UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Comportamento Assintótico de uma Equação de Onda Não-linear com Amortecimento

Cleber de Medeira

CURITIBA-PR
2008

Comportamento Assintótico de uma Equação de Onda Não-linear com Amortecimento

Cleber de Medeira

Orientação:
Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Curitiba-PR
2008

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida e pelas oportunidades,

À minha família, meus pais Teresinha e João de Medeira pela educação recebida e incentivo na vida estudantil, e Cleverson e Gabriel de Medeira meus irmãos,

À Ana Eliza pelo apoio e compreensão,

Ao professor Higidio P. Oquendo pela paciência e atenção ao ter me orientado,

E a todos que, de uma forma ou outra contribuiram e acreditaram na realização deste trabalho.

Sumário

Resumo

Neste trabalho, estudamos o comportamento assintótico da equação de onda não-linear dada por

$$u_{tt} - \Delta u + a(1 + |u_t|^{m-2})u_t = bu|u|^{p-2},$$

onde a função $g(u_t) = a(1 + |u_t|^{m-2})u_t$ é um termo não-linear de amortecimento e $f(u) = bu|u|^{p-2}$ é um termo fonte, também não-linear. Ambos estão relacionados com as propriedades do material envolvido no modelo. Para dados iniciais arbitrários, mostramos a existência de solução local do problema, em seguida para dados iniciais suficientemente pequenos, a existência de solução global e o decaimento exponencial de energia. No caso em que a energia inicial é negativa, obtemos um resultado de explosão da energia em um tempo finito.

Palavras-chave: Equação de Onda, Decaimento Exponencial, Estabilidade, Termo Dissipativo.

Abstract

In this work we study the asymptotic behavior of the nonlinear wave equation

$$u_{tt} - \Delta u + a(1 + |u_t|^{m-2})u_t = bu|u|^{p-2},$$

where the nonlinear function $g(u_t) = a(1 + |u_t|^{m-2})u_t$ is a damping term and $f(u) = bu|u|^{p-2}$ is a source term, also nonlinear. Both are related to the properties the material involved in the model. Existence of a local solution is obtained for arbitrary initial data. Existence of the global solution and exponential decay of energy, is proved if the initial data are small enough. In the case of negative initial energy, a blow-up result in finite time is also proved.

Keywords: Wave Equation, Exponential Decay, Blow-up, Stability, Dissipative Term.

Introdução

A estabilidade da solução da equação de onda com termos não-lineares, há muitos anos tem interessado vários pesquisadores tais como Messaoudi [2],[11], Todorova, Georgiev [5], Nakao [13], dentre outros. Neste trabalho estudamos a equação de onda envolvendo um termo de amortecimento $g(u_t)$ e um termo fonte $f(u)$, ambos não-lineares, considerando o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - \Delta u + g(u_t) + f(u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\
&u(x,t) = 0 \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\
&u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega,
\end{aligned} \tag{1}$$

em um domínio Ω limitado do $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, com fronteira $\partial\Omega$ suave. Em nosso contexto $g(u_t) = a(1 + |u_t|^{m-2})u_t$ e $f(u) = -bu|u|^{p-2}$ com a, b contantes positivas e $m, p > 2$. Os objetivos do trabalho são: Mostrar que para uma devida escolha dos dados iniciais φ e ψ, o problema (1) tem solução fraca global, isto é, a solução do problema está definida para todo $t \geq 0$, e sua energia decai exponencialmente, também mostrar que se a energia inicial do sistema é negativa, temos um resultado sobre soluções não globais. Primeiramente mostramos a existência de uma única solução fraca local de (1), para quaisquer dados iniciais (φ, ψ) em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, ou seja, a solução está definida num intervalo de tempo finito. Posteriormente supondo dados iniciais relativamente pequenos, provamos que a solução é global e sua energia decai exponencialmente de maneira uniforme. A existência de solução global porém, não necessariamente depende dos dados iniciais, em [5] os autores estudam a relação entre o termo de amortecimento $g(u_t)$ e o termo fonte $f(u)$ e mostram que se $p \leq m$, para quaisquer dados iniciais a solução é global.

No capítulo 1, apresentamos uma breve base teórica a ser ulitizada no desenvolvimento do texto. Mostramos alguns resultados de análise, como o teorema do ponto fixo de Banach, que será utilizado na prova da unicidade de solução, definimos os espaços L^p, as distribuições e espaços de Sobolev, provando alguns resultados sobre estes (Veja [3], [4], [9] e [10] para uma exposição mais completa). No capítulo 2, fazendo uso do resultado provado por Todorova e Georgiev em [5], mostramos a existência e unicidade local de uma solução fraca de (1), utilizando um método aproximativo de soluções de um problema auxiliar provado por Lions em [8]. No terceiro capítulo, mostramos que sob certas condições para os dados iniciais a solução é global, a prova é baseada na teoria do "Potencial" introduzida por Sattinger e Payne (Veja [15] e [16]), em seguida para a mesma condição dos dados iniciais, provamos o decaimento exponencial de energia do problema (veja [2]).

Finalmente no quarto e último capítulo, apresentamos um resultado sobre soluções não globais do problema (1), para isto mostramos que a solução explode em um tempo finito, quando a energia inicial é negativa e $p > m$, tal resultado segue a idéia de Messaoudi em [12], de um problema semelhante à (1), cujo termo de amortecimento é dado por $g(u_t) = au_t|u_t|^{m-2}$, a prova deste, melhora o resultado de Georgiev e Todorova (veja [5]), onde os autores mostram que a explosão ocorre para dados iniciais grandes, de modo que a energia inicial seja suficientemente negativa.

Capítulo 1

Fundamentos

Omitiremos aqui, definições e alguns conceitos básicos de análise funcional, sobre espaços métricos, normados (espaços de Banach e de Hilbert), bem como seqüências de Cauchy, dentre outros. O objetivo do capítulo é apontar resultados já conhecidos, principalmente da teoria dos espaços L^p, distribuições e espaços de Sobolev, os quais serão fundamentais para mostrar nossos principais resultados. Algumas vezes somente indicaremos onde se encontra a demonstração dos teoremas aqui citados.

1.1 Resultados de Análise

Desigualdades tipo Gronwall

Lema 1.1 (Gronwall) *Sejam ω, α e f funções reais contínuas, tais que $f \geq 0$ e*

$$\omega(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} f(s)\omega(s)ds,$$

então

$$\omega(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} f(s)\alpha(s)e^{\int_s^t f(\tau)d\tau}ds,$$

No caso particular que $\alpha(t) = C$ constante, temos

$$\omega(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^{t} f(s)ds\right).$$

Demonstração: Seja $g(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)\omega(s)ds$, então $g'(t) = f(t)\omega(t)$ e da hipótese temos

$$g'(t) = f(t)\omega(t) \leq f(t)\alpha(t) + f(t)g(t) \quad \Longrightarrow \quad [g(t)e^{-A(t)}]' \leq f(t)\alpha(t)e^{-A(t)},$$

onde $A'(t) = f(t)$. Portanto,

$$g(t)e^{-A(t)} \leq \int_{t_0}^{t} f(s)\alpha(s)e^{-A(s)}ds,$$

e da hipótese, segue que

$$\omega(t) \leq \alpha(t) + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} f(s)\alpha(s)e^{-A(s)}ds \ ,$$

o que implica o resultado. No caso que $\alpha(t) = C$ constante, basta utilizar

$$f(s)\exp\left(\int_s^t f(\tau)d\tau\right) = -\frac{d}{ds}\exp\left(\int_s^t f(\tau)d\tau\right).$$

□

Lema 1.2 *Se ω e f são funções reais contínuas e positivas, tais que*

$$\omega(t)^2 \leq C + \int_0^t f(s)\omega(s)ds, \quad C, t \geq 0 \quad (C \text{ constante})$$

então

$$\omega(t) \leq \sqrt{C} + \frac{1}{2}\int_0^t f(s)ds.$$

Demonstração: Seja $F(t) = C + \displaystyle\int_0^t f(s)\omega(s)ds$, portanto como f e ω são contínuas

$$F'(t) = f(t)\omega(t) \leq f(t)F(t)^{1/2},$$

ou seja, $F(t)^{-1/2}F'(t) \leq f(t)$, então temos que $2(F(t)^{1/2})' \leq f(t)$ e integrando de 0 à t esta desigualdade obtemos,

$$2(F(t)^{1/2} - F(0)^{1/2}) \leq \int_0^t f(s)ds,$$

logo

$$F(t)^{1/2} \leq F(0)^{1/2} + \frac{1}{2}\int_0^t f(s)ds,$$

finalmente como $\omega(t) \leq F(t)^{1/2}$, chegamos ao resultado. □

Teorema do ponto fixo de Banach

Definição 1.1 *Seja $X = (X, d)$ espaço métrico. A aplicação $T : X \longrightarrow X$ denomina-se aplicação contractante ou contração em X, se existir um número real $\alpha \in [0, 1)$ tal que $\forall x, y \in X$*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y).$$

Um ponto fixo da aplicação $T : X \longrightarrow X$, é qualquer elemento $x \in X$, tal que $Tx = x$.

Teorema 1.1 (Ponto fixo de Banach) *Considere $X = (X, d) \neq \varnothing$ um espaço métrico completo com respeito a sua métrica d. Se $T : X \longrightarrow X$ é uma contração em X, então T possui um único ponto fixo em X.*

Demonstração: Seja $x_0 \in X$, definimos a seqüência iterativa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X da seguinte forma

$$x_0, \quad x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \quad ... \quad x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad ...$$

Mostremos que esta seqüência é de Cauchy em X. Suponha por conveniência $n \leq m$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(T^n x_0, T^m x_0) = d(Tx_{n-1}, Tx_{m-1}) \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_{m-1}) = \alpha d(Tx_{n-2}, Tx_{m-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{n-2}, x_{m-2}) \leq ... \leq \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \\ &\leq \alpha^n [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + ... + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})] \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1)[1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{m-n-1}] \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha}\ . \end{aligned}$$

Como $\alpha \in [0, 1)$ e $d(x_0, x_1)$ estão fixos, temos que o lado direito da expressão acima tende a zero se n cresce muito, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X, que é completo, logo x_n converge para algum x em X, isto é, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$ temos

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(x,Tx) &\leq d(x,x_{n+1}) + d(x_{n+1},Tx) = d(x,x_{n+1}) + d(Tx_n,Tx) \\ &\leq d(x,x_{n+1}) + \alpha d(x_n,x) \leq d(x,x_{n+1}) + d(x_n,x) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{se} \quad n > n_0, \end{aligned}$$

então $d(x,Tx) = 0 \Longrightarrow x = Tx$, isto é, x é ponto fixo de T em X. Seja $x = Tx$ e $y = Ty$, como $d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y)$, concluimos que $d(x,y) \leq \alpha d(x,y)$, o que implica $d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$. □

Para facilitar a posterior leitura da demonstração do teorema de existência, provaremos nesta seção o seguinte resultado.

Lema 1.3 *Sejam $m > 2$ e $0 < \varepsilon < \frac{1}{2^{m-2}}$ constantes, então é válida a seguinte desigualdade*

$$(\alpha + \alpha|\alpha|^{m-2} - \beta - \beta|\beta|^{m-2})(\alpha - \beta) \geq \varepsilon|\alpha - \beta|^m \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Escrita de outra forma a desigualdade fica

$$(\alpha - \beta)^2 + (\alpha|\alpha|^{m-2} - \beta|\beta|^{m-2})(\alpha - \beta) \geq \varepsilon|\alpha - \beta|^m,$$

como $(\alpha - \beta)^2 \geq 0 \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então basta mostrar que

$$(\alpha|\alpha|^{m-2} - \beta|\beta|^{m-2})(\alpha - \beta) \geq \varepsilon|\alpha - \beta|^m \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Se $\alpha = \beta$ ou $\beta = 0$ é direto, suponha então $\alpha \neq \beta$ e $\beta \neq 0$, logo

$$(\alpha|\alpha|^{m-2} - \beta|\beta|^{m-2})(\alpha - \beta) \geq \varepsilon|\alpha - \beta|^m$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{(\alpha|\alpha|^{m-2} - \beta|\beta|^{m-2})}{\beta|\beta|^{m-2}} \frac{(\alpha - \beta)}{\beta} \geq \frac{\varepsilon|\alpha - \beta|^m}{|\beta|^m}$$

$$\Updownarrow$$

$$(\gamma|\gamma|^{m-2} - 1)(\gamma - 1) \geq \varepsilon|\gamma - 1|^m \quad \text{onde} \quad \gamma = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Como $(\gamma|\gamma|^{m-2}-1)(\gamma-1)>0$, a desigualdade anterior é equivalente à

$$\left|\gamma|\gamma|^{m-2}-1\right|\geq \varepsilon\left|\gamma-1\right|^{m-1}.$$

Então, o problema resume-se em provar que a função

$$f(\gamma)\ =\left|\gamma|\gamma|^{m-2}-1\right|-\varepsilon\left|\gamma-1\right|^{m-1}\geq 0,\qquad \forall\gamma\in\mathbb{R}.$$

Observe que f é uma função contínua em toda reta.

Caso 1: Se $\gamma<0$, temos $f(\gamma)=(-\gamma)^{m-1}+1-\varepsilon(1-\gamma)^{m-1}$ e

$$f'(\gamma)=(m-1)[\varepsilon(1-\gamma)^{m-2}-(-\gamma)^{m-2}],$$

fazendo $f'(\gamma)=0$, encontramos o ponto crítico $\gamma_0=\dfrac{\varepsilon^{\frac{1}{m-2}}}{\varepsilon^{\frac{1}{m-2}}-1}<0$, e se

$$\gamma<\gamma_0=\frac{-\varepsilon^{\frac{1}{m-2}}}{1-\varepsilon^{\frac{1}{m-2}}}\Longrightarrow\gamma(1-\varepsilon^{\frac{1}{m-2}})<-\varepsilon^{\frac{1}{m-2}},$$

portanto

$$(1-\gamma)\varepsilon^{\frac{1}{m-2}}<-\gamma\Longrightarrow(1-\gamma)^{m-2}\varepsilon<(-\gamma)^{m-2},$$

segue que $f'(\gamma)<0$, logo a função é decrescente em $(-\infty,\gamma_0)$. Usando o mesmo raciocínio para $\gamma>\gamma_0$, teremos $f'(\gamma)>0$, ou seja, f é crescente em $(\gamma_0,0)$. Vimos que γ_0 é um ponto de mínimo em $(-\infty,0)$. Verifiquemos que $f(\gamma_0)>0$. Da hipótese

$$0<\varepsilon<\frac{1}{2^{m-2}}\Longrightarrow 2\varepsilon^{\frac{1}{m-2}}<1\Longrightarrow\varepsilon^{\frac{1}{m-2}}<1-\varepsilon^{\frac{1}{m-2}}\Longrightarrow\varepsilon<(1-\varepsilon^{\frac{1}{m-2}})^{m-2}.$$

Portanto, $\varepsilon(1-\varepsilon^{\frac{1}{m-2}})<(1-\varepsilon^{\frac{1}{m-2}})^{m-1}$, o que implica $\varepsilon-\varepsilon^{\frac{m-1}{m-2}}<(1-\varepsilon^{\frac{1}{m-2}})^{m-1}$, ou seja, $(1-\varepsilon^{\frac{1}{m-2}})^{m-1}+\varepsilon^{\frac{m-1}{m-2}}-\varepsilon>0$, então

$$\begin{aligned}
f(\gamma_0)\ &=\ \frac{\varepsilon^{\frac{m-1}{m-2}}}{(1-\varepsilon^{\frac{1}{m-2}})^{m-1}}+1-\varepsilon\left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{m-2}}}{1-\varepsilon^{\frac{1}{m-2}}}+1\right)^{m-1}\\
&=\ \frac{\varepsilon^{\frac{m-1}{m-2}}+(1-\varepsilon^{\frac{1}{m-2}})^{m-1}-\varepsilon}{(1-\varepsilon^{\frac{1}{m-2}})^{m-1}}>0,
\end{aligned}$$

ficando provado que $f(\gamma)>0,\quad\forall\gamma<0$. Observe também que $f(0)=1-\varepsilon>0$.

