

**DIÓGENES BORGES VASCONCELOS**

**CORRELAÇÃO ESPACIAL EM REDES  
DE MAPAS ACOPLADOS**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física,  
Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Pa-  
raná, como requisito parcial à obtenção do título de Dou-  
tor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

**Curitiba**

2005

# Resumo

O principal objetivo deste trabalho é a caracterização da distribuição espacial das variáveis de estado de uma rede de mapas logísticos acoplados. A rede investigada possui interação não-local, sendo que a mesma decai com a distância ao longo da rede segundo uma lei de potência. O estado espacial a ser caracterizado inclui casos extremos, que são a completa irregularidade espacial e a sincronização completa das variáveis de estado (ordem espacial com caos temporal). Analisamos também estados intermediários. Para realizar esta caracterização introduzimos alguns diagnósticos novos e estendemos o uso de outros já conhecidos. A função de correlação espacial é usada na análise dos estados espaciais da rede com interação não-local quando a mesma se aproxima de um estado de completa sincronização de amplitudes. A função de correlação espacial é estendida ao estudo de defeitos que se propagam aleatoriamente ao longo de uma rede com interação local fraca. Os dois novos diagnósticos introduzidos neste trabalho estão lastrados no uso de um tipo de reconstrução topológica do estado espacial da rede. O mapa de retorno espacial é avaliado de forma qualitativa para a rede não-local. Em seguida, definimos uma medida quantitativa do quão afastado o padrão espacial está da completa sincronização. O segundo diagnóstico, o gráfico de recorrência espacial, foi também introduzido e avaliado de forma qualitativa para a rede com interação não-local. A quantificação deste gráfico foi então estabelecida e avaliada quando a rede encontra-se nas proximidades da sincronização. Aplicamos uma variante do método de Grassberger-Procaccia, que prescreve o cálculo de uma "densidade de dimensão espacial" na caracterização da dinâmica caótica do atrator, para a rede não-local também nas proximidades da sincronização. Investigamos a dinâmica espacial e temporal de uma rede de mapas de Chaté-Maneville com acoplamento não-local tipo lei de potência quando a mesma exhibe intermitência espaço-temporal ou somente comportamento laminar. Determinamos o espaço de parâmetros, o parâmetro de ordem e a função de correlação espacial. Esta última foi avaliada nas proximidades das fronteiras críticas apresentadas pelo modelo.

# Abstract

In this work we focus on the characterization of spatial distribution of state variables for a chain of coupled logistic maps with non-local coupling. The coupling varies with the lattice distance in a power-law fashion. The state space under characterization includes extreme cases like full disorder and total spatial synchronization (spatial order with temporal chaos), and also intermediate cases. To perform such a characterization, we have introduced some new diagnostics and have extended the use of some which are already known. The spatial correlation function is used in the analysis of space states of the non-local lattice when it tends to a state of completely synchronization of amplitudes. The spatial correlation function is also applied as a tool to study the defects in a weak coupled local lattice, these defects propagate randomly throughout the lattice. The two new diagnostics are based on a kind of topological space reconstruction of the space state of the lattice. The space return map is evaluated in a qualitative way for a non-local lattice and after that, we have defined a quantitative measure of how far a spatial pattern is from being completely synchronized. The second diagnostic, the spatial recurrence plot, has been also introduced and evaluated, then a quantitative measure based on it has been defined. We evaluate this measure when the lattice approaches a state of completely synchronization. We have applied a different approach of the Grassberger-Procaccia method, which suggests that one may calculate a "space dimension density" so as to characterize the attractor dynamics, for a non-local lattice in the neighbourhood of a complete synchronization. In our last task we have studied a non-local coupled map lattice where the local dynamics is ruled out by the Chaté-Manneville's map. We investigate the spatial and temporal dynamics of such a lattice when it exhibits spatio-temporal intermittency or only laminar behaviour. We have determined the parameter space, the order parameter and the spatial correlation function. The spatial correlation function has been evaluated at the neighbourhood of critical points exhibited by the model.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Redes de mapas acoplados</b>	<b>12</b>
2.1	Caos em sistemas temporais . . . . .	12
2.2	Caos em sistemas espaço-temporais . . . . .	14
2.3	Conceitos básicos sobre RMAs . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Fenomenologia da dinâmica espaço-temporal</b>	<b>22</b>
3.1	O padrão estacionário e as estruturas “kink” e “antikink” . . . . .	22
3.2	Supressão de caos e a estrutura zig-zague . . . . .	25
3.3	Defeitos na rede e a seleção de padrões . . . . .	28
3.4	Caos espaço-temporal . . . . .	31
3.5	Intermitência espaço-temporal . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Correlação espacial</b>	<b>35</b>
4.1	Correlação temporal . . . . .	35
4.2	A correlação espacial $e(l)$ . . . . .	37

4.3	Algumas conclusões qualitativas sobre $e(l)$ . . . . .	38
4.4	Sincronização de amplitudes . . . . .	42
4.5	Sincronização caótica e correlação espacial . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Integral de Correlação</b>	<b>53</b>
5.1	A integral de correlação temporal . . . . .	53
5.2	A reconstrução . . . . .	55
5.3	A integral de correlação temporal para a RMA . . . . .	58
5.4	A integral de correlação espacial . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Gráficos de retorno e recorrência</b>	<b>67</b>
6.1	O mapa de retorno espacial e a sincronização . . . . .	67
6.2	O gráfico de recorrência “ <i>recurrence plot</i> ” . . . . .	71
6.3	O gráfico de recorrência espacial . . . . .	76
<b>7</b>	<b>Intermitência espaço-temporal</b>	<b>83</b>
7.1	O mapa de Chaté-Manneville . . . . .	83
7.2	Região de intermitência . . . . .	88
7.3	Região laminar . . . . .	91
7.4	Correlação espacial crítica . . . . .	96
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Dimensão de Lyapunov</b>	<b>102</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Sistemas dinâmicos com graus de liberdade temporais e espaciais têm sido intensamente investigados em virtude de sua ampla aplicabilidade em certas áreas estratégicas da física e engenharia, como a física dos fluidos e a turbulência magnetohidrodinâmica em plasma (MHD) [1]. Dentre o grande número de características interessantes apresentadas por sistemas que exibem dinâmica espaço-temporal, a possibilidade de ocorrência de caos espaço-temporal (CET), e até mesmo sua quantificação é, sem dúvida, a que mais chama atenção. A presença de CET é indicada qualitativamente pela presença de caos temporal de elevada dimensionalidade associado à ocorrência de padrões espaciais que exibem rápido decréscimo da correlação espacial. Neste estado, o sistema exhibe grande desordem espacial. Este tipo de associação é observado em sistemas físicos reais, um exemplo bastante interessante é a convecção térmica de Rayleigh-Bénard [2]. Muitas equações encontradas na física também apresentam CET [3], como exemplo podemos citar as equações de reação-difusão, Ginzburg-Landau e Navier-Stokes. Esta última é particularmente interessante pois acreditava-se que a mesma poderia, ao menos em princípio, fornecer esclarecimentos para um dos grandes problemas não resolvidos da física: a turbulência [28, 29]. Escrita inicialmente por Navier em 1827 e posteriormente por Stokes em 1845, esta equação representa a segunda lei de Newton para um fluido viscoso escoante e é modernamente escrita como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1.1)$$

onde  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  e  $p(\mathbf{r}, t)$  são a velocidade do fluido e a pressão na posição  $\mathbf{r}$  e instante  $t$ ,  $\nu$  e  $\rho$  são a viscosidade cinemática e a densidade respectivamente. Embora não há um consenso na comunidade científica em torno da definição de turbulência, todos concordam que a turbulência caracteriza-se por uma distribuição larga de escalas

de movimento tanto no espaço como no tempo, e grande sensibilidade a mudanças nas condições iniciais e nos parâmetros envolvidos. Existem alguns segmentos da comunidade científica que acreditam que muitos fluxos turbulentos podem ser compreendidos em termos das soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) que representam a equação de Navier-Stokes em sua total integridade. Ao menos até o momento, nenhuma redução formal das equações de Navier-Stokes a um conjunto equivalente de EDOs foi realizado, exceto sob severas exigências de simetria [4].

Por outro lado, muitos sistemas fluidos reais exibem certos fenômenos que também são observados nos sistemas dinâmicos tradicionais de baixa dimensionalidade, dentre estes fenômenos podemos citar a duplicação de período e a intermitência. Este compartilhamento de características causa grandes expectativas e aponta naturalmente uma via alternativa para o entendimento da turbulência. Neste sentido, acredita-se que ao menos o estudo e a fundamentação de CET, através da análise de sistemas com extensão espacial, pode proporcionar alguns esclarecimentos sobre o fenômeno da turbulência.

As redes de mapas acoplados (RMA) foram introduzidas por Kunihiro Kaneko em 1983 [5] e representam sistemas nos quais o espaço e o tempo são discretos, porém a variável de estado é contínua. Quando comparadas a outros sistemas com extensão espacial, como é o caso das equações diferenciais parciais, as RMAs são computacionalmente mais fáceis de serem implementadas. Entretanto, diferente de uma equação diferencial parcial, que é um sistema hierarquicamente superior (todas as grandezas são contínuas), as RMAs possuem severas limitações quando usadas para modelar sistemas turbulentos. A razão é que, infelizmente, as RMAs possuem uma resolução espacial finita [6]. Entretanto, ao menos o desenvolvimento de caos espaço-temporal em certos sistemas espaço-temporais modelados por RMAs pode ser estudado com êxito. Por outro lado, certas RMAs exibem muitos outros fenômenos interessantes tais como intermitência espaço-temporal [7], turbulência solitônica [11], sincronização de fase e amplitude [8], transição entre regimes que lembra uma transição de fase [9], etc.

A maioria dos trabalhos sobre RMAs abordam somente redes nas quais a interação entre os sítios é do tipo local, ou seja, somente os sítios imediatamente adjacentes contribuem para o acoplamento (interação) na rede. Entretanto foram desenvolvidos muitos trabalhos nos quais as redes em estudo possuíam um acoplamento com interação não-local do tipo "campo médio". Neste tipo de acoplamento cada sítio interage com a mesma intensidade com todos os sítios da rede [10]. Neste trabalho iremos investigar RMAs nas quais a interação entre os sítios também é não-local, porém a intensidade da interação decai segundo uma lei de potência com a distância ao longo da rede. Este acoplamento tipo lei de potência, além de ser fisicamente mais interessante, representa também um parâmetro efetivo de alcance, já que uma mudança contínua de uma rede acoplada localmente para uma rede acoplada



globalmente pode ser realizada simplesmente variando a intensidade do mesmo.

A caracterização da dinâmica temporal de uma RMA pode ser feita mediante a determinação, e posterior análise do espectro de expoentes de Lyapunov. Cada expoente do espectro é uma medida da taxa com que duas trajetórias instáveis se afastam no espaço de fase à medida que o tempo evolui. Quando ao menos um dos expoentes do espectro é positivo a rede será caótica. O espectro de Lyapunov de redes locais de mapas logísticos ou mapas lineares por partes foram estudados por Kaneko [10], Crutchfield [11] e Isola [12]. No caso do acoplamento tipo lei de potência trabalhos recentes determinaram o espectro de Lyapunov, densidade de entropia de Kolmogorov-Sinai (média dos expoentes positivos) e a dimensão de Lyapunov enfocando também aspectos sobre sincronização [13, 15, 16]. Por outro lado, caracterizar tão somente a aleatoriedade espacial intrínseca que se apresenta na distribuição espacial das variáveis de estado (padrão espacial da rede) é ainda um problema em estudo. Alguns métodos têm sido propostos para realizar este estudo. Um deles, a análise do gradiente de padrões, mostrou ser útil ao evidenciar intermitência espaço-temporal e turbulência localizada [18]. Dentro deste estudo, inclui-se também o objetivo deste trabalho, que é a análise, a tempo fixo, do grau de correlação entre os sítios de uma rede de mapas logísticos acoplados não-localmente, sendo que a interação decai com a distância ao longo da rede segundo uma lei de potência. Neste sentido diversos diagnósticos são usados. Uma quantidade importada da mecânica estatística e largamente empregada na caracterização qualitativa de caos temporal em sistemas dinâmicos de baixa dimensionalidade é a função de correlação temporal. Esta proporciona resultados consistentes também quando, em sua versão espacial, é aplicada na caracterização do padrão espacial de uma rede com acoplamento do tipo lei de potência nas vizinhanças da sincronização [19], bem como nas vizinhanças de um comportamento crítico [20].

Um segundo método bastante usado na caracterização da dinâmica temporal de sistemas de baixa dimensionalidade e que, em princípio, pode também ser usado para caracterizar a dinâmica temporal de uma RMA consiste no cálculo da dimensão fractal do atrator. Como exemplo podemos citar o método de Grassberger e Procaccia (MGP) [21, 22] que visa calcular a dimensão fractal de um atrator baseado no grau de correlação entre os pontos distribuídos ao longo da órbita no espaço de fase, ou mesmo ao longo de uma órbita espacialmente reconstruída. Embora o método de cálculo da dimensão de correlação seja de fácil implementação ele se torna inviável quando aplicado a sistemas multidimensionais como é o caso de uma RMA. Uma variante deste método, também proposto por Grassberger [23], baseada na hipótese de que a dimensão fractal cresce com o tamanho do sistema, sugere o emprego de quantidades espaciais (distribuição espacial das variáveis de estado) da rede no MGP anterior, ao invés de se empregar a órbita tradicional no espaço de fase (ou reconstruído). Esta adaptação computacionalmente mais ágil proporciona então o cálculo de uma quantidade que ao final mostra ser autoconsistente em caracterizar a dinâmica de grandes redes, a “densidade de dimensão espacial”. Usamos tal

variante na caracterização de uma RMA com acoplamento do tipo lei de potência.

O gráfico de recorrência (GR) foi introduzido por Eckmann e Ruelle [24] como uma ferramenta numérica gráfica para descrever correlação temporal em séries temporais, sendo usado, em princípio, para revelar comportamentos não estacionários de séries bem como para indicar seu grau de aperiodicidade. A idéia básica para se construir um GR parte da reconstrução do espaço de fase com subsequente grafia dos pontos cuja distância no espaço reconstruído esteja abaixo de uma certa tolerância. A formação de padrões no GR pode indicar comportamentos laminares, periódicos e caóticos. Os GRs foram usados em uma grande variedade de aplicações, sobretudo no campo da fisiologia [25, 26]. Introduzimos neste trabalho um extensão espacial do GR destinada à caracterização da aleatoriedade espacial da rede em um dado instante de tempo [6].

Este trabalho de doutoramento está distribuído em sete capítulos:

O capítulo dois é apresentado como motivação, proporcionando de forma bastante breve um panorama geral sobre os sistemas dinâmicos ordinários bem como os sistemas com dinâmica espaço-temporal. Dentre estes últimos, o conceito de RMA é revisado. O acoplamento onde a interação entre os sítios decai segundo uma lei de potência da distância entre os mesmos também é revisado.

O capítulo três apresenta a fenomenologia apresentada por uma RMA o que inclui aspectos como a formação de domínios espaciais, duplicação de período, intermitência espaço-temporal, propagação de defeitos e transição para CET via intermitência espaço-temporal.

O capítulo quatro apresenta a função de correlação espacial (FCE) empregada na caracterização da distribuição espacial das variáveis de estado da RMA. A caracterização engloba algumas aplicações no caso local e global. Neste último caso, exploramos o comportamento da FCE para uma rede tendendo a um estado de completa sincronização.

No capítulo cinco revisamos o método de Grassberger e Procaccia (MGP) para o cálculo da dimensão de correlação e apresentamos um panorama geral sobre a técnica de reconstrução. Empregamos esta reconstrução na tentativa de determinar a dimensão fractal do atrator. Empregamos também, para o caso de uma rede não-local, uma variante do MGP que prescreve o cálculo de uma “densidade de dimensão espacial” baseado no uso de uma reconstrução puramente espacial da distribuição espacial das variáveis de estado.

No capítulo seis revisamos o mapa de retorno espacial (MRE), o qual é uma representação da distribuição espacial das variáveis de estado espacialmente recons-

truídas. Introduzimos uma medida baseada neste diagnóstico que possibilita sua caracterização. Adequamos também o uso do gráfico de recorrência, bem como seus quantificadores, à caracterização da aleatoriedade espacial do perfil de uma rede acoplada globalmente nas proximidades de um estado de completa sincronização.

No capítulo sete revisamos o mapa de Chaté-Manneville, o qual inserido na dinâmica local de uma RMA, transforma esta em um modelo seminal para o estudo da intermitência espaço-temporal. Estudamos também este modelo para o caso de uma rede não-local com interação tipo lei de potência. Entre outras coisas, determinamos um espaço de parâmetros parcial, o qual evidencia fronteiras críticas sobre as quais um comportamento tipo lei de potência da FCE se estabelece.

No capítulo oito apresentamos as conclusões deste trabalho bem como as sugestões para os trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Redes de mapas acoplados

Neste capítulo revisamos de forma bastante breve alguns conceitos sobre dinâmica temporal, bem como caos temporal. Apresentamos em seguida uma noção também qualitativa sobre o que vem a ser caos espaço-temporal. Apresentamos também o conceito de sistema espacialmente estendido, o qual tem nas redes de mapas acoplados um dos seus mais importantes representantes. Apresentamos em seguida a rede de mapas acoplados que será objeto de estudo neste trabalho.

### 2.1 Caos em sistemas temporais

A primeira evidência daquilo que modernamente chamamos de comportamento caótico surgiu em 1963 quando E. N. Lorenz [27] estudou as soluções numéricas de um modelo simplificado de convecção térmica para as camadas mais baixas da atmosfera. O modelo de Lorenz consiste em um sistema autônomo de 3 equações diferenciais ordinárias obtidas através do truncamento de um conjunto de equações diferenciais parciais que modelam o fenômeno da convecção térmica entre dois planos infinitos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sigma(x - y), \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Neste modelo,  $\sigma$  representa o número de Prandtl,  $b$  é a escala adimensional da

célula convectiva e  $r$  é a razão entre o número de Rayleigh e seu valor crítico. As quantidades  $\sigma$  e  $b$  incorporam propriedades físicas e geométricas do sistema, enquanto  $r$  é determinado pela geometria, propriedades físicas, intensidades do forçamento e amortecimento. O comportamento físico interessante das equações de Lorenz surge quando  $r$  é modificado.

Em suas investigações Lorenz percebeu que sob certas condições o seu sistema exibia certas soluções com características até então nunca registradas: quando o parâmetro  $r$  (razão entre injeção e dissipação de energia) ultrapassa um determinado valor crítico as soluções, que anteriormente eram regulares, tornam-se fortemente irregulares (mesmo sem introdução de qualquer elemento aleatório externo) exibindo também grande sensibilidade às condições iniciais: pequenas perturbações nas condições iniciais crescem exponencialmente à medida que o tempo passa. Depois da observação de Lorenz constatou-se que inúmeros outros sistemas dissipativos exibem comportamento semelhante, sejam eles modelados por um fluxo de  $N$  equações diferenciais

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{u}), \quad (2.2)$$

ou um mapa (equação à diferença) com  $N$  componentes.

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{u}_n). \quad (2.3)$$

Nos anos seguintes, esta transição estrutural de um comportamento regular para um comportamento “estranho”, no qual uma região do espaço de fase é preenchido por órbitas irregulares, foi também paulatinamente sendo compreendida: quando a razão entre forçamento e dissipação é pequena e o movimento regular se faz presente, o comportamento assintótico das órbitas no espaço de fase, independentemente da condição inicial de que cada qual partiu, é um conjunto de pontos formando uma figura geométrica simples, por exemplo, um ponto, círculo ou mesmo toros. A dimensão destas figuras geométricas é inteira, e em decorrência da própria dissipação do sistema (do termo de dissipação), menor que a dimensão  $N$  do próprio espaço de fase. Por outro lado, quando a razão entre forçamento e dissipação ultrapassa um valor crítico o sistema se torna instável. Nesta situação, as órbitas, enquanto evoluem irregularmente, provenientes de uma “*bacia*” de condições iniciais, são atraídas para um conjunto limite, com dimensão fracionária. Este objeto bastante complexo, embora espacialmente limitado no espaço de fase, foi denominado anos mais tarde por D. Ruelle (1971) de *atrator estranho* [28]. A aparência bastante complexa de qualquer série temporal proveniente do sistema quando instável é decorrência da maneira não-periódica na qual a órbita visita as regiões do espaço de fase enquanto se move ao longo do atrator.

A divergência entre duas soluções muito próximas proporciona o elemento necessário para se definir uma ferramenta capaz de quantificar o comportamento caótico, chamado de expoente de Lyapunov. Considere o mapa  $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{u}_n)$  e seja  $\mathbf{u}_n$  a órbita no  $\mathbb{R}^N$  gerada a partir de  $n$  aplicações de uma condição inicial  $\mathbf{u}_0$ . Se considerarmos um pequeno deslocamento a partir de  $\mathbf{u}_0$  medido na direção do vetor tangente  $\mathbf{y}_0$ , então a evolução deste vetor, dado por [30, 31]

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{DM}(\mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{y}_n, \quad (2.4)$$

(onde  $\mathbf{DM}$  representa a matriz Jacobiana das derivadas parciais de  $\mathbf{M}$ ) determina a evolução temporal de um deslocamento infinitesimal em relação à órbita não perturbada  $\mathbf{u}_n$ . Em particular,  $\mathbf{y}_n/|\mathbf{y}_0|$  fornece a direção do deslocamento infinitesimal em relação à órbita  $\mathbf{u}_n$  e  $|\mathbf{y}_n|/|\mathbf{y}_0|$  é o fator pelo qual este deslocamento infinitesimal cresce  $|\mathbf{y}_n| > |\mathbf{y}_0|$  ou colapsa  $|\mathbf{y}_n| < |\mathbf{y}_0|$ . Da equação 2.4, temos que  $\mathbf{y}_n = \mathbf{DM}^n(\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{y}_0$ , onde

$$\mathbf{DM}^n(\mathbf{u}_0) = \mathbf{DM}(\mathbf{u}_{n-1}) \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{u}_{n-2}) \cdot \dots \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{u}_0). \quad (2.5)$$

Define-se o expoente de Lyapunov para a condição inicial  $\mathbf{u}_0$  e orientação inicial dada por  $\mathbf{y}_0/|\mathbf{y}_0|$  como

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{|\mathbf{y}_n|}{|\mathbf{y}_0|} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\mathbf{DM}^n(\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{y}_0|. \quad (2.6)$$

Como o sistema possui  $N$ -dimensões, o que temos é um espectro ordenado de expoentes de Lyapunov,  $\lambda_{max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ , cada um associado a uma direção independente no espaço tangente. Qualquer sistema tendo ao menos um expoente de Lyapunov positivo é definido como sendo caótico, i.e.  $\lambda_{max} > 0$  [4]. Por outro lado,  $\lambda_{max}$  é zero para um ciclo limite, um Toros-2, ou de forma geral um Toros- $n$ . Naturalmente, se o sistema é unidimensional ( $N = 1$ ) temos somente um expoente de Lyapunov.

## 2.2 Caos em sistemas espaço-temporais

O estudo de caos espaço-temporal (CET) é atualmente uma área bastante ativa da física, pois a literatura sobre o assunto é bem vasta, é também uma área não tão bem estabelecida, uma vez que até hoje não exista uma definição clara

e precisa do que vem a ser CET. Parafraseando algumas "definições" correntes na literatura [4, 32], CET é usualmente caracterizado como a presença de caos temporal (expoentes de Lyapunov positivos) em sistemas de elevada dimensionalidade concomitante à formação de padrões espaciais, os quais geralmente exibem um decaimento muito rápido da correlação espacial. Neste estado, o sistema deve exibir grande desordem espacial. Este tipo de associação ocorre em muitos modelos físicos que incorporam o espaço, e é patente também em sistemas físicos reais. Neste último caso podemos citar como exemplo os sistemas que exibem convecção e turbulência em fluidos escoantes (experimentos de Bénard-Rayleigh [2, 31], Couette-Taylor [33], turbulência MHD em plasmas [1]), e as reações químicas do tipo reação-difusão (reação de Belousov-Zhabotinsky [2, 31]).

Um exemplo real particularmente interessante de CET é a convecção térmica de Bénard-Rayleigh em uma pequena caixa. Neste sistema um fluido é depositado entre duas placas horizontais termicamente condutoras, sendo que a superior é mais fria que a inferior. Quando a diferença de temperatura excede um valor crítico e a convecção inicia-se, o fluido aquecido então ascende, resfria, e descende, formando assim um padrão espacial periódico que se apresenta na forma de "rolos" de convecção. Quando a diferença de temperatura cresce muito além do valor crítico todo este panorama é substituído por um grande número de estruturas espaciais com forma espiral que aparecem e desaparecem de forma imprevisível, sendo que a distância ao longo da qual o movimento está espacialmente correlacionado decresce com o aumento na diferença de temperatura [2]. Este estado é conhecido como "caos espiral" e representa efetivamente um estado de caos espaço-temporal.

Muitos dos sistemas reais citados anteriormente podem ser modelados bastante bem por meio de uma equação diferencial parcial. Já a obtenção das soluções de tais equações representa, em algumas situações, um problema de proporções significativas, e.g., a obtenção de soluções das equações de Navier-Stokes. No caso do fluxo representado pela equação 2.2, o número de graus de liberdade  $N$  (dimensão do espaço de fase) coincide com o número de equações diferenciais ordinárias necessárias à descrição da evolução do sistema. EDPs generalizam o número de graus de liberdade de um número finito  $N$  para um número infinito, ou seja, um contínuo. Neste caso a quantidade  $N$  deve ser substituída por um vetor  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  pelo campo  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Se considerarmos ainda uma única componente deste campo, a qual chamaremos simplesmente de  $u(\mathbf{x}, t)$ , a equação 2.2 pode ser escrita como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = G(u, \nabla u, \nabla^2 u, \dots), \quad (2.7)$$

agora os rótulos  $\mathbf{x}$  e  $t$  da variável dinâmica  $u$  são ambos contínuos.

Grosseiramente falando, a dinâmica dos campos difere da dinâmica dos sistemas

de baixa dimensionalidade somente porque o número de graus de liberdade é infinito no primeiro caso [34]. Um outro aspecto bastante importante de uma EDP, e que a priori, muito nos interessa, é o fato de que a mesma representa um *sistema estendido espacialmente*: apresenta graus de liberdade espalhados de forma contínua sobre o espaço. Um exemplo interessante de uma EDP é a equação de reação-difusão periodicamente forçada, a qual descreve reações químicas em um meio não-homogêneo unidimensional [35]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + R(u)G(t), \quad (2.8)$$

onde o campo  $u(z, t)$  representa a concentração da espécie química,  $D$  é um coeficiente de difusão constante na direção  $z$ ,  $R$  uma taxa de reação não-linear e  $G$  uma função periódica no tempo que pode ser representada por uma sequência de perturbações impulsivas com período  $\tau$

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau). \quad (2.9)$$

A presença do termo de forçamento representado por uma função  $\delta$  possibilita a integração temporal da equação 2.8 em torno do pulso  $\delta$  (intervalo  $[n\tau - \xi, n\tau + \xi]$ ) e no intervalo entre dois pulsos da mesma função (intervalo  $[n\tau + \xi, (n+1)\tau - \xi]$ ). O espaço  $z$  pode ser discretizado, introduzindo-se uma rede unidimensional cujo passo é  $w$  (intervalo entre os sítios  $i$  e  $i+1$ ), ou seja  $z = iw$ . Não vamos nos deter nos detalhes desta transformação, uma vez que a mesma está disponível em diversas referências [35, 36, 37]. Após algum cálculo o procedimento fornece a expressão

$$u_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(u_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{2} [f(u_n^{(i-1)}) + f(u_n^{(i+1)})]. \quad (2.10)$$

onde foram introduzidas as quantidades  $\epsilon = D\tau/w^2$  e  $f(u) = u + R(u)$ , as quais representam, respectivamente uma constante de acoplamento e um mapa local. Por uma questão de adequação à literatura corrente sobre redes é conveniente trocar a variável  $u$  por  $x$ . Finalmente, temos

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{2} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})]. \quad (2.11)$$

Dois aspectos bastante vantajosos desta equação, quando comparada com a 2.8, são que a mesma, além de preservar o caráter de sistema espacialmente estendido,



sistema	espaço	tempo	variável de estado
EDP	contínuo	contínuo	contínua
Cadeias de osciladores	discreto	contínuo	contínua
RMA	discreto	discreto	contínua
Autômatos celulares	discreto	discreto	discreta

Tabela 2.1: Hierarquia dos sistemas estendidos espacialmente.

possui tanto o espaço como o tempo representados por variáveis discretas:  $i$  (sítio) corresponde ao espaço e  $n$  (instantâneo) corresponde ao tempo. A equação 2.11, derivada da 2.8, é um exemplo particularmente interessante daquilo que chamamos correntemente de rede difusiva de mapas acoplados (RMA). O motivo pelo qual existe um grande interesse neste tipo particular de rede é que ela representa um modelo padrão que pode, pelo menos em princípio, fomentar uma caracterização mais consistente de caos espaço-temporal. Este tipo de rede foi introduzida e investigada por Kaneko [11, 38]. Dentre os sistemas que exibem dinâmica espaço-temporal, as redes ocupam a terceira hierarquia quando são levados em conta a quantidade física discretizada (Tabela 2.1).

## 2.3 Conceitos básicos sobre RMAs

O que vem a ser então uma RMA? Uma RMA consiste em um conjunto de  $N$  sítios distribuídos espacialmente sobre uma reta (rede unidimensional), como indica a figura 2.1a. A localização de cada sítio é denotada pelo índice  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) e em cada sítio uma variável dinâmica  $x_n^{(i)}$  evolui no tempo, sendo  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) o instante de tempo no qual a mesma é registrada.

O conjunto de valores que inicializa todos os sítios da rede (conjunto das condições iniciais) pode ser escolhido como sendo um conjunto distribuído espacialmente na forma de uma onda, e.g.,  $A \sin(2k\pi i N^{-1})$ , ou um conjunto aleatoriamente distribuído. Este último conjunto é particularmente interessante quando estudamos comportamentos mais gerais da rede. No que diz respeito às condições de contorno impostas sobre a RMA, vários tipos podem ser usados: fixas, periódicas, livres, etc.. No presente trabalho usamos somente condições iniciais aleatórias e condições de contorno periódicas (Fig. 2.1b).

A evolução dinâmica da variável de estado de um sítio é governada em essência pelo tipo de mapeamento efetuado no sítio e pela intensidade do acoplamento do mesmo sítio com os demais sítios da rede. De fato, estas duas quantidades são as responsáveis por todo e qualquer tipo de comportamento coletivo exibido pela rede. O acoplamento, em especial, é responsável por fazer com que um grande número

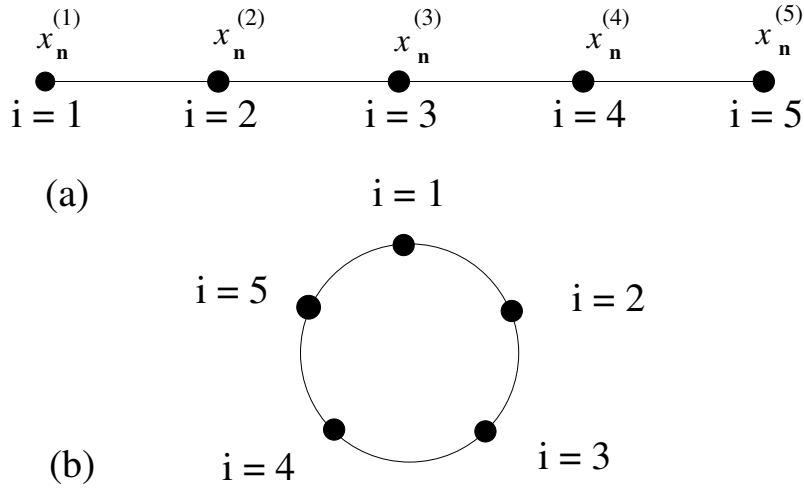


Figura 2.1: (a) Rede com  $N = 5$ . (b) A mesma rede quando se usa condições de contorno periódicas no espaço, ou seja  $x^{(i)} = x^{(i+N)}$ .

de subsistemas espacialmente distribuídos (sítios) interajam enquanto evoluem no tempo, gerando por conseguinte, através de suas variáveis de estado, um grande número de estruturas ao longo do espaço (padrões). Estas estruturas, de forma recíproca, contribuem para influenciar a própria dinâmica temporal.

O acoplamento entre os sítios pode ser basicamente resumido em dois tipos: local e não-local. No acoplamento local, cada sítio está acoplado somente com os primeiros vizinhos. Dentro deste caso podemos citar como exemplos a rede difusiva descrita pela equação 2.11, a rede com acoplamento aditivo

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \epsilon [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})], \quad (2.12)$$

e a rede com acoplamento unidirecional (*open fluid flow model*)

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(x_n^{(i)}) + \epsilon f(x_n^{(i-1)}). \quad (2.13)$$

Neste último exemplo, diferente do que ocorre na rede 2.11, a interação ocorre de maneira assimétrica.

No acoplamento não-local cada sítio pode estar acoplado com um grande número de sítios mais afastados. Um exemplo particularmente interessante deste caso, e que será largamente utilizado neste trabalho, é o acoplamento cujo alcance da interação é variável. Em particular, consideraremos que a interação entre sítios vizinhos decai

com a distância na rede segundo uma lei de potência [13, 15, 14]

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} [f(x_n^{(i+j)}) + f(x_n^{(i-j)})]. \quad (2.14)$$

Onde o parâmetro  $\alpha$  ( $\alpha \in [0, \infty)$ ) controla o alcance do acoplamento. O somatório expressa a contribuição dos sítios tanto a direita quanto à esquerda de um dado sítio e  $\eta$  representa um fator de normalização

$$\eta(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} = 2 \left\{ \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{N'^\alpha} \right\}, \quad (2.15)$$

onde

$$N' = \frac{1}{2}(N - 1). \quad (2.16)$$

Este tipo de acoplamento foi empregado também no estudo do comportamento coletivo de uma cadeia de osciladores, portanto na segunda classe de sistemas espacialmente estendidos [39]. A equação 2.14 exhibe dois limites bastante interessantes, cada um caracterizando um tipo especial de interação dentro da rede.

Quando  $\alpha = 0$  então  $\eta = N - 1$ , neste caso a equação 2.14 torna-se

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{N - 1} [f(x_n^{(i+1)}) + \dots + f(x_n^{(i+N')}) + f(x_n^{(i-1)}) + \dots + f(x_n^{(i-N')})]. \quad (2.17)$$

Se levarmos em consideração que  $N' = (N - 1)/2$  e que as condições de contorno são periódicas a soma entre colchetes representa na verdade a soma sobre todos os sítios da rede com exceção do sítio  $i$ . Desta forma, a última equação pode ser escrita como

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{N - 1} \sum_{j=1, j \neq i}^N f(x_n^{(j)}), \quad (2.18)$$

Este resultado, conhecido como modelo de campo médio [10], representa um caso

extremo de interação não-local pois cada sítio interage com o valor médio de todos os sítios da rede.

