UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Estabilidade assintótica de uma corda com memória parcial

Angelo Miguel Malaquias

CURITIBA-PR
2005

Estabilidade assintótica de uma corda com memória parcial

Angelo Miguel Malaquias

Orientação:

Prof. Higidio Portillo Oquendo

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

CURITIBA-PR

2005

Dedicado a quem folhar,
ler, ou uma linha
aproveitar.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida pelo amor e oportunidades que tem me dado.

À minha família pelo apoio.

Ao meu orientador Higidio Portillo Oquendo pela paciência e atenção.

À Dioni, secretária do mestrado, pelo carinho e dedicação.

E a todos que, de alguma forma, contribuiram para a realização deste trabalho.

Sumário

Abstract

In this Work we found explicit rates of decay of the energy associated to a problem with partial viscoelasticity. Problems with partial viscoelasticity were studied by many authors, for example: [2], [10], [11], [13], [16], [17]. In particular, we cite the work of Rivera & Salvatierra [13] where exponential kernels for the memory are considered, obtaining exponential decay for the energy, however the technics used in this work cannot be used to establish decay of the energy for kernels with polinomial decay. It was the stimulus for work in that address. Using a suitable multiplier technics we got to find estimates which can be used to establish the decay of the energy for exponential and polinomial kernels. For Complete this work, we also prove existence and uniqueness of solution.

Palavras-chave: Viscoelasticity, Decay, Multiplier technics, Memory and Localized dissipation.

Resumo

Neste trabalho obtemos taxas explícitas de decaimento da energia associada a um problema parcialmente viscoelástico. Problemas parcialmente viscoelásticos foram estudados por vários autores, dentre os quais podemos citar: [2], [10], [11], [13], [16], [17]. Em particular, mencionamos o artigo de Rivera & Salvatierra [13] no qual núcleos exponenciais com a memória são considerados, obtendo decaimento exponencial da energia; porém as técnicas usadas nesse trabalho não podem ser aproveitadas para estabelecer o decaimento da energia quando o núcleo decai polinomialmente. Este fato foi o que nos motivou a trabalhar nessa linha de pesquisa. Usando técnicas multiplicativas de forma apropriada conseguimos encontrar estimativas que podem ser usadas para estabelecer o decaimento da energia por núcleos exponenciais ou polinomiais. A título de completar o trabalho, também demonstramos existência e unicidade de solução.

Palavras-chave: Viscoelasticidade, Decaimento, Técnicas multiplicativas, Memória e Discipação Localizada.

Introdução

Consideramos o problema de uma corda oscilante fixa em seus extremos, com uma dissipação localmente distribuída, mais precisamente, um corpo unidimensional composto por uma parte elástica e uma viscoelástica. A dissipação é dada por um efeito de memória, que trabalha sobre uma parte do material. A modelagem do problema é dada pelo seguinte sistema:

$$
\begin{cases}
u_{tt} - \kappa u_{xx} + \displaystyle\int_0^t g(t-s)[c(x)u_x(s)]_x \, ds = 0, \quad x \in]0, L[, \quad t > 0, \\
u(0,t) = 0 = u(L,t), \quad t \geq 0, \\
u(x,0) = u^0(x), \quad x \in [0, L], \\
u_t(x,0) = u^1(x), \quad x \in [0, L].
\end{cases}
$$

Na expressão acima, κ é uma constante positiva relacionada com a densidade e a elasticidade do material. A função g, a qual chamamos de núcleo ou função de relaxação da memória, é uma função suave, positiva e decrescente. Além do mais, se comporta como as funções $e^{-\mu t}$ ou $(1+t)^{-p}$, $p > 2$. O efeito dissipativo é dado pelo termo de convolução

$$
\int_0^t g(t-s)[c(x)u_x(s)]_x \, ds,
$$

que pode ser interpretado como um fator que descreve o envelhecimento da corda, ou seja, a perda de suas propriedades elásticas, que faz a corda parar a medida que o tempo passa. Assumimos que o material é formado por duas partes: a parte elástica, na qual a memória não afeta, e a viscoelástica, aquela em que afeta produzindo um efeito dissipativo. Isto significa, em nosso modelo, que a função c que aparece no termo de convolução é estritamente positiva em uma vizinhança de L (para fixar as idéias) e zero fora dela. Além disso, também assumimos

$$\kappa - c(x) \int_0^\infty g(s)ds > 0, \quad \forall x \in [0, L],$$

condição válida para sólidos viscoelásticos. Uma vez que supomos a corda com os extremos fixos, estabelecemos as condições $u(0,t) = 0$ e $u(L,t) = 0$. Também supondo uma configuração e uma velocidade inicial para a corda, tem-se como dados iniciais $u(x,0) = u^0(x)$ e $u_t(x,0) = u^1(x)$, respectivamente.

Antes de atarcarmos o problema, faz-se necessário algumas observações com relação à notação, como ler o trabalho e alguns resultados básicos.

Sempre que aparecer o símbolo " $:=$ " leia "igual por definição". Às vezes, para indicar que uma expressão "B" é conseqüência de "A", escreveremos "$A \therefore B$" (os três pontinhos podem ser traduzidos pela palavra "donde"). No trabalho existem uma série de pequenos detalhes, que se fôssemos explicitar todos poderíamos acabar perdendo a linha de raciocínio e as idéias principais. Por exemplo, em vários momentos consideraremos funções contínuas em conjuntos compactos $\alpha(x)$, $\alpha'(x)$, $\beta(x)$, $\rho(x)$, etc. Sabemos que funções contínuas em conjuntos compactos possuem máximos e mínimos (Weierstrass); sendo assim, quase todo instante utilizaremos este fato. Estejamos atentos a isto.

Com relação às constantes, é bastante comum, em trabalhos semelhantes a este, denotarmos com uma mesma letra as várias constantes diferentes. Em boa parte das majorações, o que consideramos com relação a estas constantes é basicamente o fato de ser constante, depender ou não de alguma variável e não necessariamente qual o seu valor. Sendo assim, justifica-se o fato de se usar uma única letra. No entanto, embora às vezes façamos isto, não seguiremos muito esta prática e consideraremos várias constantes. A justificativa para proceder assim, é simples. Estando o trabalho pronto, denotar várias constantes diferentes com uma mesma letra dificilmente causará algum problema, visto que já conhecemos o resultado. Mas, no desenvolver deste trabalho surgiram algumas dificuldades técnicas que, pelo menos para um principiante, denotar as constantes com letras diferentes normalmente sugestivas, ajudam e muito sabermos de onde saíram determinadas expressões podendo, assim, retornar ao ponto de origem e fazer as adaptações que por ventura forem necessárias, visto que os funcionais e as majorações, que aparecem no trabalho, não ocorrem de maneira tão natural.

Duas desigualdades muito utilizadas, que apresentaremos no próximo capítulo, serão a desigualdade de Young e a desigualdade de Poincaré. Como nem sempre diremos quando estas desigualdades estão sendo aplicadas, o aparecimento dos números ε e δ, que posteriormente serão fixados de maneira adequada, indicará a aplicação da primeira e o surgimento de uma constante C_p, a da segunda. Levando em consideração estas observações, damos continuidade.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Algumas Noções de Análise Funcional

Definição 1.1 (Norma) *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Uma aplicação*

$$\| \quad \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dita uma norma em E se, para quaisquer $u, v \in E$ e para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, as seguintes condições são satisfeitas:

a) $\|u\| \geq 0$*;*

b) A relação $\|u\| = 0$ *implica* $u = 0$*;*

c) $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$*;*

d) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$*.*

Observação: Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial no qual está dada uma norma. Sendo $v \in E$, em todo o trabalho, denotaremos por $\|v\|_E$ a norma do vetor v do espaço vetorial E. No entanto, em algumas ocasiões, para não sobrecarregar a notação, denotaremos simplesmente $\|v\|$ deixando subentendido que se trata da norma do espaço vetorial ao qual v pertence.

Definição 1.2 (Espaço de Banach) *Um espaço normado E é dito um espaço de Banach se E é um espaço métrico completo relativamente à métrica (noção de distância) proveniente de sua norma. Em outras palavras, toda seqüência de Cauchy é convergente com relação a métrica dada por: $d(u, v) = \|u - v\|$.*

Definição 1.3 (Produto Interno) *Um produto interno num espaço vetorial E é um funcional bilinear simétrico e positivo em E. Mais precisamente, é uma função*

$$(\, , \,)_E : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

para qual são válidas as seguintes propriedades: para quaisquer $u, v, w \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

Bilinearidade:

$$\begin{aligned} (u + v, w)_E &= (u, w)_E + (v, w)_E, \quad (\alpha u, v)_E = \alpha(u, v)_E, \\ (u, v + w)_E &= (u, v)_E + (u, w)_E, \quad (u, \alpha v)_E = \alpha(u, v)_E; \end{aligned}$$

Comutatividade(simetria): $(u, w)_E = (w, u)_E$*;*

Positividade: $(u, u)_E > 0$ *se* $u \neq 0$*.*

Observação: Semelhantemente ao caso da norma, às vezes podemos omitir o subíndice E da notação $(\, , \,)_E$, levando em consideração que provavelmente o contexto não cause confusão com a notação de par ordenado.

Definição 1.4 (Espaço de Hilbert) *Um espaço com produto interno é dito um espaço de Hilbert se ele é um espaço de Banach com respeito à norma proveniente de seu produto interno, ou seja, com relação à norma dada por $\|v\|_E := \sqrt{(v, v)_E}$.*

Definição 1.5 (Imersão) *Sejam $V \subset H$ espaços de Hilbert. Ao operador linear, injetivo, $\tau : V \longrightarrow H$, que a cada $v \in V$ faz corresponder τv como elemento de H, chamamos imersão τ de V em H. Quando existe $k > 0$, tal que*

$$\|\tau v\|_H \leq k \|v\|_V, \quad \forall v \in V,$$

dizemos que τ é uma imersão contínua. Quando o fecho da imagem de conjuntos limitados de V, por τ, forem compactos dizemos que τ é uma imersão compacta.

Definição 1.6 (Espaço Separável) *Um espaço normado E é dito separável se existe um subconjunto enumerável D de E tal que D é denso em E (isto é, para todo $v \in E$ e para todo $r > 0$, $B(v,r) \cap D \neq \emptyset$).*

Notação: Designaremos por E' o dual (topológico) de E, i.e, o espaço de todas as formas lineares contínuas sobre E. Quando $f \in E'$ e $x \in E$ denotaremos $\langle f, x \rangle$ em vez de $f(x)$.

Sejam E um espaço de Banach e $f \in E'$, designamos por $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ a aplicação dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$.

Definição 1.7 *A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínua todas as aplicações $(\varphi_f)_{f \in E'}$.*

Notação: Dada uma seqüência x_n em E denotaremos por $x_n \rightharpoonup x$ a convergência em $\sigma(E, E')$, convergência fraca, e por $x_n \to x$ a convergência forte, isto é, na norma de E.

Proposição 1.1 *Se x_n é uma seqüência em E então*

- $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E') \Longleftrightarrow \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle, \quad \forall f \in E'$;
- $x_n \to x$ *em* $E \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E')$.

Demonstração: Ver [1].

Observação: Sendo E um espaço normado, podemos definir uma imersão canônica J dada da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcccccc} J: & E & \longrightarrow & E'' & & & \\ & x & \longmapsto & Jx: & E' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & f & \longmapsto & \langle Jx, f \rangle_{E'' \times E'} = \langle f, x \rangle_{E' \times E}, \end{array}$$

onde, $\langle Jx, f \rangle_{E'' \times E'}$ denota $Jx \in E''$ aplicada em $f \in E'$. A imersão J é uma isometria, i.e., $\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E$. (veja [1])

Definição 1.8 (Espaço Reflexivo) *Um espaço normado E é reflexivo quando a imersão canônica J é sobrejetiva.*

Para cada $x \in E$ considere a aplicação $\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi_x(f) = \langle f, x \rangle$, $\forall f \in E'$. Quando x percorre E obtem-se uma família de aplicações $(\varphi_x)_{x \in E}$ de E' em $\mathbb{R}$.

Definição 1.9 *A topologia fraca $\star$ (lê-se: fraca estrela) denotada também por $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que faz contínuas todas as aplicações $(\varphi_x)_{x \in E}$.*

Notação: Dada uma seqüência f_n em E', denotaremos por $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ a convergência de f_n à f na topologia fraca $\star$.

Proposição 1.2 *Se E é um espaço de Banach e f_n uma seqüência de E' então:*

- $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E) \Longleftrightarrow \langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \forall x \in E$;
- $f_n \to f \Longrightarrow f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E', E'')$;
- $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E', E'') \Longrightarrow f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E)$;
- $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E) \Longrightarrow \|f_n\|$ *é limitado e* $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$;
- $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E)$ *e* $x_n \to x$ *em* $E \Longrightarrow \langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Ver [1].

Teorema 1.1 *Sejam E um espaço de Banach separável e f_n uma seqüência limitada em E'. Então, existe uma subseqüência (f_{nk}) que converge na topologia $\sigma(E', E)$.*

Demonstração: Ver [1].

Teorema 1.2 *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma seqüência limitada em E. Então, existe uma subseqüência (x_{nk}) que converge na topologia $\sigma(E, E')$.*

Demonstração: Ver [1].

(Desigualdade de Young) Dados $\varepsilon > 0$ e dois números reais a e b, é válida a seguinte relação

$$ab \leq \ \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

Prova: Para todo par de números reais A e B, sabemos que

$$0 \leq (A - B)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado,

$$0 \leq A^2 - 2AB + B^2 \quad \therefore \quad AB \leq \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} B^2.$$

Como a última desigualdade é válida para todo par de números reais, em particular, podemos tomar $A = \sqrt{2\varepsilon}$a e $B = \frac{b}{\sqrt{2\varepsilon}}$, donde segue o resultado.

1.2 Os Espaços L^p

Supomos que o leitor tenha uma noção básica de Teoria da Medida e compreenda expressões como funções mensuráveis, integráveis e conjuntos de medida nula. No que segue, denotaremos por I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Definição 1.10 *Seja $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(I)$ como o conjunto das (classes de) funções $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis tais que $|u|^p$ é integrável. Em símbolos:*

$$L^p(I) := \{u : I \longrightarrow \mathbb{R}; u \ \text{é mensurável e} \int_I |u|^p \, dx < \infty\}.$$

Neste espaço podemos definir uma norma associando a cada $u \in L^p(I)$ o número real:

$$\|u\|_p := \left(\int_I |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = \infty$, temos

$$L^p(I) := \{u : I \longrightarrow \mathbb{R};\ u \text{ é mensurável e } \exists C \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ q.t.p em } I\}$$

$$\|u\|_\infty := \sup_{x\in I} \mathrm{ess}\, |u(x)| = \inf\{C;\ |u(x)| \leq C \text{ q.t.p em } I\}.$$

Notação: Se $1 \leq p \leq \infty$; designaremos por p' o conjugado harmônico de p, i.e, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Teorema 1.3 (Desigualdade de Hölder) *Sejam* $u \in L^p(I)$ *e* $v \in L^{p'}(I)$, *com* $1 \leq p \leq \infty$. *Então* $uv \in L^1(I)$ *e*

$$\int_I |uv|\, dx \leq \|u\|_p \|g\|_{p'}. \tag{1.1}$$

Demonstração: Ver [1].

