UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Alessandro Gaio Chimenton

PROBLEMAS COM OBSTÁCULO PARA OPERADORES HOMOGÊNEOS

Curitiba, 2009.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Alessandro Gaio Chimenton

PROBLEMAS COM OBSTÁCULO PARA OPERADORES HOMOGÊNEOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Juradir Ceccon.

Curitiba, 2009.

À Cleonice,
minha mãe,
pelo apoio incondicional.

Agradecimentos

Levei um bom tempo para terminar esta parte do trabalho, precisamente pela demora em decidir o que escrever. Por fim, resolvi tentar ser sucinto, sabendo que o preço será o fatal esquecimento em citar alguém importante no processo de minha formação acadêmica ou na realização deste tabalho. Peço desculpas antecipadas.

Gostaria de agradecer primeiramente ao meu orientador, prof. Dr. Jurandir Ceccon, pela paciência e destreza com a qual conduziu esta orientação de mestrado, sempre mostrando (e demonstrando) alternativas e nunca desanimando. Em seguida, agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da UFPR e aos demais professores do Departamento de Matemática da UFPR. Os caminhos apontados por eles me trouxeram até aqui, de onde avanço sempre olhando para frente.

Agradeço também aos meus colegas de Pós-Graduação, por todos os bons momentos que dividimos e por tornarem essa uma fase inesquecível de minha formação. Nossas discussões sempre me fizeram refletir acerca das coisas que aprendia e isso foi fundamental nesta fase. São acima de qualquer dúvida muito mais que colegas.

A todos os colegas estudantes de graduação um obrigado por tornarem a vida acadêmica um prazer e um vício. Pontuo um obrigado ao Francisco Ganacim pelo auxílio com a edição em TEX.

Enfim, registro um agradecimento especial a meus familiares e às pessoas que tornam minha vida pessoal um tranqüilo refúgio do mundo. Um sincero e profundo obrigado por me acompanharem e me apoiarem durante todos os momentos decisivos que culminaram nesta dissertação. O resultado deste apoio não é apenas papel, tinta e letra e seu alcance não é tão somente o ponto final desta frase.

"O consenso geral, é claro, não prova nada. Pode haver uma crença unânime em algo que não é verdadeiro. A opinião universal durante milhares de anos de que a Terra era chata nunca achatou sua forma esférica em nem um centímetro."

Isaac Asimov
"A ameaça do criacionismo", 1981.

"Assim como a leitura, a mera experiência não pode substituir o pensamento. A pura empiria está para o pensamento como o ato de comer está para a digestão e a assimilação. Quando a experiência se vangloria de que somente ela, por meio de suas descobertas, fez progredir o saber humano, é como se a boca quisesse se gabar por sustentar sozinha a existência do corpo."

Arthur Schopenhauer
"Pensar por si mesmo", 1851.

Sumário

Lista de Símbolos

α	um vetor com coordenadas em $\mathbb{N}$ (multi-índice), pg. 11
$\mathscr{A}$	o campo $\nabla_\xi \mathrm{F}(x,\xi)$, pg. 2
$BC(\Omega)$	espaço das funções contínuas e limitadas em Ω, pg. 10
$C^{1,\beta}(\Omega)$	Espaço de Hölder (ver Cap. de [Eva98]), pg. 2
χ_E	função característica do conjunto E, pg. 28
$C_c^\infty(\Omega)$	espaço das funções de classe C^∞ com suporte compacto contido em Ω, pg. 4
$C(\Omega)$	espaço das funções contínuas definidas em Ω, pg. 10
$C_0(\Omega)$	fecho de $K(\Omega)$ em $BC(\Omega)$ na norma uniforme, pg. 10
$D^\alpha u$	α-ésima derivada fraca da função u, pg. 11
δ	função teste, pg. 4
δ_{x_j}	uma medida de Dirac concentrada em um ponto x_j, pg. 25
$D^2_\xi \mathrm{F}$	derivada segunda de F com respeito à variável ξ, pg. 3
$\mathrm{div}\mathscr{A}$	divergência do campo $\mathscr{A}$, pg. 53
F	núcleo variacional, pg. 3
∇u	gradiente fraco da função u, pg. 11
$\nabla_\xi \mathrm{F}$	gradiente da função F com respeito à variável ξ, pg. 2
$K(\Omega)$	espaço das funções u de classe $C^\infty(\Omega)$ com $\mathrm{supp}(u) \subset \Omega$ compacto, pg. 10
K_ψ	conjunto convexo no qual buscam-se as soluções de (3), pg. 31
$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$	espaço das funções p-integráveis nos subconjuntos compactos de Ω, pg. 11
$L^p(\Omega)$	espaço das funções p-integráveis definidas em Ω, pg. 6
$\lvert\Omega\rvert$	medida de Lebesgue do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pg. 50
$\mathscr{M}(\Omega)$	espaço das medidas finitas sobre Ω, pg. 10

$\|\mu\|$	norma da medida μ, pg. 10
$\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$	norma no espaço de Sobolev, pg. 12
$\|\nabla\cdot\|_{L^p(\Omega)}$	norma em $L^p(\Omega)$ da norma euclidiana do gradiente, pg. 18
p^*	expoente crítico de Sobolev, pg. 14
ψ	uma função obstáculo, pg. 1
$\sup\operatorname{ess}_{\Omega} f$	supremo essencial de f sobre o conjunto Ω, pg. 12
$\operatorname{supp}(u)$	suporte da função u, pg. 4
$u \wedge v$	notação para $\min\{u, v\}$, pg. 49
$W^{k,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev, pg. 11
$W_0^{k,p}(\Omega)$	fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$, pg. 12

Resumo

Nesta dissertação, estudamos a desigualdade variacional

$$\frac{1}{p}\int_{\Omega}\mathscr{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla(v-u)dx \geqslant \lambda\int_{\Omega}u^{+p^{*}-1}(v-u)dx, \tag{1}$$

onde $1 < p < n$. Fixados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de bordo suave e $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\psi^+ \not\equiv 0$ em algum conjunto de medida positiva, mostramos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\forall \lambda \in (0, \lambda_0]$ a desigualdade acima tem solução não-negativa u no conjunto convexo

$$\mathrm{K}_{\psi} = \left\{ w \in W_0^{1,p}(\Omega); w \geqslant \psi \text{ q.t.p. em } \Omega \right\}.$$

Em seguida, provamos que (1) tem solução não-negativa $u \in \mathrm{K}_{\psi}$ para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$, onde

$$\lambda^* = \sup\left\{\lambda;\ \text{a desigualdade (1) tem solução não-negativa}\right\}.$$

Palavras-chave: *expoente crítico de Sobolev, concentração de compacidade, problema com obstáculo, desigualdade variacional, pontos críticos.*

Abstract

In this work, we've studied the variational inequality

$$\frac{1}{p}\int_{\Omega}\mathscr{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla(v-u)dx \geqslant \lambda\int_{\Omega}u^{+p^{*}-1}(v-u)dx. \tag{2}$$

where $1 < p < n$. Being $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ an open, bounded set of smooth boundary and $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ such that $\psi^+ \not\equiv 0$ on some set of positive measure, we showed that there exists $\lambda_0 > 0$ such that $\forall \lambda \in (0,\lambda_0]$ the inequality above has a nonnegative solution u in the convex set

$$\mathrm{K}_{\psi} = \left\{ w \in W_0^{1,p}(\Omega); w \geqslant \psi \text{ a.e. in } \Omega \right\}.$$

Furthermore, we've proved that (2) has nonnegative solution $u \in \mathrm{K}_{\psi}$ for all $\lambda \in (0,\lambda^{*})$, where

$$\lambda^{*} = \sup\left\{\lambda;\ \text{the inequality (2) has nonnegative solution}\right\}.$$

Keywords: *Sobolev's critical exponent, concentration of compactness, obstacle problem, variational inequality, critical points.*

Introdução

Nesta dissertação, estudamos a existência de solução para o problema com obstáculo

$$\frac{1}{p}\int_{\Omega}\mathscr{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla(v-u)dx \geqslant \lambda\int_{\Omega}u^{+p^{*}-1}(v-u)dx \tag{3}$$

em que $p^{*}=\frac{np}{n-p}$ é o *expoente crítico de Sobolev*, também conhecido como o *conjugado de Sobolev de p* [Eva98]. Nossas principais referências são [Fan07] e [Jia95]. Este problema está inserido no amplo contexto dos chamados *Problemas Variacionais.* A desigualdade (3) com $\mathscr{A}(x,\nabla u)=2\nabla u$, $p=2$ e $\lambda=1$ foi estudada por Giovanni Mancini e Roberta Musina no artigo *Holes and obstacles*, publicado no "Annales de l'Institut Henri Poincaré, section C, tome 5, nº 4", de 1988, páginas 323-345 [MM88]. Neste trabalho, os autores provaram a existência de solução não-trivial para a desigualdade variacional

$$\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla(v-u)dx \geqslant \int_{\Omega}u^{2^{*}-1}(v-u)dx. \tag{4}$$

As condições sobre este problema são as seguintes: considere $\Omega\subset\mathbb{R}^{n}$ um aberto de bordo suave, $E\subset\Omega$ um conjunto fechado e $\psi\geqslant 0$ em $W_{0}^{1,2}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ uma função *obstáculo.* Aqui, $u\in \mathrm{K}_{\psi}=\left\{w\in W_{0}^{1,2}: w\leqslant\psi \text{ em } \Omega\setminus E\right\}$ é solução de (4) quando esta desigualdade é satisfeita para toda $v\in\mathrm{K}_{\psi}$. A técnica para resolver este problema consiste em considerar o funcional

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}dx-\frac{1}{2^{*}}\int_{\Omega}|u|^{2^{*}}dx \tag{5}$$

e através das teorias de Min-Max e do grau, encontra-se um ponto crítico para (5). Quando $p\neq 2$, a argumentação aplicada em [MM88] em princípio não se aplica, pois surgem inúmeras dificuldades

Em 1995, Yang Jianfu publicou o artigo *Positive solutions of a quasilinear elliptic obstacle problems with critical exponents* no volume 25, n^{0} 12, do "Nonlinear Analysis, Theory & Applications" [Jia95], no qual ele estuda a desigualdade variacional (3) no caso em que

$\mathscr{A}(x,\nabla u) = p|\nabla u|^{p-2}\nabla u$ e $2 \leqslant p < n$, ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla(v-u)dx \geqslant \lambda \int_\Omega u^{p^*-1}(v-u)dx. \tag{6}$$

Neste artigo, Jianfu mostra que (6) tem solução não-trivial para todo λ em um intervalo não-degenerado $(0,\lambda^*)$, sendo Ω um aberto limitado de fronteira suave e

$$\mathrm{K}_\psi = \left\{ w \in W_0^{1,p}(\Omega);\, w \geqslant \psi \text{ q.t.p. em } \Omega \right\}.$$

Aqui, $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função no espaço de Hölder $C^{1,\beta}(\Omega)$ com $\psi|_{\partial\Omega} < 0$ e $\psi^+ \not\equiv 0$. Em linhas gerais, a argumentação consiste em tomar uma seqüência minimizante $\{u_n\} \subset \mathrm{K}_\psi$ para o funcional não-linear

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{p^*}\int_\Omega u^{+p^*} dx \tag{7}$$

definido sobre K_ψ. As dificuldades centrais são:

i) mostrar que existe uma seqüência $\{u_n\} \subset \mathrm{K}_\psi$ minimizante para I;

ii) provar que $\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$.

Para a primeira, usam-se técnicas variacionais; para a segunda, aplica-se o lema de concentração de compacidade de Lions (ver Teorema 1.28). O trabalho de Jianfu teve como foco mostrar a existência de duas soluções não-negativas para (6). No entanto, para mostrar a existência de ao menos uma solução não-negativa de (6), a hipótese $2 \leqslant p < n$ não é necessária, podendo ser enfraquecida para $1 < p < n$.

No ano de 2007, o "Journal of Differential Equations", em sua edição 232, publicou o artigo *Degenerate elliptic inequalities with critical growth*, de Ming Fang [Fan07], no qual o autor estende o resultado apresentado por Jianfu. Essencialmente, Fang mostra que considerando um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira regular, $1 < p < n$ e $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\psi^+ \not\equiv 0$ em algum conjunto de medida positiva, a desigualdade variacional (3) possui solução não-negativa $u \in \mathrm{K}_\psi = \left\{ w \in W_0^{1,p}(\Omega);\, w \geqslant \psi \text{ q.t.p. em } \Omega \right\}$, com λ em algum intervalo não-degenerado $(0,\lambda^*)$. Aqui,

$$\mathscr{A}(x,\xi) = \nabla_\xi \mathrm{F}(x,\xi), \tag{8}$$

onde $\nabla_\xi \mathrm{F}(x,\xi)\cdot\eta = \nabla \mathrm{F}(x,\xi)\cdot(0,\eta)$. Nesta dissertação, vamos admitir que $\mathrm{F} : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfaz:

1. F é de classe $C^1(\Omega \times \mathbb{R}^n)$;

2. Existem constantes $0 < k_1 \leqslant k_2 < \infty$ tais que $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ vale

$$k_1|\xi|^p \leqslant \mathrm{F}(x,\xi) \leqslant k_2|\xi|^p, \tag{9}$$

onde $1 < p < n$;

3. $\mathrm{F}(x,\cdot)$ é diferenciável de classe $C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e estritamente convexa, ou seja,

$$\mathrm{F}(x, t\xi_1 + (1-t)\xi_2) < t\mathrm{F}(x,\xi_1) + (1-t)\mathrm{F}(x,\xi_2) \tag{10}$$

sempre que $0 < t < 1$. Também iremos supor que existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $x \in \Omega$ temos

$$D_\xi^2 \mathrm{F}(x,\xi)\cdot\eta^2 \geqslant C|\eta|^2, \tag{11}$$

$\forall \xi,\eta \in \mathbb{R}^n$, onde D_ξ^2 denota a segunda derivada com respeito à segunda entrada.

4. $\mathrm{F}(x,\cdot)$ é p-homogênea, ou seja,

$$\mathrm{F}(x,\lambda\xi) = \lambda^p \mathrm{F}(x,\xi) \tag{12}$$

para todo $\lambda > 0$.

A função F é chamada *núcleo variacional* e o campo $\nabla_\xi \mathrm{F}(x,\xi)$ é chamado $\mathscr{A}$-operador.

Para encontrar uma solução não-trivial para a desigualdade (3), Fang segue a argumentação de Jianfu, a qual consiste essencialmente de dois passos. Considere o funcional

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega \mathrm{F}(x,\nabla u)dx - \frac{\lambda}{p^*}\int_\Omega u^{+p*}dx. \tag{13}$$

Então:

1. existe uma seqüência $\{u_n\} \subset \mathrm{K}_\psi$ tal que $I(u_n) \to \inf\{I(u); u \in \mathrm{K}_\psi\}$;

2. $\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$.

Veremos que se 1 e 2 acima forem satisfeitas, a desigualdade (3) possui solução não-trivial. Como em nosso problema aparece o expoente crítico de Sobolev $p^* = \frac{np}{n-p}$, teremos uma dificuldade adicional durante o estudo, pois o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ está contido continuamente em $L^{p^*}(\Omega)$, mas não compactamente. Essa dificuldade será contornada usando o famoso *lema de concentração de compacidade* provado por Pierre Louis-Lions (medalhista Fields do ano de 1994) nos trabalhos *The concentration compactness principle in the calculus of variations: the limit case I* e *The concentration compactness principle in the calculus of variations: the limit case II*, publicados respectivamente nas edições 1(1) e 1(2) da "Revista Matemática Iberoamericana" de 1982. O passo crucial é o Lema 2.10 desta dissertação, que foi inspirado no artigo de Jianfu. Mas a prova deste lema requer uma versão apropriada do lema de concentração de compacidade de Lions (Teorema 1.28) para o nosso problema. Também utilizamos propriedades da p-homogeneidade de F para tornar a prova do Lema 2.10 bastante natural, fato não observado por Fang.

Na argumentação apresentada por Fang existe ainda uma dificuldade técnica (lema 3.5 , p. 456 de [Fan07]). O ponto é precisamente quando ele coloca

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \xi_\varepsilon(\mathscr{A}(x,\nabla u_{n_k})-\mathscr{A}(x,\nabla u))\cdot(\nabla u_{n_k}-\nabla u)dx \\ = &\lim_{k\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \xi_\varepsilon(\mathscr{A}(x,\nabla u_{n_k})-\mathscr{A}(x,\nabla u))\cdot(\nabla u_{n_k}-\nabla u)dx. \end{aligned} \tag{14}$$

Essa inversão de limites nem sempre é válida. Por exemplo, considere a *função teste*

$$\delta(x)=\begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right), & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

definida em $\mathbb{R}$ e $K=\int_{\mathbb{R}}\delta(x)dx$. Tomando a seqüência de funções

$$\delta_n(x)=n\frac{\delta(nx)}{K},\qquad \text{para todo } x\in\mathbb{R},$$

temos que $\{\delta_n\}$ satisfaz, para todo $n\in\mathbb{N}$

i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\delta_n(x)dx=1;$

ii) $\operatorname{supp}(\delta_n)=\left\{x\in\mathbb{R};|x|\leqslant\dfrac{1}{n}\right\}.$

Definindo $\xi_\varepsilon\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0\leqslant\xi_\varepsilon\leqslant 1$, $\xi_\varepsilon\equiv 0$ para $|x|<\varepsilon$, $\xi_\varepsilon\equiv 1$ para $|x|>2\varepsilon$, como no artigo de Fang, temos por um lado que fixado ε, existe n_0 suficientemente grande tal que $\operatorname{supp}(\delta_n)\subset(-\varepsilon,\varepsilon)$ para todo $n>n_0$. Neste caso,

$$\int_{\mathbb{R}}\xi_\varepsilon\delta_n dx=0,\qquad \text{para todo } n>n_0.$$

Então, tomando o limite em n e em seguida em ε, temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\xi_\varepsilon\delta_n dx=0.$$

Por outro lado, como

$$\xi_\varepsilon\delta_n\leqslant\delta_n$$

e $\xi_\varepsilon\delta_n\to\delta_n$ q.t.p. em $\mathbb{R}$ quando $\varepsilon\to 0$, segue do teorema da convergência dominada de

Lebesgue (ver Teorema 9 do apêndice) que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \xi_\varepsilon \delta_n \, dx = 1.$$

Tomando o limite em n,

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \xi_\varepsilon \delta_n \, dx = 1.$$

Este fenômeno ocorre devido ao fato de $\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) dx$ convergir para uma medida que contém um átomo (um *átomo* de uma medida μ é um ponto x tal que $\mu(\{x\}) \neq 0$). Isso significa que sem a informação de não haver átomos na medida limite, não se garante a inversão em (14). No entanto, devido às características do problema estudado nesta dissertação, a igualdade (14) é verdadeira. Porém, a prova deste fato não é imediata.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo estão teoremas e definições que serão usados para resolvermos a desigualdade (3). Ele contém os enunciados (e algumas demonstrações) de certos resultados importantes da Teoria da Medida, Análise Funcional e espaços de Sobolev. A referência para os resultados sobre espaços de Sobolev é o Cap. 5 de [Eva98].

