

Marlos de Oliveira Ribas

MODELOS COSMOLÓGICOS ACELERADOS COM CAMPOS FERMIÔNICOS

Tese apresentada ao Curso de Pós
Graduação em Física do Setor de Ciências
Exatas da Universidade Federal do Paraná
como requisito parcial para a obtenção do
Título de Doutor em Física

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Medeiros
Kremer

Curitiba

2008

Resumo

Neste trabalho, inicialmente investigamos se fontes fermiônicas com potenciais de auto-interação adequados podem ser responsáveis pelos regimes acelerados durante a evolução do universo, enquanto o campo de matéria responde pelo regime desacelerado do universo. Processos irreversíveis de transferência de energia entre a matéria e o campo gravitacional são também considerados. Em seguida, testamos um acoplamento não mínimo entre o escalar de curvatura e um bilinear fermiônico, e desenvolvemos um modelo cujos constituintes são: um campo fermiônico, fazendo o papel da energia escura, um campo de matéria e um de radiação. As equações do modelo são reescritas no domínio do redshift, e com isto comparamos nossos resultados com dados observacionais disponíveis na literatura, tais como parâmetros de densidade e distância de luminosidade. Para encerrar o trabalho de tese, analisamos as consequências cosmológicas de campos fermiônicos, para o regime inflacionário, no contexto da teoria de Einstein-Cartan, onde a densidade de spin do campo está relacionada à torção do espaço-tempo. Estas análises permitem-nos concluir que o campo fermiônico pode comportar-se de maneira apropriada tanto como inflaton no início do universo, como energia escura em tempos posteriores, ou seja, em um universo velho.

Abstract

In this work, initially investigated whether fermionic sources with self-interaction potential appropriate, may be responsible for accelerated regimes during the evolution of the universe, where a matter field would answer for the decelerated period. Irreversible processes of the energy transfer between the matter and gravitational fields are also considered. Next, we tested a coupling non-minimally between the scalar of curvature and a bilinear fermionic, and developed a model whose constituents are: a dark energy field modeled by a fermionic field non-minimally coupled with the curvature, a matter field and a field of the radiation. The equations of the model are rewritten in the red-shift, and we compare our results with experimental data available in literature, such as the parameters of density, deceleration parameter and luminosity distance. At the end, we analyze the consequences of cosmological fermionic fields to those inflation in the context of Einstein-Cartan theory, where the density of spin of the field is related to the torsion of space time. Such analysis to conclude that fermionic field can behave in an appropriate manner so as inflaton at the beginning of the universe as dark energy in times later, it means, an old universe.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar ao meu orientador Professor Dr. Gilberto Medeiros Kremer, que tornou possível este trabalho, orientando-me com dedicação, competência e profissionalismo, o qual eu tenho orgulho de tentar espelhar-me.

Ao Professor Dr. Fernando Pablo Devecchi, pelo inestimável auxílio e incentivo, além das proveitosas discussões que proporcionaram-me um grandioso aprendizado.

À minha querida e amada esposa Elizabeth Ribas, pelo companheirismo, apoio nos momentos difíceis, e compreensão de minha ausência em outros momentos.

À minha mãe Aglae Oliveira Ribas, por possibilitar minha formação, mesmo em situações adversas.

Estas pessoas foram fundamentais e decisivas ao longo desta jornada, a elas eu dedico este trabalho.

Ao departamento de Física da UFPR pela infra-estrutura.

Aos colegas da pós-graduação pelo excelente convívio.

Sumário

Resumo	i
Abstract	ii
Agradecimentos	iii
1 Introdução	1
2 Teoria da Relatividade Geral	5
2.1 Introdução	5
2.2 O Princípio da Equivalência	6
2.3 Dinâmica da partícula. Equação da geodésica	7
2.4 Algumas relações fundamentais	10

2.5	O tensor de energia-momento	11
2.6	As equações de campo de Einstein	12
2.7	O formalismo de Palatini	15
3	Cosmologia	18
3.1	Introdução	18
3.2	A métrica de Robertson-Walker e a medida de distâncias	20
3.3	O Modelo cosmológico padrão	24
3.4	Parâmetros utilizados em Cosmologia	28
3.4.1	Parâmetros de densidade	28
3.4.2	Parâmetro de desaceleração	29
3.5	Problemas com o Modelo Padrão e a Solução Inflacionária	29
3.5.1	A solução inflacionária	30
3.5.2	A presente aceleração do universo e a energia escura	34
3.5.3	A constante cosmológica	36
3.5.4	A quintessência	37
3.5.5	A K-Essência e o campo fantasma (<i>Phantom Dark Energy</i>)	38

4 Modelos com campos fermiônicos	40
4.1 Introdução	40
4.2 Equações de Dirac no espaço-tempo curvo	41
4.3 Equações de campo para o modelo	47
4.4 Soluções cosmológicas	51
4.4.1 Regime acelerado-desacelerado-acelerado	53
4.4.2 Regime desacelerado-acelerado	58
5 Férmions acoplados não minimamente	61
5.1 Introdução	61
5.2 Equações de campo para o modelo	62
5.3 Equações de Campo para a Métrica de Robertson-Walker	64
5.4 Equações de Campo em Função do Redshift	66
5.5 Soluções cosmológicas	69
6 Férmions no contexto da Teoria de Einstein-Cartan	77
6.1 Introdução	77

<i>SUMÁRIO</i>	vii
6.2 Relatividade Geral com torção	79
6.3 Equações de campo do modelo	82
6.4 Soluções cosmológicas e análise dos resultados	87
6.5 Conclusões	91
7 Conclusões e Trabalhos Futuros	93
A As componentes do tensor de energia-momento	95
B Dedução da equação 5.9	97
C Dedução das equações 5.17 e 5.18	100
D Dedução da equação 5.20	102
E Variação das conexões e tetradas	104
E.1 Variação das tetradas no setor gravitacional e fermiônico	107

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

4.1	Aceleração \ddot{a} em função do tempo t . Ocorrência de uma transição acelerado-desacelerado.	54
4.2	Aceleração \ddot{a} em função do tempo para instantes posteriores a $t \geq 50$	55
4.3	Densidades de energia do férmion ρ_f e matéria ρ_m em termos do tempo t	56
4.4	Densidades de energia do férmion ρ_f e matéria ρ_m , para instantes posteriores $t \geq 20$	57
4.5	Aceleração \ddot{a} vs tempo t . Transição desacelerado-acelerado, férmion como energia escura.	59
4.6	Aceleração \ddot{a} vs tempo, para instantes iniciais $t \leq 5$	59
4.7	Densidades de energia ρ da matéria e do campo fermiônico vs tempo t . Para $t \sim 2,5$ o campo fermiônico passa a ser dominante.	60

- 5.1 Parâmetros de densidade em termos de z para o modelo Λ CDM e para o modelo fermiônico. Nas figuras Ω_ψ e Ω_m indicam as densidades da energia escura e da matéria respectivamente. O parâmetro para o campo de radiação, Ω_r , é desprezível neste intervalo. Representamos as curvas para diferentes valores de ξ 71
- 5.2 Parâmetros de densidade para grandes valores do redshift $1000 \leq z \leq 4000$. Campos de radiações representados por Ω_r e matéria Ω_m . O parâmetro de densidade para a energia escura é desprezível para estes redshift. 71
- 5.3 Parâmetro q em função de z para o modelo Λ CDM e para o modelo fermiônico 72
- 5.4 μ_0 em função de z para o modelo Λ CDM e o modelo fermiônico. Na figura menor temos a faixa $0 \leq z \leq 0,5$ 74
- 6.1 Acelerações \ddot{a} vs tempo t para diversos valores de \bar{m} 89
- 6.2 Figuras representando a densidade de energia do campo fermiônico e o termo $3\sigma^2$ em função do tempo. No quadro menor temos a aceleração v.s tempo . . . 90

CAPÍTULO 1

Introdução

O modelo do Big-Bang é uma teoria bem fundamentada, porém existem fatos observacionais que esta teoria não consegue explicar, tais como, o problema da planura, do horizonte, dos monopólos magnéticos entre outros. Com o objetivo de solucionar estes problemas uma teoria conhecida como inflação foi proposta no início dos anos 80 por Guth, Linde, Albrecht e Steinhardt [1]. De acordo com o modelo inflacionário, o universo sofreu uma rápida expansão acelerada, devido a presença de um campo escalar relacionado à energia do vácuo conhecido como inflaton. Basicamente o que se supõe nestes modelos é que a energia cinética do inflaton é pequena, e a maior parte da energia está armazenada em seu potencial. Esta energia tem uma pressão negativa, o que provoca uma expansão acelerada muito grande, em um intervalo de tempo curto, a este fenômeno denomina-se inflação.

Um outro problema em cosmologia, está relacionado com as observações experimentais recentes, pois existem evidências suficientes para se afirmar que o universo é espacialmente plano, e está se expandindo com uma aceleração positiva [2]. A evidência de que o universo é espacialmente plano está relacionada ao parâmetro de densidade total, que é a soma dos

parâmetros de densidade relacionados à energia escura, à matéria escura fria e aos bárions.

Os valores mais recentes dos parâmetros de densidade obtidos através de medidas da anisotropia da radiação cósmica de fundo, indicam que o parâmetro de densidade é aproximadamente igual a um, e que a energia escura domina atualmente a composição do universo, e esta é responsável pela expansão com aceleração positiva. Por outro lado, as medidas do desvio para o vermelho da supernova SN 1997ff do tipo Ia, indicam uma aceleração presente e uma fase de desaceleração no passado do universo [2].

Diante deste cenário, várias propostas são sugeridas, e na literatura muitos candidatos são propostos para descrever a energia escura, tais como a quintessência [3], o gás de Chaplyngin [4], os táquions da teoria das cordas [5] e os campos fantasmas [6]. Levando-se em conta este contexto cosmológico, consideramos nesta tese campos fermiônicos como fontes de gravitação, para descrever os diversos regimes acelerados do universo. Inicialmente estes são introduzidos em alguns modelos cosmológicos não homogêneos, com principal objetivo de promover regimes de transição da forma não-homogêneo para homogêneo, e em alguns trabalhos são utilizados para resolver o problema de soluções cosmológicas livres de singularidades [7]. Em alguns trabalhos, questiona-se porque não utilizar campos fermiônicos como promotores do regime inflacionário, no lugar de campos escalares [8] pois, uma grande variedade de situações podem ser exploradas com a utilização do campo fermiônico como responsável de promover o fenômeno da inflação. Nessas formulações a presença da interação gravitacional indica a necessidade de se trabalhar com a dinâmica de férmions no espaço-tempo curvo, assim, a representação espinorial tem de ser revista, pois o grupo de gauge correspondente às transformações gerais de coordenadas (TGC) não admite a representação de espinores [11]. Isto implica em trabalhar com o formalismo de tetradas [12]. A equação de Dirac que é invariante em relação ao grupo TGC garante a correta interação entre os campos fermiônicos e o campo gravitacional.

Também é possível encontrar na literatura, teorias que combinam a relatividade geral de Einstein com a teoria termodinâmica dos processos irreversíveis, com o propósito de descrever os diferentes períodos do universo, pois levam em conta os processos dissipativos que ocorrem durante a evolução do universo. Em particular os processos dissipativos originados pela interação de fluidos dissipativos com a quintessência (termo figurado para mencionar o constituinte responsável pela atual aceleração do universo), podem desempenhar um papel muito importante na expansão acelerada do universo [13]. Os processos irreversíveis num universo homogêneo e isotrópico, são normalmente descritos pelos modelos cosmológicos viscosos, que se baseiam nas seguintes teorias termodinâmicas: a) teoria termodinâmica de Eckart (ou de primeira ordem) e b) teoria termodinâmica estendida ou de segunda ordem [14].

Nesta tese, estudamos modelos cosmológicos onde o campo fermiônico simula o papel de inflaton e energia escura [15], ou seja, com o campo fermiônico mostramos que é possível simular, com um potencial de auto-interação adequado, a unificação das eras cosmológicas. Neste contexto, o universo inicia-se com uma expansão acelerada, onde o férmion faz o papel de inflaton e sua densidade de energia decai, enquanto a densidade de energia da matéria cresce, ultrapassando a do férmion, e assim o universo entra no regime de expansão desacelerada. Em seguida, o decaimento da densidade de energia da matéria se torna mais rápido, e a densidade de energia do férmion volta a superar a da matéria, fazendo desta forma o universo passar para um regime de aceleração positiva, e o férmion faz agora o papel de energia escura. Posteriormente, com a inclusão de um acoplamento não mínimo, entre o escalar de curvatura e o bilinear fermiônico $\bar{\psi}\psi$, objetivando explorar as consequências deste, reescrevemos as equações do modelo no domínio do “redshift”. Desta maneira comparamos nossos resultados com os dados disponíveis na literatura e com o modelo Λ CDM (*Cold Dark Matter*, constante cosmológica e matéria escura fria). Obtivemos os parâmetros de densidades, desaceleração e a distância de luminosidade. Estudamos ainda, a inclusão de férmions dentro do contexto da teoria de Einstein-Cartan, onde agora o espaço-tempo além

de curvatura é munido de torção. Dentro deste cenário o spin tem um papel fundamental na estrutura do espaço-tempo, este é fonte de torção. Teorias de gravitação em espaços com torção surgem de maneira natural em teorias supersimétricas de gravitação, sendo a torção um ingrediente básico de uma esperada teoria quântica do campo gravitacional, pois a mesma está associada a uma propriedade básica da matéria no nível quântico, o spin [16]. Com a teoria de Einstein-Cartan, analisamos a transição de uma era acelerada-desacelerada, ou seja, um regime inflacionário-desacelerado, onde a própria matéria fermiônica massiva, é responsável pelo regime acelerado, agora não através de um potencial de auto-interação associado a uma pressão negativa, mas sim, devido a uma propriedade física do campo, o seu spin, que é fonte geradora de torção.

Esta tese está estruturada da seguinte forma: no capítulo dois mostramos as idéias básicas da teoria geral da relatividade; no capítulo três, discutimos brevemente o modelo cosmológico padrão, alguns de seus problemas e a solução inflacionária, bem como o problema da energia escura; nos capítulos seguintes, mostramos nossos resultados obtidos utilizando-se campos fermiônicos como fonte em modelos cosmológicos, e suas implicações; no capítulo quatro, discutimos a inclusão de férmions na Relatividade Geral, e as consequências cosmológicas destes, levando-se em conta também processos irreversíveis de transferência de energia entre o campo gravitacional e o campo de matéria; no capítulo cinco exploraremos o acoplamento não mínimo e a comparação com dados observacionais; o capítulo seis é dedicado ao estudo do espaço de Riemann-Cartan, o papel dos férmions como fonte de torção e os cenários cosmológicos deste modelo. Por último apresentamos nossas conclusões e discutiremos a sequência de nossos trabalhos. A assinatura da métrica usada é $(+, -, -, -)$ e também escolhemos as unidades fundamentais, nos capítulos 3, 4 e 5, como $8\pi G = c = k = \hbar = 1$, a menos no capítulo dois, onde as unidades são preservadas, e no capítulo seis, onde neste apenas tomamos $c = 1$, conforme será discutido.

CAPÍTULO 2

Teoria da Relatividade Geral

2.1 Introdução

A relatividade geral (RG) é uma teoria clássica da interação gravitacional, na qual o campo gravitacional é descrito como consequência da curvatura do espaço-tempo, devido ao seu conteúdo de matéria-energia presente.

A RG implementa em sua estrutura o princípio da equivalência (PE), que estabelece a igualdade entre um campo gravitacional e um referencial não inercial, através do chamado princípio da covariância geral [12, 17].

O fato de uma fonte gravitacional, ou seja, qualquer forma de matéria e energia, curvar o espaço-tempo, conforme veremos, é uma consequência direta do PE. A RG é uma extensão da teoria da Relatividade Restrita (RR) pois a RG, ao contrário da RR, engloba referenciais não inerciais em sua formulação, substituindo o grupo de Lorentz pelo grupo das transformações gerais de coordenadas (TGC).

Neste capítulo apresentaremos brevemente os conceitos fundamentais da RG, que necessitaremos posteriormente em nossas abordagens, para maiores detalhes ver [12, 17, 21].

2.2 O Princípio da Equivalência

A RG fundamenta-se no PE, que afirma que em cada ponto do espaço-tempo sob a presença de um campo gravitacional é possível estabelecer um sistema de referência localmente inercial, onde valem as leis da RR. Este princípio estabelece também, que um referencial acelerado é indistinguível localmente de um campo gravitacional, ou seja, não é possível realizar experiências dentro de um referencial acelerado, que permita diferenciá-lo localmente de um campo gravitacional. Por exemplo, se considerarmos um referencial em queda livre em um campo gravitacional, verificaremos que as leis da física são localmente idênticas a um sistema inercial na ausência de campo. A necessidade de considerar-se referenciais locais é para que o campo gravitacional possa ser tomado como uniforme, e desta forma, para qualquer experiência realizada neste, será impossível detectar diferenças em relação a um referencial na ausência de campo gravitacional.

O PE pode ser estabelecido, a partir do fato experimental que garante a igualdade entre a massa gravitacional e a massa inercial. Este fato experimental decorre da observação de que, no vácuo, todos os corpos caem com a mesma aceleração, independente de suas massas, ou formas.

Para formalizar estas afirmações, consideremos M sendo a massa da Terra, r seu raio e m a massa gravitacional de uma partícula de teste. Desta forma, o módulo da força gravitacional entre M e m é dada por,

$$F = G \frac{Mm}{r^2}. \quad (2.1)$$

Por outro lado, pela segunda lei de Newton, a partícula fica sujeita a uma aceleração dada por,

$$F = m'a, \quad (2.2)$$

onde F é o módulo da força que atua na partícula e m' é a massa inercial da partícula de teste. Note que em (2.1) a quantidade m é fonte do campo gravitacional, ou seja, m é uma “carga gravitacional” ao passo que em (2.2) m' tem outra interpretação, isto é, m' é a massa inercial associada à resistência para alterar o estado cinemático da partícula. Da igualdade entre (2.1) e (2.2) temos,

$$a = \frac{m}{m'} \frac{GM}{r^2} = cte, \quad (2.3)$$

logo $m/m' = cte$. Experimentalmente a igualdade entre m e m' se verifica. Devido a este fato, podemos anular localmente os efeitos de um campo gravitacional com a escolha adequada de referenciais, pois todos os corpos estão sujeitos a uma mesma aceleração [21].

Na próxima seção veremos como o PE afeta a dinâmica de uma partícula sob a ação de um campo gravitacional.

2.3 Dinâmica da partícula. Equação da geodésica

Faremos uma aplicação do PE para estudarmos a dinâmica de uma partícula em dois sistemas de referência. Então, consideremos uma partícula em queda livre em um sistema de coordenadas ξ^α que acompanha a partícula. Este sistema é localmente inercial e de acordo com o PE, neste valem as leis da RR e nenhuma aceleração é observada, ou seja,

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2.4)$$

onde $d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2}$ é o tempo próprio, ou seja, aquele medido no referencial da partícula. Consideremos agora um sistema de coordenadas arbitrário x^μ que está imerso em repouso

em um campo gravitacional. Podemos obter a dinâmica da partícula observada no referencial x^μ fazendo-se uma mudança de referencial, assim, utilizando-se da regra da cadeia:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0, \quad (2.5)$$

desenvolvendo obtemos:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0, \quad (2.6)$$

multiplicando por

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha},$$

temos,

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0, \quad (2.7)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é a conexão afim definida como,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}. \quad (2.8)$$

A equação (2.7) pode ser interpretada como sendo a lei de força para uma partícula em um campo gravitacional. Esta equação também é conhecida como equação da geodésica, pois está associada a condição que torna a distância entre dois pontos estacionária, em uma variedade Riemanniana. Fica claro então, que esta lei pode também ser obtida a partir de um argumento geométrico, conforme segue: em um espaço-tempo curvo o elemento de linha assume a forma geral

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\lambda) dx^\mu dx^\nu, \quad (2.9)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico cujas componentes definem a variedade Riemanniana e, conforme veremos, o comportamento dinâmico do campo gravitacional também é determinado pelos coeficientes da métrica. O comprimento da curva, descrita por uma partícula imersa nesta variedade, entre os pontos a e b é dado por

$$s = \int_a^b \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda, \quad (2.10)$$

onde λ é um parâmetro da curva, ou seja, $x^\mu(\lambda)$. Variando (2.10) com respeito a $g_{\mu\nu}$ e impondo

$$\delta s = \delta \int_a^b (g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda})^{\frac{1}{2}} d\lambda = 0, \quad (2.11)$$

obtemos exatamente a equação (2.7) onde,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right), \quad (2.12)$$

é a conexão afim. Podemos obter (2.12) a partir da equação (2.8) usando a lei de transformação do tensor métrico entre os sistemas ξ^α e x^μ [12].

Percebemos que o implemento do PE nos conduz a uma dinâmica na qual, o movimento da partícula é determinado pela geometria do espaço tempo, ou seja, o conceito de força pode ser substituído pela idéia de que a matéria e a energia curvam o espaço-tempo, e este determina quais são as geodésicas que devem ser seguidas pelas partículas de teste. Então, uma vez estabelecida a forma métrica (2.9), as funções $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$, são determinadas solucionando-se um conjunto de equações diferenciais conhecidas como equações de Einstein, que relacionam a geometria do espaço-tempo com o conteúdo de matéria e energia, fontes do campo gravitacional. Este conteúdo é especificado através de um tensor de segunda ordem, obtido pela variação da ação total da matéria dos campos envolvidos no processo, conhecido como tensor de energia-momento, e denotado por $T_{\mu\nu}$. Em resumo, conhecendo-se o conteúdo energético das fontes, as equações de Einstein estabelecem a evolução espaço temporal dos coeficientes da métrica, e estes por sua vez nos informam as equações de movimento de um corpo de teste no campo gravitacional, via solução das equações da geodésica. No capítulo seguinte estabeleceremos as equações de Einstein para um caso concreto, antes, nas próximas seções vamos ver a estrutura das equações de Einstein.

2.4 Algumas relações fundamentais

Primeiramente vamos introduzir certas relações do campo da geometria diferencial fundamentais na construção das equações de Einstein. Para maiores detalhes ver [17, 18].

Dada uma certa métrica a simples inspeção da mesma, é por vezes insuficiente para julgarmos se o espaço em questão é curvo ou não, a quantidade geométrica que contém esta informação é o tensor de Riemann definido como:

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \Gamma_{\sigma\kappa}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}. \quad (2.13)$$

Pode-se demonstrar que a nulidade de todas as componentes do tensor de Riemann implica que a forma métrica fundamental descreve uma variedade plana, fisicamente significando a não presença de um campo gravitacional.

Outro tensor fundamental é conhecido como tensor de Ricci, sendo o único tensor de segunda ordem que pode ser construído a partir da contração do tensor de Riemann [12],

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\mu\lambda\kappa}^{\lambda}. \quad (2.14)$$

Cabe ressaltar que este é um tensor simétrico com um total de 10 componentes independentes, isto devido à certas propriedades de anti-simetria do tensor de Riemann. Para um maior detalhamento ver [12]. Agora, contraindo o tensor de Ricci definimos o escalar de curvatura,

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}, \quad (2.15)$$

cuja interpretação está associada a curvatura Gaussiana do espaço-tempo no ponto considerado. A partir do tensor de Ricci e da curvatura escalar, podemos montar um tensor de segunda ordem com derivada covariante nula, que é conhecido como tensor de Einstein e denotado por $G_{\mu\nu}$ e definido como

$$G^{\mu\nu} = (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} R). \quad (2.16)$$

Este tensor possui derivada covariante nula, então de acordo com a definição da derivação covariante temos,

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = \partial_{\mu} G^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} G^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} G^{\mu\lambda} = 0. \quad (2.17)$$

As equações (2.17) também são conhecidas como identidades contraídas de Bianchi. Para maiores detalhes ver por exemplo [12].

2.5 O tensor de energia-momento

Em teorias de campos é possível obter um tensor de segunda ordem que condensa em sua estrutura matemática, as informações referentes a energia e os momenta do campo. Tal tensor, pode ser obtido por meio da densidade de lagrangiana \mathcal{L} do campo, através da seguinte equação [19],

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\phi}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\phi)} \right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.18)$$

onde ϕ representa um campo qualquer, seja escalar, vetorial ou espinorial. A equação (2.18) possui divergência nula, ou seja,

$$\frac{\partial T_{\nu\mu}}{\partial x^{\nu}} = 0, \quad (2.19)$$

vale ressaltar que aqui estamos usando uma derivada ordinária, pois estamos considerando um espaço-tempo plano. Esta equação pode ser generalizada para campos em espaços curvos via princípio da covariância geral (PCG), que estabelece a forma de implementar o PE em sistemas físicos. Basicamente este princípio informa que devemos substituir as derivadas ordinárias pelas respectivas derivadas covariantes, o tensor métrico de Minkowski pelo tensor geral $g_{\mu\nu}$ e o grupo de Lorentz pelo grupo das TGC [20, 11]. A equação (2.19) em termos de componentes, encerra as leis usuais de conservação de energia e momento. Para maiores detalhes ver [23]. Também é importante frisar a interpretação física das componentes do tensor de energia-momento:

- Componente temporal: $T_{00} \rightarrow$ densidade de energia do campo.
- Componentes espaço-temporal: $T_{i0} = T_{0i} \rightarrow$ densidades de fluxo de momento e energia (quantidade de energia que atravessa a superfície $x^\nu = cte$ por unidade de tempo).
- Componentes espaciais: $T_{ij} \rightarrow$ tensor pressão do constituinte.

Em cosmologia, o tensor de energia-momento de um fluido perfeito, conforme discutiremos no próximo capítulo, tem importância central, a sua forma é a seguinte:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

onde p e ρ são no caso geral funções das coordenadas espaço-temporais e representam a pressão e a densidade de energia respectivamente e U^μ , é a quadrivelocidade do fluido.

Aplicando-se o PCG na equação (2.19), esta torna-se:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.21)$$

Esta equação, mais a contribuição do campo gravitacional, definem a conservação do momento e da energia do sistema [23].