1.3 Distribuições

Seja $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ o espaço vetorial das funções reais definidas em I, infinitamente deriváveis, com suporte compacto contido em I. Considerando a seguinte noção de convergência em $\mathcal{C}_0^\infty(I)$:

Uma seqüência de funções $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ quando

(i) todas as φ_n possuem suportes contidos em um compacto fixo K de I;

(ii) a seqüência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ uniformemente em K, juntamente com suas derivadas de todas as ordens.

Ao espaço $\mathcal{C}_0^\infty(I)$, munido desta noção de convergência, denotamos por $\mathcal{D}(I)$, o qual chamamos espaço das funções testes.

Definição 1.11 *Uma distribuição sobre* I *é uma forma linear contínua sobre* $\mathcal{D}(I)$.

Explicitamente, é uma forma $T : \mathcal{D}(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(I)$;

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(I)$ então $(T(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

Representamos o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$ e o espaço vetorial das distribuições sobre I por $\mathcal{D}'(I)$. A notação $L^1_{Loc}(I)$ será usada para designar o espaço vetorial das funções $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integráveis em I, i.e, integrável sobre qualquer compacto contido em I.

Lema 1.1 (Du Bois Raimond) *Seja $u \in L^1_{Loc}(I)$, tal que*

$$\int_I u(x)\varphi(x)\,dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Então $u = 0$ quase sempre em I.

Demonstração: Ver [8].

Exemplo 1.1 *Se $u \in L^1_{Loc}(I)$ então a forma linear T_u definida em $\mathcal{D}(I)$ por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_I u(x)\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \tag{1.2}$$

é uma distribuição. Além disso, T_u é univocamente determinada por u.

De fato, como φ possui suporte compacto contido em I e $u \in L^1_{Loc}(I)$, a integral acima é finita e, portanto, T_u está bem definida. Sendo T_u linear, é suficiente mostrar que ela é contínua. Seja φ_n convergente para φ em $\mathcal{D}(I)$. Então, $\forall \delta > 0$ existe um compacto fixo $K \subset I$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \sup_{x\in K} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| < \delta.$$

Dado $\varepsilon > 0$, para $n > n_0$ temos

$$\big|\langle T_u, \varphi \rangle - \langle T_u, \varphi_n \rangle\big| \leq \int_K |u(x)|\,|\varphi(x) - \varphi_n(x)|\,dx \leq \delta C; \quad C = \int_K |u(x)|\,dx.$$

Fixando $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ na última expressão segue que T_u é contínua e, conseqüentemente, uma distribuição. Supondo T_u igualmente definida por u e $v \in L^1_{Loc}(I)$, do Lema 1.1

segue que $u = v$. ♣

Observação: Freqüentemente, identifica-se u à distribuição definida por ela, dizendo a distribuição u de $L^1_{Loc}(I)$.

Definição 1.12 (Derivada de uma distribuição) *A derivada de $T \in \mathcal{D}'(I)$ é a distribuição representada por $\frac{dT}{dx}$, definida em $\mathcal{D}(I)$ por*

$$\Big\langle \frac{dT}{dx}, \varphi \Big\rangle = -\Big\langle T, \frac{d\varphi}{dx} \Big\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Uma grande vantagem desta noção de derivada é que uma distribuição possui derivadas de todas as ordens. Representando por $\frac{d^nT}{dx^n}$ (ou $T^{(n)}$) a derivada n-ésima de $T \in \mathcal{D}'(I)$ temos

$$\Big\langle \frac{d^nT}{dx^n}, \varphi \Big\rangle = (-1)^n \Big\langle T, \frac{d^n\varphi}{dx^n} \Big\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Para finalizar esta seção façamos algumas considerações sobre distribuições vetoriais. Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e V um espaço de Hilbert real, separável. Sendo $0 < T < \infty$, representamos por $L^p(0,T;V)$ o espaço vetorial das funções vetoriais $v :]0,T[\longrightarrow V$ que a cada $s \in]0,T[$ faz corresponder um vetor $v(s) \in V$, tal que $s \longrightarrow (v(s), w)_V$ é mensurável, $\forall w \in V$ e $s \longrightarrow \|v(s)\|_V$ pertence a $L^p(0,T)$. Quando $1 \leq p < \infty$ define-se em $L^p(0,T;V)$ a norma

$$\|v\|_{L^p(0,T;V)} := \left(\int_0^T \|v(s)\|_V^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

e no caso $p = \infty$

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;V)} := \sup_{0<s<T} \mathrm{ess} \|v(s)\|_V.$$

Tem-se que $L^p(0,T;V)$ é um espaço de Banach e quando $p = 2$, um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T (u(s), v(s))_V \, ds.$$

Definição 1.13 *Uma distribuição vetorial sobre $]0,T[$, com valores em V, é uma aplicação linear contínua sobre $\mathcal{D}(0,T)$ com valores em V.*

Exemplo 1.2 *Semelhante ao Exemplo 1.1, dada $v \in L^p(0,T;V)$, $\mathcal{T}_v$ definida por*

$$\mathcal{T}_v = \int_0^T v(s)\varphi(s)\,ds, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T),$$

é uma distribução vetorial.

Observação: Analogamente à Definição 1.12, estabelecemos a derivada de uma distribuição vetorial simplesmente trocando a notação $\mathcal{D}'(I)$ pela do espaço $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T),V)$ das aplicações lineares contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em V e acrescentando o adjetivo "vetorial"à palavra distribuição. As demais notações continuam as mesmas.

Sejam $V \subset H$ dois espaços de Hilbert reais, sendo a imersão de V em H contínua. Representamos por

$$W(0,T) = \{v|v \in L^p(0,T;V), \frac{dv}{ds} \in L^p(0,T;H)\}$$

o espaço de Banach com a norma

$$\|v\|_{W(0,T)} = max\{\|v\|_{L^p(0,T;V)}, \|v'\|_{L^p(0,T;H)}\}.$$

Proposição 1.3 *Se $v \in W(0,T)$, então $v \in \mathcal{C}^0([0,T];H)$, i.e, v é igual em quase todo ponto de $]0,T[$ a uma função contínua de $[0,T]$ com valores em H.*

Demonstração: Ver [8].

1.4 Espaços de Sobolev

Definição 1.14 *Sejam $I =]a,b[$ um intervalo (limitado ou não) e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$ por*

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I);\ \exists g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi'\,dx = -\int_I g\varphi\,dx,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)\}.$$

Quando $p = 2$ escrevemos $H^1(I) = W^{1,2}(I)$.

Observação: Na definição de $W^{1,p}(I)$ aparece a igualdade

$$\int_I u\varphi'\,dx = -\int_I g\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Note que isto é equivalente a dizer que g é (a função que define) a derivada da distribuição (que identificamos a) u; por isso, denotaremos $g = u'$. Além disso, quando $u \in \mathcal{C}^1(I) \cap L^p(I)$ e $u' \in L^p(I)$, a derivada usual de u coincide com a derivada no sentido de $W^{1,p}(I)$. Levando em consideração esta observação, podemos caracterizar $W^{1,p}(I)$ como o espaço das distribuições de $L^p(I)$ com derivada de primeira ordem também em $L^p(I)$.

No espaço $W^{1,p}(I)$ podemos estabelecer as normas equivalentes

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} \quad \text{e} \quad \|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Normalmente trabalharemos com a primeira e se em algum momento utilizarmos a segunda, caso seja relevante, explicitaremos. Em $H^1(I)$ temos o seguinte produto interno

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2};$$

e a norma associada

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposição 1.4 *O espaço $W^{1,p}(I)$ é de Banach para $1 \leq p \leq \infty$; reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$. Ao passo que, $H^1(I)$ é um espaço de Hilbert separável.*

Demonstração: Veja [1].

Teorema 1.4 *Se $u \in W^{1,p}(I)$ então existe uma função $v \in \mathcal{C}(\overline{I})$ tal que*

$$u = v \quad q.t.p \text{ em } I$$

e

$$v(x) - v(y) = \int_x^y u'(t)dt, \quad \forall x, y \in I.$$

Demonstração: Veja [1].

Segundo o Teorema 1.4, toda função de $W^{1,p}(I)$ possui um representante contínuo. Desta forma, quando conveniente podemos supor que estamos trabalhando com este representante ou, por abuso de linguagem, dizemos que as funções de $W^{1,p}(I)$ são contínuas.

Definição 1.15 *Dado $1 \leq p < \infty$, designamos por $W_0^{1,p}(I)$ o fecho de $\mathcal{D}(I)$ em $W^{1,p}(I)$. Quando $p = 2$, denotamos $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.*

Observação: O espaço $W_0^{1,p}(I)$ é dotado da norma induzida por $W^{1,p}(I)$ e $H_0^1(I)$ do produto interno de $H^1(I)$. Além disso, $W_0^{1,p}(I)$ é de Banach separável, e reflexivo para $1 < p < \infty$. O espaço $H_0^1(I)$ é um espaço de Hilbert separável.

O próximo teorema dá uma caracterização às funções de $W_0^{1,p}(I)$.

Teorema 1.5 *Se $u \in W^{1,p}(I)$ então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, e somente se, $u = 0$ sobre ∂I.*

Demonstração: Veja [1].

Proposição 1.5 (Desigualdade de Poincaré) *Se I é limitado então existe uma constante C (dependendo de $|I| = b - a$) tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Dito de outro modo, a norma $\|u'\|_{L^p(I)}$ em $W_0^{1,p}(I)$ é equivalente a norma de $W^{1,p}(I)$.

Demonstração: Primeiramente observamos que

$u \in W_0^{1,p}(I) \Rightarrow |u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left|\int_a^x u'(t)dt\right| \leq \|1.u'\|_{L^1(I)} \Rightarrow$ pela desigualdade de Hölder, $\|u'\|_{L^p} \leq |I|^{\frac{1}{p'}} \|u'\|_{L^p} \Rightarrow \|u\|_\infty \leq |I|^{\frac{1}{p'}} \|u'\|_{L^p}$. Finalmente, $\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} = \left(\int_a^b |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \|u'\|_{L^p} \leq |I|^{\frac{1}{p}} \|u\|_\infty + \|u'\|_{L^p}$

$$\leq |I|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} \|u'\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} \leq C\|u'\|_{L^p}, \quad C = 1 + |I|. \qquad \clubsuit$$

Observação: A desigualdade de Poincaré continua válida se u for uma função que se anula somente em um dos extremos do intervalo. Em virtude da desigualdade de Poincaré e de $\|u\|_{H^1(I)} \geq \|u'\|_{L^p(I)}$, o espaço $H_0^1(I)$ será equipado com o produto interno

$$(u, v)_{H_0^1(I)} = \int_I u'v'\, dx \tag{1.3}$$

e com a norma, decorrente deste produto interno:

$$\|u\|_{H_0^1(I)} = \left(\int_I |u'|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definição 1.16 *Sejam $m \geq 2$ e $1 \leq p < \infty$. Definimos por recorrência*

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I); u' \in W^{m-1,p}(I)\}$$

e denotamos

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

Pode-se verificar que $u \in W^{m,p}(I)$ se, e somente se, existem m funções $g_1, ..., g_m$ $\in L^p(I)$, tais que

$$\int_a^b u\varphi^{(i)}\, dx = (-1)^i \int_a^b g_i \varphi\, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I) \text{ e } \forall\ 1 \leq p \leq m.$$

Na expressão anterior, $\varphi^{(i)}$ denota a i-ésima derivada de φ e verifica-se que $g_i = u^{(i)}$. Ou seja, $W^{m,p}(I)$ é o espaço das distribuições de $L^p(I)$ tais que suas derivadas $u^{(i)}$ até a ordem m também pertencem a $L^p(I)$. Em $W^{m,p}(I)$ consideramos a norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{m} \|u^{(i)}\|_{L^p}$$

e em $H^m(I)$ o produto interno

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^p} + \sum_{i=1}^{m} (u^{(i)}, v^{(i)})_{L^p}.$$

Definição 1.17 *Dados $m \geq 2$ e $1 \leq p < \infty$, designamos por $W_0^{m,p}(I)$ o fecho de $\mathcal{D}(I)$ em $W^{m,p}(I)$.*

Observação: Existe uma diferença entre $W_0^{2,p}(I)$ e $W_0^{1,p}(I) \cap W^{2,p}(I)$. Demonstra-se que $W_0^{m,p}(I) = \{u \in W^{m,p}(I); u = u' = \cdots = u^{(m-1)} = 0$ sobre $\partial I\}$ (veja [1]). Sendo assim, $W_0^{2,p}(I) = \{u \in W^{2,p}; u = 0 = u'$ sobre $\partial I\}$ enquanto que $W_0^{1,p}(I) \cap W^{2,p}(I)$ $= \{u \in W^{2,p}; u = 0$ sobre $\partial I\}$.

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução

2.1 Existência

Nosso problema consiste em provar que existe uma única função u que descreva as oscilações de uma corda com memória parcial, de extremos fixos, satisfazendo uma configuração inicial u^0 e uma velocidade inicial u^1. O modelo considerado é dado pelo seguinte sistema:

$$\star \begin{cases} u_{tt} - \kappa u_{xx} + \displaystyle\int_0^t g(t-s)[c(x)u_x(s)]_x\, ds = 0, \quad x \in]0, L[, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0 = u(L,t), \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u^0(x), \quad x \in [0, L], \\ u_t(x,0) = u^1(x), \quad x \in [0, L]. \end{cases}$$

onde $u = u(x,t)$, $u_x(s) = u_x(x,s)$; κ é uma constante positiva; $g: \ [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, positiva e decrescente, i.e, g possui derivadas de todas as ordens contínuas; c é uma função suave estritamente positiva em uma parte do intervalo $[0, L]$, que para fixar as idéias escolhemos

$$c(x) \geq c_0 > 0, \quad \forall x \in [L_0, L] \subset]0, L] \quad \text{e} \quad c(x) \int_0^\infty g(s)ds < \kappa, \quad \forall x \in [0, L].$$

Inicialmente, a fim de simplificar a notação e facilitar a análise do trabalho, definimos os operadores binários $*, \Diamond$ e $\Box$ através das fórmulas:

$$(g * h)(t) := \int_0^t g(t-s)h(s)\,ds; \tag{2.1}$$

$$(g\Diamond h)(t) := \int_0^t g(t-s)\{h(t)-h(s)\}\,ds; \tag{2.2}$$

$$(g\Box h)(t) := \int_0^t g(t-s)|h(t)-h(s)|^2\,ds. \tag{2.3}$$

Com isto, as principais relações entre estes símbolos são dadas pelo

Lema 2.1 *Para $g, h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e $\theta \in [0,1]$, temos as seguintes relações*

$$(g * h)(t) = \left(\int_0^t g(s)\,ds\right)h(t) - (g\Diamond h)(t); \tag{2.4}$$

$$|g\Diamond h|^2(t) \le \left(\int_0^t |g(s)|^{2(1-\theta)}\,ds\right)(|g|^{2\theta}\Box h)(t); \tag{2.5}$$

$$2(g*h)h' = g'\Box h - g|h|^2 - \frac{d}{dt}\left\{g\Box h - \left(\int_0^t g(s)\,ds\right)|h|^2\right\}. \tag{2.6}$$

Demonstração: de (2.4). Partindo de (2.1), segue

$$
\begin{aligned}
(g * h)(t) &= \int_0^t g(t-s)h(s)\,ds \\
&= \left(\int_0^t g(t-s)\,ds\right)h(t) - \int_0^t g(t-s)\{h(t)-h(s)\}\,ds \\
&= \left(\int_0^t g(t-s)\,ds\right)h(t) - (g\diamondsuit h)(t).
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança de variável $r = t - s$ na expressão anterior, obtemos (2.4).