Caso 2: Se $0<\gamma<1$, $f(\gamma)=(1-\gamma^{m-1})-\varepsilon(1-\gamma)^{m-1}$ e

$$f'(\gamma)=(m-1)[\varepsilon(1-\gamma)^{m-2}-\gamma^{m-2}],$$

fazendo $f'(\gamma) = 0$, temos que $\gamma_1 = \dfrac{\varepsilon^{\frac{1}{m-2}}}{1+\varepsilon^{\frac{1}{m-2}}} < 1$ é um ponto crítico em $(0,1)$, e usando mesmo raciocínio do caso anterior teremos f crescente para $0 < \gamma < \gamma_1$ e decrescente para $\gamma_1 < \gamma < 1$, isto é, γ_1 é ponto de máximo em $(0,1)$. Como f é contínua e $f(1) = 0$ temos que $f(\gamma) \geq 0$ se $0 < \gamma \leq 1$.
Caso 3: Se $\gamma > 1$, $f(\gamma) = (\gamma^{m-1} - 1) - \varepsilon(\gamma - 1)^{m-1}$. Sendo $\varepsilon < 1$,

$$f'(\gamma) = (m-1)(\gamma^{m-2} - \varepsilon(\gamma-1)^{m-2}) > (m-1)(\gamma^{m-2} - (\gamma-1)^{m-2}) > 0,$$

portanto f é crecente em $(1, +\infty)$, então $f(\gamma) > 0 \quad \forall \gamma > 1$. $\square$

Teorema 1.2 *Seja V um espaço de Hilbert separável. Considere o espaço das funções contínuas de $[0,T]$ tomando valores em V, denotado por $C([0,T];V)$. Se B é um subespaço denso em V, então $C^1([0,T];B)$ é denso em $C([0,T];V)$.*

1.2 Espaços L^p

Usaremos daqui em diante termos de teoria da Medida, tais como funções mensuráveis, integráveis, igualdade (desigualdade) em quase todo ponto (q.t.p), conjunto de medida nula. No que segue, Ω será um aberto do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.2 *Seja $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$ como o conjunto das (classes de) funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis p-integráveis em Ω, i.e.:*

$$L^p(\Omega) := \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p < \infty\},$$

com a seguinte norma $\|u\|_p := \left(\int_\Omega |u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. *Para $p = \infty$, temos*

$$L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \ u \text{ é mensurável e } \exists K \text{ tal que } |u(x)| \leq K \text{ q.t.p em } \Omega\},$$

com a norma $\|u\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} ess\,|u(x)| = \inf\{K; \ |u(x)| \leq K \text{ q.t.p em } \Omega\}$.

Teorema 1.3 *Os espaços $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ são espaços de Banach.*

Demonstração: Veja [3] página 57.

Observação: No caso $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, munido do seguinte produto interno

$$(u, v)_2 := \int_\Omega u(x)v(x)\,dx.$$

Teorema 1.4 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |uv|\,dx \leq \|u\|_p \|g\|_{p'}. \tag{1.1}$$

Demonstração: Se $p = 1$, temos que $p' = \infty$, então basta observar que

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\,dx \leq \|v\|_\infty \int_\Omega |u(x)|\,dx.$$

Para $p > 1$, da desigualdade de Young temos que

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^{p'}}{p'}, \quad \forall \alpha, \beta \geq 0,$$

logo supondo que $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$, com $\|u\|_p \neq 0$ e $\|v\|_{p'} \neq 0$ e tomando $\alpha = \dfrac{|u(x)|}{\|u\|_p}$ e $\beta = \dfrac{|v(x)|}{\|v\|_{p'}}$ na desigualdade de Young, chegamos à

$$\frac{|u(x)v(x)|}{\|u\|_p\|v\|_{p'}} \leq \frac{|u(x)|^p}{p\|u\|_p^p} + \frac{|v(x)|^{p'}}{p'\|v\|_{p'}^{p'}}\,,$$

integrando em Ω,

$$\frac{1}{\|u\|_p\|v\|_{p'}} \int_\Omega |u(x)v(x)|\,dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Segue que uv é integrável e (1.1) acontece. $\square$

Lema 1.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado, isto é, Ω possui medida finita, então temos que $L^p(\Omega)$ esta imerso continuamente em $L^q(\Omega)$ para $1 \leq q \leq p$, ou seja, existe uma constante C (dependendo de Ω), tal que*

$$\|u\|_q \leq C\|u\|_p\,, \quad \forall u \in L^p(\Omega) \quad e \quad 1 \leq q \leq p.$$

Demonstração: Seja $u \in L^p(\Omega)$, queremos mostrar que $u \in L^q(\Omega)$ onde $q \leq p$. Se $p = q$ é direto. Seja $q < p$, então

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0,$$

Definindo $s := \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, teremos $qs + \frac{q}{p} = 1$, conseqüentemente

$$\frac{1}{\frac{1}{qs}} + \frac{1}{\frac{p}{q}} = 1.$$

Como $1 < \frac{p}{q}$ e $qs = 1 - \frac{q}{p}$, temos que $1 < \frac{1}{qs}$. Por outro lado, $|u|^q \in L^{\frac{p}{q}}(\Omega)$ e $g \equiv 1 \in L^{\frac{1}{qs}}(\Omega)$. De fato

$$\int_\Omega (|u|^q)^{\frac{p}{q}}\, dx = \int_\Omega |u|^p\, dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_\Omega |1|^{\frac{1}{qs}}\, dx = \mu(\Omega) < \infty,$$

onde $\mu(\Omega)$ denota a medida de Ω. Logo da desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^q\, dx = \int_\Omega |u|^q g\, dx \ &\leq \ \left(\int_\Omega (|u|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega 1^{\frac{1}{qs}} d\mu\right)^{qs} \\
&= \ \left(\int_\Omega (|u|^p) d\mu\right)^{\frac{q}{p}} \mu(\Omega)^{qs} \\
&= \ \mu(\Omega)^{qs} \|u\|_p^q < \infty.
\end{aligned}$$

Então $u \in L^q(\Omega)$, e segue que $\|u\|_q \leq C\|u\|_p$, onde $C = \mu(\Omega)^s$, o que mostra a continuidade da imersão. □

1.3 Distribuições

Espaço de funções teste

Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, denotemos por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}}\ , \quad \text{onde} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

o operador diferencial de ordem α.

Se u é uma função mensurável sobre Ω e $(\omega_i)_{i\in I}$ é a família de todos subconjuntos abertos de Ω, tal que $u = 0$ q.t.p em cada ω_i, temos que $u = 0$ q.t.p. em $\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$, e o suporte de u (*supp* u) é definido como o subconjunto fechado

$$supp\ u = \Omega \setminus \omega.$$

No caso em que u seja contínua

$$supp\ u = \overline{\{x \in \Omega; \quad u(x) \neq 0\}}.$$

Dizemos que uma função u tem suporte compacto em Ω, se existir $K \subset \Omega$ compacto tal que

$$supp\ u \subset K.$$

Representa-se por $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções reais definidas em Ω, com suporte compacto e derivadas parciais de todas as ordens. Em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ considera-se a seguinte noção de convergência:
Uma seqüência de funções $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ quando:

(i) Todas as φ_n possuem suportes contidos em um compacto fixo K de Ω;

(ii) A seqüência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero uniformemente em K, juntamente com suas derivadas de todas as ordens.

Seja $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ se $(\varphi_n - \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero como definido acima. Ao espaço $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$, o qual chamamos espaço das funções testes.

Exemplo 1.1 *A função $\rho : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ definida por:*

$$\rho(x) = \begin{cases} exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|_2^2}\right) & se \quad \|x\|_2 < 1 \\ 0 & se \quad \|x\|_2 \geq 1 \end{cases}$$

pertence à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, e supp $u = \{x \in \mathbb{R}^n; \ \|x\|_2 \leq 1\}$.

Teorema 1.5 *O espaço $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Veja [3] página 71.

Definição 1.3 (Distribuição) *Uma distribuição sobre Ω, é uma forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}(\Omega)$, i.e.*

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

(ii) Se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$ então $(T(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

Representamos por $\langle T, \varphi \rangle$ a distribuição T em φ, e por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço vetorial das distribuições sobre Ω. Dizemos que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando a seqüência $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
A notação $L^p_{loc}(\Omega)$ será usada para designar o espaço vetorial

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f \in L^p(K) \quad \forall K \quad \text{compacto} \quad K \subset \Omega\}.$$

Pode-se comprovar sem dificuldades que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, para todo $p \geq 1$.

Exemplo 1.2 *Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então a forma linear T_u definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

é uma distribuição.

Prova: Como cada φ possui suporte compacto em Ω, esta integral existe, logo T_u está bem definida. Além disso, T_u é univocamente determinada por u. Como T é dada por uma integral, é linear, logo para provar que é uma distribuição basta demonstrar que é contínua.

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| \leq \int_\Omega |u(x)||\varphi(x)|\, dx \leq (\max_{x\in K} |\varphi(x)|) \int_K |u(x)| dx,$$

isto é,

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| \leq C(\max_{x\in K} |\varphi(x)|). \tag{1.2}$$

Logo se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, para todo $\delta > 0$ existe um compacto fixo $K \subset \Omega$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\text{se} \quad n > n_0 \Longrightarrow \max_{x\in K} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| < \delta.$$

Tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$, da relação (1.2) temos que dado $\varepsilon > 0$, se $n > n_0$

$$\left|\left\langle T_u, \varphi\right\rangle - \left\langle T_u, \varphi_n\right\rangle\right| \leq C(\max_{x\in K} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|) < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

□

Lema 1.5 (Du Bois Raymond) *Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = 0$, se e somente se $u = 0$ q.t.p. em Ω.*

Demonstração: Veja [10] página 10.

Exemplo 1.3 *Seja $x_0 \in \Omega$, então a forma linear δ_{x_0} definida por*

$$\left\langle \delta_{x_0}, \varphi\right\rangle = \varphi(x_0), \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

é chamada de distribuição de Dirac concentrada em x_0.

A distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. De fato, seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, suponha que

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(x_0) = \left\langle \delta_{x_0}, \varphi\right\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

logo se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos que $\widetilde{\varphi}(x) = \|x - x_0\|^2\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$, então

$$\int_\Omega u(x)\|x - x_0\|^2\varphi(x)\,dx \Longrightarrow \int_\Omega u(x)\widetilde{\varphi}(x)\,dx = \widetilde{\varphi}(x_0) = 0 \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

e pelo Lema de Du Bois Raymond, $u(x)\|x - x_0\|^2 = 0$ q.t.p. em Ω, o que implica que $u(x) = 0$ q.t.p. em Ω, isto é, $\delta_{x_0} = 0$, contradição.

Definição 1.4 (Derivada de uma Distribuição) *Considere $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de T de ordem α é a distribuição representada por $D^\alpha T$, definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por*

$$\big\langle D^\alpha T, \varphi \big\rangle = (-1)^{|\alpha|} \big\langle T, D^\alpha \varphi \big\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemplo 1.4 (Função Heaviside) *A função definida da seguinte forma: $u(x) = 1$ se $x > 0$ e $u(x) = 0$ se $x < 0$, é chamada de função Heaviside. Ela pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, mas sua derivada no sentido das distribuições é*

$$\big\langle u', \varphi \big\rangle = -\big\langle u, \varphi' \big\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \big\langle \delta_0, \varphi \big\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

logo $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Este fato motiva a definição dos espaços de Sobolev, uma classe de espaços de Banach muito importante no estudo que segue deste trabalho.

1.4 Espaços de Sobolev

Nesta seção introduzimos os espaços de Sobolev, e algumas propriedades que serão usadas posteriormente. Como visto na seção anterior, se $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, então u possui derivada de todas as ordens no sentido das ditribuições, porém sua derivada também chamada de derivada fraca, não é em geral uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Representamos por $W^{1,p}(\Omega)$ o espaço de Sobolev das funções $u \in L^p(\Omega)$ tal que a derivada fraca $Du \in L^p(\Omega)$, ou ainda:

Definição 1.5 *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Define-se o espaço de Sobolev*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &= \{u \in L^p(\Omega); \quad Du \in L^p(\Omega)\} \\ &= \Big\{u \in L^p(\Omega); \quad \exists\, v_1, v_2, ..., v_n \in L^p(\Omega);\ \textit{tal que} \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega v_i \varphi\, dx \\ &\quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, ..., n\Big\}. \end{aligned}$$

No caso em que $u \in W^{1,p}(\Omega)$, temos $v_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ e

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Denotamos com $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Proposição 1.1 *O espaço $W^{1,p}$, para $1 \leq p \leq \infty$ é um espaço de Banach munido da norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p,$$

ou da norma equivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Para $p = \infty$, temos que

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} = \sum \sup_{x \in \Omega} ess |Du(x)|.$$

O espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_2.$$

Demonstração: Veja [3] página 150.

Definição 1.6 (O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$) *Seja $1 \leq p < \infty$; definimos*

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)} \quad em \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Denotamos com $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Teorema 1.6 *Suponha Ω de classe C^1, tal que*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \quad com \quad 1 \leq p < \infty,$$

então são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) $u = 0$ *sobre* $\partial\Omega$*;*

(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Ou seja, de maneira "grosseira"podemos considerar que os elementos de $W_0^{1,p}(\Omega)$*, são as funções de* $W^{1,p}(\Omega)$ *que se anulam na fronteira de* Ω.

Demonstração: Veja [3] página 171.

Teorema 1.7 *Seja* Ω *de classe* C^1*. Se* $u \in L^p(\Omega)$ *com* $1 < p < \infty$*. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*;*

(ii) Existe uma constante $C \geq 0$*, tal que*

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \right| \leq C \|\varphi\|_{p'} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall i = 1, ..., n\ ;$$

(iii) A função $\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & se \quad x \in \Omega \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$ *, pertence a* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *e neste caso* $\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = \overline{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}$.

Demonstração: Veja [3] página 172.

Como conseqüência deste teorema, temos um resultado muito importante, que será utilizado com freqüência neste trabalho.

Corolário 1.1 (Desigualdade de Poincaré) *Seja* Ω *aberto e limitado em* $\mathbb{R}^n$*. Então existe uma constante* C *(dependendo somente de* Ω *e* p*) tal que*

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

A expressão $\|\nabla u\|_p$ define uma norma para $W_0^{1,p}(\Omega)$, e para $H_0^1(\Omega)$ definimos o seguinte produto interno

$$(u, v)_{H_0^1} := \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx\ .$$

Os Espaços $W^{m,p}(\Omega)$

Seja $m \geq 2$ inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos por recorrência os espaços de Sobolev

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\Omega) &= \big\{u \in W^{m-1,p}(\Omega); \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1,2,...,n\big\} \\ &= \big\{u \in L^p(\Omega); \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ com } |\alpha| \leq m, \quad \exists\, v_\alpha \in L^p(\Omega), \quad \text{tal que} \\ &\qquad \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\big\}. \end{aligned}$$

Denotamos por $v_\alpha = D^\alpha u$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$, munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{se} \quad 1 \leq p < \infty, \quad \text{ou}$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \quad \text{se} \quad p = \infty$$

é um espaço de Banach. Quando $p = 2$ temos o espaço de Hilbert $H^m(\Omega)$.

Imersões de Espaços de Sobolev

Estamos interessados aqui na imersão dos espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$. Temos três casos a considerar, $mp < n$, $mp > n$, e $mp = n$. Verifica-se então que $W^{m,p}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^{q^*}(\Omega)$, para um q^* especial, visto a seguir.

Teorema 1.8 *Seja $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Se $n \geq 2$, verifica-se:*

- *Se $mp < n$, então $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ para $p \leq q \leq q^*$ onde $\dfrac{1}{q^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$;*
- *Se $mp = n$, então $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q^*}(\mathbb{R}^n) \quad \forall q^* \in [p, \infty)$;*
- *Se $mp > n$, então $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

com imersões contínuas.

Demonstração: Ver [3] página 168.

No caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto de classe C^1, com fronteira $\partial\Omega$ limitada tem-se:

Corolário 1.2 *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Então*

- *Se $1 \leq p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para $p \leq q \leq q^*$ onde $\dfrac{1}{q^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$;*
- *Se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{q^*}(\Omega) \quad \forall q^* \in [p, \infty)$;*
- *Se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.*

com imersões contínuas.

Demonstração: Ver [3] página 168.

No caso em que $n = 1$, temos uma melhor regularidade para as funções de $W^{m,p}$. Para $I \subseteq \mathbb{R}$ é válida a inclusão

- $W^{m,p}(I) \subset C^{m-1}(\overline{I})$ com imersão contínua (Veja [3] página 132).

Observação: Usaremos a notação $Y \hookrightarrow X$ para designar que o espaço Y está imerso continuamente em X.

Seja X um espaço de Hilbert real e separável.

Definição 1.7 *O espaço $L^p(0, T; X)$, com $1 \leq p < \infty$, consiste nas funções mensuráveis $\omega : [0, T] \longrightarrow X$, tal que*

$$\|\omega\|_{L^p(0,T,X)} = \left(\int_0^T \|\omega(t)\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Para $p = \infty$ temos

$$\|\omega\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup_{0 \leq t \leq T} ess \|\omega(t)\|_X < \infty.$$

Definição 1.8 (Distribuição Vetorial) *Uma distribuição vetorial sobre $(0, T)$, com valores em X, é uma aplicação linear contínua sobre $\mathcal{D}(0, T)$ com valores em X. Denotamos o espaço das distribuições vetoriais com $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T), X)$.*

Exemplo 1.5 *Semelhante ao Exemplo 1.2, dada $v \in L^p(0, T; X)$, a aplicação definida por*

$$\langle T_v, \varphi \rangle = \int_0^T v(s)\varphi(s)\, ds, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T),$$

é uma distribuição vetorial.