2.6 As equações de campo de Einstein

Vimos nas seções anteriores como a geometria do espaço-tempo afeta o movimento das partículas, nesta seção veremos como as fontes que caracterizam o campo gravitacional relacionam-se com a geometria do espaço-tempo, estas relações são conhecidas como equações de campo de Einstein. Podemos obter as equações de campo a partir da chamada ação de Einstein-Hilbert:

$$S = \int \sqrt{-g} \left(-\frac{c^3}{16\pi G} R + \frac{1}{c} \mathcal{L}_m \right) d^4x, \quad (2.22)$$

onde \mathcal{L}_m indica a densidade de lagrangiana referente à matéria fonte do campo gravitacional. Escrevendo-se a ação total do sistema (2.22) genericamente como

$$S_t = S_G + S_m = -\frac{c^3}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x + \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_m d^4x,$$

onde o primeiro termo é referente ao setor gravitacional e o segundo indica a ação da matéria fonte. Efetuamos assim, as variações das ações S_G e S_m em relação a métrica $g_{\mu\nu}$. Para S_G obtemos:

$$\delta S_G = -\frac{c^3}{16\pi G} \int \left(\underbrace{\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}}_{\delta S_1} + \underbrace{\sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}}_{\delta S_2} + \underbrace{R \delta \sqrt{-g}}_{\delta S_3} \right) d^4x, \quad (2.23)$$

vamos calcular cada parte de S_G separadamente, assim primeiramente, utilizando-se de (2.13):

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \delta(\Gamma_{\theta\lambda}^\lambda) \Gamma_{\mu\nu}^\theta + \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\theta) \Gamma_{\theta\lambda}^\lambda - \delta(\Gamma_{\theta\nu}^\lambda) \Gamma_{\mu\lambda}^\theta - \delta(\Gamma_{\mu\lambda}^\theta) \Gamma_{\mu\nu}^\lambda. \quad (2.24)$$

É possível mostrar que, embora as conexões afim não se comportem como um tensor, as suas variações se transformam como tensores [21]. Assim, utilizando-se da definição de derivada covariante, a expressão anterior torna-se:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda). \quad (2.25)$$

Usando o fato de que a derivada covariante do tensor métrico é nula, escrevemos :

$$\delta S_1 = \int d^4x \nabla_\sigma [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - \sqrt{-g} g^{\mu\sigma} (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)]. \quad (2.26)$$

Os dois termos entre colchetes constituem densidades tensoriais de peso um, assim podemos substituir as derivadas covariantes por derivadas ordinárias na ausência de torção, para verificar este fato, consideremos o seguinte raciocínio: seja \mathcal{U}^c uma densidade tensorial, lembrando-se que a sua derivada covariante é expressa por [21],

$$\nabla_c \mathcal{U}^c = \partial_c \mathcal{U}^c + \Gamma_{bc}^c \mathcal{U}^b - \Gamma_{cb}^c \mathcal{U}^b. \quad (2.27)$$

Notamos que, no caso em que a conexão afim é dada por (2.12), também conhecida como símbolos de Christoffel, temos uma simetria entre os índices inferiores, e assim (2.27) assume a forma,

$$\nabla_c \mathcal{M}^c = \partial_c \mathcal{M}^c. \quad (2.28)$$

Os casos em que as conexões afim não coincidem com os símbolos de Christoffel, indicam a presença de torção que será discutido posteriormente. De posse destas informações, podemos transformar a integral de volume da expressão (2.26) em uma integral de superfície, que de acordo com o princípio variacional, se anula nas fronteiras de integração, pois nestes pontos temos que $\delta\Gamma = 0$, assim concluímos que $\delta S_1 = 0$.

Agora, usando o fato que $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}$, escrevemos (2.23) finalmente como,

$$\delta S_G = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

Procedemos agora a variação na ação da matéria, assim,

$$\delta S_m = \frac{1}{c} \int d^4x \delta(\mathcal{L}_m \sqrt{-g}) = \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento dos campos fontes, que pode ser escrito como:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.31)$$

A partir das equações (2.29) e (2.30) escrevemos a variação da ação total do sistema,

$$\delta S = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (2.32)$$

como as variações em $g_{\mu\nu}$ são arbitrárias temos,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.33)$$

Estas são as equações do campo gravitacional de Einstein [23], que são a base dos modelos cosmológicos que serão discutidos nas próximas seções.

É interessante notar que as identidades de Bianchi garantem que a divergência do tensor de Einstein é nula, mantendo a coerência com o lado direito da equação que também possui divergência nula. Este fato permite-nos introduzir mais um termo linear com $g_{\mu\nu}$ na ação, pois a derivada covariante do tensor métrico é nula [12], assim a equação (2.33) torna-se:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.34)$$

onde Λ é a famosa constante cosmológica introduzida inicialmente por Einstein nas equações de campo, para que suas soluções proovessem um universo estático. Nos próximos capítulos vamos estudar as soluções dessas equações em cosmologia.

2.7 O formalismo de Palatini

Podemos derivar as equações de campo de Einstein por um processo alternativo, conhecido na literatura como formalismo de Palatini ou formalismo de primeira ordem [21]. Neste, consideramos a conexão e a métrica como campos independentes, ou seja, não consideramos a princípio, que a conexão seja dada pelas expressões que definem os símbolos de Christoffel, e efetuamos as variações na ação total do sistema com respeito a métrica e a conexão, de formas independentes. Assim, quando a ação do sistema é dada pela ação de Einstein-Hilbert, este procedimento nos conduz às equações usuais de Einstein. Contudo, em teorias de gravitação onde a ação é modificada com termos não lineares $f(R)$, a variação de Palatini conduz a equações de campos diferentes em relação a variação na métrica. Ver [22], para uma completa discussão.

Apresentaremos agora, como obter as equações de campo de Einstein via formalismo de Palatini, pois este será conveniente em nossas derivações em capítulos posteriores. Primeiro pode-se mostrar que, em qualquer ponto do espaço-tempo é sempre possível encontrar um sistema de referência, onde todas as conexões se anulem. Este é conhecido como sistema

geodésico de coordenadas [21]. Observamos a partir da equação (2.7) que, estes pontos correspondem fisicamente a regiões onde os efeitos do campo gravitacional são anulados, e valem as leis da relatividade especial, reafirmando desta forma o PE. Em coordenadas geodésicas, podemos escrever a variação do tensor de Ricci como :

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\sigma(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - \partial_\mu(\delta\Gamma_{\nu\lambda}^\lambda), \quad (2.35)$$

neste sistema as derivadas covariante e a ordinária coincidem e escrevemos,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - \nabla_\mu(\delta\Gamma_{\nu\lambda}^\lambda). \quad (2.36)$$

Temos assim uma equação tensorial que é válida em um sistema de coordenadas e que também o é em todos os outros sistemas.

Consideremos a ação de Einstein-Hilbert (2.22) sem o setor relativo à lagrangiana da matéria fonte, pois para este termo o cálculo é análogo ao anterior. Variando-se a mesma com respeito ao tensor métrico, obtemos :

$$\delta S = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}R\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \right). \quad (2.37)$$

Agora, as conexões presentes no tensor de Ricci são consideradas como independentes da métrica. Aplicando-se o princípio da mínima ação, adicionando-se o termo fonte e usando a equação (2.37) recuperamos a equação (2.33). Em seguida, variando-se a ação de Einstein-Hilbert com relação a conexão, temos,

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.38)$$

Agora, com a equação (2.36) temos,

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\nu}[\nabla_\sigma(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - \nabla_\mu(\delta\Gamma_{\nu\lambda}^\lambda)] = 0. \quad (2.39)$$

Usando,

$$\nabla_\sigma[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda] = \nabla_\sigma(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_\sigma(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma), \quad (2.40)$$

para o primeiro e o segundo termo do lado direito da equação (2.39), e utilizando o teorema de Gauss para eliminar o termo de superfície, temos

$$\delta S = \int d^4x [\nabla_\kappa(\sqrt{-g}g^{\kappa\nu})\delta_\sigma^\mu - \nabla_\sigma(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})]\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = 0. \quad (2.41)$$

Como a variação em $\delta\Gamma$ é arbitrária, com a única restrição de ser simétrica nos índices inferiores, assim, unicamente a parte simétrica é nula, ou seja,

$$\frac{1}{2}\nabla_\kappa(\sqrt{-g}g^{\kappa\nu})\delta_\sigma^\mu + \frac{1}{2}\nabla_\kappa(\sqrt{-g}g^{\kappa\mu})\delta_\sigma^\nu - \nabla_\sigma(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.42)$$

Contraindo esta equação com respeito a σ e μ e realizando algumas manipulações, obtemos,

$$\nabla_\kappa(g^{\kappa\nu}) = 0. \quad (2.43)$$

Estas equações definem a forma da conexão, ou seja, podem ser resolvidas para Γ , e obtemos assim os símbolos de Christoffel, equação (2.12), como as conexões da teoria. Em resumo, no formalismo de Palatini, considerando a ação de Einstein-Hilbert, a variação com relação ao tensor métrico fornece-nos as equações usuais de campo de Einstein, e a variação da conexão fornece-nos a equação que as definem.

CAPÍTULO 3

Cosmologia

3.1 Introdução

No início do século XX, a cosmologia deixou de ser um campo pertencente à metafísica para receber a qualificação de uma ciência teórica-experimental, em parte devido ao surgimento da teoria geral da relatividade e por outro lado, da possibilidade experimental de medir propriedades do universo como um todo, ou seja, de medições válidas para todo o cosmos. Dentre as principais observações astronômicas que fundamentam qualquer cenário cosmológico, pode-se citar: a observação de Edwin Hubble [24], segundo a qual, as galáxias se afastam de nós com velocidades que crescem com as distâncias que nos separam das mesmas. Esta observação indica que o nosso universo está em expansão, derrubando a visão tradicional de um universo estático, como acreditava-se. Curiosamente, as soluções de universos expansivos eram as previsões naturais da teoria geral da relatividade, o que levou Einstein a introduzir a constante cosmológica em suas equações de campo, para assim tornar o universo estático, de acordo com a convicção vigente.

A segunda observação experimental que revela propriedades do universo, é a radiação de fundo cósmica, prevista por Gamow, Alpher e Herman no final da década de 40. De acordo com esta previsão, quando o universo era jovem, sua temperatura era alta o suficiente para os fótons ionizarem os átomos de hidrogênio (pois a densidade total de energia da radiação obedece a lei de Stefan-Boltzmann $\rho_r = cT^4$ e, por outro lado, a densidade de energia cai com $\rho_r \sim 1/a^4$, onde a é o fator de escala que, conforme veremos é proporcional às dimensões espaciais do universo. Destas duas equações temos que $T \sim 1/a$). Assim, à medida que o universo expandiu-se ele se resfriou e os fótons não mais possuíam energia suficiente para ionizar os átomos. O universo tornou-se então transparente e os fótons se desacoplaram da matéria, passando a viajar livremente, formando a radiação cósmica de fundo hoje observada. Esta radiação foi constatada acidentalmente em 1965 por Penzias e Wilson, que notaram que a mesma é oriunda de todas as direções do espaço e se enquadra em um espectro de corpo negro com temperatura de aproximadamente 2.7K. Estas constatações experimentais somadas a outras [24, 25], permitiram a elaboração de modelos cosmológicos que descrevem a dinâmica de evolução do universo. A radiação cósmica de fundo apresenta-se homogênea e isotrópica, salvo pequenas não homogeneidades que deram origem às grandes estruturas do universo tais como aglomerados e galáxias. Este fato é respeitado em cosmologia através do estabelecimento do princípio cosmológico (PC), também reforçado pelas observações que indicam um universo altamente homogêneo e isotrópico em larga escala. Este princípio afirma que o universo em expansão deve ser homogêneo e isotrópico, quando visto por qualquer observador, ou seja, todos os observadores de forma independente vão estar expostos a uma mesma visão do universo.

3.2 A métrica de Robertson-Walker e a medida de distâncias

A forma da métrica mais geral que pode ser construída respeitando o PC, ou seja, verificando as invariâncias espaciais associadas a homogeneidade e isotropia, é conhecida como métrica de Robertson-Walker (RW) [25]. Sua expressão em coordenadas esféricas é a seguinte:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\}, \quad (3.1)$$

onde $a(t)$ é conhecido como fator de escala, k é a constante de curvatura que indica as seguintes situações: $k = 0$, setor espacial plano, $k > 0$, setor espacial esférico ou fechado, $k < 0$, setor espacial hiperbólico ou aberto. A métrica de RW está escrita no chamado sistema de coordenadas comóveis, onde cada partícula (ou por exemplo galáxias) possui coordenadas espaciais fixas x^i e um relógio que mede o tempo t , que é o tempo próprio da partícula, este é o mesmo para todas as demais partículas e é conhecido como tempo cosmológico. Com isto a métrica de RW define uma família de hipersuperfícies, uma para cada instante t , onde cada partícula ocupa uma posição x^i nesta hipersuperfície. O sistema comóvel é definido pelo conjunto de pontos (x^i, t) de cada partícula, e é assim chamado porque o sistema acompanha o movimento coletivo do sistema de partículas, ou seja, as coordenadas sofrem uma reescala em cada instante da expansão. Esta reescala é feita através da evolução do fator de escala $a(t)$. Sintetizando, a métrica de RW está escrita em coordenadas comóveis, ou seja, as partículas não alteram suas coordenadas espaciais ao longo da expansão do universo, estas sofrem apenas uma reescala a medida que o Universo expande-se, assim o sistema acompanha o movimento coletivo do fluido cósmico.

Com este fato em mente, temos que definir como medir a distância entre dois pontos neste universo em evolução, pois a distância percorrida por um fóton neste universo não é simplesmente $c\Delta t$, pois durante a propagação do mesmo o universo expandiu. Neste contexto, definimos inicialmente a separação espacial de dois pontos no universo, fazendo $dt^2 = 0$ na métrica de RW. Como a direção de nosso referencial é arbitrária, consideremos,

sem perda de generalidade, o caso em que $d\theta = d\phi = 0$, e também $k = 0$, assim,

$$l = \int_0^r a(t) dr = a(t)r. \quad (3.2)$$

A distância física, ou *horizonte de partícula* é a distância radial percorrida pelo fóton [18, 25], assim,

$$d = a(t) \int_0^r dr = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}. \quad (3.3)$$

Podemos obter a lei de Hubble derivando (3.2) com relação ao tempo,

$$v = \dot{a}r,$$

mas como $r = l/a$, temos,

$$v = \frac{\dot{a}}{a}l, \quad (3.4)$$

onde a constante de Hubble é identificada como,

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.5)$$

e o ponto significa a derivada com relação ao tempo.

Outra consequência importante em um universo em expansão é o redshift cosmológico, que ocorre não devido ao efeito Doppler usual, mas sim devido à própria expansão do fluido cósmico, já que este permanece praticamente imóvel em suas posições comóveis. Consideremos inicialmente, uma frente de onda emitida no instante t_e e na posição r_e detectada no instante t_0 e na origem, ou seja, posição $r = 0$, e uma segunda frente emitida na mesma coordenada, no instante $t_e + \Delta t_e$ e detectada na mesma coordenada anterior, e no instante $t_0 + \Delta t_0$, assim podemos escrever, para a emissão e recepção

$$\int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{r_e}^0 dr \quad (3.6)$$

e também,

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{r_e}^0 dr, \quad (3.7)$$

tomando a diferença entre as duas equações, temos,

$$\int_{t_e}^{t_e+\Delta t_e} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_o}^{t_o+\Delta t_o} \frac{cdt}{a(t)} = 0, \quad (3.8)$$

como os intervalos entre a emissão e a detecção Δt_e e Δt_o , são muito pequenos, e a expansão neste intervalo é praticamente constante, temos,

$$\frac{c\Delta t_e}{a(t_e)} = \frac{c\Delta t_o}{a(t_o)}, \quad (3.9)$$

como Δt_e e Δt_o é o intervalo entre a emissão e a detecção de duas frentes de onda, e estes nada mais são que os períodos da onda emitida e detectada respectivamente, com isso podemos escrever,

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_o} = \frac{a(t_e)}{a(t_o)}. \quad (3.10)$$

Da definição usual de redshift,

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (3.11)$$

podemos escrever,

$$z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1. \quad (3.12)$$

Esta equação nos mostra que, quanto mais distante um objeto se situa de nosso referencial, conseqüentemente mais para o passado estamos observando-o, assim, maior é o redshift do objeto em observação. Desta forma podemos relacionar o redshift com a distância que objeto se encontra de nós . Como t_o é o instante da detecção, do fóton que foi emitido no passado em t_e , podemos normalizar o fator de escala neste instante como $a(t_o) = 1$. Sendo o tempo da emissão um instante genérico qualquer, ou seja, $a(t_e) = a(t)$, podemos escrever,

$$a = \frac{1}{z + 1}. \quad (3.13)$$

Conforme mencionamos, podemos utilizar a medida do redshift para relacioná-la com distâncias. Uma maneira conveniente na astronomia de fazer esta associação, pela sua praticidade observacional, é a partir da definição de distância de luminosidade do objeto em ob-

servação que se refere à quantidade de radiação recebida de um objeto distante. Assumindo-se que a intensidade luminosa decresce com o quadrado da distância, temos por definição,

$$d_l = \sqrt{\frac{P}{4\pi p}}, \quad (3.14)$$

onde P é a potência total emitida pela fonte e p a potência por unidade de área recebida no ponto de observação, esta é dada por,

$$p = \frac{P}{4\pi d^2(1+z)^2}, \quad (3.15)$$

onde d é a distância física do objeto ao ponto de observação, e o termo $(1+z)$ representa o efeito de atenuação de p , devido à expansão do universo. A distância própria, $d = a(t)r$, medida no instante de observação, é $d = a_0 r_0$, levando-se em conta estas considerações e a equação (3.15) em (3.14), temos,

$$d_l = a_0 r_0 (1+z). \quad (3.16)$$

Para calcularmos r_0 , fazemos,

$$\int_0^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{r_0} dr. \quad (3.17)$$

Procedemos agora, por conveniência, a seguinte mudança de variáveis, sendo $a(z(t))$, temos que

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{dz} \frac{dz}{dt},$$

assim de (3.13),

$$dt = -\frac{1}{\dot{a}(t)} \frac{1}{(1+z)^2} dz = -\frac{a(t)}{H} dz. \quad (3.18)$$

Calculando-se r_0 , e substituindo em (3.16) com $a_0 = 1$, temos,

$$d_l = c(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (3.19)$$

Do ponto de vista experimental, uma grandeza utilizada em astronomia é a diferença entre a magnitude aparente m e a magnitude absoluta M , ou seja, $\mu_0 = m - M$, ou em outros

termos,

$$\mu_0 = 25 + 5\log_{10}d_l, \quad (3.20)$$

para maiores detalhes ver [25].

3.3 O Modelo cosmológico padrão

Os ingredientes do modelo padrão são as equações de Einstein, o tensor de energia-momento para um fluido perfeito com sua respectiva equação de balanço, e as equações de estado dos constituintes (matéria e radiação). Usamos primeiramente as equações de Einstein para obter as equações diferenciais da dinâmica do universo, nesta seção usaremos $8\pi G = c = \kappa = \hbar = 1$. A partir da métrica de RW calculamos as componentes da conexão afim, dadas pela equação (2.12), levando em conta a simetria dos índices inferiores, os termos não nulos da conexão são:

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}, \quad \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2, \quad (3.21)$$

$$\Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \text{sen}^2\theta, \quad (3.22)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1 - kr^2}, \quad (3.23)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r(1 - kr^2), \quad \Gamma_{33}^1 = -r(1 - kr^2)\text{sen}^2\theta \quad (3.24)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \cot\theta, \quad \Gamma_{33}^2 = -\text{sen}\theta\cos\theta, \quad (3.25)$$

onde o ponto significa a derivada com relação ao tempo.

Utilizando-se das conexões afim, determinamos as componentes não nulas do tensor de Ricci, equações (2.13) e (2.14):

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{11} = -\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad (3.26)$$

$$R_{22} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2, \quad R_{33} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \text{sen}^2\theta, \quad (3.27)$$

e por fim, de (2.15), o escalar de curvatura:

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]. \quad (3.28)$$

Utilizando agora a forma do tensor de energia-momento dada por (2.20) e utilizando o fato de que, em coordenadas comóveis temos a quadrivelocidade sendo $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$, pois $U^i = dx^i/d\tau = 0$ e $U^0 = dx^0/d\tau = 1$, neste sistema, e a normalização $U^\mu U_\mu = 1$, a expressão (2.20) torna-se :

$$T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

assim obtemos as equações de Einstein (2.34) para o modelo :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.30)$$

Esta equação conhecida como equação de Friedmann, é oriunda da componente temporal da equação (2.34), e temos das outras três componentes espaciais da mesma equação, apenas uma linearmente independente,

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -p. \quad (3.31)$$

Utilizando-se (3.30) e (3.31) obtemos a equação da aceleração,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p - 2\Lambda). \quad (3.32)$$

Agora utilizando a equação de balanço do tensor de energia-momento (2.21) temos:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (3.33)$$

Cabe notar que esta equação não é independente, pois ela pode ser obtida derivando a (3.30) com respeito ao tempo e usando em seguida a equação (3.31). Finalmente para determinarmos a evolução temporal do universo, precisamos especificar a equação de estado de seus constituintes. Assume-se usualmente equações barotrópicas de estado, ou seja,

$$p = \omega\rho, \quad (3.34)$$

sendo que a constante ω caracteriza o constituinte. Assim obtemos a solução geral de (3.33), considerando a normalização, $a_0 = 1$, como condição inicial, temos,

$$\rho(t) = \rho_0 a^{-3(\omega+1)}, \quad (3.35)$$

sendo ρ_0 a densidade de energia inicial do constituinte. Citamos alguns casos típicos: para matéria diluída, temos $\omega = 0$, para a radiação $\omega = 1/3$ e para a energia do vácuo $\omega = -1$. Podemos obter a equação de evolução para as densidades de energia e pressão para cada constituinte, substituindo-se a respectiva equação de estado na lei de conservação (3.33), ou simplesmente através da equação (3.35). Para a matéria diluída, ou seja, de pressão nula, e para a radiação obtemos respectivamente:

$$\rho_m \sim a^{-3}, \quad \rho_r \sim a^{-4}, \quad (3.36)$$

e para a energia do vácuo temos a solução $\rho_\Lambda = c$, onde c é uma constante. Podemos identificar a energia do vácuo com a constante cosmológica pois passando a mesma para o lado direito da equação (2.34) temos,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^\Lambda), \quad (3.37)$$

com

$$T_{\mu\nu}^\Lambda = \Lambda g_{\mu\nu}$$

e comparando com o tensor de energia-momento do fluido perfeito, ou seja,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu},$$

temos que

$$\rho_\Lambda = -p_\Lambda = \Lambda.$$

Agora, o próximo passo será determinarmos a evolução temporal de $a(t)$, e para isto substituímos as relações (3.36) na equação de Friedmann (3.30). Supondo inicialmente que a constante cosmológica é nula, pois a priori no modelo padrão não existe razão para supormos a sua existência, e levando-se em conta que no início do universo, quando $a(t)$ é pequeno, temos que

$$\frac{\rho}{3} \gg k/a^2,$$

assim a equação de Friedmann torna-se

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \sim \frac{\rho}{3}. \quad (3.38)$$

Esta equação nos fornece,

$$a(t) \sim t^{2/3}, \quad a(t) \sim t^{1/2} \quad (3.39)$$

para as eras da matéria e radiação respectivamente. Note que para $t \rightarrow 0$ temos que $a(t) \rightarrow 0$ e conseqüentemente temos uma singularidade nas densidades de energia ($\rho \rightarrow \infty$). Esta singularidade inicial é conhecida como Big-Bang e representa o limite da cosmologia clássica (para escalas menores que a escala de Planck ($\sim 10^{-33}cm$) efeitos quânticos se tornam relevantes [26]). De acordo com este modelo o universo evoluiu de um estado de densidades e temperaturas infinitas e resfriou-se à medida que expandiu. O modelo prevê a radiação cósmica de fundo, conforme já discutido, e uma outra previsão importante do modelo é a abundância de elementos leves no universo atual [25].

3.4 Parâmetros utilizados em Cosmologia

3.4.1 Parâmetros de densidade

Definimos a densidade crítica ρ_c como sendo o valor de ρ para tornar a curvatura do universo plana $k = 0$, ou seja, da equação de Friedmann (3.30), temos a seguinte expressão para seu valor atual:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (3.40)$$

onde $H = \frac{\dot{a}}{a}$ é a constante de Hubble. Aqui nós restabelecemos as unidades para estimarmos a densidade crítica, uma vez que conhecemos o valor atual de H . Hoje esta densidade é da ordem de 10^{-26}kgm^{-3} . Definimos agora o parâmetro de densidade Ω de cada constituinte como sendo

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad (3.41)$$

onde o índice i indica os diversos constituintes. A partir da equação de Friedmann e da definição de parâmetro de densidade podemos escrever:

$$\dot{a}^2(\Omega_{tot} - 1) = k, \quad (3.42)$$

com

$$\Omega_{tot} = \frac{\rho_{tot}}{\rho_c}.$$

Esta relação permite-nos concluir que se $k = 0$ implica que, $\rho_{tot} = \rho_c$ e a geometria do universo é plana, se $\rho_{tot} < \rho_c$ então, $\Omega_{tot} < 1$ e conseqüentemente $k < 0$ e assim o universo é fechado, finalmente se $\rho_{tot} > \rho_c$ temos, $\Omega_{tot} > 1$ e assim $k > 0$ e o universo é aberto.

3.4.2 Parâmetro de desaceleração

Define-se como parâmetro de desaceleração q a quantidade dada por,

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \quad (3.43)$$

e utilizada para avaliar a taxa de expansão do universo. A mesma é definida com um sinal negativo, para obtermos uma quantidade q positiva, pois esperava-se que o universo seguiria sua evolução com uma taxa q decrescente, ou seja, o universo deveria estar em um processo de desaceleração em sua expansão.

Utilizando-se a equação de Friedmann e a equação da aceleração, e considerando $k = 0$, reescrevemos o parâmetro de desaceleração para um universo espacialmente plano como:

$$q = \frac{1}{2} + \frac{3p}{2\rho},$$

onde p e ρ representam a pressão total e a densidade de energia total dos constituintes do universo.

3.5 Problemas com o Modelo Padrão e a Solução Inflacionária

Embora o modelo cosmológico padrão tenha méritos inquestionáveis em suas previsões, existem algumas questões, fruto de observações, que não podem ser respondidas ou resolvidas com este, a citar:

1)PROBLEMA DO HORIZONTE: o fato é que a radiação cósmica de fundo, observada de diferentes regiões, é altamente homogênea e isotrópica. Mas o que é paradoxal dentro do contexto do modelo cosmológico padrão é que, no entanto, o horizonte de partícula (distância que a luz percorre desde o início do universo até um tempo t) era muito pequeno no início do universo, e assim, estas regiões que hoje observamos altamente homogêneas, não teriam

condições de terem algum contato causal no passado, antes da época em que a radiação se desacoplou da matéria e deu origem a radiação cósmica de fundo. Portanto não há como explicar como regiões desconectadas causalmente no início do universo, evoluíram de forma a se tornarem hoje, homogêneas e isotrópicas.