Quando  $\alpha \rightarrow \infty$ , só o termo  $j = 1$  prevalece no somatório presente no termo de acoplamento da equação 2.14. Além disso,  $\eta \rightarrow 2$ . Neste caso, nós recuperamos a equação para uma rede de mapas acoplados com difusão simétrica (Eq. 2.11)

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{2} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})], \quad (2.19)$$

onde somente os primeiros vizinhos contribuem para o termo de acoplamento.

No que tange a escolha da dinâmica local, existem diversos mapas que são candidatos a função  $f(x)$ . Como exemplos podemos citar o mapa logístico [55]

$$f(x) = \mu x(1 - x) \quad x \in [0, 1] \quad \mu \in (0, 4], \quad (2.20)$$

cujo diagrama de bifurcação (comportamento assintótico da órbita em função do parâmetro de não-linearidade  $\mu$ ) é exibido na figura 2.2. Neste diagrama podemos observar que o ponto fixo  $p = 1 - 1/\mu$ , definido por  $f(p) = p$ , torna-se instável para  $\mu > 3$ . O número de bifurcações aproxima-se de um número infinito quando  $\mu$  aproxima-se do valor  $\mu_\infty \approx 3,61547$ .

Outro exemplo de dinâmica local seria o mapa do seno-círculo [31]

$$f(x) = x + \omega + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x), \quad (2.21)$$

onde  $x \in [0, 1)$  é uma variável angular (fase),  $0 \leq \omega < 1$  uma frequência natural, e  $K > 0$  uma parâmetro de não-linearidade. Mapas lineares por partes, como os mapas da tenda e de Chaté-Manneville podem também ser usados. Falaremos sobre estes dois últimos mapas no capítulo 7. Nos demais capítulos empregaremos somente o mapa logístico.

Na literatura sobre RMAs, qualquer rede em suas  $N$  componentes pode ser escrita na forma compacta de um mapa  $N$ -dimensional, ou seja:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n). \quad (2.22)$$

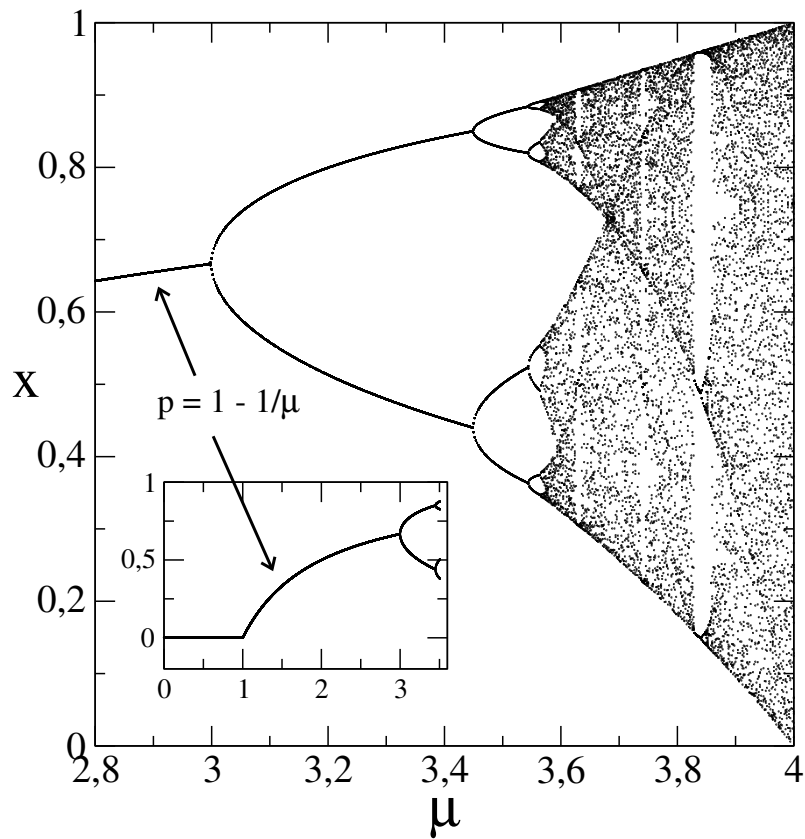


Figura 2.2: Diagrama de bifurcação para o mapa logístico isolado.

Assim escrito,  $\mathbf{x}_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N)})$  representa portanto um vetor  $N$ -dimensional ( $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^N$ ) que evolui a tempo discreto. Na terminologia das redes de mapas acoplados, o conjunto das componentes deste vetor em um dado instante de tempo é comumente chamado de *perfil da rede*, *padrão da rede*, *estado espacial da rede*, ou simplesmente, *distribuição espacial dos  $x_n$* .

# Capítulo 3

## Fenomenologia da dinâmica espaço-temporal

A rede 2.14 exibe uma rica variedade de fenômenos, incluindo formação de domínios, coexistência de domínios com evolução caótica e regular (intermitência espaço-temporal), movimento de fronteiras, caos transiente, duplicação de período, propagação de defeitos, CET, etc.. Neste capítulo vamos descrever algumas destas características demarcando, ao mesmo tempo, de forma aproximada, em qual domínio dos valores dos parâmetros aqui usados,  $\epsilon$  e  $\mu$ , elas ocorrem.

### 3.1 O padrão estacionário e as estruturas “kink” e “antikink”

Considere uma rede periódica de  $N$  sítios sujeitos a um acoplamento local do tipo difusivo,

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n), \quad (3.1)$$

onde cada componente é definida por 2.11. A dinâmica de cada sítio é descrita por  $f(x) = \mu x(1 - x)$  e pelo acoplamento  $\epsilon$ . As condições iniciais usadas são distribuídas aleatoriamente.

Iremos agora descrever alguns fenômenos coletivos apresentados pela rede 2.11 quando o parâmetro de não-linearidade  $\mu$  varia de 0 até 4,0. Uma vez que estamos analisando uma rede de mapas acoplados, a dinâmica em um dado sítio será naturalmente perturbada pela presença dos demais sítios da rede, isso faz com que o diagrama de bifurcação da figura 2.2 (sítio isolado) perca completamente sua estru-

tura fina quando o sítio passa a interagir com outros sítios da rede. A “lembrança” que um dado sítio guarda da dinâmica de quando o mesmo era isolado depende da intensidade do acoplamento  $\epsilon$ . Em nossa análise iremos considerar na maioria das situações  $\epsilon = 0, 1$ .

Para  $\mu < 3,0$  o comportamento assintótico da rede é sempre o ponto fixo estável  $p$  do mapa isolado para qualquer valor de  $\epsilon$  e independente das condições iniciais.

Quando  $\mu$  avança além do valor  $3,0$ , considerando-se  $\epsilon = 0$ , cada sítio executa um 2-ciclo estável, que denominaremos  $\{d_1; d_2\}$ . Como os sítios são inicializados com condições iniciais aleatórias, sítios adjacentes estarão portanto defasados em um dado instante de tempo  $n$  após um longo transiente. Por exemplo, o sítio  $i$  descreve um ciclo  $\{d_1; d_2\}$  enquanto que o sítio  $i + 1$  descreve um ciclo  $\{d_2; d_1\}$ . Em decorrência disto, quando avançamos ao longo da rede observamos que o valor da variável de estado ora passa para um valor acima do ponto fixo instável  $p$  do mapa isolado (*kink*) ora para um valor abaixo (*antikink*). Este tipo de comportamento pode ser observado por meio da figura 3.1a, a qual exhibe o diagrama variável de estado versus sítio (perfil da rede) para um único instante de tempo. A linha tracejada localiza o ponto fixo  $p$  do mapa isolado. Uma vez que sítios adjacentes estão defasados os *kinks* e *antikinks* se revesam à medida que a rede evolui no tempo.

Quando os sítios estão acoplados ( $\epsilon = 0, 1$ , por exemplo) grande parte das estruturas *kink-antikink* desaparecem, cedendo lugar a grandes domínios de sítios executando um mesmo 2-ciclo (tais domínios apresentam, assim, um certo grau de invariância translacional). Os *kinks-antikinks* remanescentes são suavizados e permanecem fixos no espaço à medida que a rede evolui no tempo, porém suas localizações dependem das condições iniciais (esta característica é chamada de *padrão aleatório congelado*). Como os *kinks* e *antikinks* se revezam à medida que a rede evolui no tempo então a sobreposição destas estruturas em vários instantes de tempo apresenta-se como um nó estacionário no diagrama variável de estado versus sítio (fig.3.1b). É interessante analisar também o diagrama espaço-tempo-variável da rede então acoplada. Nele observamos que as estruturas *kink-antikink* constituem-se, na verdade, de barreiras (ou paredes) que limitam os citados domínios (fig.3.2).

Quando  $\mu$  avança além do valor  $3,45$ , considerando-se a rede ainda acoplada, domínios com sítios apresentando período 4 surgem:  $\{q_1; q_2; q_3; q_4\}$ . Portanto, uma nova duplicação de período ocorre. Alguns sítios ainda executam um 2-ciclo e formam pequenos domínios (ver fig. 3.1c). Este fato é interessante pois, muito embora o valor do parâmetro de não linearidade em uso impossibilite a existência de 2-ciclos estáveis para sítios isolados, aqueles ainda persistem se os sítios estiverem acoplados, o que mostra que o acoplamento em uma rede pode “reduzir o período” na dinâmica de alguns sítios.

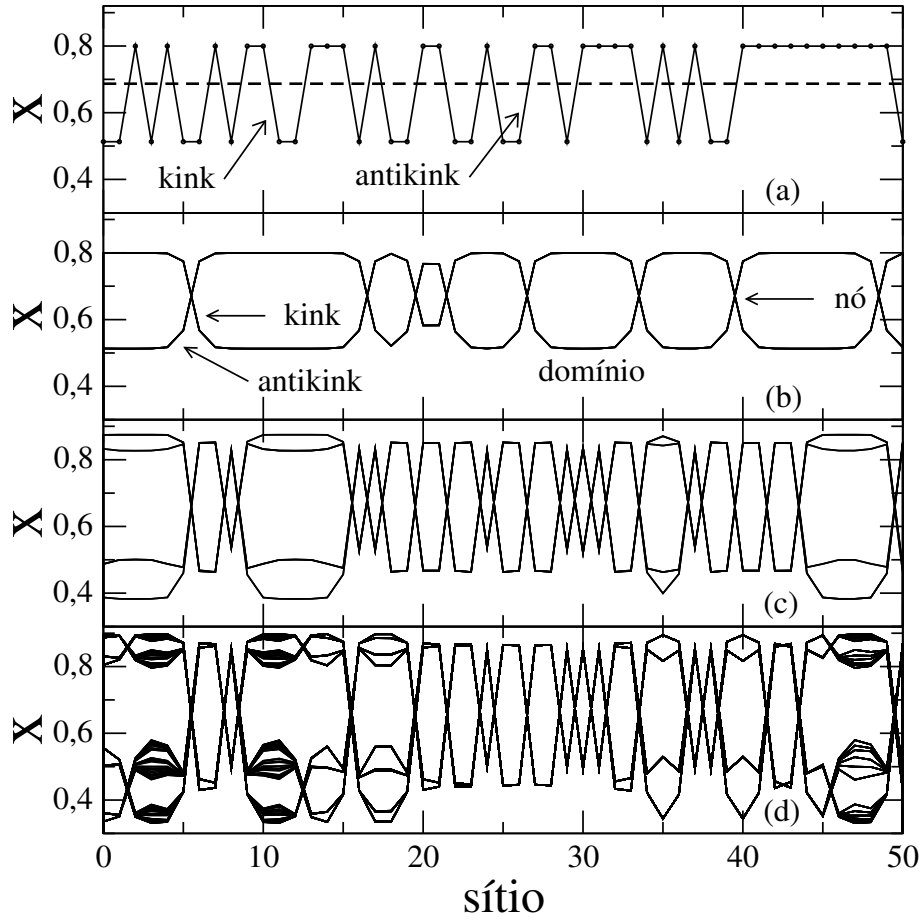


Figura 3.1: Perfil de uma rede de 51 mapas logísticos acoplados localmente, transiente  $10^4$  (a)  $\mu = 3, 2, \epsilon = 0$  (um único tempo), (b)  $\mu = 3, 2, \epsilon = 0, 1$  (10 tempos superpostos) (c)  $\mu = 3, 5, \epsilon = 0, 1$  (10 tempos superpostos), (d)  $\mu = 3, 59, \epsilon = 0, 1$  (200 tempos superpostos).



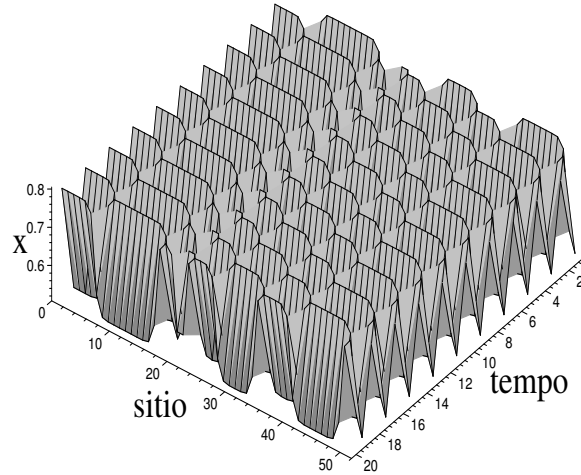


Figura 3.2: Evolução temporal de uma rede de 51 mapas logísticos acoplados localmente (transiente  $10^4$ ), para  $\mu = 3,2$  e  $\epsilon = 0,1$ .

A figura 3.1d mostra a coexistência de domínios constituídos de sítios executando uma órbita de período muito elevado com domínios constituídos de sítios executando uma órbita de baixo período e entre estes domínios as barreiras formadas pelas estruturas *kink-antikink*.

## 3.2 Supressão de caos e a estrutura ziguezague

Quando  $\mu$  é um pouco maior que  $\mu_\infty = 3,61547$ , duas novas características aparecem quando consideramos baixo acoplamento. A primeira é a supressão de caos em determinados sítios em um valor elevado do parâmetro de não-linearidade  $\mu$ , como se vê pela transformação da figura 3.3a para figura 3.3b (o mesmo acontecendo na figura 3.4). A segunda característica, a qual ocorre para  $\epsilon \approx 0,1$ , é o aparecimento da estrutura *ziguezague* (fig. 3.3b), a qual é caracterizada pela condição:

$$(x_n^{(i+1)} - p)(x_n^{(i)} - p) < 0, \quad (3.2)$$

onde  $p$  é o ponto fixo instável do mapa isolado. Vemos, portanto, que a estrutura ziguezague constitui-se em *kinks* e *antikinks* em sequência ao longo da rede, formando assim um padrão espacial extenso (cuja frequência espacial é  $k = 1/2$ ). A dinâmica

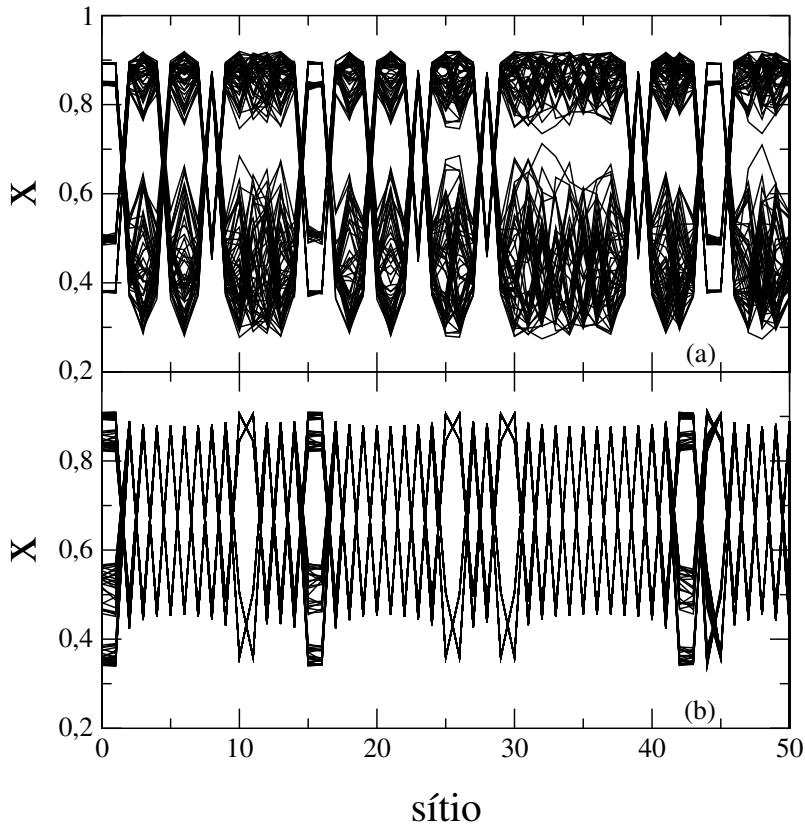


Figura 3.3: Perfil de uma rede de 51 mapas logísticos acoplados localmente, transiente  $10^4$ ,  $\epsilon = 0, 1, 100$  tempos, (a)  $\mu = 3,68$ , (b)  $\mu = 3,75$ .

temporal da estrutura ziguezague é quase de período 2. Aqui, “quase de período 2” significa que a estrutura é de período 2, porém com uma modulação caótica de amplitude muito pequena. As estruturas ziguezague são importantes pois podem levar a uma rota de quase periodicidade para o caos [11].

Como já mencionamos anteriormente, o *padrão aleatório congelado* (PAC) é uma característica que consiste em fronteiras de domínios fixas no espaço à medida que a rede evolui no tempo (retirado o devido transiente), quer exista no interior destas fronteiras movimento regular ou caótico (observe a figura 3.1). Porém, a localização destas fronteiras depende das condições iniciais aleatórias, o que nos permite concluir que há muitos atratores diferentes coexistindo no sistema [35]. Além disso o número destes atratores cresce exponencialmente com o tamanho do sistema [38]. Em geral, o PAC deixa de existir quando o parâmetro de não-linearidade ultrapassa  $\mu \approx 3,9$ , valor no qual observa-se a presença de intermitência espaço-temporal. Falaremos sobre este tipo de intermitência logo mais.

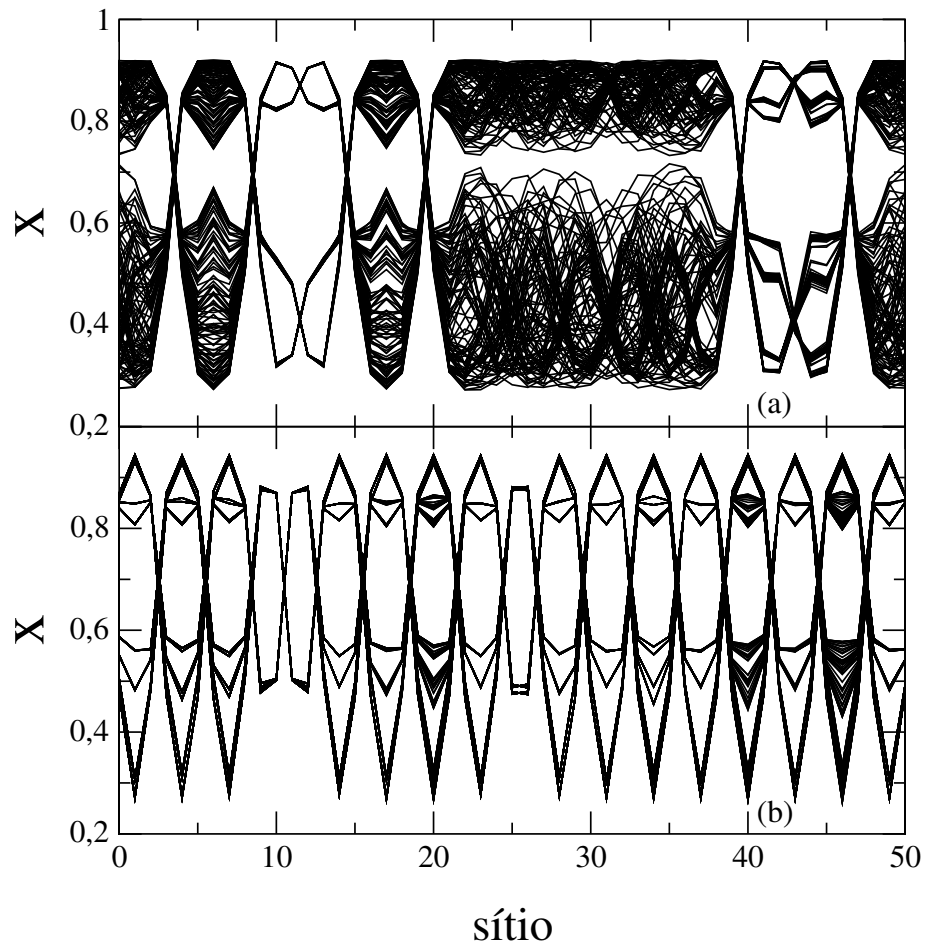


Figura 3.4: Perfil de uma rede de 51 mapas logísticos acoplados localmente, transiente  $10^4$ ,  $\epsilon = 0,3$ , 200 tempos, (a)  $\mu = 3,68$ , (b)  $\mu = 3,79$ .

### 3.3 Defeitos na rede e a seleção de padrões

Quando  $\mu$  atinge o valor 3,83, um padrão espacial bastante peculiar em uma rede de mapas logístico acoplados com  $\epsilon = 0,1$  aparece: *caos localizado na forma de um defeito ao longo da rede* (CLD). Este defeito é localizado no espaço, como mostra a figura 3.5a, e diferente do padrão zigzague é caracterizado pela condição:

$$(x_n^{(i+1)} - p)(x_n^{(i)} - p) > 0. \quad (3.3)$$

Na evolução temporal da rede observamos que a posição dos defeitos muda caoticamente com o tempo, muito semelhante a uma partícula efetuando um movimento browniano. Este movimento pode ser observado na figura 3.5b. Nesta figura, fizemos uso de um artifício gráfico para evidenciar um defeito. Sempre que a variável de estado  $x$  é maior que  $p$  (ponto fixo instável) um caractere preto é pintado, do contrário é branco. Procedimentos gráficos como este permitem evidenciar padrões espaço-temporais, e, portanto, serão usados outras vezes neste trabalho.

É interessante notar, nesta última figura, que os defeitos separam dois padrões zigzague com diferentes fases de oscilação. Quando dois defeitos colidem ou se aproximam eles se aniquilam, deixando para tras um grande domínio com uma única fase. Assim, no padrão CLD, um único padrão de estruturas zigzague cobrirá todo o espaço à medida que o tempo tende ao infinito uma vez que os defeitos vão se aniquilando aos pares, sem que haja criação de novos [38]. A rede, tende assim, a um atrator com fase uniforme [35], com padrão congelado. Entretanto, este atrator com elevado grau de coerência só é atingido no caso de  $N$  par. No caso de  $N$  ímpar, a evolução temporal culmina, após certo transiente, em um único defeito. Sendo este solitário, nunca aniquila-se. Este fato é uma decorrência natural da imposição das condições de contorno periódicas, uma vez que uma estrutura zigzague global não é possível em uma rede com  $N$  ímpar. Portanto, no caso de  $N$  par, o defeito é um fenômeno puramente transiente. Para  $\epsilon = 0,1$  o padrão CLD é observado até aproximadamente  $\mu \cong 3,9$ .

A figura 3.6a mostra o decréscimo do número de defeitos em função do tempo para uma rede de  $N = 20000$  sítios. A figura 3.6b exhibe o transiente médio necessário para que uma rede de 50 e 100 sítios atinja o atrator com fase uniforme em função do parâmetro de não-linearidade  $\mu$ . Note que este transiente médio cresce muito com o tamanho do sistema.

É importante ressaltar que, para outros valores do acoplamento  $\epsilon$ , não se observa a formação de um único padrão tão bem caracterizado como é o caso do CLD ou o padrão zigzague. No caso de  $\epsilon = 0,2$  ou  $0,3$ , o aumento gradual do parâmetro

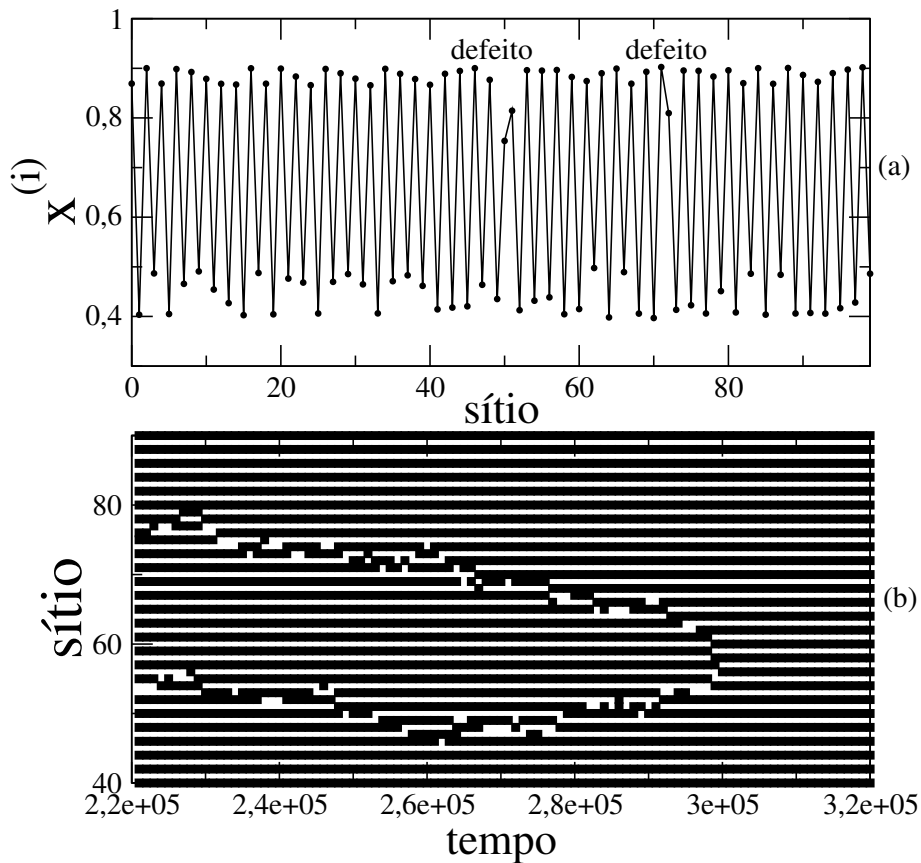


Figura 3.5: (a) perfil de uma rede de 100 mapas logísticos acoplados localmente exibindo um defeito no instante 250000. Aqui,  $\epsilon = 0,1$  e  $\mu = 3,83$ . (b) evolução temporal da mesma rede (expressa a cada 1000 tempos). Se  $x$  é maior que  $p$  (ponto fixo instável) um caracter preto é pintado. Do contrário, é branco.

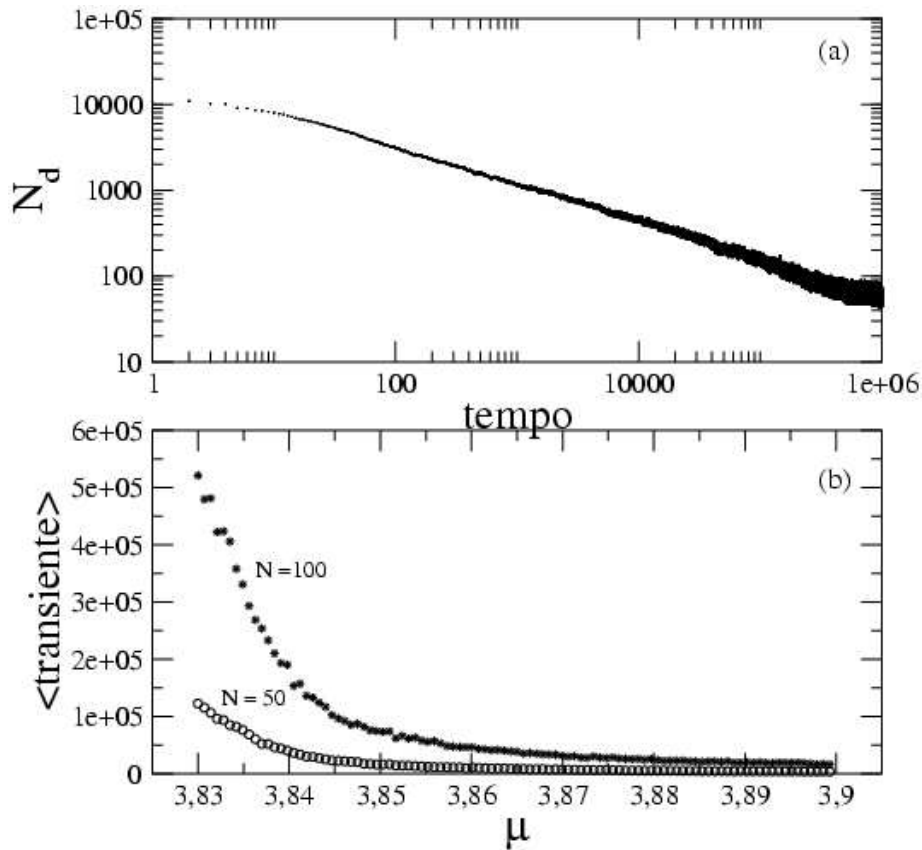


Figura 3.6: (a) Número de defeitos  $N_d$  em função do tempo para uma rede de  $N = 20000$  sítios ( $\mu = 3,86$ ). (b) Transiente médio (1000 condições iniciais) necessário para que o número de defeitos em uma rede de 50 e 100 sítios acoplados localmente se reduza até zero em função do parâmetro de não-linearidade  $\mu$ . Acima de  $\mu = 3,90$  aparecem os padrões intermitente e caótico.

de não-linearidade culmina, em torno de  $\mu = 3,8$ , no aparecimento não de um, mas sim, de alguns padrões característicos, semelhantes ao padrão estacionário exibido na figura 3.4b, por exemplo. Na fenomenologia de uma RMA, este fato é conhecido como *seleção de padrões*, pois domínios de alguns tamanhos especiais são selecionados quando a rede finalmente atinge o estado estacionário. Em resumo, no caso de  $\epsilon = 0,1$ , um entre dois padrões é selecionado quando  $\mu$  atinge 3,83, o padrão CLD ou o padrão zigzague. Já para outros valores de  $\epsilon$ , mais de um padrão é selecionado quando  $\mu$  atinge um valor característico.

### 3.4 Caos espaço-temporal

Quando  $\mu$  se aproxima de 4,0 (ainda com  $\epsilon = 0,1$ ), o padrão zigzague já não é mais dominante e qualquer estrutura espacialmente ordenada dentro do diagrama espaço-tempo da rede não é mais observada. O colapso das estruturas zigzague à medida que o parâmetro de não-linearidade  $\mu$  aumenta culmina, portanto, em um estado espacialmente irregular (como veremos neste trabalho, isto está associado à ocorrência de um rápido decaimento da correlação espacial) e temporalmente caótico (existência de expoentes de Lyapunov positivos). Este estado extremo de irregularidade espaço-temporal, evidenciado aqui através de uma rede de mapas acoplados (Fig. 3.7b), é objeto de intensa investigação científica, pois representa ainda um tema pouco esclarecido que ocorre com frequência em sistemas físicos reais. Este estado é conhecido como *caos espaço-temporal*. Investigaremos melhor este estado nos próximos capítulos.

Em outros valores do acoplamento, o aparecimento de uma fase caótica é patente quando  $\mu$  se aproxima do valor limite  $\mu = 4,0$ . Como veremos a seguir, o aparecimento desta fase se dá, de forma geral, através de um tipo de intermitência com extensão espacial.

### 3.5 Intermitência espaço-temporal

No domínio de valores dos parâmetros  $\mu$  e  $\epsilon$  onde existe transição entre os regimes PAC e CET, a rede apresenta uma outra característica bastante interessante: o diagrama espaço-tempo da rede exibe alternância entre movimentos laminares e irrompimentos irregulares (*burst*) tanto na evolução temporal como na evolução espacial (ao longo da rede). Esta característica, que também tem sido objeto de intensa investigação nos últimos anos, é conhecida como *intermitência espaço-temporal* (Fig. 3.7a). Para melhor evidenciar este fenômeno, vamos analisar a figura 3.8, que

foi construída baseada no panorama da intermitência espaço-temporal representado na figura 3.7a. No caso da figura 3.8a representamos a variável de estado em função do sítio (espaço) para 10 instantes de tempo registrados a cada 2 instantes. A quebra da regularidade espacial ocorre quando encontramos ao longo do espaço um grande acúmulo de defeitos. Quando monitoramos a evolução temporal de um sítio, como é o caso da figura 3.8b, a quebra da regularidade temporal ocorre também quando encontramos grande acúmulo de defeitos. Se tivéssemos analisado um outro sítio, como por exemplo o sítio  $i = 10$ , a extensão do irrompimento irregular no tempo é significativamente maior. A presença de irrompimentos irregulares no tempo, com extensão espacial, representa assim a intermitência espaço-temporal.

O movimento aleatório de um único defeito ao longo da rede (seção 3.3) configura, por si só, um padrão intermitente bem evidente, porém ocorre somente para  $\epsilon = 0, 1$ . Além do mais, no caso de um defeito, a quebra de regularidade possui uma extensão realmente muito pequena quando comparados às quebras de regularidade existentes na mesma rede evoluída para outros valores dos parâmetros  $\mu$  e  $\epsilon$ , como indica a figura 3.7a.

As características descritas neste capítulo podem ser observadas em uma grande classe de redes de mapas acoplados (e.g. tenda, seno-círculo [8]) e em muitos outros tipos de acoplamento tanto local como não-local. A rede não-local 2.14, além de todos os fenômenos anteriormente relatados, exhibe um fenômeno coletivo adicional, não observado em uma rede acoplada localmente, que é a *sincronização*. Deixaremos para o capítulo 4 a descrição deste fenômeno.