Teorema 1.1 (densidade)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $1 \leqslant p < \infty$. Dada $u \in L^p(\Omega)$, existe $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, onde $C_c^\infty(\Omega)$ é o conjunto das funções reais infinitamente diferenciáveis definidas em Ω de suporte compacto contido em Ω.*

Demonstração. Ver, por exemplo, [Bre86]. □

Teorema 1.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ não-vazio, $1 \leqslant p < \infty$ e $\{u_n\}$ uma seqüência em $L^p(\Omega)$. Suponha que exista $u \in L^p(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Então, existem uma subseqüência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ e $h \in L^p(\Omega)$ tais que:*

1. *$u_{n_k} \to u$ q.t.p. em Ω;*
2. *$\left|u_{n_k}\right| \leqslant h$ q.t.p. em Ω.*

Demonstração. Como $\{u_n\}$ é de Cauchy em $L^p(\Omega)$, existe uma subseqüência, que continuamos indexando com $\{u_n\}$, tal que

$$\|u_{n+1} - u_n\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Defina a seqüência de funções não-negativas mensuráveis

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1}(x) - u_k(x)|.$$

Temos que $g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x)$ q.t.p. em Ω. Como

$$\int_\Omega |g_n|^p \, dx \leqslant 1,$$

$g_n(x)$ converge para um limite finito q.t.p. em Ω. Portanto, podemos definir

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |u_{k+1}(x) - u_k(x)|$$

q.t.p. em Ω. Além disso, do teorema da convergência monótona (ver Teorema 8 do apêndice), $g \in L^p(\Omega)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} |u_m(x) - u_n(x)| &\leqslant |u_m(x) - u_{m-1}(x)| + \cdots + |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \\ &\leqslant g(x) - g_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Como $g_{n-1}(x) \to g(x)$, temos $|u_m(x) - u_n(x)| \to 0$, ou seja, $\{u_n(x)\}$ é de Cauchy q.t.p. em Ω. Digamos que $u_n(x) \to \bar{u}(x)$. Afirmamos que $\bar{u} = u$ q.t.p. em Ω. De fato, uma vez que $g(x) - g_{n-1}(x) \leqslant g(x)$, por (1.1) temos $|u_m(x) - u_n(x)| \leqslant g(x)$. Tomando o limite em m nesta desigualdade,

$$|\bar{u}(x) - u_n(x)| \leqslant g(x), \quad \forall n \geqslant 1, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Isso implica que $\bar{u} \in L^p(\Omega)$. Temos também $|\bar{u}(x) - u_n(x)|^p \leqslant g(x)^p$. Do teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver Teorema 9 do apêndice), vem $u_n \to \bar{u}$ em $L^p(\Omega)$. Pela unicidade de limite em $L^p(\Omega)$, $\bar{u} = u$ q.t.p. em Ω. Como $u_n(x) \to \bar{u}$, o item 1 está provado.

Para provar o item 2, basta observar que

$$|u_n(x)| \leqslant |u_n(x) - \bar{u}(x)| + |\bar{u}(x)| \leqslant g(x) + |\bar{u}(x)|$$

e tomar $h(x) = g(x) + |\bar{u}(x)|$. □

Teorema 1.3 (de Brezis-Lieb, [BL83])**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ não-vazio, $1 < p < \infty$ e $\{u_n\}$ uma seqüência em $L^p(\Omega)$ tal que*

1. *$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} < M$ para algum $M \in \mathbb{R}$;*

2. *$u_n \to u$ q.t.p. em (Ω).*

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)} - \|u_n - u\|^p_{L^p(\Omega)} \right) = \|u\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Note primeiramente que $u \in L^p(\Omega)$, pois temos $|u_n|^p \to |u|^p$ q.t.p. em Ω e então, do lema de Fatou (ver Lema 7 do apêndice), segue que

$$\int_\Omega |u|^p dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^p dx \leqslant M^p.$$

Em particular, $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant M$. Defina

$$h_1(t) = \begin{cases} \dfrac{(t+1)^p - 1}{t} & , t \in (0, +\infty) \\ p & , t = 0 \end{cases}.$$

Pela regra de L'Hospital, $\lim_{t\to 0} h_1(t) = p = h_1(0)$, donde h_1 é contínua em $[0,\infty)$. Portanto, se $t \in [0,1]$, existe c_1 tal que

$$(t+1)^p - 1 \leqslant c_1 t. \tag{1.2}$$

Por outro lado, sendo

$$h_2(t) = \frac{(t+1)^p - 1}{t^p}$$

para $t \in [1,\infty)$, temos $\lim_{t\to\infty} h_2(t) = 1$, donde h_2 é limitada em $[1,\infty)$. Então, existe c_2 tal que

$$(t+1)^p - 1 \leqslant c_2 t^p. \tag{1.3}$$

De (1.2) e (1.3) e tomando $C = \max\{c_1, c_2\}$,

$$(t+1)^p - 1 \leqslant C(t + t^p), \quad \forall t \in [0,\infty).$$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, e tome $t = \frac{|a|}{|b|}$. Temos:

$$\left(\frac{|a|}{|b|} + 1\right)^p - 1 \leqslant C\left(\frac{|a|}{|b|} + \frac{|a|^p}{|b|^p}\right) \tag{1.4}$$

se e somente se

$$(|a| + |b|)^p - |b|^p \leqslant C\left(|a| \cdot |b|^{p-1} + |a|^p\right), \tag{1.5}$$

sendo esta última desigualdade válida também para $b = 0$. Da desigualdade de Young com ε (A.2), usando $q = \frac{p}{p-1}$ e $r = p$, temos:

$$\begin{aligned} |b|^{p-1}|a| &\leqslant \varepsilon |b|^{q(p-1)} + c(\varepsilon)|a|^r \\ &= \varepsilon |b|^p + c(\varepsilon)|a|^p. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Substituindo (1.6) em (1.5), vem $(|a| + |b|)^p - |b|^p \leqslant \varepsilon |b|^p + c(\varepsilon)|a|^p$, para alguma função $c(\varepsilon)$.

Como $|a-b|^p \leqslant (|a|+|b|)^p$,

$$|a-b|^p - |b|^p \leqslant \varepsilon|b|^p + c(\varepsilon)|a|^p, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, fazendo $a = -w$ e $b = z - w$,

$$\begin{aligned}
|z|^p - |z-w|^p &\leqslant \varepsilon|z-w|^p + c(\varepsilon)|w|^p \\
&\leqslant \varepsilon(|z|+|w|)^p + c(\varepsilon)|w|^p \\
&\leqslant \varepsilon\left(2^{p-1}|z|^p + 2^{p-1}|w|^p\right) + c(\varepsilon)|w|^p \\
&= \varepsilon 2^{p-1}|z|^p + \left(\varepsilon 2^{p-1} + c(\varepsilon)\right)|w|^p \\
&= \varepsilon 2^{p-1}|z|^p + c'(\varepsilon)|w|^p, \quad \forall z, w \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

onde $c'(\varepsilon) = \varepsilon 2^{p-1} + c(\varepsilon)$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\bar{c}(\varepsilon) = \max\{c(\varepsilon), c'(\varepsilon)\}$ tal que

$$||a-b|^p - |b|^p| \leqslant \varepsilon|b|^p + \bar{c}(\varepsilon)|a|^p, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Defina

$$u_n^\varepsilon(x) = \left(||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| - \varepsilon 2^{p-1}|u_n - u|^p\right)^+(x).$$

Note que, por (1.7),

$$\begin{aligned}
||u_n|^p - |u_n-u|^p - |u|^p| &\leqslant ||u_n - u + u|^p - |u_n - u|^p| + |u|^p \\
&\leqslant \varepsilon 2^{p-1}|u_n - u|^p + \bar{c}(\varepsilon)|u|^p + |u|^p.
\end{aligned}$$

Assim,

$$u_n^\varepsilon(x) \leqslant (1 + \bar{c}(\varepsilon))|u(x)|^p \tag{1.8}$$

e

$$u_n^\varepsilon(x) \to 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \text{ quando } n \to \infty. \tag{1.9}$$

Usando (1.8) e (1.9), podemos aplicar o teorema da convergência dominada de Lebesgue e obter

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n^\varepsilon dx = 0.$$

Por outro lado,

$$||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| - \varepsilon 2^{p-1}|u_n - u| \leqslant u_n^\varepsilon \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

donde

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega \big||u_n|^p-|u_n-u|^p-|u|^p\big|\,dx &\leqslant \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega \left(u_n^\varepsilon+\varepsilon 2^{p-1}|u_n-u|\right)dx\\ &= \varepsilon 2^{p-1}\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n-u|dx.\end{aligned}$$

Mas

$$\int_\Omega |u_n-u|^p dx \leqslant C\int_\Omega |u_n|^p dx + C\int_\Omega |u|^p dx \leqslant 2CM^p.$$

Fazendo $\varepsilon\to 0$,

$$\varepsilon\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n-u|dx \leqslant \varepsilon 2CM^p \to 0.$$

Logo,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega \big||u_n|^p-|u_n-u|^p-|u|^p\big|\,dx \leqslant 0,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \big||u_n|^p-|u_n-u|^p-|u|^p\big|\,dx = 0,$$

encerrando a demonstração. □

Outro tipo de convergência relevante para nossos propósitos é a *convergência fraca de medidas*. Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um aberto, $C(\Omega)$ o conjunto das funções contínuas definidas em Ω e consideremos o espaço vetorial

$$BC(\Omega)=\left\{u\in C(\Omega): |u|_\infty=\sup_{x\in\Omega}|u(x)|<\infty\right\}$$

das funções contínuas em Ω e limitadas. Nele, selecionemos o subespaço

$$K(\Omega)=\{u\in C(\Omega): \text{supp}(u)\subset\Omega \text{ é compacto}\}$$

e seja $C_0(\Omega)$ o fecho de $K(\Omega)$ em $BC(\Omega)$ na norma uniforme

$$\|u\|_\infty=\sup_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

Dada uma medida finita μ em Ω, defina o funcional linear contínuo sobre $C_0(\Omega)$ dado por

$$u\longmapsto\langle\mu,u\rangle=\int_\Omega u(x)d\mu. \tag{1.10}$$

A norma da medida μ é definida como

$$\left\|\mu\right\| = \sup_{0\not\equiv u\in C_0(\Omega)} \frac{\left|\langle \mu, u\rangle\right|}{\|u\|_\infty}. \tag{1.11}$$

Seja $\mathscr{M}(\Omega)$ o espaço vetorial das medidas finitas sobre Ω.

Definição 1.4 (convergência fraca de medidas)**.** *A seqüência* $\{\mu_n\}$ *de medidas em* $\mathscr{M}(\Omega)$ converge fracamente *para a medida* μ *de* $\mathscr{M}(\Omega)$ *quando*

$$\langle \mu_n, \phi\rangle \to \langle \mu, \phi\rangle,$$

para toda $\phi \in C_0(\Omega)$. *Denota-se tal convergência por* $\mu_n \rightharpoonup \mu$.

Teorema 1.5. *Toda seqüência limitada em* $\mathscr{M}(\Omega)$ *possui subseqüência fracamente convergente em* $\mathscr{M}(\Omega)$.

Demonstração. Ver, por exemplo, [Wil96]. □

A seguir colocaremos algumas propriedades dos espaços de Sobolev. Será útil apelarmos às vezes para o que chamamos de *notação de multi-índice*, que consiste do seguinte: dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ um vetor de coordenadas inteiras (não-negativas), considere o número natural $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Para denotar as sucessivas α_i derivações nas direções x_i de uma dada função $\phi \in C^k(\Omega)$ com $k \geqslant |\alpha|$, escrevemos

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \phi.$$

Em particular, $D^{e_i}\phi = \dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}$.

Definição 1.6 (derivadas fracas)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e considere* $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. *A função* $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *é dita a* α-ésima derivada fraca de u *se para toda* $\phi \in C^\infty_c(\Omega)$,

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi \, dx. \tag{1.12}$$

Denotaremos a função v *(derivada fraca de* u*) pelo símbolo* $D^\alpha u$. *Nesse mesmo sentido, o* gradiente fraco de u *é o campo* $\nabla u = (v_1, \ldots, v_n)$ *onde* $v_i = D^{e_i} u$, *para* $j = 1, \ldots, n$.

Notemos que se u e $\partial\Omega$ são suficientemente regulares, então as derivadas fracas de u coincidem com as suas derivadas no sentido usual. Para verificar isto, basta usar o teorema da divergência.

Definição 1.7 (espaços de Sobolev)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* k *um número natural . O* espaço de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega)$$

é o conjunto de todas as funções $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *tais que existe* $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ *satisfazendo (1.12) para qualquer multi-índice* α *com* $|\alpha| \leqslant k$.

De forma sucinta, podemos dizer que dados k e p, a definição acima reúne as funções p-integráveis com derivadas mistas parciais até ordem no máximo k também p-integráveis. Vamos munir estes espaços com normas que forneçam boas características, como completude e reflexividade.

Definição 1.8 (normas nos espaços de Sobolev)**.** *Dada* $u \in W^{k,p}(\Omega)$, *sua norma é definida como*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left[\displaystyle\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} & , 1 \leqslant p < \infty \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_\Omega \text{ess} |D^\alpha u| & , p = \infty \end{cases}$$

A verificação de que tais fórmulas definem normas não oferece grande dificuldade, pois tratam-se, basicamente, de somas de normas em espaços $L^p(\Omega)$. Ver Cap. 5 de [Eva98].

Definição 1.9. *Denotaremos por* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *o fecho do conjunto* $C_c^\infty(\Omega)$ *no espaço* $W^{k,p}(\Omega)$ *com respeito à norma* $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Temos o importante resultado de natureza métrica concernente aos espaços de Sobolev:

Teorema 1.10. *Dados* k *um número natural e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *o espaço* $W^{k,p}(\Omega)$ *é completo na norma definida acima.*

Demonstração. Vamos admitir primeiro $p \neq \infty$. Seja $\{u_m\}$ uma seqüência de Cauchy em $W^{k,p}(\Omega)$. Da definição da norma, temos que as seqüências de derivadas fracas $D^\alpha u_m$ são de Cauchy em $L^p(\Omega)$, qualquer que seja o multi-índice α com $|\alpha| \leqslant k$. Já que $L^p(\Omega)$ é de Banach, $\{D^\alpha u_m\}$ converge em $L^p(\Omega)$ para u_α. Tomando $\alpha = (0, \ldots, 0)$ (que corresponde a não derivar fracamente os termos da seqüência), temos $u_m \to u_{(0,\ldots,0)} := u$ em $L^p(\Omega)$. O que nos resta mostrar então é que $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e que dado um multi-índice α, vale $D^\alpha u = u_\alpha$. Para verificar isso, usaremos a definição de derivadas fracas. Fixado um multi-índice α, seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Se os cálculos

$$\begin{aligned} \int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx &\overset{(a)}{=} \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m D^\alpha \phi \, dx \\ &\overset{(b)}{=} \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \phi \, dx \end{aligned}$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \phi \, dx$$

fizerem sentido, de fato teremos $D^\alpha u = u_\alpha$. Para ver que fazem, é necessário justificar as passagens de limites em (a) e (b). Mas isso é feito usando-se a desigualdade de Hölder (A.4), como segue:

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx - \int_\Omega u_m D^\alpha \phi \, dx \right| &= \left| \int_\Omega (u - u_m) D^\alpha \phi \, dx \right| \\
&\leqslant \int_\Omega |u - u_m| \cdot |D^\alpha \phi| \, dx \\
&\leqslant \left[\int_\Omega |u - u_m|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_\Omega |D^\alpha \phi|^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \\
&= C \|u - u_m\|_{L^p(\Omega)} \to 0,
\end{aligned}$$

provando (a). Um argumento similar nos mostra (b). Com isso, $D^\alpha u_m \to D^\alpha u$ em $L^p(\Omega)$, qualquer que seja o multi-índice fixado. Usando a definição da norma em $W^{k,p}(\Omega)$, temos $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$. No caso $p = \infty$, procedemos de maneira similar, usando a desigualdade de Hölder na versão com expoentes conjugados 1 e ∞. Concluímos então que $W^{k,p}(\Omega)$ é de Banach. □

Temos ainda o seguinte importante resultado acerca de densidade:

Teorema 1.11. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto com fronteira de classe C^1 e considere $u \in W^{k,p}(\Omega)$, com $1 \leqslant p < \infty$. Então, existe uma seqüência $\{u_m\}$ em $C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.*

Este resultado nos diz portanto que podemos aproximar qualquer função $u \in W^{k,p}(\Omega)$ por funções suaves em Ω definidas até $\partial\Omega$.

Enunciaremos a seguir um teorema que nos permite estender para $\mathbb{R}^n$ funções definidas em conjuntos limitados com fronteira suave. Este resultado será fundamental para provarmos a desigualdade de Sobolev (1.17).

Teorema 1.12 (teorema de extensão)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe C^1 e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Considere um aberto V limitado tal que $\overline{\Omega} \subset V$. Então, existe uma transformação linear $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$ valem*

1. *$Eu = u$ q.t.p. em Ω;*

2. *Eu tem suporte contido em V;*

3. *$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, onde $C = C(p, V, \Omega)$.*

Este teorema garante, portanto, que é possível estender funções de $W^{1,p}(\Omega)$ para $\mathbb{R}^n$ sem que sejam perdidas propriedades de derivada fraca. Além disso, o item 3 nos conta que a transformação linear que associa uma função u à sua extensão Eu é contínua.

Os problemas dos quais trataremos aqui trazem condições de fronteira em suas formulações. Tendo isso em vista, é de praxe relegar condições de fronteira ao espaço no qual as soluções serão buscadas. Nesse sentido, temos o seguinte teorema que atribui um valor para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ sobre a fronteira de Ω:

Teorema 1.13 (funções de traço nulo)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe C^1 e $1 \leqslant p < n$. Então, existe $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ linear tal que*

1. *$Tu = u|_{\partial\Omega}$ para todas as funções $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$;*

2. *$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, onde $C = C(p,\Omega)$*

A função Tu é chamada traço *de u.*

O que desejamos salientar agora é o seguinte: o conjunto de todas as funções de traço nulo corresponde exatamente a $W_0^{1,p}(\Omega)$. Esse é o conteúdo do seguinte teorema:

Teorema 1.14. *Sejam Ω um aberto limitado com fronteira de classe C^1 e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então,*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ se e somente se } Tu = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

As demonstrações dos quatro teoremas anteriores encontram-se no Cap. 5 de [Eva98].

Como mencionamos antes do Teorema 1.13, desejamos transferir as condições de contorno dos problemas para o espaço de funções no qual buscaremos soluções. O teorema anterior é justamente o que nos permite fazer isso: se buscamos soluções de problemas que sejam "nulas" na fronteira de Ω, basta restringirmos a procura ao espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$.

As próximas desigualdades nos mostrarão que os espaços de Sobolev estão contidos continuamente em certos espaços $L^p(\Omega)$. Elas também são úteis na prova de existência e regularidade de soluções para alguns problemas variacionais.

Teorema 1.15 (desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Seja p tal que $1 \leqslant p < n$. Existe uma constante C que depende apenas de p e n tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para toda $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Aqui, $p^* = \frac{np}{n-p}$ é o expoente crítico de Sobolev.

Demonstração. Dividiremos esta demonstração em duas partes, a primeira delas quando $p = 1$ e a outra, o caso geral, seguirá como conseqüência deste primeiro. Seja $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Do teorema fundamental do cálculo podemos reescrever u como

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x} u_{x_i}(x_1,\dots x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_n)dy_i.$$

Ao considerar esta expressão em módulo, obtemos

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |u_{x_i}(x_1,\dots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_n)|dy_i\\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |u_{x_1}(\dots,y_i,\dots)|+\dots+|u_{x_n}(\dots,y_i,\dots)|dy_i\\
&\leqslant C\int_{-\infty}^{\infty} \left(|u_{x_1}(\dots,y_i,\dots)|^2+\dots+|u_{x_n}(\dots,y_i,\dots)|^2\right)^{\frac{1}{2}} dy_i\\
&\leqslant C\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(\dots,y_i,\dots)|dy_i
\end{aligned}$$

tome as desigualdades obtidas para $n=1,\dots,n$ x_1:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1 &\leqslant C\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_1\\
&= C\left[\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dy_1\right]^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_1\\
&\leqslant C\left[\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dy_1\right]^{\frac{1}{n-1}}\left[\prod_{i=2}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dx_1dy_i\right]^{\frac{1}{n-1}}, \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

sendo a última desigualdade acima devida à *desigualdade generalizada de Hölder* (A.5)

$$\int_{\Omega}|u_1\cdots u_n|\,dx\le\prod_{i=1}^{r}\left[\int_{\Omega}|u_i|^{p_i}dx\right]^{\frac{1}{p_i}}, \qquad (1.14)$$

com $\frac{1}{p_1}+\cdots\frac{1}{p_r}=1$.