2)PROBLEMA DA PLANURA: as estimativas atuais para o parâmetro de densidade é $\Omega_{tot} = 1$, ou seja, a densidade de energia do universo está muito próxima da densidade crítica e a geometria do universo é aproximadamente plana. Mas esta é uma solução muito particular da equação de Friedmann, pois o parâmetro de densidade é uma função do tempo e se o universo iniciou com Ω um pouco maior que a unidade este tende a crescer sempre, tornando o universo aberto. Por outro lado, se o universo iniciou com Ω menor que a unidade, este tende a decrescer mais, dito de outra forma, a solução $\Omega \sim 1$ representa uma condição de equilíbrio instável e para obtê-la necessitamos de um ajuste com precisão da ordem de 10^{55} no parâmetro de Hubble.

Existem outros problemas do modelo padrão, como dos monopólos magnéticos, da coincidência das condições iniciais, entre outros que são discutidos intensamente na literatura, então, para uma discussão mais detalhada ver [26].

3.5.1 A solução inflacionária

O chamado modelo do universo inflacionário, foi proposto por Alan Guth em 1981 como uma possível solução para os problemas apresentados pelo modelo padrão. O regime inflacionário, que é caracterizado por um período de curta duração no qual o universo sofre uma violenta expansão acelerada, inicia-se após a era de Planck ($t \sim \hbar/mc^2$), onde assumimos que as equações da relatividade geral são válidas. Devemos explicar como o universo pôde sofrer um regime de aceleração. Uma primeira alternativa seria atribuir este papel à constante cosmológica, assim ela seria o constituinte responsável pelo mecanismo da inflação. De

acordo com a equação (3.32) se $2\Lambda > \rho + 3p$, o universo expande-se em um regime acelerado. Desta forma podemos encontrar a solução da equação de Friedmann, assumindo que no início a densidade de energia da matéria é desprezível (universo dominado pela energia do vácuo) e o fator de escala cresce rapidamente de forma a desprezarmos o termo k/a^2 em (3.30), então temos:

$$a(t) \sim e^{(\Lambda/3)^{1/2}t}. \quad (3.44)$$

Esta é conhecida como solução de DeSitter e descreve um universo que expande-se de forma acelerada para sempre. Obviamente, essa é uma característica indesejável para um modelo cosmológico realista, então procura-se algum mecanismo para encerrar a era inflacionária em algum momento. Para este objetivo, é utilizado em modelos inflacionários vigentes as propriedades e características dos campos escalares, com um potencial conveniente que garanta a duração correta da era inflacionária. Um campo escalar não massivo ϕ em um espaço-tempo curvo possui a seguinte ação:

$$S = \int \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.45)$$

O potencial típico $V(\phi)$ é do tipo exponencial ou $V(\phi) \sim \phi^4$, não podendo portanto, ser identificado como um termo de massa. Para uma discussão completa ver por exemplo [1]. Variando-se a ação em relação a ϕ , obtemos a equação de movimento para o campo escalar:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (3.46)$$

onde levamos em conta a métrica de RW, que pelo fato de descrever um universo homogêneo e isotrópico, implica que o campo é uma função unicamente do tempo. Agora variando-se a ação em relação a $g_{\mu\nu}$ obtemos o tensor de energia-momento para o campo,

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\theta \phi \partial^\theta \phi - V(\phi) \right). \quad (3.47)$$

Calculamos agora, a partir de (3.47), as componentes diagonais do tensor de energia-momento, e as identificamos com os termos de pressão e densidade de energia de um fluido perfeito em

um referencial comóvel, assim temos:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.48)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.49)$$

Utilizando-se a conservação do tensor de energia-momento (2.21), temos a equação de balanço para a densidade de energia do campo:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.50)$$

Note que podemos obter a equação de movimento do campo escalar (3.46), substituindo-se (3.48) e (3.49) na equação de balanço (3.50).

Em cosmologia o campo escalar assume o papel do campo responsável por gerar o regime inflacionário e passa a ser conhecido como inflaton. Vemos pela equação (3.32) que desprezando-se a constante cosmológica, podemos obter um regime com aceleração positiva se $p = -\rho$, e percebemos a partir de (3.48) e (3.49) que esta condição é alcançada desde que o termo cinético possa ser desprezado em relação ao termo potencial. Esta condição, em que a variação temporal do campo escalar é lenta, é conhecida como aproximação “slow-roll”. Esta condição é satisfeita se o potencial verificar a seguinte propriedade,

$$\epsilon = \frac{dV/d\phi}{V} \ll 1. \quad (3.51)$$

Para verificarmos esta relação basta derivar H e obter

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2.$$

Assim para um regime acelerado, impomos,

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} \gg 0,$$

agora dividindo por H^2 e rearranjando os termos temos,

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1. \quad (3.52)$$

Como $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$, pois o termo cinético é desprezado, então $dV/d\phi \gg \ddot{\phi}$ assim a equação de Friedmann (3.30) e a equação para o inflaton (3.46) tornam-se respectivamente,

$$H^2 = \frac{1}{3}V(\phi) \quad e \quad 3H\dot{\phi} = -dV/d\phi. \quad (3.53)$$

Derivando a primeira equação (3.53), em relação ao tempo, obtemos

$$\dot{H} = \frac{(dV/d\phi)\dot{\phi}}{6H}, \quad (3.54)$$

então substituindo-se (3.53) e (3.54) em (3.52) obtemos a condição (3.51).

Quando a condição (3.51) é satisfeita, o potencial varia lentamente [25], mantendo, desta forma, o termo cinético desprezível enquanto o inflaton evolui temporalmente a partir de um estado de falso vácuo, onde o seu valor esperado é nulo, para um estado mínimo de potencial. Então, inicialmente o universo é dominado pelo inflaton, que inicialmente se encontra no estado de falso vácuo, onde $p = -\rho = -V_0$, quando então ocorre uma transição de fase e o inflaton assim atinge o estado de vácuo verdadeiro, encerrando a fase inflacionária quando $\epsilon \sim 1$. A expansão acelerada resfria o universo, mas ao atingir o mínimo potencial a energia cinética não é mais desprezível, e o termo de amortecimento na equação (3.46) faz com que o inflaton sofra oscilações amortecidas, perdendo energia, reaquecendo o universo. A partir de então o modelo padrão volta a ser a descrição correta do universo.

O cenário do universo inflacionário resolve os principais problemas do modelo padrão, vejamos como:

→ PROBLEMA DA PLANURA: reescrevendo a equação (3.42) como,

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2}, \quad (3.55)$$

notamos que devida a inflação, o fator de escala expande-se a uma taxa muito grande, sendo assim o lado direito de (3.55) tende rapidamente a zero e com isso $\Omega \rightarrow 1$.

→PROBLEMA DO HORIZONTE: em um espaço-tempo definido pela métrica de RW com $k = 0$, a distância percorrida pela luz do início do universo até um tempo t é:

$$d = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}, \quad (3.56)$$

esta equação define as regiões que podem estar em contato causal. Para a luz temos que $ds = 0$, com isso, a métrica de RW, torna-se, $0 = dt^2 - a^2(t)dr^2$, vemos então que a equação (3.56) pode ser reescrita como

$$d = a(t) \int_0^r dr.$$

Então regiões observadas hoje, que aparentemente não estavam em contato causal, na verdade estavam causalmente conectadas, mas devido a rápida expansão acelerada do universo, estas ultrapassaram seu horizonte, pois $a(t)$ cresce de forma exponencial, estas regiões foram esticadas com a expansão acelerada, para além de seus horizontes.

Na literatura, discute-se outros problemas resolvidos pelo modelo inflacionário, como o problema dos monopólos magnéticos entre outros. Para uma maior discussão ver [26].

3.5.2 A presente aceleração do universo e a energia escura

Dentro do contexto do modelo cosmológico padrão, acreditava-se que o atual estágio do universo seria dominado por matéria diluída, com $p = 0$. Embora hoje sabemos da existência de um tipo de matéria não interagente com a radiação, conhecida como matéria escura, e sendo que mais de um quarto da constituição do universo atual é dominado por esta componente, introduzi-la no modelo padrão não representa grandes dificuldades. Evidências da existência da matéria escura são sugeridas, por exemplo, nas formas das curvas de rotação das galáxias e na não homogeneidade da radiação cósmica de fundo. A maior parte da matéria escura está na forma de matéria não bariônica de natureza ainda desconhecida. Mas em termos da dinâmica do universo, o fato é que mesmo de natureza desconhecida,

a matéria escura pode ser equacionada como um fluido perfeito de pressão nula, e assim o modelo padrão não exigiria grandes alterações.

Este cenário teve de ser modificado, quando observações recentes das supernovas Tipo-Ia (SNIa), somadas a outras observações como a medida da anisotropia da radiação cósmica de fundo, indicaram que o universo atual encontra-se em um regime de expansão acelerada. Estudos das supernovas indicam que a velocidade de recessão destes objetos distantes são menores do que a velocidade que deveriam ter utilizando-se a lei de Hubble. De fato, se o universo desacelera-se em sua expansão, e a lei de Hubble admite uma expansão constante, é esperado que a taxa de expansão de objetos distantes sejam maiores que a prevista pela lei de Hubble. Mas como verifica-se justamente o oposto, isto sugere que no passado (estas supernovas estão muito distantes, o que significa que estamos observando eventos que ocorreram em um passado remoto) o universo estava se expandindo mais lentamente e portanto o universo, hoje, deve estar acelerando. Para uma discussão mais detalhada dos resultados das supernovas ver [2].

Considerando a equação (3.32) sem constante cosmológica, notamos que esta aceleração deve ser provocada por um constituinte com pressão negativa, que satisfaça a condição, $p < -\frac{1}{3}\rho$. O constituinte com essa propriedade é conhecido na literatura como energia escura, assim chamado pois este não interage diretamente com a matéria, apenas com o campo gravitacional e com ele mesmo. Medidas das flutuações de temperatura presentes na radiação cósmica de fundo [27], indicam que o parâmetro de densidade total do universo é $\Omega_{tot} \sim 1$, e a contribuição da matéria bariônica, radiação e matéria escura, não passam de 0,28 do total, ou seja, $\Omega_{mat} + \Omega_{rad} + \Omega_{dm} \sim 0,28$, indicando que $\Omega_{ener.escura} \sim 0,72$. Além do mais, estes estudos indicam que o universo passou de um regime desacelerado para o atual regime acelerado quando $z \sim 0,46$ e o parâmetro de desaceleração hoje do universo é $q < -0,4$ [28]. Assim hoje a energia escura é o constituinte dominante no universo. A natureza da energia escura ainda é desconhecida, embora muitas possibilidades são exploradas na literatura,

como a cosmologia de branas [29], os táquions da teoria de cordas, equações de estados exóticas como o gás de Chaplygin, entre outras. Os modelos mais explorados atualmente são sem dúvida os que empregam a dinâmica dos campos escalares com potenciais adequados, idéia emprestada de modelos inflacionários, são algumas vezes denominados de quintessência, fazendo-se alusão ao quinto elemento da filosofia vigente na Grécia antiga. Vejamos agora de forma muito breve os principais modelos para a energia escura encontrados na literatura, principalmente aqueles que invocam o conceito de campo escalar.

3.5.3 A constante cosmológica

Um possível candidato natural a descrever a energia escura é a constante cosmológica, pois conforme visto na equação (3.32), uma constante cosmológica com valor positivo pode levar o universo a acelerar, desde que,

$$2\Lambda > \rho + 3p,$$

para termos $\ddot{a} > 0$. O modelo cosmológico que faz uso das propriedades da constante cosmológica é chamado de modelo Λ CDM.

A dificuldade está em uma interpretação coerente para a constante cosmológica. Uma possibilidade bastante explorada na literatura é interpretar a constante cosmológica como uma quantidade associada à densidade de energia do vácuo, assim neste contexto o universo estaria preenchido com a energia de vácuo dos diversos campos. O problema é que neste caso, a energia de vácuo calculada a partir da física de partículas difere muito do valor observacional de Λ , levando assim a um conflito com a física de partículas. Mesmo com dificuldades em buscar um sentido físico para a constante cosmológica, este modelo oferece um ótimo ajuste com os dados obtidos das supernovas SNIa. No capítulo 5, voltaremos a este ponto.

3.5.4 A quintessência

Alguns problemas foram encontrados em admitir-se que a densidade de energia escura permaneceu constante ao longo da evolução do universo. Estes problemas estão relacionados ao ajuste fino necessário nas condições iniciais do universo, para compatibilizar o modelo com a constante cosmológica aos dados observacionais. Com o objetivo de resolver este problema, apela-se à dinâmica dos campos escalares para simular os efeitos da energia escura, idéia emprestada da cosmologia inflacionária. Assim a quintessência é um campo escalar, usualmente acoplado minimamente ao campo gravitacional, e variável no tempo. Sua densidade de lagrangiana é dada por uma equação análoga à obtida de (3.45), ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - V(\Phi),$$

onde Φ é o campo escalar relacionado com a energia escura e $V(\Phi)$ é o potencial de interação deste campo. Temos, de forma análoga ao visto anteriormente, as densidades de energia e pressão para este campo, respectivamente,

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + V(\Phi), \quad p = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 - V(\Phi).$$

Destas equações escrevemos,

$$w = \frac{\rho}{p} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 - V(\Phi)}{\frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + V(\Phi)}. \quad (3.57)$$

Note que temos agora uma equação barotrópica de estado não necessariamente constante, com índice barotrópico podendo variar entre,

$$-1 < w < 1,$$

conforme (3.57). Note que podemos escrever (3.32), utilizando a equação barotrópica de estado, como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6} \rho (1 + 3w), \quad (3.58)$$

assim para termos um regime de aceleração positiva, devemos ter,

$$w < -\frac{1}{3}.$$

Vemos pela equação de movimento para um campo escalar, dada pela equação (3.46), que a dinâmica do campo depende da forma do potencial, e este é escolhido de tal forma que o campo evolua para o mínimo do potencial, de forma muito lenta, ou seja $\dot{\Phi} \sim 0$, e deste modo, w tende lentamente a -1 , e quando isto ocorre, temos o comportamento do campo similar à constante cosmológica.

3.5.5 A K-Essência e o campo fantasma (*Phantom Dark Energy*)

O modelo Λ CDM dá origem ao chamado *problema da coincidência*, ou seja, sabemos que a transição da era desacelerada dominada pela matéria, para a atual era acelerada dominada pela energia escura, ocorreu recentemente dentro da escala cósmica, $z \sim 0,45$. Nos primórdios do universo a densidade de energia escura era desprezível em comparação com a matéria, e agora a situação inverteu-se. Verifica-se que os valores de Ω_{mat} e Ω_{Λ} , são muito próximos em comparação às escalas usuais de energia presentes no nosso universo. Estes valores que estão próximos hoje ($z \sim 0$), exigem um ajuste muito fino nos valores iniciais das densidades de energia da constante cosmológica e da matéria, para tal transição ocorrer em $z \sim 0,45$.

Neste contexto os modelos de *K-Essência* surgem como uma alternativa para a resolução do problema da coincidência. De fato, pode-se mostrar que a *K-Essência* atua como um atrator dinâmico, no sentido de que quaisquer conjuntos de condições iniciais levam-nos aos mesmos valores atuais para as densidades. Temos assim uma alternativa para a solução do problema da coincidência [30].

A *K-Essência* é um campo escalar ϕ , cuja dinâmica é obtida de lagrangianas da forma [30],

$$\mathcal{L} = V(\phi)F\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right).$$

De tal densidade de lagrangiana, podemos calcular a densidade de energia e pressão para a *K-Essência*, através do tensor de energia momento, e mostrar que o índice barotrópico é dado por

$$w = \frac{F}{2XF_X - F},$$

onde

$$F_X = \frac{dF}{dX}, \quad X = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi.$$

Assim a razão entre a pressão e a densidade de energia depende do potencial $V(\phi)$ e da forma da função $F(X)$. [30]

Existem indícios observacionais que sugerem que o índice barotrópico w para a energia escura pode estar a um valor abaixo de -1 [6, 31]. Campos que descrevem a energia escura com essa característica são chamados de campos fantasmas. Assim podemos pensá-lo como um caso particular de quintessência onde $w < -1$. Um fato indesejável é que uma equação de estado com índice barotrópico constante e menor que -1 leva-nos, de acordo com a equação (3.35), a uma densidade de energia crescente com a expansão do universo. Podemos utilizar novamente um campo escalar para modelar o campo fantasma, utilizando uma densidade de lagrangiana da forma,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi).$$

Esta densidade leva-nos a um índice barotrópico da forma,

$$w = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)},$$

onde observamos que para o caso em que $V(\phi) > \frac{\dot{\phi}^2}{2}$, temos o índice w menor que -1 .

CAPÍTULO 4

Modelos com campos fermiônicos

4.1 Introdução

A procura por constituintes que possam ser responsáveis pelos períodos de aceleração do universo é um tópico fundamental em cosmologia. Como já mencionamos, muitos candidatos têm sido testados para tentar descrever o período inflacionário e o atual estágio de aceleração de nosso universo. Uma possibilidade é considerar campos fermiônicos como fontes gravitacionais em um universo em expansão. Estes campos têm sido investigados com o intuito de promover regimes de anisotropia para isotropia, soluções livres de singularidades e cenários de cosmologias cíclicas.

Em nosso trabalho, utilizamos a dinâmica dos férmions para estabelecermos um modelo cosmológico que descreva as propriedades observadas do universo ao que se refere aos períodos acelerados, (inflação e era da energia escura), e suas transições. Com este propósito, temos que introduzir a dinâmica de campos fermiônicos dentro da gravitação, assim, a conexão entre

a relatividade geral e a equação de Dirac é realizada através do formalismo das tetradas. A interação entre os constituintes será realizada via a presença de um termo de pressão dinâmica no tensor de energia-momento. Também consideramos um potencial de auto-interação para o campo fermiônico e assim verificamos que a fonte fermiônica pode ser responsável pelos diferentes regimes de aceleração apresentados em nosso universo. Num universo jovem, o férmion produz uma rápida expansão que dura até que a densidade de energia da matéria ultrapasse a do férmion. Desta forma, o férmion atua como o inflaton, em seguida o período de aceleração termina e uma fase desacelerada dominada pela matéria surge. Depois novamente, o campo fermiônico volta a predominar e temos então uma nova fase acelerada, e neste caso o férmion faz o papel da energia escura, sem a necessidade da constante cosmológica ou campo escalar.

Neste e nos capítulos seguintes, consideramos um campo fermiônico clássico. Devemos entender por um campo fermiônico clássico um conjunto de quatro números complexos dependentes do tempo e que se transformam de acordo com a representação espinorial do grupo de Lorentz. Em teorias quânticas de campos, os espinores formam um conjunto de quatro operadores que anti-comutam, para satisfazer o princípio de exclusão de Pauli. No contexto semi-clássico, o campo fermiônico está associado ao valor esperado destes operadores em um estado apropriado, com isto, são tidos como números complexos e não variáveis Grassmannianas, para maiores detalhes ver[8][9][10].

4.2 Equações de Dirac no espaço-tempo curvo

As teorias de campos são fundamentadas nos princípios da relatividade especial e da mecânica quântica. Sendo assim os campos se transformam de um sistema de referência inercial para

outro sistema inercial de acordo com as seguintes representações do grupo de Lorentz:

$$\phi'(x') = \phi(x), \quad (4.1)$$

$$A'^{\mu}(x') = \Lambda_{\gamma}^{\mu} A^{\gamma}(x), \quad (4.2)$$

$$T'^{\mu\gamma}(x') = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\gamma} T^{\alpha\beta}(x), \quad (4.3)$$

onde Λ_{γ}^{μ} são as matrizes de Lorentz, que conectam diferentes eventos observados a partir de referenciais inerciais distintos.

A equação (4.1) é a lei de transformação de um campo escalar $\phi(x)$, a equação (4.2) representa a lei de transformação de um campo vetorial e, finalmente, a equação (4.3) mostramos como as componentes de um campo tensorial $T^{\mu\gamma}$ se transformam. Estes campos podem ser estudados no contexto de um espaço-tempo curvo, ou seja, podemos estudá-los na presença de um campo gravitacional, para isto basta usarmos o princípio da covariância Geral, PCG, para implementarmos o PE no sistema físico, assim usamos as seguintes prescrições:

a) Substituímos o tensor métrico de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ pelo tensor métrico geral $g_{\mu\nu}$ ou seja, $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$,

b) O grupo de Lorentz (GL) passa a ser substituído pelo grupo TGC, ou seja, $\Lambda_{\alpha}^{\mu} \rightarrow \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}}$, onde ξ^{α} representa as coordenadas do referencial inercial local e x^{λ} as coordenadas do sistema não inercial.

c) Substituímos as derivadas ordinárias por derivadas covariantes. O GL, além das representações citadas, admite a chamada representação espinorial [19], um espinor $\psi(x)$ se transforma de acordo com a lei:

$$\psi' \rightarrow \exp\left[\frac{1}{2}\lambda_{ab}\sigma^{ab}\right]\psi, \quad (4.4)$$

onde λ_{ab} são os parâmetros da transformação de Lorentz (velocidades) e σ^{ab} são os geradores

da representação espinorial do GL, definidos como,

$$\frac{\sigma^{ab}}{2} = \frac{i}{4}[\gamma^a, \gamma^b]. \quad (4.5)$$

Os colchetes significam o comutador entre as grandezas e γ^a são matrizes 4x4 que satisfazem a chamada álgebra de Clifford, ou seja,

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} \equiv \gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab}. \quad (4.6)$$

Na representação de Pauli-Dirac estas matrizes possuem a seguinte forma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

e finalmente,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

com $\gamma^5 = -i\sqrt{-\eta}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, onde η é o determinante da matriz de Minkowski η_{ab} .

A equação de movimento do espinor $\psi(x)$, é a equação de Dirac, e a mesma pode ser derivada, dentro do contexto da RE, através das propriedades de transformação dos espinores sob o grupo de Lorentz [19]. Não podemos aplicar diretamente o PCG para obtermos a equação de Dirac no espaço-tempo curvo, pois o grupo TGC não admite a representação espinorial, ou seja, um espinor transforma-se como um escalar por TGC.

Em vista deste problema, utiliza-se o formalismo das tetradas para estudar férmions em um espaço-tempo curvo. A idéia é que de acordo com o PE, podemos associar a cada ponto do espaço-tempo um conjunto de coordenadas ξ^a localmente inercial e com isto teremos neste ponto o tensor métrico como sendo igual a η_{ab} . Estes referenciais inerciais conectam-se com $g_{\mu\nu}$ através das relações;

$$g_{\mu\gamma} = e_{\mu}^a e_{\gamma}^b \eta_{ab}, \quad (4.10)$$

onde

$$e_{\mu}^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^{\mu}}, \quad a = 0, 1, 2, 3 \quad (4.11)$$

é chamada de tetrada ou “vierbein”. Aqui estamos utilizando índices em latim para designar componentes no referencial local e em grego para o referencial não inercial. Sob TGC, uma tetrada se transforma como um vetor covariante,

$$e_{\mu}^a(x) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} e_{\nu}^a. \quad (4.12)$$

Sob uma transformação de Lorentz,

$$e_{\mu}^a = \Lambda_b^a e_{\mu}^b, \quad (4.13)$$

como um vetor contravariante. Contraindo-se um quadri-vetor A_{μ} com a tetrada,

$$A_a = e_a^{\mu} A_{\mu}, \quad (4.14)$$

obtemos uma grandeza que se transforma como uma coleção de 4 escalares sob TGC, e como um quadri-vetor sob transformações de Lorentz. Deste modo, podemos transformar tensores gerais em tensores locais de Lorentz com a ajuda das tetradas, transferindo assim a dependência do espaço-tempo para as tetradas.

A equação de Dirac pode ser englobada no contexto de um espaço-tempo curvo, ou seja, podemos analisar a dinâmica de espinores na presença de um campo gravitacional utilizando as tetradas como graus de liberdade gravitacionais. Assim escrevemos os espinores

no referencial inercial local, e via tetradas estudamos seu comportamento na presença do campo gravitacional [11, 20].