Prova de (2.5) : Por (2.2) e propriedade da integral tem-se

$$
\begin{aligned}
|(g\diamondsuit h)(t)| &\leq \int_0^t |g(t-s)|\,|h(t)-h(s)|\,ds \\
&\leq \int_0^t |g(t-s)|^{(1-\theta)}\,|g(t-s)|^{\theta}\,|h(t)-h(s)|\,ds.
\end{aligned}
$$

Como $g, h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e $\theta \in [0,1]$, temos que $w_1 := |g(t-s)|^{(1-\theta)} \in L^2(0,L)$ e w_2 $:= |h(t)-h(s)| \in L^2(0,L)$. Aplicando a desigualdade de Hölder chegamos a (2.5).

Prova de (2.6) : Note que, assim como (2.4) e (2.5), estamos olhando (2.6) como uma igualdade de funções na variável t. Sendo assim, para não sobrecarregar a notação, omitiremos a variável t nas contas a seguir. Partindo de (2.3), temos

$$
g\Box h = \int_0^t g(t-s)\,|h(t)-h(s)|^2\,ds = \left(\int_0^t g(s)\,ds\right)h^2 - 2h(g*h) + g*h^2,
$$

isto é,

$$g\Box h-\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)h^2=-2h(g*h)+g*h^2. \tag{2.7}$$

Derivando a expressão (2.7) em relação a t, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[g\Box h-\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)h^2\right] &= -2h'(g*h)-2h\frac{d}{dt}[g*h]+\frac{d}{dt}[g*h^2]\\
&= -2h'(g*h)-2h[g(0)h+g'*h]+g(0)h^2+g'*h^2\\
&= -2h'(g*h)-g(0)h^2-2h(g'*h)+g'*h^2\\
&= -2h'(g*h)-\left(g-\int_0^t g'(s)\,ds\right)h^2\\
&\quad -2h(g'*h)+g'*h^2\\
&= -2h'(g*h)-g|h|^2+g'\Box h.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\left[g\Box h-\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)h^2\right]=-2h'(g*h)-g|h|^2+g'\Box h.$$

Reordenando os termos desta equação, o lema está demostrado. ♣

Lema 2.2 (Dissipação da Energia) *A energia* $\mathcal{E}(u(t))$ *associada ao sistema* $\star$ *é dada por*

$$\mathcal{E}(u(t)) \quad := \quad \frac{1}{2}\int_0^L [u_t^2 + b(x,t)u_x^2 + c(x)g\Box u_x]\,dx, \tag{2.8}$$

onde $b(x,t) := \kappa - c(x)\displaystyle\int_0^t g(s)\,ds$. *Além disso, obedece a seguinte lei de dissipação*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(u(t)) \quad = \quad +\frac{1}{2}\int_0^L c(x)g'\Box u_x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx. \tag{2.9}$$

Observação: Antes de demonstrarmos o Lema 2.2 note que, como $g'(t) < 0$, $\forall t > 0$, a expressão (2.9) é negativa, ou seja, a energia $\mathcal{E}(u(t))$ é uma função, na variável t, decrescente. Este fato, permite constatarmos sua característica dissipativa.

Demonstração: Multiplicando a primeira equação do sistema $\star$ por u_t e integrando de 0 a L obtemos

$$\int_0^L u_{tt}u_t\,dx - \int_0^L \kappa u_{xx}u_t\,dx + \int_0^L [c(x)g * u_x]_x u_t\,dx = 0. \tag{2.10}$$

Desenvolvendo separadamente as três integrais anteriores, segue

- $\displaystyle\int_0^L u_{tt}u_t\,dx = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^L u_t^2\,dx\right\}.$

- $\displaystyle -\int_0^L \kappa u_{xx}u_t\,dx = \int_0^L \kappa u_x u_{xt}\,dx = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^L \kappa u_x^2\,dx\right\}.$

- $\displaystyle\int_0^L [c(x)g * u_x]_x u_t\,dx = -\int_0^L c(x)[g * u_x]u_{xt}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^L \left\{c(x)g'\Box u_x - c(x)g(t)u_x^2 - \frac{d}{dt}\left[c(x)g\Box u_x - c(x)\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)u_x^2\right]\right\}dx.$$

Retornando à expressão (2.10), resulta que

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^L \left[u_t^2 + \kappa u_x^2 + c(x) g\Box u_x - c(x)\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)u_x^2\right] dx\right\}$$

$$= +\frac{1}{2}\int_0^L c(x) g'\Box u_x\, dx - \frac{1}{2}\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\, dx.$$

Pondo $b(x,t) := \kappa - c(x)\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)$, definimos a energia associada ao sistema $\star$, por

$$\mathcal{E}(u(t)) \;\; := \;\; \frac{1}{2}\int_0^L [u_t^2 + b(x,t)u_x^2 + c(x)g\Box u_x]\, dx.$$

Neste caso, a identidade anterior pode ser escrita da forma

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(u(t)) \;\; = \;\; +\frac{1}{2}\int_0^L c(x) g'\Box u_x\, dx - \frac{1}{2}\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\, dx.$$

Como queríamos mostrar. ♣

Para não sobrecarregar a notação às vezes omitiremos as variáveis x, t da expressão $b(x,t)$. Além disso, partindo da definição de b e denotando *max* c(x) por c_2, não é difícil verificar que

$$0 < b_\infty \leq b < \kappa, \tag{2.11}$$

onde

$$b_\infty := \kappa - c_2\int_0^\infty g(s)ds \tag{2.12}$$

é uma constante.

Agora, antes de demonstrarmos a existência e unicidade de solução, estabeleceremos as noções de solução fraca e forte do problema $\star$. Provaremos a existência de solução, e, a unicidade será feita somente para soluções fortes, uma vez que, nosso principal objetivo é provar o decaimento de soluções atravez do uso das técnicas multiplicativas e, para isto, faz-se necessário ter soluções fortes. A distinção entre estes dois tipos de solução será o nosso próximo passo.

Formulação Variacional: Utilizando a notação de convolução, a equação dada em $\star$ toma a forma

$$u_{tt} - \kappa u_{xx} + [c(x) g * u_x]_x = 0. \tag{2.13}$$

Agora, se multiplicarmos (2.13) por $v \in H_0^1(0, L)$ e integrarmos, obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_0^L u_t v \, dx + \kappa \int_0^L u_x v_x \, dx - \int_0^L c(x)(g * u_x) v_x \, dx = 0. \tag{2.14}$$

Então, introduzindo as formas bilineares K, G: $H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \longrightarrow \mathbb{R}$ onde,

$$K(u, v) = \kappa \int_0^L u_x v_x \, dx \quad \text{ e } \quad G(u, v) = \int_0^L c(x)(g * u_x) v_x \, dx$$

e denotando $u = u(t)$ e $u_t = u'(t)$, (2.14) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}(u'(t), v) + K(u(t), v) = G(u(t), v). \tag{2.15}$$

A formulação variacional de nosso problema $\star$ consiste em trocarmos a igualdade pontual (2.13) pela igualdade variacional (2.15).

Chamamos de solução fraca de $\star$ as funções que verificam a igualdade funcional (2.15) e de soluções fortes as que verificam a igualdade pontual (2.13). Pela maneira como obtemos (2.15) vemos que toda solução forte também é fraca. Além disso, assumindo maior regularidade para funções que satisfaçam (2.15) verifica-se que também satisfazem (2.13). De fato, toda solução fraca sob certas condições que veremos no Teorema 2.2, também é forte.

Note que o funcional bilinear K, define um produto interno em $H_0^1(0,L)$ (veja (1.3)).

Teorema 2.1 (Soluções fracas) *Se $u_0 \in H_0^1(0,L)$ e $u_1 \in L^2(0,L)$, então, existe uma função $u : [0,L] \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)); \tag{2.16}$$

$$u' \in L^\infty(0,T;L^2(0,L)); \tag{2.17}$$

$$u'' \in L^\infty(0,T;H^{-1}(0,L)); \tag{2.18}$$

$$\frac{d}{dt}(u'(t),v) + K(u(t),v) = G(u(t),v), \quad \forall v \in H_0^1 \textit{ no sentido de } \mathcal{D}'(0,T); \tag{2.19}$$

$$u(0) = u_0 \textit{ e } u'(0) = u_1. \tag{2.20}$$

A idéia da demonstração consiste em projetar o problema do Teorema 2.1 em subespaços de dimensão finita, idéia esta, introduzida por Faedo-Galerkin.

Demonstração: Sendo $H_0^1(0,L)$ uma espaço de Hilbert separável, este possui uma base de Hilbert enumerável. Ou seja, existe uma seqüência de funções $w_n \in H_0^1(0,L)$ satisfazendo:

- para cada m o conjunto de vetores $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ é linearmente independente;

- as combinações lineares finitas dos w_n são densas em $H_0^1(0,L)$.

Problema aproximado: Seja $V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$ o subspaço de $H_0^1(0,L)$ gerado pelos m primeiros vetores de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. O problema aproximado consiste em determinar $u_m(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} h_{nm}(t)w_n \in V_m$ tal que

$$(u_m''(t), v) + K(u_m(t), v) = G(u_m(t), v), \quad \forall v \in V_m; \tag{2.21}$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \text{ sendo } u_{0m} \in V_m \text{ e } \lim_{m\to\infty} u_{0m} = u_0 \text{ em } H_0^1(0,L); \tag{2.22}$$

$$u_m'(0) = u_{1m}, \text{ sendo } u_{1m} \in V_m \text{ e } \lim_{m\to\infty} u_{1m} = u_1 \text{ em } L^2(0,L), \tag{2.23}$$

onde $u_{0m} = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \alpha_{nm}w_n$ e $u_{1m} = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \beta_{nm}w_n$. Note que $u_m(0) = u_{0m}$ equivale a

$$h_{nm}(0) = \alpha_{nm}, \quad n = 1, 2, \ldots, m,$$

e que $u_m'(0) = u_{1m}$ significa

$$h_{nm}'(0) = \beta_{nm}, \quad n = 1, 2, \ldots, m.$$

A existência de solução aproximada $u_m(t)$, para t em $[0, t_m[$, resulta do sistema (2.21), (2.22), (2.23) ser um sistema linear de equações diferenciais ordinárias, nas condições do teorema de existência, que pode ser encontrado em [7]. O resto da demonstração consiste em:

- obtenção de estimativas a priori para as soluções $u_m(t)$ do problema aproximado, permitindo prolongar a solução ao intervalo $[0, T]$;

- obtenção de uma subseqüência cujo limite seja solução do problema do Teorema 2.1.

Estimativas a priori: Observando que (2.21) é válida $\forall v \in V_m$, em particular, tomando $v = u'_m(t)$, nesta expressão, e repetindo as contas do Lema 2.2, para o problema aproximado, obtemos que

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(u_m(t)) = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{[u'_m(t)]^2 + b(x,t)[u_m(t)]_x^2 + c(x)g\Box[u_m(t)]_x\right\} dx \tag{2.24}$$

e satisfaz

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{E}}(u_m(t)) = +\frac{1}{2}\int_0^L c(x)g'\Box[u_m(t)]_x\, dx - \frac{1}{2}\int_0^L g(t)c(x)[u_m(t)]_x^2\, dx, \tag{2.25}$$

onde $b(x,t) := \kappa - c(x)\displaystyle\int_0^t g(s)\, ds$. Como $g'(t) < 0$, de (2.25) segue que

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{E}}(u_m(t)) \leq 0. \tag{2.26}$$

Tomando $0 < t < t_m$ e integrando (2.26) de 0 a t, obtemos

$$\mathcal{E}(u_m(t)) \quad \leq \quad \mathcal{E}(u_m(0)) = \frac{1}{2}\|u'_m(0)\|^2_{L^2(0,L)} + \frac{\kappa}{2}\|u_m(0)\|^2_{H^1_0(0,L)}. \tag{2.27}$$

De (2.22) conclui-se que $s_m = \|u_m(0)\|^2_{H^1_0(0,L)}$ é convergente e, conseqüentemente, limitada. Analogamente, de (2.23) resulta que $r_m = \|u'_m(0)\|^2_{L^2(0,L)}$ também é limitada. Desta forma, a limitação (2.27) garante o prolongamento da solução aproximada $u_m(t)$ ao intervalo $[0, T]$ (veja [18]). Portanto, temos que

- $\|u'_m(t)\|_{L^2(0,L)}$ é limitada em $[0, T]$ independente de m.

- $\|u_m(t)\|_{H^1_0(0,L)}$ é limitada em $[0, T]$ independente de m.

Logo, da compacidade fraca $\star$, existe uma subseqüência, que assumiremos ser a original, com as seguintes propriedades:

$$u_m \overset{\star}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0, T; H^1_0(0, L)), \tag{2.28}$$

$$u'_m \overset{\star}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)). \tag{2.29}$$

Identificando, via Teorema de Representação de Riesz, $L^2(0, L)$ com seu dual e notando que o dual de $L^1(0, T; H^{-1}(0, L))$ é $L^\infty(0, T; H^1_0(0, L))$ e o de $L^1(0, T; L^2(0, L))$ é $L^\infty(0, T; L^2(0, L))$, a convergência (2.28) equivale a dizer que para todo w pertencente a $L^1(0, T; H^1_0(0, L))$ tem-se:

$$\int_0^T K(u_m(t), w(t))\,dt \to \int_0^T K(u(t), w(t))\,dt; \tag{2.30}$$

e (2.29), que para todo $w \in L^1(0,T;L^2(0,L))$,

$$\int_0^T (u_m'(t), w(t))\,dt \to \int_0^T (u'(t), w(t))\,dt. \tag{2.31}$$

Da convergência (2.28), segue que

$$u_x^m \overset{\star}{\rightharpoonup} u_x \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(0,L))$$

e conseqüentemente,

$$c(x)g * u_x^m \overset{\star}{\rightharpoonup} c(x)g * u_x \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(0,L)).$$

Ou seja,

$$\int_0^T \int_0^L c(x)g * u_x^m w\,dx\theta(t)\,dt \to \int_0^T \int_0^L c(x)g * u_x w\,dx\theta(t)\,dt, \tag{2.32}$$

$\forall w \in L^2(0,L)$ e $\forall \theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

O próximo passo é demonstrar que u é solução da equação (2.19) no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$. Ou seja, que cada termo daquela expressão define uma distribuição e tem-se a igualdade para toda $v \in H_0^1(0,L)$.

