mesma da injunção relativa, a diferença entre elas é que a propriedade reprodutora recupera as coordenadas iniciais alteradas pela ponderação durante o processo de ajustamento. Deste modo, ambos os métodos tem a mesma ação sob os parâmetros estimados.

No terceiro caso, foram utilizados injunção absoluta, na qual os valores dos pontos de ligação são mantidos constantes durante a realização do ajustamento. Considerando as estações UFPR e UNI constantes, se existisse uma linha de base que as ligasse, a mesma deveria ser descartada do rol de observações, pois os pontos são fixos e as linhas de base têm certa variabilidade. As coordenadas das estações UFPR e UNI deixarão de ser parâmetros e conseqüentemente serão eliminados da coluna da matriz projeto **A**. Os valores destas coordenadas de controle passarão a ser vinculados com o vetor das observações de acordo com as equações de observações que as relacionam. Como se tem 10 linhas de base (30 observações) e 5 estações a determinar, resulta em um grau de liberdade igual a 15.

Na FIGURA 36 pode ser observado que o fator de variância a *posteriori* obtido no ajustamento é maior que nos casos em que foi considerada certa variação posicional dos pontos de controle. A cada deslocamento imposto na posição da estação UNI, os valores do fator de variância a *posteriori* sofreram um aumento, quando do deslocamento de 5 cm a um valor próximo a 37cm. O aumento do fator de variância a *posteriori* é devido ao aumento dos resíduos das observações, pois quando os pontos de controle são fixados ou a eles são permitidos certa variação serão gerados determinados resíduos para que as observações possam ser acomodadas ao modelo matemático funcional.

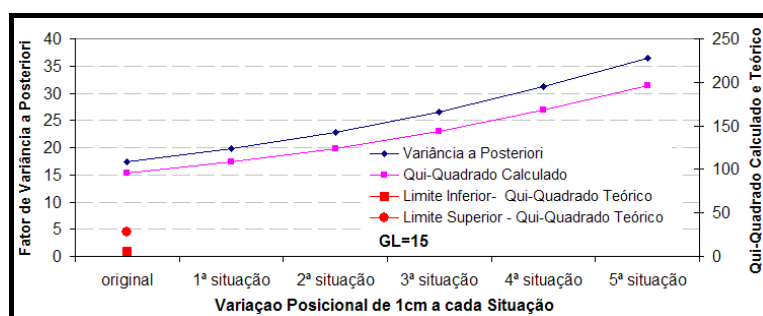


FIGURA 36 – FATOR DE VARIÂNCIA A *POSTERIORI* E QUI-QUADRADO TEÓRICO E CALCULADO

FONTE: O AUTOR (2009).

Na FIGURA 37, observa-se que os *desvios - padrão* das coordenadas das estações crescem a medida que os deslocamentos aumentam. Verifica-se que o modelo para obtenção da MVC dos parâmetros ajustados, utiliza-se da inversa ordinária da matriz dos coeficientes da equação normal (**N**) (dependente da matriz dos pesos (**P**), e da matriz projeto (**A**) e do fator de variância *a posteriori*. Como não houve variação na matriz **N**, o responsável pela diminuição das precisões das coordenadas é o fator de variância *a posteriori*. Por outro lado, a variação de precisão das coordenadas da rede pode ser justificada pela mudança das estações de referência e pela matriz (**P**) dos pesos.

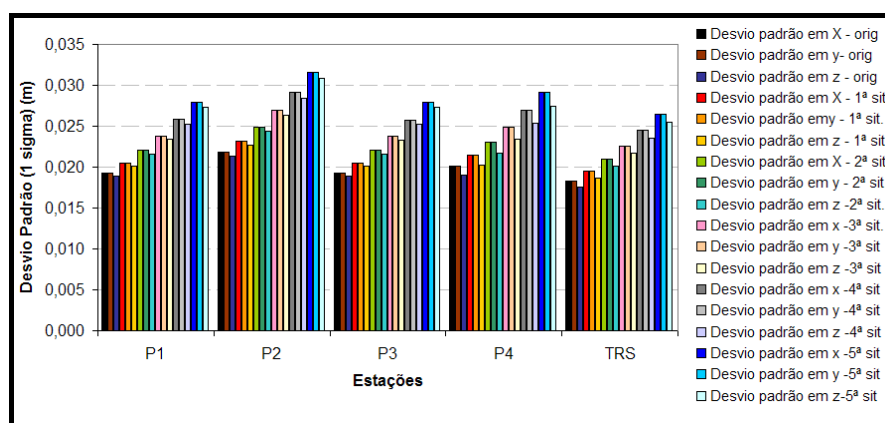


FIGURA 37 – DESVIOS - PADRÃO DAS COORDENADAS DA REDE DAS SITUAÇÕES IMPOSTAS  
 FONTE: O AUTOR (2009).

Na FIGURA 38, apresenta as discrepâncias das coordenadas das estações da rede obtidas em cada situação de deslocamento em relação às coordenadas originais. Nota-se, que as diferenças entre as soluções são praticamente constantes e são menores que o deslocamento imposto na estação de referência.