Analogamente a Definição 1.4, dada $S \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T),X)$ definimos sua derivada de orden n por

$$\Big\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \Big\rangle = (-1)^n \Big\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \Big\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T),$$

sendo $\dfrac{d^n S}{dt^n}$ também uma distribuição vetorial. Dizemos que $S_i \longrightarrow S$ em $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T),X)$ quando:

$$\big\langle S_i, \varphi \big\rangle \longrightarrow \big\langle S, \varphi \big\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Definição 1.9 *Seja $\omega \in L^p(0,T,X)$. Se existe $\psi \in L^p(0,T,X)$ tal que*

$$\int_0^T \omega(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T \psi(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Então temos a derivada fraca $\omega' = \psi$ (derivada no sentido das distribuições vetoriais) e definimos o espaço de Sobolev $W^{1,p}(0,T,X)$, das funções $\omega \in L^p(0,T,X)$ tal que $\omega' \in L^p(0,T,X)$, munido da seguinte norma

$$\|\omega\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|\omega(t)\|_X^p + \|\omega'(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad se \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\omega\|_{W^{1,\infty}(0,T;X)} := \sup_{1 \leq t \leq T} ess(\|\omega(t)\|_X + \|\omega'(t)\|_X) \quad se \quad p = \infty.$$

Teorema 1.9 *Seja $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ para $1 \leq p \leq \infty$. Então*

- $u \in C([0,T];X)$,
- $\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X \leq C\|u(t)\|_{W^{1,p}(0,T;X)}$ *onde a constante C depende somente de T.*

Demonstração: Veja [4] página 286.

Capítulo 2

Existência e Unicidade

O objetivo deste capítulo é mostrar que existe uma única função u, solução fraca do problema da equação de onda não-linear, dado pelo seguinte modelo:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u + a(1 + |u_t|^{m-2})u_t = bu|u|^{p-2}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ &u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, sendo $a, b > 0$ e $m, p > 2$, constantes. Provaremos a existência e unicidade de uma solução local do problema (2.1), e no próximo capítulo, para dados iniciais φ e ψ pequenos, a existência global. Usaremos a existência e unicidade de solução do seguinte problema auxiliar:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u + a(1 + |u_t|^{m-2})u_t = h, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T), \ a > 0 \ \text{ e } \ m > 2, \\ &u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Teorema 2.1 *Seja $T > 0$. Se h, u_0 e u_1 são funções dadas, tal que*

$$h \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial h}{\partial t} \in L^2(0,T; L^2(\Omega));$$

$$u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(m-1)}(\Omega);$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado de fronteira $\partial\Omega$ suave. Então existe uma única solução $u(x,t)$ do problema (2.2), tal que

$$u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)),$$

$$u_t \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^m(\Omega\times(0,T)),$$

$$u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Demonstração: A prova deste teorema é semelhante a do Teorema 3.1 de [8] página 38, a qual omitiremos aqui.

Quando não houver confusão usaremos a notação $u(t)$, ou simplesmente u no lugar de $u(x,t)$, também u' e u'' ao invés de u_t e u_{tt}. Para simplificar e facilitar a leitura do texto, muitas vezes denotaremos com o mesmo símbolo várias constantes diferentes, quando estas não interfirirem no resultado procurado.

2.1 Formulação variacional

A fim de introduzir um conceito de solução fraca do problema (2.1) multiplicamos a equação

$$u_{tt} - \Delta u + a(1+|u_t|^{m-2})u_t = bu|u|^{p-2} \tag{2.3}$$

por $\kappa \in H_0^1(\Omega)\cap L^m(\Omega)$, e integrando em Ω chegamos à

$$\frac{d}{dt}(u_t,\kappa)_2 + (\nabla u,\nabla\kappa)_2 + (au_t + au_t|u_t|^{m-2},\kappa)_2 = (bu|u|^{p-2},\kappa)_2,$$

onde esta igualdade variacional consiste em "substituir"a igualdade pontual (2.3). Chamaremos de solução fraca do problema (2.1), toda função u que satisfaz

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(u_t,\kappa)_2 + (\nabla u,\nabla\kappa)_2 + (au_t + au_t|u_t|^{m-2},\kappa)_2 = (bu|u|^{p-2},\kappa)_2,\\ &u(x,t) = 0, \quad x\in\partial\Omega, \quad t\geq 0,\\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x\in\Omega. \end{aligned} \tag{2.4}$$

para toda κ em $H_0^1(\Omega)\cap L^m(\Omega)$.

Consideremos o espaço energia $H = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ munido do seguinte produto interno

$$(U,V)_H = (\nabla u_1,\nabla v_1)_2 + (u_2,v_2)_2,$$

e a norma associada

$$\|U\|_H = \left(\|\nabla u_1\|_2^2 + \|u_2\|_2^2\right)^{1/2},$$

onde

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in H.$$

Teorema 2.2 (Existência e Unicidade) *Sejam $m > 2$ e*

$$p > 2 \quad \textit{quando} \quad n \le 2 \quad \textit{ou} \quad 2 < p \le 2\frac{n-1}{n-2} \quad \textit{quando} \quad n \ge 3. \tag{2.5}$$

Se

$$(\varphi, \psi) \in H, \tag{2.6}$$

então o problema (2.1) *tem única solução fraca u, tal que*

$$\begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in Y_T = \left\{ U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}; \quad U \in C([0,T]; H), \quad u_2 \in L^m(\Omega \times (0,T)) \right\},$$

para um T suficientemente pequeno.

Antes de provar o teorema acima, usaremos a equação de evolução abstrata do problema (2.1) no seguinte sentido: Seja

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad g(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ a(u_2 + u_2|u_2|^{m-2}) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ bu_1|u_1|^{p-2} \end{pmatrix}$$

Então, se $U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}$ o problema (2.1) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\partial_t U - AU + g(U) = f(U), \quad U(0) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Provaremos primeiro a seguinte proposição.

Proposição 2.1 *Suponha que as condições* (2.5) *e* (2.6) *do Teorema* 2.2 *sejam válidas. Então dado $U \in C([0,T];H)$, existe um único $V \in Y_T$ solução fraca de*

$$\partial_t V - AV + g(V) = f(U), \quad V(0) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

onde

$$V = \begin{pmatrix} v \\ v_t \end{pmatrix},$$

e vale a seguinte identidade de energia

$$\frac{1}{2}\|V(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|V(0)\|_H^2 + \int_0^t (g(V),V)_H d\tau = \int_0^t (f(U),V)_H d\tau.$$

Demonstração: Por definição $H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}$ em $H^1(\Omega)$, e como $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ temos que

$$H = \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{H^1} \times \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{L^2} = \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)^2}^{H},$$

logo para os dados iniciais $(\varphi,\psi) \in H$, existe uma seqüência $((\varphi_i,\psi_i))_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)^2$, tal que

$$(\varphi_i,\psi_i) \longrightarrow (\varphi,\psi) \quad \text{em} \quad H.$$

Do Teorema 1.2 do Capítulo 1, para cada elemento $U \in C([0,T];H)$, existe uma seqüência $(U^i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C^1([0,T];\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)^2)$, tal que

$$U^i \longrightarrow U \quad \text{em} \quad C([0,T];H).$$

Usaremos daqui em diante a notação u^i para designar o índice da seqüência $(u^i)_{i\in\mathbb{N}}$ e não o expoente da função u.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, consideremos o problema

$$\begin{aligned} & v_{tt}^i - \Delta v^i + a(1+|v_t^i|^{m-2})v_t^i = bu_1^i|u_1^i|^{p-2}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ & v^i(x,t) = 0 \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ & v^i(0) = \varphi^i \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \quad \text{e} \quad v_t^i(0) = \psi^i \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \end{aligned} \tag{2.8}$$

e $U^i = \begin{pmatrix} u_1^i \\ u_2^i \end{pmatrix}$ a seqüência que aproxima U em $C([0,T];H)$.

Verifiquemos que $u_0 = \varphi^i, u_1 = \psi^i$ e $h = bu_1^i|u_1^i|^{p-2}$ satisfazem as hipóteses do Teorema 2.1, e portanto existe um único v^i solução de (2.8) com as seguintes características

$$v^i \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

$$v_t^i \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^m(\Omega \times (0,T)),$$

$$v_{tt}^i \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

ou seja, existe um único $V^i = \begin{pmatrix} v^i \\ v_t^i \end{pmatrix}$ solução do problema abstrato

$$\partial_t V^i - AV^i + g(V^i) = f(U^i), \quad V^i(0) = \begin{pmatrix} \varphi^i \\ \psi^i \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

De fato, temos que $\varphi^i, \psi^i \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, portanto $\varphi^i \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $\psi^i \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(m-1)}(\Omega)$. Verifiquemos então que

$$h = bu_1^i|u_1^i|^{p-2} \in L^2(0,T;H_0^1) \quad \text{e} \quad h' = b(p-1)|u_1^i|^{p-2}(u_1^i)' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Como a função $G(s) = bs|s|^{p-2} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e $u_1^i(t) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$G \circ u_1^i(t) = bu_1^i(t)|u_1^i(t)|^{p-2} \in \mathcal{C}_0^1(\Omega),$$

então, $h = bu_1^i|u_1^i|^{p-2} \in C([0,T];\mathcal{C}_0^1(\Omega)) \subset L^2(0,T,\mathcal{C}_0^1(\Omega))$. Por outro lado, como $\mathcal{C}_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, segue que $h \in L^2(0,T;\mathcal{C}_0^1(\Omega)) \subset L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Observe agora que $G'(s) = (p-1)b|s|^{p-2} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, então

$$[G \circ u_1^i(t)]' = G'(u_1^i(t))(u_1^i(t))' = (p-1)b|u_1^i(t)|^{p-2}(u_1^i(t))' \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

Portanto $h' = (p-1)b|u_1^i|^{p-2}(u_1^i)' \in C([0,T];\mathcal{C}_0(\Omega)) \subset L^2(0,T;\mathcal{C}_0(\Omega))$. Como $\mathcal{C}_0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, segue que $h' \in L^2(0,T;\mathcal{C}_0(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Então, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe uma única solução V^i do problema abstrato (2.9).

Mostraremos que esta " seqüência de soluções " $(V^i)_{i\in\mathbb{N}}$ do problema (2.9), converge em Y_T para uma solução fraca V de (2.7).

$(V^i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge para alguma V em Y_T

Verifiquemos que $V^i \in Y_T$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Como $v^i \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \subset L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $v_t^i \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, temos que $v^i \in W^{1,\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))$, então pelo Teorema 1.9 do capítulo 1, concluimos que $v^i \in C([0,T],H_0^1(\Omega))$. Analogamente $v_t^i \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \subset L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e $v_{tt}^i \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, então $v_t^i \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$, logo $v_t^i \in C([0,T],L^2(\Omega))$, e como $v_t^i \in L^m(\Omega\times(0,T))$ segue que $V^i \in Y_T$. Definimos uma norma para Y_T da seguinte forma

$$\|U\|_{Y_T} = \|U\|_{C([0,T];H)} + \|u_2\|_{L^m(\Omega\times(0,T))}, \quad \text{para todo} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in Y_T.$$

O espaço Y_T munido desta norma é um espaço de Banach. Então para provar que $(V^i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge para algum V em Y_T, basta que $(V^i)_{i\in\mathbb{N}}$ seja de Cauchy em $C([0,T];H)$ e $(v_t^i)_{i\in\mathbb{N}}$ seja de Cauchy em $L^m(\Omega\times(0,T))$.

$(V^i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $C([0,T];H)$

Denotemos por $W = V^i - V^j$, onde V^i e V^j são soluções de (2.9), então

$$\partial_t W - AW + g(V^i) - g(V^j) = f(U^i) - f(U^j), \quad W(0) = \begin{pmatrix} \varphi^i - \varphi^j \\ \psi^i - \psi^j \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$(\partial_t W, W)_H - (AW,W)_H + (g(V^i) - g(V^j), W)_H = (f(U^i) - f(U^j), W)_H. \quad (2.10)$$

Estudaremos separadamente cada termo da equação acima. Observe que

$$\partial_t W = \partial_t \begin{pmatrix} v^i - v^j \\ v_t^i - v_t^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_t^i - v_t^j \\ v_{tt}^i - v_{tt}^j \end{pmatrix}$$

então,

$$
\begin{aligned}
(\partial_t W, W)_H &= \left(\nabla(v_t^i - v_t^j), \nabla(v^i - v^j)\right)_2 + \left(v_{tt}^i - v_{tt}^j, v_t^i - v_t^j\right)_2 \\
&= \int_\Omega \nabla\partial_t(v^i - v^j)\nabla(v^i - v^j)\, dx + \int_\Omega (v_t^i - v_t^j)\partial_t(v_t^i - v_t^j)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\partial_t\left(\int_\Omega |\nabla(v^i - v^j)|^2\, dx\right) + \frac{1}{2}\partial_t\left(\int_\Omega [(v_t^i - v_t^j)]^2\, dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\partial_t\left(\|\nabla(v^i - v^j)\|_2^2 + \|v_t^i - v_t^j\|_2^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\partial_t\|W(t)\|_H^2. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
AW = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^i - v^j \\ v_t^i - v_t^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_t^i - v_t^j \\ \Delta(v^i - v^j) \end{pmatrix}.
$$

Logo, desde que $v_t^i(t), v_t^j(t) \in H_0^1(\Omega)$, e usando integração por partes em Ω, temos

$$
\begin{aligned}
(AW, W)_H &= \left(\nabla(v_t^i - v_t^j), \nabla(v^i - v^j)\right)_2 + \left(\Delta(v^i - v^j), v_t^i - v_t^j\right)_2 \\
&= \left(\nabla(v_t^i - v_t^j), \nabla(v^i - v^j)\right)_2 + \int_{\partial\Omega}(v_t^i - v_t^j)\frac{\partial}{\partial\nu}(v^i - v^j)dx \\
&- \int_\Omega \nabla(v_t^i - v_t^j)\nabla(v^i - v^j)\, dx = 0\,, \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

onde ν é a normal unitária externa a $\partial\Omega$. Substituindo (2.11) e (2.12) em (2.10) e integrando 0 à t, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|W(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|W(0)\|_H^2 &+ \int_0^t (g(V^i) - g(V^j), W)_H d\tau \\
&= \int_0^t (f(U^i) - f(U^j), W)_H d\tau \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

- Verifiquemos que $(g(V^i) - g(V^j), W)_H \geq 0$.

De fato, a função real $f(s) = s|s|^{m-2}$ para $m > 2$ é crescente em $\mathbb{R}$, então

$$(s|s|^{m-2} - r|r|^{m-2})(s-r) = (f(s) - f(r))(s-r) \geq 0, \quad \forall s, r \in \mathbb{R},$$

logo, é válida a seguinte expressão

$$(v_t^i(x,t)|v_t^i(x,t)|^{m-2} - v_t^j(x,t)|v_t^j(x,t)|^{m-2})(v_t^i(x,t) - v_t^j(x,t)) \geq 0,$$

portanto, segue que

$$a \int_\Omega (v_t^i|v_t^i|^{m-2} - v_t^j|v_t^j|^{m-2})(v_t^i - v_t^j)\, dx \geq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(g(V^i) - g(V^j), W)_H &= \left(a(v_t^i + v_t^i|v_t^i|^{m-2} - v_t^j - v_t^j|v_t^j|^{m-2}), v_t^i - v_t^j\right)_2 \\ &= a\|v_t^i - v_t^j\|_2^2 + a\left(v_t^i|v_t^i|^{m-2} - v_t^j|v_t^j|^{m-2}, v_t^i - v_t^j\right)_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Então, em (2.13) temos que $\displaystyle\int_0^t (g(V^i) - g(V^j), W)_H d\tau \geq 0$. Logo

$$\frac{1}{2}\|W(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|W(0)\|_H^2 + \int_0^t (f(U^i) - f(U^j), W)_H d\tau. \tag{2.14}$$

- Se $U, \overline{U}, V$ e $\overline{V} \in H$, vejamos que

$$\left|(f(U) - f(\overline{U}), V - \overline{V})_H\right| \leq C(\|U\|_H + \|\overline{U}\|_H)^{p-2}\|U - \overline{U}\|_H\|V - \overline{V}\|_H \tag{2.15}$$

onde C é uma constante que depende de Ω. De fato, sejam

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \overline{U} = \begin{pmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{pmatrix} \text{ e } \overline{V} = \begin{pmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{v}_2 \end{pmatrix},$$

e consideremos a função $f(s) = s|s|^{p-2}$ para $p > 2$, assim $f'(s) = (p-1)|s|^{p-2}$, e para $a \leq s \leq b$ temos $|s| \leq \max\{|a|; |b|\}$, então

$$(p-1)|s|^{p-2} \leq (p-1)(|a|^{p-2} + |b|^{p-2}), \quad \forall s \in [a,b].$$

Considerando $a \leq b$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$b|b|^{p-2} - a|a|^{p-2} = \int_a^b (p-1)|s|^{p-2} ds \leq (p-1)(b-a)(|a|^{p-2} + |b|^{p-2}),$$

então, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ vale a seguinte relação

$$\left| b|b|^{p-2} - a|a|^{p-2} \right| \leq (p-1)|b-a|(|a|^{p-2} + |b|^{p-2}),$$

usando esta desigualdade, obtemos que

$$\begin{aligned}
\left|(f(U) - f(\overline{U}), V - \overline{V})_H\right| &= b\left|(u_1|u_1|^{p-2} - \overline{u}_1|\overline{u}_1|^{p-2}, v_2 - \overline{v}_2)_2\right| \\
&\leq b \int_\Omega |u_1|u_1|^{p-2} - \overline{u}_1|\overline{u}_1|^{p-2}||v_2 - \overline{v}_2|\, dx \\
&\leq (p-1)b \int_\Omega |u_1 - \overline{u}_1|(|u_1|^{p-2} + |\overline{u}_1|^{p-2})|v_2 - \overline{v}_2|\, dx \\
&= (p-1)b \int_\Omega |u_1 - \overline{u}_1||u_1|^{p-2}|v_2 - \overline{v}_2|\, dx + \\
&+ (p-1)b \int_\Omega |u_1 - \overline{u}_1||\overline{u}_1|^{p-2}|v_2 - \overline{v}_2|\, dx. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Neste ponto, suponhamos que $n(p-2) \geq 1$. Assim, fazendo uso da desigualdade de Hölder em cada integral de (2.16), tem-se

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_1 - \overline{u}_1||u_1|^{p-2}|v_2 - \overline{v}_2|\, dx &\leq \left(\int_\Omega |u_1 - \overline{u}_1|^2|u_1|^{2(p-2)}\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v_2 - \overline{v}_2|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\left(\int_\Omega (|u_1 - \overline{u}_1|^2)^{\frac{n}{n-2}}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \left(\int_\Omega |u_1|^{2(p-2)\frac{n}{2}}\, dx\right)^{\frac{2}{n}}\right]^{\frac{1}{2}} \|v_2 - \overline{v}_2\|_2 \\
&= \|u_1 - \overline{u}_1\|_{\frac{2n}{n-2}} \|u_1\|_{n(p-2)}^{p-2} \|v_2 - \overline{v}_2\|_2. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Analogamente

$$\int_\Omega |u_1 - \overline{u}_1||\overline{u}_1|^{p-2}|v_2 - \overline{v}_2|\, dx \leq \|u_1 - \overline{u}_1\|_{\frac{2n}{n-2}} \|\overline{u}_1\|_{n(p-2)}^{p-2} \|v_2 - \overline{v}_2\|_2.$$

Assim, da expressão (2.16) chegamos à

$$|(f(U)-f(\overline{U}),V-\overline{V})_H| \leq c\|u_1-\overline{u}_1\|_{\frac{2n}{n-2}}\|v_2-\overline{v}_2\|_2(\|u_1\|^{p-2}_{n(p-2)}+\|\overline{u}_1\|^{p-2}_{n(p-2)}) \tag{2.18}$$

onde $c=(p-1)b$.