Partindo da lagrangiana de Dirac no espaço-tempo de Minkowski;

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \gamma^a \partial_a \psi - (\partial_a \bar{\psi}) \gamma^a \psi \} - m \bar{\psi} \psi - V. \quad (4.15)$$

Conforme comentamos na introdução, os espinores são tratados como campos clássicos que comutam [8]. Na lagrangiana, m é a massa do férmion, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ denota o espinor adjunto, e o termo V descreve a densidade do potencial de auto-interação do campo fermiônico que é uma função exclusiva de ψ e $\bar{\psi}$. Impondo a invariância pela transformação de Lorentz local, ou seja:

$$\psi' \rightarrow \exp\left[\frac{1}{2} \lambda_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}(x)\right] \psi, \quad (4.16)$$

onde agora os geradores dependem da posição espaço-temporal, com

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\Gamma^\mu, \Gamma^\nu], \quad (4.17)$$

onde Γ^μ e são as novas matrizes de Dirac definidas como:

$$\Gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a, \quad (4.18)$$

que generalizam a álgebra de Clifford,

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2g_{\mu\nu}. \quad (4.19)$$

A imposição da invariância da lagrangiana nos leva a definir novas derivadas, ou seja, derivadas covariantes, como usualmente ocorre em teorias de gauge [19]. Dito de outra forma, podemos escrever, nestas condições, um espinor na presença de um espaço tempo-curvo usando um princípio de gauge. Para preservar a invariância por transformações locais, substituímos as derivadas ordinárias da teoria de campos correspondente, pelas respectivas derivadas covariantes, e assim ganhamos nesta imposição de invariância um campo de gauge

acoplado[19]. Assim, um espinor tem suas derivadas ordinárias substituídas pelas seguintes derivadas covariantes,

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &= \partial_\mu \psi - \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \psi \\ D_\mu \bar{\psi} &= \partial_\mu \bar{\psi} + \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \bar{\psi} \bar{\sigma}_{ab}. \end{aligned}$$

ω_μ^{ab} são as conexões dos referenciais locais, e podem ser obtidas a partir do conhecido *postulado das tetradas*[16], ou seja,

$$\mathcal{D}_\nu e^{a\mu} = \partial_\nu e^{a\mu} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu e^{a\rho} + \omega_\nu^{ab} e_b^\mu = 0.$$

Desta equação obtemos,

$$\omega_\mu^{ab} = g^{\rho\nu} e_\rho^a \nabla_\mu e_\nu^b.$$

Levando estas expressões nas definições de derivada covariante, obtemos após algumas manipulações as seguintes equações,

$$\partial_\mu \psi \rightarrow D_\mu \psi = \partial_\mu - \Omega_\mu \psi, \quad (4.20)$$

$$\partial_\mu \bar{\psi} \rightarrow D_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + \bar{\psi} \Omega_\mu, \quad (4.21)$$

onde Ω_μ é a conexão de spin definida como [7, 20]:

$$\Omega_\mu = -\frac{1}{4} g_{\sigma\nu} \{ \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - e_b^\nu (\partial_\mu e_\lambda^b) \} \Gamma^\sigma \Gamma^\lambda. \quad (4.22)$$

Assim, a generalização covariante da lagrangiana de Dirac torna-se:

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi \} - m \bar{\psi} \psi - V. \quad (4.23)$$

Agora podemos escrever a ação de Dirac no espaço-tempo curvo com o objetivo de obter a equação de movimento e o tensor de energia-momento. A ação torna-se:

$$S = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_D d^4x, \quad (4.24)$$

e variando a ação com respeito a $\bar{\psi}$ e ψ , obtemos respectivamente,

$$i \Gamma^\mu D_\mu \psi - m \psi - \frac{dV}{d\bar{\psi}} = 0, \quad (4.25)$$

$$iD_\mu \bar{\psi} \Gamma^\mu + m\bar{\psi} + \frac{dV}{d\psi} = 0. \quad (4.26)$$

As equações (4.25) e (4.26) representam a equação de Dirac e a sua equação adjunta, acopladas ao campo gravitacional. Agora variando a equação (4.24) em relação ao campo de tetradas, obtemos

$$T_{\mu\nu} = -e_{a\mu} e_\nu^a \mathcal{L}_D + e_{a\nu} \frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \gamma^a D_\mu \psi - D_\mu \bar{\psi} \gamma^a \psi \}.$$

Para a dedução da equação acima usamos a definição do tensor de energia-momento

$$T_{\mu\nu} = \frac{e_{a\mu}}{e} \frac{\partial}{\partial e_\nu^a} (e \mathcal{L}_D),$$

e as seguintes relações

$$\delta e = e e_b^\mu (\delta e_\mu^b), \quad \delta e_\mu^b = -e_\rho^b e_\mu^c (\delta e_c^\rho)$$

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} = e_{\mu b} e_\nu^b,$$

onde e é o determinante do campo de tetradas. Após a simetrização, o tensor de energia-momento para o campo fermiônico se reduz a:

$$T_f^{\mu\nu} = \frac{i}{4} \{ \bar{\psi} \Gamma^\mu D^\nu \psi + \bar{\psi} \Gamma^\nu D^\mu \psi - D^\nu \bar{\psi} \Gamma^\mu \psi - D^\mu \bar{\psi} \Gamma^\nu \psi \} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_D. \quad (4.27)$$

4.3 Equações de campo para o modelo

As equações de campo são obtidas da ação completa do sistema ou seja,

$$S(g, \psi, \bar{\psi}) = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_T d^4x, \quad (4.28)$$

onde \mathcal{L}_T é a densidade de lagrangiana total do sistema dada pela soma,

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_g.$$

Na equação acima \mathcal{L}_D é a lagrangiana de Dirac, \mathcal{L}_m é a lagrangiana do campo de matéria, e $\mathcal{L}_g = R/2$ é a lagrangiana do campo gravitacional. A variação da equação (4.28) em relação aos espinores conforme já vimos, nos leva às equações de Dirac, agora, variando a ação total em relação a $g_{\mu\nu}$, conforme o que discutimos no capítulo dois, temos as equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu},$$

com

$$T^{\mu\nu} = T_m^{\mu\nu} + T_f^{\mu\nu},$$

ou seja, o tensor de energia-momento total é a soma da contribuição da matéria e do férmion.

Vamos utilizar a métrica de RW espacialmente plana para descrever o universo homogêneo e isotrópico, assim:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.29)$$

Neste cenário o tensor de energia-momento total (composto pelo campo fermiônico e de matéria) é:

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(\rho, -p - \varpi, -p - \varpi, -p - \varpi), \quad (4.30)$$

onde a quantidade ϖ é a pressão dinâmica que é relacionada a processos dissipativos durante a evolução do universo e que representa um processo irreversível de transferência de energia entre a matéria e o campo gravitacional [32]. A densidade de energia total e a pressão são a soma correspondente aos termos fermiônico e da matéria, isto é,

$$\rho = \rho_f + \rho_m$$

e

$$p = p_f + p_m.$$

A partir da lei de conservação do tensor de energia-momento

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0,$$

e usando-se (4.30) e (4.29), segue a equação de evolução da densidade total de energia,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p + \varpi) = 0. \quad (4.31)$$

Das equações de campo de Einstein obtemos a equação de Friedmann e da aceleração, assim temos, respectivamente:

$$H^2 = \frac{1}{3}\rho, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p + 3\varpi). \quad (4.32)$$

Para a métrica de RW, calculamos as componentes das tetradas, obtendo-se:

$$e_0^\mu = \delta_0^\mu, \quad e_i^\mu = \frac{1}{a(t)}\delta_i^\mu. \quad (4.33)$$

As matrizes de Dirac tornam-se:

$$\Gamma^0 = \gamma^0, \quad \Gamma^i = \frac{1}{a(t)}\gamma^i, \quad \Gamma^5 = -i\sqrt{-g}\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3 = \gamma^5, \quad (4.34)$$

e as conexões de spin calculadas a partir de (4.22), ficam:

$$\Omega_0 = 0, \quad \Omega_i = \frac{1}{2}\dot{a}(t)\gamma^i\gamma^0. \quad (4.35)$$

Para um universo homogêneo e isotrópico, o campo fermiônico é uma função exclusivamente do tempo, assim a equação de Dirac (4.25) e a sua adjunta (4.26), tornam-se respectivamente:

$$\dot{\psi} + \frac{3}{2}H\psi + im\gamma^0\psi + i\gamma^0\frac{dV}{d\psi} = 0, \quad (4.36)$$

$$\dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2}H\bar{\psi} - im\bar{\psi}\gamma^0 - i\frac{dV}{d\bar{\psi}}\gamma^0 = 0. \quad (4.37)$$

As componentes não nulas do tensor de energia-momento para os férmions, onde utilizamos (4.27), (4.34) (4.36) e (4.37) são, (Ver apêndice A)

$$(T_f)_0^0 = m(\bar{\psi}\psi) + V, \quad (4.38)$$

$$(T_f)_1^1 = (T_f)_2^2 = (T_f)_3^3 = V - \frac{dV}{d\psi} \frac{\psi}{2} - \frac{\bar{\psi}}{2} \frac{dV}{d\bar{\psi}}. \quad (4.39)$$

Podemos identificar as componentes do tensor de energia-momento dos férmions com um fluido perfeito,

$$(T_f)_\nu^\mu = \text{diag}(\rho_f, -p_f, -p_f, -p_f),$$

com isto obtemos, utilizando-se (4.36), (4.37), (4.38) e (4.39), após algumas manipulações a lei de conservação para a densidade de energia do campo fermiônico

$$\dot{\rho}_f + 3H(\rho_f + p_f) = 0. \quad (4.40)$$

Levando-se em conta (4.31) e (4.40), vemos que a equação de evolução do campo fermiônico se desacopla da equação da densidade de energia do campo de matéria,

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = -3H\varpi, \quad (4.41)$$

e o termo $-3H\varpi$ pode ser interpretado como a taxa de produção da densidade de energia do campo de matéria. A pressão dinâmica está associada à viscosidade volumétrica de um fluido, e esta está associada a processos irreversíveis que ocorrem em fluidos em expansão ou contração fora do equilíbrio. A viscosidade é o único processo irreversível possível numa métrica de RW [33], e importante em cosmologia, pois simula a interação entre os constituintes e a produção de partículas, que por sua vez são processos irreversíveis.

De acordo com a teoria termodinâmica de segunda-ordem, a pressão dinâmica $\varpi(t)$ obedece uma equação de evolução [33], escrita como:

$$\tau\dot{\varpi} + \varpi = -3\eta H, \quad (4.42)$$

onde τ é o tempo característico e η é o coeficiente de viscosidade volumétrica, que caracteriza o fluido.

4.4 Soluções cosmológicas

Para obtermos as soluções cosmológicas do modelo, temos que especificar a densidade de potencial (simplesmente potencial) de auto-interação V . De acordo com o teorema de Pauli-Fierz [34], V é uma função exclusiva do invariante escalar $(\bar{\psi}\psi)^2$ e do invariante pseudo-escalar $(i\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2$. Assim analisaremos, o potencial de auto-interação da forma:

$$V = \lambda[\beta_1(\bar{\psi}\psi)^2 + \beta_2(i\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2]^n, \quad (4.43)$$

onde λ é a constante de acoplamento e n é um expoente constante. Nós verificamos três casos, (i) $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 0$, onde V é uma função unicamente do invariante escalar; (ii) $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 1$, onde V é uma função exclusiva do invariante pseudoescalar, e (iii) $\beta_1 = \beta_2 = 1$ na qual V é uma combinação dos invariantes escalar e pseudoescalar. O conhecido potencial de Nambu-Jona-Lasinio [35] é obtido, neste caso, quando $n = 1$.

A densidade de energia e pressão para os férmions em função dos invariantes pode ser obtida a partir das componentes do tensor de energia- momento (4.38) e (4.39), então,

$$\rho_f = m(\bar{\psi}\psi) + \lambda[\beta_1(\bar{\psi}\psi)^2 + \beta_2(i\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2]^n, \quad (4.44)$$

$$p_f = (2n - 1)\lambda[\beta_1(\bar{\psi}\psi)^2 + \beta_2(i\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2]^n. \quad (4.45)$$

De acordo com a equação (4.45) os férmions podem ser classificados em função do expoente n do potencial, assim para ($n \geq 1/2$) os férmions representam um campo de matéria com pressão positiva ($n > 1/2$) um fluido com pressão nula ($n = 1/2$), para o caso em que ($n < 1/2$) a pressão dos férmions é negativa podendo assim representar o inflaton ou a energia escura.

Para férmions não massivos, a pressão é conectada com a densidade de energia através de uma equação barotrópica de estado, ou seja, $p_f = (2n - 1)\rho_f$ e levando este fato na lei de

conservação (4.40), obtemos que $\rho_f \sim 1/a^{6n}$. Esta equação é análoga a que pode ser obtida para o caso bosônico e para o caso de matéria bariônica usual. Ver por exemplo [36]. Assim, o comportamento para férmions não massivos não difere do comportamento de um campo de matéria para ($n > 1/2$), e não difere do caso bosônico para ($n < 1/2$). Para o caso massivo, a equação de estado não se reduz simplesmente a uma equação barotrópica de estado. Este fato pode ser constatado observando-se que a razão entre as equações (4.44) e (4.45) não é uma constante. Nós analisaremos a situação em que o férmion possui uma massa não nula, pois esta é uma situação distinta do caso bosônico, e como estamos interessados em regimes acelerados, vamos verificar o caso em que o férmion se comporta como inflaton ou energia escura, ou seja, $n < 1/2$.

Para o campo de matéria adotamos uma equação barotrópica de estado, $p_m = \omega_m \rho_m$ com índice barotrópico variando entre $0 \leq \omega_m \leq 1$. O coeficiente de viscosidade η e o tempo característico τ são associados a densidade de energia ρ através de $\eta = \alpha \rho$ e $\tau = \eta/\rho$, onde α é uma constante.

Então, o sistema de equações a ser investigado para encontrarmos as soluções cosmológicas é constituído de sete equações diferenciais acopladas, estas são:

(i) a equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho_f + \rho_m + 3p_f + 3p_m + 3\varpi), \quad (4.46)$$

(ii) a equação de evolução para a densidade de energia do campo de matéria

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m + \varpi) = 0, \quad (4.47)$$

(iii) a equação de evolução para a pressão dinâmica

$$\tau \dot{\varpi} + \varpi = -3\eta H, \quad (4.48)$$

(iv) a equação de Dirac (4.36), em termos das componentes do espinor $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$.

Podemos escrever esta equação como,

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_3 \\ \dot{\psi}_4 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}H \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} + im \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -\psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix} - 2i(\psi_1^\dagger\psi_1 + \psi_2^\dagger\psi_2 - \psi_3^\dagger\psi_3 - \psi_4^\dagger\psi_4) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -\psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix} V' - 2i(\psi_3^\dagger\psi_1 + \psi_4^\dagger\psi_2 - \psi_1^\dagger\psi_3 - \psi_2^\dagger\psi_4) \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \\ -\psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix} V^* = 0,$$

onde usamos as seguintes abreviações:

$$V' = \frac{\partial V}{\partial(\bar{\psi}\psi)^2}, \quad V^* = \frac{\partial V}{\partial(\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2}. \quad (4.49)$$

Estas são as equações que devemos resolver, que consistem num sistema de sete equações diferenciais acopladas para os campos, $a(t)$, $\rho_m(t)$, $\varpi(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$ e $\psi_4(t)$. Vamos analisar agora as soluções estabelecendo um conjunto de parâmetros e de condições iniciais.

4.4.1 Regime acelerado-desacelerado-acelerado

Vamos primeiramente analisar o caso que corresponde a um universo jovem, onde o campo fermiônico simula o inflaton e a matéria é criada por processos irreversíveis através da presença da pressão dinâmica. As condições iniciais foram escolhidas para $t = 0$ (por ajuste de relógios) são:

$$a(0) = 1, \quad \rho_m(0) = 0, \quad \varpi(0) = 0, \quad (4.50)$$

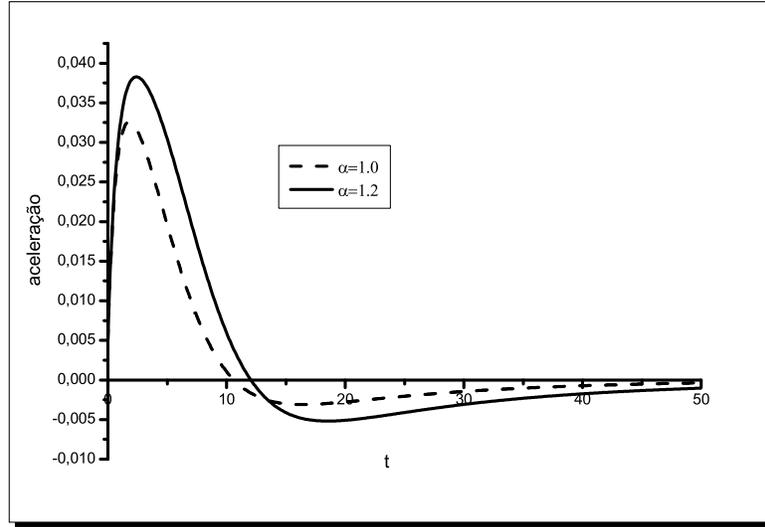


FIG. 4.1: Aceleração \ddot{a} em função do tempo t . Ocorrência de uma transição acelerado-desacelerado.

para o fator de escala, a densidade de energia da matéria e da pressão dinâmica respectivamente. Para as componentes do espinor escolhemos

$$\psi_1(0) = 0.01i, \quad \psi_2(0) = 1, \quad \psi_3(0) = 0.03, \quad \psi_4(0) = i. \quad (4.51)$$

As condições iniciais assim escolhidas caracterizam qualitativamente a proporção inicial entre os constituintes na correspondente era, ou seja, no início da era inflacionária o campo fermiônico predomina sobre o campo de matéria. Como a equação (4.46) é de segunda ordem temos, então, que especificar a condição inicial para $\dot{a}(0)$. Esta condição segue da equação de Friedmann,

$$\dot{a}(0) = a(0) \sqrt{\frac{\rho_f(0) + \rho_m(0)}{3}}, \quad (4.52)$$

com $\rho_f(0)$ dada por (4.44). A fim de obtermos as soluções numéricas do nosso sistema de equações diferenciais, precisamos ainda especificar o conjunto de parâmetros, λ , β_1 , β_2 e n , para definir o potencial de auto-interação e m , ω_m , para especificar a massa do férmion e

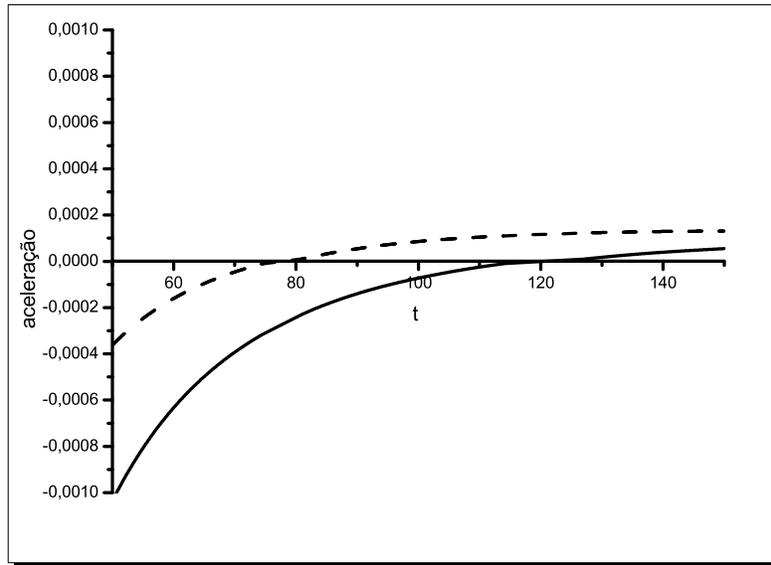


FIG. 4.2: Aceleração \ddot{a} em função do tempo para instantes posteriores a $t \geq 50$.

a equação barotrópica de estado da matéria, $p_m = \omega_m \rho_m$, e ainda α que está conectado ao termo de viscosidade, $\eta = \alpha \rho$. Estes parâmetros foram escolhidos como,

$$\lambda = 0.1, \quad \beta_1 = \beta_2 = 1, \quad \omega_m = 1/3, \quad m = 0.001, \quad \alpha = 1.0 \quad \alpha = 1.2 \quad e \quad n = 0.3.$$

Estes parâmetros caracterizam um campo fermiônico com pressão negativa, descrito por um potencial de auto-interação que depende dos invariantes escalar e pseudoescalar, e um campo de matéria correspondente a radiação caracterizado pela escolha de $\omega_m = 1/3$.

Na figura 4.1 a aceleração \ddot{a} é mostrada em função do tempo, para tempos iniciais, onde consideramos dois diferentes valores de $\alpha = 1,0$ e $\alpha = 1,2$ e, na figura 4.2, representamos o mesmo gráfico para instantes posteriores a $t \geq 50$. Nas figuras 4.3 e 4.4 temos o comportamento para as densidades de energia do campo fermiônico ρ_f e para a matéria ρ_m em função do tempo.

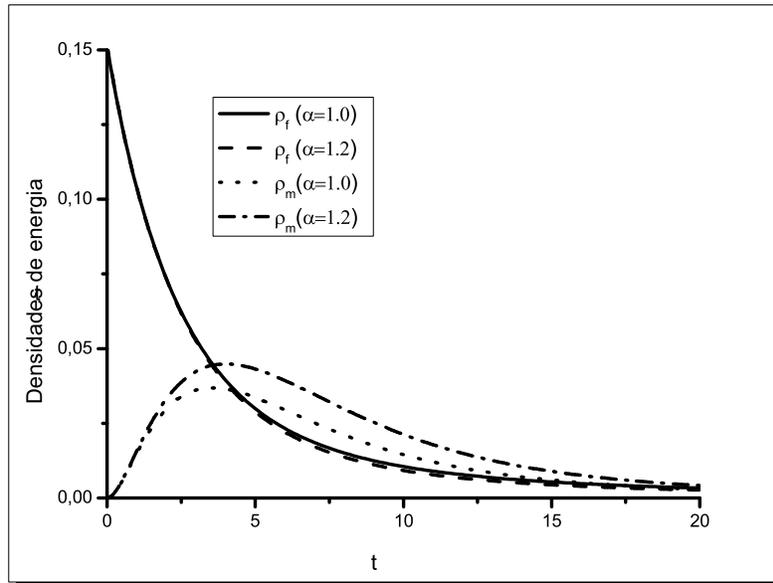


FIG. 4.3: Densidades de energia do férmion ρ_f e matéria ρ_m em termos do tempo t .

Podemos concluir destas figuras que existe um período onde o campo fermiônico é dominante e a matéria é criada à custa de um processo irreversível de transferência de energia entre o campo gravitacional e a matéria. Também notamos que o período com aceleração é seguido por uma era de desaceleração dominada pelo campo de matéria. Devido ao fato do potencial de auto-interação tender para uma constante para grandes valores de t , a energia do campo fermiônico volta a superar a da matéria, e o universo retorna a uma era de regime acelerado. Em contraste, em alguns modelos com campos bosônicos, temos potenciais que têm a forma exponencial ou decaem com uma lei do inverso de potência, nestes casos adiciona-se ao potencial um termo constante para o modelo retomar o regime acelerado [37]. Aqui, o mesmo potencial de auto-interação simula inicialmente o inflaton e para grandes valores de t , o mesmo comporta-se como constante cosmológica e pode ser identificado como energia escura.

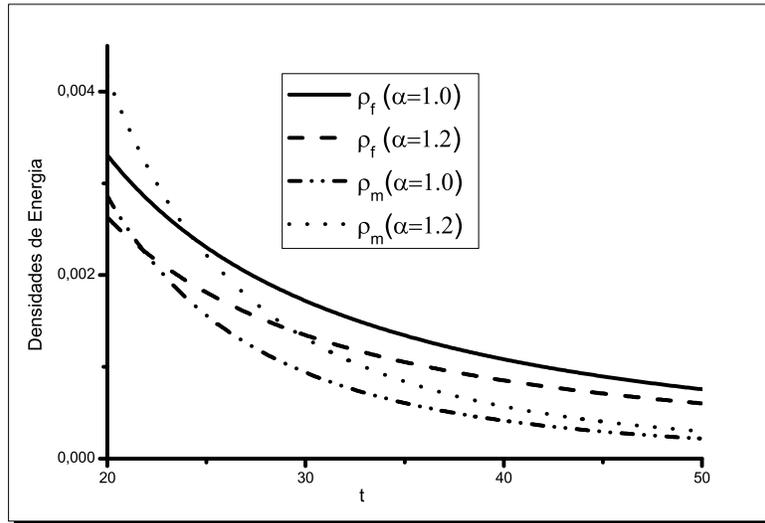


FIG. 4.4: Densidades de energia do férmion ρ_f e matéria ρ_m , para instantes posteriores $t \geq 20$.

Nós podemos notar a partir dos gráficos que (i) para grandes valores do coeficiente α a densidade de energia do campo fermiônico decai mais rapidamente causando um longo período acelerado e (ii) a densidade de energia do campo de matéria tem um crescimento mais significativo, e isto conduz a um longo período de desaceleração.

As mesmas conclusões são obtidas para um potencial que dependa unicamente do invariante escalar ($\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$), ou do invariante pseudoescalar ($\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$). Em todos os casos, existe uma forte dependência com o expoente n do potencial de auto-interação, assim, diferentes comportamentos podem ser obtidos como, universos com somente um período de aceleração ou universos iniciando-se com período desacelerado. Alguns destes casos são analisados na próxima subseção.

É importante mencionar que o comportamento destes campos não se restringe às condições iniciais utilizadas ou no conjunto de parâmetros escolhidos, sendo que estes representam va-

lores típicos que descrevem qualitativamente os regimes investigados em cada caso, com soluções cosmológicas com clara interpretação.

4.4.2 Regime desacelerado-acelerado

Vamos agora investigar um universo velho, dominado por matéria não relativística ou pó ($\omega_m = 0$), onde o campo fermiônico está presente, mas com uma densidade de energia menor em comparação com a densidade de energia da matéria.

Nós consideramos as mesmas condições iniciais para $a(0)$ e $\psi_1(0)$ até $\psi_4(0)$ (por ajustes de relógios) da subseção anterior, mas para a densidade de energia da matéria consideramos $\rho_m(0) = 2\rho_f(0)$, assim o universo é dominado inicialmente pela matéria. Escolhemos os mesmos valores para λ , β_1 , β_2 , e n , mas modificamos os valores de α , usamos $\alpha = 0, 1$ e $0,05$. Também consideramos o caso onde os processos irreversíveis estão ausentes durante a evolução do universo, para este caso a equação para a pressão dinâmica (4.48), é descartada do sistema de equações. A aceleração e densidade de energia em função do tempo estão representadas nas figuras 4.5, 4.6 e 4.7. Nós podemos observar a partir destas figuras que existe uma transição de um regime desacelerado, onde o universo é dominado pela matéria, para um regime de pequena aceleração onde o universo é dominado pelo campo fermiônico que faz o papel de energia escura.

Quanto à importância do papel dos processos irreversíveis neste regime, concluímos que o campo fermiônico não é sensível a variação da constante α , mas o campo de matéria, ao contrário, decai de forma mais lenta retardando assim o regime acelerado do universo. Conclusões análogas são obtidas com alteração do potencial de auto-interação, conforme discutimos na subseção anterior.

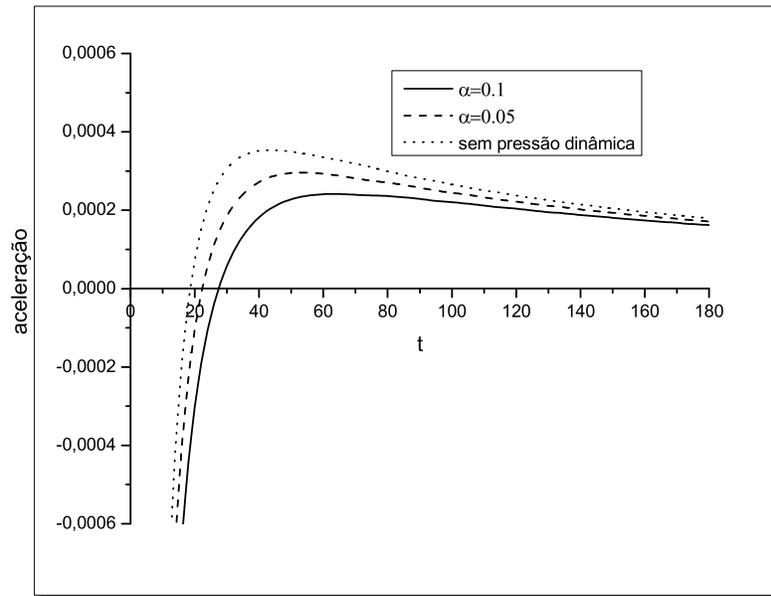


FIG. 4.5: Aceleração \ddot{a} vs tempo t . Transição desacelerado-acelerado, férmion como energia escura.

