

**IDEMAR VIZOLLI**

**REGISTROS DE ALUNOS E PROFESSORES DE EDUCAÇÃO DE  
JOVENS E ADULTOS NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE  
PROPORÇÃO-PORCENTAGEM**

Tese apresentada à Banca Examinadora no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Educação, Linha de Investigação – Educação Matemática, sob orientação da Prof<sup>a</sup>, Dr<sup>a</sup> **Maria Tereza Carneiro Soares**.

**CURITIBA-PARANÁ  
2006**

Catálogo na publicação  
Sirlei R.Gdulla – CRB 9ª/985  
Biblioteca de Ciências Humanas e Educação - UFPR

V864	<p>Vizolli, Idemar Registros de alunos e professores de educação de jovens e adultos na solução de problemas de proporção- porcentagem / Idemar Vizolli. – Curitiba, 2006. 245 f. + 188 anexos (CD)</p> <p>Tese(Doutorado) – Setor de Educação , Universidade Federal do Paraná.</p> <p>1. Matemática – estudo e ensino. 2. Educação de jovens e adultos - matemática. 3. Matemática – pro- porção – estudo e ensino. 4. Razão e proporção – estudo e ensino – educação de jovens e adultos. I. Título.</p> <p>CDD 374.012 CDU 374.7</p>
------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO



## PARECER

Defesa de Tese de **IDEMAR VIZOLLI** para obtenção do Título de DOUTOR EM EDUCAÇÃO. Os abaixo-assinados, Dr<sup>a</sup> MARIA TEREZA CARNEIRO SOARES, Dr<sup>a</sup> MARIA HELENA FÁVERO, Dr<sup>a</sup> MARIA DA CONCEIÇÃO FONSECA, Dr. MÉRICLES THADEU MORETTI e Dr<sup>a</sup> MARIA LÚCIA FARIA MORO argüiram, nesta data, o candidato acima citado, o qual apresentou a seguinte Tese: **“REGISTROS DE ALUNOS E PROFESSORES DE EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS CLÁSSICOS DE PROPORÇÃO-PORCENTAGEM”**.

Procedida a argüição, segundo o Protocolo aprovado pelo Colegiado, a Banca é de Parecer que o candidato está apto ao Título de DOUTOR EM EDUCAÇÃO, tendo merecido as apreciações abaixo:

BANCA	ASSINATURA	APRECIÇÃO
Dr <sup>a</sup> MARIA TEREZA CARNEIRO SOARES		Aprovado
Dr <sup>a</sup> MARIA HELENA FÁVERO		aprovada
Dr <sup>a</sup> MARIA DA CONCEIÇÃO FONSECA		aprovado
Dr. MÉRICLES THADEU MORETTI		Aprovado
Dr <sup>a</sup> MARIA LÚCIA FARIA MORO		aprovado

Curitiba, 20 de novembro de 2006.

Prof. Dr. Marcus Aurelio Taborda de Oliveira  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação

Prof. Dr. Marcus Aurelio Taborda de Oliveira  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação  
Mat. 135054

Às filhas:  
Tuíra (*in memorian*), Iaraí e Nariê, pelo amor e vivacidade.

À  
Solange, pela atenção, dedicação e carinho com nossas filhas.

## AGRADECIMENTOS

No meio do caminho pode ter uma pedra  
Mas no meio dessa pedra pode ter um caminho  
A pedra no caminho pode ser um diamante  
Pode ser que ela me atrase,  
Pode que eu me adiante.  
Toda pedra pode ser um diamante  
Todo dia pode ser um grande dia  
Toda noite pode ser aquela noite  
Aquela noite não foi mas também podia.  
Aprendi na poesia anestésiante  
E na porrada sagrada de cada dia  
Que a gente pode e deve ser confiante  
Mas não pode dar mole nem quando a gente confia.  
(Gabriel Pensador)

Em nossa trajetória de vida encontramos muitas pedras. Sobre, ou entre elas, trilhamos caminhos, registramos história. A vida, os caminhos, os amigos, a história, assim como todas as conquistas, são os diamantes, que com sua dureza não nos permitiram esmorecer.

Seguimos em frente.

No doutorado não foi diferente.

Neste momento precisamos agradecer aos diamantes que encontramos pelo caminho:

- Aos familiares, pelas lições de vida;
- À professora Maria Lúcia Faria Moro, por sua sapiência e competência;
- Aos professores José Carlos Cifuentes e Tânia Baibich, pelos ensinamentos;
- Aos colegas José Maria, Maísa e Célia, pela solidariedade e trocas de idéias;
- Aos alunos e professores da Educação de Jovens e Adultos, pela bravura com que lutam por uma vida melhor;
- À Universidade Federal do Paraná, mais precisamente ao Programa de Pós-Graduação em Educação, pela oportunidade do doutoramento e pela acolhida;
- À Universidade do Vale do Itajaí, pela liberação da bolsa de estudos.

À professora Maria Tereza Carneiro Soares, pela sua seriedade, competência, confiança, respeito, humanidade, paciência, amabilidade, saber viver ...

Obrigado por tudo quanto  
Você me fez por nada  
Por nada se mata  
E morre de amor  
Não quero parecer com nada  
No mundo porque

Apesar da entranha ferida  
Donde eu saí por nada  
Do nada também se nasce  
Uma flor com todo seu poder  
De colocação e magia

Tudo isso é uma questão de saber  
Saber viver  
Tudo isso é uma questão de amar  
Pra entender  
Tudo isso é uma questão de querer  
Reconhecer  
Que quem sabe tudo  
Não há de ser, nesse compasso  
Há espaço pra quem quiser viver

Muito obrigado  
Muito obrigado  
Muito obrigado  
Por tudo o que eu tenho passado.

Muito obrigado  
Muito obrigado  
Muito obrigado  
Por tudo o que eu tenho passado.  
(Djavan)

A elaboração desta tese foi um trabalho solidário que contou com a colaboração de muitas preciosidades. A todas as preciosidades que, de uma ou de outra forma me ajudaram a encontrar diamantes e outros minerais preciosos, meu muito obrigado.

## SUMÁRIO

<b>1. O DESCORTINAR DE UM OBJETO DE PESQUISA .....</b>	<b>16</b>
1.1. <b>Origens e motivos do objeto de pesquisa.....</b>	<b>16</b>
1.1.1. Indicadores nacionais do nível de alfabetismo matemático da população brasileira.....	19
1.2. <b>Identificando o problema .....</b>	<b>22</b>
1.2.1. A formação de professores que ensinam Matemática .....	27
1.2.2. A mediação semiótica .....	33
1.3 <b>O objeto de investigação .....</b>	<b>40</b>
<b>2. O APORTAR NO REFERENCIAL TEÓRICO.....</b>	<b>42</b>
2.1 <b>O estado do conhecimento da Educação Matemática na EJA .....</b>	<b>42</b>
2.1.1. Educação Matemática na EJA: sínteses encontradas.....	42
2.1.2. Pesquisas sobre o processo de ensino-aprendizagem da Matemática na EJA .....	43
2.2. <b>As pesquisas sobre proporção-porcentagem.....</b>	<b>65</b>
2.3. <b>Os registros de representação semiótica .....</b>	<b>71</b>
<b>3. O REVELAR DO OBJETO INVESTIGADO.....</b>	<b>84</b>
3.1. <b>A compreensão da proporção-porcentagem .....</b>	<b>88</b>
3.2. <b>A proporção-porcentagem e seus registros de representação .....</b>	<b>93</b>
3.3. <b>Idéias matemáticas que a proporção-porcentagem comporta.....</b>	<b>100</b>
3.4. <b>A proporção-porcentagem como estrutura multiplicativa .....</b>	<b>103</b>
<b>4. OS CAMINHOS PERCORRIDOS PARA A REALIZAÇÃO DA PESQUISA</b>	<b>113</b>
4.1. <b>Os participantes da pesquisa.....</b>	<b>113</b>
4.2. <b>A escolha dos participantes da pesquisa.....</b>	<b>114</b>
4.3. <b>Os procedimentos de coleta de dados .....</b>	<b>116</b>
4.4. <b>Os instrumentos utilizados na coleta de dados .....</b>	<b>118</b>
4.4.1. Os problemas.....	119
4.4.2. Caracterização dos problemas de proporção-porcentagem.....	121
4.5. <b>Procedimento de organização das entrevistas .....</b>	<b>127</b>

<b>4.6.</b>	<b>Análise dos dados .....</b>	<b>129</b>
<b>4.7.</b>	<b>Estudo I: realizado com três participantes .....</b>	<b>130</b>
4.7.1.	Análise dos registros verbais orais e escritos no Estudo I .....	130
4.7.2.	Considerações em relação aos registros utilizados pelos participantes do Estudo I.....	136
<b>4.8.</b>	<b>Estudo II: realizado com uma dupla de alunos .....</b>	<b>138</b>
4.8.1.	Análise dos registros verbais orais e escritos no Estudo II.....	138
4.8.2.	Considerações em relação aos registros utilizados pelos participantes no Estudo II.....	146
<b>4.9.</b>	<b>Estudo III: realizado com uma dupla de professores.....</b>	<b>148</b>
4.9.1.	Análise dos registros verbais orais e escritos no Estudo III .....	148
4.9.2.	Considerações em relação aos registros utilizados pelos participantes no Estudo III .....	158
<b>4.10.</b>	<b>Estudo IV: realizado com quatro duplas de alunos .....</b>	<b>160</b>
4.10.1.	Primeira dupla: EPm(22;11) e LAf(35;5).....	160
4.10.2.	Segunda dupla: GAm(54;0) e STf(45;8) .....	171
4.10.3.	Terceira dupla: SCf(54;11) e ELM(37;11).....	179
4.10.4.	Quarta dupla: AAf(38;4) e EFF(25;8) .....	189
4.10.5.	Considerações em relação aos registros utilizados pelos participantes no Estudo IV .....	201
<b>5.</b>	<b>O DESVELAR DOS RESULTADOS .....</b>	<b>204</b>
<b>5.1.</b>	<b>Os pontos de apoio utilizados pelos participantes na passagem do enunciado do problema em linguagem mista para linguagem matemática.....</b>	<b>204</b>
5.1.1.	Apoios em situações do contexto cultural .....	205
5.1.2.	Apoios em situações do contexto matemático.....	208
<b>5.2.</b>	<b>Os registros de representação semiótica utilizados pelos participantes .....</b>	<b>213</b>
<b>6.</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>226</b>
<b>6.1.</b>	<b>Algumas considerações sobre a formação de professores que ensinam Matemática na EJA</b>	<b>226</b>
<b>6.2.</b>	<b>Os pontos de apoio na solução dos problemas .....</b>	<b>230</b>
<b>6.3.</b>	<b>Os registros de representação semiótica na solução dos problemas .....</b>	<b>232</b>
<b>7.</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>236</b>
<b>8.</b>	<b>ANEXOS.....</b>	<b>DISPONÍVEIS EM CD</b>

## RESUMO

Esta tese resulta de uma ausculta nas falas e nos registros de representação de alunos e professores de Educação de Jovens e Adultos – EJA, ao solucionarem problemas de proporção-porcentagem. Partindo do pressuposto de que as pessoas pouco escolarizadas tomam como referência situações do contexto social para solucionar estes tipos de problemas, fizemos as seguintes perguntas de pesquisa: Como os professores e alunos do curso de Educação de Jovens e Adultos escrevem a solução de problemas de proporção-porcentagem? Que registros de representação semiótica os alunos e professores de Educação de Jovens e Adultos utilizam para solucionar problemas de proporção-porcentagem? Elaboramos os problemas e, por meio de entrevista, solicitamos que os participantes os solucionassem, escrevendo as soluções em papel. As entrevistas foram gravadas em áudio e depois transcritas. Realizamos quatro estudos em que participaram 13 alunos e dois professores de 3º e 4º Ciclos de EJA da Universidade do Vale do Itajaí, SC. No estudo I, os participantes solucionaram os problemas individualmente, enquanto nos estudos II, III e IV, fizeram-no em duplas. Para proceder às análises, inspiramo-nos, principalmente, na teoria dos registros de representação semiótica de Duval. As análises das soluções indicaram que os participantes apóiam seus raciocínios em situações do contexto cultural (trabalho, comercialização, salário, escola) e situações do contexto matemático (taxas percentuais múltiplas de 5% ou 10%, metade, decomposição das quantidades, conhecimento adquirido no processo de escolarização, estimativa, tentativa e erro, cálculo mental). Fizeram uso de registros verbal oral e registros de representação semiótica (mistos; numéricos: aritméticos, percentual, fração, razão, decimal; tabela de números proporcionais, equação e função). Os resultados nos permitem inferir que o processo de ensino e aprendizagem de proporção-porcentagem deve proporcionar oportunidades para que os alunos estabeleçam relações intercontextuais que lhes permitam generalizar procedimentos de situações familiares para não-familiares. Estes resultados corroboram a recomendação já presente na literatura de que o professor proponha atividades que levem em consideração a mudança de registro de representação semiótica.

**Palavras chave:** Registro de representação semiótica; Proporção-porcentagem; Educação Matemática; Educação de Jovens e Adultos.

## RÉSUMÉ

Cette thèse résulte d'un examen des discours et des registres de représentation d'élèves et de professeurs en Éducation de Jeunes et Adultes – EJA, quand ils résolvent des problèmes de proportion-pourcentage. Partant de la supposition que les personnes peu scolarisées prennent comme référence des situations du contexte social pour résoudre ce type de problèmes, nous avons posé les questions suivantes pour notre recherche: Comment les professeurs et élèves du cours d'Éducation de Jeunes et Adultes écrivent-ils la solution de problèmes de proportion-pourcentage? Quels registres de représentation sémiotique les élèves et les professeurs d'Éducation de Jeunes et Adultes utilisent-ils pour résoudre des problèmes de proportion-pourcentage? Nous avons élaboré les problèmes et, au moyen d'un entretien, nous avons demandé que les participants les résolvent, en écrivant les solutions sur du papier. Les entretiens ont été enregistrés en audio et retranscrits par la suite. Nous avons réalisé quatre études auxquelles ont participé 13 élèves et deux professeurs de 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> Cycles de EJA de l'Université du Vale do Itajaí, SC (Brésil). Dans l'étude I, les participants ont résolu les problèmes individuellement, alors que dans les études II, III et IV, ils l'ont fait en binômes. Pour procéder aux analyses, nous nous sommes inspiré, principalement, de la théorie des registres de représentation sémiotique de Duval. Les analyses des solutions ont indiqué que les participants se sont appuyés pour leurs raisonnements sur des situations du contexte socioculturel (travail, commercialisation, salaire, école) et des situations du contexte mathématique (taux de pourcentage multiples de 5% ou 10%, moitié, décomposition des quantités, connaissances acquises au cours de la scolarité, estimation, essais et erreurs, calcul mental). Ils ont fait usage de registres verbaux oraux et de registres de représentation sémiotique (mixtes; numériques : arithmétiques, pourcentage, fraction, rapport, décimal ; tableau de nombres proportionnels, équation et fonction). Les résultats nous permettent d'inférer que le processus d'enseignement et d'apprentissage de proportion-pourcentage doit offrir aux élèves des opportunités d'établir des relations intercontextuelles qui leur permettent de généraliser des procédures à partir de situations familières pour des situations non familières. Ces résultats corroborent la recommandation déjà présente dans la littérature que le professeur propose des activités qui prennent en considération le changement de registre de représentation sémiotique.

**Mots-clé:** Registre de représentation sémiotique; Proportion-pourcentage; Éducation Mathématique; Éducation de Jeunes et Adultes.

## ABSTRACT

The present study results from the analysis of speech data and representation registers of students and teachers in the Youth and Adult Education Program (YAE) when solving proportion-percentage problems. Assuming that people with low schooling levels take situations from the social context as reference to solve this kind of problems, we asked the following research questions: How do Youth and Adult Education teachers and students write the solution to proportion-percentage problems? What semiotic representation registers do Youth and Adult Education students and teachers use to solve problems proportion-percentage problems? We prepared the problems and, by means of interviews, asked the participants to solve them, writing their solutions on paper. The interviews were tape recorded and then transcribed. We carried out four studies in which 13 students and two teachers from the 3<sup>rd</sup> and 4<sup>th</sup> cycles of YAE at the University of the Itajaí Valley (Santa Catarina) took part. In study I the participants solved the problems individually, while in studies II, III and IV they did it in pairs. For the analysis we based ourselves mainly on Duval's theory of semiotic representation registers. The analyses of the solutions indicated that the participants base their reasoning on situations of the cultural context (work, trade, salary, school) and situations of the mathematical context (percentage rates multiple of 5% or 10%, half, decomposing of quantities, knowledge acquired in the schooling process, estimates, trial and error, mental calculation). They used oral verbal registers and semiotic representation registers (mixed; numerical: arithmetic, percentage, fraction, reason, decimal; table of proportional numbers, equation and function). The results allowed us to infer that the teaching and learning process of proportion-percentage should provide opportunities for students to establish intercontextual relations, which would allow them to generalize procedures from familiar situations to non-familiar ones. These results corroborate the recommendation already present in the literature that teachers should present activities that take into consideration the change of semiotic representation registers.

Key words: Semiotic representation register; Proportion-percentage; Mathematics Education; Youth and Adult Education.

## APRESENTAÇÃO

A pesquisa que ora apresentamos amplia e aprofunda o trabalho realizado por ocasião do Mestrado (Vizolli, 2001), na qual identificamos os registros de representação semiótica necessários à compreensão conceitual de porcentagem, como proporção. De acordo com Duval (1993, p. 38), “as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação as quais têm suas construções próprias de significado e funcionamento.” Ainda, segundo o autor (1995, p. 17), as representações semióticas se caracterizam por “um sistema particular de signos, a linguagem, escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e que podem ser convertidas em representações equivalentes dentro de outro sistema semiótico, mas podem apresentar significados diferentes para o sujeito que as utiliza.” Para o autor (1993; 1995; 2003), a conversão é a transformação de um sistema de representação semiótica para outro, também semiótica.

Conforme Duval (1993; 1995), a análise do desenvolvimento cognitivo, assim como as dificuldades encontradas na aprendizagem, confronta-se com três fenômenos interligados: a existência de uma diversidade de registros de representação semiótica; a diferenciação entre o objeto representado e seus registros de representação semiótica; e a coordenação entre diferentes registros de representação semiótica.

Continuamos a investigar o processo de compreensão conceitual de proporção-porcentagem para além dos registros de representação. Agora, com o pressuposto de que a solução de problemas clássicos por alunos e professores do curso de Educação de Jovens e Adultos – EJA comporta elementos do contexto social mais imediato, os quais precisam ser levados em consideração, quando do processo de ensino e aprendizagem. Nos termos de Damm (1998, p. 198), “a porcentagem é a proporção de uma quantidade, de uma grandeza em relação a uma outra, avaliada sobre a centena”.

Esse pressuposto encontra eco nas pesquisas desenvolvidas por Carraher; Carraher e Schliemann (1992), Carvalho (1995), Maurmann (1999), Franco (2000), Porto e Carvalho (2000), Fonseca (2001), Toledo (2001), Bail (2002), Piconez (2002), Fantinato (2003), Santos (2004), entre outros. Um dos princípios dessas pesquisas mostra que os alunos adultos, quando em processo de escolarização, mobilizam conhecimentos oriundos de suas práticas cotidianas para solucionar problemas matemáticos propostos em sala de aula.

Tendo presente tais considerações esta tese foi elaborada a partir das seguintes perguntas de pesquisa:

- **Como os professores e alunos do curso de Educação de Jovens e Adultos – EJA, promovido pela Universidade do Vale do Itajaí – UNIVALI, escrevem a solução de problemas de proporção-porcentagem?**
- **Que registros de representação semiótica os professores e alunos de EJA utilizam para solucionar problemas de proporção-porcentagem?**

Para nos orientar na tarefa de investigação, analisamos os registros de representação semiótica escritos pelos participantes e os conhecimentos que foram mobilizados no processo de solução dos problemas. Nesse sentido, estabelecemos os seguintes objetivos:

- **Identificar os registros de representação semiótica utilizados pelos professores e alunos do curso de Educação de Jovens e Adultos ao solucionarem problemas de proporção-porcentagem;**
- **Identificar os conhecimentos matemáticos que são mobilizados pelos professores e alunos ao solucionarem os problemas.**

Para desenvolver a pesquisa, realizamos quatro estudos. Com o objetivo de identificar os registros de representação que são utilizados por alunos de EJA para solucionar problemas de proporção-porcentagem, no Estudo I, solicitamos que três alunos de 3º Ciclo de aprendizagem (equivalente à 5ª e 6ª séries do segundo segmento do Ensino Fundamental) solucionassem, individualmente, três problemas tomados do pós-teste da pesquisa anterior (Vizolli 2001). Após a solução, entrevistamos os participantes para obter mais dados a respeito do processo de solução. Os resultados deste estudo apontaram para soluções ancoradas em situações socioculturais. Inspirados nos problemas clássicos de proporção-porcentagem (Damm, 1998), elaboramos sete problemas com o tema “salário” e, no Estudo II, solicitamos que, em entrevista, uma dupla de alunos, também de 3º Ciclo de aprendizagem de EJA, os solucionassem. Neste estudo foram identificados registros de representação com marcas escolares, o que nos levou a realizar o Estudo III, este com uma

dupla de professores. Dado o fato de que a quantidade de sete problemas foi considerada demasiada pelos participantes do Estudo II, no Estudo III, solicitamos que, em entrevista, uma dupla de professores que atuam na EJA solucionasse apenas os três primeiros problemas apresentados no Estudo II. No Estudo III, foram identificados registros com marcas socioculturais e registros de representação semiótica usuais no processo de escolarização. O Estudo IV foi desenvolvido com quatro duplas de alunos de 4º Ciclo de aprendizagem do EJA, alunos dos professores que participaram do Estudo III. Foi solicitado que, em entrevista, os participantes solucionassem os três problemas apresentados no Estudo III. Os resultados do Estudo IV, além de confirmar as indicações presentes nos estudos anteriores (registros de representação usuais no processo de escolarização e com marcas socioculturais), indicaram que, para solucionar os problemas, os alunos buscaram apoio em situações socioculturais e em situações similares àquelas utilizadas pelos professores quando do processo de ensino e aprendizagem.

A tese foi organizada a partir das reflexões sobre vivências ou experiências pessoais como aluno e professor de EJA, agora pesquisador. Procuramos estabelecer um diálogo com os estudos de muitos dos autores que desenvolveram suas pesquisas na Educação Matemática – EM, na EJA, a exemplo de Duarte (1997), Carvalho (1995), Fonseca (2001), Piconez (2002), Fantinato (2003), entre outros. Trata-se de um movimento que parte da prática, vai à teoria e volta à prática.

Ao descortinar o objeto desta pesquisa, falamos das origens e dos motivos do exame do objeto de pesquisa. Fizemos ali constar alguns recortes de nossas vivências e experiências como aluno e professor de EJA, agora pesquisador; identificamos o problema e destacamos o objeto de pesquisa.

Ao construirmos o referencial teórico apresentamos uma síntese das pesquisas sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática na EJA, sobre a proporção-porcentagem. Apresentadas as sínteses buscamos, principalmente, nos registros de representação semiótica (Duval 1993; 1995; 2003) elementos para compor a base teórica desta tese.

As leituras, discussões e reflexões, cujo produto está presente nos Capítulos iniciais, nos permitiram delimitar o objeto de investigação e estabelecer os procedimentos metodológicos para o desenvolvimento da pesquisa que resultou na tese. No Capítulo III, ao retomar os objetivos da investigação, tratamos do processo de compreensão da

proporção-porcentagem, apresentamos os registros de representação semiótica necessários ao processo de conceitualização e procuramos vê-la como estrutura multiplicativa.

Ao apresentar os caminhos percorridos para a realização da pesquisa, fazemos referência aos alunos e professores que participaram da pesquisa, apresentamos os procedimentos adotados na coleta e análise dos dados, assim como os instrumentos utilizados.

No Capítulo V apresentamos a análise dos registros verbais e escritos dos participantes dos quatro estudos. Ao fazer a análise dos dados, apresentamos alguns diálogos estabelecidos entre o pesquisador e os participantes, ou recortes dos protocolos com as transcrições das entrevistas. Preocupamo-nos em descrever os registros de representação semiótica; os pontos de apoio que os participantes utilizaram no processo de solução dos problemas propostos.

Ao desvelar os resultados, apresentamos os registros verbais orais e escritos de que os participantes fizeram uso, assim como os pontos de apoio utilizados no processo de solução dos problemas. Ao tecer as considerações finais analisamos os conhecimentos mobilizados pelos participantes da pesquisa, enfatizando a necessidade de novos estudos no campo da Educação Matemática nos cursos de EJA.

## 1. O DESCORTINAR DE UM OBJETO DE PESQUISA

Ao descortinar o objeto de pesquisa rememoramos aspectos de nossas vivências ou experiências escolares como aluno do curso de Educação de Jovens e Adultos – EJA e como professor que ensina Matemática. Ao trazer recortes de nossa história de vida, apontamos origens e motivos de ordem pessoal e profissional que nos conduziram até aqui.

Tomando como ponto de partida algumas experiências de nossa prática docente e inspirados nas idéias de Duval (1993; 1995; 2003), delineamos as perguntas de pesquisa; buscamos na literatura sobre a formação inicial e continuada de professores e sobre as pesquisas realizadas no campo do ensino da Matemática na EJA elementos que nos permitissem compreender melhor a problemática em que se insere a Educação Matemática nesta modalidade educativa.

### 1.1. Origens e motivos do objeto de pesquisa

Uma das formas de tematizar a realidade é buscar na história de vida elementos que nos instigaram ou intrigaram, que nos despertaram desejos ou frustrações e que resultam em problemas para os quais não temos solução e que talvez nem cheguemos a tê-la. De qualquer forma, são perguntas para as quais ainda não encontramos respostas ou mesmo curiosidades ainda não satisfeitas; ou, nas palavras de Rodrigues (2005, p. 12), “em nossa trajetória de vida existem situações que desempenham um papel capital na constituição do nosso modo de ser e estar no mundo”. Ao recorrer à história de vida, procuramos melhor compreender as origens e os motivos da escolha do objeto da pesquisa que ora nos propomos estudar.

Ao freqüentar o MOBREAL, muitos dos problemas de Matemática que eram propostos em sala de aula referiam-se a questões do contexto imediato, como a compra e venda de produtos agrícolas, assunto familiar às pessoas adultas daquela região e em muitas regiões do País e do mundo. De acordo com Fonseca (2002), tratava-se de uma relação utilitária da matemática, traço muito próprio do aprendiz adulto.

Muitos dos nossos colegas adultos sabiam resolver *de cabeça* os problemas que nos eram propostos, mesmo que não tivessem um amplo domínio conceitual das idéias e

relações matemáticas envolvidas no problema. De alguma forma, eles articulavam os conhecimentos matemáticos com outros saberes que lhes permitissem realizar seu trabalho. De acordo com Giardinetto (1999), ao inserir-se numa realidade, o homem cria e produz meios para garantir suas necessidades.

Para Franco (2000), ao lidar com o que precisam, os sujeitos podem desenvolver um pensamento operatório formal, sem necessariamente depender de uma vivência escolar. Ao se deparar com um problema prático ou simbólico, o sujeito busca uma forma de poder lidar operatorialmente com ele e o resultado dessa operação se transforma novamente em conteúdo para ser expresso como solução do problema. A realidade imediata dos nossos colegas exigia que efetuassem as operações matemáticas que lhes permitissem calcular as despesas, e os lucros ou os prejuízos, quando da comercialização de produtos. Para isso, inventavam estratégias para encontrar a resposta do problema.

As estratégias são concebidas como um conjunto de procedimentos que possibilitam atingir um determinado objetivo; neste caso, solucionar os problemas de matemática que nos eram propostos em sala de aula. De acordo com Polya (1995), trata-se de elaborar e executar um plano de ações flexíveis que permitem encontrar elementos que possibilitam responder ao que é perguntado no enunciado do problema. Para Spinillo (1995), as estratégias refletem o modo de pensar e as relações que o sujeito estabelece acerca dos dados contidos em um problema. Analisar as estratégias é algo complexo, mas auxilia a compreender as noções que as pessoas apresentam e as dificuldades que experimentam na aquisição do conceito de proporção.

Com o passar do tempo, e a partir dos diálogos com os colegas (trocando experiências e compartilhando estratégias), fomos aprendendo como proceder para organizar as informações e articular os dados contidos no problema, a fim de operar matematicamente. Já as pessoas que não dominavam o código da escrita matemática demonstravam interesse em conhecer a forma canônica de resolução, isto é, solucionar os problemas por meio da utilização de algoritmos. Mas não é só isso; ao frequentarem a escola, as pessoas adultas objetivavam conhecer a Matemática que é ensinada na escola, compreender os conceitos matemáticos. De acordo com Piconez (2002), há expectativa e esforço dos alunos para aceder ao conhecimento formal, idéia que também é compartilhada por Carvalho (1995) e Fonseca (2001; 2002).

Pensando na situação, hoje, parece-nos que os colegas haviam tomado consciência de que o cálculo mental lhes era útil, mas não o suficiente para suprir as demandas criadas

pelo contexto social. Acreditávamos que ele era mais simples e menos trabalhoso. Hoje compreendemos que ocorriam duas realidades distintas, mas não desconexas: queríamos ressignificar o que fazíamos e solucionar os problemas que nos eram propostos. Ressignificar o que fazíamos significava, para os colegas, atribuir um status aos cálculos, de forma que pudessem operar matematicamente utilizando algoritmos convencionais, enquanto que nós queríamos compreender como operar com os dados e as informações disponibilizadas nos enunciados dos problemas. Cada um, a seu modo, objetivava compreender os conceitos matemáticos envolvidos no processo de solução dos problemas escolares que nos eram propostos, criando, procurando meios e “inventando” estratégias para enfrentar a realidade. Ou, de acordo com Silva (2002), desenvolvendo a capacidade operativa com a matemática, como consequência da compreensão das estruturas e idéias matemáticas e não da simples aplicação de algoritmos ou fórmulas.

Ao mesmo tempo em que apresentávamos diferenças em relação à forma de solucionar os problemas de matemática que nos eram propostos em sala de aula. Entre nós, havia colaboração e respeito em relação aos saberes de que cada um dispunha. Queríamos acessar ao conhecimento reconhecido pela sociedade.

Soares (1998, p.18) refere-se ao processo de inclusão e participação na cultura escrita como letramento “estado ou condição que adquire um grupo social ou um indivíduo como consequência de ter-se apropriado da escrita”. Ainda, de acordo com a autora (op cit), o letramento difere da alfabetização entendida como processo de aquisição do sistema de escrita e das habilidades de leitura.

De acordo com a Proposta Curricular de Santa Catarina (2005, p. 24), “a alfabetização é elemento essencial do letramento que orienta o indivíduo para que se aproprie do código, aprenda a ler e escrever e ao mesmo tempo conviva e participe das práticas reais de leitura e escrita”. Trata-se de processos distintos, mas não desconexos. Eles “são indispensáveis à apropriação das diferentes linguagens e na inserção do sujeito na cultura escrita”. (Id *ibid*).

O fenômeno do *alfabetismo*, seus níveis e suas possibilidades, diferentes estratégias de responder “adequadamente às intensas demandas sociais pelo uso amplo e diferenciado da leitura e da escrita”, é para nós uma preocupação nova, porque “só recentemente se configurou como uma realidade em nosso contexto social”. Se antes a enorme dimensão do problema do analfabetismo não nos permitia perceber ou focalizar a complexidade deste

fenômeno – o “estado ou condição de quem sabe ler e escrever”-, que não é apenas o *oposto* daquele, mas que é ora absolutamente diverso, ora surpreendentemente próximo dele em sua configuração e enfrentamento, atualmente passamos a enfrentar esta nova realidade social “em que não basta apenas ler e escrever, é preciso também saber fazer uso do ler e do escrever, saber responder às exigências de leitura e de escrita que a sociedade faz continuamente”. (SOARES 1998, p. 19-20 apud FONSECA 2004, p. 12).

Na continuidade do processo de escolarização, fomos descobrindo formas para utilizar regras, macetes e fórmulas, embora não compreendêssemos o sentido daquilo que estávamos fazendo. Não tivemos dificuldades em solucionar os problemas de Matemática que eram propostos em sala de aula. Em outras palavras, o exercício do cálculo mental e a utilização de registros canônicos foram fundamentais para ingressar no mundo da matemática formal, embora o significado do trabalho que desenvolvíamos na escola só fizesse sentido para aquele tipo de exercício de matemática.

Nem o cálculo mental, nem a matemática que na escola nos foi passada foram suficientes para eu compreender e dar significado aos conceitos matemáticos estudados. Foi preciso uma longa caminhada como professor, agora como pesquisador, para compreendermos alguns dos aspectos que hoje julgo importantes ao processo de ensino e aprendizagem da matemática, qual seja: significá-la, para que os alunos passem a compreender o conceito do que estão estudando e o façam com sentido.

Hoje, compreendemos que as regras, macetes e fórmulas decorrem de regularidades que são identificadas em situações matemáticas que possibilitam generalizações e abstrações. Estas nos conduzem ao resultado de uma operação matemática mais rapidamente. Nos termos de Duval (1993; 1995), trata-se da economia de tratamento.

### **1.1.1. Indicadores nacionais do nível de alfabetismo matemático da população brasileira**

Fonseca (2004) apresentou os resultados da pesquisa referente ao Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional – INAF de 2002, que avalia as habilidades matemáticas de uso cotidiano da população brasileira.

No ano de 2002, a equipe do IBOPE entrevistou dois mil sujeitos com idades entre 15 e 64 anos, residentes em mais de 140 municípios (na zona urbana, rural e periferia) dos estados da Federação. Os sujeitos, estudantes ou não, foram entrevistados em seus domicílios, respondendo oralmente a um questionário e resolvendo algumas situações-problema propostas pelo pesquisador.

O instrumento para a coleta de dados é composto por 36 questões e um questionário com 57 perguntas e 12 informações para composição de perfil do entrevistado. Para analisar os resultados, foram estabelecidos três níveis de alfabetismo funcional e definido um patamar abaixo, para o qual considerou-se o sujeito em situação de analfabetismo funcional.

De acordo com Fonseca (2004, p. 18-19), em situação de analfabetismo matemático encontram-se os sujeitos que não dominam

(...) habilidades matemáticas mais simples, como ler o preço de um produto em um anúncio ou anotar um número de telefone ditado pelo entrevistador.

O nível 1 de alfabetismo matemático caracteriza-se pelo sucesso apenas em tarefas de leitura de números de uso freqüente em contextos específicos: preços, horários, número de telefone, instrumentos de medidas simples (relógio, fita métrica). O sujeito neste nível 1 de alfabetismo matemático é capaz de anotar o número de telefone ditado por alguém, ver as horas em relógios de ponteiros, medir um comprimento com fita métrica e verificar num calendário em que dia da semana cai certa data.

No nível 2 de alfabetismo matemático, encontram-se os sujeitos que dominam completamente a leitura de números naturais, independente da ordem de grandeza, e são capazes de ler e comparar números decimais que se refiram a preços, contar dinheiro e fazer troco. Também são capazes de resolver situações envolvendo operações usuais, de adição e subtração, com valores em dinheiro, e mesmo em situações que recaia em uma multiplicação, quando não conjugada com outras operações.

A existência de relação de proporcionalidade direta entre preço e quantidade, e de proporcionalidade inversa entre número de prestações e o valor da prestação só começa a ser verificada quando o sujeito atinge o nível 2 de alfabetismo funcional em matemática.

No nível 3 de alfabetismo matemático, encontram-se os sujeitos que têm a capacidade de adotar e controlar uma estratégia na resolução de problemas que demandam a execução de uma série de operações. Nesse nível os sujeitos executam com tranquilidade

tarefas envolvendo cálculo proporcional; demonstram certa familiaridade com algumas representações gráficas como mapas, tabelas, gráficos.

Cabe destacar que esta pesquisa vem sendo realizada a cada dois anos (anos pares), o que significa que ela também foi realizada nos anos de 2004 e 2006.

No Quadro 1, a seguir, encontra-se a síntese dos índices das habilidades matemáticas em seus respectivos níveis de alfabetismo das pesquisas realizadas pelo INAF nos anos de 2002 e 2004.

Quadro 1 Índice de alfabetismo matemático

<b>Níveis</b>	<b>2002</b>	<b>2004</b>
Analfabetismo matemático	3%	2%
Nível 1 de alfabetismo matemático	44%	29%
Nível 2 de alfabetismo matemático	32%	46%
Nível 3 de alfabetismo matemático	21%	23%

FONTE: INAF, 2002 e 2004

Os resultados do INAF 2004 confirmam a indicação que já se revelava nos INAF's anteriores: de que conclusão do Ensino Fundamental poderia se considerada como escolaridade mínima para se alcançar um nível básico de alfabetismo funcional em matemática. Com efeito, somente com a população com 8 anos ou mais de escolaridade se observa mais de 80% atingindo os níveis 2 e 3 de alfabetismo matemático. (BRASIL, INAF/2004, p. 11).

Fonseca (2004, p. 22) chama a atenção dos professores para mais um aspecto que julgamos fundamental ao processo de ensino e aprendizagem de matemática. Vejamos:

Outro ponto crucial é o empenho que devemos ter em proporcionar aos nossos alunos oportunidades de acesso a representações matemáticas diversificadas, em que devem ser objetos de discussão, interpretação, tratamento como fonte de dados e de inferências, como condição para o estabelecimento de critérios de julgamento, para o acesso a informações e recursos, para a compreensão do mundo em que vivemos e para a expressão dessa nossa compreensão.

## 1.2. Identificando o problema

Nos últimos doze anos, temos voltado nosso olhar para o ensino da Matemática na Educação de Jovens e Adultos. Mais especificamente em saber como pessoas sem escolarização ou pouco escolarizadas solucionam problemas de matemática em seu contexto social imediato e as estratégias que utilizam para solucionar os problemas que lhes são propostos.

A partir do Mestrado, temos dado atenção aos registros de representação semiótica (Duval, 1993; 1995) necessários à compreensão de objetos matemáticos. Na pesquisa que resultou na dissertação, identificamos uma série de registros de representação semiótica fundamentais ao processo de conceitualização de porcentagem.

Como há uma relação entre as quantidades das grandezas que se mantêm quando tomamos a centena como referência, passamos a entender a porcentagem como uma proporção. Esta, por sua vez, é uma relação entre quantidades que, ao serem comparadas entre si, a razão expressa uma igualdade ( $a/b = c/d$ ). A avaliação em relação à centena é o que caracteriza a porcentagem. Assim:  $a/b = c/100$ . A porcentagem ou taxa percentual é um valor relativo, cuja unidade de referência é a centena.

Para ilustrar o que está sendo dito em relação às estratégias de solução de problemas matemáticos que são utilizadas por pessoas pouco escolarizadas ou sem escolarização, apresentamos como exemplo algumas situações.

- Para calcular porcentagens, minha mãe multiplicava a quantidade de referência pela taxa percentual e dividia o resultado por 100, obtendo assim o valor correspondente à taxa. Quando se tratava de aumento, este valor (quociente) era somado com a quantidade de referência e quando se tratava de desconto, era subtraído da quantidade de referência.
- Para efetuar o cálculo da área de um terreno não quadrado ou retangular, meu pai (que frequentou por dois anos a primeira série da então Educação Básica) somava as medidas das laterais do terreno, dividia por 4 e depois calculava a superfície como se fosse de um quadrado. Quando o terreno apresentava uma

forma retangular, multiplicava a medida do comprimento pela largura. Trata-se, nos termos de Knijnik (1996), de cubagem da terra<sup>1</sup>.

- Outro episódio ilustrativo do uso de estratégias que são pouco difundidas pelo processo de escolarização, mais especificamente nas aulas de Matemática, é o da partilha do valor monetário do pescado. Ao conversar com pescadores que residem no litoral catarinense, mais especificamente na cidade de Navegantes, para saber como realizam as operações matemáticas sobre o sistema de rateio do valor de venda do pescado, percebemos que organizam as quantidades em “partes”, que são estabelecidas de acordo com a função que cada tripulante desempenha na pescaria.
- A estratégia da transformação das quantidades em “partes” também apareceu em duas ocasiões, enquanto alunos da Educação Básica (5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental) resolviam problemas de matemática em sala de aula. Uma delas ocorreu quando alunos do curso de EJA (3º Ciclo – 5ª e 6ª série do Ensino Fundamental) solucionavam problemas de porcentagem cujo tema versava sobre o cálculo do valor do salário; e a outra, quando alunos de 7ª série do “ensino regular” de uma escola pública da rede estadual de Santa Catarina solucionavam um problema que trazia o conceito de proporcionalidade com destaque à regra de sociedade.

O problema sobre o cálculo de salário<sup>2</sup> foi o seguinte:

*Um trabalhador recebe um salário de R\$ 500,00 e está defasado em R\$ 200,00. Exprese essa defasagem na forma de taxa percentual.*

Para solucionar o problema, um aluno transformou as quantidades em partes. Assim:  $500 : 100 = 5$ , isto é, R\$ 500,00 correspondem a 5 partes;  $200 : 100 = 2$ , isto é, R\$ 200,00 correspondem a 2 partes e;  $100 : 5 = 20$ . Então, a defasagem é de 40%.

O aluno comparou as quantidades (500 e 200), com 100. Ao comparar 500 com 100, obteve o quociente 5 (quantidade de referência das partes); ao dividir 200 por 100,

---

<sup>1</sup> Para saber sobre cubagem de terra e de madeira, sugerimos a leitura do livro de KNIJNIK, G. (1996). **Exclusão e resistência: Educação Matemática e legitimidade cultural**. Porto Alegre: Artes Médicas.

<sup>2</sup> O problema apresentado consta do instrumento utilizado na coleta de dados da pesquisa ora desenvolvida.

obteve a quantidade de partes da defasagem; ao dividir 100 pelo total de partes (5), obteve o valor da taxa correspondente a uma parte (20%), ou seja, à unidade. Como a defasagem é de duas partes, tem-se  $20 \times 2 = 40$ , o que corresponde a 40%.

O problema de regra de sociedade foi o seguinte:

*Três amigas fizeram uma sociedade e abriram uma empresa. Uma delas, a mais velha, entrou na sociedade com R\$ 5.000,00, a outra, com R\$ 4.000,00 e a mais nova, com R\$ 2.000,00. Depois de um determinado tempo, obtiveram um lucro de R\$ 35.200,00. Proporcionalmente, qual é o valor do lucro que compete a cada uma?*

Para solucionar o problema, um dos alunos organizou as quantidades em “partes”, assim: R\$ 5.000,00 correspondem a 5 partes, R\$ 4.000,00 correspondem a 4 partes, e R\$ 2.000,00 correspondem a 2 partes, perfazendo um total de 11 partes. O lucro, R\$ 35.200,00, corresponde a 32,5 partes. A quantidade de partes do lucro, dividido pela quantidade total das partes com que cada uma entrou na sociedade, resultou no valor de uma parte ( $35,2 : 11 = 3,2$ ), isso significa que cada parte corresponde a R\$ 3.200,00. Como a mais velha entrou na sociedade com 5 partes, tem-se,  $3.200,00 \times 5 = 16.000,00$  (do lucro); a segunda entrou na sociedade com 4 partes, tem-se,  $3.200,00 \times 4 = 12.800,00$  (do lucro); e à mais nova compete  $3.200,00 \times 2 = 6.400,00$  (do lucro).

A maneira como as pessoas solucionaram os problemas apresentados é desconhecida por muitos professores, inclusive, de Matemática. Apelamos aqui para a responsabilidade social da escola, destacada por Silva (2002), principalmente no que consiste em habilitar os alunos para formular e resolver problemas matemáticos do contexto em que a escola está inserida, enquanto muitos de nós, professores, desconhecemos aspectos importantes da cultura que nos circunda.

Uma das razões que levam muitas pessoas adultas a retornarem ao processo de escolarização, se não a principal, está relacionada às exigências do mercado de trabalho. “São, portanto, os próprios trabalhadores que, diante das necessidades novas, passam a buscar a escolaridade como possibilidade de acesso e permanências no emprego, ascensão profissional, melhoria de seus salários e condições de vida, bem como outros interesses.” (SANTA CATARINA, 2005, p. 120).

No trabalho e em muitas situações da vida cotidiana precisamos analisar dados e informações que são apresentados por meio de gráficos, tabelas ou índices e tomar

decisões. Muitas vezes, esta análise depende do conhecimento de proporção-porcentagem. A compreensão de tal conceito pode fazer a diferença entre ser ou não ser ludibriado por propagandas enganosas ou dados e informações distorcidas. Além disso, a proporção-porcentagem encontra grande aplicabilidade em situações não só da vida cotidiana das pessoas como no cálculo de salário, nas transações comerciais e financeiras, mas também em outras áreas do conhecimento como na Física, na Biologia na Química, na Estatística, entre outras.

Implícita ao conceito de proporção-porcentagem encontra-se uma série de outros conceitos e relações, como, por exemplo, a multiplicação, a divisão, a razão, a fração, a comparação. O conceito de proporção-porcentagem também pode ser importante ao processo de compreensão de outros conceitos matemáticos a exemplo de equação e função. Isso coloca para as instituições educacionais o desafio de tratá-la como objeto de estudo e não somente como uma “ferramenta” em função de sua aplicabilidade (Vizolli e Moreira 2006). O que acabamos de dizer coaduna-se com as recomendações de Maia (1999), ao indicar que uma proposta de intervenção didática sobre porcentagem deve tomar três direções, quais sejam:

- Do “ponto de vista matemático”, a porcentagem parece ser um conteúdo privilegiado quando se levam em consideração as noções de operador e de aplicação linear. Tais relações permitem trazer a matemática abstrata à sala de aula, dando sentido ao conteúdo programático.
- Do “ponto de vista social”, faz-se necessário ampliar a utilização do conceito a outras situações além da vida econômica.
- Do “ponto de vista do ensino”, é preciso explorar as diversas formas de representação simbólica do conceito, tanto como instrumento de ensino como meio de aprendizagem.

Pesquisadores como Carraher; Carraher e Schliemann (1988), Carvalho (1995), entre outros, destacam que pessoas com pouca escolarização, que sabem solucionar alguns dos problemas de seu contexto social imediato<sup>3</sup>, não vêem relação do que fazem com os conhecimentos matemáticos de que necessitam para ter sucesso na escola. Isso nos permite

---

<sup>3</sup> Utilizamos a expressão “contexto social imediato” para falar do contexto em que as pessoas vivem: a Rua, o Bairro, a Cidade, o comércio, a profissão que exercem, o trabalho que realizam, as atividades que desenvolvem em seu dia-a-dia, sem perder de vista que este contexto sofre influências e influencia as políticas do contexto social mais amplo (Estado, País e Mundo).

dizer que pessoas escolarizadas, inclusive os professores que ensinam Matemática, não conhecem, por exemplo, como os pescadores efetuam o sistema de rateio do valor monetário do pescado, como os agricultores efetuam a cubagem de terra ou madeira. Mesmo quando conhecem, possuem dificuldades em identificar a relação entre os conhecimentos matemáticos implicados na solução dos problemas e o saber escolar de matemática. E ainda que consigam, dificilmente reconhecem a relevância de estabelecer essa relação para o aprendizado da estratégia escolar e, mais, para ampliá-la e aprimorá-la (ao invés de mera substituição).

Além de saber como as pessoas adultas solucionam problemas de matemática em seu contexto social imediato, é importante que os professores de Matemática identifiquem os conhecimentos matemáticos não escolares apresentados nessas soluções. Acreditamos que se os professores identificarem os diferentes registros de representação semiótica como ponto de partida e de ancoragem para a proposição e desenvolvimento de atividades auxiliarão os alunos a ampliarem os conhecimentos que já possuem.

Mesmo sabendo que a fala e a escrita não expressam tudo o que os alunos e os professores pensam sobre um dado conceito, a entrevista pode constituir-se numa estratégia fundamental para que possam falar o quê, do quê e sobre o quê estão fazendo e sejam incentivados a escrever em papel os cálculos utilizados para solucionar os problemas de matemática que lhes são propostos.

Tanto a entrevista como a escrita dos cálculos em papel, podem fornecer elementos que permitam aos professores saberem como os alunos organizam e tratam as informações contidas no enunciado de um problema. Fonseca (2004, p. 13) refere-se à habilidade matemática, considerando-a como “capacidade de mobilização de conhecimentos associados à quantificação, à ordenação, à orientação e as suas relações, operações e representações, na realização de tarefas ou na resolução de situações-problema, tendo sempre como referência tarefas e situações com as quais a maior parte da população brasileira se depara cotidianamente”. Esta mesma autora (op cit) alerta para a necessidade de levar em consideração as dimensões utilitária e formativa dos conhecimentos matemáticos.

Esses aspectos nos levaram a refletir sobre a formação de professores que ensinam matemática.

### **1.2.1. A formação de professores que ensinam Matemática**

O conhecimento sistematizado de que já dispúnhamos, aliado às experiências de 16 anos de magistério, permitiram-nos dar os primeiros passos a fim de (re)pensar nossa relação com a matemática, no papel de professor desta disciplina. Inicialmente, como um instrumento que pudesse contribuir e trazer aos alunos perspectivas de melhorias nas condições de aprendizagem; mas o que dispúnhamos era insuficiente para tanto. Para nós, o problema não estava nos alunos, mas sim na forma como a matemática lhes era ensinada. É como nos diz Freire (1991), não se começa a ser professor “numa certa terça-feira às quatro horas da tarde”.

O trabalho com a formação continuada de professores do curso de EJA que ensinam matemática tem mostrado que os professores que possuem habilitação para lecionar esta disciplina, embora conheçam com mais profundidade os conceitos matemáticos, nem sempre conseguem fazer com que os alunos e, muitas vezes, seus colegas de profissão que não possuem esta habilitação compreendam tais conceitos. Na tentativa de compreender o conceito que precisam “ensinar” aos alunos, os professores que ensinam Matemática, mas não possuem habilitação na disciplina, acabam fazendo uso de algoritmos, regras ou macetes, o que, por vezes, acontece também com os professores habilitados nesta disciplina. Estes, por sua vez, despendem esforços mais com aspectos metodológicos voltados à técnicas de ensino do que com a forma como os alunos aprendem.

Difícilmente os professores que ensinam Matemática conseguem perceber que um dado conceito matemático interconeta-se a outros conceitos, assim como a existência de diferentes sistemas de registros de representação semiótica que podem ser utilizados para representar um dado objeto matemático, e que é possível efetuar conversões entre os sistemas. Percebe-se, também, que os professores, assim como muitos dos alunos, fazem uso de estratégias ou procedimentos usuais no contexto social imediato para solucionar problemas de matemática propostos em sala de aula.

Esse panorama indica que é preciso estudar com os professores teorias e metodologias que fundamentem sua ação, de forma a melhorar o processo ensino e aprendizagem desta disciplina. Para tanto, o professor que atua na formação de professores deve discutir com eles, o conteúdo e os objetivos a que se destina a formação continuada,

porque, ao contrário, teremos o que se pode chamar de “pacotes” de cursos, que pouco têm contribuído com a melhoria da qualidade da ação docente em sala de aula.

Ao estudar a especificidade e a complexidade dos saberes<sup>4</sup> docentes, especialmente como os saberes são apropriados/aplicados e elaborados/reelaborados pelos professores em sua prática, Fiorentini; Souza Jr e Melo (1998) mencionaram o conhecimento cultural, o qual vai além dos limites da especialidade do professor e não se restringe à formação intelectual que pode acontecer na formação inicial. Este tipo de conhecimento assume os saberes produzidos pelas pessoas em seu contexto social imediato, como ingredientes que fazem o diferencial no processo de ensinar e aprender, tanto dos professores quanto dos alunos. Melo (2005)<sup>5</sup> menciona outros saberes, quais sejam: o saber relativo ao conteúdo de ensino; o saber didático-pedagógico da matéria; os saberes da experiência; o saber curricular.

Fiorentini; Souza Jr e Melo (1998), Melo (2005) caracterizaram os saberes da experiência dos professores como aqueles que são construídos ao longo dos anos no trabalho docente. Não se trata de um saber que se aprende na academia, mas resulta da reflexão do professor sobre a prática e sobre as influências da história de vida privada e profissional de cada um. Eles são saberes práticos que se integram à prática. Para Fiorentini; Souza Jr e Melo (1998, p. 319), “o referencial da prática, além de fundamental para a significação dos conhecimentos teóricos, contribui para mostrar que os conhecimentos em ação são impregnados de elementos sociais, ético-políticos, culturais, afetivos e emocionais”.

Ainda segundo esses autores, o saber do professor não reside em saber aplicar pura e simplesmente o conhecimento teórico ou científico, mas em transformá-lo em saber complexo e articulado ao contexto em que ele é trabalhado/produzido. Melo (2005, p. 46) destaca que os professores vivem “uma tensão entre os saberes sobre os quais não têm domínio, elaborados e divulgados pelos especialistas, e aqueles que tentam elaborar e mobilizar no exercício de suas práticas”.

---

<sup>4</sup> Para Fiorentini; Souza Jr e Melo (1998, p. 312), o termo “conhecimento” aproximar-se-ia mais da produção científica sistematizada e acumulada historicamente com regras mais rigorosas de validação tradicionalmente aceitas pela academia; o “saber”, por outro lado, representaria um modo de conhecer/saber mais dinâmico, menos sistematizado ou rigoroso e mais articulado a outras formas de saber e fazer relativos à prática, não possuindo normas rígidas formais de validação.

<sup>5</sup> Para maiores esclarecimentos, sugerimos que o leitor consulte a bibliografia: MELO, G. F. A. de. (2005). Saberes docentes de professores de matemática em um contexto de inovação curricular. In: FIORENTINI, D. e NACARATO, A. M. (Orgs). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática**. São Paul: Musa Editora: Campinas, SP: GEPFPM-PRAPEM-FE/UNICAMP, pp. 33-48.

Fiorentini (2003) e Ponte (1996) apontaram para a necessidade de serem estudados as condições e os processos do desenvolvimento profissional dos professores, atentando para o modo como, em diferentes contextos, o professor pode aperfeiçoar sua competência sobre sua prática, sobre sua responsabilidade como educador, como agente no processo de organização escolar, ampliando sua gama de conhecimentos relativos à sua área de atuação.

Ao tratar dos conhecimentos dos professores, Ponte (1994, p. 2-3), referiu-se ao conhecimento e ao desenvolvimento profissional. O conhecimento profissional é essencialmente prático e resulta da integração de saberes experienciais e saberes teóricos, os quais dizem respeito à disciplina de formação do professor, ao desenvolvimento e à aprendizagem. Trata-se, portanto, de conhecimentos “integrados pelo professor individual em termos de valores e crenças pessoais e orientados para a sua situação prática”. Para o autor (1995), a noção de “desenvolvimento profissional” está muito próxima da noção de “formação”, mas não é equivalente. A noção de “formação” está associada à idéia de freqüentar cursos numa perspectiva escolar, cujo movimento se dá de fora para dentro, cabendo ao cursista absorver os conhecimentos que lhe são transmitidos. O professor é objeto de formação.

O desenvolvimento profissional se dá por meio de múltiplas formas e processos, o que inclui a freqüência a cursos e outras atividades como, por exemplo, projetos, trocas de experiências, leituras, reflexões, grupos de estudos. Neles, o movimento deve ser de dentro para fora, uma vez que a tomada de decisões sobre as questões a considerar, os projetos que quer empreender, o modo como os quer executar é de competência do professor. Aqui, o professor é sujeito.

