

JOSÉ DANILO SZEZECH JR

A transição do regime de caos para caos espaço-temporal em modelos de interações de ondas

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em ciências.

Orientador: Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes

Curitiba

2008

Abstract

The study of the transition spatio-temporal chaos in dynamical systems is a topic that has attracted much attention in recent times. These systems have various applications in biology, engineering and physics. It is believed that the transition to space-temporal chaos in these systems can be a key to understanding the formation of turbulent states. Among the many different dynamical systems possible, here it is specifically studied wave-wave interactions. These interactions involve non-linear waves of high frequency, which are common phenomena in a variety of circumstances. Such processes can be seen occurring in different physical situations. Examples can be found in the non-linear optics, space plasma and plasma experiments in laboratories. One of the wave-wave interactions studied is most well-known coupling triplet-triplet, called process of four waves, where each triplet share two waves in common. In a weakly nonlinear regime, due to the quadratic nonlinear interactions, the amplitudes of the waves develop slow modulations in the space / time such that they are slower than the high frequency waves involved. In this case we can get simplified equations describing the dynamics of the slow variation of the amplitudes of the waves. The spatial-temporal dynamics equations presented by the amplitudes of the interactions of these triplets is the main topic of this thesis. We will show that the onset of spatio-temporal chaos in this system is related to the process called on-off intermittency. In addition to these processes that occur in the time-space, we will see that in purely temporal dynamics of the conservative model of four waves do occur trappings for certain trajectories for long periods of time. Such trappings are characteristics of Hamiltonian systems with two degrees of freedom. We will use the standard map to illustrate that these characteristics are strongly highlighted by the calculation of the finite time Lyapunov exponent.

Resumo

O estudo da transição caos espaço-temporal em sistemas dinâmicos é um tópico que tem atraído muita atenção nestes últimos tempos. Estes sistemas apresentam diversas aplicações em biologia, engenharia e física. Acredita-se que a transição para caos-espaço temporal nestes sistemas possa ser uma peça fundamental na compreensão da formação de estados turbulentos. Dentre os diversos sistemas dinâmicos possíveis, aqui estudamos especificamente interações onda-onda. Estas interações envolvem ondas não lineares de alta frequência que são fenômenos comuns em uma variedade de circunstâncias. Tais processos ocorrem em diversas situações físicas. Exemplos disto podem ser encontrados em ótica não linear, plasmas espaciais e experimentos de plasma em laboratórios. Uma das interações onda-onda mais estudadas é o bem conhecido acoplamento tripleto-tripletto, chamado de processo de quatro ondas, onde cada tripleto compartilha duas ondas em comum. Em um regime fracamente não-linear, devido as interações não-lineares serem quadráticas, as amplitudes das ondas desenvolvem lentas modulações no espaço/tempo, as quais são mais lentas do que as altas frequências das ondas envolvidas. Neste caso podemos obter equações simplificadas descrevendo a dinâmica da lenta variação das amplitudes das ondas. A dinâmica espaço-temporal apresentada pelas equações das amplitudes das interações destes tripletos é o tópico principal desta tese. Mostraremos que o início do caos espaço-temporal deste sistema está relacionado com o processo chamado intermitência on-off. Além destes processos que ocorrem no sistema espaço-temporal, veremos que na dinâmica puramente temporal do modelo de quatro ondas conservativo, ocorrem aprisionamentos para determinadas trajetórias por longos períodos de tempo. Tais aprisionamentos são características de sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade. Usaremos o mapa padrão para ilustrar que estas características são fortemente evidenciadas pelo cálculo do expoente de Lyapunov a tempo finito.

Um homem não está ocioso porque ele está absorvido no pensamento. Existe um trabalho visível e existe um trabalho invisível.

Victor Hugo

Agradecimentos

Ao meu pai, mãe e irmão por todo incentivo e me ajudarem a escolher o curso certo.

A Camila por todo amor, companheirismo e carinho.

Aos meus amigos da Graduação e Pós-Graduação pelas interessantes discussões sobre Física e outros assuntos.

Ao Professor Wolfgang Mueller por me mostrar que o conhecimento liberta.

Ao Professor Sérgio pelo conhecimento de preço inestimável e por me ensinar uma nova forma de pensar.

Conteúdo

1	Introdução	p. 1
1.1	Revisão da literatura	p. 3
1.1.1	A Interação onda-onda	p. 4
1.1.2	O Mapa Padrão	p. 5
1.2	Organização da tese	p. 7
2	Conceitos Preliminares	p. 8
2.1	Interação onda-onda	p. 8
2.1.1	Obtendo a interação de onda-onda da equação de Hasegawa-Mima	p. 8
2.1.2	As equações	p. 13
2.1.3	O Método Pseudo Espectral	p. 15
2.1.4	Estabilidade da variedade homogênea	p. 17
2.1.5	O modelo de quatro ondas puramente temporal	p. 17
2.2	O mapa padrão	p. 19
2.2.1	A equação	p. 20
2.3	Conceitos de dinâmica não linear	p. 20
2.3.1	Teorema KAM e aprisionamentos no espaço de fase	p. 21
2.4	Expoente de Lyapunov a tempo infinito e a tempo finito	p. 24
2.5	Intermitência on-off	p. 27
3	Resultados e Discussões	p. 30
3.1	Modelo de interação de ondas puramente temporal	p. 30

3.2	O mapa padrão	p. 36
3.3	O modelo de interação onda-onda espaço-temporal	p. 43
3.3.1	Excitação não linear dos modos espaciais	p. 46
3.3.2	A perda de estabilidade transversal da dinâmica homogênea	p. 52
3.3.3	Intermitência On-Off e transição caos espaço-temporal	p. 60
3.3.4	Efeito da difusão na limitação na geração de modos espaciais	p. 62
4	Conclusões e trabalhos futuros.....	p. 68
	Bibliografia	p. 72

1 Introdução

Turbulência é um estado comumente encontrado em mecânica dos fluidos, sendo caracterizada por comportamentos não regulares e estocásticos. De fato, a observação de estados turbulentos é muito comum em nossa vida diária: a dispersão da fumaça de cigarro, a mistura de ar frio e quente na atmosfera, o fluxo de ar externo nas carenagens de carros e aviões, o fluxo de água através dos pilares de pontes são alguns exemplos onde estes estados acontecem. Porém, apesar de ser um fenômeno presente constantemente no nosso cotidiano, a sua completa compreensão está longe de ser alcançada (TENNEKES; LUMLEY, 1994; BATCHELOR, 1959; FRISCH, 1995). A idéia fundamental para a formação de estados turbulentos está baseada nas relações não lineares entre modos espaciais/temporais associados ao fato de, geralmente, existirem mecanismos de troca de energia operando em escalas muito distintas. Nesse processo a energia é injetada no sistema em grandes comprimentos de ondas e dissipada de forma mais efetiva em pequenos comprimentos. Esse processo é conhecido como cascata de energia. Nesse cenário, de uma forma geral, os estados turbulentos aparecem em sistemas físicos sujeitos a grandes gradientes de forças (ou campos), o que impõe, por exemplo em um fluido, variações abruptas de velocidade ou direção de movimento.

Além deste mecanismo de cascata de energia, variações temporais súbitas dos campos envolvidos no sistema físico também podem ser um mecanismo gerador de estados turbulentos. Tais condições levam o sistema a apresentar variações irregulares, muitas vezes descritas como estocásticas, na evolução temporal e eventualmente no espaço.

Historicamente, a idéia de modelos que gerassem variações irregulares demorou muito tempo para começar a ser estudada. Quando em 1687 Isaac Newton escreveu o livro *Principia* (NEWTON, 1990), foi capaz de descrever sistemas físicos através de um conjunto de leis, que por sua vez tornou possível escrever um conjunto de equações, que em princípio, determinavam a dinâmica de tais sistemas. Este livro influenciou muitas pessoas por muito tempo, as quais acabaram concluindo que sistemas físicos eram genericamente estáveis e predizíveis.

O primeiro trabalho a propor a possibilidade de variações abruptas e irregulares na evolução

temporal de sistemas físicos é devido a Henri Poincaré no final do século XIX (POINCARÉ, 1887). Poincaré, motivado pelo problema de três corpos sob interação mútua de gravidade, foi capaz de mostrar, através de técnicas topológicas, que um conjunto inicialmente periódico de condições iniciais, quando perturbadas levemente, geravam trajetórias extremamente complicadas, que hoje são chamadas caóticas. Após o trabalho de Poincaré foram desenvolvidos vários trabalhos matemáticos sobre dinâmica caótica. Dando continuidade a essa linha de estudos, seguiram-se os trabalhos de Birkhoff nos anos 20 (BIRKHOFF, 1927), alguns trabalhos sobre dinâmica de osciladores nos final dos anos 20 e 30 (POL; MARK, 1927), seguidos dos importantes trabalhos de Smale (SMALE, 1967) e Kolmogorov nos anos 50 e 60 (KOLMOGOROV, 1954). Porém, foi somente com o aumento da capacidade de realização de cálculos computacionais que tal ramo da ciência se tornou efetivamente ativo. Decorrente disso, a partir dos anos 70 do século passado, surge na literatura uma série de trabalhos com resultados novos sobre comportamentos de sistemas caóticos. São exemplos desses os memoráveis trabalhos de Takens, (TAKENS, 1971), Feigenbaum (FEIGENBAUM, 1978), Kaplan e Yorke (KAPLAN; YORKE, 1979), Pomeau-Manneville (POMEAU; MANNEVILLE, 1980) e Grebogi, Ott e Yorke, (GREBOGI et al., 1982), os quais dão início à definição da dinâmica caótica bem como à descrição de como tal dinâmica se instala nos sistemas físicos. Em sua maioria, tais trabalhos e uma série incontável de trabalhos posteriores, descrevem a dinâmica temporal dos sistemas físicos ou analisam universalidades no comportamento dinâmico apresentados por modelos matemáticos simples sem uma aplicação física imediata e, em sua maioria, de baixa dimensionalidade.

Em tais modelos uma correlação entre o comportamento espacial do sistema físico e sua dinâmica temporal fica impossível, ou muito dificultada. A interpretação conjunta de fenômenos espaciais e temporais faz parte de uma área da ciência ainda em desenvolvimento. A revista Science, no seu aniversário de 100 anos (SCIENCE, 2005), lançou um conjunto de questões que estão ainda em aberto, uma delas era a seguinte: "será que poderemos desenvolver uma teoria geral da dinâmica de fluxos turbulentos e do movimento de materiais granulares?". Isto demonstra uma carência, principalmente, na descrição de uma teoria para a possível rota do início da turbulência. O estudo de caos espaço-temporal, bem como sua relação com estados turbulentos, torna-se uma possibilidade para procurar esta possível rota.

Desta forma, um assunto correlacionado com dinâmica não-linear é o de como tais comportamentos temporais (bifurcações do sistema, perda de estabilidade de pontos fixos, perda de estabilidade transversal, variabilidade da dimensão instável entre outros) podem influir no comportamento espacial dos sistemas. Ou seja, a correlação entre as dinâmicas temporal e espacial. Até o presente momento esta correlação ainda não está bem entendida, longe disso, muitas res-

postas ainda estão por ser obtidas, e são hoje alvo de estudos. Em trabalhos recentes mostrou-se que a sela caótica tem um papel fundamental na dinâmica intermitente em sistemas estendidos (REMPEL; CHIAN, 2007). Além disto, sincronização imperfeita de fase coletiva “on-off”, foi encontrada em estados turbulentos (HE; CHIAN, 2003). Todos estes casos mostram que o entendimento de caos espaço-temporal e, sua relação com o desenvolvimento da turbulência, pode ser um ponto chave para a rota do início da turbulência.

Nesta tese, por uma questão de clareza, os assuntos abordados serão divididos na seguinte seqüência: primeiramente estudaremos a dinâmica do modelo de interação onda-onda conservativo para o caso puramente temporal, evidenciaremos o seu comportamento caótico e as chamadas armadilhas dinâmicas. Depois usaremos o mapa padrão como um modelo protótipo onde algumas propriedades do modelo conservativo são bem evidentes e, por último, voltaremos ao modelo de interação de ondas, porém com um grau de liberdade espacial. Neste último assunto o nosso objetivo principal será analisar a transição de estados regulares para estados turbulentos, onde veremos que o caos na variedade temporal terá um efeito importante na formação destes estados turbulentos.

Na seqüência deste capítulo faremos uma revisão bibliográfica de alguns dos principais artigos e livros presentes na literatura, que tratam os assuntos deste trabalho e têm sido utilizados para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Revisão da literatura

Como foi dito anteriormente, durante a maior parte desta tese separaremos os assuntos de interação onda-onda conservativa puramente temporal, o mapa padrão e a interação onda-onda espaço-temporal em diferentes seções. A primeira vista estes assuntos podem parecer desconectados um do outro, porém a idéia básica é mostrarmos inicialmente a dinâmica irregular do modelo de interação de ondas conservativo e mostrar as armadilhas dinâmicas, usar o mapa padrão que também é conservativo para explicar alguns comportamentos das armadilhas que aparecem no modelo anterior e, por último, além da dinâmica temporal, analisaremos o efeito que um grau de liberdade espacial pode causar na dinâmica do modelo de interação de ondas. No último capítulo, onde apresentaremos alguns possíveis trabalhos futuros, também apontaremos possibilidades onde a conexão destes assuntos será muito importante. Assim, dividiremos esta seção da revisão bibliográfica em duas partes: a primeira seção associada à revisão sobre a interação onda-onda, tanto para o sistema puramente temporal como para o sistema espaço-temporal, e a segunda parte faremos para o mapa padrão.

1.1.1 A Interação onda-onda

O fenômeno de ondas é um assunto de grande relevância em muitas áreas da Física. Nesta tese o modelo a ser analisado é um tipo de interação que ocorre entre ondas. Alguns casos onde a interação onda-onda tem sido usada para explicar alguns fenômenos físicos são citados logo abaixo.

A absorção anômala do laser em plasmas de laboratório vem sendo tratada em vários trabalhos sobre interações de ondas (CHIAN; RIZZATO, 1994; TZENG et al., 1996). Em experimentos recentes, foi observado que estas absorções podem estar associadas a súbitas elevações na temperatura de plasma (GLENZER et al., 2002). Um outro caso é a geração de emissões de rádio em plasmas espaciais (CHIAN et al., 1994; STENFLO; SHUKLA, 1995), a geração de segundo harmônico, a amplificação e a conversão para frequências mais elevadas em sinais ópticos (SHEN, 1984; YARIV, 1989). Na referência (RUNDQUIST et al., 1998), é mostrado um experimento onde um laser inicialmente de frequência na faixa do visível, tem a sua frequência elevada para faixa de raio-X após atravessar um gás rarefeito. Fenômenos como este só têm sido compreendidos através da óptica não linear. Um exemplo mais recente de aplicação, é a transmissão de energia através de micro-ondas (USUI et al., 2002). Neste caso, um satélite armazena grandes quantidades de energia solar em baterias e retransmite para uma base em solo. Quando estas ondas são enviadas ao solo, elas interagem com a ionosfera causando aquecimento e alterando a onda inicial. Todos estes casos são alguns exemplos onde a interação de ondas é de interesse devido as suas aplicações tecnológicas e a sua grande riqueza de fenômenos físicos presentes.

Nesta tese serão analisados, basicamente, dois tipos de interações onda-onda. O primeiro é a chamada interação de três ondas, neste caso as ondas formam um tripleto ressonante, no qual uma onda indutora decai e forma duas ondas filhas (o processo de fusão também pode ocorrer). O segundo tipo é a interação de quatro ondas. Neste caso temos novamente um tripleto de ondas similar ao caso de três ondas, porém temos a presença de um segundo tripleto. Este segundo tripleto é formado por uma das ondas filhas que interagem novamente com a onda indutora formando uma quarta onda.

Fazendo uma revisão histórica na literatura sobre interações onda-onda, vemos que a mesma interação foi introduzida separadamente em diversas áreas da Física. Um dos trabalhos pioneiros foi realizado por Armstrong *et al.* (ARMSTRONG et al., 1962), no qual ele trata da interação de ondas em um dielétrico não linear. Em (SAGDEEV; GALEEV, 1969) os autores tratam a interação de três ondas imersas em um plasma. Durante este mesmo ano, Wilhelmsson

publicou um artigo (WILHELMSSON, 1969) onde obteve as equações para interação de três ondas, usando ondas transversais e longitudinais, através da teoria hidromagnética de plasma. No ano seguinte Stenflo (STENFLO, 1970), ao invés de usar a teoria hidromagnética, propôs analisar a interação com o uso da teoria cinética, usando as equações de Maxwell em conjunto com a equação linearizada de Boltzmann-Vlasov. Uma análise detalhada sobre a teoria cinética e efeitos não lineares pode ser encontrada na referência (HASEGAWA, 1975). Todas as referências citadas acima tratam da interação de três ondas independente do espaço, ou, casos estacionários dependentes apenas do espaço. A análise das soluções numéricas e analíticas, para o caso dependente do tempo e uma dimensão espacial com condições perfeitas de ressonância (sem frequência de descasamento entre as ondas), passaram a ser analisadas a partir das seguintes referências (BERS et al., 1976; KAUP et al., 1979). As soluções analíticas foram obtidas através do chamado método da transformação do espalhamento inverso (ZAKHAROV; MANAKOV, 1973; ABLOWITZ; SEGUR, 1981), através do qual obteve-se soluções de ondas solitárias. Estes resultados estão de acordo com os obtidos numericamente (BERS et al., 1976).

Como podemos ver, muita atenção foi dada à interação de três ondas. A interação de quatro ondas foi estudada primeiro por Sugihara (SUGIHARA, 1968) e por Karplyuk *et al* (KARPLYUK et al., 1973). Soluções mais gerais, incluindo energias negativas, foram propostas por Walters e Lewak (WALTERS; LEWAK, 1977). A integrabilidade e conseqüentemente a descoberta da quarta integral de movimento foi provada por Romeiras (ROMEIRAS, 1983). Todos estes trabalhos estudaram o caso de condições perfeitas de casamento entre as ondas, porém trabalhos mais recentes têm demonstrado que o descasamento tem um papel fundamental na transição de estados regulares para caóticos (CHIAN et al., 1994; PAKTER et al., 1997). Todos estes casos foram analisados considerando a evolução temporal independente do espaço. O caso conservativo espaço-temporal só foi analisado mais recentemente (LOPES; RIZZATO, 1999). Parte do trabalhos sobre a interação espaço-temporal na presença de injeção e dissipação de energia, o qual é objeto de estudo desta tese, já foi publicado e pode ser encontrado nas referências (SZEZECH et al., 2007(a), 2007(b)).

1.1.2 O Mapa Padrão

O espaço de fase de sistemas Hamiltonianos não-integráveis não é inteiramente regular e nem inteiramente caótico. Estes dois comportamentos dinâmicos estão conectados por uma complicada fronteira onde, dependendo do número de graus de liberdade, podem ou não se misturar. A dinâmica regular consiste de órbitas confinadas em toros do tipo quase-periódicos ou periódicos, enquanto as órbitas caóticas preenchem as outras partes da superfície de ener-

gia, tais regiões são chamadas de mares caóticos (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992). No geral, novos comportamentos tais como armadilhas dinâmicas (ZASLAVSKY, 2002(b)) e difusão anômala (LATORA et al., 1999), aparecem em sistemas dinâmicos não integráveis, como um resultado de uma combinação não trivial entre a regularidade e a caoticidade. Estes novos comportamentos levam tais sistemas a apresentar propriedades estatísticas distintas para as trajetórias na parte caótica do espaço de fase (KARNEY, 1983; HANSON et al., 1985; MEISS; OTT, 1986; KUZNETSOV; ZASLAVSKY, 2002).

O termo armadilhas dinâmicas é devido ao aprisionamento de trajetórias em certos domínios específicos no espaço de fase, onde estas trajetórias podem gastar um tempo arbitrariamente longo. Tais comportamentos podem ser devidos a armadilhas de ilhas hierárquicas, rede de armadilhas ou armadilhas de camadas estocásticas (ZASLAVSKY, 2002(b)). Em tais domínios do espaço de fase, partes da trajetória são quase regulares, apesar da trajetória completa ser caótica. Como foi mostrado recentemente, para quase todos espaços de fase de sistemas Hamiltonianos, esta topologia apresenta propriedades fractais ou multi-fractais, onde trajetórias regulares e caóticas estão arbitrariamente próximas umas das outras (DENISOV et al., 2002; OTT, 1993). Mesmo quando o espaço de fase parece totalmente caótico é possível encontrar um número finito de pequenas ilhas, onde no seu interior as trajetórias são caóticas (SHLESINGER et al., 1993). Situações físicas importantes, como por exemplo, o transporte não Gaussiano (anômalo) em fluidos ou a difusão anômala, em vários sistemas, podem ser relacionados com a presença de aprisionamentos no espaço de fase (MACKAY et al., 1984). Tais tópicos podem ser úteis para o cálculo de perda de partículas em plasmas e aceleradores, taxas de reações químicas, taxas de aquecimento em ondas em plasmas e outras áreas de física (IOMIM et al., 1998).

A presença de armadilhas em algumas partes do espaço de fase em sistemas Hamiltonianos, é chamada as vezes de pseudo-ergodicidade (ZASLAVSKY, 1995). Estas armadilhas podem levar a certas dificuldades para diversos diagnósticos, como é o caso do espectro do expoente de Lyapunov, devido ao seu cálculo supor uma boa aproximação ergódica do espaço de fase para tempos infinitos. A propriedade ergódica pode não ser totalmente válida, sendo que em sistemas Hamiltonianos ocorre a presença de ilhas regulares imersas no mar caótico do espaço de fase. Além do mais, em sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade, as trajetórias no mar caótico nunca podem entrar em uma ilha, e as trajetórias da ilha nunca alcançam o mar caótico. Como uma primeira tentativa, podemos apenas aplicar a propriedade ergódica para a parte caótica do espaço de fase. Porém, mesmo neste caso as armadilhas no espaço de fase podem levar as trajetórias a gastarem enormes tempos em determinadas regiões. Nestes

casos a propriedade ergódica necessitaria de enormes tempos para ser válida. Em um artigo recente (LEONCINI; ZASLAVSKY, 2002) tratando de um modelo bidimensional de transporte e mistura de fluidos, foi mostrado que a não uniformidade do espaço de fase e a presença de ilhas regulares no interior do mar caótico tem um impacto considerável nas propriedades de transporte para alguns sistemas. Uma revisão extensa de transporte anômalo, cinética fracional, pseudo-ergodicidade e aprisionamento de trajetórias é mostrada na referência (ZASLAVSKY, 2002(a)).

Nesta tese apresentaremos a dinâmica de um sistema Hamiltoniano não integrável do modelo de interação de quatro ondas conservativo e do mapa padrão. Neste último, mostramos que este efeitos de aprisionamentos podem ser vistos com o expoente de Lyapunov a tempo finito (DAWSON et al., 1994). A existência do expoente de Lyapunov é provada sobre condições gerais (WIGGINS, 1990). Em um sistema Hamiltoniano não integrável, o movimento caótico e regular coexistem no espaço de fase, o qual introduz grandes variações na instabilidade local ao longo da trajetória caótica de referência (OKUSHIMA, 2003). Estas variações estão relacionadas com as alterações entre diferentes movimentos, como caótico e quase-regular (laminar), podendo estes movimentos ocorrer em sistemas de baixa dimensionalidade (SEPULVEDA et al., 1989). Uma vez que as armadilhas ocorrem para tempos finitos, o uso do expoente de Lyapunov a tempo finito é uma maneira de quantificar o efeito das armadilhas (SZEZECH et al., 2005).

1.2 Organização da tese

A divisão dos capítulos desta tese é feita da seguinte maneira: o capítulo 2 contém um embasamento teórico sobre o modelo de interação onda-onda espaço-temporal e temporal, o mapa padrão e alguns conceitos de dinâmica; o capítulo 3 está dividido em seções para cada modelo dinâmico tratado, com os resultados obtidos acompanhados de discussões; e por último, o capítulo 4 contém as conclusões obtidas da tese e alguns possíveis trabalhos futuros.

2 Conceitos Preliminares

Neste capítulo discutiremos alguns conceitos que serão fundamentais para a posterior compreensão dos resultados obtidos. O capítulo está dividido em três seções principais. A primeira seção contém uma discussão sobre o modelo de interação onda-onda espaço-temporal e puramente temporal. Na segunda seção discutiremos o modelo de mapa padrão que nos servirá na confirmação e quantificação dos resultados obtidos para o modelo puramente temporal. Na terceira e última seção, discutiremos alguns conceitos fundamentais de dinâmica que serão importantes para a discussão dos resultados.

2.1 Interação onda-onda

Nesta seção introduziremos os modelo de interações de ondas que aplicaremos neste trabalho. Na seqüência, mostraremos as equações não lineares espaço-temporais do modelo que serão aplicadas nesta tese. Discutiremos sobre as técnicas para a integração numérica e a análise linear deste modelo. Finalmente discutiremos o caso em que este modelo é conservativo com dinâmica puramente temporal.

2.1.1 Obtendo a interação de onda-onda da equação de Hasegawa-Mima

As equações que envolvem modelos de interação onda-onda aparecem em diversas áreas, sendo que a sua dedução podem ser obtida através de diferentes suposições. Podemos citar, por exemplo, suposição via regime modulacional de Zakharov (FRICHEMBRUDER et al., 2000), equações Vlasov (STENFLO, 1970) e Navier-Stokes (COSTA et al., 1988). Nesta seção, mostraremos uma das possíveis deduções para as interações estudadas. Seguiremos de perto a referência (HASEGAWA et al., 1979), para mostrar como modelos de interação de onda-onda podem ser obtidas à partir da equação de Hasegawa-Mima.

A equação de Hasegawa-Mima é freqüentemente usada para descrever o comportamento

de ondas de deriva em plasmas. Tal equação descreve a evolução espaço-temporal do potencial eletrostático das ondas. O procedimento e as suposições para obtenção de tal equação é descrita a seguir.

Considera-se um plasma onde a temperatura dos íons é muito menor que as dos elétrons ($T_i/T_e \ll 1$). Antes de chegarmos as equações do modelo, é conveniente definir o parâmetro de expansão ε

$$\varepsilon = \frac{1}{\omega_{ci}} \frac{\partial}{\partial t} \approx \rho_s \left| \nabla \left(\ln \frac{n_0}{B_0} \right) \right| \approx \frac{\Omega}{\omega_{ci}}, \quad (2.1)$$

sendo $\Omega = \nabla \times \mathbf{v}$ a vorticidade do fluido dos íons. O comprimento de onda de dispersão característico é dado por

$$\rho_s = \left(\frac{T_e}{m_i} \right)^{1/2} (\omega_{ci})^{-1} = \frac{c(m_i T_e)^{1/2}}{eB}, \quad (2.2)$$

onde T_e é a temperatura dos elétrons, m_i e \mathbf{v} são a massa e a velocidade dos íons respectivamente.

Para um fluido de íons frios em um campo eletrostático, $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, a equação de movimento é dada pela força de Lorentz

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m_i} \nabla\phi + \mathbf{v} \times \omega_{ci}, \quad (2.3)$$

e a equação de conservação da densidade do número de íons $n(\mathbf{x}, t)$ pode ser escrita como

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{d}{dt} \ln n, \quad (2.4)$$

sendo \mathbf{v} a velocidade do fluido de íons, m_i é massa dos íons, e é a carga elétrica dos íons, ϕ é o potencial eletrostático, e $\omega_{ci}(c)\hat{\mathbf{z}}$ é o vetor de frequência ciclotrônica dos íons.

Via condição de quasi-neutralidade, a densidade de íons n e densidade de elétrons n_e estão relacionadas, e obedecem a distribuição de Boltzmann

$$n \simeq n_e = n_0(x) \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right), \quad (2.5)$$

Aplicando a equação (2.5) na (2.4) temos que

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{d}{dt} \left(\ln n_0 + \frac{e\phi}{T_e} \right), \quad (2.6)$$

A equação de vorticidade Ω da onda de deriva pode ser construída tomando o rotacional da equação de movimento (2.3) e notando que

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \Omega, \quad (2.7)$$

e

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) = -\boldsymbol{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} \quad (2.8)$$

$$= -\boldsymbol{\Omega} \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega}. \quad (2.9)$$

Nesse caso, temos que

$$\frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_{ci}) + (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_{ci}) \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} = 0, \quad (2.10)$$

onde o subscrito \perp representa a componente perpendicular à direção do campo magnético, $\hat{\mathbf{z}}$. Considerando um caso pseudo tri-dimensional temos que

$$\left| \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial z} \right| = \varepsilon |\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp}|, \quad (2.11)$$

sendo que ε é um pequeno parâmetro introduzido na equação (2.1). Esta consideração é consistente com a condição da existência de uma onda de deriva. Fisicamente, esta consideração corresponde ao fato que a inércia dos íons é desprezível na direção do campo magnético ambiental.