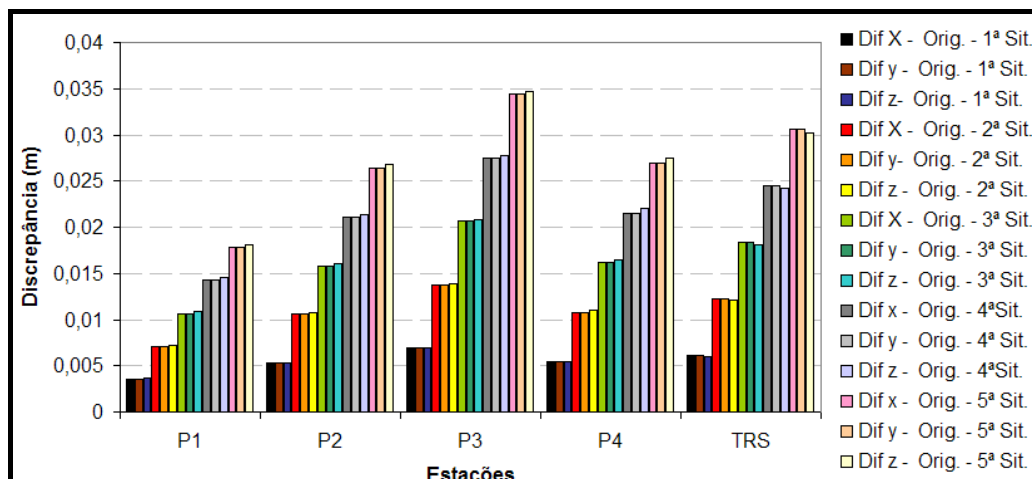


FIGURA 38 – DISCREPÂNCIA DAS COORDENADAS DAS SITUAÇÕES EM RELAÇÃO À ORIGINAL

FONTE: O AUTOR (2009).

Na FIGURA 39, pode-se verificar as discrepâncias obtidas entre as coordenadas das estações, obtidas com a utilização de injunções relativas e absoluta. Verifica-se que estas discrepâncias são atribuídas às coordenadas das estações de controle.

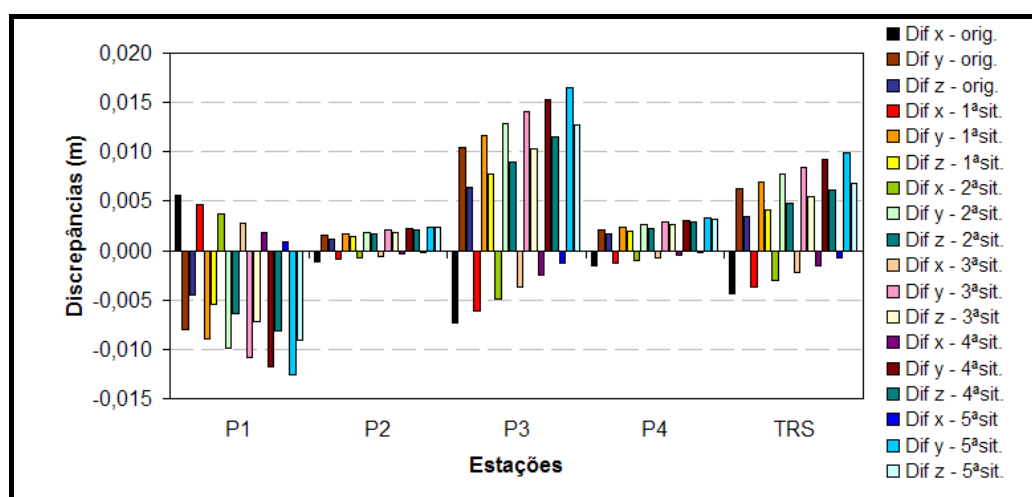


FIGURA 39 – DISCREPÂNCIA ENTRE AS SOLUÇÕES DE INJUNÇÃO RELATIVA E ABSOLUTA

FONTE: O AUTOR (2009).

Foi realizado um outro ajustamento utilizando o método das pseudo-observações, utilizando-se variância pequena para as coordenadas das estações UFPR e UNI para impedir que elas fossem alteradas e funcionassem como injunções absolutas. Foi comparado com o obtido empregando injunções absolutas (consideração das coordenadas como constantes de modo direto).

O fator de variância a *posteriori* é igual até a terceira casa decimal e as discrepâncias entre as precisões estimadas são da ordem de  $1 \times 10^{-7}$  m. Assim, constata-se que estes métodos apesar de serem diferentes na forma de emprego, não proporcionam discrepâncias significativas.

No ajustamento livre como não há coordenadas das estações de referência envolvidas no processo de estimação, a influência na determinação das coordenadas dos pontos da rede é percebida somente quando da utilização da transformação de Helmert. Deste modo, com intuito de verificar esta influência, foi realizado o ajustamento da referida rede e aplicado os deslocamentos para determinação dos parâmetros de transformação, e posterior obtenção das coordenadas das estações da rede vinculadas ao sistema de referência, realizado pelas estações controle.

O fator de variância a *posteriori* obtido no ajustamento foi de 0,822 e grau de liberdade igual a 9. Foi utilizado fator de variância a *priori*  $\sigma_0^2$  igual à unidade e matriz dos pesos igual a matriz identidade. Testando a hipótese nula contra a hipótese alternativa a  $\alpha = 5\%$  tem-se que:

$$H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$$

$$H_a : \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$$

A estatística:

$$\chi_c^2 = \frac{(n-u)\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{9(0.822)}{1} = 7,398$$

Região de Aceitação:

$$\chi_{9,0,05/2}^2 \leq \chi_c^2 \leq \chi_{9,1-0,05/2}^2$$

$$2,700 \leq \chi_c^2 \leq 19,022$$

A hipótese nula é aceita, pois a estatística encontra-se dentro do intervalo de confiança  $(1 - \alpha)$  de 95%.