Se $n>2$, temos que $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $2\leq q\leq q^*$, onde $q^*=\dfrac{2n}{n-2}$. Usando estas imersões concluimos que

$$\|u_1-\overline{u}_1\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq C^*\|u_1-\overline{u}_1\|_{H^1(\Omega)}.$$

Como $u_1,\overline{u}_1\in H^1_0(\Omega)$, da desigualdade de Poincaré temos

$$\begin{aligned}\|u_1-\overline{u}_1\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq C^*\|u_1-\overline{u}_1\|_{H^1(\Omega)} &\leq C\|\nabla(u_1-\overline{u}_1)\|_2\\ &\leq C(\|\nabla\left(u_1-\overline{u}_1\right)\|_2^2+\|u_2-\overline{u}_2\|_2^2\big)^{\frac{1}{2}}\\ &= C\|U-\overline{U}\|_H \qquad (2.19)\end{aligned}$$

Agora, estimaremos a norma $\|\cdot\|_{n(p-2)}$ em relação a norma $\|\cdot\|_H$. Caso tenhamos $n(p-2)\geq 2$, então da hipótese $p\leq 2\dfrac{n-1}{n-2}$ se $n\geq 3$, implica que $n(p-2)\leq\dfrac{2n}{n-2}$, e se $n\leq 2$ basta que $n(p-2)\geq 2$. Então das imersões de espaços de Sobolev temos que $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^{n(p-2)}(\Omega)$. Caso $n(p-2)<2$, como Ω é limitado sua medida é finita, então $L^2(\Omega)\hookrightarrow L^{n(p-2)}$, porém $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$, então também é válida a imersão $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^{n(p-2)}(\Omega)$. Assim, usando raciocínio semelhante à (2.19), segue que

$$\|u_1\|_{n(p-2)}\leq C\|U\|_H \quad \text{e} \quad \|\overline{u}_1\|_{n(p-2)}\leq C\|\overline{U}\|_H.$$

E destas desigualdades acima, através de cálculos simples, obtemos

$$\|u_1\|^{p-2}_{n(p-2)}+\|u_1\|^{p-2}_{n(p-2)}\leq C(\|U\|_H+\|\overline{U}\|_H)^{p-2}. \tag{2.20}$$

Também é válida a seguinte desigualdade

$$\|v_2-\overline{v}_2\|_2\leq\|V-\overline{V}\|_H. \tag{2.21}$$

Portanto, substituindo (2.19) – (2.21) em (2.18) obtemos (2.15).

Observação: Caso se tenha $0 < n(p-2) < 1$, não faz sentido trabalhar com a norma $\|\cdot\|_{n(p-2)}$ em (2.17), porém observe que a idéia usada no processo foi majorar a integral

$$\left(\int_\Omega |u_1|^{n(p-2)}\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$$

em relação à norma $\|U\|_H^{p-2}$ (veja 2.18 e 2.20). Verifiquemos que é possível obter esta majoração sendo $\alpha := n(p-2) < 1$. De fato, temos que $q = \dfrac{1}{\alpha} > 1$, $q' = \dfrac{1}{1-\alpha} > 1$ e $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$, logo pela desigualdade de Hölder

$$\int_\Omega |u_1|^\alpha\,dx \leq \left(\int_\Omega |u_1|\,dx\right)^\alpha \left(\int_\Omega 1^{\frac{1}{1-\alpha}}\,dx\right)^{1-\alpha} = C^*\|u_1\|_1^\alpha \tag{2.22}$$

onde C^* é uma constante envolvendo a medida finita do conjunto Ω. Por outro lado, das imersões de espaços de Sobolev, temos que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $2 \leq q \leq \dfrac{2n}{n-2}$ caso $n \geq 3$, ou simplesmente $q \geq 2$ quando $n \leq 2$. Como Ω é limitado tem-se que $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, donde concluimos que $H^1(\Omega)$ esta imerso continuamente em $L^1(\Omega)$, isto é, existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|u_1\|_1 \leq C\|u_1\|_{H^1}$, portanto usando esta estimativa em (2.22) chegamos à

$$\int_\Omega |u_1|^\alpha\,dx \leq C^*\|u_1\|_1^\alpha \leq C\|u_1\|_{H^1}^\alpha \Longrightarrow \left(\int_\Omega |u_1|^{n(p-2)}\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq C\|u_1\|_{H^1}^{p-2}.$$

Então desta desigualdade e observando (2.19) segue que a integral $\left(\int_\Omega |u_1|^{n(p-2)}\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$ pode ser majorada por $\|U\|_H^{p-2}$. Para

$$\left(\int_\Omega |\overline{u}_1|^{n(p-2)}\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$$

o raciocínio é idêntico.

Observe também que se $n \leq 2$ em (2.17), não faz sentido a expressão $\|u_1 - \overline{u}_1\|_{\frac{2n}{n-2}}$, então usamos p ao invés de n na desigualdade de Hölder, obtendo $\|u_1 - \overline{u}_1\|_{\frac{2p}{p-2}}$, e como $\dfrac{2p}{p-2} > 2$ temos que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2p}{p-2}}(\Omega)$, logo também é válido (2.19).

Para concluir, como $U^i \longrightarrow U$ em $C([0,T];H)$, existe $R \geq 0$ tal que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|U^i(t)\|_H \leq R \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

então, usando a estimativa (2.15) em (2.14), temos que

$$\begin{aligned} \|W(t)\|_H^2 &\leq \|W(0)\|_H^2 + 2\int_0^t (f(U^i) - f(U^j), W)_H d\tau \\ &\leq 2C\int_0^t (\|U^i(\tau)\|_H + \|U^j(\tau)\|_H)^{p-2}\|U^i(\tau) - U^j(\tau)\|_H \|W(\tau)\|_H d\tau \\ &+ \|W(0)\|_H^2 \\ &\leq \|W(0)\|_H^2 + C_R\int_0^t \|U^i(\tau) - U^j(\tau)\|_H \|W(\tau)\|_H. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Pelo Lema 1.2 do Capítulo 1, obtemos

$$\begin{aligned} \|W(t)\|_H &\leq \|W(0)\|_H + \frac{C_R}{2}\int_0^t \|U^i(\tau) - U^j(\tau)\|_H dt \\ &\leq \|W(0)\|_H + \frac{C_R}{2} T \|U^i - U^j\|_{C([0,T];H)}. \end{aligned}$$

Observe que o lado direito da desigualdade acima não depende de t, então

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|W(t)\|_H \leq \|W(0)\|_H + \frac{C_R}{2} T \|U^i - U^j\|_{C([0,T];H)},$$

como as seqüências $(U^i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(V^i(0))_{i\in\mathbb{N}}$ convergem em $C([0,T];H)$ e H respectivamente, da desigualdade acima concluimos que $(V^i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $C([0,T];H)$.

$(v_t^i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $L^m(\Omega \times (0,T))$

Do Lema 1.3, vimos que existe $0 < c < \dfrac{1}{2^{m-2}}$ tal que $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e tem-se

$$(\alpha + \alpha|\alpha|^{m-2} - \beta - \beta|\beta|^{m-2})(\alpha - \beta) \geq c|\alpha - \beta|^m.$$

Usando a desigualdade acima, temos que

$$\left[v_t^i(t) + v_t^i(t)|v_t^i(t)|^{m-2} - v_t^j(t) - v_t^j(t)|v_t^j(t)|^{m-2}\right]\left[v_t^i(t) - v_t^j(t)\right] \geq c|v_t^i(t) - v_t^j(t)|^m.$$

Integrando em Ω a expressão anterior resulta

$$\begin{aligned} c\|v_t^i(t)-v_t^j(t)\|_m^m &\leq (v_t^i+v_t^i|v_t^i|^{m-2}-v_t^j-v_t^j|v_t^j|^{m-2}, v_t^i-v_t^j)_2 \\ &= (g(V^i)-g(V^j), V^i-V^j)_H, \end{aligned}$$

em seguida, integrando de 0 à T e multiplicando por $\dfrac{1}{c}=C$, de (2.13) obtemos

$$\begin{aligned} \|v_t^i-v_t^j\|_{L^m(\Omega\times(0,T))} &= \int_0^T \|v_t^i(t)-v_t^j(t)\|_m^m dt \leq C\int_0^T (g(V^i)-g(V^j), V^i-V^j)_H dt \\ &\leq C\left(\frac{1}{2}\|W(0)\|_H^2+\int_0^T (f(U^i)-f(U^j), W)_H d\tau\right) \\ &\leq C\left(\frac{1}{2}\|W(0)\|_H^2+C_R T\|U^i-U^j\|_{C([0,T];H)}\|V^i-V^j\|_{C([0,T];H)}\right). \end{aligned}$$

Donde segue que $(v_t^i)_{i\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^m(\Omega\times(0,T))$. Resumindo, provamos que $(V^i)_{i\in\mathbb{R}}$ é uma seqüência de Cauchy em Y_T, então V^i converge para algum V em Y_T. Seja $V=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\in Y_T$ o limite de $(V^i)_{i\in\mathbb{R}}$, então $v_2=v_1'$, isto é, V tem a seguinte forma

$$V=\begin{pmatrix} v \\ v_t \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

De fato, temos que v^i (para cada $i\in\mathbb{N}$) e v_1 pertencem à $C([0,T];H_0^1(\Omega))\subset L^p(0,T;H_0^1(\Omega))$, logo podem ser representados por uma distribuição vetorial sobre $(0,T)$. Uma vez que $v^i\longrightarrow v_1$ em $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T),H_0^1(\Omega))$

$$\langle v^i,\varphi\rangle\longrightarrow\langle v_1,\varphi\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(0,T).$$

Em particular

$$-\langle v_t^i,\varphi\rangle=\langle v^i,\varphi'\rangle\longrightarrow\langle v_1,\varphi'\rangle=-\langle v_1',\varphi\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(0,T),$$

o que implica que

$$v_t^i\longrightarrow v_1' \quad \text{em} \quad \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T),H_0^1(\Omega))\subset\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T),L^2(\Omega)).$$

Porém

$$v_t^i \longrightarrow v_2 \quad \text{em} \quad C([0,T];L^2(\Omega)) \subset \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T),L^2(\Omega)).$$

Da unicidade do limite, $v_1' = v_2$ no sentido das distribuições vetoriais.

Solução fraca

Vejamos que v dado por (2.24) é a solução fraca de (2.7) no sentido dado por (2.4), isto é, $\forall \kappa \in H_0^1(\Omega)\cap L^m(\Omega)$ vale

$$\frac{d}{dt}(v_t,\kappa)_2 + (\nabla v,\nabla\kappa)_2 + (av_t + av_t|v_t|^{m-2},\kappa)_2 = (bu_1|u_1|^{p-2},\kappa)_2, \tag{2.25}$$

sendo esta igualdade no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$. De fato, para cada $i \in \mathbb{N}$ vimos em (2.8) que existe um único v^i solução de

$$v_{tt}^i - \Delta v^i + a(1+|v_t^i|^{m-2})v_t^i = bu_1^i|u_1^i|^{p-2}.$$

Multiplicando a equação acima por $\kappa \in H_0^1(\Omega)\cap L^m(\Omega)$ e integrando em Ω teremos

$$\int_\Omega \kappa v_{tt}^i\,dx - \int_\Omega \kappa\Delta v^i\,dx + a\int_\Omega \kappa(1+|v_t^i|^{m-2})v_t^i\,dx = b\int_\Omega \kappa u_1^i|u_1^i|^{p-2}\,dx,$$

como $\kappa \in H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega \kappa\Delta v^i\,dx = \int_{\partial\Omega}\kappa\frac{\partial}{\partial\nu}v^i dx - \int_\Omega \nabla\kappa\nabla v^i\,dx = -\int_\Omega \nabla\kappa\nabla v^i\,dx,$$

onde ν é a normal unitária, externa à $\partial\Omega$. Portanto,

$$\frac{d}{dt}(v_t^i,\kappa)_2 + (\nabla v^i,\nabla\kappa)_2 + (av_t^i + av_t^i|v_t^i|^{m-2},\kappa)_2 = (bu_1^i|u_1^i|^{p-2},\kappa)_2. \tag{2.26}$$

Analisaremos separadamente a convergência dos termos da equação acima.

- $\dfrac{d}{dt}(v_t^i,\kappa)_2 \longrightarrow \dfrac{d}{dt}(v_t,\kappa)_2$ no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

De fato, da desigualdade de Schwarz $\left|(v_t^i(t)-v_t(t),\kappa)_2\right| \leq \|v_t^i(t)-v_t(t)\|_2\|\kappa\|_2$, temos para cada $t\in[0,T]$ a seguinte convergência $(v_t^i(t),\kappa)_2 \longrightarrow (v_t(t),\kappa)_2$. Como a função

$t \longmapsto (v_t^i(t), \kappa)_2 \in L^1(0,T)$, ela pode ser representada por uma distribuição sobre $(0,T)$. Então da convergência em $\mathcal{D}'(0,T)$

$$\big\langle (v_t^i, \kappa)_2, \varphi \big\rangle \longrightarrow \big\langle (v_t, \kappa)_2, \varphi \big\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T),$$

segue que

$$-\big\langle \frac{d}{dt}(v_t^i, \kappa)_2, \varphi \big\rangle = \big\langle (v_t^i, \kappa)_2, \varphi' \big\rangle \longrightarrow \big\langle (v_t, \kappa)_2, \varphi' \big\rangle = -\big\langle \frac{d}{dt}(v_t, \kappa)_2, \varphi \big\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T),$$

portanto

$$\frac{d}{dt}(v_t^i, \kappa)_2 \longrightarrow \frac{d}{dt}(v_t, \kappa)_2 \quad \text{em} \quad D'(0,T).$$

- $(\nabla v^i, \nabla \kappa)_2 \longrightarrow (\nabla v, \nabla \kappa)_2$.

Basta observar a seguinte expressão $|(\nabla v^i - \nabla v, \nabla \kappa)_2| \leq \|\nabla v^i - \nabla v\|_2 \|\nabla \kappa\|_2$, e o fato de $v^i \longrightarrow v$ em $C([0,T]; H_0^1(\Omega))$.

- $(bu_1^i|u_1^i|^{p-2}, \kappa)_2 \longrightarrow (bu_1|u_1|^{p-2}, \kappa)_2$.

Seja $K = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa \end{pmatrix}$, então $K \in H$ e usando (2.15), teremos

$$\begin{aligned} \big|(bu_1^i|u_1^i|^{p-2} - bu_1|u_1|^{p-2}, \kappa)_2\big| &= \big|(f(U^i) - f(U), K)_H\big| \\ &\leq C(\|U^i\|_H + \|U\|_H)^{p-2} \|U^i - U\|_H \|K\|_H, \end{aligned}$$

e desta expressão obtendo a convergência desejada.