A equação (2.6) pode então ser aproximada por

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} = -\frac{d}{dt} \left(\ln n_0 + \frac{e\phi}{T_e} \right). \quad (2.12)$$

Substituindo a equação (2.12) na equação (2.10) e usando o parâmetro de expansão (2.1), obtemos

$$\frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_{ci} + \boldsymbol{\Omega}}{n_0 \exp(e\phi/T_e)} \right) \right] \simeq \frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_{ci}}{n_0} \right) + \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\boldsymbol{\omega}_{ci}} - \frac{e\phi}{T_e} \right] = 0. \quad (2.13)$$

Se usarmos o ordenamento da equação (2.1), a vorticidade $\boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ é dada pela deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$,

$$\boldsymbol{\Omega} = (\nabla \times \mathbf{v}_{\perp}) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \left(\frac{\nabla \phi \times \hat{\mathbf{z}}}{B_0} \right) = \frac{1}{B_0} \nabla^2 \phi, \quad (2.14)$$

e

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla \phi \times \hat{\mathbf{z}}}{B_0} \cdot \nabla, \quad (2.15)$$

as equações (2.13), (2.14) e (2.15) formam um conjunto fechado para o potencial eletrostático ϕ .

Em um plasma de baixa pressão ($\beta = 8\pi p/B^2 \ll 1$), as não-homogeneidades do campo magnético são pequenas se comparadas com a densidade do plasma. Assumindo que $\boldsymbol{\omega}_{ci}$ seja

aproximadamente constante e usando as seguintes normalizações no tempo, espaço e ϕ ,

$$\omega_{ci}t \equiv t, \quad (2.16)$$

$$\frac{x, y}{\rho_s} \equiv x, y, \quad (2.17)$$

$$\frac{e\phi}{T_e} \equiv \phi, \quad (2.18)$$

podemos observar que as equações (2.13), (2.14) e (2.15) reduzem para

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\phi - \phi) - [(\nabla\phi \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \nabla] \left[\nabla^2\phi - \ln\left(\frac{n_0}{\omega_{ci}}\right) \right] = 0, \quad (2.19)$$

está é a equação de Hasegawa-Mima. O subscrito \perp foi suprimido, o operador gradiente significa que

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.20)$$

Na presença de não-homogeneidades, a equação de Hasegawa-Mima, admite uma onda linear, onde a relação de dispersão é dada por

$$\omega = \omega_k = -[(\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \nabla \ln n_0]/(1 + k^2) = \frac{\omega_*}{1 + k^2}. \quad (2.21)$$

Na análise de turbulência da equação de Hasegawa-Mima é conveniente analisar a dinâmica no espaço de Fourier. Escrevendo ϕ no espaço de Fourier

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2} \sum_k [\phi_k(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + c.c.]. \quad (2.22)$$

Na teoria não linear as amplitudes das ondas de deriva são dada por:

$$\frac{d\phi_k}{dt} + i\omega_k\phi_k = \sum_{k+k'+k''=0} \Lambda_{k',k''}^k \phi_{k'}^* \phi_{k''}^*, \quad (2.23)$$

Considerando um caso para o qual os três primeiros modos tenham amplitudes muito maiores que os demais, tal que apenas a interação $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ seja significativa, a equação (2.23) é dada por

$$\frac{d\phi_1}{dt} + i\omega_1\phi_1 = \Lambda_{2,3}^1 \phi_2^* \phi_3^*, \quad (2.24)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} + i\omega_2\phi_2 = \Lambda_{3,1}^2 \phi_3^* \phi_1^*, \quad (2.25)$$

$$\frac{d\phi_3}{dt} + i\omega_3\phi_3 = \Lambda_{1,2}^3 \phi_1^* \phi_2^*, \quad (2.26)$$

onde

$$\phi_j(t) = \phi_{k_j}(t), \quad (2.27)$$

e

$$\omega_j = \omega_{k_j}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.28)$$

e os coeficientes dos termos quadráticos são dados por:

$$\Lambda_{2,3}^1 = \frac{1}{2} \frac{(k_{2x}k_{3y} - k_{2y}k_{3x})(k_3^2 - k_2^2)}{1 + k_1^2}, \quad (2.29)$$

$$\Lambda_{3,1}^2 = \frac{1}{2} \frac{(k_{1y}k_{3x} - k_{1x}k_{3y})(k_3^2 - k_2^2)}{1 + k_2^2}, \quad (2.30)$$

$$\Lambda_{1,2}^3 = \frac{1}{2} \frac{(k_{1y}k_{2x} - k_{1x}k_{2y})(k_2^2 - k_1^2)}{1 + k_3^2}. \quad (2.31)$$

Estas equações foram usadas para explicar o mecanismo de turbulência e trocas de energias em diferentes escalas (HASEGAWA et al., 1979). Uma alternativa interessante, é se ao invés de considerarmos a expansão de Fourier truncar em três modos, considera-se um quarto modo. A inclusão desta quarta onda é particularmente relevante para o estudo do efeito do fluxo poloidal (em inglês “zonal flow”) (LASHMORE-DAVIES et al., 2005). Estas regiões do fluxo poloidal tem grandes implicações no confinamento de partículas em uma plasma turbulento (HASEGAWA et al., 1979). Seguindo a referência (LASHMORE-DAVIES et al., 2005), e considerando às seguintes condições de casamento para os vetores de onda:

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (2.33)$$

No caso de quatro ondas ocorre a participação simultânea de dois tripletos ressonantes. Uma representação esquemática desta interação entre quatro ondas está na figura 2.1.

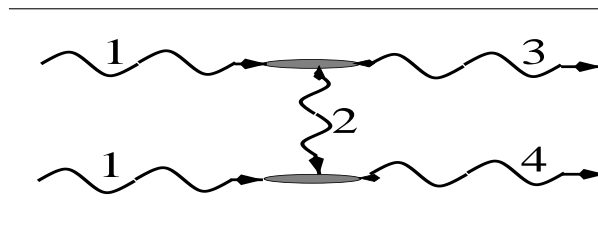


Figura 2.1: Diagrama da interação.

Considerando estas condições de casamento, a expansão de Fourier para quatro ondas, e

aplicando-se na equação de Hasegawa-Mima obtemos:

$$\frac{d\phi_1}{dt} + i\omega_1\phi_1 = \Lambda_{2,3}^1\phi_2\phi_3 + \Lambda_{2,4}^1\phi_2^*\phi_4, \quad (2.34)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} + i\omega_2\phi_2 = \Lambda_{3,1}^2\phi_3^*\phi_1 + \Lambda_{1,4}^2\phi_1^*\phi_4, \quad (2.35)$$

$$\frac{d\phi_3}{dt} + i\omega_3\phi_3 = \Lambda_{1,2}^3\phi_1\phi_2^*, \quad (2.36)$$

$$\frac{d\phi_4}{dt} + i\omega_4\phi_4 = \Lambda_{1,2}^4\phi_1\phi_2, \quad (2.37)$$

onde, a menos de alguns termos complexo conjugados, devido a nova condição de ressonância de vetor de onda ter um sinal trocado com relação a usada por Hasegawa, os termos e os coeficientes para as ondas 1,2 e 3 são idênticos ao caso anterior. A principal diferença são os novos termos envolvendo a quarta onda, os novos coeficientes para estes termos são dados por:

$$\Lambda_{2,4}^1 = \frac{1}{2} \frac{(k_{2y}k_{4x} - k_{2x}k_{4y})(k_4^2 - k_2^2)}{1 + k_1^2}, \quad (2.38)$$

$$\Lambda_{1,4}^2 = \frac{1}{2} \frac{(k_{1y}k_{4x} - k_{1x}k_{4y})(k_4^2 - k_1^2)}{1 + k_2^2}, \quad (2.39)$$

$$\Lambda_{1,2}^4 = \frac{1}{2} \frac{(k_{1x}k_{2y} - k_{1y}k_{2x})(k_2^2 - k_1^2)}{1 + k_4^2}. \quad (2.40)$$

O conjunto de equações (2.34)-(2.37) representa o modelo de interação de quatro ondas. Enfatizamos novamente que existem diferentes formas de dedução para estas equações, sendo que aqui as deduzimos a partir da equação de Hasegawa-Mima.

2.1.2 As equações

Na análise das equações de interações onda-onda tomaremos como base uma série de trabalhos (LOPES, 1995; PAKTER et al., 1997; LOPES; RIZZATO, 1999). Por simplicidade, consideraremos as amplitudes adimensionalizadas, tal que os coeficientes dos termos quadráticos das equações (2.34)-(2.37) sejam iguais a unidade. Faremos também uma pequena modificação na notação, ao invés dos potenciais representados pelo símbolo ϕ usaremos A . Além disso, acrescentaremos um grau de liberdade espacial que representa possíveis não-homogeneidades

no plasma. Assim, o modelo de quatro ondas é dado pelo seguinte conjunto de equações:

$$\frac{\partial A_1(x,t)}{\partial t} + v_{g1} \frac{\partial A_1(x,t)}{\partial x} = A_2(x,t)A_3(x,t) - rA_2^*(x,t)A_4(x,t) + v_1A_1(x,t) + D \frac{\partial^2 A_1(x,t)}{\partial x^2}, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial A_2(x,t)}{\partial t} + v_{g2} \frac{\partial A_2(x,t)}{\partial x} = -A_1(x,t)A_3^*(x,t) - rA_1^*(x,t)A_4(x,t) + v_2A_2(x,t), \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial A_3(x,t)}{\partial t} + v_{g3} \frac{\partial A_3(x,t)}{\partial x} = i\delta_3 A_3(x,t) - A_1(x,t)A_2^*(x,t) + v_3A_3(x,t), \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial A_4(x,t)}{\partial t} + v_{g4} \frac{\partial A_4(x,t)}{\partial x} = i\delta_4 A_4(x,t) + rA_1(x,t)A_2(x,t) + v_4A_4(x,t), \quad (2.44)$$

onde $A_{1,2,3,4}$ são as amplitudes complexas de cada uma das quatro ondas respectivamente. O fator r representa a intensidade de interação do acoplamento tripleto-tripletto sendo que no caso limite $r = 0$ o conjunto de equações de quatro ondas recai no modelo de três ondas. Os termos $v_{g1,2,3,4}$ representam as velocidades de grupo ao longo do espaço. Os coeficientes $v_1 > 0$ e $v_{2,3,4} < 0$ são introduzidos fenomenologicamente, representando uma injeção de energia na onda¹ 1 e uma dissipação nas ondas 2,3 e 4, respectivamente. Os termos δ_3 e δ_4 representam um descasamento de frequência entre os tripletos. O coeficiente D representa uma difusão, que corresponde a uma lenta variação no espaço. A difusão tem um papel importante para que ocorra uma saturação no crescimento de modos espaciais, como veremos na próxima seção. Quando trabalhamos com estas equações no espaço de Fourier, a difusão atua como um amortecimento na geração de grandes modos. Neste trabalho trataremos o caso com um grau de liberdade espacial, que será representado na derivada parcial com relação a x nas equações das amplitudes.

Na ausência de injeção, dissipação e difusão, esta interação passa a ser conservativa. Assim, temos que o conjunto de equações espaço-temporais (2.41)-(2.44) podem ser diretamente derivadas de uma função densidade de Hamiltoniana. Como descrito na referência (LOPES; RIZZATO, 1999), esta função pode ser obtida se escrevermos as equações de Hamilton na seguinte forma:

$$\frac{\partial A_j(x,t)}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta A_j^*}, \quad \frac{\partial A_j(x,t)^*}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta A_j}, \quad (2.45)$$

onde foi introduzida a derivada funcional

$$\frac{\delta}{\delta A_j} \equiv \frac{\partial}{\partial A_j} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial A_j}{\partial x} \right)}, \quad (2.46)$$

que permanece válida se substituirmos A por A^* , e a Hamiltoniana total \hat{H} pode ser escrita em

¹Na literatura usualmente a onda 1 é chamada de onda pai ou onda indutora, enquanto as ondas 2,3 e 4 são chamadas de ondas filhas.

função densidade de Hamiltoniana H como:

$$\hat{H} \equiv \int dx H = \int dx \left[-A_1 A_2^* A_3^* + A_1^* A_2 A_3 - r(A_1^* A_2^* A_4 - A_1 A_2 A_4^*) + i\delta_3 |A_3|^2 + i\delta_4 |A_4|^2 - \sum_{j=1}^4 v_{g_j} A_j^* \frac{\partial A_j}{\partial x} \right]. \quad (2.47)$$

Podemos ver que a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, ou seja, é uma quantidade que não varia no tempo. Além da função Hamiltoniana, temos outras duas quantidades conservadas no tempo:

$$C_1 = \int dx [|A_2|^2 - |A_3|^2 + |A_4|^2], \quad (2.48)$$

$$C_2 = \int dx [|A_1|^2 + |A_3|^2 + |A_4|^2]. \quad (2.49)$$

2.1.3 O Método Pseudo Espectral

Nesta seção falaremos um pouco sobre o método de integração numérica que aplicaremos para resolver as equações das amplitudes (2.41)-(2.44). Os métodos mais frequentes na resolução de equações diferenciais parciais são o método de diferenças (elemento) finitas e o método pseudo-espectral. Em problemas com condição de contorno periódicas e com precisão semelhante, o método pseudo-espectral apresenta um custo de tempo computacional de aproximadamente dez vezes menor do que método de diferenças finitas (FORNBERG; MERRILL, 1997). Como consideraremos que as condições de contorno das amplitudes (2.41)-(2.44) também são periódicas, utilizaremos o método pseudo-espectral. Este método é baseado em uma importante propriedade da transformada de Fourier, segundo a qual uma derivada contínua pode ser transformada em um conjunto discreto de equações (BUTKOV, 1988). Neste caso aplicaremos a transformação de Fourier no espaço, e reescreveremos as amplitudes $A_j, \{j = 1, 2, 3, 4\}$ na seguinte forma:

$$A_j = \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} a_{j_n}(t) e^{ik_n x}, \quad (2.50)$$

onde o índice n representa o número do modo de Fourier. Neste trabalho expandiremos esta série entre $N = 32 - 1024$ modos. Como estamos interessados apenas no início da geração de modos espaciais, na maioria dos casos não será necessário um número grande de modos de Fourier para que a dinâmica espacial seja corretamente descrita. Aplicando a transformação de

Fourier (2.50) nas equações (2.41)-(2.44), as equações das amplitudes passam a ser dadas por:

$$\frac{\partial a_{1_n}(t)}{\partial t} + [iv_{g1}k_n - Dk_n^2] a_{1_n}(t) = \mathcal{F}[A_2A_3] - \mathcal{F}[rA_2^*A_4] + v_1a_{1_n}(t), \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial a_{2_n}(t)}{\partial t} + iv_{g2}k_na_{2_n}(t) = -\mathcal{F}[A_1A_3^*] - \mathcal{F}[rA_1^*A_4] + v_2a_{2_n}(t), \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial a_{3_n}(t)}{\partial t} + iv_{g3}k_na_{3_n}(t) = i\delta_3a_{3_n}(t) - \mathcal{F}[A_1A_2^*] + v_3a_{3_n}(t), \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial a_{4_n}(t)}{\partial t} + iv_{g4}k_na_{4_n}(t) = i\delta_4a_{4_n}(t) + \mathcal{F}[rA_1A_2] + v_4a_{4_n}(t), \quad (2.54)$$

onde o índice n representa cada um dos N modos da transformada (2.50). No espaço de Fourier podemos ver claramente o papel de saturação do coeficiente de difusão D , que atua como um termo de amortecimento para grandes comprimentos de onda.

O símbolo \mathcal{F} das equações (2.51)-(2.54) indica a convolução dos produtos não lineares entre as amplitudes. Um forma mais vantajosa, no sentido de tempo computacional, é calcularmos os produtos não lineares das amplitudes no espaço real e só depois aplicar a transformada de Fourier. Este procedimento evita a operação de convolução dos termos não lineares. Após avaliarmos os termos não lineares no espaço real, aplicamos a transformada de Fourier nas equações diferenciais parciais, fica restando resolver um conjunto de N equações diferenciais ordinárias. Para a integração destas equações diferenciais foi utilizado o integrador LSODA (*Livermore Solver for Ordinary Differential Equations, with automatic method switching for stiff and nonstiff problems*). Este integrador, desenvolvido por Linda Petzold e Alan Hindmarsh (PETZOLD, 1983; HINDMARSH, 1983), tem um algoritmo preditor-corretor que torna mais eficiente a integração. A idéia, basicamente, é variar automaticamente o passo de integração de acordo com a dificuldade de integração das equações. Isto, além de tornar a integração mais rápida, também a torna mais precisa.

Aproveitamos ainda esta seção para introduzir um conceito que usaremos mais adiante, que é o conceito de variedade homogênea e variedade não-homogênea. Um sistema é dito estar na variedade homogênea quando, no espaço de Fourier, apenas o modo $n = 0$ é diferente de zero, o que corresponde, no espaço real, a ausência de modos espaciais, sendo o seu perfil espacial plano. Já a variedade não-homogênea ocorre quando o sistema apresenta, para $n \neq 0$, modos diferentes de zero no espaço de Fourier, os quais no espaço real, correspondem a modos espaciais.

2.1.4 Estabilidade da variedade homogênea

A análise da estabilidade da variedade homogênea pode ser feita através da análise linear. Para fazer esta análise fixaremos as condições iniciais na seguinte forma:

$$A_1(t=0) = a_{1_0}(t=0) \equiv \mathcal{A} \neq 0, \quad (2.55)$$

$$a_{j_n}(t=0) = 0, \quad \{j = 2, 3, 4\}, \quad \forall n \neq 0, \quad (2.56)$$

as quais são perturbadas por pequenos termos $A_j = a_{j_1}e^{ikx} + a_{j_{-1}}e^{-ikx}$, $a_{j_{\pm 1}} \sim e^{-i\omega t}$, tal que $a_{j_{\pm 1}} \ll |\mathcal{A}|$. Esta escolha é conveniente para analisar a estabilidade para uma grande amplitude de A_1 . Ainda fixando

$$\delta_4 = 0, \quad (2.57)$$

a relação de dispersão $\omega = \omega(\kappa)$ pode ser obtida de

$$P_3P_2 - P_R = 0, \quad (2.58)$$

onde

$$P_2 = i(-\omega + v_{g_2}\kappa), \quad (2.59)$$

$$P_3 = i(-\omega + v_{g_3}\kappa - \delta_3), \quad (2.60)$$

$$P_4 = i(-\omega + v_{g_4}\kappa - \delta_4), \quad (2.61)$$

e

$$P_R = |\mathcal{A}|^2 \left(1 - r^2 \frac{P_3}{P_4} \right). \quad (2.62)$$

Salientamos que o símbolo grego κ representa o vetor contínuo da relação de dispersão, enquanto k é o vetor de onda usado na transformação de Fourier. A relação de dispersão (2.58) pode ser resolvida numericamente. Podemos ver, de acordo com a forma da perturbação proposta, que para valores reais de κ e imaginários de ω , a variedade homogênea é instável. A variedade somente será estável para valores reais de κ e quando a parte imaginária de ω for nula.

2.1.5 O modelo de quatro ondas puramente temporal

Na seção anterior vimos as equações do modelo de interação de ondas espaço-temporal. Porém, muita informação da dinâmica contida no modelo puramente temporal será importante na análise dos casos espaço-temporais. Como mostraremos no próximo capítulo, em algumas

situações a dinâmica dos sistemas espaço-temporais será representada apenas pela variedade homogênea. Em outras palavras, recaímos no caso puramente temporal. Assim, na ausência de dinâmica espacial, as nossas equações das amplitudes recaem em:

$$\frac{dA_1(t)}{dt} = A_2(t)A_3(t) - rA_2^*(t)A_4(t) + v_1A_1(t), \quad (2.63)$$

$$\frac{dA_2(t)}{dt} = -A_1(t)A_3^*(t) - rA_1^*(t)A_4(t) + v_2A_2(t), \quad (2.64)$$

$$\frac{dA_3(t)}{dt} = -A_1(t)A_2^*(t) - i\delta_3A_3(t) + v_3A_3(t), \quad (2.65)$$

$$\frac{dA_4(t)}{dt} = rA_1(t)A_2(t) + i\delta_4A_4(t) + v_4A_4(t), \quad (2.66)$$

sendo $A_i(t)$ as amplitudes das ondas com componentes apenas temporais. Os termos $v_{1,2,3,4}$ representam novamente a injeção ou a dissipação de energia (dependendo do sinal de v).

Considerando a interação conservativa, os termos $v_{1,2,3,4}$ serão nulos (PAKTER et al., 1997). Devido ao fato das amplitudes serem complexas, com componentes reais e imaginárias, as soluções da interação de quatro ondas são representadas num espaço de oito dimensões (quatro reais e quatro imaginárias). É possível introduzir a transformação de variáveis $A_j = F_j^{1/2} e^{i\phi_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$, tal que as equações (2.63)-(2.66) podem ser analisadas numa forma mais conveniente:

$$\dot{F}_1 = 2(F_1F_2F_3)^{1/2} \cos \phi_- - 2r(F_1F_2F_4)^{1/2} \cos \phi_+, \quad (2.67)$$

$$\dot{F}_2 = -2(F_1F_2F_3)^{1/2} \cos \phi_- - 2r(F_1F_2F_4)^{1/2} \cos \phi_+, \quad (2.68)$$

$$\dot{F}_3 = -2(F_1F_2F_3)^{1/2} \cos \phi_-, \quad (2.69)$$

$$\dot{F}_4 = 2r(F_1F_2F_4)^{1/2} \cos \phi_+, \quad (2.70)$$

$$\dot{\phi}_- = 1/2(H + \delta_3F_3 + \delta_4F_4)(1/F_2 - 1/F_1) + (F_1F_2/F_3)^{1/2} \text{sen}(\phi_-) - \delta_3 \quad (2.71)$$

$$\dot{\phi}_+ = 1/2(H + \delta_3F_3 + \delta_4F_4)(-1/F_2 - 1/F_1) - r(F_1F_2/F_4)^{1/2} \text{sen}(\phi_+) - \delta_4, \quad (2.72)$$

onde ocorre uma conjugação de fases que nos permite reescrever as fases como $\phi_- \equiv \phi_1 - \phi_2 - \phi_3$, $\phi_+ \equiv \phi_1 + \phi_2 - \phi_4$. Nosso sistema inicialmente tem 8 dimensões e, devido a conjugação de fases, passa a ter 6 dimensões. Além do mais, temos que a função Hamiltoniana do sistema é dada por:

$$H = 2(F_1F_2)^{1/2}(F_3^{1/2} \text{sen} \phi_- - rF_4^{1/2} \text{sen} \phi_+) - \delta_3F_3 - \delta_4F_4, \quad (2.73)$$

sendo que no formalismo Hamiltoniano acima, $F_{(1,2,3,4)}$ e $\phi_{(1,2,3,4)}$ são os momentos e as coordenadas canônicas, respectivamente. Note que temos uma função H que não depende explicitamente do tempo, ou seja, temos mais uma quantidade conservada neste sistema. Além da Ha-

miltoniana, o conjunto de equações (2.67)-(2.72) admite outras duas constantes de movimento, conhecidas como relações de Manley-Rowe, expressas na seguinte forma (LASHMORE-DAVIES, 1981):

$$F_1 + F_3 + F_4 = c_1, \quad (2.74)$$

$$F_2 - F_3 + F_4 = c_2. \quad (2.75)$$

Uma quarta constante de movimento para o sistema de equações (2.63)-(2.66) e a consequente integrabilidade da interação de quatro ondas conservativa foi apresentada para o caso $\delta_3 = \delta_4 = 0$ por Romeiras (ROMEIRAS, 1983). Para o caso onde $\delta_3 \neq 0$ ou $\delta_4 \neq 0$, a quarta constante não permanece válida (LOPES, 1995), permanecendo apenas a Hamiltoniana e as relações de Manley-Rowe como constantes de movimento. Assim, tem-se um sistema com mais graus de liberdade do que constantes de movimento, sendo aplicável a teoria de sistemas Hamiltonianos quasi-integráveis.

Devido às constantes de movimento, é necessário encontrar um conjunto de condições iniciais que satisfaça simultaneamente a Hamiltoniana e as constantes de movimento c_1 e c_2 . Por simplicidade, é escolhida a Hamiltoniana com valor $H=0$, de modo a obter o seguinte conjunto de condições iniciais que preenche estes requisitos:

$$\begin{aligned} F_1(t=0) &= c_1 - \eta, & F_2(t=0) &= c_2 - \eta, \\ F_3(t=0) &= 0, & F_4(t=0) &= \eta, & \phi_-(t=0) &= \pi, & \phi_+(t=0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.76)$$

com η sendo um parâmetro que define diferentes condições iniciais.

2.2 O mapa padrão

Sistemas hamiltonianos quasi-integráveis com dois graus de liberdade representam uma classe de sistemas com características gerais, com comportamentos independentes do sistema específico a ser tratado (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992). Por este motivo introduziremos nesta seção o modelo do mapa padrão que também é chamado de rotor pulsado. Assim como no modelo de interação de quatro ondas conservativo, o mapa padrão possui as mesmas características de sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade. Sendo assim, este mapa nos servirá como uma plataforma para elucidar alguns comportamentos dinâmicos que também serão encontrados no modelo de interação de quatro ondas.

2.2.1 A equação

Os sistemas Hamiltonianos mais simples que podem exibir caos são aqueles que possuem dois graus de liberdade. O mapa padrão é um dos mais estudados, visto que é um modelo conveniente para se analisar o comportamento caótico de sistemas Hamiltonianos com mapas bi-dimensionais. O mapa padrão foi introduzido por Chirikov (CHIRIKOV, 1979) como a forma discreta das equações para o rotor pulsado, cuja a Hamiltoniana é dada por:

$$H(p, x, t) = \frac{1}{2}p^2 - K \cos(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n), \quad (2.77)$$

onde p e x é o momento e a posição, e K é o chamado parâmetro de não linearidade. O mapa é considerado sobre um toro, tal que $p \in (-\pi, \pi)$ e $x \in (-\pi, \pi)$, e pode ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - K \operatorname{sen} x_n, \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1}, \end{aligned} \quad (2.78)$$

onde p_n e x_n são as variáveis dinâmicas do rotor logo após o n ésimo pulso dado pela função delta em (2.77). É bem conhecido que para $K > K_c \approx 0,9$ há uma grande órbita caótica que evidencia o cenário de caoticidade global (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992).

Nos nossos resultados mostraremos que este cenário de caoticidade global não é totalmente ergódico. Em outras palavras, ele é ergódico por partes, sendo que imerso no mar caótico do espaço de fase ocorrerá a presença de certas armadilhas dinâmicas que afetarão grandemente o deslocamento das trajetórias. A formação destas armadilhas será discutida com mais detalhes na próxima seção.

2.3 Conceitos de dinâmica não linear

Diferentemente das seções anteriores onde introduzimos os modelos que abordaremos nesta tese, aqui focaremos alguns conceitos de dinâmica não linear que serão fundamentais para a compreensão e posterior discussão dos resultados.

2.3.1 Teorema KAM e aprisionamentos no espaço de fase

Uma forma muito comum de descrever as equações de movimentos de corpos é usar o formalismo Hamiltoniano. Neste formalismo o estado do sistema é descrito pelo conjunto de N coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ e de N momentos generalizados $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$, onde N está relacionado com o número de graus de liberdade do sistema. A evolução temporal neste formalismo é obtida através das equações de Hamilton (GOLDSTEIN, 1980) dadas por:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial p_i}, \quad (2.79)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.80)$$

sendo que $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é a chamada função Hamiltoniana. Qualquer conjunto de variáveis (\mathbf{p}, \mathbf{q}) , tal que as suas evoluções temporais sejam dadas por equações da forma (2.79) e (2.80), são chamadas de canônicas (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992).

Quando um sistema Hamiltoniano de N graus de liberdade possui N constantes de movimento, é possível mostrar que pode-se realizar uma transformação de coordenadas de um par canônico (\mathbf{p}, \mathbf{q}) para um novo par canônico $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})$, de forma que a nova função hamiltoniana $H(\bar{\mathbf{p}})$ dependa apenas explicitamente do momento, i.e, $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$. As equações de movimento da nova hamiltoniana passam a ser dadas por:

$$\bar{p}_i = \alpha_i = \text{constante}, \quad (2.81)$$

$$\dot{\bar{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i = \text{constante}, \quad (2.82)$$

onde o vetor $\bar{\mathbf{q}}$ representa variáveis cíclicas. Integrando-se a última equação, obtém-se

$$\bar{q}_i = \omega_i t + \beta_i. \quad (2.83)$$

A solução para estes sistemas é representada por toros N dimensionais, sendo que cada componente da dimensão rotaciona com uma frequência ω_i . Porém, nem sempre é possível encontrar as N constantes de movimento necessárias para garantir a integrabilidade de um sistema com N graus de liberdade.