De acordo com Ponte (2000), o conhecimento profissional está estritamente ligado à ação do professor, baseando-se, sobretudo na experiência e na reflexão sobre ela. Este conhecimento tem forte relação com o conhecimento usado na vida cotidiana, o qual ganha consistência quando articulado com o conhecimento acadêmico.

Para esse autor (2004, p. 25), as pesquisas sobre a própria prática podem ter significados distintos. Para os professores da Educação Básica, ela pode, por exemplo, ajudar a resolver problemas prementes ou contribuir na compreensão do que se passa na prática de sala de aula; para os professores dos cursos de graduação, pode significar um campo de trabalho do qual resultem elementos importantes para a atividade dos professores, como também contribuir, em termos de conhecimento, para a academia.

“Tanto para os docentes do ensino fundamental e médio como do ensino superior, o desenvolvimento de práticas de pesquisa sobre a sua prática profissional depende do estabelecimento de comunidades de profissionais que valorizem, discutam e se apropriem dos resultados destes trabalhos”.

Para Moreira e David (2005, p. 51-52), “a matemática escolar não se reduz a uma versão elementar e “didatizada” da matemática científica; a prática profissional do professor de matemática da escola básica é uma atividade complexa, cercada de contingências, e que não se reduz a uma transmissão técnica e linear de um “conteúdo” previamente definido”. Nas palavras de Freire (1991), trata-se de nos formarmos como educadores, permanentemente, na prática e na reflexão sobre a prática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1997) chamam a atenção para as variáveis envolvidas no processo de ensino e aprendizagem – o aluno, o professor e o saber matemático, assim como as relações entre eles, o que ocorre também na Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos – PC/EJA (BRASIL, 2002).

Os PCN (BRASIL, 1997, p. 37-39) preconizam que “o conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores” para que estes a incorporem à Matemática como “ciência dinâmica”; que os professores conheçam os obstáculos didáticos e epistemológicos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos; que “o conhecimento matemático formalizado precisa, necessariamente, ser transformado para se tornar passível de ser ensinado/aprendido”. Em suma, eles apontam algumas das relações entre o professor, o aluno e o saber matemático, as quais precisam ser analisadas e discutidas com os professores a fim de que estes possam tomar consciência das relações que se estabelecem quando se ensina Matemática.

A PC/EJA (BRASIL, 2002, p. 15-17) destaca que “a aquisição de novos conhecimentos deve considerar os conhecimentos prévios dos alunos. (...), é primordial partir dos conceitos decorrentes de suas vivências, suas interações sociais e sua experiência pessoal”. A mesma proposta chama a atenção para a necessidade de um tratamento respeitoso com os conhecimentos matemáticos que os alunos possuem. Isso é corroborado por Fonseca (2001; 2002).

Um tratamento respeitoso com os conhecimentos que os alunos possuem ocorre quando o professor consegue auscultar: nas falas e nos registros de representação por eles utilizados, as noções matemáticas que já possuem; as reminiscências de que nos fala

Fonseca (2001; 2002); o tempo de aprendizagem dos alunos; a complexidade do conceito em discussão; o modo de os alunos se relacionarem com a matemática; as vivências e experiências que os alunos possuem. O professor precisa também perceber as conexões ou relações entre as noções matemáticas que os alunos usam e conhecem fora da escola, e os conceitos matemáticos escolares. Não basta o professor de Matemática ser um bom matemático, ele precisa, sim, deter profundos conhecimentos matemáticos, ter sensibilidade e tato no trato com os alunos e o ensino.

O espaço da formação de professores, inicial ou continuada, é um espaço fértil para se refletir sobre tais relações. Isso exige dos formadores de professores uma tomada de posição diante do processo de construção de conhecimentos matemáticos por parte dos alunos e as implicações didáticas dele decorrentes.

Na tentativa de olhar a prática de sala de aula e fornecer subsídios para os professores de matemática proporem e desenvolverem atividades significativas com os alunos de EJA, Gonçalves (2004) tem realizado oficinas para os professores elaborarem atividades problematizadoras que sirvam de subsídios para trabalharem com os alunos. De acordo com essa autora, um dos pressupostos que os professores têm é de que alunos de EJA são portadores de conhecimentos matemáticos que mobilizam os novos saberes. Cabe aos professores ajudar os alunos a organizarem e explicitarem o que sabem, para que expressem seus conhecimentos por meio de diferentes formas de linguagem. Para os professores, as dificuldades formais que muitos alunos têm com a matemática não se constituem em obstáculos; pelo contrário, entendem que é por meio de atividades desafiadoras que os alunos ampliam seus conhecimentos. Para Gonçalves (2004, p. 29), “o problema está no modo como encaramos a atividade e não na capacidade dos alunos”.

Migliorança (2004) investigou a prática de professores que atuam na EJA, mais especificamente a atuação de três professores de Matemática de uma escola pública do interior paulista. Além deles, os alunos de uma de suas classes também participaram da pesquisa. A autora observou a atuação dos professores, buscou conhecer melhor as visões que eles têm sobre a Matemática, seu ensino e sobre a aprendizagem dos alunos. Por meio de entrevistas, procurou conhecê-los melhor e analisou um caso de ensino elaborado a partir dos acontecimentos da sala de aula dos participantes da investigação.

Os resultados de sua pesquisa indicaram que os alunos retornam ao processo de escolarização com a intenção de melhorar sua condição de vida. Esses alunos trazem à sala de aula conhecimentos específicos e anteriores ao retorno, o que os auxilia, ou não, no

processo de aprendizagem. Em relação aos professores, a pesquisadora constatou que a falta de formação específica para lecionar Matemática na EJA e as dificuldades encontradas no ambiente escolar influenciam na prática de sala de aula. Entretanto, quando os professores se dispõem a analisar sua própria prática, procuram alternativas para superar as dificuldades, mesmo quando não têm apoio da instituição.

Ao refletir sobre a formação de professores de EJA, Weschenfelder (2004) deu atenção ao registro de fragmentos de história de vida dos alunos para compreender, analisar e investigar como se processa a construção do saber. A prática em forma de memória, as crenças, as formas de expressão, os valores, a maneira de entender-se no mundo e entender o mundo que nos cerca, constituem o ponto de partida para o processo de matematização. Os fragmentos de história de vida constituem elementos metodológicos do trabalho político-pedagógico de matematização. Para a autora (2004), a matematização busca articular, no contexto em que os sujeitos estão inseridos, a relação educação/trabalho, na qual a matemática possa contribuir para qualificar a vida do sujeito, de forma a transformar o contexto social para reconstruir a visão de mundo e assegurar o conhecimento matemático de maneira crítica, criativa e científica.

Fonseca (2002, p. 55-63) elegeu três dimensões para a formação do educador matemático de jovens e adultos: sua intimidade com a Matemática; sua sensibilidade para as especificidades da vida adulta e sua consciência política. Sobre a intimidade com a Matemática, a autora destaca que muitos professores de EJA procuram considerar os conhecimentos matemáticos que os estudantes adquiriram em seu contexto social imediato, no entanto carecem de “sensibilidade” para estimular e organizar espaços de ressignificação desses conhecimentos. Ao discorrer sobre a sensibilidade do professor para com as especificidades da vida adulta, a autora adverte que não se trata apenas de uma atitude de “doutriná-los”, mas sim de orientá-los em relação à necessidade de conhecerem melhor seus alunos como indivíduos e grupo social, e em relação à seleção e preparação de instrumentos e critérios para o estabelecimento do diagnóstico dos alunos que atendem. Em relação à dimensão da consciência política do professor, a autora nos diz que é também no campo da ética e da cidadania que se situa a preocupação com a formação profissional e sua repercussão na prática pedagógica. Trata-se de uma atitude de respeito ao direito a uma educação de boa qualidade.

O cenário da formação de professores que ensinam matemática, especialmente na EJA, aponta para a necessidade de os professores (re)conhecerem os alunos como sujeitos

sociais. Isso corrobora com o que já falamos sobre a necessidade de os professores tomarem como ponto de partida os conhecimentos que os alunos já possuem. Isso significa que, além de não perder de vista os conceitos matemáticos, o professor precisa, igualmente, dar atenção ao processo adotado pelos alunos quando da solução dos problemas e na forma como expressam suas soluções. Nesse sentido, o professor assume o papel de mediador, articulador e organizador das aprendizagens dos alunos. Nos termos de Vygotsky (1994), podemos dizer que se trata da mediação semiótica.

### 1.2.2. A mediação semiótica

Ao se tratar do ensino e da aprendizagem, não podemos deixar de falar sobre o meio pelo qual os conhecimentos são difundidos. Trata-se do processo de mediação. De acordo com Japiassú e Marcondes (1996), o termo mediação tem sua origem no latim *mediatio*. “Mediato” é aquilo que se obtém por meio de um intermediário, aquele que intermedeia. Como se vê, o termo mediação congrega uma série de significados interconectados.

Segundo estes autores (idem, p. 177), a mediação é entendida:

1. Em um sentido genérico, ação de relacionar duas ou mais coisas, de servir de intermediário ou de “ponte”, de permitir a passagem de uma coisa a outra.
2. Na filosofia clássica, a noção de mediação liga-se ao problema da necessidade de explicar a relação entre duas coisas, sobretudo entre duas naturezas distintas, (...).
3. Na lógica aristotélica, o termo médio é aquele que realiza no silogismo uma função de mediação entre os outros termos das premissas, permitindo que se chegue a uma conclusão.
4. Na dialética hegeliana, e posteriormente na marxista, a mediação representa especificamente as relações concretas – e não meramente formais – que se estabelecem no real, e as articulações que constituem o próprio processo dialético.

No processo de ensino-aprendizagem, uma das tarefas do professor consiste em propiciar as condições para que os alunos compreendam os conceitos inerentes aos conteúdos programáticos estabelecidos na matriz curricular dos cursos. Assim, professor assume o papel de mediador nas aprendizagens dos alunos. Ele intermedeia as atividades com os alunos fornecendo-lhes subsídios para que acedam ao conhecimento

(conteúdo/conceito) que está sendo estudado. Trata-se, portanto, de um processo, no qual tanto o aluno quanto o professor são sujeitos ativos e desempenham papéis específicos. Neste processo, estabelece-se relação entre aquilo que o aluno já sabe sobre um dado conteúdo/conceito e aquilo que ele ainda precisa apreender. O que medeia é a interação que se estabelece entre aluno-professor-objeto do saber.

Souza, Depresbiteris e Machado (2004, p. 140) destacaram que, na teoria de Vygotsky (1994), a mediação ocupa lugar de destaque e ocorre por meio da linguagem. A mediação capacita as pessoas a representar mentalmente os objetos, as situações e os fenômenos do mundo que nos rodeia. A linguagem, por sua vez, capacita-nos a lidar com os sistemas simbólicos, os quais se interpõem entre o sujeito e o conhecimento e nos possibilita entrar em contato com os objetos de conhecimento e de pensar. “A linguagem permite que as pessoas lidem com os objetos do mundo exterior, mesmo que esses elementos estejam ausentes. Pela linguagem, os seres humanos incorporam conceitos”. Esta idéia é corroborada por outros autores, a exemplo de Cavalcanti (2005), Fávero (2005) e Pino (2005).

A linguagem, como forma de comunicação, manifesta-se por meio do olhar; de expressões faciais; de gestos; de desenhos; de sons; da música; de notações; da fala; de símbolos; de signos; da escrita; entre outras. De acordo com esses autores, a linguagem é a forma pela qual os conhecimentos produzidos pela humanidade são difundidos. A escola é uma das instâncias utilizadas pelas sociedades para difundir as produções existentes e fomentar novas. Nesse processo, a mediação é imprescindível.

De acordo com Souza; Depresbiteris e Machado (2004, p. 40),

O mediador seleciona, assinala, organiza e planeja o aparecimento do estímulo, de acordo com a situação estabelecida por ele e com a meta de interação desejada. Pela mediação, o mediado adquire os pré-requisitos cognitivos necessários para aprender, beneficiar-se da experiência e conseguir modificar-se.

Em outras palavras, os processos de desenvolvimento e de aprendizagem compreendem, necessariamente, a presença do “outro”, como representante da cultura e mediador de sua apropriação. Isso pode ser visto também nos estudos de Pino (2005).

Para Da Ros (2002), a aprendizagem se dá por meio de produções coletivas e diante de mediações compartilhadas em um coletivo mobilizado por relações sociais adversas, ela ocorre por mediações que se estabelecem em uma dada cultura e em determinados valores. Ainda, o que medeia é, então, o fato de que o indivíduo, como

sujeito, interage com o “outro” que é sujeito também, havendo nisso uma reciprocidade entre eles. Esta autora define a mediação como sendo um processo da relação dinâmica entre o homem, a cultura e seu movimento, o que supõe a reorganização e ressignificação dessa relação.

Segundo Fontana (2005), Vygotsky e Bakhtin assumem que a ação do sujeito sobre o objeto é mediada socialmente pelo outro e pelos signos, ou seja, a natureza mediada da cognição abre a possibilidade de redimensionar teórica e metodologicamente os estudos sobre as relações entre escolarização, atividade mental e desenvolvimento da criança. Esta idéia de mediação também é destacada por Da Ros (2002, p. 29), ao afirmar que “a relação do homem com o mundo é mediada por signos culturais”.

Nas palavras de Pino (2005), a “mediação semiótica” traduz a natureza e a função do signo, entendido como mediador das relações dos homens entre si. Para este autor (id, p. 137), a união da atividade com o signo ou palavra “é o produto de um processo profundamente enraizado de desenvolvimento em que a história do sujeito individual está completamente ligada à sua história social”. Nas palavras de Vygotsky (1994, p. 115), esta união constitui “o grande momento de desenvolvimento intelectual em que ocorre uma nova reorganização do comportamento da criança”. Para este autor (op cit), a mediação semiótica confere unidade e coerência teórica aos conceitos.

Pino (2005) retomou o conceito de signo apresentado por Saussure, Peirce e Vygotsky. De acordo com o autor (id, p. 122), Saussure reconhece a existência de outros sistemas sígnicos além dos lingüísticos. O signo lingüístico não une alguma coisa a uma palavra, mas sim um conceito a uma imagem acústica, a qual não é o som físico e sim a impressão. Em outros termos, “é a representação que nossos sentidos dão dele”. Nestes termos, o signo lingüístico é arbitrário, assim como o laço que une o significante ao significado. O arbitrário significa que o signo está socialmente definido, isto é, não depende da livre escolha de quem o fala. A figura 1, a seguir, apresentado por Pino (2005, p. 123), sintetiza o modelo de signo apresentado por Saussure.

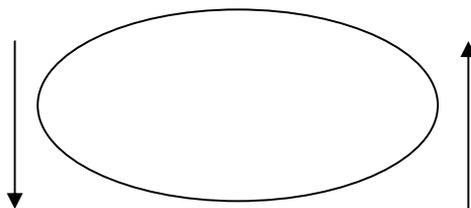




Figura 1 Unidade do signo lingüístico de Saussure

Este modelo liga um significante a um significado e é composto por uma estrutura diádica, diferentemente dos modelos apresentados por Peirce e Vygotsky.

De acordo com o Pino (2005, p 128), Peirce estabeleceu uma relação triádica (conforme Figura 2, a seguir) entre um signo, seu objeto e o interpretante.

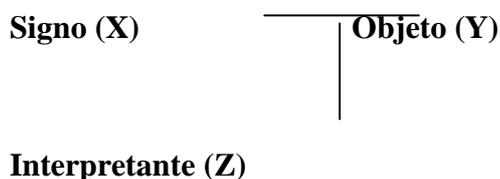


Figura 2 Estrutura triádica do signo em Peirce

1 - o *Signo* ou *Representamen* é aquilo que está no lugar do Objeto e, como tal, tem lugar material, perceptível (som, imagem, impressão tátil ou olfativa), para poder servir de sinal da presença desse Objeto ausente;

2 - o *Objeto* é a realidade material ou imaterial representada pelo Signo sob “algum aspecto ou modo”, são sob todos os modos possíveis, o que quer dizer que, em princípio, é uma fonte permanente de conhecimento do Objeto, esgotando a totalidade do saber a seu respeito;

3 - o *Interpretante* é algo naturalmente diferente do Objeto do qual é “o aspecto ou modo” sob o qual o Signo o representa. Na medida em que a relação entre o Signo e o Objeto não é natural, mas convencional, a razão ou princípio da sua relação (o Interpretante) não é imediatamente evidente, devendo ser objeto de interpretação. Isso supõe que o Signo seja interpretável, ou seja, que forneça elementos que possibilitam sua interpretação. O Interpretante não se confunde com a ação de interpretar, mas é a condição necessária para que esta possa ocorrer. A ação de interpretar é uma função subjetiva do intérprete, desencadeada pelo Signo que, como diz Pierce, cria na sua mente outro signo equivalente.

Pino (2005, p 137) sintetiza as três idéias principais da posição de Vygotsky em relação ao signo:

1 - a união do *signo* (palavra) e da *ação prática* modifica radicalmente a relação entre o homem e a natureza (sentido do trabalho);

2 - a presença do *signo* (palavra) na *ação prática* introduz nesta a mediação do Outro, ou seja, a mediação social; pois a palavra é palavra do Outro antes de ser palavra própria;

3 - o controle da *ação prática* pelo *signo* (palavra) confere ao ser humano a autodeterminação, tornando-o senhor das suas ações, mas sem esquecer que a palavra foi antes controle social, ou seja, algo exercido pelo Outro.

Nas palavras de Pino (2005), os “sistemas de sinalização” têm sua origem natural ou biológica, enquanto os “sistemas de signos” são de origem cultural ou simbólica. Estes são, portanto, criações da espécie humana. O signo tem como base o sinal natural; no entanto, aquele supera este. Enquanto o sinal controla o animal, o signo é controlado pelo homem. O signo lingüístico ou palavra, para Vygotsky, também tem uma estrutura triádica, conforme Figura 3, a seguir, apresentado por Pino (2005, p. 141).



Figura 3 Modelo do signo lingüístico em Vygotsky

Pino (2005, p. 141-142) explica este modelo da seguinte maneira:

O primeiro elemento é um *sinal* (sonoro ou visual dependendo de tratar-se de fala ou escrita); o segundo, o referente, é uma realidade (material ou imaterial, concreta ou abstrata); e o terceiro, o significado é aquilo em que o primeiro representa o segundo e este define sua natureza. Isso quer dizer que o *significado* neste modelo não é totalmente equivalente ao *interpretante* do outro, uma vez que o significado é dado pela própria língua (“significado das palavras”), embora admita variações de sentido por parte de cada um dos locutores.

Ao analisar o conceito de mediação semiótica Fávero (2005), assim como Mertz (1985), considera o símbolo como uma espécie de signo, com atenção especial aos caminhos pelos quais os signos adquirem e mediam significados. Esses autores confirmam que o signo existe na criação de uma relação de representação, o qual estabelece uma conexão entre um objeto (aquilo que ele representa) e uma interpretação (criada pelo signo

na representação do objeto). O signo é, portanto, o ponto de partida para a análise da mediação semiótica. É a idéia de mediação semiótica ligada à idéia de signo.

Nos termos de Pino (2005), pode-se dizer que o trabalho do professor emerge da atividade humana, cuja ação está subordinada à criação de meios técnicos e semióticos. Dentre as produções humanas, os meios semióticos congregam as artes, a fala e a escrita, e, nesta, os registros de representação semiótica descritos por Duval (1993).

Os meios semióticos permitem à espécie humana agir sobre a realidade, transformando-a em objeto de conhecimento; o que se caracteriza como produção cultural. Nesse mesmo processo nos tornamos sujeitos de conhecimento. Quando os conhecimentos produzidos são divulgados pelas pessoas, eles passam a ser de domínio social. A divulgação dos conhecimentos se dá pela via da comunicação, que também é uma atividade da espécie humana. Para nos comunicarmos, fazemos uso da fala, de gestos, de símbolos e signos, os quais congregam significados.

Assim, ao serem difundidos no meio social, os conhecimentos geram novos conhecimentos. Nesse processo, a produção e disseminação dos conhecimentos que a humanidade desenvolveu no decorrer dos tempos, autores como Cavalcanti (2005), Fávero (2005), Fontana (2005), Pino (2005), entre outros, denominam “mediação semiótica”.

No processo de ensino e aprendizagem, os meios técnicos e semióticos permitem que os alunos e os professores reflitam sobre objetos de conhecimento das diferentes áreas, a exemplo da Língua Materna, da História, da Filosofia, da Sociologia, da Matemática, da Biologia, da Química e da Física.

Os meios técnicos e semióticos possibilitam que possamos refletir sobre os objetos de conhecimento e suas representações. Para apreender um dado objeto, utilizamos dos órgãos dos sentidos e transformamos os conhecimentos em signos. Os objetos, nos termos de Moysés (1997, p.26), “nada mais são do que representações mentais que substituem os objetos do mundo real”. Os signos passam a ser utilizados tanto para indicar o objeto como para representá-lo. Ao representar um dado objeto por meio de signos, estes passam a ser instrumento do pensamento. A representação em geral tem como função tornar presente algo que nos escapa do alcance dos órgãos dos sentidos, mas que passa a estar presente em nossa mente.

Ora, se a espécie humana age sobre a natureza transformando-a em objeto de conhecimento e se este é expresso por meio de signos, temos aí dois tipos de atividades interconetadas: a atividade produtiva e a atividade cognitiva. A primeira implica o

conhecimento (que é também uma atividade cognitiva), e na sua transmissão para os indivíduos, e na segunda, de acordo com Pino (2005), o indivíduo se apropria não só dos saberes historicamente produzidos pela humanidade, mas também dos modos de saber e de pensar. Daí o papel do outro como mediador entre os conhecimentos já produzidos pela humanidade e que passam agora a ser apreendidos pelo sujeito, e o que passa a ser produzido por este. Nesse processo, a linguagem e a escrita, embora não sejam as únicas formas de comunicação, são fundamentais. Assim como no ensino da Matemática, a escrita, aqui entendida como registros de representação semiótica, nos termos de Duval (1993), é essencial ao processo de conceitualização porque permitem a comunicação para si e para outrem. E ainda, como os objetos matemáticos são propriedades e relações e não podem ser manipuláveis ou fisicamente observáveis, são os registros de representação semiótica que nos possibilitam operar com e sobre estes objetos.

Para que se estabeleça um diálogo entre as dimensões utilitária e formativa dos conhecimentos matemáticos (Fonseca, 2004), faz-se necessária a interação entre os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem e o objeto do conhecimento. Assim, a interação é mediada pelos meios técnicos e semióticos (Pino, 2005). Nos termos de Vygotsky (1994) eles passam a ser instrumentos psicológicos ou mediadores internos que permitem ao sujeito aceder aos conhecimentos. Na mediação semiótica que se estabelece em sala de aula, temos ação dos signos na relação dos alunos e professores com o psiquismo destes e com os produtores dos conhecimentos/conceitos que estão sendo estudados. De acordo com Vygotsky (op cit), podemos dizer que se trata do “desenvolvimento mental superior”, operando a partir de “processos mentais elementares”.

Uma vez que os meios técnicos e semióticos (Pino 2005) podem permitir que os alunos ampliem seus conhecimentos em relação aos objetos de estudo, a mediação semiótica é fundamental para o desenvolvimento intelectual dos sujeitos. Tendo em vista que as pessoas adultas têm contato sistemático com registros de representação, muitas vezes não-convencionais, compete ao processo de ensino e aprendizagem e, mais especificamente, aos professores, promover a ampliação dos conhecimentos, de forma que estes possibilitem aos sujeitos mudanças de atitude diante da realidade em que vivem.

Nesse sentido, o processo de ensino e aprendizagem na EJA, talvez mais que nas demais modalidades educativas, precisa tomar em conta os conhecimentos que os sujeitos já possuem e, pela via da mediação semiótica, possibilitar as condições para que os alunos atribuam significados não só às representações com que se deparam em seu contexto social

mais imediato, mas também às aquelas convencionais e que se fazem presente nas mais diferentes formas de comunicação.

### **1.3 O objeto de investigação**

O panorama aqui apresentado nos levou a fazer as seguintes perguntas de pesquisa:

- **Como os professores e alunos de um curso de Educação de Jovens e Adultos solucionam de problemas de proporção-porcentagem?**
- **Que registros de representação semiótica os professores e alunos de Educação de Jovens e Adultos utilizam para solucionar problemas de proporção-porcentagem?**

Tendo como premissa que, ao ser solicitada a escrita do caminho percorrido na solução de problemas de matemática, uma série de conhecimentos e linguagem é mobilizada, incluindo-se os saberes escolares de matemática, estabelecemos os seguintes objetivos:

- **Identificar os conhecimentos matemáticos que são mobilizados pelos professores e alunos de um curso de Educação de Jovens e Adultos ao solucionarem problemas de proporção-porcentagem;**
- **Identificar os registros verbais escritos utilizados pelos professores e alunos desse curso ao solucionarem esses problemas.**

Ao tratar dos registros de representação semiótica, Duval (1993; 1995; 2003) refere-se à língua natural como um registro plurifuncional de representação discursiva, que se manifesta por meio das associações verbais. Nesta tese, o registro verbal escrito refere-se à representação discursiva que se manifesta por meio da escrita alfabética ou matemática e o registro verbal oral refere-se à representação por meio da fala.

Para responder à pergunta de pesquisa, precisamos de elementos que nos possibilitem construir um referencial teórico sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática na EJA. Seguimos pela revisão da literatura que versa sobre o processo de

ensino e aprendizagem da proporção-porcentagem e apresentamos a base conceitual que escolhemos para a análise dos dados coletados. Para além do que os resultados das pesquisas mostram, nesta investigação, inspiramo-nos em teorias que, a nosso ver, fornecem subsídios para analisar os dados coletados, apresentar resultados e apontar perspectivas para novas pesquisas, bem como contribuir para a melhoria da qualidade do ensino, principalmente, de proporção-porcentagem na EJA.

## **2. O APORTAR NO REFERENCIAL TEÓRICO**

Iniciamos o aportar no referencial teórico com os estudos de Cukierkorn (2002), Fonseca (2002b) e Fantinato (2004), os quais apresentam uma síntese sobre o estado do conhecimento da Educação Matemática na EJA. A seguir, aportamos na teoria que escolhemos como base desta tese: a teoria dos registros de representação semiótica (Duval 1993; 1995; 2003).

### **2.1 O estado do conhecimento da Educação Matemática na EJA**

#### **2.1.1. Educação Matemática na EJA: sínteses encontradas**

Cukierkorn (2002) afirmou que, em comparação com as décadas de 1970 e 1980, a produção acadêmica relativa à EM na EJA no Brasil tem aumentado, ao mesmo tempo em que tem incorporado aspectos relativos à aprendizagem do cálculo para além da alfabetização. Esta autora organizou os estudos que abordam as concepções e práticas de escolarização de jovens e adultos em três subtemas: fundamentos teóricos, propostas e práticas pedagógicas, processos de ensino-aprendizagem dos conteúdos curriculares. Este último subtema comporta o bloco dos estudos que abordam a EM na EJA, no qual a autora apresenta uma síntese de sete estudos entre dissertações (Duarte 1987, Souza 1988, Tiengo 1988, Monteiro 1992,) e teses (Carvalho 1995, Knijnik 1995, Monteiro 1998). De acordo com esta autora (2002, p. 76), Duarte (1987) e Souza (1988) são os precursores da abordagem do tema da EM na EJA.

Com o objetivo de identificar algumas tendências nos modos de abordar a EM na EJA, Fonseca (2002b) fez uma análise de relatos de experiências realizadas nas décadas de 1980 e 1990, que constavam registrados e(ou) discutidos em livros, dissertações de Mestrado e teses de Doutorado, artigos em periódicos, propostas curriculares ou materiais didáticos.

A autora (2002b) analisou a questão da significação da Matemática quando ensinada e aprendida num contexto da EJA, destacando que, ainda hoje, é possível perceber na literatura, traços das teorias formais que atribuem à Matemática um status de

superioridade. A dinâmica das relações de ensino e aprendizagem na EJA obrigou os educadores e as propostas pedagógicas a reintroduzir elementos de composição de significados do conhecimento matemático e de constituição do sentido de aprender. Da concepção de produção, sistematização, divulgação e utilização da matemática passou-se a dar atenção aos fenômenos humanos, portanto históricos, ao ensino e aprendizagem da Matemática.

De acordo com a autora (*op cit*), a matemática como objeto que se ensina e se aprende (atribuir significado à Matemática) começou a ser explicitada, nas propostas de EJA, a partir de 1980. A concepção de que o aprendiz é um sujeito ativo no processo de ensino e aprendizagem, passa a dar atenção à lógica própria dos procedimentos matemáticos adotados pelo indivíduo ou uma comunidade. Ainda, a abordagem da etnomatemática contribuiu para uma concepção de matemática que entenda o sujeito como sujeito cultural. Nesse sentido, a história do sujeito se infiltra na constituição de significados da Matemática.

Ao fazer uma revisão da literatura, Fantinato (2004) organizou as pesquisas em três grupos: um instrumento de conscientização política; uma instrumentação para o mercado de trabalho; e modos próprios de raciocínio matemático.

O primeiro grupo atenta para as demandas e os interesses de um grupo social em defesa de seus direitos; tem o pressuposto da contribuição para o exercício da cidadania. O segundo grupo se preocupa com a linguagem tecnológica, voltando-se para a requalificação profissional dos trabalhadores (principalmente urbanos). No terceiro grupo, encontram-se os estudos que têm uma perspectiva que se aproxima mas da psicologia, como por exemplo, Carvalho (1995; 1997); muitos deles voltados à produção do conhecimento escolar. Fantinato (2004) situou sua pesquisa de doutoramento neste terceiro grupo, uma vez que seu estudo se insere nos processos de raciocínio de um grupo sociocultural.

### **2.1.2. Pesquisas sobre o processo de ensino-aprendizagem da Matemática na EJA**

Duarte (1987) desenvolveu sua pesquisa junto a funcionários, alunos de um programa de alfabetização de adultos promovido pela Universidade Federal de São Carlos. Analisou uma experiência de ensino sobre o sistema de numeração e das quatro operações aritméticas elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão), em que elaborou e

aplicou uma seqüência de ensino organizada em três unidades: o sistema de numeração; os algoritmos da adição e da subtração; os algoritmos da multiplicação e da divisão.

Na primeira unidade de ensino, dentre outros aspectos, o autor fez um levantamento das formas de registro utilizadas pelos estudantes e a utilização desses saberes no registro de uma contagem realizada em sala de aula. Na segunda unidade de ensino, com o auxílio do ábaco, algoritmos e dedos, Duarte (1987) propôs que os alunos efetuassem adições e subtrações, com ou sem reserva. Na terceira unidade de ensino, com o auxílio do ábaco, propôs que os alunos resolvessem situações-problema de multiplicação e divisão.

Duarte (1987; 1995) fez uma crítica às experiências ou análises de experiências que procuram compreender a inserção da prática pedagógica na transformação da estrutura social, tomando como base a concepção dialética. Esse autor (1987, p. 10) buscou “compreender como se efetiva, na prática do ensino da matemática elementar, a relação dialética entre o lógico e o histórico, para que o educador possa dirigir intencionalmente essa relação, de maneira que o processo ensino-aprendizagem de Matemática contribua para que os educandos se tornem sujeitos da transformação da realidade”.

Ao tratar das implicações metodológicas da relação entre o lógico e o histórico, Duarte (1987, p. 33 e 34) colocou que não é apenas “um modo de ver as coisas, é um processo de tomada de consciência de um tipo de relação”; que “a relação entre o lógico e o histórico no processo de investigação não se dá numa de maneira linear, mas em espiral”; e não se trata de discutir se a matemática deveria ser ensinada segundo uma seqüência lógica ou segundo uma seqüência histórica, porque isso há muito tempo se discute, no entanto os problemas persistem. Ao analisar a relação entre o lógico e o histórico no conteúdo matemático, aponta que a visão que apresenta da lógica do conteúdo matemático é influenciada pelo estudo histórico desse conteúdo.

Ao concluir sua investigação, Duarte (1987, p. 177) alertou que “o processo ensino-aprendizagem não pode ser uma reprodução direta nem espontânea do processo histórico, (...) a compreensão das etapas essenciais do processo histórico é indispensável para que a lógica do processo ensino-aprendizagem possibilite ao educando as condições de ser sujeito desse processo”.

Souza (1988) apresentou uma análise da produção matemática oral escrita de 30 alfabetizando adultos e adolescentes que participaram da ação educativa, cuja proposta pedagógica tomava como base os estudos de Paulo Freire.

A pesquisadora fez anotações detalhadas das produções dos alunos. Com base nelas e no material escrito produzido pelos alfabetizandos, fez as análises dos dados. Destas, resultou o levantamento tanto dos níveis de conhecimento matemático prévio dos alunos como dos níveis de conhecimento final, em relação aos conteúdos matemáticos emergentes, às formas como os problemas foram resolvidos e aos tipos de "erro" que ocorreram

A autora conclui que a compreensão e a aceitação do conhecimento expresso pelos alunos é condição essencial para que a alfabetizadora seja capaz de intervir no processo, problematizando situações. Isso possibilitou que os alunos se sentissem mais seguros para efetuar o registro de suas representações e passassem a construir e reconstruir o conhecimento matemático que já dispunham e conheciam no nível de expressão oral/cálculo mental.

Tiengo (1988) analisou 15 exemplares dos módulos de matemática (pré-versão) elaborados pelos professores do Centro de Estudos de Vitória – CESV para a EJA. Sua pesquisa teve por objetivo verificar as percepções dos alunos, professores, especialistas e supervisor sobre a eficácia e eficiência do material. A autora analisou a qualidade do material, procurando identificar as necessidades. Suas conclusões apontaram para a necessidade de adequar os objetivos, os conteúdos, as atividades e os itens de testes contidos nos módulos às necessidades dos alunos desta modalidade educativa.

Carvalho (1995) pesquisou sobre “a interação entre o conhecimento matemático da prática e o escolar”, enfocando aspectos cognitivos de 35 alunos adultos, em processo de alfabetização (duas classes), na Zona Oeste de São Paulo. Das 44 aulas de Matemática realizadas no período de investigação, a pesquisadora atuou, juntamente com a professora, em 34 delas.

As atividades propostas aos alunos versaram sobre: número; medidas de tempo; moeda nacional; preços de produtos; preenchimento de cheque; contagem e tabelas de distribuição de frequência. A pesquisadora analisou as representações orais ou gráficas e os procedimentos utilizados pelos alunos para responder ao que era solicitado nas atividades. Para Carvalho (1995, p. 48-49),

a elaboração da descrição do procedimento pressupõe a construção de uma linguagem que aos poucos, a partir da interação com os diferentes interlocutores, vai se aproximando da linguagem matemática convencional. (...) A linguagem matemática grafada vai se transformando num instrumento de mediação que permite ao

aluno um acesso cada vez mais amplo ao conhecimento matemático.

A mesma autora (1995, p. 148) tomou como ponto de partida os registros e os algoritmos utilizados pelos alunos ao resolver as atividades propostas. A partir deles fez sua intervenção junto aos alunos, de forma que os conhecimentos deles fossem ampliados e possibilitassem aplicabilidade a outros contextos, além daquele de partida. “Os registros só podem ser reelaborados, no que se refere à linguagem matemática, se forem grafados.” A reelaboração também se refere à técnica operatória. De acordo com Carvalho (1995, p. 219), “Parece que a maneira pela qual o aluno está inserido no mercado de trabalho gera comportamentos sociais diferenciados também nas aulas de matemática”.

Carvalho (2001) analisou a relação entre o conhecimento matemático e a interpretação crítica do texto escrito em jornal, enfocando a importância do saber matemático veiculado na escola. Para isso utilizou dados e informações de três publicações, feitas no período compreendido entre 28 de janeiro a 20 de fevereiro de 1999, no jornal Folha de S. Paulo. Esse estudo resulta de um trabalho desenvolvido com alunos adultos que possuem, no mínimo, o ensino médio.

A autora destacou que os erros de representação e de concordância que aparecem em textos jornalísticos dificultam a compreensão dos símbolos matemáticos escritos e sua pronúncia oral. A utilização de artifícios matemáticos para atingir um objetivo que ultrapassa os limites da matemática e, muitas vezes, a falta de sintonia entre as informações num mesmo texto; acabam provocando desvio do assunto. Isso remete à “não neutralidade” da matemática.

Carvalho (2001) acreditou ser possível a construção coletiva de conceitos matemáticos cada vez mais amplos e gerais, bem como assinalar que os significados para a linguagem matemática devem ser úteis e independentes em todos os contextos. Livres de amarras, eles devem possibilitar uma análise crítica dos textos escritos que envolvem elementos da linguagem matemática.

Calazans (1996, p. 22 e 26) fez uma crítica à concepção formalista da matemática que permeia o trabalho dos professores. “O professor quase sempre *fala* sobre o objeto de estudo, detendo-se principalmente na sua forma, e limita-se a ditar conceitos, regras e fórmulas que, por estarem esvaziadas da sua “dimensão concreta”, perdem sua significação.” Em sua experiência em quatro Círculos de Cultura, na qual 30 alfabetizandos, quatro alfabetizadoras e cinco pesquisadores buscavam superar a dicotomia

teoria-prática, procurou “saber como os adolescentes e adultos pensam e trabalham a matemática que, sistematizada ou não, é parte vital de suas vidas diárias e, por outro lado, interfere de forma a propiciar a transferência do tipo de cálculo mental já existente para o cálculo com lápis e papel, problematizando, cada vez mais, as situações originalmente sugeridas pelos alfabetizadores”.

Considerando as dificuldades com o próprio conteúdo matemático das alfabetizadoras, o que lhes impossibilitava de compreender a forma como os alfabetizados se relacionavam com a matemática, Calazans (1996, p. 32) “além de sugerir o tratamento a ser dado ao conteúdo, orientava-as na construção de seu próprio conteúdo matemático, analisando com elas os enunciados e os raciocínios apresentados pelos alfabetizados”.

A interação com o grupo (id ibid) “permitiu o confronto entre o saber escolar e o processo de construção do conhecimento matemático apresentado pelos alfabetizados, o que se constituiu num momento de ruptura com concepções, há muito instaladas na nossa consciência, sobre o ensino da matemática e a matemática em si”. Nos encontros, pôde registrar informações relevantes para a compreensão do cálculo mental desenvolvido pelos alfabetizados, o qual, muitas vezes, aparecia na produção matemática escrita. E, outras vezes, era explicitado pelas alfabetizadoras, quando elas transcreviam as tentativas de sistematização dos alfabetizados.

Segundo Calazans (1996, p. 45), a escola tem dado pouco espaço para a expressão oral do educando, e este não é questionado sobre sua forma de raciocinar, assim como o cálculo mental não é reproduzido no papel, “é menosprezado e até mesmo reprimido”. A escola vê a resposta (sem cálculo) do aluno como uma prova de que ele “colou”; com isso “impede o aluno de pensar, criar e produzir. Impede que ele construa seu conhecimento, por escrito ou não, a partir de seu saber e de sua realidade que são expressos quase que totalmente pela oralidade”.

Calazans (1996, p. 46) advertiu que, em muitas situações da vida social ou profissional, utilizam-se as máquinas para fazer cálculos, dispensando seu registro com lápis em papel, o que não exige as pessoas de compreenderem a essência de cada operação. “Essa compreensão quase nunca é desenvolvida pela escola, que se dedica ao ensino da matemática dos números: ensina como desenhar os números e não como operar com eles”.

De acordo com a autora (1996), nas operações descontextualizadas, os alfabetizados utilizam bem os algoritmos de cada uma das operações matemáticas, o que

se revela também na reprodução que se completa nas receitas para resolução de problemas-prontos. Os alfabetizados não se preocuparam com a ordem de como as operações normalmente são apresentadas pela escola (adição, subtração, multiplicação e divisão), diferentemente das operações descontextualizadas. Enquanto os enunciados dos problemas faziam referência a questões do cotidiano, as estratégias de resolução mais utilizadas foram os algoritmos ensinados pela escola, embora, muitas vezes, o cálculo mental tenha precedido o registro; o que indica que os registros dos resultados apenas expressam o resultado já encontrado. Para Calazans (1996, p. 72),

O princípio que subjaz às observações registradas neste trabalho dá conta de que, a partir do momento em que a alfabetizadora for capaz de criar uma atmosfera em que o alfabetizado possa transcrever livremente o seu pensar matemático, intervindo no processo como problematizadora, o alfabetizado poderá perceber o seu cálculo mental como um conhecimento matemático que pode ser representado de várias maneiras, inclusive por aquela que é legitimada pela instituição escolar e socialmente aceita. Nesse contexto, a alfabetizadora terá oportunidade de abandonar a prática de transmissão de automatismos, e o alfabetizado terá a possibilidade de construir e reconhecer o seu conhecimento, a partir do que já conhece e do que é capaz de produzir, em nível de expressão oral/cálculo mental.

Os estudos de Calazans (1996, p. 74) chamam a atenção

(...) para a necessidade de se incluir a alfabetização matemática como tema no currículo de formação de professores, dentro da perspectiva de uma construção ativa do conhecimento matemático e da valorização do conhecimento matemático prévio que os adultos e adolescentes trazem para o contexto alfabetizador, respeitando as suas formas de expressão e indicando a necessidade de investigar-se sobre a sua construção.

Com o objetivo de analisar o poder e os limites das competências matemática de 21 canavieiros de diferentes níveis da hierarquia profissional na Zona da Mata Sul de Pernambuco, Acioly-Régnier (1997) propôs que os participantes resolvessem problemas de medidas de conteúdo familiar e não-familiar.

Os dados de sua pesquisa foram coletados em três fases:

- a primeira fase, mais exploratória, consistiu de observações e entrevistas individuais. Nestas, era solicitado que os participantes calculassem áreas de terrenos quadriláteros e retangulares, cujas medidas eram propostas por eles ou

fornecidas pelo pesquisador. Também eram solicitados a desenhar as correspondentes às medidas propostas;

- na segunda fase, foram introduzidas figuras geométricas de mesmo perímetro, mas de superfícies diferentes. Tais figuras eram desenhadas em papel ou construídas com cordão. Os sujeitos deviam calcular a área dos quadriláteros e dos triângulos que representavam terrenos cujas medidas estavam indicadas e fazer a comparação das superfícies das figuras;
- a terceira fase consistiu de observações específicas sobre o cálculo em atividades reais de trabalho e das atividades administrativas e contábeis.

Os resultados dos estudos de Acioly-Régnier (1997) mostraram que as competências são construídas socialmente, como resultado de interações sociais específicas, ilustrando que o desenvolvimento da compreensão matemática está intimamente relacionado ao contexto no qual os problemas são resolvidos. Ainda, de acordo com a autora (idem, p. 131), as variáveis culturais desempenham um papel importante no processo de conceitualização, porque lhe confere significações particulares, ou seja, “os procedimentos de resolução dos problemas e as justificativas mudam em função da representação que os sujeitos têm da situação”.

Maurmann (1999) investigou a pertinência de uma das queixas dos professores que trabalham com alfabetização de adultos, mais especificamente sobre as dificuldades na aquisição de conceitos matemáticos e da leitura e escrita matemática, especialmente nas mulheres. Ao fazer um estudo sobre a resolução de problema de três termos, em que participaram 147 alunos adultos (118 mulheres e 30 homens) em processo de alfabetização, matriculados na rede pública de ensino no Distrito Federal, a autora propôs que eles solucionassem 15 problemas de raciocínio dedutivo de três termos:

- a) Forma comparativa de superioridade (A é mais que ... B. B é mais ... que C. Quem é o mais ...?);
- b) Forma comparativa de inferioridade (A é menos ... que B. B é menos ... que C. Quem é o mais...?);
- c) Forma comparativa negativa (A não é mais ... que B. B não é mais ... que C. Quem é mais ...?). Estes problemas apresentavam uma relação transitiva de três termos e três elementos básicos: uma relação, uma conclusão e uma ordem.

Os resultados da pesquisa de Maurmann (1999) mostraram que: homens e mulheres não apresentam desempenhos significativamente diferentes diante da variação da instrução dada na situação experimental; os adultos desenvolvem meios para usar da melhor forma possível os conhecimentos e as habilidades que foram sendo adquiridos desde a infância; o processo de escolarização dos adultos tem dado pouca atenção a esse tipo de problema de que trata a autora; o desempenho dos alunos foi mais baixo no problema 10 (o qual apresenta uma relação de superioridade positiva, uma conclusão com oposição no adjetivo e concordância no advérbio, e uma ordem indireta AB – CA) e 12 (o qual apresenta uma relação de superioridade negativa, uma conclusão com oposição no adjetivo e concordância no advérbio, e uma ordem indireta AB – CA), o que leva a autora supor que a dificuldade reside em inverter o significado do advérbio ou adjetivo. Antes mesmo da dificuldade com o raciocínio lógico, os participantes apresentaram dificuldades de leitura, mais especificamente na compreensão de texto.

Rocha (1999) fez um estudo sobre a representação e a notação de adultos com idades entre 17 e 47 anos que se encontravam em fase de nivelamento (um casal) ou processo de alfabetização (quatro casais, um de cada série – 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup>), num total de 10 participantes. Esses alunos freqüentavam um curso de EJA, numa escola pública da cidade de Taguatinga (cidade satélite de Brasília – DF).

A autora estudou as dificuldades dos alunos, tendo como foco principal os procedimentos que eles utilizaram, os erros cometidos e as possíveis causas desses erros quando da solução de problemas matemáticos. Os problemas propostos envolviam: composição e decomposição de números; sucessor e antecessor numérico; operações de estrutura aditiva.

Os participantes da pesquisa foram indicados pelas professoras que atuavam junto às classes de alfabetização e consideravam que tais alunos apresentavam dificuldades na aprendizagem de Matemática. Num primeiro momento, os problemas foram apresentados oralmente, assim como as respostas dos alunos; no segundo momento, os problemas foram apresentados por escrito e as respostas dos alunos também.

Numa única sessão de entrevista gravada em vídeo e depois transcrita, foi solicitado que, individualmente, os alunos respondessem oralmente aos problemas e após, por escrito. Depois que os alunos resolveram cada um dos problemas propostos, lhes foi solicitado que explicassem o procedimento utilizado no processo de solução.

Os resultados deste estudo apontaram que houve maior número de respostas corretas ao resolver um problema “oralmente” do que quando se pediu para que os alunos registrassem o cálculo efetuado. Os resultados mostraram também a ocorrência de erros relacionados ao sistema de signos utilizados; a valorização do conhecimento formal em relação ao conhecimento informal. Segundo Rocha (1999), tais resultados colocam em questão a prática do ensino da Matemática baseada, sobretudo em regras, em detrimento da compreensão dos conceitos. A autora adverte que, muitas vezes, a escola não considera o conhecimento matemático que os alunos possuem e, não raras vezes, fala-se que possuem dificuldades de aprendizagem, falta de capacidade, de assimilação de raciocínio lógico, dentre outros. Em outras palavras, a escola não tem como meta principal o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

Franco (2000) apresentou uma síntese de sua tese de doutoramento na qual fez uma análise da lógica presente nas falas de sujeitos adultos pouco escolarizados que residem no meio rural no sul do Brasil. Procurou ver as relações entre a lógica operatória e a lógica das significações nos raciocínios dos sujeitos. Entrevistou as pessoas tendo como referência fundamentalmente a Epistemologia Genética e seguindo os princípios do método clínico piagetiano. O autor também discute as possíveis interferências das vivências culturais no raciocínio lógico dos sujeitos.

Seus estudos mostraram que todos os sujeitos pesquisados estruturavam seu pensamento operatorialmente e alguns de modo operatório formal. Todos apresentavam desvios em seu raciocínio operatório devido ao que denominou interferência do conteúdo lingüístico. Segundo o autor (2000), a lógica das significações que os sujeitos têm permanece, uma vez que a lógica operatória é construída a partir da lógica das significações.

Franco (2000) preconizou que não é o caso de apenas trazer para o espaço de sala de aula conteúdos culturais diferentes, mas sim poder contribuir para melhor compreender a articulação deles nas estruturas cognitivas; daí sim, transformar a escola em um espaço de interações que contribuam com o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Para o autor (2000, p. 6), é preciso conhecer o modo de pensar dos alunos, que não se resume ao que eles pensam, mas sim como pensam, como estabelecem as relações, “que diferenças e semelhanças existem entre o modo de pensar e relacionar as partes desses conhecimentos com o modo social historicamente instituído de lidar com estes”.

Ainda, segundo o autor (id ibid), grande parte das incompreensões e distorções que os alunos fazem quando se deparam com novos conteúdos se deve à interferência do conteúdo lingüístico; por isso, no processo de aprendizagem ou de construção de novos conhecimentos, há que se levar em consideração que, ao construir relações entre os conhecimentos prévios e o novo, muitas vezes, o sujeito deixa de lado o sistema total e prende-se aos aspectos de significação. “Por isso se faz importante procurar compreender o processo de construção e o tipo de implicações envolvidas na aprendizagem, que, por isso mesmo, não é um processo imediato, mas fruto de complexas construções para parte do sujeito a partir de suas interações com a realidade (física e social) que o cerca.”

Segundo o autor, a escola precisa trazer para dentro dela as situações próprias do contexto cultural em que está inserida e fazer com que os alunos operem sobre os conteúdos trazidos deste contexto para chegar a compreendê-los; do contrário, teremos as interferências do conteúdo lingüístico. Este é o ponto de partida para o processo de ensino e aprendizagem – o cotidiano.

Ao concluir seu trabalho, Franco (2000, p. 8) colocou aos professores o desafio para o desenvolvimento da “capacidade de escutar, ver o outro (professor, aluno, pai) como aquele não previsível, não determinável, aquele que exige de nós porque nos pede, nos provoca, nos revela outros olhares, outros afetos, outras idéias. (...) Se for possível resgatar isso na educação, nem que se tenha que reinventar a escola, ou inventar algo totalmente novo, esse será um passo fundamental para a construção de uma sociedade, globalizada ou não, que dignifique a todos e a cada ser humano”.

Porto e Carvalho (2000) desenvolveram seu trabalho de pesquisa junto a seis duplas de alunos que freqüentavam o sistema público de EJA na cidade de Recife. Para isso, foram feitas observações em sala de aula e sessões de resolução de problemas, cujo objetivo foi explicitar as estratégias que emergiram. Os resultados aqui indicados tomam como referência a atividade realizada em sala de aula, quando o professor trabalhava com o conceito de números decimais.

Sob o entendimento de que os significados matemáticos são construídos pelos sujeitos nas relações entre si e de sua participação nas práticas sociais e culturais, segundo os autores, há que se considerar três dimensões: o saber matemático específico e socialmente construído; a transposição do conhecimento matemático específico às situações didáticas na sala de aula; a compreensão que os alunos desenvolvem em situações específicas. Os resultados revelam que existe um distanciamento de uma prática

pedagógica voltada à aprendizagem significativa de conceitos matemáticos. O professor ainda é aquele que detém o conhecimento, desconsiderando os conhecimentos dos alunos. As autoras advertem que é fundamental considerar as dimensões indicadas na formação de professores.

Fonseca (2001) fez um estudo sobre “discurso, memória e inclusão: reminiscências da matemática escolar de alunos adultos do ensino fundamental”. Para isso, acompanhou uma turma de alunos (classe 18) do Projeto de Ensino Fundamental de Jovens e Adultos do Centro Pedagógico da Universidade Federal de Minas Gerais – PROEF II/UFGM. Numa primeira fase da sua pesquisa, analisou alguns registros produzidos sobre os alunos ou por eles, nos processos de enturmação e sondagem de demandas e expectativas, mais especificamente aqueles que pudessem fornecer informações e sugerir considerações sobre as condições de vida e acesso a bens culturais, especialmente aqueles identificados com a cultura escolar. Na segunda fase, implementou estratégias de intervenção extra classe para fazer com que as reminiscências da matemática escolar emergissem. Na terceira fase, a autora analisou a documentação arremontada por meio de gravações em áudio e vídeo; registros e avaliações dos alunos e professoras; os apontamentos feitos pela pesquisadora, quando foi introduzido o estudo dos números racionais na forma fracionária. Fonseca (2001; 2002; 2003) apresenta partes de seu trabalho (2001), assim como a publicação de 2002 é resultado de seu estudo mais amplo (tese de Doutorado).

As análises de Fonseca (2001) focalizaram:

- a) As reminiscências e o gênero discursivo da matemática escolar;
- b) Relações semânticas e ideologia: o conteúdo temático das reminiscências e do gênero discursivo da matemática escolar;
- c) Expressão e argumentação: o estilo das reminiscências e do gênero discursivo da matemática escolar.

Ao tratar da “Educação matemática de jovens e adultos: Especificidades, desafios e contribuições”, Fonseca (2002) caracterizou a Educação Matemática - EM na EJA como sendo “antes social e cultural”, porque se trata de uma ação dirigida a uma população marcada pela exclusão. Advertiu que as reflexões teóricas sobre essa modalidade educativa ainda são incipientes, ao mesmo tempo em que denunciou o limitado número de estudos voltados aos processos cognitivos dos adultos.

A autora (2001) destacou que os alunos aprendem a moldar sua fala às formas do gênero da matemática escolar, para que possam se comunicar de maneira eficiente no espaço de sala de aula e também no contexto social em que estão inseridos. As reminiscências, de acordo com Fonseca (2001, p. 177), “compõem o jogo interlocutivo que se instaura nas situações de ensino-aprendizagem da matemática” vivenciadas no espaço escolar. Ao tratar das reminiscências, lembranças, recordações, Fonseca (2001, p. 184) diz que:

De fato, ainda que as relações funcionais canônicas de termos, conceitos, propriedades ou procedimentos da matemática escolar não raro pareçam escapar ao sujeito que os lembra, uma razão pragmática determina suas lembranças, e é aí que vemos desenhar-se, para além da (ou operacionalizando a) capitalização das reminiscências como aporte para o aprendizado da Matemática, a preocupação com o domínio do gênero discursivo da Matemática Escolar, inserida nas estratégias de inclusão do sujeito no universo sociocultural da escolaridade.

Nosso entendimento é de que o domínio do gênero discursivo da matemática escolar acontece quando da interação do sujeito com os sistemas semióticos e o sistema lógico.

Ao analisar as relações semânticas e ideológicas, o conteúdo temático das reminiscências e do gênero discursivo da matemática escolar, Fonseca (2001) fez um mapeamento, organizando um quadro que comporta categorizações orais: que se restringem a termos da Matemática; que fazem referência a (ou descrição de) procedimentos para a execução de alguma tarefa matemática; que fazem referência à aplicação do conhecimento matemático em situações extra-escolares. Organizou também categorias de registro escrito: identificados como termos, símbolos, diagramas, gráficos ou figuras inseridos numa expressão na qual não desempenhassem o papel de designação, substituição ou articulação de conceitos; com referências, descrições ou execução de procedimentos para realização de alguma tarefa matemática, expressões ou seqüências numéricas e problemas. Nas palavras de Fonseca (2001, p. 185), nas situações de sala de aula, os alunos adultos “(...) adotam uma atitude pragmática de selecionar entre lembranças aquelas que com certa margem de segurança possam efetivamente colaborar com o processo de aprendizagem”.

Ao analisar o conteúdo temático, relações semânticas e ideologia, destacou que (idem, p. 192) “a influência da estrutura social na qual se insere e da qual se constitui a instituição escolar conformará lembranças e esquecimentos, (...)”.