Para obtenção dos parâmetros da transformação de Helmert entre os dois sistemas de referência, foi realizado o ajustamento como grau de liberdade igual a 2 e fator de variância a *posteriori* igual a 0,141. Testando a hipótese nula contra a hipótese alternativa a  $\alpha = 5\%$  tem-se:

$$H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$$

$$H_a : \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$$

A estatística:

$$\chi_c^2 = \frac{(n-u)\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{2(0,141)}{1} = 0,282$$

Região de Aceitação:

$$\chi_{9,0,05/2}^2 \leq \chi_c^2 \leq \chi_{9,1-0,05/2}^2$$

$$0,050 \leq \chi_c^2 \leq 7,377$$

A hipótese nula é aceita, pois a estatística encontra-se dentro do intervalo de confiança  $(1-\alpha)$  de 95%.

Na FIGURA 40, observa-se a variação do fator de variância a *posteriori* e conseqüentemente do valor qui-quadrado calculado. Verifica-se que nos testes realizados, todos os ajustamentos realizados para obtenção dos parâmetros da transformação de Helmert passaram no teste global do modelo a 5% de significância.

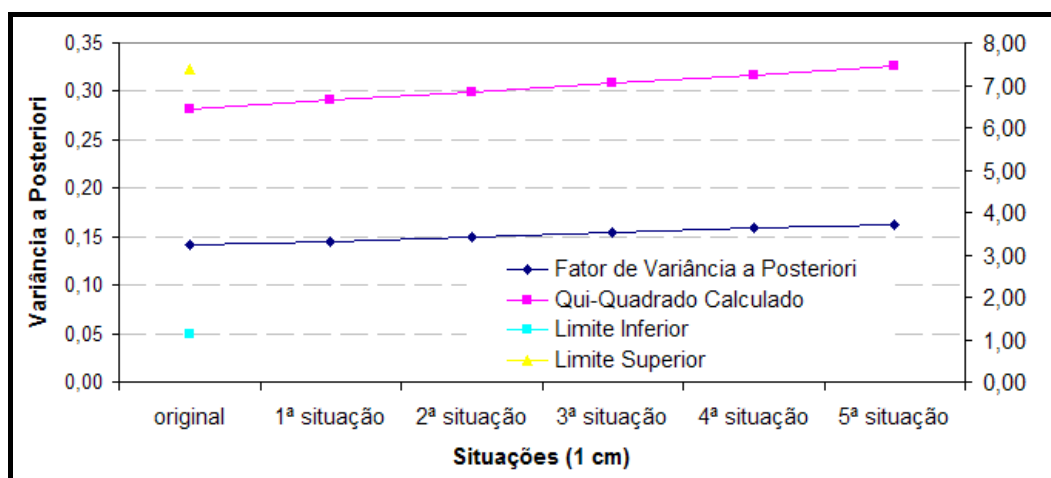


FIGURA 40 – VARIAÇÕES NO FATOR DE VARIÂNCIA A *POSTERIORI*.

FONTE: O AUTOR (2009).

Na FIGURA 41, pode-se observar a acurácia obtida na obtenção das coordenadas das estações de controle. A magnitude destes valores, pode ser devido a não utilização dos *desvios - padrão* das precisões das observações no processo de estimação por mínimos quadrados dos parâmetros da transformação de Helmert, e a pela própria precisão destes parâmetros. No primeiro caso, denominado de original foram utilizadas as coordenadas originais da estação UNI e foram obtidas as seguintes precisões para os parâmetros: precisão para as translações em x, y, z:

$\pm 0,288$  m,  $\pm 0,294$  ,  $\pm 0,280$  respectivamente; para as rotações em x, y, z foram de  $\pm 48,61228''$ ,  $\pm 44,30179''$ ,  $\pm 8,50578''$  respectivamente e fator de escala de  $\pm 0,0000377472$ .

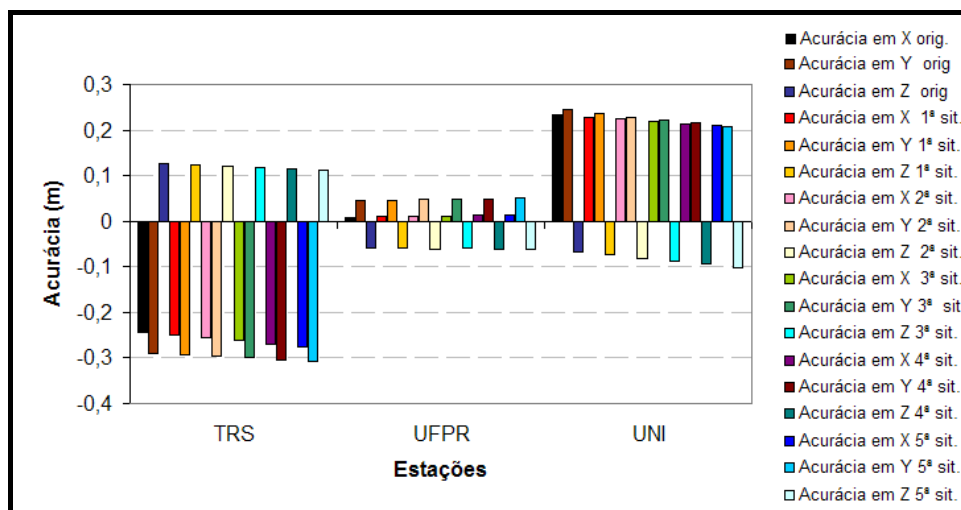


FIGURA 41 – ACURÁCIA POSICIONAL DAS ESTAÇÕES ESTIMADAS POR MEIO DA TRANSFORMAÇÃO DE HELMERT

FONTE: O AUTOR (2009).