Uma possível abordagem para este problema é dada pela teoria perturbativa (OTT, 1993; LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992; SCHUSTER, 1995), que consiste basicamente em supormos uma Hamiltoniana integrável qualquer acrescida de uma pequena perturbação. Escre-

vendo uma Hamiltoniana perturbada como sendo a soma de uma Hamiltoniana não perturbada (H_0) e uma perturbação (H_1) multiplicada por uma constante ε , temos que:

$$H(\bar{p}, \bar{q}) = H_0(\bar{p}) + \varepsilon H_1(\bar{p}, \bar{q}). \quad (2.84)$$

A principal pergunta é sobre quais condições a Hamiltoniana perturbada (2.84) apresenta trajetórias que permanecem confinadas a toros N dimensionais. Para o caso onde isso for verdadeiro, usando uma transformações de variáveis canônicas será possível reescrever a Hamiltoniana como $H(\bar{p}, \bar{q}) = H'(\bar{p}')$.

Esta questão sobre o que ocorre com os toros quando é acrescentada uma pequena perturbação, só foi respondida pelo teorema de Kolmogorov (1954), Arnold (1963), Moser (1967), usualmente chamado de teorema KAM. A validade deste teorema assegura a existência do toro diante uma perturbação (OTT, 1993; LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992; SCHUSTER, 1995). A prova deste teorema é extensa e está contida nas referências (ARNOLD; AVEZ, 1968; MOSER, 1973). Nesta tese, apenas indicaremos quais condições são necessárias para este teorema ser válido. As condições a serem satisfeitas são (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992):

1. a independência linear das frequências

$$\vec{m} \cdot \vec{\omega} \neq 0, \quad (2.85)$$

2. a perturbação deve ser suave (suficiente número de derivadas contínuas de H_1)

3. condições iniciais suficientemente afastadas da ressonância, tal que satisfaça

$$|\vec{m} \cdot \vec{\omega}| \geq \gamma |\vec{m}|^{-\tau}, \quad (2.86)$$

para todos \vec{m} . A variável τ é dependente do número de graus de liberdade do sistema e da sua-vidade de H_1 , e γ é dependente da perturbação ε . Quando estas três condições são satisfeitas os toros sobrevivem à perturbação, e são chamados de toros KAM (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992).

Para uma perturbação ε suficientemente grande todos os toros são destruídos. Da condição 3 temos que o último toro KAM a ser destruído é aquele cuja razão de frequências é o número “mais irracional” (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992).

Para compreendermos o que é o número mais irracional é necessário usar alguns resultados da teoria de números. Um número irracional R pode ser representado pela seguinte fração

infinita contínua (OTT, 1993),

$$R = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}, \quad (2.87)$$

onde os a_i são inteiros. Se truncarmos a fração em um determinado a_n , obtemos um valor racional próximo do número irracional. Assim, o número “mais irracional” é definido como sendo o qual é mais lentamente aproximado por truncamentos da fração (2.87). O número que converge mais lentamente à fração é a chamada razão áurea e o seu valor é $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (OTT, 1993).

Assim o teorema KAM nos assegura que toros com frequências suficientemente irracionais sobrevivem a pequenas perturbações. A pergunta natural que surge agora é o que acontece com os toros de frequências racionais. Para estes casos o teorema de Poincaré-Birkoff nos diz que estes toros racionais se tornam pares de pontos fixos elípticos e hiperbólicos (OTT, 1993; LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992), sendo que a instabilidade dos pontos fixos hiperbólicos serão responsáveis pela formação de regiões caóticas em sistemas conservativos.

Um caso interessante é o de sistemas bidimensionais. Nestes casos, assim como uma linha de dimensão um, divide um plano de dimensão dois, um toro KAM separa o espaço de fase em duas regiões distintas. Assim, podemos concluir que devido à propriedade da unicidade da trajetória, uma região caótica sempre vai ser separada por um toro KAM no espaço bidimensional. Nestes casos os toros KAM atuam como se fossem barreiras que não podem ser atravessadas por qualquer trajetória.

Tendo em vista estes resultados, por algum tempo se pensou que sistemas hamiltonianos bidimensionais eram compostos por regiões regulares representados por toros KAM (toros irracionais) e mares caóticos devido a quebra dos toros racionais. Porém, resultados numéricos apontam que trajetórias caóticas inicialmente restritas a uma região, após longos tempos de iteração, podem migrar para uma região caótica distinta. Obviamente não podia se tratar de um toro KAM, sendo que este representa uma barreira para trajetórias caóticas independente do tempo de iteração do sistema. Esta questão permaneceu em aberto até que foi proposta a existência de objetos chamados de cantori² (MACKAY et al., 1984). Este cantori, diferentes dos toros KAM, formam barreiras parciais no espaço de fase. Geometricamente é como se fosse um toro com pequenos canais, tais que se esperarmos tempos suficientemente longos, trajetórias caóticas podem atravessar por um dos canais, conectando regiões do espaço de fase

²A origem da palavra cantori é a proveniente da junção de “cantor” com “tori” que significa toro em latim. O termo “cantor” é uma referência ao conjunto de cantor. Este conjunto, que é formado por segmentos de linhas, tem uma propriedade interessante que é a sua dimensão ter um valor fracionário (aproximadamente 0,63), que é um valor maior que a de um ponto (zero), porém menor do que uma linha (um) (ALLIGOOD; YORKE, 1996).

aparentemente distintas. Na figura (2.2) mostramos uma ilustração da conexão de duas regiões do espaço de fase.

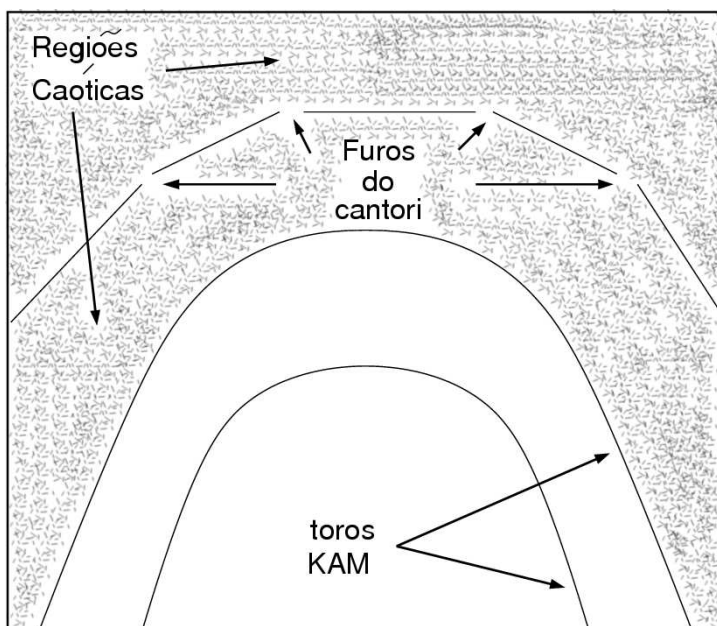


Figura 2.2: Representação esquemática de um cantori e seus canais.

A existência deste cantori tem grande influência sobre como ocorre o transporte de trajetórias caóticas no espaço de fase em sistemas conservativos. Uma consequência direta é que a hipótese ergódica não é válida para tais sistemas. A quebra desta validade será discutida com mais detalhes na próxima seção.

2.4 Expoente de Lyapunov a tempo infinito e a tempo finito

Como veremos no capítulo de resultados, o expoente de Lyapunov nos fornecerá informações importantes sobre os toros KAM e o cantori que foram descritos na seção anterior, e sobre a estabilidade espacial do modelo de interação onda-onda espaço-temporal. Por este motivo, nesta seção faremos uma breve discussão deste conceito, que se mostrará fundamental para análise dos resultados.

Uma característica comum em sistemas caóticos é a imprevisibilidade. Esta característica está relacionada com a chamada dependência sensível às condições iniciais, ou seja, dadas duas condições arbitrariamente próximas, após um período suficientemente longo obtemos soluções totalmente diferentes. Uma forma de medir a dependência às condições iniciais é através do chamado expoente de Lyapunov (WOLF et al., 1985).

Para definirmos o expoente de Lyapunov, considere inicialmente um sistema contínuo descrito por um conjunto de n equações diferenciais ordinárias. Sobre este sistema é escolhida uma trajetória onde é fixado um ponto inicial x_0 . Em torno do ponto inicial x_0 é monitorada uma esfera infinitesimal de condições iniciais de raio $\varepsilon_0(x_0)$. Após evoluir temporalmente o ponto inicial x_0 , a esfera de condições iniciais se deforma, tornando-se um elipsóide com eixos principais $\varepsilon_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ (ver Figura 2.3).

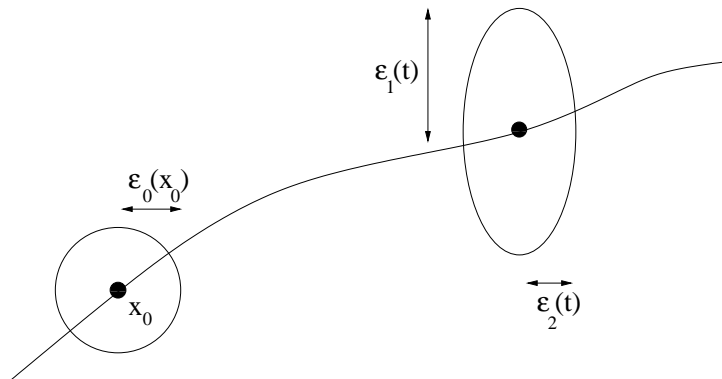


Figura 2.3: Evolução temporal de uma esfera bidimensional de condições iniciais.

Assim, define-se o expoente de Lyapunov como sendo a medida do crescimento (ou decréscimo) exponencial dos eixos principais $\varepsilon_i(t)$ que é dado por (WOLF et al., 1985):

$$\lambda_i = \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)}. \quad (2.88)$$

Respeitando os limites desta última equação temos que:

$$\varepsilon_i(t) \sim \varepsilon_0(x_0) \exp(\lambda_i t). \quad (2.89)$$

Pode-se concluir então que a existência de pelo menos um expoente Lyapunov positivo está associado com a divergência de trajetórias, que é uma característica de soluções caóticas (WOLF et al., 1985).

Em um instante de tempo t qualquer o elemento de volume n -dimensional é dado por:

$$\delta V(t) = \prod_{i=1}^n \varepsilon_i(t), \quad (2.90)$$

substituindo a equação (2.89) em (2.90) temos que:

$$\delta V(t) = \delta V(0) \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i t\right). \quad (2.91)$$

Deste último resultado podemos distinguir dois casos. O primeiro ocorre quando $\delta V(t) = \delta V(0)$, ou seja, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Neste caso o elemento de volume se preserva e o sistema é conservativo. O segundo caso é quando $\delta V(t) < \delta V(0)$, ou seja $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$. Sistemas em que ocorre a contração do elemento de volume são chamados de dissipativos.

Alternativamente, o expoente de Lyapunov pode ser definido em termos da matriz jacobiana. Considerando uma trajetória representada por um vetor \mathbf{r} com N dimensões o expoente de Lyapunov pode ser escrito como:

$$\lambda_k(\mathbf{r}_0, n) = \frac{1}{n} \ln(\|D\mathcal{M}^n(\mathbf{r})\mathcal{U}_k\|) \quad (k = 1, \dots, N), \quad (2.92)$$

onde n é um inteiro positivo, $D\mathcal{M}^n(\mathbf{r})$ denota a matriz Jacobiana da n -ésima iterada do sistema, calculada em \mathbf{r}_0 , e \mathcal{U}_k é o autovetor correspondente ao k -ésimo autovalor de $D\mathcal{M}^n(\mathbf{r}_0)$.

Se tomarmos o número de iteradas n como sendo um número finito, temos o chamado expoente de Lyapunov a tempo finito. Este último depende da condição inicial \mathbf{r}_0 , enquanto opostamente para tempo infinito,

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k(\mathbf{r}_0, n), \quad (2.93)$$

tem praticamente o mesmo valor para todas condições iniciais.

A existência de um valor fixo para o expoente a tempo infinito é garantida pelo teorema de Oseledec³(OSELEDETS, 1968). Porém, salientamos que o resultado deste teorema só é válido para sistemas ergódicos. Como foi visto na seção anterior, a existência de cantori pode fazer que trajetórias fiquem aprisionadas em determinadas regiões do espaço por um tempo longo, porém finito. Nestes casos a hipótese ergódica, que se baseia no fato de que a média espacial é igual a média temporal da trajetória, falha. Na verdade, sistemas que apresentam estas características de aprisionamento são chamados de pseudo-ergódicos (ZASLAVSKY, 2002(b)).

Devido à pseudo-ergodicidade presente em sistemas Hamiltonianos, mostraremos que o uso do expoente Lyapunov finito fornecerá um diagnóstico muito mais rico em informações sobre a dinâmica de tais sistemas. O expoente de Lyapunov a tempo finito possui sucessivas flutuações no tempo, devido às contrações e expansões que uma trajetória caótica típica sofre no espaço de fase acessível. Assim, faz-se útil definir uma distribuição de probabilidade. Definiremos $f(\lambda_k(\mathbf{r}_0, n))$ como sendo a densidade de probabilidade do k -ésimo expoente de Lyapunov a tempo finito, para condição inicial \mathbf{r}_0 . Em outras palavras, $f(\lambda_k(\mathbf{r}_0, n))d\lambda_k$ é a probabilidade do expoente de Lyapunov a tempo finito estar entre λ_k e $\lambda_k + d\lambda_k$.

³Também chamado de teorema multiplicativo ergódico.

2.5 Intermitência on-off

Outro conceito que será útil em nossa investigação é o de intermitência on-off. Veremos que os comportamentos desta intermitência que serão descritos aqui, aparecerão na análise de resultados para o sistema de interação de ondas espaço-temporal.

A análise de sistemas que geram trajetórias caóticas, tais como em problemas de mecânica celeste, vem de longa data. Porém, nos últimos tempos um foi encontrado um novo comportamento em sistemas dinâmicos. Este comportamento foi chamado de intermitência on-off⁴, originalmente proposto por Platt (PLATT et al., 1993). Esses sistemas são caracterizadas pelo fato de uma ou mais variáveis permanecerem por longos períodos com valores constantes (estado desligado) e, esporadicamente, estes perfis planos sofrem variações abruptas. Na literatura estas variações são usualmente chamadas de *estouros*⁵ (estado ligado). Na figura (2.4) ilustramos como estados desligados são abruptamente interrompidos por estados ligados.

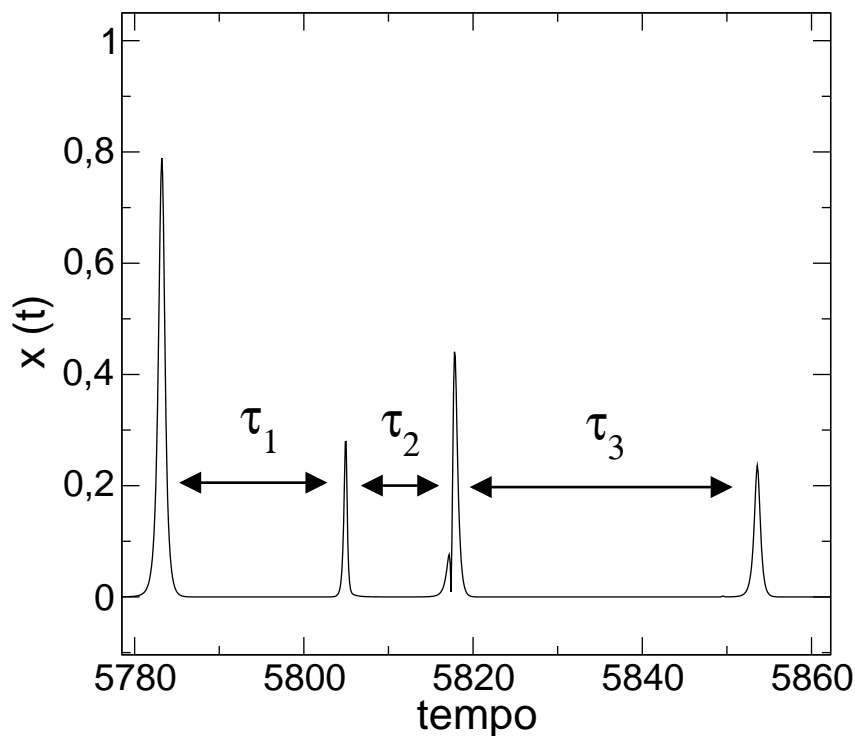


Figura 2.4: Figura esquemática dos estados ligados e desligados da intermitência

O uso da palavra intermitência em sistemas dinâmicos tem suas origens em dinâmica dos fluidos (TOWNSEND, 1976). Este termo é usado na mecânica de fluidos para descrever a

⁴Traduzido para o português intermitência ligada-desligada, porém a sua tradução não é freqüentemente usada pela comunidade científica brasileira. Por isso, manteremos este termo em sua língua original.

⁵Em sua língua original *bursts*

repentina transição de regimes laminares para regimes turbulentos. Nos nossos sistemas esses regimes laminares corresponderão a perfis constantes de variáveis, enquanto os turbulentos designarão os “estouros” que eventualmente podem ocorrer.

É importante salientar que existem certos pré-requisitos para sistemas dinâmicos apresentarem intermitência on-off. A primeira delas é que o sistema deve ter uma variedade invariante caótica. A segunda é que a dimensão total do sistema deve ser ao menos uma maior do que a da variedade.

Suponha que p seja um parâmetro de um sistema caótico, e que exista um valor crítico p_c tal que, para $p \geq p_c$ passe a ocorrer intermitência on-off. Assim, para valores $p < p_c$, para os quais não ocorre intermitência, a variedade invariante do nosso sistema é o próprio atrator caótico. Neste caso, as trajetórias sempre ficam restritas ao atrator. Já para os casos $p \geq p_c$, o sistema deixa de ter o atrator caótico e passa a ser o conjunto caótico. Diferentemente do atrator, estes conjuntos caóticos possuem uma pequena fração positiva de órbitas periódicas transversalmente (com relação à variedade) instáveis. Assim, as trajetórias passam longos tempos na variedade invariante. Porém, eventualmente passam próximas a estas órbitas periódicas que apresentam ao menos um expoente de Lyapunov transversal positivo. Todas as vezes em que isso acontece, as trajetórias são ejetadas para fora da variedade invariante, e dizemos que ocorreu um estouro. Na figura (2.5) mostramos um esquema dessa transição. Os intervalos de tempo do estouro, comparado com os intervalos da trajetória na variedade, são muito pequenos, e tendem a infinito quando se aproxima de $p = p_c$. A perda de estabilidade através deste mecanismo é chamada de bifurcação blowout⁶(OTT; SOMMERER, 1994).

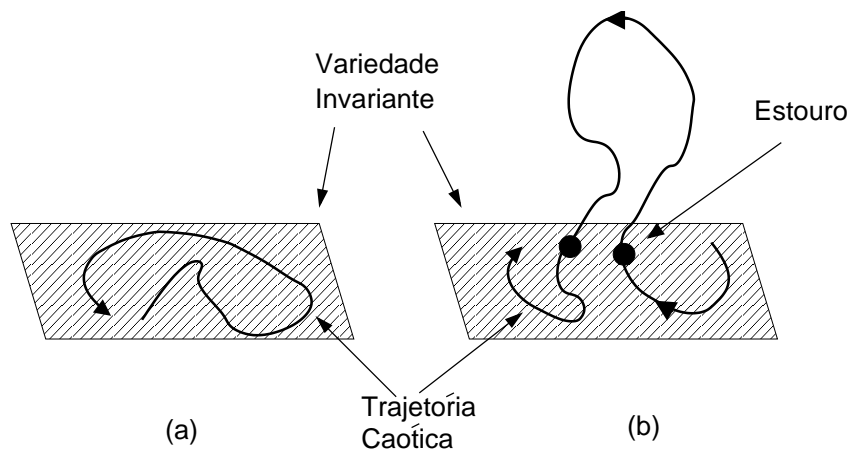


Figura 2.5: Figura esquemática representando dois casos (a) a trajetória permanece na variedade invariante (b) a trajetória é ejetada da variedade invariante

⁶Em português bifurcação explosiva, este é um outro termo que manteremos em sua língua original.

Uma característica de sistemas com intermitência on-off é a probabilidade da distribuição dos comprimentos de tempos τ entre os estouros (ver figura 2.4). Estas distribuições possuem a forma de uma lei de potência com um expoente $-3/2$, é dada pela seguinte expressão (COVAS et al., 2001):

$$P_n \sim \alpha n^{-3/2} \exp(-\beta n) + \gamma \exp(-\delta n). \quad (2.94)$$

Os termos α, β, γ e δ , são constantes que variam de acordo com o sistema. Porém, a característica principal de sistemas com intermitência on-off, é a lei de potência após sucessivas medidas dos comprimentos de tempos τ . Sendo esta uma forma de identificar sistemas que apresentam intermitência on-off.

3 Resultados e Discussões

Neste capítulo apresentaremos os resultados que obtivemos neste trabalho. Dividiremos este capítulo em três seções, sendo cada uma delas dedicada a um modelo específico abordado. Na primeira mostraremos os resultados para a interação de 4 ondas conservativa, na segunda o modelo do mapa padrão e na terceira o caso espaço-temporal para o modelo de interação de ondas.

3.1 Modelo de interação de ondas puramente temporal

Nesta seção começaremos usando o corte de Poincaré para analisar a dinâmica do modelo de quatro ondas conservativo. A principal vantagem de utilizar o corte de Poincaré para o sistema de quatro ondas é que, devido ao fato da transformação de variáveis reduzir o conjunto de oito equações diferenciais para seis e, associado com as duas constantes de movimento de Manley-Rowe (2.74) e (2.75), mais a Hamiltoniana (2.73), o sistema permanece restrito a uma superfície de energia tridimensional. Assim, quando realizamos o corte, as trajetórias são analisadas num espaço bidimensional. O corte escolhido das trajetórias geradas pelo modelo, ocorre na posição em que a variável F_1 atinge um valor mínimo. Quando esta condição de corte é satisfeita, é feito um gráfico da variável F_2 versus a combinação das variáveis cíclicas ϕ_+ e ϕ_- na forma $(\phi_+ - \phi_-)$. Na figura (3.1) é mostrado um corte para um pequeno valor de frequência de descasamento δ_3 .

O corte da figura (3.1) é construído através de um conjunto de condições iniciais evoluído temporalmente até um tempo $t = 10000$ que satisfaz as constantes de movimento de Manley-Rowe e a Hamiltoniana. Os valores destas constantes e de alguns parâmetros serão mantidos fixos durante esta seção, tais valores são:

$$c_1 = 3,2 \quad c_2 = 1,0 \quad H = 0 \quad \delta_4 = 0 \quad r = 1. \quad (3.1)$$

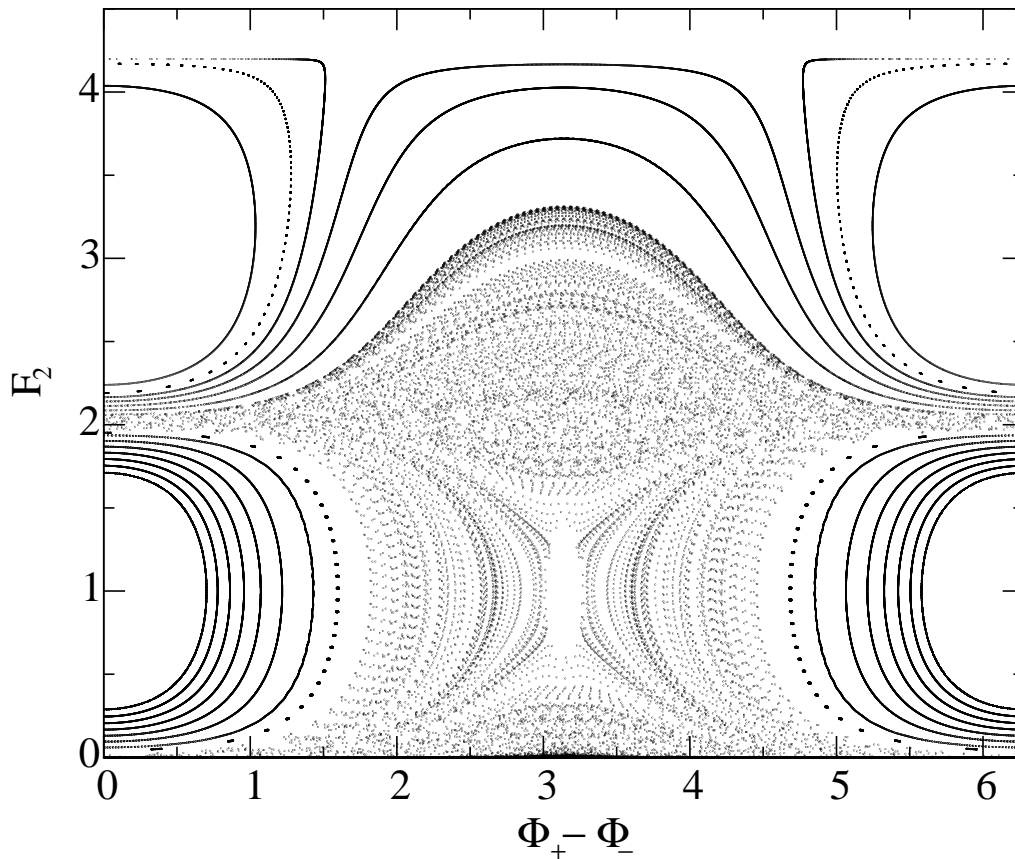


Figura 3.1: Corte de Poincaré para $\delta_3 = 0,02$.

Cada curva gerada no corte representa uma condição inicial, para pequenos valores de frequência de descasamento. Podemos observar um comportamento predominantemente regular, onde a maioria das condições iniciais geram curvas suaves com exceção das condições iniciais que preenchem a região próxima ao centro do corte, as quais são caóticas. O fato da maioria das condições iniciais apresentarem comportamento regular é devido ao modelo de quatro ondas conservativo ser integrável para o caso $\delta_3 = 0$ (ROMEIRAS, 1983). Assim temos, para pequenos valores de δ_3 , um comportamento muito próximo de sistemas integráveis, onde todas as condições iniciais geram comportamentos regulares. Para o caso $\delta_3 \neq 0$, o modelo de quatro ondas inicialmente é um sistema com quatro graus de liberdade, porém devido às duas constantes de Manley-Rowe, o modelo recai no caso de um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade. Vimos no capítulo anterior que o caso de sistemas Hamiltonianos quasi-integráveis são caracterizados por regiões regulares e irregulares, onde as regiões regulares (caso integrável) são representadas por toros. Assim podemos associar as regiões regulares para o caso quasi-integrável do modelo conservativo de quatro ondas como sendo um corte de um toro bidimensional (T^2) com duas frequências, e este corte gera as curvas que são obser-

vadas na figura (3.1). O fato das curvas serem densamente preenchidas no corte é devido à irracionalidade entre as duas frequências do toro.

Na figura (3.2) mostramos um corte da série temporal para o caso de uma condição inicial regular do corte mostrado na figura (3.1). As amplitudes das ondas eletromagnéticas geradas pelo modelo de quatro ondas são compostas por partes real e imaginária, assim para analisarmos a frequência destas amplitudes usaremos o módulo quadrado destas amplitudes.

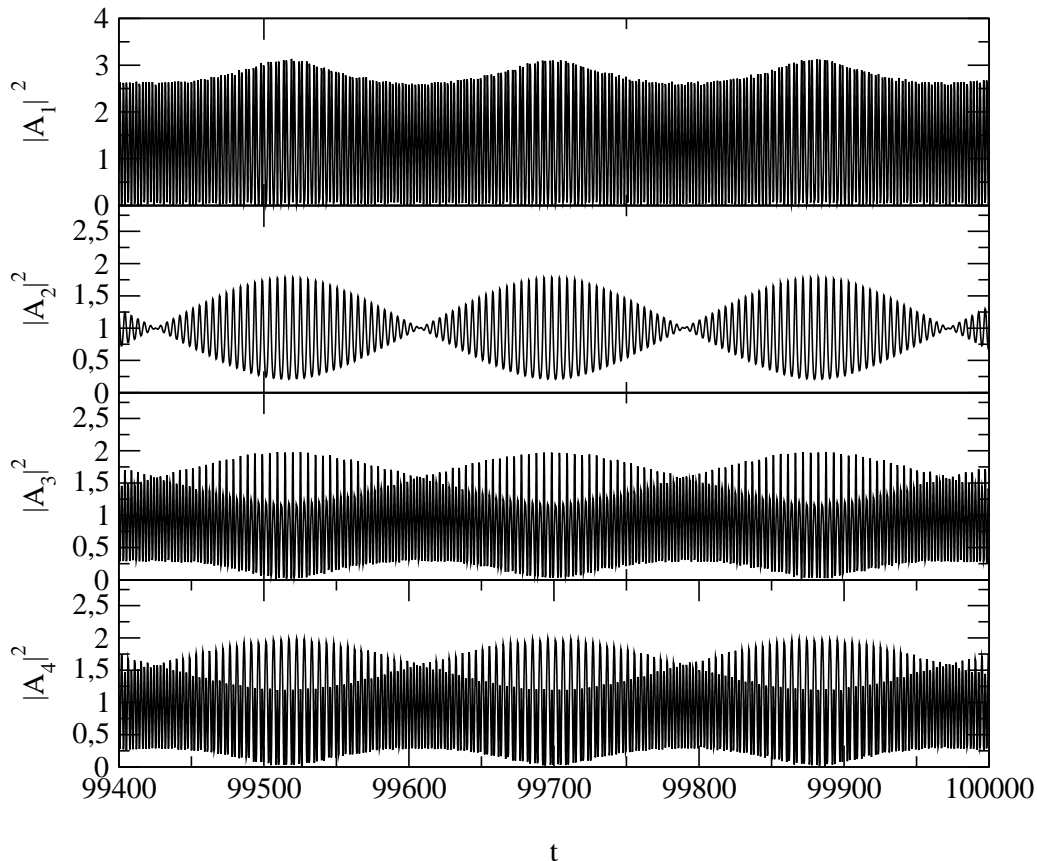


Figura 3.2: Série temporal de uma condição inicial em uma região regular para $\delta_3 = 0,02$.