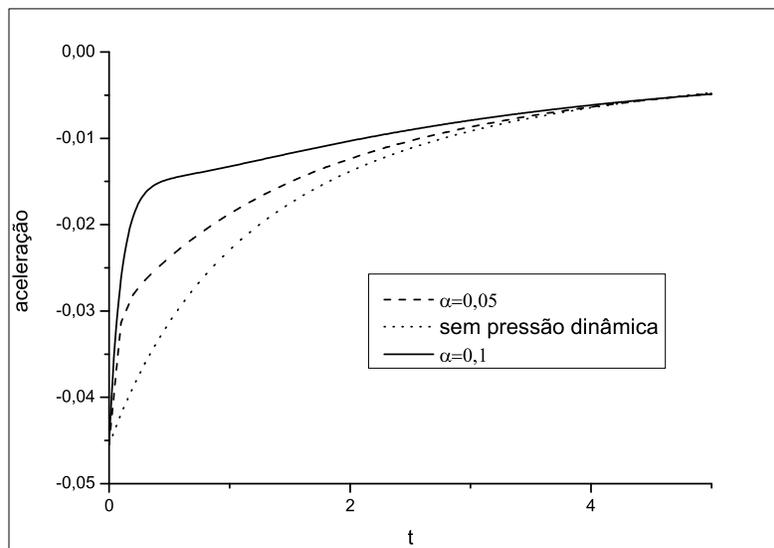


FIG. 4.6: Aceleração \ddot{a} vs tempo, para instantes iniciais $t \leq 5$.

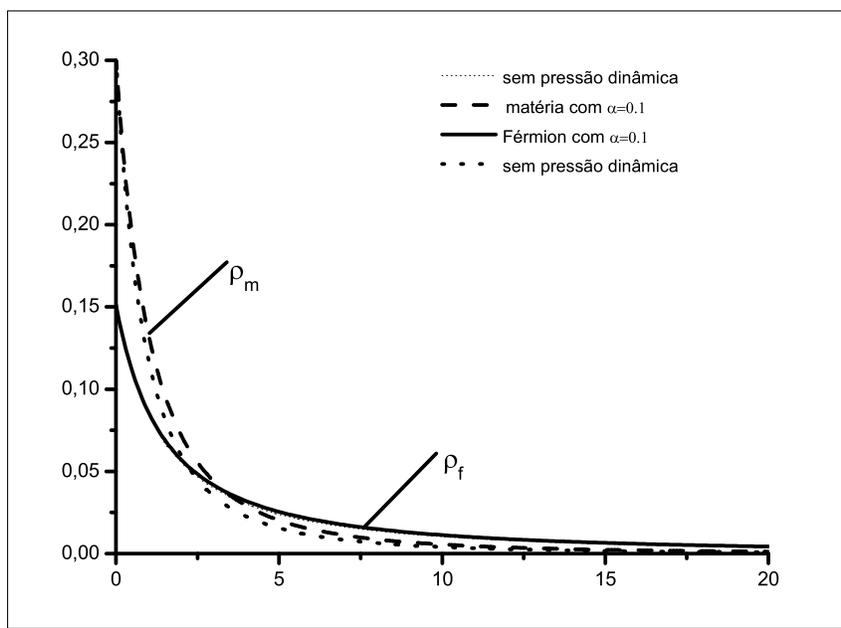


FIG. 4.7: Densidades de energia ρ da matéria e do campo fermiônico vs tempo t . Para $t \sim 2,5$ o campo fermiônico passa a ser dominante.

CAPÍTULO 5

Férmions acoplados não minimamente

5.1 Introdução

No capítulo anterior, mostramos que o campo fermiônico pode ser responsável pelos regimes acelerados apresentados no universo, assim, este comporta-se como o inflaton nos seus primórdios, e como a energia escura na presente época. No presente capítulo, pretendemos seguir investigando as consequências cosmológicas dos campos fermiônicos. Contudo, vamos considerar agora que os férmions se acoplam não minimamente ao campo gravitacional durante a evolução do universo, ou seja, existe um termo de interação direta do tipo $R\bar{\psi}\psi$ na ação do sistema. Faremos uma análise análoga a realizada com campos escalares existentes na literatura [38].

Assim, consideramos o universo descrito pela métrica de Robertson-Walker, espacialmente plana, com os seguintes constituintes: os férmions representando a energia escura e campos de matéria (bariônica e escura), radiação e neutrinos, representados por equações

barotrópicas de estado. Os campos de radiação, neutrinos e matéria são supostamente não interagentes.

Faremos um estudo do comportamento dos parâmetros de densidade e desaceleração, bem como da distância de luminosidade. Todos estes parâmetros serão expressos em função não mais no domínio do tempo, mas em função do redshift. Compararemos os resultados numéricos obtidos do modelo com dados experimentais apropriados, e também com o modelo Λ CDM.

5.2 Equações de campo para o modelo

O nosso interesse é investigar a dinâmica do universo, cujos constituintes são os campos de radiação (fótons e neutrinos), matéria (bariônica e escura) e energia escura representada pelo campo fermiônico. A ação para o modelo é,

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[\frac{1}{2} (1 - \xi \bar{\psi} \psi) R + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_r \right], \quad (5.1)$$

onde \mathcal{L}_m e \mathcal{L}_r denotam as densidades de lagrangiana da matéria e da radiação respectivamente, ξ é a constante de acoplamento entre o campo espinorial e o escalar de curvatura R . Finalmente, \mathcal{L}_f é a densidade de lagrangiana do férmion, que para o caso não massivo é dada por,

$$\mathcal{L}_f = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi] - V. \quad (5.2)$$

Nesta lagrangiana, $V(\bar{\psi}, \psi)$ representa o potencial de auto-interação do campo fermiônico.

Variando a ação com relação aos campos $\bar{\psi}$ e ψ , obtemos a equação de Dirac e a sua adjunta, respectivamente, agora modificadas em relação às equações (4.25) e (4.26) com

$m = 0$, por um termo extra nas equações devido ao efeito do acoplamento não mínimo,

$$i\Gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{dV}{d\psi} - \frac{\xi}{2} R\psi = 0, \quad (5.3)$$

$$iD_\mu \bar{\psi} \Gamma^\mu + \frac{dV}{d\bar{\psi}} + \frac{\xi}{2} R\bar{\psi} = 0. \quad (5.4)$$

Vamos agora proceder as variações em relação ao tensor métrico. Começamos efetuando a variação em relação à matéria e à radiação, que fornece-nos,

$$\delta(S_m + S_r) = \frac{1}{2} \int (T_{\mu\nu}^m + T_{\mu\nu}^r) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (5.5)$$

Para \mathcal{L}_f obtemos, de forma análoga ao capítulo anterior,

$$\delta S_f = \int \left\{ \frac{i}{2} [\bar{\psi} \Gamma_{(\mu} D_{\nu)} \psi - D_{(\mu} \bar{\psi} \Gamma_{\nu)} \psi] - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_f \right\} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (5.6)$$

Agora, a variação da ação para o setor gravitacional, e para o termo associado ao acoplamento não mínimo, resulta em

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int d^4x \left[(1 - \xi \bar{\psi} \psi) \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \right] = \\ & \frac{1}{2} \int d^4x \left[(1 - \xi \bar{\psi} \psi) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g}) + (1 - \xi \bar{\psi} \psi) \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \right. \\ & \left. (1 - \xi \bar{\psi} \psi) \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] = \frac{1}{2} \int d^4x \left[(1 - \xi \bar{\psi} \psi) \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \right. \\ & \left. (1 - \xi \bar{\psi} \psi) R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \underbrace{g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}}_{=0} - \xi \bar{\psi} \psi g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} = \\ & = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[(1 - \xi \bar{\psi} \psi) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} - \xi \bar{\psi} \psi g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

O termo que falta calcular a variação, ou seja $\xi \bar{\psi} \psi g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$, resulta em (ver apêndice B),

$$\xi \bar{\psi} \psi \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 2\xi \{ -g^{\lambda\rho} g_{\mu\nu} [D_\lambda (D_\rho \bar{\psi}) \psi + (D_\rho \bar{\psi}) (D_\lambda \psi) + (D_\lambda \bar{\psi}) (D_\rho \psi)] \}$$

$$\begin{aligned}
 & + \bar{\psi} D_\lambda (D_\rho \psi) - \Gamma_{\lambda\rho}^\kappa (D_\kappa \bar{\psi}) \psi - \Gamma_{\lambda\rho}^\kappa \bar{\psi} (D_\kappa \psi)] + [D_\nu (D_\mu \bar{\psi}) \psi + (D_\nu \bar{\psi}) (D_\mu \psi) \\
 & + (D_\mu \bar{\psi}) (D_\nu \psi) + \bar{\psi} D_\mu (D_\nu \psi) - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa (D_\kappa \bar{\psi}) \psi - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \bar{\psi} (D_\kappa \psi)] \} \delta g^{\mu\nu}, \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

que reescrevemos como,

$$\xi \bar{\psi} \psi \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 2\xi \left[-g^{\lambda\rho} g_{\nu\mu} \mathcal{T}_{\lambda\rho} + \mathcal{T}_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}, \tag{5.9}$$

onde usamos a notação,

$$\mathcal{T}_{\lambda\rho} = (D_{(\lambda} D_{\rho)} \bar{\psi}) \psi + 2D_{(\rho} \bar{\psi} D_{\lambda)} \psi + \bar{\psi} (D_{(\lambda} D_{\rho)} \psi) - \Gamma_{\lambda\rho}^\kappa (D_\kappa \bar{\psi}) \psi - \Gamma_{\lambda\rho}^\kappa \bar{\psi} (D_\kappa \psi).$$

Assim, completamos a variação da ação (5.1) com relação ao tensor métrico, e finalmente obtemos a equação de campo seguinte,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{T_{\mu\nu}}{(1 - \xi \bar{\psi} \psi)}. \tag{5.10}$$

$T_{\mu\nu}$, é o tensor de energia-momento de todas as fontes presentes, a fermiônica, a de matéria e radiação, ou seja,

$$T^{\mu\nu} = T_f^{\mu\nu} + T_m^{\mu\nu} + T_r^{\mu\nu},$$

com $T_f^{\mu\nu}$ dada por,

$$T_f^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \Gamma^{(\mu} D^{\nu)} \psi - D^{(\mu} \bar{\psi} \Gamma^{\nu)} \psi \right] - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_f - \xi (T^{\mu\nu} - T^\sigma{}_\sigma g^{\mu\nu}). \tag{5.11}$$

5.3 Equações de Campo para a Métrica de Robertson-Walker

Vamos investigar soluções cosmológicas de nosso modelo, considerando um universo isotrópico e homogêneo, para isto usamos a métrica de RW espacialmente plana. Dentro desta descrição a equação de Dirac e a sua equação adjunta, acopladas ao escalar de curvatura, ou seja, as equações (5.3) e (5.4), tornam-se respectivamente,

$$\dot{\psi} + \frac{3}{2} H \psi + i\gamma^0 \frac{dV}{d\psi} + i\frac{\xi}{2} R \gamma^0 \psi = 0, \tag{5.12}$$

$$\dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2}H\bar{\psi} - i\frac{dV}{d\psi}\gamma^0 - i\frac{\xi}{2}R\bar{\psi}\gamma^0 = 0. \quad (5.13)$$

O tensor de energia-momento, respeitando a homogeneidade e isotropia do universo, é escrito como $T_\nu^\mu = \text{diag}(\rho(t), -p(t), -p(t), -p(t))$, onde ρ e p , denotam a densidade de energia e pressão totais dos campos fontes do sistema, ou seja, a soma das densidades e pressões do campo fermiônico, do campo de matéria e do campo de radiação, assim,

$$\rho = \rho_f + \rho_m + \rho_r, \quad p = p_f + p_m + p_r. \quad (5.14)$$

Usando as equações de Einstein (5.10), obtemos a equação de Friedmann e da aceleração, respectivamente, modificadas pelo acoplamento não mínimo,

$$H^2 = \frac{\rho}{3(1 - \xi\bar{\psi}\psi)}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3p}{6(1 - \xi\bar{\psi}\psi)}. \quad (5.15)$$

Diferenciando a equação de Friedmann (5.15) com relação ao tempo, e utilizando-se a equação da aceleração, obtemos a seguinte equação de evolução, para a densidade de energia total das fontes do campo gravitacional, ou seja,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = -\frac{\rho\xi\dot{\Psi}}{(1 - \xi\Psi)}. \quad (5.16)$$

Esta equação de balanço também pode ser obtida através das identidades de Bianchi, aplicadas na equação de campo (5.10). Cabe também notar, que derivando a equação de Friedmann, dada em (5.15), com respeito ao tempo, e utilizando a equação de balanço (5.16), obtemos a equação da aceleração, dada também em (5.15). Assim, como é conhecido, apenas duas destas equações são linearmente independentes.

É interessante notar também que devido ao acoplamento não mínimo entre o campo fermiônico e o campo gravitacional, o lado direito da equação (5.16) é diferente de zero, e este fato está associado a transferência de energia entre eles, algo semelhante a equação (4.41).

Assumindo que o tensor de energia momento dos constituintes possuem a mesma forma do tensor de energia-momento total, ou seja, a forma de um fluido perfeito, obtemos a partir da equação (5.11), a densidade de energia e pressão para o campo fermiônico, dados respectivamente por, (ver apêndice C),

$$\rho_f = V + 3\xi H\dot{\Psi}, \quad (5.17)$$

$$p_f = \frac{dV}{d\psi} \frac{\psi}{2} + \frac{\bar{\psi}}{2} \frac{dV}{d\bar{\psi}} - V + \frac{\xi}{2} R\Psi - \xi(\ddot{\Psi} + 2H\dot{\Psi}). \quad (5.18)$$

O fato do campo espinorial e o escalar de curvatura estarem acoplados na equação da pressão (5.18), leva a uma dependência da pressão do campo fermiônico com as densidades de energia e pressão de todos os constituintes, via o escalar de curvatura R e o parâmetro de Hubble H .

Após o desacoplamento da radiação com a matéria, estes campos deixaram de interagir. Diante deste fato, as equações de balanço, para a radiação e a matéria, tornam-se,

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0, \quad \dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0. \quad (5.19)$$

Agora segue de (5.12), (5.13) (5.17) e (5.18), a equação de evolução para a densidade de energia do campo fermiônico,

$$\dot{\rho}_f + 3H(\rho_f + p_f) = -\frac{\rho_f \xi \dot{\Psi}}{(1 - \xi\Psi)}, \quad (5.20)$$

onde o lado direito representa a transferência de energia do campo fermiônico e o campo gravitacional, devido ao acoplamento não mínimo com o escalar de curvatura. Ver apêndice D para maiores detalhes.

5.4 Equações de Campo em Função do Redshift

As medidas astronômicas dos parâmetros utilizados em cosmologia são expressos frequentemente em termos do desvio para o vermelho, ou simplesmente “redshift”. Com o objetivo

de comparar os resultados obtidos através de nosso modelo com alguns dos dados observacionais disponíveis, faremos uma mudança de variáveis em nossas equações de campo, para expressá-las em termos de uma nova variável, z , que representa o redshift. Assim de acordo com a equação (3.13), que relaciona o fator de escala em um instante qualquer com o redshift, podemos escrever uma grandeza observável f , com a seguinte dependência funcional, $f(z(a(t)))$, então,

$$\frac{d}{dt} = \frac{dz}{da} \frac{da}{dt} \frac{d}{dz} = -H(1+z) \frac{d}{dz}. \quad (5.21)$$

Operando com esta derivada duas vezes, temos

$$\frac{d^2}{dt^2} = (1+z)^2 H^2 \left[\left(\frac{1}{1+z} + \frac{H'}{H} \right) \frac{d}{dz} + \frac{d^2}{dz^2} \right], \quad (5.22)$$

onde H' representa a derivada com relação à variável z . Este termo pode ser escrito em termos de quantidades conhecidas, para isto procedemos da seguinte maneira: seja o parâmetro de Hubble expresso como, $H(t(a(z)))$, então,

$$\frac{dH}{dt} \frac{dt}{da} \frac{da}{dz} = \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] \frac{1}{aH} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1+z} \right). \quad (5.23)$$

Utilizando-se agora a equação de Friedmann e da aceleração, equações (5.15), obtemos finalmente,

$$H' = \frac{1}{2H(1+z)} \frac{\rho + p}{(1 - \xi\Psi)}. \quad (5.24)$$

Integrando as equações (5.19), e passando-as para a variável z , obtemos,

$$\rho_m(z) = \rho_m(0)(1+z)^3, \quad \rho_r(z) = \rho_r(0)(1+z)^4, \quad (5.25)$$

onde $\rho_m(0)$ e $\rho_r(0)$, são os valores das densidades de energia no instante presente, ou seja, $z = 0$. Para um cálculo com maior precisão devemos incluir na equação para a radiação, uma função $g(z)$ definida como [25],

$$g(z) = \begin{cases} 1, & z \leq 1000 \\ 1.68, & z > 1000 \end{cases}.$$

Esta função representa os graus de liberdade efetivos das partículas que compõe a radiação. Assim o intervalo $z \leq 1000$ corresponde ao período dominado pelos fótons e para intervalos $z > 1000$ corresponde a era cosmológica onde temos que incluir a contribuição dos neutrinos relativísticos. Para maiores detalhes ver por exemplo,[39].

Utilizando-se agora das equações, (5.21), (5.22), (5.23) e (5.24), nas equações para a densidade de energia do campo fermiônico e na equação da pressão, ou seja, em (5.17) e (5.18), obtemos estas equações em termos da variável z , assim, após algumas manipulações,

$$\rho_f = V - 3\xi H^2(1+z)\Psi', \quad (5.26)$$

e para a pressão,

$$p_f = \left[\frac{2 + \xi\Psi}{2(1 - \xi\Psi)} \right]^{-1} \quad (5.27)$$

$$\left\{ \frac{dV}{d\Psi}\Psi - V - \xi[(1+z)^2 H^2 \Psi'' - (1+z)H^2 \Psi' + (1+z)^2 H H' \Psi'] + \frac{\xi\Psi(\rho_m + \rho_f)}{2(1 - \xi\Psi)} \right\},$$

onde o potencial de auto-interação depende unicamente do bilinear, $\Psi = \bar{\psi}\psi$. Para o campo fermiônico sem acoplamento com o escalar de curvatura, obtemos equações análogas ao capítulo anterior, ou seja,

$$\rho_f = V, \quad p_f = \frac{dV}{d\Psi} - V.$$

Com o objetivo de obter-se uma equação diferencial de segunda ordem no bilinear Ψ (para atribuir condições iniciais apropriadas à derivada primeira Ψ' conforme discutiremos na análise numérica das soluções) multiplicamos a equação de Dirac (5.12), a esquerda por $\bar{\psi}$, derivando-a novamente em relação ao tempo. Em seguida multiplicando-se a equação adjunta (5.13), por ψ pela direita e também derivando-a com relação ao tempo, obtemos, somando-as posteriormente, a seguinte equação de segunda ordem no domínio temporal,

$$\ddot{\Psi} + 3\dot{H}\Psi + 3H\dot{\Psi} = 0. \quad (5.28)$$

Utilizando-se agora das equações (5.21) e (5.22), escrevemos (5.28) em termos do redshift z ,

$$(1+z)H\Psi'' - [2H - (1+z)H']\Psi' - 3H'\Psi = 0. \quad (5.29)$$

Assim nossas soluções cosmológicas são obtidas a partir das equações, (5.29) e (5.24), que foram obtidas a partir da equação da aceleração, da equação de Friedmann, da equação de Dirac e de sua adjunta, juntamente com as relações (5.26) e (5.27). Estas então, formam um sistema de duas equações diferenciais acopladas. Para obtermos então, soluções cosmológicas, elegemos um potencial de auto-interação entre os férmions, através de uma lei de potência da forma,

$$V = \frac{\lambda}{[\Psi(z)]^\alpha}, \quad (5.30)$$

sendo λ e α , dois parâmetros livres.

5.5 Soluções cosmológicas

Para investigar as soluções numéricas do sistema de equações diferenciais, formado pelas equações (5.24) e (5.29), e pelas relações, (5.26), (5.27) e (5.30), necessitamos, especificar as condições iniciais para, $\Psi(z)$, $\Psi'(z)$ e também para o parâmetro de Hubble $H(z)$. Supomos que durante o período dominado por partículas relativísticas em $z_0 = 10^5$, o valor do bilinear era muito pequeno, então adotamos, $\Psi(z_0) = 10^{-5}$. Também admitimos que o campo fermiônico varia muito lentamente a partir deste período, durante a evolução do universo. Assim, adotamos para a sua derivada, como condição inicial, o valor $\Psi'(z_0) = 10^{-13}$.

Os parâmetros de densidade podem ser escritos em função da densidade total de energia, pois como temos que, $\Omega_{total} = \rho_{tot.}/\rho_c = 1$, então resulta que,

$$\Omega_i(z) = \rho_i(z)/\rho_{tot.}(z).$$

Os valores presentes para estas densidades, no atual estágio de evolução do universo, ou seja, em $z = 0$, são os seguintes: $\Omega_f = 0,72$, $\Omega_m = 0,259916$, e para radiação, $\Omega_r = 8,4 \times 10^{-5}$, conforme [40].

O valor inicial para o parâmetro de Hubble pode ser obtido a partir da equação de Friedmann (5.15), juntamente com (5.26). Desta forma obtemos a seguinte equação para a condição inicial de $H(z_0)$,

$$H(z_0) = \sqrt{\frac{\Omega_m(0)(1+z_0)^3 + \Omega_r(0)(1+z_0)^4 + \lambda/[\Psi(z_0)]^\alpha}{3(1-\xi\Psi(z_0)) + 3\xi(1+z_0)\Psi'(z_0)}}. \quad (5.31)$$

Para encontrar as soluções numéricas para o sistema de equações formado pelas equações (5.24) e (5.29), fixamos valores para os parâmetros livres, ou seja, para λ e α , e analisamos diversos regimes para alguns valores de ξ . Assim adotamos $\lambda = 0,6$ e $\alpha = 1/10$ onde estes valores foram encontrados impondo $\Omega_f = 0,72$ para o valor do parâmetro de densidade do campo fermiônico. Procurar valores para estes parâmetros mudando as condições iniciais é um trabalho exaustivo, dada a sensibilidade às condições iniciais apresentadas pelo modelo.

Na figura 5.1, temos os parâmetros de densidade representados em função do redshift, no intervalo de $0 \leq z \leq 2$. Na figura 5.2, estes parâmetros estão representados no intervalo de $1000 \leq z \leq 4000$. Notamos a partir da figura 5.1, que a constante de acoplamento ξ controla o decaimento na densidade de energia escura, Ω_Ψ na figura, e o correspondente crescimento na densidade de energia do campo da matéria. Entretanto, o parâmetro de densidade do campo de partículas relativísticas, Ω_r , é desprezível para pequenos redshift. Para $\xi = 0$, notamos que praticamente não existe diferença entre as densidades de energia do modelo com campo fermiônico e o modelo Λ CDM. Percebemos também que aumentando o valor da constante de acoplamento ξ , o decréscimo da densidade do campo fermiônico e o respectivo acréscimo da densidade da matéria, com o redshift, é menos acentuado. Este fato pode ser compreendido observando-se que, de acordo com a equação (5.20), parte da energia do campo fermiônico

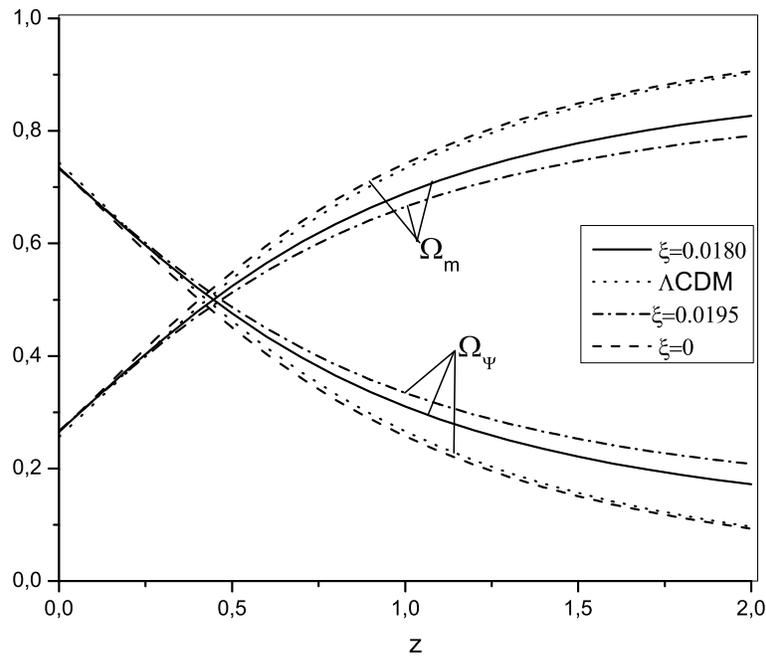


FIG. 5.1: Parâmetros de densidade em termos de z para o modelo Λ CDM e para o modelo fermiônico. Nas figuras Ω_ψ e Ω_m indicam as densidades da energia escura e da matéria respectivamente. O parâmetro para o campo de radiação, Ω_r , é desprezível neste intervalo. Representamos as curvas para diferentes valores de ξ .

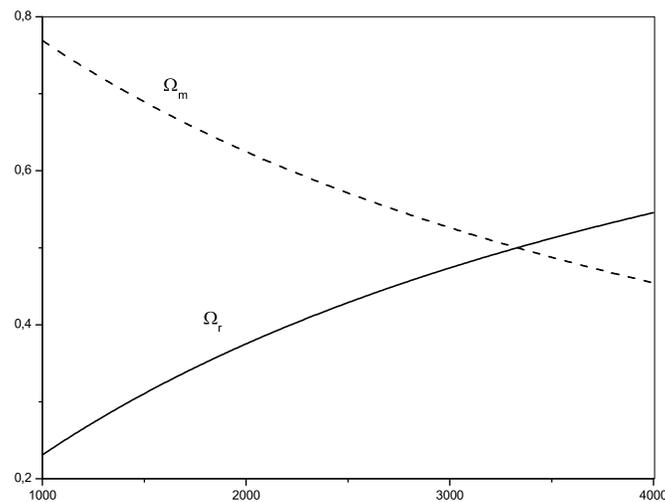
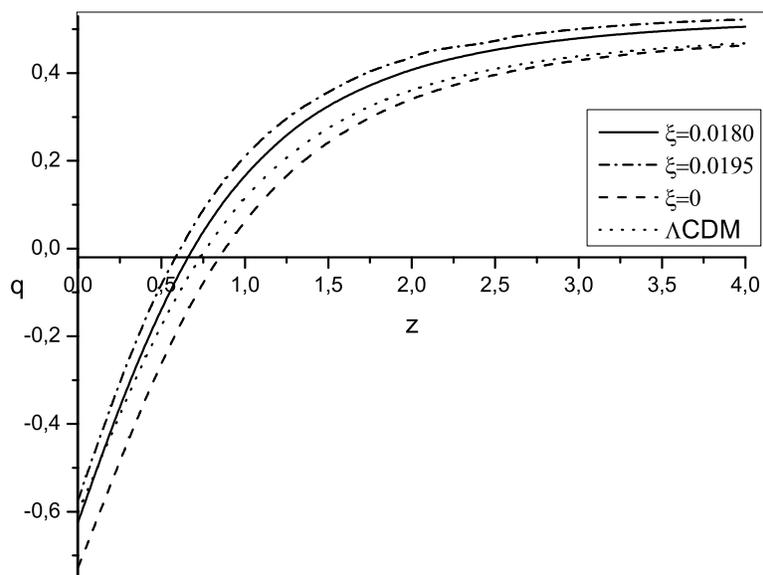


FIG. 5.2: Parâmetros de densidade para grandes valores do redshift $1000 \leq z \leq 4000$. Campos de radiações representados por Ω_r e matéria Ω_m . O parâmetro de densidade para a energia escura é desprezível para estes redshift.