Com efeito, fixemos $m_0 \in \mathbb{N}$ e consideremos $m > m_0$. Multiplicando a equação aproximada (2.21) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T obtemos:

$$\int_0^T (u_m''(t), v)\theta(t)\,dt + \int_0^T K(u_m(t), v)\theta(t)\,dt = \int_0^T G(u_m(t), v)\theta(t)\,dt, \quad \forall v \in V_{m_0}.$$

Integrando por partes a primeira integral temos:

$$-\int_0^T (u_m'(t), v)\theta'(t)\,dt + \int_0^T K(u_m(t), v)\theta(t)\,dt = \int_0^T G(u_m(t), v)\theta(t)\,dt.$$

Passando ao limite quando m tende a infinito e observando (2.30), (2.31) e (2.32), segue que

$$-\int_0^T (u'(t), v)\theta'(t)\,dt + \int_0^T K(u(t), v)\theta(t)\,dt = \int_0^T G(u(t), v)\theta(t)\,dt. \tag{2.33}$$

Sendo $t \longrightarrow (u'(t), v)$ uma função de $L^\infty(0,T)$, ela define uma distribuição sobre $]0,T[$. A primeira integral de (2.33) é a derivada desta distribuição. Sendo assim, resulta que

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u'(t), v), \theta \right\rangle + \int_0^T K(u(t), v)\theta(t)\,dt = \int_0^T G(u(t), v)\theta(t)\,dt, \tag{2.34}$$

para todo $v \in V_{m_0}$ e $\theta \in D(0,T)$. Como m_0 foi fixo arbitrariamente, a última igualdade é válida $\forall\, V_m$. Sendo $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ denso em $H_0^1(0,L)$, conclui-se que (2.34) é válida para toda $v \in H_0^1(0,L)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Provando assim a igualdade (2.19) do teorema.

Verificação de que $\mathbf{u''} \in \mathbf{L^2(0,T;H^{-1}(0,T))}$: De $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))$, lembrando a definição de norma de $H_0^1(0,L)$, é imediato que $u_x \in L^\infty(0,T;L^2(0,L))$. Donde, $g * u_x \in L^\infty(0,T;L^2(0,L))$. Sendo $c \in L^\infty(0,L)$, continuamos com $cg * u_x$ $\in L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ e devido à caracterização do espaço $H^{-1}(0,L)$, segue $[cg * u_x]_x$ $\in L^\infty(0,T;H^{-1}(0,L))$. Como $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))$, pelo mesmo argumento anterior, $u_{xx} \in L^\infty(0,T;H^{-1}(0,L))$. Finalmente, de $u_{tt} = \kappa u_{xx} - [cg * u_x]_x$, no sentido das distribuições, resulta $u_{tt} \in L^\infty(0,T;H^{-1}(0,L))$.

Verificação das condições iniciais: Seja $\theta \in \mathcal{C}^1(0,T;\mathbb{R})$ com $\theta(T) = 0$, $\theta(0) = 1$ e $v \in L^2(0,L)$. Da convergência (2.31) resulta que

$$\int_0^T (u_m'(t), \theta(t)v)\, dt \to \int_0^T (u'(t), \theta(t)v)\, dt.$$

Integrando por partes e notando que $u \in \mathcal{C}^0([0,T];L^2(0,L))$, temos

$$-(u_m(0), v) - \int_0^T (u_m(t), \theta'(t)v)\, dt \to -(u(0), v) - \int_0^T (u(t), \theta' v)\, dt. \tag{2.35}$$

Observe que $(u_m(0))$ converge para u_0 forte em $H_0^1(0,L)$, logo forte em $L^2(0,L)$, conseqüentemente fraco em $L^2(0,L)$. Também, da convergência (2.30), resulta que (u_m) converge para u fraco estrela em $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$. Decorre então que

$$-(u_m(0), v) - \int_0^T (u_m(t), \theta'(t)v)\, dt \to -(u_0, v) - \int_0^T u(t)\theta'(t)v\, dt. \tag{2.36}$$

Da unicidade dos limites (2.35) e (2.36), segue que $(u(0), v) = (u_0, v)$. Como v

$\in L^2(0,L)$ foi arbitrário, concluímos que $u(0)=u_0$. Para provar $u'(0)=u_1$, procedemos de maneira semelhante (veja [8]).

Lema 2.3 *Consideremos a equação de Volterra*

$$v(x,t)-\int_0^t g(t-s)a(x)v(x,s)\,ds=f(x,t),$$

onde $a\in\mathcal{C}^0([0,L])$ *e* $g\in\mathcal{C}([0,\infty[)$ *satisfaz*

$$g(t)\geq 0, \quad \|a\|_{\mathcal{C}^0}\int_0^\infty g(s)ds,$$

com $f\in L^p(0,T;L^2(0,L))$ *e* $p>1$. *Nestas condições, existe uma única solução,* v, *satisfazendo*

$$v\in L^p(0,T;L^2(0,L)).$$

Além disso, existe uma constante positiva C *independente de* T, *tal que*

$$\|v\|_{L^p(0,T;L^2(0,L))}\leq C\|f\|_{L^p(0,T;L^2(0,L))}.$$

Demonstração: Veja [5].

Teorema 2.2 (Soluções fortes) *Sejam* $u_0\in H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L)$ *e* $u_1\in H_0^1(0,L)$. *Então existe uma única solução* u *de* $\star$ *satisfazendo*

$$u\in L^\infty(0,T;H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L)); \tag{2.37}$$

$$u_t\in L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)); \tag{2.38}$$

$$u_{tt}\in L^\infty(0,T;L^2(0,L)). \tag{2.39}$$

Demonstração: A demonstração deste teorema é análoga à do teorema anterior. Naquele, a idéia principal foi limitar a energia de primeira ordem, $\mathcal{E}(u_m(t))$, e conseqüentemente, as seqüências $\|u_m'(t)\|_{L^2(0,L)}$ e $\|u_m(t)\|_{H_0^1(0,L)}$, garantindo desta forma, que $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))$ e $u' \in L^\infty(0,T;L^2(0,L))$. Agora, limitaremos a energia de segunda ordem $\mathcal{E}(u_m'(t))$, para obter $u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))$ e $u'' \in L^\infty(0,T;L^2(0,L))$.

Demonstração: Derivando a expressão (2.21) em relação a t obtemos

$$(u_m'''(t),v) + K(u_m'(t),v) = \frac{d}{dt}G(u_m(t),v).$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(u_m(t),v) &= \frac{d}{dt}\int_0^L c(x)\{g * [u_m(t)]_x\}v_x\,dx \\
&= \int_0^L c(x)\{[u_m(0)]_x g(t) + g * [u_m(t)]_{xt}\}v_x\,dx \\
&= G(u_m'(t),v) + g(t)\int_0^L c(x)[u_m(0)]_x v_x\,dx,
\end{aligned}$$

segue que

$$(u_m'''(t),v) + K(u_m'(t),v) = G(u_m'(t),v) + g(t)\int_0^L c(x)[u_m(0)]_x v_x\,dx. \tag{2.40}$$

Fixando $v = u_m''(t)$ em (3.4), por contas análogas às feitas para obter (2.25), agora com $v = u_m''(t)$ ao invés de $v = u_m'(t)$, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{E}(u'_m(t)) &= \frac{1}{2}\int_0^L c(x)g'\Box[u'_m(t)]_x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L g(t)c(x)[u'_m(t)]_x^2\,dx \\
&\quad + g(t)\int_0^L c(x)[u_m(0)]_x[u''_m(t)]_x\,dx.
\end{aligned}
$$

Donde, denotando por $M(u'_m(t)) := \mathcal{E}(u'_m(t)) - g(t)\int_0^L c(x)[u_m(0)]_x[u'_m(t)]_x\,dx$, segue

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}M(u'_m(t)) &= \frac{1}{2}\int_0^L c(x)g'\Box[u'_m(t)]_x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L g(t)c(x)[u'_m(t)]_x^2\,dx \\
&\quad - g'(t)\int_0^L c(x)[u_m(0)]_x[u'_m(t)]_x\,dx \\
&\leq -g'(t)\int_0^L c(x)[u_m(0)]_x[u'_m(t)]_x\,dx.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Young e integrando de 0 a t

$$
M(u'_m(t)) \leq M(u'_m(0)) - \int_0^t \frac{1}{2}g'(s)\left[\int_0^L c(x)^2[u_m(0)]_x^2\,dx + \int_0^L [u'_m(t)]_x^2\,dx\right] ds. \tag{2.41}
$$

Como,

$$
\begin{aligned}
M(u'_m(t)) &= \mathcal{E}(u'_m(t)) - g(t)\int_0^L c(x)[u_m(0)]_x[u'_m(t)]_x\,dx \\
&= \mathcal{E}(u'_m(t)) - \int_0^L \frac{g(t)}{\sqrt{b}}c(x)[u_m(0)]_x\sqrt{b}[u'_m(t)]_x\,dx,
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

ainda pela desigualdade de Young, temos

$$
\begin{aligned}
M(u_m'(t)) &\leq \boldsymbol{\mathcal{E}}(u_m'(t)) + \frac{g(t)^2}{b}\int_0^L c(x)^2[u_m(0)]_x^2\,dx + \frac{1}{4}\int_0^L b[u_m'(t)]_x\,dx \\
&\leq \frac{3}{2}\boldsymbol{\mathcal{E}}(u_m'(t)) + \frac{g(t)^2}{b}\int_0^L c(x)^2[u_m(0)]_x^2\,dx. \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, também pela desigualdade de Young, de (2.42) temos

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{E}}(u_m'(t)) - \frac{g(t)^2}{b}\int_0^L c(x)^2[u_m(0)]_x^2\,dx - \frac{1}{4}\int_0^L b[u_m'(t)]_x^2\,dx &\leq M(u_m'(t)) \\
\therefore \quad \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{E}}(u_m'(t)) - \frac{g(t)^2}{b}\int_0^L c(x)^2[u_m(0)]_x^2\,dx &\leq M(u_m'(t)).
\end{aligned}
$$

Donde, segue

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{E}}(u_m'(t)) &\leq M(u_m'(t)) + \frac{g(t)^2}{b}\int_0^L c(x)^2[u_m(0)]_x^2\,dx \\
&\overset{(2.41)}{\leq} M(u_m'(0)) - \int_0^t \frac{1}{2}g'(s)\left[\int_0^L c(x)^2[u_m(0)]_x^2\,dx + \int_0^L [u_m'(t)]_x^2\,dx\right]ds \\
&\quad + \frac{g(t)^2}{b}\int_0^L c(x)^2[u_m(0)]_x^2\,dx \\
&\overset{(2.43)}{\leq} \frac{3}{2}\boldsymbol{\mathcal{E}}(u_m'(0)) + \frac{g(0)^2}{\kappa}\int_0^L c(x)^2[u_m(0)]_x^2\,dx \\
&\quad - \int_0^t \frac{1}{2}g'(s)\left[\int_0^L c(x)^2[u_m(0)]_x^2\,dx + \int_0^L [u_m'(t)]_x^2\,dx\right]ds \\
&\quad + \frac{g(t)^2}{b}\int_0^L c(x)^2[u_m(0)]_x^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Conseqüentemente, existem constantes C e μ tais que

$$\mathcal{E}(u'_m(t)) \leq C\mathcal{E}(u'_m(0)) - \int_0^t \mu g'(s)\mathcal{E}(u'_m(s))\, ds.$$

Donde, pela desigualdade de Gronwall, resulta

$$\mathcal{E}(u'_m(t)) \leq C\mathcal{E}(u'_m(0))e^{\mu g(0)}.$$

O próximo passo é estimar a energia de segunda ordem inicial. Fazendo $v = u''_m(t)$ em (2.21) e $t = 0$ obtemos

$$\int_0^L [u''_m(0)]^2\, dx = \kappa \int_0^L [u(0)]_{xx}[u''_m(0)]\, dx.$$

Logo, a desigualdade de Young implica que $(u''_m(0))$ é limitado em $L^2(0, L)$ e assim $\mathcal{E}(u'_m(0))$ também o é. Logo,

$$\mathcal{E}(u'_m(t)) \text{ é limitado para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{2.44}$$

Disto e da limitação da energia de primeira ordem, concluímos que existe um subseqüência (u_m), denotando como a própria seqüência, tal que

- $u_m \overset{\star}{\rightharpoonup} u \in L^\infty(0, T, H^1_0(0, L))$;

- $u'_m \overset{\star}{\rightharpoonup} u_t \in L^\infty(0, T, H_0^1(0, L))$;

- $u''_m \overset{\star}{\rightharpoonup} u_{tt} \in L^\infty(0, T, L^2(0, L))$.

A seguir, mostraremos que $u_{xx} \in L^\infty(0, T; L^2(0, L))$, dando por concluída a demonstração do Teorema 2.2. Partindo da primeira equação do problema $\star$, obtemos

$$u_{xx} - \int_0^t g(t-s)\frac{c(x)}{\kappa}u_{xx}(s)\,ds = \frac{u_{tt}}{\kappa} + \int_0^t g(t-s)\frac{c'(x)}{\kappa}u_x(s)\,ds.$$

Fazendo $v(x,t) = u_{xx}$, $a(x) = \dfrac{c(x)}{\kappa}$ e $f(x,t) = \dfrac{u_{tt}}{\kappa} + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\frac{c'(x)}{\kappa}u_x(s)\,ds \in L^\infty(0, T; L^2(0, L))$, do Lema 2.3, resulta que $u_{xx} \in L^\infty(0, T; L^2(0, L))$. ♣

2.2 Unicidade

Uma maneira de mostrarmos a unicidade de uma função que satifaz algumas propriedades, é supondo que existem duas que verifiquem estas mesmas propriedades e provando que são necessariamente a mesma. Neste caso, supondo que existem duas funções η e ϑ safisfazendo a propriedade de ser solução de $\star$, mostraremos que $\eta = \vartheta$.

Demonstração: Sejam η e ϑ soluções de $\star$. Isto significa que

$$(i)\begin{cases} \eta_{tt} - \kappa\eta_{xx} + \displaystyle\int_0^t g(t-s)[c(x)\eta_x(s)]_x\,ds = 0, \quad x \in]0, L[, \quad t > 0, \\ \eta(0,t) = 0 = \eta(L,t), \quad t \geq 0, \\ \eta(x,0) = u^0(x), \quad x \in [0, L], \\ \eta_t(x,0) = u^1(x), \quad x \in [0, L]. \end{cases}$$

e

$$
(ii)\begin{cases}
\vartheta_{tt} - \kappa\vartheta_{xx} + \displaystyle\int_0^t g(t-s)[c(x)\vartheta_x(s)]_x\, ds = 0 \quad x \in]0, L[, \quad t > 0,\\
\vartheta(0,t) = 0 = \vartheta(L,t), \quad t \geq 0,\\
\vartheta(x,0) = u^0(x), \quad x \in [0, L],\\
\vartheta_t(x,0) = u^1(x), \quad x \in [0, L].
\end{cases}
$$

Subtraindo membro a membro as igualdades dadas em (i) de suas correspondentes em (ii) e denotando $w = \vartheta - \eta$, obtemos

$$
(iii)\begin{cases}
w_{tt} - \kappa w_{xx} + \displaystyle\int_0^t g(t-s)[c(x)w_x(s)]_x\, ds = 0 \quad x \in]0, L[, \quad t > 0\\
w(0,t) = 0 = w(L,t), \quad t \geq 0,\\
w(x,0) = 0, \quad x \in [0, L],\\
w_t(x,0) = 0, \quad x \in [0, L].
\end{cases}
$$

Multiplicando por w_t a primeira igualdade de (iii) e integrando de 0 a L, verifica-se que a energia

$$
\mathcal{E}(w(t)) = \frac{1}{2}\int_0^L w_t^2\, dx + bw_x^2 + c(x)g\Box w_x,
$$

onde $b := \kappa - c(x)\left(\displaystyle\int_0^t g(s)\, ds\right)$, satisfaz

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{E}(w(t)) = +\frac{1}{2}\int_0^L c(x)g'\Box w_x\, dx - \frac{1}{2}\int_0^L g(t)c(x)w_x^2\, dx. \tag{2.45}
$$