Agora, integrando a desigualdade (1.13) em relação à variável x_2, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{\frac{n}{n-1}}dx_1dx_2\leqslant C\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dx_1dy_2\right]^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{2\neq i=1}^{n}I_i^{\frac{1}{n-1}}dx_2, \qquad (1.15)$$

onde

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 \quad \text{e} \quad I_i = \iint_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_i,$$

para $i = 3, \dots, n$. Ao produtório no último integrando de (1.15) aplicamos novamente a desigualdade generalizada de Hölder, obtendo desta vez

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 &\leqslant C \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_2 \right]^{\frac{1}{n-1}} \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 dx_2 \right]^{\frac{1}{n-1}} \\
&\quad \prod_{i=3}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dx_2 dy_i \right]^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Façamos uma observação quanto à técnica aplicada: desde o início admitimos $p = 1$ e do lado direito de nossa estimativa, estamos obtendo integrais em cada vez mais direções para $|u|^{\frac{n}{n-1}}$. Como $|u|^{\frac{n}{n-1}} = |u|^{p^*}$ (já que $p = 1$), o que acabará por aparecer do lado esquerdo das sucessivas estimativas é a norma $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ de $|u|$. Do lado direito, conforme vamos aplicando a desigualdade generalizada de Hölder após uma integração em um novo eixo x_i, obtemos a integral em cada vez mais direções para $|\nabla u| = |\nabla u|^p$. Realizando as demais integrações relativas aos eixos $x_3, \dots, x_n$, teremos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx &\leqslant C \prod_{i=1}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 \dots dy_i \dots dx_n \right]^{\frac{1}{n-1}} \\
&= C \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx \right]^{\frac{n}{n-1}}.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Elevando esta desigualdade a $\frac{n-1}{n}$, obtemos o resultado desejado no caso $p = 1$. Para o caso geral, considere $\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$ e $v = |u|^\gamma \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Elevando a desigualdade (1.16) a $\frac{n-1}{n}$, aplicando a desigualdade resultante a v e usando Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\left[\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right]^{\frac{n-1}{n}} &\leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^\gamma| dx = C\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |\nabla u| dx \\
&\leqslant C \left[\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\
&= C \left[\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Observe que γ foi escolhido de forma que $(\gamma - 1)\frac{p}{p-1} = p^*$. Dividindo esta última desigualdade por $\left[\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx\right]^{\frac{p-1}{p}}$, encerramos a prova do caso geral. □

Teorema 1.16 (imersão contínua)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado com fronteira de classe* C^1*. Sejam ainda* $1 \leqslant p < n$ *e* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*. Então* $u \in L^{p^*}(\Omega)$ *e vale ainda a* desigualdade de Sobolev

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \tag{1.17}$$

onde a constante C *depende apenas de* p, n *e* Ω.

Demonstração. O teorema de Extensão nos permite considerar uma função de suporte compacto $\bar{u} = Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ com as propriedades $\bar{u} = u$ em Ω e $\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Já que o suporte de $\bar{u}$ é compacto (com $\operatorname{supp}(\bar{u}) \subset V$ para algum aberto V limitado), podemos usar o Teorema 1.11 para aproximar $\bar{u}$ na norma de $W^{1,p}(V)$ por funções $u_m \in C_c^\infty(V)$, as quais podem estendidas a funções $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\operatorname{supp}(u_m) \subset V$ e, com isso, teremos

$$\|u_m - \bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev,

$$\|u_m - u_\ell\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\nabla u_m - \nabla u_\ell\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $\ell, m \in \mathbb{N}$. Da convergência $u_m \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e da última desigualdade, existe $\widetilde{u} \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u_m - \widetilde{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \to 0$. Como já tínhamos $\|u_m - \bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$, o Teorema 1.2 nos garante que $\bar{u} = \widetilde{u}$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n$. Podemos afirmar sem perda de generalidade, então, ao menos para uma subseqüência de $\{u_m\}$, que

$$u_m \to \bar{u} \text{ em } L^{p^*}(\mathbb{R}^n).$$

A desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev implica também que

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite nesta desigualdade, temos

$$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\nabla \bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Agora, observando que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant \|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\nabla \bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

temos o que desejávamos provar. □

Observação 1.17. Do teorema acima, $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Se $1 \leqslant q \leqslant p^*$, usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^q dx &\leqslant \left[\int_\Omega |u|^{p^*} dx\right]^{\frac{q}{p^*}} \cdot (\mathrm{Vol}(\Omega))^{1-\frac{q}{p^*}} \\ &\leqslant C\|u\|^q_{W^{1,p}(\Omega)}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

donde $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, com $C = C(p,n,\Omega)$. Portanto, a inclusão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua $\forall q \in [1,p^*]$.

A próxima desigualdade nos permite falar, em certas ocasiões, em normas equivalentes nos espaços de Sobolev, como será observado após sua demonstração

Teorema 1.18 (desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado com fronteira de classe C^1 e $1 \leqslant p < n$. Então, existe uma constante C tal que para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tem-se para cada $q \in [1,p^*]$ que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{1.19}$$

com a constante C dependendo apenas de p, q, n e do aberto Ω.

Demonstração. Dada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, existem funções $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ que se aproximam de u na norma de $W^{1,p}(\Omega)$. Consideremos $\bar{u}_m$ tais que

$$\bar{u}_m = \begin{cases} u_m, & \text{se } x \in \Omega; \\ 0, & \text{se } x \in \Omega^\complement \end{cases}.$$

Temos $\|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \|\bar{u}_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}$ e ao mesmo tempo $\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} = \|\nabla \bar{u}_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev,

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \|\bar{u}_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\nabla \bar{u}_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)}.$$

Da convergência $u_m \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$, podemos tomar o limite na desigualdade acima, donde

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

que é a desigualdade desejada, mas apenas para $q = p^*$. Para conseguir os demais casos, basta observar que, sendo Ω de medida finita, vale $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$ para todo $q \in [1,p^*]$, pela desigualdade de Hölder, concluindo a demonstração do teorema. $\square$

Convém observar que, como $p^* = \frac{np}{n-p} > \frac{np}{n} = p$, vale a seguinte importante versão do teorema: para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com Ω aberto limitado com fronteira de classe C^1, tem-se

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.20}$$

Como corolário da desigualdade de Poincaré, temos a equivalência de algumas normas em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Corolário 1.19 (normas equivalentes)**.** *Em $W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado com fronteira de classe C^1, são equivalentes as normas*

1. $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$;
2. $\|\nabla\cdot\|_{L^p(\Omega)}$;
3. $\left[\|\cdot\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla\cdot\|^p_{L^p(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}}$.

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que as normas em *1* e *2* são equivalentes. Notemos que para cada $\alpha = e_i$, denotando $D^{e_i}u = u_{x_i}$, temos

$$\begin{aligned} \|u_{x_i}\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |u_{x_i}|^p\,dx \leqslant \int_\Omega (|u_{x_1}| + \cdots + |u_{x_n}|)^p\,dx \\ &\leqslant C\int_\Omega \left(|u_{x_1}|^2 + \cdots + |u_{x_n}|^2\right)^{\frac{p}{2}} dx = C\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Usando esta desigualdade e a desigualdade de Poincaré temos

$$\begin{aligned} \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} &\leqslant \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u_{x_1}\|^p_{L^p(\Omega)} + \cdots + \|u_{x_n}\|^p_{L^p(\Omega)} \\ &\leqslant C\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + C\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \cdots + C\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \\ &= C\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, com um argumento semelhante ao dado acima e usando a desigualdade de Minkowski (A.3) em $(\star)$ abaixo, vemos que

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} &= \left[\int_\Omega \left(|u_{x_1}|^2 + \cdots + |u_{x_n}|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant C\left[\int_\Omega (|u_{x_1}| + \cdots + |u_{x_n}|)^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\overset{(\star)}{\leqslant} C\left(\|u_{x_1}\|_{L^p(\Omega)} + \cdots + \|u_{x_n}\|_{L^p(\Omega)}\right) \\ &\leqslant nC\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}\right\} \\ &\leqslant C\left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u_{x_1}\|^p_{L^p(\Omega)} + \cdots + \|u_{x_n}\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$= C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Isso mostra que as normas em *1* e *2* são equivalentes. Vejamos agora que as normas em *2* e *3* são equivalentes. Uma primeira desigualdade é obtida pela simples constatação de que

$$\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \leqslant \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

A outra é conseguida usando a desigualdade de Poincaré em $(\star\star)$ abaixo:

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \overset{(\star\star)}{\leqslant} C\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Isso completa a demonstração do corolário. □

Definição 1.20. *Dados dois espaços de Banach X e Y com $X \subset Y$ e $\{x_n\}$ uma seqüência em X limitada na norma $\|\cdot\|_X$, dizemos que $\{x_n\}$ é* pré-compacta *em Y se $\{x_n\}$ possuir subseqüência convergente na norma $\|\cdot\|_Y$.*

Teorema 1.21 (imersão compacta – Rellich-Kondrachov)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe C^1. Admita também $1 \leqslant p < n$. Então, a inclusão*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \tag{1.21}$$

é compacta para todo $q \in [1, p^*)$, ou seja, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua e qualquer seqüência limitada em $W^{1,p}(\Omega)$ é pré-compacta em $L^q(\Omega)$.

Definição 1.22 (semi-continuidade inferior)**.** *Seja X um espaço de Banach e $F : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que F é* semi-contínua inferiormente *quando*

$$F(u) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F(u_n)$$

sempre que $u_n \to u$ na norma de X.

O teorema seguinte será usado para construir uma seqüência minimizante para o funcional (13).

Teorema 1.23 (princípio variacional de Ekeland)**.** *Seja V um espaço métrico completo com distância d e $F : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função semi-contínua inferiormente, limitada inferiormente e finita em algum ponto. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $v \in V$ tal que*

$$F(v) \leqslant \inf_V F + \varepsilon \tag{1.22}$$

e

$$F(w) \geqslant F(v) - \varepsilon d(v, w), \forall w \in V. \tag{1.23}$$

Demonstração. Ver [Wil96]. □

A seguir, provaremos algumas propriedades do campo $\mathscr{A}(x,\xi) = \nabla_\xi \mathrm{F}(x,\xi)$ definido em (8).

Proposição 1.24. *Para todo $x \in \Omega$, o campo $\mathscr{A}(x,\cdot)$ satisfaz:*

1. *$\mathscr{A}(x,\cdot)$ é $(p-1)$-homogêneo;*

2. *para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$*
$$\mathscr{A}(x,\xi)\cdot\xi = p\mathrm{F}(x,\xi) \tag{1.24}$$

Demonstração. Derivando em relação à ξ_i a equação $\mathrm{F}(x,\lambda\xi) = \lambda^p \mathrm{F}(x,\xi)$ (veja a propriedade 4 do núcleo variacional F na introdução), temos por um lado que

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}[\mathrm{F}(x,\lambda\xi)] = \lambda \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \xi_i}(x,\lambda\xi)$$

e por outro lado que
$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\lambda^p \mathrm{F}(x,\xi) = \lambda^p \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \xi_i}(x,\xi).$$
Então, $\lambda\nabla\mathrm{F}(x,\lambda\xi) = \lambda^p \nabla\mathrm{F}(x,\xi)$. Dividindo essa equação por λ,

$$\nabla\mathrm{F}(x,\lambda\xi) = \lambda^{p-1}\nabla\mathrm{F}(x,\xi),$$

provando o item 1. Agora, derivando a equação $\mathrm{F}(x,\lambda\xi) = \lambda^p \mathrm{F}(x,\xi)$ em relação à λ e fazendo $\lambda = 1$, obtém-se
$$\mathscr{A}(x,\xi)\cdot\xi = p\cdot\mathrm{F}(x,\xi), \tag{1.25}$$
ou seja, 2. □

Vemos pelo argumento acima que se f é uma função diferenciável e p-homogênea, então $D^k f$ é $(p-k)$-homogênea.

Lema 1.25. *Existe $a > 0$ tal que para todo $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$*

$$(\mathscr{A}(x,\xi_1) - \mathscr{A}(x,\xi_2))\cdot(\xi_1 - \xi_2) \geqslant \begin{cases} a|\xi_1 - \xi_2|^p, & se\ p \geqslant 2; \\ \frac{a|\xi_1-\xi_2|^2}{(|\xi_1|+|\xi_2|)^{2-p}}, & se\ 1 < p < 2. \end{cases} \tag{1.26}$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos supor $|\xi_1| \leqslant |\xi_2|$. Primeiro, afirmamos que para $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}$ vale

$$\frac{1}{4}|\xi_1 - \xi_2| \leqslant |\xi_2 + t(\xi_1 - \xi_2)| \leqslant |\xi_1| + |\xi_2|. \tag{1.27}$$

De fato, a segunda desigualdade segue de

$$|\xi_2+t(\xi_1-\xi_2)|=|t\xi_1+(1-t)\xi_2|\leqslant|\xi_1|+|\xi_2|$$

e a primeira de

$$\begin{aligned}|\xi_1-\xi_2| &\leqslant 2|\xi_2|=2|\xi_2+t(\xi_1-\xi_2)-t(\xi_1-\xi_2)|\\ &\leqslant 2|\xi_2+t(\xi_1-\xi_2)|+2t|\xi_1-\xi_2|,\end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{1-2t}{2}|\xi_1-\xi_2|\leqslant|\xi_2+t(\xi_1-\xi_2)|.$$

Para que $\frac{1-2t}{2}\geqslant\frac{1}{4}$, é suficiente que $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{4}$, provando nossa afirmação. Em seguida, considere a função real $t\mapsto(\nabla_\xi \mathrm{F}(x,\xi_2+t(\xi_1-\xi_2))\cdot(\xi_1-\xi_2)$, que é diferenciável pela hipótese de $\mathrm{F}(x,\cdot)$ ser de classe $C^2(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. Temos

$$\frac{d}{dt}(\nabla_\xi \mathrm{F}(x,\xi_2+t(\xi_1-\xi_2))\cdot(\xi_1-\xi_2)=D^2_\xi\mathrm{F}(x,\xi_2+t(\xi_1-\xi_2))\cdot(\xi_1-\xi_2)^2,$$

onde $D^2_\xi\mathrm{F}(x,\xi_2+t(\xi_1-\xi_2))$ é uma forma bilinear. Por um lado, o teorema fundamental do cálculo nos fornece

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{d}{dt}(\nabla_\xi\mathrm{F}(x,\xi_2+t(\xi_1-\xi_2))\cdot(\xi_1-\xi_2)dt\\ =\;&(\nabla_\xi\mathrm{F}(x,\xi_2+t(\xi_1-\xi_2))\cdot(\xi_1-\xi_2)|_0^1=(\nabla_\xi\mathrm{F}(x,\nabla\xi_1)-\nabla_\xi\mathrm{F}(x,\nabla\xi_2))(\xi_1-\xi_2)\\ =\;&(\mathscr{A}(x,\xi_1)-\mathscr{A}(x,\xi_2))\cdot(\xi_1-\xi_2).\end{aligned}$$

Por outro, como $\mathrm{F}(x,\cdot)$ é estritamente convexa, $D^2_\xi\mathrm{F}(x,\xi_2+t(\xi_1-\xi_2))\cdot(\xi_1-\xi_2)^2$ é positivo para todo $t\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$. Então,

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{d}{dt}(\nabla_\xi\mathrm{F}(x,\xi_2+t(\xi_1-\xi_2))\cdot(\xi_1-\xi_2)dt\\ =\;&\int_0^1 D^2_\xi\mathrm{F}(x,\xi_2+t(\xi_1-\xi_2))\cdot(\xi_1-\xi_2)^2dt\\ \geqslant\;&\int_0^{\frac{1}{4}} D^2_\xi\mathrm{F}(x,\xi_2+t(\xi_1-\xi_2))\cdot(\xi_1-\xi_2)^2dt.\end{aligned}$$

Então, como $D^2_\xi\mathrm{F}$ é $(p-2)$-homogênea com respeito a ξ, usando (9) vem que

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}(x,\xi_1)-\mathscr{A}(x,\xi_2))\cdot(\xi_1-\xi_2) &\geqslant \int_0^{\frac{1}{4}} D^2_\xi\mathrm{F}(x,\xi_2+t(\xi_1-\xi_2))\cdot(\xi_1-\xi_2)^2\,dt\\ &\geqslant C|\xi_1-\xi_2|^2\int_0^1 |\xi_2+t(\xi_1-\xi_2)|^{p-2}\,dt,\end{aligned}$$

onde a constante C é positiva e independe de x, por (11). Se $p\geqslant 2$, elevamos a primeira desigualdade de (1.27) a $p-2\geqslant 0$ e concluímos

$$(\mathscr{A}(x,\xi_1)-\mathscr{A}(x,\xi_2))\cdot(\xi_1-\xi_2)\geqslant a|\xi_1-\xi_2|^p.$$

Se $1<p<2$, elevamos agora a segunda desigualdade de (1.27) a $p-2<0$ e concluímos

$$(\mathscr{A}(x,\xi_1)-\mathscr{A}(x,\xi_2))\cdot(\xi_1-\xi_2)\geqslant \frac{a|\xi_1-\xi_2|^p}{(|\xi_1|+|\xi_2|)^{2-p}},$$

encerrando a demonstração do lema. □

A função F e o campo $\mathscr{A}$ possuem ainda as seguintes propriedades:

Lema 1.26. *Considere o núcleo variacional* F *e o operador* $\mathscr{A}$. *Então:*

1. *existem* $k_3, k_4\in\mathbb{R}$ *com* $0<k_3\leqslant k_4<\infty$ *tais que*

$$k_3|\xi|^{p-1}\leqslant|\mathscr{A}(x,\xi)|\leqslant k_4|\xi|^{p-1} \tag{1.28}$$

2. *existe* $C>0$ *tal que para todo* $x\in\Omega$ *e para todo* $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$ *vale*

$$\mathrm{F}(x,\xi+\eta)\leqslant \mathrm{F}(x,\xi)+C|\xi|^{p-1}|\eta|+C|\eta|^p. \tag{1.29}$$

Demonstração. Para mostrar 1, por um lado a $(p-1)$-homogeneidade e a continuidade de $\mathscr{A}$ nos dão

$$|\mathscr{A}(x,\xi)|=|\xi|^{p-1}\left|\mathscr{A}\left(x,\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right|\leqslant k_4|\xi|^{p-1}.$$

Por outro, o Lema 1.25 com ξ e 0 nos fornece

$$(\mathscr{A}(x,\xi)-\mathscr{A}(x,0))\cdot\xi\geqslant\begin{cases} a|\xi|^p, & \text{se } p\geqslant 2;\\ \frac{a|\xi|^2}{|\xi|^{2-p}}, & \text{se } 1<p<2.\end{cases} \tag{1.30}$$

Novamente pela $(p-1)$-homogeneidade, $\mathscr{A}(x,0)=0$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e tomando $k_3 = a$, vem que

$$|\mathscr{A}(x,\xi)|\cdot|\xi| \geqslant k_3|\xi|^p.$$

Dividindo essa desigualdade por $|\xi|$, temos o item 1.