Na FIGURA 42, estão dispostos os resultados obtidos na estimação dos parâmetros da transformação de Helmert. Pode-se verificar que, à medida que é imposto um deslocamento de 1cm nas três coordenadas da estação UNI, os parâmetros e suas precisões são alteradas. À medida que aumenta o deslocamento em relação as coordenadas originais aumentam, as precisões dos parâmetros diminuem. Os valores estimados por meio de rotina desenvolvida em MATLAB e Excel foram validados por meio do aplicativo computacional ADJUST v.4.5 desenvolvido por Ghilani e Wolf (1995). Como os valores encontrados foram os mesmos, foram disponibilizados na FIGURA 43 os resultados provenientes do ADJUST v.4.5.

coordenadas originais	<b>Parâmetros de Transformação</b> escala: 0.999977606 ± 0.0000377472 rotação em x: -0°00'07.53869" ± 48.61228" rotação em y: -0°00'05.35328" ± 44.30179" rotação em z: -0°00'01.55172" ± 8.50578" translação em x: 3760836.050 ± 0.288 translação em y: -4367517.114 ± 0.294 translação em z: -2724577.619 ± 0.280	<b>Parâmetros de Transformação (3cm)</b> escala: 0.999979839 ± 0.0000394228 rotação em x: -0°00'06.41599" ± 50.77022" rotação em y: -0°00'03.96904" ± 46.26838" rotação em z: -0°00'01.69274" ± 8.88336" translação em x: 3760836.049 ± 0.301 translação em y: -4367517.119 ± 0.307 translação em z: -2724577.627 ± 0.293
	<b>Parâmetros de Transformação (1cm)</b> escala: 0.999978350 ± 0.0000382988 rotação em x: -0°00'07.16446" ± 49.32268" rotação em y: -0°00'04.89187" ± 44.94919" rotação em z: -0°00'01.59873" ± 8.63008" translação em x: 3760836.050 ± 0.292 translação em y: -4367517.116 ± 0.298 translação em z: -2724577.622 ± 0.285	<b>Parâmetros de Transformação (4cm)</b> escala: 0.999980583 ± 0.0000399946 rotação em x: -0°00'06.04176" ± 51.50662" rotação em y: -0°00'03.50763" ± 46.93949" rotação em z: -0°00'01.73974" ± 9.01221" translação em x: 3760836.049 ± 0.305 translação em y: -4367517.121 ± 0.311 translação em z: -2724577.630 ± 0.297
	<b>Parâmetros de Transformação (2cm)</b> escala: 0.999979094 ± 0.0000388575 rotação em x: -0°00'06.79022" ± 50.04212" rotação em y: -0°00'04.43046" ± 45.60484" rotação em z: -0°00'01.64573" ± 8.75596" translação em x: 3760836.050 ± 0.296 translação em y: -4367517.118 ± 0.302 translação em z: -2724577.625 ± 0.289	<b>Parâmetros de Transformação (5cm)</b> escala: 0.999981327 ± 0.0000405726 rotação em x: -0°00'05.66752" ± 52.25097" rotação em y: -0°00'03.04622" ± 47.61783" rotação em z: -0°00'01.78675" ± 9.14245" translação em x: 3760836.049 ± 0.309 translação em y: -4367517.123 ± 0.316 translação em z: -2724577.633 ± 0.301

FIGURA 42 – PARÂMETROS ESTIMADOS DA TRANSFORMAÇÃO DE HELMERT  
 FONTE: ADAPTADO DE GHILANI E WOLF (1995).

Na FIGURA 43, observam-se as discrepâncias entre as coordenadas obtidas em cada situação em relação às coordenadas obtidas sem imposição de deslocamento na estação UNI. Pode-se observar que a influência na determinação das coordenadas não é de mesma magnitude, porém à medida que se aumenta os deslocamentos, as diferenças de coordenadas também aumentam, mas não na mesma proporção.

A estação UF, encontra-se em média a 0,950 Km das estações P1, P2, P3, P4, a UNICENP em média 12 km, e a estação TRS em média 10 km. Como foi obtido menores valores de acurácia na determinação das coordenadas da estação UF, e menores discrepâncias nas coordenadas das estações P1, P2, P3, P4, poder-se-ia ser atribuído à proximidade da estação UF.

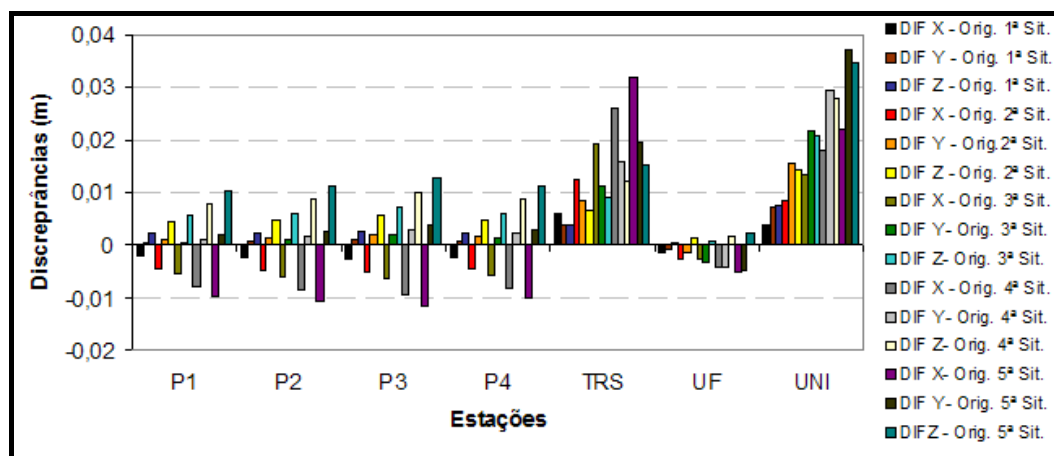


FIGURA 43 – DISCREPÂNCIAS ENTRE AS COORDENADAS ESTIMADAS EM RELAÇÃO ÀS ORIGINAIS.