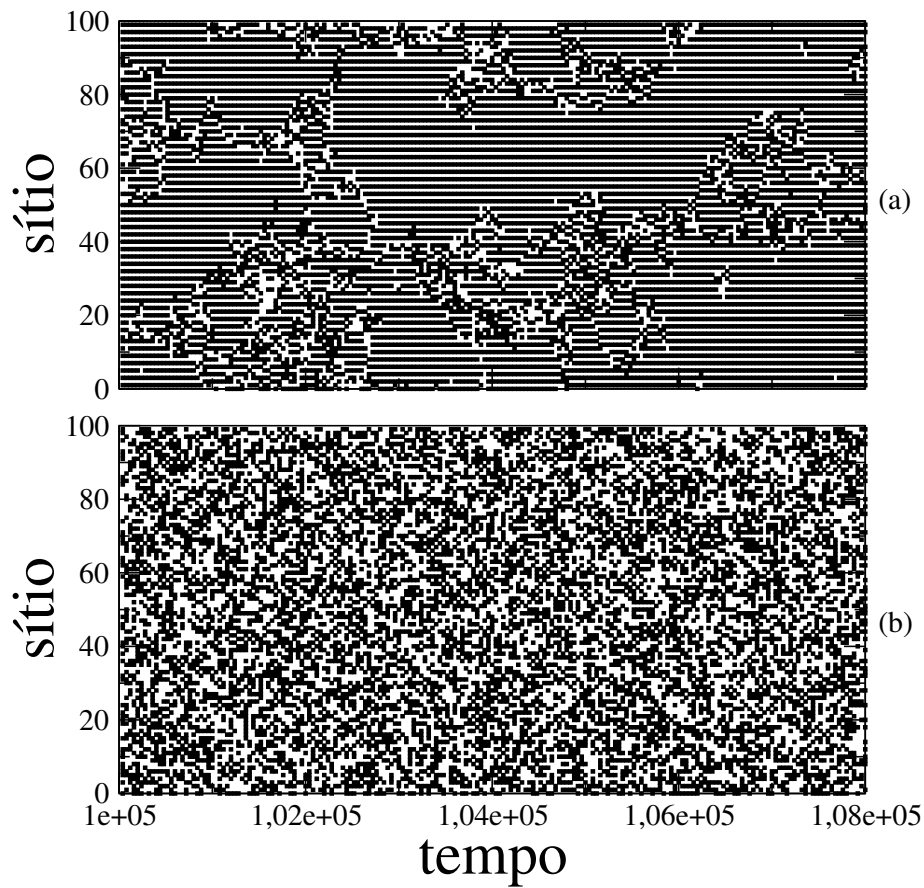


Figura 3.7: Evolução temporal de uma rede de 100 mapas logísticos acoplados localmente,  $\epsilon = 0, 1$ , (a)  $\mu = 3,925$ , (b)  $\mu = 4,0$ , inicializados com condições iniciais aleatórias, representados a cada 40 tempos. Se  $x$  é maior que  $p$  (ponto fixo instável) um carácter preto é pintado, do contrário é branco.

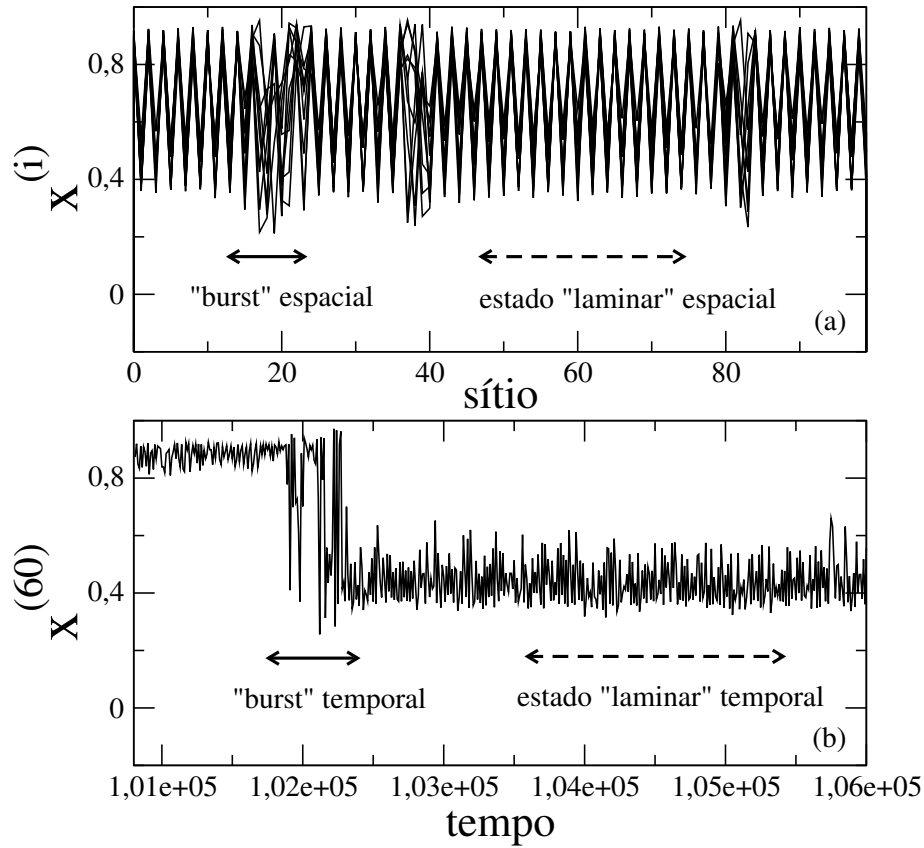


Figura 3.8: (a) Variável de estado versus sítio (espaço): superposição de 10 tempos registrados a cada 2 tempos, a partir do instante 104500. (b) Evolução temporal do sítio  $i = 60$  registrada a cada 10 tempos a partir do instante 100800. Aqui  $\epsilon = 0,1$  e  $\mu = 3,925$ .

# Capítulo 4

## Correlação espacial

Neste capítulo empregamos a função de correlação espacial para tentar caracterizar a distribuição espacial das variáveis de estado de uma RMA em algumas situações. No caso local usamos esta função no estudo espacial dos defeitos. Para o caso não-local, onde a interação entre os sítios decai segundo uma lei de potência, introduzimos esta função como diagnóstico para caracterizar espacialmente a transição para a sincronização completa de amplitudes.

### 4.1 Correlação temporal

Historicamente a função de correlação surgiu dentro da mecânica estatística, precisamente no estudo das flutuações como uma função do tempo (teoria do movimento browniano). Dentro do contexto das flutuações ela é bastante importante pois possibilita relacionar propriedades macroscópicas tais como resistência viscosa de um fluido e resistência elétrica de um condutor com as propriedades microscópicas do sistema em equilíbrio [40].

Considere uma variável  $a(t)$  que flutua no tempo em torno do seu valor médio,

$$\langle a \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt, \quad (4.1)$$

onde  $T$  é um intervalo de tempo grande comparado ao período no qual as flutuações ocorrem. De forma geral, a variável  $a(t)$  possui, nos instantes  $t$  e  $t + \tau$ , valores diferentes, ou seja,  $a(t) \neq a(t + \tau)$ . No entanto, quando  $\tau$  é muito pequeno comparado

ao período no qual a flutuação ocorre, teremos  $a(t) \approx a(t + \tau)$ . Por outro lado, à medida que  $\tau$  aumenta, o desvio de  $a(t + \tau)$  em relação a  $a(t)$  cresce. O grau com que dois valores da variável  $A(t) \equiv a(t) - \langle a(t) \rangle$  estão relacionados dentro de um certo intervalo  $\tau$  é definido como

$$K(\tau) \equiv \langle A(t)A(t + \tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T A(t)A(t + \tau)dt, \quad (4.2)$$

$K(\tau)$  é comumente designada de *função de (auto)correlação* da quantidade  $a(t)$  (ou função memória). O tempo  $t$  pode ser tanto contínuo como discreto. Neste último caso, a integral anterior deve ser substituída por uma somatória.

A função de correlação  $K(\tau)$  está conectada à sua função complementar, o espectro de potência  $P(\omega)$  da variável  $A(t)$  [31], através da expressão

$$P(\omega) = \left| \frac{1}{T} \int_0^T d\tau A(t) e^{i\omega\tau} \right|^2 = \frac{1}{2T} \int_0^T du e^{i\omega u} K(u). \quad (4.3)$$

Estas funções foram importadas da mecânica estatística, adequadas e extensivamente usadas no estudo quantitativo de caos temporal em sistemas dinâmicos, especialmente os de baixa dimensionalidade. Ultimamente este enfoque se estendeu também aos sistemas multidimensionais.

Caos é tradicionalmente quantificado a partir do expoente de Lyapunov. Porém, para sistemas de elevada dimensão a obtenção do espectro de Lyapunov para uma posterior análise é sempre uma tarefa computacionalmente árdua. Por outro lado, a função de correlação e o espectro de potência minimizam esta tarefa de caracterização pois representam “indicadores” qualitativos de comportamento caótico e são computacionalmente mais imediatos. No caso de séries temporais (sinal) com multiplicidade de frequências, o espectro de potência  $P(\omega)$  consiste em um conjunto discreto de linhas, onde cada linha corresponde a uma das frequências existentes na série, enquanto uma série caótica (a qual é completamente aperiódica) é indicada por um espectro de potências com banda larga. No caso da função de correlação, a mesma permanece constante ou oscila num movimento periódico, porém decai muito rapidamente se a variável observada (sinal) é descorrelacionada no tempo, o que seria *a priori* um caso típico de comportamento caótico [31, 41]. No caso de comportamento caótico acredita-se que o decaimento da função de correlação seja tipicamente exponencial [42], ou ainda com cauda exponencial. Tal comportamento é observado em certos mapas, como os mapas do deslocamento de Bernoulli [42] e padrão [44] em certos fluxos, como o sistema de Lorenz [43]. Porém existem casos nos quais o comportamento da função de correlação é singular, como ocorre no mapa

da tenda [31, 42]. Estes geralmente são chamados na literatura de processos delta-correlacionados. Casos de comportamento tipo lei de potência também existem [45], sendo que este tipo de comportamento surge também no presente trabalho na versão espacial da função de correlação 4.2.

## 4.2 A correlação espacial $e(l)$

No presente trabalho estamos particularmente interessados na investigação da *função de correlação espacial* (FCE) como quantificador da aleatoriedade espacial das variáveis de estado da rede. A FCE  $e(l)$  é uma extensão da definição anterior que leva em consideração um avanço, não temporal mas sim espacial,  $l$ , para uma rede unidimensional de  $N$  mapas logísticos acoplados, sendo periódicas as condições de contorno. Dado o perfil  $\mathbf{x}_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N)})$  da rede em certo instante de tempo  $n$ , a FCE devidamente normalizada para este sistema é expressa na seguinte forma:

$$e_n(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{x}_n^{(i)} \hat{x}_n^{(i+l)}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{x}_n^{(i)})^2}, \quad (4.4)$$

onde  $N$  é o tamanho do sistema e  $\hat{x}_n^{(i)}$  é o desvio da variável dinâmica do sítio  $i$ , no tempo  $n$ , em relação à média espacial  $\langle x \rangle_n$

$$\hat{x}_n^{(i)} = x_n^{(i)} - \langle x \rangle_n, \quad (4.5)$$

sendo a média definida como:

$$\langle x \rangle_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_n^{(i)}. \quad (4.6)$$

O índice  $n$  na função de correlação espacial indica, portanto, que a mesma é avaliada para um dado instante de tempo. *Todas as funções de correlação apresentadas neste trabalho representam, sem qualquer exceção, o módulo de  $e(l)$ .*

### 4.3 Algumas conclusões qualitativas sobre $e(l)$

A figura 4.1 exibe na coluna da esquerda as diferentes evoluções temporais para uma rede de 2001 sítios acoplados localmente (no momento não queremos investigar efeitos do acoplamento de longo alcance). Já na coluna da direita representamos a correlação espacial correspondente. As três evoluções da rede foram realizadas com  $\epsilon = 0, 1$  (interação fraca) e com a mesma condição inicial aleatória. A evolução na parte superior da coluna da esquerda ( $\mu = 4,00$ ) exibe um estado de caos espaço-temporal. Neste caso, a função de correlação espacial, correspondente possui um decréscimo bastante acentuado já nos primeiros sítios, ou seja, ela é fortemente concentrada na origem. Os sítios, portanto, estão espacialmente decorrelacionados. Ainda na coluna da esquerda, na figura intermediária ( $\mu = 3,925$ ), a rede exibe um estado de intermitência espaço-temporal estável. Nesta situação, o aparecimento de regiões espacialmente uniformes (regiões “laminares”) contribui para aumentar a correlação espacial entre os sítios, como indica a função de correlação espacial correspondente.

Quando o parâmetro de não-linearidade adquire o valor 3,910 (figura inferior) a rede exibe em sua evolução um único defeito que a divide em duas regiões, cada qual com extensão aproximada de  $N/2$  sítios (o transiente necessário para se atingir este atrator característico é de  $2,0 \times 10^6$ ). Neste caso o primeiro mínimo da função de correlação atinge seu valor máximo. No caso da figura 4.2, construída com  $\epsilon = 0, 4$ , verificamos um comportamento oscilatório no decréscimo da correlação e do mesmo modo que no caso  $\epsilon = 0, 1$  a função de correlação exibe ainda valores grandes mesmo para elevados valores da distância  $l$ , este fato é uma decorrência do aumento da incidência de regiões espacialmente uniformes.

Vamos retornar à figura 4.1 inferior e analisá-la mais cuidadosamente. É interessante observar nesta figura que dois sítios posicionados em  $r_1$  e  $r_2$  são independentes (decorrelacionados) quando  $|r_2 - r_1| \approx N/2$ . Isto nos leva, como é de praxe no estudo de correlações, a definir uma distância característica de correlação espacial, a qual designaremos de  $l_c$ . De um ponto de vista puramente intuitivo o leitor pode imaginar esta distância como sendo uma estimativa grosseira do *tamanho do maior pedaço de estrutura espacialmente correlacionada*. Uma escolha razoável, pelo menos de forma preliminar seria definir  $l_c$  como o primeiro mínimo da função de correlação  $e(l)$ . Neste caso, no nosso contexto, uma situação onde existisse um único defeito teríamos  $l_c \approx N/2$  e uma situação de completa irregularidade espacial, caso em que o número de defeitos é da ordem do tamanho da própria rede, teríamos  $l_c \approx 1$ .

Determinamos, para 250 condições iniciais diferentes, o número de defeitos  $N_d$  bem como o primeiro mínimo da função de correlação espacial  $l_c$  em função do tempo  $n$  para uma rede com  $N = 2001$ , sendo  $\mu = 3,845$ . Constatamos que  $\langle N_d \rangle$  decai com o tempo  $n$  segundo uma lei de potência. Este resultado numérico, expresso na forma

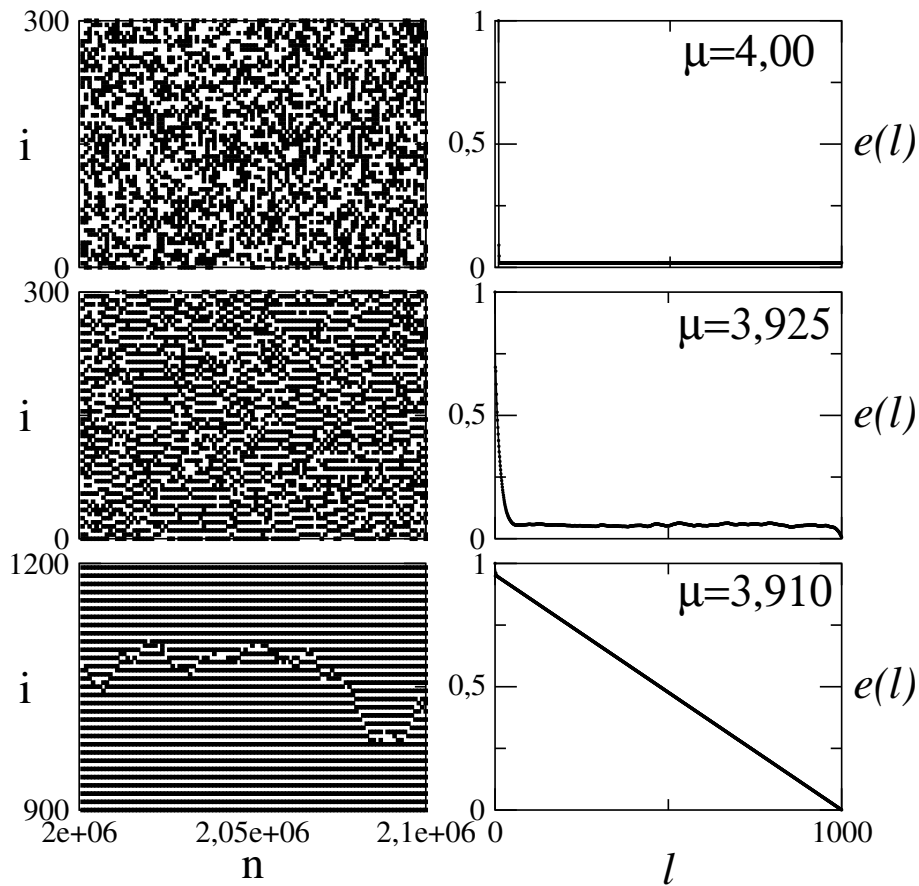


Figura 4.1: Coluna da esquerda: evolução temporal de uma rede local,  $N = 2001$ , mostrando  $10^5$  tempos graficados a cada 100 tempos (se  $x$  é maior que o ponto fixo instável um caracter preto é pintado, do contrário é branco). Coluna da direita: correlação espacial corespondente (média sobre 1000 tempos). Aqui  $\epsilon = 0, 1$ .

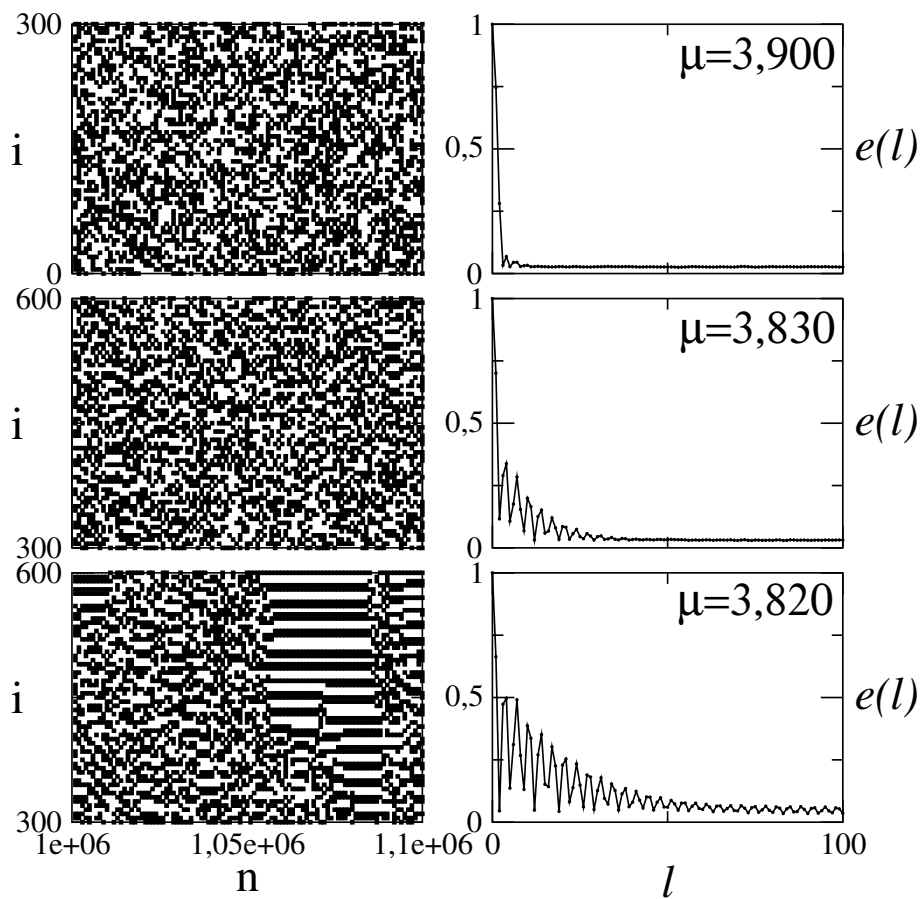


Figura 4.2: Coluna da esquerda: evolução temporal de uma rede local,  $N = 2001$ . Coluna da direita: correlação espacial correspondente (média sobre 1000 tempos). Aqui  $\epsilon = 0,4$ .



recíproca, está representado na figura 4.3. O ajuste (utilizando todos os pontos) fornece

$$\frac{1}{\langle N_d \rangle} = A n^\lambda, \quad (4.7)$$

onde  $A \simeq 0,000231$  e  $\lambda \simeq 0,4705 \pm 0,000069$ . O coeficiente de correlação estatística dos dados com uma lei de potência é dado por 0,998923. Esta lei para o decréscimo dos defeitos também aparece no caso de  $N$  par. Para tanto basta observar a figura 3.6a na qual o decréscimo é dado por  $N_d = 25066 n^{-0,45}$ . Por outro lado, constatamos que  $\langle l_c \rangle$  cresce com o tempo segundo uma lei de potência, como indica a figura 4.3. O ajuste (utilizando também todos os pontos) fornece

$$\langle l_c \rangle = B n^\delta, \quad (4.8)$$

onde  $B \simeq 0,3642$  e  $\delta \simeq 0,4896 \pm 0,00014$ . O coeficiente de correlação estatística dos dados com uma lei de potência é dado por 0,995685. Portanto, em média, tanto  $N_d$  como  $l_c$  são funções cujo comportamento independente da escala de tempo utilizada, ou seja,  $F(an) = \Gamma(a) F(n)$ , onde  $a$  é uma constante qualquer. Vemos, portanto, que em média existe uma relação simples entre o número de defeitos e o comprimento de correlação quando dividimos 4.8 por 4.7, ou seja

$$\langle l_c \rangle = \frac{B}{A} \frac{n^{\delta-\lambda}}{\langle N_d \rangle}. \quad (4.9)$$

Se igualarmos de forma aproximada  $\delta$  e  $\lambda$ , obtemos uma relação ainda bem mais simples

$$\langle l_c \rangle \approx \frac{1577}{\langle N_d \rangle}. \quad (4.10)$$

Esta expressão é válida também para outros valores do parâmetro  $\mu$  desde que o mesmo esteja dentro do domínio de existência dos defeitos, ou seja,  $3,8 < \mu < 3,92$ . No caso de  $\langle N_d \rangle = 1$ , teríamos, por esta expressão, o valor  $\langle l_c \rangle = 1575$ . A discrepância entre este resultado e o valor fisicamente esperado  $N/2$ , como indica a figura 4.1, pode ser explicada com base no pequeno número de condições iniciais utilizadas bem como na definição numérica do primeiro mínimo da correlação espacial: o registro do mínimo é efetuado toda vez que  $e(l) < 0,1$ . Estes dois

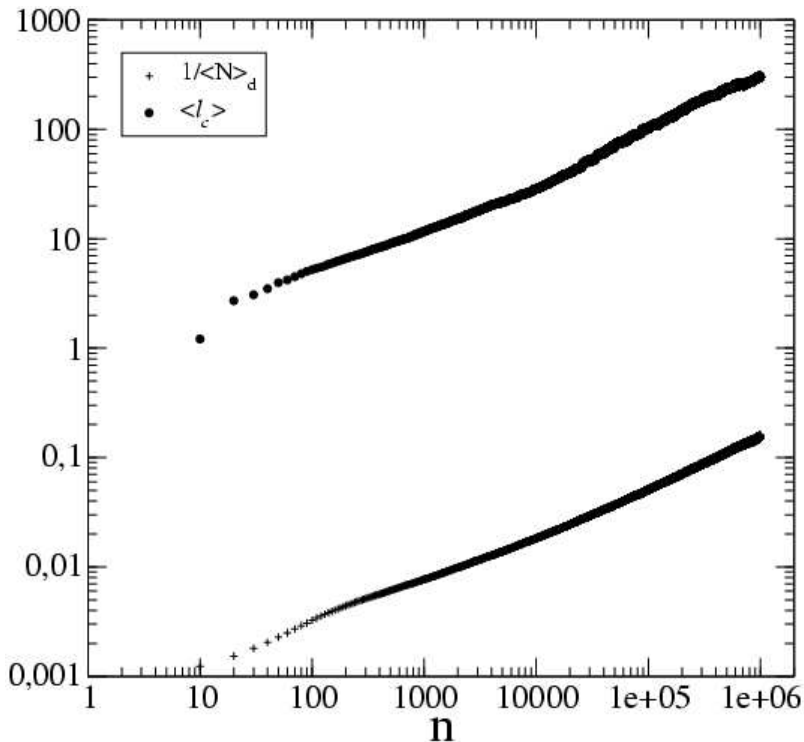


Figura 4.3: Comportamento do recíproco do número de defeitos e comprimento de correlação em função do tempo  $n$  (marcados a cada 10 tempos) para  $N = 2001$ ,  $\mu = 3,845$  e  $\epsilon = 0,4$ . Cada curva foi obtida a partir de uma média sobre 250 condições iniciais diferentes.

fatos contribuem para mascarar valores mais precisos das constantes  $A$  e  $B$  vistas anteriormente.

## 4.4 Sincronização de amplitudes

Acoplamentos não-locais em sistemas espacialmente estendidos permitem que a interação se estenda a todos os indivíduos do sistema, favorecendo a ocorrência de um fenômeno coletivo bastante estudado atualmente, a *sincronização*. No amplo estudo sobre este tema a rede não-local 2.14 já representa, por si só, um grande laboratório. Em uma RMA, a sincronização parcial se evidencia pela existência de domínios (ou platôs) possuindo sítios com o mesmo valor da variável de estado em um dado instante de tempo  $n$ , ou seja,  $x_n^{(i)} = x_n^{(i+1)} = x_n^{(i+2)} = \dots = x_n^{(i+k)}$ , sendo  $k \in \mathbf{Z}$  a extensão do domínio. Do ponto de vista experimental, esta igualdade deve ser observada a menos de uma certa tolerância. Se  $i = 1$  e  $k = N - 1$ , então toda a rede estará sincronizada em amplitude, o que é conhecido na literatura como

*sincronização completa de amplitudes.* Nesta situação, o perfil da rede é uniforme. Se a sincronização persiste enquanto o tempo evolui, toda a dinâmica da rede, que está contida em um espaço de fase de dimensão  $N$ , passa a residir em um subespaço de dimensão 1 (também conhecido como variedade de sincronização  $\mathcal{M}$ ), portanto, de dimensão notoriamente inferior. Geometricamente, a variedade de sincronização  $\mathcal{M}$  representa a diagonal de um hipercubo no  $\mathbb{R}^N$  (Fig. 4.4). Evoluindo neste subespaço, a rede não apresenta qualquer tipo de irregularidade espacial. Entretanto, isto não impede que a rede possa apresentar comportamento caótico.

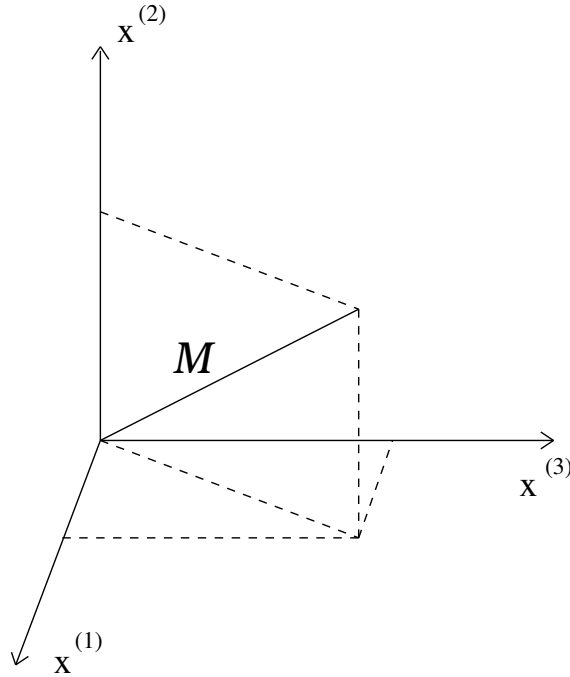


Figura 4.4: Variedade de sincronização para uma rede com  $N = 3$ .

Esta situação, na qual observamos o caso extremo de regularidade espacial associado à presença de caos temporal, pode ser evidenciada analiticamente da seguinte maneira: quando a rede está completamente sincronizada o valor da variável de estado é comum, de forma que,

$$x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = x_n^{(3)} = \dots = x_n^{(N)} = s_n, \quad (4.11)$$

e como este estado é de fato uma possível solução para uma rede com acoplamento de longo alcance, podemos então substituí-lo na equação 2.14, o que nos leva imediatamente a

$$s_{n+1} = (1 - \epsilon)f(s_n) + \frac{\epsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{2f(s_n)}{j^\alpha} = f(s_n), \quad (4.12)$$

se incluirmos ainda que  $\mu = 4,0$  então  $s_n$  evolui caoticamente à medida que  $n$  varia. Este fato é conhecido na literatura como *sincronização de caos*. Por outro lado, se  $s_n$  evolui de forma periódica no tempo temos a *sincronização periódica* [8]. O resultado anterior mostra também que, independente do valor de  $\mu$ , a variedade de sincronização  $\mathcal{M}$  é invariante sob a aplicação do mapa  $f(s_n)$ . Qualquer condição inicial  $x_0^{(i)}$  para a rede que pertença a  $\mathcal{M}$  gerará padrões espaço-temporais  $x_n^{(i)}$  que residem em  $\mathcal{M}$  para todos os  $n$  [15].

Qualitativamente, e de forma geral, o processo de formação e aumento no número de domínios sincronizados é observado quando aumentamos a interação no interior da RMA, o que é obtido através do aumento do alcance da interação (decréscimo de  $\alpha$ ) juntamente com o aumento no próprio acoplamento  $\epsilon$ . Neste processo, o número de graus de liberdade do sistema é reduzido drasticamente, podendo em certas situações culminar na completa sincronização. Quando e como isso ocorre? Alguns diagnósticos de sincronização de amplitudes para a rede 2.14 tem fornecido algumas respostas [13, 15]. O primeiro deles é a dispersão das amplitudes do perfil da rede, em certo instante de tempo  $n$ , em relação a sua média espacial  $\langle x \rangle_n = 1/N \sum_{i=1}^N x_n^{(i)}$

$$(\delta x)_n = \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_n^{(i)} - \langle x \rangle_n)^2 \right]^{1/2}. \quad (4.13)$$

Neste caso, o estado sincronizado é identificado quando a dispersão em torno da média espacial é nula [15].

O segundo diagnóstico de sincronização de amplitudes para a rede 2.14 é proporcionado pelo parâmetro de ordem  $z_n$ , introduzido inicialmente por Kuramoto [46, 13]

$$z_n = \mathcal{R}_n \exp(2\pi i \phi_n) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(2\pi i x_n^{(j)}). \quad (4.14)$$

As quantidades  $\mathcal{R}_n$  e  $\phi_n$  representam, respectivamente, a amplitude e o ângulo de um vetor de fase em um instante de tempo  $n$  de uma rede unidimensional com condições de contorno periódicas. Um estado completamente sincronizado implica

que a amplitude  $\mathcal{R}_n$  é igual a unidade. Por outro lado, em um estado de completa falta de sincronização, as variáveis de estado da rede estarão tão decorrelacionadas que as mesmas poderão ser consideradas como variáveis aleatórias e neste caso,  $\mathcal{R}_n = 0$ . A figura 4.5 exibe o parâmetro de ordem  $\bar{\mathcal{R}}$  promediado sobre um longo intervalo de tempo para uma rede com  $N = 2001$  sítios em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\epsilon$ . Nesta figura é possível delinear uma fronteira onde a rede sempre alcança um estado de completa sincronização ( $\bar{\mathcal{R}} = 1$ ). A figura 4.6, designada de “espaço de parâmetros”, representa esta fronteira de transição, porém, obtida de forma analítica [16].

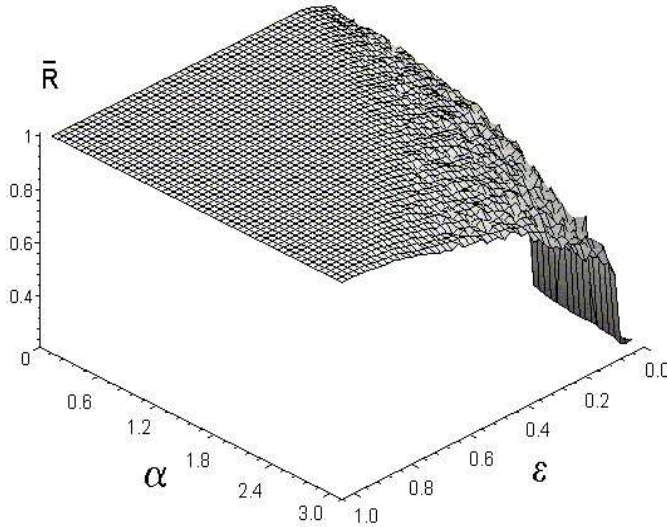


Figura 4.5: Média temporal do parâmetro de ordem,  $\bar{\mathcal{R}}$ , versus alcance do acoplamento e acoplamento para uma rede com  $N = 2001$  e  $\mu = 4, 0$  (fonte: ref. [17]).

Trabalhos recentes [13] mostraram que a sincronização completa no regime caótico ( $\mu = 4, 0$ ), ocorre na forma de uma transição via intermitência, e esta transição é observada quando a intensidade da interação entre os sítios da rede atinge um valor crítico. Para explicar o que ocorre nesta transição vamos retornar à figura 4.6. Esta é constituída de duas regiões: uma região à direita da curva  $\epsilon_c(\alpha)$ , conhecida como região de órbitas não-sincronizadas (RNS), onde  $0 < \bar{\mathcal{R}} < 1$ , e uma região à esquerda da curva, conhecida como região de órbitas completamente sincronizadas (RCS), onde  $\bar{\mathcal{R}} = 1$ . Se fixarmos um valor de  $\epsilon$ , por exemplo  $\epsilon = 1, 0$ , e nos aproximarmos do ponto  $\alpha_c \cong 0, 660$  pela direita, verificaremos que a evolução temporal da rede nunca apresenta sincronização completa, ou seja, a órbita no  $\mathbb{R}^N$  nunca atinge a variedade de sincronização, entretanto ela se aproxima da mesma de forma intermitente. Esta intermitência pode ser constatada quando monitoramos a distância ortogonal  $D_n$  entre um ponto  $(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(N)})$  da órbita, no espaço de fase  $N$  dimensional da rede, e a variedade de sincronização à medida que o tempo evolui [13]:

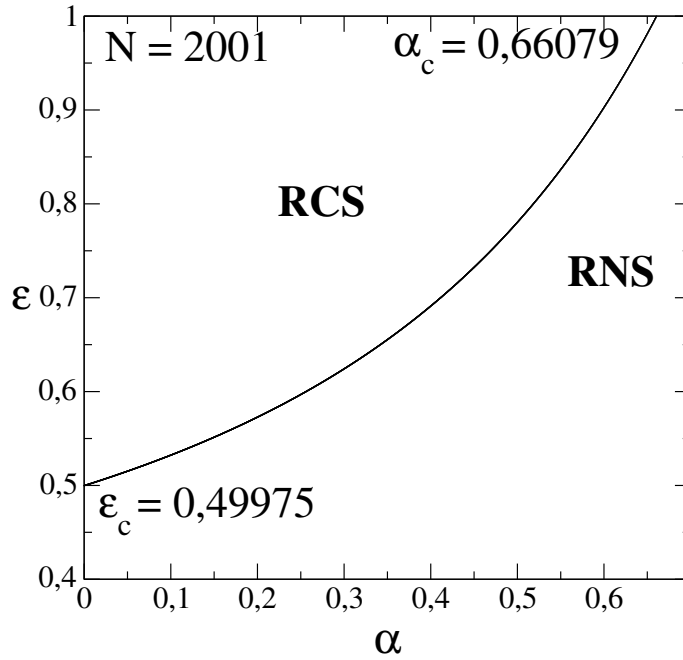


Figura 4.6: Diagrama de parâmetros para uma rede de 2001 sítios exibindo a fronteira entre a região onde a rede nunca sincroniza completamente e região onde a rede sempre sofre sincronização completa após um certo transiente.

$$D_n^2 = \sum_{j=1}^N (x_n^{(j)})^2 - \left( \frac{\sum_{j=1}^N x_n^{(j)}}{\sqrt{N}} \right)^2. \quad (4.15)$$

O monitoramento de  $D_n$  é exibido na figura 4.7, a título de ilustração, para dois valores diferentes de  $\alpha$ . Nesta figura podemos observar que o afastamento a variedade é intermitente e além disso, os ápices tornam-se menores quando  $\alpha \rightarrow \alpha_c$ . Na dinâmica espaço-temporal esta forma de intermitência se reflete em perfis ora espacialmente muito suaves ora espacialmente pouco suaves ou até mesmo, em intermitência espaço-temporal. À esquerda do ponto  $\alpha_c \cong 0,660$ , já na região RCS, a sincronização completa sempre ocorre após um certo transiente.