Note que, por hipótese, as funções c e g são positivas e g' negativa. Além disso, o sinal de $g'\Box w_x$ depende simplesmente de g' (veja definição de $\Box$). Portanto, de (2.45) segue que

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{E}}(w(t)) \leq 0. \tag{2.46}$$

Integrando (2.46) de 0 a t obtem-se

$$0 \leq \boldsymbol{\mathcal{E}}(w(t)) \leq \boldsymbol{\mathcal{E}}(w(0)). \tag{2.47}$$

Mas, observando as condições $w_x(0) = 0$ e $w_t(0) = 0$ em (iii), vemos que

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(w(0)) = \int_0^L w_t^2(0) + b(0)w_x^2(0)\, dx = 0.$$

Disto e de (2.47) resulta

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(w(t)) = \frac{1}{2}\int_0^L w_t^2 + bw_x^2 + c(x)g\Box w_x\, dx = 0.$$

Por outro lado, visto que $0 < b_\infty \leq b$, a desigualdade

$$\frac{1}{2}\int_0^L w_t^2\, dx + b_\infty \frac{1}{2}\int_0^L w_x^2\, dx \leq \frac{1}{2}\int_0^L w_t^2 + bw_x^2 + c(x)g\Box w_x\, dx = 0$$

implica

$$\|w_t\|_{L^2(0,L)} + \|w_x\|_{L^2(0,L)} = 0$$

conseqüentemente, $w_t = 0$ e $w_x = 0$, o que implica, $w = \eta - \vartheta = 0$, donde resulta $\eta = \vartheta$. ♣

Capítulo 3

Decaimento Uniforme

Neste capítulo demonstramos que a energia associada ao sistema $\star$ decai uniformemente para zero quando o tempo tende a infinito. A rapidez do decaimento será determinada pelo núcleo $g(t)$, isto é, se g decai exponencialmente então a energia associada ao mesmo também decai exponencialmente; da mesma forma, o decaimento polinomial de g implica o decaimento polinomial da energia. Para fazer isto utilizamos a técnica de multiplicadores para construir um funcional $\mathcal{L}$, convenientemente, dado por

$$\mathcal{L}(t) := N\boldsymbol{\mathcal{E}}(u(t)) + F(t), \tag{3.1}$$

onde $N > 0$ será escolhido a posteriori. Na primeira seção deste capítulo estabelecemos os termos presentes na expressão acima, e nas duas seguintes os decaimentos exponencial e polinomial, respectivamente.

3.1 Técnica de Multiplicadores

A técnica utilizada consiste basicamente em multiplicar a equação do problema $\star$ por uma função adequada, de forma que através de algumas manipulações podemos obter uma igualdade em que de um lado temos a derivada de um termo e, do outro, a expressão que corresponde a esta derivada. Os termos cujas derivadas encontramos, por este método, serão parte do funcional a ser construído posteriormente.

Do capítulo anterior, Lema 2.2, sabemos que

$$\mathcal{E}(u(t)) \;:=\; \frac{1}{2}\int_0^L [u_t^2 + b(x,t)u_x^2 + c(x)g\Box u_x]\,dx,$$

onde $b(x,t) := \kappa - c(x)\displaystyle\int_0^t g(s)\,ds$, e que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(u(t)) \;=\; +\frac{1}{2}\int_0^L c(x)g'\Box u_x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx.$$

O próximo passo será construir o funcional F, que aparece em (3.1), no entanto, para demonstrarmos os decaimentos exponencial e polinomial, esta parte do funcional $\mathcal{L}$ deve satisfazer

$$\frac{d}{dt}F(t) \;\leq\; -\mu\mathcal{F}(t) + R(t), \tag{3.2}$$

onde $\mathcal{F}(t)$ é uma "parte da energia", μ é uma constante positiva e $R(t)$, um "resto" que sob certas hipóteses pode ser controlado (majorado) por $\mathcal{E}(u(t))$. Quando dissermos "parte da energia" significa parte da integral (2.8) e "resto", termos extras que em algum momento eliminaremos. Para conseguirmos (3.2) definiremos funcionais auxiliares que, ao majorarmos, aos poucos vão nos fornecendo os termos de $-\mu\mathcal{F}(t)$, em intervalos menores de $[0,L]$, até constituirmos toda a expressão (3.2).

Seja $\rho: \; [0,L] \longrightarrow [0,1]$, uma função $\mathcal{C}^1(0,L)$ tal que $\rho(x) = \dfrac{1}{L_1}x$, $\forall x \in [0,L_1]$, $L_0 < L_1 < L$ e $\rho(L) = 0$ (Lembre que $c(x) \geq c_0 > 0$, $\forall x \in [0,L_0]$). Denotaremos por R_1 o funcional definido por

$$R_1(t) := \int_0^L u_t\rho[\kappa u_x - c(x)g * u_x]\,dx.$$

O lema seguinte nos fornece termos em que aparecem $-\int_0^{L_1} u_t^2\,dx$ e $-\int_0^{L_1} u_x^2\,dx$ e que servirão para obtermos $-\mu\mathcal{F}(t)$ no intervalo $[0,L_1]$.

Lema 3.1 *Dado $\theta\in[0,1]$, existem constantes positivas μ_1 e C_1 tais que*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R_1(t) \;\le\; & -\mu_1\int_0^{L_1} u_t^2\,dx-\mu_1\int_0^{L_1} u_x^2\,dx+C_1\int_{L_1}^{L} u_t^2\,dx+C_1\int_{L_1}^{L} u_x^2\,dx\\ & +C_1\left\{\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx+\int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx\right\}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Demonstração: Seja $\varphi:=\rho(x)[\kappa u_x-c(x)g*u_x]$. Multiplicando a equação do problema $\star$ por φ e integrando sobre o intervalo $[0,L]$, tem-se

$$\int_0^L u_{tt}\varphi\,dx-\int_0^L \kappa u_{xx}\varphi\,dx+\int_0^L [c(x)g*u_x]_x\varphi\,dx=0.\tag{3.4}$$

Desenvolvendo separadamente as integrais de (3.4), segue que

- $$\int_0^L u_{tt}\varphi\,dx=\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L u_t\rho[\kappa u_x-c(x)g*u_x]\,dx\right\}-\int_0^L u_t\rho[\kappa u_x-c(x)g*u_x]_t\,dx$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L u_t\rho[\kappa u_x-c(x)g*u_x]\,dx\right\}-\int_0^L \rho\kappa u_t u_{tx}\,dx+\int_0^L \rho c(x)u_t(g*u_x)_t\,dx$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L u_t\rho[\kappa u_x-c(x)g*u_x]\,dx\right\}+\frac{1}{2}\int_0^L \rho'\kappa u_t^2\,dx$$

$$+\int_0^L \rho c(x)[g(t)u_x-g'\Diamond u_x]u_t\,dx.$$

- $$\begin{aligned} -\int_0^L \kappa u_{xx}\varphi\,dx &= -\int_0^L \kappa u_{xx}\rho\kappa u_x\,dx + \int_0^L \kappa u_{xx}\rho c(x)g*u_x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \rho'(\kappa u_x)^2\,dx - \int_0^L \kappa u_x[\rho c(x)g*u_x]_x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \rho'(\kappa u_x)^2\,dx - \int_0^L \rho'\kappa u_x c(x)g*u_x\,dx \\ &\quad - \int_0^L \kappa u_x\rho[c(x)g*u_x]_x\,dx. \end{aligned}$$

- $$\int_0^L [c(x)g*u_x]_x\varphi\,dx = -\int_0^L c(x)g*u_x[\rho\kappa u_x]_x\,dx + \int_0^L c(x)g*u_x[\rho c(x)g*u_x]_x\,dx$$

$$= -\int_0^L c(x)g*u_x[\rho\kappa u_x]_x\,dx + \int_0^L \rho'[c(x)g*u_x]^2\,dx + \int_0^L \rho c(x)g*u_x[c(x)g*u_x]_x\,dx$$

$$= -\int_0^L c(x)g*u_x[\rho\kappa u_x]_x\,dx + \int_0^L \rho'[c(x)g*u_x]^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L \rho'[c(x)g*u_x]^2\,dx$$

$$= \int_0^L \rho u_x\kappa[c(x)g*u_x]_x\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L \rho'[c(x)g*u_x]^2\,dx.$$

Retornando a equação (3.4) resulta que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_1(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^L \rho'\kappa u_t^2\,dx - \int_0^L \rho c(x)[g(t)u_x - g'\diamondsuit u_x]u_t\,dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^L \rho'(\kappa u_x)^2\,dx + \int_0^L \rho'\kappa u_x c(x) g * u_x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L \rho'[c(x)g * u_x]^2\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^L \rho'[\kappa u_t^2 + (\kappa u_x - c(x)g * u_x)^2]\,dx - \int_0^L \rho c(x)[g(t)u_x - g'\diamondsuit u_x]u_t\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^L \rho'[\kappa u_t^2 + (b u_x + c(x)g\diamondsuit u_x)^2]\,dx - \int_0^L \rho c(x)[g(t)u_x - g'\diamondsuit u_x]u_t\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^L \rho'[\kappa u_t^2 + b^2u_x^2]\,dx - \int_0^L \rho' b c(x) u_x g\diamondsuit u_x\,dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^L \rho' c^2(x)(g\diamondsuit u_x)^2\,dx - \int_0^L \rho g(t)c(x)u_x u_t\,dx \\
&\quad + \int_0^L \rho c(x)(g'\diamondsuit u_x)u_t\,dx.
\end{aligned}
$$

Para majorarmos a derivada de $R_1(t)$, dominaremos cada um de seus termos e depois a expressão completa. Denotando max $|\rho'|$ por P' e levando em consideração (2.11), segue que

$$
\begin{aligned}
\bullet\; -\frac{1}{2}\int_0^L \rho'[\kappa u_t^2 + b^2u_x^2]\,dx &= -\frac{1}{2}\int_0^{L_1} \rho'[\kappa u_t^2 + b^2u_x^2]\,dx - \frac{1}{2}\int_{L_1}^L \rho'[\kappa u_t^2 + b^2u_x^2]\,dx \\
&\leq -\frac{\kappa}{2L_1}\int_0^{L_1} u_t^2\,dx - \frac{b_\infty^2}{2L_1}\int_0^{L_1} u_x^2\,dx + \frac{P'\kappa}{2}\int_{L_1}^L u_t^2\,dx \\
&\quad + \frac{P'\kappa^2}{2}\int_{L_1}^L u_x^2\,dx.
\end{aligned}
$$

$$\bullet -\int_0^L \rho' bc(x) u_x g\Diamond u_x\, dx \leq \varepsilon \int_0^L |\rho'|\, bc(x) u_x^2\, dx + \frac{C}{4\varepsilon}\int_0^L |\rho'|\, bc(x) g^{2\theta}\Box u_x\, dx$$

$$\leq P'\kappa c_2 \varepsilon \int_0^{L_1} u_x^2\, dx + P'\kappa c_2\varepsilon \int_{L_1}^L u_x^2\, dx$$

$$+\frac{P'\kappa C}{4\varepsilon}\int_0^L c(x) g^{2\theta}\Box u_x\, dx.$$

$$\bullet -\frac{1}{2}\int_0^L \rho' c^2(x)(g\Diamond u_x)^2\, dx \leq \frac{P' c_2 C}{2}\int_0^L c(x) g^{2\theta}\Box u_x\, dx.$$

$$\bullet -\int_0^L \rho g(t) c(x) u_x u_t\, dx \leq \delta\int_0^L \rho g(t) c(x) u_t^2\, dx + \frac{1}{4\delta}\int_0^L \rho g(t) c(x) u_x^2\, dx$$

$$\leq g(0) c_2 \delta \int_0^L u_t^2\, dx + \frac{1}{4\delta}\int_0^L g(t) c(x) u_x^2\, dx$$

$$\leq g(0) c_2\delta \int_0^{L_1} u_t^2\, dx + g(0) c_2 \delta\int_{L_1}^L u_t^2\, dx$$

$$+\frac{1}{4\delta}\int_0^L g(t) c(x) u_x^2\, dx.$$

$$\bullet \int_0^L \rho c(x)(g'\Diamond u_x) u_t\, dx \leq \delta\int_0^L \rho c(x) u_t^2\, dx + \frac{C}{4\delta}\int_0^L c(x) g^{2\theta}\Box u_x\, dx$$

$$\leq c_2\delta\int_0^{L_1} u_t^2\, dx + c_2\delta\int_{L_1}^L u_t^2\, dx$$

$$+\frac{C}{4\delta}\int_0^L c(x) g^{2\theta}\Box u_x\, dx.$$

Considerando estas majorações e retornando à expressão original, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_1(t) \;\leq\; & \left(-\frac{\kappa}{2L_1}+g(0)c_2\delta+c_2\delta\right)\int_0^{L_1} u_t^2\,dx+\left(-\frac{b_\infty^2}{2L_1}+P'\kappa c_2\varepsilon\right)\int_0^{L_1} u_x^2\,dx \\
& +\left(\frac{P'\kappa}{2}+g(0)c_2\delta+c_2\delta\right)\int_{L_1}^{L} u_t^2\,dx+\left(\frac{P'\kappa^2}{2}+P'\kappa c_2\varepsilon\right)\int_{L_1}^{L} u_x^2\,dx \\
& +\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx+\left(\frac{P'\kappa C}{4\varepsilon}+\frac{P'c_2C}{2}+\frac{C}{4\delta}\right)\int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Para finalizar a demonstração do lema, fixemos ε e δ, tais que

$$\left\{\begin{array}{rcl}
-\dfrac{\kappa}{2L_1}+(g(0)c_2+c_2)\delta & = & -\dfrac{\kappa}{4L_1} \\
-\dfrac{b_\infty^2}{2L_1}+P'\kappa c_2\varepsilon & = & -\dfrac{b_\infty^2}{4L_1}.
\end{array}\right.$$

Com isto, denotando $max\left\{-\dfrac{\kappa}{4L_1},-\dfrac{b_\infty^2}{4L_1}\right\}$ por $-\mu_1$ e por C_1 a maior das constantes em frente das integrais em (3.5), após fixados ε e δ, resulta

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_1(t) \;\leq\; & -\mu_1\int_0^{L_1} u_t^2\,dx-\mu_1\int_0^{L_1} u_x^2\,dx+C_1\int_{L_1}^{L} u_t^2\,dx+C_1\int_{L_1}^{L} u_x^2\,dx \\
& +C_1\left\{\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx+\int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx\right\}.
\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar. ♣

Seja $\alpha:\ [0,L]\longrightarrow[0,1]$, uma função $\mathcal{C}^2(0,L)$ tal que $\alpha(x)=0,\quad \forall x\in[0,L_0]$ e $\alpha'(x)>0,\quad \forall x\in]L_0,L[$. Definimos o funcional R_2 por

$$R_2(t):=\int_0^L \alpha u_t u\,dx.$$

Ao majorarmos $R_2(t)$ conseguiremos o termo $-\int_{L_1}^{L} u_x^2\,dx$ que ajudará a constituir $-\mu\mathcal{F}(t)$ no intervalo $[L_1, L]$.