Através destas séries podemos observar um comportamento aparentemente periódico. Podemos ver também que cada amplitude é composta por duas frequências, uma lenta e outra rápida, que estão relacionadas com as duas frequências do toro T^2 . Além disto, podemos concluir que estas frequências são, na verdade, quasi-periódicas devido ao fato desta condição inicial gerar um toro irracional que preenche uniformemente a curva representada no corte. Na figura (3.3) é mostrada uma análise de espectro de Fourier sobre a série temporal da amplitude da onda dois da figura (3.2).

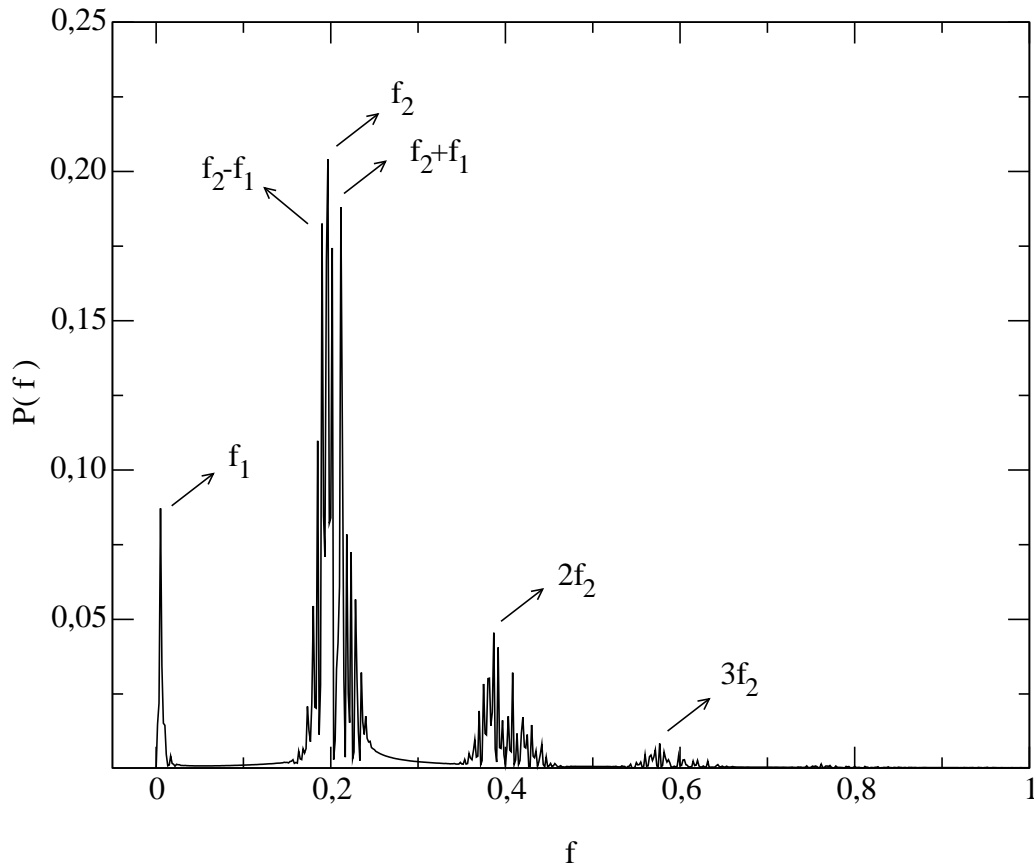


Figura 3.3: Espectro de potência de uma condição inicial em uma região regular para $\delta_3 = 0,02$.

Na figura (3.3) mostramos uma análise de espectro de potência de Fourier que nos fornece as duas frequências que compõem a série temporal e as suas possíveis combinações lineares. As duas frequências são determinadas como sendo as com valores de frequência linearmente independentes e com os maiores picos de amplitude no espectro de potência. Na figura (3.3) apontamos as duas frequências que satisfazem estes requisitos e as suas combinações lineares, as duas frequências possuem um valor de: $f_1 \approx 0,005$ e $f_2 \approx 0,197$.

No gráfico da figura (3.4) é mostrada uma série temporal para um mesmo valor de frequência de descasamento do caso anterior ($\delta_3 = 0,02$), só que agora é usada uma condição inicial em uma região caótica do corte. Podemos ver que as oscilações das amplitudes perderam o comportamento periódico presente no caso de uma condição inicial regular.

Realizando uma análise do espectro de potência de Fourier na série temporal da onda dois, mostrada na figura (3.4), podemos ver que os picos já não são tão bem definidos como no caso em que a condição inicial é regular. O fato do espectro apresentar picos largos reflete a perda da periodicidade da série temporal.

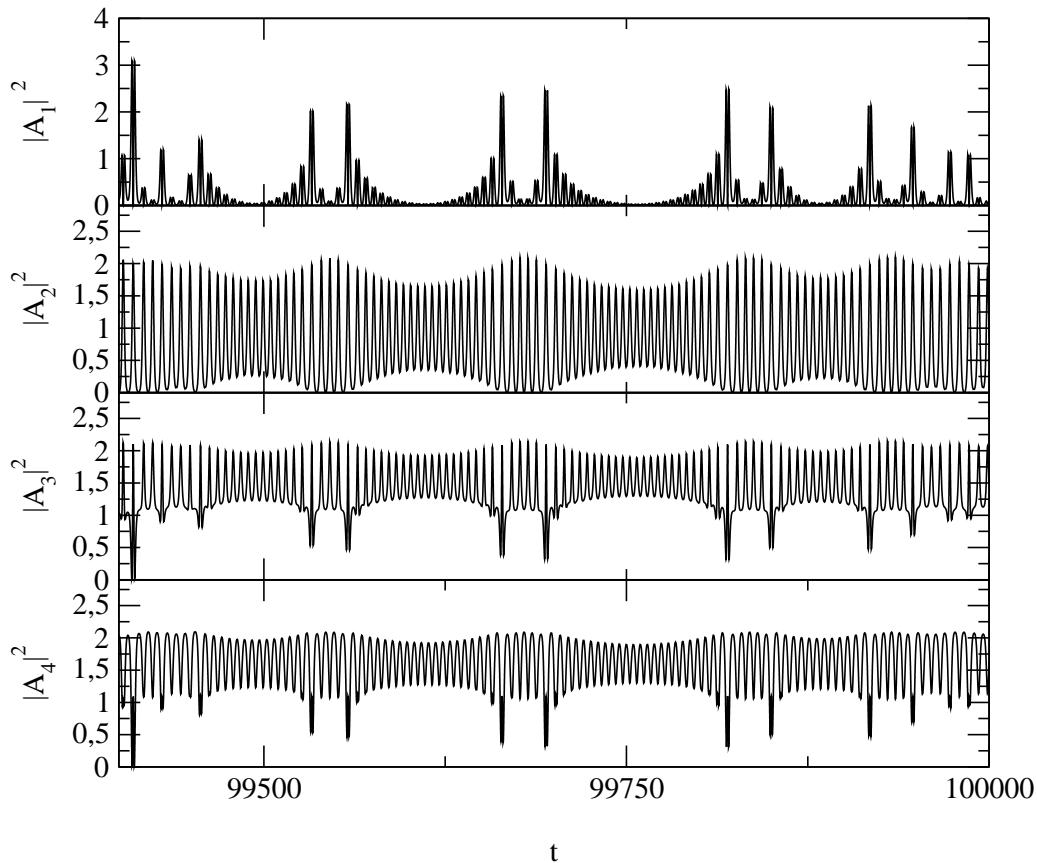


Figura 3.4: Série temporal de uma condição inicial em uma região irregular para $\delta_3 = 0,02$.

O gráfico da figura (3.6) é gerado a partir das mesmas condições iniciais e parâmetros do corte anterior, só sendo alterado o valor da frequência de descasamento que foi aumentado para $\delta_3 = 0,03$. Podemos ver pelas curvas geradas no centro da figura (3.1) que as regiões caóticas aumentam com a frequência de descasamento. Na figura (3.6) também podemos observar que as regiões caóticas são limitadas por regiões regulares, ou seja uma condição inicial no interior de uma região caótica não pode atravessar uma região regular. Isto é uma consequência do teorema KAM para sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade, onde os toros que sobrevivem à perturbação dividem o espaço em sub-espacos que confinam as regiões caóticas. O aparecimento das regiões caóticas é devido aos toros que se quebraram com o acréscimo da perturbação. No caso do modelo de quatro ondas conservativo a perturbação é introduzida através da frequência de descasamento. O fato do comportamento irregular surgir no centro do corte, é devido a curva separatriz cruzar o centro do corte onde está localizado um ponto fixo hiperbólico. Como foi discutido no capítulo anterior, o acréscimo da perturbação faz que as trajetórias próximas ao ponto fixo hiperbólico passem por um complexo processo de esticamento e contração, originando a trajetória caótica que é observada no centro do corte de Poincaré da

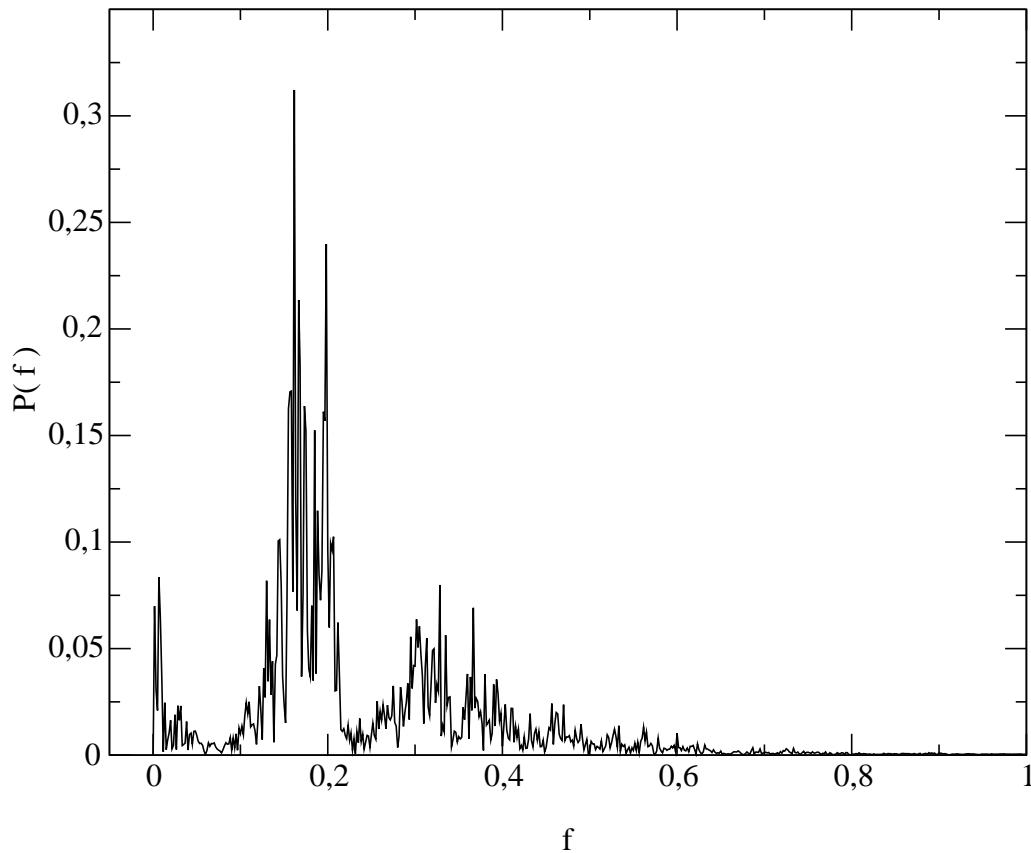


Figura 3.5: Espectro de potência de uma condição inicial em uma região irregular para $\delta_3 = 0,02$.

figura (3.6).

No corte de Poincaré da figura (3.7) é mostrada uma ampliação para o mesmo valor da frequência de descasamento do caso anterior. Esta figura mostra a transição entre a região regular (toros KAM) e as regiões caóticas. Podemos observar que próximo às regiões regulares há a formação de pequenas ilhas. Isto é uma consequência do teorema de Poincaré-Birkoff, no qual os toros racionais com um acréscimo de uma perturbação formam um conjunto de pontos fixos elípticos e hiperbólicos. Assim temos que condições iniciais próximas aos toros racionais que foram quebrados com o acréscimo do descasamento da frequência formam trajetórias em torno dos pontos fixos elípticos dos toros racionais.

Além destes comportamentos que foram citados, enfatizamos que, na figura (3.7), também é observado o aparecimento de armadilhas dinâmicas para estes sistemas. Vemos que, apesar da condição inicial mais à direita na figura já não ser mais periódica, a trajetória passa um grande tempo próxima às ilhas, gerando uma acumulação de pontos até finalmente alcançar o mar caótico. Estes comportamentos são evidências da existência dos cantori, que aprisionam

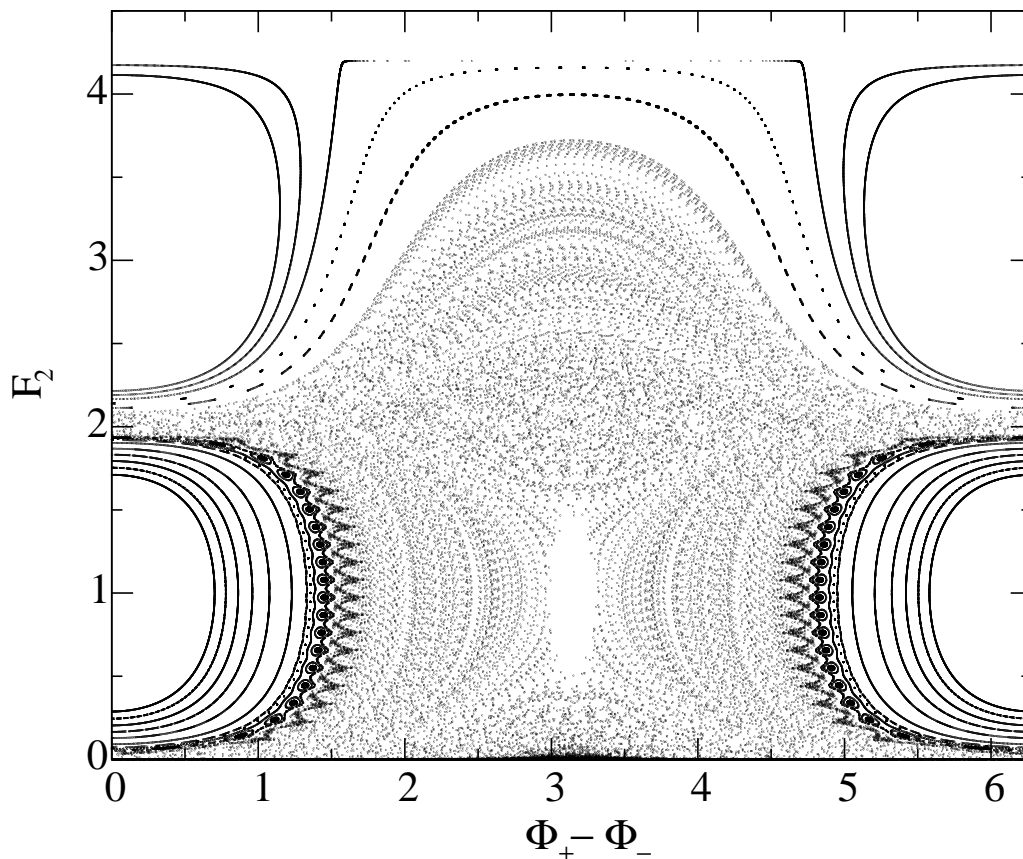


Figura 3.6: Corte de Poincaré para $\delta_3 = 0,03$.

trajetórias em certos domínios do espaço de fase por longos tempos, até que finalmente passe por um dos furos destes cantori. A presença de cantori é uma característica geral de sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade. Na próxima seção mostraremos que através do uso do mapa padrão, que também é um sistema conservativo de dois graus de liberdade, estes cantori podem ser quantificados com o uso do expoente de Lyapunov a tempo finito.

3.2 O mapa padrão

Na seção anterior vimos o aparecimento de armadilhas dinâmicas e cantori no modelo de interação de quatro ondas conservativo. Agora nesta seção, mostraremos estes comportamentos obtidos para o mapa padrão e como o expoente de Lyapunov a tempo finito pode quantificá-los.

No gráfico (3.8) mostramos o resultado obtido do espaço de fase para um valor particular de K . Este resultado foi gerado a partir de uma única condição inicial iterada por um longo tempo para garantir boas propriedades estatísticas. Neste gráfico podemos ver que grande

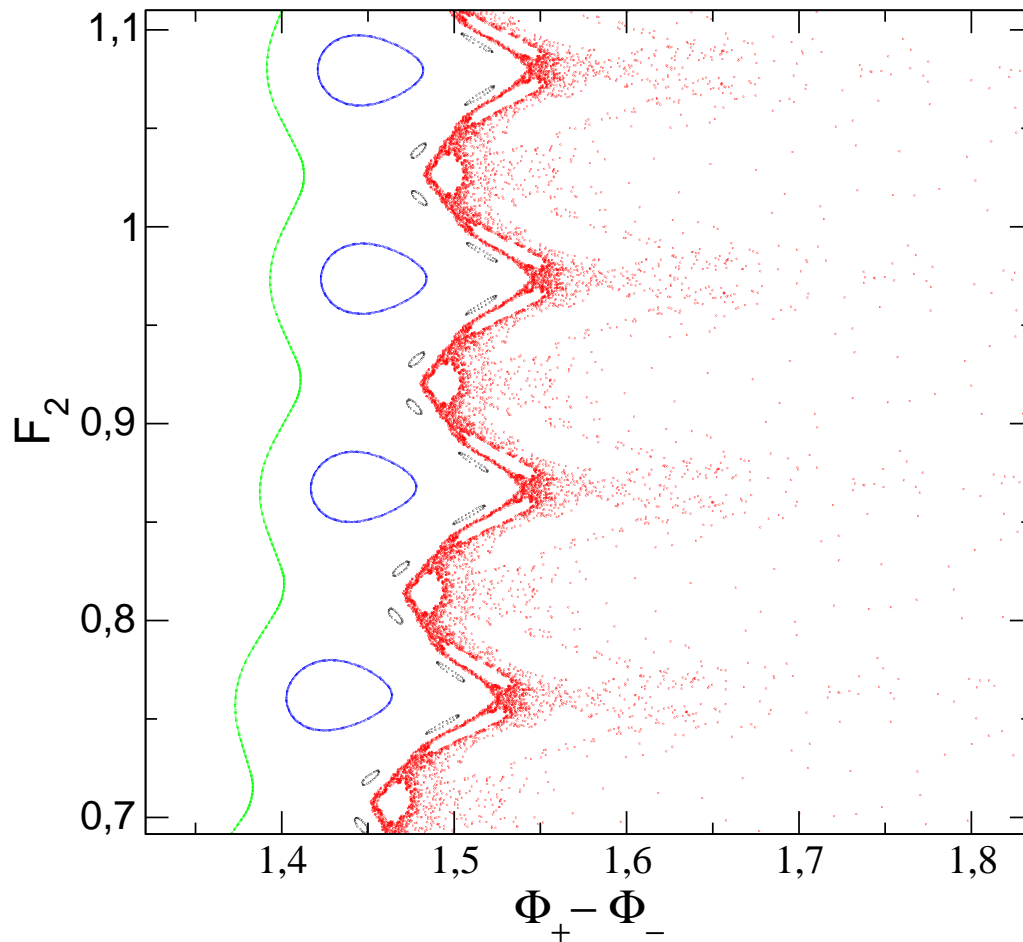


Figura 3.7: Ampliação do corte de Poincaré para quatro condições iniciais distintas para $\delta_3 = 0,03$.

parte do espaço de fase é coberto por ilhas quase-periódicas. Além disto, podemos ver que na vizinhança destas ilhas existem regiões mais escuras que surgem como resultado do efeito de aprisionamento sofrido pelas trajetórias. Note que este efeito de aprisionamento para o mapa padrão, é semelhante ao encontrado na interação conservativa de quatro ondas mostrado na figura (3.7). Isto nos leva a concluir que uma análise superficial do espectro de Lyapunov pode nos levar a valores errados. O movimento do sistema nas regiões de aprisionamento é aparentemente regular, e assim obtemos um valor menor do que o expoente positivo apresentado pela dinâmica fora das regiões de aprisionamento.

Uma visão geral do efeito de aprisionamento é apresentada no gráfico (3.9), onde é mostrado o maior expoente de Lyapunov em função do parâmetro K . Neste gráfico podemos ver três regiões distintas: (i) para pequenos valores de K , o expoente de Lyapunov cresce lentamente no intervalo $0,8 < K < 2,2$, isto está relacionado com o efeito de aprisionamento ser mais efetivo nesta região de parâmetros; (ii) adiante desta região de parâmetros ($2,2 < K < 4,7$) algumas

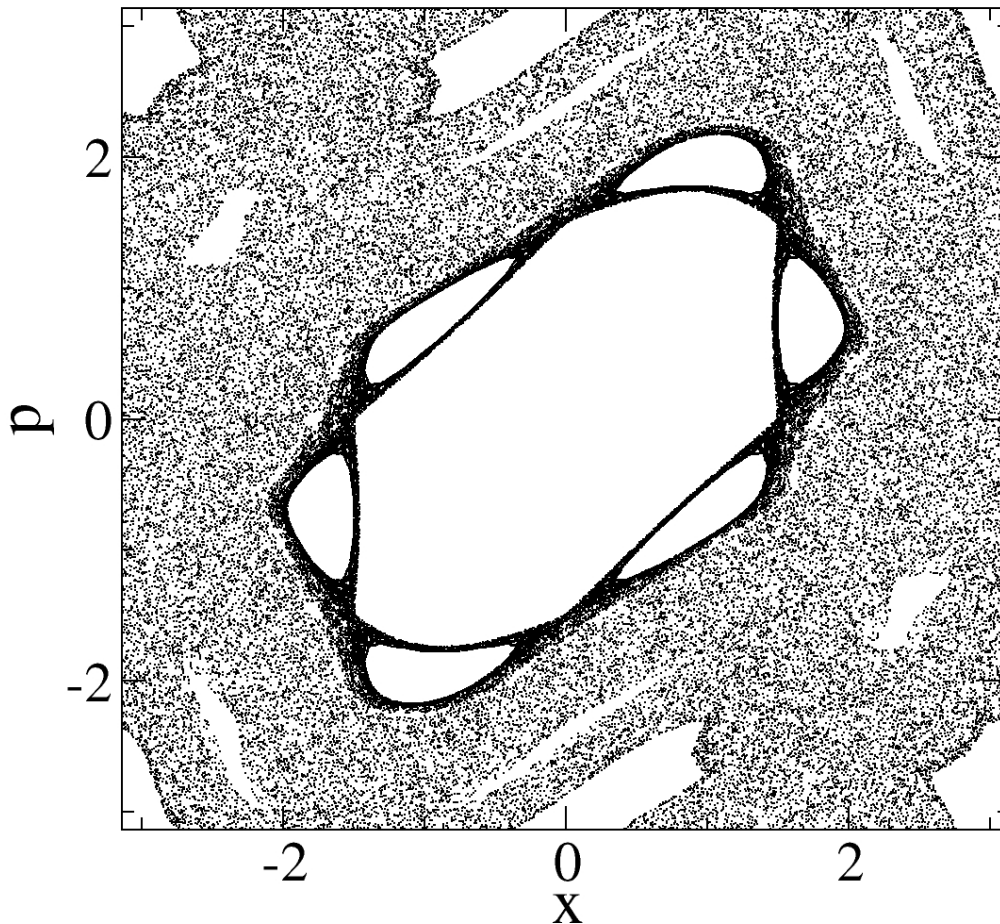


Figura 3.8: Espaço de fase do mapa padrão para $K = 1,5$.

ilhas se quebram diminuindo o efeito de aprisionamento e o expoente de Lyapunov cresce mais rapidamente nesta região; (iii) para valores de $K > 4,7$ não há mais ilhas de grandes tamanhos e vemos que o expoente de Lyapunov cresce ainda mais rapidamente nesta região.

No gráfico (3.10) mostramos uma distribuição de $f(\lambda_k(n))$ obtida numericamente. Para o cálculo desta distribuição foi escolhida uma condição inicial (p_0, x_0) e iterada para longos períodos de tempo para garantir que a trajetória atravessasse todo espaço de fase acessível. Neste caso o tempo de amostragem do expoente de Lyapunov a tempo finito foi fixado em $n = 100$ segundo a equação (2.92). Neste gráfico mostramos a distribuição dos dois expoentes de Lyapunov para o mesmo parâmetro K do espaço de fase que foi apresentado na figura (3.8). Vemos

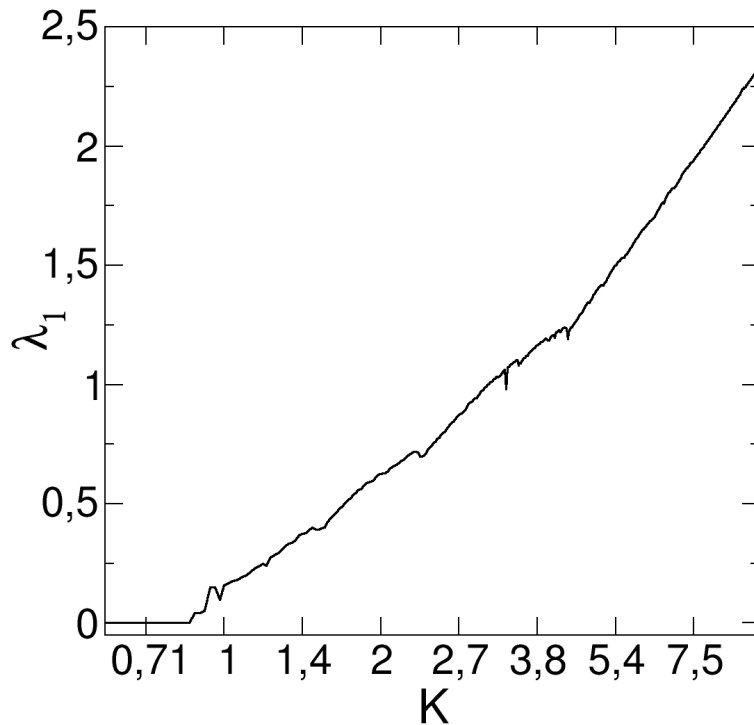


Figura 3.9: Máximo expoente de Lyapunov em função do parâmetro K .

que ambas as distribuições são simétricas, isto é uma consequência direta do sistema utilizado ser conservativo (Hamiltoniano). Além do mais, temos um resultado interessante que é o fato da distribuição ser bi-modal, onde cada um destes modos corresponde à diferentes contribuições do espaço de fase. Temos que o modo mais afastado de zero, corresponde a contribuição caótica do espaço de fase, onde acontece maiores expansões (contrações) no espaço de fase. Enquanto, que o modo mais próximo de zero, é devido a presença de armadilhas, e neste caso a trajetória tem um comportamento parecido com as trajetórias regulares (ilhas).

Na figura (3.11) mostramos o espaço de fase para $K = 6,0$. Neste caso vemos que há poucas ilhas e a trajetória caótica preenche quase todo o espaço de fase. Assim, esperamos que a contribuição das armadilhas seja muito pequena no espaço de fase. Na figura (3.12), mostramos a distribuição do expoente de Lyapunov, onde vemos que o modo próximo de zero da contribuição das armadilhas desaparece.