Para provar o item 2, usamos o teorema do valor médio e o item 1, obtendo

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x,\xi+\eta)-\mathrm{F}(x,\xi) &\leqslant |\mathrm{F}(x,\xi+\eta)-\mathrm{F}(x,\xi)| = \nabla_\xi \mathrm{F}(x,\xi+\theta\eta)\cdot\eta \\
&= \mathscr{A}(x,\xi+\theta\eta)\cdot\eta \leqslant |\mathscr{A}(x,\xi+\theta\eta)|\cdot|\eta| \\
&\leqslant k_4|\xi+\theta\eta|^{p-1}|\eta| \\
&\leqslant C|\xi|^{p-1}|\eta| + C|\eta|^p,
\end{aligned}$$

para uma constante C adequada. □

Agora obteremos uma desigualdade, que será utilizada para provar um dos principais resultados do trabalho, o Teorema 1.28. Das limitações (9) de F e usando a desigualdade de Poincaré, temos

$$\|u\|^p_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \leqslant C\int_\Omega \mathrm{F}(x,\nabla u)dx,$$

para alguma constante adequada C. Tomando

$$K_0^{-1} = \inf\left\{C\in\mathbb{R}; \|u\|^p_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant C\int_\Omega \mathrm{F}(x,\nabla u)dx, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\},$$

vale

$$\left[\int_\Omega |u|^{p^*}dx\right]^{\frac{p}{p^*}} \leqslant K_0^{-1}\int_\Omega \mathrm{F}(x,\nabla u)dx, \tag{1.31}$$

Definição 1.27. *A desigualdade (1.31) é uma* desigualdade de Sobolev generalizada *e K_0 é a* constante ótima *para esta desigualdade.*

Dada uma função positiva f Lebesgue-mensurável definida em Ω, podemos definir uma medida em Ω (que também denotaremos por f) fazendo

$$f(E) = \int_E f(x)dx,$$

para $E\subset\Omega$. Deste modo, $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $E\subset\Omega$, temos

$$\int_E u^{+p^*}dx \leqslant \int_E |u|^{p^*}dx \leqslant \int_\Omega |u|^{p^*}dx \leqslant C\int_\Omega |\nabla u|^p dx < \infty.$$

Portanto

$$u^{+p^*}(E) := \int_E u^{+p^*} dx$$

define uma medida finita em Ω. Além disso, Como $0 \leqslant \mathrm{F}(x,\nabla u) \leqslant k_2|\nabla u|^p$ e para todo $E \subset \Omega$ obtemos

$$\int_E \mathrm{F}(x,\nabla u)dx \leqslant \int_\Omega \mathrm{F}(x,\nabla u)dx \leqslant k_2 \int_\Omega |\nabla u|^p dx < \infty,$$

então

$$\mathrm{F}(x,\nabla u)(E) := \int_E \mathrm{F}(x,\nabla u)dx$$

define também uma medida finita em Ω. Considere uma seqüência $\{u_n\}$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ limitada na norma deste espaço. Vamos mostrar que as seqüências de medidas $\left\{u_n^{+p^*}\right\}$ e $\{\mathrm{F}(x,\nabla u_n)\}$ são limitadas na norma de $\mathscr{M}(\Omega)$. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} \left\| u_n^{+p^*} \right\| &= \sup_{f \in C_0(\Omega)} \frac{\left| \left\langle u_n^{+p^*}, f \right\rangle \right|}{\|f\|_\infty} \leqslant \sup_{f \in C_0(\Omega)} \frac{\int_\Omega |f| u_n^{+p^*} dx}{\|f\|_\infty} \\ &\leqslant \int_\Omega u_n^{+p^*} dx = \left\| u_n^+ \right\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*} < M_1 \end{aligned}$$

para alguma constante M_1. Analogamente, observando que $\mathrm{F}(x,\nabla u_n) \leqslant k_2|\nabla u_n|^p$, temos

$$\|\mathrm{F}(x,\nabla u_n)\| \leqslant C\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^p < M_2,$$

para algum $M_2 > 0$. O Teorema 1.5 garante que existem subseqüências de $\{u_n^{+p^*}\}$ e de $\{\mathrm{F}(x,\nabla u_n)\}$ em $\mathscr{M}(\Omega)$ que convergem fracamente no sentido dado pela Definição 1.4. Assim, dada uma seqüência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, sempre podemos supor a existência de tais seqüências fracamente convergentes de medidas aqui citadas. Em particular, o mesmo se obtém se $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Nesse sentido, enunciaremos e provaremos um resultado crucial para nosso trabalho, o qual é uma adaptação de um famoso teorema devido a Lions.

Teorema 1.28 (concentração de compacidade). *Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Suponhamos ainda que para as seqüência de medidas $\nu_n = |u_n|^{p^*}$ e $\mu_n = \mathrm{F}(x,\nabla u_n)$ ocorram as convergências fracas de medidas*

$$\nu_n \rightharpoonup \nu \quad e \quad \mu_n \rightharpoonup \mu,$$

onde ν e μ são medidas não-negativas limitadas em Ω. Então, existe um conjunto no máximo enumerável J, uma família de pontos $\{x_j; j \in J\} \subset \overline{\Omega}$, uma família de números positivos $\{\nu_j; j \in J\}$ e uma família de números positivos $\{\mu_j; j \in J\}$ tais que

1. $\nu = |u|^{p^*} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}$;

2. $\mu \geqslant \mathrm{F}(x, \nabla u) + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$;

3. $K_0(\nu_j)^{\frac{p}{p^*}} \leqslant \mu_j$, *onde* K_0 *é a constante em (1.31).*

Aqui, δ_{x_j} *é a* medida de Dirac*, definida por*

$$\delta_{x_j}(A) = \begin{cases} 0, & x_j \notin A; \\ 1, & x_j \in A, \end{cases}$$

também chamada medida atômica*. Chamaremos os pontos* x_j *de* átomos.

Demonstração. Primeiro mostraremos o item 3. Como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, esta seqüência é limitada na norma deste espaço. Uma vez que $p^* > p$, tem-se, pelo Teorema 1.21 que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Desta convergência e do Teorema 1.2 temos que $u_n \to u$ q.t.p. em Ω, a menos de subseqüência. Se definirmos a seqüência de medidas

$$\omega_n = \nu_n - |u|^{p^*} = |u_n|^{p^*} - |u|^{p^*},$$

podemos escrever

$$\omega_n = \nu_n - |u|^{p^*} = |u_n|^{p^*} - |u|^{p^*} = |u_n - u|^{p^*} + f_n,$$

onde $f_n = |u_n|^{p^*} - |u_n - u|^{p^*} - |u|^{p^*}$. Então, $\int_E f_n dx \to 0$ para qualquer conjunto mensurável $E \subset \Omega$, pois do teorema de Brezis-Lieb (Teorema 1.3)

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(E)}^{p^*} - \|u_n - u\|_{L^{p^*}(E)}^{p^*} \to \|u\|_{L^{p^*}(E)}^{p^*},$$

para qualquer $E \subset \Omega$ mensurável. Seja $v_n = u_n - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e considere também a seqüência de medidas

$$\lambda_n = \mathrm{F}(x, \nabla v_n).$$

Como v_n é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pelo Teorema 1.5 podemos admitir que $\lambda_n \rightharpoonup \lambda$, no sentido de medida. Além disso, v_n também é limitada em $L^{p^*}(\Omega)$ pela desigualdade de Sobolev (1.17) e então admitiremos que $\omega_n \rightharpoonup \omega$ no sentido de medida. Além disso, $\lambda, \omega \geqslant 0$.

Afirmamos que a medida ω pode ter no máximo um número enumerável de átomos. De fato, sendo $\sum \nu_\alpha$ o valor da medida ω sobre o conjunto dos átomos, deve ocorrer $\sum \nu_\alpha < \infty$, porque ω é finita, pelo Teorema 1.5. Então, dado k natural, o conjunto

$$M_k = \left\{ x_j ; \nu_j > \frac{1}{k} \right\}$$

é finito, pois a soma $\sum \nu_\alpha$ é finita. Como o conjunto dos átomos é dado por $\cup_{k=1}^{\infty} M_k$, segue que o conjunto de átomos é enumerável. Denotaremos por J o conjunto dos índices para os quais $\nu_\alpha > 0$. Agora, vamos decompor a medida ω usando o teorema da decomposição de Lebesgue (ver Teorema 16 do apêndice), escrevendo

$$\omega = \omega_0 + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j},$$

onde

$$\omega_0(E) = \begin{cases} \omega(E), & \text{se } E \subset \Omega \setminus \{x_j ; j \in J\}; \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

Essa é de fato *a* decomposição de Lebesgue de ω com respeito ela própria, pois ω_0 é nula em $\{x_j ; j \in J\}$ e a medida $\sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}$ é nula em $\Omega \setminus \{x_j ; j \in J\}$. Além disso, $\omega_0 \ll \omega$, ou seja, ω_0 é absolutamente contínua com respeito à medida ω. Vamos fazer uma comparação entre as medidas ω e λ. Dada qualquer $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$, vale $\xi v_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$. A desigualdade (1.31), a desigualdade de Sobolev generalizada (1.29), a p-homogeneidade de $\mathrm{F}(x, \cdot)$ e a desigualdade de Hölder nos dão

$$\begin{aligned}
\left[\int_\Omega |\xi v_n|^{p^*} dx \right]^{\frac{p}{p^*}} &\leqslant K_0^{-1} \int_\Omega \mathrm{F}(x, \nabla v_n \xi + \nabla \xi v_n) dx \\
&\leqslant K_0^{-1} \int_\Omega \mathrm{F}(x, \nabla v_n \xi) dx + C \int_\Omega |\nabla v_n \xi|^{p-1} |\nabla \xi v_n| dx \\
&\quad + C \int_\Omega |\nabla \xi v_n|^p dx \\
&\leqslant K_0^{-1} \int_\Omega \mathrm{F}(x, \nabla v_n) \xi^p dx \\
&\quad + C \left[\int_\Omega |\nabla v_n \xi|^p dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_\Omega |\nabla \xi v_n|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + C \int_\Omega |v_n|^p dx.
\end{aligned}$$

Como $v_n = u_n - u \to 0$ em $L^p(\Omega)$, tomando o limite em n na desigualdade acima e usando que $|v_n|^{p^*} \rightharpoonup \omega$ e $\mathrm{F}(x,\nabla u_n) \rightharpoonup \lambda$, temos que

$$\left[\int_\Omega |\xi|^{p^*} d\omega\right]^{\frac{p}{p^*}} \leqslant K_0^{-1} \int_\Omega |\xi|^p d\lambda, \tag{1.32}$$

qualquer que seja $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$. Sendo x_j um átomo da medida ω, fixe ε e tome $\xi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leqslant \xi_\varepsilon \leqslant 1$, $\xi_\varepsilon(x_j) = 1$ e $\xi_\varepsilon \equiv 0$ em $B(x_j,\varepsilon)^\complement$. Então,

$$\left[\int_\Omega |\xi_\varepsilon|^{p^*} d\omega\right]^{\frac{p}{p^*}} \leqslant K_0^{-1} \int_\Omega |\xi_\varepsilon|^p d\lambda.$$

Ao fazer $\varepsilon \to 0$, o teorema da convergência dominada de Lebesgue nos dá

$$K_0(v_j)^{\frac{p}{p^*}} \leqslant \lambda(\{x_j\}). \tag{1.33}$$

Para toda $0 \leqslant \phi \in C_c^\infty(\Omega)$, usando novamente (1.29), a desigualdade de Hölder e a limitação de $|\nabla u_n|$ em $L^p(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi \mathrm{F}(x,\nabla v_n)dx &\leqslant \int_\Omega \phi \mathrm{F}(x,\nabla u_n)dx \\
&+ C\int_\Omega \phi|\nabla u_n|^{p-1}|\nabla u|dx + C\int_\Omega \phi|\nabla u|^p \\
&\leqslant \int_\Omega \phi \mathrm{F}(x,\nabla u_n)dx \\
&+ C\left[\int_\Omega \phi^p|\nabla u|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} + C\int_\Omega \phi|\nabla u|^p dx.
\end{aligned}$$

Novamente fixe um átomo x_j, tome $\varepsilon > 0$, $B(x_j,\varepsilon)$ e $0 \leqslant \phi_\varepsilon \leqslant 1$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_\varepsilon(x_j) = 1$ e $\phi_\varepsilon \equiv 0$ em $B(x_j,\varepsilon)^\complement$. Como $\nabla u_n - \nabla u = \nabla v_n$ e $\mathrm{F}(x,\nabla v_n) \rightharpoonup \lambda$ no sentido de medida, tomamos o limite na desigualdade acima e obtemos

$$\int_\Omega \phi_\varepsilon d\lambda \leqslant \int_\Omega \phi_\varepsilon d\mu + C\left[\int_\Omega \phi_\varepsilon^p|\nabla u|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} + C\int_\Omega \phi_\varepsilon|\nabla u|^p dx.$$

Ao fazer $\varepsilon \to 0$, o teorema da convergência dominada de Lebesgue nos dá agora

$$\lambda(\{x_j\}) \leqslant \mu(\{x_j\}).$$

Desta desigualdade e de (1.33), temos

$$\mu_j := \mu(\{x_j\}) \geqslant K_0(v_j)^{\frac{p}{p^*}}, \tag{1.34}$$

concluindo a prova do item (3).

Agora, provaremos a afirmação (2). Começamos afirmando que

$$\mu \geqslant \mathrm{F}(x,\nabla u). \tag{1.35}$$

De fato, dada $0 \leqslant \phi \in C_c^\infty(\Omega)$, defina o funcional $f_\phi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$f_\phi(u) = \int_\Omega \mathrm{F}(x,\nabla u)\phi\, dx.$$

Como $\mathrm{F}(x,\cdot)$ é estritamente convexa e ϕ é positiva, f_ϕ é convexo. Além disso, f_ϕ é semi-contínuo inferiormente, pois é contínuo. Como estamos supondo desde o início que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi\, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \mathrm{F}(x,\nabla u_n)\phi\, dx = \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \mathrm{F}(x,\nabla u_n)\phi\, dx \\ &= \liminf_{n\to\infty} f_\phi(u_n) \geqslant f_\phi(u) = \int_\Omega \mathrm{F}(x,\nabla u)\phi\, dx. \end{aligned}$$

Essa desigualdade mostra que $\mu \geqslant \mathrm{F}(x,\nabla u)$, $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Seja $E \subset \Omega$ um mensurável qualquer. Como Ω tem medida finita, vale $\chi_E \in L^p(\Omega)$, onde χ_E é a função característica de E. Como χ_E é uma função não-negativa limitada, podemos supor a existência de uma seqüência uniformemente limitada $0 \leqslant \phi_n \leqslant M$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n \to \chi_E$ q.t.p. em Ω, pelos Teoremas 1.1 e 1.2. Então, como para todo n,

$$\int_\Omega \phi_n d\mu \geqslant \int_\Omega \mathrm{F}(x,\nabla u)\phi_n dx$$

o teorema da convergência dominada de Lebesgue aplicado aos dois lados da desigualdade acima nos conduz a

$$\mu(E) = \int_\Omega \chi_E d\mu \geqslant \int_\Omega \chi_E \mathrm{F}(x,\nabla u) dx = \mathrm{F}(x,\nabla u)(E)$$

e isso prova a afirmação (1.35). Observamos que as medidas $\mathrm{F}(x,\nabla u)$ e δ_{x_j} são mutuamente singulares, pelo que também são $\mathrm{F}(x,\nabla u)$ e $\sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}$. Então,

$$\mu \geqslant \mathrm{F}(x,\nabla u) + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j},$$

provando (2).

Vamos agora provar (1). Começaremos mostrando que ω_0 é relativamente contínua com respeito a λ ($\omega_0 \ll \lambda$), ou seja, que dado $E \subset \Omega \setminus \{x_j; j \in J\}$ tal que $\lambda(E) = 0$, tem-se necessariamente $\omega_0(E) = 0$. Dado um mensurável em $E \subset \Omega \setminus \{x_j; j \in J\}$ tal que $\int_E d\lambda \leqslant K_0$, considere novamente uma seqüência uniformemente limitada $\phi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ convergindo q.t.p. em Ω para χ_E, por (1.32) temos

$$\left[\int_\Omega |\phi_n|^{p^*} d\omega\right]^{\frac{p}{p^*}} \leqslant K_0^{-1} \int_\Omega |\phi_n|^p d\lambda.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite em n, o teorema da convergência dominada de Lebesgue nos dá

$$\left[\int_E d\omega\right]^{\frac{p}{p^*}} \leqslant K_0^{-1} \int_E d\lambda.$$

Como tomamos E tal que $\int_E d\lambda \leqslant K_0$, então

$$1 \geqslant K_0^{-1} \int_E d\lambda \geqslant \left[\int_E d\omega\right]^{\frac{p}{p^*}} \geqslant \int_E d\omega. \tag{1.36}$$

Seja $E \subset \Omega \setminus \{x_j; j \in J\}$ tal que $\lambda(E) = \int_E d\lambda = 0$. A desigualdade (1.36) vale também neste conjunto, donde $\omega_0(E) = \int_E d\omega = 0$, ou seja, $\omega_0 \ll \lambda$, como queríamos. Agora iremos provar que $\omega_0 = 0$. Isso já ocorre no conjunto $\{x_j; j \in J\}$. Como mostramos que $\omega_0 \ll \lambda$, podemos aplicar o teorema de Radon-Nikodym (ver Teorema 15 do apêndice) para encontrar uma função f não-negativa e λ-integrável tal que

$$\omega_0(E) = \int_E f d\lambda \tag{1.37}$$

para todo $E \subset \Omega \setminus \{x_j; j \in J\}$ mensurável. Tomando agora $y \in \Omega \setminus \{x_j; j \in J\}$, temos

$$0 = \omega_0(\{y\}) = \int_{\{y\}} f(x) d\lambda = f(y)\lambda(\{y\}).$$

Como λ tem eventualmente mais átomos que ω, pode ocorrer $\lambda(\{y\}) \neq 0$ e neste caso vale $f(y) = 0$. Se ocorrer $\lambda(\{y\}) = 0$, como do teorema da diferenciação de Lebesgue (ver Teorema 12 do apêndice) temos

$$f(y) = \lim_{\rho \to 0} \left[\frac{\int_{B(y,\rho)} d\omega_0}{\int_{B(y,\rho)} d\lambda}\right],$$

usando (1.32) encontramos

$$K_0 f(y)^{\frac{p}{p^*}} = \lim_{\rho\to 0}\left[\frac{K_0\left(\int_{B(y,\rho)} d\omega_0\right)^{\frac{p}{p^*}}}{\left(\int_{B(y,\rho)} d\lambda\right)^{\frac{p}{p^*}}}\right] \leqslant \lim_{\rho\to 0}\left[\int_{B(y,\rho)} d\lambda\right]^{\frac{p^*-p}{p^*}} = 0.$$

Isso mostra que $f(y)=0$ para quase todo $y\in\Omega\setminus\{x_j; j\in J\}$, com respeito à medida λ. Usando (1.37), temos $\omega_0 = 0$. Então, ω contém apenas átomos. Havíamos admitido $\omega_n \rightharpoonup \omega$. Da definição de ω_n, vem que $\omega = \nu - |u|^{p^*}$. Como decompusemos a medida ω em $\omega_0 + \sum_{j\in J}\nu_j\delta_{x_j}$, temos

$$\nu = |u|^{p^*} + \sum_{j\in J}\nu_j\delta_{x_j},$$

e isso conclui a demonstração do teorema. □

Capítulo 2

Problemas com Obstáculo

Nosso objetivo neste capítulo é estudar um problema variacional envolvendo funções homogêneas e obstáculos. Para introduzir e ilustrar algumas técnicas que serão aqui aplicadas, iniciaremos tratando sucintamente de um exemplo bastante particular de desigualdade variacional cuja existência de solução é deduzida de uma maneira instrutiva e usando técnicas relativamente simples. Este exemplo consta no capítulo 8 de [Eva98].