Analisando o discurso sobre Matemática como processo de conhecimento, Fonseca (2001) falou da dificuldade da Matemática como uma a “marca da ideologia” que faz com que raramente se faça alusão aos aspectos da natureza do conhecimento, que por vezes é tornado demasiadamente complexo ou incompreensível. A autora elencou duas condições que favorecem o aprendizado de matemática: as contribuições da escolarização, suas personagens e suas práticas; as demandas da vida social extra-escolar, particularmente da vida profissional. Esta última se faz presente quando se trata da relação da utilidade da Matemática na vida das pessoas. Muitas vezes os alunos vêm a Matemática como algo pronto, criada numa esfera soberana, acima de nós; outras vezes, conseguem percebê-la como uma construção humana. No que concerne à Matemática no contexto escolar, muitas vezes ela é concebida como um instrumento fundamental para o aprendizado ou o desenvolvimento de outras disciplinas ou, por vezes, identificada como um jogo simbólico onde as regras sintáticas desempenham um papel fundamental.

Em relação à aprendizagem da matemática, Fonseca (2002, p. 24) destacou traços que são muito próprios do aprendiz adulto, a exemplo da relação utilitária da matemática, face às demandas do contexto diário e porque ela pode lhes “oferecer algumas chaves de interpretação, e produção de sentido”, mas não só isso; “os sujeitos da EJA percebem, requerem e apreciam também sua dimensão formativa”, não com uma referência no futuro, mas num caráter de atualidade, presente, quando o aluno é sujeito de seu próprio conhecimento.

No que se refere à identidade sociocultural, há uma diversidade de vivências, de experiências e de maneiras como os alunos se relacionam. Estas se constituem em patrimônios dos sujeitos, o que os identifica pela negação da condição de criança.

Ainda, ao tratar do discurso da Matemática, Fonseca (2001, p. 220) se reportou à memória como processo de pensamento, sob o entendimento de que a memória é antes processo e não objeto do conhecimento. Como processo, ela informa “não só o discurso **sobre** Matemática, mas o discurso **da** Matemática”.

Ao tratar das lembranças da Matemática, Fonseca (2001, p. 225) analisou a memória como processo e objeto do pensamento. Seus estudos têm mostrado “como os processos da memória se forjam socialmente por meio da conversação (...) lembranças se

reconstroem, conjuntamente, mediante um discurso que supõe que os sujeitos que dele participam também as compartilhem”. Por isso entende a recordação como ação social organizada. Para a autora (2001, p. 228),

Os conceitos e as proposições, as estratégias e os procedimentos, os termos e as representações gráficas, as aplicações e as avaliações do conhecimento matemático que se resgatam e se reestruturam no discurso dos sujeitos serão aqui tomados como versões pragmáticas que, em sua realização, ultrapassam a *natureza* e as *vicissitudes* da cognição individual, para apresentarem-se como versões coletivas, porque forjadas num modo de conhecer e lidar com a Matemática construído histórico-culturalmente, com a mediação decisiva da instituição escolar, e por essa mesma mediação, tematizadas (e matizadas) numa atividade discursiva que organiza e justifica a ação presente.

Ainda, para Fonseca (2002, p. 25),

Ao adulto, pensar sobre o que pensa e sobre como pensa, e falar sobre esse pensar, como forma não apenas de comunicar esse pensamento, mas de dar-lhe forma, critério, razão e importância social, é mais do que um exercício cognitivo individual: é uma ação social, é a conquista da perspectiva coletiva de um fazer antes solitário e que requer tornar-se comunitário nessa oportunidade – talvez única, provavelmente rara – de conhecimento solidário que a escola lhe pode proporcionar.

Aqui reside a essência da dimensão formativa e o caráter de atualidade porque, ao mesmo tempo em que o sujeito aprende a aprender, socializa o que aprendeu, fornecendo subsídios para que os seus pares também aprendam. Para a autora (2002, p. 26), “é na relação do aluno como sujeito sociocultural (...) que se forjarão os princípios de seleção do que é lembrado e do que é esquecido; das vivências que se há de considerar relevantes pelo sujeito e pelo grupo e daquelas para as quais ainda não se atribuíram significados socializáveis; do que se diz sobre elas e do que se silencia; e dos modos do dizer e do não-dizer”. Tais princípios são reveladores das diferentes formas de resistência que os sujeitos têm de manifestar seus descontentamentos em relação ao processo ensino-aprendizagem.

Para Fonseca (2001, p.3),

Tomar as enunciações das reminiscências no âmbito dos esforços para a produção de sentido do aprender matemática e da matemática que se aprende *na escola*, obriga-nos a ultrapassar uma compreensão de sua contribuição apenas num nível *informativo*, restrito à possibilidade de trazer à tona conteúdos da matemática aprendidos numa experiência anterior e de escolarização, agora

revisitados na matemática na EJA. Não se trata aqui de analisar enunciados como expressão daquilo que os alunos foram capazes de recordar. Cabe-nos, antes de mais nada, reconhecer que ao enunciar reminiscências da matemática escolar num contexto de EJA, indivíduos ocupam posição de sujeito, e é isto que põe a memória em funcionamento “por afetá-la pelo interdiscurso, produzindo sentidos”.

De acordo com Fonseca (2001), quanto mais as lembranças se identificam com o tratamento escolarizado da Matemática (nomenclaturas, enunciados, regras, definições e procedimentos canônicos), mais elas são mobilizadas na construção do discurso. Trata-se, portanto, do processo de ressignificação da Matemática que se realiza por meio do discurso.

A mesma autora (2001, p. 244) advertiu que, ao se propor a um novo esforço de aprendizagem, não se pode desconsiderar o passado escolar dos alunos.

O desafio de retomar esse passado não deverá, no entanto, identificar-se com um esforço de resgatar  *fatos*  matemáticos como se esses se encontrassem depositados nas memórias individuais, desligados uns dos outros e não envolvidos no emaranhado de relações tecidas por fatores ideológicos, pragmáticos, cognitivos, afetivos, lingüísticos, históricos. São essas múltiplas inter-relações, processadas e (re)elaboradas na participação do sujeito nas interações discursivas de ensino-aprendizagem da matemática na escola, que, conferido à rememoração o caráter retórico (persuasivo e poético) de que nos fala Shotter, compõem o conteúdo temático do gênero discursivo da Matemática Escolar.

Segundo as observações de Fonseca (2001, p. 246), quando os alunos vivenciam juntos suas experiências de escolarização anteriores, compartilham “um sentido desse passado, uma compreensão socioculturalmente partilhada dos papéis, dos rituais, das relações que compõem o universo escolar”.

Toledo (2001) investigou que tipo de influência o pensamento metacognitivo exerce sobre os registros matemáticos de três alunos adultos pouco escolarizados. Num primeiro momento, em entrevista continuamente gravada, a pesquisadora propôs que cada aluno resolvesse um problema matemático no qual precisavam fazer o cálculo dos gastos necessários com “construção”. Os alunos deviam resolver as atividades registrando os cálculos e “pensar em voz alta”. No intuito de analisar os passos efetuados no processo de resolução: (compreensão do problema, concepção de um plano para resolução, execução do plano, avaliação), o problema foi relido pelos participantes em conjunto com a

pesquisadora. Num segundo momento, os participantes resolveram um problema semelhante, mas que se tratava de uma compra para montagem de uma cesta básica.

De acordo com Toledo (2001, p. 1), “a metacognição é o conhecimento que nós temos sobre como nós percebemos, relembramos, pensamos e agimos. Ou seja, é o que nós sabemos sobre o que nós sabemos”.

Os resultados da pesquisa de Toledo (2001) mostraram que os participantes apresentaram particularidades em seus desempenhos na resolução dos problemas propostos e que a releitura do problema propiciou condições para que os participantes pudessem perceber possíveis “erros” cometidos no processo de resolução; tanto é que houve mudanças significativas no desempenho.

Bail (2002) buscou saber como a dinâmica do trabalho de sala de aula pode cooperar para a inclusão do aluno jovem e adulto na sociedade ou para a construção de sua cidadania<sup>6</sup>, a partir de metodologia que contemple a interdisciplinaridade<sup>7</sup>. Sua pesquisa foi desenvolvida com uma classe de 20 alunos que freqüentavam a 5ª série em um curso supletivo da rede estadual de Santa Catarina.

Com o intuito de reconstruir a história de vida e de trabalho dos alunos, a pesquisadora propôs que os alunos elaborassem um texto em que falassem de si. Para verificar como eles trabalhavam em grupo, a pesquisadora elaborou uma “dinâmica de grupo” na qual foi disponibilizada uma série de objetos, tais como materiais escolares (caderno, apostila, caneta, lápis, dentre outros). Os alunos precisavam, então, escolher entre todos um objeto que tivesse significado para eles. A partir daí, a autora propôs atividades de cunho matemático, a exemplo de uma pesquisa sobre os preços do álcool e da gasolina praticados pelos postos de combustível. Os dados foram organizados em um quadro indicando os postos em que foram coletados e os respectivos preços praticados. Em outra atividade de cunho matemático, Bail (2002) entrevistou os alunos que realizavam

---

<sup>6</sup> Hoje define-se cidadania como muito mais que conhecer os seus direitos e deveres (...) Não justifica estar escrito “todos são iguais perante a lei” (...) Constata-se a necessidade de que todos os cidadãos sejam mais conscientes de seu papel na sociedade e que todos tenham condições de participar de seus vários setores, para que se garanta e se possa conseguir a igualdade de direitos e deveres. Para tanto, é importante que se discuta o que se entende por cidadania e qual é a influência dela na qualidade de vida das pessoas. Isso também envolve o atendimento das necessidades básicas de todos os cidadãos quanto à saúde, educação, moradia, trabalho, transporte, lazer, direitos políticos, etc. Caso contrário, estaremos debatendo deveres e direitos entre pessoas com desiguais situações e necessidades. (BAIL, 2002, p. 27-28 – Parênteses nossos).

<sup>7</sup> A interdisciplinaridade significa desencastelar as disciplinas numa perspectiva contextualizadora, questionando-se e reformulando-as. É uma das maneiras de propor uma metodologia que propicie trabalho em grupo, pesquisa, utilização do saber do aluno, autonomia, flexibilidade do pensamento, intervenção na realidade, cidadania. (BAIL, 2002, p. 47).

atividades profissionais definidas e, a partir delas, elaborou problemas que tematizavam as atividades laborais dos alunos (estagiário em um cartório eleitoral, serralheiro, pedreiro, eletricista). O problema relativo ao trabalho do estagiário foi proposto na forma de registro verbal escrito; o do serralheiro apresentava uma forma geométrica (retangular); o do pedreiro e do eletricista consistiam em solucionar alguns problemas apresentados em registro verbal escrito e, em seguida, preencher um recibo.

Para Bail (2002, p. 30-32), diante das exigências sociais e da cidadania,

A aprendizagem da Matemática pode contribuir para analisar problemas e definir qual a melhor estratégia para resolver e desenvolver a capacidade de explicar e comunicar para os outros os resultados, raciocínios e argumentos. Além disso, pode auxiliar no planejamento de projetos e atividades que sejam significativos para o aluno e ser útil para garantir os seus direitos como cidadão. (...)

Os adultos, quando voltam a estudar, vêm na escola um espaço de encontro, de redefinição do projeto de vida, de contexto. (...). Da mesma forma, a escola, para esses adultos que voltaram a estudar não pode ser igual à oferecida para as crianças, pois o adulto precisa estabelecer relações com o conhecimento historicamente construído com base nas suas experiências de vida, que são diferentes das experiências das crianças. Os vínculos e as necessidades de compreender o conteúdo seguem a lógica de buscar respostas para suas demandas imediatas, sejam sociais, afetivas ou intelectuais. (...). Por isso, a escola deve ser um espaço que lhes aponte caminhos e lhes dê perspectivas de realizar seus sonhos de um futuro melhor, de emancipação.

Do ponto de vista do conhecimento sistematizado, como fazer para que a escola seja um espaço que aponte caminhos e dê perspectivas de emancipação para os alunos? Esta é uma pergunta que ainda requer muita reflexão e estudos.

Bail (2002, p. 83) chamou a atenção para que o ambiente de sala de aula seja organizado de forma diferente daquela em que os alunos já conhecem, passando a valorizar e respeitar a história de vida das pessoas e que a matemática dever servir “para construir estruturas lógicas que contribuam à construção do pensamento crítico, para que as pessoas possam analisar as situações com mais propriedade, construir e eleger etapas e se sintam capazes de planejar a intervenção em busca de seus direitos”.

Intrigadas pelo fato de que adultos pouco escolarizados desempenhem competentemente certas atividades usando recursos de raciocínio matemático e apresentam erros que derivam de procedimentos padronizados de resolução, quando utilizam um sistema específico de signos, Fávero e Soares (2002) analisaram o processo de mediação

da reconstrução individual na aquisição do sistema numérico de dois alfabetizando adultos de uma escola da rede Municipal de Curitiba, PR. Para isso, desenvolveram dez sessões centradas na mediação da lógica da representação numérica, a partir da problematização de situações das experiências pessoais, visando à reestruturação do pensamento e reorientação da atenção nos procedimentos adotados. Partindo das noções que o sujeito considerava ter conhecimento, solicitavam que registrassem por escrito, em folha de papel, o conhecimento que já dispunham sobre princípios da lógica de notação do sistema numérico.

De acordo com as autoras, os sujeitos apresentavam incompreensão das regras da lógica de notação do sistema numérico mesmo em relação às noções que eles afirmavam ter conhecimento. Isto lhes dificultava o manejo das operações procurando aplicar certas regras para efetuar as operações matemáticas requeridas pelos problemas. Este estudo levou as autoras a concluir que a escola não trabalha com a possibilidade de o sujeito formar representações identificáveis e, ao ignorar isto, ele acaba sobrepondo representações. Em outros termos, a escola propõe o uso de determinadas regras referentes ao sistema numérico, as quais têm significado apenas em relação ao contexto e negociação escolar e não em relação ao uso do sistema numérico.

Ao analisar a relação entre os conhecimentos prévios e os conhecimentos escolares dos alunos, funcionários da Universidade de São Paulo – USP, no Programa de Educação de Adultos – PEA promovido pela Faculdade de Educação da USP, no que se refere ao conhecimento e ao uso das operações aritméticas elementares, Piconez (2002) identificou dois tipos genéricos de sujeitos: “não-algébrico” e “algébrico”. “Não-algébrico” é aquele sujeito que “sabe fazer contas” e, embora conheça as técnicas relativas às operações básicas, apresenta dificuldades ao aplicá-las em situações concretas, e “algébrico”, aquele sujeito que sabe utilizar as operações aritméticas elementares aplicando as técnicas de cálculo em situações mais complexas.

De acordo com Piconez (2002, p. 74), os estilos cognitivos são “conceituados como atitudes, preferências e/ou estratégias habituais que determinam os modos típicos de uma pessoa perceber, lembrar, pensar e resolver problemas”. A autora (idem *ibidem*) coloca que “além das diferentes construções cognitivas dos adultos, determinadas pelo ambiente social, profissional e cultural, foi possível observar, especificamente com relação à matemática, a expectativa e o esforço pelo domínio e pela posse de uma certa regularidade sugerida pelo saber formal”.

A autora (2002, p. 75) obteve os dados e as informações por meio de entrevistas, fichas informativas e filmagens sobre o cotidiano dos alunos dentro e fora da escola, com vistas a identificar alguns dos conhecimentos construídos pelos alunos e as estruturas (formadas na vida social, cultural e de trabalho, em suas articulações com a aprendizagem escolar) operatórias mais amplas que fomentam suas ações. Os dados colhidos nos enunciados de problemas elaborados com base em situações do cotidiano dos alunos visaram ao entendimento das associações mentais livres dos sujeitos. “Interessou investigar até que ponto o aluno consegue explicar as operacionalizações, realizadas com os objetos e os desempenhos característicos de seu trabalho, em conformidade com as atividades realizadas em sala de aula.”

Ainda, segundo Piconez (2002), o sujeito algébrico opera com o significado dimensional do número, quando esse aparece associado a grandezas e consegue estabelecer razões  $A/B$  e produtos  $A \times B$ . Já o sujeito não-algébrico tem dificuldade em estabelecer tais relações. Piconez (2002, p. 79-80) observa que:

A classificação dos alunos entre algébrico e não-algébrico se dá sob o ponto de vista da escola, pois, na prática, todos efetuam diferentes tipos de relações com referenciais nem sempre privilegiados pela escola. (...) especificamente com relação à matemática, a expectativa e o esforço dos alunos pelo domínio e posse de uma certa regularidade sugerida pelo saber formal. (...) os dados obtidos sobre os alunos serviram de subsídios para a organização do trabalho pedagógico na tarefa de auxiliá-los a reconstruir seus conhecimentos anteriores articulados às informações obtidas por meio da educação escolar. Os professores aprenderam a desenvolver a habilidade de metacognição com os alunos (...) conheceram a importância de considerar os conhecimentos prévios ou vivido dos alunos (...) Foi possível identificar também estruturas operatórias mais amplas que fomentam suas ações (ações dos alunos), estruturas estas formadas na vida social, cultural e de trabalho, em articulação com a aprendizagem escolar.

Os estudos de Tôres (2002), sobre as competências matemáticas de jovens e adultos em processo de alfabetização, foram realizados com 19 alunos de um curso de EJA na cidade de Paranoá, DF. A pesquisadora solicitou a participação voluntária dos estudantes em entrevista gravada em áudio e vídeo. Individualmente, os participantes resolveram 10 problemas matemáticos de estrutura aditiva e multiplicativa.

A análise dos dados foi feita com base na teoria dos campos conceituais proposta por Vergnaud. Os resultados apontaram que, na variedade de estratégias adotadas para

solucionar os problemas propostos, os alunos lançaram mão de conhecimentos matemáticos adquiridos na vida cotidiana e de fragmentos de conhecimentos escolares.

Pimenta (2003) desenvolveu seu trabalho de pesquisa sobre resolução de problemas matemáticos de comparação, investigando a construção das competências numéricas e a compreensão textual de alunos adultos surdos, com idades entre 18 e 30 anos, que freqüentavam as séries iniciais de um curso de EJA no Distrito Federal. Numa perspectiva cognitivo-desenvolvimental, entrevistou os professores dos alunos; avaliou as competências matemáticas dos sujeitos, no que concerne à lógica do sistema de numeração; buscou na Língua Brasileira de Sinais – LIBRAS, termos que traduzissem as expressões “n a mais” e “n a menos” em situações de comparação de conjuntos; e investigou o processo de resolução individual dos sujeitos, sem intervenção da pesquisadora e depois, com intervenção.

Os estudos dessa autora revelam que as dificuldades dos alunos surdos na resolução de problemas de matemática, advêm das deficiências do processo de escolarização que prima pela aquisição de regras de procedimentos em detrimento da compreensão conceitual e não de uma suposta limitação em relação à compreensão textual. Segundo Pimenta (2003), no processo de escolarização estabelecem-se dificuldades de compreensão da lógica do sistema de numeração, da lógica da notação e das diferentes funções do número. A falta de proficiência em LIBRAS pelos professores compromete a organização de significados semióticos, a aquisição de conhecimentos e as oportunidades sociais.

Fantinato (2004) apresentou uma síntese de sua tese de doutoramento defendida em 2003 na FEUSP. A pesquisa foi realizada com alunos que freqüentavam projetos educativos na igreja católica localizada no Morro de São Carlos, cidade do Rio de Janeiro.

Ao analisar os resultados, Fantinato (2004) apresentou três categorias de problemas: relações quantitativas e espaciais na comunidade; os conhecimentos matemáticos na vida cotidiana; a matemática escolar e matemática do dia-a-dia.

Na primeira categoria, a autora faz menção à enumeração das casas nas ruas do Morro, a qual nem sempre obedece à seqüência numérica do nosso sistema de numeração e também não obedece ao padrão de casas de número par à direita da rua e de número ímpar à esquerda; à inversão de “mão de direção” ou “mão inglesa”; ao sistema de transporte, o qual é realizado por “kombis” e não há uma regularidade nos horários. Na segunda categoria, além dos conhecimentos matemáticos que são mobilizados, a exemplo do

“arredondamento” e da “estimativa”, nos quais é bastante usual “cálculo mental”, muitas das falas dos participantes expressam sentimentos, principalmente constrangedores, a exemplo de vergonha e incapacidade. Nas falas dos participantes parece haver uma tendência em diferenciar a matemática do dia-a-dia da matemática escolar.

Ao tecer suas considerações, Fantinato (2004, p. 27) destaca dois aspectos que julgou fundamentais à EM na EJA:

Os conhecimentos matemáticos do cotidiano são ricos, complexos, lógicos. Precisam ser legitimados pela escola, para facilitar as aprendizagens desses outros conhecimentos, os formais, que os jovens e adultos também buscam.

(...) acredito que o afastamento *mundo da vida cotidiana/mundo da escola* talvez viesse a ser menor se os professores e profissionais da educação compreendessem os motivos que levam os adultos a resistir a uma simples *passagem* dos conhecimentos matemáticos práticos para os conhecimentos matemáticos escolares. Não se trata de uma *ponte*, mas antes de um *diálogo* que deve ser respeitoso de parte a parte. (...) *A busca de uma possível integração dos conhecimentos matemáticos escolares com os do cotidiano não pode se um pretexto para a desvalorização do conhecimento primeiro do educando.*

Santos (2004) pesquisou as estratégias de registros utilizadas por cinco alunos adultos em fase de alfabetização no curso de EJA promovido pela Universidade do Vale do Itajaí – UNIVALI, ao solucionarem nove problemas com estrutura aditiva, adaptado de Vergnaud (1990). Coletou os dados de sua pesquisa por meio de entrevista e filmagem, a partir das quais analisou as ações, as falas e os registros efetuados pelos sujeitos. A autora pôde observar que os sujeitos da pesquisa passavam por três fases distintas para chegarem às conclusões: visão global do problema; articulação das partes envolvidas no enunciado do problema; estrutura do problema.

Baldini, Sardinha e Dias (2005) apresentaram um estudo realizado por acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Apucarana – FAP, com alunos de EJA do Ensino Médio de uma escola da rede pública municipal de Apucarana, PR. Sob orientação dos professores, os acadêmicos da FAP desenvolveram projetos junto aos alunos de EJA. Para desenvolver os projetos foram elaboradas atividades que discutiam questões ligadas ao mundo do trabalho e, uma vez por semana, os acadêmicos atuavam como docentes na EJA.

O objetivo desse estudo foi investigar como as interações sociais e os conhecimentos de que os alunos já dispunham atuavam no processo de aprendizagem de função. Para identificar os conhecimentos prévios dos alunos, propunham que solucionassem alguns problemas que envolviam o conceito de função. Em seguida, os alunos discutiam suas estratégias e possíveis soluções.

Antes de aplicar os projetos, os acadêmicos fizeram observações da realidade social e buscaram elementos teóricos que pudessem contribuir na superação das dificuldades tanto suas como as dos alunos. A partir das observações, foram elaboradas as atividades a serem desenvolvidas pelos alunos no espaço escolar.

Os resultados desse estudo mostraram que os alunos se envolvem nas tarefas e apresentam formas de raciocínio bastante diversificadas, além do que o envolvimento dos professores de EJA e os acadêmicos têm propiciado condições para se refletir sobre práticas educativas e interagir com realidades diversas.

De forma bastante sintética podemos dizer que existem duas grandes tendências no estudo do processo de ensino e de aprendizagem de Matemática na EJA, mas não desconexas. Uma, que tem como preocupação o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, a exemplo de Duarte (1987; 1995), Maurmann (1999), Porto e Carvalho (2000), Toledo (2001), Piconez (2002), Tôrres (2002), Pimenta (2003), Santos (2004), entre outras. Outra, que se preocupa com a relação que se estabelece (ou não) entre a matemática escolar e aquela produzida nos contextos sociais/culturais, entre os quais podemos destacar: Carvalho (1995; 2001); Calazans (1996); Fonseca (1999; 2001a; 2001b; 2001c; 2002a; 2002b; 2003; 2004); Rocha (1999); Franco (2000); Bail (2002); Fantinato (2004); Baldini, Sardinha e Dias (2005).

De acordo com esses autores, os alunos dos cursos de EJA possuem conhecimentos matemáticos que foram adquiridos em seus contextos sociais e que são utilizados para resolver problemas tanto em sala de aula quanto fora dela. Os resultados dessas pesquisas remetem-nos a uma análise mais acurada das falas e registros de representação, tanto dos alunos como dos professores que ensinam Matemática na EJA, para que possamos compreender melhor as idéias matemáticas que são mobilizadas, bem como os registros que são utilizados quando da solução de problemas de proporção-porcentagem.

Fonseca (2004, p. 28) nos adverte que na Educação Matemática da EJA, muitas vezes, emerge a preocupação com a dimensão utilitária dos conhecimentos matemáticos, o que é de extrema relevância,

não só porque *justifica* o conhecimento matemático contemplado pela escola, mas porque fornece ao aluno adulto, em sua relação adulta com o objeto de conhecimento, algumas chaves de interpretação e produção de sentido, indispensáveis para uma relação de ensino-aprendizagem permeada pelo respeito e o espírito de construção da autonomia.

Mas para além da dimensão utilitária, os sujeitos da educação, inclusive e talvez principalmente os sujeitos da educação de jovens e adultos, percebem, requerem e apreciam também a dimensão formativa do conhecimento matemático: aspectos do conhecimento matemático que oportunizam contemplar suas indagações de cunho filosófico, de natureza arquetípica, de construção histórica... que integram suas possibilidades de leitura de mundo.

Com o intuito de que possamos refletir sobre estas dimensões e melhor compreender o objeto matemático desta investigação, recorreremos às pesquisas sobre proporção-porcentagem.

## **2.2.As pesquisas sobre proporção-porcentagem**

Em função do objeto matemático dessa investigação, sentimos a necessidade de recorrer à literatura sobre a proporção-porcentagem. Ao apresentar as pesquisas que tematizam a proporção-porcentagem, procuramos compreendê-la como objeto matemático de pesquisa.

Acreditando que a dificuldade dos alunos em resolver problemas que envolvem porcentagem pode ser devido à união inadequada entre estratégias e o nível de maturidade cognitiva dos alunos, Wiebe (1986) apresentou e discutiu dois modelos concretos que se mostraram úteis para ajudar os estudantes a compreenderem operações sobre porcentagens.

Um dos modelos consiste em hachurar quadrados para representar porcentagens numéricas simples, numerais percentuais mistos e porcentagens maiores que 100%, sobre o qual sobrepõe-se uma transparência quadrada com as mesmas dimensões, quadriculada com 100 quadrados e marcação que não se apague. O outro modelo consiste num pedaço de elástico espalmado, que esticado deve ser demarcado a cada centímetro, de acordo com

a fita métrica. O elástico demarcado e em seu estado normal deve ser colocado paralelo à fita métrica, de maneira que o 0 (zero) do elástico coincida com o 0 (zero) da fita métrica.

O autor adverte que não se deve usar estes modelos como calculadoras que dão respostas precisas; que as respostas aproximadas dadas pelos alunos devem ser levadas em consideração; deve-se estimular os alunos a estimar respostas e trabalhar com atividades para porcentagens mistas e porcentagens maiores que 100 por cento. Trata-se de uma sugestão que pode servir de referência para os professores proporem atividades aos alunos.

Castro Filho e Carraher (1994) fizeram uma comunicação sobre “a compreensão do conceito de porcentagem” desenvolvido com 101 alunos de 7ª série e 95 do 1º ano do Ensino Médio, em que realizaram testes cujo conteúdo envolvia problemas com quantidades (dinheiro ou número), usando valores das porcentagens múltiplos e não-múltiplos de 10% e 5%. Os resultados mostraram que o uso de quantidades e valores das porcentagens múltiplos de 5% e 10% foi de mais fácil resolução e que a maior dificuldade dos alunos consistiu em determinar entre as magnitudes (quantidades ou números) qual se referia ao todo (100%) e à parte (diferente de 100%), principalmente quando os valores de porcentagens foram superiores a 100%.

Damm (1998) fez uma análise dos problemas de proporção-porcentagem que compuseram a avaliação do Programa de Matemática na França (1987 – fim da 6<sup>ème</sup> e em 1988 – fim da 5<sup>ème</sup>), correspondente respectivamente às 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental no Brasil.

Tomando como base as duas partes que são dadas na parte informativa e a quantidade que é perguntada pelo problema, Damm (1998, p. 200) organizou os problemas em nove tipos e, a partir do número de operações necessárias à resolução dos problemas, estabeleceu seis grupos, conforme Quadro 2, a seguir.

Quadro 2 Classificação de acordo com o número de operações

		1		2		3	
		1 operação		2 operações		3 operações	
	Dados	Questão	Tratamento	Questão	Tratamento	Questão	Tratamento
1	qi p	qt	$\frac{qi \times p}{100} = qt$	qf	$\frac{qi \times p}{100} = qt$ $qi \pm qt = qf$		
2	qi qt	p	$\frac{qt \times 100}{qi} = p$				
3	qt p	qi	$\frac{qt \times 100}{p} = qi$	qf	$\frac{qt \times 100}{p} = qi$ $qi \pm qt = qf$		
4	qi qf			p	$qf - qi = qt$ ou $qi - qf = qt$ $\frac{qt \times 100}{qi} = p$		
5	qf qt			p	$qf \pm qt = qi$ $\frac{qt \times 100}{qi} = p$		
6	qf p			qi	$\frac{100 \pm p}{qf \times 100} = qi$ $100 \pm p$	qt	$\frac{100 \pm p}{qf \times 100} = qi$ $100 \pm p$ $qf - qi = qt$ ou $qi - qf = qt$

Os problemas que requerem, para sua solução, uma ou duas operações, o autor denominou “problemas clássicos” e àqueles que requerem três operações, “problemas não clássicos”. Segundo o autor (1998), os problemas de porcentagem envolvem quatro elementos distintos:

- a) a quantidade inicial – qi (valor de referência);
- b) a quantidade de transformação – qt (valor que transforma a qi para obter a quantidade final – qf);
- c) a quantidade final – qf (valor obtido por adição ou subtração da qi com qt);
- d) a porcentagem –  $p = (qt \times 100) : qi$

Para esse autor, os problemas de porcentagem podem ser vistos como uma extensão dos problemas de conversão proporção-quantidade e devem, implícita ou explicitamente, fazer referência a três tipos de objetos. Esses tipos remetem-se aos

elementos de uma situação extra-matemática, com os quais se tem uma interface entre os tratamentos numéricos e semânticos, implicados na interpretação das situações. São eles: uma quantidade inicial (universo de referência), uma ou várias quantidades parciais (obtidas pela divisão ou extração sobre a qt) e a comparação entre cada quantidade parcial e a inicial.

Os resultados da pesquisa de Damm (1998) mostraram que o problema do tipo 1.1 é o mais fácil, enquanto o problema do tipo 1.2 é mais fácil quando comparado com o problema do tipo 2.1. Já o problema do 4.2, no qual é preciso encontrar a quantidade de transformação pela subtração, apresenta uma dificuldade suplementar, mas a maior dificuldade reside no problema de tipo 6.2.

Reis (1998) investigou a produção de significado para dez por cento e a elaboração de um algoritmo para calculá-lo, assim como aplicações em diferentes contextos. A pesquisa foi desenvolvida com alunos de duas quarta séries da Educação Básica (Ensino Fundamental) de uma escola particular do Rio de Janeiro.

Os alunos coletaram dados em estabelecimentos comerciais localizados nas proximidades da escola e que utilizavam, nas transações, percentuais tanto para aumento como para desconto. As conclusões apontaram que os alunos produziram significados para dez por cento, isto é, trabalharam com a percepção (cortar), as operações (dividir), os sistemas de numeração (unidade, dezena e centena), além de outros. Os alunos também foram capazes de elaborar algoritmos para esse cálculo. Os resultados de sua pesquisa reforçaram a idéia de que um conhecimento matemático específico tem sua razão de ser quando colocado na perspectiva de um conhecimento abrangente.

Maia (1998; 1999) apresentou parte de sua tese de doutoramento, na qual estudou as representações do professor sobre a matemática e o seu ensino. Mais especificamente, o ensino da percentagem e suas relações com o processo de formação continuada. A autora desenvolveu sua pesquisa a partir de um questionário de associação livre e outro de múltipla escolha, os quais foram respondidos por 127 professores, e uma entrevista semi-estruturada com 22 professores que participaram da primeira fase. A pesquisa foi realizada com professores de matemática das redes municipal e estadual de Pernambuco que participaram de formações propostas pelo Laboratório de Ensino da Matemática – LEMAT, da UFPE.

Os resultados de sua pesquisa apontaram que a representação do professor sobre a matemática é a relação que ele estabelece com a vida diária; que as representações do

ensino da porcentagem fazem parte do domínio da matemática da vida, levando o professor a atribuir um sentido relacionado ao domínio financeiro. Do ponto de vista matemático, algumas vezes a porcentagem é identificada aos conceitos matemáticos como fração, número decimal, operações aritméticas, proporcionalidade e regra de três, em outras, é vista como aplicação das mesmas noções. Segundo a autora, as noções de operador e de aplicação linear pouco aparecem. A autora (1998; 1999) destacou que a teoria dos campos conceituais tem se mostrado produtiva à utilização dos resultados de sua pesquisa, mas ainda é preciso explorar uma de suas principais ferramentas: os invariantes operatórios.

Silva, Silva e Aguiar (2000) desenvolveram seu trabalho de pesquisa a partir do estudo da fração articulada ao decimal e à porcentagem. Tal pesquisa teve como objetivos verificar se o ensino pelo qual os sujeitos haviam passado lhes permitia perceber que a fração ordinária, o número decimal e a porcentagem são formas distintas de representar os mesmos números racionais. Objetivando ainda, propor uma metodologia alternativa de ensino, na qual estes subconstrutos fossem trabalhados de forma articulada.

Exploraram o conceito do racional: frações como relações parte-todo; frações decimais, via sistema de numeração decimal; frações equivalentes e frações como divisões indicadas. Os resultados obtidos entre o Pré-Teste e o Pós-Teste, intercalados pela intervenção didática, indicaram uma evolução conceitual de todos os alunos uma vez que o índice de acertos passou de um percentual médio de 9,1% no Pré-Teste para um percentual médio de 71% no Pós-Teste.

A pesquisa realizada por (Vizolli, 2001) foi desenvolvida com 38 alunos de 6ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública de Santa Catarina. Nela foram identificados registros de representação semiótica necessários à conceitualização de porcentagem como proporção, enfocando o sentido e o significado operatórios.

A pesquisa foi desenvolvida em três etapas. Para a primeira, foi elaborado um pré-teste composto de problemas sobre proporção-porcentagem, utilizando-se diferentes registros de representação semiótica, e foi solicitado que alunos de 6ª e 7ª séries (Ensino Fundamental) e 1º ano (Ensino Médio) da Educação Básica os resolvessem. Na segunda etapa, com base na metodologia da engenharia didática<sup>8</sup>, foi elaborada uma seqüência

---

<sup>8</sup> Nos termos de Douady (1993), a engenharia didática pode ser entendida como uma metodologia de pesquisa em que se propõe de forma coerente uma seqüência de aulas concebida, organizada e articulada no tempo, para realizar um projeto de aprendizagem. Trata-se de um “esquema experimental” que toma como princípio “concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino e sua validação é interna e baseada na confrontação entre a análise a priori e a análise a posteriori”. A engenharia didática comporta quatro fases: análises preliminares; concepção e análise a priori; experimentação; e análise a posteriori.

didática<sup>9</sup> composta por sete atividades (percebendo a proporção, aplicando a proporção, identificando a porcentagem como proporção, reconhecendo e convertendo diferentes registros de representação semiótica, enfocando a porcentagem como proporção, compreendendo a porcentagem a partir do gráfico, reconhecendo o sentido e o significado operatórios na porcentagem). Para a terceira etapa, foi elaborado um pós-teste, nos moldes do pré-teste, porém com problemas distintos, alguns dos quais foram apresentados na forma de registros de representação semiótica diferentes daqueles apresentados no pré-teste, mas que foram explorados no decorrer do desenvolvimento da seqüência didática.

A pesquisa de Mestrado (Vizolli 2001) mostrou que a forma como a porcentagem vem sendo trabalhada no processo de ensino e aprendizagem não possibilita que os alunos se apropriem do conceito; prova disso foi o baixo desempenho ao resolverem as questões propostas no pré-teste, quando apenas 15% dos alunos de 6ª série estabeleceram relação porcentagem-centena.

A partir da intervenção didática foi possível dizer que, à medida que os alunos conseguiam estabelecer relações entre as quantidades e informações fornecidas no enunciado do problema, com o que era perguntado (incógnita), a idéia da proporção entre as quantidades foi sendo compreendida. A utilização da propriedade fundamental da proporção facilitou a atribuição do significado operatório e por meio da regra de três os alunos encontravam o resultado matemático da pergunta. Muitas vezes os alunos operam matematicamente com os números disponibilizados, sem estabelecer as devidas relações entre os dados numéricos e as informações presentes no enunciado do problema, exigindo interferência do professor para auxiliá-los a perceberem e estabelecerem as devidas relações. Outras vezes o resultado matemático por si só não garantiu que os alunos respondessem ao que foi perguntado no problema; neste caso, o registro verbal oral ou escrito permitiu a retomada da pergunta, o que auxiliou na compreensão do sentido daquilo que estavam fazendo.

Vizolli (2001) identificou uma série de registros de representação semiótica necessários ao processo de conceitualização de proporção-porcentagem. São eles: língua natural; numérico (decimal, fracionário, percentual, tabela de proporcionalidade);

---

<sup>9</sup> Entendemos a seqüência didática como uma série de atividades previamente elaboradas, para as quais os objetivos são definidos com base no referencial teórico e cuja organização obedece aos critérios da metodologia a ser utilizada na pesquisa.

geométrico e gráfico cartesiano. Nos estudos realizados no decorrer do doutoramento, identificou outros, como equação e função.

Vizolli e Moreira (2006) analisaram o desempenho de 335 alunos ingressantes nos cursos superiores de Administração, Ciências Contábeis, Logística e Comércio Exterior oferecidos pela UNIVALI, ao solucionarem problemas de proporção-porcentagem. Inspirados nos problemas de proporção-porcentagem analisados por Damm (1998), elaboraram nove problemas e solicitaram que, individualmente, os alunos os resolvessem, registrando em papel os cálculos efetuados.

Os dados e as informações coletados mostraram que, para solucionar problemas de proporção-porcentagem, grande parte dos alunos utilizou procedimentos aritméticos. Os resultados mostraram que a média de acertos na solução dos problemas foi de 57%. Para os autores, isso denota que muitos alunos não compreendem, em nível conceitual, a proporção-porcentagem e sugerem que os cursos de graduação repensem seus currículos, a metodologia de ensino e passem a tratar a proporção-porcentagem como objeto de estudo, especialmente nas áreas das Ciências Sociais Aplicadas.

As pesquisas, principalmente de Damm (1998), Maia (1999), Vizolli (2001), Vizolli e Moreira (2006) apontam para a necessidade de realizar mais investigações sobre a proporção-porcentagem, no intuito de saber mais sobre os conhecimentos que são mobilizados por alunos e professores quando desafiados a solucionar problemas de matemática em sala de aula. Isso nos levou à formação de professores que ensinam matemática.

### **2.3. Os registros de representação semiótica**

O sentido denotativo de registro refere-se ao “ato ou efeito de registrar” o que se traduz em escrever, lançar em livro ou anotar (Bueno, 1898, p. 971). Quanto à representação, dentre seus vários sentidos, pode-se destacar a “reprodução do que se tem na idéia” (idem, p. 983), ou ainda, o conteúdo concreto apreendido pelos órgãos dos sentidos ou pela imaginação. Para Teixeira (2005, p. 19), “no sentido mais geral, a palavra representar significa tornar presente algo ausente ou estar longe de”, enquanto “o conceito de representação dá a entender a consideração de duas entidades relacionadas, porém funcionalmente separadas. Uma delas é relativa ao objeto representante (ou representação)

e a outra ao objeto representado. Também está implícita certa correspondência entre o mundo dos objetos representantes e o mundo dos objetos representados.”

Em matemática, pode-se dizer que as representações visam elucidar o conjunto de idéias e imagens que se possui de um determinado objeto de estudo. É, portanto, uma forma metodológica que o professor pode utilizar, partindo das expressões, das concepções ou dos registros que se têm ou que se faz de um objeto matemático em estudo e, paulatinamente, aprimorá-las, chegando às representações semióticas. (Duval, 1993; 1995; 2003).

Para esse autor (2003), as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, as quais apresentam construções próprias de significado e funcionamento. Elas se caracterizam por um sistema particular de signos, a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e podem ser convertidas em representações equivalentes dentro de outro sistema semiótico, mas podem apresentar significados diferentes para quem as utiliza.

De acordo com o autor (2003), as representações semióticas são fundamentais, primeiramente, pelo fato das possibilidades de tratamento matemático e, em seguida, pelo fato de que os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou observáveis sem a ajuda de instrumentos.

Ao tratar do ato de construção do conhecimento, Duval (1993; 1995) estabeleceu três tipos de perspectivas para o termo representação: representações mentais; representações internas ou computacionais; representações semióticas.

As representações mentais têm função de objetivação; portanto, são internas e conscientes de cada sujeito, ocorrem em de pensamento ou do que se tem em mente, estão no mesmo patamar das concepções prévias que se tem sobre determinados fenômenos ou fatos, ou ainda, sobre as fantasias criadas no mundo da infância. Segundo Duval (1993, p. 38), as representações mentais “recobrem um conjunto de imagens e, mais globalmente, as concepções que o indivíduo tem sobre um objeto, sobre uma situação ou sobre alguma coisa que está associado”. Estão relacionadas ao método da conversão.

O autor (1995) esclareceu que os primeiros estudos sobre as representações foram realizados por Piaget, ao estudar as crenças e as explicações das crianças em relação a fenômenos naturais e físicos, como, por exemplo, a formação das chuvas, dos ventos, a propagação do calor. Este autor recorreu à noção de representação como evocação de objetos ausentes. Tem-se aqui a conversão que caracteriza a passagem daquilo que se tem

em mente para o plano das palavras, de desenhos pictográficos, de esquemas, dentre outros.

As representações internas ou computacionais estão relacionadas ao tratamento e se caracterizam pela execução automática de uma determinada tarefa. É o registro mecânico que se faz de um determinado objeto. Elas são internas e não conscientes do sujeito. O sujeito apenas as executa utilizando-se para isso de regras, macetes, fórmulas ou esquemas, sem pensar em todos os passos necessários para sua execução. A noção de representação interna é fundamental porque permite mudar a forma de acordo com o nível de tratamento considerado.

De acordo com o autor (1993), as representações computacionais traduzem informações externas de um sistema, em uma forma que seja possível recuperá-las e combiná-las no interior do sistema. Trata-se de teorias que privilegiam o tratamento em que a noção de representação é concebida como uma representação interna ou computacional. O tratamento está ligado à forma como se apresenta determinada informação ou um conceito e não a seu conteúdo.

Para Duval (1995, p. 16), “a noção de representação é essencial à **forma** como a uma informação pode ser descrita e levada em conta em um sistema de tratamento. Isso não tem, pois, nada a ver, com uma “crença”, com uma “evocação de objetos ausentes”, os quais enviam de novo para a consciência vivamente de um sujeito.” Trata-se, ao contrário, de uma “ação de codizar as informações”.

Para o autor (2003, p. 31), “muitas vezes, as representações “mentais” não passam de representações semióticas interiorizadas. As representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são sempre representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas.” Segundo Duval (1995), as representações semióticas dependem das representações mentais e computacionais, e ao mesmo tempo, uma vez que essas realizam sucessivamente funções de objetivação e tratamento, sendo que o tratamento não é automático e sim intencional; o que é fundamental para a aprendizagem humana.

As representações semióticas pressupõem que se leve em consideração a existência de diferentes sistemas semióticos, permitindo assim a operação cognitiva de conversão das representações entre os diferentes sistemas semióticos. Para Duval (1993; 1995), existem três atividades cognitivas da representação inerentes a semiósis: a formação, o tratamento e a conversão.

A formação de uma representação constitui um registro semiótico particular, seja para exprimir uma representação mental ou mesmo um objeto real. De qualquer forma, ela implica sempre a seleção das características e determinações que constituem o que se quer representar. A formação de uma representação semiótica exige a utilização de signos que possam expressar o objeto e mesmo mudar de registro. As representações idiossincráticas e mesmo as notações que nominalizam os objetos não se caracterizam como registros de representação semiótica. Estes, necessariamente, têm que respeitar as regras próprias do sistema utilizado, não somente para fins de comunicabilidade a outrem, mas principalmente para tornar possível a utilização de modos de tratamento.

Nas representações idiossincráticas, predominam as regras de produção, enquanto nos registros de representação semiótica, levam-se em consideração as regras de conformidade. Segundo Duval (1995), são as regras de conformidade que definem um sistema de representação e os tipos de unidades constitutivas de todas as representações possíveis de um registro, assim como identificam um conjunto de elementos físicos ou traços como sendo uma representação de alguma coisa. De acordo com Duval (1993, p. 40),

Essa formulação implica uma seleção de características e dados no conteúdo a ser representado. Essa seleção se faz em função de unidades e **regras de formação** que são próprias do registro semiótico no qual a representação é produzida. Nesse sentido, a formação de uma representação poderia ser comparada a realização de uma tarefa de descrição. Essa formação deve respeitar as regras (**gramaticais para língua natural, regras de formação de um sistema formal, restrições de construção para as figuras..**). A função das regras é de assegurar, em primeiro lugar, as condições de identificação e de reconhecimento da representação e, em segundo lugar, a possibilidade de sua utilização para o tratamento. **São regras de conformidade**, não são regras de produção efetiva por um sujeito. Isto quer dizer que o conhecimento das regras de conformidade não implica na competência para reconhecê-las.”

Para Duval (1993; 1995; 2003), o tratamento é a transformação de uma representação de partida em uma representação de chegada, dentro de um mesmo registro. Para ele (1993, p. 41),

A paráfrase e a inferência são as formas de tratamento em língua natural. O cálculo é uma forma de tratamento próprio às estruturas simbólicas (**cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo posicional,...**) a reconfiguração é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas, é uma das várias operações que dá ao

registro das figuras seu papel heurístico. A anamorfose é uma forma de tratamento que se aplica a toda representação figural ... Há, naturalmente, regras de tratamento próprias a cada registro. Sua natureza e número variam consideravelmente de um registro a outro: regras de derivação, regras de coerência temática, regras associativas de continuidade e similitude ... No registro da língua natural, há paradoxalmente um elevado número de regras de conformidade e poucas regras de tratamento para a expressão discursiva de um enunciado completo.

O tratamento dado a um determinado objeto depende da forma adotada para representá-lo e não do conteúdo ao qual está vinculado o conhecimento. Segundo Duval (1993), um objeto representado não deve ser confundido com o conteúdo da representação, sob o risco de não dar conta da real diferença que existe entre duas ou mais representações de um mesmo objeto. O conteúdo da representação depende em parte da forma, uma vez que o conteúdo do registro é que permite explicitar o objeto representado.

As representações mentais, as representações computacionais e as representações semióticas não são espécies diferentes de representação uma vez que estão imbricadas e são funções que realizam trabalhos diferentes. De outra maneira, podemos dizer que as representações podem ser convertidas em representações similares ou equivalentes num outro sistema semiótico, podendo ter significados diferentes para as pessoas que o utilizam.

Converter, de acordo com o dicionário Aurélio, significa “mudar a natureza de”. Para Duval (1995, p. 40), “a conversão é a transformação da representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num determinado registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou a mesma informação num outro registro”. Ela é uma transformação externa ao registro de representação de partida.

Converter uma representação significa mudar a forma de representar um objeto do conhecimento, ou seja, mudar a forma pela qual tal objeto é/foi representado. De acordo com o autor (1995, p. 41), “a conversão requer que o sujeito perceba a diferença entre o que Frege chama de sentido de referência dos símbolos ou signos, ou entre o conteúdo da representação.”

No caso dos números racionais, por exemplo, a passagem (conversão, nos termos de Duval 1993) de um registro de representação numérico - decimal para fracionários e percentual ou entre cada um deles, ( $0,1 = 1/10 = 10/100 = 10\%$ ), só é possível de se estabelecer quando o sujeito perceber que se trata de um registro de representação numérico cuja diferença está na forma de apresentação da representação e não no

objeto/conteúdo representado. Quando se faz a passagem do registro decimal para o fracionário ou percentual, temos uma conversão e quando se estabelece a equivalência entre  $1/10$  e  $10/100$ , o tratamento. Para o aluno, tanto o tratamento quanto a conversão não são simples de se estabelecer, cabendo aí a ingerência do professor como mediador desse processo.

De acordo com Duval (1993, p. 42),

**A conversão de uma representação** é a transformação desta representação em uma representação de um outro registro para conservar a totalidade ou parte somente do conteúdo da representação inicial. A conversão é uma transformação externa ao registro de partida (registro de representação por converter). A ilustração é a conversão de uma representação lingüística em uma representação figural. A tradução é a conversão de uma representação lingüística dentro de uma linguagem dada por uma representação lingüística de uma outra língua ou de outro tipo e linguagem. A descrição é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma representação lingüística.

O tratamento não deve ser confundido com a atividade matemática de conversão. A conversão deve ser efetuada para permitir tratamentos diferentes em sistemas de registros de representação também diferentes.

Segundo o autor (1995, p. 21), os registros de representação semiótica “constituem graus de liberdade que o sujeito pode dispor para objetivar para si, uma idéia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente lhes comunicar a um interlocutor”. Transitar por diferentes registros de representação semiótica de objetos matemáticos não é uma tarefa trivial para muitos alunos e mesmo para os professores, principalmente aqueles cuja formação se distancia das ciências exatas.

Muitas vezes os professores até conseguem atribuir um significado operatório para solucionar um problema de matemática, quer porque compreendem em nível conceitual o objeto do conhecimento em voga, quer pela memorização de regras ou macetes adquiridos no processo de escolarização. A compreensão conceitual exige que o sujeito diferencie o objeto de sua representação, atribuindo tratamentos inerentes ao registro de representação efetuado e mais ainda, que faça, o mais naturalmente possível, a conversão entre os diferentes registros de representação.

No caso dos números racionais, os alunos até conseguem dar um tratamento decimal, isto é, trabalhar com representações decimais e algumas vezes com representações fracionárias, dando tratamentos fracionários; porém não conseguem

converter essas representações entre si, isto é, perceber que 0,1 e 1/10 são equivalentes e representam o mesmo objeto matemático (número racional).

No ensino e na pesquisa e, em especial, na educação matemática, temos de ter sempre presente que estamos lidando com objetos, na maioria das vezes abstratos, algo que não é manipulável, pronto, acabado ou fisicamente observável e que, portanto, podem ter vários significados. Temos sim, estruturas ou relações que podem expressar diferentes situações ou fatos que, por consequência, não são acessíveis à percepção, necessitando de uma representação que é à base da comunicação, uma vez que expressa o conhecimento que se tem de um objeto de estudo, constituindo-se, assim, numa expressão escrita.

Gráficos, símbolos, figuras, fórmulas, desenhos, conceitos e outros são representações significativas, uma vez que a sua utilização permite a comunicação entre as pessoas e as atividades cognitivas do pensamento e garante diferentes registros de representação para um mesmo objeto matemático.

No tocante aos tipos e funções cognitivas que as representações mentais, computacionais e semióticas desempenham, Duval (1995, p. 27) organizou um quadro (Quadro 3) no qual articulou as oposições consciente/não-consciente e externa/interna.

Quadro 3 Tipos e funções das representações

	<b>INTERNA</b>	<b>EXTERNA</b>
<b>CONSCIENTE</b>	<b>Mental</b> Função de objetivação	<b>Semiótica</b> Função de objetivação Função de expressão Função de tratamento intencional
<b>NÃO-CONSCIENTE</b>	<b>Computacional</b> Função de tratamento automático ou quase-instantâneo	

A oposição consciente/não-consciente é a oposição entre o que o sujeito lembra, de um lado, e de outro, aquilo que lhe escapa completamente da lembrança ou aquilo que ele não consegue lembrar. De acordo com Duval (1995, p. 24), “a passagem do não consciente para o consciente corresponde ao processo de objetivação pelo sujeito que toma consciência”. Podemos dizer que a objetivação é a tomada de consciência, cuja condição necessária é a significação da representação pelo sujeito que a executou. Duval (1998, p. 54) esclarece que “de certa maneira, a objetivação corresponde ao uso estrito e privado de um registro de representação, mesmo se a produção seja materialmente acessível a outro e

assemelhar-se a uma produção feita para fins de comunicação ou por vezes de tratamento ...”

As representações conscientes apresentam característica intencional e cumprem a função de objetivação, o que é o caso das representações mentais e semióticas. A diferença entre elas é que as representações semióticas desempenham também as funções de tratamento intencional e de conversão.

A oposição externa/interna é a oposição entre o aquilo que não é diretamente visível ou observável por um sujeito em um organismo ou em um sistema e aquilo que não pode ser visível ou observável. Segundo Duval (1995, p. 25), “a produção de uma representação externa apenas se efetua pela introdução de um sistema semiótico”. As representações internas são próprias do sujeito enquanto as representações externas permitem a comunicação para outrem.

Para Duval (1996, p. 356), “as representações semióticas podem ser produções discursivas (em língua natural, em língua formal), ou não discursivas (figuras, gráficos, esquemas...)”. Ao se tratar de educação matemática, é fundamental que se leve em consideração as diferentes formas de representar um objeto de estudo.

Em relação à produção das representações semióticas, segundo Duval (1996), há que se levar em consideração os aspectos estruturais e funcionais. Os aspectos estruturais são relativos à significância dos signos e à possibilidade de representação que eles oferecem; os aspectos funcionais são relativos à produção dos signos, portanto, de cunho psicológico; e o aspecto funcional diz respeito ao tipo de atividade que os signos permitem efetuar.

De acordo com o autor (1996, p. 356), no aspecto estrutural, há que se levar em consideração “a natureza e o número desses signos: **a significância**; o tipo de funcionamento: regras de formação permitindo combinar os signos na unidade de uma representação; o número de dimensões (1 ou 2) segundo as quais os signos podem estar associados”. Em relação ao aspecto fenomenológico, o autor (id ibid) informa que é preciso levar em consideração “o modo de produção: externo (produção fônica, gráfica) ou interno (sem nenhuma efetuação material), quer dizer, físico ou mental; o modo sensorial solicitado pela apreensão: visão, audição...”, ou seja, o modo sensorial está intimamente relacionado à utilização dos órgãos do sentido, uma vez que é por meio deles que o sujeito se relaciona e se comunica. No que se refere ao aspecto funcional, temos (id ibid) “as funções cognitivas fundamentais: comunicação (ou transmissão), tratamento, objetivação.

Todo o sistema semiótico que permite preencher as três funções cognitivas fundamentais constitui um registro de representação”.

Quando se trabalha com problemas, por exemplo, o fundamental não são os desenhos que podem ser feitos a partir do enunciado, nem mesmo as operações matemáticas envolvidas, mas sim o entendimento possível de se estabelecer entre o enunciado, a representação intermediária e o tratamento matemático, uma vez que este objeto não é claro e acessível como os objetos físicos e, exatamente por isso, seu tratamento depende de uma representação semiótica. Segundo Duval (1993, p. 38), “as representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação; elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento”.

Como se vê, as representações semióticas não são apenas exteriorização das representações mentais necessárias para se estabelecer uma comunicação, uma vez que o indivíduo que apreende necessita delas para elaborar o conhecimento, portanto, desempenham as funções de cognição (tratamento, conversão e representação).