FIG. 5.3: Parâmetro q em função de z para o modelo Λ CDM e para o modelo fermiônico

é transferida para o campo gravitacional devido ao acoplamento não mínimo. Assim para valores de ξ maiores, mais energia é transferida ao campo gravitacional, e menos ao campo de matéria. É de se notar também que o sistema dinâmico em questão é muito sensível a pequenas mudanças da constante de acoplamento. O parâmetro de densidade do campo fermiônico torna-se desprezível quando $z \sim 5$, para o caso em que $\xi = 0$, e em torno de $z \sim 45$ para os outros casos, ou seja, $\xi = 0,0180$ e $\xi = 0,0195$. O parâmetro de densidade para as partículas relativísticas e para o campo de matéria está representado na figura 5.2, e mostra que a igualdade entre estas densidades ocorre por volta de $z \sim 3300$, onde os graus de liberdade dos neutrinos relativísticos foram incluídos[25].

O parâmetro de desaceleração dado por $q = 1/2 + 3p/2\rho$, está representado na figura 5.3 em função do redshift. Podemos notar que a constante de acoplamento não mínimo ξ tem um importante papel no comportamento deste parâmetro. É de relevância notar que o modelo Λ CDM comporta-se de maneira diferente ao caso do férmion sem acoplamento não mínimo, $\xi = 0$. Entretanto, para grandes valores do redshift, $z \geq 3$, o valor do parâmetro de desaceleração para o caso não acoplado e o modelo Λ CDM coincidem. Os valores presentes do parâmetro de desaceleração hoje, $q(0)$ e os correspondentes valores do redshift na época da transição do regime desacelerado para acelerado, z_t são os seguintes: (a) modelo Λ CDM $q(0) \sim -0,60$ e $z_t \sim 0,76$ e (b) modelo fermiônico com $\xi = 0$ $q(0) \sim -0,72$ e $z_t \sim 0,88$. Para os demais valores de ξ , temos: (c) para $\xi = 0,0180$ $q(0) \sim -0,62$ e $z_t \sim 0,68$ e para, (d) $\xi = 0,0195$ $q(0) \sim -0,57$ e $z_t \sim 0,61$. Todos os casos concordam relativamente bem com os dados observacionais para o parâmetro de desaceleração [41], ou seja, $q(0) = -0,74 \pm 0,18$ e $z_t = 0,46 \pm 0,13$.

Na figura 5.4, representamos a diferença entre a magnitude aparente m e a magnitude absoluta M de uma fonte. Denota-se esta diferença por μ_0 , assim [25]:

$$\mu_0 = m - M = 5 \text{Log} \left[(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \right] + 25. \quad (5.32)$$

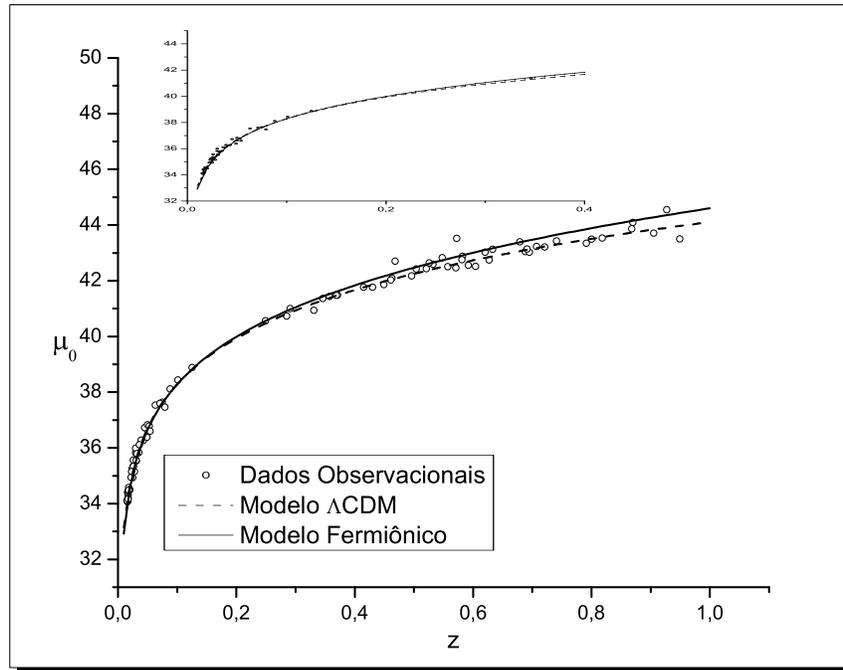


FIG. 5.4: μ_0 em função de z para o modelo Λ CDM e o modelo fermiônico. Na figura menor temos a faixa $0 \leq z \leq 0,5$.

Os pontos no gráfico referem-se aos dados observacionais das supernovas tipo Ia, tomados como base o trabalho de Riess et al. [42]. É importante observar o fato de que diferentes valores para a constante de acoplamento ξ não acarretam em mudanças significativas para μ_0 . Então na figura (5.4), apresentamos uma única curva para o modelo fermiônico. Notamos deste gráfico que tanto o modelo Λ CDM quanto o modelo fermiônico apresentam uma boa concordância com os dados observacionais, para valores entre $0 \leq z \leq 0,5$. Para valores maiores de z , ou seja $0,5 \leq z \leq 1$, observamos uma diferença entre o modelo Λ CDM e o modelo com férmions. Não podemos concluir qual modelo concorda melhor com os dados devido às incertezas de ordem observacional.

Para concluir este capítulo, é importante observar que podemos reinterpretar as equações do modelo, de forma que este coincida com as equações de campo usuais da relatividade geral, assim a partir da equação (5.10), escrevemos,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (5.33)$$

com

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{T}_f^{\mu\nu} + T_m^{\mu\nu} + T_r^{\mu\nu},$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{T}_f^{\mu\nu} = \frac{i}{2} & \left[\bar{\psi}\Gamma^{(\mu}D^{\nu)}\psi - D^{(\mu}\bar{\psi}\Gamma^{\nu)}\psi \right] - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_f - \xi(\mathcal{T}^{\mu\nu} - \mathcal{T}^\sigma{}_\sigma g^{\mu\nu}) \\ & + \xi\bar{\psi}\psi(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Neste caso temos que $\nabla_\nu\tilde{T}^{\mu\nu} = 0$ de acordo com a identidade de Bianchi. Se escrevermos o tensor de energia-momento diagonal, ou seja, $\tilde{T}_\nu^\mu = \text{diag}(\tilde{\rho}, -\tilde{p}, -\tilde{p}, -\tilde{p})$ com $\tilde{\rho}$ e \tilde{p} representando a densidade de energia total e a pressão total respectivamente, segue que,

$$H^2 = \frac{\tilde{\rho}}{3}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\tilde{\rho} + \tilde{p}}{6}, \quad \dot{\tilde{\rho}} + 3H(\tilde{\rho} + \tilde{p}) = 0, \quad (5.35)$$

temos a forma usual das equações de Friedmann, da aceleração e do balanço da energia respectivamente.

As equações (5.35) não contradizem as equações (5.15), pois pode-se provar que a densidade de energia e a pressão de (5.35) estão conectadas às mesmas oriundas de (5.15), por,

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{(1 - \xi\Psi)}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{(1 - \xi\Psi)}. \quad (5.36)$$

Os principais pontos que destacamos do modelo são: (i) o modelo proposto apresentou-se muito sensível a escolha das condições iniciais e dos parâmetros ξ , λ e α ; (ii) o parâmetro de densidade do campo fermiônico e do campo de matéria decai mais rapidamente com o redshift, para o caso em que o campo fermiônico está acoplado ao escalar de curvatura,

($\xi \neq 0$), existindo uma maior transferência de energia entre o campo gravitacional e o campo fermiônico; (iii) aumentando o valor de ξ , a transição do regime desacelerado para acelerado ocorre em redshift menores; (iv) notamos que a diferença de magnitude μ_0 não é sensível a mudanças no valor do parâmetro ξ , não havendo uma mudança significativa entre o caso com e sem acoplamento.

CAPÍTULO 6

Férmions no contexto da Teoria de Einstein-Cartan

6.1 Introdução

A inclusão de férmions na Teoria da Relatividade Geral leva-nos a refletir sobre o papel do spin na teoria, ou seja, quais seriam os efeitos desta propriedade da matéria sobre a estrutura do espaço-tempo, pois a massa não é a única propriedade da matéria. Como sabemos no nível microscópico, os efeitos do spin devem ser considerados, porque uma possível extensão de uma teoria de gravitação a este domínio deve levar em conta esta propriedade da matéria.

Como é sabido, na Relatividade Geral a massa e conseqüentemente a energia estão associadas à curvatura do espaço-tempo. Assim, para manter uma descrição do campo gravitacional em termos das propriedades geométricas do espaço-tempo, o spin, de acordo com o contexto da teoria de Einstein-Cartan, deve estar associado à propriedade de torção.

Resumindo, na teoria de Einstein-Cartan, a massa está relacionada à curvatura do espaço-tempo e o spin à torção. Neste sentido, a teoria de Einstein-Cartan é uma generalização da Relatividade Geral, pois além da curvatura temos a inclusão dos efeitos de uma possível torção. Este espaço-tempo, com curvatura e torção não nulas, é conhecido como espaço-tempo de Riemann-Cartan [43],[44]. No caso de fontes gravitacionais sem spin, o termo de torção é nulo e recuperamos a descrição da Relatividade Geral usual. Outro caso particular da geometria de Riemann-Cartan é o espaço-tempo de *Weitzenböck* [45], onde a curvatura é nula e temos apenas torção. A teoria de gravitação construída nos princípios deste espaço-tempo, apresenta-se como uma teoria equivalente à Relatividade-Geral usual, conhecida como teleparalelismo, tendo a torção como uma alternativa à curvatura. Uma das motivações para seu estudo, é o fato de que nesta formulação a gravitação pode ser descrita como uma teoria de gauge [45], aproximando a descrição da gravitação com as demais interações fundamentais.

O espaço-tempo com torção abre a possibilidade de explorarmos novas consequências cosmológicas, e até mesmo de buscarmos novas interpretações e alternativas para problemas no contexto da cosmologia inflacionária, e uma possível alternativa ao problema da energia escura [46]. Em recente artigo, explora-se o problema da atual aceleração do universo dentro do contexto de uma teoria gravitacional com torção não nula [46], e verificaram que os resultados obtidos mostram-se compatíveis com os dados observacionais e parâmetros conhecidos. Assim, neste trabalho os autores argumentam a favor da não necessidade da inclusão de campos extras com pressões negativas para promover o fenômeno da aceleração, sendo que esta passa a ser descrita como sendo um efeito que advém do fato de que o espaço-tempo possui torção. Assim, a aceleração de nosso universo seria uma das consequências indiretas da torção. Analogamente em [47] o problema da era inflacionária também é explorado no contexto de um espaço-tempo com torção, onde não existe um campo que promova tal regime, este agora é descrito dentro da própria estrutura do espaço-tempo, com a inclusão

de conexões não simétricas, ou seja, utilizando-se a torção.

Neste capítulo estudamos o regime inflacionário, para isto consideramos um universo cujo constituinte é um campo fermiônico, acoplado minimamente à curvatura, que faz o papel de matéria ordinária. Dentro do contexto da teoria de Einstein-Cartan, mostraremos que o efeito de torção pode ser o responsável pela indução de um regime de rápida expansão acelerada do universo primordial. Usaremos como convenção, índices do alfabeto grego para indicar quantidades relacionadas ao espaço-tempo e o alfabeto latino, para índices referentes a quantidades associadas ao espaço tangente.

6.2 Relatividade Geral com torção

Nesta seção desenvolveremos as equações gerais de campos no contexto da teoria de Einstein-Cartan. Para maiores detalhes ver [16, 49]. Nesta teoria, admite-se que a conexão afim é não simétrica em seus índices inferiores. A diferença entre duas conexões afim definem o tensor de torção,

$$C^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} = 2\Gamma^{\rho}_{[\mu\nu]} \quad (6.1)$$

então, nesta formulação concluímos que as conexões afim não são mais os símbolos de Christoffel usuais. Contudo, podemos encontrar a relação entre a nova conexão e os símbolos de Christoffel, para isto impomos que a teoria preserve a condição de metricidade, embora em situações mais gerais esta condição pode ser violada [48]. A condição de metricidade é a nulidade da derivada covariante do tensor métrico, ou seja,

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0, \quad (6.2)$$

assim da equação (6.2), podemos escrever as relações,

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \partial_{\alpha} g_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha} g_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} g_{\mu\sigma} = 0,$$

$$\nabla_{\mu}g_{\nu\alpha} = \partial_{\mu}g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}g_{\sigma\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma}g_{\nu\sigma} = 0,$$

$$\nabla_{\nu}g_{\alpha\mu} = \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma}g_{\sigma\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}g_{\sigma\alpha} = 0.$$

Multiplicando-as por $1/2$ e adicionando-as, e levando-se em conta a definição do tensor de torção, dado por (6.1), obtemos,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} &= -g^{\alpha\lambda}\frac{1}{2}(\partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - \partial_{\mu}g_{\nu\alpha} - \partial_{\nu}g_{\alpha\mu}) \\ &\quad -\frac{1}{2}C_{\nu\mu}^{\lambda} - \frac{1}{2}C_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{1}{2}C_{\mu\nu}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Assim podemos escrever as novas conexões em termos dos símbolos de Christoffel, logo,

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{\lambda} + K_{\nu\mu}^{\lambda}, \quad (6.3)$$

onde $\tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{\lambda}$ são os símbolos de Christoffel usuais, e $K_{\nu\mu}^{\lambda}$ é um tensor, conhecido como tensor contorção, definido como,

$$K_{\nu\mu}^{\lambda} = \frac{1}{2}(C_{\nu\mu}^{\lambda} + C_{\nu\mu}^{\lambda} + C_{\mu\nu}^{\lambda}). \quad (6.4)$$

Notamos que o tensor contorção é anti-simétrico nos seus dois primeiros índices pois,

$$K_{\lambda\nu\mu} = \frac{1}{2}(C_{\lambda\nu\mu} + C_{\nu\mu\lambda} + C_{\mu\nu\lambda}),$$

mas,

$$-K_{\lambda\nu\mu} = \frac{1}{2}(-C_{\lambda\nu\mu} - C_{\nu\mu\lambda} - C_{\mu\nu\lambda}),$$

e

$$K_{\nu\lambda\mu} = \frac{1}{2}(C_{\nu\lambda\mu} + C_{\lambda\mu\nu} + C_{\mu\lambda\nu}).$$

Agora trocando a posição dos dois últimos índices da segunda equação,

$$-K_{\lambda\nu\mu} = \frac{1}{2}(C_{\lambda\mu\nu} + C_{\nu\lambda\mu} + C_{\mu\lambda\nu}),$$

assim podemos facilmente concluir que,

$$-K_{\lambda\nu\mu} = K_{\nu\lambda\mu}.$$

Com o propósito de derivar as equações de campo para o modelo, torna-se conveniente escrever a ação de Einstein-Hilbert usando o formalismo das tetradas, já que nosso objetivo é a posterior inclusão de férmions na teoria. A partir do postulado das tetradas [49],

$$\mathcal{D}_\nu e^{a\mu} = \partial_\nu e^{a\mu} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu e^{a\rho} + \omega_\nu^{ab} e_b^\mu = 0, \quad (6.5)$$

onde ω_ν^{ab} são as conexões de spin, isto é, as conexões relativas ao espaço tangente à variedade, e e_μ^a são as tetradas que definem um conjunto de referenciais inerciais locais à variedade espaço-temporal. Podemos inverter as relações (6.5) e escrever as conexões afim em termos das conexões de spin, estas relações levadas ao tensor de Riemann fornece-nos o mesmo escrito em termos das conexões de spin,

$$R_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + \omega_\mu^{ac} \omega_{\nu c}^b - \omega_\nu^{ac} \omega_{\mu c}^b, \quad (6.6)$$

e o tensor de Ricci é dado por $R_{\mu\nu} = e_a^\sigma e_{b\nu} R_{\sigma\mu}^{ab}$. A partir do postulado das tetradas (6.5) e da equação (6.3), podemos escrever,

$$\omega_\mu^{ab} = \tilde{\omega}_\mu^{ab} + K_\mu^{ab}.$$

A conexão de spin denotada por $\tilde{\omega}_\mu^{ab}$ é uma função exclusiva das tetradas, dada por,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_\mu^{ab} = & \frac{e^{a\rho}}{2} (\partial_\mu e_\rho^b - \partial_\rho e_\mu^b) - \frac{e^{b\rho}}{2} (\partial_\mu e_\rho^a - \partial_\rho e_\mu^a) + \\ & \frac{e^{a\rho}}{2} (\partial_\sigma e_\rho^c - \partial_\rho e_\sigma^c) e^{b\sigma} e_{c\mu}. \end{aligned}$$

Podemos expressar o tensor de Ricci, este agora não mais simétrico, e a curvatura escalar, em termos dos símbolos de Christoffel e do tensor contorção definido pela equação (6.3), da seguinte forma,

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}_\lambda K_{\mu\nu}^\lambda - \tilde{\nabla}_\nu K_{\mu\lambda}^\lambda + K_{\theta\lambda}^\lambda K_{\mu\nu}^\theta - K_{\theta\nu}^\lambda K_{\mu\lambda}^\theta. \quad (6.7)$$

Nestas equações e nas próximas, utilizaremos o tilde para expressar objetos matemáticos com respeito aos símbolos de Christoffel. A expressão para a curvatura escalar torna-se,

$$R = \tilde{R} + \tilde{\nabla}_\lambda K^{\lambda\nu}_\nu - \tilde{\nabla}_\nu K^{\lambda\nu}_\lambda + K^{\lambda\theta}_\theta K^{\theta\nu}_\nu - K^{\lambda\theta}_\theta K^{\theta\nu}_\lambda. \quad (6.8)$$

Podemos escrever o tensor de Einstein como,

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R} + \mathcal{R}_{\mu\nu}, \quad (6.9)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mu\nu} = & \tilde{\nabla}_\lambda K^\lambda_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\nu K^\lambda_{\mu\lambda} + K^\lambda_{\theta\lambda} K^\theta_{\mu\nu} - K^\lambda_{\theta\nu} K^\theta_{\mu\lambda} - \\ & \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left(\tilde{\nabla}_\lambda K^{\lambda\nu}_\nu - \tilde{\nabla}_\nu K^{\lambda\nu}_\lambda + K^\lambda_{\theta\lambda} K^{\theta\nu}_\nu - K^\lambda_{\theta\nu} K^{\theta\nu}_\lambda \right). \end{aligned} \quad (6.10)$$

6.3 Equações de campo do modelo

Vamos considerar um modelo cosmológico com um único constituinte, representado pelo campo fermiônico acoplado minimamente com o campo gravitacional, dentro do contexto da teoria de Einstein-Cartan. Assim, a ação deste sistema, pode ser escrita da seguinte forma:

$$S = \int e \left[-\frac{1}{16\pi G} e^\mu_a e^\nu_b R^{ab}_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - \bar{D}_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right) - m \bar{\psi} \psi - V \right] d^4x, \quad (6.11)$$

onde m é a massa do férmion, e V é um potencial de auto-interação. As derivadas covariantes $D_\mu \psi$ e $\bar{D}_\mu \bar{\psi}$ podem ser escritas como,

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \psi, \quad \bar{D}_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \bar{\psi} \bar{\sigma}_{ab}. \quad (6.12)$$

ω_μ^{ab} são as novas conexões de spin, relacionadas às conexões não simétricas via postulado das tetradas (6.5), e σ_{ab} são os geradores da representação espinorial, definidos como,

$$\frac{\sigma_{ab}}{2} = \frac{i}{4} [\gamma_a, \gamma_b]. \quad (6.13)$$

γ_a são as matrizes de Dirac no espaço-tempo de Minkowski e os colchetes indicam uma operação de comutação entre as mesmas, temos também que $\bar{\sigma}_{ab} = \sigma_{ab}$.

Para procedermos a variação da ação tratamos os campos das tetradas e conexões de spin como independentes e usamos o formalismo de primeira ordem, ou seja, o método

variacional de Palatini, para obter as equações de campo da teoria. Assim a variação no campo das tetradas fornece-nos (conforme apêndice E),

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (6.14)$$

com

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma_\nu D_\mu\psi - D_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi) - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_f$$

onde utilizamos o princípio variacional de Hamilton, ou seja $\delta S_T = \delta(S_G + S_m) = 0$. Nesta equação $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento, que é obtido da variação do setor de matéria da ação em relação as tetradas. Convém observar que o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ não é simétrico, pois está escrito em termos das conexões não simétricas, o mesmo vale para o tensor de energia-momento, que também é não simétrico. Agora variando a ação com relação a conexão de spin, obtemos:

$$\frac{1}{16\pi G} (C^\mu_{\rho\nu} + C^\sigma_{\sigma\rho}\delta_\nu^\mu - C^\sigma_{\sigma\nu}\delta_\rho^\mu) = S^\mu_{\nu\rho}, \quad (6.15)$$

onde o termo $S^\mu_{\nu\rho}$ é obtido da variação da ação da matéria em relação as conexões de spin. Este termo é a densidade de spin do campo de matéria associado e para o nosso caso este é dado por,

$$S^\mu_{\nu\rho} = e_\nu^c e_\rho^d \frac{1}{8} \bar{\psi} \{ \gamma^\mu, \sigma_{cd} \} \psi, \quad (6.16)$$

onde as chaves indicam a operação de anti-comutação. Podemos escrever a equação (6.16) numa forma mais conveniente, utilizando-se a seguinte identidade,

$$\{ \gamma_c, \sigma_{ab} \} = -2\epsilon_{abcd}\gamma_5\gamma^d, \quad (6.17)$$

onde ϵ_{abcd} , é o tensor totalmente anti-simétrico de Levi-Civita, que possui as seguintes propriedades,

$$\epsilon^{abcd}\epsilon_{abcd} = -4!, \quad \epsilon^{abcd}\epsilon_{abcf} = -3!\delta_f^d, \quad \epsilon^{abcd}\epsilon_{abef} = -2! \begin{pmatrix} \delta_e^c & \delta_f^c \\ \delta_e^d & \delta_f^d \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Usando-se a identidade (6.17), reescrevemos (6.16), da seguinte maneira,

$$S^\mu_{\lambda\kappa} = -\frac{1}{4}e_\lambda^a e_\kappa^b e^{\mu c} (\bar{\psi}\gamma_5\gamma^d\psi) \epsilon_{abcd}. \quad (6.19)$$

A equação (6.15) ainda pode ser escrita como,

$$C^\mu_{\rho\nu} = 16\pi G \left(S^\mu_{\nu\rho} + \frac{1}{2} S^\sigma_{\rho\sigma} \delta^\mu_\nu - \frac{1}{2} S^\sigma_{\nu\sigma} \delta^\mu_\rho \right). \quad (6.20)$$

Substituindo-se nesta a equação a densidade de spin (6.19), e utilizando-se das propriedades do tensor de Levi-civita, obtemos a seguinte equação para o tensor torção,

$$C^\mu_{\kappa\lambda} = -4\pi G e_\lambda^a e_\kappa^b e^{c\mu} \left(\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^d \psi \right) \epsilon_{abcd}. \quad (6.21)$$

De posse desta e a partir da equação (6.4), podemos agora expressar o tensor contorção para o campo fermiônico. Após algumas manipulações podemos concluir que,

$$K^\lambda_{\nu\mu} = -2\pi G e_\mu^a e_\nu^b e^{c\lambda} \epsilon_{abcd} \left(\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^d \psi \right). \quad (6.22)$$

Levando-se em conta a forma do tensor contorção para o campo fermiônico, ou seja, a equação (6.22), podemos escrever (6.14) como,

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{R} = -\tilde{\nabla}_\lambda K^\lambda_{\mu\nu} + K^\lambda_{\theta\nu} K^\theta_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} K^\lambda_{\theta\sigma} K^{\theta\sigma}_\lambda + 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

Desenvolvendo-se os produtos de tensores de contorção utilizando a equação (6.22), temos

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{R} &= -\tilde{\nabla}_\lambda K^\lambda_{\mu\nu} + 8(\pi G)^2 \left[g_{\mu\nu} (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_i \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi) (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\nu \psi) \right] \\ &\quad - 12(\pi G)^2 g_{\mu\nu} (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_i \psi)^2 + 8\pi G T_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Utilizando as equações para as derivadas covariantes que surgem no tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$, juntamente com $\omega_\mu^{ab} = \tilde{\omega}_\mu^{ab} + K_\mu^{ab}$, podemos decompor o tensor de energia-momento em um termo que não depende da torção e um termo dependente. Então a equação de Einstein torna-se,

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{R} = -\tilde{\nabla}_\lambda K^\lambda_{\mu\nu} + 8(\pi G) \tilde{T}_{\mu\nu} + 12(\pi G)^2 g_{\mu\nu} \sigma^2, \quad (6.23)$$

com $\sigma^2 = (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_i \psi)^2$.