2.1 Problema não-crítico com obstáculo

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto com bordo regular, $f, \psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis e o funcional

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - f u \, dx, \tag{2.1}$$

definido sobre o conjunto convexo

$$\mathrm{K}_\psi = \left\{ u \in W_0^{1,2}(\Omega); u \geqslant \psi \text{ q.t.p. em } \Omega \right\}. \tag{2.2}$$

Provaremos que existe uma única função $u \in \mathrm{K}_\psi$ que minimiza I e em seguida mostraremos que esta função satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx \geqslant \int_\Omega f \cdot (v - u) dx, \quad \forall v \in K_\psi.$$

Teorema 2.1 (Existência de mínimo)**.** *Existe uma única função $u \in \mathrm{K}_\psi$ tal que*

$$I(u) = \min\{I(w); w \in \mathrm{K}_h\}.$$

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que o funcional I é limitado inferiormente. Da desigualdade de Hölder em (♣), de Poincaré (Teorema 1.18) em (♠) e de Young (A.1) com

$p = q = 2$ em $(\diamondsuit)$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega f u \, dx &\overset{(\clubsuit)}{\leqslant} \left[\int_\Omega |f|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega |u|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(\spadesuit)}{\leqslant} C\left[\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \overset{(\diamondsuit)}{\leqslant} C + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx,
\end{aligned}
$$

para alguma constante C que não depende de u. Então,

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - f u \, dx \geqslant -C.$$

Sabemos agora que o conjunto $\{I(w); w \in \mathrm{K}_\psi\}$ é limitado inferiormente. Seja

$$c = \inf\left\{I(w); w \in \mathrm{K}_\psi\right\}.$$

Pela definição de ínfimo, existe uma seqüência $\{u_n\}$ em K_ψ tal que $I(u_n) \to c$. Portanto, a seqüência de números reais $\{I(u_n)\}$ é limitada. Então, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 - f u_n \, dx \leqslant M.$$

Usando as desigualdades de Hölder, Poincaré e Young com ε nesta ordem, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx &\leqslant M + \int_\Omega f u_n \, dx \\
&\leqslant M + \left[\int_\Omega |f|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_\Omega |u_n|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant M + C\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant M + C + \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx,
\end{aligned}
$$

para uma constante C adequada independente de n. Fixando $\varepsilon < \frac{1}{2}$, vem que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leqslant \frac{M + C}{\frac{1}{2} - \varepsilon}.$$

Pela equivalência de normas em $W_0^{1,2}(\Omega)$ (Corolário 1.19) segue que

$$\left[\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

é uma norma neste espaço. Então, $\|u_n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} < C$ para algum C. Como $W_0^{1,2}(\Omega)$ é reflexivo, podemos extrair uma subseqüência convergindo fracamente em $W_0^{1,2}(\Omega)$ para alguma u. O Teorema 1.21 (imersão compacta) nos dá $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$, já que $2^* > 2$. Então, usando o Teorema 1.2, $u_n \to u$ q.t.p. em Ω, a menos de subseqüência. Sendo $u_n \geqslant \psi$, a convergência q.t.p. nos dá $u \geqslant \psi$, donde $u \in \mathrm{K}_\psi$. Basta mostrar agora que o mínimo de I é atingido em u ou, equivalentemente, pela definição de c, que $I(u) \leqslant c$. Como $u_n \rightharpoonup u$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \liminf \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} = \liminf \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx.$$

Então,

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u\, dx \\ &\leqslant \frac{1}{2}\liminf \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \limsup \int_\Omega f u_n\, dx \\ &= \liminf I(u_n) = \lim_{n\to\infty} I(u_n) = c. \end{aligned}$$

Como já tínhamos $I(u) \geqslant c$, segue que u é um ponto de mínimo de I em K_ψ. Vamos verificar que u é único. De fato, se houvesse $u \neq \bar{u} \in \mathrm{K}_\psi$ tal que $I(\bar{u}) = c$, a convexidade de K_ψ nos daria $w = \frac{u+\bar{u}}{2} \in \mathrm{K}_\psi$. Então,

$$\begin{aligned} I(w) &= \int_\Omega \frac{1}{2}\left|\frac{\nabla u + \nabla \bar{u}}{2}\right|^2 - f \cdot \left(\frac{u+\bar{u}}{2}\right) dx \\ &= \int_\Omega \frac{1}{8}\left(|\nabla u|^2 + 2\nabla u \cdot \nabla \bar{u} + |\nabla \bar{u}|^2\right) - f \cdot \left(\frac{u+\bar{u}}{2}\right) dx. \end{aligned}$$

Agora, observando que $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ vale $2\xi \cdot \eta = |\xi|^2 + |\eta|^2 - |\xi - \eta|^2$, temos

$$\begin{aligned} I(w) &= \int_\Omega \frac{1}{8}\left(2|\nabla u|^2 + 2|\nabla \bar{u}|^2 - |\nabla u - \nabla \bar{u}|^2\right) - f \cdot \left(\frac{u+\bar{u}}{2}\right) dx \\ &< \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - f u\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla \bar{u}|^2 - f\bar{u}\, dx \qquad (2.3) \\ &= \frac{1}{2}I(u) + \frac{1}{2}I(\bar{u}) = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c. \end{aligned}$$

Note que em (2.3) a desigualdade é estrita, pois $\nabla u \neq \nabla \bar{u}$ em algum conjunto de medida positiva. Mas isto contradiz o fato de I ter mínimo c. Portanto, só há uma função $u \in \mathrm{K}_\psi$ que minimiza I. $\square$

Teorema 2.2. *Seja $u \in \mathrm{K}_\psi$ a única solução de $I(u) = \min\{I(w); w \in \mathrm{K}_\psi\}$. Então,*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)dx \geqslant \int_\Omega f \cdot (v-u)dx, \tag{2.4}$$

para toda $v \in \mathrm{K}_\psi$.

Demonstração. Fixemos $v \in \mathrm{K}_\psi$. Como $u \in \mathrm{K}_\psi$, a convexidade deste conjunto nos dá

$$u + t(v-u) = (1-t)u + tv \in \mathrm{K}_\psi,$$

para todo $t \in [0,1]$. Defina $i : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $i(t) = I(u + t(v-u))$. Como u minimiza I, $i(0) \leqslant i(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Então, por um lado, $i'^{+}(0) \geqslant 0$. Por outro, calculemos explicitamente a derivada lateral à direita em 0:

$$\begin{aligned}
\frac{i(t)-i(0)}{t-0} &= \frac{1}{t}\int_\Omega \frac{|\nabla u + t\nabla(v-u)|^2 - |\nabla u|^2}{2} - f\cdot(u+t(v-u)-u)dx \\
&= \frac{1}{t}\int_\Omega \frac{2t\nabla u \cdot \nabla(v-u) + t^2|\nabla v - u|^2}{2} - tf\cdot(v-u)dx \\
&= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u) + \frac{t|\nabla(v-u)|^2}{2} - f\cdot(v-u)dx.
\end{aligned}$$

Ao fazer $t \to 0^+$, temos

$$0 \leqslant i'^{+}(0) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u) - f(v-u)dx.$$

Como v foi tomada de modo arbitrário, o resultado está provado. □

Como pudemos ver, tratamos da desigualdade variacional (2.4) associando a ela um funcional adequado definido sobre um conjunto convexo. Tal funcional é derivável e a derivada dele nos conduziu à solução da desigualdade. Estas mesmas idéias serão usadas na próxima seção. Em resumo, o que faremos é associar um funcional adequado ao nosso problema e em seguida iremos procurar um minimizador para este funcional.

2.2 Problema crítico com obstáculo

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Fixemos $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$, com $1 < p < n$, tal que $\psi|_{\partial\Omega} \leqslant 0$ (no sentido do traço) e ψ^+ seja positiva em um conjunto de medida (de Lebesgue) positiva. Defina o conjunto

$$\mathrm{K}_\psi := \left\{ v \in W_0^{1,p}(\Omega) : v \geqslant \psi \text{ q.t.p. em } \Omega \right\}.$$

Esse conjunto é fechado na topologia induzida pela norma de $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, se $\{u_n\}$ é de Cauchy em K_ψ, então $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$ e $u_n \to u$ q.t.p. em Ω a menos de subseqüência. Uma vez que $u_n \geqslant \psi$, tem-se que $\lim_{n\to\infty} u_n = u \geqslant \psi$ q.t.p. em Ω, donde $u \in \mathrm{K}_\psi$. Nossa intenção é estudar o seguinte problema:

Problema 2.3. *Determinar $u \in \mathrm{K}_\psi$ tal que para toda $v \in \mathrm{K}_\psi$ seja satisfeita a desigualdade*

$$\frac{1}{p} \int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla u) \cdot \nabla(v - u)\, dx \geqslant \lambda \int_\Omega u^{+p^*-1}(v - u)\, dx \tag{2.5}$$

onde $p^* = \frac{np}{n-p}$ é o expoente crítico de Sobolev e $\mathscr{A}$ é o operador dado em (8).

Defina o funcional

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega \mathrm{F}(x, \nabla u)\, dx - \frac{\lambda}{p^*} \int_\Omega u^{+p^*}\, dx. \tag{2.6}$$

Note que a derivada deste funcional está associada com a desigualdade (2.5). De fato, derivando segundo Gateaux, temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{I(u + tw) - I(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \frac{1}{p}\mathrm{F}(x, \nabla(u + tw)) - \frac{\lambda}{p^*}(u + tw)^{+p^*} - \frac{1}{p}\mathrm{F}(x, \nabla u) + \frac{\lambda}{p^*} u^{+p^*}\, dx \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{p} \int_\Omega \frac{\mathrm{F}(x, \nabla(u + tw)) - \mathrm{F}(x, \nabla u)}{t}\, dx - \lim_{t\to 0} \frac{\lambda}{p^*} \int_\Omega \frac{(u + tw)^{+p^*} - u^{+p^*}}{t}\, dx \\
&= \frac{1}{p} \int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla u) \cdot \nabla w\, dx - \lambda \int_\Omega u^{+p^*-1} w\, dx = I'(u)w.
\end{aligned}$$

Se provarmos que $I'(u)w \geqslant 0$ para todo w, teremos, tomando $w = v - u$, que

$$\frac{1}{p} \int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla u) \cdot \nabla(v - u)\, dx - \lambda \int_\Omega u^{+p^*-1}(v - u)\, dx = I'(u)(v - u) \geqslant 0,$$

para toda $v \in \mathrm{K}_\psi$. Nos moldes do que expusemos na seção anterior, mostraremos que existe uma função não-nula u tal que $I'(u)(v-u)\geqslant 0$ para toda $v\in \mathrm{K}_\psi$. Nosso primeiro passo será encontrar uma seqüência minimizante para o funcional (2.6) em K_ψ.

Proposição 2.4. *Existe $\lambda_0>0$ tal que para cada $\lambda\in(0,\lambda_0]$ fixado existe uma seqüência $\{u_n\}$ em K_ψ satisfazendo*

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla(v-u_n)dx-\lambda\int_\Omega u_n^{+p^*-1}(v-u_n)dx\geqslant z_n(v-u_n), \tag{2.7}$$

$\forall v\in \mathrm{K}_\psi$ e $\forall n\in\mathbb{N}$, onde z_n é o funcional 1-homogêneo sobre K_ψ dado por

$$z_n(u)=-\frac{1}{n}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.8}$$

Demonstração. Usaremos em $W_0^{1,p}(\Omega)$ a norma $\|\nabla\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. Vamos aplicar o princípio variacional de Ekeland (Teorema 1.23) ao funcional (2.6). Para isso, precisamos garantir uma limitação inferior local para I. Por (9), temos

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega F(x,\nabla u)dx-\frac{\lambda}{p^*}\int_\Omega u^{+p^*}dx\\
&\geqslant \frac{k_1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx-\frac{\lambda}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}dx\\
&= \int_\Omega |\nabla u|^p dx\left[\frac{k_1}{p}-\frac{\lambda}{p^*}\left(\frac{\int_\Omega |u|^{p^*}dx}{\int_\Omega|\nabla u|^p dx}\right)\right]\\
&\geqslant \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}\left[\frac{k_1}{p}-\lambda C\left(\int_\Omega|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{p}{n-p}}\right],
\end{aligned}$$

para algum $C>0$, onde na última desigualdade usamos $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}\leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$. Fixado $\sigma>0$ tal que $\frac{k_1}{p}-\sigma>0$, observamos que u satisfaz

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\leqslant\left(\frac{(k_1/p)-\sigma}{\lambda C}\right)^{\frac{n-p}{p^2}}$$

se e somente se

$$\left[\frac{k_1}{p}-\lambda C\left(\int_\Omega|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{p}{n-p}}\right]\geqslant\sigma.$$

Assim, denotando por

$$\rho(\lambda)=\left(\frac{(k_1/p)-\sigma}{\lambda C}\right)^{\frac{n-p}{p^2}},$$

e considerando o conjunto $B_{\rho(\lambda)}:=\left\{w\in W_0^{1,p}(\Omega);\|w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\leqslant\rho(\lambda)\right\}$, temos, pela equivalência de normas em $W_0^{1,p}(\Omega)$ (Corolário 1.19), que

$$I(u) \geqslant \sigma \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p, \quad \forall u \in B_{\rho(\lambda)}. \tag{2.9}$$

Isso nos dá uma limitação inferior local para I. Vamos escolher λ de tal forma que $\psi^+ \in B_{\rho(\lambda)}$. Isso é conseguido notando-se que $\|\nabla \psi^+\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \rho(\lambda)$ se e somente se

$$\lambda \leqslant \left(\frac{(k_1/p) - \sigma}{C}\right) \|\nabla \psi^+\|_{L^p(\Omega)}^{-\frac{p^2}{n-p}} =: \lambda_1.$$

Logo, I é limitado inferiormente nos conjuntos fechados

$$\mathrm{K}_\psi(B_{\rho(\lambda)}) := \mathrm{K}_\psi \cap B_{\rho(\lambda)}$$

para todo $\lambda \in (0, \lambda_1)$; além disso, esses conjuntos contêm ψ^+.

Notemos também que I é um funcional contínuo e portanto semi-contínuo inferiormente. Dado $\lambda \in (0, \lambda_1)$, podemos agora aplicar o princício variacional de Ekeland à I no conjunto $\mathrm{K}_\psi(B_{\rho(\lambda)})$. Seja

$$c = \inf\left\{I(u); u \in \mathrm{K}_\psi(B_{\rho(\lambda)})\right\}.$$

Existe $\{u_n\} \subset \mathrm{K}_\psi(B_{\rho(\lambda)})$ tal que

$$c \leqslant I(u_n) \leqslant c + \frac{1}{n} \tag{2.10}$$

e

$$I(w) \geqslant I(u_n) - \frac{1}{n}\|\nabla(w - u_n)\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall w \in \mathrm{K}_\psi(B_{\rho(\lambda)}).$$

Da última desigualdade, obtemos para todo $w \in \mathrm{K}_\psi(B_{\rho(\lambda)})$ que

$$I(w) - I(u_n) \geqslant -\frac{1}{n}\|\nabla(w - u_n)\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.11}$$

Da definição de $\mathrm{K}_\psi(B_{\rho(\lambda)})$, segue que $\{u_n\}$ é limitada. Da reflexividade de $W_0^{1,p}(\Omega)$ existe uma subseqüência (não faremos distinção de índices) $\{u_n\}$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Fazendo uma escolha adequada de $\lambda_0 \in (0, \lambda_1)$, vamos mostrar que essa seqüência é a procurada em nossa proposição. Essa escolha é motivada pelo seguinte: fixado $v \in \mathrm{K}_\psi$, usaremos a desigualdade (2.11) para calcular a derivada de I nos pontos u_n e na direção $v - u_n$; precisamos então garantir que $u_n + t(v - u_n) \in B_{\rho(\lambda)}$ para todo n de modo que t não dependa de n. Geometricamente, a escolha fornece condições de "nos movimentarmos" em volta de cada u_n sem depender de n e sim apenas de t. Das limitações (9) (com $\nabla\psi^+$ no lugar de ξ), de (2.9), (2.10) e do fato de c ser ínfimo de I em $\mathrm{K}_\psi(B_{\rho(\lambda)})$, temos

$$\begin{aligned}\|\nabla u_n\|^p_{L^p(\Omega)} &\leqslant \frac{I(u_n)}{\sigma} \leqslant \frac{c}{\sigma} + \frac{1}{n\sigma} \leqslant \frac{I(\psi+)}{\sigma} + \frac{1}{n\sigma} \\ &\leqslant \frac{k_2}{\sigma}\|\nabla\psi^+\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{n\sigma} \leqslant \frac{k_2}{\sigma}\|\nabla\psi^+\|^p_{L^p(\Omega)} + 1,\end{aligned}$$

para n suficientemente grande (daqui em diante, usaremos a subseqüência a partir deste n, novamente sem mudar os índices). Como $\rho(\lambda) \to \infty$ monotonicamente quando $\lambda \to 0^+$, escolhemos $\lambda_0 \in (0, \lambda_1)$ suficientemente pequeno de tal modo que $\rho(\lambda_0)^p > \frac{k_2}{\sigma}\|\nabla\psi^+\|_{L^p(\Omega)} + 1$. Colocando $k^p := \frac{k_2}{\sigma}\|\nabla\psi^+\|_{L^p(\Omega)} + 1$, temos

$$\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \leqslant k < \rho(\lambda_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, para quaisquer $v \in \mathrm{K}_\psi$ e $\lambda \in (0, \lambda_0]$ fixado, $u_n + t(v - u_n) \in \mathrm{K}_\psi(B_\rho(\lambda))$ para t suficientemente pequeno e para todo n. De (2.11), temos

$$I(u_n + t(v - u_n)) - I(u_n) \geqslant -\frac{t}{n}\|\nabla(v - u_n)\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dividindo por t e fazendo $t \to 0$, encontramos

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla u_n)\cdot\nabla(v - u_n)dx - \lambda\int_\Omega u_n^{+p^*-1}(v - u_n)dx \geqslant z_n(v - u_n),$$

onde $z_n(u) = -\frac{1}{n}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$. Isso conclui a demonstração da proposição. □

Fixado $\lambda \in (0, \lambda_0]$, mostraremos que o Problema 2.3 possui ao menos uma solução não-negativa. Antes disso, vejamos um lema que nos permite definir uma norma no espaço vetorial dos funcionais $f : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ que são 1-homogêneos, ou seja, $f(tu) = tf(u)$ para todo $t \geqslant 0$.

Lema 2.5 (norma de funcionais homogêneos)**.** *A expressão*

$$\left\|f\right\| = \sup_{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} |f(u)| \tag{2.12}$$

define uma norma no espaço vetorial dos funcionais 1*-homogêneos sobre* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *para os quais* (2.12) *é limitada.*

Demonstração. i) A desigualdade triangular segue imediatamente da definição de sup e da desigualdade triangular do módulo.

ii) Da definição de sup, é imediato que $\left\|tf\right\| = |t|\cdot\left\|f\right\|, \forall t \in \mathbb{R}$.

iii) Se $\|f\| = 0$, então para toda $0 \neq u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
|f(u)| &= \left| f\left(\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{u}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \right) \right| = \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \cdot \left| f\left(\frac{u}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \right) \right| \\
&\leqslant \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \cdot \|f\| = 0.
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

□

Observação 2.6. Temos que $z_n(u) = -\frac{1}{n}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ quando $n \to \infty$. De fato, basta notar que dada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ unitária,

$$|z_n(u)| = \frac{1}{n}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \frac{1}{n}\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \frac{1}{n}$$

e tomando o sup na esfera unitária de $W_0^{1,p}(\Omega)$, vem

$$\|z_n\| = \sup_{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} |z_n(u)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Julgamos prudente alertar que tomaremos diversas vezes o procedimento de extrair uma subseqüência de uma dada seqüência. Para evitar sobrecarregar a notação, não reindexaremos as subseqüências extraídas e, além disso, a não ser que haja menção contrária, sempre que nos referirmos a uma seqüência, tratar-se-á da última subseqüência extraída. Também denotaremos por C as inúmeras constantes que aparecerão e que não dependem de n.