Para o uso das representações semióticas, Duval (1993) elencou três funções primordiais: o desenvolvimento das representações mentais, as quais dependem da interiorização das representações semióticas, ao mesmo tempo em que são interiorização das percepções; a realização de diferentes funções cognitivas, de objetivação, que é independente da comunicação e a de tratamento, que não pode ser preenchida pelas representações mentais; e a produção de conhecimentos pela via das representações semióticas, as quais podem revelar sistemas semióticos muito diferentes e independentes na língua natural.

Essas funções indicam que as representações semióticas estão diretamente ligadas às representações mentais, embora não subordinadas a elas, e que as representações semióticas permitem efetuar determinadas funções cognitivas como a de tratamento. Esta função apresenta uma diversidade de registros semióticos de representação para os quais a apreensão ou a produção de uma representação semiótica é chamada de semiósis e a apreensão conceitual de um objeto de noésis. A noésis é inseparável da semiósis”. Como significativas representações (semiósis) proporcionam a conceitualização (noésis), torna-se necessário entender que as atividades cognitivas estão ligadas à semiósis, razão pela qual a aprendizagem conceitual implica a coordenação de vários registros de representação.

Em relação à coordenação dos registros, Duval (1996, p. 365) destacou que não é suficiente um desenvolvimento para cada registro.

É preciso igualmente que os diferentes registros que o sujeito dispõe, ou que se ensina, se esforcem para fazer a coordenação (por exemplo o registro da escrita algébrica). Esta coordenação é a condição para o domínio da compreensão na medida em que ela é a condição para uma diferenciação real entre os objetos matemáticos e sua representação: ela se manifesta pela capacidade de reconhecer duas representações diferentes das representações de um mesmo objeto. Ela se constitui no limiar da ultrapassagem na troca radicalmente de atitude frente a um tipo de atividade ou frente a uma disciplina: o sujeito tem consciência de ultrapassar o limiar, de adquirir um poder de iniciativa e de controle no desenvolvimento dos procedimentos.

A importância da coordenação dos registros de representação semiótica para o funcionamento do pensamento humano reside, segundo Duval (1993), em três posições: no custo de tratamento; nas limitações específicas de cada registro e na condição necessária para a diferenciação entre representante e representado.

Os custos de tratamento referem-se ao funcionamento de cada registro tal qual ele é conscientemente vivido nos tratamentos das representações, o que nos diz que a existência de vários registros permite a troca entre esses registros, e essa troca é salutar à compreensão conceitual, além de propiciar a economia de tratamento. As relações entre os objetos podem ser representadas de maneira mais rápida e simples de compreender. Como nos disse Duval (1993, p. 49), “de um modo mais geral, em matemática, a economia do tratamento (perceptivo ou algorítmico) é geralmente antecipação com encontro da língua natural. A suspeita latente com a consideração da língua natural em matemática encontra ali sua origem real”.

Em outras palavras, pode-se dizer que a escrita dos números e as noções algébricas têm um custo de memória registro verbal oral para os tratamentos do tipo cálculo, em que a economia em um tratamento reside na aproximação entre o registro verbal oral e o tratamento matemático. Ilustrando, se no estudo de porcentagem tem-se no enunciado: dez por cento, há várias maneiras de representar. Veja: 10%; 10/100, são formas mais econômicas de representação e se aproximam da língua falada. No entanto, podemos representar também assim: 0,1 ou  $10^{-1}$  embora essas duas representações exijam um custo de memória maior, uma vez que necessitam de conhecimentos e tratamentos mais aprofundados. Além disso, tem-se outras formas de representar, como, por exemplo, as representações por meio de gráficos cartesianos, algébricas e numéricas.

As limitações representativas específicas a cada registro supõem uma comparação de diferentes modos de representação de um mesmo objeto. Isso nos coloca a necessidade da complementaridade de registros porque, de acordo com Duval (1993, p. 49), “toda a representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa e que de um registro a um outro não são os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que são representadas”.

Uma vez que toda a representação é cognitivamente parcial em relação ao objeto a ser representado, a complementaridade entre os registros se torna fundamental e a conversão entre os registros possibilita ao sujeito perceber os vários aspectos do conteúdo representado, ou seja, obter a conceitualização (noésis). Como cada registro de representação possui uma especificidade própria, é exatamente a complementaridade entre os registros de representação escolhidos para representar um objeto, que exige de quem coordena a ação pedagógica (neste caso o professor) o trabalho com vários registros de representação de um mesmo objeto, a fim de que o educando tenha condições de conceitualizar o objeto em estudo.

A condição necessária de uma diferenciação entre representante e representado propõe uma proximidade desenvolvimental da atividade cognitiva nas disciplinas ou o recurso com uma pluralidade de registros é fundamental. Isso nos coloca que a conceitualização implica a coordenação de vários registros de representação para um mesmo objeto de estudo. Nesse sentido, Duval (1993, p. 50-51) levantou as hipóteses de que “se o registro de representação é bem escolhido, as representações do registro são suficientes para permitir a compreensão do conteúdo conceitual representado” e que a “compreensão (integrativa) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão”.

Para que ocorra aprendizagem, é de fundamental importância a consideração de tais hipóteses, uma vez que elas apontam para o processamento da aquisição de qualquer conhecimento, assim como é importante identificar quais os registros de representação são significativos para a aquisição do conhecimento de porcentagem, por exemplo. De acordo com Duval (1993; 1995), a aquisição de um dado conhecimento exige, no mínimo, o trabalho com dois registros de representação para um mesmo objeto em estudo e estes registros precisam ser significativos em relação ao objeto; e quanto mais naturalmente

ocorrer a conversão entre os registros, maior a possibilidade de ocorrer aprendizagem com significado.

A falta ou ausência de coordenação entre vários registros de representação implica a não-compreensão conceitual do objeto em estudo. Esta é uma das causas do fracasso escolar de muitos alunos.

De acordo com Duval (1993), para que ocorra uma representação identificável, faz-se necessária a escolha de características e de informações no conteúdo a ser representado. Isso depende de regras de formação que são interligadas ao processo de ensino e aprendizagem, assegurando o reconhecimento das representações e a garantia de sua aplicabilidade num tratamento, que é inerente aos registros semióticos produzidos pelo sujeito. Já as regras de conformidade estão postas na sociedade; cabe ao sujeito apenas usá-las a fim de reconhecer as representações.

Representações diferentes envolvem tratamentos completamente diferentes. Trabalhar o mesmo objeto matemático é muito mais complexo do ponto de vista operacional, porque, dependendo da forma de representação utilizada, o tratamento também se modifica de acordo com o objeto de ensino que se está trabalhando. Cada registro de representação de um objeto também possui graus de dificuldades diferentes (custo cognitivo) e este é um problema a ser enfrentado na hora de ensinar e propor atividades. O grande desafio é procurar mecanismos que diminuam ao máximo as dificuldades que se possa ter em relação à representação escolhida para trabalhar.

No estudo da porcentagem, pode-se ter uma representação fracionária, decimal ou percentual que envolve respectivamente tratamentos fracionários, decimais ou de porcentagem ( $1/10 = 10/100 = 0,1 = 10\%$ ). Aí está a prova de que os tratamentos estão vinculados à forma de representar o objeto matemático e não a seu conteúdo.

Como a conversão é uma atividade cognitiva independente daquela de tratamento e exterior ao registro de partida, o sujeito pode efetuar a mesma operação com sistema fracionário e decimal ou percentual e não pensar, ou até optar, pela conversão dos registros. Ela exige que o sujeito estabeleça a diferença entre o sentido (significado, que corresponde ao conceito ou à ação) e a referência, os símbolos ou os signos (significante, que corresponde à forma, provido de significação).

De acordo com Duval (1993), a ação de codificar e a interpretação são duas atividades muito próximas da conversão, mas não podem ser confundidas com ela. A ação de codificar consiste na transcrição de uma representação em um sistema semiótico a

outro, também semiótico, diferente daquele onde ela é dada. A interpretação implica a mudança do quadro teórico ou de contexto, mas não na mudança de registro.

Sinteticamente pode-se dizer que a representação identificável exige a escolha de características e informações no conteúdo a ser representado; o tratamento se estabelece na compreensão das regras de formação das representações e a conversão consiste na transformação de um registro de representação em sistema semiótico para outro também semiótico.

É importante observar que dessas três atividades cognitivas ligadas à semiósis no ensino da matemática, normalmente só se levam em consideração a formação de representações e os tratamentos necessários em cada representação. No entanto, só a conversão das representações de um sistema semiótico para outro também semiótico é capaz de formar as representações em registros diferentes e de efetuar os tratamentos sobre as representações, isto é, a conversão garante a conceitualização. Isto posto, não basta ao sujeito resolver uma operação, utilizando-se para isso, de recursos como material concreto, símbolos, ou mesmo desenhos, se não coordenar estes procedimentos no tratamento. A determinação de várias representações de um mesmo objeto matemático não garante a compreensão, mas sim a coordenação entre vários registros de representação (noésis).

O funcionamento do pensamento humano está intimamente ligado à representação (semiósis) e a conceitualização (noésis). Da coordenação noésis/semiósis, pode-se elencar duas características fundamentais do pensamento humano.

Para Duval (2003), a utilização de vários registros de representação propicia o desenvolvimento do conhecimento humano e possibilita a criação de novos sistemas semióticos, a exemplo da evolução nos sistemas de numeração utilizados pela humanidade no decorrer dos tempos. O progresso dos conhecimentos é oriundo da criação e desenvolvimento de novos e específicos sistemas semióticos, resultado do trabalho com vários registros de representação. A criação de novos registros está diretamente relacionada às necessidades da espécie humana. Daí, as diferentes bases no sistema de numeração, os números fracionários, decimais, a porcentagem e tantas outras criações.

### 3. O REVELAR DO OBJETO INVESTIGADO

Pesquisadores em Educação Matemática, como Almouloud (2003), Bittar (2003), Damm (1992; 1999; 2003), Duval (1993; 1995; 2003), Freitas (2003), Maranhão e Iglioni (2003), Nehring (1996; 2001), entre outros, têm desenvolvido pesquisas sobre a forma como se processa a aprendizagem de conhecimentos matemáticos, com base na teoria proposta por Duval (1993; 1995).

Para esses autores, em matemática, toda a comunicação se estabelece com base nas representações dos objetos a serem estudados. Há consenso entre eles, de que os objetos matemáticos são conceitos, propriedades, estruturas e relações que expressam diferentes situações e que, para seu ensino, é preciso levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto.

De acordo com Duval (1993), um objeto matemático não é algo pronto, acabado, mensurável ou fisicamente observável, mas sim estruturas ou relações que podem expressar diferentes situações; por isso precisa-se considerar as diferentes formas de representá-lo.

Muitas vezes o professor de matemática lança mão de recursos didáticos demonstrativos, visuais ou manipulativos, que nem sempre auxiliam o aluno a expressar certas situações matematicamente. No entanto, é indispensável que o professor tenha clareza da diversidade de registros de representação semiótica com seus respectivos tratamentos e conversões, coordenando as transformações entre eles.

Com base na experiência docente, podemos dizer que, em geral, os professores ouvem, mas não auscultam os termos ou conceitos que os alunos expressam oralmente ou escrevem em papel. Estes fazem o que lhes é solicitado<sup>10</sup>. De acordo com Fonseca (2001), muitas vezes os termos ou conceitos não passam de nomes ou enunciados que são expressos ou registrados quase que de forma ritual, aos quais dificilmente são atribuídos um significado mais consistente. Não raras vezes, os professores interrompem as investidas dos alunos por considerá-las divagações, o que acaba desestimulando-os. Muitos alunos resistem a essa metodologia que não valoriza e muito menos estimula sua forma de pensar

---

<sup>10</sup> Nos termos de Brousseau (1998), podemos dizer que se trata das regras do contrato didático. Este entendido como um conjunto de comportamentos que o professor espera dos alunos, assim como os alunos esperam do professor. Este contrato rege a prestação de contas entre os parceiros da relação didática.

e novamente evadem-se do processo de escolarização, considerando-se incapazes de aprender. Outros, talvez não menos resistentes, adequam-se à metodologia, sem necessariamente assumir a forma como os conceitos são apresentados e, ao utilizá-los em seu contexto social, mantêm a mesma maneira como antes do reingresso no processo de escolarização. Outras vezes, os alunos passam a utilizar termos que ouviram na escola, o que não significa que saibam seu significado.

Ao analisar as pesquisas, principalmente voltadas à EM na EJA, percebemos que autores como Duarte (1987), Carraher; Carraher e Schliemann (1988), Carvalho (1995), Toledo (2001), Fonseca (2001; 2002), Santos (2004), entre outros, compartilham da idéia de que os alunos possuem conhecimentos de matemática que são oriundos de seu contexto social mais imediato e que as estratégias ali utilizadas na solução de problemas diferem daquelas comumente empregadas no processo de escolarização.

Embora os professores reconheçam que os alunos ancoram seus raciocínios em situações relacionadas à sua vida prática ou utilizadas em espaços sociais que não a escola, pouco se tem refletido sobre o modo como os alunos e mesmo os professores de EJA escrevem a solução de problemas de proporção-porcentagem e muito menos sobre os registros de representação que são utilizados no processo de solução de tais problemas. Poucas vezes os professores exploram, para fins de conceitualização dos objetos matemáticos, o modo como os alunos solucionam os problemas “ensinados” no processo de escolarização.

Fonseca (2001) observou que, embora os professores de EJA não manifestem preocupação com os “pré-requisitos” dos alunos, eles tendem a interpor resistência às reminiscências das experiências escolares anteriores dos alunos, muitas vezes ignorando-as, ou até mesmo reprimindo-as, o que sugere uma certa insensibilidade ou despreparo que não lhes permite reconhecê-las e, muito menos integrá-las à dinâmica do processo de ensino e aprendizagem atual. Observou ainda (2001, p. 5) que há, por parte de alguns professores, “uma má vontade confessa em relação aos conhecimentos escolares prévios dos alunos que se “re-escolarizaram”, que busca justificar-se colocando sob suspeita a qualidade dessa experiência escolar pregressa – que resultou em “fracasso” e “abandono””. Segundo a autora (2001, p. 6), “a escola que, ao menos no nível do discurso, já reconhece como significativa a experiência de vida do aluno, descarta, no entanto, sua experiência de vida escolar, renegando-a ou, simplesmente, ignorando-a, caso ela não se restrinja e corresponda aos pré-requisitos já estabelecidos para o “avanço” da matéria”.

As experiências que tivemos na EJA/UNIVALI permitiram dizer que tais resistências se manifestam muito mais quando a proposta pedagógica não é ou não foi devidamente pensada, discutida, elaborada e implementada no e pelo coletivo do corpo docente que atua ou vai atuar na EJA. Isso não significa dizer que não se têm resistências. O grande desafio para os professores, principalmente de matemática, reside na superação das limitações advindas da falta de conhecimentos sobre a forma de ensinar Matemática e sobre a forma como alunos adultos estruturam seu pensamento para solucionar problemas trabalhados no contexto de sala de aula.

Fonseca (2004), além de chamar a atenção para a necessidade de se continuarmos a aprender ao longo da vida, nos coloca que os resultados do INAF de 2002 mostraram que o grau de instrução parece apresentar-se como variável mais decisiva na conformação da distribuição dos participantes nos diversos níveis de alfabetismo funcional. Não obstante, a permanência ou não do aluno na escola também interfere nos níveis de alfabetismo.

Nossas vivências e experiências profissionais têm mostrado que os alunos de EJA, quando provocados, expressam a forma como organizaram os dados e informações presentes no enunciado do problema, com mais facilidade em suas falas, do que por meio da escrita, o que não significa que não a utilizem.

O exercício da docência tem indicado que uma das dificuldades dos alunos de EJA em efetuarem registros de representação em matemática, se não a maior, reside na falta de conhecimentos das regras de significado e funcionamento da linguagem desta disciplina. A linguagem matemática, assim como as demais formas de comunicação em que se faz uso de signos, necessita de regras para que a mensagem possa ser comunicada a outrem. O domínio das “regras de significado e funcionamento”, em toda forma de linguagem escrita, seja ela em “língua natural”, numérica, algébrica, entre outras, não é uma tarefa trivial nem para os alunos, e muitas vezes, nem para os professores (Duval 1993, 1995). A nosso ver este indicativo encontra eco nas palavras de Fonseca (2004, p. 23), ao apresentar os resultados pelo INAF de 2002, de que apenas 21% da população brasileira consegue compreender informações a partir de gráficos e tabelas.

Os professores, diferentemente dos alunos, estão permanentemente em contato com diferentes formas de comunicação por meio de escrita. Mesmo aqueles que não ensinam matemática fazem uso dela para explicarem determinadas situações ou conceitos da disciplina que lecionam. Além disso, freqüentaram ou freqüentam o processo de escolarização formal, quer em cursos de graduação, quer de pós-graduação, quer em cursos

de formação continuada. Esse contato sistemático com diferentes formas de comunicação por meio da escrita constitui-se num elemento facilitador para o acesso às regras de significado e funcionamento, inclusive da linguagem matemática. Isso não significa que o professor de Língua Portuguesa, por exemplo, domine as regras da linguagem matemática e vice-versa. Faz-se necessário sim que os alunos, e muito mais os professores, conheçam as regras de significado e o funcionamento de diferentes formas de linguagem.

Como os professores são indispensáveis ao processo de escolarização, e uma de suas principais tarefas é propiciar as condições para que os alunos ampliem sua gama de conhecimentos, o que exige, principalmente, a utilização de registros que obedecem a regras de significado e funcionamento, é fundamental, também para o ensino de matemática, que os professores utilizem diferentes registros de representação. Não só isso, é preciso fazer a conversão dos registros de representação em sistemas semióticos diferentes, para que os alunos passem a se familiarizar com eles e possam perceber que o uso variado da linguagem matemática pode permitir o desenvolvimento de um pensamento matemático mais flexível. No entanto, a metodologia utilizada pelo professor, aliada à sua postura perante ao conhecimento, pode fazer a diferença no processo de escolarização.

As inquietações com relação ao processo de ensino e aprendizagem da matemática levaram-me a pleitear uma vaga junto ao Programa de Pós-Graduação, para o curso de Mestrado em Educação, na Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Florianópolis, SC e, posteriormente, no Doutorado na Universidade Federal do Paraná – UFPR. No Mestrado, fizemos muitas leituras, discussões, análises e reflexões acerca de teorias e conceitos encontrados na literatura que fundamenta as pesquisas, principalmente voltadas ao ensino e à aprendizagem da matemática.

Mencionamos, na apresentação desta tese, que nesta pesquisa continuamos a investigar o processo de compreensão conceitual de proporção-porcentagem, tendo como pressuposto que para a solução de problemas de proporção-porcentagem propostos em sala de aula, tanto os professores quanto os alunos de EJA ancoram seus raciocínios em situações de seu contexto social mais imediato e utilizam registros de representação usuais no processo de escolarização.

Este panorama nos remete a considerar o conhecimento matemático que professores e alunos de EJA expressam ao solucionarem problemas proporção-porcentagem, por isso o empreendimento desta investigação.

As perguntas, os objetivos estabelecidos para esta investigação e o referencial teórico adotado, nos remetem a uma análise mais acurada sobre o processo de compreensão do objeto matemático: proporção-porcentagem.

### **3.1.A compreensão da proporção-porcentagem**

De acordo com Duval (1995), os objetos matemáticos não são manipuláveis ou fisicamente observáveis. Eles não podem ser caracterizados em termos de presença ou ausência; é isso que os diferencia do representado.

Para operar com as informações matemáticas presentes no enunciado, quando não se trata de comunicar o feito a outrem, não necessariamente precisamos fazer uso de procedimentos ou algoritmos canônicos, isto é, pode-se lançar mão de procedimentos e algoritmos elaborados no contexto social mais imediato, ou apoiar-se neles para resolver um dado problema.

Por procedimentos ou algoritmos não-canônicos, entendemos aqueles que não são usuais no contexto escolar, mas que, muitas vezes, se manifestam nas falas ou notações utilizadas pelos alunos. Já aos procedimentos e algoritmos que são difundidos e bastante usuais no processo de escolarização, e, na maioria das vezes, utilizados na matemática convencional compendiada em livros, denominamos procedimentos ou algoritmos canônicos ou convencionais. Estes normalmente obedecem às regras de significado e funcionamento da linguagem matemática utilizada.

No contexto social, diariamente nos deparamos com problemas para os quais precisamos encontrar uma solução, uma resposta à pergunta que nos intriga ou nos instiga. No processo pedagógico, tanto os alunos quanto os professores são confrontados com problemas, na maioria das vezes, inerentes ao processo educativo e que também fazem parte do contexto social, seja ele escolar ou não.

Como os enunciados dos problemas podem ser apresentados na forma de texto em registro verbal escrito ou matemático: gráfico cartesiano, tabela, esquemas, figuras, entre outras, ou ainda apresentados oralmente, eles devem apresentar diferentes situações do contexto social e nele, o contexto escolar.

A solução de um problema não se restringe a uma aplicação de conceitos que o sujeito já domina. Um “problema” de matemática, por exemplo, só se caracteriza como tal

quando o sujeito não sabe qual é a resposta, e, para obtê-la, precisa estabelecer as devidas relações entre as informações matemáticas e extra-matemáticas e, a partir das relações estabelecidas, adotar estratégias que lhe possibilitem a utilização de procedimentos e neles os tratamentos adequados à solução matemática. Esse é um trabalho que envolve todo um processo de investigação.

Para Onuchic e Allevato (2004, p. 221), um problema “é tudo aquilo que não sabemos fazer mas que estamos interessados em fazer”. Para Moro (1998, p. 5), “é um problema qualquer situação que pede uma solução, trazendo aos sujeitos a necessidade de descobrir relações e explorá-las, de elaborar hipóteses e verificá-las (no âmbito escolar e não escolar)”.

No processo de investigação o sujeito se depara com diferentes formas de apresentação ou representação para um problema (registro verbal escrito, registro verbal oral, uma carta enigmática, uma tabela, um gráfico, uma figura, uma equação, uma função, entre outras). Cada uma dessas formas de apresentação ou representação requer do sujeito a mobilização de representações intermediárias entre o enunciado do problema e a solução matemática.

A representação intermediária deve permitir que o sujeito estabeleça as devidas relações entre as informações matemáticas e extra-matemáticas presentes no enunciado; identificar os registros de representação semiótica com seus respectivos tratamentos e conversões que serão adotados no processo de solução matemática; identificar os conceitos matemáticos que serão mobilizados no processo de solução. Enfim, a representação intermediária é um indicador do nível de compreensão que o sujeito já possui acerca do objeto matemático em discussão e dos procedimentos que serão adotados no processo de solução. Não é a representação intermediária que garante o processo de solução, mas ela é essencial à atribuição do significado operatório.

Diante de tudo o que foi dito, a Figura 4, a seguir, procura sintetizar os aspectos relativos à compreensão de um objeto de estudo e, nesse caso, a compreensão do conceito de proporção-porcentagem. Diante a necessidade de se tratar de forma sistemática o processo de solução de problemas de proporção-porcentagem, este diagrama foi adaptado da dissertação de Mestrado (Vizolli, 2001).

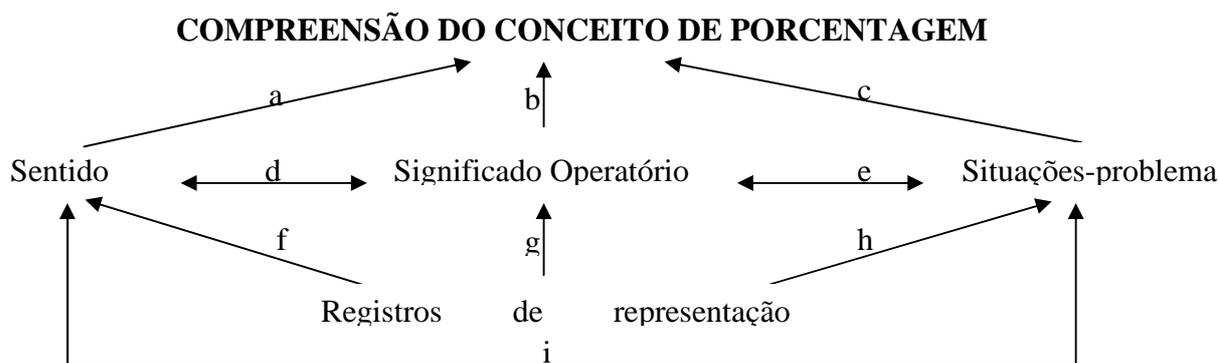


Figura 4 Aspectos relativos à conceitualização

As setas "a", "b" e "c" têm por função a diferenciação entre o objeto representado e suas representações, ou seja, a **forma** ou **representante** indicam conhecimentos parciais em relação à compreensão do objeto em estudo. Já as setas "d", "e" e "f" indicam a necessidade do movimento entre os três aspectos para compreensão do conceito de porcentagem. Elas destacam a idéia da complementaridade entre os três aspectos e desencadeiam os diferentes registros de representação dos objetos matemáticos, ou seja, o conceito. A seta "f" indica a possibilidade de se trabalhar sem o registro do significado operatório. As setas "g", "h" e "i" indicam que a conceitualização do objeto de estudo passa pela utilização dos registros de representação semiótica. Isso significa que, para seu estudo, o sujeito precisa levar em consideração a objetivação, o tratamento e a conversão entre diferentes sistemas de registros de representação.

Entendendo a proporção como um campo de conceitos e que um de seus aspectos é a porcentagem, para compreendê-la é necessário que o sujeito mobilize uma série de conhecimentos intrínsecos à matemática. Entre eles, podemos destacar os conhecimentos relativos às operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão); noções básicas das operações com números racionais, fração, razão e proporção. É preciso também compreender que, assim como a proporção, a porcentagem é uma função.

Em relação às diferentes representações, Duval (1993; 1995) informou que há que se levar em consideração o sentido (as quantidades, a incógnita e os aspectos relacionados ao contexto da situação proposta); o significado operatório (quantidades, incógnita, tratamento e a conversão) e as situações-problema para fins de modelização, o que significa fazer uso do conceito de proporção-porcentagem em situações matemáticas e extra-matemáticas.

Ao se levar em consideração a coordenação dos três aspectos (sentido, significado operatório e situações-problema) para a compreensão da porcentagem, não se pode esquecer das relações e das informações entre as quantidades; do contexto do problema;

dos registros de representação com seus respectivos tratamentos e conversões. Além disso, há que se avaliar a relação das quantidades e da incógnita sobre a centena.

O trânsito entre os diferentes registros de representação não é uma tarefa fácil, porque cada registro de representação possui suas especificidades. E se o sujeito que o executa não conseguir transitar por diferentes registros de representação, dificilmente transporá as dificuldades, não entenderá o que está fazendo e muito menos conseguirá conceitualizar o objeto em estudo.

A Figura 5 faz parte da dissertação de Mestrado (Vizolli, 2001) e neste momento há necessidade de descrever seu funcionamento.

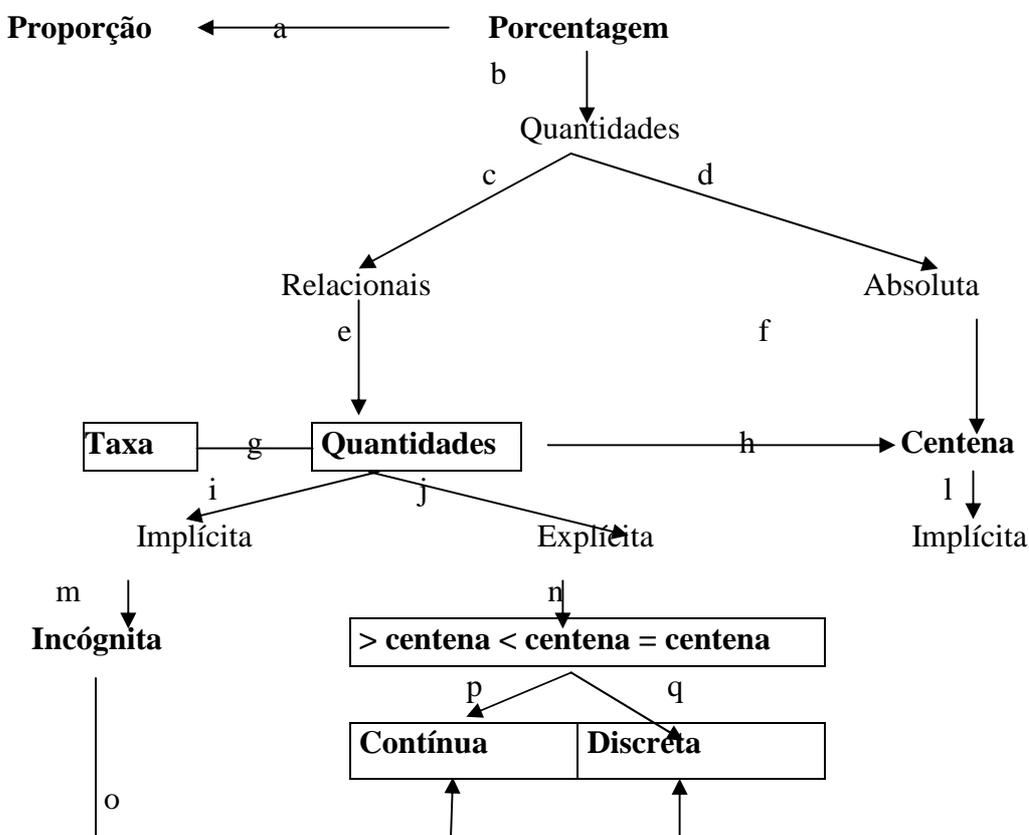


Figura 5 A compreensão da porcentagem como proporção

Como já foi dito, a porcentagem é um dos aspectos da proporção e está representada pela seta “a”. A seta “b” mostra que um problema congrega quantidades que podem ser relacionais, como mostra a seta “c”, ou absolutas, indicado pela seta “d”. As quantidades variáveis situam-se na taxa percentual e nas quantidades (inicial, final ou de transformação), indicadas pela seta “e”. As quantidades podem ser implícitas indicadas pela seta “i”, ou explícitas indicadas pela seta “j”. A seta “m” indica que a quantidade implícita é a incógnita, é sobre ela que recai a pergunta. As quantidades explícitas, no

enunciado podem ser maiores, menores ou iguais à centena, indicada pela seta “n”. Tanto as quantidades explícitas como a implícita, podem ser de natureza contínua, indicada pela seta “p”, ou de natureza discreta, indicada pela seta “q”. Já a seta “o” indica que a incógnita também pode ser de natureza contínua ou discreta e que tem relação com as quantidades explícitas.

A seta “h” indica que as quantidades variáveis têm relação com a quantidade constante; a centena, destacada pela seta “f”. É essa relação com a centena que caracteriza a porcentagem, a qual é uma quantidade implícita, conforme indicada pela seta “l”. O segmento de reta “g” indica a existência de três quantidades, das quais duas são explícitas e uma é implícita.

Um trabalho que leve em consideração a existência de diversos registros de representação semiótica, a diferenciação entre o objeto representado e seus registros de representação semiótica e a coordenação entre os diferentes registros, exige, além desses três aspectos, que o professor conheça as idéias matemáticas que compõem o conceito em estudo. A partir desses conhecimentos o professor terá condições de elaborar e propor aos alunos atividades que lhes possibilitem compreender o objeto em estudo. Tais atividades devem permitir que eles atribuam sentido e significado operatórios. Isso exige o domínio das regras de significado e funcionamento de cada registro de representação e o entendimento de que um registro é sempre parcial em relação ao objeto matemático. (DUVAL, 1993; 1995)

Muitas vezes os alunos possuem dificuldades para utilizar os registros de representação porque não conseguem estabelecer as relações entre as quantidades, principalmente quando a incógnita recai sobre a taxa percentual ou sobre a quantidade inicial ou de referência; outras vezes, porque não conseguem atribuir o sentido ou o significado operatório, principalmente quando não reconhecem o objeto matemático na representação.

### 3.2.A proporção-porcentagem e seus registros de representação

Como um dos objetivos desta investigação consiste em identificar os registros de representação semiótica que são utilizados por alunos de professores de EJA na solução de problemas de proporção-porcentagem, lançamos mão da classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (Duval, 2003), acrescentando os registros necessários à conceitualização de proporção-porcentagem identificados por ocasião da pesquisa de Mestrado (Vizolli, 2001) e aqueles identificados no decorrer do curso de doutoramento.

Duval (2003, p. 14) classificou os registros de representação semiótica em quatro tipos muito diferentes de registros, conforme consta do Quadro 4, a seguir. A este quadro, em itálico, apresentamos os registros de representação semiótica que devem ser mobilizáveis no fazer matemático de proporção-porcentagem.

Quadro 4 Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)

	<b>REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA</b>	<b>REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA</b>
<b>REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.</b>	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: argumentação a partir de observações, de crenças ...; dedução válida a partir de definição ou de teoremas. <i>Registro verbal oral</i>	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). apreensão operatória e não somente perceptiva; construção com instrumentos. <i>Figura geométrica</i>
<b>REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.</b>	Sistemas de escritas: numéricas (binária, decimal, fracionária ...); algébricas; simbólicas (línguas formais). Cálculo <i>Registro verbal escrito; Numérico (percentual; fracionário; decimal; tabela de proporcionalidade); Aritmético Equação. Função.</i>	Gráficos cartesianos. mudanças de sistema de coordenadas; interpolação e extrapolação. <i>Gráfico cartesiano</i>

Ao observar a classificação dos registros de representação semiótica apresentada por Duval (2003) devemos notar que nos registros multifuncionais, os tratamentos não são algoritmizáveis e têm como representação discursiva a língua natural, isto é, se manifestam por meio de associações verbais ou de raciocínios argumentativos ou dedutivos.

Os discursos dedutivos tomam como base as definições, as propriedades, os teoremas, entre outros, respeitando as regras da organização do discurso matemático. A passagem de uma afirmação para outra é feita com referência às regras que a justifica. Os discursos argumentativos se apóiam, principalmente, em observações e crenças, seguindo o princípio da linguagem natural. Nesse tipo de discurso, existe o encadeamento semântico no qual as afirmações vão sendo agrupadas e não se exigem regras predefinidas. Estes registros também podem aparecer na forma não-discursiva, a exemplo das configurações geométricas. Nos registros monofuncionais, os tratamentos são algoritmizáveis e têm como representação os sistemas de escrita. Eles podem aparecer também de forma não discursiva, a exemplo dos gráficos cartesianos.

Para apresentar os registros de representação semióticas necessários ao processo de conceitualização de proporção-porcentagem, tomamos como exemplo o problema 1, que faz parte dos Estudos II, III e IV da pesquisa que ora desenvolvemos. Este problema também será utilizado na discussão dos resultados, mais especificamente na apresentação da passagem do registro de representação de partida para o registro de representação de chegada.

*Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?*

#### **a) Registro verbal oral**

Denominamos registro verbal oral a fala do participante. Ao executar o registro verbal oral, o sujeito pensa sobre o objeto em questão. A fala sobre o objeto em estudo auxilia o professor-pesquisador a perceber se o aluno consegue identificar as variáveis em jogo, as quantidades e a incógnita, assim como as relações estabelecidas ou não. No caso da proporção-porcentagem, é possível identificar a relação que os alunos estabelecem com a centena e, ainda, se estabelecem relações entre a pergunta do problema e o resultado obtido. Em suma, o registro verbal oral oferece elementos para que se possa perceber se o sujeito compreende o significado da questão proposta. Ao se tratar de EJA, o registro

verbal oral pode se constituir numa valiosa fonte de informações para que os professores possam conhecer o que os alunos já sabem sobre o objeto de estudo.

De acordo com Vygotsky (1994), podemos dizer que o registro verbal oral é indispensável ao processo de conceitualização, porque a linguagem capacita os sujeitos a representarem mentalmente os objetos, as situações e os fenômenos do mundo que os rodeiam. Nesse sentido, o registro verbal oral é fundamental ao processo de sistematização dos conceitos sejam eles matemáticos ou não.

Nos termos de Duval (2003), trata-se de um registro multifuncional de representação discursiva em que o sujeito mobiliza os conhecimentos de que dispõe, para tratar do objeto em discussão. Não é novidade que muitos alunos de EJA respondem corretamente ao que é perguntado por uma série de problemas que lhes são propostos em sala de aula. Tomando como exemplo o problema indicado, é possível obter respostas como esta: “eu sei que o aumento é de sessenta reais, mas não sei fazer a conta”. Neste caso, “fazer a conta”, significa efetuar registros escritos utilizando-se exclusivamente de símbolos ou algoritmos matemáticos.

#### **b) Registro verbal escrito**

De acordo com a classificação proposta por Duval (2003), o registro em língua natural é um registro multifuncional de representação discursiva. Como o sujeito que o executa faz uso de regras gramaticais da língua materna para expressar as informações e indicar a incógnita, denominamos registro verbal escrito. Assim como no registro verbal oral, esse registro não garante que o sujeito reconheça o objeto representado num registro matemático. Muitas vezes os alunos utilizam o registro verbal escrito, combinado com o registro de representação numérico. Neste caso, podemos dizer que se trata de um registro de representação semiótica misto.

Uma forma de atribuir sentido e significado operatório para solucionar o problema dado como exemplo é tomar como ponto de partida a taxa percentual (30%), que significa 30 de cada 100. Como o salário era de 200, então o aumento seria de 60. Neste caso, o procedimento utilizado se dá pela estratégia escalar, utilizando os termos de Vergnaud (1983), e indica a compreensão do valor relativo da taxa percentual e, pela adição de parcelas iguais ou pela multiplicação, encontra o resultado matemático, o que possibilita responder à pergunta do problema.

### c) Registro de representação numérico

Para Duval (2003), o registro de representação numérico é um registro monofuncional de representação discursiva. Trata-se de efetuar o registro de representação constituído por números. Neste tipo de registro, o sujeito opera com os dados fornecidos pelo enunciado do problema, sem necessariamente se dar conta da possibilidade da existência de um registro algébrico. Neste tipo de registro não necessariamente o sujeito busca apoio ou referência fora do contexto do enunciado do problema, ou seja, ele já consegue estabelecer relações entre os dados fornecidos pelo enunciado do problema e operar algorítmicamente com os dados. Na dissertação de mestrado (Vizolli, 2001) destacamos que cada um dos registros de representação numérico possui especificidades, embora obedeçam a determinadas regras de significado e funcionamento, como, por exemplo, as da base dez. O registro de representação numérico pode aparecer de diferentes formas: fracionária, percentual, tabela de proporcionalidade e decimal.

Para exemplificar cada uma das variações do registro de representação numérico, tomamos como referência o problema 1 (já mencionado), no qual temos:

- a) Registro numérico na forma percentual 30% de 200;
- b) Registro de representação numérico na forma fracionária  $30/100$  de  $200 = 3/10$  de 200;
- c) Registro de representação numérico na forma decimal 0,3 de 200;
- d) Registro de representação numérico na forma de tabela de proporcionalidade

Taxa	Quantidade de referência
30	100
60	200

- e) Registro de representação numérico aritmético  $(200 \cdot 30) : 100 = 60$  ou  $(200 : 100) \cdot 30 = 60$ .

É importante que se anote que é possível encontrar registros de representação numérico com números fracionários ( $200 \cdot 30/100 = 6000 : 100 = 60$ ) ou decimais ( $200 \cdot 0,3 = 60$ ).

No registro de representação em tabela de proporcionalidade, o sujeito reconhece a relação entre a taxa percentual e a centena, alinhando seus valores absolutos em colunas que representam quantidades distintas (quantidade inicial –  $q_i$  e quantidade de transformação -  $q_t$ ), organizando os dados numa tabela constituída por duas colunas. Na dissertação de Mestrado (Vizolli, 2001), destacamos que a utilização do registro de

representação na forma de tabela facilita a compreensão e construção do registro de representação na forma de gráfico cartesiano.

No tocante aos procedimentos, trata-se de estabelecer a relação entre a taxa percentual e a centena, para depois comparar esta relação com a quantidade inicial fornecida pelo enunciado do problema com sua respectiva taxa percentual. Denominamos tal procedimento de *comparação*. Assim, 30% é 30 de 100, como são R\$ 200,00, então são R\$ 60,00. Neste tipo de procedimento, podemos encontrar também a *estratégia da adição de parcelas iguais* ( $30 + 30 = 60$ ) ou pela *multiplicação* ( $2 \cdot 30 = 60$ ) organizar em *partes* a quantidade inicial ou a taxa percentual. Quando solicitado que se efetue, no papel, o registro do procedimento utilizado, podemos encontrar também o registro de representação misto. No registro de representação por tabela de proporcionalidade, muitas vezes o sujeito consegue perceber as relações verticais e horizontais e por isso ele pode ser considerado um registro mais elaborado que o registro numérico aritmético. No registro de representação por tabela de proporcionalidade, é possível encontrar a aplicação do operador escalar e(ou) do operador função, identificados por Vergnaud (1983).

#### **d) Registro de representação geométrico**

Para Duval (2003), o registro de representação geométrico é um registro multifuncional de representação não-discursiva. Este tipo de registro de representação pode ser efetuado com o desenho de uma figura geométrica representando a centena, por exemplo, na qual se destaca a parte correspondente à taxa percentual. De acordo com Duval (1995), o registro de representação na forma geométrica necessita da reconfiguração. O tratamento de reconfiguração possui regras específicas de formação, que são diferentes das regras de formação dos registros de representação numérico. Ao se tratar de registro geométrico, é importante fazer a conversão passando pelo fracionário e, se for o caso, a equivalência das frações, chegando ao denominador 100, o que facilitará a percepção da porcentagem.

No caso do problema utilizado como exemplo, podemos efetuar o seguinte registro, no qual cada célula corresponde a 10 unidades e cada célula destacada corresponde a 10%.



### e) Registro de representação na forma de gráfico cartesiano

O registro de representação na forma de gráfico, de acordo com Duval (2003), é um tipo de registro monofuncional de representação não-discursiva. Este registro de representação pode conter variações: gráfico cartesiano; gráfico de setor; gráfico por linhas ou colunas. De qualquer forma, o registro gráfico exige que o sujeito controle, pelo menos duas variáveis; além do que, precisa perceber a proporção, para indicar os respectivos pares ordenados. Este registro de representação semiótica pode possibilitar ao sujeito perceber a proporção e identificar a lei de formação da função.

O exemplo que estamos utilizando pode ser representado pelo gráfico de colunas a seguir.

Quant. de transformação

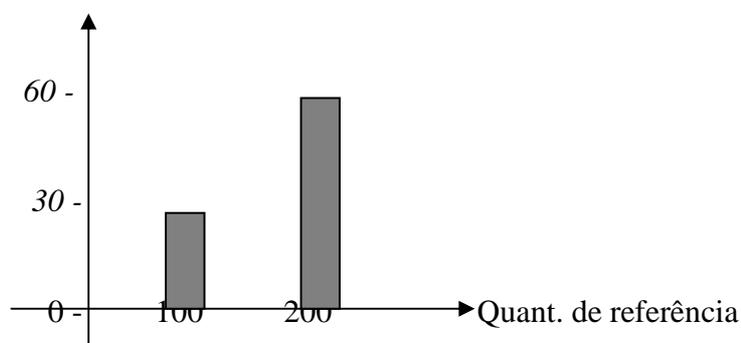


Figura 6 Gráfico de colunas representado porcentagem

### f) Registro de representação por equação

De acordo com Duval (2003), o registro de representação na forma de equação é um registro de representação monofuncional de representação discursiva e se trata de uma representação algébrica. Ele é constituído por uma sentença matemática aberta, expressa por uma igualdade. Neste caso, a variável “x” se constitui na incógnita e assume um único valor.

No caso do problema utilizado como exemplo, é preciso estabelecer as devidas relações entre as quantidades, reconhecendo a taxa percentual como um valor relativo. Assim, 30% é 30 de cada 100. Como o problema fornece a quantidade de referência (200), há que se estabelecer as devidas relações. Isso exige o reconhecimento da propriedade fundamental da proporção: o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, o que pode ser organizado numa tabela, assim:

Taxa	Quantidade de referência
30	100
x	200

Ao aplicar a propriedade fundamental da proporção, o sujeito se depara com a aplicação da regra de três.

$$30 \cdot 200 = 100 \cdot x$$

$$6000 = 100x$$

$$6000 : 100 = x$$

$$x = 60.$$

Os registros de representação algébricos não são tão triviais, eles requerem um domínio conceitual maior que os demais registros aqui elencados.

### **g) Registro de representação por função**

De acordo com Duval (2003), este registro também é do tipo monofuncional de representação discursiva. O registro de representação por função também pode ser visto como um modelo matemático. Neste caso o procedimento utilizado leva o sujeito a tratar com as regras de significado e funcionamento do tratamento dispensado à função. Este é um tipo de registro de representação bastante sofisticado. No registro de representação por função, o sujeito que o executa consegue estabelecer as devidas relações entre os dados e as informações contidas no enunciado do problema e estabelece generalizações que o permitem operar algebricamente, inclusive estabelecer um modelo matemático. Pode-se dizer que este tipo de registro de representação é o tipo ideal quando se leva em conta o processo de conceitualização. Damm (1998) apresentou um modelo que pode ser utilizado aqui. Vejamos:  $qt = (qi \times p) : 100$

Para o problema 1, que estamos utilizando como exemplo, temos o seguinte modelo:

$$qt = (200,00 \times 30) : 100$$

$$qt = 6000,00 : 100$$

$$qt = 60,00$$

A partir da taxa percentual, também é possível estabelecer a função. Neste caso, tem-se uma taxa de 30%, a qual é utilizada para estabelecer uma lei matemática ou função. Assim,  $f(x) = 30\%x$  ou  $f(x) = 30x/100$  ou  $f(x) = 0,3x$ , onde  $f(x)$  é quantidade de transformação e “x”, a quantidade referência.

Ao apresentarmos os registros de representação semiótica necessários ao processo de conceitualização de proporção-porcentagem, é possível identificar algumas das idéias matemáticas que ela comporta.

### **3.3. Idéias matemáticas que a proporção-porcentagem comporta**

Ao analisar os registros de representação semiótica necessários à compreensão conceitual de proporção-porcentagem, podemos identificar uma série de idéias matemáticas. Tomamos novamente o problema 1 (que faz parte dos Estudos II, III e IV desta pesquisa) como exemplo, para melhor nos orientar.

*Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?*

Ao analisarmos o problema vemos que o enunciado oferece a quantidade inicial –  $q_i$  (200), a taxa percentual – 30% e a incógnita reside na quantidade de transformação –  $q_t$ . Há que se estabelecer relações entre os dados que o enunciado fornece e destes com o que foi perguntado. Assim, em 30%, existe relação entre 30 e 100, entre 100 e 200, assim como entre 30% e 200. Tem-se, portanto, relações entre relações, o que caracteriza a proporção.

Quando falamos que 30% significa 30 em 100, temos a idéia de **razão**. Esta palavra vem do latim *ratio*, que significa **divisão**. Ela indica a **comparação** entre partes, cujas razões se mantêm constante. No caso do problema utilizado como exemplo, temos a  $q_i = 200$ , pela **equivalência**  $30\% = 30/100 = 60/200 = 0,3$ . Quando comparamos 30 com 100, efetuando a divisão, encontramos 0,3, que é a razão, a qual se mantêm, quando comparamos 60 com 200. De outro modo podemos dizer que  $30\% = 30$  em 100, o que **equivale** a 60 em 200.

Na **divisão** temos a idéia de **partição** e de **quotas** (Vergnaud, 1983). Na **divisão por partição**, 30% significa 30 em cada 100, como 200 são dois 100, temos dois 30, o que resulta em 60. Pela segunda idéia (divisão por quota), quantos 100 são necessários para compor 200? Dois. Então precisa-se também de dois 30, logo, 60. Em ambos os casos respeita-se a **proporção**.

Um dos significados do termo **comparação** trata do ato ou efeito de confrontar, cotejar. Assim, 30% tem o mesmo significado que 30 de cada 100 (fração), que é **equivalente** a 60 quando a quantidade de referência é 200. É o mesmo que 30 em 100 ou 60 em 200.

A **equivalência** é uma qualidade de equivaler. Ela subjaz o princípio da igualdade, mas não significa igual. É aquilo que apresenta o mesmo valor, respeitando-se a proporcionalidade. Assim, 30% = 30 de cada 100, que é equivalente a 60 de 200. Assim como na comparação, a razão entre as partes se mantém.

Na **proporção**, encontramos a comparação entre duas quantidades cujas razões se mantêm constantes. Assim, 30% = 30 : 100 = 60 : 200 = 0,3. 30% significa 30 de 100, que é equivalente a 60 de 200 ou em outros termos, a igualdade entre duas razões.

Além de sua propriedade característica fundamental: *o produto dos meios é igual ao produto dos extremos*, a proporção possui outras duas propriedades muito importantes: *a soma ou diferença dos antecedentes está para a soma ou a diferença dos conseqüentes, assim como cada antecedente está para seu conseqüente e o produto dos antecedentes está para o produto dos conseqüentes, assim como o quadrado de cada antecedente está para o quadrado do seu conseqüente.*

Pelos dados do problema utilizado como exemplo, a propriedade fundamental pode ser assim representada:

$$\frac{30}{100} = \frac{60}{200}$$

$$30 \cdot 200 = 60 \cdot 100$$

A propriedade da soma ou diferença pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\frac{30}{100} = \frac{60}{200}$$

$$= \frac{30 \pm 60}{100 \pm 200}$$

A propriedade do produto pode ser representada assim:

$$\frac{30}{100} = \frac{60}{200}$$

$$\frac{30 \cdot 60}{100 \cdot 200} = \frac{302}{1002} = \frac{602}{2002}$$

Quando comparamos, podemos estabelecer **relação de correspondência**, isto é, associamos elementos de um conjunto a elementos de outro conjunto. Assim, em 30%, associa-se 30 com 100, ou 30 corresponde a 100 e 60 com 200, ou 60 corresponde a 200. Mantêm-se a razão e a proporcionalidade.

**Relação** é uma conexão entre duas grandezas. Assim, 30% apresenta conexão com 60/200. Podemos também estabelecer uma comparação entre duas quantidades que possuem vínculo (comensuráveis). Assim, 30% é uma comparação entre 30 e 100, entre 100 e 200, entre 30% e 200, assim como entre 60 e 200. É interessante perceber que, nestas relações, a razão e a proporção se mantêm.

Ao compararmos a parte com seu todo, temos um das idéias da **fração**. Assim,  $30\% = 30/100$ , aqui o 100 foi tomado como o todo. Como são 200, temos a comparação entre a outra parte e seu todo, assim  $30/100$ . Unindo-se as partes de cada um dos todos, tem-se 60. Diferentemente da razão, em que a comparação se estabelece entre partes de um mesmo todo. Quando falamos 30 de cada 100, temos a idéia da porcentagem como fundamental.

Outra idéia que a fração congrega é a de **divisão**, neste caso, quociente entre o numerador e o denominador de uma fração. Assim,  $30\% = 30 : 100 = 0,3$ . 30% é equivalente a três **décimos**, logo  $0,3 = 3/10 = 30/100 = 60/200$ . Isso nos dá a idéia de que a proporção-porcentagem comporta o conceito de **números decimais**.

O quociente, razão, resultante da divisão do numerador pelo denominador de uma fração, se constitui num **coeficiente de proporcionalidade**. No problema utilizado como exemplo, temos:  $30\% = 30/100 = 0,3$ , como a quantidade de referência é 200, temos  $0,3 \times 200 = 60$ .

Nos termos de Vergnaud (1983), temos os **operadores escalar e funcional**. O **operador escalar** faz a passagem de 30 para 100 ou de 60 para 200. Quando estabelecemos relação entre 30 e 60, ou entre 100 e 200, temos o **operador função**.

A proporção-porcentagem pode ser vista como uma expressão algébrica expressa por uma igualdade; neste caso, trata-se de uma **equação** ou **função**.

Na **equação**, o valor a ser descoberto ou a pergunta feita no enunciado se constitui na incógnita. Pelo exemplo que estamos apresentando, 30% de 200, pode ser expresso da seguinte maneira:

$$30/100 = x/200$$

$$0,3 = 0,005x$$

$$0,3 : 0,05 = x$$

$$x = 60.$$

Note que se mantém a idéia da razão, da fração, da proporção, da comparação, da equivalência, entre outras.

Na **função** estabelecemos uma relação entre duas variáveis. Assim:  $f(x) = 30\%x$  ou  $f(x) = (30/100)x$  ou  $f(x) = 0,3x$ . Para  $x = 200$ , temos:  $f(200) = 0,3.200 = 60$ . Numa função  $x$  é a variável independente e  $f(x)$ , a variável dependente. A variável assume diferentes valores, dependendo da lei que rege a relação.

Ao atribuímos um tratamento matemático ao problema tomado como exemplo, deparamo-nos com a **multiplicação** como um **produto entre duas quantidades**, ou mesmo como uma **soma de parcelas iguais**. 30% de 200 é igual a  $(30/100) \cdot 200 = 6000/100 = 60$  ou  $30\% = 30/100$ , como são 200, temos dois 100, logo,  $30 + 30 = 60$ . Mantém-se a idéia da razão e da proporção.

No processo de escolarização, a comunicação entre os alunos e professores perpassa pelas estratégias que são utilizadas para solucionar um dado problema, neste caso, de matemática. A comunicação, seja pela fala, seja pela escrita, constituem formas de objetivação do pensamento.

As idéias matemáticas que o conceito de proporção-porcentagem comporta nos permitem analisá-la no campo conceitual das estruturas multiplicativas (Vergnaud, 1983).

### **3.4.A proporção-porcentagem como estrutura multiplicativa**

Para Vergnaud, o campo conceitual das estruturas multiplicativas envolve as operações de multiplicação, divisão, fração, razão, proporção e similaridade. Segundo Vergnaud (1983, p. 127), “Um campo conceitual é um campo de problemas e situações para tratar de conceitos interconectados e representações, fatores que estão estreitamente interligados.”

Embora estas estruturas possuam organizações intrínsecas, dependem das estruturas aditivas e vão sendo construídas ao mesmo tempo. Para compreendê-las, é necessário o domínio de diferentes relações que se estabelecem de forma interconectada em outros campos conceituais. O quadro teórico dos campos conceituais permite estudar a

organização das idéias, que são interconectadas, a sua conceitualização como sistema de representações.

De acordo com o autor (1983), nas relações entre o real e a representação conceitual e pré-conceitual, temos a representação do real. A representação do real é formada de categorias organizadas e hierarquizada, na qual o sujeito encontra as propriedades, as relações e as transformações dos objetos singulares do real. A significação (conceitualização) da representação passa pela atribuição de significado (conteúdo da representação) do significante (representação). Por isso, a conceitualização e as representações estão interconectadas.

De acordo com o autor (1983), existem três formas de relações multiplicativas: isomorfismo de medidas, produto de medidas e múltipla proporção.

A estrutura do “isomorfismo de medidas” consiste na proporção direta entre duas medidas; descreve situações de proporção direta; pode ser representada por uma tabela de simples correspondência e modelada pela função linear  $f(x) = ax$ . Os problemas de isomorfismo de medidas apresentam uma relação entre quatro quantidades em que duas são de um tipo e duas são de outro.

Ao observarmos o problema 1 do Estudo I: *Numa eleição em que 3.500 pessoas votaram, um candidato obteve 60% dos votos. Qual é o número de votos que esse candidato obteve?* Tem-se uma relação entre quatro termos, nos quais duas quantidades referem-se à “taxa percentual de votos” e as outras duas referem-se ao “número de votos”. O enunciado apresenta duas quantidades (taxa percentual de votos e quantidade total de votos) e, ao fazer a pergunta, informa a incógnita; no entanto, a taxa percentual relativa ao todo (100%) está implícita. Esta situação pode ser representada pelo Diagrama III, a seguir, o qual pode ser considerado o que Duval (1993; 1995; 2003) denomina representação intermediária.