Resultados analíticos [16] também fornecem a dependência da curva que separa as regiões RNS e RCS com o tamanho  $N$  da rede. A tabela 4.1 mostra, para o caso de  $\epsilon = 1,0$ , alguns valores do parâmetro  $\alpha$  no qual uma rede de tamanho  $N$  muda do regime RNS para RCS. Estes valores serão usados ao longo deste trabalho.

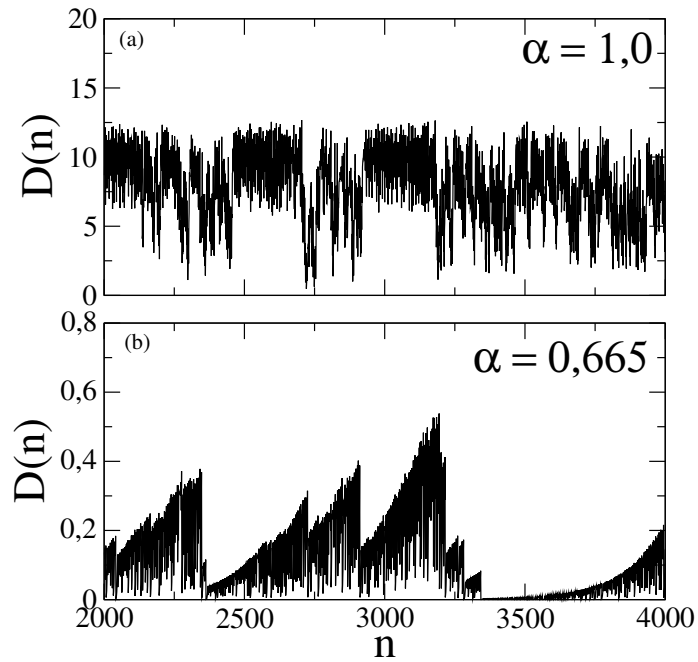


Figura 4.7: Distância da órbita até a variedade de sincronização enquanto o tempo evolui,  $N = 2001$  e  $\epsilon = 1,0$ . Observe que os afastamentos exibidos na figura (a) são relativamente muito maiores que os da figura (b).

$N$	$\alpha_c$	$\epsilon$
201	0,7355	1,0
1001	0,6742	1,0
2001	0,6607	1,0

Tabela 4.1: Valores críticos do parâmetro  $\alpha$  para alguns tamanhos de rede.

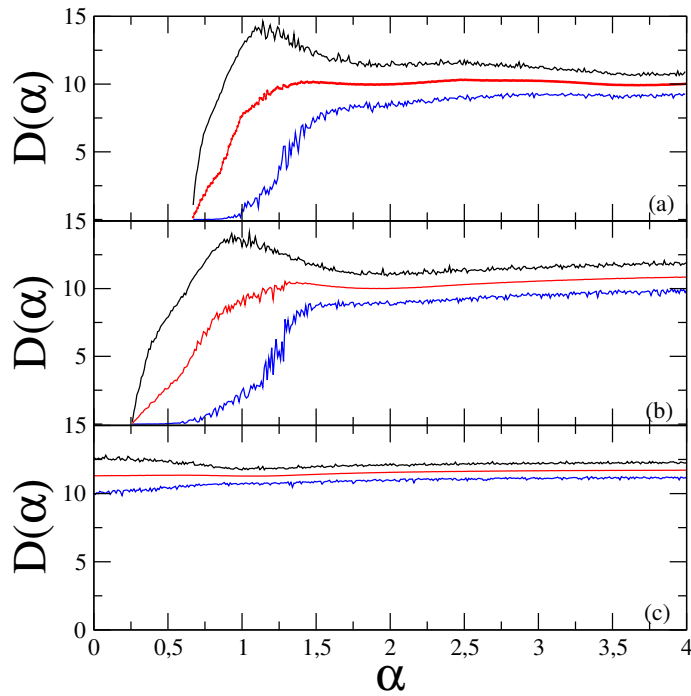


Figura 4.8: Distâncias características até a variedade de sincronização em função do parâmetro  $\alpha$  para alguns valores de  $\epsilon$  sendo  $N = 2001$  e  $\mu = 4, 0$ . (a)  $\epsilon = 1, 0$ ,  $\alpha_c = 0, 6608$ , (b)  $\epsilon = 0, 6$ ,  $\alpha_c = 0, 2562$ , (c)  $\epsilon = 0, 1$ . As cores preta, azul e vermelha expressam, respectivamente, as distâncias máximas, mínima e média. Esta última foi avaliada sobre 2000 tempos sendo 2000 o transiente.

## 4.5 Sincronização caótica e correlação espacial

A figura 4.8 mostra, para diferentes valores de  $\epsilon$ , as distâncias máxima (preto), mínima (azul) e média (vermelho) de uma órbita caótica ( $\mu = 4, 0$ ) no  $\mathbb{R}^N$  ( $N = 2001$ ) até a variedade de sincronização, em função do parâmetro  $\alpha$ . As distâncias foram avaliadas sobre 2000 tempos além do transiente. Para os dois primeiros valores de  $\epsilon$ , temos duas regiões bem distintas, grandes e pequenos valores de  $\alpha$ . No caso de  $\epsilon = 1, 0$  para  $\alpha > 1, 5$  as distâncias permanecem constantes quando  $\alpha$  varia, enquanto para  $\alpha < 1, 5$  ambas as distâncias convergem para zero se  $\alpha \rightarrow \alpha_c$ . A presença destas duas regiões também ocorre quando escolhemos um valor inferior do acoplamento  $\epsilon$  (figura 4.8b), embora neste caso a mudança de comportamento ocorra em um valor inferior do parâmetro  $\alpha$ . Já no caso de  $\epsilon = 0, 1$  esta mudança de comportamento nunca ocorre.

A figura 4.9 exhibe o comportamento do perfil espacial da rede nestas duas regiões para o caso  $\epsilon = 1, 0$ . Para  $\alpha > 1, 6$  os perfis da rede nos instantes em que a órbita está longe e perto da variedade de sincronização são de forma geral



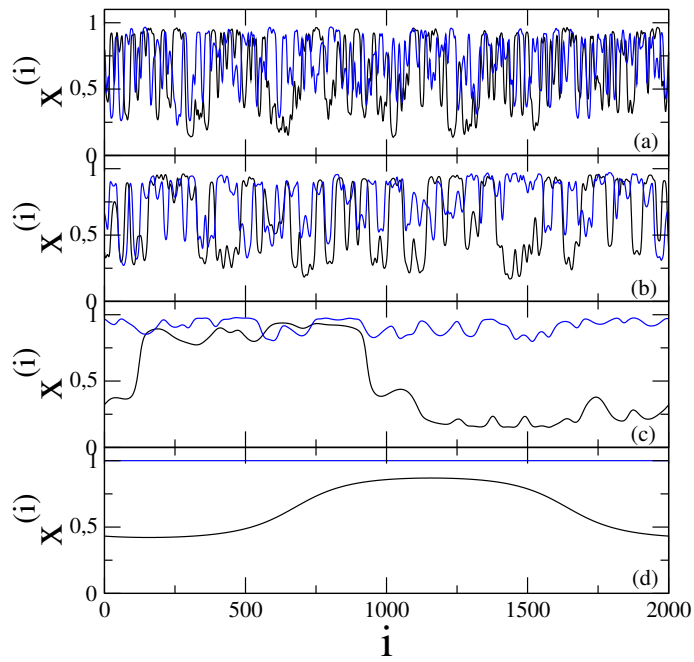


Figura 4.9: Perfis correspondentes ao afastamento máximo (preto) e mínimo (azul) até a variedade de sincronização,  $N = 2001$ ,  $\mu = 4,0$ ,  $\epsilon = 1,0$ . (a)  $\alpha = 1,8$ , (b)  $\alpha = 1,6$ , (c)  $\alpha = 1,2$ , (d)  $\alpha = 0,8$ .

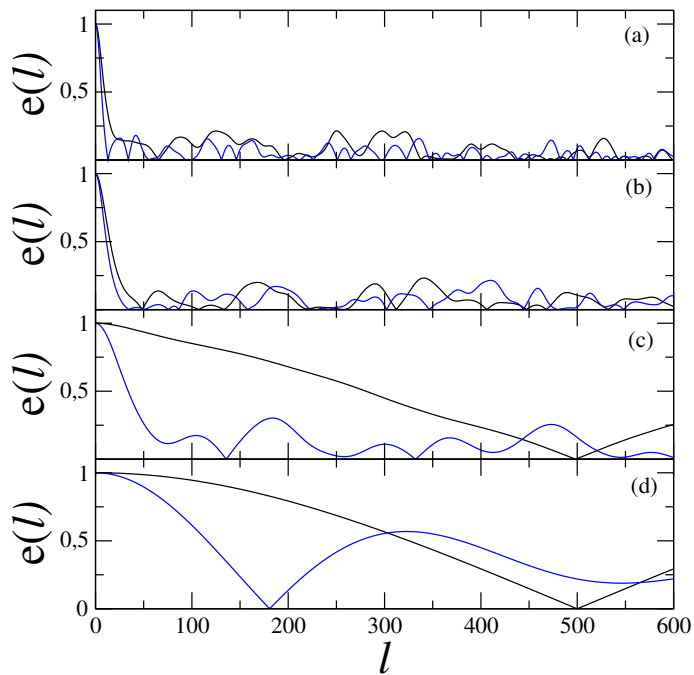


Figura 4.10: Correlação espacial  $e(l)$  versus  $l$ ,  $N = 2001$ ,  $\mu = 4,0$ ,  $\epsilon = 1,0$ . (a)  $\alpha = 1,8$ , (b)  $\alpha = 1,6$ , (c)  $\alpha = 1,2$ , (d)  $\alpha = 0,8$ .

bastante irregulares (fig.4.9a), e qualitativamente semelhantes. Quando  $\alpha$  decresce abaixo de  $\alpha \cong 1,6$ , estes perfis passam a ser notoriamente distintos. No caso da fig.4.9c podemos identificar, ainda, dois platôs (perfil em preto) que, dentro de uma definida tolerância, podem ser considerados como aglomerados sincronizados. É interessante observar também nesta figura que embora a amplitude  $\Delta = |x_{max} - x_{min}|$  do perfil correspondente ao afastamento mínimo à variedade seja menor, este perfil é bastante irregular exibindo assim grande flutuação em torno do seu valor médio. Esta irregularidade pode ser evidenciada fazendo-se a devida ampliação do perfil azul na escala vertical, o mesmo fato ocorrendo também na figura 4.9d. Este comportamento colabora para os resultados aparentemente contraditórios da FCE  $e(l)$ , a qual é bastante sensível a estas flutuações.

A figura 4.10 exhibe a FCE correspondente a cada um dos perfis da figura 4.9. No caso de  $\alpha = 1,8$  as correlações espaciais dos perfis correspondentes aos afastamentos máximo e mínimo são muito semelhantes e possuem decréscimos marcadamente acentuados já nos primeiros sítios. Para  $\alpha = 1,6; 1,2; 0,8$  as correlações correspondentes aos afastamentos máximo e mínimo são bem distintas e são extensas em  $l$ . Também, neste último caso, vemos que a extensão espacial onde ocorre o primeiro mínimo da correlação ( $l_{min}$ ) cresce com a diminuição de  $\alpha$ , tanto para os perfis em preto quanto para aqueles em azul. Este comportamento também se evidencia quando consideramos a correlação média. Em um regime de parâmetros onde a sincronização completa ocorre teríamos a máxima correlação possível entre os sítios, i.e.  $e(l) = 1$ , fato que decorre imediatamente das equações 4.4 e 4.11. Nesta situação em particular não existe  $l_{min}$ .

Muito embora a FCE calculada não possua um decaimento que possa ser descrito de forma geral por meio de uma função simples, como exponencial ou lei de potência, podemos ainda investigar o comportamento de  $l_{min}$ . O resultado deste estudo está expresso nas figuras 4.11 e 4.12. Na figura 4.11a (rede fortemente acoplada), exibimos o comportamento de  $l_{min}$  em função de  $\alpha$  para quatro valores de  $N$  sendo que cada curva foi construída promediando-se 10 condições iniciais. Notamos que, independente do número de sítios,  $l_{min}$  possui um crescimento bastante acentuado quando o alcance do acoplamento passa de local para global. No acoplamento local, as curvas saturam em um valor bastante baixo de  $l_{min}$ , o que revela um comportamento similar de redes de diferentes tamanhos, ao menos no que diz respeito à aleatoriedade espacial das variáveis de estado da rede. Esta saturação deixa de ocorrer abaixo de  $\alpha = 1,5$ , quando então o acoplamento se aproxima do global rumo a sincronização ( $\alpha \rightarrow \alpha_c$ ). Neste regime há um crescimento, para cada  $\alpha$ , de  $l_{min}$  com o tamanho da rede na forma

$$l_{min}(N) = a(\alpha, \epsilon) + b(\alpha, \epsilon) N, \quad (4.16)$$

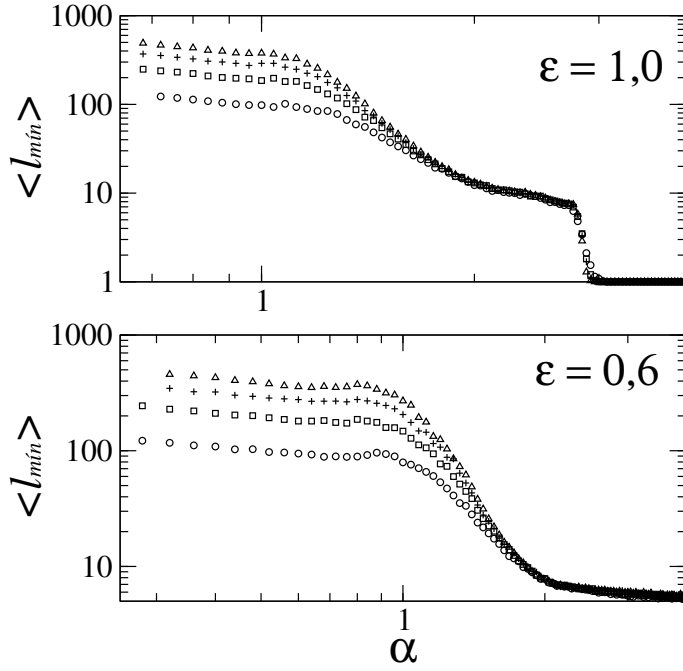


Figura 4.11: Valor de  $l$  para o primeiro mínimo da correlação espacial em função de  $\alpha$  para  $N = 501$  ( $\circ$ );  $1001$  ( $\square$ );  $1501$  ( $+$ );  $2001$  ( $\triangle$ ).

e em particular, no caso de  $\alpha = \epsilon = 1,0$ , como indica a figura 4.12, um ajuste fornece  $a = -4,1936$  e  $b = 0,1986$ .

Para  $\epsilon = 1,0$  e  $\alpha < 1,0$ , o coeficiente  $b$  deixa de ter uma sensível dependência com o parâmetro  $\alpha$ , o que facilita a obtenção de uma expressão envolvendo  $l_{min}$ ,  $\alpha$  e  $N$ . Próximo a sincronização o valor de  $l_{min}$  em função de  $\alpha$  e  $N$  é dado aproximadamente por:

$$l_{min}(N; \alpha < 1,0; \epsilon = 1,0) = (4,4931 + 0,18694 N) \alpha^{-0,6803}. \quad (4.17)$$

Esta equação foi obtida mediante um “ajuste na superfície” ( $l, N, \alpha$ ). No caso de uma rede sujeita a um acoplamento menor ( $\epsilon = 0,6$ ), como é o caso da figura 4.11b, existe também um comportamento similar em todos os aspectos ao caso de  $\epsilon = 1,0$ . Neste caso a expressão envolvendo  $l_{min}$ ,  $\alpha$  e  $N$  é dada por

$$l_{min}(N; \alpha < 0,75; \epsilon = 0,6) = (6,9539 + 0,1317.N) \alpha^{-0,5087}. \quad (4.18)$$

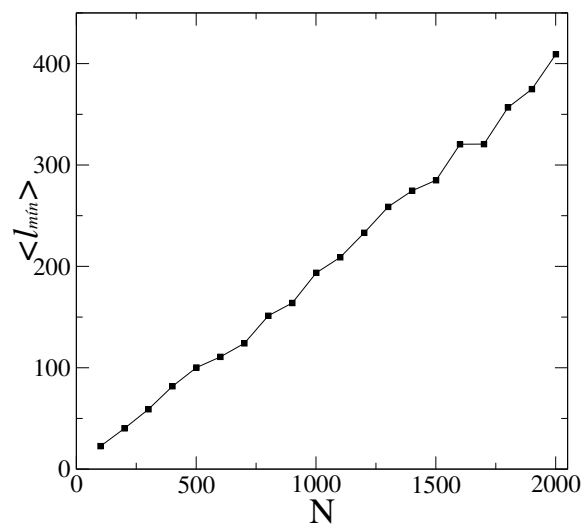


Figura 4.12: Valor de  $l$  para o primeiro mínimo da correlação espacial em função do número de sítios. Aqui  $\alpha = \epsilon = 1, 0$ .

# Capítulo 5

## Integral de Correlação

Nesta parte do trabalho vamos empregar a integral de correlação ou método de Grassberger e Procaccia (MGP) na determinação da dimensão de correlação de uma RMA com interação não-local, onde a interação entre os sítios decai segundo uma lei de potência. Empregaremos também uma variante do MGP que idealiza a determinação de uma quantidade intensiva que melhor caracterize a dinâmica da RMA. Esta variante é baseada em uma reconstrução puramente espacial.

### 5.1 A integral de correlação temporal

Como já mencionamos anteriormente, em um sistema com  $N$  graus de liberdade, o atrator é um subconjunto do espaço  $N$ -dimensional ( $\mathbb{R}^N$ ) para qual todas as trajetórias são atraídas de maneira assintótica. Uma vez que em um sistema dissipativo o volume no espaço de fase sofre gradual contração, o volume do atrator sempre será nulo. Um atrator estranho surge quando a contração de um elemento de volume não ocorre em todas as direções, ou seja, em certas direções as distâncias diminuem enquanto em outras elas aumentam. Ademais, a fim de manter-se confinado em uma certa região finita do espaço, o elemento de volume dobra-se sobre si mesmo adquirindo, após algum tempo, um aspecto folhado. A caracterização de um atrator estranho é feita geralmente por três métodos, determinação do espectro de Lyapunov, cálculo da dimensão fractal e estudo do decréscimo da correlação temporal. Neste capítulo, vamos determinar a dimensão fractal do atrator apresentado por uma RMA usando uma análise temporal e em seguida, faremos uma abordagem puramente espacial.

Grosseiramente falando, a dimensão  $D_A$  de um atrator é uma medida do número

de graus de liberdade que são relevantes à dinâmica de um sistema. A maioria dos trabalhos sobre dimensão aborda modelos bem estabelecidos como é o caso de mapas, e.g. os mapas logístico e de Hénon, ou sistemas expressos na forma de um fluxo de equações diferenciais ordinárias, e.g. os sistemas de Lorenz e Rössler. Para estes modelos  $D_A$  não ultrapassa 2. Porém para sistemas espacialmente estendidos como é o caso de uma equação diferencial parcial, uma RMA, ou mesmo qualquer fenômeno físico real em que a dinâmica envolva um número muito grande de graus de liberdade,  $D_A$  pode ser um número bem maior que 2. De fato, o espaço de fase de um fluido escoando em regime turbulento pode conter um atrator com dimensão extremamente grande, por exemplo  $D_A \approx 10^8$  [33]! A estimativa da dimensão  $D_A$  de um atrator depende da própria definição de dimensão utilizada: dimensão de Capacidade, Informação, Correlação [47, 31]. Algumas dimensões deste espectro são mais simples de serem calculadas do que outras e, embora forneçam resultados ligeiramente discrepantes, todas representam quantidades que independem das condições iniciais (invariantes da dinâmica) e, portanto, caracterizam bastante bem o atrator.

A medida da dimensão que vamos investigar neste trabalho foi introduzida por Grassberger e Procaccia [21, 22] e é obtida calculando-se inicialmente o grau de correlação entre os pontos distribuídos sobre o atrator. Seja  $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M\}$  a órbita sobre o atrator, constituída de  $M$  pontos gerados a partir de um mapeamento no  $\mathbb{R}^N$ , e  $d_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$  a distância euclidiana entre dois pontos  $P_i$  e  $P_j$  desta órbita. A integral de correlação  $C(r)$  é definida como a fração média dos pares de pontos que estão afastados de uma distância  $r$ ,

$$C(r) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^M \Theta(r - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|), \quad (5.1)$$

onde  $\Theta(u)$  ( $\Theta(u) = 0$  se  $u < 0$  e  $\Theta(u) = 1$  se  $u > 0$ ) é a função degrau de Heaviside. Portanto, o somatório representa *número de pares  $(i, j)$  cuja distância  $d_{ij}$  é menor que  $r$* . A integral de correlação baseia-se em uma idéia bastante simples: dois pontos  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_j$  com  $i \neq j$  são dinamicamente descorrelacionados. Por outro lado, como estes pontos estão sobre o atrator eles são geometricamente correlacionados, e  $C(r)$  é uma medida desta correlação. A figura 5.1 mostra, à título de ilustração, o atrator de Hénon, o qual é obtido através da iteração do mapa  $(x_{n+1}; y_{n+1}) = (1 - ax_n^2 + y_n; bx_n)$  para  $a = 1,4$  e  $b = 0,3$ . Mostramos também o raio de corte posicionado sobre a órbita no  $\mathbb{R}^2$ . A integral de correlação  $C(r)$ , como veremos, cresce de 0 até 1 quando  $r$  aumenta de 0 até o limite geométrico do atrator (fronteira do atrator).

Se  $C(r) \simeq r^{D_A}$  para  $r$  pequeno, então nós dizemos que  $D_A$  é a *dimensão de correlação do atrator*. A região dos valores de  $r$  onde esta lei de potência é satisfeita é comumente chamada na literatura de *região de escala*.

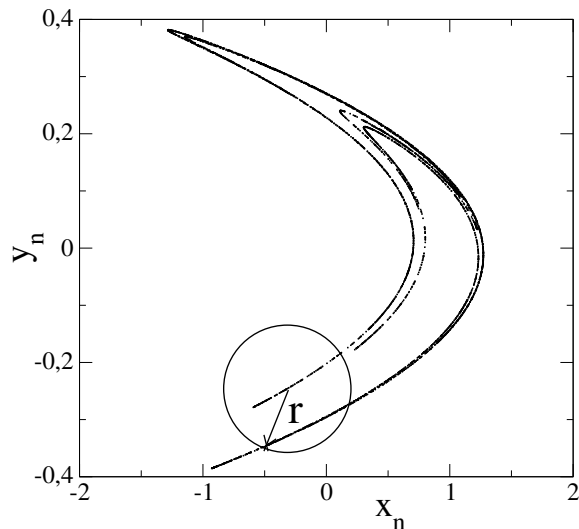


Figura 5.1: Atrator de Hénon.

## 5.2 A reconstrução

Embora o procedimento de cálculo da integral de correlação  $C(r)$  seja simples, em muitas situações o sistema em estudo é multidimensional, e.g. a RMA analisada neste trabalho, onde a dimensão do espaço é igual ao número de sítios. Neste caso, o cálculo computacional de  $C(r)$  torna-se impraticável quando precisamos calcular uma distância entre dois pontos em um espaço de dimensão 10000! Em muitos sistemas reais, como o escoamento de Taylor-Couette, nós nem mesmo temos acesso a todas as componentes do vetor  $\mathbf{x}$  (o qual em princípio possuiria todas as informações dinâmicas possíveis sobre o sistema investigado), quando muito, apenas algumas componentes. Isto como veremos a seguir já é, pelo menos em uma primeira abordagem, suficiente.

Em 1980 Packard [48] introduziu um método que permite a um observador ter acesso às informações dinâmicas de um sistema multidimensional sem ter que recorrer ao vetor  $\mathbf{x}$ . A idéia, conhecida na literatura como *método das coordenadas de retardo*, permite ao observador “reconstruir” a dinâmica, nem sempre acessível, do sistema dinâmico. Vamos admitir, que ao invés de termos o conjunto  $S$  anteriormente mencionado, tivéssemos um conjunto  $s$  proveniente da observação de uma única componente do vetor  $\mathbf{x}$ . Chamaremos esta componente simplesmente de  $x$ . Assim,  $s = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ . A idéia básica da reconstrução consiste em tomar os  $M$  pontos da série temporal anterior e formar vetores

$$\xi_n = (x_n, x_{n+\tau}, \dots, x_{n+(m-1)\tau}) \quad (5.2)$$

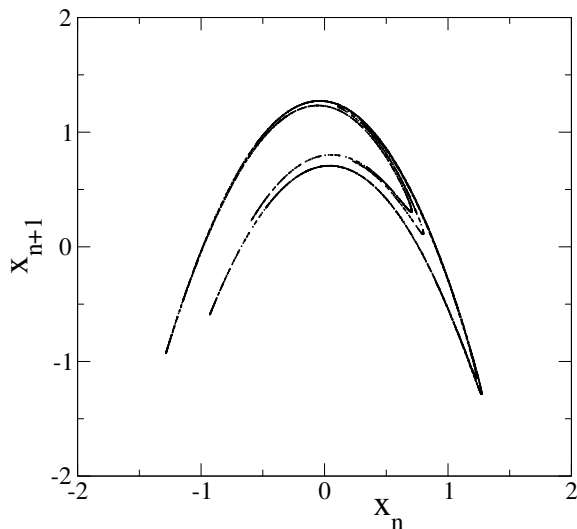


Figura 5.2: Reconstrução do atrator de Hénon representado na figura 5.1.

no  $\mathbb{R}^m$  (ou espaço- $\xi$ ), as quantidades  $m$  e  $\tau$  são chamadas respectivamente de *dimensão de imersão* e *tempo de retardo*. Uma vez representados no  $\mathbb{R}^m$  o conjunto de vetores  $\xi$  pode então ser analisado como se o mesmo formasse a órbita de um sistema dinâmico no  $\mathbb{R}^m$ . Esta mudança topológica é baseada na idéia de que as propriedades dinâmicas contidas na órbita do sistema no espaço  $\mathbb{R}^N$  (espaço de fase pleno) podem ser transmitidas para a órbita reconstruída no espaço  $\mathbb{R}^m$  e o grau com que estas informações são transmitidas depende de quão boa é a escolha da dimensão de imersão. A figura 5.2 mostra a reconstrução do atrator de Hénon exibido na figura 5.1 usando-se somente a coordenada  $x_n$ , é interessante observar a grande semelhança entre as geometrias nos diferentes espaços. A idéia bastante prática de Packard foi endossada sob o ponto de vista topológico pelos trabalhos de Mané-Takens [49, 47, 31] em 1981. Feita esta transição de coordenadas, a idéia de Grassberger (Eq. 5.2) pode então ser aplicada diretamente à órbita reconstruída. Ou seja,

$$C(r, m) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^M \Theta(r - \|\xi_i - \xi_j\|). \quad (5.3)$$

Neste momento surge uma questão cogitada a pouco: qual o valor de  $m$  a ser usado? Os argumentos de Mané e Takens sugerem que o valor da dimensão do espaço reconstruído  $m$  depende da dimensão  $D_A$  do atrator: se  $m$  é maior que  $2D_A$ , que é um valor fracionário, então o atrator no espaço reconstruído estará suavemente relacionado ao atrator visto no espaço de fase original, o qual não conhecemos. Na prática esta afirmação de Mané-Takens, expressa na forma de um teorema [47], sugere que, ao escolhermos um  $m$  suficientemente grande, as propriedades físicas de



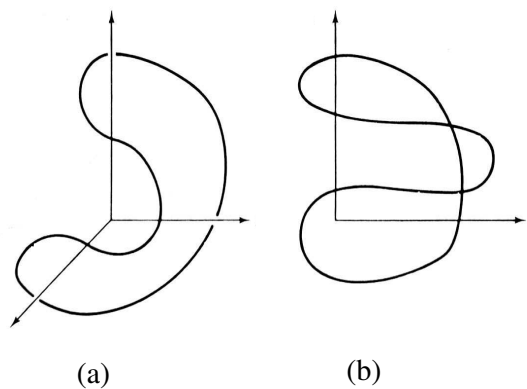


Figura 5.3: Reconstrução de um atrator unidimensional (ciclo limite) no (a)  $\mathbb{R}^3$  e no (b)  $\mathbb{R}^2$ . Fonte: Ott [30].

interesse do atrator inferidas do sistema de coordenadas de retardo serão as mesmas quando estas propriedades são inferidas do sistemas de coordenadas originais. Este procedimento para se escolher um  $m$  suficientemente grande é conhecido na literatura como *imersão* (*embedding*) e o valor adequado de  $m$ ,  $m_e$ , é a *dimensão de imersão*, o índice  $e$  significa *embedding*. Uma vez atingido  $m = m_e$ , então qualquer  $m \geq m_e$  também proporciona uma imersão [34].

Sem dúvida, um dos maiores resultados provenientes do teorema de Mané-Takens é o de indicar um espaço euclidiano  $\mathbb{R}^m$  grande o suficiente para que o conjunto de pontos cuja dimensão é  $D_A$  e que forma o atrator possa ser “desdobrado” (*unfolded*) adequadamente, retirando dos olhos do observador atento todas as falsas projeções, “ambiguidades visuais”, provenientes da observação do mesmo conjunto em um espaço de dimensão muito baixa. Esta explicação fica bem mais clara quando analisamos a figura 5.3. Se o atrator é unidimensional, por exemplo um ciclo limite, e é visto no  $\mathbb{R}^2$  (Fig. 5.3b), pode ocorrer que a curva unidimensional cruze ela própria em pontos isolados. Neste ponto de cruzamento existe, em princípio, uma ambiguidade sobre que pontos são realmente vizinhos de outros pontos. Esta ambiguidade, ou seja, a presença de *falsos vizinhos*, é completamente removida quando observamos o mesmo atrator unidimensional no  $\mathbb{R}^3$  (Fig. 5.3a), ou ainda no  $\mathbb{R}^4$ . Em resumo, e de forma geral, vemos que o teorema de Mané-Takens proporciona uma condição suficiente para que a projeção do atrator seja a melhor possível, eliminando todos os cruzamentos de órbitas com dimensão zero, dois, três, etc.

Uma questão surge após toda esta preleção sobre a reconstrução: se não conhecermos  $D_A$  como saberemos qual o valor conveniente de  $m$  a fim de se ter uma boa reconstrução? Se o atrator foi apropriadamente desdobrado após termos escolhido um  $m$  suficientemente grande, então qualquer propriedade associada ao atrator no

$\mathbb{R}^N$  que dependa da distância entre os pontos tornar-se-á independente do valor da dimensão de imersão, uma vez que tenhamos alcançado o valor necessário  $m = m_e$ . Aumentando  $m$  além do valor  $m = m_e$  não afetará o valor desta propriedade. Uma propriedade candidata bastante adequada aos nossos interesses é, sem dúvida, a própria integral de correlação aplicada à órbita reconstruída (Eq. 5.3). Deste modo, *a priori*, o valor apropriado de  $m$  pode ser alcançado avaliando-se a integral de correlação para  $m = 1, 2, 3, \dots$  até que a variação da mesma com  $m$  termine, ou seja, quando os valores avaliados para 5.3 saturarem. Nesta situação, basta observarmos a região dos pequenos valores de  $r$  onde  $C(r, m_e) \simeq r^D$ . Nesta região podemos então afirmar que  $D = D_A$ .

Em resumo, o processo de obtenção da *dimensão de correlação*  $D_A$  do atrator consiste em se determinar o valor da equação

$$D = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \ln C(r, m)}{\partial \ln r} \quad (5.4)$$

e verificar onde a mesma é constante. Naturalmente, o limite para  $m$  indica que o mesmo deve ser aumentado até o ponto de saturação.

### 5.3 A integral de correlação temporal para a RMA

Vamos agora empregar as idéias vistas anteriormente a uma RMA. Para este fim, considere um sítio arbitrário  $i$  da rede não-local 2.14 e seja  $s = \{x_1, \dots, x_M\}$  a série temporal constituída de  $M$  pontos, provenientes do monitoramento da evolução dinâmica do sítio em consideração. Podemos criar com esta série  $M$  pontos em um espaço de reconstrução  $m$ -dimensional (ou espaço  $\xi$ ), cada qual localizado pelo vetor

$$\xi_n = (x_n, x_{n+\tau}, \dots, x_{n+(m-1)\tau}), \quad (5.5)$$

onde o retardo temporal  $\tau$  será escolhido neste trabalho como sendo 1. Feito isto, a fração média dos pares de pontos deste espaço reconstruído que estejam afastados um do outro de  $r$  unidades é expresso pela equação 5.3.

Em virtude de trabalharmos com uma rede de mapas logísticos, cuja variável de estado está restrita ao intervalo  $[0, 1]$ , o espaço reconstruído  $m$ -dimensional constitui-se em um hipercubo de aresta 1. Este fato restringe a extensão geométrica do atrator ao tamanho da diagonal deste hipercubo, cujo valor é  $\sqrt{m}$ , de modo que se  $r$  varia de 0 até  $\sqrt{m}$  a integral de correlação varia de  $M^{-1}$  até 1. Se excluirmos do cômputo

de  $C(r)$  as comparações redundantes ( $ij$  e  $ji$ , porém considerando ainda os casos  $i = j$ ) então  $C(r)$  varia de  $2/(M + 1)$  até 1 quando  $r$  varia de 0 até  $\sqrt{m}$ . Esta última consideração é bastante interessante pois o tempo de computação de  $C(r)$  é reduzido aproximadamente pela metade. De forma geral, dado o conjunto dos  $M$  pontos que constituem a órbita em um espaço de reconstrução  $m$ -dimensional, o tempo de computação da integral de correlação, para um único valor de  $r$ , é dada por

$$t_c(M, m) = M^2(m\tau_a + \tau_b), \quad (5.6)$$

onde  $\tau_a \cong 1,4 \times 10^{-7}$  s e  $\tau_b \cong 5,6 \times 10^{-8}$  s são tempos gastos em determinadas operações algébricas básicas como soma, potenciação, radiciação, etc. (processador ATHLON 1900+). Estes dois tempos dependem somente do processador usado. Observe ainda que o tempo de computação cresce muito com o tamanho da série empregada na reconstrução.