## 8 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 8.1 CONCLUSÕES

Pode-se verificar que a análise preliminar das observações com base na verificação da consistência de linhas de base observadas em mais de uma sessão de observação, em linhas de base observadas entre pontos fixos, e verificação do erro relativo obtido no fechamento dos circuitos. Estas análises, além de permitir a detecção de erro grosseiro nas observações, permitirão a classificação do levantamento quanto à finalidade que se destina.

À medida que os *outliers* são detectados, localizados e eliminados das componentes das linhas de base, nota-se uma melhora significativa nos resíduos das observações, no fator de variância a *posteriori*, nas precisões dos parâmetros estimados bem como na confiabilidade interna e externa da rede. É importante a análise da confiabilidade da rede, pois deste modo, pode-se ter ciência dos efeitos dos erros mínimos detectáveis e não detectáveis na determinação final das coordenadas das estações da rede.

A forma gráfica de visualização das dispersões das estações é importante, pois permite uma visualização geral de suas precisões relativas. É interessante sempre ter pontos de controle de forma que se possa determinar a acurácia que foi realizado o posicionamento, pois pode-se chegar a uma melhor precisão sem ter uma acurácia de mesma magnitude, como pode ser visto nos experimentos realizados.

De acordo com os experimentos realizados, os modos de utilização do método paramétrico com a utilização de injunções de posição de modo relativa, absoluta e com a utilização de pseudo-observações não apresentaram diferenças significativas, diferindo somente na forma de aplicação.

Pôde-se verificar que, dependendo da escolha da estação de referência injuncionada, poderá chegar a magnitudes de discrepância e acurácia distintas.

Percebem-se que o modelo estocástico desempenha papel fundamental na análise estatística, podendo levar desde a aceitação quanto a rejeição no teste global do modelo, da presença de *outliers* e da confiabilidade da rede. Por isso, deve-se ter cautela na montagem deste modelo.

O modelo estocástico obtido com o MINQUE, permitiu ao ajustamento um melhor desempenho quando comparado com os elementos da MVC das observações provenientes do pós-processamento.

Verificou-se que a escolha dos pontos de injeção influencia na determinação das coordenadas e precisões da rede, deste modo, pode-se para um projeto de otimização, escolher pontos de controle que forneçam melhores níveis de precisão, acurácia e confiabilidade.

Foi constatado que, se forem alteradas as precisões do ponto de controle (injeção mínima), não afetarão os parâmetros estimados, mas altera a precisão dos mesmos.

Quando foram considerados dois pontos de injeção e em um foi imposto variação de precisão, ou seja, ponderação, pode-se verificar que as coordenadas e precisões dos pontos da rede foram alteradas.

Foi verificado quando da utilização do modelo de injeção relativa e absoluta de posição, deve-se atentar para inserção do vetor das coordenadas para o cálculo do vetor normal das injeções ( $U_c$ ). Caso isto não seja feito, o vetor solução das coordenadas ajustadas não estará no sistema de referência dos pontos de controle.

Um erro sistemático, ou uma imposição de um mesmo deslocamento nas coordenadas do ponto de referência (injeção mínima) será transmitido para toda a rede, fazendo com que a estrutura sofra deslocamento de mesma magnitude a ocorrida no ponto de injeção.

Considerando duas injeções e a imposição de deslocamentos sistemáticos em uma desta, à medida que estes aumentam, as precisões das coordenadas das estações da rede diminuem.

A aplicação da injeção relativa com utilização das coordenadas dos pontos de ligação, fornece resultados iguais ao da utilização do modo das pseudo-observações ou parâmetros ponderados.

Verificou-se que a forma de aplicação das injeções relativas de posição (pontos de ligação) é igual a técnica da propriedade reprodutora, com exceção de que esta permite a recuperação dos parâmetros alterados (devido a ponderação) ao final do ajustamento.



Considerando o caso em que são introduzidas diretamente as coordenadas das estações de referência no cálculo de alguns elementos do vetor das observações, e o caso da utilização de pseudo-observação com emprego de peso “grande” de forma a fixar à variável, fornecem os mesmos valores para as coordenadas das estações da rede.

Foram obtidas acurácia da ordem de 5 a 30 cm na determinação posicional por meio da transformação de Helmert. Estes níveis de acurácia podem ser justificados pelo número de pontos de controle, distribuição espacial e precisão obtida nos parâmetros de transformação.

Por mais que seja interessante verificar de forma separada a influência dos pontos de injeção no vetor dos parâmetros ajustados, o método das pseudo-observações poderá ser usado com a obtenção dos mesmos resultados.

## 8.2 RECOMENDAÇÕES

Recomenda-se que, além da realização da análise de qualidade das observações, ou seja, da aplicação das técnicas de detecção de outliers e análise de confiabilidade, deve-se realizar uma análise quanto à qualidade das estações injuncionantes. Tem-se que a qualidade destas estações pode ser avaliada por meio da estatística F Snedecor (comparação dos fatores de variância *a posteriori* para cada ajustamento realizado).

No ajustamento livre não tem influência de fatores externos (coordenadas), deste modo, recomenda-se este método para a realização de análise de qualidade da rede, e posteriormente, realizar um ajustamento com a utilização de mais de uma injunção. Apesar das coordenadas de injunção mínima ter influência na determinação das coordenadas das estações da rede, as observações não sofrem alteração.

A utilização do ajustamento livre seguido da transformação de Helmert requer certo cuidado na distribuição espacial dos pontos de controle da rede.