Nesta expressão temos que,

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma_\nu\tilde{D}_\mu\psi - \tilde{D}_\mu\bar{\psi}\gamma_\nu\psi) - g_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{L}}_D.$$

Devemos notar que (6.23) pode ser separada em uma parte simétrica e uma parte anti-simétrica. Consideramos inicialmente a parte simétrica de (6.23), com isso obtemos,

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R} = 12(\pi G)^2 g_{\mu\nu}\sigma^2 + 8\pi G\tilde{T}_{(\mu\nu)}. \quad (6.24)$$

Da parte anti-simétrica resulta

$$\tilde{\nabla}_\lambda K^\lambda_{\mu\nu} = 4\pi G i (\bar{\psi}\gamma_{[\nu}\tilde{D}_{\mu]}\psi - \tilde{D}_{[\mu}\bar{\psi}\gamma_{\nu]}\psi). \quad (6.25)$$

Desenvolvendo o setor anti-simétrico verificamos que a equação (6.25), para o caso da métrica de RW, fornece-nos apenas relações de identidades, não constituindo para este caso, em nenhuma restrição para a dinâmica do sistema. Ou seja, as informações dinâmicas estão contidas no setor simétrico, ou seja (6.24).

Podemos considerar o lado direito da equação (6.24), como sendo as componentes de um tensor de energia-momento efetivo,

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R} = 8\pi G T_{(\mu\nu)}^{ef}, \quad (6.26)$$

com,

$$T_{\mu\nu}^{ef} = 8\pi G \left[\tilde{T}_{(\mu\nu)} + \frac{3}{2}\pi G g_{\mu\nu}\sigma^2 \right]. \quad (6.27)$$

Consideramos a métrica de RW com o setor espacial plano,

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

desta forma pretendemos descrever o universo na era inflacionária, a partir do momento em que a curvatura do setor espacial é desprezível, devido a rápida expansão acelerada. A partir da equação (6.26) a equação de Friedmann, torna-se

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 8\pi G \rho_{ef}, \quad (6.28)$$

ou ainda,

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 12(\pi G)^2 (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_i \psi)^2 + 8\pi G (m\bar{\psi}\psi + V),$$

onde utilizamos a notação

$$\rho_{ef} = \underbrace{m\bar{\psi}\psi + V}_{\rho_\psi} + \frac{3}{2}\pi G (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_i \psi)^2.$$

Obtemos a partir das componentes espaciais da equação (6.26) e da equação de Friedmann, considerando a métrica de RW, a equação para a aceleração, assim,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left[m\bar{\psi}\psi + V + 3 \left(\frac{\bar{\psi}}{2} \frac{dV}{d\bar{\psi}} + \frac{dV}{d\psi} \frac{\psi}{2} - V \right) - 3\pi G \sigma^2 \right], \quad (6.29)$$

onde usamos novamente a notação $\sigma^2 = (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\rho \psi)^2$. Notamos que este termo proporcional a σ^2 contribui com um sinal global positivo na equação para a aceleração, sendo assim o mesmo pode contribuir para um regime de aceleração positiva no universo. Ainda, a equação para a aceleração pode ser escrita de forma usual, definindo a pressão total como,

$$p_{ef} = \underbrace{\frac{\bar{\psi}}{2} \frac{dV}{d\bar{\psi}} + \frac{dV}{d\psi} \frac{\psi}{2} - V}_{p_\psi} - \frac{3}{2}\pi G (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_i \psi)^2,$$

com estas definições a equação para a aceleração (6.29), pode ser escrita como,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_{ef} + 3p_{ef}).$$

Variamos agora a ação (6.11), com relação aos campos $\bar{\psi}$ e ψ , e obtemos assim a equação de Dirac e a sua respectiva equação adjunta, ou seja,

$$i\gamma^\mu D_\mu \psi - m\psi - \frac{dV}{d\bar{\psi}} = 0, \quad i\bar{D}_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} + \frac{dV}{d\psi} = 0. \quad (6.30)$$

Nestas equações, podemos escrever as derivadas covariantes (6.12) como,

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \frac{i}{4} \tilde{\omega}_\mu^{ab} \sigma_{ab} \psi - \frac{i}{4} K_\mu^{ab} \sigma_{ab} \psi, \quad \bar{D}_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + \frac{i}{4} \tilde{\omega}_\mu^{ab} \bar{\psi} \sigma_{ab} + \frac{i}{4} K_\mu^{ab} \bar{\psi} \sigma_{ab}.$$

Para o caso em que a torção está ausente, as derivadas covariantes tornam-se,

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \frac{i}{4} \tilde{\omega}_\mu^{ab} \sigma_{ab} \psi, \quad \bar{D}_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + \frac{i}{4} \tilde{\omega}_\mu^{ab} \bar{\psi} \sigma_{ab},$$

e assim as equações (6.30) tornam-se as equações de Dirac usuais utilizadas no capítulo 4.

6.4 Soluções cosmológicas e análise dos resultados

Vamos procurar soluções cosmológicas, usando o sistema de equações constituído por (6.29) e a primeira equação de (6.30), ou seja a equação da aceleração e a equação de Dirac. Considerando-se um universo de um único constituinte, o campo fermiônico. Neste contexto o campo fermiônico vai assumir o papel de matéria bariônica. O termo de interação tipo spin-spin, σ^2 será encarregado de promover os possíveis regimes com aceleração positiva. Estudamos o caso em que o potencial de auto-interação é nulo, ou seja, $V = 0$. Situações com $V \neq 0$ foram testadas, e não foram encontradas soluções fisicamente aceitáveis, dentro da janela de condições iniciais e parâmetros utilizados.

Com o objetivo de resolver numericamente o sistema de equações, é conveniente redefinir a variável temporal como $\bar{t} = \pi G t$, com isto a equação (6.29) fica:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3} (\bar{\rho}_\psi + 3\bar{p}_\psi - 3\sigma^2). \quad (6.31)$$

Nesta equação $\bar{\rho}_\psi$ e \bar{p}_ψ representam a densidade de energia e a pressão para o campo fermiônico livre, sem o termo de interação spin-spin. Para o caso em que $V = 0$ e com a mudança de variável temporal, temos

$$\bar{p}_\psi = 0 \quad e \quad \bar{\rho}_\psi = \bar{m}\bar{\psi}\psi$$

com $\bar{m} = \frac{m}{\pi G}$.

Desenvolvendo explicitamente a equação de Dirac (6.30), para a métrica de RW e com a normalização citada, obtemos o seguinte conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, ou seja,

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_3 \\ \dot{\psi}_4 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}H \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} - i\bar{m} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -\psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix} - 3i(-\psi_3^\dagger\psi_1 - \psi_4^\dagger\psi_2 - \psi_1^\dagger\psi_3 - \psi_2^\dagger\psi_4) \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\
 & - 3i(\psi_2^\dagger\psi_1 + \psi_1^\dagger\psi_2 + \psi_4^\dagger\psi_3 + \psi_3^\dagger\psi_4) \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \\ \psi_4 \\ -\psi_3 \end{pmatrix} - 3i(\psi_2^\dagger\psi_1 - \psi_1^\dagger\psi_2 + \psi_4^\dagger\psi_3 - \psi_3^\dagger\psi_4) \begin{pmatrix} \psi_2 \\ -\psi_1 \\ \psi_4 \\ -\psi_3 \end{pmatrix} \\
 & - 3i(\psi_1^\dagger\psi_1 - \psi_2^\dagger\psi_2 + \psi_3^\dagger\psi_3 - \psi_4^\dagger\psi_4) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \\ \psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix} = 0 \tag{6.32}
 \end{aligned}$$

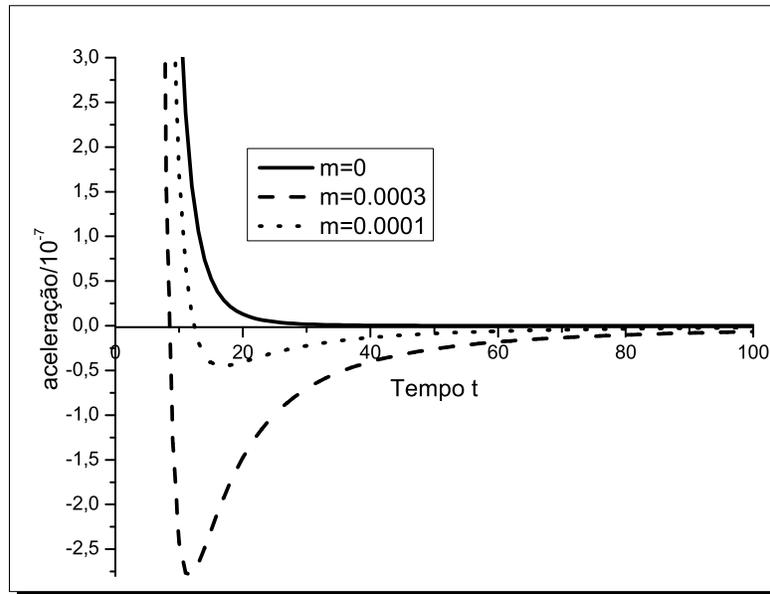
No desenvolvimento destas equações usamos a relação,

$$\epsilon^{abcd}\gamma_a\gamma_b\gamma_c = -6i\gamma_5\gamma^d,$$

que pode ser obtida de (6.17) e (6.18). Passamos agora à análise das soluções cosmológicas para o modelo.

Para os gráficos 6.1 e 6.2 foram escolhidas as seguintes condições iniciais para as componentes espinoriais; $\psi_1 = 1, \psi_2 = 0,02, \psi_3 = 0,03$ e $\psi_4 = 0,01$. Foram testados o caso em que o campo fermiônico é massivo, neste caso com $\bar{m} = 0,0001$ e também, $\bar{m} = 0,0003$ e consideramos também o caso não massivo.

Na figura 6.1, temos o comportamento da aceleração do universo para os seguintes casos: i) um universo onde o único constituinte é o campo fermiônico sem massa. Neste caso observamos (linha contínua) que temos um universo sempre acelerado, com aceleração

FIG. 6.1: Acelerações \ddot{a} vs tempo t para diversos valores de \bar{m} .

decrecendo com o tempo, após um período de grande aceleração. Como o campo fermiônico é não massivo, o universo não possui um regime desacelerado;

ii) a linha pontilhada indica também um universo onde o único constituinte é o campo fermiônico, mas agora massivo, com $\bar{m} = 0.0001$. Neste caso temos inicialmente um período inflacionário, caracterizado pela aceleração inicial seguido de um período de desaceleração crescente-decrescente. Em ambos os casos o período inflacionário é induzido pelo termo σ^2 que contribui para o referido regime, este por sua vez decai com o aumento do fator de escala. Isto indica que apenas no início do universo podemos encontrar uma densidade de spin capaz de acelerá-lo;

iii) no caso representado pela linha tracejada, temos o campo fermiônico massivo com

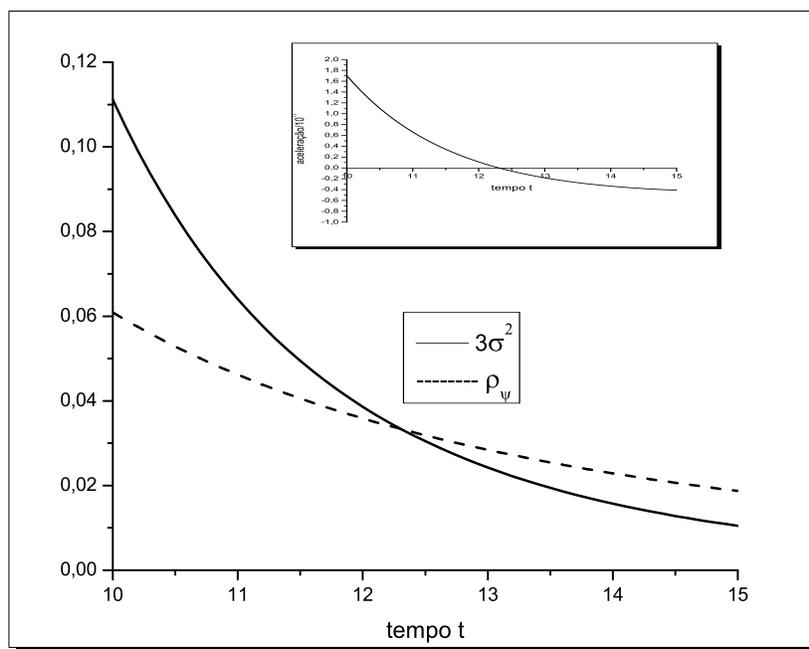


FIG. 6.2: Figuras representando a densidade de energia do campo fermiônico e o termo $3\sigma^2$ em função do tempo. No quadro menor temos a aceleração v.s tempo

termo de massa maior ($\bar{m} = 0.003$). Observamos que o fato do campo ser mais massivo faz com que o universo entre no regime desacelerado mais rapidamente que no caso do campo com menor massa. Além disto, produz-se uma maior desaceleração. Para tempos posteriores, as curvas da aceleração convergem assintoticamente para zero.

Na figura 6.2, representamos a densidade de energia do campo fermiônico, linha tracejada, juntamente com o termo responsável pelo regime acelerado, ou seja, $3\sigma^2$. Notamos que inicialmente o termo referente a densidade de spin do férmion é dominante e o universo está no regime acelerado. Este termo decai mais rapidamente que a densidade de energia do campo fermiônico. Como a densidade de energia contribui para um regime desacelerado, quando esta supera o termo $3\sigma^2$ o universo entra em um regime desacelerado. Observamos também no gráfico anexo a figura 6.2, a aceleração em função do tempo. Observamos que no ponto onde $\rho_\psi = 3\sigma^2$, ocorre o fim do regime inflacionário. As situações representadas na figura 6.2, referem-se ao caso em que $\bar{m} = 0.0001$.

6.5 Conclusões

Vimos no presente capítulo que dentro do contexto da teoria de Einstein-Cartan, um campo fermiônico massivo pode gerar o regime inflacionário e posteriormente vir a se comportar como matéria ordinária. Inferimos que no início do universo quando o fator de escala é pequeno, a densidade de spin do campo fermiônico é grande o suficiente para promover uma rápida expansão acelerada. Com a rápida expansão do universo, a densidade de spin decai, assim o termo $\bar{m}\bar{\psi}\psi$, que contribui para desacelerar o universo, domina a sua evolução. Deste modo temos o início de uma era desacelerada. A densidade de spin é responsável pelo regime inflacionário, e o termo massivo pelo regime desacelerado. Concluimos então que a inflação pode ser gerada por uma propriedade da matéria, o spin, não necessitando

neste modelo da inclusão de um campo extra para gerar este regime. Notamos também que para um campo fermiônico não massivo, temos apenas um regime inicialmente acelerado, e o posterior decaimento desta para um valor assintoticamente nulo.

CAPÍTULO 7

Conclusões e Trabalhos Futuros

Em nosso trabalho vimos que um campo fermiônico, com um potencial de auto-interação adequado, que é uma função dos invariantes escalar e pseudoescalar, pode ser responsável pelo atual período de expansão acelerada do nosso universo, comportando-se como energia escura. Além dessa possibilidade, o campo fermiônico pode também ser o responsável pela curta expansão acelerada que ocorreu no início do universo, ou seja, o campo pode simular o comportamento do inflaton, e para tempos posteriores, o potencial fermiônico de auto-interação tende a um valor constante, comportando-se desta forma como um termo de constante cosmológica, provocando então a atual era acelerada. A matéria é criada em nosso cenário cosmológico através de processos irreversíveis (associados à presença de um termo de pressão dinâmica no modelo) de transferência de energia do campo gravitacional para o campo de matéria. Desta forma conseguimos estabelecer a unificação dos regimes cosmológicos, do período inflacionário, passando pelo regime de desaceleração e atingindo a era de domínio da energia escura.

Por outro lado, vimos que o campo fermiônico quando acoplado não minimamente com

o escalar de curvatura, pode simular os resultados observacionais relativos aos parâmetros de densidade, distância de luminosidade, época de transição do regime desacelerado para acelerado, em termos do redshift. Então a atual era acelerada do universo, a partir de campos fermiônicos tende ao modelo Λ CDM quando o acoplamento é mínimo.

Podemos também considerar o campo fermiônico no contexto da teoria de Einstein-Cartan, e concluímos que o regime inflacionário pode ter sido induzido pela interação tipo spin-spin, que surge devido ao efeito de um espaço-tempo com conexões não simétricas, ou seja, devido à torção. Este termo de interação, que está associado a torção, decai rapidamente com a expansão do universo, e o férmion então faz o papel de matéria ordinária desacelerando assim o universo.

Pretendemos dar sequência a essa linha de pesquisa em cosmologia analisando o efeito de termos quadráticos em R na ação, dentro do contexto de um espaço-tempo com torção. Para este caso teremos uma equação dinâmica para o campo de torção, e não mais uma relação algébrica como no caso analisado nesta tese. Como consequência de um campo dinâmico para a torção, temos a propagação desta, devido aos termos proporcionais a R^2 . Estes surgem no limite da teoria de campos das strings, ao estudar o processo de interação do tipo espalhamento gráviton-gráviton [16]. Estas teorias com torção dinâmica implicam em aspectos macroscópicos da torção, que valem ser estudados sob o ponto de vista cosmológico. Investigaremos o modelo fermiônico dentro do formalismo de Palatini, formalismo este que considera o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e as conexões $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ como campos independentes. A ação do sistema fornece-nos as equações usuais de campo de Einstein quando variamos a mesma em relação a esses campos, mas no caso geral a ação pode depender de funções da curvatura escalar $f(R)$, e assim as equações de Einstein são modificadas. Neste contexto investigaremos as consequências cosmológicas destas equações quando o campo fermiônico está presente [50].

Apêndice A

As componentes do tensor de energia-momento

A partir da equação (4.27), escrevemos para a componente T^{11} ,

$$T^{11} = \frac{i}{4} \left(\bar{\psi} \Gamma^1 D^1 \psi + \bar{\Gamma}^1 D^1 \psi - D^1 \bar{\psi} \Gamma^1 \psi - D^1 \bar{\psi} \Gamma^1 \psi \right) - g^{11} \mathcal{L},$$

levando-se em conta a homogeneidade do espaço-tempo, ou seja, a métrica de RW, temos

$$T_{11} = a^2 \left[\frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^0 \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}} \gamma^0 \psi \right) - m \bar{\psi} \psi - V \right]. \quad (\text{A.1})$$

Usando-se a equação de Dirac e a sua adjunta dadas por (4.36) e (4.37), multiplicando (4.36) a direita por $\bar{\psi} \gamma^0$ e a equação (4.37) por $\gamma^0 \psi$ pela esquerda, obtemos,

$$\bar{\psi} \gamma^0 \dot{\psi} + \frac{3}{2} H \bar{\psi} \gamma^0 \psi + im \bar{\psi} \psi + i \bar{\psi} \frac{dV}{d\psi} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{\bar{\psi}} \gamma^0 \psi + \frac{3}{2} H \bar{\psi} \gamma^0 \psi - im \bar{\psi} \psi - i \frac{dV}{d\psi} \psi = 0. \quad (\text{A.3})$$

Subtraindo-se A2 de A3, temos,

$$\bar{\psi} \gamma^0 \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}} \gamma^0 \psi = -2mi \bar{\psi} \psi - i \left(\bar{\psi} \frac{dV}{d\psi} + \frac{dV}{d\psi} \psi \right), \quad (\text{A.4})$$

que substituída em A1 resulta em

$$T_{11} = a^2 \left[\frac{\bar{\psi}}{2} \frac{dV}{d\psi} + \frac{dV}{d\psi} \frac{\psi}{2} - V \right].$$

Levando-se em conta que

$$p_f = -T_1^1,$$

concluimos finalmente que,

$$p_f = \frac{\bar{\psi}}{2} \frac{dV}{d\psi} + \frac{dV}{d\psi} \frac{\psi}{2} - V.$$

De maneira análoga, vemos que $T_{11} = T_{22} = T_{33}$. Para a componente, $T_{00} = \rho_f$, temos que,

$$\begin{aligned} T_{00} = & \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi - \partial_0 \bar{\psi} \gamma^0 \psi - \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi + \partial_0 \bar{\psi} \gamma^0 \psi \right) - \\ & \left[\frac{i}{2} \left(-\bar{\psi} \gamma^1 \gamma^1 \gamma^0 \frac{\dot{a}}{2a} \psi - \bar{\psi} \gamma^1 \gamma^0 \gamma^1 \frac{\dot{a}}{2a} \psi - \bar{\psi} \gamma^2 \gamma^2 \gamma^0 \frac{\dot{a}}{2a} \psi - \bar{\psi} \gamma^2 \gamma^0 \gamma^2 \frac{\dot{a}}{2a} \psi - \right. \right. \\ & \left. \left. \bar{\psi} \gamma^3 \gamma^3 \gamma^0 \frac{\dot{a}}{2a} \psi - \bar{\psi} \gamma^3 \gamma^0 \gamma^3 \frac{\dot{a}}{2a} \psi \right) - m \bar{\psi} \psi - V \right], \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

usando a álgebra das matrizes γ , obtemos,

$$T_{00} = \rho_f = m \bar{\psi} \psi + V. \quad (\text{A.6})$$

Apêndice B

Dedução da equação 5.9

Variação do termo

$$\begin{aligned}\xi\bar{\psi}\psi\delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} &= \xi\bar{\psi}\psi g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}[\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}(\delta g_{\lambda\rho}) - \nabla_{\nu}\nabla_{\rho}(\delta g_{\lambda\mu}) \\ &\quad - \nabla_{\mu}\nabla_{\lambda}(\delta g_{\rho\nu}) + \nabla_{\rho}\nabla_{\lambda}(\delta g_{\mu\nu})].\end{aligned}$$

Fazendo

$$\nabla_{\nu}[\nabla_{\mu}(\delta g_{\lambda\rho})\bar{\psi}\psi] = \bar{\psi}\psi\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}(\delta g_{\lambda\rho}) + \nabla_{\mu}(\delta g_{\lambda\rho})\nabla_{\nu}(\bar{\psi}\psi),$$

usando o teorema de Gauss concluímos que o primeiro termo desta equação é nulo, assim

$$\bar{\psi}\psi\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}(\delta g_{\lambda\rho}) = -\nabla_{\mu}(\delta g_{\lambda\rho})\nabla_{\nu}(\bar{\psi}\psi),$$

então

$$\xi\bar{\psi}\psi\delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \xi\bar{\psi}\psi g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}[-\nabla_{\mu}(\delta g_{\lambda\rho})\nabla_{\nu}(\bar{\psi}\psi) +$$

$$\nabla_\nu(\delta g_{\lambda\mu})\nabla_\rho(\bar{\psi}\psi) + \nabla_\mu(\delta g_{\rho\nu})\nabla_\lambda(\bar{\psi}\psi) - \nabla_\rho(\delta g_{\mu\nu})\nabla_\lambda(\bar{\psi}\psi)].$$

Fazendo agora,

$$\nabla_\mu [\delta g_{\lambda\rho}\nabla_\nu(\bar{\psi}\psi)] = \nabla_\mu(\delta g_{\lambda\rho})\nabla_\nu(\bar{\psi}\psi) + \delta g_{\lambda\rho}\nabla_\mu\nabla_\nu(\bar{\psi}\psi),$$

usando o teorema de Gauss novamente concluímos que,

$$\nabla_\mu(\delta g_{\lambda\rho})\nabla_\nu(\bar{\psi}\psi) = -\delta g_{\lambda\rho}\nabla_\mu\nabla_\nu(\bar{\psi}\psi).$$

Assim

$$\begin{aligned} \xi\bar{\psi}\psi\delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} &= \xi\bar{\psi}\psi g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}[\nabla_\mu\nabla_\nu(\delta g_{\lambda\rho}) - \nabla_\nu\nabla_\rho(\bar{\psi}\psi)\delta g_{\lambda\mu} \\ &\quad - \nabla_\mu\nabla_\lambda(\bar{\psi}\psi)\delta g_{\rho\nu} + \nabla_\rho\nabla_\lambda(\bar{\psi}\psi)\delta g_{\mu\nu}]. \end{aligned}$$

Utilizando,

$$\delta g_{\lambda\rho} = -g_{\theta\lambda}g_{\sigma\rho}\delta g^{\theta\sigma},$$

com isto obtemos após algumas simplificações,

$$\xi\bar{\psi}\psi\delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \xi \left[-2g^{\lambda\rho}g_{\sigma\theta}\nabla_\lambda\nabla_\rho(\bar{\psi}\psi) + 2\nabla_\theta\nabla_\sigma(\bar{\psi}\psi) \right] \delta g^{\theta\sigma}.$$

Mas $\nabla_\mu(\bar{\psi}\psi) = \partial_\mu(\bar{\psi}\psi) = (\partial_\mu\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(\partial_\mu\psi)$ e usando agora (4.20) e (4.21), temos,

$$\nabla_\mu(\bar{\psi}\psi) = (D_\mu\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(D_\mu\psi).$$

Agora, as duplas derivadas covariantes que surgem tornam-se,

$$\nabla_\nu\nabla_\mu(\bar{\psi}\psi) = \partial_\nu(\partial_\mu(\bar{\psi}\psi)) - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma\partial_\sigma(\bar{\psi}\psi),$$

de tal forma que

$$\nabla_\nu\nabla_\mu(\bar{\psi}\psi) = \partial_\nu[(D_\mu\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(D_\mu\psi)] - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma[(D_\sigma\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(D_\sigma\psi)].$$

Agora fazendo,

$$D_\nu(D_\mu\bar{\psi}) = \partial_\nu(D_\mu\bar{\psi}) + (D_\mu\bar{\psi})\Omega_\nu, \quad D_\nu(D_\mu\psi) = \partial_\nu(D_\mu\psi) - \Omega_\nu(D_\mu\psi),$$

e levando estes resultados na equação anterior, temos após algumas simplificações,

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \nabla_\mu(\bar{\psi}\psi) &= D_\nu(D_\mu\bar{\psi})\psi + (D_\mu\bar{\psi})(D_\nu\psi) + (D_\nu\bar{\psi})(D_\mu\psi) \\ &\quad + \bar{\psi}D_\nu(D_\mu\psi) - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(D_\sigma\bar{\psi})\psi - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma\bar{\psi}(D_\sigma\psi). \end{aligned}$$

Retornando ao cálculo original, temos,

$$\begin{aligned} \xi\bar{\psi}\psi\delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} &= 2\xi\{-g^{\lambda\rho}g_{\sigma\theta}[D_\lambda(D_\rho\bar{\psi})\psi + (D_\rho\bar{\psi})(D_\lambda\psi) + (D_\lambda\bar{\psi})(D_\rho\psi) \\ &\quad + \bar{\psi}D_\lambda(D_\rho\psi) - \Gamma_{\lambda\rho}^\kappa(D_\kappa\bar{\psi})\psi - \Gamma_{\lambda\rho}^\kappa\bar{\psi}(D_\kappa\psi)] + [(D_\theta(D_\sigma\bar{\psi})\psi + (D_\sigma\bar{\psi})(D_\theta\psi) \\ &\quad + (D_\theta\bar{\psi})(D_\sigma\psi) + \bar{\psi}D_\theta(D_\sigma\psi) - \Gamma_{\theta\sigma}^\kappa(D_\kappa\bar{\psi})\psi - \Gamma_{\theta\sigma}^\kappa\bar{\psi}(D_\kappa\psi)]\}\delta g^{\theta\sigma}. \end{aligned}$$

Definimos

$$\mathcal{T}_{\lambda\rho} = (D_{(\lambda}D_{\rho)}\bar{\psi})\psi + 2(D_{(\rho}\bar{\psi}D_{\lambda)}\psi) + \bar{\psi}(D_{(\lambda}D_{\rho)}\psi) - \Gamma_{\lambda\rho}^\kappa(D_\kappa\bar{\psi})\psi - \Gamma_{\lambda\rho}^\kappa\bar{\psi}(D_\kappa\psi),$$

e assim obtemos (5.9).