Feita esta análise preliminar, vamos então considerar a série temporal  $s_n$  proveniente da observação do sítio central da rede 2.14, com tamanho  $N = 201$ . Os parâmetros foram escolhidos como sendo  $\mu = 4,0$  (rede evoluindo caoticamente),  $\alpha = 0$  (campo médio) e  $\epsilon = 1,0$ . Com estes valores de parâmetros a rede evolui em um estado de sincronização completa de amplitudes, conforme demonstra a figura 4.6 para o valor de  $N$  em consideração. Tendo em mãos o registro da série (além de um transiente de  $2 \times 10^5$  tempos) tomamos  $M = 10000$  pontos para efetuar a reconstrução em diversas imersões, o resultado é exibido na figura 5.4. A figura 5.4a mostra a integral de correlação avaliada para cinco diferentes imersões,  $m = 2, 3, 4, 5, 6$ . Vemos que para estas imersões existe nitidamente uma região,  $r < 0,3$ , onde a integral de correlação segue nitidamente a lei  $C(r) \simeq r^D$ . As regiões de escala de cada curva ficam bastante evidenciadas quando representamos o coeficiente angular  $D$  de cada curva em função de  $r$  (Fig. 5.4b). Neste gráfico, as regiões de escala convertem-se em platôs (inclinação constante). A saturação da região de escala em um valor próximo a  $D = 0,99$  ao empregarmos somente as cinco primeiras imersões mostra que podemos considerar a dimensão de correlação para a rede em estudo como sendo  $D_A = 0,99$ . A tabela 5.1 mostra a rápida convergência deste método juntamente com o erro estatístico obtido na escolha minuciosa das devidas regiões de escala exibidas na figura 5.4b. Acreditamos que a convergência seria bem mais rápida se escolhêssemos uma série com  $M \gg 10000$ . Neste caso, o valor de saturação poderia ser atingido com  $m = 2$  ou talvez  $m = 3$ .

O valor obtido,  $D_A = 0,99$ , está muito próximo do valor  $D_A = 1,0$  (atrator unidimensional), obtido analiticamente para o mapa logístico  $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$  [22]. De certa forma, a semelhança entre os dois resultados é decorrência do fato que a rede em estudo evolui em um estado de completa sincronização.

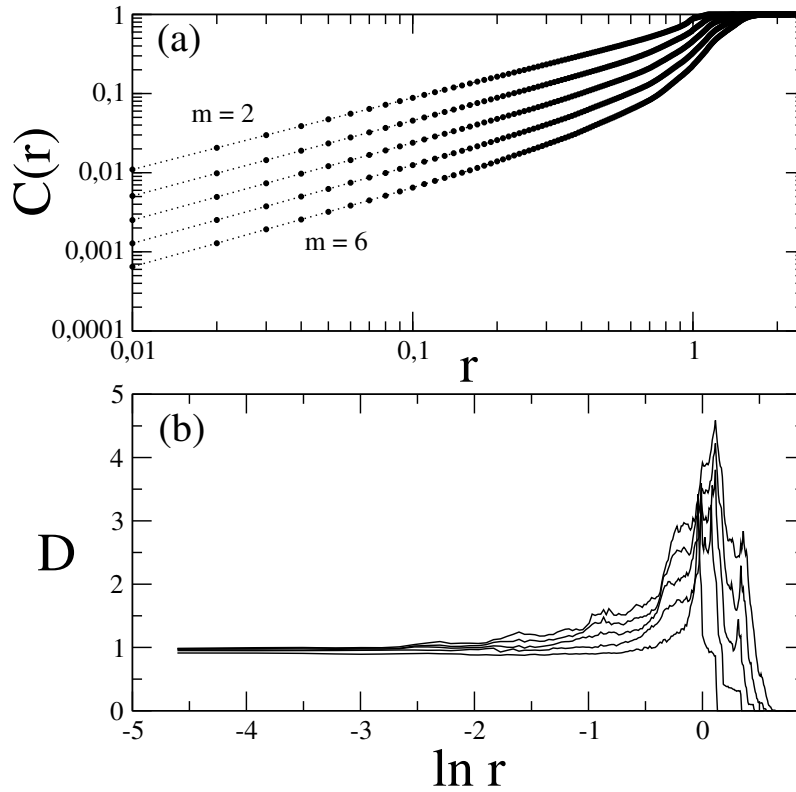


Figura 5.4: (a) Integral de correlação para alguns valores da imersão. O passo em  $r$  é de 0,005 (b) Derivada de cada uma das curvas.  $N = 201$ ,  $\mu = 4,0$ ,  $\alpha = 0$  e  $\epsilon = 1,0$ .

<b>m</b>	<b>inclinação</b>	<b>desvio padrão</b>	<b>c.c.</b>
2	0,90160	0,001601	0,9999921
3	0,95180	0,000881	0,9999979
4	0,97445	0,000376	0,9999996
5	0,98832	0,000643	0,9999989
6	0,99650	0,000632	0,9999990

Tabela 5.1: Estimativa da dimensão de correlação para uma rede com  $N = 201$  sítios,  $\mu = 4,0$ ,  $\alpha = 0$  (campo médio) e  $\epsilon = 1,0$ . A abreviação c.c. significa coeficiente de correlação estatística dos dados com uma função cogitada, no caso uma reta.

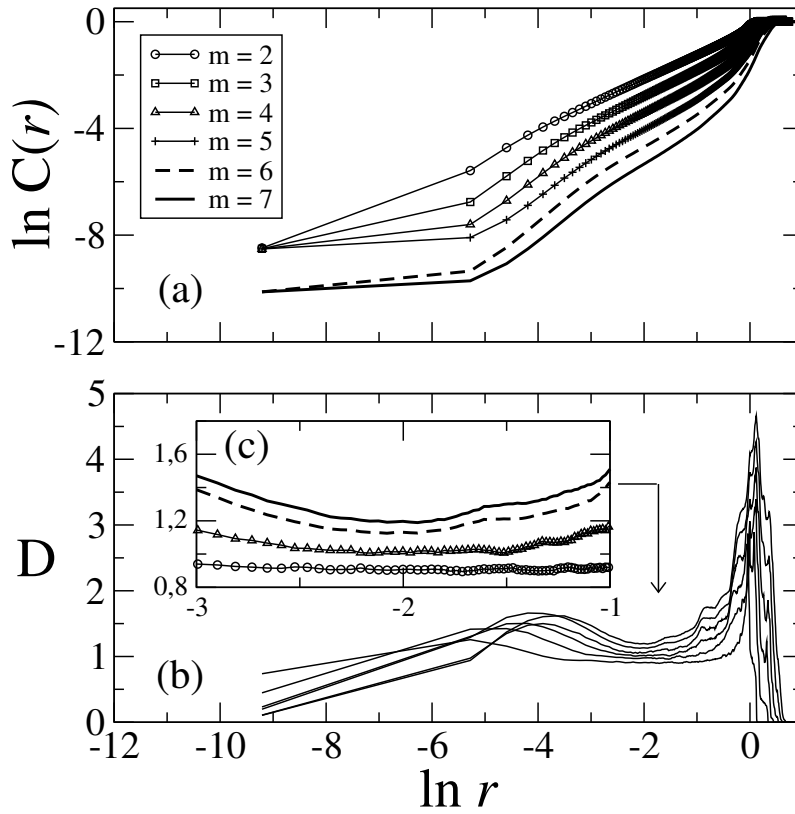


Figura 5.5: (a) Integral de correlação para alguns valores da imersão:  $m = 2 - 7$  (b) Derivada de cada uma das curvas da figura (a). (c) Ampliação da região de escala para  $m = 2, 4$  e  $m = 6, 7$ .  $N = 201$ ,  $\mu = 4,0$ ,  $\alpha = 0,75$  e  $\epsilon = 1,0$ .

A figura 5.5 sintetiza a busca pela determinação da dimensão de correlação quando a RMA estudada evolui com parâmetros  $\mu = 4,0$ ,  $\alpha = 0,75$  e  $\epsilon = 1,0$ . Diferente do que vimos a pouco, a rede nestas condições nunca atinge um estado de completa sincronização, o qual, como vimos na seção 4.4, só ocorre quando  $\alpha < \alpha_c = 0,73$ . A figura 5.5a exibe o cálculo da integral de correlação feito para 6 diferentes imersões: para  $m = 2, 3, 4, 5$  usou-se  $M = 10000$  pontos, já para  $m = 6, 7$  usou-se  $M = 50000$ . Quando comparamos as figuras 5.5b-c com a figura 5.4b notamos que ocorreu uma grande diminuição da região de escala quando a rede transiciona de uma rede completamente sincronizada para uma rede cuja órbita se aproxima intermitentemente da variedade de sincronização ( $\alpha = 0,75$ ). De certa forma este fato compromete os resultados proporcionados pela equação 5.4, pois a correlação dos dados estatísticos com uma reta não será suficientemente adequada em cada imersão. Mesmo usando uma série muito grande ao se avaliar  $C(r, m)$ , como é o caso para  $m = 6$  e  $7$ , não se obtém ainda grande sucesso em se expandir esta região de escala, e de forma bastante evidente a região de escala tende nitidamente a ficar muito mais estreita quando a dimensão de imersão aumenta. De forma geral, os resultados mostram que a existência de uma saturação das regiões de escala com  $m$  é muito remota. Todos estes fatos aqui relatados apontam para uma única conclusão: a dimensão  $D_A$  do atrator deve ser um número muito grande, ao menos  $D_A > 10$ . Este objeto geométrico de grande dimensão colapsa para uma curva unidimensional quando a rede sincroniza ( $\alpha \rightarrow \alpha_c$ ).

## 5.4 A integral de correlação espacial

Vimos anteriormente que o método de Grassberger e Proccacia (MGP) não se mostrou prolífico quando aplicado a um sistema espacialmente estendido como é o caso da RMA abordada neste trabalho. O motivo é, em essência, o elevado valor da dimensão  $D_A$  apresentada pelo atrator, o que faz com que a aplicação das equações 5.3 e 5.4 à série temporal extraída de um ponto da RMA forneça resultados inconclusivos.

Por outro lado, existem evidências analíticas e numéricas de que, à medida que o tamanho  $N$  do sistema vai a infinito a distribuição ordenada dos expoentes de Lyapunov  $\lambda_i$  (espectro) pode ser descrita por uma única função  $\lambda_i = f(i/N)$  [23], onde  $i$  indica o  $i$ -ésimo expoente. Ou seja, o espectro dos expoentes de Lyapunov adquire uma comportamento universal. Consequentemente, a dimensão de Lyapunov  $D_L$  (relação A.4) e a entropia KS (fração dos expoentes de Lyapunov positivos), as quais são obtidas diretamente do próprio espectro de Lyapunov, são quantidades que crescem linearmente com o tamanho do sistema. Neste caso, é conveniente e bastante razoável definir uma dimensão “específica”, ou densidade de dimensão para o sistema (também chamada de expoente de correlação) através de

$$\varrho \simeq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D_L}{N}. \quad (5.7)$$

Esta quantidade será então a mais adequada à caracterização da dinâmica sobre o atrator. Esta mesma propriedade é observada também quando empregamos as definições de outras dimensões como as dimensões de capacidade, correlação e informação. Do ponto de vista operacional, o cálculo da dimensão de Lyapunov com a subsequente divisão pelo tamanho do sistema mostrou ser viável no caso de sistemas simples tais como uma RMA com interação local de tamanho muito pequeno ( $N \simeq 100$ ) [23, 50, 51]. Entretanto, para sistemas muito grandes esta operacionalidade torna-se ainda um trabalho árduo, principalmente quando usamos uma rede com interação não-local. Neste caso, a necessidade de séries temporais extensas provenientes de uma rede cujo tamanho seja extremamente grande torna a obtenção de  $D_L$  (ou alguma outra definição de dimensão) um problema ainda sem solução.

No caso de uma RMA, Grassberger sugeriu ainda um segundo procedimento para caracterizar o atrator, a determinação de uma “densidade de dimensão espacial”. O procedimento que visa obter tal quantidade exige como primeiro passo a aquisição da distribuição espacial das variáveis de estado (padrão da rede)  $\mathbf{x}_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N)})$ . O índice  $i$  que identificava o sítio passa também agora a representar um *estado espacial*. Tendo em mãos o padrão da rede em certo instante de tempo, efetuamos então uma “reconstrução espacial” nos moldes da equação 5.5. Ou seja,

$$\boldsymbol{\xi}^{(i)} = (x^{(i)}, x^{(i+l)}, \dots, x^{(i+(m-1)l)}), \quad (5.8)$$

onde  $l$  é o “retardo espacial”, o qual escolhemos como sendo a unidade. O índice  $n$  foi omitido a fim de facilitar a notação. Neste tipo de reconstrução, o espaço de reconstrução  $\mathbb{R}^m$  conterá então  $N$  pontos. Em seguida, segundo os mesmos princípios operacionais estabelecidos para se avaliar a equação 5.3, nós determinamos uma “integral de correlação espacial”

$$C(r, m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \Theta(r - \|\boldsymbol{\xi}^i - \boldsymbol{\xi}^j\|), \quad (5.9)$$

a qual, *a priori*, deve exibir para  $r$  pequeno o comportamento  $C(r) \simeq r^{D_E}$ . O índice  $E$ , colocado a fim de se evitar confusão com o caso temporal, indica que agora estamos usando o estado espacial. Concluídos estes passos, esperamos que para uma imersão  $m$  suficientemente grande, o expoente  $D_E$  cresça, no limite assintótico, segundo  $\varrho_E m$ . Ou seja,

$$\varrho_E \simeq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{D_E}{m}. \quad (5.10)$$

A quantidade intensiva  $\varrho_E$  é conhecida como “densidade de dimensão espacial”. Este novo procedimento para caracterizar o atrator a tempo fixo, ou “atrator espacial” [34] é particularmente mais promissor do que os métodos anteriores, uma vez que agora não necessitamos de grandes séries temporais, mas apenas de uma “série espacial”. Observe ainda que, diferente do MGP aplicado na seção anterior, não existe agora uma preocupação excessiva em se conseguir uma convergência para um certo valor, mas sim um crescimento da dimensão avaliada (inclinação) com a imersão.

A figura 5.6 exhibe o resultado do cálculo da integral de correlação espacial para uma rede caótica com interação não-local com  $N = 1001$  sítios usando-se 7 imersões ( $m = 2, 4, 6, \dots, 14$ ). As curvas exibem o “joelho” característico da integral de correlação, o qual surge quando  $r$  atinge a fronteira do atrator, fazendo com que a proporção dos pares de pontos alcance o valor 1. Cada curva apresenta, para valores pequenos de  $r$ , uma região de escala peculiar, através da qual determinamos a inclinação  $D_E$  segundo a metodologia expressa na equação 5.4. Aqui também a ausência de saturação é evidente, entretanto isto agora não é um obstáculo à determinação de uma quantidade dinâmica invariante que melhor caracterize o atrator do sistema pois observamos a existência de um crescimento aparentemente linear do expoente  $D_E$  com a imersão  $m$ . Esta afirmação é devidamente confirmada através da figura 5.7, a qual retrata  $D_E$  como uma função de  $m$  para um número maior de imersões. O resultado expresso pela figura 5.7 nos permite afirmar que, para uma rede de mapas logísticos acoplados, evoluindo caoticamente, sendo  $\alpha = 5,0$  e  $\epsilon = 0,1$ , a densidade de dimensão espacial é dada por  $\varrho_E \simeq D_E/m = 0,425$ .

A consistência deste novo procedimento de caracterização é também confirmada quando investigamos o comportamento desta densidade de dimensão espacial com o parâmetro  $\alpha$ , o qual controla o alcance do acoplamento. Há um colapso evidente de  $\varrho_E$  quando  $\alpha$  diminui (tabela 5.2). De forma geral, isto reflete o colapso do número de graus de liberdade espaciais da rede nas vizinhanças de um estado de completa sincronização de amplitudes.



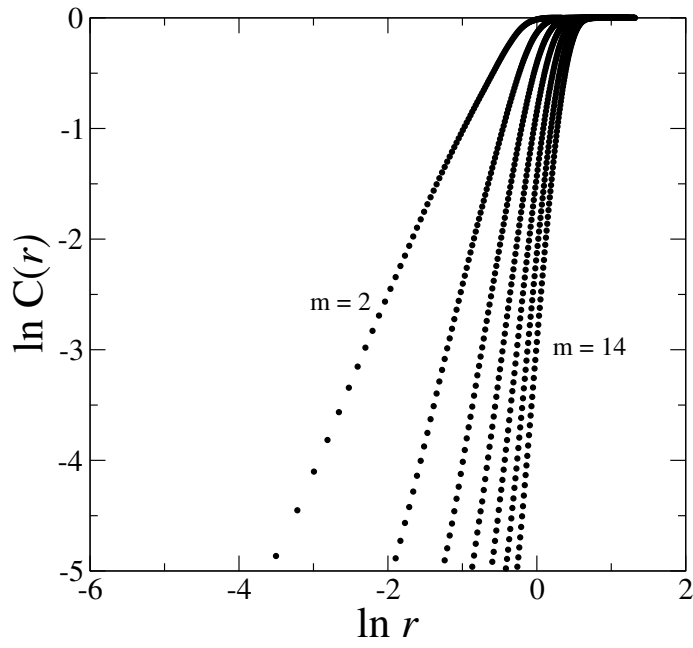


Figura 5.6: Integral de correlação espacial para  $m = 2, 4, 6, \dots, 14$ . Aqui  $N = 1001$ ,  $\mu = 4,0$ ,  $\alpha = 5,0$  e  $\epsilon = 0,1$ . O passo em  $r$  é de  $0,01$  e o transiente retirado é de  $2000$  tempos.

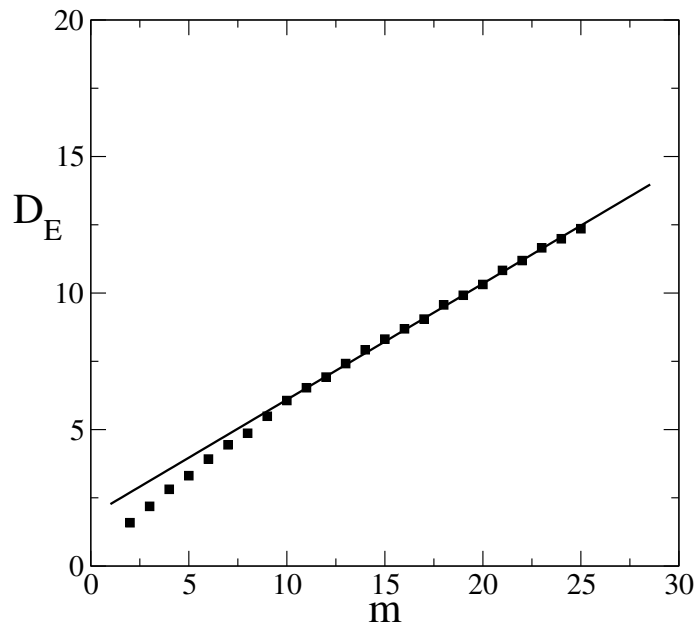


Figura 5.7: Dimensão de correlação versus imersão. Aqui,  $N = 1001$ ,  $\mu = 4,0$ ,  $\alpha = 5,0$  e  $\epsilon = 0,1$ . O ajuste fornece  $D_E = 0,425m + 1,844$ , sendo  $0,9994$  a correlação dos dados estatísticos com uma função linear.

$\alpha$	$\varrho_E$	desvio padrão	c.c.
5,0	0,1848	0,0037	0,9959
4,5	0,1750	0,0026	0,9981
4,0	0,1863	0,0011	0,9997
3,5	0,1852	0,0039	0,9971
3,0	0,1397	0,0018	0,9989
2,5	0,1671	0,0014	0,9994
2,0	0,1481	0,0019	0,9990
1,5	0,0749	0,0011	0,9982
1,0	0,0290	0,0007	0,9960

Tabela 5.2: Estimativa da densidade de dimensão espacial para uma rede em função da extensão do acoplamento. A rede usada possui  $N = 1001$  sítios,  $\mu = 4,0$  e  $\epsilon = 0,6$ .

# Capítulo 6

## Gráficos de retorno e recorrência

Neste capítulo iremos revisar o mapa de primeiro retorno (MR). Em seguida iremos empregar a versão espacial deste tipo de mapa na descrição da sincronização de amplitudes, a qual é característica patente na rede 2.14. Definimos um diagnóstico de sincronização baseado nos padrões apresentados por este tipo de gráfico. Introduzimos também o gráfico de recorrência espacial, com vistas a empregá-lo como diagnóstico de sincronização de amplitudes.

### 6.1 O mapa de retorno espacial e a sincronização

A fim de visualizar o padrão espacial da rede com interação local (Eq. 2.11) na região de parâmetros onde a mesma apresenta estrutura zigzague em larga escala Kaneko [11, 38] introduziu o chamado *mapa de primeiro retorno espacial*. Construímos este mapa tomando o perfil da rede em um dado instante de tempo e, em seguida, formamos pares  $(x^{(i)}, x^{(i+l)})$ , onde o inteiro  $l$  representa o grau do avanço espacial ao longo da rede, também conhecido como *retardo espacial*. Cada par representa assim um ponto em um espaço de dimensão 2, o qual chamaremos de espaço- $\xi$ . De forma análoga, o espaço- $\xi$  de dimensão  $m$  é formado pelo mapa do  $(m - 1)$ -ésimo-retorno

$$\xi^{(i)} = (x^{(i)}, x^{(i+l)}, \dots, x^{(i+(m-1)l)}) \quad (6.1)$$

sendo que, neste trabalho, usaremos preferencialmente  $l = 1$  e  $m = 2$ . Deste modo, para uma rede com  $N$  sítios teremos

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = (x^{(1)}, x^{(2)}), \quad (6.2)$$

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = (x^{(2)}, x^{(3)}), \quad (6.3)$$

$$\boldsymbol{\xi}^{(3)} = (x^{(3)}, x^{(4)}), \quad (6.4)$$

...

$$\boldsymbol{\xi}^{(N-1)} = (x^{(N-1)}, x^{(N)}), \quad (6.5)$$

$$\boldsymbol{\xi}^{(N)} = (x^{(N)}, x^{(1)}). \quad (6.6)$$

Baseados em nossos estudos feitos no capítulo anterior, vemos que o mapa de retorno espacial é a *representação gráfica da reconstrução espacial*, podendo também ser estendido para o caso temporal. Neste caso, o mapa de primeiro retorno temporal é obtido usando-se a série temporal proveniente de um sítio arbitrário.

Qual o efeito da tendência à sincronização sobre a distribuição dos pontos num mapa de retorno espacial? A figura 6.1 mostra o espaço- $\boldsymbol{\xi}$  bidimensional para uma rede com interação não-local (Eq. 2.14) com diferentes valores da intensidade do acoplamento  $\epsilon$  e do parâmetro  $\alpha$ , o qual modula o alcance do acoplamento. As seis combinações envolvem acoplamento fraco ( $\epsilon = 0,1$ ) e moderado ( $\epsilon = 0,6$ ), sendo que o alcance do acoplamento varia do caso local para o global. Quando os sítios estão descorrelacionados espacialmente esperamos que o mapa de retorno espacial exiba uma nuvem de pontos espalhados, o que pode ser constatado nas figuras 6.1a-c para o caso de fraco acoplamento. Mesmo aumentando o alcance do acoplamento, o comportamento geral do mapa de retorno não varia muito. De fato, neste domínio de parâmetros, a sincronização nunca ocorre, como nos indica a figura 4.6.

Quando aumentamos o acoplamento para  $\epsilon = 0,6$ , a distribuição de pontos muda significativamente: há uma visível concentração de pontos em torno da diagonal principal  $S$ , e esta concentração aumenta quando a rede muda de uma interação local para global. Em uma situação na qual a rede está completamente sincronizada em um dado instante de tempo, de modo que a equação 4.8 é satisfeita, o mapa de retorno espacial consistirá em um único ponto sobre a diagonal. Como vemos, esta tendência em princípio está bem representada pela sequência de mapas da figura em discussão.

Podemos definir uma medida quantitativa de quão afastado da sincronização estará o padrão espacial de uma rede com  $N$  sítios em um dado instante de tempo  $n$ . Uma proposta bastante adequada seria calcular a distância  $d_n^{(i)}$  de cada ponto do mapa de  $(m-1)$ -ésimo retorno até a linha diagonal,

$$(d_n^{(i)})^2 = \sum_{j=1}^m \xi_j^2 - \frac{1}{m} \left( \sum_{j=1}^m \xi_j \right)^2 \quad (6.7)$$

e, em seguida, fazer uma média sobre estes valores,

$$\langle d \rangle_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_n^{(i)}. \quad (6.8)$$

No caso da figura 6.1, onde  $m = 2$ , a distância média em cada situação é: (a)  $\langle d \rangle = 0,192$ , (b)  $\langle d \rangle = 0,201$ , (c)  $\langle d \rangle = 0,202$ , (d)  $\langle d \rangle = 0,044$ , (e)  $\langle d \rangle = 0,0012$ , (f)  $\langle d \rangle = 0,0003$ . Note que nas figuras (a), (b) e (c) não há mudança significativa na distância média até a diagonal. Por outro lado, esta distância sofre forte redução quando  $\alpha$  diminui e a interação se torna moderada, como mostra a seqüência (d), (e) e (f). Este resultado mostra que o critério revela ser bastante razoável no que diz respeito à quantificação da tendência à sincronização. Muito embora o aspecto de cada mapa, e portanto,  $\langle d \rangle_n$  dependa do instante de tempo e da condição inicial escolhida, veremos que em média seu comportamento está em acordo com a seqüência de idéias até agora relatadas.

A seqüência de figuras 6.2(a)-(b) representa a distância  $\langle d \rangle$  até a diagonal do mapa de retorno espacial versus o parâmetro de acoplamento  $\epsilon$  para alguns valores do parâmetro que controla o alcance. As várias curvas em cada figura indicam a superposição de 5 condições iniciais diferentes para a rede. Para todas elas existe uma tendência clara de que  $\langle d \rangle$  decresce quando a interação aumenta. Para o caso em que temos uma interação de campo médio (fig. 6.2(a)), acima de  $\epsilon = 0,5$  a distância anula-se para todas as condições escolhidas. Isto significa que a rede sincroniza completamente para  $\epsilon > 0,5$ , tal resultado condiz com os resultados provenientes da análise do espectro de Lyapunov [19] e está em acordo com o resultado previsto pela análise do parâmetro de ordem de Kuramoto. Quando o acoplamento é global, porém já não mais o de campo médio,  $\langle d \rangle$  também tende a zero para grandes valores de  $\epsilon$ , porém a iminência da sincronização caótica não ocorre mais em  $\epsilon = 0,5$ , mas sim em torno de  $\epsilon = 0,78$  (fig. 6.2(b)). De fato, ela ocorre para um valor superior, o que indica a dificuldade existente para que ocorra sincronização em uma rede cujo acoplamento tende a ser local. Esta afirmação é também endossada pelas figuras 6.2(c)-(d), onde  $\alpha$  é ainda maior. Nestas duas últimas figuras constatamos que  $\langle d \rangle$  não se anula, mesmo para  $\epsilon \approx 1,0$ .

Conclusão similar pode ser obtida através da figura 6.3. Nesta figura determinamos a distância média até a diagonal do mapa de retorno espacial em função do parâmetro  $\alpha$  para uma rede com interação não-local com  $N = 2001$  sítios. Para cada valor de  $\alpha$ , o qual sofre um incremento de 0,02 a cada passo, geramos uma superposição de 2000 mapas registrados a cada 2 tempos. Em seguida, calculamos a distância média até a diagonal deste mapa superposto. Este procedimento amplia assim o caráter geral de nossas conclusões. Para  $\epsilon = 0,1$  a distância média  $\langle d \rangle$  não varia apreciavelmente com a extensão do acoplamento  $\alpha$ , o que indica que um estado

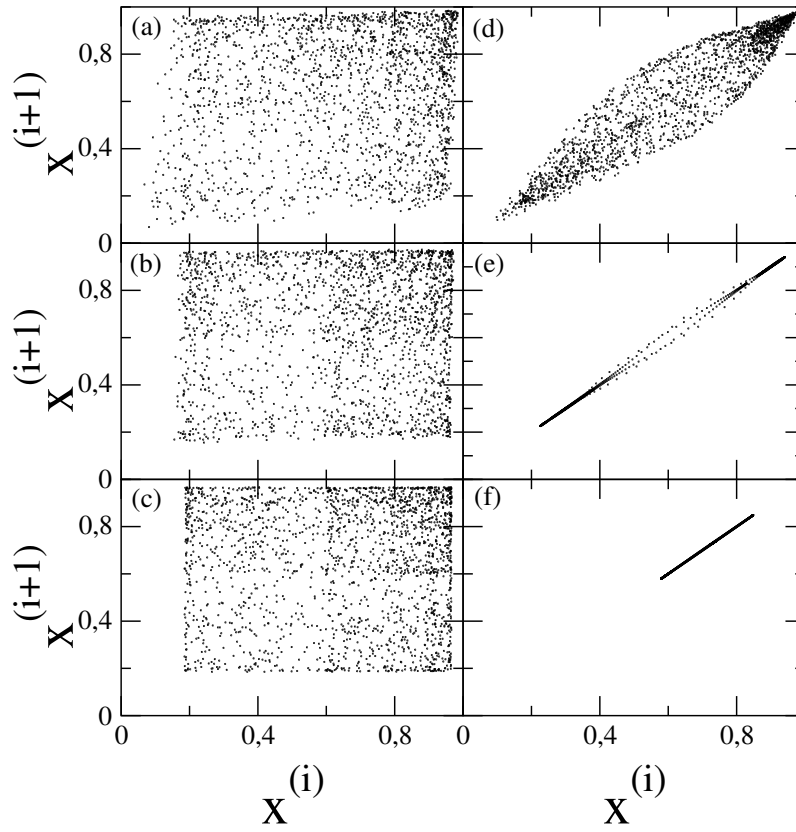


Figura 6.1: Mapa de primeiro retorno espacial para uma rede com  $N = 2001$  sítios acoplados não-localmente. (a)  $\alpha = 2, 0$ ,  $\epsilon = 0, 1$ , (b)  $\alpha = 1, 0$ ,  $\epsilon = 0, 1$ , (c)  $\alpha = 0, 5$ ,  $\epsilon = 0, 1$ , (d)  $\alpha = 2, 0$ ,  $\epsilon = 0, 6$ , (e)  $\alpha = 1, 0$ ,  $\epsilon = 0, 6$ , (f)  $\alpha = 0, 5$ ,  $\epsilon = 0, 6$ .

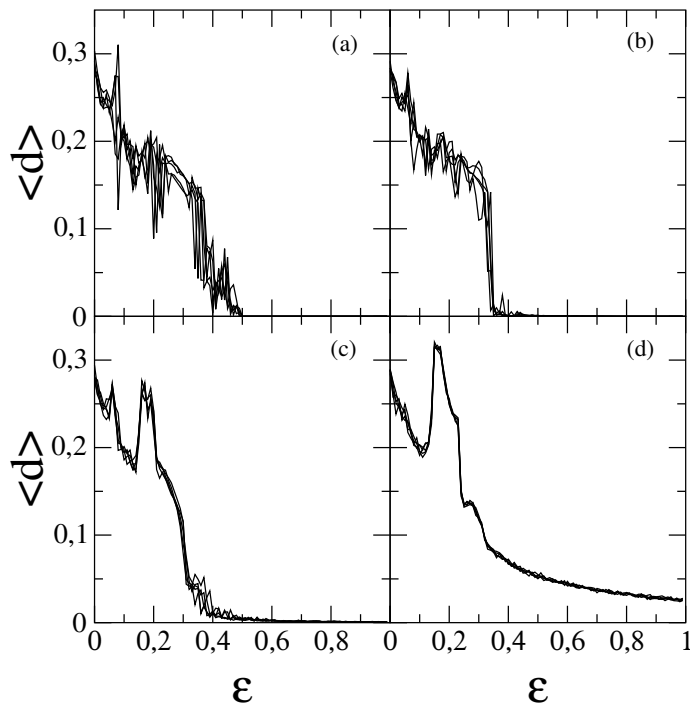


Figura 6.2: Distância média à diagonal do mapa de retorno espacial em função do parâmetro  $\epsilon$  para uma rede não local com  $N = 1001$  sítios. (a)  $\alpha = 0$ , (b)  $\alpha = 0,5$ , (c)  $\alpha = 1,0$ , (d)  $\alpha = 2,0$ . Instante  $n = 5000$ .

de sincronização completa nunca é atingido. Por outro lado, no caso de  $\epsilon = 0,6$ , ou seja, um acoplamento bem mais intenso, para pequenos valores de  $\alpha$  temos pequenos valores para  $\langle d \rangle$ , confirmando a possibilidade da sincronização caótica quando  $\alpha \rightarrow \alpha_c$ . De fato, a curva para  $\epsilon = 0,6$  atinge o zero (dentro de uma precisão de  $10^{-6}$ ) em aproximadamente  $\alpha = 0,24$ . Este valor está muito próximo do valor  $\alpha_c = 0,256$  previsto pela análise do parâmetro de ordem de Kuramoto (diagrama de parâmetros da figura 4.6). Esta precisão seria certamente melhor se tivéssemos usado um incremento menor em  $\alpha$ . Já para grandes valores de  $\alpha$ , que é o caso da interação local, nos aproximamos de uma situação que é análoga ao caso  $\epsilon = 0,1$ .

## 6.2 O gráfico de recorrência “*recurrence plot*”

O gráfico de recorrência (GR) foi proposto por Eckmann e Ruelle [24] como uma ferramenta gráfica para evidenciar padrões laminares (constantes no tempo) ou periódicos em séries temporais provenientes de um sistema dinâmico qualquer. Em 1994, Webber e Zbilut, em um artigo seminal [52], definiram várias medidas que permitiam quantificar os GRs. Desde então os GRs popularizaram-se e foram, nos anos

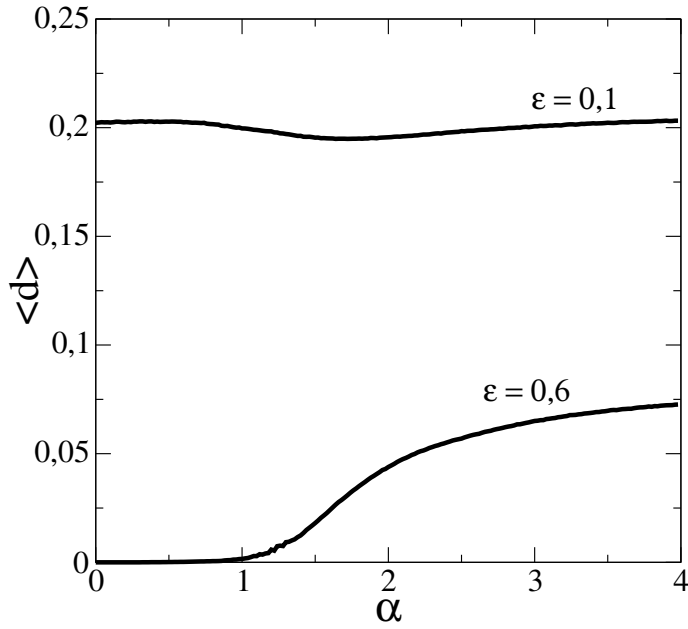


Figura 6.3: Distância média à diagonal do mapa de retorno espacial em função do parâmetro  $\alpha$  para uma rede não local com  $N = 2001$ . Transiente: 2000 tempos.

seguintes sendo aplicados intensamente em áreas que empregam grandes quantidades de dados experimentais, como a fisiologia [26] e ciências da Terra. Neste trabalho estendemos também esta ferramenta ao estudo da correlação espacial existente no perfil da RMA em investigação, principalmente no que tange à sincronização. Inicialmente, porém, a título de introdução, vamos mostrar o método bem como a aplicação desta ferramenta a um sistema simples, já a aplicação a RMA será feita posteriormente.