- $(av_t^i + av_t^i|v_t^i|^{m-2}, \kappa)_2 \longrightarrow (av_t + av_t|v_t|^{m-2}, \kappa)_2$.

$$\begin{aligned} &\big|(av_t^i + av_t^i|v_t^i|^{m-2} - av_t - av_t|v_t|^{m-2}, \kappa)_2\big| \\ &\leq a\big|(v_t^i - v_t, \kappa)_2\big| + a\big|(v_t^i|v_t^i|^{m-2} - v_t|v_t|^{m-2}, \kappa)_2\big| \\ &\leq a\int_\Omega |(v_t^i - v_t)\kappa| \, dx + a\int_\Omega \big|(v_t^i|v_t^i|^{m-2} - v_t|v_t|^{m-2})\kappa\big| \, dx. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Estudemos separadamente as integrais do lado direito da desigualdade anterior. Observe que

$$\int_\Omega |(v_t^i - v_t)\kappa|\, dx \leq \|v_t^i - v_t\|_2 \|\kappa\|_2,$$

por outro lado, com o mesmo raciocínio usado em (2.16), teremos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \big|(v_t^i|v_t^i|^{m-2} - v_t|v_t|^{m-2})\kappa\big|\, dx &\leq (m-1)\int_\Omega \big|v_t^i - v_t\big|\big(|v_t^i|^{m-2} + |v_t|^{m-2}\big)\big|\big|\kappa\big|\, dx \\
&= (m-1)\int_\Omega |v_t^i - v_t||v_t^i|^{m-2}||\kappa|\, dx + \\
&\quad +(m-1)\int_\Omega |v_t^i - v_t||v_t|^{m-2}||\kappa|\, dx.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com $q = \dfrac{m}{m-2} > 1$ e $q' = \dfrac{m}{2} > 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |v_t^i - v_t||v_t|^{m-2}|\kappa|\, dx &\leq \left(\int_\Omega |v_t^i - v_t|^{\frac{m}{2}}|\kappa|^{\frac{m}{2}}\, dx\right)^{\frac{2}{m}} \left(\int_\Omega (|v_t|^{m-2})^{\frac{m}{m-2}}\, dx\right)^{\frac{m-2}{m}} \\
&\leq \left[\left(\int_\Omega |v_t^i - v_t|^m\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\kappa|^m\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{m}} \left(\int_\Omega |v_t|^m\, dx\right)^{\frac{m-2}{m}} \\
&= \|v_t^i - v_t\|_m \|\kappa\|_m \|v_t\|_m^{m-2}.
\end{aligned}$$

Analogamente, obtem-se

$$\int_\Omega |v_t^i - v_t||v_t^i|^{m-2}|\kappa|\, dx \leq \|v_t^i - v_t\|_m \|\kappa\|_m \|v_t^i\|_m^{m-2}.$$

Logo, usando estas majorações em (2.27), chegamos à

$$\begin{aligned}
&\big|(av_t^i + av_t^i|v_t^i|^{m-2} - av_t - av_t|v_t|^{m-2}, \kappa)_2\big| \\
&\qquad \leq a\|v_t^i - v_t\|_2\|\kappa\|_2 + a(m-1)\|v_t^i - v_t\|_m\|\kappa\|_m(\|v_t\|_m^{m-2} + \|v_t^i\|_m^{m-2}),
\end{aligned}$$

o que implica a convergência desejada. Portanto quando $i \longrightarrow \infty$ em (2.26) obtemos (2.25).

Unicidade

Mostramos que para cada $U \in C([0,T];H)$, existe $V \in Y_T$ solução fraca de

$$\partial_t V - AV + g(V) = f(U) \quad V(0) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

onde V é o limite em Y_T de uma seqüência $(V^i)_{i\in\mathbb{N}}$ de soluções do problema abstrato

$$\partial_t V^i - AV^i + g(V^i) = f(U^i) \quad V^i(0) = \begin{pmatrix} \varphi^i \\ \psi^i \end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

com

$$v^i \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \tag{2.30}$$

$$v_t^i \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^m(\Omega\times(0,T)). \tag{2.31}$$

Mostraremos a unicidade da solução no sentido do método aproximativo construido na prova de existência. Sejam U e $\overline{U} \in C([0,T];H)$ em (2.28), então existem V e $\overline{V} \in Y_T$ soluções fracas de (2.28) no sentido dado acima, isto é, existem seqüências $(V^i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(\overline{V}^i)_{i\in\mathbb{N}}$ satisfazendo as condições (2.29) $-$ (2.31) para cada $i\in\mathbb{N}$, tal que $V^i \longrightarrow V$ e $\overline{V}^i \longrightarrow \overline{V}$ em Y_T. Considere $W^i = V^i - \overline{V}^i$, então

$$\partial_t W^i - AW^i + g(V^i) - g(\overline{V}^i) = f(U^i) - f(\overline{U}^i), \qquad W^i(0) = \begin{pmatrix} \varphi^i - \overline{\varphi}^i \\ \psi^i - \overline{\psi}^i \end{pmatrix}$$

portanto faz sentido a seguinte expressão

$$(\partial_t W^i, W^i)_H - (AW^i, W^i)_H + (g(V^i) - g(\overline{V}^i), W^i)_H = (f(U^i) - f(\overline{U}^i), W^i)_H.$$

Como $(g(V^i) - g(\overline{V}^i), W^i)_H \geq 0$, e com o mesmo raciocínio usado em (2.11) e (2.12), chegamos à

$$\frac{1}{2}\partial_t \|W^i(t)\|_H^2 \leq (f(U^i) - f(\overline{U}^i), W^i)_H.$$

Integrando de 0 à t obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|W^i(t)\|_H^2 &\leq \int_0^t (f(U^i) - f(\overline{U}^i), W^i)_H d\tau + \frac{1}{2}\|W^i(0)\|_H^2 \\
&\leq C\int_0^t (\|U^i(\tau)\|_H + \|\overline{U}^i(\tau)\|_H)^{p-2}\|U^i(\tau) - \overline{U}^i(\tau)\|_H\|W^i(\tau)\|_H d\tau \\
&+ \frac{1}{2}\|W^i(0)\|_H^2,
\end{aligned}$$

então, da expressão acima quando $i \longrightarrow \infty$, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|W(t)\|_H^2 &\leq C\int_0^t (\|U(\tau)\|_H + \|\overline{U}(\tau)\|_H)^{p-2}\|U(\tau) - \overline{U}(\tau)\|_H\|W(\tau)\|_H d\tau \\
&\leq C_R\int_0^t \|U(\tau) - \overline{U}(\tau)\|_H\|W(\tau)\|_H d\tau, \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

onde $W = V - \overline{V}$, e usando o Lema 1.2 do capítulo 1, concluimos que

$$\|W(t)\|_H \leq C_R\int_0^t \|U(\tau) - \overline{U}(\tau)\|_H d\tau,$$

logo

$$\|W(t)\|_H \leq C_R T\|U - \overline{U}\|_{C([0,T];H)}.$$

Segue que, se $U = \overline{U}$ então $V = \overline{V}$, ou seja, para cada $U \in C([0,T];H)$, existe um único V solução fraca de (2.7). □

Identidade de energia

Vimos que para cada $i \in \mathbb{N}$, existe um único V^i solução do problema

$$\partial_t V^i - AV^i + g(V^i) = f(U^i) \quad V^i(0) = \begin{pmatrix} \varphi^i \\ \psi^i \end{pmatrix},$$

e temos que é válida a seguinte expressão

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|V^i(t)\|_H^2 + (g(V^i), V^i)_H = (f(U^i), V^i)_H,$$

então, integrando de 0 à t a identidade acima, obtemos

$$\frac{1}{2}\|V^i(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|V^i(0)\|_H^2 + \int_0^t (g(V^i), V^i)_H d\tau = \int_0^t (f(U^i), V^i)_H d\tau. \qquad (2.33)$$

Usando o fato de V^i convergir para V em Y_T (V solução fraca de (2.7)), analisemos separadamente a convergência dos termos de (2.33). Como $V^i(t)$ e (φ^i, ψ^i) convergem para $V(t)$ e (φ, ψ) em H respectivamente, obtemos

$$\|V^i(t)\|_H^2 \longrightarrow \|V(t)\|_H^2 \quad \text{e} \quad \|V^i(0)\|_H^2 \longrightarrow \|V(0)\|_H^2$$

Mostremos agora que

- $\displaystyle\int_0^t (g(V^i), V^i)_H d\tau \longrightarrow \int_0^t (g(V), V)_H d\tau.$

De fato, observe que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t (g(V^i), V^i)_H d\tau - \int_0^t (g(V), V)_H d\tau\right| \\
&= a\left|\int_0^t (v_t^i + v_t^i|v_t^i|^{m-2}, v_t^i)_2 d\tau - \int_0^t (v_t + v_t|v_t|^{m-2}, v_t)_2 d\tau\right| \\
&= a\left|\int_0^t (v_t^i, v_t^i)_2 d\tau + \int_0^t (v_t^i|v_t^i|^{m-2}, v_t^i)_2 d\tau - \int_0^t (v_t, v_t)_2 d\tau - \int_0^t (v_t|v_t|^{m-2}, v_t)_2 d\tau\right| \\
&\leq a\left|\int_0^t \|v_t^i\|_2^2 d\tau - \int_0^t \|v_t\|_2^2 d\tau\right| + a\left|\int_0^t \|v_t^i\|_m^m d\tau - \int_0^t \|v_t\|_m^m d\tau\right| \\
&= a\left|\int_0^t \|v_t^i\|_2^2 d\tau - \int_0^t \|v_t\|_2^2 d\tau\right| + a\left|\|v_t^i\|_{L^m(\Omega\times(0,t))} - \|v_t\|_{L^m(\Omega\times(0,t))}\right| \\
&\leq a\left|\int_0^t \|v_t^i\|_2^2 d\tau - \int_0^t \|v_t\|_2^2 d\tau\right| + a\|v_t^i - v_t\|_{L^m(\Omega\times(0,t))} \\
&\leq a\left|\int_0^t \|v_t^i\|_2^2 d\tau - \int_0^t \|v_t\|_2^2 d\tau\right| + a\|v_t^i - v_t\|_{L^m(\Omega\times(0,T))}. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Como $v_t^i \longrightarrow v_t$ em $C([0,T]; L^2(\Omega))$ temos que $\|v_t^i(t)\|_2^2 \longrightarrow \|v_t(t)\|_2^2$ uniformemente, então

$$\int_0^t \|v_t^i(\tau)\|_2^2 d\tau \longrightarrow \int_0^t \|v_t(\tau)\|_2^2 d\tau$$

também $v_t^i \longrightarrow v_t$ em $L^m(\Omega \times (0,T))$, logo da expressão (2.34) temos o resultado procurado.

- $\displaystyle\int_0^t (f(U^i), V^i)_H d\tau \longrightarrow \int_0^t (f(U), V)_H d\tau.$

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\left|(f(U^i), V^i)_H - (f(U), V)_H\right| &= b\left|(u_1^i|u_1^i|^{p-2}, v_t^i)_2 - (u_1|u_1|^{p-2}, v_t)_2\right| \\
&\leq b\int_\Omega \left|u_1^i|u_1^i|^{p-2}v_t^i - u_1|u_1|^{p-2}v_t\right| dx \\
&= b\int_\Omega \left|u_1^i|u_1^i|^{p-2}v_t^i \pm u_1^i|u_1^i|^{p-2}v_t - u_1|u_1|^{p-2}v_t\right| dx \\
&\leq b\int_\Omega \left|(v_t^i - v_t)u_1^i|u_1^i|^{p-2}\right| dx + \\
&\quad +b\int_\Omega \left|(u_1^i|u_1^i|^{p-2} - u_1|u_1|^{p-2})v_t\right| dx. \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Hölder, da expressão acima temos:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left|(v_t^i - v_t)u_1^i|u_1^i|^{p-2}\right| dx &\leq \left(\int_\Omega |v_t^i - v_t|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_1^i|^{2(p-1)}\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|v_t^i - v_t\|_2 \|u_1^i\|_{2(p-1)}^{p-1}\,.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, da hipótese temos que $2 < 2(p-1) \leq \dfrac{2n}{n-2}$ caso $n \geq 3$, então das imersões de espaços de Sobolev e da desigualdade de Poincaré chegamos à

$$
\|u_1^i\|_{2(p-1)} \leq C^*\|\nabla u_1^i\|_2 \leq C\|U^i\|_H. \qquad (2.36)
$$

Logo, teremos a seguinte majoração

$$
\int_\Omega \left|(v_t^i - v_t)u_1^i|u_1^i|^{p-2}\right| dx \;\; \leq \;\; C\|V^i - V\|_H \|U^i\|_H^{p-1}. \qquad (2.37)
$$

Ainda da desigualdade (2.35), com o mesmo raciocínio usado na obtenção da estimativa (2.15) (Veja desigualdade (2.16)), obtemos

$$\int_\Omega \left|(u_1^i|u_1^i|^{p-2} - u_1|u_1|^{p-2})v_t\right| dx \leq C(\|U^i\|_H + \|U\|_H)^{p-2}\|U^i - U\|_H\|V\|_H, \tag{2.38}$$

portanto substituindo (2.37) e (2.38) em (2.35), obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
&\left|(f(U^i), V^i)_H - (f(U), V)_H\right| \\
&\qquad \leq C\left[\|V^i - V\|_H\|U^i\|_H^{p-1} + (\|U^i\|_H + \|U\|_H)^{p-2}\|U^i - U\|_H\|V\|_H\right],
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left|(f(U^i), V^i)_H - (f(U), V)_H\right| d\tau &\leq C\int_0^t \|V^i - V\|_H\|U^i\|_H^{p-1} d\tau \\
&+ C\int_0^t (\|U^i\|_H + \|U\|_H)^{p-2}\|U^i - U\|_H\|V\|_H d\tau \\
&\leq C_R T \sup_{0\leq t\leq T} \|V^i(t) - V(t)\|_H \\
&+ C_R T \sup_{0\leq t\leq T} \|V(t)\|_H \sup_{0\leq t\leq T} \|U^i(t) - U(t)\|_H,
\end{aligned}$$

onde C_R denota uma constante que depende de R, já que $\sup\limits_{0\leq t\leq T} \|U^i\|_H \leq R$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim temos que o lado direito da expressão acima tende a zero quado i tende ao infinito. Por fim, para obter a convergência procurada, basta observar que

$$\left|\int_0^t (f(U^i), V^i)_H d\tau - \int_0^t (f(U), V)_H d\tau\right| \leq \int_0^t \left|(f(U^i), V^i)_H - (f(U), V)_H\right| d\tau.$$

Então, quando $i \longrightarrow \infty$ em (2.33) obtemos a seguinte identidade

$$\frac{1}{2}\|V(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|V(0)\|_H^2 + \int_0^t (g(V), V)_H d\tau = \int_0^t (f(U), V)_H d\tau.$$

$\square$

2.2 Prova do Teorema 2.2

Demonstração: Na proposição anterior vimos que para cada $U \in C([0,T];H)$, existe um único $V = \begin{pmatrix} v \\ v_t \end{pmatrix} \in Y_T$, sendo v solução fraca de

$$\partial_t V - AV + g(V) = f(U), \quad V(0) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Definimos então a aplicação Φ da seguinte forma

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & C([0,T];H) & \longrightarrow & Y_T \\ & U & \longmapsto & \Phi(U) = V \end{array},$$

onde V é solução fraca de (2.39). A proposição 2.1 prova que Φ esta bem definida. Seja

$$X_T = X_T(T,\varphi,\psi) = \left\{ U \in C([0,T];H); \quad U(0) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\}$$

Provemos que:

(i) Φ transforma a bola fechada $B_R = \left\{ U \in X_T; \ \sup\limits_{0\leq t\leq T} \|U(t)\|_H \leq R \right\}$ nela mesma.
(ii) Φ é uma contração em B_R.
Veremos mais adiante que T deve ser suficientemente pequeno e R suficientemente grande, para que (i) e (ii) sejam satisfeitas.
Prova de (i)**:** Se $U \in B_R$ então $\sup\limits_{0\leq t\leq T} \|U(t)\|_H \leq R$, e $V = \Phi(U)$ é a única solução de (2.39). Da identidade de energia da proposição anterior, temos que

$$\frac{1}{2}\|V(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|V(0)\|_H^2 + \int_0^t (g(V),V)_H d\tau = \int_0^t (f(U),V)_H d\tau.$$

Observe que

$$\begin{aligned} (g(V),V)_H &= (av_t + av_t|v_t|^{m-2}, v_t)_2 \\ &= a\left(\|v_t\|_2^2 + \int_\Omega |v_t|^m \, dx \right) = a\left(\|v_t\|_2^2 + \|v_t\|_m^m \right) \geq 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\big|(f(U),V)_H\big| &= b\big|(u_1|u_1|^{p-2},v_t)_2\big| \leq b\int_\Omega \big|u_1|u_1|^{p-2}v_t\big|\,dx \\ &\leq b\left(\int_\Omega |u_1|^{2(p-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |v_t|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= b\|u_1\|_{2(p-1)}^{p-1}\|v_t\|_2.\end{aligned}$$

Usando a expressão (2.36), chegamos à $|(f(U),V)_H| \leq C\|U(t)\|_H^{p-1}\|V(t)\|_H$. Assim

$$\frac{1}{2}\|V(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|V(0)\|_H^2 \leq \int_0^t (f(U),V)_H d\tau \leq C\int_0^t \|U(\tau)\|_H^{p-1}\|V(\tau)\|_H d\tau,$$

e portanto

$$\|V(t)\|_H^2 \leq \|V(0)\|_H^2 + 2CR^{p-1}\int_0^t \|V(\tau)\|_H d\tau.$$

Pelo Lema 1.2 (Gronwall) do Capítulo 1, temos

$$\|V(t)\|_H \leq \|V(0)\|_H + \int_0^t CR^{p-1}d\tau \leq \|V(0)\|_H + CR^{p-1}T, \tag{2.40}$$

onde a constante C não depende de t, T e R. Tomando $R \geq 2\|V(0)\|_H$ e uma vez fixado R, considerando T pequeno tal que $\left(\frac{1}{2} + CR^{p-2}T\right) \leq 1$, de (2.40) segue que

$$\|V(t)\|_H \leq \left(\frac{1}{2} + CR^{p-2}T\right)R \leq R \quad \forall t \in [0,T].$$

Conseqüentemente temos que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|V(t)\|_H \leq R,$$

ou seja, $V \in B_R$ e a condição (i) é verificada.