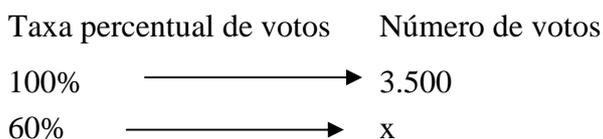


Figura 7 Representação intermediária do problema 1

Ainda de acordo com Vergnaud (1983), os problemas de “produto de medidas” congrega problemas multiplicativos de relação ternária, ou seja, problemas que apresentam três quantidades em que uma é produto das outras duas. Essa estrutura pode ser



comprimento, “l” a largura e “h” a altura. Como o produto de “c” e “l” significa a área ou superfície de um quadrilátero e pode ser expressa pela lei matemática “ $f(s) = c \times l$ ”, a lei ou fórmula matemática do volume de um prisma retangular regular pode ser expressa assim: “ $f(v) = f(s) \times l$ ”, onde “ $f(s)$ ” representa a superfície de um quadrilátero. É interessante registrar que as dimensões (comprimento, largura e altura) são medidas lineares (uma dimensão), enquanto o produto de duas delas resulta numa medida de superfície (duas dimensões) e o volume de um prisma retangular regular congrega as três dimensões.

O tratamento dos problemas de estruturas multiplicativas envolve um conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar as situações, além de um conjunto de representações. No caso dos problemas de isomorfismo de medidas, segundo Vergnaud (1983), encontram-se quatro tipos: multiplicação simples, divisão por partição, divisão por quota e quarta proporcional, que podem ser representados de acordo com a Figura 8, a seguir. Neles, “x” representa a incógnita.

<b>Multiplicação simples</b>		<b>Divisão por partição</b>		<b>Divisão por quota</b>		<b>Quarta proporcional</b>	
M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2
<b>1</b>	<b>f(1)</b>	<b>1</b>	<b>x = a</b>	<b>1</b>	<b>a</b>	<b>a</b>	<b>f(a)</b>
<b>b</b>	<b>x = f(b)</b>	<b>b</b>	<b>f(b)</b>	<b>x = b</b>	<b>f(b)</b>	<b>b</b>	<b>x = f(b)</b>

Figura 8 Representação dos quatro tipos de problemas de estrutura multiplicativa

Os problemas elementares de multiplicação ou divisão apresentam a unidade como referência explícita de seu valor. Os problemas de quarta proporcional remetem aos casos gerais de proporção; isso significa dizer que os problemas elementares também podem ser vistos como problemas de quarta proporcional. Tanto os problemas elementares de multiplicação como os casos gerais apresentam relações quaternárias em que se estabelece relação entre os três termos, que são aqueles explícitos e que o quarto termo se constitui na incógnita.

Dependendo da posição da incógnita “x”, pode-se, conforme Vergnaud (1983), ter quatro situações distintas, com custos cognitivos diferentes e que implicam diferentes operações de pensamento. Na primeira situação têm-se os termos “a”, “f(a)” e “b”, a incógnita “x” recai em “f(b)”; na segunda situação têm-se os termos “a”, “b” e “f(b)” e a

incógnita “x” recai em “f(a)”; na terceira situação têm-se os termos “a”, “f(a)” e “f(b)”, a incógnita “x” recai em “b”; na quarta situação têm-se os termos “f(a)”, “b” e “f(b)” e a incógnita “x” recai em “a”. Essas quatro situações podem ser representadas pela Figura 9, a seguir.

Primeira situação		Segunda situação		Terceira situação		Quarta situação	
M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2
<b>a</b>	<b>f(a)</b>	<b>a</b>	<b>x = f(a)</b>	<b>a</b>	<b>f(a)</b>	<b>x = a</b>	<b>f(x) = f(a)</b>
<b>b</b>	<b>x = f(b)</b>	<b>b</b>	<b>f(b)</b>	<b>x = b</b>	<b>f(b)</b>	<b>b</b>	<b>x = f(b)</b>

Figura 9 Representação das situações de acordo com a incógnita

### Multiplicação simples

A Figura 10, a seguir, proposto por Vergnaud (1983, p. 129), ilustra o isomorfismo de medidas para a multiplicação simples.

M1	M2
1	a
b	x

Figura 10 Representação dos problemas de isomorfismo de medidas para a multiplicação simples

Como os problemas de multiplicação consistem na relação de quatro termos em que se extrai uma relação de três, eles podem ser resolvidos por uma regra binária de composição ou uma operação única em que, ao multiplicar “a” por “b” ou vice-versa, tem-se o valor de “x”, ou seja, “a . b = x”.

Na composição binária há o reconhecimento da situação multiplicativa, na qual os termos “a” e “b” devem ser vistos como números e não como grandezas. Pode-se usar um “operador escalar”, ao estabelecer uma relação vertical, (a → x). O operador escalar que conecta “1” em “b”, em M1, é transposto para M2, fazendo-o conectar “a” em “x”. O esquema semântico, a seguir, representa essa situação. Nesse esquema, “xb” é um operador escalar em que não se tem dimensão, mas estabelece uma relação entre as quantidades ou magnitudes do mesmo tipo, n vezes, n vezes menos. É uma razão que indica a proporção entre duas grandezas.

A Figura 11 que representa o operador escalar, a seguir, proposto por Vergnaud (1983, p. 130), elucida o que estamos dizendo.

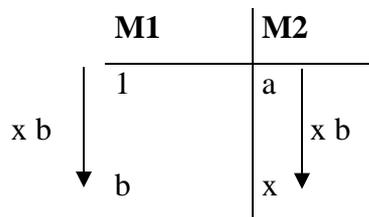


Figura 11 Operador escalar na multiplicação simples

Pode-se usar o operador funcional que indica a relação  $(b \rightarrow x)$  e conecta 1 com a, conforme indica o esquema semântico a seguir. O operador funcional “xa” (x indicando produto) estabelece a relação horizontal, indicando que a razão “a” na função  $f(1) = a$  é a mesma da função  $f(b) = x$  (x indicando grandeza de M2). Podemos também dizer que o operador “xa” representa um coeficiente de função linear de M1 em M2, que resulta do quociente “x” de M2 por “b” de M1, ou seja, “x” : “b” = “a”. O operador funcional leva em consideração as dimensões envolvidas. Isso pode ser percebido na Figura 12, proposto por Vergnaud (1983, p. 130), a seguir.

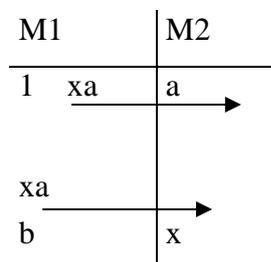


Figura 12 Operador funcional na multiplicação simples

Ainda, de acordo com Vergnaud (1983), os problemas de multiplicação simples, pelas crianças, podem ser resolvidos por uma operação unívoca usando o operador escalar ou o operador função.

### Divisão por partição

Na divisão por partição procura-se a unidade de valor “f(1)”, conforme indicado na Figura 13, a seguir, proposto por Vergnaud (1983, p. 131). A pergunta que se pode fazer aqui é a seguinte: quantos “a” tem em “f(b)”?

M1	M2
1	$x = a = f(1)$
b	$f(b)$

Figura 13 Operador funcional na multiplicação simples

A classe de problemas de “divisão por partição” pode ser resolvida aplicando-se um operador escalar “:b” (b é divisor) para se obter a grandeza “f(b)” de M2. O operador escalar “:b” estabelece a relação vertical ( $b \rightarrow 1$ ) em M1 e ( $f(b) \rightarrow x$ ) em M2. A Figura 14, a seguir, proposto por Vergnaud (1983, p. 131), representa essa situação.

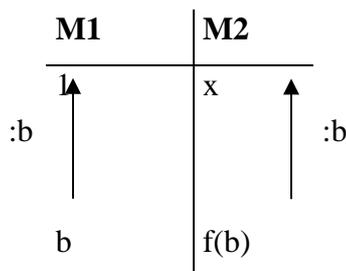


Figura 14 Operador escalar na divisão por partição

A inversão da relação “xb” (produto) para “:b” (quociente) não é uma tarefa fácil para as crianças, por isso é comum encontrar “x”, de forma que o produto entre “x” e “b” resulte em “f(b)”. É comum encontrar o coeficiente multiplicativo por meio de adições sucessivas para obter o operador escalar “xb”, ou o coeficiente quociente por meio de subtrações sucessivas para obter o operador escalar “:b”. Isso responde à pergunta: quantos “a” tem em “f(b)”? Outro procedimento é a distribuição um a um, ou ainda por analogia.

### Divisão por quota

A Figura 15, a seguir, proposto por Vergnaud (1983, p.132), indica que a incógnita recai em “b” de M1, conhecendo-se “f(b)” e “f(1) = a”. Aqui a pergunta que pode ser feita é a seguinte: quantas vezes “a” cabe em “f(b)”? Ou ainda, quantas vezes “a” está contido em “f(b)”?

M1	M2
1	$a = f(1)$
x	$f(b) = f(x)$

Figura 15 Divisão por quota

Nos problemas de divisão por quota inverte-se o operador da função direta “xa” (produto), aplicando-se o operador “:a” (quociente) aplicando-o em “f(b)” para obter “b = x”. A relação horizontal na Figura 16, a seguir, proposto por Vergnaud (1983, p. 132), representa o operador escalar “:a”.

M1	M2
1	:a
x	a
x	:a
x	$f(b) = f(x)$

Figura 16 Operador escalar na divisão por quota

A inversão não é uma tarefa fácil, porque o operador inverso tem a dimensão inversa, o que exige transpor o operador “:a” de M2 para M1, ou ainda, invertê-lo. O procedimento de inverter o operador não é uma tarefa fácil principalmente porque a inversão tem uma dimensão. Muitas vezes, com valores pequenos, opera-se com o procedimento escalar por adições sucessivas (a + a + a + ...) até que se obtenha “f(b)”. É o número de vezes que “a” cabe em “f(b)”, isso responde a pergunta: quantas vezes “a” cabe em “f(b)”?

#### Quarta proporcional – problema de regra de três: caso geral

A Figura 17, a seguir, proposto por Vergnaud (1983, p. 133), ilustra o caso geral dos problemas de regra de três ou quarta proporcional.

M1	M2
a	$f(a)$
b	$x = f(b)$

Figura 17 Problemas de regra de três em um caso geral.

Os problemas de quarta proporcional têm, em sua estrutura, quatro termos. Eles podem ser resolvidos por diversos procedimentos, a partir da relação entre os quatro termos, conhecendo-se três deles.

De acordo com Vergnaud (1983, p. 133), nessa classe de problemas é comum utilizar as propriedades isomórficas da função linear e, menos comum, a propriedade de coeficiente proporcional. Isso ocorre porque as propriedades do isomorfismo de medidas (função linear) envolvem duas variáveis enquanto as propriedades das funções não-lineares envolvem três variáveis.

Propriedades isomórficas da função linear:

$$f(x + x') = f(x) + f(x')$$

$$f(x - x') = f(x) - f(x')$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

$$f(\lambda x + \lambda x') = \lambda f(x) + \lambda f(x')$$

*Propriedade padrão de coeficiente proporcional*

$$f(x) = ax$$

$$x = Maf(x)$$

Os problemas de proporção-porcentagem com que nos deparamos diariamente versam sobre diferentes temas ou assuntos e muitas vezes necessitamos de conhecimentos mais acurados para encontrar respostas às perguntas que nos desafiam, nos intrigam ou nos instigam. Como os problemas de proporção-porcentagem apresentem relações entre quatro termos e um deles é constante – a centena, podem ser vistos como problemas de estrutura multiplicativa conforme descreve Vergnaud (1983). A existência dessa constante é que diferencia os problemas de proporção-porcentagem dos problemas elementares de multiplicação e mesmo de proporção. Embora haja tal diferença, os problemas de proporção-porcentagem consistem de uma proporção direta ou de uma proporção simples, nas quais, as duas variáveis dependem linearmente uma da outra; por isso eles podem ser analisados como casos gerais de proporção com estrutura de isomorfismo de medidas. Nos problemas de proporção-porcentagem as quantidades (inicial ou de referência, final e de transformação) e a taxa percentual, constituem as duas variáveis que dependem uma da outra.

Para que os alunos compreendem os objetos matemáticos em nível conceitual, outro elemento entra em cena, o professor, que propicia as condições para que os alunos acedam ao objeto de conhecimento. De acordo com Duval (1993), no ensino de

matemática, os objetos do conhecimento não são manipuláveis ou fisicamente observáveis, daí a necessidade da utilização de signos ou símbolos para compor os registros de representação semiótica que representam os objetos matemáticos.

Os signos e os símbolos, assim como os registros de representação semiótica, passam a ser instrumentos que permitem o acesso ao objeto do conhecimento. Como os signos e os símbolos, os registros de representação semiótica também são criações da espécie humana, eles fazem parte de nossa cultura. Ao serem difundidos, eles são (re)criados pelas pessoas e passam a ser utilizados como forma de comunicação. Nesse processo de transmissão, o outro (entendido como pessoa) assume papel fundamental: o de mediador. Em outros termos, estamos falando da mediação semiótica de que nos fala Vygotsky (1994).

## **4. OS CAMINHOS PERCORRIDOS PARA A REALIZAÇÃO DA PESQUISA**

Na apresentação desta tese mencionamos a realização de quatro estudos, os quais passamos a descrevê-los. Cabe inicialmente destacar que os Estudos I e II foram realizados com alunos de 3º Ciclo (equivalente a 5ª e 6ª séries do ensino fundamental) do curso de EJA/UNIVALI; o Estudo III foi realizado com o professor de matemática e a professora mediadora deste curso e; o Estudo IV foi realizado com alunos do 4º Ciclo (equivalente a 7ª e 8ª séries do ensino fundamental).

### **4.1. Os participantes da pesquisa**

O Estudo I foi realizado com três alunos que freqüentavam o curso no *campus* da UNIVALI, em Itajaí, SC período vespertino (duas pessoas do sexo feminino e uma do sexo masculino). As duas pessoas do sexo feminino são funcionárias da universidade. O Estudo II foi realizado com uma dupla de alunos que freqüentavam o curso no campus da UNIVALI, em Penha, SC, e estudavam no período noturno (uma pessoa do sexo feminino e uma pessoa do sexo masculino). O estudo III foi realizado com uma dupla de professores que lecionavam no curso de EJA no campus da UNIVALI, em Balneário Camboriú (um do sexo feminino – mediadora – e um do sexo masculino – professor de matemática). O estudo IV foi realizado com quatro duplas de alunos que freqüentavam o curso no campus de Balneário Camboriú e estudavam no período noturno (uma dupla composta por pessoas do sexo feminino e três duplas compostas por uma pessoa do sexo feminino e uma do sexo masculino).

Registramos que os professores participantes desta pesquisa lecionavam para os alunos da classe em que foi realizado o Estudo IV e que o professor de Matemática atuava também em classes de 5º Ciclo (Ensino Médio).

Para preservar a identidade dos participantes, optamos por registrar nos protocolos das transcrições, assim como nas citações de suas falas ou registros efetuados, letras maiúsculas e minúsculas de nosso alfabeto seguidas por suas respectivas idades (anos, meses – Estudos II, III e IV). As letras maiúsculas referem-se à identificação dos

participantes e as minúsculas ao sexo (m – masculino e f - feminino). Registramos que 15 pessoas participaram deste estudo, sendo 13 alunos e dois professores e suas idades variavam entre 16 e 54 anos. A identificação de cada um dos participantes nos respectivos estudos consta na Tabela 18, a seguir.

	<b>Estudo I</b>	<b>Estudo II</b>	<b>Estudo III</b>	<b>Estudo IV</b>	<b>Total</b>
<b>Alunos</b>	PAm, PBf e PCf	Jm(16;1) e Cf(23;5)		EPm(22; 11) e LAF(35; 05), GAm(54; 00) e STf(45;08), SCf(54;11) e ELm(37;11), AAf(38;04) e EFf(25;08)	<b>13</b>
<b>Professores</b>			PMm(43;7) e MGf(37;10)		<b>2</b>
<b>TOTAL GERAL</b>					<b>15</b>

Figura 18 Identificação dos participantes

#### 4.2.A escolha dos participantes da pesquisa

A UNIVALI oferecia o curso de EJA (Educação Básica) nos campi de Itajaí, Penha, Balneário Camboriú, Bigauçu, São José e Balneário Piçarras, este em convênio com a prefeitura municipal. Nos campi de Itajaí, Penha e Balneário Camboriú, havia classes de alunos de 3º e 4º ciclos, o que nos levou a fazer a opção por desenvolver a pesquisa com alunos regularmente matriculados nesses campi.

No Estudo I, inicialmente tínhamos a idéia de escolher aleatoriamente os alunos que participariam diretamente da pesquisa. Mas, dado o fato que muitos deles estavam trabalhando em equipe (fato corriqueiro em face dos encaminhamentos da proposta metodológica que norteia o trabalho de EJA pela instituição), foi necessário pensar em outra maneira. No dia em que coletamos os dados, apenas sete alunos fizeram-se presentes

nas aulas e alguns deles estavam trabalhando em equipes, optamos por observar mais sistematicamente aqueles que solucionaram os problemas individualmente – três alunos.

Como um dos encaminhamentos metodológicos da proposta pedagógica da EJA/UNIVALI orienta que os alunos devem trabalhar em equipes, no Estudo II, optamos por solicitar que os alunos, organizados em duplas, solucionassem os problemas propostos.

Antes mesmo de marcarmos a data da realização da entrevista, os alunos foram convidados pela professora responsável pelo núcleo e pela professora mediadora a participar da pesquisa. No dia que antecedeu a realização da entrevista, os alunos deram início à Avaliação Programada<sup>11</sup>, mas nem todos conseguiram concluir. Como alguns haviam concluído, foi solicitado que viessem até ao campus da universidade especialmente para a realização da entrevista. Somente dois desses alunos se dispuseram a participar, mas somente um compareceu ao local. Diante disso, o pesquisador, juntamente com a professora responsável pelo núcleo do EJA e a professora mediadora, dirigiram-se à sala de aula, onde se expôs novamente os objetivos do trabalho. Prontamente dois alunos se dispuseram a participar e, ao mencionarmos que o trabalho seria gravado em vídeo, um desses alunos se mostrou constrangido e não quis participar. Realizamos então a entrevista com o aluno que veio especialmente para esta finalidade e o aluno que estava desenvolvendo as atividades da Avaliação Programada (a qual ficou para ser concluída no dia seguinte) e se dispôs a colaborar, aceitando que as conversas fossem gravadas.

Outro encaminhamento metodológico da proposta pedagógica do curso de EJA/UNIVALI é que, além da presença do professor de cada disciplina, existe o professor mediador. Como esses professores juntos orientam os alunos no desenvolvimento das atividades, no Estudo III, optamos por solicitar que o professor mediador e o professor de matemática participassem da pesquisa.

Como a professora mediadora que participou do Estudo III acompanhava uma classe de alunos desde o 2º Ciclo e Aprendizagem, optamos por desenvolver o Estudo IV com alunos desta classe.

---

<sup>11</sup> No final de cada tema é feita uma Avaliação Programada como forma de verificar o que os alunos assimilaram do tema. Não se trata de uma “prova” no sentido estrito, trata-se de uma verificação da aprendizagem, para que, se for o caso, propor novas discussões e/ou novas tarefas para que os conceitos não construídos pelos alunos possam ser retomados ou (re)discutidos, não da mesma forma como aconteceu na primeira vez.

### **4.3. Os procedimentos de coleta de dados**

No estudo I, a coleta de dados e informações foi feita na primeira semana de novembro de 2003 e aconteceu em dois momentos: no primeiro, solicitamos que todos os alunos resolvessem individualmente os problemas propostos, fazendo uso de registros na forma verbal escrita ou numérica.

Para obter mais dados e informações a respeito dos procedimentos adotados no processo de solução dos problemas, tínhamos a intenção de gravar em áudio as conversas realizadas com os participantes. Ao falarmos que as conversas seriam gravadas, alguns alegaram que não gostavam de ouvir sua voz no gravador; e outros fizeram expressões faciais de restrições, como, por exemplo, baixar o olho e ofuscar o semblante. Diante dessa negativa, optamos por realizar uma conversa individual com os alunos escolhidos. À medida que o pesquisador conversava com os participantes, fazia o registro de suas falas escrevendo com lápis em papel. Tanto o registro efetuado pelos participantes como as conversas compõem o protocolo das transcrições (Anexo I).

A coleta de dados para o Estudo II foi realizada no dia 24 de maio de 2004. Anteriormente foi contactado com a professora responsável pelo núcleo e a professora mediadora da turma e expuseram-se os objetivos da pesquisa. Solicitamos que conversassem com os alunos, expusessem o assunto, a forma de como aconteceria o trabalho e os convidassem a participar da entrevista. A entrevista com a dupla de alunos foi totalmente gravada em áudio e vídeo e depois transcrita. A transcrição dos dados brutos encontra-se no Anexo II.

Da mesma forma que no Estudo II, a entrevista com os professores também foi realizada em dupla. Com estes, a entrevista aconteceu no dia 10 de setembro de 2004, nas dependências da Universidade, campus de Itajaí, após a reunião para o planejamento das aulas para a semana de 13 a 16 do mês indicado. A entrevista foi totalmente gravada em áudio e vídeo e depois transcrita. A transcrição encontra-se no Anexo III.

Antes mesmo de organizar a entrevista, o pesquisador havia conversado informalmente com os professores sobre o desejo de realizar a pesquisa junto aos alunos da classe em que lecionavam e contar também com a colaboração, tanto de seus alunos quanto à deles, na qualidade de participantes, o que prontamente foi aceito.

No período em que antecedeu a realização da entrevista, novamente o pesquisador conversou com os professores sobre seu projeto de pesquisa e o desejo de que eles e seus alunos participassem. Dessa vez, falou sobre os objetivos da pesquisa e alguns aspectos relativos ao método e aos instrumentos a serem utilizados na coleta de dados. Ao iniciar a entrevista, o pesquisador solicitou que os professores participassem da análise dos dados de suas entrevistas, como também na execução e análise das entrevistas com seus alunos.

A realização da entrevista para a coleta de dados com as 04 (quatro) duplas de alunos do Estudo IV aconteceu nos dias 20, 21 e 27 de setembro de 2004, nas dependências da UNIVALI, *campus* de Balneário Camboriú, durante o período noturno, período em que aconteciam as aulas.

No primeiro dia, o pesquisador conversou com os alunos, informando os objetivos da pesquisa e o método a ser utilizado na realização das entrevistas, (gravação em áudio e vídeo). Onze alunos se dispuseram a participar. Muitos dos alunos desta classe, entre eles, alguns dos que se dispuseram a participar da pesquisa manifestaram que possuíam dificuldades com a matemática. Houve manifestações de que a rotatividade no horário de seu trabalho prejudicava a participação regular nas aulas e de alunos que não se sentiam à vontade diante de gravações. Além disso, o pesquisador só era conhecido como professor de EJA, mas não trabalhava com estes alunos.

Mesmo informados que nas transcrições e análises a identificação seria feita por meio de letras maiúsculas de nosso alfabeto, seguidas por suas idades (anos e meses), aqueles que se mostraram reticentes não se sentiram seguros em participar. Três dos alunos que se dispuseram a participar, no terceiro encontro, manifestaram o desejo de que seus nomes fossem retirados da lista, alegando que não se sentiam à vontade em responder às perguntas; por isso a entrevista foi realizada com quatro duplas (oito alunos).

Com o intuito de não constranger os alunos, optou-se por fazer tomadas de algumas imagens da classe e dos participantes da pesquisa, mas garantiu-se a gravação em áudio de todas as conversas realizadas com as duplas. Os dados brutos tanto das conversas como os registros efetuados pelos participantes constam do Anexo IV.

Para a realização das entrevistas, cada uma das duplas de alunos foi encaminhada pela professora mediadora, de acordo com a ordem com que iam concluindo as atividades que estavam sendo desenvolvidas em sala de aula. Isso indica que não houve uma definição prévia sobre os critérios para a formação das duplas e sim que e foram sendo definidos em função das atividades de sala de aula.

Já no primeiro encontro, dia 20, realizamos a entrevista com a primeira dupla de alunos. No dia seguinte, realizamos a entrevista com a segunda e terceira dupla; uma semana depois do primeiro encontro, realizamos a entrevista com a quarta dupla de alunos.

Registra-se que ordem dos problemas apresentados aos participantes dos Estudos I, II e III obedeceu à ordem numérica dada aos problemas. No Estudo IV, a primeira dupla resolveu, pela ordem, o problema 1, o problema 2 e finalmente o problema 3; a segunda dupla resolveu o problema 1, o problema 3 e o problema 2; a terceira dupla resolveu o problema 1, o problema 2 e o problema 3; a quarta dupla resolveu o problema 1, o problema 3 e finalmente o problema 2. Cabe registrar, também que não foi feito sorteio prévio para a ordem em que os problemas seriam apresentados aos participantes. Avaliamos que seria interessante apresentá-los em ordem diferente para não incorrer em vícios, mesmo porque, após as entrevistas os alunos tiveram tempo para conversar sobre os problemas.

Ao realizar as entrevistas, o pesquisador forneceu a cada participante folhas sulfite, cada uma delas contendo o enunciado de um problema escrito em registro verbal escrito, nas quais os participantes registraram suas respostas (cálculos efetuados). Ao entregar a primeira folha, o pesquisador solicitava que cada participante preenchesse os dados (seu nome, a data de nascimento e a data da realização da entrevista).

Em todas as entrevistas, à medida que os problemas iam sendo propostos, o pesquisador ou mesmo um dos participantes fazia a leitura de cada um, para que fossem esclarecidas possíveis dúvidas quanto ao entendimento dos dados e informações fornecidos. Em seguida, o pesquisador solicitava que escrevessem nas folhas os cálculos efetuados e conversava-se sobre o que e como haviam procedido para solucionar os problemas.

#### **4.4.Os instrumentos utilizados na coleta de dados**

Definido o objeto de estudo e estabelecidos os objetivos, realizamos o Estudo I, em que foram apresentados aos alunos três problemas de proporção-porcentagem que fizeram parte do pós-teste de nossa pesquisa realizada por ocasião do Mestrado (Vizolli, 2001). São eles:

#### **4.4.1. Os problemas**

##### **Problema 1**

Numa eleição em que 3.500 pessoas votaram, um candidato obteve 60% dos votos. Qual é o número de votos que esse candidato obteve?

##### **Problema 2**

Numa eleição em que 3.500 pessoas votaram, um certo candidato obteve 1.050 votos. Qual é a taxa percentual de votos desse candidato?

##### **Problema 3**

Numa eleição em que um certo número de pessoas votou, um candidato obteve 15% do total de votos e isso corresponde a 4.500 votos. Qual é o número total de votos nessa eleição?

Para o estudo II inspiramo-nos nos problemas clássicos analisados por Damm (1998); elaboramos sete problemas de proporção-porcentagem cujo tema tratava do cálculo de salário e solicitamos que uma dupla de alunos que os resolvessem. São eles:

##### **Problema 1**

Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?

##### **Problema 2**

Um trabalhador recebe um salário de R\$ 500,00 e está defasado em R\$ 200,00. Expresse essa defasagem na forma de taxa percentual.

##### **Problema 3**

O trabalhador de uma empresa que recebe salário tem direito ao Fundo de Garantia por Tempo de Serviço – FGTS, que é de 8% sobre o salário bruto (salário bruto é o valor total da folha de pagamento). Sabendo que o valor do FGTS que a empresa tem que depositar mensalmente é de R\$ 40,00, qual é o valor do salário bruto desse trabalhador?

**Problema 4**

O salário de um trabalhador era de R\$ 240,00 e sofreu um aumento de 10%. Qual é o valor do novo salário desse trabalhador?

**Problema 5**

Um trabalhador tem um desconto para o INSS de R\$ 40,00. Isso corresponde a 10% do valor de seu salário bruto. Qual é o salário líquido desse trabalhador (salário líquido é a quantidade de dinheiro que o trabalhador recebe já deduzidos os descontos)?

**Problema 6**

Um trabalhador deveria receber um salário de R\$ 500,00, mas recebe R\$ 400,00. Qual é a taxa percentual da perda salarial desse trabalhador?

**Problema 7**

Um trabalhador recebe um salário líquido de R\$ 540,00, mas desconta R\$ 60,00 para o INSS. Expresse o desconto para o INSS na forma de taxa percentual.

A entrevista em que os alunos precisavam solucionar sete problemas teve uma duração de 2 horas e 30 minutos e os alunos demonstraram cansaço. Diante dos objetivos estabelecidos para esta pesquisa, optamos em dar continuidade no trabalho de investigação com apenas três problemas, considerados por Damm (1998) como clássicos, porque exigem, para sua solução, uma ou duas operações. Escolhemos então apenas três problemas – aqueles que apresentam a mesma estrutura daqueles propostos para o estudo I. Por isso, nos estudos III e IV foram apresentados os três primeiros, dos sete problemas elaborados para o estudo II. São eles:

**Problema 1**

Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?

**Problema 2**

Um trabalhador recebe um salário de R\$ 500,00 e está defasado em R\$ 200,00. Expresse essa defasagem na forma de taxa percentual.

### **Problema 3**

O trabalhador de uma empresa que recebe salário tem direito ao Fundo de Garantia por Tempo de Serviço – FGTS, que é de 8% sobre o salário bruto (salário bruto é o valor total da folha de pagamento). Sabendo que o valor do FGTS que a empresa tem de depositar mensalmente é de R\$ 40,00, qual é o valor do salário bruto desse trabalhador?

#### **4.4.2. Caracterização dos problemas de proporção-porcentagem**

Ao analisar os problemas de proporção-porcentagem de Damm (1998), percebe-se que os números que compõem as quantidades são inteiros divisíveis por 5, inclusive as quantidades que se referem à taxa percentual. Em nenhum dos problemas apresentados pelo autor constam ou resultam em taxa percentual superior à centena.

Ao fazer uma caracterização dos problemas de proporção-porcentagem elaborados para esta pesquisa, valemo-nos dos modelos apresentados por Damm (1998); isso não significa dizer que sejam os únicos ou que não existam outras formas canônicas, cujas soluções exijam outros registros de representação semiótica.

### **Estudo I**

#### **Problema 1**

Numa eleição em que 3.500 pessoas votaram, um candidato obteve 60% dos votos. Qual é o número de votos que esse candidato obteve?

Neste tipo de problema são fornecidas a taxa percentual ( $p = 60\%$ ) e a quantidade inicial ( $q_i = 3.500$ ), a incógnita reside na quantidade de transformação ( $q_t$ ).

Ao tomar como referência o tratamento proposto por Damm (1998), tem-se:

$$q_t = (q_i \times p) : 100$$

$$q_t = (3.500 \times 60) : 100$$

$$q_t = 210.000 : 100$$

$$q_t = 2.100$$

Este valor numérico (2.100) permite que se responda o que foi perguntado no enunciado do problema, ou seja, que o candidato obteve 2.100 votos.

Para resolver este tipo de problema, o sujeito precisa reconhecer que a taxa percentual 60% significa 60 de cada 100 e que isto tem relação com 3.500, ou perceber a relação entre o todo absoluto 3.500 com o todo relativo 100%, ou ainda, perceber a relação entre a taxa percentual (60%) e o todo absoluto (3.500). De qualquer forma, o sujeito precisa estabelecer relação entre relação, ou seja, fazer uso de idéias que compõem o conceito de proporção, a exemplo da comparação, razão e fração.

### **Problema 2**

Numa eleição em que 3.500 pessoas votaram, um certo candidato obteve 1.050 votos. Qual é a taxa percentual de votos desse candidato?

Nesse tipo de problema são fornecidas a quantidade inicial ( $q_i = 3.500$ ) e a quantidade de transformação ( $q_t = 1.050$ ), a incógnita reside na taxa percentual ( $p$ ).

A partir do tratamento proposto por Damm (1998), tem-se:

$$p = (q_t \times 100) : q_i$$

$$p = (1.050 \times 100) : 3.500$$

$$p = 105.000 : 3.500$$

$$p = 30\%$$

É interessante observar que no problema 1 o resultado é um valor absoluto correspondente a um valor relativo, enquanto neste problema, o resultado é um valor relativo advindo da avaliação entre dois valores absolutos. Neste caso, a comparação entre a  $q_t$  e a  $q_i$  avaliadas em relação à centena. Como o resultado indica índice percentual, faz-se necessária a utilização do símbolo que indica tal índice, neste caso o de porcentagem (%).

### **Problema 3**

Numa eleição em que um certo número de pessoas votou, um candidato obteve 15% do total de votos e isso corresponde a 4.500 votos. Qual é o número total de votos nessa eleição?

Neste tipo de problema são fornecidas a quantidade de transformação ( $q_t$ ) e a taxa percentual ( $p$ ), a incógnita recai na quantidade inicial ( $q_i$ ).

Seguindo o tratamento proposto por Damm (1998), tem-se:

$$q_i = (q_t \times 100) : p$$

$$q_i = (4500 \times 100) : 15$$

$$q_i = 450000 : 15$$

$$q_i = 30000$$

O valor encontrado refere-se à quantidade inicial ou de referência e, neste caso, o valor encontrado refere-se a valores monetários. Pelo tratamento proposto pelo autor, o sujeito precisa transformar a taxa em valor absoluto 15 e conceber a  $q_t$  como uma quantidade relativa à centena.

## **Estudo II**

### **Problema 1**

Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?

Este problema possui a mesma estrutura do problema 1 do Estudo I, ou seja, são fornecidas a taxa percentual ( $p = 30\%$ ) e a quantidade inicial ( $q_i = 200,00$ ), a incógnita reside na quantidade de transformação ( $q_t$ ).

Ao tomar como referência o tratamento proposto por Damm (1998), tem-se:

$$q_t = (q_i \times p) : 100$$

$$q_t = (200,00 \times 30) : 100$$

$$q_t = 6000,00 : 100$$

$$q_t = 60,00$$

A quantidade de transformação (60,00) permite que se responda o que foi perguntado no enunciado do problema, ou seja, que o aumento do salário teria sido de R\$ 60,00.

### **Problema 2**

Um trabalhador recebe um salário de R\$ 500,00 e está em defasado R\$ 200,00. Expresse essa defasagem na forma de taxa percentual.

Da mesma forma que no problema 2 do Estudo I, neste problema são fornecidas a quantidade inicial ( $q_i = 500,00$ ) e a quantidade de transformação ( $q_t = 200,00$ ), a incógnita reside na taxa percentual ( $p$ ).

A partir do tratamento proposto por Damm (1998), tem-se:

$$p = (q_t \times 100) : q_i$$

$$p = (200,00 \times 100) : 500,00$$

$$p = 20000,00 : 500,00$$

$$p = 40\%$$

### **Problema 3**

O trabalhador de uma empresa que recebe salário tem direito ao Fundo de Garantia por Tempo de Serviço – FGTS, que é de 8% sobre o salário bruto (salário bruto é o valor total da folha de pagamento). Sabendo que o valor do FGTS que a empresa tem de depositar mensalmente é de R\$ 40,00, qual é o valor do salário bruto desse trabalhador?

Assim como no problema 3 do Estudo I, neste problema são fornecidas a quantidade de transformação ( $q_t = 40,00$ ) e a taxa percentual ( $p = 8\%$ ), a incógnita recai na quantidade inicial ( $q_i$ ). Pelo tratamento proposto pelo autor, o sujeito precisa transformar a taxa percentual (8%) em valor absoluto (8) e conceber a  $q_t$  como uma quantidade relativa à centena.

Seguindo o tratamento proposto por Damm (1998), tem-se:

$$q_i = (q_t \times 100) : p$$

$$q_i = (40,00 \times 100) : 8$$

$$q_i = 4000,00 : 8$$

$$q_i = 500,00$$

### **Problema 4**

O salário de um trabalhador era de R\$ 240,00 e sofreu um aumento de 10%. Qual é o valor do novo salário desse trabalhador?

Observando a classificação proposta por Damm (1998), este tipo de problema se encontra no subgrupo dos que necessitam, para sua solução, de uma ou duas operações. Neste caso são fornecidas a taxa percentual ( $p$ ) e a quantidade inicial ( $q_i$ ), mas antes há que se encontrar a quantidade total ( $q_t$ ), e a incógnita recai sobre a quantidade final ( $q_f$ ).

Utilizando o tratamento proposto por Damm (1998), tem-se:

$$qt = (qi \times p) : 100 \quad e \quad qf = qi \pm qt .$$

$$qt = (240,00 \times 10) : 100$$

Para este problema temos:

$$qt = 2400,00 : 100$$

$$qf = qi + qt$$

$$qt = 24,00$$

$$qf = 240,00 + 24,00$$

$$qf = 264,00$$

Neste problema, o sujeito precisa perceber a  $qi$  como um todo sobre a qual incide um aumento de 10% e que este passa a incorporar o novo valor, que resulta no que Damm (1998) denomina quantidade final. A resposta deste problema deve ser dada em valores monetários, uma vez que a pergunta trata do novo salário.

### Problema 5

Um trabalhador tem um desconto para o INSS de R\$ 40,00. Isso corresponde a 10% do valor de seu salário bruto. Qual é o salário líquido desse trabalhador (salário líquido é a quantidade de dinheiro que o trabalhador recebe já deduzidos os descontos)?

Pela classificação proposta por Damm (1998), este tipo de problema também se encontra no subgrupo dos que necessitam, para sua solução, de uma ou duas operações. Nele são fornecidas a taxa percentual ( $p$ ) e a quantidade de transformação ( $qt$ ), mas antes há que se encontrar a quantidade inicial ( $qi$ ), e a incógnita recai sobre a quantidade final ( $qf$ ).

Tendo como referência o tratamento proposto por Damm (1998), tem-se:

$$qi = (qt \times 100) : p \quad e \quad qf = qi \pm qt .$$

$$qi = (40,00 \times 100) : 10$$

Para este problema temos:

$$qi = 4000,00 : 10$$

$$qf = qi - qt$$

$$qi = 400,00$$

$$qf = 400,00 - 40,00$$

$$qf = 360,00$$

Diferentemente do problema 4, em que bastava encontrar o valor da quantidade inicial, no problema 5 o sujeito precisa perceber que sobre ela tem-se um desconto. A resposta a este problema também deve fazer menção à unidade monetária.

### Problema 6

Um trabalhador deveria receber um salário de R\$ 500,00, mas recebe R\$ 400,00. Qual é a taxa percentual da perda salarial desse trabalhador?

Este tipo de problema se encontra no subgrupo (Damm, 1998) que requer, para sua solução, duas operações, dependendo das quantidades fornecidas e de quem se constitui na incógnita. Neste caso são fornecidas a quantidade inicial ( $q_i$ ) e a quantidade de final ( $q_f$ ) e a incógnita reside na taxa percentual ( $p$ ). Há que se encontrar primeiro a quantidade de transformação ( $qt$ ).

O tratamento proposto por Damm (1998), para este tipo de problema, é o seguinte:

$$qt = q_f - q_i \quad \text{e} \quad p = (qt \times 100) : q_i.$$

Neste problema tem-se:

$$qt = q_f - q_i \quad p = (100,00 \times 100) : 400$$

$$qt = 500,00 - 400,00 \quad p = 10.000,00 : 400$$

$$qt = 100,00 \quad p = 25\%$$

Este problema difere dos demais problemas porque o sujeito precisa encontrar a quantidade final para depois encontrar a taxa percentual.

### Problema 7

Um trabalhador recebe um salário líquido de R\$ 540,00, mas desconta R\$ 60,00 para o INSS. Expresse o desconto para o INSS na forma de taxa percentual.

De acordo com Damm (1998), este tipo de problema também se encontra no subgrupo que requer, para sua solução, duas operações, dependendo das quantidades fornecidas e de quem se constitui na incógnita. Neste caso, quando são fornecidas a quantidade final ( $q_f$ ) e a quantidade de transformação ( $qt$ ), e a incógnita reside na taxa percentual ( $p$ ), há a necessidade de encontrar-se primeiro a quantidade inicial ( $q_i$ ).

Se tomarmos como referência o tratamento proposto por Damm (1998), tem-se:

$$q_i = q_f \pm qt \quad \text{e} \quad p = (qt \times 100) : q_i.$$

Neste problema:

$$q_i = q_f + q_t$$

$$q_i = 540,00 + 60,00$$

$$q_i = 600,00$$

$$p = (60,00 \times 100) : 600,00$$

$$p = 6000,00 : 600,00$$

$$p = 10\%$$

Novamente a incógnita reside na taxa percentual, por isso a resposta deve ser expressa de forma relativa.

Já informamos que os problemas apresentados aos participantes dos Estudos III e IV fazem parte do instrumento do Estudo II (problemas 1, 2, e 3); portanto, a caracterização dos problemas é a mesma.

#### **4.5.Procedimento de organização das entrevistas**

Os protocolos com a transcrição dos dados obtidos das entrevistas compõem os anexos. A transcrição dos dados foi organizada em quadros compostos por colunas e linhas, integrando as verbalizações dos sujeitos e as do pesquisador. A organização das transcrições dos dados das gravações das entrevistas verticalmente e horizontalmente obedece à ordem e à seqüência em que os diálogos ocorreram, bem como seus respectivos emissores. Na primeira linha constam as conversas iniciais estabelecidas com os participantes, seguida de cada um dos problemas propostos e nas demais, em cada uma delas, os diálogos realizados em cada um dos problemas. Nas colunas aparecem as falas do pesquisador e de cada um dos participantes.

Para cada um dos estudos foi organizado um quadro com os protocolos das transcrições. Assim, no Anexo I, Quadro I, constam os dados obtidos da entrevista realizada com os alunos do Estudo I; no Anexo II, Quadro II, os dados obtidos da entrevista realizada com a dupla de alunos do Estudo II; no Anexo III, Quadro III, os dados obtidos da entrevista realizada com a dupla realizada com a dupla de professores; e no Anexo IV, Quadro IV, os dados obtidos da entrevistas realizadas com as quatro duplas do Estudo IV.

Para analisar os registros de representação dos participantes de cada um dos quatro estudos, obedecemos à ordem em que as entrevistas foram realizadas em cada

estudo, assim como a ordem numérica dada aos problemas, considerando-se as conversas realizadas entre o pesquisador e os participantes em cada problema. Assim, iniciamos apresentando os resultados do estudo I seguido dos demais.

Ao apresentar as análises utilizamos, para elucidá-las, trechos das conversas ou recortes dos protocolos das transcrições das entrevistas, contemplando registros verbais orais e verbais escritos. A partir das análises, os resultados foram organizados de forma a contemplar os objetivos estabelecidos para esta pesquisa.

Vale lembrar que, embora tenhamos solicitado para que os participantes estudo II solucionassem os sete problemas propostos, nesta pesquisa apresentamos a análise de apenas três deles – aqueles que foram apresentados no Estudo III e IV. E, como já dissemos, esta opção aconteceu em função de que estes problemas apresentam a mesma estrutura daqueles propostos para o estudo I.

Com base no referencial teórico adotado e nos estudos sobre a proporção-porcentagem, as análises dos registros de representação presentes nos protocolos das transcrições das entrevistas foram organizados em categorias empregadas por Vizolli (2001), mais especificamente quando apresentamos os registros de representação semiótica necessários à conceitualização de proporção-porcentagem – o revelar do objeto investigado.

Os objetivos estabelecidos para esta pesquisa nos remetem a uma ausculta mais acurada: nos conhecimentos matemáticos que são mobilizados pelos participantes no processo de solução dos problemas; nos registros de representação utilizados, bem como seus respectivos tratamentos e conversões (Duval 1993; 1995).

A teoria dos registros de representação semiótica informa que uma representação destaca mais fortemente certos aspectos do objeto referenciado; por isso a necessidade de se trabalhar com pelo menos dois registros de representação semiótica para um mesmo objeto e efetuar as devidas conversões entre os registros utilizados. Ela fornece os seguintes critérios de análise:

- a) A diversidade de registros de representação (registro verbal – oral e escrito; figura geométrica; numérico – percentual, fracionário, decimal, tabela de proporcionalidade, aritmético; equação; função; e gráfico cartesiano).
- b) A diferenciação entre o objeto representado e seus registros de representação, o que será feito a partir de uma análise dos registros efetuados pelos participantes ao solucionarem os problemas propostos;

- c) O tratamento e a conversão;
- d) Os conhecimentos mobilizados.

Nem sempre um sujeito consegue efetuar o registro de representação semiótica de um dado objeto, isto é, não consegue operar sobre a representação; mas opera sobre o objeto real. Nesse caso, o sujeito não consegue distinguir o objeto da representação ou não reconhece o objeto na representação, o que não significa dizer que ele não possui conhecimentos que lhe permitam operar matematicamente com os dados fornecidos pelo enunciado do problema. Os conhecimentos manifestam-se nos esquemas que são mobilizados para organizar os dados e responder o que é perguntado pelo problema. Daí a importância de analisar as falas (registro verbal oral) e os registros de representação escritos que os participantes efetuaram.

#### **4.6. Análise dos dados**

Seguindo os procedimentos metodológicos estabelecidos para esta pesquisa e na tentativa de responder às perguntas que a movem, trazemos a seguir a análise dos registros verbais (oral e escrito) dos participantes em cada um dos quatro estudos. Para nos orientar na apresentação dos dados, seguimos a ordem de apresentação dos problemas aos participantes. Assim, as análises serão feitas a partir dos registros verbais e escritos de cada um dos participantes.

Para exemplificar ou elucidar as discussões, apresentamos os dados fazendo recortes das transcrições dos protocolos ou de diálogos estabelecidos com os participantes. No decorrer das análises das transcrições pontuamos elementos que nos remetem ao modo como os alunos e os professores solucionaram os problemas, destacando os procedimentos e os registros de representação semiótica (Duval 1993; 1995) utilizados, ao mesmo tempo em que buscamos apoio na literatura.

## 4.7. Estudo I: realizado com três participantes

Para resolver o primeiro problema os três participantes deste estudo fizeram uso de registros verbais escritos (**registros aritméticos**), como pode ser visto na transcrição a seguir.

### 4.7.1. Análise dos registros verbais orais e escritos no Estudo I

#### Problema 1

Numa eleição em que 3.500 pessoas votaram, um candidato obteve 60% dos votos. Qual é o número de votos que esse candidato obteve?

Participante PAm	Participante PBf	Participante PCf
<i>Cálculo</i> 350 <u>x 6</u> 2100	<i>Cálculo</i> 3500 <u>x 60</u> 2100	<i>Cálculo</i> 3500 <u>x 60</u> 2100

Diferentemente do registro verbal escrito (registro de representação semiótica **numérico aritmético**) pelos participantes PBf e PCf, no registro do participante PAm não aparecem um dos zeros do 3.500 e o zero do 60. Possivelmente ele tenha encontrado 10% de 3.500 = 350 e, como 10% é a sexta parte de 60%, multiplicou o correspondente a 10% (350) por 6, o que resultou em 2.100. Isso nos leva a crer que este participante estabeleceu devidamente as relações entre a taxa percentual (60%) e a quantidade de inicial (3.500), assim como de 60% com a quantidade de transformação (2.100).

Embora no registro dos cálculos efetuados pelos participantes o resultado esteja correto, parece que eles não reconhecem a taxa percentual como um valor relativo. Isso pode ser confirmado no decorrer dos diálogos estabelecidos entre o pesquisador e os participantes, depois que estes solucionaram os problemas.

O registro de representação **numérico aritmético** também aparece por ocasião da solução dos demais problemas. No fazer de sala de aula, frequentemente os alunos, principalmente de EJA, tratam os problemas de proporção como problemas de multiplicação e, ao se tratar de porcentagem, além da multiplicação também é preciso

dividir por 100. Pode-se dizer que se trata das reminiscências escolares de que nos fal Fonseca (2001; 2002).

Os registros verbais escritos pelos participantes PBf e PCf dão indícios de que avaliação em relação à centena já foi efetuada. Os participantes apresentaram a operação de multiplicação entre 3.500 e 60, o que resultou em 2.100 (produto). Este modo de apresentar os cálculos nos permite pensar que os participantes fizeram uso de uma regra, qual seja: “sempre que se trata de porcentagem, basta multiplicar os valores indicados e cortar dois zeros” ou ainda, ao se tratar de porcentagem é preciso dividir (comparar) por 100. Novamente se tem indício das reminiscências escolares (Fonseca 2001; 2002). A fala do Participante PAm, ao solucionar o problema 1, transcrita a seguir<sup>12</sup>, é bastante esclarecedora. Vejamos.

*P – Como você pensou para fazer o cálculo?*

*PAm – Na minha cabeça veio 10% de 3.500, que é 350. Daí somei 6 vezes 350. Podia fazer também 3 vezes 6 igual 18 que dá 1.800, mais 6 vezes 5 que dá 30. Daí  $1.800 + 300 = 2.100$ .*

O registro verbal oral deste participante (na minha cabeça veio 10%) indica que ele buscou **apoio em uma taxa percentual que lhe fosse mais acessível**, neste caso, 10%. A partir do valor relativo a esta taxa (somei 6 vezes 350) o participante chegou ao resultado. Este participante indicou outro algoritmo para chegar ao resultado (3 vezes 6 igual 18 ...), o que denota que ele possui uma certa compreensão do uso de determinadas regras, como, por exemplo, operar com os dados numéricos “suprimindo” os zeros que compõem os números e, ao final da operação, “repor” os zeros; decompor o número e “suprimir” os zeros ( $3.500 = 3.000 + 500$ , passa a ser 3 e 5) e “devolvê-los” no resultado. A decomposição de números de acordo com a classe é uma característica marcante das pessoas adultas que operam matematicamente com números, sem fazer o registro dos cálculos em papel.

Com o objetivo de compreender melhor os caminhos percorridos pelos participantes para solucionar os problemas, o pesquisador entrevistou os participantes fazendo perguntas, solicitando esclarecimentos ou contra-argumentando. Assim emergiram

---

<sup>12</sup> P – Pesquisador;  
PAm – Participante A;  
PBf – Participante B;  
PCf – participante C.

outros modos de solucionar os problemas e podem ser encontrados nos registros verbais orais dos participantes PBf e PCf, ao solucionarem o problema 1, transcritos a seguir.

*P – Como você pensou para fazer o cálculo?*

*PBf – Eu fiz a conta: se 60% tem que dar menos de 3.500, faltou 40% para dar o 100%, que é 3.500. Todos teriam votado nele. Metade é 50%, e 10% dá 350. Somando, tenho 2.100.*

*P – Como você pensou para fazer o cálculo?*

*PCf – Eu não sei te explicar como eu fiz essa conta.*

*P - Então me diga como pensou.*

*PCf – Se for do meu salário eu faço assim. Se é 10% e o salário é 500, eu sei que de 100 é 10, daí tenho 50.*

Ao analisar o registro verbal oral do participante PBf, pode-se perceber o uso do referencial **metade** (Spinillo 1992), e **10%**. Podemos dizer que este participante também estabeleceu devidamente as relações entre a taxa percentual (60%) e a quantidade inicial (3.500), assim como de 60% com a quantidade de transformação (2.100), tanto em seu registro verbal escrito como no registro verbal oral. O 60% foi **decomposto em duas partes** (50% e 10%). Para este participante, o termo metade significa 50%. Vale ainda lembrar que, de acordo com Spinillo (1992), o referencial metade é importante para a compreensão da proporção, mas não é suficiente.

Por outro lado, o registro verbal oral de PBf nos remete às regras implícitas ao contrato didático<sup>13</sup>. De acordo com Brousseau (1988), o contrato didático estabelece as relações entre o professor, os alunos e o saber. Neste caso, a regra pode ser a seguinte: o problema foi apresentado por um professor, eu (aluno) tenho que explicar como resolvi e estas explicações devem satisfazer ao professor.

Da mesma forma que o participante PAm, não podemos dizer que o participante PBf reconhece a porcentagem como uma avaliação em relação à centena. Isso vale também para o participante PCf. O registro verbal oral deste participante indica a busca de apoio **em situações da vida prática**, neste caso **salário**, e em valores que lhes são mais acessíveis (10%), e nos remete às regras implícitas ao contrato didático (Brousseau, 1988) a que nos referimos anteriormente.

---

<sup>13</sup> Para saber mais sobre contrato didático e suas implicações no processo de ensino e aprendizagem, sugerimos a seguinte bibliografia: BROUSSEAU, G. (1988). Le contract didactique: le milieu. In: **Recherches en didactiques des mathématiques**. Grenoble, v.9, n° 3, pp 309-336.

Ao solucionarem o problema 2, os participantes PAm e PBf utilizaram registros verbais escritos (**registro de representação semiótica numérico aritméticos**), como pode ser visto na transcrição que segue, enquanto que o participante PCf não efetuou o registro escrito dos cálculos.

### Problema 2

Numa eleição em que 3.500 pessoas votaram, um certo candidato obteve 1.050 votos. Qual é a taxa percentual de votos desse candidato?

Participante PAm	Participante PCf
350	3500
$\times 3$	<u>1050</u>
1050	4550

Possivelmente o participante PAm buscou apoio em uma taxa que lhe fosse mais acessível (10% de 3.500 = 350) e, pela via de um coeficiente multiplicador (3), buscou um valor que resultasse em 1.050. Isso pode ser visto na transcrição a seguir, cujo registro verbal oral nos reporta ao uso do algoritmo da multiplicação.

*Se de 10% é 350 aí eu fiz 3 vezes 350 que dá 1.050. Eu podia fazer 3 x 3, 9 e 3 vezes 5, 15. No caso daria 900 + 150 = 1.050.*

A explicação dada pelo participante PAm esclarece o que dissemos, ou seja, que ele buscou **apoio em uma taxa percentual divisora de 100**, neste caso, 10%. Podemos dizer que se trata de **tentativa e erro**, o que pode ser visto como um modo de as pessoas adultas solucionarem problemas de matemática.

O registro verbal escrito de PCf dá indícios do uso da operação de adição, o que é confirmado na transcrição a seguir. Tanto o registro verbal escrito como o registro verbal oral nos dizem que este participante não concebe a porcentagem como uma avaliação em relação à centena.

*P – Fale-me como você pensou para fazer esse problema.*

*PCf – Aqui eu tenho que somar.*

*P – Por quê?*

*PCf – Porque eu tenho dois números.*

*P – Então calcule, vamos ver!*

*PCf – Dá 4550. Tem alguma coisa errada, mas eu não sei o que é.*

No registro verbal oral pode-se constatar o que Brousseau (1988) denomina regras implícitas ao contrato didático, qual seja, o professor solicitou que os alunos (participantes da pesquisa) solucionassem uma série de problemas de porcentagem (problemas de matemática), para tanto, é preciso fazer “contas” utilizando os números informados. Esta regra também se estende para a situação de pesquisa. Neste caso, além de responder ao que era perguntado pelo enunciado do problema o pesquisador solicitou também informações sobre o modo de solucionar o problema, que, no entendimento do participante, é preciso falar que “conta” foi feita, daí o registro verbal oral, *somar*.

Para chegar no valor indicado (4.550), possivelmente este participante recorreu à solução do problema 1, no qual 60% de 3.500 é 2.100. No problema 2, temos novamente 3.500 e sabe-se que 60% equivale a 2.100, então, metade de 60% é 30%, logo, metade de 2.100 é 1.050. Isso significa que basta *somar* 3.500 com 1.050. Tem-se, então, 4.550.

O participante PBf não efetuou registro verbal escrito, no entanto o registro verbal oral transcrito a seguir indica que ele buscou apoio no **problema resolvido anteriormente** (problema 1) e também fez menção ao recurso **metade**.