A idéia de Eckmann para a construção do GR pressupõe inicialmente, escolhido o sistema dinâmico, que façamos uma reconstrução da dinâmica temporal. É conveniente neste momento relembrar os conceitos vistos na seção 5.2. Tendo em mãos a série  $s = \{x_1, x_2, \dots\}$  proveniente da observação de uma única componente do vetor  $\mathbf{x}$  no  $\mathbb{R}^N$  e escolhida a imersão  $m$ , o gráfico de recorrência é definido como a representação gráfica de uma matriz simétrica (matriz  $\mathbf{R}$ ) na qual o valor 1 é alocado no elemento  $R_{ij}$  sempre que um ponto  $P_j$  no espaço- $\xi$  (espaço de reconstrução) estiver dentro de uma vizinhança  $r$  do ponto  $P_i$ . Caso contrário, aloca-se o valor 0. Cada elemento desta matriz binária fica então devidamente representado na forma

$$R_{ij} \equiv \Theta(r - \|\xi_{(i)} - \xi_{(j)}\|) \quad i, j = 1, 2, \dots, M \quad (6.9)$$

Aqui, como no capítulo anterior,  $\Theta$  é a função degrau de Heaviside e  $\|\xi_{(i)} - \xi_{(j)}\|$



é a distância euclidiana entre os pontos  $P_i$  e  $P_j$ . Quando a distância entre dois pontos é menor do que  $r$ , estes pontos são chamados de *recorrentes*. Portanto, diferente do mapa de retorno, que é uma representação gráfica dos pontos reconstruídos, o gráfico de recorrência é uma *representação gráfica binária, como declara o próprio nome, da recorrência entre estes mesmos pontos*.

As figuras 6.4 e 6.5 ilustram algumas características gerais peculiares dos GR. Em cada figura mostramos a série temporal, obtida do mapa logístico 2.20, e abaixo, o GR correspondente. No caso da figura 6.4 a série temporal representa uma órbita de período 3 ( $\mu = 3,83$ ). Neste caso, a tipologia do GR são linhas diagonais contínuas e periódicas (tipologia também típica quando empregamos uma onda senoidal [53, 54]). Já na figura 6.5 ( $\mu = 3,679$ ) a série temporal caótica possui algumas janelas com comportamento laminar, ou seja, a dinâmica não muda durante algum tempo (dentro da tolerância  $r$ , a qual representa 10 por cento do tamanho do espaço reconstruído). Esta “laminariade” apresenta-se no GR correspondente na forma de linhas verticais (ou horizontais) cheias: a laminaridade nos instantes  $n = 80$ ,  $n = 116$ ,  $n = 158$  e  $n = 186$  converte-se, no GR, nas grandes linhas verticais (ou horizontais) observadas em  $j = 80$ ,  $j = 116$ ,  $j = 158$  e  $j = 186$  ( $i = 80$ ,  $i = 116$ ,  $i = 158$  e  $i = 186$ ). Além disso, ainda na figura 6.5, as linhas diagonais identificam as diferentes partes da série temporal que possuem evolução idêntica: os segmentos da série nos intervalos  $\Delta n \simeq 120 - 100$  e  $\Delta n \simeq 20 - 0$  são similares (dentro, naturalmente, da tolerância  $r$ ) e esta similaridade é convertida, no GR, na linha diagonal com extremos nos pontos  $(i, j) = (100, 0)$  e  $(i, j) = (120, 20)$ . O grande número de segmentos diagonais em seus diversos tamanhos indicam a existência de um grande número de pedaços da série que são similares em diversas escala de tempo. Deste modo, a diagonal representa, portanto a maior escala de tempo. Esta tipologia é marcante também na figura 6.4, pois a presença de linhas diagonais de todos os tamanhos reflete a similaridade de todo e qualquer segmento da série temporal e de certa forma reflete um certo grau de “determinismo” no sistema. A ausência de intervalos de tempo característicos na série temporal (com tamanho muito pequeno em comparação com o tamanho total da série) onde seja possível observar alguma laminaridade ou similaridade produz um GR com tipologia homogênea, ou seja, um padrão branco e preto uniforme. Este é caso da figura 6.6, onde temos uma série temporal fortemente caótica.

Trabalhos recentes [25] aplicaram os GR a séries temporais provenientes do batimento cardíaco (*heart-rate-variability data* ou HRV) de pacientes implantados com marcapasso. A técnica, que analisa o padrão exibido pelo GR, mostrou-se satisfatória em detectar comportamentos laminares (irregulares do ponto de vista médico) que antecipam uma arritmia cardíaca.

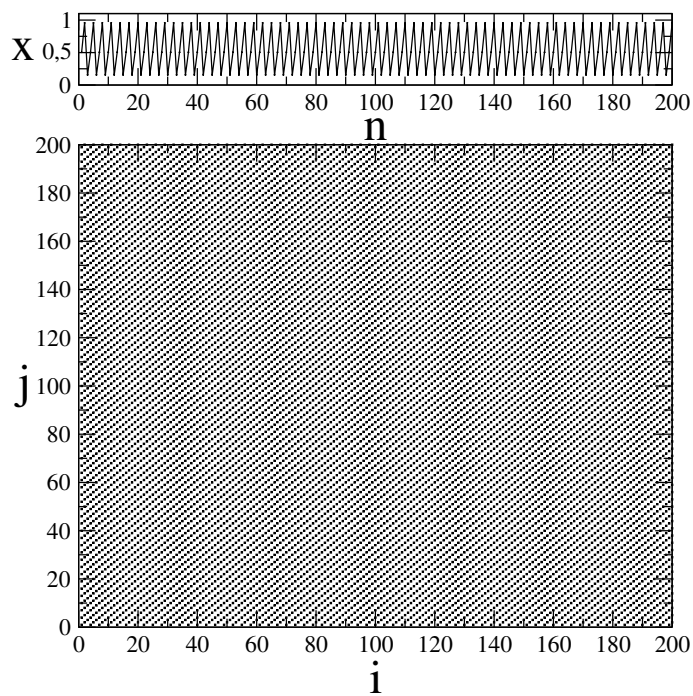


Figura 6.4: (Acima) série temporal para o mapa logístico com  $\mu = 3,83$ . (Embaixo) gráfico de recorrência para  $m = 1$ , tempo de retardo  $\tau = 1$  e  $r = 0,1$ .

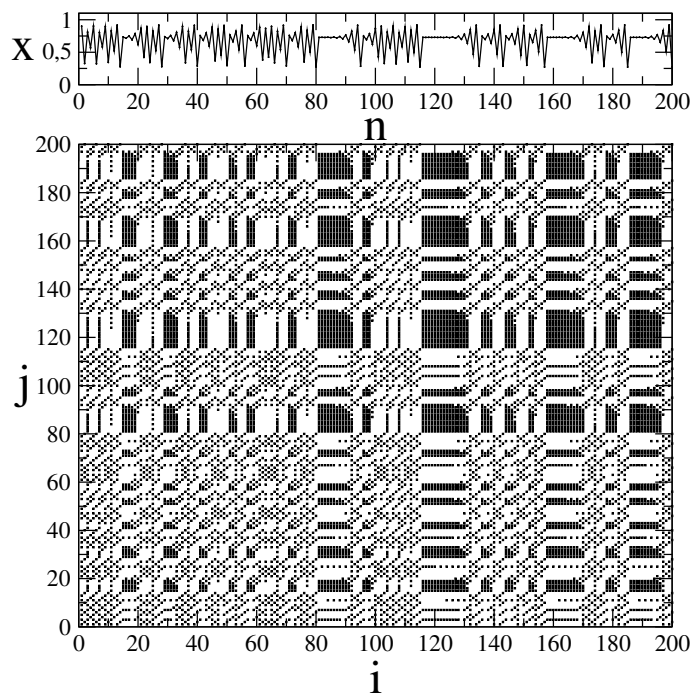


Figura 6.5: (Acima) série temporal para o mapa logístico com  $\mu = 3,679$ . (Embaixo) gráfico de recorrência para  $m = 1$ , tempo de retardo  $\tau = 1$  e  $r = 0,1$ .

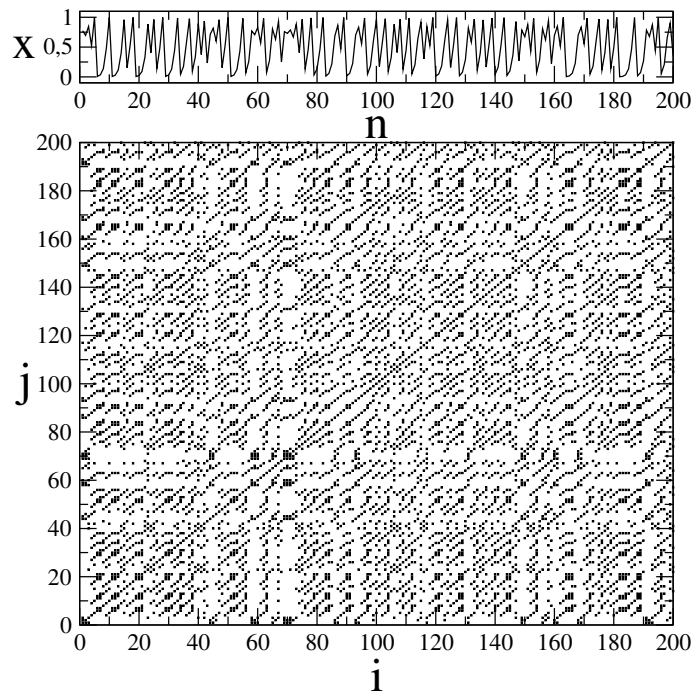


Figura 6.6: (Acima) série temporal para o mapa logístico com  $\mu = 4,00$ . (Embaixo) gráfico de recorrência para  $m = 1$ , tempo de retardo  $\tau = 1$  e  $r = 0,1$ .

## 6.3 O gráfico de recorrência espacial

O *gráfico de recorrência espacial* (GRE) proposto neste trabalho é uma extensão do método de Ruelle, discutido anteriormente, ao padrão espacial gerado pela rede. O GRE seria, portanto, uma representação gráfica binária da recorrência (Eq. 6.10) entre os pontos espacialmente reconstruídos sobre o mapa de retorno espacial. O GRE pressupõe também o emprego da reconstrução espacial abordada na seção 5.4 e utilizada para a construção dos mapas de primeiro retorno espacial do presente capítulo.

Na seção 6.1 analisamos os mapas de primeiro retorno espacial de uma rede com interação não-local tendendo a um estado de completa sincronização. Investigamos agora também esta tendência sob o ponto de vista de um GRE. Na figura 6.7 mostramos o perfil de uma rede de  $N = 201$  sítios acoplados não-localmente para quatro valores diferentes do parâmetro que controla o alcance do acoplamento ( $\alpha$ ). Tais valores foram escolhidos de tal forma que a rede passe de uma rede com interação local ( $\alpha = 4,0$ ) para uma rede nas proximidades de um estado de completa sincronização ( $\alpha = 1,0$ ), a qual, de acordo com a tabela 4.1, ocorre efetivamente para  $\alpha = 0,735$ . Através desta figura e de observações já apontadas neste trabalho, sabemos que os perfis tornam-se menos irregulares à medida que  $\alpha \rightarrow \alpha_c$ . A figura 6.8 exibe uma planilha contendo os GREs correspondentes aos perfis da figura 6.7. Todos os GREs da planilha foram obtidos usando-se preliminarmente uma reconstrução espacial unidimensional  $m = 1$ , sendo o raio de corte escolhido como sendo  $r = 0,05$  (5 por cento do diâmetro do espaço reconstruído). Podemos observar que existe uma mudança significativa de aspecto quando comparamos somente os casos  $\alpha = 4,0$  e  $\alpha = 1,0$ . No primeiro caso, os pontos estão distribuídos homogeneamente sobre o GRE. Já no segundo, os pontos parecem acumular-se em torno das grandes diagonais quebrando assim toda a homogeneidade anterior. Esta tipologia para  $\alpha = 1,0$  é muito semelhante à tipologia apresentada pelo GR de uma onda senoidal [53, 54]. Porém com um comprimento de onda da ordem do tamanho da rede. Evidentemente esta tipologia para  $\alpha = 1,0$  é consequência direta do aspecto aproximadamente senoidal do perfil: a primeira “crista” é recorrente com ela mesma e com a segunda “crista”. Por outro lado, o “ventre” é recorrente somente com ele mesmo.

De certa forma nossos resultados são bastante consistentes com a mudança bastante evidente também, no aspecto dos perfis para  $\alpha = 4,0$  e  $\alpha = 1,0$ . As diferenças entre cada GRE da planilha apresentada podem ainda serem percebidas (embora não tão evidente entre os casos (a) e (b)), mas esta percepção tende a diminuir naturalmente conforme aumentamos o tamanho  $N$  do sistema. A questão bastante pertinente agora é: que medida poderia diferenciar de forma quantitativa cada GRE? Uma medida natural e imediata seria o cálculo da *taxa de recorrência* ( $R$ ), ou *densidade numérica dos pontos recorrentes para um dado raio  $r$  fixo*. A taxa de recorrência é dada por

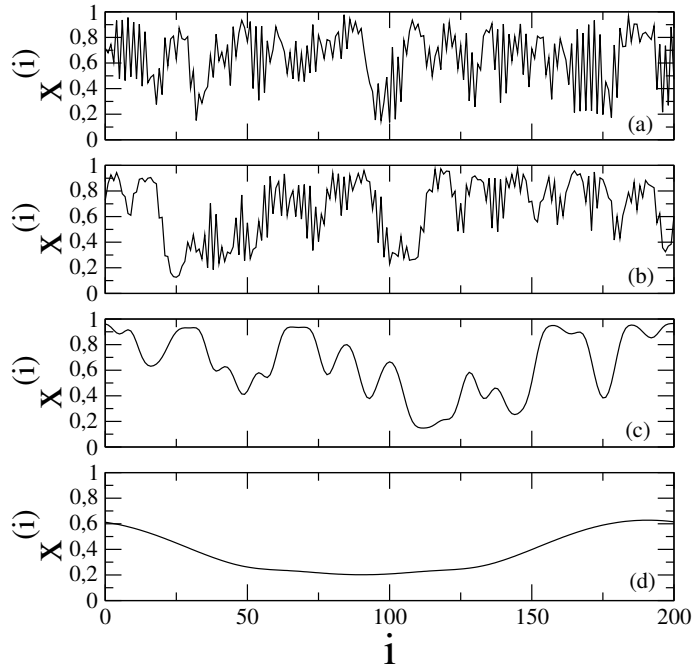


Figura 6.7: Perfis para uma rede com  $N = 201$ ,  $\mu = 4,0$ ,  $\epsilon = 1,0$  e  $n = 2000$ . (a)  $\alpha = 4,0$ , (b)  $\alpha = 3,0$ , (c)  $\alpha = 2,0$ , (d)  $\alpha = 1,0$ .

$$R = \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^M R_{ij}, \quad (6.10)$$

onde  $M^2$  representa o número total de pontos existente no GRE.  $R$  representa assim uma primeira medida quantitativa do GR.  $R$  está diretamente relacionado à correlação espacial dos pontos no espaço de reconstrução e, de certa forma, coincide com a integral de correlação espacial, desde que a mesma seja avaliada para um  $r$  fixo.

É interessante ressaltar que, em casos onde o perfil é completamente irregular, o que seria o caso de uma rede caótica ( $\mu = 4,0$ ) sujeita a um acoplamento do tipo local, esperamos que o GRE correspondente apresente uma tipologia bastante homogênea. Esta é exatamente a situação apresentada nas figuras 6.8a e b. Por outro lado, perfis menos irregulares fazem com que o GRE exiba tipologias com grandes agrupamentos de pontos recorrentes.

Uma segunda medida quantitativa, baseada no GR, é a *laminaridade*,  $\Lambda$  [53], a qual, estendida à descrição espacial de uma RMA, está associada à existência de “estados” espaciais laminares no perfil da rede em certo instante de tempo. A

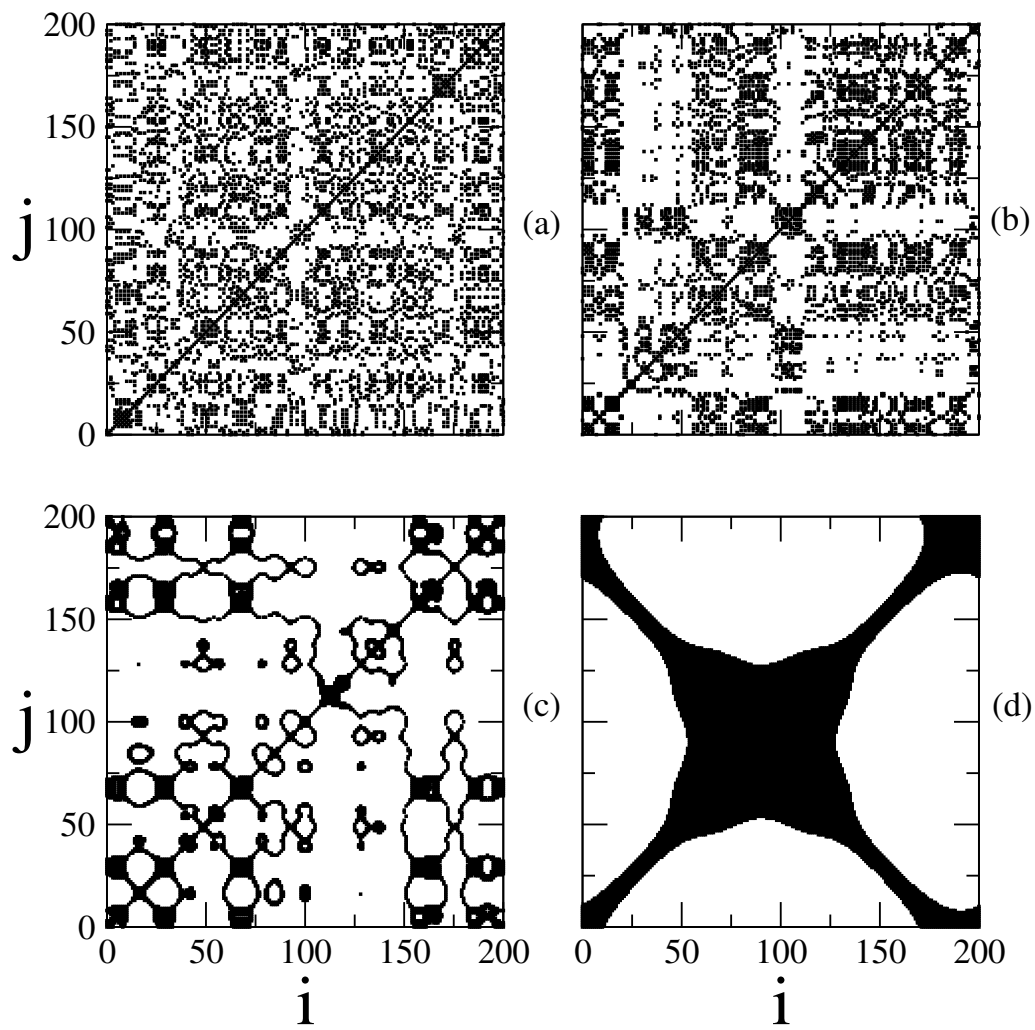


Figura 6.8: Gráficos de recorrência correspondentes aos perfis da figura 6.7. (a)  $\alpha = 4, 0$ , (b)  $\alpha = 3, 0$ , (c)  $\alpha = 2, 0$ , (d)  $\alpha = 1, 0$ . Usamos  $m = 1$  e  $r = 0,05$ .

laminaridade é definida como a razão entre o número de pontos recorrentes formando segmentos verticais (ou horizontais) e o número total de pontos recorrentes

$$\Lambda_n = \frac{\sum_{v=v_{min}}^N vP(v)}{\sum_{v=1}^N vP(v)} \quad (6.11)$$

onde  $P(v)$  é a probabilidade de se encontrar um segmento de tamanho  $v$ . O cálculo de  $\Lambda$  é realizado após ser feito o monitoramento dos segmentos verticais cujo tamanho seja maior ou igual a  $v_{min} = 2$ .  $\Lambda$  contém informação somente sobre a ocorrência de estados laminares no perfil sem descrever o tamanho médio destes estados [53]. Uma medida que contém esta informação seria a *distância média laminar*  $L$ . Esta é definida como a razão entre o número de pontos recorrentes formando segmentos verticais (ou horizontais) e o número total destes segmentos

$$L_n = \frac{\sum_{v=v_{min}}^N vP(v)}{\sum_{v=1}^N P(v)} \quad (6.12)$$

neste caso também escolhemos  $v_{min} = 2$ .

A tabela 6.1 mostra as medidas quantitativas definidas anteriormente para o caso das figuras 6.7 e 6.8. Neste caso, podemos notar que a taxa de recorrência não muda significativamente entre as figuras 6.8a, b e c. De certa forma, a quantidade de pontos recorrentes é visualmente a mesma nestas figuras. Por outro lado, a laminaridade entre 6.8b e 6.8c difere de quase 100 por cento, o que reflete um reagrupamento dos pontos recorrentes (aproximadamente os mesmos em ambas as figuras) a fim de formar segmentos verticais. Este reagrupamento é consequência da mudança de um perfil exibindo grande número de flutuações ( $\alpha = 3, 0$ ) em uma curta distância espacial  $\Delta l \ll N$  para outro ( $\alpha = 2, 0$ ) onde estas, dentro da tolerância  $r$ , ainda ocorrem, mas em uma escala espacial  $\Delta l$  significativamente maior ( $\Delta l \approx N$ ). A existência de muitos segmentos verticais com tamanho ainda inferior a 2 na figura 6.8c colabora para que a laminaridade avaliada para esta figura seja inferior a da figura 6.8d, a qual apresenta praticamente 100 por cento dos pontos recorrentes (27 por cento do total) formando estruturas verticais. A quase inexistência de estruturas diagonais de tamanho apreciável nas figuras 6.8(a,b,c) aponta o baixo grau de similaridade entre as diversas partes do perfil, enquanto na figura 6.8d podemos observar grandes segmentos diagonais próximos ao ponto central das grandes diagonais.

O caráter geral de nossas observações é apontado pelas figuras 6.9, 6.10 e 6.11, as quais expressam as grandezas  $R$  (Fig. 6.9),  $\Lambda$  (Fig. 6.10) e  $L$  (Fig. 6.11) em função do alcance  $\alpha$  para 3 valores diferentes do acoplamento  $\epsilon$ . Estas figuras nos possibilitam

$\alpha$	$R$	$\Lambda$	$L$
4,0	0,143	0,263	2,369
3,0	0,148	0,447	2,699
2,0	0,156	0,919	5,135
1,0	0,272	0,999	33,084

Tabela 6.1: Quantificadores básicos de um GRE, avaliados para a figura 6.8.

avaliar o comportamento das referidas grandezas quando uma rede com  $N = 1001$  sítios transiciona de uma rede com interação local para global. Em cada figura exibimos a grandeza avaliada para 4 condições iniciais diferentes (figura superior) e a média sobre 50 condições iniciais (figura inferior). O raio de corte foi escolhido como sendo 5 por cento do diâmetro do espaço reconstruído, que neste caso possui dimensão  $m = 2$ . Portanto  $r = 0,05 \sqrt{2}$ .

Notamos que para uma rede fracamente acoplada ( $\epsilon = 0,1$ ) as grandezas  $R$ ,  $\Lambda$  e  $L$  permanecem próximas de zero, independente do valor de  $\alpha$  ou da condição inicial. Portanto, neste domínio de parâmetros o conjunto destas três grandezas mostra que o GRE correspondente possui uma tipologia tipicamente homogênea. Esta invariância de tipologia com a extensão do acoplamento  $\alpha$  indica que um estado de completa sincronização nunca é alcançado para tal valor de  $\epsilon$ . Esta afirmação é consistente com observações prévias baseadas somente no mapa de primeiro retorno espacial (seção anterior) e está de acordo com o diagrama de parâmetros da figura 4.6.

Para uma rede sujeita a acoplamentos mais intensos,  $\epsilon = 0,6$  e  $\epsilon = 1,0$ ,  $\langle R \rangle$ ,  $\langle \Lambda \rangle$  e  $\langle L \rangle$  crescem monotonicamente até atingirem seus valores máximos de saturação. No caso da recorrência o valor de saturação corresponde a um GRE onde todos os pontos são recorrentes, ou seja  $\langle R \rangle = 1$ . Para a laminaridade o valor de saturação corresponde a um GRE onde 100% dos pontos recorrentes formam segmentos verticais, ou seja  $\langle \Lambda \rangle = 1$ . Para a distância de laminaridade o valor de saturação corresponde a um GRE onde o tamanho médio dos segmentos verticais é igual ao tamanho do sistema (número de colunas ou linhas da matriz  $R_{ij}$ ), ou seja,  $\langle L \rangle = 1001$ . A tendência das quantidades  $\langle R \rangle$ ,  $\langle \Lambda \rangle$  e  $\langle L \rangle$  a estes valores de saturação à medida que  $\alpha$  diminui indica que as mesmas são consistentes em descrever a tendência à sincronização. É interessante observar que a laminaridade atinge valores muito próximos do valor de saturação bem antes de  $\alpha_S$ , o que não ocorre com a recorrência e a distância de laminaridade. Tal fato ocorreu também para uma rede com  $N = 201$  (tabela 6.1) e é consequência da presença de perfis com pouca recorrência porém grande laminaridade, ou em outras palavras, à ocorrência de platôs. Neste caso podemos dizer que  $\Lambda$  é mais sensível a formação de platôs sincronizados, quando comparada à  $R$  e  $L$ . Sendo  $\alpha_S$  para  $\langle R \rangle$ ,  $\langle \Lambda \rangle$  e  $\langle L \rangle$  muito próximo do valor teórico (baseado no parâmetro de ordem de Kuramoto) previsto para o limiar da ocorrência de um estado de completa sincronização de amplitudes que no caso de  $\epsilon = 1,0$  seria  $\alpha = 0,6742$  e para  $\epsilon = 0,6$  seria  $\alpha = 0,25$ , podemos afirmar que  $\langle R \rangle$ ,  $\langle \Lambda \rangle$  e  $\langle L \rangle$  são convenientes



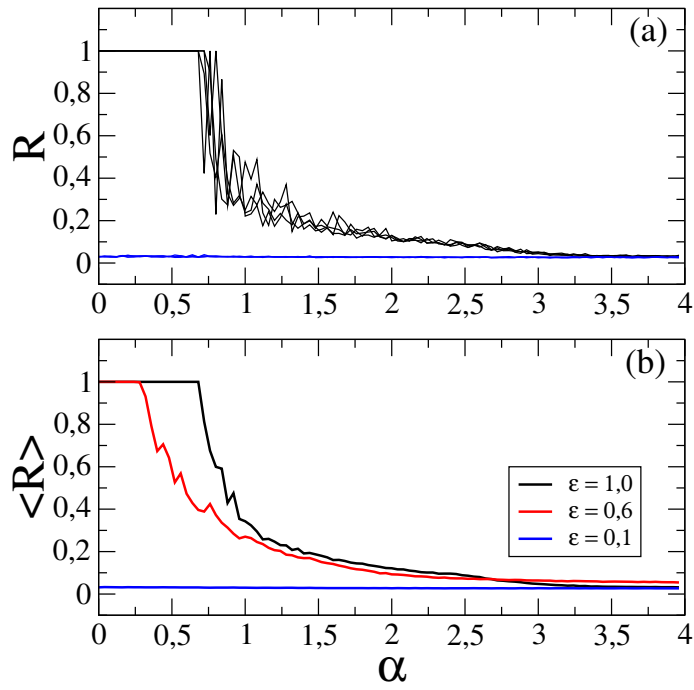


Figura 6.9: Fig. (a) Taxa de recorrência para 4 condições iniciais. Fig. (b) Taxa de recorrência média (50 condições iniciais).  $N = 1001$ ,  $\mu = 4,0$ ,  $m = 2$  e  $r = 0,07$ .

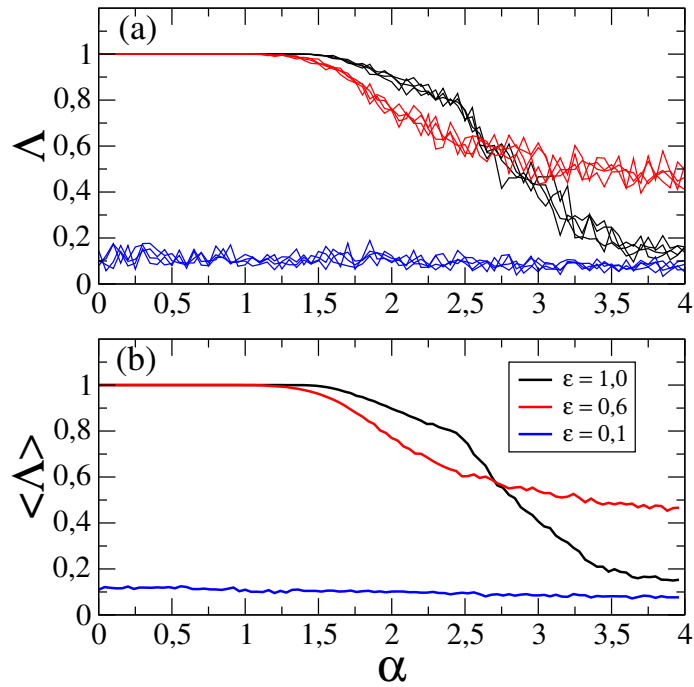


Figura 6.10: Fig. (a) Laminaridade para 4 condições iniciais. Fig. (b) Laminaridade média (50 condições iniciais).  $N = 1001$ ,  $\mu = 4,0$ ,  $m = 2$  e  $r = 0,07$ .

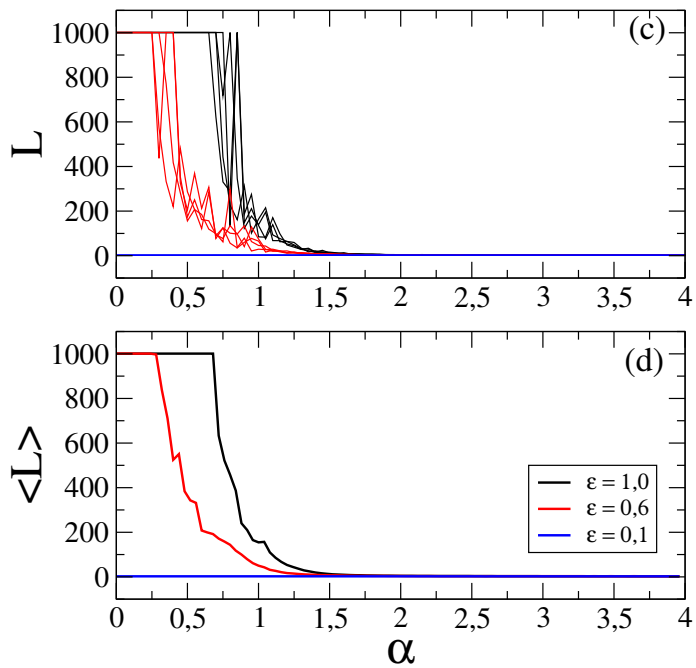


Figura 6.11: Fig. (a) Distância de aprisionamento para 4 condições iniciais. Fig. (b) Distância de aprisionamento média (50 condições iniciais).  $N = 1001$ ,  $\mu = 4,0$ ,  $m = 2$  e  $r = 0,07$ .

para serem usados como identificadores de uma rede cujo estado espacial aproximasse de um estado de completa sincronização, ou mesmo uma rede já efetivamente sincronizada.

# Capítulo 7

## Intermitência espaço-temporal

Nesta parte do trabalho vamos primeiramente rever o mapa de Chaté-Manneville. Na seqüência, vamos investigar o comportamento de uma rede de tais mapas sujeitos a um acoplamento não-local onde a interação entre os sítios decai ao longo da rede segundo uma lei de potência. Determinamos um espaço de parâmetros parcial para este tipo de rede bem como o correspondente parâmetro de ordem. Um estudo do comportamento laminar e intermitente é feito em cada região onde estes comportamentos são peculiares.

### 7.1 O mapa de Chaté-Manneville

Em 1989, Chaté e Manneville [7], motivados pelo estudo da intermitência em uma rede acoplada localmente, definiram um mapa que possui uma dinâmica que poderíamos caracterizar como “simplista”. Vejamos as justificativas desta qualificação analisando a definição do citado mapa, juntamente com a ilustração gráfica do mesmo, indicada na figura 7.1:

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \mu x & \text{se } x \in [0; 1/2] \\ \mu(1-x) & \text{se } x \in [1/2; 1] \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad (7.1)$$

Vemos que o mapa de Chaté possui um “bico” cuja altura é  $\mu/2$  (em preto). Para  $\mu = 2$  (em vermelho), o mapa recai no bastante conhecido mapa da tenda, o qual possui dinâmica caótica no intervalo  $[0, 1]$  [55, 31]. É interessante notar que para  $\mu > 2$  o mapa de Chaté adquire uma “janela” (em azul), centrada em  $x = 1/2$  e

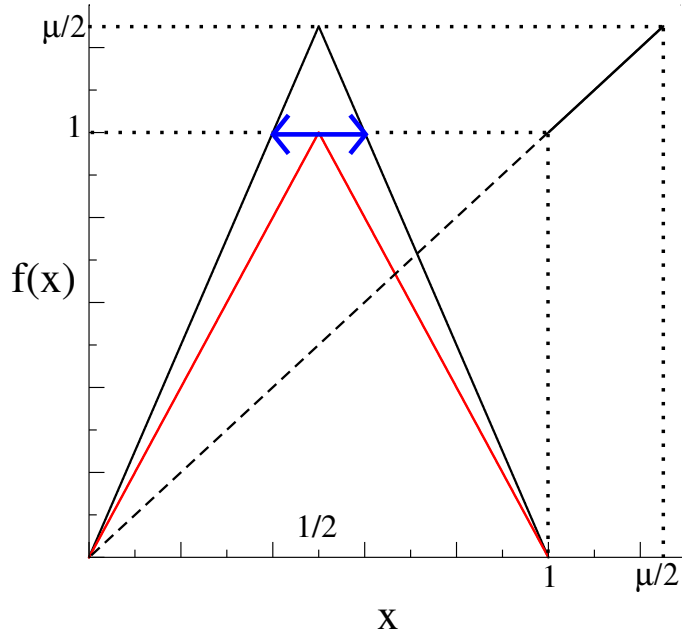


Figura 7.1: Mapa de Chaté para  $\mu = 2,5$ . Para  $\mu = 2,0$ , o mapa se reduz ao mapa da tenda (em vermelho). Em azul temos a janela de escape, a qual possui largura  $L = (\mu - 2)/\mu$ .

com largura  $L = (\mu - 2)/\mu$ , através da qual as iteradas do mapa podem escapar para um ponto  $(\bar{x}, f(\bar{x}))$  sobre a reta identidade, ou seja, quando uma dada iterada cair no intervalo  $[(1 - L)/2; (1 + L)/2]$  as iteradas seguintes permanecerão estacionadas no ponto fixo  $\bar{x}$ . Desta forma, para  $\mu > 2$ , o mapa possui um transiente caótico. Se analisarmos a evolução de um grande número de condições iniciais, veremos que a distribuição dos pontos fixos é uniforme no intervalo  $[1, \mu/2]$ .