Recomenda-se que sejam utilizados mais estações de referência, com distribuição espacial mais homogênea bem como a utilização das precisões das coordenadas nos dois sistemas de referência para a determinação dos parâmetros de transformação de Helmert de forma a obter melhores precisões e acurácia. Ressalta-se, ainda, que o modelo deva prever a propagação de variâncias de um sistema para outro.

## 9 REFERÊNCIAS

ANDRADE, JB. e OLIVAS, M. A. A. **Calibração de Câmeras aerofotogramétricas**. Curitiba, Boletim da Universidade Federal do Paraná nº. 26, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1981.

ANDRADE, J.B. **Fotogrametria**. 2. ed. Curitiba, SBEE, 2003.

ANDERSON, J.M., MIKHAIL, E.M. **Surveying: theory and practice**. 7th ed. United States: McGraw-Hill, 1998.

ARANCÓN M. B; GALINDO-ZALDÍVAR, J.; CRUZ, G. J. A.; SÁNCHEZ, A. J.; COBOS, M. C. L. P.; GARRIDO, Á. C. L. G.; CADEROT, G. R. C.; ARMENTEROS, R. A.; EQUIZA, S. G. E. **Establishment of a non-permanent GPS network to monitor deformations in Zafarraya Fault and Sierra Tejada Antiform (Spain)**.

Disponível em:<

<http://www.ucm.es/BUCM/revistas/fis/02144557/articulos/FITE0505110023A.PDF><

Acesso em: 23/05/2008.

BAARDA, W. **Statistical concepts in geodesy. Publications in Geodesy**. New Series, volume 2 (4), Netherlands Geodetic Commission, 1967.

BAARDA, W. **A testing procedure for use in geodetic networks**. Publications in Geodesy, New Series, vol. (5), Netherlands Geodetic Commission, 1968.

CASPARY, W. F. **Concepts of network and deformation analysis**. Monograph 11, school of Geomatic Engineering, University of New South Wales, UNSW Sydney, Australia, 1987.

COSTA, M. F; SANTOS, M. **Compatibilização entre sistemas Geodésicos**. In COBRAC 98 - Congresso Brasileiro de Cadastro Técnico Multifinalitário. Florianópolis - SC. 1998. Disponível em: (<http://geodesia.ufsc.br/Geodesia-online/arquivo/cobrac98/080/080.htm>)

COSTA, M. F. **Modelagem da função covariância para transformação de referenciais geodésicos por colocação**. 112 f. TESE (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2003.

DALMOLIN, Q. **Ajustamento por mínimos quadrados**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná. Curso de pós-graduação em Ciências Geodésicas. Editora da UFPR, Curitiba, 2004.

EROL, S.; EROL, B.; AYAN, T. **A general review of the deformation monitoring techniques and a case study: analysing deformations using gps/leveling**. Disponível em: <http://www.isprs.org/congresses/istanbul2004/comm7/papers/123.pdf>  
> Acesso em: 23/05/2008

EVEN-TZUR, G. **Designing the configuration of the geodetic – geodynamic network in Israel.** Disponível em :>  
<http://www.springerlink.com/content/r82m740511g71h41/>< Acesso em: 26/05/2008

FOK, H.S; BAKI IZ,H; SCHAFFRIN **Comparison of alternative geodetic network densification solutions.** Disponível em:  
 <<http://elearning.lsgi.org/Research%20Portfolio/Comparison%20of%20Alternative%20Network%20Densification%20Solutions.doc>< Acesso em:24/05/2008

GEMAEL, C., ANDRADE, J.B. **Geodesia celeste.** Curitiba. Editora da UFPR, 2004.

GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas.** Curitiba: Editora da UFPR, 1994.

GHILANI, C. D., WOLF, P.R. **Adjustment computations: spatial data analysis.** 4<sup>th</sup> ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006

GRANEMANN et al. **Estabelecimento de uma rede geodésica para o monitoramento de estruturas: estudo de caso na usina hidrelétrica salto Caxias.** Boletim de Ciências Geodésicas, v.14, n° 2, pp. 200-220., abr-jun, 2008.

HOFMANN-WELLENHOF, B.; LICHTENEGGER, H.; J. COLLINS. **GPS: Theory and Practice.** 5<sup>th</sup> ed.. Austria: Springer Wien New York, 2001.

HOFMANN-WELLENHOF, B.; LICHTENEGGER, H.; WASLE, E. **GNSS Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, GALILEO & more.** Austria: Springer Wien New York, 2008.

HWANG, C.; WANG, C.G.; LEE, L.H. **Adjustment of relative gravity measurements using weighted and datum-free constraints.** Computers e Geosciences 28 (2002) pg. 1005 – 1015

IBGE – Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Recomendações para Levantamentos Relativos Estáticos – GPS.** Rio de Janeiro, 2008.

KRAKIWSKY, E.J. **A synthesis of recent advances in the method of least squares.** Lecture note N° 42, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1975.

KRAKIWSKY, E. J.; SZABO, D. J.; VANÍCEK, P.; CRAYMER, M. R. **Development and testing of in-context confidence regions for geodetic survey networks.** Technical Report N° 198, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1999.

KUANG, S. **Geodetic Network Analisis and Optimal Design: concepts and applications.** Chelsea: Ann Arbor Press. 1996.

LIMA, N.; CASACA, J.; HENRIQUE, M., J. **Accuracy of displacement monitoring at large dams with GPS.** In : [Geodetic Deformation Monitoring: From Geophysical to](#)

[Engineering Roles](http://www.springerlink.com/content/x0400268p1472218/) v. 131, p. 239-243, 2006. Disponível em: <  
<http://www.springerlink.com/content/x0400268p1472218/>< Acesso em 26/05/2008.