Uma importante medida é quantificar a contribuição do efeito do aprisionamento sobre a trajetória total. Para fazermos isto, calculamos a fração da área do primeiro modo com relação

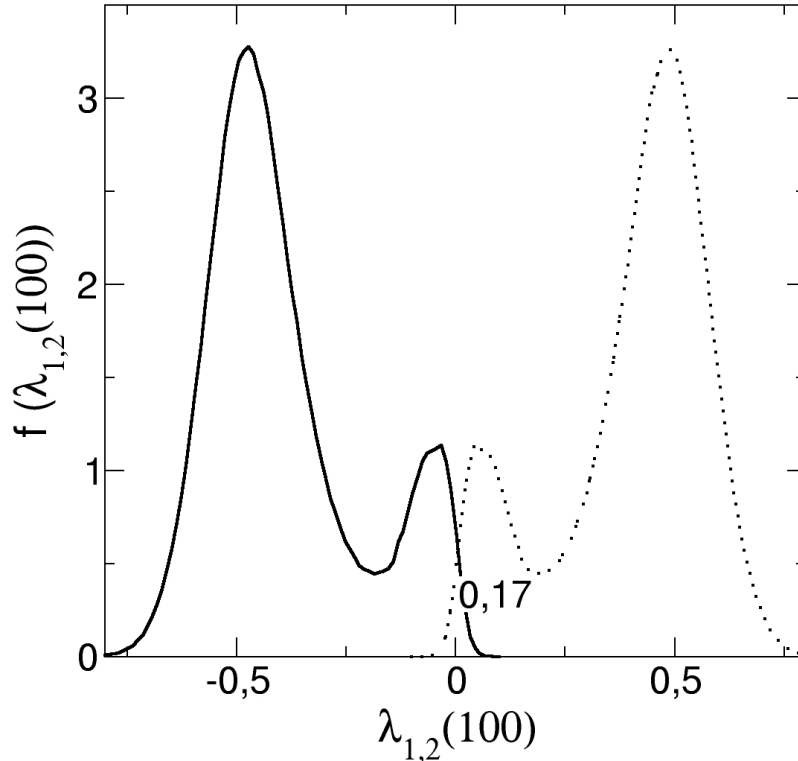


Figura 3.10: Distribuição do Lyapunov a tempo finito do mapa padrão para $K = 1,5$.

a área total da distribuição dos expoentes de Lyapunov. Por exemplo, na figura (3.10) vemos que a área do primeiro modo corresponde a cerca de 17% da área total da distribuição.

Quando o parâmetro de não linearidade K cresce, a influência das armadilhas em geral tende a ser menor. Isto pode ser visto na figura 3.13(a), onde é mostrada a fração de tempo da dinâmica sob influência do aprisionamento em função do parâmetro K . Nas figuras 3.13(b) e 3.13(c) mostramos uma ampliação de 3.13(a). Isto sugere que a curva não é suave com o parâmetro K , apresentando muitas irregularidades. Isto é devido ao fato de sempre ser possível encontrar um número infinito de ilhas imersas no mar caótico.

Uma outra propriedade de sistemas Hamiltonianos que discutimos no capítulo anterior, são os chamados cantori (MACKAY et al., 1984; PERCIVAL, 1979; AUBRY, 1978). Como vimos, estes cantori, ao contrário dos toros KAM, não separam mais as diferentes regiões caóticas no espaço de fase. Porém, a travessia das trajetórias através destes cantori só pode ser feita através de pequenos canais, isto afeta grandemente o comportamento das trajetórias. Veremos

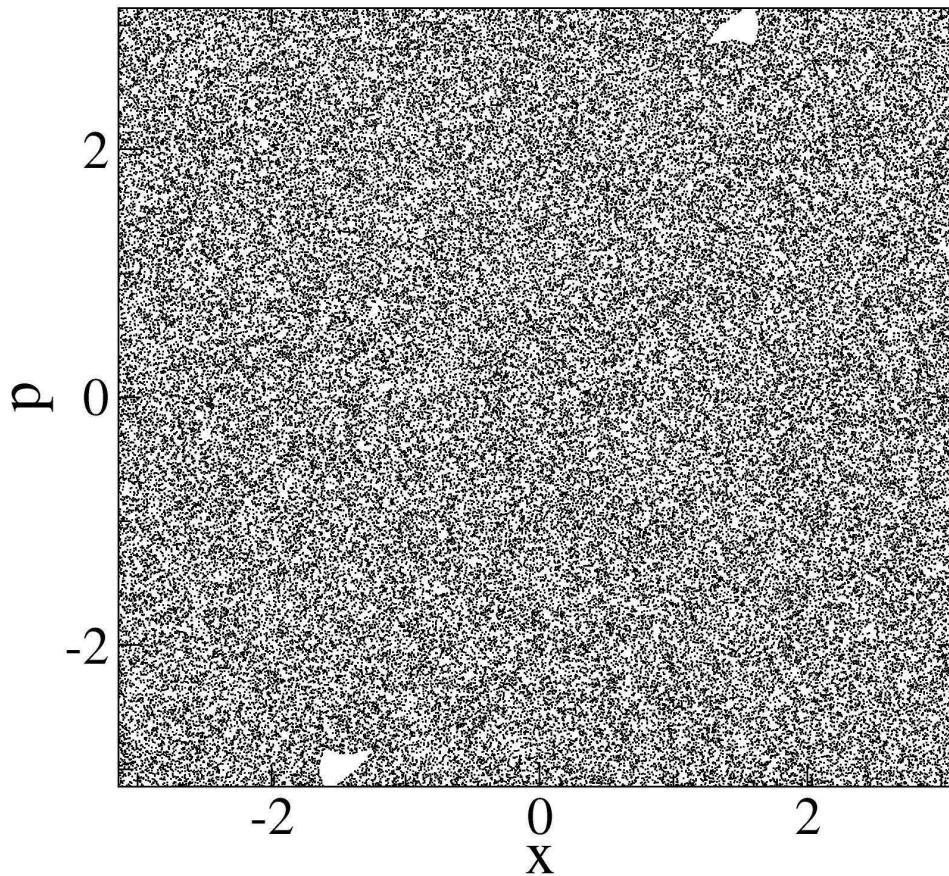


Figura 3.11: Espaço de fase do mapa padrão para $K = 6,0$.

que a travessia da trajetória destes cantori pode ser observada usando o expoente de Lyapunov a tempo finito. Sabe-se que um cantori é sempre formado logo após a quebra de um toro KAM, a quebra do maior toro KAM do mapa padrão ocorre para $K \approx 0,971635406$ (MACKAY et al., 1984). Na figura 3.14(a) mostramos a trajetória antes de atravessar o cantori e 3.14(b) a mesma trajetória após atravessar para $K = 0,98$ (levemente acima do valor crítico). Na figura 3.15(a), podemos ver que a travessia do cantori faz com que o valor máximo da série temporal do Lyapunov tenha um decréscimo de valor ($n \approx 2,5 \times 10^8$). Isto ocorre devido a região do espaço de fase ser mais restritiva após a travessia do cantori.

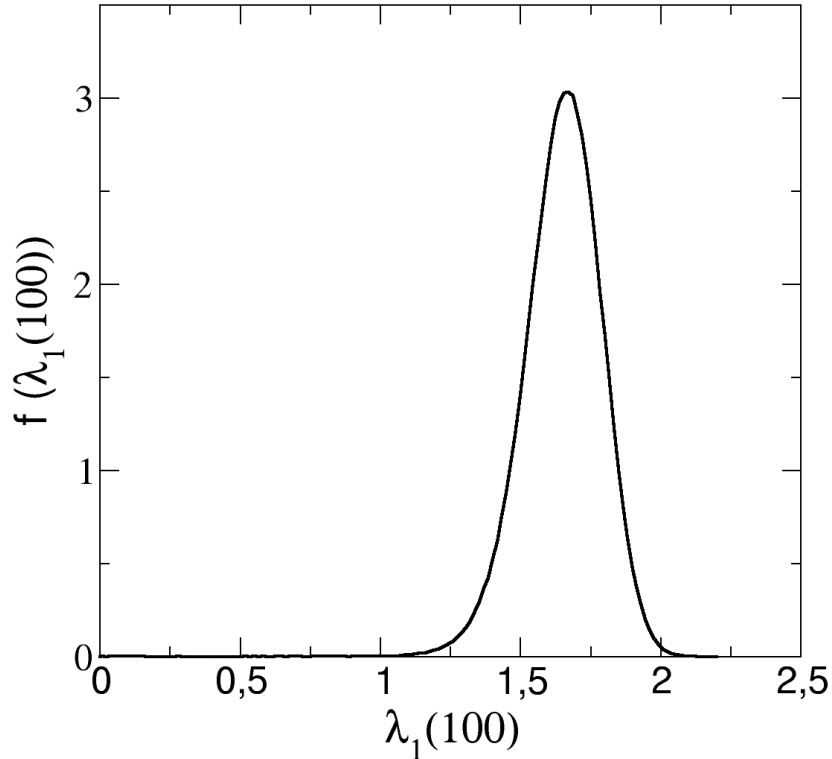


Figura 3.12: Distribuição do Lyapunov a tempo finito do mapa padrão para $K = 6,0$.

Uma importante questão que surge é se os resultados obtidos da distribuição do expoente de Lyapunov a tempo finito dependem do tempo total da trajetória. Para responder esta questão, mostramos na figura 3.16 a distribuição para três intervalos de tempos da trajetória (T) para $K = 1,5$. Vemos que o resultado é indiferente para os tempos totais da trajetória. Este resultado pode ser interpretado da seguinte maneira, uma vez que o tempo seja suficientemente longo para a trajetória visitar uma boa parte de espaço de fase, as propriedades estatísticas do espaço de fase permanecem inalteradas.

Outra questão é se os resultados não são influenciados pelo tempo de amostragem n . Na figura 3.17 mostramos três distribuições para $K = 1,5$ com diferentes tempos de amostragem. Vemos que as distribuições não sofrem nenhuma grande alteração na sua forma.

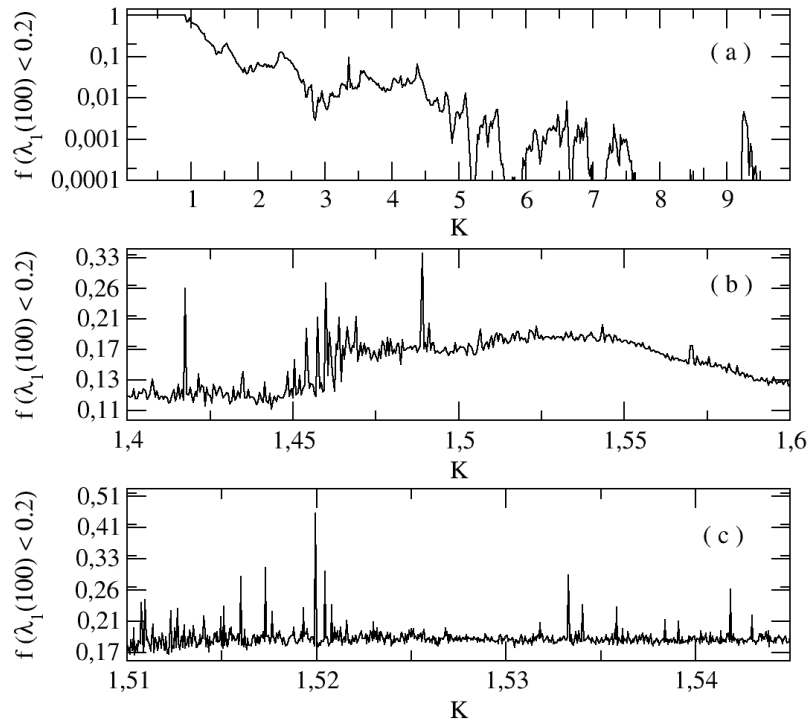


Figura 3.13: Comportamento da distribuição do expoente de Lyapunov em função do parâmetro K .

3.3 O modelo de interação onda-onda espaço-temporal

Após termos mostrado nas seções anteriores dois modelos puramente temporais, agora mostraremos os resultados obtidos da integração das equações (2.41)-(2.44) para o modelo de interação de ondas espacialmente estendidas. Nos próximos resultados apresentados, fixaremos alguns parâmetros e condições iniciais. Caso algum destes valores sejam alterados será explicitado no texto. Abaixo mostramos os valores fixados:

$$\begin{aligned}
 a_{1_0} &= 0,45 + i0,0; & a_{2_0} &= a_{3_0} = a_{4_0} = 0,0 + i0,0 \\
 a_{j_n} &= 0,0 + i0,0; & j &= \{1, 2, 3, 4\} \text{ e } n \neq 0 \\
 v_{g_1} &= 0,0; & v_{g_2} &= 1,0; & v_{g_3} &= -1,0; & v_{g_4} &= -1,0; \\
 r &= 0,0; & \delta_3 &= 0,1; & \delta_4 &= 0,0; & D &= 1,0,
 \end{aligned}$$

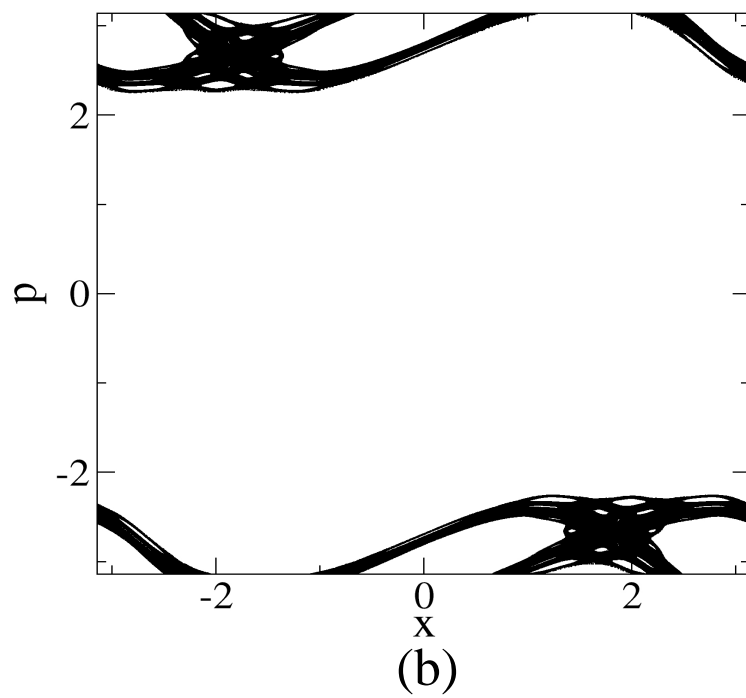
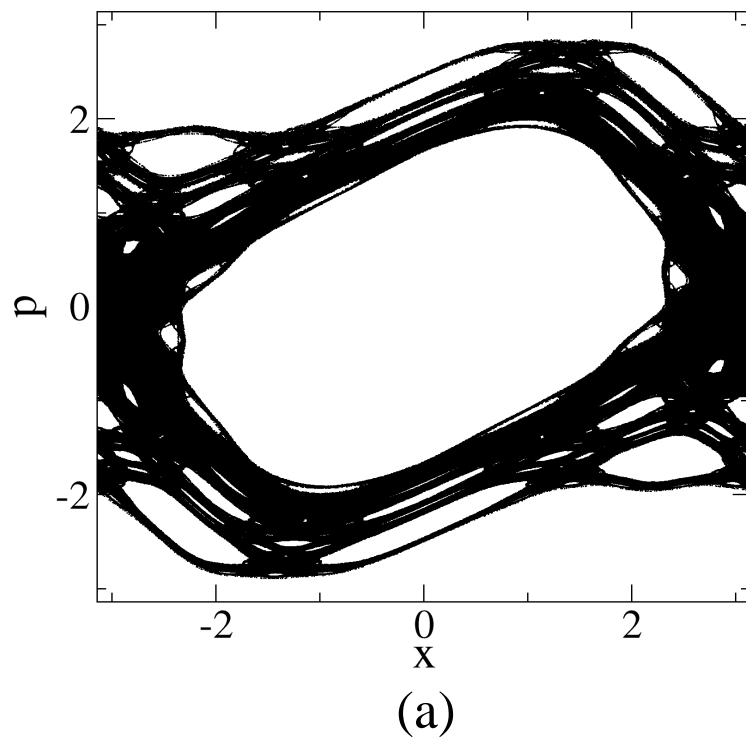


Figura 3.14: Espaço de fase do mapa padrão antes (a) e depois (b) da travessia do último cantori $K = 0,98$.

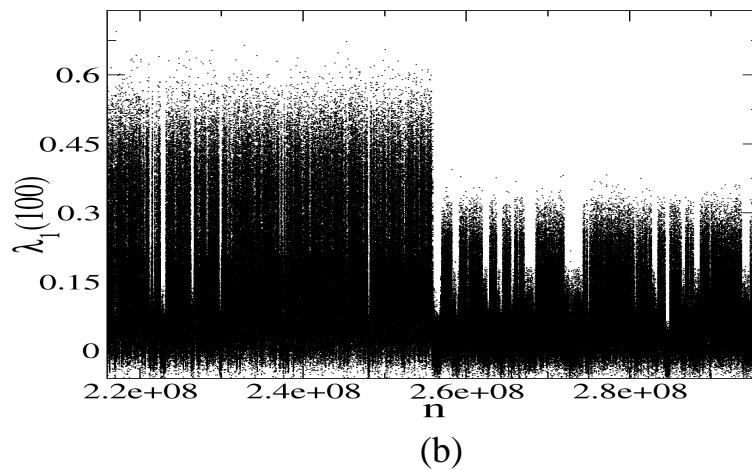
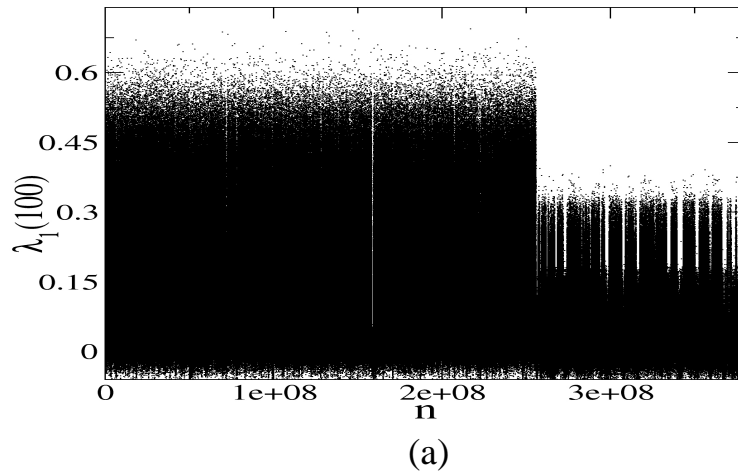


Figura 3.15: (a) Assinatura da travessia do cantori na série temporal do maior expoente de Lyapunov a tempo finito. (b) Uma ampliação da área de travessia.

onde é acrescentada uma pequena semente espacial do tipo $a_{2,\pm 1} = 0,001 + i0,001$. O valor fixado $r = 0,0$ faz desaparecer a dinâmica da quarta onda, e a interação passa a ser de apenas três ondas neste caso. O efeito da quarta onda para o caso com dependência espaço-temporal por enquanto não será analisado. A velocidade de deriva $v_{g1} = 0$ foi tomada sem perda nenhuma de generalidade, pois é sempre possível fazer uma transformação galileana de velocidades, tal que as equações (2.41)-(2.44), não dependam explicitamente de v_{g1} . As velocidades de deriva de v_{g2} e v_{g3} foram tomadas com sinais opostos, este caso é conhecido como regime solitônico (BERS et al., 1976) (devido às soluções de ondas solitárias).

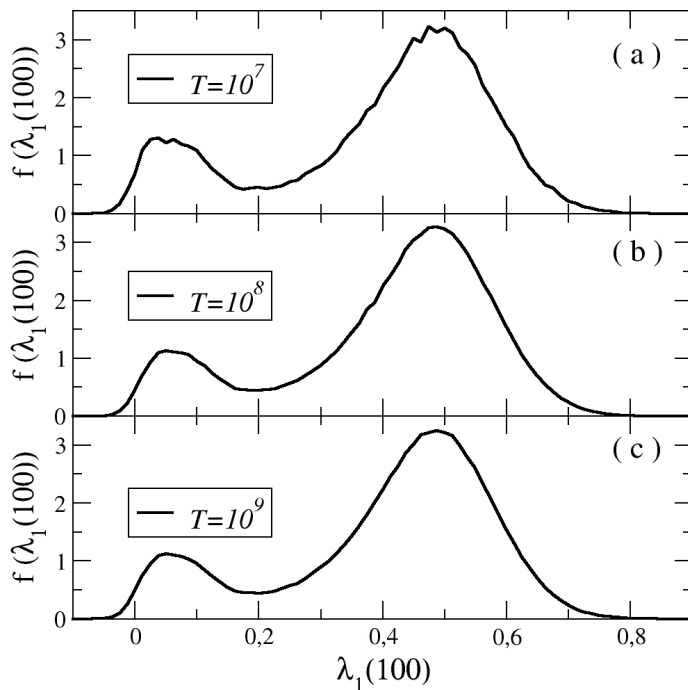


Figura 3.16: Comportamento do expoente de Lyapunov a tempo finito em função do tempo para o cálculo do expoente.

3.3.1 Excitação não linear dos modos espaciais

Os modos $k_{\alpha,0}$ não contém variável espacial e refletem apenas a dinâmica temporal do processo de interação de ondas. Nós podemos fazer uma observação sobre isso no contexto de um espaço de fase de $6N$ dimensões que é comprimido no espaço de Fourier. Assim, na ausência de modos de Fourier com ordem maior que zero, a dinâmica é puramente temporal podendo ser periódica, quasi-periódica ou até caótica, porém sempre representando um estado homogêneo no espaço. Para o caso $v_2 = v_3$, ocorre uma conjugação de fase nas equações de interações de ondas, isto possibilita mostrar que para um estado espacial homogêneo, o espaço de fase completo do sistema fica restrito a um sub-espaço invariante de 3 dimensões. Denominaremos este sub-espaço como variedade homogênea e usaremos o símbolo \mathcal{M} para representá-lo (OTT, 1993). Este subespaço é invariante no sentido em que uma vez que a condição inicial é colocada lá, as trajetórias geradas permanecem em \mathcal{M} para todos os tempos futuros, e sendo assim, somente os modos $k_{\alpha,0}$ são excitados. Conseqüentemente, todos os

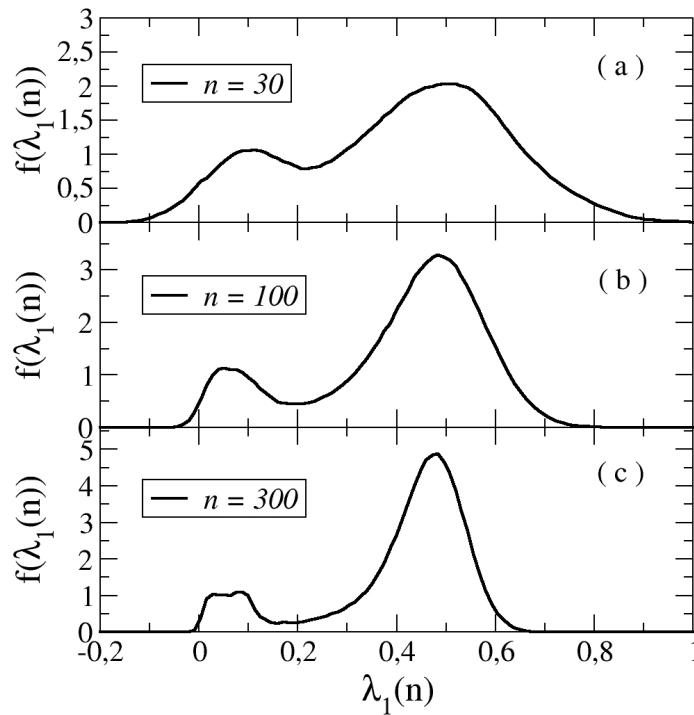


Figura 3.17: Comportamento do expoente de Lyapunov a tempo finito em função do tempo de amostragem para o cálculo do expoente.

modos espaciais não-homogêneos $k_{\alpha,n}$ estão relacionados com as direções transversais a \mathcal{M} .

No gráfico da figura 3.18(a) mostramos uma projeção bidimensional de um subespaço homogêneo das amplitudes $|A_1|$ e $|A_2|$ em função do tempo para $v_{2,3} = -1,5$. Neste caso somente os modos puramente temporais são excitados, como pode ser visto nas séries temporais dos modos $a_{1,0}$ e $a_{2,0}$ nas figuras 3.18(b) e (c) respectivamente. Este último caso é puramente periódico, e pode ser visto na projeção do atrator da figura 3.18(a) que se trata de uma órbita de período 4. Nas figuras 3.18(d) e (e) podemos ver que a dinâmica fora da variedade homogênea é nula, ou seja, não há modos espaciais gerados para este caso.

Um dos pontos principais desta tese é a verificação de que para ocorrer a excitação dos modos espaciais é necessário um comportamento caótico na variedade homogênea. Entretanto, esta é uma condição necessária, porém, não suficiente. Como é ilustrado na projeção do atrator da 3.19(a) para $v_{2,3} = -1,8$, em que consideramos um caso onde a dinâmica é temporalmente caótica, mas os modos espaciais não homogêneos $k_{\alpha,n}$ permanecem inativos. Da figura 3.19(b) e (c) vemos que o comportamento dos modos $a_{1,0}$ e $a_{2,0}$ é essencialmente o que é esperado

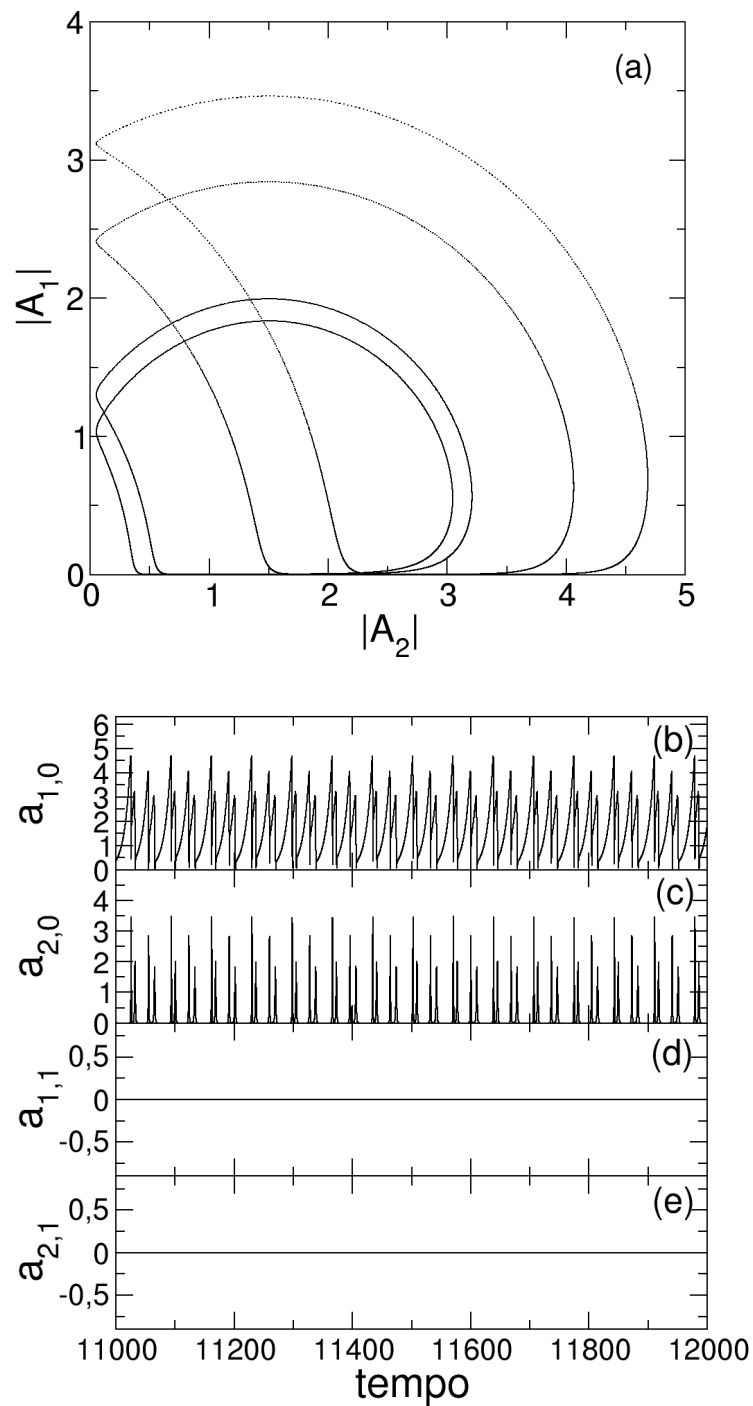


Figura 3.18: (a) Projeção do atrator de baixa dimensionalidade para a seção $|A_1|$ vs. $|A_2|$ do espaço de fase quando $v_1 = 0, 1$ e $v_{2,3} = -1, 5$. (b)-(e) Evolução temporal das amplitudes dos modos de Fourier $a_{\alpha,n}$ para $\alpha = 1, 2$ e $n = 0, 1$.

de um sistema puramente temporal, onde a amplitude da onda 1 tem uma taxa linear v_1 de crescimento, mas devido ao acoplamento quadrático com as ondas 2 e 3, o crescimento da onda 1 eventualmente satura.