Esta dinâmica temporal simples para um único mapa implica em um dinâmica espaço-temporal quando diversos mapas são acoplados, formando assim uma rede. Os estudos iniciais de Chaté e Manneville são baseados no comportamento de uma rede local com condições de contorno periódicas. Por outro lado, no presente trabalho, estendemos estes estudos à uma rede periódica sujeita a um acoplamento não-local de alcance variável, descrita por 2.14.

Nesta rede, quando  $\mu > 2$ , muitos sítios podem evoluir caoticamente no tempo enquanto outros podem evoluir estacionados nos seus pontos fixos particulares. Estes últimos sítios, quando agrupados, formam regiões conhecidas como regiões laminares, também chamados de platôs laminares. Estes platôs, ao qual associamos um comprimento  $l$ , estão indicados na figura 7.2a pelas setas cheias. Já as regiões caóticas (“burst” espacial) são indicadas pelas setas tracejadas. Esta figura representa o es-

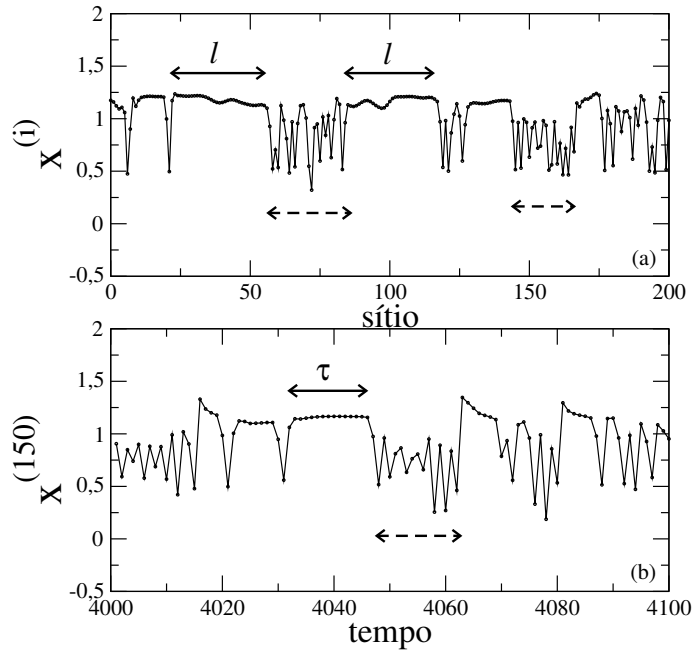


Figura 7.2: (a) Variável de estado versus sítio (espaço), instante 4053. (b) Evolução temporal do sítio  $i = 150$  registrada partir do instante 4000. Aqui  $\epsilon = 0,3658$ ,  $\mu = 3,0$ ,  $\alpha = 5,0$ . As regiões laminares correspondem a sítios com  $x > 1$ .

tado espacial da rede em um certo instante de tempo. Um fato interessante é que, diferentemente do mapa isolado, a interação entre os sítios da rede pode fazer com que um dado sítio  $i$  evoluindo laminarmente, isto é,  $x^{(i)} > 1$ , volte a evoluir caoticamente (“burst” temporal). Este fato é representado na figura 7.2b. Nesta figura nós associamos um “comprimento”  $\tau$  (seta cheia) ao período de tempo que um sítio permanece evoluindo dentro da região de escape. O resultado desta rica dinâmica temporal associada a presença de uma extensão espacial é a intermitência espaço-temporal, ou seja, um regime onde domínios laminares e caóticos coexistem de forma sustentada no espaço e no tempo, como mostra a planilha 7.3, a qual exhibe uma seqüência de evoluções para uma rede com  $N = 201$  sítios acoplados não-localmente, sendo que, em cada figura, os domínios laminares e caóticos são indicados pelas cores preta e branca, respectivamente. Usamos a figura 7.3d para construir a figura 7.2.

Um fato bastante interessante inferido da figura 7.3 e também de muitas outras simulações é que esta *fase intermitente* é estável no tempo desde que  $\epsilon$  não atinja um determinado valor crítico  $\epsilon_c(\mu, \alpha)$ . Observe que, no caso da planilha 7.3, o tamanho dos domínios laminares cresce quando  $\epsilon$  diminui e, muito embora não seja mostrado, para qualquer valor de  $\epsilon < 0,3658$  todos os sítios da rede terminam por atingir seu ponto fixo particular de escape. Quando isto ocorre, toda a rede passa a evoluir no regime laminar. Portanto existe um valor de  $\epsilon_c(\mu, \alpha)$  que sinaliza o limiar de uma fase intermitente estável. Abaixo de  $\epsilon_c$  a intermitência espaço-temporal é puramente

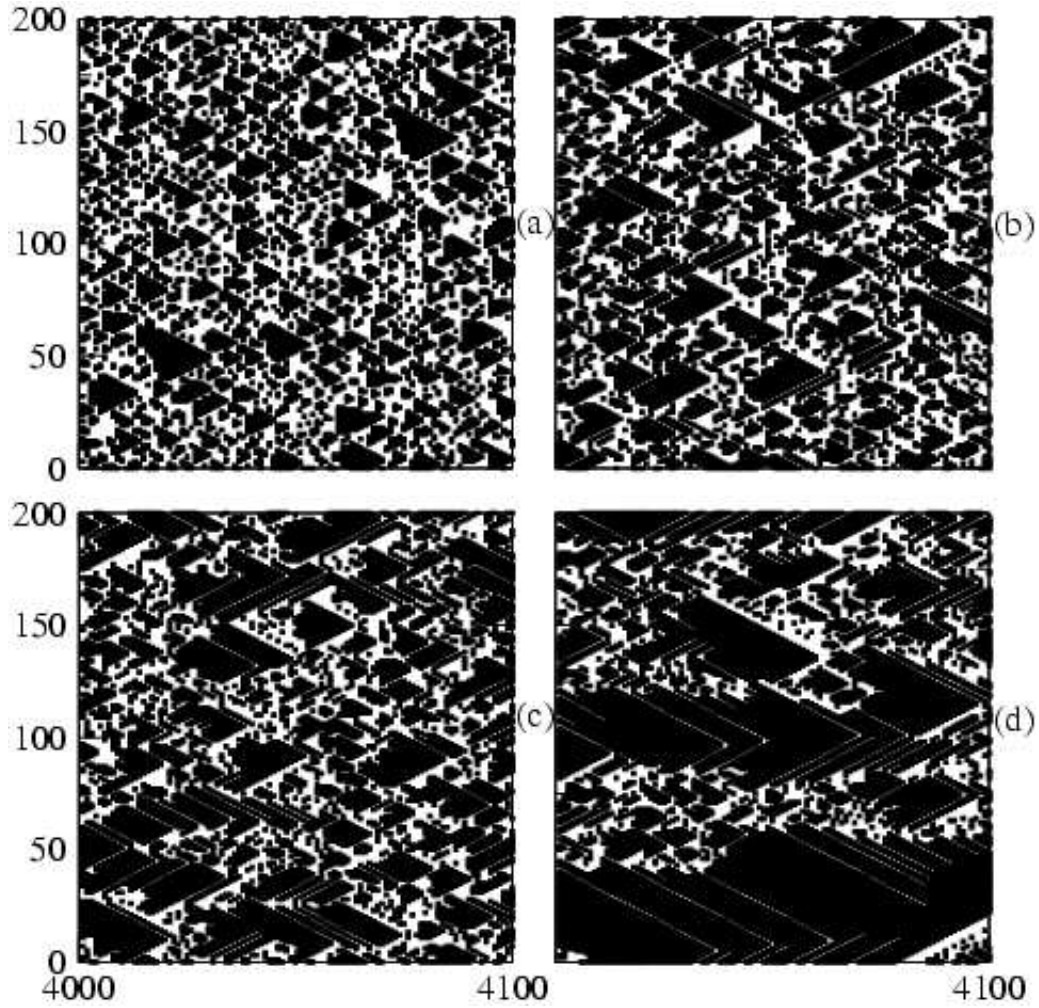


Figura 7.3: Evolução temporal de uma rede com  $N = 201$  sítios,  $\mu = 3,0$  e  $\alpha = 5,0$ . (a)  $\epsilon = 0,500$ , (b)  $\epsilon = 0,380$ , (c)  $\epsilon = 0,370$ , (d)  $\epsilon = 0,3658$ . As regiões pretas correspondem a sítios evoluindo no regime laminar, i.e.  $x > 1$ , e as brancas ao regime caótico.

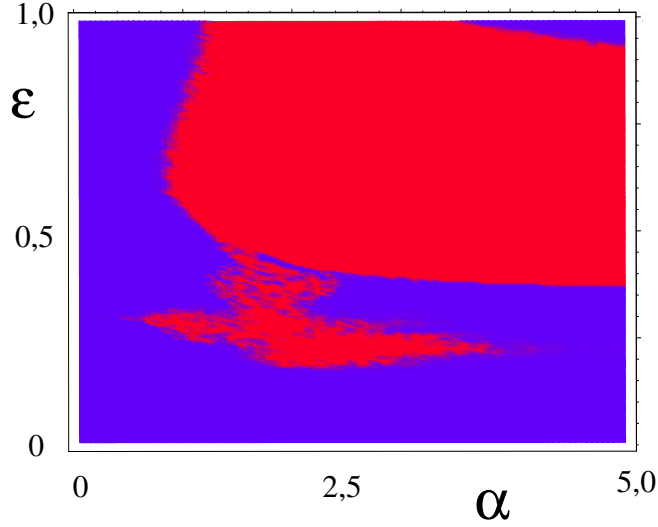


Figura 7.4: Domínio de parâmetros de uma rede com  $N = 201$  sítios,  $\mu = 3,0$ . As regiões vermelhas correspondem aos valores de  $\alpha$  e  $\epsilon$  no qual a rede evolui exibindo intermitência espaço-temporal estável. Já nas regiões em azul, todos os sítios da rede terminam por evoluir estacionados no escape após um transiente bem pequeno.

transiente e em algum momento, ela é substituída por uma *fase laminar*. Um outro fato que também constatamos é que, se a rede continuar a evoluir nesta fase, a mesma acaba por atingir, de forma assintótica, o seu próprio ponto fixo  $\mathbf{p}$  (ponto fixo da dinâmica do sistema, ou ponto fixo global), o qual deve satisfazer a seguinte condição:

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}, \quad (7.2)$$

onde  $\mathbf{M}$  foi previamente definida através da equação 2.22. A característica peculiar deste ponto fixo é a igualdade de suas  $N$  componentes:

$$x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = x_n^{(3)} = \dots = x_n^{(N)} = s, \quad (7.3)$$

o que representa um estado de completa sincronização.

A figura 7.4 mostra, para  $\mu = 3,0$ , o domínio dos parâmetros  $\alpha$  e  $\epsilon$  no qual as fases laminar e intermitente se fazem presentes. As regiões vermelhas correspondem aos valores de  $\alpha$  e  $\epsilon$  no qual a rede nunca atinge a fase laminar. Portanto, neste

domínio a rede apresenta uma intermitência estável. Nas simulações, o limite superior (teto) de tempo  $T$  usado para testar a presença da intermitência espaço-temporal foi de  $T = 10^5$  tempos. Nas regiões em azul a rede sempre atinge a fase laminar após um transiente bem pequeno (5000 tempos). Na extremo direito da figura 7.4, seguindo a linha  $\alpha = 5,0$  (acoplamento com interação local) podemos observar os valores críticos  $\epsilon_1 \simeq 0,36$  e  $\epsilon_2 \simeq 0,93$  delimitando os regimes laminar e intermitente. Estes valores críticos dependem ligeiramente das condições iniciais e do tamanho  $N$  do sistema porém esta dependência influencia somente a terceira casa decimal. A ligeira dependência com  $N$  foi testada para redes com tamanho variando entre  $N = 101 - 2001$ . O valor  $\epsilon_1$  foi utilizado como base para se contruir a figura 7.3.

## 7.2 Região de intermitência

No caso de  $\alpha = 5,0$ , fizemos um estudo do comportamento de uma rede com  $N = 2001$  sítios no interior da região intermitente ( $\epsilon_1 < \epsilon < \epsilon_2$ ). Este estudo revelou um comportamento interessante da rede quando nos aproximamos das fronteiras críticas. A figura 7.5 exhibe a probabilidade  $P(l)$  de ocorrência da região laminar (“cluster”) de largura  $l$  para alguns valores de  $\epsilon$ . A figura 7.6 exhibe a probabilidade  $P(\tau)$  de ocorrência do período de escape  $\tau$  para um único sítio. Devemos aqui lembrar o leitor que as quantidades  $l$  e  $\tau$  já foram previamente definidas através das figuras 7.2a e 7.2b, respectivamente.

Notamos que no interior da região intermitente (Fig. 7.5(b) e Fig. 7.6(b)) a distribuição de probabilidades possui um comportamento puramente exponencial com inclinação  $\gamma \simeq 1/2$ . Quando o sistema evolui com acoplamento nas vizinhanças de  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , o comportamento exponencial das distribuições é substituído gradualmente pelo comportamento algébrico, como indica a seqüência de curvas registradas nas figuras 7.5(a) ou 7.6(a). Observe que nesta mudança a curva exhibe duas leis de escala: um comportamento algébrico na “crista” e um comportamento exponencial na “cauda” representado nas pequenas figuras interiores às figuras 7.5(a) e 7.6(a). No limiar da fase intermitente, o comportamento é puramente algébrico, sendo a inclinação  $\gamma \approx 2$ . Portanto, esta mudança de comportamento nas distribuições via variação de  $\epsilon$  se dá através de um “esticamento” gradual da parte algébrica da curva. Comportamento análogo ocorre também na segunda borda, o que é evidenciado através das figuras 7.5(c) ou 7.6(c). Este fato é um reflexo do que ocorre fisicamente na dinâmica espaço-temporal da rede (Fig. 7.3): um aumento na incidência de platôs ou períodos de escape maiores nas vizinhanças de  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , o que é consistente com o quadro apresentado na figura 7.3. Por outro lado, este tipo de distribuição onde existem duas leis de escalas (existência de um “ombro” na distribuição) é típico de sistemas que exibem comportamento intermitente onde um termo ruidoso é adicionado às equações determinísticas envolvidas. Neste caso, o valor variável onde a



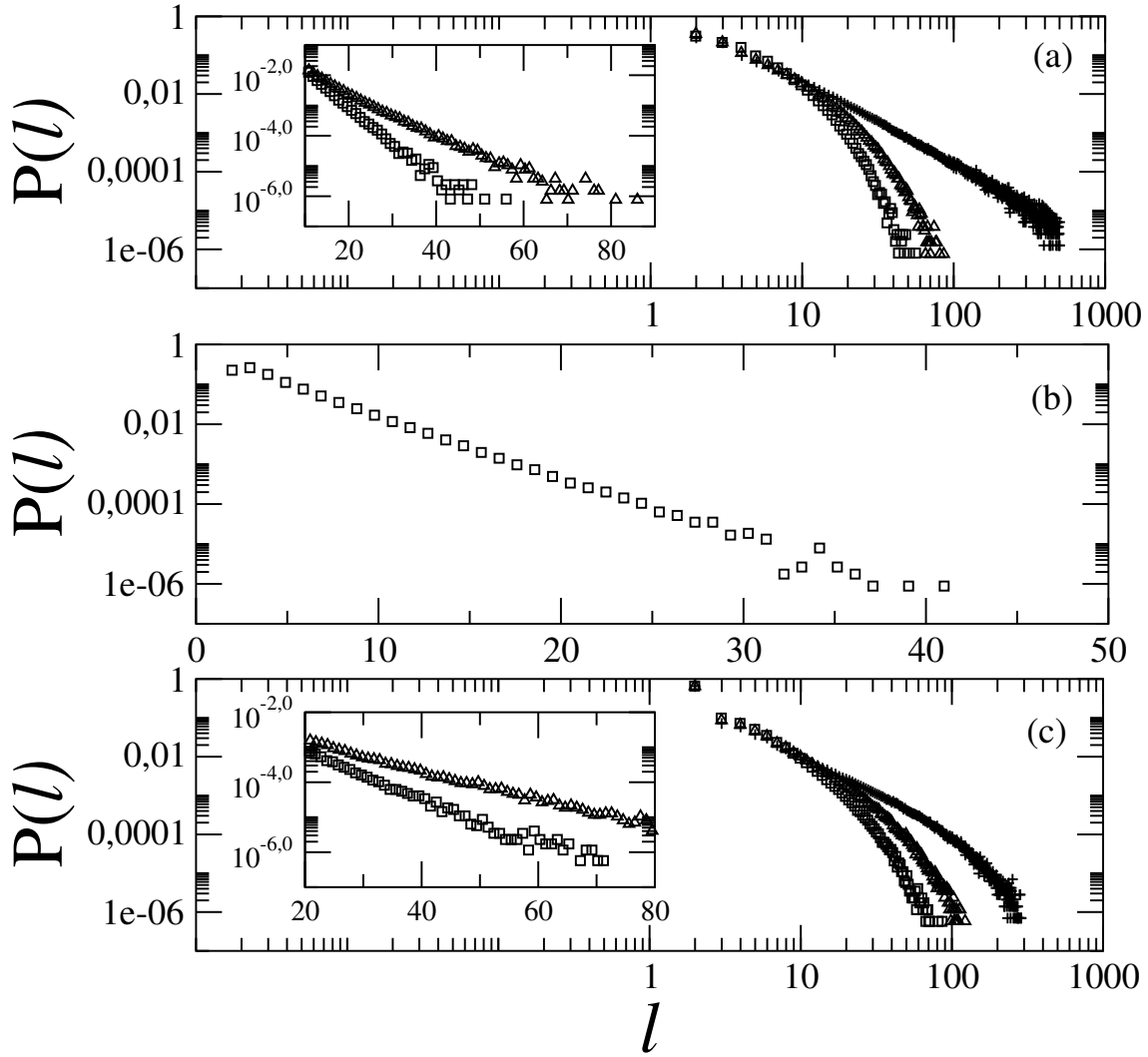


Figura 7.5: Histograma normalizado da largura das regiões laminares. (a)  $\epsilon = 0,400$  ( $\square$ ),  $\epsilon = 0,370$  ( $\triangle$ ),  $\epsilon = 0,365$  (+). (b)  $\epsilon = 0,500$  ( $\square$ ), (c)  $\epsilon = 0,900$  ( $\square$ ),  $\epsilon = 0,912$  ( $\triangle$ ),  $\epsilon = 0,930$  (+). Aqui  $N = 2001$ ,  $\mu = 3,0$  e  $\alpha = 5,0$ .

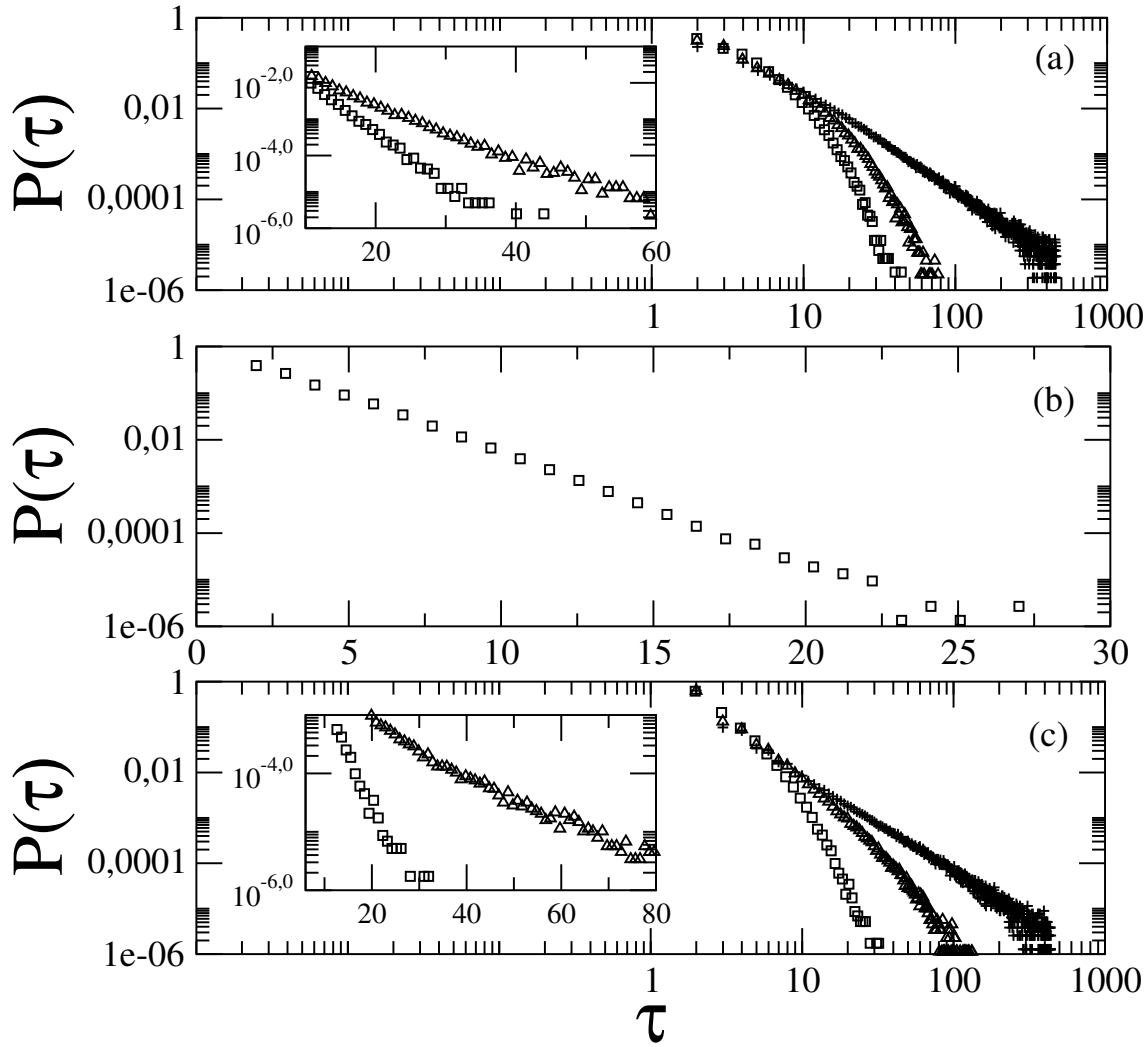


Figura 7.6: Histograma normalizado dos períodos de escape para um único sítio. (a)  $\epsilon = 0,400$  ( $\square$ ),  $\epsilon = 0,370$  ( $\triangle$ ),  $\epsilon = 0,365$  ( $+$ ). (b)  $\epsilon = 0,500$  ( $\square$ ), (c)  $\epsilon = 0,800$  ( $\square$ ),  $\epsilon = 0,900$  ( $\triangle$ ),  $\epsilon = 0,930$  ( $+$ ). Aqui  $N = 2001$ ,  $\mu = 3,0$  e  $\alpha = 5,0$ .

curva muda de comportamento está relacionado ao nível de ruído [13].

O comportamento destas probabilidades nos valores mais interessantes do parâmetro  $\epsilon$  está sintetizado no conjunto de equações 7.4 – 7.6.

$$\epsilon = 0,365 \quad P(l) = 2,19 l^{-2,06} \quad P(\tau) = 3,7 \tau^{-2,2} \quad (7.4)$$

$$\epsilon = 0,500 \quad P(l) = 0,54 \exp(-0,35 l) \quad P(\tau) = 1,3 \exp(-0,55 \tau) \quad (7.5)$$

$$\epsilon = 0,930 \quad P(l) = 0,73 l^{-1,88} \quad P(\tau) = 1,05 \tau^{-2,10} \quad (7.6)$$

A figura 7.7(a) exhibe o período médio que um sítio permanece confinado no escape em função do acoplamento  $\epsilon$  no caso do acoplamento local  $\alpha = 5,0$ . A figura 7.7(b) representa o número de vezes que um sítio permanece no escape. Notamos, que ao aproximarmos dos valores críticos  $\epsilon_1 = 0,36$  e  $\epsilon_2 = 0,93$  a partir do interior da região de intermitência, o período médio aumenta gradualmente até o valor limite aproximado de  $\langle \tau \rangle \approx \infty$  em ambas as fronteiras. De maneira inversa, o número de períodos de escape tende a diminuir próximo a  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ . Fora do intervalo  $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ , o sítio evolui indefinidamente no escape. Neste caso,  $N_\tau = 1$  e  $\langle \tau \rangle \approx \infty$ . Comportamento similar ocorre também para a largura média dos domínios laminares (“clusters”) e o número dos mesmos.

### 7.3 Região laminar

Mencionamos anteriormente que se a rede continuar a evoluir a partir do instante em que todos os sítios atingem o escape a rede atinge assintoticamente o ponto fixo global  $p$ . Nesta seção realizamos uma investigação do comportamento deste ponto fixo em relação ao acoplamento  $\epsilon$  para um grande número de condições iniciais. O método usado para se determinar o valor de  $p$  para uma certa condição inicial é baseado na definição de um limite inferior para a dispersão das amplitudes do perfil da rede, em certo instante de tempo  $n$ , em relação a sua média espacial  $\langle x \rangle_n = 1/N \sum_{i=1}^N x_n^{(i)}$ . A dispersão é dada por

$$(\delta x)_n = \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_n^{(i)} - \langle x \rangle_n)^2 \right]^{1/2} \quad (7.7)$$

e em nossas investigações, foi escolhida como  $\delta x < 10^{-3}$ .

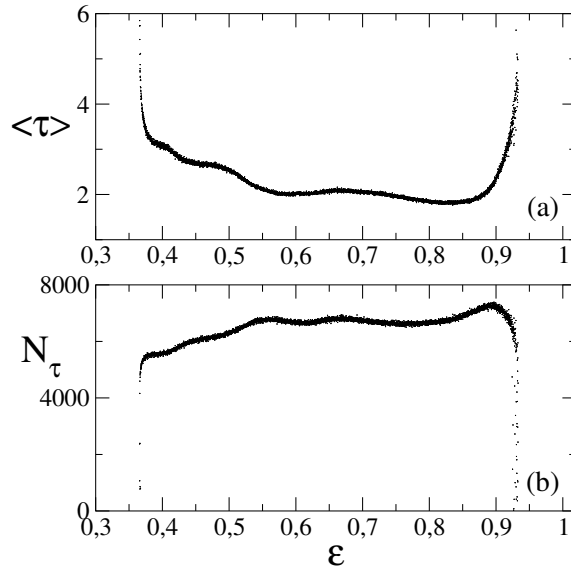


Figura 7.7: (a) Período médio que um sítio permanece confinado no escape em função do acoplamento  $\epsilon$ . (b) número de períodos de confinamento para o mesmo sítio. Aqui  $N = 201$ ,  $\mu = 3,0$ ,  $\alpha = 5,0$  e  $i = 50$ . Em ambas as figuras a órbita usada é de 40000 tempos.

A figura 7.8 exhibe, para o caso  $\alpha = 5,0$  (acoplamento com interação local), alguns histogramas dos pontos fixos da rede dentro das duas regiões laminares avaliados para 1000 condições iniciais diferentes. Para  $\epsilon < \epsilon_1$ , temos as figuras 7.8(a)-(c), e para  $\epsilon > \epsilon_2$ , temos as figuras 7.8(d)-(f). Todas as distribuições são aproximadamente gaussianas no intervalo  $[1, \mu/2]$ .

No caso da figura 7.8(a) podemos observar que, em virtude do acoplamento, ainda que muito fraco, a distribuição deixa de ser uniforme, o que é esperado no caso  $\epsilon = 0$ , para acumular-se de forma gaussiana em torno do valor  $p \simeq 1,25$ . Enquanto  $\epsilon$  aumenta (Fig. 7.8(b)) a distribuição sofre um pequeno deslocamento para  $p \simeq 1,15$  retornando em seguida para o valor anterior. A extensão desta análise para uma gama maior de valores de  $\epsilon$  encontra-se retratada na figura 7.9(a), na qual podemos conhecer o valor médio do ponto fixo global em função de  $\epsilon$ . No caso de forte acoplamento (Figs. 7.8(d)-(f)) a distribuição torna-se mais fortemente concentrada em torno do valor  $p \simeq 1,1$ . Além disso, enquanto  $\epsilon$  aumenta  $p$  permanece imutável (Fig. 7.9(c)).

Estudamos também o comportamento do ponto fixo da rede para o caso  $\alpha = 0$  (campo médio). Neste caso, onde a interação entre os sítios é bastante intensa, a distribuição dos pontos fixos globais possui um comportamento bastante diferente como indica a figura 7.10. Enquanto  $\epsilon$  aumenta, a distribuição dos pontos fixos, aproximadamente gaussiana e centrada em  $p \simeq 1,25$ , desloca-se para a unidade ao

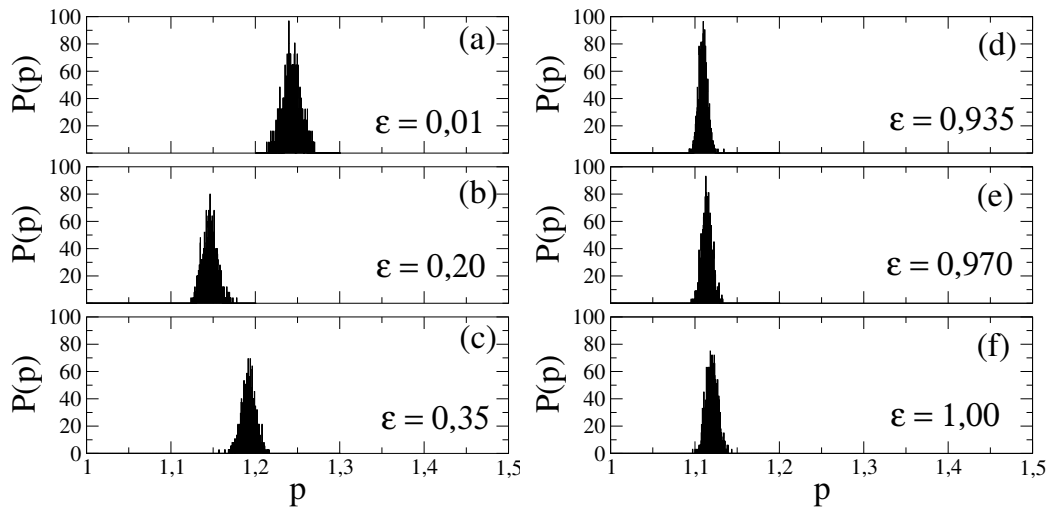


Figura 7.8: Histograma dos pontos fixos para 1000 condições iniciais aleatórias de uma mesma rede com  $N = 201$  sítios,  $\mu = 3,0$  e  $\alpha = 5,0$ .

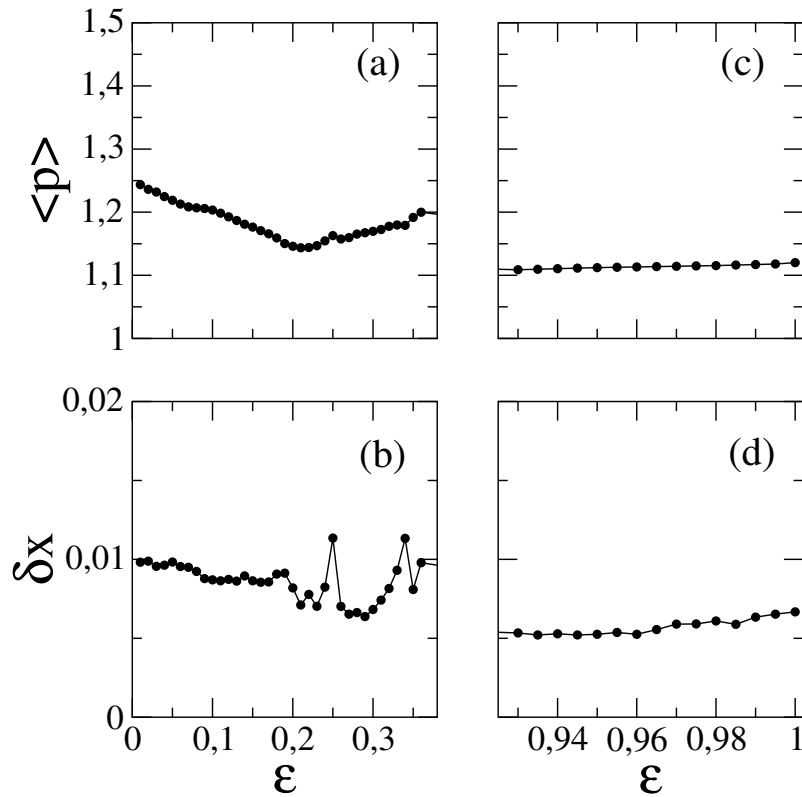


Figura 7.9: (a) Ponto fixo da rede em função do acoplamento  $\epsilon$  para  $\epsilon < \epsilon_1$ . (b) Dispersão correspondente aos valores da figura (a). (c) Ponto fixo da rede em função do acoplamento  $\epsilon$  para  $\epsilon > \epsilon_2$ . (d) Dispersão correspondente aos valores de (c). Aqui  $\mu = 3,0$  e  $\alpha = 5,0$ .