LEICK, A. **GPS satellite surveying**. 2nd. New York: John Wiley and Sons, 1995.

LEICK, A. **GPS satellite surveying**. 3th. ed. New Jersey: John Wiley and Sons, 2004.

MIKHAIL, E. M.; ACKERMANN, F. **Observation and Least Squares**. New York , IEP, Dun-Donelly Publisher, 1976.

MIKHAIL, E. M.; ACKERMANN, F. **Analysis and Adjustment of Survey Measurements**. New York , Van Nostrand Reinhold Company, 1981.

MARINI, M. C. **Integração da rede GPS ITESP ao sistema geodésico brasileiro**. 112 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Cartográficas) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, programa de pós- graduação em ciências cartográficas, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2002.

MONICO, J.F.G. **Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS: descrição, fundamentos e aplicações**. São Paulo: editora UNESP, 2000.

MONICO, J.F.G. **Posicionamento pelo GNSS: descrição, fundamentos e aplicações**. 2. ed. São Paulo: editora UNESP, 2008.

MORAES, C.V. **Registro imobiliário: fundamentos Geodésicos e jurídicos da caracterização de estremas**. Curitiba: editora Juruá, 2007.

MITSAKAKI, C., BALODIMOU, M., PAPAIZISSI, K. **Geodetic reference frame transformations**. Survey Review, nº 38. 2006.

SCHAFFRIN, B. **Reproducing estimates via least squares: an optimal alternative to the Helmert transformation**. In: E.W. Grafarend, F.W. Krumm, and V.S. Schwarz (eds.). Geodesy – The Challenge of the 3<sup>rd</sup> Millennium, Springer, Berlin/Heidelberg/ New York: 387-392, 2001.

SCHAFFRIN, B, COTHREN, J. **Hierarchical data fusion with photogrammetric applications**. In: Revista Brasileira de Cartografia. N° 55. 2002. pp.25-34. Disponível em: [http://www.rbc.ufrj.br/\\_pdf\\_55\\_2003/55\\_2\\_03.pdf](http://www.rbc.ufrj.br/_pdf_55_2003/55_2_03.pdf)> acesso em 23/01/2009.

SCHOFIELD, W.; BREACH, M. **Engineering Surveying**. 6th. ed. Elsevier Ltd. Burlington, USA, 1972.

SEEBER, G. **Satellite Geodesy: foundations, methods and applications**. 2th. ed. Berlin, New York: Walter Gruyter, 2003.

SEGANTINE, P. C. **GPS: sistema de posicionamento global**. São Carlos: EESC/USP, 2005.

SETAN, H.; OTHAMAN. **Monitoring of offshore platform subsidence using permanent GPS stations**. Journal of global positioning system. Vol.5, N°1-2 pg 17-21. 2006 Disponível em: <  
<http://www.gmat.unsw.edu.au/wang/jgps/v5n12/v5n12p03.pdf>< Acesso em: 23/05/2008.

SILVA, A.S; ROMÃO, V.M.C. **Ajustamento livre e cadastro**. In: COBRAC 2002 Congresso Brasileiro de Cadastro Técnico Multifinalitário – UFSC Florianópolis. Disponível em: < [http://geodesia.ufsc.br/Geodesia-online/arquivo/cobrac\\_2002/110/110.HTM](http://geodesia.ufsc.br/Geodesia-online/arquivo/cobrac_2002/110/110.HTM)> Acesso em 18/01/2008.

SOLER, T., HOTHEM. **Important parameters used in geodetic transformations**. Journal of Surveying Engineering, vol. 115. nº. 4. 1989.

TEIXEIRA, N. N. **Detecção e análise de deslocamento vertical utilizando o sistema NAVSTAR-GPS**. 112 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2001.

TORGE, W. **Geodesy**. 2 ed.. Berlin, New York: de Gruyter, 1991.

TORGE, W. **Geodesy**. 3 ed.. Berlin, New York: de Gruyter, 2001.

UOTILA, U.A. **Introduction to adjustment computations with matrices**. The Ohio State University, Department of Geodetic Science, 1986.

VANÍCEK, P.,WELLS, D.E. **The Least squares approximation**. Lecture note N° 22, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1972.

VANÍCEK, P., KRAKIWSKY, E.J. **Geodesy: the Concepts**. 2 ed. North Holland Publishing, 1986.

VASCONCELLOS, J.C.P. **Estudo de metodologia para vinculação e homogeneização de redes geodésicas GPS – implementação de um programa de ajustamento**. 195 f. Tese (Doutorado em engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

VASCONCELLOS, J. C. P. **Metodologia para realização do ajustamento de redes geodésicas GPS de densificação ou extensão**. Revista Brasileira de Cartografia, n 60/01, p. 57 – 70, 2008. Disponível em: [http://www.rbc.ufrj.br/\\_pdf\\_60\\_2008/60\\_01\\_6.pdf](http://www.rbc.ufrj.br/_pdf_60_2008/60_01_6.pdf) acesso em: 26/05/2008.

XAVIER, J. H. **Análise de estabilidade de uma rede local GPS situada no litoral do paranaense**. 111f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2000.

WELLS, D.E., KRAKIWSKY, E.J. **The method of least squares**. Lecture note N° 18, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1971.

WOLF, P. R., GHILANI, C. D. **Adjustment Computations: statistics and least squares in surveying an GIS**. New York: John Wiley & Sons, 1997.

WOLF, P. R., GHILANI, C. D. **Elementary Surveying: an introduction to geomatics**. 11. ed. New Jersey: Pearson prentice hall, 2006.

## APÊNDICE A

As diferenças de coordenadas das linhas de base (dx, dy, dz) bem como as MVC destas obtidas na etapa de pós-processamento.