Prova de (ii)**:** Considere $U, \overline{U} \in B_R$, $V = \Phi(U)$ e $\overline{V} = \Phi(\overline{U})$ as correspondentes soluções de (2.39), seja $W = V - \overline{V}$, então da desigualdade (2.32) teremos

$$\|W(t)\|_H^2 \leq C\int_0^t (\|U(\tau)\|_H + \|\overline{U}(\tau)\|_H)^{p-2}\|U(\tau) - \overline{U}(\tau)\|_H\|W(\tau)\|_H d\tau. \tag{2.41}$$

Logo, pelo Lema 1.2 (Gronwall)

$$\begin{aligned}\|W(t)\|_H &\leq \frac{1}{2}\int_0^t C(\|U(\tau)\|_H + \|\overline{U}(\tau)\|_H)^{p-2}\|U(\tau)-\overline{U}(\tau)\|_H d\tau \\ &\leq CTR^{p-2}\|U-\overline{U}\|_{C([0,T];H)},\end{aligned}$$

portanto, como a constante C não depende de t, temos que

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|V(t)-\overline{V}(t)\|_H \leq CTR^{p-2}\|U-\overline{U}\|_{C([0,T];H)}.$$

Da forma que T e R foram estabelecidos anteriormente, temos que $CTR^{p-2} < 1$, portanto Φ é uma contração em $B_R \subset X_T$, e como B_R é um subespaço métrico fechado em $C([0,T];H)$, logo é completo, então pelo Teorema 1.1 (Ponto fixo de Banach), existe um único ponto fixo de Φ em B_R, isto é,

$$U = \Phi(U),$$

e como definida, Φ toma valores em Y_T, portanto temos que $U \in Y_T$, provando que existe uma única $U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in Y_T$ tal que u é solução fraca local de

$$\partial_t U - AU + g(U) = f(U), \quad U(0) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

$\square$

Capítulo 3

Decaimento Uniforme

No capítulo 2, mostramos que a solução do problema (2.1) é local, para quaisquer dados inicias (φ, ψ) em H, ou seja, a solução está definida em um intervalo de tempo finito $[0, T]$. Neste capítulo mostraremos que para uma escolha de dados iniciais pequenos em relação a norma de H, a solução do problema (2.1) é global e sua energia decai exponencialmente de maneira uniforme. Para provar os principais resultados consideremos:

$$I(t) = I(u(t)) = \|\nabla u(t)\|_2^2 - b\|u(t)\|_p^p,$$

$$J(t) = J(u(t)) = \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{b}{p}\|u(t)\|_p^p,$$

$$E(t) = E(u(t), u_t(t)) = J(t) + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2,$$

$$\mathcal{F} = \{\omega \in H_0^1(\Omega); \quad I(\omega) > 0\} \cup \{0\}.$$

Lema 3.1 *Do problema* (2.1)*, a seguinte identidade é válida,*

$$E'(t) = -a(\|u_t(t)\|_m^m + \|u_t(t)\|_2^2). \tag{3.1}$$

Demonstração: De fato, no capítulo anterior vimos que $U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}$ satisfaz a seguinte identidade de energia

$$\frac{1}{2}\|U(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|U(0)\|_H^2 + \int_0^t (g(U), U)_H d\tau = \int_0^t (f(U), U)_H d\tau,$$

derivando a equação acima com respeito à t obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U(t)\|_H^2 + (g(U), U)_H = (f(U), U)_H. \tag{3.2}$$

Porém,

$$\|U(t)\|_H^2 = \int_\Omega |\nabla u(t)|^2\, dx + \int_\Omega |u_t(t)|^2\, dx \tag{3.3}$$

e

$$(g(U), U)_H = (au_t + au_t|u_t|^{m-2}, u_t)_2 = a\left(\int_\Omega |u_t|^2\, dx + \int_\Omega |u_t|^m\, dx\right). \tag{3.4}$$

Por outro lado, considere a função real $G(s) = \dfrac{1}{p}|s|^p$, logo $G'(s) = s|s|^{p-2}$, assim

$$\frac{d}{dt}G(u(t)) = G'(u(t))u'(t) = u(t)|u(t)|^{p-2}u_t(t),$$

e como $G(u(t)) = \dfrac{1}{p}|u(t)|^p$, temos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{p}|u(t)|^p\, dx = \int_\Omega u(t)|u(t)|^{p-2}u_t(t)\, dx,$$

portanto

$$(f(U), U)_H = (bu(t)|u(t)|^{p-2}, u_t(t))_2 = b\int_\Omega u(t)|u(t)|^{p-2}u_t(t)\, dx = \frac{d}{dt}\frac{b}{p}\int_\Omega |u(t)|^p\, dx. \tag{3.5}$$

Substituindo (3.3) – (3.5) em (3.2) chegamos à

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \frac{b}{p}\int_\Omega |u|^pdx\right) = -a\left(\int_\Omega |u_t|^2dx + \int_\Omega |u_t|^m\right)dx,$$

donde segue o resultado procurado

$$E'(t) = -a(\|u_t(t)\|_m^m + \|u_t(t)\|_2^2).$$

□

Da identidade anterior, obtemos $\displaystyle\int_0^t E'(s)ds \leq 0$, o que implica $E(t) \leq E(0)$ para todo $t \in [0, T]$. O funcional $E(t)$ definido anteriormente será chamado *energia* do problema (2.1).

Das imersões de espaços de Sobolev, se $n > 2$ então $H^1(\Omega)$ esta imerso continuamente em $L^q(\Omega)$ para $2 \leq q \leq q^*$ sendo

$$\frac{1}{q^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{n-2}{2n}$$

isto é, $\|\omega\|_q \leq C\|\omega\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \omega \in H^1(\Omega)$. Por outro lado, da desigualdade de Poincaré (Proposição 1.1)

$$\|\omega\|_{H^1(\Omega)} \leq C_0\|\nabla\omega\|_2, \quad \forall \omega \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, para toda $\omega \in H_0^1(\Omega)$ vale a relação

$$\|\omega\|_q \leq C_*\|\nabla\omega\|_2 \quad \text{para} \quad 2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2} \quad (\text{caso} \quad n \geq 3). \tag{3.6}$$

No caso em que $n \leq 2$, temos que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $q \geq 2$, então também é válida a relação (3.6).

Lema 3.2 *Suponha que*

$$p > 2 \quad \textit{quando} \quad n \leq 2 \quad \textit{ou} \quad 2 < p \leq 2\frac{n-1}{n-2} \quad \textit{quando} \quad n \geq 3. \tag{3.7}$$

Se $\varphi \in \mathcal{F}$ *e* $\psi \in L^2(\Omega)$ *tal que*

$$\beta = bC_*^p\left(\frac{2p}{p-2}E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} < 1 \tag{3.8}$$

então $u(t) \in \mathcal{F}, \quad \forall t \in [0,T]$.

Demonstração: Primeiro mostremos que $I(t)$ é contínua em $[0,T]$. De fato, seja

$$\begin{array}{rccc} g: & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & g(\omega) \end{array}$$

definida por $g(\omega) = \|\nabla\omega\|_2^2 - b\|\omega\|_p^p$. Como $u \in C([0,T];H_0^1(\Omega))$, basta provar que g é contínua em $H_0^1(\Omega)$, o que implica que $g \circ u = I$ é contínua em $[0,T]$.

Da hipótese temos que $2 < p \leq \dfrac{2n}{n-2}$ se $n \geq 3$, logo vale a relação (3.6), isto é,

$$\|u\|_p \leq C_*\|\nabla u\|_2 \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Considere a seqüência $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$, tal que $\omega_i \longrightarrow \omega$ em $H_0^1(\Omega)$, então

$$\|\nabla\omega_i - \nabla\omega\|_2 = \|\nabla(\omega_i - \omega)\|_2 \longrightarrow 0,$$

e portanto $\|\nabla\omega_i\|_2^2 \longrightarrow \|\nabla\omega\|_2^2$. Desde que $\|\omega_i - \omega\|_p \leq C_*\|\nabla(\omega_i - \omega)\|_2$, segue que $\|\omega_i\|_p^p \longrightarrow \|\omega\|_p^p$. Assim

$$\begin{aligned}
\big|g(\omega_i) - g(\omega)\big| &= \big|\|\nabla\omega_i\|_2^2 - b\|\omega_i\|_p^p - \|\nabla\omega\|_2^2 + b\|\omega\|_p^p\big| \\
&\leq \big|\|\nabla\omega_i\|_2^2 - \|\nabla\omega\|_2^2\big| + b\big|\|\omega_i\|_p^p - \|\omega\|_p^p\big|
\end{aligned}$$

de onde segue que $g(\omega_i) \longrightarrow g(\omega)$, isto é, g é contínua em $H_0^1(\Omega)$.

Se $\varphi \in \mathcal{F}$, temos que $I(u(0)) > 0$, então pela continuidade de I, existe ao menos um $0 < T_j \leq T$ tal que $I(u(t)) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T_j]$, seja então $T_m = \max\limits_j T_j$, logo $I(u(t)) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T_m]$. Suponhamos que $T_m < T$. Observe que

$$\begin{aligned}
J(t) &= \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{b}{p}\|u(t)\|_p^p \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{p}\left(\|\nabla u(t)\|_2^2 - b\|u(t)\|_p^p\right) \\
&= \frac{p-2}{2p}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{p}I(u(t)) \\
&\geq \frac{p-2}{2p}\|\nabla u(t)\|_2^2 \quad \forall t \in [0, T_m].
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Conseqüentemente

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \frac{2p}{p-2}J(t) \leq \frac{2p}{p-2}E(t) \leq \frac{2p}{p-2}E(0), \quad \forall t \in [0, T_m], \tag{3.10}$$

donde segue que

$$\|\nabla u(t)\|_2^{p-2} \leq \left(\frac{2p}{p-2}E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} \qquad \forall t \in [0, T_m].$$

Como $2 < p \leq \dfrac{2n}{n-2}$, de (3.6) temos $\|u(t)\|_p \leq C_* \|\nabla u(t)\|_2$, portanto

$$\begin{aligned} b\|u(t)\|_p^p &\leq bC_*^p \|\nabla u(t)\|_2^p \\ &= bC_*^p \|\nabla u(t)\|_2^{p-2} \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\leq bC_*^p \left(\frac{2p}{p-2}E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &= \beta \|\nabla u(t)\|_2^2 < \|\nabla u(t)\|_2^2 \,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Conseqüentemente $\|\nabla u(t)\|_2^2 - b\|u(t)\|_p^p > 0$, isto é, $I(u(t)) > 0$, $\forall t \in [0, T_m]$. Então por continuidade temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $T_m + \varepsilon < T$ e $I(u(t)) \geq 0$ para todo $t \in [0, T_m + \varepsilon]$, o que contradiz a definição de T_m, assim T_m só pode ser T. □

3.1 Solução global

Vimos no Teorema 2.2, que as soluções estão definidas em um intervalo $[0, T]$, para T pequeno. Seja $T_1 \leq T_2$, onde T_1 e T_2 são pequenos tais que existam U_1 e U_2 soluções fracas do problema (2.1) em $[0, T_1)$ e $[0, T_2)$ respectivamente, isto é, $U_1 \in C([0, T_1); H)$ e $U_2 \in C([0, T_2); H)$. Pela unicidade sabe-se que $U_1 = U_2$ em $[0, T_1)$. Considere a família $(U_j(t))_{j \in J}$ de soluções fracas de (2.1), onde para cada j a solução U_j está definida em um intervalo $[0, T_j)$. Definimos $T_m = \sup\limits_{j \in J} T_j$, e também a função $U(t)$ em $[0, T_m)$, dada por

$$U(t) = U_j(t) \quad \text{se} \quad t \in [0, T_j), \quad j \in J.$$

Esta função está bem definida pela unicidade de solução. Temos que $U \in C([0, T_m); H)$ é chamada solução maximal de (2.1), ou seja, $[0, T_m)$ é o maior intervalo onde existe solução fraca do problema (2.1).

Neste ponto, mostramos que dependendo dos dados iniciais φ e ψ, a solução maximal do problema (2.1) é global, ou seja, a solução está definida para todo $t \geq 0$. A prova deste resultado é baseada na teoria do "Potencial" introduzida por Sattinger e Payne em [15] e [16], onde a solução maximal U de (2.1) satisfaz uma das duas propriedades

$$T_m = +\infty \quad \text{ou} \quad T_m < \infty \text{ e } \lim_{t \uparrow T_m} \|U(t)\|_H = +\infty.$$

A notação $t \uparrow T_m$ significa, quando t tende a T_m pela esquerda. Ou seja, a solução é global ou explode num tempo finito.

Teorema 3.1 *Suponha que* (3.7) *acontece. Se* $\varphi \in \mathcal{F}$ *e* $\psi \in L^2(\Omega)$ *satisfazem* (3.8) *então a solução é global.*

Demonstração: Para mostrar a solução global, é suficiente mostrar que

$$\|U(t)\|_H = (\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

é limitada independentemente de t. Com efeito,

$$\begin{aligned} E(0) \geq E(t) &= \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{b}{p}\|u(t)\|_p^p + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 \\ &= \frac{p-2}{2p}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{p}I(t) + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 \\ &\geq \frac{p-2}{2p}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 \\ &\geq C_0(\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2), \end{aligned}$$

onde $C_0 = \min\left\{\frac{p-2}{2p}, \frac{1}{2}\right\}$, logo para $C_1 = \frac{1}{C_0}$ temos

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2 \leq C_1 E(0),$$

portanto $\lim_{t \uparrow T_m} \|U(t)\|_H < +\infty$, então a solução do problema (2.1) é global. $\square$

Lema 3.3 *Seja* $2 < m \leq \dfrac{2n}{n-2}$ *quando* $n \geq 3$*, ou simplesmente* $m > 2$ *quando* $n = 1$ *ou* 2*, então sob as mesmas condições do Lema* 3.2*, a solução global satisfaz*

$$\|u(t)\|_m^m \leq CE(t), \quad \forall t \geq 0,$$

onde C *é uma constante independente de* t*.*

Demonstração: Da hipótese e de (3.6), temos que $\|u(t)\|_m \leq C_* \|\nabla u(t)\|_2$, logo

$$\|u(t)\|_m^m \leq C_*^m \|\nabla u(t)\|_2^m = C_*^m \|\nabla u(t)\|_2^{m-2} \|\nabla u(t)\|_2^2. \tag{3.12}$$

Da expressão (3.10) temos

$$\|\nabla u(t)\|_2^{m-2} \leq \left(\frac{2p}{p-2} E(0)\right)^{\frac{m-2}{2}}$$

e

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \frac{2p}{p-2} E(t),$$

logo a desigualdade (3.12) fica

$$\|u(t)\|_m^m \leq \underbrace{C_*^m \left(\frac{2p}{p-2} E(0)\right)^{\frac{m-2}{2}} \frac{2p}{p-2}}_{C} E(t) = CE(t).$$

□

Mostremos agora que a energia

$$E(t) := \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 - \frac{b}{p}\|u(t)\|_p^p,$$

associada ao problema, decai exponencialmente.