Após a onda 1 ter alcançado um valor máximo, ela transfere a energia para as ondas 2 e 3, as quais permanecem praticamente inativas durante o crescimento linear da onda 1, como é mostrado na série temporal da onda $a_{2,0}$, sendo esta conclusão também válida para a onda $a_{3,0}$. Quando o modo de amplitude $a_{1,0}$ decai abruptamente, as amplitudes das ondas $a_{2,0}$ e $a_{3,0}$ crescem e caem rapidamente na forma de picos de amplitudes. Após estes picos as ondas 2 e 3 devolvem a energia para a onda 1, a qual cresce novamente e este processo se repete sucessivas vezes formando basicamente o processo da interação. Dependendo dos valores do parâmetro $v_{2,3}$ ambos os valores de máximo e o intervalo de picos entre as amplitudes variam caoticamente. De acordo com as figuras 3.19(d) e (e) os modos $a_{1,1}$ e $a_{2,1}$, respectivamente, se anulam como no caso periódico anterior.

Se diminuirmos ainda mais a taxa de decrescimento ($v_{2,3} = -3,6$), além da dinâmica dos modos homogêneos permanecerem caóticos, agora os modos espaciais passam a ser excitados ver na figura 3.20(a). O crescimento linear e o decaimento não linear da onda $a_{1,0}$ são seguidos por picos nas ondas $a_{2,0}$ e modos espaciais nas ondas $a_{1,1}$ e $a_{2,2}$ [figuras 3.20(b)-(e)]. Os picos das amplitudes espaciais são sincronizados com os picos das amplitudes temporais, mostrando que a geração dos modos espaciais está conectada com o processo do decaimento da onda 1 na variedade homogênea. O fato dos modos espaciais permanecerem inativos nos casos anteriores pode ser interpretado considerando que os modos espaciais são transversalmente estáveis com relação à variedade homogênea. Em outras palavras, qualquer perturbação que seja transversal à variedade homogênea converge exponencialmente para \mathcal{M} . Entretanto, no caso mostrado na figura 3.20, os modos espaciais perderam a estabilidade transversal e a energia das ondas é distribuída ao longo dos modos temporais e espaciais, provocando a formação de padrões espaciais. Enfatizamos que a variedade homogênea deve ser necessariamente caótica para fornecer um mecanismo gerador de modos espaciais.

Um outro ponto de vista da variedade homogênea surge se consideramos as amplitudes dos modos $a_{\alpha,n}$ como sendo uma rede de osciladores acoplados no espaço, de tal forma que um comportamento caótico apenas na variedade homogênea (i.e. sem excitação de modos espaciais) corresponderia a um estado espacialmente sincronizado. Para medirmos tal sincronização, discretizaremos o espaço real em N pontos fixos x_i ¹ e usaremos a seguinte notação: $|A_{\alpha}(i,t) = A_{\alpha}(x = x_i,t)|$. Conseqüentemente, a condição para esta rede de N pon-

¹Lembrando que N corresponde ao número de modos da expansão da série de Fourier

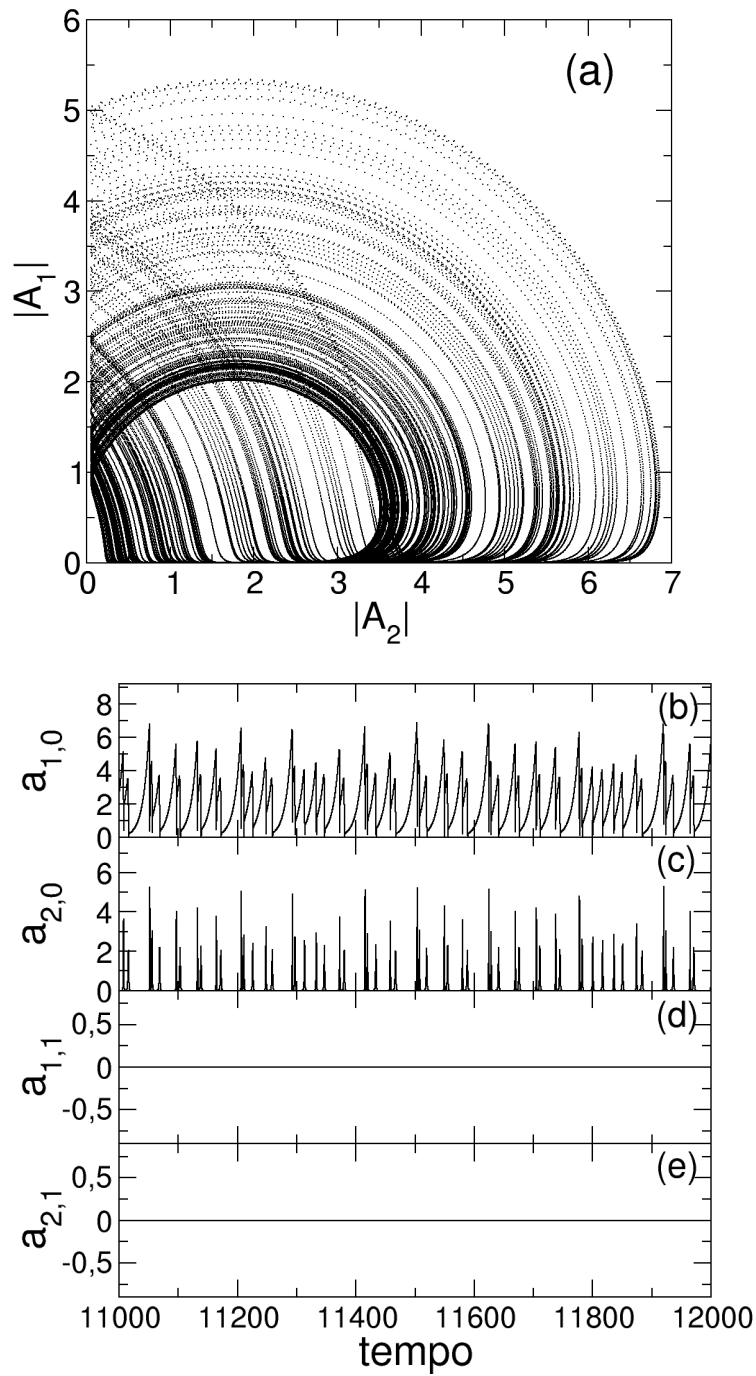


Figura 3.19: (a) Projção do atrator de baixa dimensionalidade para a seção $|A_1|$ vs. $|A_2|$ do espaço de fase quando $\nu_1 = 0, 1$ e $\nu_{2,3} = -1, 8$. (b)-(e) Evolução temporal das amplitudes dos modos de Fourier $a_{\alpha,n}$ para $\alpha = 1, 2$ e $n = 0, 1$.

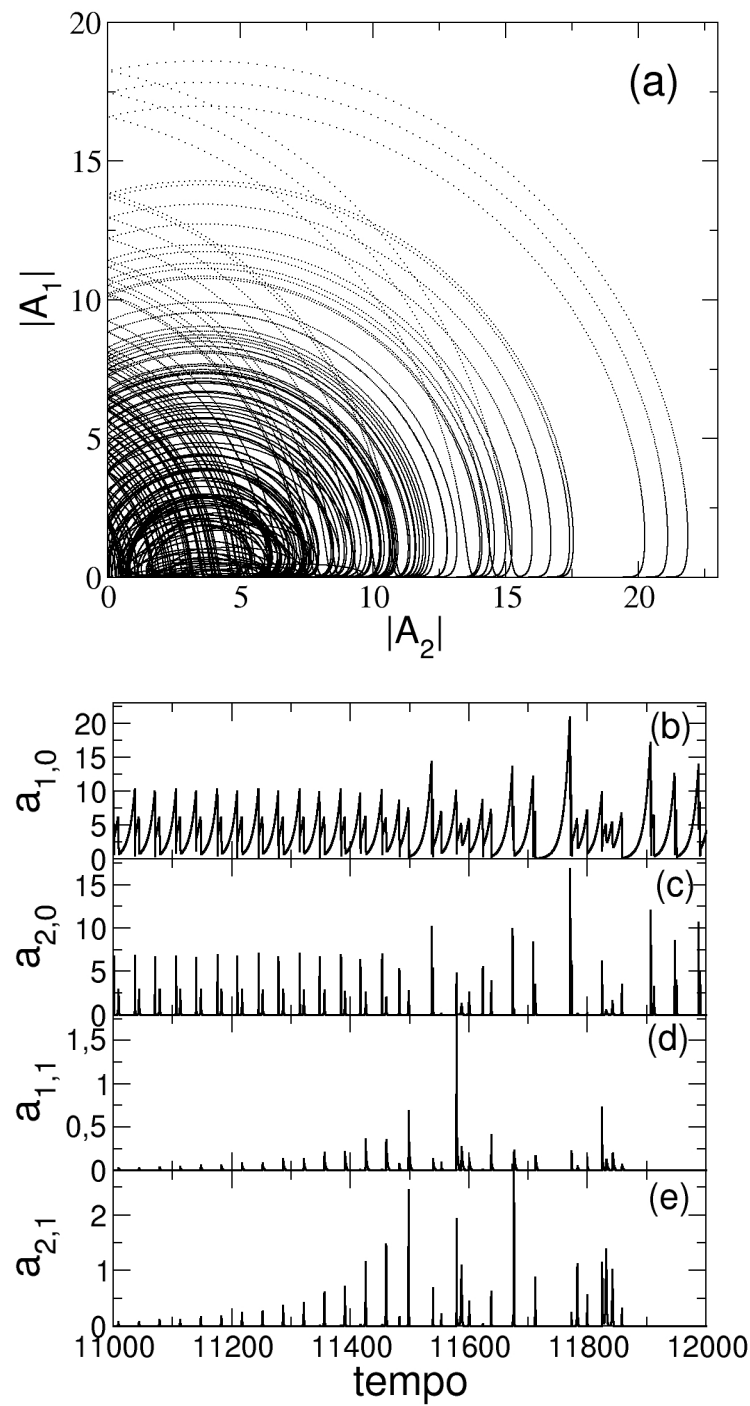


Figura 3.20: (a) Projeção do atrator para a seção $|A_1|$ vs. $|A_2|$ do espaço de fase quando $v_1 = 0, 1$ e $v_{2,3} = -3, 6$. (b)-(e) Evolução temporal das amplitudes dos modos de Fourier $a_{\alpha,n}$ para $\alpha = 1, 2$ e $n = 0, 1$.

tos estar completamente sincronizada é dada por (JOSIC, 1998):

$$A_\alpha(1,t) = A_\alpha(2,t) = \dots = A_\alpha(N,t), \quad (3.2)$$

para qualquer tempo. Uma forma de evidenciarmos visualmente estes estados sincronizados, é fazendo um gráfico de $|A_\alpha(i,t)|$ em função de $|A_\alpha(j,t)|$ para $i \neq j$. Conseqüentemente, estados sincronizados para um determinado tempo, de acordo com a condição (3.2), corresponderão a um ponto de uma reta com inclinação de 45 graus, por outro lado, qualquer ponto fora desta reta será um estado não sincronizado pois $A_\alpha(i,t) \neq A_\alpha(j,t)$. Este gráfico é mostrado nas figuras 3.21(a) e (b), onde no eixo das abscissas foi escolhido $i = 1$ e no eixo das ordenadas a sobreposição² dos pontos de $j = 2, \dots, N$. Podemos ver claramente que as figuras 3.21(a) e (b) correspondem a um estado sincronizado e um não sincronizado, respectivamente. Salientamos, que no primeiro caso a dinâmica está inteiramente restrita a variedade homogênea, enquanto no segundo caso a perda de sincronização do espaço está relacionada com a perda da estabilidade transversal da variedade homogênea.

Gráficos espaço temporais também foram feitos para distinguir tais regimes. Na figura 3.22(a) o caso de estados sincronizados é facilmente observado como perfis planos no espaço evoluindo caoticamente no tempo, como no caso caótico que permanecia restrito na variedade homogênea. Já no caso seguinte, na figura 3.22(b), mostramos um caso logo após a perda da estabilidade transversal, onde começam a surgir pequenas oscilações espaciais devido à excitação de modos espaciais de ordem mais baixa, caracterizando o início dos estados caóticos espaço-temporais. Se aumentarmos ainda mais as taxas de crescimento e decrescimento (em valor absoluto) um número maior de modos são excitados como mostrado na figura 3.22(c).

3.3.2 A perda de estabilidade transversal da dinâmica homogênea

O mecanismo exato da perda de estabilidade da variedade homogênea permanece vago no sentido de que o espaço de fase do nosso sistema tem muitas dimensões para usarmos a análise de estabilidade linear. Em sistemas de baixa dimensionalidade esta perda de estabilidade têm sido descrito devido a bifurcações de sela-nó, transcricas ou forquilha (ZIMIN et al., 2003). Para fazermos o mesmo, precisaríamos saber primeiramente qual é a órbita que perde estabilidade transversal, e em seguida atribuir uma forma normal à dinâmica transversal desta órbita. Como a priori não temos como fazer este procedimento, devemos recorrer a meios

²Ao invés de fixarmos variável j a um valor fixo fizemos a sobreposição de 2 até N de tal forma que a condição de sincronização da equação (3.2) seja completamente satisfeita.

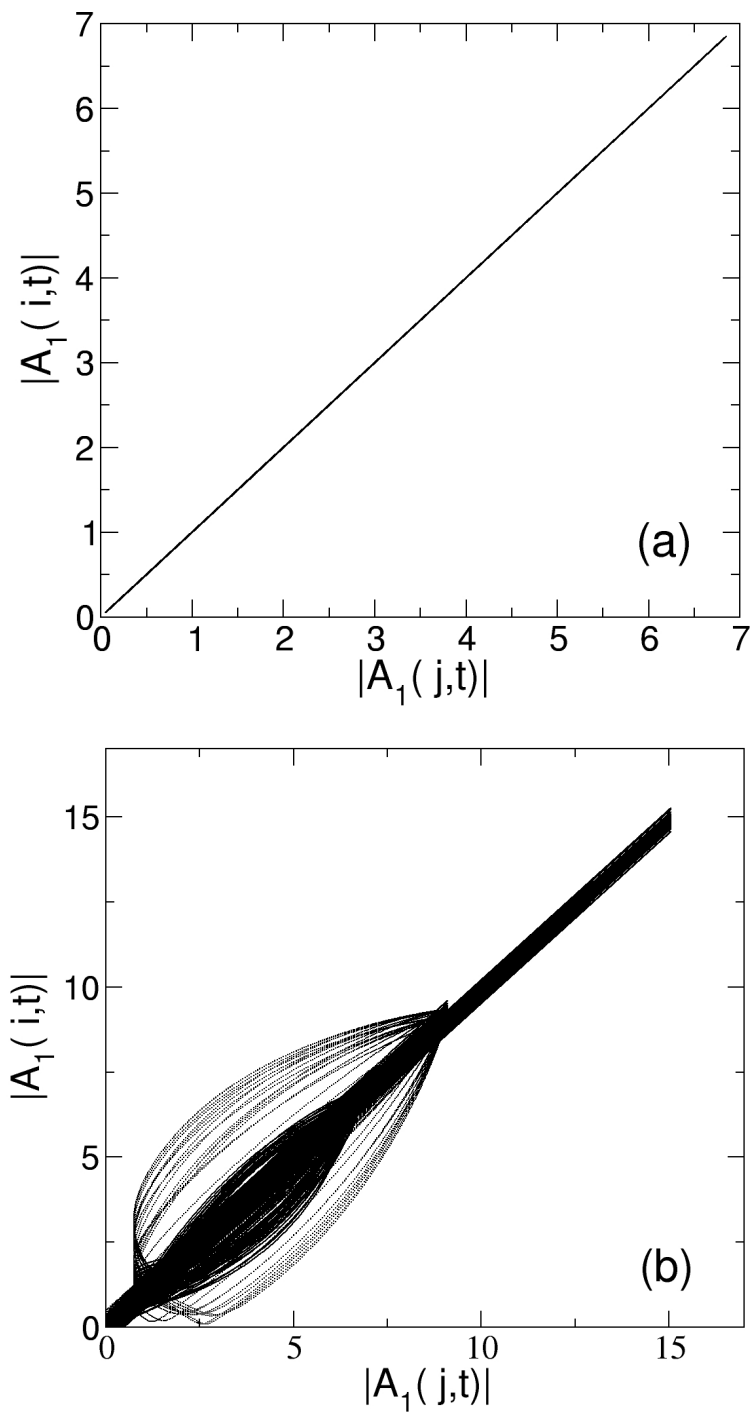


Figura 3.21: Sobreposição dos gráficos de retorno de $|A_1(i,t)|$ vs. $|A_1(j,t)|$, onde $x_i = x_1$ e $x_j, j = 2, 3, \dots, N$, são os distintos pontos pertencentes da rede espacial. (a) $v_{2,3} = -1, 8$; (b) $v_{2,3} = -3, 6$.

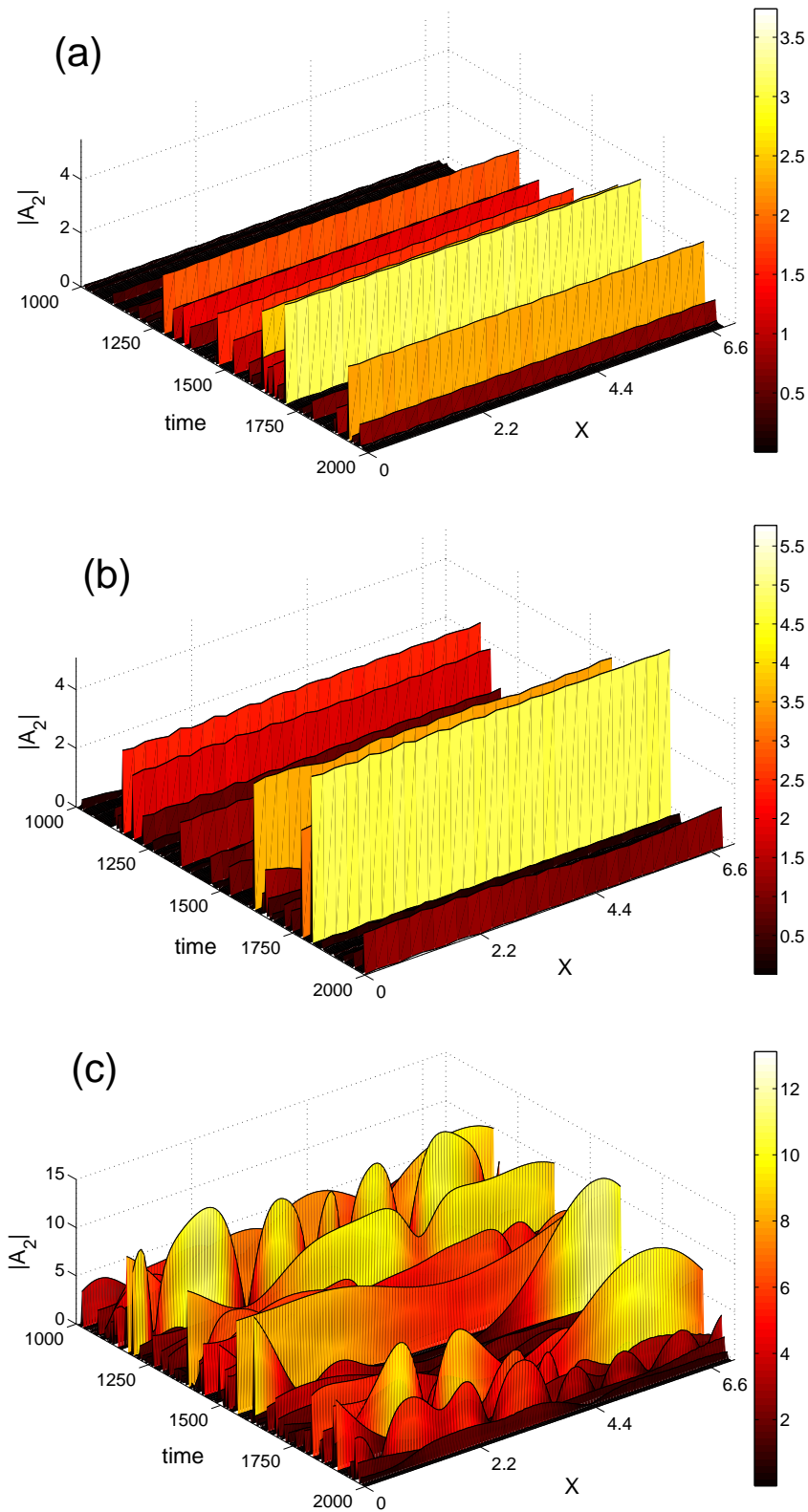


Figura 3.22: Gráficos espaço-temporais da amplitude $|A_2|$ quando (a) $v_1 = 0, 1, v_{2,3} = -1, 8$; (b) $v_1 = 0, 1, v_{2,3} = -3, 6$; (c) $v_1 = 0, 5, v_{2,3} = -7, 0$.

indiretos de evidenciar o início da excitação dos modos espaciais via perda da estabilidade transversal da variedade homogênea.

Um destes critérios recai na observação feita na seção anterior, de que a perda da estabilidade transversal está ligada com a perda da sincronização espacial. Existem várias formas de se diagnosticar esta perda de sincronização. Neste caso, escolhemos o parâmetro de ordem complexo que foi introduzido por Kuramoto (KURAMOTO, 2003),

$$z_\alpha(t) = R_\alpha(t) \exp(i\Phi_\alpha(t)) \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=-(N/2)+1}^{N/2} \exp(i\phi_{\alpha,n}(t)), \quad (3.3)$$

onde $R_\alpha(t)$ e $\Phi_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, 3$, são as amplitudes e ângulos, respectivamente, de um vetor de fase para cada um dos N pontos da rede espacial. Se tomarmos a média temporal do parâmetro de ordem,

$$\overline{R_\alpha} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{n=0}^T R_\alpha(t) dt, \quad (3.4)$$

é computada ao longo de um tempo suficientemente longo tal que o estado assintótico do sistema tenha sido alcançado.

Um estado espacialmente sincronizado, correspondendo a uma dinâmica puramente temporal restrita à variedade homogênea, é caracterizada por $\overline{R_\alpha} = 1$, implicando que todos os vetores de fases estão sobrepostos coerentemente com mesma amplitude para todos os instantes de tempo e para todos os pontos da rede. Um valor mais baixo de $\overline{R_\alpha}$ indica uma menor coerência espacial no estado do sistema. Conseqüentemente, a perda de sincronização em um sistema é um critério para o surgimento de estados espaciais, o que é seguido pela perda da estabilidade transversal da variedade homogênea.

Nas figuras 3.23(a) e (b) é mostrado um diagrama de bifurcação da amplitude $|A_1(1, t)|$, e a média temporal do parâmetro de ordem $\overline{R_1}$ para a onda 1, respectivamente, em função da taxa de decréscimo $\nu_{2,3}$ das ondas 2 e 3. Dentro da precisão numérica, os estados homogêneos do espaço são estáveis para valores da taxa de decréscimo maiores que $\nu_{CR} \approx -1,96$, sendo que a partir deste valor $\overline{R_1}$ deixa de ser igual a um, ver figura 3.23(b). A dinâmica da variedade homogênea pode ser periódica ou caótica dependendo do valor da taxa de decréscimo, como pode ser visto na figura 3.23(a). A órbita inicia-se com período-1 para pequenos valores de $|\nu_{2,3}|$ e sofre uma cascata de duplicação de período até as bandas caóticas desaparecerem devido a uma crise e é seguida por uma janela de período-3. A perda de estabilidade transversal da variedade homogênea ocorre logo após as três bandas do atrator caótico sofrerem uma crise interna e fundirem em uma única grande órbita caótica em ν_{CR} .

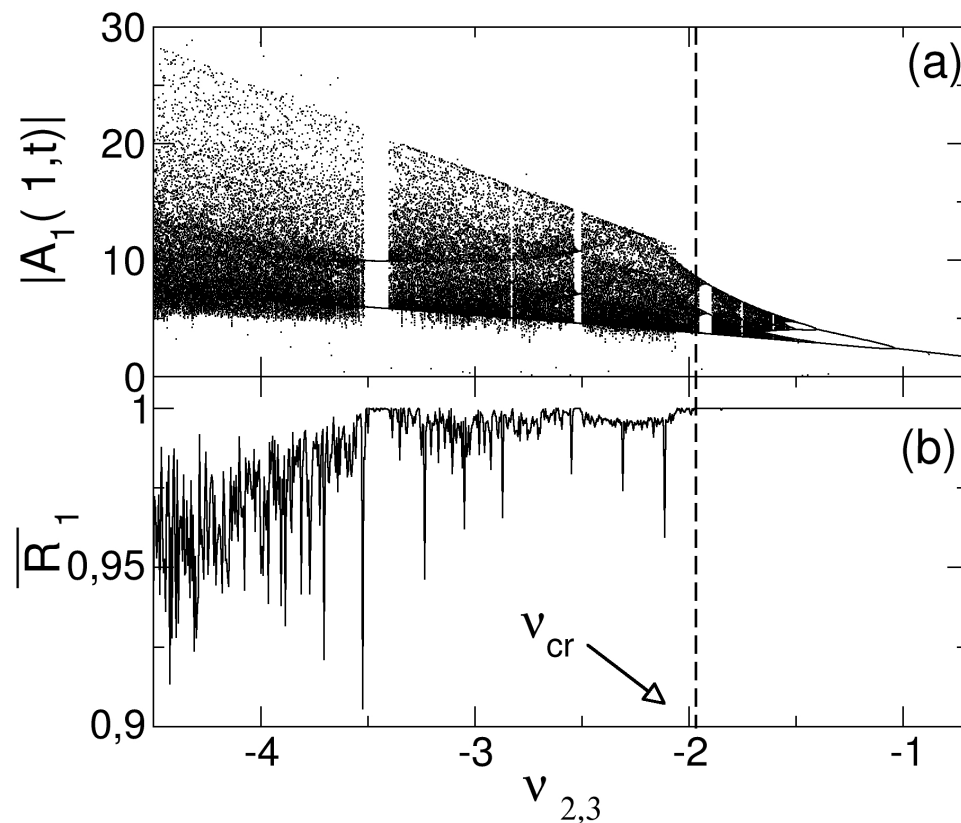


Figura 3.23: (a) Diagrama de bifurcação para $|A_1(1,t)|$ em função da taxa de decaimento $v_{2,3}$. (b) Média temporal do parâmetro de ordem da onda 1 versus a taxa de decaimento. Foram computadas órbitas de comprimento $T = 2 \times 10^5$ e retiradas 10^4 iteradas de transiente.

A dinâmica para $v_{2,3} < v_{CR}$ é predominantemente caótica, com pequenos intervalos de janelas periódicas que podem ser vistas na figura 3.23(a). Ao mesmo tempo, a maior parte da dinâmica caótica está associada com a excitação dos modos espaciais, implicando que o parâmetro de ordem seja diferente de um na figura 3.23(b). É válido enfatizar que o comportamento caótico da variedade homogênea é uma condição necessária para a geração dos modos espaciais, o que pode ser visto claramente na ampliação do diagrama de bifurcação figura 3.24(a), quando a órbita se torna periódica obtemos $\overline{R_1} = 1$ (ver figura 3.24). Imersos no interior do diagrama de bifurcação mostrados na figura 3.23(a) existem diversas janelas periódicas microscópicas, uma das quais é mostradas na figura 3.25(a). Uma outra conclusão que tiramos da figura 3.25(b), é que mesmo em regiões caóticas o parâmetro de ordem é eventualmente igual um, ou seja, sem modos no espaço. Esta conclusão está de acordo com a que obtivemos

para séries temporais das figuras 3.19(b)-(e), quando mostrávamos uma série caótica no tempo, porém, sem geração de modos espaciais.