Lema 3.2 *Dados $\varepsilon > 0$ e $\theta \in [0,1]$, existem constantes positivas μ, μ_2 e C_ε (C_ε dependendo de ε), tais que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R_2(t) \;\leq\; & \int_{L_0}^{L} \alpha u_t^2\,dx + \mu\varepsilon\int_0^L u_x^2\,dx + C_\varepsilon\int_{L_0}^{L}\alpha' u^2\,dx \\ & -\mu_2\int_{L_1}^{L} u_x^2\,dx + C_\varepsilon\int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Demonstração: Utilizando o multiplicador $\alpha(x)u$ e repetindo o processo anterior (multiplicar a equação de $\star$ e integrar) obtemos a expressão

$$\int_0^L u_{tt}\alpha u\,dx - \int_0^L \kappa u_{xx}\alpha u\,dx + \int_0^L [c(x)g * u_x]_x \alpha u\,dx = 0, \tag{3.7}$$

na qual as integrais tomam as seguintes formas:

- $\displaystyle\int_0^L u_{tt}\alpha u\,dx = \frac{d}{dt}\left\{\int_0^L \alpha u_t u\,dx\right\} - \int_0^L \alpha u_t^2\,dx.$

- $\displaystyle -\int_0^L \kappa u_{xx}\alpha u\,dx = \int_0^L \alpha'\kappa u u_x\,dx + \int_0^L \alpha\kappa u_x^2\,dx.$

- $$\int_0^L [c(x)g * u_x]_x \alpha u \, dx = -\int_0^L c(x) g * u_x [\alpha u]_x \, dx$$

$$= -\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\int_0^L c(x)[\alpha u]_x u_x \, dx + \int_0^L c(x)[\alpha u]_x g\Diamond u_x \, dx$$

$$= -\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\int_0^L c(x)\alpha' u u_x \, dx - \left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\int_0^L c(x)\alpha u_x^2 \, dx$$

$$+\int_0^L c(x)[\alpha u]_x g\Diamond u_x \, dx.$$

Retornando a (3.7), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_2(t) &= \int_0^L \alpha u_t^2 \, dx - \int_0^L \alpha' \kappa u u_x \, dx + \left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\int_0^L c(x)\alpha' u u_x \, dx \\
&\quad - \int_0^L \alpha\kappa u_x^2 \, dx + \left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\int_0^L \alpha c(x) u_x^2 \, dx - \int_0^L c(x)[\alpha u]_x g\Diamond u_x \, dx \\
&= \int_0^L \alpha u_t^2 \, dx - \int_0^L \alpha'\left(\kappa - c(x)\int_0^t g(s)\,ds\right) u u_x \, dx \\
&\quad - \int_0^L \alpha\left(\kappa - c(x)\int_0^t g(s)\,ds\right) u_x^2 \, dx - \int_0^L c(x)[\alpha u]_x g\Diamond u_x \, dx \\
&= \int_0^L \alpha u_t^2 \, dx - \int_0^L \alpha' b u u_x \, dx - \int_0^L \alpha b u_x^2 \, dx \\
&\quad - \int_0^L \alpha' c(x) u g\Diamond u_x \, dx - \int_0^L \alpha c(x) u_x g\Diamond u_x \, dx.
\end{aligned}$$

Considerando as notações $A' := \max \alpha'$, $\alpha_1 := \min\limits_{x\in[L_1,L]} \alpha$ e lembrando que $0 < b_\infty \leq b < \kappa$, o funcional anterior é majorado por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R_2(t) \;\leq\; & \int_{L_0}^{L} \alpha u_t^2\,dx + A'\kappa\varepsilon\int_0^L u_x^2\,dx + \frac{\kappa}{4\varepsilon}\int_{L_0}^{L}\alpha' u^2\,dx \\ & -b_\infty\alpha_1\int_{L_1}^{L} u_x^2\,dx + \frac{c_2}{2}\int_{L_0}^{L}\alpha' u^2\,dx + \frac{A'C}{2}\int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx \\ & +c_2\varepsilon\int_0^L u_x^2\,dx + \frac{C}{4\varepsilon}\int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx.\end{aligned}$$

Pondo $\mu := A'\kappa + c_2$, $\mu_2 = b_\infty\alpha_1$ e $C_\varepsilon = max\left\{\frac{\kappa}{4\varepsilon}+\frac{c_2}{2}, \frac{A'C}{2}+\frac{C}{4\varepsilon}\right\}$, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R_2(t) \;\leq\; & \int_{L_0}^{L} \alpha u_t^2\,dx + \mu\varepsilon\int_0^L u_x^2\,dx + C_\varepsilon\int_{L_0}^{L}\alpha' u^2\,dx \\ & -\mu_2\int_{L_1}^{L} u_x^2\,dx + C_\varepsilon\int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx.\end{aligned}$$

Finalizando a demonstração. ♣

Agora, para juntarmos em uma única expressão os termos negativos que conseguimos com os dois lemas anteriores, definimos

$$R_3(t) \;:=\; R_1(t) + \left(\frac{\mu_1 + C_1}{\mu_2}\right)R_2(t),$$

onde μ_1, μ_2 e C_1 são as constantes garantidas pelos lemas. Nestas condições,

Lema 3.3 *Dado $\theta \in [0,1]$ existe uma constante positiva C_3 tal que*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R_3(t) \;\leq\; & -\frac{\mu_1}{2}\int_0^{L_1} u_t^2\,dx - \frac{\mu_1}{2}\int_0^L u_x^2\,dx + C_3\int_{L_0}^{L}\alpha u_t^2\,dx \\ & +C_3\int_{L_0}^{L}\alpha' u^2\,dx + C_3\left\{\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx + \int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx\right\}.\end{aligned}$$

Demonstração: Denotando $\alpha_1 := \min\limits_{x\in[L_1,L]} \alpha$, das desigualdades (3.3) e (3.6) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_3(t) \leq\ & -\mu_1\int_0^{L_1} u_t^2\,dx - \mu_1\int_0^{L_1} u_x^2\,dx + C_1\int_{L_1}^{L} u_t^2\,dx + C_1\int_{L_1}^{L} u_x^2\,dx \\
& C_1\left\{\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx + \int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx\right\} + \left(\frac{\mu_1+C_1}{\mu_2}\right)\int_{L_0}^{L}\alpha u_t^2\,dx \\
& + \left(\frac{\mu_1+C_1}{\mu_2}\right)\mu\varepsilon\int_0^L u_x^2\,dx + \left(\frac{\mu_1+C_1}{\mu_2}\right)C_\varepsilon\int_{L_0}^{L}\alpha' u^2\,dx \\
& -(\mu_1+C_1)\int_{L_1}^{L} u_x^2\,dx + \left(\frac{\mu_1+C_1}{\mu_2}\right)C_\varepsilon\int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx \\
\leq\ & -\mu_1\int_0^{L_1} u_t^2\,dx - \mu_1\int_0^{L} u_x^2\,dx + \left(\frac{\mu_1+C_1}{\mu_2}\right)\mu\varepsilon\int_0^L u_x^2\,dx \\
& + \left(\frac{C_1}{\alpha_1} + \frac{\mu_1+C_1}{\mu_2}\right)\int_{L_0}^{L}\alpha u_t^2\,dx + \left(\frac{\mu_1+C_1}{\mu_2}\right)C_\varepsilon\int_{L_0}^{L}\alpha' u^2\,dx \\
& + \left(C_1 + \frac{\mu_1+C_1}{\mu_2}C_\varepsilon\right)\int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx + C_1\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Fixando ε de forma que satisfaça

$$-\mu_1 + \left(\frac{\mu_1+C_1}{\mu_2}\right)\mu\varepsilon = -\frac{\mu_1}{2}, \qquad (3.9)$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R_3(t) \;\le\; & -\frac{\mu_1}{2}\int_0^{L_1} u_t^2\,dx - \frac{\mu_1}{2}\int_0^{L} u_x^2\,dx + C_3\int_{L_0}^{L} \alpha u_t^2\,dx \\ & + C_3\int_{L_0}^{L} \alpha' u^2\,dx + C_3\left\{\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx + \int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx\right\}.\end{aligned}$$

onde C_3 é a maior das constantes que multiplica as integrais em (3.8), após fixado ε em (3.9). ♣

A medida que completamos $-\mu\mathcal{F}(t)$ devemos ter um certo cuidado com os termos extras que vão aparecendo. Afinal, queremos eliminá-los em algum momento (majorar ou cancelar com outra expressão de sinal oposto). Esta eliminação é feita construindo um outro funcional que, após majorado, já não tenha este termo e esteja mais próximo de ser F. Neste sentido, para eliminar o termo $C_3\displaystyle\int_{L_0}^{L}\alpha' u^2\,dx$, que aparece na última desigualdade, consideraremos os dois próximos lemas.

Lema 3.4 *A solução v do problema de Dirichlet:*

$$-[bv_x]_x = \alpha' u \tag{3.10}$$

$$v(0) = 0 = v(L) \tag{3.11}$$

satisfaz

$$\int_0^L b v_x u_x\,dx = \int_0^L \alpha' u^2\,dx; \tag{3.12}$$

$$\int_0^L v_x^2\,dx \le C\int_0^L \alpha' u^2\,dx; \tag{3.13}$$

$$\int_0^L v_t^2\,dx \le C\int_0^L \alpha' u_t^2\,dx + C\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx, \tag{3.14}$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração: A igualdade (3.12) é imediata. Basta multiplicar a equação (3.10) por u, integrar por partes e utilizar (3.11).

Para demonstrar (3.13), multiplicamos a equação (3.10) por v, integrando por partes e usando a condição (3.11), obtemos

$$\int_0^L bv_x^2\,dx = \int_0^L \alpha' uv\,dx. \tag{3.15}$$

Observando que $0 < b_\infty \leq b < \kappa$ e $A' = \max \alpha'$, aplicamos as desigualdades de Young e de Poincaré em (3.15) chegamos a

$$b_\infty \int_0^L v_x^2\,dx \leq \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^L \alpha' u^2\,dx + A'C_p\varepsilon \int_0^L v_x^2\,dx,$$

onde C_p é a constante de Poincaré. Para terminar a demonstração deste item, simplesmente separe os termos em que aparecem $\int_0^L v_x^2\,dx$ na expressão anterior, e fixe $\varepsilon > 0$ tal que $b_\infty - A'C_p\varepsilon > 0$.

Lembrando que $b = \kappa - c(x)\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)$, ao derivarmos (3.10) em relação a t, multiplicá-la por v_t e integrarmos de 0 a L obtemos

$$-\int_0^L [c(x)g(t)v_x + bv_{tx}]_x v_t\,dx = \int_0^L \alpha' u_t v_t\,dx$$

$$\therefore \qquad -\int_0^L c(x)g(t)v_x v_{tx}\,dx + \int_0^L bv_{tx}^2\,dx = \int_0^L \alpha' u_t v_t\,dx$$

$$\therefore \qquad \int_0^L bv_{tx}^2\,dx = \int_0^L \alpha' u_t v_t\,dx + \int_0^L c(x)g(t)v_x v_{tx}\,dx.$$

Donde

$$b_\infty \int_0^L v_{tx}^2\,dx \le \int_0^L \alpha' u_t v_t\,dx + c_2 g(t)\int_0^L |v_x|\,|v_{tx}|\,dx.$$

Aplicando a desigualdades de Young e notando que $g(0) \ge g(t)$, por hipótese, temos

$$\begin{aligned} b_\infty \int_0^L v_{tx}^2\,dx &\le \int_0^L \alpha' u_t v_t\,dx + \frac{c_2 g(t)}{4\varepsilon}\int_0^L v_x^2\,dx + c_2 g(0)\varepsilon \int_0^L v_{tx}^2\,dx \\ \therefore \quad (b_\infty - c_2 g(0)\varepsilon)\int_0^L v_{tx}^2\,dx &\le \int_0^L \alpha' u_t v_t\,dx + \frac{c_2 g(t)}{4\varepsilon}\int_0^L v_x^2\,dx. \end{aligned}$$

Fixando $\varepsilon > 0$, tal que $b_\infty - c_2 g(0)\varepsilon > 0$ podemos escrever

$$\int_0^L v_{tx}^2\,dx \le \mu \int_0^L \alpha' u_t v_t\,dx + \mu g(t)\int_0^L v_x^2\,dx, \tag{3.16}$$

onde μ é uma constante. Desta desigualdade, juntamente com as de Poincaré e Young, chegamos a

$$\frac{1}{C_p}\int_0^L v_t^2\,dx \le \frac{\mu}{4\varepsilon}\int_0^L \alpha' u_t^2\,dx + A'\varepsilon \int_0^L v_t^2\,dx + \mu g(t)\int_0^L v_x^2\,dx,$$

na qual, separando os termos em que aparecem $\displaystyle\int_0^L v_t^2\,dx$, fixamos $\varepsilon > 0$ tal que $\dfrac{1}{C_p} - A'\varepsilon > 0$, obtendo

$$\int_0^L v_t^2\,dx \le \mu \int_0^L \alpha' u_t^2\,dx + \mu g(t)\int_0^L v_x^2\,dx, \tag{3.17}$$

onde μ é uma constante (não necessariamente a mesma que tínhamos antes). Agora, como $\alpha' = 0$ fora do intervalo $[L_0, L]$, de (3.17) e (3.13) segue

$$\int_0^L v_t^2\,dx \le \mu \int_0^L \alpha' u_t^2\,dx + \mu C A' g(t) \int_{L_0}^L u^2\,dx. \tag{3.18}$$

Donde, utilizando a desigualdade de Poincaré e a relação $1 \le \dfrac{c(x)}{c_0}$, $\forall x \in [L_0, L]$, segue

$$\begin{aligned}
\int_0^L v_t^2\,dx &\le \mu \int_0^L \alpha' u_t^2\,dx + \mu C A' g(t) C_p \int_{L_0}^L u_x^2\,dx \\
&\le \mu \int_0^L \alpha' u_t^2\,dx + \frac{\mu C A' g(t) C_p}{c_0} \int_{L_0}^L c(x) u_x^2\,dx \\
&\le \mu \int_0^L \alpha' u_t^2\,dx + \frac{\mu C A' C_p}{c_0} \int_0^L g(t) c(x) u_x^2\,dx,
\end{aligned}$$

que completa a demonstração do Lema 3.4. ♣

Finalmente, utilizando a função v do resultado anterior, definimos

$$R_4(t) := \int_0^L u_t v\,dx$$

e enunciamos o seguinte lema, com o qual poderemos eliminar o termo $C_3 \displaystyle\int_{L_0}^L \alpha' u^2\,dx$, do funcional $R_3(t)$.