3.2 Decaimento Exponencial

Teorema 3.2 *Sob as condições dos Lemas* 3.2 *e* 3.3*, existem* $M = M(E(0))$ *e* k *constantes positivas tal que a solução global de* (2.1) *satisfaz*

$$E(t) \leq Me^{-kt}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.13}$$

Demonstração: Observe que para mostrar (3.13), bastaria que

$$E'(t) \leq -kE(t), \quad \text{para} \quad k > 0 \quad (k \text{ constante}). \tag{3.14}$$

Então multiplicando pelo fator integrante e^{kt} e integrando de 0 à t, teríamos

$$E(t) \leq E(0)e^{-kt}.$$

Porém, vimos do Lema 3.1 que

$$E'(t) = -a(\|u_t(t)\|_m^m + \|u_t(t)\|_2^2),$$

onde no segundo membro desta equação faltam termos da energia $E(t)$ com sinal contrário, de modo que não conseguimos a expressão (3.14). Procuremos então um funcional $R(t)$, de modo a perturbar a energia no seguinte sentido

$$F(t) := E(t) + \varepsilon R(t),$$

para ε positivo suficientemente pequeno, tal que a energia $E(t)$ seja equivalente a $F(t)$, isto é, existam duas constantes positivas α_1 e α_2 tal que

$$\alpha_1 F(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 F(t). \tag{3.15}$$

Conseqüentemente se $F(t)$ satisfaz

$$F(t) \leq F(0)e^{-kt}, \quad \text{para} \quad k > 0,$$

obtemos (3.13). Definimos então o funcional

$$F(t) := E(t) + \varepsilon \underbrace{\int_\Omega \Big(u(t)u_t(t) + \frac{a}{2}u^2(t) \Big)\, dx}_{R(t)}. \tag{3.16}$$

Verifiquemos que este funcional satisfaz (3.15), para algum $\varepsilon > 0$ pequeno. De fato, da desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \big|R(t)\big| &\leq \int_\Omega \big|u(t)u_t(t) + \frac{a}{2}u^2(t)\big|\, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega u^2(t)\, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega u_t^2(t)\, dx\right)^{1/2} + \frac{a}{2}\int_\Omega u^2(t)\, dx, \end{aligned}$$

logo pela desigualdade de Young e a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}\big|R(t)\big| &\leq \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2+\frac{a}{2}\|u(t)\|_2^2\\ &= \frac{(a+1)}{2}\|u(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2\\ &\leq \frac{C^*(a+1)}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2\leq CE(t),\end{aligned}$$

então, é válida a seguinte relação

$$-\varepsilon CE(t)\leq \varepsilon R(t)\leq \varepsilon CE(t), \quad \text{para} \quad \varepsilon>0.$$

Somando $E(t)$ em cada parcela da expressão acima, chegamos à

$$(1-\varepsilon C)E(t)\leq F(t)\leq (1+\varepsilon C)E(t)\ .$$

Portanto para ε pequeno, tal que $1-\varepsilon C>0$, tomamos $\alpha_1=\dfrac{1}{1+\varepsilon C}$ e $\alpha_2=\dfrac{1}{1-\varepsilon C}$, e obtemos a relação (3.15), ou seja, existe ε positivo satisfazendo (3.15), porém ε será estabelecido posteriormente.

Derivando a equação (3.16) em t, e substituindo (3.1), temos que

$$\begin{aligned}F'(t) &= E'(t)+\varepsilon\frac{d}{dt}\int_\Omega\Big(u(t)u_t(t)+\frac{a}{2}u^2(t)\Big)\,dx\\ &= -a\left(\int_\Omega |u_t(t)|^m dx+\int_\Omega |u_t(t)|^2dx\right)+\varepsilon\int_\Omega (u_t^2(t)+u(t)u_{tt}(t))dx+\\ &\quad +\varepsilon a\int_\Omega u(t)u_t(t)dx.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Do problema (2.1), temos

$$u(t)u_{tt}(t)=u(t)\Delta u(t)-au(t)u_t(t)-au(t)|u_t(t)|^{m-2}u_t(t)+b|u(t)|^p,$$

Da expressão (3.17), substituimos a identidade acima na integral

$$\begin{aligned}\varepsilon\int_\Omega (u_t^2(t)+u(t)u_{tt}(t))dx &= \varepsilon\int_\Omega u_t^2(t)dx+\varepsilon\int_\Omega u(t)\Delta u(t)dx-a\varepsilon\int_\Omega u_t(t)u(t)dx\\ &\quad -a\varepsilon\int_\Omega u(t)|u_t(t)|^{m-2}u_t(t)dx+b\varepsilon\int_\Omega |u(t)|^p dx.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Por outro lado, observe que

$$\int_\Omega u\Delta u dx=\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \nu}dx-\int_\Omega |\nabla u|^2 dx=-\int_\Omega |\nabla u|^2dx,\tag{3.19}$$

onde ν é a normal unitária externa a $\partial\Omega$. Então substituindo (3.18) e (3.19) em (3.17), chegamos à

$$\begin{aligned}F'(t) &= -a\int_\Omega |u_t(t)|^2dx-a\int_\Omega |u_t(t)|^m dx+\varepsilon\int_\Omega(|u_t(t)|^2-|\nabla u(t)|^2)dx\\ &\quad -a\varepsilon\int_\Omega u(t)|u_t(t)|^{m-2}u_t(t)dx+\varepsilon b\int_\Omega |u(t)|^p dx\\ &\le -a\int_\Omega |u_t(t)|^m dx-(a-\varepsilon)\int_\Omega |u_t(t)|^2dx-\varepsilon\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx\\ &\quad +a\varepsilon\int_\Omega |u_t(t)|^{m-1}|u(t)|dx+\varepsilon b\int_\Omega |u(t)|^p dx.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Para facilitar o desenvolvimento dos cálculos, analisemos separadamente alguns termos de (3.20).

Do Lema 3.2, multiplicando a expressão (3.11) por $(1-\alpha)$ para algum $\alpha\in\mathbb{R}$, tal que $0<\alpha<1$, temos

$$(1-\alpha)b\int_\Omega |u(t)|^p dx\le(1-\alpha)\beta\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx,$$

conseqüentemente

$$
\begin{aligned}
b\int_\Omega |u(t)|^p dx &= \alpha b\int_\Omega |u(t)|^p dx + (1-\alpha)b\int_\Omega |u(t)|^p dx \\
&= \alpha\frac{p}{2}\int_\Omega |u_t(t)|^2 dx + \alpha\frac{p}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \\
&- \alpha p\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega |u(t)|^p dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t(t)|^2 dx\right) \\
&+ (1-\alpha)b\int_\Omega |u(t)|^p dx \\
&\leq \alpha\left(\frac{p}{2}\int_\Omega |u_t(t)|^2 dx + \frac{p}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx - pE(t)\right) \\
&+ (1-\alpha)\beta\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, da desigualdade de Young, para todo $\delta > 0$ existe C_δ tal que

$$\alpha\beta \leq \delta\alpha^q + C_\delta\beta^{q'}, \quad \text{sendo} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1 \quad \text{e} \quad \alpha, \beta \geq 0,$$

então, tomando $q = \dfrac{m}{m-1}$ e $q' = m$, da desigualdade de Hölder segue que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u_t(t)|^{m-1}|u(t)| dx &\leq \left(\int_\Omega |u(t)|^m dx\right)^{\frac{1}{m}} \left(\int_\Omega |u_t(t)|^m dx\right)^{\frac{m-1}{m}} \\
&\leq \delta\|u(t)\|_m^m + C_\delta\|u_t(t)\|_m^m. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Substituindo (3.21) e (3.22) em (3.20), temos

$$
\begin{aligned}
F'(t) \leq\ & -a\int_\Omega |u_t(t)|^m dx - (a-\varepsilon)\int_\Omega |u_t(t)|^2 dx - \varepsilon\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \\
& +\varepsilon\alpha\left(\frac{p}{2}\int_\Omega |u_t(t)|^2 dx + \frac{p}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx - pE(t)\right) + \varepsilon(1-\alpha)\beta\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \\
& +\varepsilon a(\delta\|u(t)\|_m^m + C_\delta\|u_t(t)\|_m^m),
\end{aligned}
$$

e colocando termos semelhantes em evidência, obtemos

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -a\int_\Omega |u_t(t)|^m dx - \left[a-\varepsilon\left(\frac{\alpha p}{2}+1\right)\right]\int_\Omega |u_t(t)|^2 dx - \alpha\varepsilon p E(t) \\ &\quad +\varepsilon\left[\frac{\alpha}{2}p+(1-\alpha)\beta-1\right]\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \varepsilon a(\delta\|u(t)\|_m^m + C_\delta\|u_t(t)\|_m^m) \end{aligned}$$

Denotemos com $\eta=(1-\beta)$, logo $\frac{\alpha}{2}p+(1-\alpha)\beta-1=\alpha\left(\frac{p}{2}-1\right)-\eta(1-\alpha)$. Então escolhendo α tal que

$$0<\alpha\leq\frac{2\eta}{p-2+2\eta}<1,$$

teremos $\alpha\left(\frac{p}{2}-1\right)-\eta(1-\alpha)\leq 0$, logo

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -a\int_\Omega |u_t(t)|^m dx - \left[a-\varepsilon\left(\frac{\alpha p}{2}+1\right)\right]\int_\Omega |u_t(t)|^2 dx - \alpha\varepsilon p E(t) \\ &\quad +\varepsilon a\left(\delta\int_\Omega |u(t)|^m dx + C_\delta\int_\Omega |u_t(t)|^m dx\right), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -a(1-\varepsilon C_\delta)\int_\Omega |u_t(t)|^m dx - \left[a-\varepsilon\left(\frac{\alpha p}{2}+1\right)\right]\int_\Omega |u_t(t)|^2 dx \\ &\quad -\alpha\varepsilon p E(t) + \varepsilon a\delta\int_\Omega |u(t)|^m dx. \end{aligned}$$

Do Lema 3.2, temos que $\varepsilon a\delta\|u(t)\|_m^m\leq\varepsilon a\delta C E(t)$, logo

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -a(1-\varepsilon C_\delta)\int_\Omega |u_t(t)|^m dx - \left[a-\varepsilon\left(\frac{\alpha p}{2}+1\right)\right]\int_\Omega |u_t(t)|^2 dx \\ &\quad -\varepsilon\left(\alpha p - a\delta C\right)E(t). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Escolhendo δ tal que

$$0<\delta<\frac{\alpha p}{aC},$$

e uma vez escolhido δ, tomamos ε positivo e pequeno, tal que

$$1-\varepsilon C_\delta\geq 0, \quad \text{e} \quad a-\varepsilon\left(\frac{\alpha p}{2}+1\right)\geq 0,$$

então da desigualdade (3.23), chegamos à seguinte expressão

$$F'(t) \leq -\varepsilon\left(\alpha p - a\delta C\right)E(t) \leq -\underbrace{\alpha_1\varepsilon\left(\alpha p - a\delta C\right)}_{k>0}F(t),$$

isto é,

$$F'(t) + kF(t) \leq 0.$$

Finalmente, multiplicando por e^{kt} e integrando de 0 à t a desigualdade acima, obtemos

$$F(t) \leq F(0)e^{-kt},$$

logo da relação (3.15) segue que

$$E(t) \leq \alpha_2 F(t) \leq \alpha_2 F(0)e^{-kt} \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}E(0)e^{-kt}$$

ou seja,

$$E(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}E(0)e^{-kt} \quad \forall t \geq 0.$$

Esta desigualdade caracteriza o decaimento exponencial de energia. □

Capítulo 4

Soluções não globais

O resultado que provaremos a seguir, trata de soluções não globais no seguinte sentido, para dados iniciais φ e ψ, cuja energia inicial $E(0)$ é negativa, a energia $E(t)$ associada ao problema (2.1) explode num tempo finito, desde que $p > m$. Este resultado segue a idéia de Messaoudi em [12], onde ao contrário de Georgiev e Todorova em [5], o autor mostra que a energia do problema dado por

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - \Delta u + a|u_t|^{m-2}u_t = bu|u|^{p-2}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0,\\
&u(x,t) = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad t \geq 0,\\
&u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega,
\end{aligned}$$

com mesmas condições do problema (2.1), explode num tempo finito, independente da energia inicial ser suficientemente negativa, isto é, basta que a energia inicial seja negativa para que aconteça uma explosão da energia. De forma semelhante conseguimos mostrar que acontece o mesmo para o problema (2.1), para quaisquer dados iniciais, desde que a energia inicial seja negativa.

Lema 4.1 *Sejam β e Γ constantes positivas e L uma função tal que*

$$L'(t) \geq \Gamma L^{1+\beta}(t),$$

onde $L(t) > 0$ para todo $t \geq 0$, então existe $k \in \mathbb{R}_+$ satisfazendo $\lim_{t \uparrow k} L(t) = +\infty$.

Demonstração: Da hipótese, observe que

$$\left[\frac{L^{-\beta}(t)}{-\beta}\right]' = \frac{L'(t)}{L^{1+\beta}(t)} \geq \Gamma,$$

integrando de 0 à t a expressão acima, e pelo teorema fundamental do cálculo, obtemos

$$\frac{1}{-\beta}\left(L^{-\beta}(t) - L^{-\beta}(0)\right) \geq \Gamma t \quad \Longrightarrow \quad L^{-\beta}(t) \leq L^{-\beta}(0) - \beta\Gamma t,$$

então,

$$L(t) \geq \left(L^{-\beta}(0) - \beta\Gamma t\right)^{-1/\beta} = \frac{1}{\left(L^{-\beta}(0) - \beta\Gamma t\right)^{1/\beta}}. \tag{4.1}$$

Seja $k = \dfrac{L^{-\beta}(0)}{\beta\Gamma}$, então quando t tende à k pela esquerda, tem-se que

$$\lim_{t\uparrow k} \frac{1}{\left(L^{-\beta}(0) - \beta\Gamma t\right)^{1/\beta}} = +\infty.$$

Da expressão (4.1) segue o resultado. $\square$

Lembrando que a energia é dada por

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left[u_t^2 + |\nabla u|^2\right](t)\,dx - \frac{b}{p}\int_\Omega |u(t)|^p\,dx,$$

definimos então,

$$H(t) := -E(t).$$

Lema 4.2 *Sejam $m > 2$ e*

$$p > 2 \quad se \quad n \leq 2 \quad ou \quad 2 < p \leq 2\frac{n-1}{n-2} \quad se \quad n \geq 3,$$

então existe uma constante $C \geq 0$, dependendo de Ω tal que

$$\|u\|_p^s \leq C\left(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_p^p\right),$$

para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$ e $2 \leq s \leq p$.

Demonstração: Com efeito, se $\|u\|_p \leq 1$, então da relação (3.6) do capítulo anterior existe uma constante positiva C, tal que

$$\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^2 \leq C\|\nabla u\|_2^2 \leq C\left(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_p^p\right).$$

Podemos considerar $C > 1$, então se $\|u\|_p > 1$

$$\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^p \leq C\left(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_p^p\right).$$

$\square$

Corolário 4.1 *Sob as condições do Lema anterior, existe uma constante $C \geq 0$, tal que*

$$\|u\|_p^s \leq C\left(|H(t)| + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p\right),$$

para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$ e $2 \leq s \leq p$.

Demonstração: Observe que, da definição de H, temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_2^2 &= 2\frac{b}{p}\|u\|_p^p - \|u_t\|_2^2 - 2H(t) \\
&\leq \left|2\frac{b}{p}\|u\|_p^p - \|u_t\|_2^2 - 2H(t)\right| \\
&\leq 2\frac{b}{p}\|u\|_p^p + \|u_t\|_2^2 + 2|H(t)| \\
&\leq \gamma\left(\|u\|_p^p + \|u_t\|_2^2 + |H(t)|\right),
\end{aligned}$$

onde $\gamma = \max\left\{2\frac{b}{p},\ 1,\ 2\right\}$. Então pelo Lema 4.2, segue o resultado. $\square$

Teorema 4.1 *Nas condições do Teorema* 2.2 *(Existência e Unicidade), se os dados iniciais φ e ψ satisfazem*

$$E(0) < 0,$$

e também $p > m$, então a solução u explode num tempo finito.