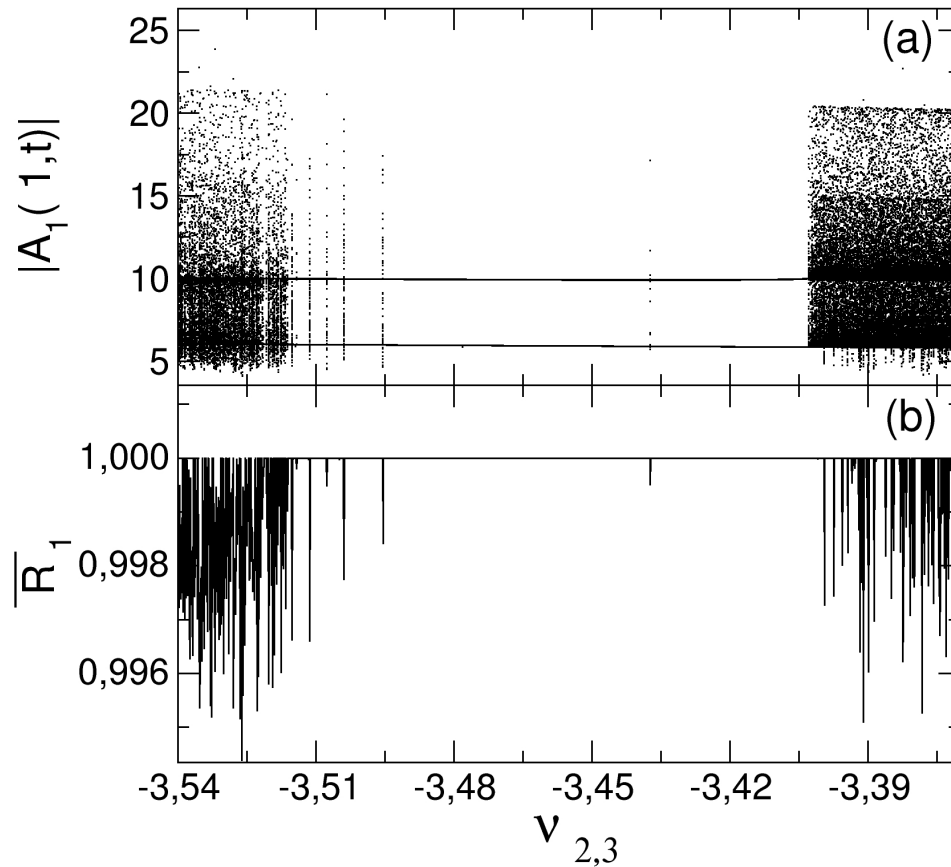


Figura 3.24: (a) Ampliação de uma janela periódica do diagrama de bifurcação para $|A_1(1,t)|$ em função da taxa de decrescimento $\nu_{2,3}$. (b) Média temporal do parâmetro de ordem da onda 1 versus a taxa de decrescimento.

Uma segunda verificação numérica da perda da estabilidade de transversal de \mathcal{M} , é o cálculo do espectro de Lyapunov de todo o espaço de fase. Sendo que cada modo de Fourier para cada uma das três ondas complexas da interação corresponde a um grau de liberdade do espaço, teremos $6N$ expoentes de Lyapunov, que são computados através da reortonormalização de Gram-Schmidt. Da evolução temporal dos $6N$ expoentes de Lyapunov mostramos os três maiores do espectro na figura 3.26. Como vimos anteriormente, para o caso puramente temporal com $\nu_2 = \nu_3$ a variedade homogênea é tridimensional. Sendo assim, para este caso a variedade homogênea \mathcal{M} admite um único expoente de Lyapunov positivo.

Quando o parâmetro de controle $\nu_{2,3}$ assume valores para os quais a variedade homogênea é não caótica [figura 3.26(a)], os três maiores expoentes de Lyapunov decaem a zero com uma

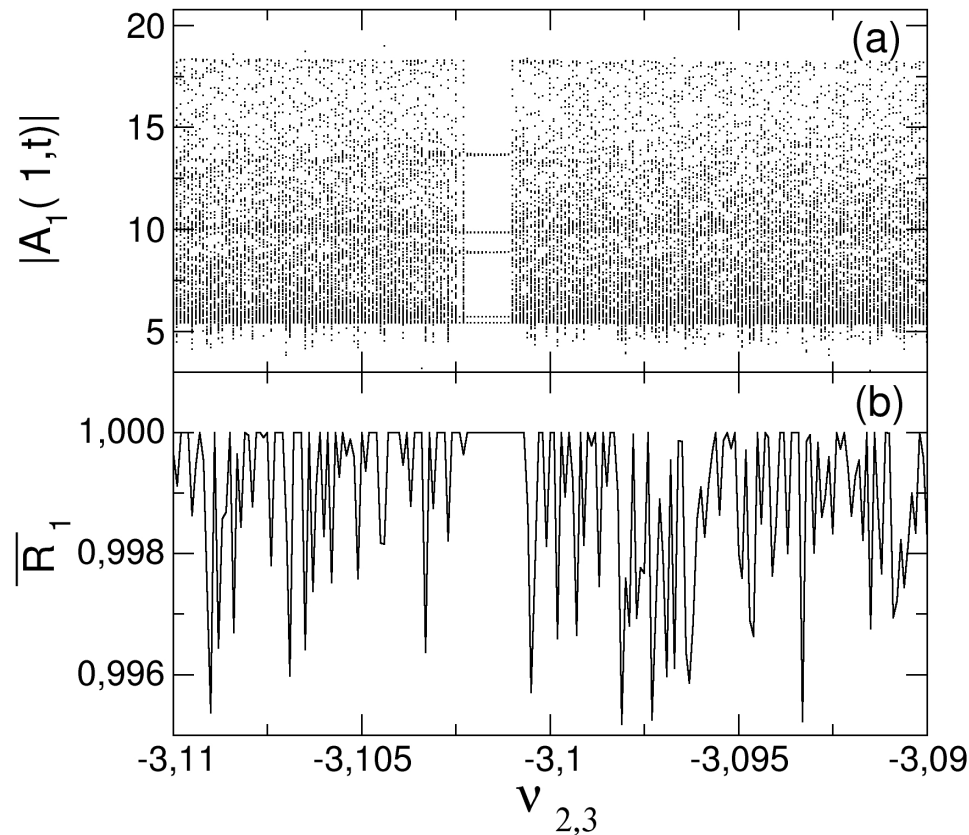


Figura 3.25: (a) Ampliação de uma janela periódica microscópica do diagrama de bifurcação para $|A_1(1,t)|$ em função da taxa de decaimento $\nu_{2,3}$. (b) Média temporal do parâmetro de ordem da onda 1 versus a taxa de decaimento.

lei de potência, o que é um indicativo que estes valores são nulos assintoticamente. Enquanto o desaparecimento do primeiro expoente já era esperado, a convergência dos outros dois expoentes é uma confirmação que a variedade homogênea é transversalmente estável para $\nu_{2,3} > \nu_{CR}$. Esta conclusão é confirmada quando $\lambda_1 > 0$ e a dinâmica da variedade homogênea é caótica, como visto na figura 3.26(b). Quando o valor ν_{CR} é escolhido em uma região onde ocorre a existência de modos espaciais, os dois maiores expoentes de Lyapunov são positivos como pode ser visto na figura 3.26(c). Indicando que, além da dinâmica temporal da variedade homogênea ser caótica, algumas órbitas perderam a sua estabilidade transversal. Por último, na figura 3.26(d), mostramos um caso onde caos espaço-temporal está mais desenvolvido. Neste caso, além dos dois maiores expoentes de Lyapunov serem positivos, podemos ver que o terceiro deixa de convergir para zero. Este resultado indica que, possivelmente, mais de uma direção transversal perdeu sua estabilidade.

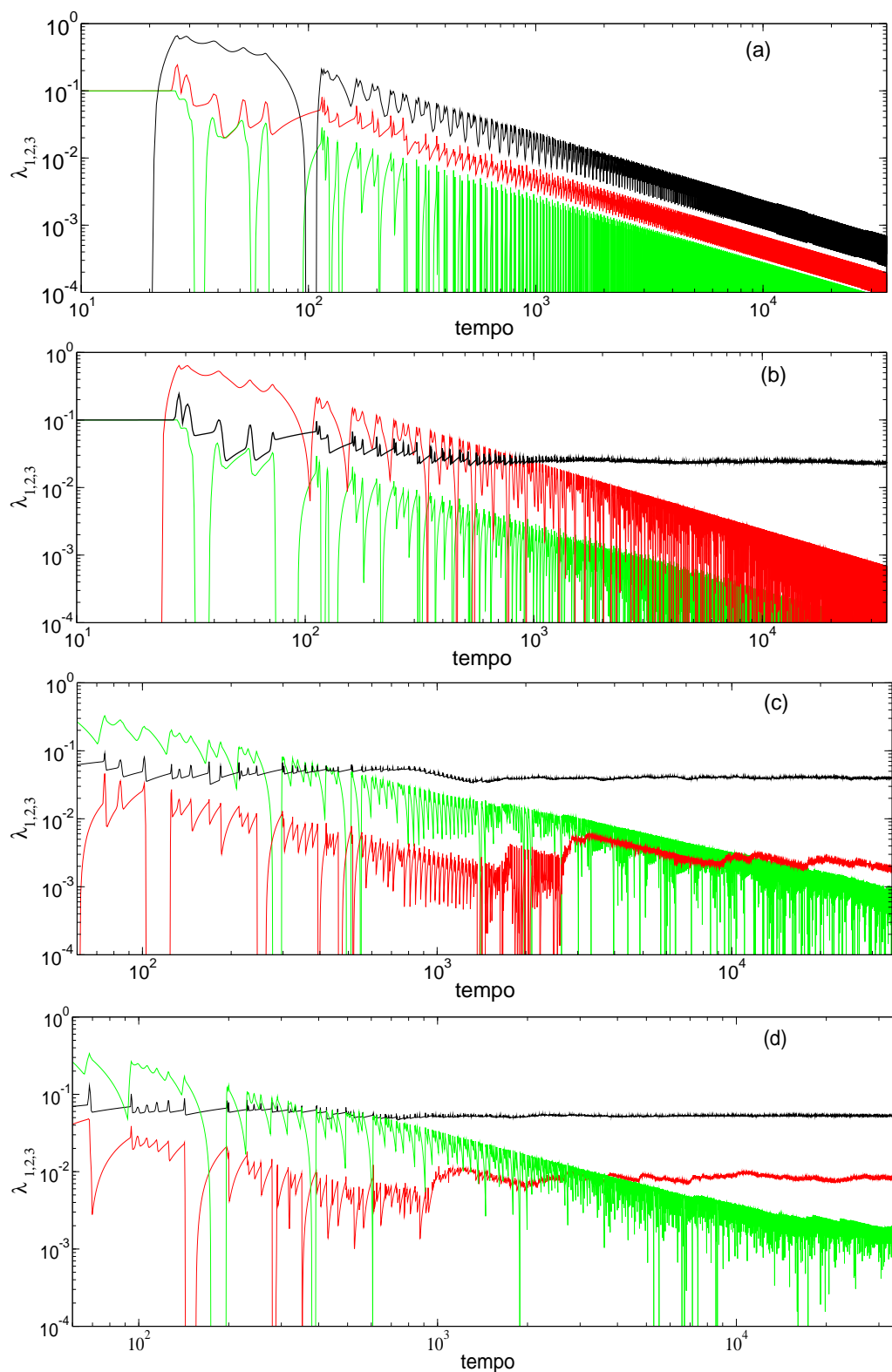


Figura 3.26: Evolução temporal dos três maiores expoentes de Lyapunov. As taxas de crescimento e decréscimo usadas foram (a) $v_1 = 0, 1, v_{2,3} = -1, 5$; (b) $v_1 = 0, 1, v_{2,3} = -1, 8$; (c) $v_1 = 0, 1, v_{2,3} = -3, 6$; (d) $v_1 = 0, 1, v_{2,3} = -5, 8$.

3.3.3 Intermitência On-Off e transição caos espaço-temporal

Nesta seção veremos a relação entre a perda da estabilidade transversal e intermitência on-off. Antes da transição $v_{2,3} > v_{CR}$, a dinâmica temporal é caótica ou periódica, ficando confinada na variedade homogênea \mathcal{M} . Após a transição, as órbitas próximas à variedade \mathcal{M} sofrem estouros que as fazem se afastar da variedade homogênea devido à excitação dos modos espaciais [ver figura 3.21(b)]. Tais excursões, entretanto, são limitadas e as órbitas acabam retornando às vizinhanças de \mathcal{M} , e a órbita permanece lá por algum tempo até sofrer um estouro novamente. Um exemplo representando este comportamento é mostrado na figura 3.27(a), na qual traçamos a evolução temporal da amplitude do espacial de Fourier $|a_{2,1}|$. A série salta de zero para valores diferentes em determinados intervalos de tempo, representando os estouros que forçam a variedade homogênea através da excitação não linear dos modos espaciais.

Os intervalos onde não há modos espaciais correspondem à inatividade, ou ainda a intervalos de tempo no qual a dinâmica permanece na vizinhança da variedade homogênea até sofrer uma dinâmica caótica transiente. Como indicado na figura 3.27(a), denotaremos τ_i como sendo o intervalo de tempo entre estes estouros. Sendo que estes intervalos de tempos variam grandemente, é conveniente definirmos uma distribuição de frequências $P(\tau)$, tal que $P(\tau)d\tau$ representa o número de intervalos entre os estouros entre τ e $\tau + d\tau$. Na figura 3.27(b) descreveremos os resultados numéricos para esta distribuição de probabilidade obtida para uma trajetória iterada para um longo período ($t = 4 \times 10^6$). Para a taxa de decrescimento $v_{2,3}$ foram usados os mesmos valores das seções anteriores no qual iniciava-se a excitação dos modos espaciais.

A distribuição se comporta como uma lei de potência para pequenos valores de período entre estouros e como uma exponencial para grandes períodos. O ajuste não linear para os resultados numéricos é

$$P(\tau) = c_0 \tau^{-3/2} e^{-c_1 \tau} + c_2 e^{-c_3 \tau}. \quad (3.5)$$

O expoente $-3/2$ na lei de potência do ajuste não linear é uma assinatura universal da chamada intermitência on-off, a qual foi inicialmente achada para sistemas de baixa dimensionalidade (PLATT et al., 1993; HEAGY et al., 1994). A cauda ruidosa da figura 3.27(b) é uma característica de sistemas ruidosos atravessando uma bifurcação on-off.

A bifurcação on-off ocorre quando um sistema dinâmico, possuindo uma variedade invariante caótica, está próxima a um ponto de bifurcação e, por algum motivo, o parâmetro de bifurcação varia de alguma forma irregular (PLATT et al., 1993). Assim, o sistema alterna entre estados de inatividade, com parâmetros pré-bifurcação, para um estado com estouros para os

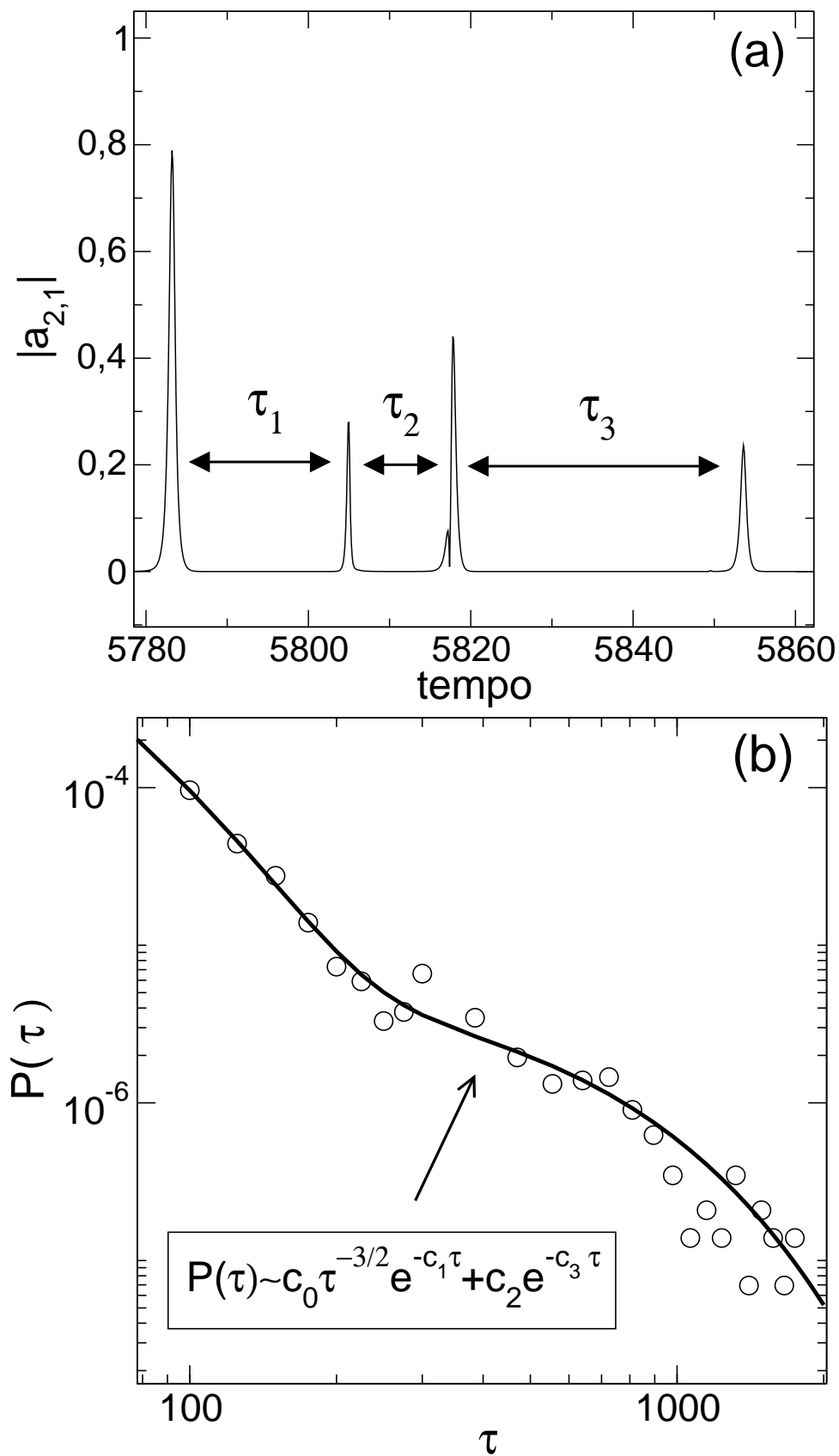


Figura 3.27: (a) Evolução temporal do modo espacial de Fourier $|a_{2,1}|$ e representação dos intervalos de τ_i entre os estouros para $\nu_{2,3} = -3, 6$. (b) Distribuição de probabilidade dos intervalos τ_i para $\nu_{2,3} = -3, 6$.

casos pós-bifurcação. No nosso sistema conjecturamos que para está transição ocorrer, uma órbita periódica instável deve perder sua estabilidade transversal através de uma bifurcação. Devido à característica de uma randomicidade intrínseca da dinâmica caótica (na variedade homogênea), a dinâmica transversal é forçada de tal maneira que o sistema atravessa flutuações e eventualmente passa por um ponto de bifurcação.

A existência de intermitência on-off associada à excitação dos modos espaciais revela muitas características interessantes deste sistema dinâmico. Concluimos o papel fundamental da órbita caótica na variedade homogênea para a excitação dos modos espaciais. Quando isto ocorre, eventualmente uma órbita periódica instável, no interior de \mathcal{M} , perde sua estabilidade transversal. Conseqüentemente, surge um processo intermitente chamado on-off, onde esporadicamente a órbita é ejetada da variedade homogênea. Porém, a órbita retorna à vizinhança da variedade \mathcal{M} , indicando que esta volta a ser transversalmente estável.

3.3.4 Efeito da difusão na limitação na geração de modos espaciais

A análise anterior foi realizada para um modesto número de modos de Fourier ($N = 32$). Nossos resultados foram comparados com $N = 256$ modos e não manifestam qualquer diferença quantitativa para o surgimento do caos espaço temporal (ver figura 3.28). Isto não é surpreendente, já que no início na geração de modos espaciais, a energia se concentra inicialmente na variedade homogênea e gradualmente começa a ser transferida para os modos baixos espaciais. Este cenário só esperamos ser alterado quando estivermos em uma região de caos espacial mais desenvolvida, onde a forte interação entre as várias diferentes escalas espaciais leva a uma rápida redistribuição de energia para os menores comprimentos de ondas, tal que o uso de um grande número N de modos de Fourier se torne necessário.

Um dos pontos chaves envolvidos em um processo da geração de uma turbulência mais desenvolvida é a redistribuição de energia entre os modos com menor e maiores comprimentos de onda. Está redistribuição de energia fica evidente quando consideramos a média espectral como sendo (LOPES; RIZZATO, 1999):

$$\sqrt{\langle N^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 n^2 |a_{\alpha,n}|^2}{\sum_{n=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 |a_{\alpha,n}|^2}}. \quad (3.6)$$

A evolução temporal desta média espectral é mostrada na figura 3.28 para 32 e 256 modos. Como foi dito acima, apesar das evoluções para ambos os números de modos serem diferentes quantitativamente, a tendência geral é a mesma, com pequenos intervalos de tempos entre os

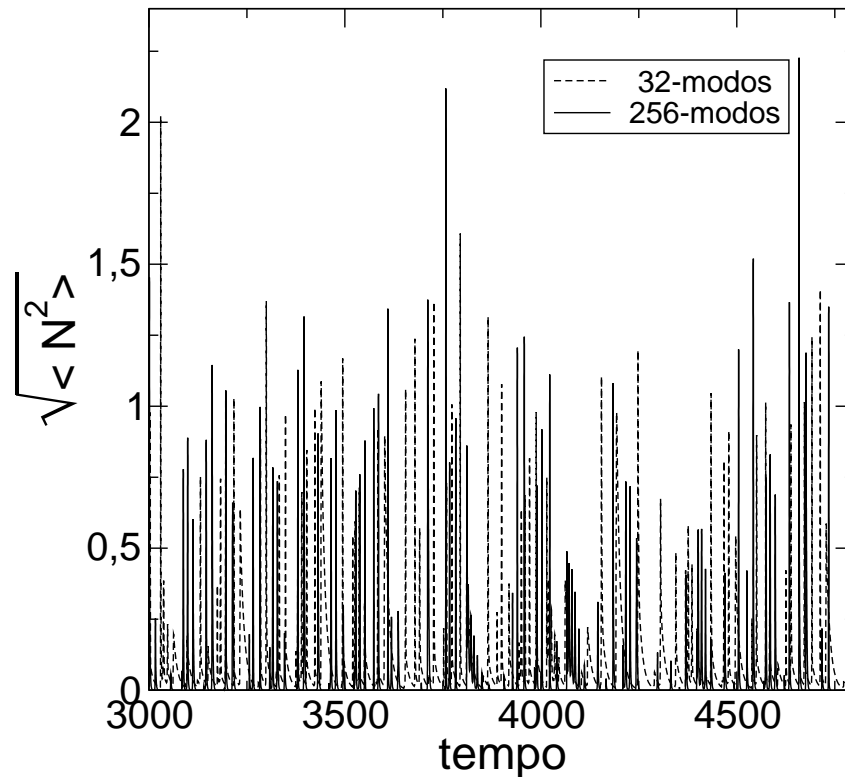


Figura 3.28: Média espectral em função do tempo para diferentes números de modos de Fourier. Usamos os seguintes valores $D = 1, 0$; $\nu_1 = 0, 1$ e $\nu_{2,3} = -4, 5$.

estouros. Estes estouros correspondem aos instantes em que a energia da dinâmica caótica da variedade homogênea é distribuída aos modos espaciais. Ressaltamos que o exato momento onde ocorrem estes estouros é irrelevante, no sentido que estaremos mais interessados em suas propriedades estatísticas para longos períodos de tempo. Porém, estas propriedades só devem permanecer válidas no início da geração dos modos espaciais, quando o número de excitação de modos espaciais é pequeno. Conforme fomos progredindo para um caso onde o caos espaço-temporal torne-se plenamente turbulento, um número crescente de modos de Fourier seria necessário para descrever as trocas de energia entre grandes e pequenas escalas.

Uma outra comparação sobre a influência do número de modos é mostrada na figura 3.29(a), onde as evoluções temporais da média espectral são comparadas para um número crescente de modos de Fourier, para o caso onde não há difusão espacial ($D = 0$). Como uma tendência geral, vemos que as médias crescem até atingirem uma saturação, onde este valor é cerca de $1/3$ do número de modos. Isto significa que caos da variedade homogênea atua como uma bomba contínua de geração de modos de Fourier, até atingir o último modo de Fourier e causando uma saturação no crescimento da média espectral.

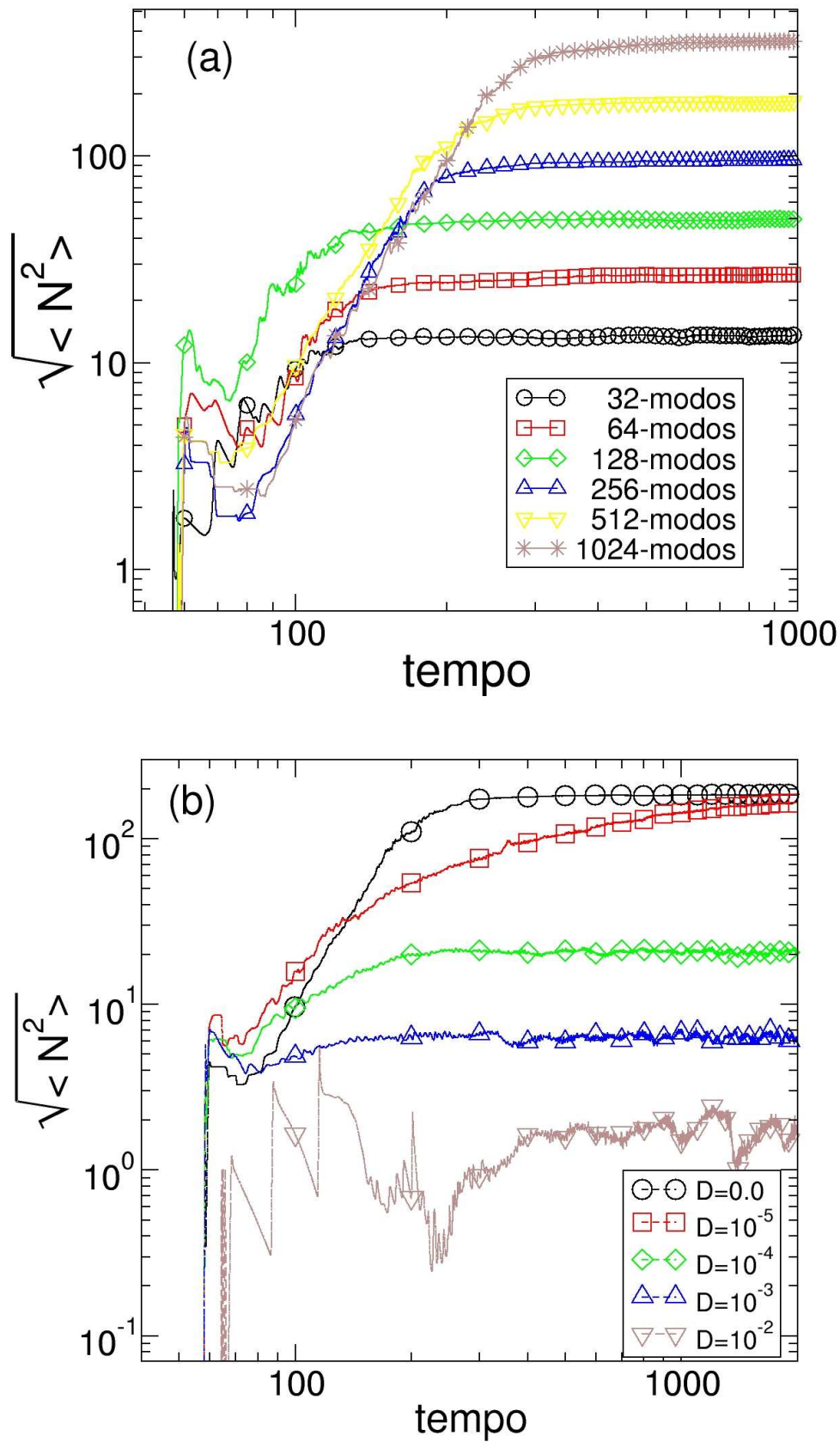


Figura 3.29: Média espectral em função do tempo para (a) diferentes números de modos de Fourier no espaço, e (b) diferentes valores do coeficiente de difusão. Fixamos nestes casos $v_1 = 0, 1$ e $v_{2,3} = -4, 5$.

Os casos mostrados na figura 3.29(a) foram feitos na ausência de qualquer difusão espacial. Na figura 3.29(b), fixamos o número de modos de Fourier em $N = 512$, e analisamos como o valor da média espectral se comporta em função do coeficiente de difusão. Podemos ver claramente que quanto maior o coeficiente de difusão, mais baixo é o valor de saturação da média espectral. Porém, ressaltamos que as saturações para $D = 0$ e $D = 10^{-2}$ têm significados diferentes, sendo que, no primeiro caso ($D = 0$), saturou-se o número máximo de modos de Fourier da simulação, enquanto no segundo caso ($D = 10^{-2}$), saturou-se devido à difusão do sistema. Estes casos de saturação máxima de modos de Fourier obviamente envolvem erros de natureza da limitação numérica, não havendo mais o comportamento dinâmico da perda da estabilidade transversal da variedade homogênea no qual estamos interessados nesta tese.