*PBf – Eu sei que é 30%.*

*P – Fale-me como (nome do participante) chegou a esse resultado.*

*PBf – 60% deu 2,100, a metade é 30, aí é 1.050.*

### **Problema 3**

Numa eleição em que um certo número de pessoas votou, um candidato obteve 15% do total de votos e isso corresponde a 4.500 votos. Qual é o número total de votos nessa eleição?

Para resolver o problema 3, os participantes novamente utilizaram registros de representação **numérico aritméticos**. O participante PAm lançou mão do mesmo procedimento utilizado no problema 2, isto é, procurou uma multiplicação cujo produto resultasse em 4.500. Possivelmente o participante tenha buscado o **coeficiente** (quociente 3), o qual representa o **valor da unidade percentual (1%)**. No entanto, não estabeleceu corretamente as relações parte-parte e parte-todo, o que pode ser visto na transcrição que segue.

$$\begin{array}{r} 1500 \\ \times 3 \\ \hline 4500 \end{array}$$

Ao ser questionado sobre o modo que solucionou o problema, assim se pronunciou:

*PAm - Aqui eu achei 15% de 10 mil votos, que é 1.500. Então, mais 10 mil, 1.500 e 10 mil, 1.500, tenho 4.500. Daí tenho 10 mil mais 10 mil mais 10 mil, são 30 mil.*

O participante foi compondo a quantidade inicial a partir de partes. Podemos dizer que a soma das partes compõe o todo, assim, parte “a” + parte “b” + parte “c” = todo. Partes estas que, uma a uma, correspondem a uma quantidade de transformação. Em outras palavras, podemos dizer que se trata da parte correspondente à parte do todo. Tanto a quantidade de inicial quanto a quantidade de transformação se deu pela via da **soma de parcelas iguais**. Em seguida o participante efetuou o seguinte registro verbal escrito:

<i>10,000 mi</i>	<i>15%</i>	<i>1500</i>
<i>10,000</i>		<i>1500</i>
<i>10,000</i>		<i>1500</i>
<i>30,000 voto</i>		<i>4500</i>

Neste registro, o participante utilizou a **decomposição** da quantidade inicial em partes iguais (10.000) e **comparou** com a taxa percentual (15%), obtendo a sua **equivalência** (1.500). Recompôs o todo (quantidade inicial) por meio **da soma de parcelas iguais** (10.000 + 10.000 + 10.000 = 30.000) e fez o mesmo com os valores equivalentes a cada uma das partes (1.500 + 1.500 + 1.500 = 4.500). Este participante conseguiu estabelecer as devidas relações entre a quantidade inicial, a taxa percentual e o valor correspondente à taxa.

Os participantes PBf e PCf utilizaram o valor absoluto da taxa percentual (15) como operador multiplicativo, conforme pode ser visto na transcrição a seguir.

*Participante PBf*

$$\begin{array}{r} 4500 \\ \times 15 \\ \hline 22500 \\ \hline 4500 \\ \hline 6.7500 \end{array}$$

*Participante PCf*

$$\begin{array}{r} 4500 \\ \times 15 \\ \hline 22500 \\ \hline 4500 \\ \hline 67.500 \end{array}$$

É interessante observar que os participantes usaram a operação de multiplicação. O registro verbal escrito efetuado pelos participantes indica que eles não organizaram o algoritmo corretamente, o que nos leva a crer que ainda não dão a devida atenção ao valor posicional do nosso sistema de numeração decimal. Destaca-se também que estes participantes não estabeleceram as devidas relações entre parte-parte e parte-todo.

Ao solicitar que explicassem o que haviam feito, assim se pronunciaram:

### **Participante PBf**

*PBf – Essa aqui eu não consigo, só sei que tem que ser bem mais que esses 4.500.*

*P - Mas por que tem que ser mais de 4.500?*

*PBf - Porque 4500 é só 15% e tudo é 100%.*

### **Participante PCf**

*P – Como (nome do participante) pensou para resolver esse?*

*PCf – Nessa eu multipliquei porque eu tenho a porcentagem e os 4.500 votos.*

*P – E a resposta 67.500 está correta?*

*PCf – Acho que sim, porque é bem mais que 4.500.*

*P – Tem certeza?*

*PCf – Agora você me deixou em dúvida!*

As explicações dos participantes indicam que eles estabeleceram corretamente a relação entre a quantidade de transformação (4.500) e a taxa percentual (15%). A fala do participante PCf indica que ele não conseguiu efetuar a operação matemática que lhe possibilitasse resolver corretamente o problema. O fato de o resultado de seu cálculo ter sido maior que 4.500, foi suficiente para acreditar que estaria correto, o que denota certa compreensão sobre porcentagem.

## **4.7.2. Considerações em relação aos registros utilizados pelos participantes do Estudo I**

Os participantes do Estudo I buscaram apoio em quantidades (100, 1.000, 10.000) ou taxas que lhes são mais acessíveis (10%, 50%) para estabelecer relação com os dados fornecidos pelo enunciado do problema e, com isso, conseguiram efetuar um registro verbal escrito. Por etapas, utilizando-se de valores ou taxas percentuais compuseram operações matemáticas que possibilitaram obter o resultado do problema. Os registros de

representação semiótica (Duval 1993; 1995) utilizados pelos participantes são **registros numéricos aritméticos** (Vizolli, 2001).

Os dados e as informações obtidos nos permitem dizer que os participantes deste estudo necessitam conhecer o código da linguagem matemática, para que, a partir das estruturas mentais já construídas e dos conhecimentos que já possuem, possam comunicar, de forma mais precisa e consistente seus feitos a outrem, o que, neste caso, implica o uso de registros verbais escritos matematicamente. Essa é uma tarefa que a escola deve propiciar; no entanto, esses registros precisam ter significado para quem os utiliza. Esse trabalho envolve toda uma sistemática de valorização dos conhecimentos oriundos da prática diária, ao mesmo tempo em que não se pode omitir a forma canônica que deve acontecer ao longo de todo o processo de escolarização. Isso requer paciência, dinamismo, dedicação e tempo, para que os sujeitos possam se familiarizar com as regras de significado e funcionamento da linguagem matemática.

Além de quantidade ou taxas que lhes fossem mais acessíveis, buscaram **apoio em situações do contexto social**, como, por exemplo, em “salário”. Com isso, podemos dizer que os participantes deste estudo possuem conhecimentos, que, supostamente, está alicerçado nas experiências, em face das demandas do meio social em que vivem. Tais conhecimentos não lhes são suficientes, porque buscam, no processo de escolarização, formas mais potentes para solucionar problemas, inclusive de matemática. Isso coloca aos professores de Matemática da EJA; o desafio de tematizar os conhecimentos que os alunos já possuem, e, se for o caso, rs)significá-los para que possam ser utilizados na solução de outros problemas e em outros contextos. Este desafio encontra eco nas pesquisas realizadas por Carvalho (1995, 2001), Calazans (1996), Acioly-Régner (1997), Franco (2000), Fonseca (2001, 2002, 2004), entre outros.

Outras vezes os participantes deste estudo buscaram **apoio em problemas solucionados anteriormente**, ou seja, em problemas solucionados no decorrer da realização desta atividade de pesquisa.

Embora os participantes deste estudo tenham efetuado tratamentos e conversões (Duval 1993; 1995), há que se considerar que nem sempre fizeram uso correto dos registros verbais escritos, o que exige que o professor (pesquisador) estabeleça um diálogo, para saber como os alunos solucionam os problemas e, a partir de suas respostas, passe a propor situações que os levem efetuar as devidas conversões, de forma que coordenem as transformações entre os sistemas de registros de representação semiótica (op cit).

Para passar do registro verbal escrito presente no enunciado do problema (registro de representação semiótica misto, escrito em linguagem alfabética e numérico), os participantes lançaram mão de registros de representação semiótica numérico aritméticos. Ao observar o registro verbal oral de Pbf, por exemplo, quando fez uso referencial metade e 10%, pode-se perceber que o tratamento dispensado aos registros de representação semiótica também se situa no campo da aritmética.

Este estudo nos remeteu à pesquisa desenvolvida por Damm (1988) e nela nos inspiramos para elaborar problemas de proporção-porcentagem que levassem em consideração o contexto cultural dos estudantes de EJA, neste caso, que tratassem sobre o cálculo de salário. Os problemas foram apresentados a uma dupla de alunos e solicitado que os solucionassem. Este foi o Estudo II.

#### **4.8. Estudo II: realizado com uma dupla de alunos**

Embora tenhamos realizado a entrevista na qual os participantes solucionaram sete problemas clássicos de proporção-porcentagem, nesta pesquisa apresentamos as análises relativas a três deles, os quais apresentam a mesma estrutura dos problemas do Estudo I e também foram utilizados nos estudos III e IV.

##### **4.8.1. Análise dos registros verbais orais e escritos no Estudo II**

###### **Problema 1**

Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?

Ao iniciar a entrevista, o pesquisador procurou conhecer um pouco sobre a área de atuação profissional dos participantes, assim como se eles sabiam operar matematicamente com cálculos relativos a salário. O participante Jm(16;1) afirmou que não faz uso desse tipo de cálculo e quando precisa fazer algum tipo de “conta”, como, por exemplo, de água ou energia, faz uso da calculadora. Cf(23;5) disse que trabalha como diarista e na “temporada” como garçoneiro ou “chapera” – fazendo lanches. Em relação à Matemática,

afirma que possui muita dificuldade, embora no dia-a-dia consiga fazer “contas”, principalmente com o uso da calculadora.

O pesquisador fez a leitura do problema 1 e diante da pergunta do problema Cf(23;5) assim se pronunciou. *Sei lá. Nossa! Eu sou péssima em conta, mas é 30.* Quando perguntado sobre o porquê do valor 30, respondeu: *Sei lá. Eu tirei uma base. Porque 10% de 100 reais é 10 reais. Daí que eu tirei a base. Mas eu não sei te explicar como é que eu cheguei aí.* Embora a resposta não esteja correta, a fala do participante indica que ele buscou apoio **valores que lhes são mais acessíveis**, neste caso, 10% de 100.

Jm(16;1) acompanhava a conversa, e quando perguntado sobre o que pensava, parte das informações já trocadas entre o pesquisador e Cf(23;5); mas só chegou ao resultado correto diante das insistentes indagações do pesquisador. Isso pode ser percebido na transcrição a seguir.

*P – E você Jm(16;1), como é que pensa esse problema?*

*Jm(16;1) – Eu acho que fosse para mim, assim oh, se eu tivesse uma porcentagem de 10 então, 30% seria 30, né.*

*P – Certo.*

*Jm(16;1) – Daí, de 200, seria 150.*

*P – Tá. Porque você acha que é 150?*

*Jm(16;1) – Ah, porque se fosse para fazer de 200. De 100 seria 30, né.*

*P – Ok.*

*Jm(16;1) – Então, de 200, 150, não. 60.*

*P – 60. Porque você acha que é 60?*

*Jm(16;1) – Porqueeee, porque é duas vezes mais que 100.*

Neste diálogo é possível perceber que o participante não estabeleceu claramente a relação entre o valor absoluto e o valor relativo da taxa percentual, nem desta com a quantidade inicial. No entanto, as indagações do pesquisador fizeram com que ele fosse articulando os dados e as informações e chegasse a uma resposta condizente com o que foi perguntado. Aqui há uma suspeita de que se o professor pergunta (neste caso o pesquisador) é porque não está satisfeito com a resposta. É, portanto, é um convite para refazer os cálculos. O participante foi levado a refletir sobre o que estava pensando ou sobre o pensado – metacognição.

Cf(23;5) não concordou com o conteúdo matemático dos diálogos entre o pesquisador e Jm(16;1) e disse que não sabe explicar. **Recorreu então a atividades realizadas em sala de aula** e utilizou as expressões “gráfico” e “lembrar a regrinha”. São as **reminiscências da matemática escolar** de que trata Fonseca (2001; 2002).

Ao solicitar que Jm(16;1) escrevesse o que havia falado, disse que é difícil montar a “conta”, mas escreveu: *se eu tenho 100 reais 3 por cento e 30 e 200 duas vezes mais 60*. Quando perguntado a Cf(23;5) o porquê da resposta não ser 60, tentou explicar e, ao fazer isso, reconsiderou sua resposta. Vejamos a transcrição de sua explicação.

*Porque de 100 é 10 né. De 30% de 100 é 30 reais. Ah! Tá certo! 30% de 100 é 30.*

Mesmo diante das explicações não conseguiu efetuar um registro de representação semiótica composto somente de signos matemáticos ou utilizando algoritmos. Escreveu o seguinte: *sheguei a esse resultado calculando que 30% de 100 é 30 então de 200 é duas vezes mais chegando então no resultado de 260 reais*. Este é um registro de **representação semiótica misto**, composto pela **escrita alfabética e números**.

Nos diálogos entre o pesquisador e os participantes, é possível perceber que a mediação propiciou a troca de informações, também entre os participantes. Este é um indicativo de que, tanto os diálogos como os registros verbais escritos são instrumentos de mediação e esta perpassa a tríade (pesquisador e os participantes).

O fato de terem estabelecido relação da taxa percentual com a centena não é garantia de que compreendem a porcentagem como a avaliação de uma quantidade em relação à centena. Tanto é que a relação da taxa percentual com a centena só ocorreu a partir dos diálogos. É interessante observar que, assim como Cf(23;5), Jm(16;1) também **recorreu a valores numéricos e monetários**, para explicar como pensou para resolver o problema.

## **Problema 2**

Um trabalhador recebe um salário de R\$ 500,00 e está defasado em R\$ 200,00. Expresse essa defasagem na forma de taxa percentual.

Jm(16;1) fez a leitura do problema e em seguida perguntou: *ele tem que pagar esses 200?* Esta pergunta denota a falta de compreensão do termo defasado. Enquanto o pesquisador tentou explicar o enunciado do problema, Cf(23;5) reconheceu o significado do termo e falou: *Ele recebe 500 e tinha que estar recebendo 700 reais*. O que é confirmado pelo pesquisador, o qual complementa: *Ele recebe 500, tinha que receber 700. Então tem uma defasagem de 200. Quantos por cento é isso? 200 é quantos por cento de*

500? Jm(16;1) pergunta: *Seria 70%?* Esta pergunta desencadeia um diálogo interessante e pode ser visto no recorte do protocolo, a seguir.

Pesquisador	Participante Jm(16;1)	Participante Cf(23;5)
<p><i>Como você fez para chegar a 70?</i></p> <p><i>Isto.</i></p> <p><i>Tá! Você está me dizendo que 200 é um pouco menos da metade de 500.</i></p> <p><i>Em termos de porcentagem, quanto seria metade?</i></p> <p><i>Isso.</i></p> <p><i>Em termos de dinheiro, quanto é?</i></p> <p><i>Então metade de 500 é 250. Vou tentar seguir seu raciocínio. Então veja bem: 200 é mais da metade ou é menos da metade de 500?</i></p> <p><i>Então é mais de 50% ou é menos. O que você acha?</i></p> <p><i>(Olhou para Cf(23;5) e perguntou:)</i> <i>O que você acha?</i></p> <p><i>Menos que 50%. Tá.</i> <i>Quantos por cento será que seria então?</i> <i>Quanto você acha que é?</i></p> <p><i>Como você chegou aí?</i></p> <p><i>Dá uma pensadinha aí!</i></p>	<p><i>Como cheguei?</i></p> <p><i>Eu pensei assim oh, tipo, a metade. Um pouquinho menos que metade. Um pouquinho mais que a metade de 100, 75.</i></p> <p><i>Tá.</i></p> <p><i>Metade?</i></p> <p><i>50%.</i></p> <p><i>250.</i></p> <p><i>Menos.</i></p> <p><i>Menos.</i></p> <p><i>Menos.</i></p> <p><i>Então seria 40%?</i></p> <p><i>(Olha e não consegue)</i></p>	<p><i>Eu acho que é menos.</i></p> <p><i>30%.</i></p> <p><i>Dedução, não sei!</i></p>

<p><i>Então dá um pensadinha aí.</i></p> <p><i>Escreve aí, como você chegou a 40%. Pode até falar como você fez para chegar a 40%.</i></p> <p><i>Tá. E se eu disser que é 30%. O que você me diz? 40% tá chegando mais perto. Tá. E se eu pedisse para fazer a prova real, como você faria para me mostrar que 40% está mais próximo? Então tenta fazer para mim.</i></p> <p><i>(Olhou para Cf(23;5) e perguntou:) E você, como você está pensando?</i></p>	<p><i>Porque é um pouco menos que 50%, que é a metade. É 40.</i></p> <p><i>É menos. É menos que 50%, mas eu acho que também não é tão. Tá chegando mais perto de 50%.</i></p> <p><i>(Sem retorno)</i></p> <p><i>Eu tinha que fazer (baixa a cabeça e começa a escrever).</i></p> <p><i>Registrou:</i></p> <table data-bbox="625 1070 1034 1187"> <tr> <td><i>100%</i></td> <td><i>500</i></td> </tr> <tr> <td><i>50%</i></td> <td><i>250</i></td> </tr> <tr> <td><i>25%</i></td> <td><i>125</i></td> </tr> </table>	<i>100%</i>	<i>500</i>	<i>50%</i>	<i>250</i>	<i>25%</i>	<i>125</i>	<p><i>Não sei!</i></p> <p><i>Não consegui.</i></p>
<i>100%</i>	<i>500</i>							
<i>50%</i>	<i>250</i>							
<i>25%</i>	<i>125</i>							

Ao acompanhar o desenvolvimento das conversas, podemos perceber que, ao explicar como pensou para responder a pergunta do problema, Jm(16;1) faz uso do referencial **metade** (Spinillo, 1992). O pesquisador interfere para que o participante perceba o significado de metade de 500, em termos percentuais e metade absoluta, o que acaba sendo assimilado. Mais adiante, Jm(16;1) respondeu corretamente (40%). Ao explicar seu raciocínio, utilizou como argumento *um pouco menos que 50%*. Diante do contra-argumento do pesquisador: *E se eu disser que é 30%. O que você me diz?*, manteve sua resposta, argumentando que a diferença não poderia ser tanta. No **registro verbal oral**, podemos perceber que este participante fez uso do **cálculo por estimativa ou aproximações sucessivas**.

Quando solicitado a mostrar sua resposta por meio de registro verbal escrito, demonstrou ter percebido que a quantidade de referência (500) dizia respeito à taxa

percentual de 100% e que buscava a taxa percentual correspondente a 200. Ao estabelecer a relação entre o todo percentual – 100% e o todo absoluto – 500 (quantidade de referência), utilizou o referencial **metade** (Spinillo, 1992) e passou a organizar uma **tabela de números proporcionais** em que na primeira coluna constava a taxa percentual e na segunda, a quantidade relativa, ou seja, conseguiu estabelecer a relação entre a taxa percentual 100% e a quantidade 500 – relação horizontal. Aqui apareceu o **registro de representação numérico em tabela de números proporcionais**.

Jm(16;1) deu seqüência no registro da tabela de números proporcionais utilizando o recurso **metade**, obtendo os respectivos valores correspondentes. Dialogando com o pesquisador, conseguiu explicar o que fez, confirmando sua resposta (40%). Com a utilização do referencial **metade**, conseguiu organizar a **tabela de números proporcionais** e não conseguiu estabelecer relação com o que era perguntado no problema. Fez isso mediante a interferência do pesquisador.

Ao acompanhar a discussão entre o pesquisador e Jm(16;1), Cf(23;5) acompanhou o raciocínio de Jm(16;1) e, ao estabelecer relação entre os dados dispostos horizontalmente, identificou o **operador** (:5) entre 500 e 100, mas não efetuou corretamente as operações para obter o resultado (40%).

Quando interpelado, Cf(23;5) não conseguiu explicar por quê. Isso nos leva a crer que este participante não estabelece relação entre as formas que utiliza em seu contexto imediato para resolver situações que envolvem matemática e as situações escolares. Para resolver os problemas propostos, insistentemente, o participante buscou uma forma canônica, mais especificamente uma **regrinha**, nos termos por ele utilizado. De acordo com Fonseca (2001, 2002), trata-se de uma adequação ao gênero de discurso. Nos termos de Brousseau (1988), pode-se pensar nas regras implícitas ao contrato didático.

### **Problema 3**

O trabalhador de uma empresa que recebe salário tem direito ao Fundo de Garantia por Tempo de Serviço – FGTS, que é de 8% sobre o salário bruto (salário bruto é o valor total da folha de pagamento). Sabendo que o valor do FGTS que a empresa tem de depositar mensalmente é de R\$ 40,00, qual é o valor do salário bruto desse trabalhador?

Jm(16;1) fez a leitura do problema e, ao contrário de Cf(23;5), disse não compreender o enunciado. Ao retomar a leitura do problema, Cf(23;5) indicou a operação

de multiplicação. O pesquisador leu novamente o problema e tentou explicar para Jm(16;1).

Os participantes conseguiram então estabelecer a relação entre 8% e R\$ 40,00. No decorrer dos diálogos, percebeu-se que eles, principalmente Cf(23;5), não entenderam o sentido estrito da porcentagem, tanto é que repetiram a pergunta do pesquisador: O que significa 8%? Para ver se os participantes conseguiam estabelecer as devidas relações e chegar a um resultado plausível, o pesquisador tomou como exemplo dados apresentados em noticiários. Vejamos:

*P – Quando aparece no noticiário, como: 8% da população sofreu com o “Catarina” (ciclone ocorrido em abril de 2004, no Sul do estado de Santa Catarina). O que quer dizer 8%?*

*Jm(16;1) – 8% da população que um pouco mais. Nem tudo foi atingido, mas um pedaço. Um pedaço da população.*

*P – Que pedaço é esse, que parte é essa?*

*Jm(16;1) – Agora!*

*P – Vocês sabem como os pescadores fazem a conta das “partes” do pescado?*

*Jm(16;1) – Tipo por quinhão assim.*

*P – Isso, isso.*

*(...)*

*Cf(23;5) – Pois é. (Sorriso). Esses 8% é uma pequena parte. Vamos supor, é uma pequena parte desse total, do todo. Uma pequena parte dessa quantia.*

O pesquisador continuou a argumentar e contra-argumentar para fazer com que os participantes encontrassem uma forma de organizar matematicamente os dados e chegassem ao resultado desejado.

Os diálogos indicam que o processo de mediação exige de quem está mediando uma certa versatilidade de raciocínio, a utilização de recursos e uma linguagem que possibilitem aos participantes estabelecerem relações e chegar a conclusões que satisfaçam não somente a resposta do que foi perguntado, mas que convençam os participantes da validade do resultado encontrado. Trata-se de um percorrer por caminhos diferentes, mesmo que sejam mais longos e sinuosos. É preciso que o participante acompanhe a lógica estabelecida. O mesmo ocorre com os registros verbais escritos das operações efetuadas, principalmente quando se trata de registros de representação semiótica (Duval 1993; 1995) em que se faz uso de símbolos e signos típicos da linguagem matemática.

A partir do exemplo utilizado pelo pesquisador, Jm(16;1) conseguiu perceber que 8% trata-se de **um pedaço** (como disse ele) do todo. Pedaço este que significa parte de um todo.

Quando o pesquisador mencionou o termo **partes**, os participantes reagiram positivamente. O **quinhão** a que se referiu Jm(16;1) significa a quantia que compete a cada um. Em outras palavras, é a parte de um mesmo todo, ou mesmo a parte da parte, que compete a cada um, quando da partilha do pescado. Nas palavras de Cf(23;5), 8% é uma *pequena parte* de um *todo*.

Depois de várias tentativas e mesmo da indicação do pesquisador, Jm(16;1) conseguiu organizar os dados numa **tabela de números proporcionais (registro de representação numérico em tabela de proporcionalidade)**, conforme transcrição a seguir.

8	100
16	200
33	300
40	500

Cf(23;5) apresentou dificuldade em efetuar a divisão e não soube explicar a causa de suprimir ou acrescentar zeros após o último dígito do quociente. Conseguiu perceber e estabelecer o **operador**, embora não tenha conseguido explicar sua utilização. Fez uso constante da **adição ou subtração sucessiva**.

A partir da tabela de Jm(16;1), Cf(23;5) registrou a seguinte tabela:

8	100
16	200
24	300
32	400
40	500

Novamente temos o que Brousseau (1988) trata de regras implícitas ao contrato didático: os participantes efetuaram registros verbais escritos para atender à solicitação do pesquisador.

O diálogo entre o pesquisador e Cf(23;5) fornece algumas indicações sobre a forma como este participante organizou os dados. Isso pode ser visto na transcrição a seguir.

Cf(23;5) – *É o que eu fiz aqui (indicando a divisão de 40 por 8).*

P – *Como você tinha feito?*

Cf(23;5) – *Dividi.*

P – *Quanto?*

Cf(23;5) – *Dividi 40 por 8 e deu 5.*

P – *40 por 8 dá 5. Ok. Por que você dividiu 40 por 8?*

Cf(23;5) – *Por que eu acho mais fácil.*

P – *Mas é 500? E os dois zeros?*

Cf(23;5) – *Eu dividi 40 por 8 e deu 5, daí eu botei os dois zeros que sobraram aqui (indicando à direita do 5). Eu estou com essa regrinha na cabeça. Aí eu cheguei a esse resultado.*

P – *E quanto é o salário do cara?*

Cf(23;5) – *500 reais.*

P – *Quer anotar isso na folha?*

Cf(23;5) – *Anoto. (Escreveu: “Eu dividi ~~40~~ 8 que chegou a 5 e os dois zeros que sobraram eu acrescentei do lado do 15 que ficou R\$ 500,00.)*

A divisão de 40 por 8 a que se referiu Cf(23;5) se assemelha muito mais às **regras implícitas ao contrato didático** nos termos de Brousseau (1988) do que à percepção de que tanto o 8% como os R\$ 40,00 seriam partes de todos distintos que mantêm relação entre si. Possivelmente esta divisão foi efetuada para ver qual seria o fator multiplicativo, mas o participante não soube explicitar isso. Pode-se dizer que ele respondeu para dizer algo ao pesquisador.

Novamente os participantes fizeram uso de registros de **representação semiótica numéricos**. Somente a partir da interferência do pesquisador os registros verbais escritos passaram a ser organizados em **tabela de números proporcionais**. Esta é uma forma de organizar dados e informações pouco usual no contexto social e, talvez por isso, os participantes também não fizeram uso espontaneamente.

#### **4.8.2. Considerações em relação aos registros utilizados pelos participantes no Estudo II**

No decorrer dos diálogos é possível perceber algum tipo de relação entre **conhecimentos escolares e não-escolares**. Quando o participante Cf(23;5) falou *porque 10% de 100 reais é 10 reais*, a relação foi estabelecida a partir de situações que enfrentou em seu contexto social mais imediato, o que não significa dizer que na escola não se discuta essa relação sob esta perspectiva. Quando o participante percebeu que 10% se refere a toda e qualquer relação entre 10 e 100, temos o conhecimento escolarizado.

Quando os participantes não foram instigados a (re)pensar seus feitos, houve a tendência de que seus **registros verbais escritos** se situassem no campo da **aritmética**. Por meio dos diálogos estabelecidos com o colega ou mesmo com o pesquisador, os participantes (re)pensaram sobre os feitos e muitas vezes conseguiram perceber outras relações, outros registros verbais escritos e neles, outros procedimentos que os conduziram à solução do problema. Ficou patente a tendência em organizar as quantidades em **metade** ou **dobro**, o que indica apoio em situações do contexto social mais imediato, como, por exemplo, o processo de solução denominado pelos pescadores de **partes**.

No caso dos pescadores, o número de **partes** que compete a cada sujeito numa pescaria é estabelecido de acordo com a função que exerce em seu trabalho. O somatório do número de *partes* é o quociente da divisão com a quantidade de peixe pescado, obtendo-se o valor de uma quota. Este valor é o coeficiente multiplicador que indicará a quantidade correspondente a cada sujeito. Esta quantidade também conhecida pelos nativos da Região do Vale do Itajaí como “quinhão”. **Partes** não trata apenas da “divisão por partição”, mas congrega a “divisão por quota” e a “multiplicação simples”, destacadas por Vergnaud (1983). Trata-se de um caso de “quarta proporcional” porque ao se obter o valor correspondente a cada parte – unidade, este passa a ser coeficiente multiplicativo – “operador função”.

Em relação aos registros verbais escritos, podemos dizer que os participantes utilizaram registros de representação **numéricos aritméticos**, nos quais operaram com os números disponibilizados no enunciado do problema sem se dar conta da existência de um **registro algébrico**. O registro de representação numérico por **tabela de proporcionalidade** apareceu porque, no decorrer da entrevista, o pesquisador mostrou a possibilidade de seu uso na solução de problemas de proporção. Esse é um indício de que os participantes não compreendem, de forma ampla, o conceito de proporção. Nos problemas propostos, os participantes precisavam reconhecer a relação entre a taxa percentual e a centena, alinhando seus valores absolutos em colunas que representam quantidades distintas.

Este estudo, assim como no Estudo I, aponta que os participantes buscaram apoio em conhecimentos utilizados em situações da vida prática, por isso é interessante que se proponham problemas que versam sobre assuntos familiares, o que não significa que se deva permanecer nos patamares de senso comum. Este é o ponto de partida e não o ponto de chegada.

No que concerne à conversão (Duval 1993; 1995), podemos dizer que nem sempre os participantes deste estudo fizeram uso correto dos de representação semiótica de que trata este autor, no entanto atribuíram um significado operatório que lhes permitiram responder ao que era perguntado pelo enunciado do problema.

Este estudo exigiu do pesquisador a mediação (seja por meio dos diálogos ou por meio da indicação de registros verbais escritos) para que os alunos solucionassem os problemas. Pela mediação, os participantes conseguiram efetuar as devidas conversões e fazer uso registros de representação semiótica (Duval 1993; 1995).

Esses resultados apontam para a necessidade de o professor propor situações que levem os alunos a efetuar as devidas conversões, coordenando as transformações entre os sistemas de registros de representação semiótica.

O fato de os participantes buscarem apoio em situações utilizadas no processo de escolarização (reminiscências escolares – Fonseca 2001; 2002), nos remete a fazer uma ausculta no modo como os professores que ensinam matemática na EJA solucionam este tipo de problemas.

#### **4.9. Estudo III: realizado com uma dupla de professores**

Na entrevista com os professores, PMm(43;7) resolveu os três problemas utilizando a idéia da proporção, mais especificamente por meio da “regra de três”, não se preocupando em apresentar diferentes maneiras para solucionar cada um deles. MGf(37;10) também solucionou os problemas sem se preocupar com as diferentes possibilidade de registros de representação semiótica (Duval 1993; 1995; 2003).

##### **4.9.1. Análise dos registros verbais orais e escritos no Estudo III**

###### **Problema 1**

Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?

Inicialmente o participante PMm(43;7) efetuou o registro de representação numérico aritmético  $2 \times 30 = 60$ . O registro de representação expresso pelo participante dá

indício de duas operações: uma  $200 : 100 = 2$  e a outra, expressa no registro. Na parte não expressa (implícita), podemos supor que o participante dividiu 200 por 100, obtendo 2 como quociente, em seguida multiplicou este quociente por 30, obtendo 60 como resultado. Neste caso, a divisão por 100 refere-se à centena; é a avaliação da quantidade inicial em relação à centena, portanto, o significado da porcentagem.

O registro verbal escrito em que fez uso da “regra de três” apareceu logo em seguida. Isso pode ser visto na transcrição a seguir.

$$\begin{array}{l} 200 \text{ reais} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 100\% \\ x \quad \quad \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 30\% \\ x = 60 \text{ reais} \end{array}$$

Neste registro verbal escrito aparece o registro de **representação algébrico** no qual o participante fez uso da variável  $x$ , para representar o termo desconhecido ou a incógnita. O participante estabeleceu relação entre a quantidade inicial e a taxa percentual (100%), ou seja, estabeleceu a comparação com a centena. Em outros termos, pode-se dizer que ele reconhece a proporção.

Depois de ter solucionado os três problemas e, mediante a indagação do pesquisador, PMm(43;7) fez uso de outros registros de representação semiótica. Assim, ao solucionar este problema o participante fez uso de seis registros de representação semiótica, sendo quatro **numéricos** e dois **algébricos**. Os registros de representação numéricos diferem entre si, em função do tratamento adotado em cada um deles.

O registro verbal escrito pelo participante (**registro de representação aritmético**), transcrito a seguir, difere do primeiro em função do tratamento, ou seja, o participante dividiu 200 por 100, obtendo 2 como quociente e dividiu 30 por 10, obtendo 3 como quociente. Multiplicou estes dois quocientes obtendo 6 como produto. Aqui, a divisão por 100 não se refere à avaliação da quantidade inicial em relação à centena, mas sim ao divisor de 200, assim como o 10 é o divisor de 30.

A avaliação em relação à centena aconteceu depois, quando o participante encontrou o produto entre o produto dos divisores de 200 e 30, isto é, o produto entre 100 e 10, respectivamente. Efetuou a divisão deste produto (1.000) por 100, encontrando 10 como quociente, que é multiplicado pelo produto encontrado inicialmente (6), tendo-se  $6 \times 10 = 60$ , o que corresponde a R\$ 60,00. Os diálogos estabelecidos com o pesquisador são bastante elucidativos, vejamos:

P - Você consegue ver outras maneiras de resolver?

PMm(43; 7) - Eu vou fazer do jeito que meu pai me ensinou, então.

PMm(43;7) fez o seguinte registro de representação:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & \times & 3 & = & 6 & & 60,00 \text{ reais} \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\ 200 & & 30 & & & & \frac{1000}{100} = 10 \end{array}$$

PMm(43; 7) - É assim que meu pai faria. Duas vezes três, seis, próximo, sessenta reais.

P - Por que você colocou o 200 e o 30 aqui?

PMm(43; 7) - Não. O 2 que é do 200 e o 3 do 30.

P - Ah! Por que, de 6 ele passou para 60?

PMm(43; 7) - Pois é. Porque o 30 é próximo de 100, aí eu faço assim, oh. Esse, esse e esse (indicando para os dois zeros do 200 e o zero do 30) e vai dá mil. Aí, 1.000 como é dividido por 100, divide por 100, vai dar 10, (indicando o registro da operação efetuada) então tem que multiplicar esse daqui (indicando para o 6) por 10.

P - Ah! Legal.

PMm(43; 7) - Foi meu pai que me ensinou.

(...)

PMm(43; 7) - Se ele pegasse o 200 por 30, daria 6000 aqui. Não, eu só peguei o zero. Ele faz assim: 200 e 30, tem três. Três zeros. Três zeros. Como é por 100, fica um zero só. Então faço o cálculo.

A interferência do pesquisador ao indagar ao participante sobre outras maneiras de resolver, desencadeou, além do diálogo, os registros dos procedimentos adotados. Nos diálogos o participante fez menção a pontos de apoio para os procedimentos que utiliza. Vejamos.

*Vou fazer do jeito do meu pai.* Esta fala nos leva a crer que, em seu cotidiano, as pessoas escolarizadas ou não encontram modos de solucionar problemas de matemática que são difundidos no meio social. Possivelmente os modos utilizados estão imersos nos conhecimentos da vida prática e se manifestam de forma mais explícita nas conversas, principalmente quando as pessoas são submetidas a resolver problemas que tratam de situações similares àquelas encontradas em seu dia-a-dia. Isso não significa dizer que elas não aparecem nos afazeres de tarefas escolares.

Cabe destacar também que, embora os professores saibam da existência, e mesmo conheçam uma série de estratégias utilizadas pelas pessoas em seu contexto social

imediatamente, nem sempre conseguem ou querem aproveitar tais conhecimentos como ponto de partida para novas aprendizagens e novas elaborações.

É interessante perceber que no transcorrer dos diálogos PMm(43;7) foi esclarecendo os procedimentos e as operações realizadas. Na divisão das quantidades fornecidas pelo enunciado do problema, o participante utilizou múltiplos de 10. Neste caso, 100 e 10 respectivamente ( $200 : 100 = 2$  e  $30 : 10 = 3$ ). Este procedimento apareceu também na avaliação do produto dos divisores em relação à centena ( $[(100 \cdot 10) : 100] = 10$ ). Na retomada dos quocientes das divisões das quantidades fornecidas pelo enunciado, pelos seus respectivos divisores múltiplos de 10 (neste caso 2 e 3 respectivamente) e com o produto entre eles (6). Este produto, ao ser multiplicado pelo quociente da divisão ( $1.000 : 100 = 10$ ), foi avaliado em relação à centena, assim  $6 \cdot 10 = 60$ .

Outro registro verbal escrito (**registro de representação numérico**) difere dos anteriores porque o participante encontrou inicialmente o coeficiente de proporcionalidade (2), a partir do quociente entre a quantidade inicial (200) e a centena. Aqui a quantidade inicial foi avaliada em relação à centena. É esta avaliação que caracteriza a porcentagem. Este coeficiente de proporcionalidade refere-se ao valor correspondente a 1%. Dito de outra maneira, o participante procurou o **valor correspondente à unidade relativa**. A partir do coeficiente correspondente à unidade percentual e pela proporção, encontrou o valor correspondente à taxa percentual fornecida pelo enunciado do problema. PMm(43;7) organizou os dados numéricos em pares, correspondentes aos pares ordenados de uma função. Isso pode ser percebido no registro transcrito a seguir.

1% _____	2,00	←	reais
2% _____	4,00	←	200
3% _____	6,00	←	100
30% _____	60,00	←	2

*PMm(43; 7) - Assim que eu ensino meus alunos.*

*O por cento, que dá 2. Fazer o cálculo de 200 por 100 ( $200 : 100$ ). Vai dá 2. Aí esse 2 é 1%. Que é o caminho de MGf(37;10), aí, 2% é o dobro, 2 dá 4, 3 dá 6, colocando 30, justifica o 60. Trabalho com a divisão e a proporção pra mostrar pra eles que porcentagem é encima disso.*

Este registro mostra a utilização da relação de proporcionalidade na vertical, quando passa de 1% para 2%, depois para 3% e em seguida para 30%; assim como na passagem de 2,00 para 4,00, depois para 6,00 e, finalmente para 60,00; como também na

horizontal, fazendo passar de 1% para 2,00, de 2% para 4,00, de 3% para 6,00 e de 30% para 60,00.

Neste registro, a forma de organização dos dados numéricos (1% → 2,00) indica a relação da correspondência. Esta forma de organização é interessante porque permite que o sujeito perceba a proporção, tanto na vertical quanto na horizontal.

O registro verbal oral deste participante: *Assim que eu ensino meus alunos*. Indica que o professor também procura meios, quer para sua própria compreensão, quer para fazer com que seus alunos compreendam. Em outras palavras, pode-se dizer que o professor busca alternativas para proporcionar condições para que o outro, neste caso o aluno, compreenda o quê e como se estão organizando os dados e informações para operar matematicamente. Podemos dizer que se trata de escolhas que são permeadas por valores culturais, e que nem sempre coincidem com o modo de pensar do adulto. Aqui reside uma das tantas importâncias dos registros de representação semiótica, a que Duval (1993) se refere: de permitir estabelecer a comunicação entre o sujeito e o objeto representado; mas não só isso, permitir também que outros, ao se depararem com o registro efetuado, possam compreender o feito.

Em outro registro verbal escrito (**registro de representação numérico**), PMm(43;7) fez a passagem do registro da taxa percentual, representação numérico na forma percentual (30%), para o **registro de representação numérico na forma fracionária** (30/100) e, posteriormente, passou o registro de representação numérico fracionário para o **registro de representação na forma decimal** (0,3). A passagem de um registro para o outro, nos termos de Duval (1993), denomina-se conversão. Este participante operou matematicamente com os dois últimos registros e seus respectivos tratamentos. Isso pode ser percebido no registro transcrito a seguir.

$$\begin{aligned} 30\% &= 30/100 \\ 200 \times \frac{30}{100} &= \frac{6000}{100} = 60 \end{aligned}$$

$$200 \times 0,3 = 60,00$$

Esses três tipos de registros de representação numérico (**percentual, fracionário e decimal**) foram identificados por ocasião da elaboração da pesquisa que resultou na dissertação do Mestrado (Vizolli, 2001). A conversão entre os registros revela que o

participante percebeu a relação existente entre a taxa percentual, a fração e o decimal. No entanto, cada um apresenta especificidades em relação ao tratamento da operação.

A operação matemática em cada um deles apresenta custos cognitivos diferentes. Estes custos cognitivos são intrínsecos ao registro verbal escrito utilizado. O registro de representação numérico na forma percentual (30%) pode ser considerado congruente, utilizando os termos de Duval (1993) ao registro de representação numérico na forma fracionária (30/100), tanto na grafia numérica (30%) quanto na pronúncia (trinta por cento), assim como no significado do registro verbal oral. Já a conversão do registro de representação numérico na forma fracionária para o registro de representação numérico na forma decimal, assim como na conversão do registro de representação numérico na forma percentual para o registro de representação numérico na forma decimal, não é tão congruente assim, quer pela sua forma de representação numérica, quer pela sua pronúncia, quer no significado alfabético.

De acordo com Duval (1993), a conversão é um dos aspectos fundamentais ao processo de compreensão do objeto em estudo; isso porque ela possibilita que o sujeito perceba o objeto representado em diferentes registros de representação. Os registros verbais escritos pelo participante dão indícios de que ele coordena o processo de mudança de registro de representação.

Outro registro verbal escrito efetuado por Pmm(43;7) corresponde a um registro de representação por função. A transcrição a seguir permite a identificação deste tipo de registro.

$$\begin{aligned}y &= \%x & y &= ax \\y &= \text{aumento} \\a &= \% \text{ aplicada sobre o salário} \\x &= \text{salário}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= ax \\y &= 30\% \cdot 200 \\y &= \frac{30}{100} \cdot 200 \\y &= 0,3 \cdot 200 \\y &= 60,00.\end{aligned}$$

Para que o sujeito possa efetuar este tipo de registro de representação com significado, ele precisa compreender em nível conceitual a proporção e a equação, ao mesmo tempo em que consegue identificar o objeto representado, em diferentes registros

de representação semiótica, coordenando as devidas conversões, no sentido de Duval (1993). Ele é um registro de representação que exige abstração. Por isso não pode ser considerado um registro de representação trivial para os alunos e nem mesmo para muitos professores, inclusive professores de matemática. Quando o sujeito consegue efetuar este tipo de registro de representação, é porque ele já conhece a proporção-porcentagem de forma mais ampla e sistematizada.

Para solucionar o problema 1, MGf(37;10) procurou o **valor correspondente a 1%**. Dividiu 200 por 100, obtendo 2 como quociente, que multiplicado por 30 chegou a 60, respondendo que o aumento seria de R\$ 60,00. Isso pode ser visto na transcrição do registro verbal escrito, a seguir:

(Primeiros registros efetuados para solucionar o problema 1).

$$\begin{array}{r}
 200 \quad \left| \begin{array}{l} 100 \\ \hline 2\% = 1\% \end{array} \right. \\
 \\
 30 \\
 \times 2 \\
 \hline
 60 \\
 \text{R\$ } 60,00
 \end{array}$$

Trata-se de um registro de representação numérico aritmético em que o participante procurou o coeficiente de proporcionalidade correspondente à unidade de taxa percentual, dividindo 200 por 100 para encontrar tal coeficiente.

É interessante observar que este participante efetuou a divisão por 100. No entanto, isso não garante que ele tenha a compreensão de que a porcentagem é a avaliação de uma quantidade em relação à centena.

O registro verbal escrito, transcrito a seguir, revela que a divisão por 100 aparece como parte constituinte do algoritmo utilizado para resolver problemas sobre porcentagem. Possivelmente o registro verbal escrito apresentado pelo participante tenha sido efetuado porque o pesquisador solicitou que os efetuassem.

*Pra aprender porcentagem tem que saber 1%, pra depois multiplicar pelo 1%, tem uma regrinha. E aí, na hora que tem que aprofundar, você tem uma dificuldade, aí você não consegue fazer relação. Porque você não aprende o porquê.*

A busca de uma regrinha, como nos fala MGf(37;10), é um indicador da algoritmização feita pelo ensino da Matemática no processo escolarização, principalmente

quando o professor não prioriza a compreensão do sentido e do significado operatório (Duval, 1993). Podemos dizer que algoritmização é, muitas vezes, uma regra implícita ao contrato didático (Brousseau, 1988) e, ainda, a situação discursiva suscita as reminiscências (Fonseca 2001; 2002).

Após as discussões sobre a diversidade de registros de representação que poderiam ser utilizados na solução destes e outros problemas, MGf(37;10) resolveu o problema 1, utilizando o **valor correspondente a 1%** e organizou uma **tabela indicando igualdades**. Diferentemente da tabela apresentada por PMm(43;7), a qual apresentava a idéia de pares ordenados. Vejamos.

$$\begin{aligned} 1\% &= 2 \\ 2\% &= 4 \\ 3\% &= 6 \\ 30\% &= 60 \end{aligned}$$

## Problema 2

Um trabalhador recebe um salário de R\$ 500,00 e está defasado em R\$ 200,00. Expresse essa defasagem na forma de taxa percentual.

Ao solucionar este problema, o participante PMm(43;7) também fez uso da “regra de três”, no entanto, considerou como quantidade de referência, 700 (soma do salário com a defasagem) e respondeu que a defasagem era de 28,57%.

No problema 2, MGf(37;10) continuou a busca do valor correspondente a 1%, o que pode ser visto na transcrição do registro verbal escrito, a seguir:

$$\begin{aligned} 500 \quad \underline{100} \\ 5 &= 1\% \\ \\ 50 & \quad 60 \\ \underline{x 5} & \quad \underline{x 5} \\ 300,00 & \\ 50\% &= 250,00 \\ \\ x &= 300,00 \\ 250x &= 15000 \\ x &= \frac{15000}{250} \end{aligned}$$

O participante dividiu 500 por 100, obtendo 5 como quociente, informando que esse valor correspondia a 1%. Seguindo o processo de solução, multiplicou 5 por 50 e, 5 por 60, obtendo 250 e 300, respectivamente. Ao perceber que não obteve sucesso e, na dúvida, escreveu  $50\% = 250,00$  e  $x = 300,00$ . Mesmo assim não chegou a um resultado que lhe satisfizesse. Ao escrever  $50\% = 250,00$ , tem-se um exemplo típico da busca do **referencial metade** de que nos fala Spinillo (1992).

A partir da divisão de 500 por 100, efetuada por MGf(37;10), dá indícios da avaliação da quantidade inicial com a centena, mas, ao tentar solucionar o problema, não estabeleceu corretamente a relação entre 1% e 5, com a taxa percentual (pergunta do problema) e com 200. Neste caso, a avaliação com a centena pode ser interpretada como uma regra implícita ao contrato didático (Brousseau, 1988), qual seja: o problema é de porcentagem, então é preciso comparar com 100, ou ainda, como reminiscências da matemática escolar (Fonseca 2001; 2002).

Ao comentar a solução deste problema, MGf(37;10) fez uma revelação que merece ser analisada por todos aqueles que têm preocupação direta ou indireta com o processo de ensino e aprendizagem, independentemente da modalidade educativa.

*Mas eu quero te dizer uma coisa agora. Uma experiência minha, coisa particular. Isso aqui (indicando para o registro que encontrou 1% equivalente a 5), eu fiz com a informação que eu tive da escola. E isso aqui (indicando a metade –  $50\% = 250,00$ ), eu fiz esquecendo a escola. Esse aqui eu falei assim, eu fui por esse caminho que a escola me ensinou de forma sistematizada, que é achar primeiro 1%, pra depois saber quantos por cento que é. Eu aprendi isso na escola. Depois eu falei, não. Só essa informação não me basta. Eu preciso de uma outra informação, aí eu fui tentar usar a lógica matemática. Bom. Primeiro eu tenho que saber: metade, quanto seria? Eu pensei: metade, 50% em percentual, seria 250. Aí, caramba, tem que dar menos agora. Então tem que ser menos de 50%. Aí eu comecei a ter a dúvida, então. Eu tinha essas informações agora, e na hora de sistematizar? Pra achar esse menos, aí eu levei um tempinho aqui.*

A fala de MGf(37;10) revela a fragilidade do processo de ensino da Matemática no contexto escolar: não garante a aprendizagem. Para este participante, a escola proporcionou o conhecimento da existência de um algoritmo que funciona como uma ferramenta para ser utilizada na solução de problemas que versam sobre porcentagem. Isso por si só não garante ao sujeito encontrar a resposta ao que lhe é perguntado no problema, tanto é que o participante, embora tenha demonstrado riqueza e, em muitas situações, consistência em seus raciocínios, não conseguiu responder ao que lhe foi perguntado no

enunciado do problema, ou seja, que expressasse, na forma percentual, a defasagem salarial.

Esta fala revela também que a escola não tem levado em consideração a lógica em que o sujeito ancora seus raciocínios para encontrar respostas ao que lhes é perguntado. Um exemplo disso é a busca do apoio em metade, 50%, relação esta que MGf(37;10) conseguiu estabelecer. Trata-se da **tentativa e erro**, com inversão da pergunta para o formato multiplicativo, um recurso mais aritmético que algébrico. Isso não é o suficiente, mas é uma forma consistente e que possibilita estabelecer outras relações.

Em seus registros, é possível perceber as tentativas feitas, na perspectiva de encontrar a taxa percentual de defasagem salarial ( $50 \times 5 = 250$  e  $60 \times 5 = 300$ ). Na verdade, este participante buscava encontrar um valor que multiplicado por 5 resultasse em 200, mas faltou-lhe perceber a operação inversa da multiplicação – uma vez que se tem o coeficiente de proporcionalidade, neste caso 5, basta dividir a defasagem pelo coeficiente, para se encontrar a taxa percentual relativa à defasagem ( $200 : 5 = 40$ , que seria 40%). Ou mesmo, tendo encontrado a diferença entre 500 e 200 (300), também obtida pelo produto do coeficiente de multiplicação por 60 ( $60 \times 5 = 300$ , o que corresponde a 60%), bastava subtrair de 100%, para obter o índice de defasagem ( $100 - 60 = 40$ , que seria 40%).

MGf(37; 10) buscou estratégias diferentes para tentar encontrar uma resposta que fizesse sentido, não só em termos matemáticos, mas, principalmente, em função de que a resposta numérica estivesse de acordo com os dados fornecidos pelo enunciado do problema e o que era perguntado por ele.

Quando o sujeito possui algum tipo de compreensão do objeto de estudo e consegue utilizar determinados registros de representação, isso lhe facilita a busca de novas possibilidades para solucionar o problema e até mesmo outros registros de representação.

Em relação ao problema 1, as informações que a escola havia passado para MGf(37;10) foram suficientes para encontrar a resposta ao que foi perguntado no enunciado do problema. Uma vez encontrado o equivalente a 1%, bastou multiplicar pelo valor absoluto da taxa percentual fornecida pelo enunciado. Foi isso que este participante fez. O mesmo não ocorreu com o problema 2.

### Problema 3

O trabalhador de uma empresa que recebe salário tem direito ao Fundo de Garantia por Tempo de Serviço – FGTS, que é de 8% sobre o salário bruto (salário bruto é o valor total da folha de pagamento). Sabendo que o valor do FGTS que a empresa tem de depositar mensalmente é de R\$ 40,00, qual é o valor do salário bruto desse trabalhador?

Ao solucionar o problema 3, o participante PMm(43;7), assim como nos problemas anteriores, fez uso da “regra de três” e utilizou a incógnita  $x$  para representar a quantidade inicial e, utilizando a propriedade fundamental da proporção, descobriu o valor de “ $x$ ”. Isso pode ser visto na transcrição do registro verbal escrito a seguir.

$$\begin{array}{l} 40 \quad \underline{\quad} \quad 8\% \\ x \quad \underline{\quad} \quad 100\% \\ x = \frac{4000}{8} = 500 \end{array}$$

*O salário bruto é de 500,00.*

Para resolver o problema 3, MGf(37;10) também utilizou a “regra de três”, conforme consta na transcrição do registro verbal escrito a seguir.

$$\begin{array}{l} 8\% \quad \underline{\quad\quad\quad} \quad 40 \\ 100\% \quad \underline{\quad\quad\quad} \quad x \\ 8x = 4000 \\ x = \frac{4000}{8} \\ x = 500 \end{array}$$

O uso da “regra de três” aconteceu após a discussão sobre o “erro” efetuado por PMm(43;7), ao tentar solucionar o problema 2. MGf(37;10) percebeu que PMm(43;7) havia utilizado a regra de três para solucionar os três problemas propostos.

#### 4.9.2. Considerações em relação aos registros utilizados pelos participantes no Estudo III

É interessante destacar que enquanto PMm(43;7) se mostrava seguro em solucionar os problemas e o fez rapidamente, ocupando bastante espaço na folha em que

constava cada um dos problemas, MGf(37;10) ocupava um espaço reduzido na folha, pressionando pouco o lápis sobre o papel. Aqui fica patente a mediação na tríade, conforme mencionado no Estudo II.

Outra observação importante é que, enquanto MGf(37;10) lia atentamente os problemas para depois buscar alternativas de solução, PMm(43;7) lia uma única vez e resolvia-os sem hesitação. Enquanto MGf(37;10) ainda não havia concluído a solução do problema 2, PMm(43;7) havia resolvido os três problemas retomando o problema 2, porque percebeu que havia algo que não estava de acordo. É importante também destacar que, embora o pesquisador tenha informado aos participantes sobre os objetivos da entrevista e da pesquisa, estes se preocuparam principalmente em solucionar os problemas.

A utilização da “regra de três” é bastante divulgada pelo processo de escolarização e também bastante utilizada pelas pessoas que tiveram acesso à escola, quando esta lhe proporcionou tal conhecimento. Isso não significa dizer que o sujeito que utiliza tal regra compreenda o significado matemático que ela congrega; daí porque, muitas vezes, o sujeito não percebe as relações entre as grandezas e quando há uma inversão da proporcionalidade no comportamento das grandezas, aplica a regra de três em sua forma direta. Isso significa que o sujeito ainda não compreendeu o significado da proporção; nesse caso, a regra de três não passa de uma regra.

Para compreender o significado da regra de três, há que se levar em consideração a lei de proporcionalidade que rege o comportamento das grandezas expressas pelo enunciado do problema. Muitas vezes a escola acaba enfatizando a lei da proporcionalidade direta, por meio da propriedade fundamental da proporção – *o produto dos meios é igual ao produto dos extremos* – mas nem sempre o sujeito sabe identificar quais são os meios, nem quais são os extremos.

Para que a regra de três tenha significado para o sujeito que a utiliza, é preciso que ele reconheça a proporção entre as quantidades das grandezas e a equação. Do contrário, tem-se um processo algorítmico automatizado e isso não necessariamente exige que o sujeito compreenda estes conceitos. Neste caso, tanto a proporção quanto a equação funcionam como “regras” matemáticas de que o sujeito lança mão para resolver determinados problemas, o que pode acontecer também com o uso da estratégia pela regra de três.

Quando o sujeito utiliza a estratégia da regra de três, necessariamente lança mão de uma sentença matemática aberta, expressa por uma igualdade. Por isso denominado de

registro de representação algébrico na forma de equação. Ao se tratar de uma equação de 1º grau, ela pode ser representada pelo modelo matemático  $ax + b = 0$ , onde “a” e “b” são os coeficientes, com “a”  $\neq 0$  e “x” representa a incógnita.

Ao observar os registros verbais orais e escritos pelos professores, podemos perceber a marca de registros com marcas socioculturais, assim como registros com marcas escolares, ou nos termos de Fonseca (2001; 2002), reminiscências da matemática escolar. No que concerne aos registros de representação semiótica (Duval 1993; 1995; 2003), encontramos registros numérico (aritmético, fracionário, decimal, porcentagem, tabela de números proporcionais) e algébrico (equação e função).