Lema 2.7. *Fixado $\lambda \in (0, \lambda_0]$ e considerando a seqüência $\{u_n\}$ obtida na Proposição 2.4, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que:*

1. *$u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$;*

2. *$u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$, para $1 < q < p^*$;*

3. *$u_n \to u$ q.t.p. em Ω;*

4. *$u_n^{+p^*} \rightharpoonup \tilde{\nu} = u^{+p^*} + \sum_{j \in J} \tilde{\nu}_j \delta_{x_j}$;*

5. *$\mathrm{F}(x, \nabla u_n) \rightharpoonup \mu \geqslant \mathrm{F}(x, \nabla u) + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$.*

onde $\tilde{\nu}$ e μ são medidas não negativas limitadas, J é um conjunto no máximo enumerável e $K_0(\tilde{\nu}_j)^{\frac{p}{p^*}} \leqslant \mu_j$.

Demonstração. 1. Por hipótese, $\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} < M$. Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, existe uma subseqüência tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

2. Do Teorema 1.21 (imersão compacta), para cada $q \in (1, p^*)$ existe uma subseqüência tal que $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$.

3. Pelo Teorema 1.2, para cada $q \in (1, p^*)$ existe uma subseqüência tal que $u_n \to u$ q.t.p. em Ω.

4. Da desigualdade de Sobolev (1.17), temos $\|u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant C\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Então, $\{u_n\}$ é limitada em $L^{p^*}(\Omega)$. Portanto, $|\nabla u_n|^p$ e $|u_n|^{p^*}$ formam seqüências de medidas limitadas, logo, pelo Teorema 1.5,
$$|\nabla u_n|^p \rightharpoonup \mu \quad \text{e} \quad |u_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu,$$
com μ e ν medidas finitas. Do Teorema 1.28 (concentração de compacidade), segue que
$$\begin{aligned} \nu &= |u|^{p^*} + \sum_{j\in J} \tilde{\nu}_j \delta_{x_j} \\ \mu &\geqslant \mathrm{F}(x, \nabla u) + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}. \end{aligned}$$
Como $\int_\Omega u_n^{+p^*} dx \leqslant \int_\Omega |u_n|^{p^*} dx$ para todo n, temos também
$$u_n^{+p^*} \rightharpoonup \tilde{\nu} \quad \text{e} \quad \tilde{\nu} \ll \nu,$$
ou seja, $\tilde{\nu}$ absolutamente contínua com respeito a ν. Portanto,
$$K_0(\tilde{\nu}_j)^{\frac{p}{p^*}} \leqslant \mu_j \quad \text{e} \quad u_n^{+p^*} \rightharpoonup \tilde{\nu} = u^{+p^*} + \sum_{j\in J} \tilde{\nu}_j \delta_{x_j},$$
provando 4 e 5.

□

Proposição 2.8. *A menos de subseqüência, vale*
$$\int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla u_n) \cdot \nabla(v - u) dx \to \int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla u) \cdot \nabla(v - u) dx \tag{2.14}$$
para toda $v \in \mathrm{K}_\psi$.

Dividiremos a prova desta proposição em lemas e corolários:

Lema 2.9. *Para a seqüência $\{u_n\}$ da Proposição 2.7, o conjunto J é finito.*

Demonstração. Do Lema 2.7, temos $\mu_j \geqslant K_0(\tilde{\nu}_j)^{\frac{p}{p^*}}$. Considere uma função corte $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta \equiv 1$ em $B(0, 1/2)$, $\eta \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$ e $|\nabla \eta| < C$ para algum C. Fixado

$\varepsilon > 0$ e $j \in J$, denotaremos por $\eta_\varepsilon^j(x) = \eta\left(\frac{x-x_j}{2\varepsilon}\right)$. Com isso, temos $|\nabla \eta_\varepsilon^j| < C/\varepsilon$, para alguma constante C. Note que $u_n - \eta_\varepsilon^j(u_n-\psi) \in \mathrm{K}_\psi$. De fato, como $u_n - \eta_\varepsilon^j(u_n-\psi) = (1-\eta_\varepsilon^j)u_n + \eta_\varepsilon^j\psi$, temos $(1-\eta_\varepsilon^j)u_n + \eta_\varepsilon^j\psi = \psi$ nos pontos em que $\eta_\varepsilon^j = 1$. Se $0 \leqslant \eta_\varepsilon^j < 1$, basta observar que $(1-\eta_\varepsilon^j) > 0$ e então

$$
\begin{aligned}
u_n \geqslant \psi \quad &\Leftrightarrow \quad (1-\eta_\varepsilon^j)u_n \geqslant (1-\eta_\varepsilon^j)\psi \\
&\Leftrightarrow \quad (1-\eta_\varepsilon^j)u_n + \eta_\varepsilon^j\psi \geqslant (1-\eta_\varepsilon^j)\psi + \eta_\varepsilon^j\psi = \psi.
\end{aligned}
$$

Tomando então $u_n - \eta_\varepsilon^j(u_n-\psi)$ no lugar de v em (2.7), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\eta_\varepsilon^j \nabla(u_n-\psi)\,dx + \frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)(u_n-\psi)\nabla\eta_\varepsilon^j\,dx \\
\leqslant\ & \lambda\int_\Omega \eta_\varepsilon^j u_n^{+p^*-1}(u_n-\psi)\,dx - z_n(\eta_\varepsilon^j(\psi-u_n)).
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

Quando $n \to \infty$ temos

$$
\begin{aligned}
\left|z_n(\eta_\varepsilon^j(\psi-u_n))\right| &= \left| z_n\left(\left\|\eta_\varepsilon^j(\psi-u_n)\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\eta_\varepsilon^j(\psi-u_n)}{\left\|\eta_\varepsilon^j(\psi-u_n)\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}}\right)\right| \\
&= \left\|\eta_\varepsilon^j(\psi-u_n)\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \cdot \left| z_n\left(\frac{\eta_\varepsilon^j(\psi-u_n)}{\left\|\eta_\varepsilon^j(\psi-u_n)\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}}\right)\right| \\
&\leqslant C \sup_{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} |z_n(u)| = C\|z_n\| \to 0.
\end{aligned}
$$

Então, podemos reescrever (2.15) como

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\eta_\varepsilon^j \nabla(u_n-\psi)\,dx + \frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)(u_n-\psi)\nabla\eta_\varepsilon^j\,dx \\
\leqslant\ & \lambda\int_\Omega \eta_\varepsilon^j u_n^{+p^*}\,dx - \lambda\int_\Omega \eta_\varepsilon^j u_n^{+p^*-1}\psi\,dx + o(1).
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

Agora analisaremos cada parcela da desigualdade (2.16). Para a primeira parcela do lado direito, como $\eta_\varepsilon^j \in C_c^\infty(\Omega)$, usando o Lema 2.7, temos

$$
\lambda\int_\Omega \eta_\varepsilon^j u_n^{+p^*}\,dx \to \lambda\int_\Omega \eta_\varepsilon^j\left(u^{+p^*} + \sum_{j\in J}\tilde{\nu}_j\delta_{x_j}\right)dx,
$$

quando $n \to \infty$. Para majorar a segunda parcela de (2.16), usamos as desigualdade de Hölder e Sobolev, nessa ordem, e a limitação de $\{u_n\}$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para concluir

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \eta_\varepsilon^j u_n^{+p^*-1}\psi\, dx\right| &\leqslant \int_\Omega u_n^{+p^*-1}|\eta_\varepsilon^j\psi|dx \leqslant \left[\int_\Omega u_n^{+p^*}dx\right]^{\frac{p^*-1}{p^*}}\cdot\left[\int_\Omega |\eta_\varepsilon^j\psi|^{p^*}dx\right]^{\frac{1}{p^*}}\\ &\leqslant C\left[\int_{B(x_j,2\varepsilon)}|\psi|^{p^*}dx\right]^{\frac{1}{p^*}}\to 0 \qquad (2.17)\end{aligned}$$

quando $\varepsilon\to 0$. Vejamos o lado esquerdo. Em primeiro lugar,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \left|\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)(u_n-\psi)\nabla\eta_\varepsilon^j dx\right|\\ &\overset{a}{\leqslant} k_3\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-1}|\nabla\eta_\varepsilon^j||u_n-\psi|dx\\ &\overset{b}{\leqslant} k_3\left[\int_\Omega|\nabla u_n|^p dx\right]^{\frac{p-1}{p}}\left[\int_\Omega|\nabla\eta_\varepsilon^j|^p|u_n-\psi|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\\ &\overset{c}{\leqslant} C\left[\int_{B(x_j,2\varepsilon)}|\nabla\eta_\varepsilon^j|^p|u_n-\psi|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\\ &\overset{d}{\leqslant} C\left[\int_{B(x_j,2\varepsilon)}|\nabla\eta_\varepsilon^j|^n dx\right]^{\frac{1}{n}}\cdot\left[\int_{B(x_j,2\varepsilon)\setminus B(x_j,\varepsilon)}|u_n-\psi|^{p^*}dx\right]^{\frac{1}{p^*}}\\ &\overset{e}{\leqslant} C\left[\int_{B(x_j,2\varepsilon)\setminus B(x_j,\varepsilon)}|u_n-\psi|^{p^*}dx\right]^{\frac{1}{p^*}}, \qquad (2.18)\end{aligned}$$

onde: a inequação a vale por (1.28) (com ∇u_n no lugar de ξ); b e d seguem pela desigualdade de Hölder; em c usamos que $u_n\in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla\eta_\varepsilon^j\equiv 0$ fora de $B(x_j,2\varepsilon)$; e vale porque $|\nabla\eta_\varepsilon^j|^n\leqslant\frac{C}{\varepsilon^n}$ e portanto

$$\int_{B(x_j,2\varepsilon)}|\nabla\eta_\varepsilon^j|^n dx < C.$$

e C não depende de ε. Agora analisaremos duas situações:

1. se x_j for um ponto isolado dos demais $\{x_k\}_{k\in J}$, $\exists\varepsilon>0$ tal que $B(x_j,2\varepsilon)$ não contém

qualquer outro x_i, $i \in J$. Da desigualdade de Minkowski, temos

$$
\begin{aligned}
&\left[\int\limits_{B(x_j,2\varepsilon)\setminus B(x_j,\varepsilon)} |u_n-\psi|^{p^*}dx\right]^{\frac{1}{p^*}} \\
\leqslant\ &\left[\int\limits_{B(x_j,2\varepsilon)\setminus B(x_j,\varepsilon)} |u_n|^{p^*}dx\right]^{\frac{1}{p^*}} + \left[\int\limits_{B(x_j,2\varepsilon)\setminus B(x_j,\varepsilon)} |\psi|^{p^*}dx\right]^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}
$$

Passando o limite em n nesta desigualdade e como $B(x_j,2\varepsilon)\setminus B(x_j,\varepsilon)$ não contém átomos, temos

$$
\left[\int\limits_{B(x_j,2\varepsilon)\setminus B(x_j,\varepsilon)} |u|^{p^*}dx\right]^{\frac{1}{p^*}} + \left[\int\limits_{B(x_j,2\varepsilon)\setminus B(x_j,\varepsilon)} |\psi|^{p^*}dx\right]^{\frac{1}{p^*}} \to 0
$$

quando $\varepsilon \to 0$.

2. agora suponhamos que x_j seja um ponto de acumulação de $\{x_k\}_{k\in J}$. Usando novamente a desigualdade de Minkowski e como no item 4 da demonstração do Lema 2.7 temos

$$
|u_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu = |u|^{p^*} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j},
$$

encontramos

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[\int\limits_{B(x_j,2\varepsilon)\setminus B(x_j,\varepsilon)} |u_n-\psi|^{p^*}dx\right]^{\frac{1}{p^*}} \\
\leqslant\ &\left[\int\limits_{B(x_j,2\varepsilon)\setminus B(x_j,\varepsilon)} |u|^{p^*}dx + \sum_k \nu_k dx\right]^{\frac{1}{p^*}} + \left[\int\limits_{B(x_j,2\varepsilon)\setminus B(x_j,\varepsilon)} |\psi|^{p^*}dx\right]^{\frac{1}{p^*}},
\end{aligned}
$$

onde a soma acima é feita sobre os índices k tais que $x_k \in B(x_j,2\varepsilon)\setminus B(x_j,\varepsilon)$. Como ν é finita, a série $\sum_{j\in J}\nu_j$ é convergente, ao fazermos $\varepsilon \to 0$ restará apenas o "final" da série, que vai para zero. Então,

$$
\lim_{n\to\infty}\left[\int\limits_{B(x_j,2\varepsilon)\setminus B(x_j,\varepsilon)} |u_n-\psi|^{p^*}dx\right] \to 0
$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Usando (1.28) e a desigualdade de Hölder, temos também que

$$0 \leqslant \left| \int_{\Omega} \mathscr{A}(x, \nabla u_n) \cdot \eta_{\varepsilon}^{j} \nabla \psi \, dx \right| \leqslant C \left[\int_{B(x_j, 2\varepsilon)} |\nabla \psi|^p \right]^{\frac{1}{p}} \to 0 \tag{2.19}$$

quando $\varepsilon \to 0$. Usando (2.19), a propriedade (1.25) e o Lema 2.7 obtemos, após tomar o limite em n na desigualdade (2.16), que

$$\int_{\Omega} \eta_{\varepsilon}^{j} \left(\mathrm{F}(x, \nabla u) + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j} \right) dx \leqslant \lambda \int_{\Omega} \eta_{\varepsilon}^{j} \left(u^{+p^*} + \sum_{j \in J} \tilde{\nu}_j \delta_{x_j} \right) dx + o(1),$$

onde $o(1) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Assim, ao separarmos os integrandos e fazermos $\varepsilon \to 0$, o teorema da convergência dominada de Lebesgue (9) nos dá

$$\mu_j \leqslant \lambda \tilde{\nu}_j.$$

Do Lema 2.7 junto com essa desigualdade, obtemos

$$\lambda \tilde{\nu}_j \geqslant K_0 (\tilde{\nu}_j)^{\frac{p}{p^*}},$$

donde $\tilde{\nu}_j \geqslant \left(\frac{K_0}{\lambda}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}} > 0$. Isso mostra que a série $\sum_{j \in J} \tilde{\nu}_j$ deve ter um número finito de termos. □

O próximo resultado é um refinamento do lema anterior. Ele afirma que o conjunto de átomos da medida limite de $\left\{u_n^{+p^*}\right\}$ é vazio, o que nos dará como conseqüência que $u_n^+ \to u^+$ em $L^{p^*}(\Omega)$.

Lema 2.10. *O conjunto J é vazio.*

Demonstração. Para cada $\varepsilon > 0$ fixado, considere $B(x_j, 2\varepsilon)$ uma bola centrada no átomo x_j e $\eta_{\varepsilon}^{j} \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leqslant \eta_{\varepsilon}^{j} \leqslant 1$, $\eta_{\varepsilon}^{j} \equiv 1$ em $B(x_j, \varepsilon)$ e $\eta_{\varepsilon}^{j} \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B(x_j, 2\varepsilon)$. Da desigualdade (2.7), substituindo v por $u_n - \eta_{\varepsilon}^{j}(u_n - \psi)$, obtemos, como em (2.16),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \int_{\Omega} \mathscr{A}(x, \nabla u_n) \cdot \nabla \eta_{\varepsilon}^{j} (u_n - \psi) dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} \mathscr{A}(x, \nabla u_n) \cdot (\nabla u_n - \nabla \psi) \eta_{\varepsilon}^{j} dx \\ \leqslant \; & \lambda \int_{\Omega} \eta_{\varepsilon}^{j} u_n^{+p^*} dx - \lambda \int_{\Omega} \eta_{\varepsilon}^{j} u_n^{+p^*-1} \psi \, dx + o(1), \end{aligned} \tag{2.20}$$

onde $o(1) \to 0$ quando $n \to \infty$. Como pela Proposição 1.24 $\mathscr{A}(x, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n = p\mathrm{F}(x, \nabla u_n)$, podemos reescrever esta desigualdade e encontramos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathrm{F}(x,\nabla u_n)\eta_\varepsilon^j dx &\leqslant \lambda\int_\Omega u_n^{+p^*}\eta_\varepsilon^j dx - \frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\nabla\eta_\varepsilon^j(u_n-\psi)dx\\ &+ \frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\nabla\psi\eta_\varepsilon^j dx - \lambda\int_\Omega u_n^{p^*-1}\eta_\varepsilon^j\psi dx + o(1).\end{aligned}$$

Quando $\varepsilon\to 0$, do lado direito da desigualdade acima temos que o segundo termo vai para zero por (2.18), o terceiro termo vai para zero por (2.19) e, enfim, o quarto termo vai para zero por (2.17). Portanto, tomando o limite em n e em seguida em ε na desigualdade acima e usando o Lema 2.9 e o fato de os átomos serem pontos isolados, vem que

$$\mu_j \leqslant \lambda\tilde{\nu}_j.$$

Por outro lado, substituindo v por $u_n+\eta_\varepsilon^j u_n\in \mathrm{K}_\psi$ em (2.7) encontramos

$$\int_\Omega \mathrm{F}(x,\nabla u_n)\eta_\varepsilon^j dx \geqslant \lambda\int_\Omega u_n^{+p^*}\eta_\varepsilon^j dx - \frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla\eta_\varepsilon^j u_n dx + o(1).$$

O cálculo feito para obter (2.18) pode ser repetido para mostrarmos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla\eta_\varepsilon^j u_n dx\to 0$$

quando $\varepsilon\to 0$. Então, após tomarmos limite em n e em seguida em ε na última desigualdade, teremos

$$\mu_j \geqslant \lambda\tilde{\nu}_j.$$

Portanto,

$$\mu_j = \lambda\tilde{\nu}_j.$$

Ao mesmo tempo, pelo Lema 2.7,

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to\infty} I(u_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{p}\int_\Omega \mathrm{F}(x,\nabla u_n)dx - \frac{\lambda}{p^*}\int_\Omega u_n^{+p^*}dx\right]\\ &= \frac{1}{p}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \mathrm{F}(x,\nabla u_n)dx - \frac{\lambda}{p^*}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n^{+p^*}dx\\ &\geqslant \frac{1}{p}\int_\Omega \mathrm{F}(x,\nabla u)dx + \frac{1}{p}\sum_{j\in J}\mu_j - \frac{\lambda}{p^*}\int_\Omega u^{+p^*}dx - \frac{\lambda}{p^*}\sum_{j\in J}\tilde{\nu}_j\\ &= I(u) + \frac{1}{p}\sum_{j\in J}\mu_j - \frac{\lambda}{p^*}\sum_{j\in J}\tilde{\nu}_j. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Também note que $I(u) \geqslant c$, pois $u \in \mathrm{K}_\psi$. Usando que $\mu_j = \lambda \tilde{\nu}_j$ em (2.21), temos

$$c \geqslant c + \lambda \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right] \sum_{j \in J} \tilde{\nu}_j = c + \lambda \frac{1}{n} \sum_{j \in J} \tilde{\nu}_j .$$

Como $\lambda \neq 0$, segue que $\sum_{j \in J} \tilde{\nu}_j \leqslant 0$, o que só é possível se $\tilde{\nu}_j = 0$. □

Uma vez que a medida $\tilde{\nu}$ não contém átomos, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.11. $\left\| u_n^+ - u^+ \right\|_{L^{p^*}(\Omega)} \to 0$ *quando* $n \to \infty$.