Os aspectos gerais do efeito da difusão na excitação dos modos espaciais podem ser abordados através de uma simples análise linear. Quando as amplitudes são suficientemente pequenas podemos negligenciar os modos quadráticos e supor uma solução linear com a forma $A_1(x, t) \sim A_{1n}(t)e^{ik_n x}$. Substituindo na equação não linear obtemos

$$\frac{dA_{1n}}{dt} \approx (v_1 - k_n^2 D - ik_n v_{g1}) A_{1n}. \quad (3.7)$$

O termo entre parênteses, o qual representa a taxa de crescimento ou decrescimento da amplitude da onda, diminui quando D é aumentado. Isto explica porque a difusão limita o crescimento da excitação dos modos espaciais. Além do coeficiente D , vemos que esta limitação também ocorre de forma quadrática (k_n^2), aumentando o comprimento de onda. Se desconsiderarmos a velocidade de grupo da onda, por não ter um papel crucial nesta aproximação, igualando os termos entre parênteses a zero e isolando o vetor de onda, obtemos um valor crítico denotado por $k_{crit} \sim \sqrt{v_1/D}$. Assim temos que para um valor de vetor de onda maior que k_{crit} , o termo em parênteses se torna negativo, e segundo a análise linear, é amortecido.

Na figura 3.30 mostramos a dependência da amplitude do modo de Fourier $a_{1,n}$ com o número de modo n para diferentes valores de coeficiente de difusão. O valor crítico k_{crit} , indicado por um símbolo distinto em cada curva, marca aproximadamente o valor onde para um número de modo de Fourier n acima, é fortemente amortecido. Isto se mostra ser consistente com a aproximação e os resultados obtidos. Discrepâncias são observadas na figura 3.30 para grandes valores de coeficiente de difusão. Isto se deve às aproximações realizadas para se obter k_{crit} , já que nesta aproximação foram descartados os termos não lineares. Além do mais, está análise linear falha em regiões onde a variedade homogênea é periódica, como por exemplo nas janelas periódicas mostradas nas ampliações das figuras 3.23(a) e (b). Esperaríamos a geração

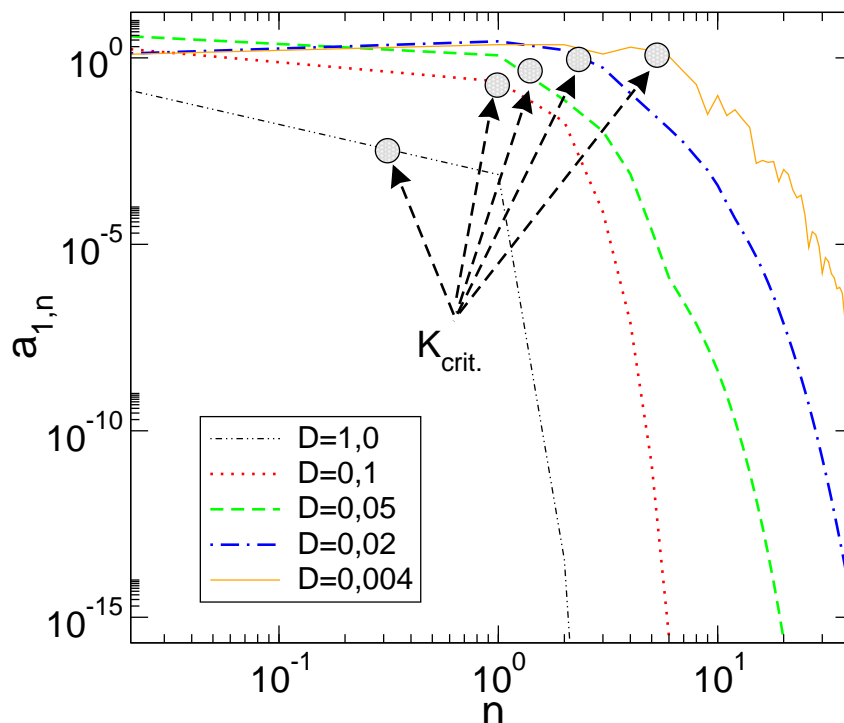


Figura 3.30: Amplitude do modo de Fourier em função do seu respectivo número de modo, para diferentes valores de coeficiente de difusão, fixamos nestes casos $v_1 = 0, 1$ e $v_{2,3} = -4, 5$. Os círculos indicam o valor crítico do número de onda esperado da teoria linear.

de modos espaciais para estas regiões na análise linear, porém os termos não lineares têm um papel fundamental no surgimento destas janelas periódicas.

Por último, faremos conclusões gerais sobre todos resultados que foram obtidos nesta seção para o nosso sistema espacialmente estendido. Como vimos, a análise linear das amplitudes indica o valor máximo de modo espacial que deve ser excitado. Porém, esta análise não funciona nas regiões de janelas periódicas que vimos nos diagramas de bifurcação. Além disto vimos, através deste diagrama, que para o surgimento de modos espaciais é imprescindível a existência de uma variedade homogênea caótica. Contudo, além da necessidade de caos na variedade homogênea, o parâmetro de ordem nos indica que só o caos não é uma condição suficiente para que comece a geração de modos espaciais. É necessário que o atrator caótico da variedade homogênea perca sua estabilidade devido a uma órbita periódica transversal instável. Quando isto acontece, o espectro de Lyapunov apresenta pelo menos dois expoentes positivos, um devido à variedade homogênea ser caótica e o segundo devido à perda da estabilidade transversal. Uma outra informação importante que obtivemos é que a distribuição dos períodos de tempo da atividade transversal (geração de modos espaciais) obedece a uma lei de potência com expoente $-3/2$, o que indica a existência de intermitência on-off.

Ainda hoje na comunidade científica não há um consenso de qual é o exato mecanismo de geração de turbulência. Nesta tese indicamos alguns dos ingredientes que são fundamentais para o início do caos-espço temporal. O conjunto deles nos indica uma possível rota para um início intermitente de turbulência. Outra coisa importante abordada neste tese, é que a perda de estabilidade transversal pode também explicar o mecanismo tipo bomba estocástica. Neste mecanismo de bomba estocástica, não existe um conjunto determinístico de equações, como o próprio nome sugere, eles são gerados de forma estocástica. Mostramos nesta tese através de um modelo determinístico, que a variedade homogênea caótica faz o papel de uma bomba que cria modos espaciais. Este mecanismo atua de forma intermitente e observamos a perda de estabilidade transversal, o que nos ajuda a compreender a transição de sistemas caóticos puramente temporais para sistemas espaço-temporais caóticos.

4 Conclusões e trabalhos futuros

Iniciamos o capítulo de resultados mostrando o modelo de interação de quatro ondas conservativo puramente temporal. Para este modelo vimos o cenário típico de sistemas quasi-integráveis, com o espaço de fase composto por ilhas formadas por toros KAM e os mares caóticos. Além destes comportamentos típicos, observamos a presença de armadilhas dinâmicas que aprisionam as trajetórias, porém diferentemente dos toros KAM, para tempos suficientemente longos essas trajetórias se conectam com diferentes regiões do espaço de fase. Estas armadilhas estão associadas à presença de um cantori, que forma uma barreira parcial, onde existem pequenos furos pelos quais eventualmente as trajetórias podem escapar. Estes cantori afetam fortemente o deslocamento das trajetórias no espaço de fase e a hipótese ergódica não é mais válida para tais sistemas.

Através do uso do mapa padrão mostramos que as distribuições do expoente de Lyapunov a tempo finito podem ser úteis para a análise da influência das regiões de armadilhas nos espaços de fase Hamiltoniano. Enquanto que típicas órbitas imersas em regiões caóticas exibem distribuições com forma gaussiana para os expoente de Lyapunov a tempo finito, centradas no valor para o Lyapunov a tempo infinito, órbitas que sofrem efeitos das armadilhas podem desenvolver um segundo máximo próximo a zero. O uso das distribuições do expoente de Lyapunov a tempo finito quantifica o efeito destas armadilhas com relação a toda dinâmica, dando-nos uma fração de tempo que o sistema permanece sobre a influência das armadilhas, através do cálculo da área relativa ao segundo máximo. Vimos que esta fração não possui um comportamento suave em função do parâmetro de não linearidade K , ocorrem grandes oscilações devido ao processo sucessivo de criação e destruição de ilhas com o aumento (ou diminuição) de K .

Estes resultados são robustos no sentido que são insensitivos com relação ao tempo finito de amostragem do expoente de Lyapunov e ao tempo total da trajetória. Apesar de termos usado o mapa padrão para mensurar estas armadilhas dinâmicas, estes resultados permanecem válidos para uma grande classe de outros sistemas não integráveis como por exemplo, o modelo de interação de quatro ondas conservativo puramente temporal.

Após termos trabalhado com sistemas puramente temporais, analisamos o caso do modelo de interação de três ondas espaço-temporal. Propomos um cenário para a explicação do início do caos espaço-temporal por uma excitação não linear dos modos espaciais gerados pela dinâmica caótica de um atrator de baixa dimensionalidade espacialmente homogêneo. Em termos matemáticos, deve haver um subespaço invariante (imerso no espaço de fase do sistema) contendo um atrator caótico sem modos espaciais. A energia é transferida deste estado caótico para a excitação dos modos espaciais não-homogêneos.

O início do caos espaço-temporal ocorre quando uma órbita periódica instável, imersa no atrator caótico espacialmente homogêneo, perde a estabilidade transversal (com relação a variedade homogênea). Apesar destas órbitas periódicas representarem pequenas regiões, eventualmente uma trajetória do sistema passa suficientemente perto e é ejetada da variedade homogênea.

Tendo isto em vista, tais órbitas transversais possuem um efeito pronunciado em uma trajetória próxima a este subespaço homogêneo. Durante vários períodos de tempo tais trajetórias permanecem aprisionadas nas vizinhanças deste estado homogêneo, não havendo dinâmica espacial. Quando a trajetória aproxima-se de uma órbita transversalmente instável, ela deixa de estar em um estado homogêneo e passa a um estado com vários estouros, excitando os modos espaciais. Porém, devido ao prevalescimento das órbitas transversalmente estáveis, as órbitas retornam aos estados homogêneos. Estes comportamentos transitórios são chamados de intermitência on-off.

Quando os modos espaciais são excitados, a energia relacionada aos estados espacialmente homogêneos são redistribuídos através de um processo intermitente. Assim esperamos que o surgimento desse modos espaciais ocorra de forma irregular nas regiões iniciais da perda da estabilidade transversal.

Vimos que segundo à aproximação linear, a condição da redistribuição de energia é limitada por efeitos difusivos. O nível de saturação da energia dos modos espaciais depende do valor do coeficiente de difusão, sendo que esta limitação aumenta com um expoente que é igual ao quadrado do número do modo espacial. Nesta tese, abordamos um modelo de interação de três ondas com uma dimensão espacial. Porém, estes comportamentos de início de geração de modos espaciais são gerais, e este cenário que descrevemos permanece válido para uma grande classe de outros sistemas espacialmente estendidos.

Até aqui citamos as conclusões sobre os trabalhos que foram feitos. Agora falaremos um pouco sobre algumas possibilidades para trabalhos futuros. Inicialmente, para o caso dos

sistemas conservativos, vimos que através da série temporal do expoente de Lyapunov a tempo finito, a transição entre as armadilhas para mares caóticos tem uma assinatura clara. Poderíamos usar estas assinaturas como uma forma de quantificar os intervalos de tempo em que cada armadilha dinâmica afeta o sistema. Como no espaço de fase há muitas ilhas de diferentes escalas de tamanho, poderíamos determinar os períodos de tempo de aprisionamento característicos para cada ilha, e analisar a relação de tamanho da ilha com estes períodos.

Seria interessante analisar como a transição de regiões de armadilhas dinâmicas para os mares caóticos afetariam o caso de sistemas acoplados espacialmente. Logicamente, este acoplamento aumentaria a dimensão efetiva do sistema e eventualmente desapareceria a existência do cantori. Porém, poderíamos criar um acoplamento uni-direcional do tipo mestre-escravo, de tal forma que o sistema mestre permanecesse com as suas propriedades originais. O sistema mestre atuaria como uma bomba, no qual as trajetórias inicialmente permanecem nas proximidades de um regime quasi-integrável e eventualmente transitam para um sistema caótico. Isto poderia trazer efeitos interessantes, tanto na questão dos deslocamentos das trajetórias e de como ocorre a sincronização para tais sistemas.

No caso de sistemas espaço-temporais, para um sistema que seja expandido com N modos de Fourier, o cálculo numérico do espectro de Lyapunov envolve a computação das N equações não lineares, mais N^2 equações devido ao cálculo da matriz jacobiana. Este processo exige um grande esforço computacional, e o aumento do número de modos exige um aumento ao quadrado do número de equações a serem computadas. Isto nos trás uma limitação de $N = 64$. Porém, no artigo (GOZALES et al., 1999), mostrou-se que em alguns casos nem sempre é necessário computar todo os elementos da matriz jacobiana para a obtenção dos maiores expoentes de Lyapunov. A aplicação desta técnica poderia permitir um número maior de modos de Fourier. Além disto, nos possibilitaria também o cálculo de distribuições do expoente de Lyapunov a tempo finito, já que estas distribuições demandam de tempos relativamente longos para se obter uma boa estatística. O cálculo da distribuição do segundo maior expoente de Lyapunov a tempo finito se mostraria particularmente útil na quantificação da perda da estabilidade transversal que ocorre no nosso sistema espacialmente estendido.

O uso de números maiores de modos de Fourier possibilitaria também, analisar regiões onde não se esteja no início do caos espaço-temporal, e sim regiões onde o caos espaço-temporal esteja mais desenvolvido. Este número maior de modos seria importante para analisar a troca de energia que pode ocorrer entre pequenos e grandes modos. A análise destes casos seria um grande passo em aproximar este sistema por um sistema que apresente turbulência plenamente desenvolvida. Com os avanços de novas técnicas de computação paralela nos últimos tempos,

a viabilidade destes novos trabalhos se torna mais próxima.

Por último, poderíamos também citar como um possível trabalho futuro, o cálculo dos coeficientes que aparecem nos termos quadráticos no modelo de interações entre ondas. Quando deduzimos o modelo à partir das equações de Hasegawa-Mima, vimos que havia uma expressão para tais coeficientes. Como neste trabalho estávamos interessados em analisar os possíveis comportamentos dinâmicos de sistemas espacialmente estendidos, assumimos por simplicidade que estes coeficientes eram iguais à unidade. Porém, em trabalhos que estejam interessados em aplicações, o cálculo destes coeficientes poderia se tornar importante.

Bibliografia

ABLOWITZ, M. J.; SEGUR, H. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. [S.l.]: SIAM, 1981.

ALLIGOOD, K. T.; YORKE, T. D. S. and J. A. *CHAOS An introduction to dynamical systems*. [S.l.]: Springer-Verlag, New York, 1996.

ARMSTRONG, J. A.; BLOEMBERGEN, N.; DUCUING, J.; PERSHAN, P. S. Interactions between light waves in a nonlinear dielectric. *Physics Review*, v. 62, p. 1918, 1962.

ARNOLD, V. I.; AVEZ, A. *Ergodic problems of Classical Mechanics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1968.

AUBRY, S. *Solitons and Condensed Matter Physics*. [S.l.]: Springer, 1978.

BATCHELOR, G. *The theory of homogeneous turbulence*. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1959.

BERS, A.; KAUP, D. J.; REIMAN, A. H. Nonlinear interactions of three wave packets in a homogeneous medium. *Physics Review Letters*, v. 37, p. 182, 1976.

BIRKHOFF, G. D. On the periodic motions of dynamical systems. *Acta Mathematica*, v. 50, p. 359, 1927.

BUTKOV, E. *Física Matemática*. [S.l.]: LTC, 1988.

CHIAN, A. C. L.; LOPES, S. R.; ALVES, M. V. Generation of auroral whistler-mode radiation via nonlinear coupling of langmuir waves and alfvén waves. *Astronomy and Astrophysics*, v. 290, p. 13, 1994.

CHIAN, A. C. L.; RIZZATO, F. B. Coupling of electromagnetic filamentation instability and electrostatic langmuir parametric instabilities in laser-plasma interactions. *Journal of Plasma Physics*, v. 51, p. 61, 1994.

CHIRIKOV, B. V. An universal instability of many dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, v. 52, p. 264, 1979.

COSTA, A.; GOMEZ, D.; DAWSON, S. P.; FONTAN, C. F.; SCHIFINO, A. S. Bifurcations in a three-mode model of the navier-stokes equation. *Physical Review A*, v. 38, n. 4, p. 2037, 1988.

COVAS, E.; TAVAKOL, R.; ASHWIN, P.; TWORKOWSKI, A.; BROOKE, J. M. In-out intermittency in partial differential equation and ordinary differential equation models. *Chaos*, v. 11, p. 404, 2001.

- DAWSON, S.; GREBOGI, C.; SAUER, T.; YORKE, J. A. Obstructions to shadowing when a lyapunov exponent fluctuates about zero. *Physical Review Letters*, v. 73, p. 1927, 1994.
- DENISOV, S.; KLAFTER, J.; URBACH, M.; FLACH, S. Dc currents in hamiltonian systems by levy flights. *Physica D*, v. 170, p. 131, 2002.
- FEIGENBAUM, M. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, v. 19, p. 25, 1978.
- FORNBERG, B.; MERRILL, D. Comparison of finite difference- and pseudospectral methods for convective flow over a sphere. *Geophysical Research Letters*, v. 24, p. 3245, 1997.
Disponível em: <citeseer.ist.psu.edu/495026.html>.
- FRICHEMBRUDER, M.; PAKTER, R.; GERHARDT, G.; RIZZATO, F. Chaos and coherence in the conservative three-mode decay interaction. *Physical Review E*, v. 62, n. 6, p. 7861–7866, 2000.
- FRISCH, U. *Turbulence*. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1995.
- GLENZER, S. H.; ROZMUS, W.; BYCHENKOV, V. Y.; MOODY, J. D.; ALBRITTON, J.; BERGER, R. L.; BRANTOV, A.; FOORD, M. E.; MACGOWAN, B. J.; KIRKWOOD, R. K.; BALDIS, H. A.; WILLIAMS, E. A. Anomalous absorption of high-energy green laser light in high-z plasmas. *Physics Review Letters*, v. 88, p. 235002, 2002.
- GOLDSTEIN, H. *Classical mechanics*. [S.l.]: 2^a ed., Addison-Wesley, 1980.
- GOZALES, R. C.; ORSTAVIK, S.; HUKE, J.; BROOMHEAD, D. S.; STARK, J. Scaling and interleaving of subsystem lyapunov exponents for spatio-temporal systems. *Chaos*, v. 9, p. 466, 1999.
- GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Chaotic attractors in crisis. *Physics Review Letters*, v. 48, p. 1507, 1982.
- HANSON, J. D.; CARY, J. R.; MEISS, J. D. Algebraic decay in self-similar markov-chains. *Journal of Statistical Physics*, v. 39, p. 327, 1985.
- HASEGAWA, A. *Plasma Instabilities and Nonlinear Effects*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1975.
- HASEGAWA, A.; NACLENNAN, C.; KODAMA, Y. Nonlinear behavior and turbulence spectra of drift waves and rossby waves. *Physics of Fluids*, v. 22, p. 2122, 1979.
- HE, K.; CHIAN, A. C. L. On-off collective imperfect phase synchronization and bursts in wave energy in a turbulent state. *Physical Review Letters*, v. 91, p. 034102, 2003.
- HEAGY, J. F.; PLATT, N.; HAMMEL, S. M. Characterization of on-off intermittency. *Physics Review E*, American Physical Society, v. 49, n. 2, p. 1140–1150, 1994.
- HINDMARSH, A. C. Odepack, a systematized collection of ode solvers. *In scientific computing*, v. 62, p. 55, 1983.
- IOMIM, A.; GANGARDT, D.; FISHMAN, S. Nonlinear dynamics in periodic phase space. *Physical Review E*, v. 57, p. 4054, 1998.

- JOSIC, K. Invariant manifolds and synchronization of coupled dynamical systems. *Physics Review Letters*, American Physical Society, v. 80, n. 14, p. 3053–3056, 1998.
- KAPLAN, J. L.; YORKE, J. A. Preturbulence: A regime observed, in a fluid flow model of lorenz. *Communications in Mathematical Physics*, v. 67, p. 93, 1979.
- KARNEY, C. F. F. Long-time correlations in the stochastic regime. *Physica D*, v. 8, p. 360, 1983.
- KARPLYUK, K. S.; ORAEVSKI, V. N.; PAVLENKO, V. P. Dynamics of nonlinear-interaction of magnetohydrodynamic waves. *Plasma physics and controlled fusion*, v. 15, p. 113, 1973.
- KAUP, D. J.; REIMAN, A. H.; BERS, A. Space-time evolution of nonlinear three-wave interactions. i. interaction in a homegeneus medium. *Review of Modern in Physics*, v. 51, p. 275, 1979.
- KOLMOGOROV, A. N. Preservation of conditionally periodic movements with small change in hamiltonian function. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, v. 98, p. 527, 1954.
- KURAMOTO, Y. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. [S.l.]: Courier Dover, 2003.
- KUZNETSOV, L.; ZASLAVSKY, G. M. Scaling invariance of the homoclinic tangle. *Physical Review E*, v. 66, p. 046212, 2002.
- LASHMORE-DAVIES, C.; THYAGARAJA, A.; MCCARTHY, D. Spectral transfers and zonal flow dynamics in the generalized charney-hasegawa-mima model. *Physics of plasmas*, v. 12, p. 122304, 2005.
- LASHMORE-DAVIES, C. N. *Plasma Physics and Nuclear Fusion Research*. [S.l.]: Academic Press, 1981.
- LATORA, V.; RAPISARDA, A.; RUFFO, S. Superdiffusion and out-of-equilibrium chaotic dynamics with many degrees of freedoms. *Physics Review Letters*, v. 83, p. 2104, 1999.
- LEONCINI, X.; ZASLAVSKY, G. M. Jets, stickiness, and anomalous transport. *Physical Review E*, v. 65, p. 046216, 2002.
- LICHTENBERG, A.; LIEBERMAN, A. *Regular and Chaotic Dynamics*. [S.l.]: Spinger, 1992.
- LOPES, S. R. *Dinâmica não Linear de ondas whistlers em plasmas espaciais*. Tese (Doutorado) — INPE(tese de doutorado), 1995.
- LOPES, S. R.; RIZZATO, F. B. Nonintegrable dynamics of the triplet-triplet spatiotemporal interaction. *Physical review E*, v. 60, p. 5375, 1999.
- MACKAY, R. S.; MEISS, J. D.; PERCIVAL, I. C. Transport in hamiltonian-systems. *Physica D*, v. 13, p. 55, 1984.
- MEISS, J. D.; OTT, E. Markov tree model of transport in area-preserving maps. *Physica D*, v. 20, p. 387, 1986.

- MOSER, J. *Stable and random motions in dynamical systems*. [S.l.]: Princenton university press, 1973.
- NEWTON, I. *Principia: princípios matemáticos da filosofia natural*. [S.l.]: Tradução: Ricci, EDUSP, 1990.
- OKUSHIMA, T. New method for computing finite-time lyapunov exponents. *Physical Review Letters*, v. 91, p. 254101, 2003.
- OSELEDETS, V. I. Multiplicative ergodic theorem: Characteristic lyapunov exponents of dynamical systems. *Trudy MMO*, v. 19, p. 179, 1968.
- OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*,. [S.l.]: Cambridge Uni. Press, 1993.
- OTT, E.; SOMMERER, J. C. Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency. *Physics Letters A*, v. 188, p. 39, 1994.
- PAKTER, R.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Transition to chaos in the conservative four-wave parametric interactions. *Physica D*, v. 110, p. 277, 1997.
- PERCIVAL, I. C. Nonlinear dynamics and the beam-beam interaction. *American Institute of Physics Conference Proceedings*, v. 57, p. 302, 1979.
- PETZOLD, L. R. Automatic selection of methods for solving stiff and nonstiff systems of ordinary differential equations. *Siam j. sci. stat. comput.*, march, p. 136, 1983.
- PLATT, N.; SPIEGEL, E. A.; TRESSER, C. On-off intermittency: A mechanism for bursting. *Physics Review Letters*, v. 70, p. 279, 1993.
- POINCARÉ, H. *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. [S.l.]: Vol. I e Vol. II. Gauthier-Villars, 1887.
- POL, B. van der; MARK, J. van der. Frequency demultiplication. *Nature*, v. 120, p. 363–364, 1927.
- POMEAU, Y.; MANNEVILLE, P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Communications in Mathematical Physics*, v. 74, p. 189, 1980.
- REMPEL, E. L.; CHIAN, A. Origin of transient and intermittent dynamics in spatiotemporal chaotic systems. *Physical Review Letters*, v. 98, n. 1, p. 014101, 2007.
- ROMEIRAS, F. J. Integrability of double three-wave interaction. *Physics Letters A*, v. 93, p. 227, 1983.
- RUNDQUIST, A.; DURFEEIII, C. G.; HERNE, Z. C. C.; BACKUS, S.; MURNANE, M. M.; KAPTEYN, H. C. Phase-matched generation of coherent soft x-rays. *Science*, v. 280, p. 1412, 1998.
- SAGDEEV, R. Z.; GALEEV, A. *Nonlinear Plasma Theory*. [S.l.]: W.A Benjamin, Inc, 1969.
- SCHUSTER, H. G. *Deterministic Chaos: an introduction*. [S.l.]: 3^aed., VHD, 1995, 1995.
- SCIENCE. So much more to know. *Science*, v. 309, p. 78, 2005.

- SEPULVEDA, M. A.; BADI, R.; POLLAK, E. Spectral-analysis of conservative dynamical-systems. *Physical Review Letters*, v. 63, p. 1226, 1989.
- SHEN, Y. R. *The Principle of Nonlinear Optics*. [S.l.]: Wiley, New York, 1984.
- SHLESINGER, M. F.; ZASLAVSKY, G. M.; KLAFTER, J. Strange kinetics. *Nature*, v. 263, p. 31, 1993.
- SMALE, S. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 73, p. 747, 1967.
- STENFLO, L. Kinetic theory of three-wave interaction in a magnetized plasmas. *Journal of Plasma Physics*, v. 4, p. 585, 1970.
- STENFLO, L.; SHUKLA, P. K. Generation of radiation by upper hybrid pump waves. *Journal Geophysics research-space physics.*, v. 100A9, p. 17261, 1995.
- SUGIHARA, R. Interaction between an electromagnetic wave, plasma waves, and an ion acoustic wave. *Physics of Fluids.*, v. 11, p. 178, 1968.
- SZEZECH, J. D. J.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Finite-time lyapunov spectrum for chaotic orbits of non-integrable hamiltonian systems. *Physics Letters A*, v. 335, p. 394, 2005.
- SZEZECH, J. D. J.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Bubbling transition to spatial mode excitation in an extended dynamical system. *Physica D*, Submetido para publicação, 2007(a).
- SZEZECH, J. D. J.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Onset of spatiotemporal chaos in a nonlinear system. *Physics Review E*, v. 75, p. 067202, 2007(b).
- TAKENS, R. F. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, v. 20, p. 167, 1971.
- TENNEKES, H.; LUMLEY, J. L. *A first course in turbulence*. [S.l.]: 15^o Edição, Cambridge, EUA, 1994.
- TOWNSEND, A. A. *The structure of turbulent shear flow*. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, 1976.
- TZENG, K. C.; MORI, W. B.; DECKER, C. D. Anomalous absorption and scattering of short-pulse high-intensity lasers in underdense plasmas. *Physical Review Letters*, v. 76, p. 3332, 1996.
- USUI, H.; MATSUMOTO, H.; GENDRIN, R. Numerical simulations of a three-wave coupling occurring in the ionospheric plasma. *Nonlinear Processes in Geophysics.*, v. 9, p. 1, 2002.
- WALTERS, D.; LEWAK, G. J. Dynamics of four coupled plasma waves to second order. *Journal of Plasma Physics*, v. 18, p. 525, 1977.
- WIGGINS, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. [S.l.]: Springer-Verlag, New York, 1990.
- WILHELMSSON, H. Non-linear coupling of waves in a magnetized plasma with particle drift motions. *Journal of Plasma Physics*, v. 3, p. 215, 1969.

WOLF, A.; SWINNEY, J. B.; VASTANO, J. A. Determining exponents from a time series. *Physica D*, v. 16, p. 285, 1985.

YARIV, A. *Quantum Electronics*. [S.l.]: Wiley, New York, 1989.

ZAKHAROV, V. E.; MANAKOV, S. V. Resonant interaction of wave packets in nonlinear media. *JETP letters.*, v. 18, p. 243, 1973.

ZASLAVSKY, G. M. From hamiltonian chaos to maxwell's demon. *Chaos*, v. 5(4), p. 653, 1995.

ZASLAVSKY, G. M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Physics Reports*, v. 371, p. 451, 2002(a).

ZASLAVSKY, G. M. Dynamical traps. *Physica D*, v. 168, p. 292, 2002(b).

ZIMIN, A. V.; HUNT, B. R.; OTT, E. Bifurcation scenarios for bubbling transition. *Physics Review E*, v. 67, n. 1, p. 016204, 2003.