A análise que fizemos dos registros de representação que estes participantes utilizaram, assim como das idéias matemáticas que estes participantes fizeram, permite dizer o participante MGf(37;10) possui compreensão parcial do conceito de proporção-porcentagem, enquanto que PMm(43;7) o compreende em nível conceitual. Ao analisar a diversidade de registros de representação utilizados por PMm (43;7) e o trânsito que o participante faz entre os registros efetuados, permitimo-nos dizer que ele coordena a passagem entre tais registros.

Os resultados dos obtidos nos Estudos I, II e III nos remeteram ao Estudo IV, em que fizemos uma ausculta mais acurada nos registros verbais orais e escritos por quatro duplas de alunos que freqüentavam o 4º Ciclo do curso de EJA.

#### **4.10. Estudo IV: realizado com quatro duplas de alunos**

Apresentamos a seguir as análises dos dados coletados com as quatro duplas de alunos, bem como as discussões dos resultados. Seguimos os mesmos critérios adotados na apresentação dos Estudos I, II e III, obedecendo à ordem de entrevista de cada uma das duplas.

##### **4.10.1. Primeira dupla: EPm(22;11) e LAf(35;5)**

###### **Problema 1**

Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?

O pesquisador fez a leitura do problema 1 e em seguida perguntou aos participantes se compreenderam. Repetindo as informações principais: Ele deu o salário, 30% de aumento, perguntou o aumento. A atitude do pesquisador é um indicador de sua interferência no processo de compreensão.

Os participantes EPm(22;11) e LAf(35;5) ouviram atentamente a leitura e os indicativos do pesquisador. Passados alguns minutos registram, em suas respectivas folhas, as seguintes operações:

**EPm(22;11)**

$$\begin{array}{r} 00,20 \\ \times 30 \\ \hline 00,00 \\ 00,60 - \\ \hline 006,00 \end{array}$$

**LAf(35;5)**

$$\begin{array}{r} | 30 \\ - 18 \overline{) 6,00} \end{array}$$

Os registros verbais escritos indicam que os participantes buscaram um algoritmo para solucionar o problema, no entanto não dominam as regras de significado e funcionamento a que se refere Duval (1993). Esses registros são constituídos por números e representam operações fundamentais; neste caso, multiplicação e divisão, respectivamente. Referem-se a **registros de representação semiótica numérico aritméticos**.

Ao perceber que o pesquisador os observava, EPm(22;11) falou: *Faz muito tempo que eu não faço mais problema de porcentagem*. Em seguida leu o problema e novamente o pesquisador interferiu com a pergunta: *O que o problema deu?* LAf(35;5) respondeu: *Ele deu um valor de 200*. O pesquisador acompanhou suas respostas, concordando com elas.

*Diz que deu um aumento de 30%.*

*De quantos reais seria este aumento?*

*Dá pra dizer que é um aumento de 60 reais.*

Ao ser questionado pelo pesquisador como havia pensado para chegar aos R\$ 60,00, respondeu: *pegar esse 200 e dividir por 30 pra saber este aumento*. Enquanto o pesquisador dialogava com LAf(35;5), EPm(22;11) acompanhava. Quando o pesquisador referiu-se a ele, falou: *eu fiz 200 vezes 30*. Ao ser questionado sobre o valor encontrado, que dizia ter sido 600, e não 6,00 conforme registro da operação matemática efetuada, afirmou que tinha dúvidas, uma vez que 600 é muito alto.

Concordando com EPm(22;11) que este valor seria muito alto, LAf(35;5) voltou a refletir sobre os dados apresentados no enunciado falando: *Se aumento 30%?*, e continuou tentando encontrar uma explicação. Recorreu a 10% de 200, mas a resposta não veio. O pesquisador propôs uma revisão perguntando a EPm(22;11): *O que significa 30%? O que quer dizer 30%?* Mesmo assim, a resposta não veio. O pesquisador insistiu: *Não posso dizer que é 30 de cada 100?* LAf(35;5) entrou na conversa e disse: *Pode, porque é porcentagem.* EPm(22;11) tentou se convencer e falou: *Por 100. Cada 100 pode 30.* Em seguida respondeu: *São 60.* Resposta esta que veio junto com a resposta de LAf(35;5): *60.* As conversas que se seguiram confirmam o que foi dito anteriormente em relação às regras de significado e funcionamento (Duval 1993; 1995) dos registros de representação matemática.

Mais adiante o pesquisador perguntou: *de que maneira podemos fazer uma conta, para chegar aos R\$ 60,00?* Durante os diálogos, os participantes foram compondo os dados e informações e encontraram uma forma de chegar ao resultado. Isso pode ser visto nos trechos das transcrições dos protocolos que seguem.

*P - Tá. Fala pra mim, como é que você organizaria de cabeça, 30% de 200?*

*LAf(35;5) - Eu faria assim: 10% né. 10% de 200 eu sei que vai dá 20.*

*P – OK.*

*LAf(35;5) - Mais 20%, daria 40, mais 30%, seria 60%. Aí, 10, 10, 10, seria 60, aliás, 20, 20, 20 daria 60.*

*P - Ok. Então agora escreve o que você falou. Pode ser na forma de conta, ou como você me falou. Do jeito que você consegue escrever o que me falou.*

*LAf(35;5) Fez as seguintes operações:*

$$\begin{array}{r} 200 \quad | \quad 10 \\ \hline 00 \quad 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 200 \quad | \quad 10 \\ \hline 00 \quad 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 200 \quad | \quad 10 \\ \hline 00 \quad 20 \end{array}$$

*(Em seguida fez a seguinte multiplicação)*

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 3 \\ \hline 60 \end{array}$$

*(...)*

*P - Ok. Então como é que você faz?*

*EPm(22;11) - Se fosse 20% e tivesse 300, eu faria e cabeça. Como o senhor explicou: cada 100 eu ia bota 20.*

*P - Ok. Faz o que você me disse, do jeito que consegue fazer.*

*EPm(22;11) - 30 vezes 2.*

*(Fez a seguinte operações):*

$$30$$

$$\frac{x}{60}$$

P - Ok. Por que é que você botou 30 vezes 2?

EPm(22;11) - Porque é 30% e 2 porque são 200.

P - OK.

EPm(22;11) - Porque são dois por cento, então são duas vezes 100.

(...)

P - Legal. Olha que coisa interessante que LAf(35;5) fez. Vamos ver o que tem de igual no que vocês fizeram. Conta pra nós LAf(35;5) como você fez.

LAf(35;5) - Tá. Peguei 200, pra saber 10% de 200, que seriam R\$ 20,00. Aí, faço três vezes 20, dividido por 10. Vou chegar a 20 cada um. Aí vou fazer 20 vezes 3 igual a 60.

P - Por que que você fez vezes 3?

LAf(35;5) - Porque ele está pedindo 30%. Porque ele está pedindo 30%. A gente sabe mais ou menos quanto é, mas na hora de botar no papel a montagem da conta, a gente se atrapalha. Mas teria um jeito de reduzir mais isso daí.

(...)

P - Deixa eu mostrar uma coisa para vocês. Vocês dois fizeram uma coisa bem certinha. Cada um do seu jeito, os dois acharam 60. Olha que coisa interessante: você fez 200 dividido por 10, deu 20 (referindo-se às operações efetuadas por LAf(35;5)), 200 dividido por 10, deu 20, 200 dividido por 10, deu 20. 20, 20, 20. Juntou os três 20, deu 60. Olha o que EPm(22;11) fez. EPm(22;11) disse assim: de cada 100, é 30, como é 200, é dois 100. Dois 30, deu 60. Quem fez com menor trabalho? O LAf(35;5) fez: uma, duas, três, quatro operações. Você fez uma, mas para fazer esta uma, teve que fazer 30%, é 30 de 100, só multipliquei duas vezes. Então você pensou e não escreveu aqui, enquanto que você (referindo-se à LAf(35;5)), escreveu o que pensou. São dois jeitos de fazer que deu certo.

Agora veja que coisa interessante: o segredo da porcentagem está aonde? Perceber o que significa aquela taxa que está ali, 30%. É 30 de cada 100. Então, é 200, duas vezes 30, 60. Fechou. Como é que faz? Até poderia ter montado uma tabelinha: 30, 100; 30, 100.

30 + 30, 60; 100 + 100, 200. Então, de 200 é 60. (Escreveu na folha de LAf(35;5):

$$30\% \longrightarrow 30 \text{ de } 100$$

$$\frac{30 \text{ de } 100}{60,00 \longrightarrow 200}$$

Também era um jeito de fazer, ou 30 vezes 2, que foi o que você fez (referindo-se a EPm(22;11), ou ainda, 20 vezes 3 (referindo-se a LAf(35;5), que foi o jeito que você fez (Retomando a pergunta de EPm(22;11): E se fosse 30% de R\$ 75,00? Foi falando e anotando na folha deste sujeito.

(...)

Nos trechos dos registros verbais pode-se perceber que LAf(35;5) buscou apoio em 10% e, a partir daí, foi compondo sua resposta, tanto pela via do **operador** (.2) (10% de 200 é 20; 20% é 40 e 30% , 60) como pela via da **soma de parcelas iguais** (10%; 10% + 10% = 20% + 10% = 30%; e mesmo 20 + 20 + 20 = 60). É interessante observar que no **registro numérico aritmético** do cálculo aparece a **divisão reiterada** de 200 por 10, seguida da multiplicação de 20 por 3. Esta forma de divisão mostra que o participante decompôs o 30 em três partes iguais (10) e compôs o resultado a partir da soma dos quocientes.

EPm(22;11) também efetuou um **registro numérico aritmético** e ao explicar o porquê de sua multiplicação ( $30 \times 2 = 60$ ), informou que o 2 se refere ao 200 e *são duas vezes 100*. Aqui a quantidade inicial (200) foi decomposta em duas partes iguais (100 e 100) e como se trata de uma porcentagem (30%), toma-se 30 de cada 100. O participante ainda não conseguiu operar algoritmicamente com a relação entre a taxa percentual e a quantidade inicial, mas dá indícios de que começa a estabelecer relação entre a taxa percentual e a centena, o que se constitui num referencial fundamental ao processo de conceitualização.

O pesquisador continuou conversando com os participantes, na tentativa de fornecer-lhes instrumentos que lhes permitissem organizar os dados para obter o resultado. Para isso retomou a pergunta feita por EPm(22;11): *Mas e aí, se não tivesse 100. Se fosse R\$ 85,00?* O pesquisador refez a pergunta do participante e utilizou como exemplo 30% de R\$ 75,00, conforme pode ser visto na transcrição que segue.

*E se fosse 30% de R\$ 75,00? (Vai falando e anotando na folha de EPm(22;11)).*

*Teríamos 30% de 75,00. 30% significa 30 de 100, que significa 3 de cada 10. 10 para 70, é só multiplicar por 7. Isso significa que se tem que multiplicar o 3 também por 7, temos 21. Mas queremos 30% de 75, ainda faltam R\$ 5,00, que é metade de 10, então 10: 2, 5. Tem que dividir o 3 também por 2, que é 1,5. Temos então  $21 + 1,5 = 22,50$ ,  $70 + 5 = 75,00$ . Isso significa que 30% de R\$ 75,00, são R\$ 22,50.*

*Anotações:*

*30% de 75,00*

$$\begin{array}{r}
 \text{—————} \overline{100} \\
 3 \text{ —————} \rightarrow 10 \\
 \times 7 \qquad \qquad \times 7 \\
 \hline
 70 \text{ —————} \rightarrow \\
 3:2 = 1,5 \qquad 10:2 = 5 \\
 21 + 1,5 \qquad 70 + 5 = \\
 = 22,50 \qquad \qquad 75)
 \end{array}$$

A pergunta de EPm(22;11) indica que este participante estabelece relação com outros dados, no entanto não percebe a relação de proporcionalidade e nela as relações de comparação, razão e equivalência. Estas relações são mostradas pelo pesquisador, tanto por meio do registro verbal escrito como pelo registro verbal oral, o que pode ser visto no trecho da transcrição do protocolo. O registro verbal escrito (registro de representação semiótica numérico) pelo participante indica que este participante utiliza recursos típicos do processo de escolarização, o que não é muito familiar aos alunos de EJA.

## Problema 2

Um trabalhador recebe um salário de R\$ 500,00 e está defasado em R\$ 200,00. Expresse essa defasagem na forma de taxa percentual.

EPm(22;11) fez a leitura do problema. Em seguida o pesquisador interferiu com a pergunta: *O que o problema diz?* Seguida da resposta de LAf(35;5): *que o cara recebe R\$ 500,00 e está defasado em R\$ 200,00.* EPm(22;11) fala: *Defasado é aumento.* LAf(35;5) discorda e fala: *Não. Defasado é que falta. Ele tinha que receber R\$ 700,00.*

Estes registros verbais orais mostram que a mediação se estabeleceu na tríade, o que aconteceu também nos Estudos II e III. Primeiramente procurou-se compreender o enunciado do problema para depois iniciar o processo de solução e efetuar o registro matemático. Passada esta fase, EPm(22;11) efetuou a divisão de 500 por 100, obtendo 5 como quociente e LAf(35;5) fez duas operações de divisão (500 : 200) obtendo respectivamente os quocientes 4 e 2. Inconformado com o resultado de tais divisões, dividiu 250 por 50, obtendo 410 como quociente. Ao ser questionado sobre o porquê da divisão de 250 por 50, falou: *É que 250 é metade, 50%.* Ambos afirmaram que deve ser menos de 50%, uma vez que a defasagem é de R\$ 200,00. Tem-se novamente a idéia de **estimativa**.

O registro verbal escrito dos participantes quando da operação de divisão pode ser visto como **registros de representação semiótica numérico aritméticos**, porque são constituídos por números.

O pesquisador retomou a divisão efetuada por EPm(22;11) e perguntou o que significava o 5. Ambos responderam que se referia a R\$ 5,00. O pesquisador perguntou: *Em termos de porcentagem?* EPm(22;11) disse que é 1%. O pesquisador perguntou: *E 100% é quanto?* LAf(35;5) respondeu: *É tudo.* Em seguida fez o seguinte registro verbal escrito.

$$\begin{array}{r} 500 \quad 100\% \\ 250 \longrightarrow 50\% \\ 500 \left| \begin{array}{l} 100 \\ \hline 5 \end{array} \right. \end{array}$$

Temos um **registro de representação semiótica numérico**, em que o participante, utilizando o **referencial metade** (Spinillo, 1992), estabeleceu relações horizontais e verticais: horizontais entre 500 e 100% e entre 250 e 50%; verticais entre 500

e 250 e entre 100% e 50%. Este registro indica que LAf(35;5) estabelece relações entre o todo absoluto (500) e o todo relativo (100%), entre a parte absoluta (250) e a parte relativa (50%) e entre elas (todo absoluto - parte absoluta e todo relativo - parte relativa, ou seja, 500-250 e 100%-50%, respectivamente). Pode-se dizer que se trata de relações entre relações, como descreve Spinillo (1992). Quando o participante efetuou o registro da operação de divisão, temos o outro registro de representação semiótica numérico. Neste caso, a divisão entre o todo absoluto (500) e o todo relativo (100) permite encontrar o **valor correspondente ao valor da unidade percentual**.

Novamente a interferência do pesquisador induziu que o participante buscasse formas para representar matematicamente a solução. A partir da relação *500 é tudo*, LAf(35;5), passou a utilizar o esquema proposto pelo pesquisador no problema 1, e se reflete no registro verbal escrito. Este registro mostra que o participante estabeleceu corretamente a relação entre o todo absoluto e o todo relativo e por meio do **referencial metade** (Spinillo, 1992) encontrou as respectivas partes. Este recurso foi insuficiente. Ao dividir 500 por 100, obtém 5, que é equivalente a 1%, mas não estabeleceu esta relação.

EPm(22;11) acompanhou o raciocínio de LAf(35;5) e disse: *Tem que ser menos de 50%. Então é 40*. Passou a efetuar operações de divisão ( $500 : 40$ ;  $500 : 45$ ); em seguida efetuou a multiplicação  $40 \cdot 5 = 200$ , e falou: *Achei. É 40*. Estes registros verbais escritos indicam que o participante sabe que, ao se tratar de porcentagem, as operações de multiplicação e divisão entram em cena, mas este saber também é insuficiente. Têm-se aqui as reminiscências escolares de que trata Fonseca (2001; 2002), ou ainda, as regras do contrato didático (Brousseau, 1988), qual seja, é um problema de porcentagem, então é necessário que se efetuem algumas operações fundamentais em que, dependendo da pergunta, há que se efetuar uma adição (quando se refere a aumento) ou subtração (quando se refere a desconto), além das operações de multiplicação e divisão. Ao efetuar estas operações, EPm(22;11) fazia tentativas. Ele já sabia que tinha que ser menos de 50%, daí a tentativa 45 e 40.

O pesquisador retomou as relações já estabelecidas e propôs a organização de uma tabela. A transcrição do protocolo esclarece o que estamos falando.

*P - Agora nós temos 500 que é 100%, 250 que é 50% e temos também 1% que é 5. Como é que vamos descobrir a porcentagem equivalente aos 200?*

*EPm(22;11) - Achei. É 40.*

*P - Por quê? Legal. É 40%.*

*EPm(22;11) - Porque 40 vezes 5 dá o 200.*

*E - Agora vamos ver uma coisa interessante. Vocês não me disseram que 1% é R\$ 5,00?*

*EPm(22;11) - 1% é R\$ 5,00.*

*P - A gente não poderia organizar uma tabela? Olha o que você escreveu aqui. (Indicando para a escrita – Um por cento é cinco). Como é que a gente poderia escrever a mesma coisa, usando a matemática?*

*EPm(22;11) - Como? Com números?*

*P – Isto. Então faça a tabela.*

*(EPm(22;11) fez a seguinte notação:)*

*1% = 5*

*2% = 10*

*3% = 15*

*4% = 20*

*5% = 25*

*6% = 30*

*12% = 60*

*18% = 90*

*24% = 120*

*30% = 150*

*36% = 180*

*42% = 210*

*Passou.*

*P - Passou. Passou quanto?*

*EPm(22;11) - Passou 10.*

*P - Passou 10, que é 2%. Mas você não tem 1%?*

*EPm(22;11) – Tenho.*

*P – E quanto é 1%?*

*EPm(22;11) – 5.*

*P – É. Ok. Então, se você tirar 2% dos 42, vai ficar quanto?*

*EPm(22;11) – 40%.*

*P – E 40%, é quanto?*

*EPm(22;11) – 200.*

*P – Legal.*

Além das relações anteriormente descritas, nesses diálogos encontram-se relações de equivalência na organização do **registro na forma de tabela de números proporcionais**. Utilizando os termos de Duval (1993), podemos dizer que a organização dos dados na forma de tabela é bastante **congruente** ao registro verbal oral (*um por cento é cinco*, ou seja,  $1\% = 5$ ). É interessante observar que para chegar ao registro foi preciso fazer **composições**, somado-se, respectivamente, partes absolutas e partes relativas.

### **Problema 3**

O trabalhador de uma empresa que recebe salário tem direito ao Fundo de Garantia por Tempo de Serviço – FGTS, que é de 8% sobre o salário bruto (salário bruto é o valor total

da folha de pagamento). Sabendo que o valor do FGTS que a empresa tem de depositar mensalmente é de R\$ 40,00, qual é o valor do salário bruto desse trabalhador?

O pesquisador fez a leitura do problema e no intuito de verificar se os participantes compreenderam o enunciado, começou a fazer perguntas. As respostas indicam que compreenderam. Isso pode ser visto nos registros verbais orais transcritos a seguir.

*P – O que é que o problema fornece de dados e informações e o que ele pede?*

*EPm(22;11) – Que o fundo de garantia é R\$ 40,00.*

*LAf(35;5) – 8%.*

*P – E o que mais?*

*EPm(22;11) - O salário bruto é o total que ele recebe.*

Os participantes olharam (como quem lê novamente o problema) e registraram as seguintes operações aritméticas:

<b>EPm(22;11)</b>	<b>LAf(35;5)</b>
$\begin{array}{r} 40 \\ \times 8\% \\ \hline 320 \\ 320 \quad   \quad 8 \\ \hline 00 \quad 40 \end{array}$ <p><i>Esse aqui pegou.</i></p>	$\begin{array}{r} 40 \\ \times 8 \\ \hline 320 \end{array}$ <p><i>Tá muito difícil.</i></p>

Trata-se, nos termos de Duval (1993), de **registros de representação semiótica numérico aritméticos**. As relações estabelecidas pelos participantes ocorreram entre as partes absoluta (40) e relativa (8%), no entanto, foram relações de primeira ordem como descreve Spinillo (1994), o que é insuficiente quando se trata de problemas de proporção, para os quais há que se estabelecer relações entre relações – neste caso, relações de quaternárias ou de quarta ordem. O registro das operações dá indícios da utilização de regras implícitas ao contrato didático (Brousseau 1988).

Os diálogos que seguiram sugerem que os participantes tomaram consciência de que o resultado encontrado não condizia com o salário do trabalhador; tanto é que acabaram dizendo que o valor encontrado é muito pouco. EPm(22;11) fez uma revelação interessante, diz ele: *É que a gente começou agora estudar porcentagem, com o professor PMm(43;7) (também participante da pesquisa), daí eu sei que tem que achar 1%, mas não consigo.* Trata-se das reminiscências escolares de que nos fala Fonseca (2001; 2002).

O pesquisador continuou instigando por meio de perguntas, tais como: *O que significa 8%? 8% não é equivalente a R\$ 40,00?* As respostas a estas perguntas são pertinentes, mas não suficientemente esclarecedoras, tanto pelos registros verbais escritos como pelos registros verbais orais. Dando continuidade, o pesquisador remeteu os participantes aos problemas 1 e 2 (já solucionados). A partir daí, o participante EPm(22;11) encontrou uma forma para chegar ao resultado do problema, enquanto LAf(35;5) levou mais tempo para chegar à conclusão. Isso pode se visto a seguir, no recorte de parte do protocolo.

Pesquisador	Participante EPm(22;11)	Participante LAf(35;5)
<p><i>Olha que coisa interessante que EPm(22;11) está fazendo, mas tem um detalhe importante aí: quanto é 8%?</i></p> <p><i>Ótimo. Então escreve aí..</i></p> <p><i>Legal. Continue sua tabela.</i></p> <p><i>Passou quanto em termos de porcentagem?</i></p> <p><i>Ok. E se você pegar o equivalente a 64% mais o 32%, você já não tem 96%, que vai ser R\$ 480,00?</i></p> <p><i>Então escreve aí.</i></p> <p><i>Tá faltando 4%, não é isso?</i></p> <p><i>Quanto é 8%?</i></p>	<p><i>É isso que eu queria saber. (Olha para a tabela construída no problema 2 e iniciou a construção de uma tabela e registrou):</i>  48% = 240      44% = 230  54% =            48% = 250</p> <p><i>8% é 40. 8% é 40.</i></p> <p><i>(Registrou):</i>  8% é 40.</p> <p><i>16% = 80</i>  <i>32% = 160</i>  <i>64% = 320</i>  <i>128% = 640</i>  <i>Passou.</i></p> <p><i>28.</i></p> <p><i>Sim.</i>  <i>(Registrou):</i>  96%      480</p> <p><i>Sim.</i></p>	<p><i>Salário.</i></p>

<i>E quanto que é 4%?</i>	40.	
<i>480 mais 20, dá quanto?</i>	20.	
<i>E 96% mais 4%?</i>	500.	
<i>Legal. Então qual é o salário desse sujeito?</i>	<i>O salário todo.</i>	
		<i>Eu não faço nem idéia. Vou ler denovo. (Fez a seguinte operação)</i>
		$400 \quad \underline{100}$ 0,4
	<i>R\$ 500,00. (Completo a tabela iniciada, ficando assim):</i>	<i>(Registou):</i>
	$\begin{array}{r} 96\% \quad 480 \\ 4\% \quad \underline{20} \\ 100\% \quad 500 \end{array}$	$8\% \quad \underline{\quad} \quad 40,00$

É interessante perceber que somente diante dos diálogos com o pesquisador é que os participantes conseguiram efetuar um registro que lhes possibilite chegar ao resultado esperado. Em outras palavras, pode-se dizer que eles conseguem responder à pergunta do problema quando conseguem estabelecer as relações entre as partes absolutas e relativas com os todos absolutos e relativos. A resposta foi encontrada a partir das composições entre os valores já obtidos e registrados na **tabela de números proporcionais**, procedimento este já utilizado na solução do problema 2.

Inicialmente o participante LAf(35;5) não conseguiu compreender o raciocínio de EPm(22;11) e leu novamente o enunciado do problema para depois fazer o registro da operação de divisão (400 por 100), obtendo como quociente 0,4. Isso denota a falta de compreensão do conceito de proporcionalidade e mesmo da divisão. Depois das conversas entre o pesquisador e EPm(22;11), LAf(35;5) aceitou a resposta encontrada por EPm(22;11). Este ficou inconformado com o processo trabalhoso e afirmou que *tem um jeito mais fácil de chegar ao resultado*. Podemos falar que se trata das reminiscências (Fonseca 2001; 2002).

Os registros verbais orais e escritos indicam que estes participantes têm uma compreensão parcial da proporção-porcentagem, o que não significa dizer que se encontram no mesmo patamar. Os dados obtidos indicam que EPm(22;11) tem mais

intimidade com o modo de pensar que LAf(35;5). Prova disso são seus registros verbais orais, entre os quais: *E se fosse R\$ 85,00?* (problema 2) e *tem um jeito mais fácil de fazer* (problema 3).

#### 4.10.2. Segunda dupla: GAm(54;0) e STf(45;8)

##### Problema 1

Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?

O pesquisador orientou os participantes para que preenchessem os dados e resolvessem os problemas. STf(45;8) fez a leitura do problema. Dando seqüência, o pesquisador procurou saber se os participantes haviam compreendido o enunciado. O que chamou a atenção deste participante foi o período indicado no problema (ano de 2003). Enquanto o pesquisador conversava com STf(45;8), GAm(54;0) respondeu que seria R\$ 60,00. STf(45;8) concordou com a resposta de GAm(54;0).

Ao ser questionado sobre a forma como fez para chegar a tal resultado, GAm(54;0) respondeu: *Na prática. Assim, 200, se fosse 10, seria 20. Como é 30, 3 vezes, seria 60.* STf(45;8) participou da conversa e falou: *Eu faço 3 vezes 2.* Ao ser questionado sobre o porquê de 3 vezes 2, uma vez que se trata de 200 e 30, este participante deu a seguinte explicação: *Porque 1 inteiro é 20. Uma parte inteira.* O 1 inteiro aqui não se refere à quantidade inicial 200, mas sim, 10%. Isso pode ser visto mais adiante, durante os diálogos entre o pesquisador e os participantes. O 20 é o valor relativo a este 10.

Ao solicitar que registrassem o que haviam falado, GAm(54;0) disse que não sabia fazer, enquanto STf(45;8) fez o seguinte registro verbal escrito, o qual pode ser visto como um **registro de representação semiótica numérico aritmético**:

$$\begin{array}{r} 200,00 \\ \times 30 \\ \hline 60,00 \end{array}$$

O resultado da operação condiz com a resposta da pergunta do problema, no entanto não condiz com o resultado da operação efetuada. Parece-nos que se trata do que Duval (2003, p. 31) chama de “representações semióticas interiorizadas em interação com

um tratamento de produção externa de representações semióticas”. A eliminação dos zeros mais parece com o uso, neste caso inadequado, da simplificação. Tem-se novamente uma situação de aplicação de regras implícitas ao contrato didático (Brousseau (1988), qual seja, trata-se de um problema de matemática; eu sei a resposta, sei que ela está certa, preciso “fazer uma conta” que dê este resultado, mas não pode ser qualquer conta porque se trata de porcentagem, neste caso a multiplicação tem de ser utilizada e os zeros precisam ser eliminados.

Ao ser questionado sobre outros modos de solucionar o problema, STf(45;8) disse que sim. Vejamos:

*P – STf(45;8), será que teria um outro jeito de fazer esta conta?*

*STf(45;8) – Dividido.*

*P – Como? GAm(54;0), STf(45;8) disse que tem outro jeito. Dividido. Vamos ver como é que STf(45;8) faz.*

*STf(45;8) – Eu faço dividido por 10, que dá duas vezes. Duas vezes 10, 20. Baixo o zero, zero. É 20. Certo? Agora, vezes 3. Que é a mesma coisa. (Escreveu 30 e eliminou o zero). Eu elimino esse zero, ponho esse pra baixo (os zeros após a vírgula do 20,00). Três vezes zero (escreveu 0 e 3 vezes dois 6, escrevendo 60,00, conforme operações a seguir):*

$$\begin{array}{r} 200 \quad | \quad 10 \\ 200 \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 20,00 \\ \quad \quad \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad x \quad 30 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 60,00 \end{array}$$

*P – Por que você dividiu 200 por 10?*

*STf(45;8) – Porque 1 é sempre inteiro.*

Aqui o participante se refere a 10. Não trata como taxa percentual, mas é isso que significa, ou seja, tomou a taxa percentual 10% como apoio. As interpretações apresentadas no parágrafo anterior são válidas aqui também.

As conversas continuaram. O recorte do protocolo a seguir nos fornece uma série de dados e informações importantes, vejamos:

<b>Pesquisador</b>	<b>Participante GAm(54;0)</b>	<b>Participante STf(45;8)</b>
<i>Isto.  Certo. Dá para continuar a conta?</i>	<i>Fazia muito tempo que eu não fazia divisão. Eu não me recordava era da vírgula. 2 vezes 10, 20. 20 para 20 nada.  Aí baixei o zero, boto o zero aqui (ficando 20 no divisor. Coloca vírgula entre o 2 e o zero).</i>	

Não. Não vai vírgula. Aqui o senhor está trabalhando com número, como se trata de dinheiro, vai a vírgula zero, zero.

Ah! Do cruzeiro.

Deixa eu falar uma coisinha pra vocês, bem interessante, e aí vamos ver o que vocês me dizem.

Teve uma pessoa que fez essa mesma conta, 30%. Ela me disse o seguinte: Bom, 30%, então eu tenho que dividir por 100, porque é porcentagem. Então eu divido 200 por 100, que dá 2. Como é 30%, eu faço 2 vezes 30, que dá 60. Ela também chegou no 60, só de outro jeito.

Isto.

Isto.  
Veze 30.

Isto.

Esse jeito está certo?

Ham.

Legal. Está beleza.

(Sua conta agora ficou assim):

$$\begin{array}{r} 200 \quad 10 \\ 00 \quad \underline{20,00} \\ \quad \quad \underline{\times 30} \\ \quad \quad \quad 60,00 \end{array}$$

Vai vírgula aqui (indicando que ela vai à direita do zero e escreveu os dois zeros, perfazendo 20,00).

Quando se monta a conta GAm(54;0), vai virgula, zero, zero aqui (colocando a virgula e os dois zeros à direita do 200, ficando 200,00).

É verdade.

Ela fez 200 dividido por 100.

Que daria duas vezes não sobraria nada.

Aí, vezes 30 (vou colocar pra baixo aqui, tá). Duas vezes 30. Daria 60.

(Fez as seguintes operações):

$$\begin{array}{r} 200 \quad 100 \\ 000 \quad \underline{2} \\ \quad \quad \underline{\times 30} \\ \quad \quad \quad 60 \end{array}$$

Sendo número inteiro, sim. Está certo sabe por quê?

De qualquer forma é número inteiro. 1 é inteiro, desde que ele seja: 1; 1.000; 100; 10. Ele é um inteiro.

<p>Será que teria outro jeito de fazer? (Foi informado que não devia apagar)</p> <p>É.</p> <p>Ok.</p> <p>Ok.</p> <p>Esse é outro jeito de fazer. De 100 é 30, de 100 é 30. 30 mais 30, 60. O aumento é de quanto? De R\$ 60,00.</p> <p>É o que sobrou. Veja bem, de 100, ela pegou 30, sobrou 70. Do outro 100, ela pegou 30 também, sobrou 70.</p> <p>Aí, STf(45;8) queria ver se ia bater. A prova real que STf(45;8) está chamando.</p>	<p>(Fez menção de apagar a última conta que havia feito)</p> <p>Outro jeito de fazer.</p> <p>Por que esse 70 aqui?</p> <p>Somou os dois.</p>	<p>Outro jeito?</p> <p>Eu fazia de cabeça. É, 200, como ele é inteiro, vamos separar 2, divido por 100. Vamos fazer sobre 100. R\$ 100,00. É igual a R\$ 30,00, 30% e sobra 70, mais 100 é igual a 30, que daria 14 e 60, que daria duzentos. (Fez o seguinte registro):</p> $\begin{array}{r} 100 = 30 \quad 70 \\ 100 = 30 \quad 70 \\ \hline 60 \quad 140 \end{array}$ <p>Porque 70 mais 70 GAm(54;0), é 140, com mais 60 é 200.</p> <p>Essa é a prova real da conta.</p> <p>Exatamente, a porcentagem e o valor que sobrou, tem que dar o mesmo valor do salário. Correto. Então eu vou ter mais o salário, que é 200, mais 60, que é igual a 30%, que são R\$ 260,00. (Registrou em sua folha):</p> $\begin{array}{r} 30\% \\ 200 + 60 = 260,00 \end{array}$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Nas conversas GAm(54;0) buscou as reminiscências da matemática escolar anterior de que trata Fonseca (2001; 2002). Nas falas (2 vezes 10, 20. 20 para 20 nada.),

principalmente na última, tem-se o uso coordenado de termos bastante usuais no período escolar inicial da infância do pesquisador. Os termos *prova real* que STf(45;8) utilizou nas conversas que se seguem parece-nos que também é um indício das reminiscências escolares anteriores.

Na seqüência, a fala de STf(45;8) elucida o que falamos anteriormente sobre o que ele chama de inteiro e, ao buscar outro jeito de fazer, toma o 200 como inteiro, que ao ser dividido por 100 resulta em 2, tendo-se dois 100. Agora, cada 100 passa a ser o todo que é separado em duas partes 30 e 70, como pode ser visto no **registro numérico aritmético** efetuado pelo participante. Ao explicar para GAm(54;0), STf(45;8) soma os valores encontrados ( $70 + 70 = 140 + 60 = 200$ ) e diz: *Essa é a prova real da conta.*

É interessante observar que no decorrer dos diálogos STf(45;8) procurou explicar para GAm(54;0) como proceder para solucionar o problema, enquanto este procurava acompanhar o raciocínio utilizado por STf(45;8). A preocupação de STf(45;8) em dar explicações e em tentar que GAm(54;0) entendesse o que estava sendo feito, durante o transcorrer da entrevista, fez com que este se pronunciasse menos. Isso não significa que GAm(54;0) não compreendesse o que era para fazer ou que não soubesse como fazer. Pelo contrário, no decorrer dos diálogos foi possível perceber que este participante estabeleceu uma série de relações fecundas ao processo de compreensão conceitual de proporção-percentagem.

### **Problema 3**

O trabalhador de uma empresa que recebe salário tem direito ao Fundo de Garantia por Tempo de Serviço – FGTS, que é de 8% sobre o salário bruto (salário bruto é o valor total da folha de pagamento). Sabendo que o valor do FGTS que a empresa tem de depositar mensalmente é de R\$ 40,00, qual é o valor do salário bruto desse trabalhador?

Novamente quem fez a leitura do problema foi STf(45;8), no entanto não o interpreta corretamente, o que pode ser percebido em sua fala: *Ele pede que eu veja, de 40, eu tenho que achar o valor que saiu R\$ 800,00. 8%*. Nos diálogos que seguem, GAm(54;0) se manifesta com coerência quanto à compreensão, no entanto não conseguiu efetuar um registro de representação que possibilitasse chegar a uma resposta para o problema. *Mensalmente a empresa tem que depositar para seu funcionário 40*. As conversas prosseguiram e STf(45;8) efetuou o seguinte registro verbal escrito

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 8 \\ \hline 320 \end{array} \quad \begin{array}{r} 320 \\ \underline{32} \\ 00 \end{array} \quad \begin{array}{r} | 8 \\ \hline 40,00 \end{array}$$

Seguindo o raciocínio do problema anterior, este participante falou e organizou o seguinte **registro de representação semiótica na forma de tabela de números proporcionais**.

*Vamos fazer isso em 100. Vai dar R\$ 8,00; R\$ 8,00 ... que é igual 92, 92, ... (Foi registrando):*

$$\begin{array}{r} 100 \quad 8 - \quad 92 \\ 100 \quad 8 - \quad 92 \\ 100 \quad 8 - \quad \underline{92} \\ 100 \quad 8 \quad 276 \\ + \quad (\text{duas vez } 8) \quad \underline{1.60} \\ \quad \quad \quad 277,60 \\ 100 - 8 = 92 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 368 \\ + 40 \\ \hline 408,00 \end{array}$$

*Se o empregador, tem que tirar do salário bruto dele, do funcionário, então o salário bruto é de R\$ 408,00.*

Embora tenha buscado apoio em que de cada R\$ 100,00 de salário a empresa teria que depositar R\$ 8,00 correspondente ao FGTS, não conseguiu organizar corretamente o algoritmo.

Acompanhando os registros verbais, GAm(54;0), que já havia percebido que 8% significa R\$ 40,00 e que a pergunta se referia ao salário, fez o seguinte registro verbal escrito:

$$\begin{array}{r} 100 - 8 = 92 \\ 100 - 8 = 92 \\ 100 - 8 = 92 \\ 100 - 8 = 92 \\ 100 - \underline{8} = \underline{92} \\ \quad 40 \quad 460 \\ \quad \quad \underline{+ 40} \\ \quad \quad \quad 500 \end{array}$$

Trata-se do registro de representação numérico na forma de tabela com números proporcionais e indica que o participante buscou apoio na quantidade inicial 100 e, reiteradamente, tirou 8 de cada 100, de forma a obter os 40. Somando as diferenças entre 100 e 8 (92) obteve 460, que, adicionado com os 40, perfazem 500. Este participante lançou mão, ao mesmo tempo, da composição e da decomposição dos valores numéricos.

Durante o período das conversas, STf(45;8) demonstrou não compreender o enunciado do problema. Pelo seu raciocínio, a empresa teria que descontar do salário do trabalhador os R\$ 40,00. Somente com a intervenção do pesquisador e da fala de GAm(54,0): *8 de cada 100*, STf(45;8) se convenceu e apresentou o mesmo registro que GAm(54;0).

## Problema 2

Um trabalhador recebe um salário de R\$ 500,00 e está defasado em R\$ 200,00. Expresse essa defasagem na forma de taxa percentual.

Mais uma vez foi STf(45;8) quem fez a leitura do problema. Em seguida o pesquisador fez algumas perguntas para verificar se os participantes haviam entendido o enunciado do problema. As falas deste participante indicaram que ele compreendeu o enunciado, enquanto GAm(54;0) acompanhava os diálogos. STf(45;8) foi pensando e, ao mesmo tempo, falando:

*Se 500. Vamos fazer por mil inteiro. 1.000 inteiro. Vamos supor 10%, que seria igual a 100. 100 mais 500 é igual a 50. (Foi efetuando o registro na forma de tabela, conforme consta, a seguir).  $5 \times 2 = 10$ . Ele deixou de receber na verdade, 500 dividido por 10 dá 50. 250 daria 50% do salário dele. Então, ele deixou de receber, na verdade, se fosse 100. Se fosse 100%, igual a 500. 50%, é igual 250, tá. Então vamos tirar esse 50 aqui. 25%. Quanto que é 10% de 50? É R\$ 5,00. 5. Vamos ver se vai bater isso aqui? Vezes, tem que dar 200 ou a divisão desse tem que dar 500, ou vezes, tem que dar 500. 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 100. Dá 250. R\$ 250,00 (foi contando nos dedos). 50%. Só que tem que ser 200, que seria.*

*Tirando 50.*

$$1000 \quad 10\% = 100 : 2 = 500$$

$$500 \quad 10\% = 50$$

$$50 \quad 10\% = 5$$

$$500 \quad \left| \frac{100}{2} \right. = 500$$

$$x \quad 5,0 = 2,50,00$$

GAm(54;0) acompanhou o raciocínio de STf(45;8) e contribuiu, fornecendo resultados das operações mencionadas. É interessante observar que STf(45;8) tomou como apoio outros valores, neste caso, 1.000 e 10%; e metade. Fez o registro de uma letra, que possivelmente se refere a um valor desconhecido (incógnita). Para este participante, o referencial metade, de que trata Spinillo (1992), é bastante forte; tanto é que aparece novamente no registro verbal escrito, mais especificamente na passagem de 1.000 para 500.

O valor 1.000 refere-se ao todo, sobre o qual o participante buscou o valor correspondente a 10%, ou seja, 100. Este todo é dividido em duas partes iguais (500), que passa a ser o novo todo, do qual o participante encontrou 10%, ou seja, 50. O todo 500 é transformado em 50. Sobre o 50, o participante buscou encontrar 10%, o que corresponde a 5, mas escreveu 50.

Este participante utilizou o **registro de representação semiótica numérico aritmético organizado na forma de tabela de números proporcionais** e fez uso da incógnita “x”. Isso significa que ele buscou as reminiscências de que trata Fonseca (2001; 2002), ou ainda, as regras implícitas ao contrato didático (Brousseau 1988). Quando o participante anuncia a resposta “*só que tem que ser 200*” fica patente que os registros foram feitos para satisfazer o pesquisador.

Mesmo diante da riqueza do raciocínio, ainda não conseguiu chegar à resposta, a qual acontece com a interferência do pesquisador. Isso pode ser visto na transcrição a seguir.

*P – Tirando esse 50 aqui (mostrando em sua tabela:  $50 \quad 10\% = 50$ ), você tem que tirar quantos por cento?*

*STf(45;8) – Tem que tirar 10%.*

*(...)*

*STf(45;8) – 40%.*

*P – Olha o quê que STf(45;8) fez. Olhe aqui (referindo-se a GAm(54;0). STf(45;8) começou assim: (mostrando a tabela) 1000, 10% é 100; 500, 10% é 50. Ok. Então, 100% é 500; 50% é 250. Aí, STf(45;8) disse que tinha que tirar o 50. O 50 é quanto? É 10% de 500. Então, tirou 50, deu quanto? 200.*

*STf(45;8) – 50, igual 10% né.*

*P – Isto.*

*(...)*

*P – Isso. Daí, do 50%, STf(45;8), tirou 10%, que deu 40%. Daí, STf(48;8) me disse que é 40%. Entendeu GAm(54;0)?*

*GAm(54;0) – Defasagem de 40.*

*P – Defasagem de 40%.*

Ao observar os dados da transcrição, é possível perceber também que STf(45;8) expôs mais que GAm(54;0) sua forma de pensar e solucionar os problemas. No entanto, este tem mais intimidade com o tratamento matemático e isso lhe permite estabelecer relações que possibilitam responder ao que está sendo perguntado no enunciado do problema.

#### 4.10.3. Terceira dupla: SCf(54;11) e ELm(37;11)

##### Problema 1

Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?

Inicialmente o pesquisador orientou os participantes a preencherem os dados e solucionarem os problemas. Em seguida fez a leitura do problema. Logo após a leitura ELm(37;11), fez os seguintes registros verbais e escritos:

*Qual seria o aumento. Então seria. Daí temos que pegar, pra fazer 1%, temos que pegar 200 e dividir por 100. Duzentos, daí não precisa botar os reais porque nós vamos fazer a divisão. Cento.*

$$\begin{array}{r} 200 \mid \underline{100} \\ \quad 2 = 1\% \\ \quad \underline{x 3} \\ \quad 60,00 \end{array}$$

*O aumento seria de R\$ 60,00.*

*(Foi falando enquanto escrevia a resposta) Aqui nós podemos cortar os dois zeros, que fica 2%. Pra saber o trinta, fazemos vezes 3. 3 x 2, 6.).*

O registro verbal escrito em que aparece a operação de divisão se trata de um **registro de representação semiótica numérico aritmético**, em que o participante buscou encontrar o **valor correspondente a 1%, ou seja, à taxa percentual unitária**. SCf(54;11) acompanhou os registros verbais e escritos de ELm(37;11) e em seguida fez o seguinte registro:

$$200 : 100 = 2,00$$

$$3 \times 2 = 60,00$$

*O aumento foi de R\$ 60,00.*

O fato de os dois participantes efetuarem a divisão de 200 por 100, é um forte indício de que eles estabeleceram a relação da porcentagem com a centena, ou nos termos de Damm (1998), fizeram a avaliação da quantidade inicial (200) com a centena. É essa avaliação que caracteriza a porcentagem.

O fato de terem encontrado o valor correspondente a 1% demonstra que estes participantes fizeram uso de uma estratégia típica do processo de escolarização. Em diferentes momentos das entrevistas os participantes mencionaram e fizeram uso do valor correspondente a 1%. Isto apareceu na entrevista realizada com os professores e com os participantes da segunda dupla deste estudo. Os registros verbais orais dão indícios de que se trata mais de um algoritmo do que do resultado da compreensão. Podemos dizer que se trata de reforçar o que foi aprendido durante o processo de escolarização, ou seja, as reminiscências escolares de nos fala Fonseca (2001; 2002).

O recorte do protocolo a seguir nos fornece elementos importantes sobre o modo como estes participantes organizam os dados e as informações para solucionar os problemas.

<b>Pesquisador</b>	<b>Participante SCf(54;11)</b>	<b>Participante ELm(37;11)</b>
<i>Feito. Então me diz por que você dividiu por 100?</i>	<i>Achar 1%. Vai dar 2%. R\$ 2,00.</i>	
<i>Isto.</i>		<i>Pra achar 1%. Porque aí eu sei que 1% de 200, vai dar (Não). Vai dar R\$ 2,00.</i>
<i>Certo.</i>	<i>Veze 30. Dá R\$ 60,00 de aumento.</i>	<i>Como ele pede 30%, eu faço veze 3, que está representando o 30. Que vai.</i>
<i>Existe outro jeito de fazer isso?</i>	<i>Eu faço com a regrinha que o professor PMm(43;7) deu, aí eu vou fazendo. As veze eu faço desse outro jeito aqui.</i> $\begin{array}{r} 3 \\ \times 2 \\ \hline 60,00 \end{array}$	<i>Eu conheço este.</i>

<p>Agora tem uma coisa interessante. O que significa 30%?</p>	<p>A terceira parte dos R\$ 200,00.</p>	<p>30%, é a terceira parte de 100.</p>
<p>A terceira parte!</p>		<p>Não. É a terceira parte de 10. Não é isto?</p>
<p>Será?</p>	<p>(Leu novamente o problema)</p>	<p>É uma parte dividido em três.</p>
<p>Deixe-me ver se me faço entender: o que quer dizer as palavras trinta por cento?</p>	<p>Mas daí, 10, 20, 30.</p>	
	<p>Três vezes mais, né. 30. É a terceira parte. É a porcentagem, é 30%.</p>	<p>É a terceira parte de 100.</p>
<p>Quanto é a terceira parte de 100?</p>	<p>É dividir. Vai dar 30.</p>	
<p>Então faz aí.</p>	<p>(Fez a seguinte operação)</p> $\begin{array}{r} 100 \overline{) 3} \\ \underline{9} \phantom{00} \\ 010 \\ \underline{9} \phantom{0} \\ 10 \\ \text{Não.} \end{array}$	<p>É 75.</p>
<p>Ah, legal. Deu uma dízima periódica. Que é quanto? 33.</p>	<p>Deu uma dízima periódica.</p>	<p>Ah, é 3.</p>
<p>E vai embora. Então, veja bem. Eu posso dizer que 30% é a terça parte de 100?</p>	<p>33, vírgula 3. Dá três de novo, daí sobra 1. Dá 3 de novo.</p>	
<p>Então, agora vamos pensar na palavra, porque o segredo da porcentagem é exatamente esse. O que significa 30%?</p>	<p>Não, porque dá 33,33.</p>	<p>33,33.</p>
	<p>Não é a divisão?</p>	<p>Por cento!</p>

<p><i>Não. Vamos pegar o significado das palavras: trinta por cento. O que quer dizer isto?</i></p>		
<p><i>Vocês me disseram que a terceira parte de 100 é 33, 33 e não é a terceira parte de 100.</i></p>	<p><i>Por cento, que é 3 vezes mais?</i></p>	<p><i>A terceira parte de 100. Não é isto?</i></p>
<p><i>E se eu disser pra vocês, o seguinte: que 30% significa 30 de cada 100. Por quê?</i></p>	<p><i>Mas não é. Mas não é. E não é a terceira parte. É dividir.</i></p>	
<p><i>O que que significa?</i></p>	<p><i>Fechou.</i></p>	<p><i>Fechou.</i></p>
<p><i>Exatamente.</i></p>	<p><i>É isso que eu queria dizer. Claro que é, porque você falou 30 por cento.</i></p>	
<p><i>Com essa informação, será que teria outro jeito de vocês fazerem? Lembrando que 30% é 30 de cada 100.</i></p>	<p><i>30 de cada 100 reais ou coisas, tanto faz. Ou de cada 100 bolinas.</i></p>	<p><i>De cada 100 bolinhas, eu tenho 30.</i></p>
<p><i>Por que você está colocando menos 30?</i></p>	<p><i>Eu tenho 30.</i></p> <p><i>30 de cada 100.</i></p> <p><i>Dá pra fazer isso aqui. (Registrou):</i></p> $\frac{100}{30} + \frac{100}{30} + \frac{200}{60}$ <p><i>Aqui dá o 200 e aqui vai dá o 60.</i></p>	<p><i>Daria pra colocar 100. Vai dar, no caso, 100 menos 30 e 100 menos 30.</i></p>
<p><i>É a terceira parte do 100?</i></p>	<p><i>Não. De cada 100 eu tiro 30.</i></p>	<p><i>Porque é a terceira parte do 100, não é isto?</i></p>

Neste caso, de cada 100, o cara ganhou?	30.	30.
Então seria: de 100, ganha 30; de 100 ganha 30, então ganhou 60,00.	30 + 30. Ganha 60.	

Os diálogos entre a tríade (pesquisador e participantes) propiciaram as condições para desencadear um processo com vistas à compreensão conceitual e solucionar o problema.

É interessante observar que, ao ser perguntado sobre outro jeito de fazer, SCf(54;11) mencionou a “regrinha”, qual seria, encontrar o valor correspondente a 1% e em seguida “suprimir” os zeros da quantidade inicial e multiplicá-la pelo valor correspondente a 1%. Quando perguntado sobre o significado de 30%, os participantes falam em *terceira parte*, no intuito de se referir à terça parte (*É uma parte dividido em três*). Ao efetuar a divisão SCf(54;11) percebeu que 30% não significa a terça parte.

Somente depois das indicações do pesquisador (*30% significa 30 de cada 100*) é que os participantes tomaram consciência do significado e SCf(54;11) efetuou um **registro de representação semiótica na forma de fração**; porém inverteu os termos, ou seja, registrou 100 como numerador e 30 como denominador. A forma de representar não nos permite dizer que se trata da representação de uma fração. Isso nos permite dizer que o participante estabeleceu algum tipo de relação entre a porcentagem e a fração ou razão.

As conversas prosseguiram e os participantes deram exemplos do significado de 30%. Assim como perceberam que a terça parte de 100 é 33,3.... (*dízima periódica*). Isso aconteceu a partir dos diálogos com o pesquisador. Utilizando o algoritmo convencional da divisão, SCf(54;11) fez o registro  $100 : 3 = 33,3... .$

## Problema 2

Um trabalhador recebe um salário de R\$ 500,00 e está defasado em R\$ 200,00. Expresse essa defasagem na forma de taxa percentual.

SCf(54;11) fez a leitura do problema. Em seguida falou: *ele recebe R\$ 500,00 e está defasado em R\$ 200,00*. Seguiram-se os diálogos entre o pesquisador e os participantes e este participante fez a pergunta: *O 100%?* Ele mesmo respondeu: *é o 500*. A partir disso ELM(37;11) fez o seguinte registro e falou que é 20%.

$$200 \quad | \begin{array}{r} 100 \\ 20 \end{array}$$

Este é um registro de **representação semiótica numérico aritmético** em que o participante efetuou a operação de divisão. Isso indica que ele participante procurou 1%, ou seja, fez uso do mesmo raciocínio utilizado no problema 1: buscou do valor correspondente a unidade relativa. No entanto, o quociente é resultado da divisão de 100 por 5 e não de 500 por 100, como aparece no registro da operação.

SCf(54;11) acompanhou o raciocínio utilizado por ELM(37;11) e efetuou o seguinte registro verbal escrito:

$$500,00 = 500 : 100 = 5,00 = 1\% .$$

Em seguida falou: *Dividindo 500 por 100 dá 5.*

O registro mostra que este participante dividiu o todo absoluto (500 – quantidade inicial) pelo todo relativo (100% - taxa percentual), obtendo o valor correspondente a 1%, ou seja, 5. Novamente temos um **registro de representação semiótica numérico**.

As conversas prosseguiram e ELM(37;11) refez seu cálculo e efetuou o seguinte registro verbal escrito:

$$500 \quad | \quad 100$$

$$5 \quad \text{-----} \quad 1\% \text{ de } 500.$$

Aqui o participante explicitou que 1% é equivalente a R\$ 5,00.

Os diálogos continuaram e novos registros foram efetuados. Isso pode ser visto no recorte do protocolo, a seguir.

<b>Pesquisador</b>	<b>Participante SCf(54;11)</b>	<b>Participante ELM(37;11)</b>
<i>E você tem que descobrir quanto em dinheiro?</i>  <i>Os 200.</i>  <i>Isso.</i> <i>Posso botar um pitafo?</i>  <i>Quantos 5 eu preciso pra</i>	          <i>Ele quer saber de 200.</i>	          <i>Os 200.</i>          <i>Pode. Deve e ajuda.</i>



representação efetuados pelos participantes, quando questionados sobre outros jeitos de resolver o problema. Vejamos.