Apêndice C

Dedução das equações 5.17 e 5.18

Primeiramente calculamos as quantidades $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ com a métrica de RW. Assim usando a equação

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu\nu} = & (D_\nu D_\mu \bar{\psi})\psi + (D_\mu D_\nu \bar{\psi})\psi + 2D_\mu \bar{\psi} D_\nu \psi + 2D_\nu \bar{\psi} D_\mu \psi \\ & + \bar{\psi}(D_\nu D_\mu \psi) + \bar{\psi}(D_\mu D_\nu \psi) - 2\Gamma_{\mu\nu}^\sigma (D_\sigma \bar{\psi})\psi - 2\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \bar{\psi} D_\sigma \psi, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

obtemos os seguintes resultados,

$$\mathcal{T}_{00} = 2\ddot{\bar{\psi}}\psi + 4\dot{\bar{\psi}}\dot{\psi} + 2\bar{\psi}\ddot{\psi}, \quad (\text{C.2})$$

$$\mathcal{T}_{11} = \mathcal{T}_{22} = \mathcal{T}_{33} = 2a\dot{a}(\dot{\bar{\psi}}\psi + \bar{\psi}\dot{\psi}),$$

ou ainda de forma compacta,

$$\mathcal{T}_{00} = 2\ddot{\Psi} \quad (\text{C.3})$$

$$\mathcal{T}_{11} = \mathcal{T}_{22} = \mathcal{T}_{33} = 2a\dot{a}\dot{\Psi},$$

onde definimos o bilinear $\Psi = \bar{\psi}\psi$.

Agora da definição do tensor de energia-momento,

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{4} \left[\bar{\psi}\Gamma^\mu D^\nu \psi + \bar{\psi}\Gamma^\nu D^\mu \psi - D^\nu \bar{\psi}\Gamma^\mu \psi - D^\mu \bar{\psi}\Gamma^\nu \psi \right] -$$

$$g^{\mu\nu} \mathcal{L}_f + \frac{\xi}{2} (\mathcal{T}^{\mu\nu} - \mathcal{T}^{\sigma\tau} g_{\sigma\tau} g^{\mu\nu}),$$

então,

$$T^{00} = V + \frac{\xi}{2} [-\mathcal{T}^{11} g_{11} - \mathcal{T}^{22} g_{22} - \mathcal{T}^{33} g_{33}],$$

usando as relações dadas em B.3, obtemos a equação (5.17)

$$T^{00} = \rho_f = V + 3\xi H \dot{\Psi}.$$

Cabe lembrar que nestes cálculos, usamos as equações de Dirac para eliminar as derivadas de ψ e $\bar{\psi}$, conforme apêndice A.

De forma análoga, obtemos a pressão do campo fermiônico acoplado não minimamente a partir do cálculo da componente $T^{11} = T^{22} = T^{33}$ do tensor de energia-momento do campo fermiônico, assim por exemplo,

$$T_{11} = a^2 \left(V - \frac{\bar{\psi}}{2} \frac{dV}{d\psi} - \frac{dV}{d\psi} \frac{\psi}{2} - \frac{\xi}{2} R\Psi \right) + \frac{\xi}{2} (\mathcal{T}_{11} - \mathcal{T}^{\sigma\tau} g_{\sigma\tau} g_{11}). \quad (\text{C.4})$$

Usando o fato que $p_f = -T_1^1$, substituindo-se as relações B.3, obtemos a equação (5.18),

$$p_f = \left(\frac{\bar{\psi}}{2} \frac{dV}{d\psi} + \frac{dV}{d\psi} \frac{\psi}{2} + \frac{\xi}{2} R\Psi - V \right) - \xi (\ddot{\Psi} + 2H\dot{\Psi}). \quad (\text{C.5})$$

Apêndice D

Dedução da equação 5.20

A pressão para o campo fermiônico acoplado não minimamente é dada por,

$$p_\psi = \underbrace{\frac{\bar{\psi}}{2} \frac{dV}{d\bar{\psi}} + \frac{dV}{d\psi} \frac{\psi}{2}}_{p_{usual}} - V + \frac{\xi}{2} R \bar{\psi} \psi - \xi \ddot{\Psi} - 2\xi H \dot{\Psi}, \quad (\text{D.1})$$

e a densidade de energia é

$$\rho_\psi = V + 3\xi H \dot{\Psi}. \quad (\text{D.2})$$

Agora fazendo a operação,

$$\dot{\rho}_\psi + 3H(\rho_\psi + p_\psi) = \dot{V} + 3\xi \dot{H} \dot{\Psi} + 3\xi H \ddot{\Psi} + 3H \rho_\psi + 3H p_\psi,$$

substituindo-se D.1, temos

$$\dot{\rho}_\psi + 3H(\rho_\psi + p_\psi) = \dot{V} + 3\xi \dot{H} \dot{\Psi} + 3H^2 \xi \dot{\Psi} + 3H p_{usual} + 3HR \frac{\xi}{2} \Psi.$$

Usando,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\bar{\psi}} \frac{dV}{d\bar{\psi}} + \frac{dV}{d\psi} \dot{\psi} = -\frac{3}{2} H \bar{\psi} \frac{dV}{d\bar{\psi}} + i \frac{\xi}{2} R \bar{\psi} \gamma^0 \frac{dV}{d\bar{\psi}} \\ &\quad - \frac{dV}{d\psi} \frac{3}{2} H \psi - \frac{dV}{d\psi} i \frac{\xi}{2} R \gamma^0 \psi \end{aligned}$$

temos após algumas simplificações,

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_\psi + 3H(\rho_\psi + p_\psi) &= i\frac{\xi}{2}R \left(\bar{\psi}\gamma^0 \frac{dV}{d\bar{\psi}} - \frac{dV}{d\psi} \gamma^0 \psi \right) \\ &+ 3\xi(\dot{H} + H^2)\dot{\Psi} + 3HR\frac{\xi}{2}\Psi. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Usando a equação da aceleração

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_\psi + 3H(\rho_\psi + p_\psi) &= -\frac{\xi\dot{\Psi}}{2} \frac{(\rho + 3p)}{1 - \xi\Psi} + 3HR\frac{\xi}{2}\Psi + \\ &i\frac{\xi}{2}R \left(\bar{\psi}\gamma^0 \frac{dV}{d\bar{\psi}} - \frac{dV}{d\psi} \gamma^0 \psi \right), \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

utilizando-se agora as equações de Dirac acopladas não minimamente, destas resulta que,

$$3H\Psi = -\dot{\Psi} - i \left(\bar{\psi}\gamma^0 \frac{dV}{d\bar{\psi}} - \frac{dV}{d\psi} \gamma^0 \psi \right),$$

substituindo-se em D.4 temos após algumas manipulações,

$$\dot{\rho}_\psi + 3H(\rho_\psi + p_\psi) = -\frac{\xi\dot{\Psi}\rho}{1 - \xi\Psi}. \quad (\text{D.5})$$

Apêndice E

Variação das conexões e tetradas

Partimos da ação para o campo gravitacional,

$$S_g = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x [ee_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}^{ab}], \quad (\text{E.1})$$

variando esta com relação a conexão de spin, ω_ν^{ab} , temos,

$$\begin{aligned} \delta S = & -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x ee_a^\mu e_b^\nu \{ \partial_\mu (\delta\omega_\nu^{ab}) - \partial_\nu (\delta\omega_\mu^{ab}) \\ & + \delta\omega_\mu^{ac} \omega_{\nu c}^b + \omega_\mu^{ac} (\delta\omega_{\nu c}^b) - \delta\omega_\nu^{ac} \omega_{\mu c}^b - \omega_\nu^{ac} \delta\omega_{\mu c}^b \}. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Agora usando o fato de que,

$$\partial_\mu (ee_a^\mu e_b^\nu \delta\omega_\nu^{ab}) = \partial_\mu (ee_a^\mu e_b^\nu) \delta\omega_\nu^{ab} + ee_a^\mu e_b^\nu \partial_\mu (\delta\omega_\nu^{ab}), \quad (\text{E.3})$$

onde podemos usar o teorema da divergência para concluir a nulidade do primeiro termo de E.3. A ação torna-se,

$$\begin{aligned} \delta S = & -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \{ -\partial_\mu (ee_a^\mu e_b^\nu) \delta\omega_\nu^{ab} + \partial_\nu (ee_a^\mu e_b^\nu) \delta\omega_\mu^{ab} + \\ & e[\delta\omega_\mu^{ac} e_a^\mu e_b^\nu \omega_{\nu c}^b + \delta\omega_{\nu c}^b e_a^\mu e_b^\nu \omega_\mu^{ac} - \delta\omega_\nu^{ac} e_a^\mu e_b^\nu \omega_{\mu c}^b - \delta\omega_{\mu c}^b \omega_\nu^{ac} e_a^\mu e_b^\nu] \}. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Fazendo agora

$$\partial_\mu (ee_a^\mu e_b^\nu) = -ee_\sigma^c (\partial_\mu e_c^\sigma) e_a^\mu e_b^\nu + ee_b^\nu (\partial_\mu e_a^\mu) + ee_a^\mu (\partial_\mu e_b^\nu), \quad (\text{E.5})$$

utilizando-se o postulado das tetradas escrevemos a equação E.5, após algumas manipulações como,

$$\begin{aligned} \partial_\nu (ee_a^\mu e_b^\nu) = e & \underbrace{\Gamma_{\sigma\mu}^\sigma}_{(\sigma \rightarrow \rho)} e_a^\mu e_b^\nu - \underbrace{ee_b^\nu e_a^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\mu}_{(\mu \rightarrow \rho, \rho \rightarrow \mu)} + ee_b^\nu e_a^\mu e_\sigma^c e_d^\sigma \omega_{\mu c}^d - ee_b^\nu e_d^\mu \omega_{\mu a}^d \\ & - e \Gamma_{\rho\mu}^\nu e_a^\mu e_b^\rho - ee_a^\mu e_d^\nu \omega_{\mu b}^d. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Com isto podemos escrever,

$$= ee_a^\mu e_b^\nu C_{\rho\mu}^\rho + ee_b^\nu e_a^\mu \omega_{\mu c}^c - ee_b^\nu e_d^\mu \omega_{\mu a}^d - ee_d^\nu e_a^\mu \omega_{\mu b}^d - ee_b^\nu e_a^\mu \Gamma_{\rho\mu}^\nu, \quad (\text{E.7})$$

onde $C_{\rho\mu}^\rho$ é o tensor torção. Usando a relação,

$$e_a^\mu e_b^\nu \Gamma_{\rho\mu}^\nu = \frac{1}{2} e_a^\mu e_b^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\nu - \frac{1}{2} e_a^\mu e_b^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\nu = \frac{1}{2} e_a^\mu e_b^\rho C_{\rho\mu}^\nu,$$

obtemos finalmente,

$$\begin{aligned} \partial_\mu (ee_a^\mu e_b^\nu) = ee_a^\mu e_b^\nu C_{\rho\mu}^\rho - \frac{1}{2} ee_b^\rho e_a^\mu C_{\rho\mu}^\nu + \\ ee_a^\mu e_b^\nu \omega_{\mu c}^c - ee_b^\nu e_d^\mu \omega_{\mu a}^d - ee_a^\mu e_d^\nu \omega_{\mu b}^d. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} \partial_\nu (ee_a^\mu e_b^\nu) = ee_a^\mu e_b^\nu C_{\rho\nu}^\rho - \frac{1}{2} ee_a^\rho e_b^\nu C_{\rho\nu}^\mu + \\ ee_a^\mu e_b^\nu \omega_{\nu c}^c - ee_d^\nu e_a^\mu \omega_{\nu b}^d - ee_d^\mu e_b^\nu \omega_{\nu a}^d. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Agora escrevemos E.4 como,

$$\begin{aligned} \delta S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \{ & -ee_a^\mu e_b^\nu C_{\rho\mu}^\rho \delta\omega_\nu^{ab} + \frac{1}{2} ee_a^\mu e_b^\rho C_{\rho\mu}^\nu \delta\omega_\nu^{ab} - ee_b^\nu e_a^\mu \omega_{\mu c}^c \delta\omega_\nu^{ab} + \\ & ee_b^\nu e_d^\mu \omega_{\mu a}^d \delta\omega_\nu^{ab} + ee_d^\nu e_a^\mu \omega_{\mu b}^d \delta\omega_\nu^{ab} + ee_b^\nu e_a^\mu C_{\rho\nu}^\rho \delta\omega_\mu^{ab} - \frac{1}{2} ee_b^\nu e_a^\rho C_{\rho\nu}^\mu \delta\omega_\mu^{ab} + \\ & ee_b^\nu e_a^\mu \omega_{\nu c}^c \delta\omega_\mu^{ab} - ee_d^\nu e_a^\mu \omega_{\nu b}^d \delta\omega_\mu^{ab} - ee_b^\nu e_d^\mu \omega_{\nu a}^d \delta\omega_\mu^{ab} + e[e_b^\nu e_a^\mu \omega_{\nu c}^b \delta\omega_\mu^{ac} + \\ & e_b^\nu e_a^\mu \omega_{\mu}^{ac} \delta\omega_{\nu c}^b - e_b^\nu e_a^\mu \omega_{\mu c}^b \delta\omega_\nu^{ac} - e_b^\nu e_a^\mu \omega_{\nu}^{ac} \delta\omega_{\mu c}^b] \}. \end{aligned}$$

Agora procedendo com os termos,

$$\bullet e_a^\mu e_b^\nu C_{\rho\mu}^\rho \delta\omega_\nu^{ab} \underset{\mu \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \mu}{=} e_a^\nu e_b^\mu C_{\rho\nu}^\rho \delta\omega_\mu^{ab} = -e_a^\nu e_b^\mu C_{\rho\nu}^\rho \delta\omega_\mu^{ba},$$

onde trocamos a por b na última passagem, de forma análoga

$$\bullet e_a^\mu e_b^\rho C_{\rho\mu}^\nu \delta\omega_\nu^{ab} \underset{\mu \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \mu}{=} e_a^\nu e_b^\rho C_{\rho\nu}^\mu \delta\omega_\mu^{ab} = -e_b^\nu e_a^\rho C_{\rho\nu}^\mu \delta\omega_\mu^{ba},$$

$$\bullet e_a^\mu e_d^\nu \omega_{\mu b}^d \delta\omega_\nu^{ab} \underset{\mu \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \mu}{=} e_a^\nu e_d^\mu \omega_{\nu b}^d \delta\omega_\mu^{ab} = -e_b^\nu e_d^\mu \omega_{\nu a}^d \delta\omega_\mu^{ab}$$

$$\bullet e_a^\mu e_b^\nu \omega_{\nu c}^b \delta\omega_\mu^{ac} \underset{c \rightarrow b, b \rightarrow c}{=} e_a^\mu e_c^\nu \omega_{\nu b}^c \delta\omega_\mu^{ab}$$

$$\bullet e_a^\mu e_b^\nu \omega_{\mu c}^b \delta\omega_\nu^{ac} \underset{c \rightarrow b, b \rightarrow c}{=} e_a^\mu e_c^\nu \omega_{\mu b}^c \delta\omega_\nu^{ab}.$$

Substituindo-se estas relações na ação, e após algumas simplificações levando-se em conta as propriedades de simetria e antisimetria da conexão de spin temos,

$$\delta S = -\frac{1}{8\pi G} \int d^4 x e e_b^\nu e_a^\rho \delta\omega_\mu^{ab} \left\{ -C_{\sigma\nu}^\sigma \delta_\rho^\mu - \frac{1}{2} C_{\rho\nu}^\mu \right\}, \quad (\text{E.10})$$

e levando em conta que

$$e_b^\nu e_a^\rho \delta\omega_\mu^{ab} C_{\sigma\nu}^\sigma \delta_\rho^\mu = -\frac{1}{2} e_a^\nu e_b^\rho \delta\omega_\mu^{ab} C_{\sigma\nu}^\sigma \delta_\rho^\mu + \frac{1}{2} e_a^\nu e_b^\rho \delta\omega_\mu^{ab} C_{\sigma\rho}^\sigma \delta_\nu^\mu,$$

obtemos finalmente a expressão final,

$$\delta S = -\frac{1}{8\pi G} \int d^4 x e e_a^\nu e_b^\rho \delta\omega_\mu^{ab} \left\{ \frac{1}{2} C_{\sigma\nu}^\sigma \delta_\rho^\mu - \frac{1}{2} C_{\rho\nu}^\mu - \frac{1}{2} C_{\sigma\rho}^\sigma \delta_\nu^\mu \right\}. \quad (\text{E.11})$$

Agora, efetuando a variação do setor fermiônico da ação, com relação a conexão de spin obtemos,

$$\delta S_f = \int d^4 x e \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi - \frac{i}{4} \delta\omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi} + \frac{i}{4} \delta\omega_\mu^{ab} \bar{\psi} \sigma_{ab}) \gamma^\mu \psi \right], \quad (\text{E.12})$$

assim

$$\delta S_f = \int d^4 x e \delta\omega_\mu^{ab} \left[-\frac{i}{4} (\bar{\psi} \gamma^\mu \sigma_{ab} \psi + \bar{\psi} \sigma_{ab} \gamma^\mu \psi) \right],$$

e finalmente,

$$\delta S_f = \int d^4x e \delta \omega_\mu^{ab} S_{ab}^\mu, \quad (\text{E.13})$$

com a densidade de spin definida como,

$$S_{ab}^\mu = \frac{1}{8} \bar{\psi} \{ \gamma^\mu, \sigma_{ab} \} \psi.$$

Aplicando-se o princípio da mínima ação na ação total do sistema, ou seja

$$\delta(S_g + S_f) = \delta S_g + \delta S_f = 0,$$

obtemos de E.11 e E.13, a equação,

$$C_{\kappa\lambda}^\mu + C_{\sigma\kappa}^\sigma \delta_\lambda^\mu - C_{\sigma\lambda}^\sigma \delta_\kappa^\mu = 16\pi G S_{\lambda\kappa}^\mu. \quad (\text{E.14})$$

E.1 Variação das tetradas no setor gravitacional e fermiônico

Variando-se o setor gravitacional da ação dada por E.1, em relação ao campo das tetradas, obtemos

$$\delta S_g = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[\delta(e) e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}^{ab} + e \delta(e_a^\mu e_b^\nu) R_{\mu\nu}^{ab} \right]. \quad (\text{E.15})$$

Usando as relações,

$$\delta e = e e_n^\beta \delta e_\beta^n, \quad \delta e_a^\mu = -e_a^\beta e_n^\mu \delta e_\beta^n,$$

obtemos após algumas manipulações,

$$\delta S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \delta e_\beta^n \{ e_\beta^n e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}^{ab} - e_b^\nu e_a^\beta e_n^\mu R_{\mu\nu}^{ab} - e_a^\mu e_b^\beta e_n^\nu R_{\mu\nu}^{ab} \}.$$

Então temos

$$\delta S_g = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x e \delta e_\beta^n \{ e_n^\beta R - 2R_{\nu n}^{\nu\beta} \}, \quad (\text{E.16})$$

onde usamos o fato de que $R_{n\nu}^{\beta\nu} = R_{\nu n}^{\nu\beta}$.

Agora da ação de Dirac, variando-a em relação ao campo de tetradas, temos,

$$\delta S_f = \int d^4x \delta(e) \mathcal{L}_f + \int d^4x e \frac{i}{2} \left\{ \bar{\psi} \delta e_a^\mu \gamma^a D_\mu \psi - D_\mu \bar{\psi} \delta e_a^\mu \gamma^a \psi \right\}. \quad (\text{E.17})$$

Usando as relações dadas em E.15, obtemos,

$$\delta S_f = \int d^4x \delta(e_n^n) \left\{ e_n^\beta \mathcal{L}_f + \frac{i}{2} \left[-e_n^\mu \bar{\psi} \gamma^\beta D_\mu \psi + e_n^\mu D_\mu \bar{\psi} \gamma^\beta \psi \right] \right\}, \quad (\text{E.18})$$

aplicando-se o princípio da mínima ação, na ação total do sistema, temos

$$\delta S_g + \delta S_f = 0.$$

A partir de E.16 e E.18 obtemos a equação,

$$\int d^4x e \delta e_\beta^n \left\{ -\frac{1}{16\pi G} \left[e_n^\beta R - 2R^{\nu\beta}{}_{\nu n} \right] + e_n^\beta \mathcal{L}_f + \frac{i}{2} \left[-e_n^\mu \bar{\psi} \gamma^\beta D_\mu \psi + e_n^\mu D_\mu \bar{\psi} \gamma^\beta \psi \right] \right\}, \quad (\text{E.19})$$

multiplicando-a por $e_m^\rho \eta^{mn}$, temos finalmente,

$$R^{\beta\rho} - \frac{1}{2} g^{\beta\rho} R = 8\pi G \left\{ \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\beta D^\rho \psi - D^\rho \bar{\psi} \gamma^\beta \psi] - g^{\beta\rho} \mathcal{L}_f \right\}. \quad (\text{E.20})$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. H. Guth, Phys. Rev. D23(1982); A. Albrecht e P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 48, 1220 (1982); A. D Linde, Phys. Lett. B 108, 389 (1982).
- [2] J. L. Sievers et al, astro-ph/0205387; S. Perlmutter et al, Astrophys. J. 517, 565 (1999); M. S. Turner and A. G. Riess, Astrophys. J. 569, 18 (2002); A. G. Riess et al, Astrophys. J. 560, 49 (2001).
- [3] R. R. Caldwell, R. Dave, P. J. Steinhardt Phys. Rev. Lett 80, 1582 (1998); I. Zlatev, L. Wang, P. J. Steinhardt Phys. Rev. Lett 82, 896 (1999); Chimento L. P., Jakubi A. S. and Pavón D. Phys. Rev D 62 063508 (2000); P. J. E. Peebles and Ratra, Rev. mod. Phys. 75, 559 (2003);
- [4] A. Yu. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, Phys. Lett. B511, 265 (2001); J. C. Fabris, S. V. B. Gonçalves, P. E. de Souza, Gen. Relativ. Gravit. 34, 53 (2002); M. C. Bento, O. Bertolami, A. a. Sen Phys. Rev. D66, 043507 (2002); A. Dev, J. S. Alcaniz, D. Jain, Phys. Rev. D67, 023515 (2003); G. M. Kremer, Gen. Relat. Grav. 35, 1459 (2003); Chimento L. P., Jakubi A. S. and Pavón D. Phys. Rev. D 67, 087302 (2003).
- [5] A. Sen. J. High Energy Phys. 04, 48 (2002); T. Padmanabhan, T., Phys. Rev. D 66, 021301(R) (2002); J. S. Bagla, H. K. Jassal, T. Padmanabhan, Phys. Rev. D 67, 063504 (2003).

- [18] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman Company, San Francisco, 1973).
- [19] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, 1996).
- [20] R. Balian and J. Zinn, *Methods in Field Theory* (North-Holland Publishing Company & World Scientific Publishing, 1981).
- [21] R. A. d' Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* (Oxford University Press, 2005).
- [22] D. N. Vollick. arxiv:astro-ph/0306630.
- [23] L. Landau, E. Lifchitz, *Teoria do Campo* (Hemus, 1980).
- [24] R. E. de Souza, *Introdução à Cosmologia* (Editora da Universidade de São Paulo, 2004).
- [25] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton Series in Physics, 1993).
- [26] A. Linde, *Particle physics as inflationary cosmology* (Harwood Academic Publisher, 1993).
- [27] C. L. Bennet et al., *Astrophys. J. Supp.* 148, 1 (2003).
- [28] Riess, A.G, et al, *Astrophys.J.*607,687(2004).
- [29] F. Quevedo, *Lectures on String and Brane Cosmology* hep-th/0210292.
- [30] T. Thiemann. astro-ph/0607380
- [31] A. Baushev. astro-ph/08090235
- [32] T. Padmanabhan, *Cosmology and Astrophysics* (Cambridge University Press, 1996).
- [33] C. Cercignani, G. Kremer, *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications* (Birkhauser Verlag AG, 2002).

- [34] V. B. Berestetski, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevski, *Quantum Electrodynamics* (Nauka, Moscow, 1989).
- [35] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122, 345 (1961).
- [36] G. M. Kremer and F. P. Devecchi, Phys. Rev. D66, 063503 (2002); 67, 047301 (2003).
- [37] G. M. Kremer and D. S. M. Alves, Gen. Relativ. Graviti. 36, 2039 (2004).
- [38] J. B. Binder, G. M. Kremer, Braz. J. Phys. 35-4B, 1038 (2005).
- [39] M. Roos. *Introduction to cosmology*. John Wiley and Sons, 3 ed.,2003.
- [40] M. Fukugita and P. J. E. Peebles, Astrophys. J. 616, 643 (2004).
- [41] Virey J.M et al., Phys.Rev. D 72 061302 (2005).
- [42] Riess A.G. et al.,Astrophys. J. 659 98 (2007).
- [43] F. W. Hehl, P. V. Heyde e G. D. Kerlick, Phys. Rev. D10(1974);F. W. Hehl, P. V. Heyde e G. D. Kerlick, Rev. Mod. Phys, Vol.48,3(1976);F. W. Hehl e P. V. Heyde, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol.XIX,2(1973).
- [44] W. Arkuszewski, W. Kopczynski e V.N. Ponomariev, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol.XXI,1(1974).
- [45] H. I. Arcos e J. G. Pereira, Int. J. Mod. Phys.D113 (2004)
- [46] K. F. Shie,J. M. Nester e H. J. ho. gr-qc/08053834
- [47] L.C. Garcia de Andrade, Int. J. Mod. Phys, D8,725-729, (1999)
- [48] T.P Sotiriou, S.Liberati. gr-qc/0604006 (2007)
- [49] T. Watanabe e M. Hayashi. gr-qc/0409029
- [50] Vollick D.N. gr-qc/0409068 (2004)