Lema 3.5 *Dados $\varepsilon > 0$ e $\theta \in [0,1]$, existe uma constante C_ε (C_ε dependendo de ε) tal que*

$$\frac{d}{dt} R_4(t) \le \varepsilon \int_0^{L_1} u_t^2\,dx + C_\varepsilon \int_{L_0}^L \alpha' u_t^2\,dx - \frac{1}{2} \int_{L_0}^L \alpha' u^2\,dx + C_\varepsilon \int_0^L c(x) g^{2\theta} \Box u_x\,dx.$$

Demonstração: Multiplicamos a equação do problema $\star$ por v dada em (3.10) $-$ (3.11) e integramos sobre o intervalo $[0, L]$, obtendo

$$\begin{aligned}
\int_0^L u_{tt} v\, dx + \int_0^L -\kappa u_{xx} v\, dx + \int_0^L [c(x) g * u_x]_x v\, dx &= 0 \\
\therefore \qquad \int_0^L u_{tt} v\, dx - \int_0^L [\kappa u_x - c(x) g * u_x]_x v\, dx &= 0 \\
\therefore \quad \frac{d}{dt}\int_0^L u_t v\, dx - \int_0^L u_t v_t\, dx - \int_0^L [b u_x + c(x) g \diamondsuit u_x]_x v\, dx &= 0.
\end{aligned}$$

Donde segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} R_4(t) &= \int_0^L u_t v_t\, dx + \int_0^L [b u_x - c(x) g \diamondsuit u_x]_x v\, dx \\
&= \int_0^L u_t v_t\, dx - \int_0^L b u_x v_x\, dx + \int_0^L c(x)(g \diamondsuit u_x) v_x\, dx.
\end{aligned}$$

Do lema anterior e de (2.5) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} R_4(t) \leq\ & \varepsilon \int_0^{L_1} u_t^2\, dx + \varepsilon \int_{L_1}^L u_t^2\, dx + \frac{C}{4\varepsilon}\int_{L_0}^L \alpha' u_t^2\, dx + \frac{C}{4\varepsilon}\int_0^L g(t) c(x) u_x^2\, dx \\
& - \int_{L_0}^L \alpha' u^2\, dx + C\delta \int_{L_0}^L \alpha' u^2\, dx \\
& + \frac{C}{4\delta}\int_0^L c(x) g^{2\theta} \square u_x\, dx.
\end{aligned}$$

Fixando $\delta = \dfrac{1}{2C}$ e notando que, por definição $\alpha' > 0$ no intervalo $[L_1, L]$, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_4(t) \quad \leq \quad & \varepsilon \int_0^{L_1} u_t^2 \, dx + C_\varepsilon \int_{L_0}^{L} \alpha' u_t^2 \, dx + C_\varepsilon \int_0^L g(t)c(x)u_x^2 \, dx \\
& -\frac{1}{2}\int_{L_0}^{L} \alpha' u^2 \, dx + C_\varepsilon \int_0^L c(x) g^{2\theta} \Box u_x \, dx,
\end{aligned}
$$

onde C_ε uma constante que depende de ε.

A seguir definiremos o penúltimo funcional auxiliar na construção de $F(t)$. Com a ajuda dos dois lemas anteriores, após majorarmos este funcional não mais teremos o termo $C_3 \displaystyle\int_{L_0}^{L} \alpha' u^2 \, dx$. Considerando R_3 e R_4 já definidos, seja

$$
R_5(t) \quad := \quad R_3(t) + 2C_3 R_4(t).
$$

Lema 3.6 *Dado $\theta \in [0,1]$, existe uma constante positiva C_5, tal que*

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_5(t) \quad \leq \quad & -\frac{\mu_1}{4}\int_0^{L_1} u_t^2 \, dx - \frac{\mu_1}{4}\int_0^{L} u_x^2 \, dx + C_5 \int_{L_0}^{L} (\alpha + \alpha')u_t^2 \, dx \\
& + C_5 \int_0^L c(x) g^{2\theta} \Box u_x \, dx + C_5 \int_0^L c(x) g(t) u_x^2 \, dx.
\end{aligned}
$$

Demonstração: Utilizando os Lemas 3.3 e 3.5 obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_5(t) \quad &\leq \quad \left(-\frac{\mu_1}{2}+2C_3\varepsilon\right)\int_0^{L_1} u_t^2\,dx - \frac{\mu_1}{2}\int_0^L u_x^2\,dx + C_3\int_{L_0}^L \alpha u_t^2\,dx \\
&\quad +2C_3C_\varepsilon\int_{L_0}^L \alpha' u_t^2\,dx + \left(C_3+2C_3C_\varepsilon\right)\int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx \\
&\quad +2C_3C_\varepsilon\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Com isto, pondo $\varepsilon = \dfrac{\mu_1}{8C_3}$, resulta

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_5(t) \quad &\leq \quad -\frac{\mu_1}{4}\int_0^{L_1} u_t^2\,dx - \frac{\mu_1}{4}\int_0^L u_x^2\,dx + C_5\int_{L_0}^L (\alpha+\alpha')u_t^2\,dx \\
&\quad +C_5\int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx + C_5\int_0^L c(x)g(t)u_x^2\,dx,
\end{aligned}
$$

onde $C_5 = C_3 + 2C_3C_\varepsilon$. ♣

Neste ponto, acredito que cabe o seguinte comentário e opinião: A maior dificuldade para construir F é constituir $\mathcal{F}(t)$ controlando os termos extras pararelamente; que se não forem eliminados no momento certo podem ocasionar um bom trabalho. Acredite!

Seja C_5 garantida pelo Lema 3.6. Pondo $\beta := \dfrac{2C_5(\alpha+\alpha')}{g(0)}$, definimos

$$
\begin{aligned}
R_6(t) \quad &:= \quad -\int_0^L \beta u_t[g*u]_t\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L \beta g''\Box u\,dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^L g'(t)\beta u^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L c(x)\beta|g*u_x|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Lema 3.7 *Dado $\theta \in [0,1]$, existem constantes positivas μ e C_ε, tais que*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R_6(t) &\leq -\int_{L_0}^{L} 2C_5(\alpha+\alpha')u_t^2\,dx + \mu\varepsilon\int_0^L u_x^2\,dx \\ &\quad + C_\varepsilon\left\{\int_0^L c(x)g(t)u_x^2\,dx + \int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx\right\}.\end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando a equação do problema $\star$ por $\beta[g*u]_t$ e integrando sobre o intervalo $[0,L]$, obtemos

$$\int_0^L u_{tt}\beta[g*u]_t\,dx + \int_0^L -\kappa u_{xx}\beta[g*u]_t\,dx + \int_0^L [c(x)g*u_x]_x\beta[g*u]_t\,dx = 0. \quad (3.19)$$

Analisando separadamente cada uma destas três integrais.

- $$\int_0^L u_{tt}\beta[g*u]_t\,dx = \frac{d}{dt}\left\{\int_0^L \beta u_t[g*u]_t\,dx\right\} - \int_0^L \beta u_t[g*u]_{tt}\,dx, \text{ como}$$

  $$[g*u]_{tt} = [g(0)u + g'*u]_t = g(0)u_t + g'(0)u + g''*u, \text{ segue que}$$

  $$\begin{aligned}\int_0^L u_{tt}\beta[g*u]_t\,dx &= \frac{d}{dt}\left\{\int_0^L \beta u_t[g*u]_t\,dx\right\} - g(0)\int_0^L \beta u_t^2\,dx - g'(0)\int_0^L \beta u u_t\,dx \\ &\quad - \int_0^L \beta[g''*u]u_t\,dx, \text{ notando que}\end{aligned}$$

  $$2[g''*u]u_t = g'''\Box u - g''|u|^2 - \frac{d}{dt}\left\{g''\Box u\right\} + \frac{d}{dt}\left\{g'(t)|u|^2\right\} - 2g'(0)uu_t,$$

resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^L u_{tt}\beta[g*u]_t\,dx &= \frac{d}{dt}\left\{\int_0^L \beta u_t(g*u)_t\,dx\right\} - g(0)\int_0^L \beta u_t^2\,dx - g'(0)\int_0^L \beta u u_t\,dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^L \beta g'''\Box u\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L g''(t)\beta u^2\,dx \\
&\quad +\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^L \beta g''\Box u\,dx\right\} - \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^L g'(t)\beta u^2\,dx\right\} \\
&\quad +g'(0)\int_0^L \beta u u_t\,dx \\
&= \frac{d}{dt}\left\{\int_0^L \beta u_t[g*u]_t\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L \beta g''\Box u\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L g'(t)\beta u^2\,dx\right\} \\
&\quad -g(0)\int_0^L \beta u_t^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L \beta g'''\Box u\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L g''(t)\beta u^2\,dx.
\end{aligned}$$

- $$-\int_0^L \kappa u_{xx}\beta[g*u]_t\,dx = \int_0^L \kappa u_x[\beta(g*u)_t]_x\,dx$$

$$= \int_0^L \kappa u_x\beta'[g*u]_t\,dx + \int_0^L \kappa u_x\beta[g*u]_{tx}\,dx$$

$$= \int_0^L \kappa u_x\beta'[g*u]_t\,dx + \int_0^L \kappa u_x\beta[g(0)u_x + g'*u_x]\,dx$$

$$= \int_0^L \kappa u_x\beta'[g*u]_t\,dx + \int_0^L \kappa u_x\beta[g(t)u_x - g'\Diamond u_x]\,dx.$$

- $$\int_0^L [c(x)g*u_x]_x\beta[g*u]_t\,dx = -\int_0^L c(x)(g*u_x)[\beta(g*u)_t]_x\,dx$$

$$= -\int_0^L c(x)(g*u_x)\beta'(g*u)_t\,dx - \int_0^L c(x)(g*u_x)\beta(g*u_x)_t\,dx$$

$$= -\int_0^L c(x)(g*u_x)\beta'(g*u)_t\,dx - \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^L \beta c(x)(g*u_x)^2\,dx\right\}.$$

Retornando à (3.19) segue

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_6(t) &= -g(0)\int_0^L \beta u_t^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L \beta g'''\Box u\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L g''(t)\beta u^2\,dx \\
&\quad + \int_0^L [\kappa u_x - c(x)(g*u_x)]\beta'(g*u)_t\,dx + \int_0^L \kappa u_x\beta[g(t)u_x - g'\diamondsuit u_x]\,dx \\
&= -g(0)\int_0^L \beta u_t^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L \beta g'''\Box u\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L g''(t)\beta u^2\,dx \\
&\quad + \int_0^L (bu_x + c(x)g\diamondsuit u_x)(\beta' g(t)u - \beta' g'\diamondsuit u)\,dx \\
&\quad + \int_0^L \kappa u_x(\beta g(t)u_x - \beta g'\diamondsuit u_x)\,dx.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Para majorar a derivada de $R_6(t)$, primeiramente analisemos os dois últimos termos de (3.20). Convencionando $\beta_1' := max\,|\beta'|$ e $\beta_1 := \max\,\beta$,

- $$\int_0^L (bu_x + c(x)g\Diamond u_x)(\beta' g(t)u - \beta' g'\Diamond u)\,dx$$

$$= \int_0^L b\beta' g(t)u_x u\,dx - \int_0^L b\beta' u_x g'\Diamond u\,dx + \int_0^L \beta' g(t)c(x)ug\Diamond u_x\,dx$$

$$- \int_0^L \beta' c(x)g\Diamond u_x g'\Diamond u\,dx$$

Utilizando o fato de que $1 \leq \dfrac{c(x)}{c_0}$, $\forall x \in [L_0, L]$, segue que

$$\int_0^L (bu_x + c(x)g\Diamond u_x)(\beta' g(t)u - \beta' g'\Diamond u)\,dx$$

$$\leq \frac{\kappa\beta_1'}{2c_0}\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx + \frac{\kappa\beta_1' C_p}{2c_0}\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx + \kappa\beta_1'\varepsilon\int_0^L u_x^2\,dx$$

$$+\frac{\kappa\beta_1' C}{4\varepsilon}\int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx + \frac{\beta_1' c_2 C_p}{2c_0}\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx$$

$$+\frac{\beta_1' g(0)C}{2}\int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx + \frac{\beta_1' C}{2}\int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx$$

$$+\frac{\beta_1' c_2 C C_p}{c_0}\int_0^L c(x)g^{2\theta}\Box u_x\,dx. \tag{3.21}$$

- $$\int_0^L \kappa u_x\beta g(t)u_x\,dx + \int_0^L \kappa\beta u_x g'\Diamond u_x\,dx = \int_0^L \kappa\beta g(t)u_x^2\,dx + \int_0^L \kappa\beta u_x g'\Diamond u_x\,dx.$$

Lembrando que $1 \leq \dfrac{c(x)}{c_0}$, $\forall x \in [L_0, L]$, aplicando a desigualdade de Young e supondo que a função g, assim como as funções $e^{-\mu t}$ e $(1+t)^{-p}$, safisfaz $|g'(t)| \leq Cg(t)$, segue que

$$\int_0^L \kappa u_x \beta g(t) u_x \, dx + \int_0^L \kappa \beta u_x g' \Diamond u_x \, dx$$

$$\leq \frac{\kappa \beta_1}{c_0} \int_0^L g(t) c(x) u_x^2 \, dx + \varepsilon \int_0^L u_x^2 \, dx + \frac{\kappa^2 \beta_1^2 C}{c_0} \int_0^L c(x) g^{2\theta} \Box u_x \, dx. \quad (3.22)$$

De (3.20), (3.21) e (3.22), resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_6(t) \;\; &\leq \;\; -\int_{L_0}^L 2C_5(\alpha + \alpha') u_t^2 \, dx + \mu\varepsilon \int_0^L u_x^2 \, dx \\ &\quad + C_\varepsilon \Big\{ \int_0^L c(x) g(t) u_x^2 \, dx + \int_0^L c(x) g^{2\theta} \Box u_x \, dx \Big\}, \end{aligned}$$

onde $\mu := 1 + \kappa \beta_1'$ e C_ε é uma constante que depende de ε.
Finalmente, definimos o funcional F por

$$F(t) := R_5(t) + R_6(t)$$

Desta forma, verifica-se que

$$\frac{d}{dt} F(t) \;\; \leq \;\; -\mu \mathcal{F}(t) + R(t), \quad (3.23)$$

onde μ, C_7 são constantes positivas e

$$\mathcal{F}(t) \;\; := \;\; \Big\{ \frac{1}{2} \int_0^L u_t^2 + b u_x^2 \, dx \Big\}, \quad (3.24)$$

$$R(t) \;\; := \;\; C_7 \Big\{ \int_0^L g(t) c(x) u_x^2 \, dx + \int_0^L c(x) g^{2\theta} \Box u_x \, dx \Big\}. \quad (3.25)$$

3.2 Decaimento Exponencial

Lema 3.8 *Seja $\mathcal{E}$ uma função real positiva de classe $\mathcal{C}^1$. Se existe uma constante $\mu > 0$ tal que*

$$\mathcal{E}'(t) \leq -\mu\mathcal{E}(t), \tag{3.26}$$

então

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)e^{-\mu t}. \tag{3.27}$$

Demonstração:

$$\mathcal{E}'(t) \leq -\mu\mathcal{E}(t) \Rightarrow \mathcal{E}'(t) + \mu\mathcal{E}(t) \leq 0 \Rightarrow \mathcal{E}'(t)e^{\mu t} + \mu e^{\mu t}\mathcal{E}(t) \leq 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}[e^{\mu t}\mathcal{E}(t)] \leq 0.$$

Integrando a última desigualdade de 0 a t e multiplicando ambos os lados da mesma por $e^{-\mu t}$, obtém-se (3.27). ♣

Teorema 3.1 *Se o núcleo resolvente $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ é uma função não-negativa e existe uma constante $\kappa_1 > 0$, tal que*

$$g(0) > 0, \quad g'(t) \leq -\kappa_1 g(t), \tag{3.28}$$

então, existem constantes positivas μ e C tais que

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(u(t)) \leq Ce^{-\mu t}.$$

Demonstração: Utilizando a hipótese (3.28) na lei de dissipação da energia (2.9), temos

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\mathcal{E}}(u(t)) \;\leq\; -\frac{\kappa_1}{2}\int_0^L c(x)g\Box u_x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx. \tag{3.29}$$

Por outro lado, fixando $\theta = \frac{1}{2}$ em (3.25) segue de (3.23) que

$$\frac{d}{dt}F(t) \;\leq\; -\mu_7\mathcal{F}(t) + C_7\left\{\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx + \int_0^L c(x)g\Box u_x\,dx\right\}. \tag{3.30}$$