Demonstração. Como

$$u_n^{+p^*} \rightharpoonup \tilde{\nu} = u^{+p^*} + \sum_{j \in J} \tilde{\nu}_j \delta_{x_j} .$$

em medida e do lema anterior $\tilde{\nu}_j = 0$, segue que

$$\left\| u_n^+ \right\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*} \to \left\| u^+ \right\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*} .$$

A identidade $u_n^+ = \dfrac{u_n + |u_n|}{2}$ nos dá

$$u_n^+ \to u^+ \text{ q.t.p. em } \Omega .$$

Do Teorema 1.3 (de Brezis-Lieb), temos $\left\| u_n^+ - u^+ \right\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*} \to 0$. □

Lema 2.12. *Para cada* $\lambda \in (0, \lambda_0]$ *fixado, temos*

$$\begin{aligned} & \int_\Omega (\mathscr{A}(x, \nabla u_n) - \mathscr{A}(x, \nabla u)) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx \\ \geqslant \quad & C \begin{cases} \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p dx, & se\ p \geqslant 2; \\ \left[\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p dx \right]^{2/p}, & se\ 1 < p < 2. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.22}$$

a menos de subseqüência.

Demonstração. Colocando ∇u_n e ∇u no lugar de ξ_1 e ξ_2 respectivamente em (1.26) e integrando em Ω, obtemos o caso $p \geqslant 2$.

Por outro lado, usando Hölder,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p dx &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^p}{\left((|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{2-p} \right)^{\frac{p}{2}}} \cdot \left((|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{2-p} \right)^{\frac{p}{2}} dx \\ &\leqslant \left[\int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^2}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{2-p}} dx \right]^{\frac{p}{2}} \left[\int_\Omega (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^p dx \right]^{1 - \frac{p}{2}} . \end{aligned}$$

Como $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}$ é limitada, aplicando o caso $1 < p < 2$ de (1.26) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p dx \leqslant C\left[\int_\Omega (\mathscr{A}(x,\nabla u_n) - \mathscr{A}(x,\nabla u))\cdot(\nabla u_n - \nabla u) dx\right]^{\frac{p}{2}}$$

concluindo a demonstração do lema. □

Com o Lema 2.12, provaremos que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para adiante demonstrar, enfim, a Proposição 2.8.

Lema 2.13. *A menos de subseqüência, temos*

$$\int_\Omega (\mathscr{A}(x,\nabla u_n) - \mathscr{A}(x,\nabla u))\cdot\nabla(u_n - u) dx \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.23}$$

Demonstração. Fazendo $v = u$ na desigualdade (2.7), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla(u_n - u)dx &\leqslant p\lambda\int_\Omega u_n^{+p^*-1}(u_n - u)dx + o(1), \qquad (2.24)\\ &= p\lambda\int_\Omega u_n^{+p^*}dx - p\lambda\int_\Omega u_n^{+p^*-1}u\,dx + o(1).\end{aligned}$$

Como $u_n^+ \to u^+$ em $L^{p^*}(\Omega)$, segue do Teorema 1.2 e do teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n^{+p^*-1}u\,dx = \int_\Omega u^{+p^*}dx. \tag{2.25}$$

Então, tomando o limite em n na desigualdade (2.24), temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla(u_n - u)dx \leqslant 0. \tag{2.26}$$

Por outro lado, do Lema 2.12 temos

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \int_\Omega (\mathscr{A}(x,\nabla u_n) - \mathscr{A}(x,\nabla u))\cdot\nabla(u_n - u)dx\\ &= \int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla(u_n - u)dx - \int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla(u_n - u)dx.\end{aligned}$$

Como

$$v \longmapsto \int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla v\,dx$$

é um funcional linear contínuo sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla(u_n-u)dx = 0 \tag{2.27}$$

Com isto,

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla(u_n-u)dx,$$

ou seja

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla(u_n-u)dx = 0,$$

o que junto com (2.27) encerra a demonstração. □

Corolário 2.14. *A menos de subseqüência,* $\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ *quando* $n\to\infty$.

Demonstração. Basta considerar os lemas 2.12 e 2.13. □

Corolário 2.15. *A menos de subseqüência,* $\nabla u_n \to \nabla u$ *q.t.p. em* Ω *quando* $n\to\infty$.

Demonstração. Como para $i = 1,\dots,n$ vale

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p dx,$$

pelo Teorema 1.2 existe uma subseqüência de $\{u_n\}$ tal que

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Basta então extrair sucessivas subseqüências para cada $i = 1,\dots,n$. □

Vamos finalmente demonstrar a Proposição 2.8.

Demonstração da Proposição 2.8. Do corolário anterior, temos que $\nabla u_n \to \nabla u$ q.t.p. em Ω. Da continuidade do campo $\mathscr{A}$, temos também que

$$\mathscr{A}(x,\nabla u_n) \to \mathscr{A}(x,\nabla u), \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Usando o teorema de Egorov (ver Teorema 6 do apêndice), para todo $\varepsilon > 0$ existe $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ tal que $|\Omega\setminus\Omega_\varepsilon| < \varepsilon$ e

$$\mathscr{A}(x,\nabla u_n) \to \mathscr{A}(x,\nabla u) \quad \text{uniformemente em } \Omega_\varepsilon.$$

Então, usando as limitações (1.28) do campo $\mathscr{A}$ e a desigualdade de Hölder,

$$
\begin{aligned}
& \left| \int_\Omega (\mathscr{A}(x,\nabla u_n) - \mathscr{A}(x,\nabla u)) \cdot \nabla(v-u) dx \right| \\
\leqslant\ & \int_{\Omega_\varepsilon} |(\mathscr{A}(x,\nabla u_n) - \mathscr{A}(x,\nabla u))| \cdot |\nabla(v-u)|\, dx + \\
& \int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} |(\mathscr{A}(x,\nabla u_n) - \mathscr{A}(x,\nabla u))| \cdot |\nabla(v-u)|\, dx \\
\leqslant\ & C_1\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(v-u)|\, dx + \\
& C_2 \left[\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} |\nabla u_n|^{p-1} |\nabla(v-u)| dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^{p-1} |\nabla(v-u)| dx \right] \\
\leqslant\ & C_3\varepsilon + C_2 \left(\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \right) \left[\int_\Omega |\nabla(v-u)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \\
\leqslant\ & C_3\varepsilon + C_4 \left[\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} |\nabla(v-u)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

para constantes C_3 e C_4 adequadas. Fazendo $n \to \infty$ e depois $\varepsilon \to 0$, segue a Proposição 2.8. $\square$

Agora provaremos que o Problema (2.3) tem solução não-negativa.

Teorema 2.16. *A função u é solução não-negativa do Problema 2.3.*

Demonstração. Considere $u \wedge v = \min\{u, v\}$ e $v_n = u_n - u$. Seja

$$w_n = u_n + (v_n - \psi^+)^+ = u_n + v_n - v_n \wedge \psi^+.$$

Então $w_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pois $v_n \wedge \psi^+$ está em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, $w_n \in \mathrm{K}_\psi$ para todo n, pois $w_n \geqslant u_n \geqslant \psi$. Substituindo v por w_n em (2.7), obtemos

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{p} \int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n) \cdot \nabla v_n dx - \lambda \int_\Omega u_n^{+p^*-1} v_n dx \qquad (2.29) \\
\geqslant\ & \frac{1}{p} \int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n) \cdot \nabla(v_n \wedge \psi^+) dx - \lambda \int_\Omega u_n^{+p^*-1} (v_n \wedge \psi^+) dx + o(1),
\end{aligned}
$$

onde $o(1) = z_n(w_n - u_n) = z_n(v_n - v_n \wedge \psi^+) \to 0$ com n, pois $\{w_n\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n^{+p^*-1} (v_n \wedge \psi^+) dx = 0. \qquad (2.30)$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$ e como $v_n \wedge \psi^+ \to 0$ q.t.p. em Ω, segue novamente do teorema de Egorov que existe um mensurável $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ tal que $|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon| < \varepsilon$ e

$$v_n \wedge \psi^+ \to 0 \quad \text{uniformemente em } \Omega_\varepsilon.$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_\varepsilon} u_n^{+p^*-1}(v_n \wedge \psi^+)dx = 0$$

para qualquer $\varepsilon > 0$ fixado. Uma vez que $a \wedge b = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u_n^{+p^*-1}(v_n \wedge \psi^+)dx = \int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u_n^{+p^*-1}\left(\frac{v_n+\psi^+-|v_n-\psi^+|}{2}\right)dx \\
= \;& \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u_n^{+p^*}dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u_n^{+p^*-1}u\,dx \\
+ \;& \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u_n^{+p^*-1}\psi^+dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u_n^{+p^*-1}|v_n-\psi^+|dx. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Como $u_n^+ \to u^+$ em $L^{p^*}(\Omega)$, encontramos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u_n^{+p^*}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u_n^{+p^*-1}u\,dx = \int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u^{+p^*}dx. \qquad (2.32)$$

Da desigualdade de Hölder e como $\psi^+ \in L^{p^*}(\Omega)$, temos

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u_n^{+p^*-1}\psi^+dx \leqslant C\left[\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u_n^{+p^*}dx\right]^{\frac{p^*-1}{p^*}} \qquad (2.33)$$

e também

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u_n^{+p^*-1}|v_n-\psi^+|dx \leqslant C\left[\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u_n^{+p^*}dx\right]^{\frac{p^*-1}{p^*}}. \qquad (2.34)$$

Substituindo (2.32), (2.33) e (2.34) em (2.31) e tomando o limite em n obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u_n^{+p^*-1}(v_n \wedge \psi^+)dx\right| \;\leqslant\; C\left[\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u^{+p^*}dx\right]^{\frac{p^*-1}{p^*}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega u_n^{+p^*-1}(v_n\wedge\psi^+)dx\right| &\leqslant \lim_{n\to\infty}\left|\int_{\Omega_\varepsilon} u_n^{+p^*-1}(v_n\wedge\psi^+)dx\right| + \\
&\quad \lim_{n\to\infty}\left|\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u_n^{+p^*-1}(v_n\wedge\psi^+)dx\right| \\
&\leqslant C_1\varepsilon + C_2\left[\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} u^{+p^*}dx\right]^{\frac{p^*-1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Tomando o limite em ε, segue (2.30). Agora afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla(v_n\wedge\psi^+)dx = 0. \tag{2.35}$$

De fato, observamos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla(v_n\wedge\psi^+)dx \\
= &\int_{v_n\leqslant\psi^+} \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla v_n dx + \int_{v_n>\psi^+} \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla\psi^+ dx.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder e das limitações (1.26) do campo $\mathscr{A}$, temos

$$\left|\int_{v_n>\psi^+} \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla\psi^+ dx\right| \leqslant C\left[\int_{v_n>\psi^+} |\nabla\psi^+|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \to 0, \tag{2.36}$$

quando $n\to\infty$, pois

$$\left|\{x\in\Omega : v_n(x)\geqslant\psi^+(x)\}\right| \to 0 \quad \text{quando } n\to\infty,$$

já que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$ e então $v_n \to 0$ q.t.p. em Ω. Novamente pela desigualdade de Hölder, juntamente com o Corolário 2.14 e com as limitações (1.28) de $\mathscr{A}$, encontramos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{v_n\leqslant\psi^+} \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla v_n dx\right| &\leqslant C\left[\int_{v_n\leqslant\psi^+} |\nabla v_n|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant C\left[\int_\Omega |\nabla v_n|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \to 0
\end{aligned} \tag{2.37}$$

quando $n\to\infty$. De (2.36) e (2.37) temos (2.35), provando nossa afirmação.

Usando (2.30) e (2.35), podemos reescrever (2.29) como

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n dx-\lambda\int_\Omega u_n^{+p^*}dx\\
\geqslant\;&\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla u\, dx-\lambda\int_\Omega u_n^{+p^*-1}u\, dx+o(1).
\end{aligned}\tag{2.38}$$

Por outro lado, de (2.7) temos

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla(v-u_n)dx-\lambda\int_\Omega u_n^{+p^*-1}(v-u_n)dx\geqslant o(1).$$

Substituindo (2.38) nesta desigualdade, encontramos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla v\, dx-\lambda\int_\Omega u_n^{+p^*-1}v\, dx\\
\geqslant\;&\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla u\, dx-\lambda\int_\Omega u_n^{+p^*-1}u\, dx+o(1)
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla(v-u)dx\geqslant\lambda\int_\Omega u_n^{+p^*-1}(v-u)dx+o(1).\tag{2.39}$$

Como $u_n\to u$ em $L^{p^*}(\Omega)$, o Teorema 1.2 e o teorema da convergência dominada de Lebesgue nos dão

$$\lim_{n\to\infty}\lambda\int_\Omega u_n^{+p^*-1}(v-u)dx=\lambda\int_\Omega u^{+p^*-1}(v-u)dx.$$

Da Proposição 2.8, temos

$$\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla(v-u)dx\to\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla(v-u).$$

Portanto, tomando o limite em (2.39), temos

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla(v-u)dx\geqslant\lambda\int_\Omega u^{+p^*-1}(v-u)dx$$

para toda $v\in \mathrm{K}_\psi$.

Verifiquemos agora que $u\geqslant 0$ em Ω. Se tomarmos $v=u-u^-\in \mathrm{K}_\psi$ na desigualdade acima, sendo $u^-=u\wedge 0$, teremos

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla(-u^-)dx\geqslant\lambda\int_\Omega u^{+p^*-1}(-u^-)dx=0.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \mathscr{A}(x\nabla u)\cdot \nabla u^- \, dx \leqslant 0.$$

Das limitações (1.28) do campo $\mathscr{A}$, da desigualdade acima e como

$$\nabla u^-(x) = \begin{cases} \nabla u(x), & \text{se } u(x) \leqslant 0 \\ 0, & \text{se } u(x) > 0 \end{cases},$$

temos, considerando $\Omega^- = \{x \in \Omega : u(x) \leqslant 0\}$,

$$0 \leqslant k_3 \int_{\Omega^-} |\nabla u^-|^p \, dx \leqslant \int_{\Omega^-} \mathscr{A}(x,\nabla u)\cdot \nabla u^- \, dx \leqslant 0$$

Assim, $\int_{\Omega^-} |\nabla u^-|^p dx = 0$, donde $|\nabla u^-| = 0$ q.t.p. em Ω^-, ou seja, u^- é constante. Então, $u^- = 0$ q.t.p. em Ω, pois $u^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$, donde $u \geqslant 0$ q.t.p. em Ω. □

2.3 Soluções para intervalos maximais

Na seção 2.2 provamos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para cada $\lambda \in (0, \lambda_0]$ fixado, o Problema 2.3 possui uma solução não-negativa. Com isso, podemos definir o seguinte número positivo:

Definição 2.17. $\lambda^* = \sup\{\lambda > 0;$ *o Problema* 2.3 *tem solução não-negativa*$\}$.

Nesta seção, provaremos que para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$ fixado, o problema 2.3 possui solução não-negativa.

Definição 2.18. *Seja* $f \in L^{p^{*\prime}}(\Omega)$, *onde* $p^{*\prime} = \frac{p^*}{p^*-1}$. *Diremos que* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *é uma* super-solução *da equação*

$$-\text{div}\mathscr{A}(x,\nabla u) = f(x) \tag{2.40}$$

quando para toda $0 \leqslant \phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *valer*

$$\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u)\cdot \nabla\phi \, dx \geqslant \int_\Omega f(x)\phi \, dx. \tag{2.41}$$

Nossa argumentação a partir de agora será diferente daquela usada na Seção 2.2. Precisaremos do seguinte problema auxiliar.

Definição 2.19. *Seja* $u \in \mathrm{K}_\psi$ *e* $f \in L^{p^{*\prime}}(\Omega)$. *Dizemos que* u *é solução do problema*

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u)\nabla(v-u)\,dx \geqslant \int_\Omega f(x)(v-u)\,dx, \tag{2.42}$$

se esta desigualdade é satisfeita para toda $v \in \mathrm{K}_\psi$.

Para estabelecer a ligação entre nosso problema e o problema auxiliar que acabamos de definir, temos os seguintes dois lemas:

Lema 2.20 (Le e Schmitt, [LS98])**.** *Seja* $f \in L^{p^{*\prime}}(\Omega)$*. Então o problema (2.42) tem solução única.*

Lema 2.21. *Suponhamos que* $u \in \mathrm{K}_\psi$ *seja uma solução do problema (2.42). Se* $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *é uma supersolução da equação (2.40) e* $u \wedge v \in \mathrm{K}_\psi$*, então* $v \geqslant u$ *q.t.p. em* Ω.

Demonstração. Como $u \wedge v \in \mathrm{K}_\psi$, temos de (2.42) que

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla(u-u\wedge v)dx \leqslant \int_\Omega f(x)(u-u\wedge v)dx. \tag{2.43}$$

Por outro lado, tomando $\phi = u - u\wedge v \geqslant 0$, obtemos de (2.41)

$$\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla v)\cdot\nabla(u-u\wedge v)dx \geqslant \int_\Omega f(x)(u-u\wedge v)dx. \tag{2.44}$$

Multiplicando (2.43) por (-1) e somando com (2.44), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_\Omega (\mathscr{A}(x,\nabla v)-\mathscr{A}(x,\nabla u))\cdot\nabla(u-u\wedge v)dx \\ &= \int_{\{x\in\Omega: v<u\}} (\mathscr{A}(x,\nabla v)-\mathscr{A}(x,\nabla u))\cdot\nabla(u-u\wedge v)dx \\ &= -\int_\Omega (\mathscr{A}(x,\nabla(u\wedge v))-\mathscr{A}(x,\nabla u))\cdot(\nabla(u\wedge v)-\nabla u)dx. \end{aligned}$$

Do Lema 1.25 usando $\xi_1 = \nabla(u\wedge v)$ e $\xi_2 = \nabla u$ concluímos que

$$(\mathscr{A}(x,\nabla(u\wedge v))-\mathscr{A}(x,\nabla u))\cdot(\nabla(u\wedge v)-u) = 0$$

q.t.p. em Ω. Usando novamente o Lema 1.25, vemos que

$$\nabla u = \nabla(u\wedge v) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Então, u e $u\wedge v$ diferem por uma constante q.t.p. em Ω. Como

$$u - u\wedge v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

esta constante deve ser nula, donde $u = u\wedge v \leqslant v$ q.t.p. em Ω. □

O lema anterior estabelece um princípio de comparação que é o ponto chave nesta seção. O próximo teorema é o principal resultado desta seção.

Teorema 2.22. *O Problema 2.3 tem solução não-negativa para todo* $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Vamos dividir a demonstração deste teorema em lemas e corolários.

Lema 2.23. *Fixado* $\lambda \in (0, \lambda^*)$*, existe uma seqüência* $\{u_n\}$ *em* K_ψ *limitada tal que*

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla u_n)\cdot\nabla(v - u_n)dx \geqslant \lambda \int_\Omega {u_{n-1}^+}^{p^*-1}(v - u_n)dx, \tag{2.45}$$

para toda $v \in \mathrm{K}_\psi$.