Demonstração: Vimos no Lema 3.1 do capítulo anterior, que a seguinte igualdade é válida

$$E'(t) = -a\left(\|u_t(t)\|_m^m + \|u_t(t)\|_2^2\right),$$

logo

$$H'(t) = -E'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T),$$

e da hipótese, temos que $H(0) = -E(0) > 0$, conseqüentemente

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{b}{p} \|u\|_p^p \quad \forall t \in [0, T). \tag{4.2}$$

Definimos então o funcional

$$L(t) := H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_\Omega u u_t(x, t) \, dx, \tag{4.3}$$

para $\varepsilon > 0$ pequeno a ser estabelecido posteriormente e

$$0 < \alpha \leq \min \left\{ \frac{p-2}{2p}, \frac{p-m}{p(m-1)} \right\}. \tag{4.4}$$

Derivando (4.3) obtemos

$$L'(t) = (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \int_\Omega [u_t^2(t) + u_{tt} u(t)] \, dx,$$

multiplicando a equação (2.1) por u, integrando em Ω , e substituindo na igualdade acima, segue que

$$\begin{aligned} L'(t) &= (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \int_\Omega [u_t^2(t) - |\nabla u(t)|^2] \, dx + \varepsilon b \int_\Omega |u(t)|^p \, dx \\ &- a\varepsilon \int_\Omega |u_t(t)|^{m-2} u_t(t) u(t) \, dx - a\varepsilon \int_\Omega u_t(t) u(t) \, dx. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Agora, analisaremos separadamente alguns termos da equação (4.5). Observe que,

$$\begin{aligned} \varepsilon b \int_\Omega |u(t)|^p \, dx &= \varepsilon \left[p \left(-\frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 - \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{b}{p} \|u\|_p^p \right) + \frac{p}{2} \left(\|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 \right) \right] \\ &= \varepsilon \left[pH(t) + \frac{p}{2} \left(\|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 \right) \right]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Por outro lado, da desigualdade de Young,

$$AB \leq \frac{A^r}{r} + \frac{B^q}{q} \quad \text{onde} \quad r, q \geq 1, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{e} \quad A, B \geq 0,$$

então para qualquer $\delta > 0$ é válida a seguinte expressão

$$AB = A\delta B\delta^{-1} \leq \frac{\delta^r}{r}A^r + \frac{\delta^{-q}}{q}B^q.$$

Usando a desigualdade acima e a desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_t(t)|u_t(t)|^{m-2}u(t)\,dx &\leq \int_\Omega |u_t(t)|^{m-1}|u(t)|\,dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |u_t(t)|^m\,dx\right)^{\frac{m-1}{m}}\left(\int_\Omega |u(t)|^m\,dx\right)^{\frac{1}{m}} \\
&\leq \frac{\delta^m}{m}\|u\|_m^m + \frac{m-1}{m}\delta^{-m/(m-1)}\|u_t\|_m^m.
\end{aligned}$$

Multiplicando a desigualdade anterior por $-a\varepsilon < 0$, obtemos

$$-a\varepsilon\int_\Omega u_t(t)|u_t(t)|^{m-2}u(t)\,dx \geq -a\varepsilon\frac{\delta^m}{m}\|u\|_m^m - a\varepsilon\frac{m-1}{m}\delta^{-m/(m-1)}\|u_t\|_m^m \tag{4.7}$$

Considere agora $\lambda > 0$, então para quaisquer $X, Y \geq 0$ vale a estimativa

$$XY = \left(X\sqrt{\lambda}\right)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}Y \leq \frac{1}{2}\lambda X^2 + \frac{1}{2\lambda}Y^2.$$

Tomemos

$$\lambda = 2\frac{m-1}{m}\delta^{-m/(m-1)} > 0, \quad X = \|u_t\|_2^2 \quad \text{e} \quad Y = \|u\|_2^2$$

então da desigualdade de Hölder e da estimativa acima, chegamos à

$$\int_\Omega uu_t\,dx \leq \|u\|_2\|u_t\|_2 \leq \frac{m-1}{m}\delta^{-m/(m-1)}\|u_t\|_2^2 + \frac{m}{4(m-1)}\frac{1}{\delta^{-m/(m-1)}}\|u\|_2^2.$$

Como $p \geq 2$ e Ω é limitado, existe uma constante C_0 tal que $\|u\|_2^2 \leq C_0\|u\|_p^2$, logo

$$\int_\Omega uu_t\,dx \leq \frac{m-1}{m}\delta^{-m/(m-1)}\|u_t\|_2^2 + \frac{m}{4(m-1)}\frac{C_0}{\delta^{-m/(m-1)}}\|u\|_p^2,$$

donde obtemos

$$-a\varepsilon\int_\Omega uu_t\,dx \geq -a\varepsilon\frac{m-1}{m}\delta^{-m/(m-1)}\|u_t\|_2^2 - \frac{a\varepsilon m}{4(m-1)}\frac{C_0}{\delta^{-m/(m-1)}}\|u\|_p^2. \tag{4.8}$$

Consideremos a constante δ dependente de cada t da seguinte forma

$$\delta^{-m/(m-1)} = kH^{-\alpha}(t), \tag{4.9}$$

onde k é uma constante positiva a ser estabelecida posteriormente. Substituindo (4.6) $-$ (4.9) e a identidade $H'(t) = a(\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_m^m)$ em (4.5) e juntando termos semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \left[(1-\alpha) - \frac{m-1}{m}\varepsilon k\right] H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\left(\frac{p}{2}+1\right)\|u_t\|_2^2 \\ &+ \varepsilon\left(\frac{p}{2}-1\right)\|\nabla u\|_2^2 - \frac{a\varepsilon m}{4(m-1)}\frac{C_0}{kH^{-\alpha}}\|u\|_p^2 \\ &+ \varepsilon\left[pH(t) - \frac{k^{1-m}}{m}aH^{\alpha(m-1)}(t)\|u\|_m^m\right]. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Da expressão (4.2), temos que

$$\frac{a\varepsilon m}{4(m-1)}\frac{C_0}{kH^{-\alpha}}\|u\|_p^2 = \frac{a\varepsilon m}{4(m-1)}\frac{C_0}{k}H^{\alpha}\|u\|_p^2 \leq \frac{a\varepsilon m}{4(m-1)}\frac{C_0}{k}\left(\frac{b}{p}\right)^{\alpha}\|u\|_p^{2+\alpha p}.$$

Por outro lado, da condição (4.4) temos que $\alpha \leq \dfrac{p-2}{2p} \leq \dfrac{p-2}{p}$, logo $s = \alpha p + 2 \leq p$ e pelo Corolário 4.1 a expressão anterior fica da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{a\varepsilon m}{4(m-1)}\frac{C_0}{kH^{-\alpha}}\|u\|_p^2 &\leq C\frac{a\varepsilon m}{4(m-1)}\frac{C_0}{k}\left(\frac{b}{p}\right)^{\alpha}\{H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p\} \\ &= \varepsilon\frac{C_1}{k}\{H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p\}, \end{aligned}$$

onde $C_1 = C\dfrac{am}{4(m-1)}C_0\left(\dfrac{b}{p}\right)^{\alpha}$ (constante fixa), e C é a constante do Corolário 4.1. Portanto

$$-\frac{a\varepsilon m}{4(m-1)}\frac{C_0}{kH^{-\alpha}}\|u\|_p^2 \geq -\varepsilon\frac{C_1}{k}\{H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p\}, \tag{4.11}$$

Substituindo (4.11) em (4.10) obtemos

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \left[(1-\alpha) - \frac{m-1}{m}\varepsilon k\right] H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\left(\frac{p}{2}+1\right)\|u_t\|_2^2 \\ &+ \varepsilon\left(\frac{p}{2}-1\right)\|\nabla u\|_2^2 - \varepsilon\frac{C_1}{k}\{H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p\} \\ &+ \varepsilon\left[pH(t) - \frac{k^{1-m}}{m}aH^{\alpha(m-1)}(t)\|u\|_m^m\right]. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Neste ponto, estimaremos o termo $-\varepsilon\dfrac{k^{1-m}}{m}aH^{\alpha(m-1)}(t)\|u\|_m^m$. Da expressão (4.2), temos que

$$H^{\alpha(m-1)}(t) \leq \left(\frac{b}{p}\right)^{\alpha(m-1)} \|u\|_p^{\alpha p(m-1)},$$

e como Ω é limitado e $p > m$, existe uma constante positiva C_2 satisfazendo $\|u\|_m^m \leq C_2\|u\|_p^m$, portanto multiplicando a expressão anterior por esta desigualdade, temos que

$$H^{\alpha(m-1)}(t)\|u\|_m^m \leq \left(\frac{b}{p}\right)^{\alpha(m-1)} C_2\|u\|_p^{m+\alpha p(m-1)},$$

e em seguida multiplicando por $\dfrac{k^{1-m}}{m}a > 0$, obtemos

$$\frac{k^{1-m}}{m}aH^{\alpha(m-1)}(t)\|u\|_m^m \leq \frac{k^{1-m}}{m}a\left(\frac{b}{p}\right)^{\alpha(m-1)} C_2\|u\|_p^{m+\alpha p(m-1)}.$$

Da condição (4.4), temos que $\alpha \leq \dfrac{p-m}{p(m-1)}$, então $s = m + \alpha p(m-1) \leq p$ e pelo Corolário 4.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{k^{1-m}}{m}aH^{\alpha(m-1)}(t)\|u\|_m^m &\leq \frac{k^{1-m}}{m}a\left(\frac{b}{p}\right)^{\alpha(m-1)} C_2\|u\|_p^{m+\alpha p(m-1)} \\
&\leq C_3k^{1-m}\{H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p\},
\end{aligned}$$

e multiplicando por $-\varepsilon$, segue que

$$-\varepsilon\frac{k^{1-m}}{m}aH^{\alpha(m-1)}(t)\|u\|_m^m \geq -\varepsilon C_3k^{1-m}\{H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p\}, \tag{4.13}$$

onde $C_3 = C\dfrac{aC_2}{m}\left(\dfrac{b}{p}\right)^{\alpha(m-1)}$ (constante fixa), e C é a constante do Corolário 4.1. Substituindo (4.13) em (4.12) chegamos à

$$\begin{aligned}
L'(t) \quad &\geq \quad \left[(1-\alpha) - \frac{m-1}{m}\varepsilon k\right] H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\left(\frac{p}{2}+1\right)\|u_t\|_2^2 + \varepsilon\left(\frac{p}{2}-1\right)\|\nabla u\|_2^2 \\
&+ \quad \varepsilon\left[pH(t) - \left(\frac{C_1}{k} + C_3k^{1-m}\right)\{H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p\}\right]. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$pH(t) = \frac{p+2}{2}H(t) + \frac{p-2}{2}H(t) = \frac{p+2}{2}H(t) + \frac{p-2}{2}\left(\frac{b}{p}\|u\|_p^p - \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2\right),$$

substituindo a equação acima em (4.14), obtemos

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \left[(1-\alpha) - \frac{m-1}{m}\varepsilon k\right] H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\left(\frac{p}{2} + 1 - \frac{p-2}{4}\right)\|u_t\|_2^2 \\ &+\varepsilon\left(\frac{p}{2} - 1 - \frac{p-2}{4}\right)\|\nabla u\|_2^2 \\ &+\varepsilon\left[\frac{p+2}{2}H(t) + \frac{p-2}{2p}b\|u\|_p^p - \left(\frac{C_1}{k} + C_3 k^{1-m}\right)k^{1-m}\{H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p\}\right]. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Colocando em evidência os termos semelhante em (4.15), temos que

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \left[(1-\alpha) - \frac{m-1}{m}\varepsilon k\right] H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\frac{p-2}{4}\|\nabla u\|_2^2 \\ &+ \varepsilon\left[\frac{p+6}{4} - \left(\frac{C_1}{k} + C_3 k^{1-m}\right)\right]\|u_t\|_2^2 \\ &+ \varepsilon\left[\frac{p+2}{2} - \left(\frac{C_1}{k} + C_3 k^{1-m}\right)\right]H(t) + \varepsilon\left[\frac{p-2}{2p}b - \left(\frac{C_1}{k} + C_3 k^{1-m}\right)\right]\|u\|_p^p. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Tomamos k suficientemente grande, tal que os coeficientes de $H(t), \|u_t\|_2^2$ e $\|u\|_p^p$ sejam positivos, e em seguida consideramos $\gamma > 0$ o menor destes coeficientes, então da expressão (4.16), chegamos a seguinte desigualdade

$$L'(t) \geq \left[(1-\alpha) - \frac{m-1}{m}\varepsilon k\right] H^{-\alpha}(t)H'(t) + \gamma\varepsilon\{H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p\}. \tag{4.17}$$

Uma vez fixado k, tomamos $\varepsilon > 0$ pequeno tal que, $(1-\alpha) - \dfrac{m-1}{m}\varepsilon k \geq 0$ e

$$L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon\int_\Omega \varphi\psi\, dx > 0$$

e chegamos à

$$L'(t) \geq \gamma\varepsilon\{H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p\} \geq 0 \tag{4.18}$$

então, temos que $L(t) \geq L(0) > 0$, $\forall t \in [0,T)$. Mostremos agora que existe uma constante $\Gamma_0 > 0$, tal que

$$\Gamma_0 L^{1/(1-\alpha)}(t) \leq H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p,$$

e portanto concluimos de (4.18), que existe uma constante $\Gamma > 0$, dependendo de ε e de C (constante do Corolário 4.1) satisfazendo

$$L'(t) \geq \Gamma L^{1/(1-\alpha)}(t). \tag{4.19}$$

De fato, como Ω é limitado e $p \geq 2$ existe uma constante positiva C, satisfazendo $\|u\|_2 \leq C\|u\|_p$, também pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\left|\int_\Omega u u_t \, dx\right| \leq \|u\|_2 \|u_t\|_2 \leq C\|u\|_p \|u_t\|_2,$$

o que implica a seguinte expressão,

$$\left|\int_\Omega u u_t \, dx\right|^{1/(1-\alpha)} \leq C^{1/(1-\alpha)} \|u\|_p^{1/(1-\alpha)} \|u_t\|_2^{1/(1-\alpha)}. \tag{4.20}$$

Observação: Nas majorações que seguem, usaremos a letra C para designar várias constantes distintas, com objetivo de simplificar os cálculos.
Sejam μ e $\theta \geq 1$, tal que $\dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1}{\theta} = 1$, então da desigualdade de Young, temos que

$$AB \leq \frac{A^\mu}{\mu} + \frac{B^\theta}{\theta} \quad \text{onde} \quad A, B \geq 0,$$

então, tomando $A = \|u\|_p^{1/(1-\alpha)}$ e $B = \|u_t\|_2^{1/(1-\alpha)}$ na desigualdade (4.20), temos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u u_t \, dx\right|^{1/(1-\alpha)} &\leq C\|u\|_p^{1/(1-\alpha)} \|u_t\|_2^{1/(1-\alpha)} \\
&\leq C\left(\frac{\|u\|_p^{\mu/(1-\alpha)}}{\mu} + \frac{\|u_t\|_2^{\theta/(1-\alpha)}}{\theta}\right) \\
&\leq C\left(\|u\|_p^{\mu/(1-\alpha)} + \|u_t\|_2^{\theta/(1-\alpha)}\right).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Como $\alpha \leq \dfrac{p-2}{2p} \leq \dfrac{1}{2}$, definimos

$$\theta := 2(1-\alpha) \geq 1 \quad \text{e} \quad \mu := \frac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha} \geq 1.$$

Por outro lado, como $\alpha \leq \dfrac{p-2}{2p}$, temos que

$$\frac{1-2\alpha}{2} \geq \frac{1}{p}, \quad \text{então} \quad \frac{\mu}{1-\alpha} = \frac{2}{1-2\alpha} \leq p$$

ou seja, $s = \dfrac{\mu}{1-\alpha} \leq p$, então pelo Corolário 4.1 em (4.21), obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u u_t \, dx \right|^{1/(1-\alpha)} &\leq C \left\{ \|u\|_p^s + \|u_t\|_2^2 \right\} \\ &\leq C\{H(t) + \|u\|_p^p + \|u_t\|_2^2\}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Finalmente da identidade (4.3), temos que

$$L^{1/(1-\alpha)}(t) = \left(H^{1-\alpha} + \varepsilon \int_\Omega u u_t \, dx \right)^{1/(1-\alpha)}, \tag{4.23}$$

por outro lado, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, existe uma constante positiva C, tal que

$$(|a| + |b|)^p \leq C(|a|^p + |b|^p), \quad \text{onde} \quad p \geq 1,$$

então, tomando $p = \dfrac{1}{1-\alpha} \geq 1$, $a = H^{1-\alpha}(t)$ e $b = \varepsilon \displaystyle\int_\Omega u u_t \, dx$ de (4.23) e da desigualdade (4.22), temos que

$$\begin{aligned} L^{1/1-\alpha}(t) &= \left(H^{1-\alpha} + \varepsilon \int_\Omega u u_t \, dx \right)^{1/(1-\alpha)} \\ &\leq C \left(H(t) + \varepsilon \left| \int_\Omega u u_t \, dx \right|^{1/(1-\alpha)} \right) \\ &\leq C\{H(t) + \|u\|_p^p + \|u_t\|_2^2\}, \end{aligned}$$

ou seja, existe $\Gamma_0 = \dfrac{1}{C} > 0$, tal que

$$\Gamma_0 L^{1/(1-\alpha)}(t) \leq H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p.$$

Observe que Γ_0 depende da constante do Corolário 4.1. Portanto é válida a desigualdade (4.19), então pelo Lema 4.1 se $\beta = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$, temos $1+\beta = \dfrac{1}{1-\alpha}$, donde segue o resultado. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R. G. (1995) *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York: Wiley Classics Library Edition Published. John Wiley & Sons.

[2] Benaissa, A. & Messaoudi, S. A. (2005) "Exponenial decay of solutions of a nonlinearly damped wave equation". *Nonlinear Differential Equations and Applications* **12**: 391-399.

[3] Brezis, H. (1983) *Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications*. Paris: Masson.

[4] Evans, L. C. (1997) *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society.

[5] Georgiev, V. & Todorova, G. (1994) "Existence of solution the wave equation whith nonlinear damping and source terms". *Journal of Differential Equations* **109**: 295-308.

[6] Ikehata, R.(1996) "Some remarks on the wave equations with nonlinear damping and source terms". *Nonlinear Analysis* **10**: 1165-1175.

[7] Kreyszig, E. (1978) *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons.

[8] Lions, J. L.(1969) *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*. Paris: Dunod/Gautier-Villars.

[9] Medeiros, L. A. & Milla Miranda, M. (1993) *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ.

[10] Medeiros, L. A. & Milla Miranda, M. (2000) *Espaços de Sobolev e Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos*. IM-UFRJ.

[11] Messaoudi, S. A. (2001) "Decay of the solution energy for a nonlinearly damped wave equation". *Arabian Journal Science and Engineering* **26**: 63-68.

[12] Messaoudi, S. A. (2001) "Blow up in a nonlinearly damped wave equation". *Mathematische Nachrichten.* **231**: 105-111.

[13] Nakao, M. (1977) "Decay of solutions of some nonlinear evolution equations". *Journal Math. Anal. Appl.* **60**: 542-549.

[14] Nishihara, K. & Zhao H. (2006) "Decay properties of solutions to the Cauchy problem for the damped wave equation with absorption". *Journal Mathematical Analysis and Applications* **313**: 598-610.

[15] Payne, L. & Sattinger, D.H.(1975) "Saddle points and instability on nonlinear hyperbolic equations". *Israel Journal of Mathematics* **22**: 273-303.

[16] Sattinger, D.H. (1968) "On a global solution of nonlinear hyperbolic equations". *Archives Rational Mech. Analysis* **30**: 148-172.