De	Para	Componentes das linhas de base (m)			MVC das Componentes das linhas de base			
		dx	dy	dz		x	y	z
1ª SESSÃO								
UFPR	TRS	-7884,916	-7756,407	1484,458	x	1,379e-6m <sup>2</sup>		
					y	-1,507e-6m <sup>2</sup>	1,839e-6m <sup>2</sup>	
					z	-9,486e-7m <sup>2</sup>	1,118e-6m <sup>2</sup>	7,700e-7m <sup>2</sup>
					x	y	z	
TRS	UNI	-1853,442	-719,407	-1407,883	x	1,517e-6m <sup>2</sup>		
					y	-1,741e-6m <sup>2</sup>	2,268e-6m <sup>2</sup>	
					z	-1,061e-6m <sup>2</sup>	1,333e-6m <sup>2</sup>	8,916e-7m <sup>2</sup>
					x	y	z	
UNI	P4	8973,304	8245,628	-742,349	x	9,961e-6m <sup>2</sup>		
					y	-1,086e-5m <sup>2</sup>	1,293e-5m <sup>2</sup>	
					z	-7,006e-6m <sup>2</sup>	8,011e-6m <sup>2</sup>	5,605e-6m <sup>2</sup>
					x	y	z	
P4	P3	3,880	107,073	-151,161	x	1,230e-6m <sup>2</sup>		
					y	-1,377e-6m <sup>2</sup>	1,680e-6m <sup>2</sup>	
					z	-8,988e-7m <sup>2</sup>	1,048e-6m <sup>2</sup>	7,482e-7m <sup>2</sup>
					x	y	z	
P3	P2	120,164	27,156	121,626	x	1,639e-7m <sup>2</sup>		
					y	-1,273e-7m <sup>2</sup>	1,926e-7m <sup>2</sup>	
					z	-9,200e-8m <sup>2</sup>	9,812e-8m <sup>2</sup>	1,411e-7m <sup>2</sup>
					x	y	z	
P2	P1	21,427	-46,065	102,482	x	9,925e-7m <sup>2</sup>		
					y	-1,085e-6m <sup>2</sup>	1,286e-6m <sup>2</sup>	
					z	-7,079e-7m <sup>2</sup>	8,101e-7m <sup>2</sup>	5,742e-7m <sup>2</sup>
2ª SESSÃO								
					x	y	z	



UFPR	P1	-619,569	-142,034	-592,837	x	4,798e-7m <sup>2</sup>		
					y	-2,630e-7m <sup>2</sup>	3,223e-7m <sup>2</sup>	
					z	-2,137e-7m <sup>2</sup>	2,050e-7m <sup>2</sup>	2,701e-7m <sup>2</sup>
					x	y	z	
P1	P4	-145,469	-88,169	-72,949	x	2,934e-7m <sup>2</sup>		
					y	-1,834e-7m <sup>2</sup>	2,425e-7m <sup>2</sup>	
					z	-1,644e-7m <sup>2</sup>	1,890e-7m <sup>2</sup>	2,415e-7m <sup>2</sup>
					x	y	z	
TRS	P4	7119,888	7526,185	-2150,249	x	1,990e-6m <sup>2</sup>		
					y	-1,240e-6m <sup>2</sup>	1,793e-6m <sup>2</sup>	
					z	-9,752e-7m <sup>2</sup>	1,275e-6m <sup>2</sup>	1,564e-6m <sup>2</sup>
					x	y	z	
UFPR	P2	-640,961	-96,010	-695,351	x	2,169e-6m <sup>2</sup>		
					y	-2,370e-6m <sup>2</sup>	2,839e-6m <sup>2</sup>	
					z	-1,679e-6m <sup>2</sup>	1,974e-6m <sup>2</sup>	1,498e-6m <sup>2</sup>
					x	y	z	
UFPR	P3	-761,135	-123,157	-816,966	x	1,752e-6m <sup>2</sup>		
					y	-1,917e-6m <sup>2</sup>	2,294e-6m <sup>2</sup>	
					z	-1,361e-6m <sup>2</sup>	1,597e-6m <sup>2</sup>	1,214e-6m <sup>2</sup>
					x	y	z	
UNI	P3	8977,187	8352,683	-893,517	x	1,908e-5m <sup>2</sup>		
					y	-2,110e-5m <sup>2</sup>	2,557e-5m <sup>2</sup>	
					z	-1,501e-5m <sup>2</sup>	1,784e-5m <sup>2</sup>	1,358e-5m <sup>2</sup>
					x	y	z	
3ª SESSÃO						x	y	z
P2	P4	-124,041m	-134,232m	29,539m	x	3,183e-6m <sup>2</sup>		
					y	-3,448e-6m <sup>2</sup>	5,086e-6m <sup>2</sup>	
					z	-1,986e-6m <sup>2</sup>	2,632e-6m <sup>2</sup>	1,991e-6m <sup>2</sup>
					x	y	z	
UNICENP	P3	8977,174m	8352,700m	-893,512m	x	4,209e-5m <sup>2</sup>		
					y	-4,975e-5m <sup>2</sup>	6,117e-5m <sup>2</sup>	
					z	-3,157e-5m <sup>2</sup>	3,830e-5m <sup>2</sup>	2,541e-5m <sup>2</sup>

Linha de base inserida, após a detecção de *outliers*.

1sessão inserida						x	y	z	
UNICENP	P3	8977,176m	8352,698m	-	893,510m	x	2,165e-6m2		
						y	-1,639e-6m2	2,272e-6m2	
						z	-1,233e-6m2	1,235e-6m2	1,843e-6m2