Somando o termo $0 = -\mu_7\left\{\frac{1}{2}\int_0^L c(x)g\Box u_x\,dx\right\} + \mu_7\left\{\frac{1}{2}\int_0^L c(x)g\Box u_x\,dx\right\}$ à desigualdade anterior, observando a definição de $\boldsymbol{\mathcal{E}}(u(t))$ e denotando $C = \frac{\mu_7}{2} + C_7$ temos

$$\frac{d}{dt}F(t) \;\leq\; -\mu_7\boldsymbol{\mathcal{E}}(u(t)) + C\left\{\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx + \int_0^L c(x)g\Box u_x\,dx\right\}. \tag{3.31}$$

A seguir, definimos o funcional $\mathcal{L}$ por:

$$\mathcal{L}(t) := N\boldsymbol{\mathcal{E}}(u(t)) + F(t).$$

Para N suficientemente grande, as desigualdades (3.29) e (3.31) implicam que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\mu_7\boldsymbol{\mathcal{E}}(u(t)). \tag{3.32}$$

Além disso, dado que $|F(t)| \leq C\boldsymbol{\mathcal{E}}(u(t))$, para N suficientemente grande temos também que

$$\frac{N}{2}\mathcal{E}(u(t)) \leq \mathcal{L}(t) \leq 2N\mathcal{E}(u(t)). \tag{3.33}$$

Combinando (3.32) e (3.33), concluímos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\frac{\mu_7}{2N}\mathcal{L}(t),$$

donde, pelo Lema 3.8, segue o decaimento exponencial de $\mathcal{L}(t)$ e, conseqüentemente, o da energia. ♣

3.3 Decaimento Polinomial

Lema 3.9 *Se $g \in \mathcal{C}([0,\infty[), h \in L^1_{loc}(0,\infty)$, $0 \leq \phi \leq 1$ e $q \in (0,\infty)$, então*

$$\int_0^t |g(s)h(s)|\,ds \leq \left\{\int_0^t |g(s)|^{1-\phi}\,|h(s)|\,ds\right\}^{\frac{1}{q+1}} \left\{\int_0^t |g(s)|^{1+\frac{\phi}{q}}\,|h(s)|\,ds\right\}^{\frac{q}{q+1}}.$$

Demonstração: Para t fixo, temos

$$\int_0^t |g(s)h(s)|\,ds = \int_0^t |g(s)|^{\frac{1-\phi}{q+1}}|h(s)|^{\frac{1}{q+1}}|g(s)|^{1-\frac{1-\phi}{q+1}}|h(s)|^{\frac{q}{q+1}}\,ds.$$

Denotando $w_1 := |g(s)|^{\frac{1-\phi}{q+1}}|h(s)|^{\frac{1}{q+1}}$ e $w_2 := |g(s)|^{1-\frac{1-\phi}{q+1}}|h(s)|^{\frac{q}{q+1}}$, temos que $w_1 \in L^p_{loc}(0,\infty)$ e $w_2 \in L^{p'}_{loc}(0,\infty)$, onde $p = q+1$ e $p' = \dfrac{q+1}{q}$. Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_0^t |g(s)h(s)|\,ds \leq \left\{\int_0^t |g(s)|^{1-\phi}\,|h(s)|\,ds\right\}^{\frac{1}{q+1}} \left\{\int_0^t |g(s)|^{1+\frac{\phi}{q}}\,|h(s)|\,ds\right\}^{\frac{q}{q+1}}.$$

Como queríamos demonstrar. ♣

Lema 3.10 *Se* $v \in L^\infty(0,T;L^2(0,L))$, $g \in \mathcal{C}([0,\infty[)$ *e* $q \in (0,\infty)$, *então*

$$\int_0^L g\Box v\,dx \leq \sqrt{2}\left\{\int_0^t \|v(s)\|^2_{L^2(0,L)}\,ds + t\|v(s)\|^2_{L^2(0,L)}\right\}^{\frac{1}{p+1}}\left\{\int_0^L g^{1+\frac{1}{p}}\Box v\,dx\right\}^{\frac{p}{p+1}}.$$

Além disso, se existe $0<\phi<1$, *tal que* $\int_0^\infty g(s)^{1-\phi}ds<\infty$, *então*

$$\int_0^L g\Box v\,dx \leq 4\left\{\left(\int_0^\infty g(s)^{1-\phi}ds\right)\|v(s)\|^2_{L^\infty(0,T,L^2)}\right\}^{\frac{1}{\phi p+1}}\left\{\int_0^L g^{1+\frac{1}{p}}\Box v\,dx\right\}^{\frac{\phi p}{\phi p+1}}.$$

Demonstração: Primeiramente notemos que

$$\int_0^L g\Box v\,dx \;=\; \int_0^L\int_0^t g(t-s)(v(t)-v(s))(v(t)-v(s))\,ds\,dx.$$

Denotando $(v(t)-v(s))(v(t)-v(s))$ por $h(s)$ e utilizando as hipóteses sobre v, juntamente com o Lema 3.9, segue que

$$\begin{aligned}\int_0^L g\Box v\,dx &\leq \left\{\int_0^L\int_0^t g^{1-\phi}(t-s)h(s)\,ds\,dx\right\}^{\frac{1}{\phi p+1}}\left\{\int_0^L\int_0^t g^{1+\frac{1}{p}}(t-s)h(s)\,ds\,dx\right\}^{\frac{\phi p}{\phi p+1}}\\ &\leq \left\{\int_0^L g^{1-\phi}\Box v\,dx\right\}^{\frac{1}{\phi p+1}}\left\{\int_0^L g^{1+\frac{1}{p}}\Box v\,dx\right\}^{\frac{\phi p}{\phi p+1}}. \qquad (3.34)\end{aligned}$$

Agora, para $0<\phi<1$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^L g^{1-\phi}\Box v\,dx &= \int_0^t g^{1-\phi}(t-s)\int_0^L (v(t)-v(s))(v(t)-v(s))\,dx\,ds \\
&\leq 4\left(\int_0^t g^{1-\phi}(s)\,ds\right)\|v\|^2_{L^\infty(0,T,L^2)},
\end{aligned}$$

donde segue a segunda desigualdade deste lema. Quando $\phi = 1$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^L 1\Box v\,dx &= \int_0^t \int_0^L (v(t)-v(s))(v(t)-v(s))\,dx\,ds \\
&\leq 2t\int_0^L |v(t)|^2\,dx + 2\int_0^t\int_0^L |v(s)|^2\,dx\,ds.
\end{aligned}$$

Substituindo esta desigualdade em (3.34) concluímos a demonstração. ♣

Lema 3.11 *Seja $\mathcal{E}$ uma função real positiva de classe $\mathcal{C}^1$. Se existe uma constante $\mu > 0$ tal que*

$$\mathcal{E}'(t) \leq -\mu\mathcal{E}^{1+\frac{1}{p}}(t) \tag{3.35}$$

então

$$\mathcal{E}(t) \leq C(t+1)^{-p}. \tag{3.36}$$

Demonstração: De

$$\mathcal{E}'(t) \leq -\mu\mathcal{E}(t)^{1+\frac{1}{p}} \Rightarrow \mathcal{E}(t)^{-1-\frac{1}{p}}\mathcal{E}'(t) \leq -\mu \Rightarrow \frac{d}{dt}[-p\mathcal{E}(t)^{-\frac{1}{p}}] \leq -\mu \Rightarrow \frac{d}{dt}[\mathcal{E}(t)^{-\frac{1}{p}}] \geq \frac{\mu}{p}.$$

Integrando de 0 a t, segue que

$$\mathcal{E}(t)^{-\frac{1}{p}} - \mathcal{E}(0)^{-\frac{1}{p}} \geq \frac{\mu}{p}t \Rightarrow \mathcal{E}(t)^{-\frac{1}{p}} \geq \frac{\mu}{p}t + \mathcal{E}(0)^{-\frac{1}{p}}.$$

Denotando $m := \min\{\frac{\mu}{p}, \mathcal{E}(0)^{-\frac{1}{p}}\}$, da última desigualdade segue

$$\mathcal{E}(t)^{-\frac{1}{p}} \geq mt + m$$

e portanto

$$\mathcal{E}(t) \leq C(t+1)^{-p},$$

onde $C = m^{-p}$. ♣

Teorema 3.2 *Se o núcleo resolvente $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ é uma função não-negativa e existe uma constante $\kappa_1 > 0$, tal que*

$$g(0) > 0 \quad e \quad g'(t) \leq -\kappa_1 g(t)^{1+\frac{1}{p}} \tag{3.37}$$

para algum $p > 2$, então existe uma constante positiva $C = C(\boldsymbol{\mathcal{E}}(u(0)))$, tal que

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(u(t)) \leq C(t+1)^{-p}.$$

Demonstração: Utilizando a hipótese (3.37) em (2.9) temos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(u(t)) \quad \leq \quad -\frac{\kappa_1}{2}\int_0^L c(x)g^{1+\frac{1}{p}}\Box u_x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx. \tag{3.38}$$

Fazendo $\theta = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{p})$ em (3.25), segue que

$$\frac{d}{dt}F(t) \quad \leq \quad -\mu_7\mathcal{F}(t) + C_7\left\{\int_0^L g(t)c(x)u_x^2\,dx + \int_0^L c(x)g^{1+\frac{1}{p}}\Box u_x\,dx\right\}. \tag{3.39}$$

A seguir consideramos $\mathcal{L}$, introduzido anteriormente, dado por

$$\mathcal{L}(t) := N\mathcal{E}(u(t)) + F(t).$$

Para N suficientemente grande, as desigualdades (3.38) e (3.39) implicam que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\mu_7\mathcal{F}(t) - \mu_7\int_0^L c(x)g^{1+\frac{1}{p}}\Box u_x\,dx. \tag{3.40}$$

Fixando $\phi = \frac{1}{2}$, para $p > 2$ a hipótese (3.37), juntamente com o Lema 3.11, implica que $\displaystyle\int_0^\infty g(s)^{1-\phi}ds < \infty$. Da segunda parte do Lema 3.10 temos

$$\int_0^L c(x)g^{1+\frac{1}{p}}\Box u_x\,dx \geq \frac{1}{C}\left\{\int_0^L c(x)g\Box u_x\,dx\right\}^{\frac{\phi p+1}{\phi p}}. \tag{3.41}$$

Como $\mathcal{F}$ é limitada, visto que $\mathcal{E}$ é limitada,

$$\mathcal{F}(t) \geq \frac{1}{C}\mathcal{F}(t)^{\frac{\phi p+1}{\phi p}}. \tag{3.42}$$

Observando a definição (2.8), substituímos (3.41) e (3.42) em (3.40) e obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\frac{1}{C}\boldsymbol{\mathcal{E}}(u(t))^{\frac{\phi p+1}{\phi p}}.$$

Por (3.33) existe uma constante $\mu = \mu(N)$, tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\mu\mathcal{L}(t)^{\frac{\phi p+1}{\phi p}} = -\mu\mathcal{L}(t)^{1+\frac{1}{\phi p}},$$

donde, pelo Lema 3.11, segue

$$\mathcal{L}(t) \leq C(t+1)^{-\phi p} \text{ conseqüentemente } \boldsymbol{\mathcal{E}}(u(t)) \leq C(t+1)^{-\phi p}.$$

Para $p > 2$ e $\phi = \dfrac{1}{2}$, a última desigualdade implica que

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2_{L^2(0,L)}ds + t\|u(s)\|^2_{L^2(0,L)} \leq C\left\{\int_0^\infty \boldsymbol{\mathcal{E}}(u(t)) + t\boldsymbol{\mathcal{E}}(u(t))\right\} < \infty.$$

Nestas condições, da primeira parte do Lema 3.10, obtemos

$$\int_0^L c(x)g^{1+\frac{1}{p}}\Box u_x\,dx \geq \frac{1}{C}\left\{\int_0^L c(x)g\Box u_x\,dx\right\}^{\frac{p+1}{p}}.$$

Como $\mathcal{F}$ é limitada, visto que $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ é limitada:

$$\mathcal{F}(t) \geq \frac{1}{C}\mathcal{F}(t)^{\frac{p+1}{p}}.$$

Das duas desigualdades anteriores, juntamente com (3.40), obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\frac{1}{C}\mathcal{E}(u(t))^{\frac{p+1}{p}}.$$

Donde, por (3.33),

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\mu\mathcal{L}(t)^{\frac{p+1}{p}} = -\mu\mathcal{L}(t)^{1+\frac{1}{p}}.$$

Logo, pelo Lema 3.11, resulta

$$\mathcal{L}(t) \leq C(t+1)^{-p} \text{ conseqüentemente } \mathcal{E}(u(t)) \leq C(t+1)^{-p}.$$

Finalizando. ♣

Referências Bibliográficas

[1] Brézis, H. (1993) *Análisis funcional: Teoría y aplicaciones.* París: Masson.

[2] Cavalcanti, M.M. & Oquendo, H.P. (2003) "Frictional Versus Viscoelastic Damping in a Semilinear Wave Equation". *SIAM J. Control Optim* **42**, 1310-1324.

[3] Dafermos, C.M. (1970) "An Abstract Volterra Equation with Applications to Linear Viscoelasticity", *Journal of Differential Equations* **7**, 554-567.

[4] Fabrizio, M. & Morro, A. (1992) *Mathematical Problems in Linear Viscoelaticity.* Philadelphia: SIAM.

[5] Greenberg, J.M. & Tatsien, L. (1984) "The effect of the boundary damping for the quasilinear wave equation", *J. Differential Equations* **52**, 66-75.

[6] Kreyszig, E. (1978) *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York: John Wiley & Sons.

[7] Linz, P. (1985) *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations.* Philadelphia: SIAM.

[8] Medeiros, L.A. & Milla Miranda, M. (1993) *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais.* Rio de Janeiro: Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ.

[9] Medeiros, L.A. & Milla Miranda, M. (2000) *Espaços de Sobolev e Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos.* IM-UFRJ.

[10] Oquendo, H.P. (2002) "A transmission problem with non-linear internal damping in elasticity". *Math. Meth. Appl. Sci.* **26**: 815-830.

[11] Oquendo, H.P. (2003) "Viscoelastic boundary stabilization for a transmission problem in elasticity". *IMA Journal of Applied Mathematics* **68**: 83-97.

[12] Rivera, J.E.M. (1998) *Tópicos em Termo e Viscoelasticidade*. Rio de Janeiro: Monografias do LNCC.

[13] Rivera, J.E.M. & Salvatierra, A.P. (1998) "Asymptotic Behavior of the Energy to Partially Viscoelastic Materials". LNCC, 1-23.

[14] Rivera, J.E.M. & Oquendo, H.P. (1999) "Exponential Decay for a Contact Problem with Local Damping". *Funkcialaj Ekvacioj* **42**: 371-387.

[15] Rivera, J.E.M. (1999) *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: Textos Avançados, IM-UFRJ.

[16] Rivera, J.E.R. & Oquendo, H.P. (2000) "The Transmission Problem of Viscoelatic Waves". *Acta Applicandae Mathematicae* **62**: 1-21.

[17] Rivera, J.E.M. & Oquendo, H.P. (2001) "Exponenial Stability to a Contact Problem of Partially Viscoelastic Materials". *Journal of Elasticity* **63**: 87-111.

[18] Tello Sotomayor, J. (1979) *Lições de Equações Diferenciais Ordiárias*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides (IMPA).