Demonstração. Da definição de λ^*, existe $\lambda' \in (\lambda, \lambda^*)$ e $u_{\lambda'} \in \mathrm{K}_\psi$ tal que a desigualdade

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla u_{\lambda'})\cdot\nabla(v - u_{\lambda'})dx \geqslant \lambda' \int_\Omega {u_{\lambda'}^+}^{p^*-1}(v - u_{\lambda'})dx$$

é satisfeita $\forall v \in \mathrm{K}_\psi$. Tomando $\phi \geqslant 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v = u_{\lambda'} + \phi$, segue desta desigualdade que

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla u_{\lambda'})\cdot\nabla\phi\, dx \geqslant \lambda' \int_\Omega {u_{\lambda'}^+}^{p^*-1}\phi\, dx \geqslant \lambda \int_\Omega {u_{\lambda'}^+}^{p^*-1}\phi\, dx \tag{2.46}$$

para toda $\phi \geqslant 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Se considerarmos $f_1(x) = \lambda {u_{\lambda'}^+}^{p^*-1}$ juntamente com (2.46), temos então que $u_{\lambda'}$ é supersolução de (2.40) com $f = f_1$. Ao mesmo tempo, sendo $f_1(x) = \lambda {u_{\lambda'}^+}^{p^*-1}$, do Lema 2.20 existe uma função $u_1 \in \mathrm{K}_\psi$ solução de (2.42). Como $u_1 \wedge u_{\lambda'} \in \mathrm{K}_\psi$, o Lema 2.21 nos dá que

$$u_1 \leqslant u_{\lambda'}.$$

Definindo $f_2(x) = \lambda {u_1^+}^{p^*-1}$ e tomando $f = f_2$ no Lema 2.20 e refazendo o processo, encontramos $u_2 \in \mathrm{K}_\psi$ solução de (2.42) e

$$u_2 \leqslant u_1 \leqslant u_{\lambda'}.$$

Prosseguindo com esse raciocínio, obtemos uma seqüência de funções em K_ψ tal que

$$\psi \leqslant \cdots \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant u_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant u_2 \leqslant u_1 \leqslant u_{\lambda'} \tag{2.47}$$

e além disto

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla u_n)\cdot\nabla(v - u_n)dx \geqslant \lambda \int_\Omega {u_{n-1}^+}^{p^*-1}(v - u_n)dx,$$

para toda $v \in \mathrm{K}_\psi$.

Vejamos agora que esta seqüência é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Usando $v = u_{\lambda'}$ na desigualdade acima, temos

$$\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla u_{\lambda'}dx \geqslant \int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n dx.$$

Das limitações (1.28) de $\mathscr{A}$, de (1.24) e usando a desigualdade de Hölder vem que

$$\begin{aligned}
pk_1\|\nabla u_n\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega pk_1|\nabla u_n|^p dx \leqslant \int_\Omega p\mathrm{F}(x,\nabla u_n)dx\\
&= \int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n dx \leqslant \int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla u_{\lambda'}dx\\
&\leqslant k_4\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-1}|\nabla u_{\lambda'}|dx\\
&\leqslant k_4\|\nabla u_n\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\cdot\|\nabla u_{\lambda'}\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u_{\lambda'}\|_{L^p(\Omega)}$. □

Lema 2.24. *Fixado $\lambda\in(0,\lambda^*)$, existe uma seqüência z_n de funcionais lineares tal que*

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla(v-u_n)dx \geqslant \lambda\int_\Omega u_n^{+p^*-1}(v-u_n)dx + z_n(v-u_n), \tag{2.48}$$

para toda $v\in\mathrm{K}_\psi$, com $\|z_n\|\to 0$.

Demonstração. De (2.47), temos que existe u_λ tal que

$$u_\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x). \tag{2.49}$$

Como $u_\lambda^+ \in L^{p^*}(\Omega)$ e $u_n^+ \to u_{\lambda'}^+$ q.t.p. em Ω, segue do teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_\Omega u_n^{+p^*}dx \to \int_\Omega u_\lambda^{+p^*}dx.$$

Defina sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$ os funcionais lineares

$$z_n(f) = \lambda\int_\Omega \left(u_{n-1}^{+\ p^*-1} - u_n^{+p^*-1}\right) f dx.$$

Então, $\|z_n\| \to 0$. De fato, dada $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\left\|f\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 1$, segue das desiguadade de Hölder, de Poincaré e da equivalência de normas em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que

$$\left|z_n(f)\right| \leqslant \lambda\int_\Omega \left|u_{n-1}^{+\ p^*-1} - u_n^{+p^*-1}\right|\cdot\left|f\right|dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \lambda \left[\int_\Omega \left| {u_{n-1}^+}^{p^*-1} - {u_n^+}^{p^*-1}\right|^{\frac{p^*}{p^*-1}} dx\right]^{\frac{p^*-1}{p^*}} \cdot \left[\int_\Omega |f|^{p^*} dx\right]^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leqslant C \left[\int_\Omega \left| {u_{n-1}^+}^{p^*-1} - {u_n^+}^{p^*-1}\right|^{\frac{p^*}{p^*-1}} dx\right]^{\frac{p^*-1}{p^*}} \cdot \|f\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \qquad (2.50)
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\left| {u_{n-1}^+}^{p^*-1} - {u_n^+}^{p^*-1}\right|^{\frac{p^*}{p^*-1}} &\leqslant \left({u_{n-1}^+}^{p^*-1} + {u_n^+}^{p^*-1}\right)^{\frac{p^*}{p^*-1}} \\
&\leqslant C\left({u_{n-1}^+}^{p^*} + {u_n^+}^{p^*}\right) \\
&\leqslant C {u_{\lambda'}^+}^{p^*}
\end{aligned}
$$

e $\left| {u_{n-1}^+}^{p^*-1} - {u_n^+}^{p^*-1}\right|^{\frac{p^*}{p^*-1}} \to 0$ q.t.p. em Ω, o teorema da convergência dominada de Lebesgue nos dá

$$
\left[\int_\Omega \left| {u_{n-1}^+}^{p^*-1} - {u_n^+}^{p^*-1}\right|^{\frac{p^*}{p^*-1}} dx\right]^{\frac{p^*-1}{p^*}} \to 0.
$$

Tomando o sup em (2.50) para $\|f\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 1$, concluímos que $\|z_n\| \to 0$.

Como

$$
\lambda \int_\Omega {u_{n-1}^+}^{p^*-1}(v-u_n)dx - \lambda \int_\Omega {u_n^+}^{p^*-1}(v-u_n)dx = z_n(v-u_n),
$$

de (2.45) temos

$$
\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla(v-u_n)dx \geqslant \lambda \int_\Omega {u_n^+}^{p^*-1}(v-u_n)dx + z_n(v-u_n)
$$

para toda $v \in \mathrm{K}_\psi$. □

Corolário 2.25. *Para cada $v \in \mathrm{K}_\psi$ fixada, temos*

$$
z_n(v-u_n) \to 0 \quad \textit{quando } n \to \infty.
$$

Demonstração. Como $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, obtemos

$$
|z_n(v-u_n)| \leqslant \|z_n\| \cdot \|v-u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant C\|z_n\| \to 0 \text{ quando } n \to \infty.
$$

□

Lema 2.26. *A menos de subseqüência, temos*

$$
\int_\Omega (\mathscr{A}(x,\nabla u_n) - \mathscr{A}(x,\nabla u_\lambda))\cdot(\nabla u_n - \nabla u_\lambda)dx \to 0 \quad \textit{quando } n \to \infty.
$$

Demonstração. Basta fazer $v = u_\lambda$ na desigualdade (2.48) e seguir a demonstração do Lema 2.13. □

Como as desigualdades (2.22) dependem apenas das limitações de $\mathscr{A}$ e da limitação de $\{u_n\}$, temos ainda o seguinte lema:

Corolário 2.27. *A menos de subseqüência,* $\|\nabla u_n - \nabla u_\lambda\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ *quando* $n \to \infty$.

Demonstração. É suficiente usar (2.22) e o Lema anterior. □

Corolário 2.28. *A menos de subseqüência,* $\nabla u_n \to \nabla u_\lambda$ *q.t.p. em* Ω *quando* $n \to \infty$.

Proposição 2.29. *A menos de subseqüência,*

$$\int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla u_n) \cdot \nabla(v - u_\lambda) dx \to \int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla u_\lambda) \cdot \nabla(v - u_\lambda) dx$$

para toda $v \in \mathrm{K}_\psi$.

Demonstração. Basta usar as mesmas idéias empregadas na demonstração da Proposição 2.8 (página 49). □

Agora provaremos que para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$ fixado, u_λ é solução do Problema 2.3.

Demonstração do Teorema 2.22. A prova deste teorema segue em linhas gerais o mesmo argumento do Teorema 2.16. Desta forma, omitiremos os detalhes. Seja $v_n = u_n - u_\lambda$. Substituindo v por $u_n + v_n - v_n \wedge \psi^+ \in \mathrm{K}_\psi$ em (2.48), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla u_n) \cdot \nabla v_n dx - \lambda \int_\Omega u_n^{+p^*-1} v_n dx \\ \geqslant \; & \frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla u_n) \cdot \nabla(v_n \wedge \psi^+) dx - \lambda \int_\Omega u_n^{+p^*-1}(v_n \wedge \psi^+) dx + o(1). \end{aligned} \tag{2.51}$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n^{+p^*-1}(v_n \wedge \psi^+) dx = 0. \tag{2.52}$$

Afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla u_n) \cdot \nabla(v_n \wedge \psi^+) dx = 0. \tag{2.53}$$

De fato,

$$\int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla u_n) \cdot \nabla(v_n \wedge \psi^+) dx$$

$$= \int_{v_n\leqslant\psi^+} \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla v_n\,dx + \int_{v_n>\psi^+} \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla\psi^+\,dx.$$

Pela desigualdade de Hölder e das limitações (1.28) de $\mathscr{A}$, temos

$$\left|\int_{v_n>\psi^+} \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla\psi^+\,dx\right| \leqslant C\left[\int_{v_n>\psi^+} |\nabla\psi^+|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \to 0$$

quando $n\to\infty$, pois

$$\left|\{x\in\Omega : v_n(x)\geqslant\psi^+(x)\}\right| \to 0 \quad \text{quando } n\to\infty,$$

já que $u_n \to u_\lambda$ q.t.p. em Ω e então $v_n \to 0$ q.t.p. em Ω. Novamente pela desigualdade de Hölder, juntamente com o Corolário 2.27 e com as limitações (1.28) de $\mathscr{A}$, encontramos

$$\begin{aligned}\left|\int_{v_n\leqslant\psi^+} \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla v_n\,dx\right| &\leqslant C\left[\int_{v_n\leqslant\psi^+} |\nabla v_n|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant C\left[\int_\Omega |\nabla v_n|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \to 0\end{aligned}$$

quando $n\to\infty$. Isso prova nossa afirmação.

Usando (2.52) e (2.53), podemos reescrever (2.51) como

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\,dx - \lambda\int_\Omega u_n^{+p^*}\,dx\\ \geqslant\ &\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla u_\lambda\,dx - \lambda\int_\Omega u_n^{+p^*-1}u_\lambda\,dx + o(1).\end{aligned}$$

Por outro lado, substituindo esta desigualdade em (2.48), encontramos

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla(v-u_\lambda)\,dx \geqslant \lambda\int_\Omega u_n^{+p^*-1}(v-u_\lambda)\,dx + o(1). \tag{2.54}$$

Como $u_n \to u_\lambda$ q.t.p. em Ω, o teorema da convergência dominada de Lebesgue nos dá novamente

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n^{+p^*-1}(v-u_\lambda)\,dx = \int_\Omega u_\lambda^{+p^*-1}(v-u_\lambda)\,dx.$$

Da Proposição 2.29, temos que

$$\int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_n)\cdot\nabla(v-u_\lambda)\,dx \to \int_\Omega \mathscr{A}(x,\nabla u_\lambda)\cdot\nabla(v-u_\lambda)\,dx.$$

Tomando o limite na desigualdade (2.54), concluímos que

$$\frac{1}{p}\int_{\Omega} \mathscr{A}(x, \nabla u_\lambda)\cdot\nabla(v - u_\lambda)dx \geqslant \lambda \int_{\Omega} u_\lambda^{+\,p^*-1}(v - u_\lambda)dx$$

para toda $v \in \mathrm{K}_\psi$, ou seja, u_λ é solução do Problema 2.3. Para ver que u_λ é uma solução não-negativa, o argumento é o mesmo dado no final da demonstração do Teorema 2.16. $\square$

Referências Bibliográficas

[BL83] H. Brezis and E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc, vol. 88, JSTOR, 1983, pp. 486–490.

[Bre86] H. Brezis, *Analisi funzionale*, Liguori Editore Srl, 1986.

[CM08] J. Ceccon and M. Montenegro, *Compactness results for divergence type nonlinear elliptic equations on compact manifolds*, preprint, 2008.

[DiB02] E. DiBenedetto, *Real analysis*, Birkhauser, 2002.

[Eva98] L.C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society Providence, RI, 1998.

[Fan07] M. Fang, *Degenerate elliptic inequalities with critical growth*, Journal of Differential Equations **232** (2007), no. 2, 441–467.

[GT01] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 2001.

[Jia95] Y. Jianfu, *Positive solutions of quasilinear elliptic obstacle problems with critical exponents*, Nonlinear Analysis **25** (1995), no. 12, 1283–1306.

[Kre78] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley New York, 1978.

[Lim96] E.L. Lima, *Álgebra linear*, IMPA, 1996.

[LS98] V.K. Le and K. Schmitt, *On Boundary Value Problems for Degenerate Quasilinear Elliptic Equations and Inequalities*, Journal of Differential Equations **144** (1998), no. 1, 170–218.

[McO95] Robert C. McOwen, *Partial differential equations: methods and applications*, Prentice Hall, RI, 1995.

[MM88] G. Mancini and R. Musina, *Holes and obstacles*, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non linéaire **5** (1988), no. 4, 323–345.

[MM00] L.A. Medeiros and M.M. Miranda, *Espaços de Sobolev*, Rio de Janeiro, IM-UFRJ (2000).

[Roy68] H.L. Royden, *Real analysis*, Macmillan New York, 1968.

[Str00] M. Struwe, *Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer, 2000.

[Wil96] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhauser, 1996.

[WZ77] R.L. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and integral: An introduction to real analysis*, 1977.

Apêndice

Neste apêndice, enunciaremos, sem demonstrar, alguns resultados freqüentemente usados no decorre do texto.

Teorema 1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Para quaisquer vetores* $u, v \in \mathbb{R}^n$*, vale*

$$|u \cdot v| \leq |u| \cdot |v|$$

onde $\cdot$ *é o produto interno usual em* $\mathbb{R}^n$*.*

Demonstração. Ver por exemplo [Lim96]. □

Teorema 2 (Desigualdades de Young)**.** *Sejam* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então, para todo* $a, b > 0$ *vale*

$$a \cdot b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{A.1}$$

e para todo $\varepsilon > 0$ *vale*

$$a \cdot b \leqslant \varepsilon \cdot a^p + c(\varepsilon) \cdot b^q, \tag{A.2}$$

onde $c(\varepsilon) = \dfrac{(\varepsilon \cdot p)^{-q/p}}{q}$*. Esta última é a* desigualdade de Young com ε.

Demonstração. Ver p. 622 de [Eva98]. □

Teorema 3 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $u, v \in L^p(\Omega)$*. Então,*

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^p(|Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}. \tag{A.3}$$

Demonstração. Ver p. 623 de [Eva98] ou o capítulo 6 de [Roy68] □

Em particular, a desigualdade de Minkowski assegura que os espaços L^p são normados.

Teorema 4 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*,* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^p(\Omega)$*. Então,* $u \cdot v \in L^1(\Omega)$ *e vale*

$$\|u \cdot v\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^p(\Omega)}. \tag{A.4}$$

Demonstração. Ver o capítulo 6 de [Roy68]. □

Teorema 5 (Desigualdade generalizada de Hölder). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p_1, \ldots, p_r \leqslant \infty$ *e* $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, *para* $i = 1, \ldots, r$, *com* $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_r}$. *Então,* $u_1 \cdots u_r \in L^1(\Omega)$ *e vale*

$$\|u_1 \cdots u_r\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \cdots \|u_r\|_{L^{p_r}(\Omega)}. \tag{A.5}$$

Demonstração. Ver p. 623 de [Eva98]. □

Teorema 6 (de Egorov). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto mensurável de medida finita e uma seqüência de funções mensuráveis* $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *tais que* $u_n \to u$ *q.t.p. em* Ω. *Então, dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ *mensurável tal que:*

i) $|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon| \leqslant \varepsilon$;

ii) $u_n \to u$ *uniformemente em* Ω_ε.

Demonstração. Ver capítulo 4 de [WZ77]. □

Lema 7 (de Fatou). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e* $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma seqüência de funções mensuráveis não-negativas tais que* $u_n \to u$ *q.t.p. em* Ω. *Então,*

$$\int_\Omega u\,dx \leqslant \liminf \int_\Omega u_n\,dx.$$

Demonstração. Ver, por exemplo, o capítulo 11 de [Roy68]. □

Teorema 8 (da convergência monótona). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e* $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma seqüência de funções mensuráveis não-negativas tais que* $u_n \to u$ *q.t.p. em* Ω. *Se* $u_n \leqslant u$ *para todo* n, *então*

$$\int_\Omega u\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n\,dx.$$

Demonstração. Ver, por exemplo, o capítulo 11 de [Roy68]. □

Teorema 9 (da convergência dominada de Lebesgue). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e* $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma seqüência de funções mensuráveis tais que* $u_n \to u$ *q.t.p. em* Ω. *Suponha que exista* $v : \Omega \to \mathbb{R}$ *integrável tal que para todo* n

$$|u_n(x)| \leqslant v(x).$$

Então,

$$\int_\Omega u\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n\,dx.$$

Demonstração. Ver, por exemplo, o capítulo 11 de [Roy68]. □

Definição 10. *Dizemos que* $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é* localmente somável *quando para qualquer* $A \subset \Omega$ *limitado e mensurável tivermos*

$$\int_A |u| dx < \infty.$$

Definição 11 (medida de Radon)**.** *Uma medida* μ *de Borel em* $\mathbb{R}^n$ *é dita* de Radon *se ela é finita nos subconjuntos compactos de* $\mathbb{R}^n$.

Teorema 12 (de diferenciação de Lebesgue)**.** *Seja* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função localmente integrável segundo a medida de Radon* μ*. Então,*

$$\frac{1}{\mu(B(x_0, r))} \int_{B(x_0,r)} u\, d\mu \to u(x_0) \tag{A.6}$$

para quase todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *segundo a medida* μ.

Demonstração. Ver, por exemplo, o capítulo 4 de [DiB02]. □

Definição 13. *Seja* (X, β) *um espaço de medida, ou seja,* X *é um conjunto e* β *é uma* σ*-álgebra sobre* X*. Se* μ *e* ν *são duas medidas definidas em* (X, β)*, dizemos que* μ *e* ν *são* mutuamente singulares*, e escrevemos* $\mu \perp \nu$*, quando existem* $A, B \subset X$ *disjuntos, não vazios e mensuráveis tais que* $X = A \cup B$ *e* $\nu(A) = \mu(B) = 0$.

Definição 14. *Seja* (X, β) *um espaço de medida e* μ *e* ν *duas medidas não negativas definidas em* (X, β)*. Dizemos que* ν *é* absolutamente contínua *com respeito a* μ*, e escrevemos* $\nu \ll \mu$*, quando*

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Teorema 15 (de Radon-Nikodym)**.** *Sejam* (X, β) *um espaço de medida,* μ *uma medida* σ*-finita sobre* (X, β) *e* ν *uma medida sobre* (X, β) *tal que* $\nu \ll \mu$*. Então, existe uma função mensurável não-negativa* f *tal que para cada* $A \in \beta$*, vale*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu.$$

Demonstração. Ver capítulo 11 de [Roy68]. □

Teorema 16 (da decomposição de Lebesgue)**.** *Sejam* (X, β) *um espaço de medida e* μ, ν *duas medidas* σ*-finitas definidas em* (X, β)*. Então, podemos encontrar medidas* ν_0 *e* ν_1 *sobre* (X, β) *tais que:*

i) $\nu_0 \perp \mu$;

ii) $\nu_1 \ll \mu$;

iii) $\nu = \nu_0 + \nu_1$.

Além disso, ν_0 e ν_1 são únicas.

Demonstração. Ver capítulo 11 de [Roy68]. □

Índice Remissivo