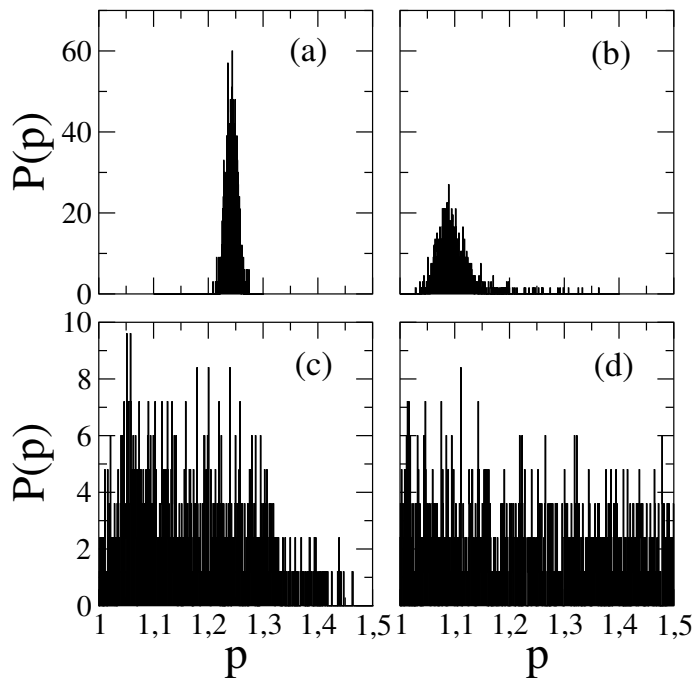


Figura 7.10: Histograma dos pontos fixos para 1000 condições iniciais aleatórias de uma mesma rede com  $N = 201$  sítios,  $\mu = 3,0$  e  $\alpha = 0,0$ . (a)  $\epsilon = 0,01$ , (b)  $\epsilon = 0,35$ , (c)  $\epsilon = 0,6$ , (d)  $\epsilon = 1,00$ .

mesmo tempo em que se alarga (Figs. 7.10(a) e (b)). Quando  $\epsilon$  está próximo da unidade (Figs. 7.10(c) e (d)) a distribuição torna-se uniforme no intervalo  $[1, \mu/2]$ , um comportamento muito similar ao de um único mapa isolado reiniciado com o mesmo número de condições iniciais. Esta última afirmação também é confirmada pelo cálculo do ponto fixo global médio representado na figura 7.11. Em  $\epsilon \simeq 1,0$ , temos  $\langle p \rangle \approx (\mu/2 + 1)/2$ .

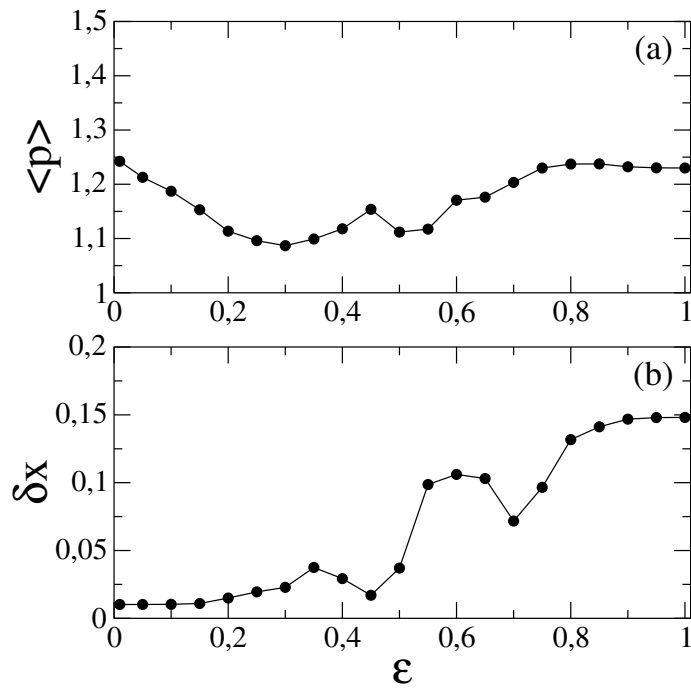


Figura 7.11: Fig. (a) Ponto fixo da rede em função do acoplamento  $\epsilon$ . Fig. (b) Dispersão correspondente aos valores da figura (a). Aqui  $\mu = 3,0$  e  $\alpha = 0$ .

## 7.4 Correlação espacial crítica

Um outro tema investigado no estudo da rede de mapas de Chaté relacionado ao comportamento coletivo dos mapas é a função de correlação espacial (FCE) definida no capítulo 4. Dentro da região de intermitência a FCE para a rede em estudo exibe um decréscimo abrupto já nos primeiros sítios, evidenciando assim um processo  $\delta$ -correlacionado ou, de outra forma, a inexistência de correlação entre os sítios. Por outro lado, nas proximidades das fronteiras críticas,  $\epsilon \rightarrow \epsilon_1^+$  e  $\epsilon \rightarrow \epsilon_2^-$ , a FCE adquire o comportamento

$$e(l) \simeq l^{-\beta} e^{-l/\zeta}. \quad (7.8)$$

Este comportamento misto da FCE proporciona a definição de uma quantidade característica bastante importante do sistema, o *comprimento de correlação*  $\zeta$ .  $\zeta$  representa uma estimativa do tamanho da maior região espacialmente correlacionada dentro da rede [58, 59]. Na seção 4.3, ao investigarmos os defeitos em uma rede local, definimos um comprimento de correlação  $l_c$  baseado unicamente na obtenção do primeiro *zero* da FCE. Naquela ocasião, isto era necessário pois não encontramos uma equação simples que se ajustava adequadamente à FCE calculada e que permitia uma definição precisa, como agora se apresenta, de um comprimento característico de correlação.

A figura 7.12a exibe o resultado do cálculo da FCE média para alguns valores de  $\epsilon$  dentro da região de intermitência para o caso  $\alpha = 5, 0$ . O ajuste de uma função adequada à FCE obtida para os valores de  $\epsilon$  nas proximidades de  $\epsilon_1$  fornece o seguinte quadro de resultados (Eqs. 7.9 e 7.10)

$$\epsilon = 0,3647 \quad e(l) = 0,52 l^{-0,26} \exp(-l/112,3) \quad \text{c.c.} = 0,998572 \quad (7.9)$$

$$\epsilon = 0,3646 \quad e(l) = 0,54 l^{-0,18} \exp(-l/219,6) \quad \text{c.c.} = 0,997193 \quad (7.10)$$

Notamos que, à medida que  $\epsilon^+$  aproxima-se de  $\epsilon_1$ , o valor de  $\zeta$  aumenta. De fato, se continuarmos um pouco mais neste processo vamos verificar que a quantidade  $\zeta$  diverge quando  $\epsilon^+ \simeq \epsilon_1$ . Nesta situação, o comportamento exponencial da equação 7.8 desaparece e o resultado é uma lei de potência. Esta lei de potência está representada pela linha tracejada na figura 7.12a e é dada pela equação  $e(l) = 0,647 l^{-0,286}$ . Este comportamento nas vizinhanças da criticalidade ocorre também quando  $\epsilon^-$  aproxima-se de  $\epsilon_2$ . Neste caso, a lei de potência desenvolvida está representada pela linha tracejada na figura 7.12b e é dada por  $e(l) = 0,997 l^{-0,671}$ .



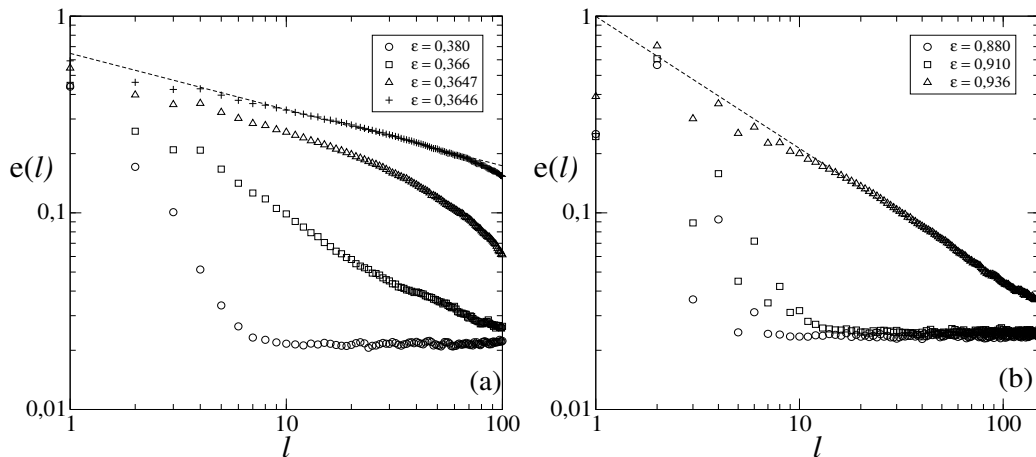


Figura 7.12: FCE média para alguns valores de  $\epsilon$  próximos aos valores críticos. (a) Próximo a  $\epsilon_1$ , (b) Próximo a  $\epsilon_2$ . Rede com  $N = 2001$ ;  $\mu = 3,0$ ;  $\alpha = 5,0$  (média sobre 2000 tempos tomados a partir do instante 4000).

Em resumo, podemos afirmar, que acima do valor crítico  $\epsilon_1$  e abaixo do valor crítico  $\epsilon_2$ , o comportamento coletivo da rede exibe correlações de curto alcance espacial. Muito próximo ao ponto crítico, estas correlações tornam-se de longo alcance. Esta conclusão é bastante consistente com o panorama apresentado pelo modelo até o momento, pois é notório nas figuras 7.3 (de forma gráfica) e 7.5 (de forma estatística) a presença de platôs laminares extensos. De certa forma, a presença de comprimentos de correlação da ordem do tamanho da rede (ordem “macroscópica”) nas vizinhanças do ponto crítico  $\epsilon_1$  sinaliza a presença de uma ordem espacial iminente no sistema: a fase laminar. Este comportamento foi apontado por Jensen [9], ao menos no caso de uma rede acoplada localmente, como uma evidência de que a transição para caos espaço-temporal representa um fenômeno crítico. Entretanto, esta afirmação bem como a existência de uma suposta *universalidade* ainda é incerta [56, 57].

A diferença substancial do comportamento coletivo na dinâmica espaço-temporal da rede nas regiões laminares e caóticas sugere a introdução de uma quantidade que defina o grau de ordem no sistema em cada uma destas regiões bem como nas vizinhanças da linha crítica (a linha que separa as tonalidades vermelha e azul na figura 7.4). Esta quantidade é conhecida como parâmetro de ordem  $Q$  para a rede. No presente modelo, uma definição adequada para  $Q$  seria a *fração de sítios na fase caótica em certo instante de tempo  $n$*  ( $m_n$ ) promediado sobre um período de tempo  $T$  que normalmente exclui o tempo transiente, ou seja,

$$Q = Q(\alpha, \epsilon) = \frac{\sum_{n=1}^T m_n}{T}. \quad (7.11)$$

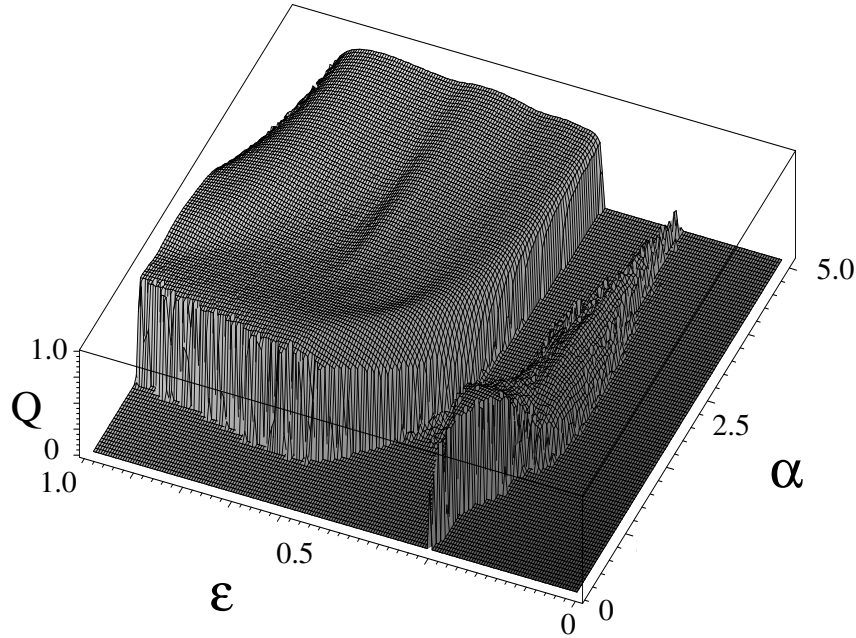


Figura 7.13: Parâmetro de ordem de uma rede com  $N = 201$  sítios,  $\mu = 3,0$ . O transiente descartado é de 2000 tempos.

Um parâmetro de ordem próximo de zero significa que, em média, a rede possui a maioria dos sítios evoluindo no escape. Em uma situação onde o caos espaço-temporal está presente, o parâmetro de ordem se aproxima da unidade. A figura 7.13 mostra o cálculo de  $Q$  para uma rede de 201 sítios em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\epsilon$  onde  $\mu = 3,0$ . Este diagrama evidencia também, para  $\alpha = 5,0$ , os dois valores críticos  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  onde a rede muda de comportamento. Neste caso, o parâmetro de ordem vai a zero nas vizinhanças de  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ . Para  $\alpha = 5,0$ , dentro do intervalo  $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ , não muito próximo às bordas, o parâmetro de ordem possui um valor  $Q \simeq 0,6$ . Já para  $\alpha = 1,0$ ,  $Q$  sobe para  $Q \simeq 0,8$ . Neste diagrama, observamos também a existência de uma região muito estreita localizada em  $\epsilon \simeq 0,21$  onde  $Q$  é próximo a  $0,8$  para um acoplamento do tipo campo médio ( $\alpha = 0$ ) e cai gradualmente para um valor nulo quando o acoplamento se aproxima do caso local ( $\alpha \simeq 5$ ).

# Capítulo 8

## Conclusões

Neste trabalho, empregamos vários diagnósticos numéricos com o objetivo de caracterizar a distribuição espacial das variáveis de estado de uma rede de mapas logísticos acoplados localmente e não-localmente. Neste último caso, fizemos uso de um acoplamento no qual a interação entre os sítios decai com a distância entre os mesmos segundo uma lei de potência. A presença do parâmetro que controla o alcance da interação entre os sítios (parâmetro  $\alpha$ ), permite que a rede passe de forma contínua de uma rede com interação local (somente os primeiros-vizinhos) para uma rede com interação não-local (campo médio).

O primeiro diagnóstico empregado foi a função de correlação espacial  $e(l)$ . No caso de uma interação local com  $\mu = 4,0$  (caso caótico), o decréscimo desta função não segue uma lei de escala geral. De fato, não detectamos comportamentos do tipo linear, exponencial, lei de potência, ou mesmo um comportamento misto. De forma geral, neste valor do parâmetro de não-linearidade as observações indicam que as variáveis de estado dos sítios são  $\delta$ -correlacionadas. Esta evidência ocorre mesmo no caso de um valor elevado do parâmetro de acoplamento  $\epsilon$ . Em outras palavras, os sítios não possuem qualquer correlação. Este fato dificulta de certa forma uma análise quantitativa do padrão espacial baseado unicamente no decréscimo da FCE quando a rede apresenta caos espaço-temporal, ao menos, obviamente, no caso local. Por outro lado, quando  $\mu < 4,0$ , detectamos decréscimos oscilatórios com extensão de até 10 por cento do tamanho da rede. Neste caso um ajuste nos máximos poderia, em princípio, fornecer uma certa quantificação. Porém, o número de pontos para o ajuste seria extremamente pequeno. Quando, em particular, a rede apresenta um único defeito o decréscimo da FCE é linear, com o primeiro mínimo situado na metade da extensão da rede. Adotamos o primeiro mínimo como uma estimativa do maior pedaço de estrutura espacialmente correlacionada na distribuição espacial das variáveis de estado, o que permitiu mostrar que o tamanho deste “cluster” diminui à medida que os defeitos se aniquilam.

No caso de interação não-local constatamos que a FCE passa de um comportamento do tipo função- $\delta$  para um comportamento espacialmente extenso quando a rede muda de uma rede com interação local ( $\alpha = 5, 0$ ) para uma rede com interação não-local ( $\alpha < 1, 0$ ), sendo que, nas vizinhanças de um estado de completa sincronização de amplitudes,  $e(l) \rightarrow 1, 0$ . Entretanto, aqui a FCE não segue uma lei de escala geral quando a mesma é extensa, o que dificulta, assim como no caso local, uma análise quantitativa do padrão espacial baseado no decréscimo da FCE. Usamos, como análise alternativa, o conceito do primeiro mínimo para mostrar que este cresce quando a rede passa de local para não-local, sendo que em uma vizinhança muito próxima de  $\alpha_c$  o primeiro mínimo cresce linearmente com  $\alpha$ , e que também este primeiro mínimo é uma quantidade extensiva.

Aplicamos o método de Grassberger e Procaccia a fim de determinarmos a dimensão de correlação  $D$  para uma rede não-local evoluindo caoticamente no tempo com  $N$  da ordem de centenas de sítios. No caso de uma interação do tipo campo médio ( $\alpha = 0$ ), quando a rede está apta a atingir um estado de completa sincronização ( $\epsilon = 1, 0$ ), o método forneceu satisfatoriamente o valor  $D \approx 0,99$ . Entretanto, em um estado onde a rede se aproxima da variedade de sincronização de forma intermitente sem nunca efetivamente atingi-la ( $\alpha = 0,75$ ), o MGP mostrou-se inconclusivo: a saturação da estimativa da dimensão  $D$  com a imersão  $m$  deve ocorrer em um valor muito elevado de  $m$ . Isto, *a priori*, é uma evidência de que o atrator deve possuir elevada dimensão, certamente muito maior que 5. Aplicamos uma variante do MGP, que emprega uma integral de correlação avaliada sobre a distribuição espacial das variáveis de estado espacialmente reconstruídas. Este novo enfoque baseado na idéia de que a dimensão do atrator (seja ela proveniente de qualquer definição que seja) é uma quantidade extensiva, proporcionou uma forma satisfatória do cálculo de um número que caracteriza a dinâmica da rede não-local evoluindo distante da variedade de sincronização (por exemplo,  $(\alpha, \epsilon) = (5, 0; 0, 1)$ ) ou mesmo próxima (ou seja  $\alpha \rightarrow \alpha_c^+$ ).

Introduzimos dois novos diagnósticos que possibilitam quantificar a aleatoriedade da distribuição espacial das variáveis de estado de uma rede com interação não-local evoluindo caoticamente no tempo. A ferramenta básica necessária para implementação destes dois diagnósticos é a realização de uma reconstrução espacial do perfil irregular da rede em um dado instante de tempo. O primeiro diagnóstico é baseado no mapa de primeiro retorno espacial. Neste caso, introduzimos uma grandeza que possibilita medir o grau de espalhamento da nuvem de pontos espacialmente reconstruídos em torno da diagonal do mapa. A avaliação desta grandeza quando a rede passa de uma rede com interação local ( $\alpha = 5, 0$ ) para uma rede não-local ( $\alpha < 1, 0$ ) mostrou que a mesma é consistente em descrever o colapso dos graus de liberdade espaciais quando a rede se aproxima de um estado de completa sincronização em amplitude. O segundo diagnóstico elaborado por nós, o gráfico de recorrência espacial, constitui-se na representação gráfica da recorrência entre os pontos espalhados sobre o mapa de primeiro retorno espacial. Adequamos ao GRE algumas

grandezas quantificadoras já consagradas quando usadas nos tradicionais gráficos de recorrência temporais, os quais são bastante empregados na análise de séries temporais. No caso do GRE, de forma geral, as grandezas *recorrência*, *laminaridade* e *distância média laminar* mostraram-se também satisfatórias no que diz respeito aos aspectos de uma rede com possibilidades de sincronização. Acreditamos que os diagnósticos introduzidos segundo os objetivos do nosso trabalho, o MRE e o GRE, possam expandir os horizontes da caracterização espacial para outras aplicações, as quais não devem simplesmente abordar aspectos da sincronização de amplitudes em uma rede de mapas acoplados (RMA), ou até mesmo aspectos puramente espaciais. Neste último caso, o uso de mapas de retorno e recorrência “espaço-temporais” no estudo de caos espaço-temporal apresenta-se como um tema a ser investigado.

O último assunto estudado neste trabalho de doutoramento foi a rede de mapas de Chaté-Manneville, notoriamente conhecida como um modelo que satisfaz exigências mínimas para o estudo da intermitência espaço-temporal. O nosso objetivo inicial era o estudo desta rede quando a interação entre os sítios é não-local, em especial uma interação que decai na forma de uma lei de potência. Em nosso estudo construímos o espaço de parâmetros  $(\alpha, \epsilon)$  para  $\mu = 3, 0$ , o qual revelou a existência não de um ponto, como acontece em uma rede com interação local, mas sim de fronteiras onde a rede muda de um comportamento intermitente para um comportamento laminar. Ao menos no caso onde o alcance da interação é pequeno ( $\alpha = 5, 0$ ) observamos a existência de dois valores do acoplamento  $\epsilon$  onde a rede exhibe um comportamento que lembra muito uma transição de fase. Tal afirmação é motivada pelo desenvolvimento de um comportamento algébrico da FCE em uma vizinhança muito próxima da criticalidade. Neste modelo para intermitência espaço-temporal, não deixamos de investigar também a distribuição espacial das variáveis de estado. Neste caso, determinamos a distribuição dos pontos fixos bem como o valor dos mesmos dentro da região onde a rede exhibe comportamento laminar. Investigamos, também a distribuição das larguras espaciais e “temporais” das regiões laminares dentro da região de intermitência espaço-temporal, neste caso, constatamos que esta distribuição também desenvolve comportamento algébrico em uma vizinhança muito próxima à criticalidade.

Como trabalhos futuros pretendemos investigar a possibilidade da inclusão do tempo nos diagnósticos MRE e GRE, com vistas a estudar a dinâmica espacial e temporal quando conectadas, e em seguida empregar estes diagnósticos no estudo de caos espaço-temporal. No caso da rede de mapas logístico com interação local, e na região de parâmetros onde existe defeitos, seria interessante tentar estabelecer alguma relação entre o comprimento de correlação e a largura do domínio zigzague. Para a rede de mapas de Chaté-Manneville com interação não-local, pretendemos estudar outras regiões do espaço de parâmetros e investigar melhor o comportamento do comprimento de correlação  $\zeta$  em outros pontos da fronteira “crítica” apresentada pelo modelo.

# Apêndice A

## Dimensão de Lyapunov

Em 1979 Kaplan e Yorke [30] introduziram uma quantidade que relaciona os expoentes de Lyapunov relativos as direções contrativas e estirantes de uma sistema dinâmico no  $\mathbb{R}^N$  à dimensão fractal do atrator apresentado por este sistema. Esta relação pode ser desenvolvida de forma heurística analisando-se a figura A.1. Nesta figura, uma região do espaço de fase de uma sistema dinâmico caótico no  $\mathbb{R}^2$  evolui temporalmente. Uma direção estira por um fator  $e^{\lambda_1 t}$  (com  $\lambda_1 > 0$ ) enquanto que a outra contrai por um fator  $e^{\lambda_2 t}$  (com  $\lambda_2 < 0$ ). Dentro destas condições o quadrado de aresta  $l_0$ , que delimita uma área  $A_0$ , evolui para uma retângulo cujas arestas são  $l_1$  e  $l_2$  ( $l_1 > l_2$ ). Ou seja, a área evolui com o tempo segundo  $A(t) = A_0 e^{(\lambda_1 - |\lambda_2|)t}$ .

O número de quadrados  $N(\varepsilon)$  de aresta  $\varepsilon$  necessários para recobrir uma certa área do espaço de fase e o próprio  $\varepsilon$  mudam também com o tempo. No instante de tempo  $t$ , o número  $N(\varepsilon)$  de quadrados necessários para recobrir a área final retangular é dado por

$$N(\varepsilon) = \frac{l_1}{l_2} = e^{(\lambda_1 + |\lambda_2|)t}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $l_1 = l_0 e^{\lambda_1 t}$  e  $\varepsilon = l_2 = l_0 e^{-|\lambda_2|t}$ .

A dimensão de capacidade  $D_C$  do atrator representa o expoente de escala da variação de  $N(\varepsilon)$  com  $\varepsilon$  e é definida operacionalmente através da relação

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (\text{A.2})$$

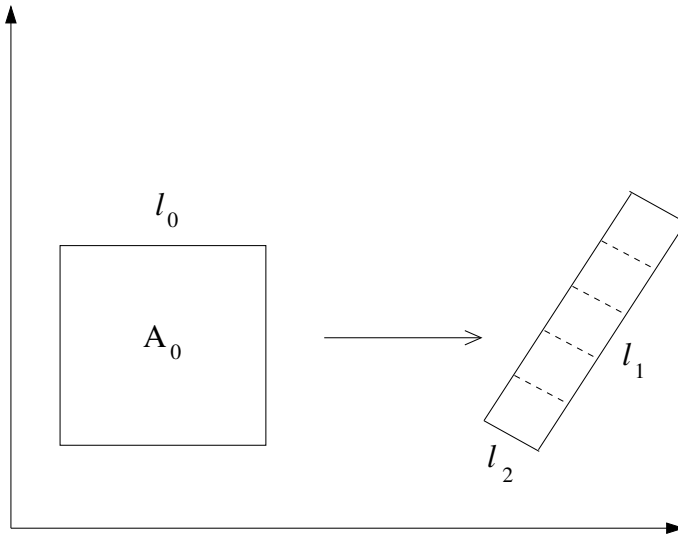


Figura A.1: Diagrama esquemático mostrando o papel dos expoentes de Lyapunov no estiramento e contração em uma região do espaço de fase bidimensional.

Fazendo uso da equação A.1 e das definições de  $l_1$  e  $l_2$ , podemos facilmente chegar ao resultado

$$D_C = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}. \quad (\text{A.3})$$

Esta relação, conhecida como relação de Kaplan-Yorke ou simplesmente dimensão de Lyapunov, representa uma conexão importante entre a geometria fractal do atrator e a propriedade da dependência sensível às condições iniciais. Esta relação pode ainda ser generalizada para um sistema  $N$ -dimensional [30] (por uma questão de adequação à literatura, iremos trocar o índice  $C$  por  $L$ )

$$D_L \equiv j + \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}, \quad (\text{A.4})$$

onde os  $\lambda_i$  são ordenados ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ ) e  $j$  é o índice do maior expoente de Lyapunov não-negativo. Nos casos extremos  $j = 0$  (nenhum  $j$  existe) ou  $j = N$  define-se  $D_L = 0$  ou  $D_L = N$  respectivamente.

# Bibliografia

- [1] R. Badi and A. Politi: *Complexity: Hierarchical structure and scaling in physics* (Cambridge Nonlinear Series 6, Cambridge, 1997).
- [2] G. L. Baker and J. P. Gollub: *Chaotic dynamics: an introduction*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [3] G. Nicolis: *Introduction to nonlinear science*, Cambridge University Press, 1999.
- [4] J. Brindley, K. Kaneko, T. Kapitaniak: *Spatio-temporal Chaos in Closed and Open Systems*, *Chaos Solitons and Fractals* **4**, 7, (1994)1193-1209.
- [5] K. Kaneko: *Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems*, Wiley, Chichester, 1993.
- [6] D. B. Vasconcelos, S. R. Lopes, R.L. Viana and J. Kurths: *Spatial recurrence plots for coupled map lattices with long-range interactions*, a ser submetido.
- [7] H. Chaté and P. Manneville: *Spatio temporal intermittency in coupled map Lattices*, *Physica D* **32**, (1988)409.
- [8] S. E. de S. Pinto and R.L. Viana, *Synchronization plateaus in a lattice of coupled sine-circle maps* *Phys. Rev. E* **61**, (2000)5154.
- [9] J. M. Houlrik and M. H. Jensen: *Critical correlations in coupled map lattices*, *Phys. Lett. A* **163**, (1992) 275.
- [10] K. Kaneko: *Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements* *Physica D*, **41** (1990) 137.
- [11] J. P. Crutchfield, K. Kaneko: *Phenomenology of spatio-temporal chaos, in: Directions in chaos*, Vol. 1, Ed. Hao Bai-lin ( World Scientific, Singapore, 1987).
- [12] S. Isola, A. Politi, S. Ruffo and A. Torcini: *Lyapunov spectra of coupled map lattices*, *Phys. Lett. A* **143** 8, (1990)365.



- [13] R. L. Viana, C. Grebogi, S. E. de S. Pinto, S. R. Lopes, A. M. Batista, J. Kurths: *Validity of numerical trajectories in the synchronization transition of complex systems*, Phys. Rev. E **68**, (2003)067204.
- [14] G. Paladin and A. Vulpiani, J. Phys. A **25**, (1994) 4511; A. Torcini and S. Lepri **55** (1997) R3805.
- [15] A. M. Batista, S. E. de S. Pinto, R. L. Viana, S. R. Lopes: *Lyapunov spectrum and synchronization of piecewise linear maps lattices with power-law coupling*, Phys. Rev. E **65**, (2002)056209.
- [16] C. Antenedeo, S. E. de S. Pinto, A. M. Batista, R. L. Viana: *Analytical results for coupled-map lattices with long-range interactions*, Phys. Rev. E **68**, (2003)045202.
- [17] R. L. Viana, C. Grebogi, S. E. de S. Pinto, S. R. Lopes, A. M. Batista : *Bubbling bifurcation: loss of synchronization and shadowing breakdown in complex systems*, submetido para publicação.
- [18] R. R. Rosa, A. S. Sharma and J. A. Valdivia, *Dissipative structure and weak turbulence in the solar corona*, Physica A **257**, (1998)509.
- [19] D. B. Vasconcelos, R.L. Viana, S. R. Lopes, A. M. Batista and S. E. de S. Pinto: *Spatial correlation and synchronization in coupled-map lattices with long-range interactions*, Physica A. **343**, (2004)201.
- [20] D. B. Vasconcelos, R. L. Viana, S. R. Lopes and S. E. de S. Pinto: *Conversion of local transient chaos into global laminar states in coupled map lattices with long-range interactions*, a ser submetido.
- [21] P. Grassberger, I. Procaccia: *Characterization of Strange Attractors*, Phys. Rev. Lett. **50**, (1983)5.
- [22] P. Grassberger, I. Procaccia: *Measuring the Strangeness of Strange Attractors*, Physica D **9**, (1983)189.
- [23] P. Grassberger: *Information Content and Predictability of Lumped and Distributed Dynamical Systems*, Physica Scripta. Vol. **40**, (1989)346-353.
- [24] J. P. Eckmann, S. O. Kamphorst and D. Ruelle: *Recurrence Plots of Dynamical Systems*, Europhys. Letter. **4**, (1987)963.
- [25] N. Marwan, J. Kurths, N. Wessel, U. Meyerfeldt, A. Schirdewan: *Recurrence-plot-based measures of complexity and their application to heart-beat-variability data*, Phys. Rev. E **66**, 2002.
- [26] N. Thomasson, T. J. Hoeppe, C. L. Webber and J. P. Zbilut: *Recurrence quantification in epileptic EEGs*, Phys. Lett. A, **279** (2001)94.

- [27] E. N. Lorenz: *Deterministic Nonperiodic Flow*, J. Atmos. Sci. **20**, (1963)130, .
- [28] D. Ruelle and F. Takens. *On the Nature of Turbulence*. Commun. Math. Phys. **20**, 167(1971).
- [29] F. Takens: "*Detecting Strange Attractors in Turbulence*", in *Dynamical Systems and Turbulence*, edited by D.A. Rand and L.S. Young, Springer Lecture Notes in Mathematics, 898 (Springer-Verlag, New York, 1980).
- [30] E. Ott: *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
- [31] H. G. Schuster: *Deterministic Chaos* (VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1995).
- [32] L. A. Bunimovich and Ya. G. Sinai, Nonlinearity 1 (1988) 491
- [33] A. Brandstater, H. L. Swinney: *Strange Atractors in Weakly turbulent Couette-Taylor Flow*, Phys. Rev. A **35**, (1987)2207.
- [34] Abarbanel H, R. Brown, J. J. Sidorowich, L. Tsimring: *The analysis of observed chaotic data in physical systems*, Review of Modern Physics, Vol. **65**, No. 4, October 1993.
- [35] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman: *Regular and Chaotic Motion* (Springer Verlag, Berlin, 1992).
- [36] A. M. Batista, *Memórias, Espectro de Lyapunov e Sincronização de Sistemas Acoplados* (Tese de Doutorado, UFPR, 2001).
- [37] S. E. de S. Pinto, *Platos de Sincronização em Redes de Sistemas Dinâmicos com Tempo Discreto* (Dissertação de Mestrado, UFPR, 2000).
- [38] K. Kaneko: *Pattern Dynamics in Spatio-temporal chaos*, Physica D, **34** (1989)1.
- [39] S. E. de S. Pinto, S. R. Lopes and R.L. Viana, *Colletive Behaviour in a chain of van der Pol oscilators with power-law coupling*, Physica A, **303**, (2002)339.
- [40] R. K. Pathria: *Statistical Mechanics* (Pergamon Press, Ontario, 1972).
- [41] J. C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart and C. Vidal: *Experimental Observations of Complex Behaviour During a Chemical Reaction*, Physica D **2**, (1981) 395.
- [42] R. Radi, K. Heinzelmann, P. F. Meier, A. Politi: *Correlation function and generalized Lyapunov exponents*, Phys. Rev. A **15**, 1988.
- [43] Y. Aizawa *Global aspects of the dissipative dynamical-systems .1. statistical identification and fractal properties of the lorentz chaos*, Prog. Theor. Phys. **68**, (1982)64.

- [44] J. D. Meiss, J. R. Cary and C. Grebogi: *Correlation of Periodic, Area-preserving Maps*, Physica **6D**, (1983)375.
- [45] J. D. Crawford and J. R. Cary: *Decay of Correlations in a Chaotic Measure-preserving Transformation*, Physica **6D**, (1983)223.
- [46] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [47] K. A. Alligood, T. Sauer, J. Yorke: *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems* (Springer, New York, 1997).
- [48] N. H. Packard, J. P. Crutchfield, D. J. Farmer and R. Shaw: *Gometry from a Time Series*, Phys. Rev. Lett. **45**, (1980)712.
- [49] R. Mané and F. Takens 1981, in *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick, 1980*, edited by D. Rand and L. S. Young, Lecture notes in Mathematics No. 898 (Springer, Berlin), p. 230 and 366.
- [50] K. Kaneko, Prog. Theor. Phys. **74**, (1985)1033.
- [51] A. Torcini, A. Politi, G. P. Puccioni and G. D'Alessandro, Physica D **53**, (1991)85.
- [52] C. L. Webber and J. P. Zbilut, J. Appl. Physiol. **76**, (1994)965.
- [53] M. Thiel, M. Romano and J. Kurths: *How much information is contained in a Recurrence-plot*, Phys. Lett. A **330**, (2004)343.
- [54] J. Gao and Huaqing Cai: *On the structure and quantification of recurrence-plots*, Phys. Lett. A **270** (2000)75.
- [55] D. Gulick: *Encouters with Chaos* (McGraw-Hill, 1992).
- [56] H. Chaté and P. Manneville: *Role of efects in the transition to turbulence via spatiotemporal intermittency*, Physica D **37**, (1989)33.
- [57] J Rolf, T. Bohr and M. H. Jensen: *Direct percolation universality in asynchronous evolution of spatiotemporal intermittency*, Phys. Rev. E **573**, (1998)2503.
- [58] J. M. Yeomans: *Statistical Mechanics of Phase Transitions*, Oxford Science Publications, U.K., 1993.
- [59] H. J. Herrmann, S. Roux: *Statistical Models for the Fracture of Disordered Media*, North-Holland, Netherlands, 1990.