Pesquisador	Participante SCf(54;11)	Participante ELM(37;11)
<p><i>Será que tem um outro jeito de fazer?</i></p> <p><i>Você já tem o resultado aí.</i></p> <p><i>Tá. Deixe eu mostrar uma coisa (referindo-se à SCf(54;11)), enquanto ia escrevendo os respectivos operadores 10 e 4). Olha o que você fez aqui: 5 é igual a 1%. Para passar para o 50, você multiplicou por 10 e aqui, na porcentagem, também multiplicou por 10, daí, os 10%. Do 50, para o 200, você fez vezes 4. 50 vezes 4, 200. Foi a mesma coisa que você fez aqui, (mostrando o 10%) também. Daí você teve 200, que é</i></p>	<p><i>Eu faço na aula, mas não é assim que eu faço.</i>  <i>(Deu início à tabela):</i>  <math>5 = 1\%</math>  <math>50,00 = 10\%</math>  <i>(Escreveu o 50 e falou:)</i></p> <p><i>Aqui vai o 50, vai dá 50. Não. 50, 10%. É aquela conta que nós estava fazendo na aula. (Risos) Claro, aquele outro problema lá. (Risos)</i>  <i>(Complementou sua tabela, ficando assim):</i>  <math>5 = 1\%</math>  <math>50,00 = 10\%</math>  <math>200,00 = 40</math>  <i>Esse 20 aqui que vai dá o 40 né. (Referindo-se aos 20 de sua operação de divisão, efetuada anteriormente).</i></p>	<p><i>(Também organizou os dados numa tabela, assim):</i>  <math>1\% = 5</math>  <math>10\% = 50</math>  <math>20\% = 100</math>  <math>40\% = 200</math>  <i>Não. 50 é 10%. Daí, 20% igual a 100.</i>  <i>Daí,</i></p> <p><i>Daí, 40% = 200.</i></p> <p><i>Fechou.</i></p>

<p>40%.</p> <p><i>O ELM(37;11) fez diferente. Olha que coisa interessante: daqui pra cá, você multiplicou por 10 e fez a mesma coisa daqui pra cá. (Indicando o operador escalar que fez passar 1% para 10% e 5 para 50, ao mesmo tempo em que escrevia na folha do sujeito o 10).</i></p> <p><i>Isto.</i></p> <p><i>Depois, do 10, para o 20, o que você fez? Multiplicou por 2. Se ali multiplicou por 2, aqui também multiplicou por 2.</i></p> <p><i>E do 20 para o 40. O que você fez?</i></p> <p><i>Você multiplicou por 2.</i></p> <p><i>Mesma coisa você fez aqui. (Indicando a passagem de 100 para 200).</i></p> <p><i>Também podia ser por 4? Podia, só que daí você ia pegar daqui (mostra a passagem de 10% para 40% e 50 para 200, respectivamente e escreveu na folha do sujeito), do 10, para o 40, multiplica por 4; e aí como você multiplicou por 4, aqui também é o multiplicar por 4. Que também ia dá o 200. Que foi o que você fez aqui (Mostrando na tabela de</i></p>	<p><i>Deu o 40.</i></p> <p><i>Que foi o que eu fiz aqui. (Mostrando em sua tabela).</i></p> <p><i>Por 2.</i></p> <p><i>Também por 2. Que achou os 40, que de 40% que deu os 200.</i></p> <p><i>Por 2. Que por 2, dá 4.</i></p> <p><i>Eu fiz aqui.</i></p>	<p><i>É. A gente foi fazendo por ordem: 10, 20, 40.</i></p> <p><i>Por 2.</i></p> <p><i>E aqui, por 4 (referindo-se à passagem de 10% para 40%).</i></p> <p><i>Por 4.</i></p> <p><i>Por 2. Que duas vezes 2, dá 4.</i></p> <p><i>Por 4, aí fechava.</i></p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

SCf(54;11), tá.

A partir do valor correspondente à unidade percentual, os participantes organizaram tabelas que expressam igualdades. Trata-se de **registros numéricos na forma de tabela de números proporcionais**. Aproveitando a forma de organização dos dados na forma de tabela, o pesquisador interferiu chamando a atenção para os operadores (escalar e por função) a que se refere Vergnaud (1983). Ao fazer esta interferência, o pesquisador estimulou os participantes a interagirem com o objeto de conhecimento, lançando mão de recursos que auxiliam no processo de compreensão.

### Problema 3

O trabalhador de uma empresa que recebe salário tem direito ao Fundo de Garantia por Tempo de Serviço – FGTS, que é de 8% sobre o salário bruto (salário bruto é o valor total da folha de pagamento). Sabendo que o valor do FGTS que a empresa tem de depositar mensalmente é de R\$ 40,00, qual é o valor do salário bruto desse trabalhador?

O pesquisador fez a leitura do problema. As conversas dos participantes indicaram que eles compreenderam o enunciado do problema. Ambos partiram para o registro dos cálculos. Novamente buscaram encontrar o valor correspondente a 1%, conforme pode ser visto no recorte do protocolo a seguir.

Participante SCf(54;11)	Participante ELm(37;11)
<p>Tem que dividir os 40 por 8.</p> $\begin{array}{r} 40 \quad   \quad 8 \\ \underline{40} \quad 5 = 1\% \\ 00 \\ 5 \times 100 = 500,00. \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ \times 10 \\ \hline 80\% = 400,00 \\ 20\% = 100,00 \\ \hline 500,00 \end{array}$ $\begin{array}{r} 400 \quad   \quad \cancel{80} \\ \hline 5 = 1\% \\ \times 20 \\ \hline 100 \end{array}$ $\begin{array}{r} 400 \quad   \quad 100 \\ \hline 4 \\ \times 2 \\ \hline 8 \end{array}$

A partir da relação de equivalência  $8\% = R\$ 40,00$ , SCf(54;11) efetuou a divisão ( $40 : 8 = 5$ ) encontrando assim o **valor equivalente a 1%**. O produto do quociente 5 pelo todo relativo (100%) permitiu que este participante encontre o resultado, assim:  $5 \times 100 = 500,00$ . ELM(37;11) multiplicou 8 por 10, obtendo 80%, o que é equivalente a R\$ 400,00. Para isso, fez uso do operador produto ou **coeficiente de proporcionalidade** (10). O equivalente aos 20% restantes só conseguiu a partir dos diálogos e orientações do pesquisador. Dividiu 400 por 80, obtendo 5 (equivalente a 1%) e multiplicou por 20, obtendo então valor de R\$ 100,00, que adicionado aos R\$ 400,00, perfazem os 100% do salário, que corresponde a R\$ 500,00.

As conversas prosseguiram, e o pesquisador pediu para que SCf(54;11) explicasse como pensou para fazer. Seu registro verbal oral revelou a busca de apoio em situações trabalhadas em sala de aula:

*Como é que eu fiz? Eu peguei os R\$ 40,00, que é o que ele deposita para cada funcionário, de 1. Aí ele tem que fazer 8%. Aí tu pega os R\$ 40,00 dividido pelos 8%, daquela folha, tá. Que dá 1%. Que a gente tem que sempre achar o 1%. Lembra que o professor diz que sempre a gente tem que achar o 1%. Porque nós não temos 1% nunca, na resposta. Daí a gente pega o que deu e faz vezes 100% que e pra chegar a um denominador comum.*

Os registros verbais orais e escritos dessa dupla de alunos dão indícios de que estão familiarizados com os registros de representação semiótica e procedimentos difundidos pelo processo de escolarização, embora ainda não possuam amplo domínio das regras de significado e funcionamento (Duval 1993; 1995) da escrita matemática. Além dos registros de representação numérico aritméticos bastante presente nos três estudos realizados e com mais destaque entre os estudos com os alunos, esta dupla lançou mão de registros de representação semiótica mais elaborados, a exemplo da fração.

#### **4.10.4. Quarta dupla: A Af(38;4) e E Ff(25;8)**

Como de praxe, o pesquisador solicitou que os participantes preenchessem os dados, orientando-os sobre o trabalho a ser desenvolvido. Em seguida fez a leitura do problema 1.

### Problema 1

Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?

Após a pergunta do pesquisador *o que significa 30%*? EFf(25;8) falou:

*Fosse 10%, daria 20. (...) Fosse 20%, daria 40; fosse 30%, 60. (...) O negócio é a montagem. Eu faço isso de cabeça.*

Ao ser orientado a escrever do jeito que falou, este participante fez o seguinte registro verbal escrito:

*Se fosse 10% daria R\$ 20,00  
20% “ R\$ 40,00  
30% “ R\$ 60,00*

Tanto no registro verbal oral quanto no registro verbal escrito (registro numérico de números proporcionais) de EFf(25;8) percebemos a utilização da estratégia escalar de que nos fala Schliemann (1998). Nos momentos que seguiram, os participantes dialogaram entre si. Em suas conversas A Af(38;4) fala que EFf(25;8) usou a lógica; mencionou que seria interessante encontrar 1% para depois somar. Trata-se da busca de apoio nas orientações passadas pelo professor de Matemática em sala de aula, ou ainda, nas palavras de Fonseca (2001; 2002), das reminiscências escolares. A transcrição a seguir elucida o que estamos dizendo.

*Agora, se for usar a maneira que o professor ensinou (referindo ao professor de matemática), jogar pra cá (referindo-se à transformação para decimal). Registrou 00,2 1%. (enquanto isso, foi falando): então seria 200 né, aí eu pegaria a vírgula e traria pra cá, então seria isso aqui (referindo-se a 00,2). Então, isso aqui é 1%. 1% do 100. Aí, eu teria que fazer isso, vezes 30.*

*Esse 2 aqui, é 1%, vezes o que tá pedindo aqui, que seria 30. Daí eu vou tirar o zero. Então seria 2 vezes 3, são 6. Aí, isso aqui, eu teria que acrescentar os dois zeros, que daria o 60 que você chegou.*

*(Fez a seguinte operação):*

*2 1%  
x 3  
30%*

*(Registrou também a resposta):*

*Aumento de R\$ 60.*

As falas de AAf(38;4) estão embebidas de regras utilizadas no processo de sua escolarização. Temos novamente as reminiscências da matemática escolar de que nos fala Fonseca (2001; 2002). Como exemplo, podemos destacar a busca do **valor correspondente à unidade percentual (1%)**, o posicionamento da vírgula e a não utilização do zero do 30, quando o participante efetuou o **registro numérico aritmético** da multiplicação entre o valor correspondente a 1% e o correspondente a 30%.

Dando seqüência aos diálogos, o pesquisador mostrou outros tipos de registros, a exemplo de tabela de números proporcionais. Dessas conversas, AAf(38;4) deu mais detalhes e fez novos registros, conforme a transcrição a seguir:

*Porque segundo a lógica que nós aprendemos com o professor. Eu sei que isso aqui é o 100% (referindo-se ao 200), se eu descobrir quanto que é o 1% disso aqui, eu multiplico ele pelo valor que está pedindo eu vou conseguir encontrar o valor que é o total.*

*(...)*

*Às vezes, no meu caso. Eu tenho dificuldades quando eu tenho que usar esse caminho, porque eu tenho dificuldades com vírgula. Então quando entra em números quebrados eu não consigo me dar bem nessas contas aqui. Aí eu tenho que usar outro caminho. Aí eu tenho que usar aqueles 200 lá, daí dividido vai dá o 100. Daí tiro o zero, multiplico pelo 2, pra chegar lá.*

*(...)*

*É? Eu só uso esse caminho aqui, quando eu vejo que não dou conta lá, por causa da vírgula. (Fez a seguinte operação):*

$$\begin{array}{r}
 200 \cancel{0} \quad | \quad 100\% \\
 \underline{2} \quad 2 \quad 1\% \\
 0 \quad \underline{x \ 30} \\
 R\$ 60 \quad 30\%
 \end{array}$$

*(Enquanto fez a operação, foi falando):*

*Então eu tenho que riscar esse zero aqui (referindo-se aos zeros do 100 e do 200, respectivamente), aí eu vou saber quantas vezes esse aqui entra nesse aqui (referindo-se ao divisor e dividendo respectivamente), né. Dois vezes um. Aqui vai dá o mesmo resultado né.*

*(Concordância do pesquisador)*

*Aqui dá zero, né. E aqui 6 (referindo-se a 2 x 3). Aí eu voltaria lá. Daí isso daqui daria 100%. Mas o que está pedindo é 30, aí eu tenho que saber quantas vezes eu tenho que repetir isso aqui (referindo-se ao valor correspondente a 1%, neste caso, 2), pra dar os 30%. Aí eu vou tentar por 1, por 2, até chegar o 30.*

*(...)*

*Eu evito o caminho da vírgula porque eu tenho muita dificuldade com a vírgula.*

É interessante perceber que o participante continuou fazendo uso de recursos adquiridos em seu processo de escolarização, agregando novos elementos, como, por

exemplo, a avaliação da quantidade inicial com a centena, a simplificação dos zeros quando se trata da divisão de 200 por 100.

As explicações do participante dão indícios de que a avaliação em relação à centena foi feita com compreensão, mas isso só pode ser afirmado categoricamente mediante novas evidências. É interessante também destacar que o participante manifestou falta de intimidade com a linguagem matemática, principalmente a escrita.

O pesquisador retomou o raciocínio de EFf(25;8), e lançando mão do referencial teórico dos registros de representação semiótica de Duval (1993) – tabela de proporcionalidade, mostrou outras possibilidades aos participantes. Atentamente, estes acompanharam as orientações e o participante EFf(25;8) fez menção de concordância, respondendo às perguntas que o pesquisador foi fazendo no decorrer das explicações. Tais orientações podem ser vistas na transcrição do protocolo, a seguir.

*Olhem que coisa interessante que vocês fizeram. Cada uma foi por um caminho e chegaram ao mesmo resultado.*

*E você me disse que tinha dificuldades e fazia de cabeça. Quer ver como dá para montar na forma de tabelinha e olhando matematicamente o teu esqueminha? (Referindo-se à EFf(25;8)).*

*Você me disse que 10% daria R\$ 20,00; que 20% daria R\$ 40,00; que 30% daria R\$ 60,00. (Escreveu na folha do participante o seguinte):*

*10% \_\_\_\_\_ 20*

*20% \_\_\_\_\_ 40*

*30% \_\_\_\_\_ 60*

*Olha o que você fez para passar de 10 para 20? Você não multiplicou por 2? (Vai colocando setas e o operador escalar (2 e 3 respectivamente, conforme explicita na fala) O que aconteceu na passagem do 20 para o 40?*

*Agora, do 10 para o 30, você multiplicou por quanto?*

*3. do 20 para o 60, você também multiplicou por 3.*

*Está vendo? É uma forma matemática de fazer. Tem gente que organiza deste jeito aqui, porcentagem e resultado, colocando 10 é 20, 20 é 40, 30 é 60. (Organizou a seguinte tabela na folha do participante):*

<i>%</i>	<i>resultado</i>
<i>10</i>	<i>20</i>
<i>20</i>	<i>40</i>
<i>30</i>	<i>60</i>

*Olha outra coisa interessante, se a gente olha daqui, pra cá, o quê que a gente faz? Multiplica por 2. (Mostrando o operador função na tabela anterior, ao mesmo tempo em que desenhava as setas, escrevia o operador  $\times 2$ ).*

*O 20%, o 20, para chegar o 40, o que se fez?*

*Também multiplicou por 2. No 30 para chegar no 60, o que a gente fez também?*

*Por 2. No 30 para o 60.*

*Olhe que se você olhar na linha, existe a multiplicação por 2. Se olhar na coluna, você fez por 2 depois você fez por 3.*

Nesses diálogos é possível perceber que o pesquisador induziu os participantes a utilizarem novos registros. Isso foi possível porque os registros verbais orais e escritos dos participantes indicavam que eles avaliavam a quantidade inicial com a centena, indicando, assim, certa intimidade com o conceito de proporção-porcentagem. Os registros verbais escritos desses participantes assemelham-se bastante aos registros efetuados pelas duplas entrevistadas anteriormente e com as orientações passadas pelo professor em sala de aula.

### **Problema 3**

O trabalhador de uma empresa que recebe salário tem direito ao Fundo de Garantia por Tempo de Serviço – FGTS, que é de 8% sobre o salário bruto (salário bruto é o valor total da folha de pagamento). Sabendo que o valor do FGTS que a empresa tem de depositar mensalmente é de R\$ 40,00, qual é o valor do salário bruto desse trabalhador?

EFf(25;8) fez a leitura do problema. Ao serem interpelados pelo pesquisador para saber os dados e as informações fornecidas pelo enunciado e de quem constitui a incógnita, o participante falou: *Deu. R\$ 40,00 é o 8% do salário bruto dele.* Este registro verbal oral dá a entender que o participante compreendeu o enunciado, o que não se sustenta nos diálogos que se seguem.

AAf(38;4) só se manifestou depois, isto é, enquanto EFf(25;8) pensava numa forma de efetuar os cálculos. Diante da nova pergunta do pesquisador: *O quê a gente tem que descobrir?* AAf(38;4) respondeu: *O quanto é o salário dele* O pesquisador continuou interpelando para que este participante percebesse a relação entre 8% e R\$ 40,00 e que o salário todo seria 100%.

A partir dos diálogos, este participante demonstrou que estava pensando numa forma de solucionar o problema. Depois dos diálogos entre EFf(25;8) e o pesquisador e da

pergunta deste: *O que você está pensando AAf(38;4)?* Respondeu: *Estou tentando montar, na minha cabeça.* Esta resposta confirma o que falamos anteriormente sobre a busca de uma operação ou algoritmo que propicie encontrar a solução. Pode-se dizer que se trata das reminiscências da matemática escolar (Fonseca 2001; 2002) e das regras implícitas ao contrato didático (Brousseau 1988), qual seja, este é um problema de matemática, apresenta número e, portanto, existe uma regra que permite encontrar a solução.

Os diálogos prosseguiram e o pesquisador continuou a instigar e provocar os participantes com perguntas, estabelecendo relações; mas a resposta não veio. Somente ao rememorar um problema resolvido em sala de aula, os participantes conseguiram chegar a uma solução. Isso pode ser visto no trecho do protocolo, a seguir.

Pesquisador	Participante AAf(38;4)	Participante Eef(25;8)
<p><i>Pode. Não tem problema.</i></p> <p><i>E aqui, é quanto? Quanto por cento?</i></p> <p><i>R\$ 40,00. Quanto por cento?</i></p>	<p><i>Essa é parecida com aquela conta do avião, que a gente fez o outro dia, lembra? Que decolava.</i></p> <p><i>Posso fazer as minhas anotações, professor?</i></p> <p><i>Segundo o cálculo que a gente fez aquele dia, pagava o valor gasto e colocava aqui e dividia. Lá era 90%.</i></p> <p><i>Aqui é 40.</i></p>	<p><i>Aham. Mas a gente não conseguiu.</i></p> <p><i>Qual é a tua idéia AAf(38;4).</i></p> <p><i>8.</i></p>

<p>8.</p> <p>Isto. Quanto é 40, dividido por 8?</p> <p>Ajuda Aaf(38;4). Quanto é, 40 dividido por 8?</p> <p>Pode, pode pegar a tabuada, não tem problema.</p> <p>O que é a divisão, não é o inverso da multiplicação?</p> <p>Você não tem 8? Então procura na tabuada do 8, onde você encontra o 40.</p> <p>5.</p> <p>Claro.</p> <p>Isto.</p> <p>Quantos por cento? Você já tem e que é 1%.</p> <p>Não, o 8 você já fez. Você tem que saber quanto é o salário total. Quanto é o</p>	<p>(Fez as seguintes operações):</p> $\begin{array}{r} 40 \\ \underline{8} \\ 40 \end{array} \quad 5 \quad 1\%$ <p>0</p> <p>100 x 5 R\$ 500 100%.</p> <p>(Enquanto resolvia, ia falando):</p> <p>Tem que ver quantas vezes esse aqui vai aqui, né. (Referindo-se ao 8, no 40).</p> <p>40 dividido por 8.</p> <p>Posso pegar a tabuada?</p> <p>Ai, ai, ai. Aqui não tem divisão.</p> <p>É.</p> <p>Onde encontra o 40. 5.</p> <p>Tá, então isso aqui é 1%.</p> <p>Agora eu preciso saber quanto por cento.</p> <p>Tá isso aqui é 1%. Fazer 5 vezes 8. É isto?</p>	<p>Era isso aí que eu estava querendo ver.</p> <p>5 vezes 8, 40?</p> <p>Ah, então tá.</p> <p>5 é 1%.</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------

salário total, em porcentagem?	100%.	
É 100%, então, você tem 1%, pra fazer 100.	Vezes 100.	
Pronto. Pega o valor e multiplica pelo 100.		Vai dar 500.
Aí, vezes 5, 500.	500 então é o 100%.	
Isto. Qual é o salário todo do cara?	R\$ 500,00.	500.
Isto. R\$ 500,00.		

O registro verbal oral AAf(38;4) nos remete às reminiscências escolares (Fonseca 2001; 2002) quanto nos problemas anteriores, em que este participante procurou o valor correspondente a 1%. Esta é uma marca bastante presente nas entrevistas, principalmente com as quatro duplas deste estudo. Isso confirma o que o participante PMm(43;7) nos falou: *é assim que eu ensino meus alunos.*

Encontrado o **valor correspondente a 1%**, neste caso, R\$ 5,00, o participante encontrou o valor do salário do trabalhador. A partir do **registro numérico aritmético** e das discussões com este participante, EFn(25;8) também chegou ao resultado.

## Problema 2

Um trabalhador recebe um salário de R\$ 500,00 e está defasado em R\$ 200,00. Expresse essa defasagem na forma de taxa percentual.

AAf(38;4) fez a leitura do problema. O termo defasado não ficou muito claro para os participantes, o que exigiu a interferência do pesquisador. EFn(25;8) retomou a idéia do equivalente a 1% e AAf(38;4), o problema do avião. Estes são pontos de apoio que os participantes buscaram para encontrar a resposta ao problema em questão. O que estamos falando pode ser visto no recorte do protocolo, a seguir.

Pesquisador	Participante AAf(38;4)	Participante EFn(25;8)
		<i>Da conta que tu fez aqui, daria também pra gente encontrar o 1%, né. (Referindo-se à conta feita em sala de aula).</i>

Se 500 é 100%, porque você quer dividir por 200?

Aquela do avião?

Essa daqui também é.

Tá. Então seria. Pegaria os 500 daqui, que é o 100% e dividiria pelo que eu. É isso será? Pelo que eu tenho que é 200%.

Porque eu estava fazendo a lógica daquele de dividir por 100.

Não. Este aqui dá o valor total e aquele não dava, daí inverte.

Partindo do princípio que ele disse de que essa porcentagem é tirada por 100, então vamos ver quantas vezes nós vamos ter que tirar. Seria. Vamos ver se eu consigo fazer isso, vamos ver se eu entendi aquilo que ele tinha falado. Vamos ver!

Registrou o seguinte, enquanto falava):

	5 x 20	5 x 40
100	20%	40%
100	20%	40%
100	20%	40%
100	20%	40%
100	20%	40%

500 = 100% 10% 200 = 40%

Um, dois, três, quatro, cinco.

Então eu tenho 5 vezes o 100. (Registrou 5 vezes o 100) Agora eu tenho que ver aqui. Vamos ver se vai dá. Acho que não vai dá não.

Vou fazer por 20. (Escreveu 20% ao lado de cada um dos 100). Ah. Quero ver se eu entendi aquilo que o senhor falou.

É. No caso você chegou a conclusão.

É.

Mas não dá.

Inventou uma lógica, né.

<p><i>Aquilo de comparar?</i></p> <p><i>Então o que a gente vai ter que fazer? Se tirando 20, dá 100, pra dar 200, que é 200 que te interessa? Vai ter que tirar quanto de cada 100?</i></p> <p><i>Isso. Vai ter que dobrar.</i></p> <p><i>Não. (Para EFf(25;8)). Tira 4 de cada 100. (Para AAf(38;4)).</i></p> <p><i>5 vezes 4, 20. 200.</i></p> <p><i>Olha que coisa interessante: de 100, você tirou quantos?</i></p> <p><i>Quantos que é por cento?</i></p> <p><i>40%. Porque, de 100 você pegou quanto?</i></p> <p><i>40. É 40%.</i></p> <p><i>500. Isto.</i></p>	<p><i>É. De comparar. Então de cada 100 eu estou tirando 2, que no caso é 20. (Falou): dá 500 aqui (somando a coluna dos 100). Aqui vai dá, dá 100 (somando a coluna dos 20).</i></p> <p><i>Vou ter que dobrar.</i></p> <p><i>Então vou fazer isso daqui.</i></p> <p><i>Tá, então vou colocar aqui. (Escreveu a coluna dos 40%).</i></p> <p><i>40, eu não sei se eu ia conseguir fazer isso aqui sozinha, não. Um, dois, três, quatro, cinco.</i></p> <p><i>Aí sim.</i></p> <p><i>40.</i></p> <p><i>40.</i></p> <p><i>Então R\$ 200,00 é 40% de 500.</i></p>	<p><i>Tinha feito certo, de 30, né?</i></p> <p><i>40%.</i></p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------

O registro efetuado por AAf(38;4) mostra que este participante estabeleceu relação de correspondência entre 100, 20% e 40%. Pela via da composição, organizou os dados e chegou ao todo absoluto (500) e o relativo (100%) e concluiu que  $500 = 100\%$ , assim como  $200 = 40\%$ . O registro verbal escrito e os registros verbais orais deste

participante permitiram este entendimento. Temos aqui o **registro de representação na forma de tabela de números proporcionais**.

AAf(38;4) tentou explicar para EFf(25;8) como chegou ao resultado, mas este não conseguiu compreender o raciocínio. O pesquisador interferiu, retomando uma fala inicial deste participante, passando a orientá-lo. Isso pode ser visto no trecho da transcrição seguir.

*P - Tá. Então vamos pensar no jeitinho que você me falou, lá no começo. Você me disse que 500 é 100%. Então anota aqui (indicando a folha).*

*EFf(25;8) - (Registra):*

*500,00    100%*

*P - Agora pensa: 500, é 100%. 100, é quanto por cento?*

*EFf(25;8) - (Registra abaixo de 500,00 e 100%):*

*100,00    20%*

*(...)*

*P - Que precisa fazer do 500, pra chegar no 100?*

*EFf(25;8) - Ou do 100 pra chegar o 500.*

*P - Ou do 100 pra chegar no 500.*

*EFf(25;8) - Vou multiplicar, né.*

*P - Por quanto?*

*EFf(25;8) - Por 5.*

*P - Por 5. Então faz este esqueminha aqui (escreveu o operador escalar x5, com a seta indicando para cima, na folha do participante). Daqui pra cá, você multiplicou por 5.*

*Agora, olha aqui, da porcentagem, que você precisa pra chegar no 100, você também vai ter que multiplicar por 5. Certo?*

*EFf(25;8) - Aham.*

*P - Porque, o que você fez aqui, multiplicou por 5 (indicando a coluna dos valores absolutos), você vai ter que fazer lá (indicando a coluna da taxa percentual).*

*EFf(25;8) - Sim.*

*P - Que número. Vezes 5, me dá 100?*

*Que número vezes 5, me dá 100?*

*EFf(25;8) - 5 vezes 10, né.*

*P - 5 vezes 10 dá 50.*

*EFf(25;8) - 50.*

*P - 5 vezes 20.*

*EFf(25;8) - Vai dá 100.*

*P - Então, 20%.*

*EFf(25;8) - Aqui, o 100 é o 20% (referindo-se aos R\$ 100,00).*

*P - Exatamente. Agora você que saber de quantos?*

*EFf(25;8) - 40.*

*P - Não. De quanto?*

*EFf(25;8) - De 200.*

*P - De 200. Então olha aqui 200, bota embaixo do 100, 200. O que precisa fazer no 100, pra chegar no 200?*

*EFf(25;8) - Vou multiplicar.*

*P - Por quanto?*

EFf(25;8) - Por 2.

P - Isso. Você multiplica por 2. E o que faz no 20%?

EFf(25;8) - 40.

P - 40%. Que também é multiplicar por 2.

Esse teu pensamento inicial aqui, te dava toda a linha pra chegar à conclusão.

Esse teu pensamento é muito interessante. Você só precisa perceber como lidar nessa passagem aí. A base de tudo você tem.

EFf(25;8) - Chegar à conclusão.

Pelos diálogos, novamente o pesquisador interferiu, na tentativa de fazer com que o participante percebesse a proporção e nela, o coeficiente ou operador. Depois do diálogo com EFf(25;8), o pesquisador deu atenção à AAf(38;4) e desencadeou com ele o seguinte diálogo:

P - Olha, no começo, você estava dividindo o 500 por 200. Que, na verdade você tinha que dividir por quanto?

AAf(38;4) - 100.

P - Por 100, porque é porcentagem.

Então é só você fazer. Faz 500 dividido por 100. Porcentagem, sempre avalia, sempre compara com 100.

AAf(38;4) - (Efetou os seguintes registros, enquanto falava):

$$\begin{array}{r} 500 \overline{) 100} \\ 1\% \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 40 \\ \hline = 40\% \end{array}$$

Aqui tem que tirar o zero.

(...)

AAf(38;4) - Então isso é 1%.

P - Isto.

AAf(38;4) - Só que eu preciso.

P - Você precisa chegar em R\$ 200,00. Agora você vai ter que fazer alguma coisa, para chegar no 200.

AAf(38;4) - Agora eu já sei que é isso aqui (escreveu  $5 \times 40$ ), mas antes eu não sabia. Vou fazer 5 vezes 40, que vai dar 200.

P - 200. Isto, que é 40%.

AAf(38;4) - Igual 40%.

P - Deixa eu dar um toque. Você tinha que 5 é 1%. (Montou uma tabelinha, na folha do participante). O que você precisa fazer no 5, para chegar no 200? Que é o que você quer. Você tem que multiplicar. Multiplicar por quanto. Você podia fazer uma continha, 200 divide por 5, que é a operação inversa da multiplicação, que daria os 40. Então 5 vezes 40, que deu 200. (Registrou o operador escalar,  $\times 40$ , acompanhado da seta que faz passar do 5 para o 200). Se você multiplicou ali por 40. O 1% também, tem que ser multiplicado por 40. 1 vezes 40, 40%.

(...)

*P - Tem gente que faz assim. (Montou na folha de A Af(38:04) a seguinte tabela, enquanto ia falando):*

5	1%
10	2%
100	20%
40%	

*5, é 1%; 10, é 2%; 100, é 20% e 200, é 40%.*

*Tendo 1%, com uma tabelinha, você chega lá.*

*(...)*

*P - Está defasado 40%. Exatamente isso.*

*Tem gente que começa assim: 200, é menos da metade de 500, então é menos de 50%, porque 50% seria 250.*

*AAf(38;4) - É, eu já tentei seguir esse raciocínio também, mas aí não consegui.*

Por meio do diálogo, e a partir da idéia do participante, o pesquisador procurou mostrar outras possibilidades em termos de procedimentos e de registros de representação. Isso vem ao encontro do que preconiza Nehring (2001), quando diz que na passagem de um enunciado não congruente não basta o professor reler o problema para que o aluno entenda ou traduza determinados termos que ele ainda não conhece, mas que o auxilie a fazer a conversão, lançando mão de uma representação intermediária.

De maneira muito breve podemos dizer que os participantes desta pesquisa buscaram apoio nas demandas da vida social (Fonseca 2001) ou variáveis culturais (Acioly-Régnier, 1997), como, por exemplo, no cálculo de salário, de situações de compra e venda, vivências escolares ou familiares, ou ainda, em valores ou quantidades que lhes fossem mais acessíveis, como metade, 50%, 10%, dobro, entre outras; fizeram uso de registros de representação semiótica numérico, principalmente aritméticos.

#### **4.10.5. Considerações em relação aos registros utilizados pelos participantes no Estudo IV**

Os registros verbais orais e escritos dos participantes deste estudo, assim como dos participantes dos estudos anteriores, indicam a busca de apoio em situações **socioculturais e escolares**. Isto é, para solucionar os problemas propostos, os participantes do Estudo IV procuraram estabelecer relação entre os dados e as informações presentes nos enunciados dos problemas com quantidades ou taxas percentuais que lhes fossem mais

acessíveis. Isso pode ser verificado nos registros verbais orais e escritos de LAf(35;5) – primeira dupla e EFf(25;8) – quarta dupla, por exemplo.

No decorrer das entrevistas realizadas com os participantes das quatro duplas de alunos podemos encontrar referências às reminiscências da matemática escolar (Fonseca 2001; 2002). Mais do que nos estudos anteriores (Estudo I e II - efetuados com alunos), apareceram marcas de registros escolares, entre os quais destaca-se a busca do valor correspondente à unidade percentual (1%), a partir da qual estabeleceram relação com os dados fornecidos pelos enunciados dos problemas e encontraram a solução do problema. Como exemplo podemos destacar os registros verbais orais de EPm(22;11) – primeira dupla, STf(45;8) – segunda dupla, ELf(37;11) – terceira dupla e AAf(38;4) – quarta dupla.

Ao retomarmos os registros verbais orais e escritos de PMm(43;7) quando da entrevista com os professores (Estudo III), vemos que este participante mencionou que orientava seus alunos a buscar o valor correspondente a 1%. Isso nos leva a acreditar que esta seja a razão pela qual os participantes do Estudo IV fizeram uso desse procedimento.

Os estudos realizados por Carvalho (1995, 2001), Calazans (1996), Acioly-Régnier (1997), Franco (2000), Fonseca (2001, 2002), entre outros, indicam que, no processo de escolarização, os alunos de EJA procuram também acessar e fazer uso dos conhecimentos difundidos pela escola. Acreditamos que, para os participantes deste estudo, encontrar o valor correspondente a 1% significa mostrar que sabem fazer uso dos conhecimentos escolares. Esta é uma forma de valorizar o que aprenderam e, ao mesmo tempo, de mostrar para outrem (neste caso para o pesquisador) que eles sabem utilizar o que aprenderam no decorrer do curso.

No que concerne aos registros de representação semiótica (Duval 1993; 1995; 2003), acreditamos dizer que os participantes deste estudo fizeram uso, principalmente, de registros de representação semiótica numéricos (Vizolli, 2001) com destaque aos registros **aritméticos** e de **tabela de números proporcionais**. O registro numérico na forma de tabela de números proporcionais foi utilizado pelas duplas de alunos nos quatro estudos, o que nos levou a acreditar que estes participantes percebem que existe uma relação entre as quantidades e as variáveis presentes no enunciado. Diferentemente dos participantes demais estudos realizados com alunos (Estudos I e II), neste estudo foram encontrados registros escritos em que a incógnita foi representada por uma letra de nosso alfabeto (x), o que pode ser visto no registro escrito (registro de representação semiótica na forma de tabela de números proporcionais) por STf(45;8) ao solucionar o problema 2. Isso denota

que o processo de escolarização amplia a gama de conhecimentos dos alunos permitindo que passem a utilizar registros de representação semiótica mais elaborados como, por exemplo, registros algébricos na forma de equação ou função.

Embora não possamos dizer que os participantes deste estudo compreendem a proporção-porcentagem em nível conceitual, os registros verbais orais e escritos utilizados nos leva a acreditar que eles compreendem a proporção-porcentagem de forma mais ampla que os participantes dos estudos anteriores (Estudo I e II). Mesmo assim, os tratamentos e as conversões situaram-se principalmente no campo da aritmética.

Este estudo confirmou as indicações dos estudos anteriores, isto é, a busca de apoio em situações socioculturais e escolares e a utilização de registros de representação usuais no processo de escolarização.

## **5. O DESVELAR DOS RESULTADOS**

Ao discutir os resultados, procuramos refletir sobre os registros verbais orais e escritos utilizados pelos participantes da pesquisa, levando em consideração os pontos de apoio aplicados no processo de solução e apresentamos alguns aspectos necessários ao processo de compreensão do conceito de proporção-porcentagem.

### **5.1.Os pontos de apoio utilizados pelos participantes na passagem do enunciado do problema em linguagem mista para linguagem matemática**

Os participantes desta pesquisa estabeleceram relações entre os dados e as informações contidos nos enunciados dos problemas, com situações do contexto social, seja por meio do tema ou assunto que o problema aborda (extra-matemática), seja por meio de valores (matemática – quantidades ou taxas) que lhes fossem mais acessíveis. Estes apoios têm conexão com situações que não são de ordem estrita da Matemática, como, por exemplo, o trabalho, o comércio, o salário; a família, a escola; e situações que dizem respeito ao conteúdo matemático envolvido no problema, a exemplo taxas percentuais múltiplas de 5% ou 10%, metade, dobro, decomposição de quantidades, problemas resolvidos anteriormente, reminiscências escolares, estimativa, cálculo mental, tentativa e erro. Estas situações fornecem os elementos que servem de apoio para solucionar os problemas, permitindo que os participantes encontrem uma resposta ao que foi perguntado no enunciado do problema.

De acordo com Acioly-Régner (1997), podemos dizer que esses apoios são variáveis culturais, as quais desempenham um papel importante no processo de conceitualização. As significações e justificativas mudam em função da representação que o sujeito tem ou faz da situação. Fonseca (2001) diz que as demandas da vida social extra-escolar, particularmente a da vida profissional, constitui-se numa das condições que favorecem a aprendizagem da matemática. Piconez (2002) acompanha os autores que entendem que o ambiente social é determinante nas construções cognitivas dos adultos.

A literatura sobre a formação de professores, mais especificamente Ponte (1994), quando fala sobre o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor e

Fiorentini; Souza Jr e Melo 1998, Melo 2005, Fiorentini 2003, quando refletem sobre como os saberes são apropriados/aplicados e elaborados/reelaborados, apontam na direção de que o professor também se forma por meio da reflexão sobre sua prática. Quando os participantes do Estudo III (dupla de professores) estabeleceram relações entre os dados e informações contidos nos enunciados dos problemas com outras situações matemáticas ou extra-matemática, tanto, de seu contexto social como escolar, podemos dizer que estes participantes estão refletindo sobre sua prática, não só de ensinar, mas também de aprender. Os alunos participantes desta pesquisa também refletem sobre sua prática, muito mais com o intuito de aprender.

O apoio em situações do contexto cultural encontra eco em muitos dos estudos sobre o processo de aprendizagem da matemática na EJA, entre os quais destacamos, Carvalho (1995), Calazans (1996), Acióly-Régnier (1997), Maurmann (1999), Franco (2000), Fonseca (2001), Piconez (2002), Fantinato (2004). Além do contexto cultural, encontramos situações em que os participantes buscaram apoio em situações matemáticas vivenciadas no processo de escolarização.

Partes dos diálogos estabelecidos no decorrer das entrevistas ou de registros efetuados pelos participantes encontram eco no que consta na literatura e servem como exemplo para elucidar os pontos de apoio utilizados. Ao estabelecer os pontos de apoio, os participantes elaboraram o plano de ações (Polya 1995) que lhes permitiu responder ao que era perguntado no enunciado do problema. Para solucionar um problema de matemática Duval (1993; 1995) refere-se a atribuição do sentido e do significado operatório.

### **5.1.1. Apoios em situações do contexto cultural**

#### **a) Ao mundo do trabalho**

O participante Cf(23;5) mencionou o termo **parte**, dizendo que *8% é uma pequena parte. Vamos supor, é uma pequena parte desse total, do todo. Uma pequena parte dessa quantia.* (Estudo II, problema 3). Este termo, como já nos referimos, refere-se à partilha do valor pescado. É um termo bastante utilizado pelos pescadores, pelo menos dos que residem no litoral do Estado de Santa Catarina. Trata-se de um modo de efetuar a partilha do valor do pescado.

Ao analisarmos o caso dos pescadores, *parte* não trata apenas da divisão por partição, mas congrega a divisão por quota e a multiplicação simples, como descreve

Vergnaud (1983). Trata-se sim de um caso de quarta proporcional, porque ao se obter o valor corresponde a cada parte – unidade, este passa a ser coeficiente multiplicativo – operador função.

A distribuição das quantidades em *partes* pode ser vista em outras situações. O registro de Jm(16;1), é um exemplo. Veja:

8	100
16	200
33	300
40	500

No registro dos valores das quantidades na tabela, podemos perceber que o participante relacionou 8% como sendo 8 partes de cada 100 e efetuou a **distribuição proporcional**. Nos termos de Vergnaud (1983), trata-se de uma distribuição escalar. A passagem de 8 para 16 e deste para 32 (33) aconteceu por meio da duplicação, quer pela via do operador (2 – produto), quer pela soma. A passagem de 32 para 40 aconteceu pela adição (32 + 8).

No registro efetuado, temos o que Polya (1995) denomina de execução do plano. Trata-se, nos termos de Duval (1993; 1995), de uma conversão em que o participante utilizou um **registro de representação numérico na forma de tabela de números proporcionais**, com tratamento de razão.

## b) Comercialização

As conclusões da pesquisa apresentada por Maia (1999) indicam que uma das representações dos professores sobre o ensino da porcentagem está relacionada às finanças. Isso é ratificado pela fala de EFf(25;8). *É, porque a gente vai numa loja, por exemplo, 10% de desconto, 20% de desconto, tal, né. (...)*. (Estudo IV, problema 1).

## c) Cálculo de salário

Ao buscar apoio no cálculo do salário, o participante PCf saiu do contexto do tema que o problema estava tratando e manteve relação com as quantidades numéricas. Vejamos: *Se for do meu salário eu faço assim. Se é 10% e o salário é 500, eu sei que de 100 é 10, daí tenho 50.* (Estudo I, problema 1). Franco (2000) destaca que no processo de aprendizagem, muitas vezes o sujeito deixa de lado o sistema total e prende-se aos aspectos

de significação, sendo importante compreender o processo de construção e o tipo de implicações envolvidas na aprendizagem.

#### **d) Vivências familiares**

*Eu vou fazer do jeito que meu pai me ensinou (...).* (Estudo III, problema 1). Esta foi uma das falas do participante PMm(43;7). Ela ratifica o que falamos quando apresentamos alguns recortes de experiências e vivências como aluno do curso de EJA e coaduna-se com os resultados de muitas das pesquisas realizadas no campo da EJA (Franco 2000, Fonseca 2001; 2002, Tôrres 2002, Fantinato 2004).

#### **e) Situações escolares**

Os estudos de Fonseca (2001; 2002; 2003; 2004, entre outros) tratam das reminiscências escolares. Em vários momentos desta pesquisa, deparamo-nos com estas reminiscências, ou seja, uma circunstância em que se faz sentir diversos efeitos da memória. Encontramos situações em que os alunos procuram rememorar aspectos da matemática vivenciados quando do retorno, talvez muito mais do que nas experiências escolares anteriores ao retorno. O interessante nisso é que podemos perceber algumas *chaves* que os participantes utilizaram para solucionar os problemas propostos. Algumas delas nos remetem à busca de regras e macetes, como acontece também com a matemática trabalhada no ensino regular.

A busca de apoio em situações escolares é uma forma que os participantes têm de valorizar ou legitimar a maneira como a escola trata os conhecimentos por ela disseminados, ao mesmo tempo em que busca aceder ao conhecimento formal e institucionalizado. A transcrição de alguns dos diálogos elucidam o que estamos dizendo.

*Cf(23;5) - Esses dias nós fizemos uma problematização de porcentagem, aí era, como eu vou te dizer.*

*Jm(16;1) - Gráfico*

*Cf(23;5) - Gráfico. Deu para ter uma idéia. Mas se você me pedir eu já não sei, porque foi só um dia. Daí a professora não pôde voltar mais, porque cada dia é numa sala. Então eu já não sei fazer.*

*(...)*

*Tô tentando lembrar a regrinha, mas eu esqueci.*

*(...)*

*Não, eu consigo. A professora me explicou. É fácil. Eu esqueci. (Estudo II, problema 1).*

*PMm(43; 7) – Assim que eu ensino meus alunos.*

(...)

*O por cento, que dá 2. Fazer o cálculo de 200 por 100 (200 : 100). Vai dá 2. Aí esse 2 é 1%.*

*Que é o caminho de MGf(37;10), aí, 2% é o dobro, 2 dá 4, 3 dá 6, colocando 30, justifica o 60.*

*Trabalho com a divisão e a proporção pra mostrar pra eles que porcentagem é em cima disso. (Estudo III, problema 1).*

*EPm(22;11) – É que a gente começou agora a estudar porcentagem, com o professor PMm43;7), daí eu sei que tem que achar 1%, mas não consigo. (Estudo IV, problema 3).*

*STf(48;1) – É igual a continha, só pra entender, aquela das pombas lá. Não dava de fazer inteiro, então eu fiz ... (passou a contar uma história que havia contado em sala de aula, ao mesmo tempo em que registrava as operações efetuadas para resolver o problema). (Estudo IV, problema 1).*

*SCf(54;11) – Como é que eu fiz? Eu peguei os R\$ 40,00, que é o que ele deposita para cada funcionário, de 1. Aí ele tem que fazer 8%. Aí tu pega os R\$ 40,00 dividido pelos 8%, daquela folha, tá. Que dá 1%. Que a gente tem que sempre achar o 1%. Lembra que o professor diz que sempre a gente tem que achar o 1%. Porque nós não temos 1% nunca, na resposta. Daí a gente pega o que deu e faz vezes 100% que e pra chegar a um denominador comum. (Estudo IV, problema 3).*

*SCf(54;11) - Essa é parecida com aquela conta do avião, que a gente fez o outro dia, lembra? Que decolava. (Estudo IV, problema 3).*

As falas dos participantes revelam o peso e o significado do que e como ensinamos aos alunos. Estes procuram adotar a forma como os professores lhes ensinaram, mesmo que seja como forma de sobreposição de representações, conforme Fávero e Soares (2002).

### **5.1.2. Apoios em situações do contexto matemático**

#### **a) Taxas percentuais múltiplas de 5% ou 10%**

Os estudos de Castro Filho e Carraher (1994) indicaram que o uso de quantidades e valores múltiplos de 5% e 10% facilita o processo de resolução. Esta pesquisa também indica isso; basta ver algumas das falas ou registros dos participantes.

*PCf - Se é 10% e o salário é 500, eu sei que de 100 é 10, daí tenho 50. (Estudo I, problema 1).*

*Cf(23;5) - Eu tirei uma base. Porque 10% de 100 reais é 10 reais. (Estudo II, problema 1).*

Cf(23;5) - *Porque 100, 10% é 10 e 20% de 100 é 20.* (Estudo II, problema 2).

GAm(54;0) – *Na prática. Assim, 200, se fosse 10, seria 20. Como é 30, 3 vezes, seria 60.* (Estudo IV, problema 1).

EFf(25;8) – Fez o seguinte registro:

*Se fosse 10% daria R\$ 20,00*

20 “ R\$ 40,00

30% “ R\$ 60,00 (Estudo IV, problema 1).

## **b) Metade**

De acordo com Spinillo (1992), o referencial metade é importante ao processo de conceitualização de proporção, mas é insuficiente. Isso também pode ser visto no decorrer da realização desta pesquisa. Aqui, o termo metade implica a divisão por 2, e que pode ser entendido como um operador; no entanto, muitos alunos vêm como subtração, que é uma das idéias da divisão.

Embora os participantes desta pesquisa tenham lançado mão do referencial metade, muitas vezes ele foi insuficiente ao processo de solução. Quando as quantidades apresentadas nos enunciados dos problemas não são múltiplas de 10 e que implicam a operação com números racionais e irracionais, os alunos apresentaram muitas dificuldades. Uma de suas importâncias reside na possibilidade de estabelecer estimativas. As transcrições a seguir são bastante esclarecedoras.

PBf - *Eu fiz a conta: se 60% tem que dar menos de 3.500, faltou 40% para dar o 100%, que é 3.500. Todos teriam votado nele. Metade é 50%, e 10% dá 350. Somando tenho 2.100.* (Estudo I, problema 1).

Jm(16;1) - *Eu pensei assim ó, tipo, a metade. Um pouquinho menos que metade. Um pouquinho mais que a metade de 100, 75.*

(...)

*Porque é um pouco menos que 50%, que é a metade. É 40.*

*É menos. É menos que 50%, mas eu acho que também não é tão. Tá chegando mais perto de 50%.*

(...)

*Eu tinha que fazer (baixou a cabeça e começou a escrever). Registrou:*

100%                    500

50%                     250

25%                    125

(...)

*Bom. Eu pensei assim: se 100%. Eu coloquei: 500 é 100%; metade de 100 é 50 então 250; a metade de 50 é 25, então 125.* (Estudo II, problema 2).

MGf(37;10) - *Se fosse 50%, a metade, seria 250.*

(...)

*E isso aqui (indicando a metade – 50% = 250,00) eu fiz, esquecendo a escola. (Estudo III, problema 2).*

*LAf(35;5) – É que 250 é metade, 50%.*

(...)

*EPm(22;11) – Porque 200 é menos da metade.*

(...)

*Tem que ser menos de 50%. (Estudo IV, problema 2).*

### **c) Dobro**

Assim como metade, o referencial dobro é importante, mas não suficiente para a conceitualização. Muitas vezes ele não é visto como operador, mas sim como soma de parcelas iguais. A transcrição a seguir passa a idéia de operador; no entanto, em muitos de outros diálogos e mesmo de registros escritos, esta idéia não se confirma.

*Jm(16;11) - Porqueeee, porque é duas vezes mais que 100. (Estudo II, problema 1).*

### **d) Decompondo quantidades**

Na decomposição de quantidades os participantes desta pesquisa as organizaram em *partes*, conforme pode ser visto na transcrição da fala de PAm, a seguir.

*Na minha cabeça veio 10% de 3.500, que é 350. Daí somei 6 vezes 350. Podia fazer também 3 vezes 6 igual 18 que dá 1800, mais 6 vezes 5 que dá 30. Daí 1.800 + 300 = 2.100. (Estudo I, problema 1).*

*Aqui eu achei 15% de 10 mil votos, que é 1.500. Então, mais 10 mil, 1.500 e 10 mil, 1.500, tenho 4.500. Daí tenho 10 mil, mais 10 mil, mais 10mil, são 30mil. (Estudo I, problema 3).*

Na decomposição este participante lançou mão de múltiplos a partir do valor das quantidades indicadas no problema, a exemplo de 10% de 3.500 e 15% de 10.000. Outras vezes, a quantidade de referência é a taxa percentual, em que o participante comparou os valores absolutos e relativos. Um exemplo elucidativo do que estamos dizendo pode ser visto na transcrição do registro efetuado por GAm(54;0), quando procurava encontrar a quantidade de inicial que a uma taxa de 8%, gerava R\$ 40,00.

$$100 - 8 = 92$$

$$100 - 8 = 92$$

$$100 - 8 = 92$$

$$100 - 8 = 92$$

$$100 - \underline{8} = 92$$

$$\begin{array}{r} 40 \quad 460 \\ + 40 \\ \hline 500 \end{array}$$

(Estudo IV, problema 3).

**e) Problemas resolvidos no decorrer da entrevista**

Da mesma forma que os participantes desta pesquisa fizeram uso de reminiscências escolares (Fonseca 2001, 2002), buscaram apoio em problemas resolvidos no decorrer da entrevista. Segundo Polya (1995), trata-se de problemas correlatos. Os diálogos a seguir mostram o que estamos dizendo.

PBf - *60% deu 2.100, a metade é 30, aí é 1.050.* (Estudo I, problema 2).

Este participante buscou apoio no problema 1, enquanto EPm(22;11) buscou apoio nas explicações do pesquisador, como pode ser visto no registro verbal transcrito, a seguir.

EPm(22;11) - *Se fosse 20% e tivesse 300, eu faria de cabeça. Como o senhor explicou: cada 100 eu ia bota 20.* (Estudo IV, problema 1).

**f) Conhecimentos adquiridos no processo de escolarização**

Muitas vezes os participantes não saíram do contexto do problema, isto é, estabeleceram relação entre os dados e as informações nele contidos. Em outros termos, podemos dizer que buscaram apoio nos conhecimentos de que já dispunham, principalmente matemáticos. Estas situações também podem ser vistas como reminiscências escolares (Fonseca 2001, 2002).

MGf(37;10) – *Isso aqui (indicando para o registro que encontrou 1% equivalente a 5) eu fiz com a informação que eu tive da escola.*

(...)

*Pra aprender porcentagem tem que saber 1%, pra depois multiplicar pelo 1%, tem uma regrinha. E aí, na hora que tem que aprofundar, você tem uma dificuldade, aí você não consegue fazer relação. Porque você não aprende o porquê.* (Estudo III, problema 3).

EPm(22;11) – *É que a gente começou agora a estudar porcentagem, com o professor PMm43;7, daí eu sei que tem que achar 1%, mas não consigo.* (Estudo IV, problema 3).

SCf(54;11) – *Eu faço a regrinha que o professor PMm(43;7) deu, aí eu vou fazendo. Às vezes eu faço desse outro jeito aqui.*

3

x 2

60,00 (Estudo IV, problema 1).

### **g) Estimativa**

Os apoios na estimativa, assim como a tentativa e erro e o cálculo mental, podem ser considerados modos típicos que as pessoas adultas utilizam para solucionar uma série de problemas de matemática, inclusive de proporção-porcentagem. Esses modos de solucionar problemas acabam sendo bastante utilizados porque nos afazeres do dia-a-dia nem sempre dispomos de recursos que nos permitam efetuar registros, além de serem formas mais ágeis para encontrar respostas a muitos dos problemas que envolvem matemática. Os registros verbais orais ou escritos, transcritos a seguir são bastante esclarecedores.

*PBf – Eu sei que é 30%.*

*P – Fale-me como (nome do participante) chegou a esse resultado.*

*PBf – 60% deu 2.100, a metade é 30, aí é 1.050. (Problema 2, estudo I)*

*PAm - Se de 10% é 350 aí eu fiz 3 vezes 350 que dá 1050. Eu podia fazer 3 x 3, 9 e 3 vezes 5, 15. No caso daria  $900 + 150 = 1.050$ . (Problema 2, estudo I)*

### **h) Tentativa e erro**

Um exemplo típico da tentativa e erro pode ser visto no registro de representação semiótica numérico aritmético efetuado por PAm quando da solução do problema 2, estudo I.

$$\begin{array}{r} 350 \\ \times 3 \\ \hline 1050 \end{array}$$

### **i) Cálculo mental**

O cálculo mental permite o desenvolvimento do raciocínio e da criatividade. Trata-se de um procedimento bastante ágil e muito utilizado pelas pessoas adultas, principalmente porque não exige um instrumento para efetuar registros escritos.

*PBf – Essa aqui eu não consigo, só sei que tem que ser bem mais que esses 4500.*

*P - Mas por que tem que ser mais de 4500?*

*PBf - Porque 4500 é só 15% e tudo é 100%. (problema 3, estudo I)*

Além deste diálogo, em outros momentos de nossa pesquisa encontramos situações em que os participantes responderam corretamente ao que era perguntado pelo enunciado do problema, mas não efetuaram registros escritos, isto é, solucionaram o problema mentalmente. Nos termos de Calazans (1996), o cálculo mental precede ao

registro e muitas vezes este apenas expressa o resultado já encontrado. Para Carvalho (1995), a elaboração da descrição dos procedimentos utilizados no processo de solução dos problemas pressupõe a construção de uma linguagem que se aproxime da linguagem matemática convencional. Quando grafada, esta linguagem se transforma num instrumento de mediação e permite a ampliação da compreensão do conceito.

A posição desta autora encontra eco na teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1993; 1995). Nos termos deste autor, podemos dizer que os participantes desta pesquisa não conseguiram efetuar um registro matemático, não estabeleceram a conversão ou não coordenaram a passagem entre o registro de partida e o registro de chegada.

Em muitas das transcrições utilizadas para identificar os pontos de apoio de que os participantes lançaram mão para solucionar os problemas propostos, podemos perceber a interconexão entre os conceitos matemáticos que Vergnaud (1983; 1990) denomina campos conceituais. Muitos deles foram indicados quando procuramos identificar os conceitos que formam o substrato da proporção-porcentagem, entre eles podemos destacar a razão, a divisão, a fração, a multiplicação, a proporção, números decimais, operador função e operador escalar, os quais estão na base da equação e da função.

Os registros verbais orais e escritos feitos pelos participantes desta pesquisa, em consonância com os apoios que tomaram para solucionar os problemas, nos permitem compreender melhor os procedimentos adotados na passagem do registro de representação de partida para o registro de representação de chegada.

## **5.2. Os registros de representação semiótica utilizados pelos participantes**

Retomando o registro verbal oral do participante PAm ao solucionar o problema 3 (estudo I) como exemplo, encontramos os discursos argumentativo e dedutivo de que trata Duval (2003).

*Aqui eu achei 15% de 10 mil votos, que é 1.500. Então, mais 10 mil, 1.500 e 10 mil, 1.500, tenho 4.500. Daí tenho 10 mil, mais 10 mil, mais 10mil, são 30mil.*

O discurso argumentativo está no encadeamento das idéias (*Aqui eu achei 15% de 10 mil votos, ... Então, mais 10 mil, ... Daí tenho ...*) e o dedutivo reside tanto nos

resultados oriundos da decomposição das quantidades (*partes – 15%, 10.000, 1.500*) como na comparação entre elas (*15% de 10.00 = 1.500*), assim como na composição das quantidades (*Mais 10.000, 1.500 e 10.000, 1.500, tenho 4.500*). Ao observar os diálogos com os participantes dos quatro estudos, podemos encontrar estes tipos de discursos.

Quando fizemos a revisão da literatura, apresentamos os registros necessários à compreensão de proporção-porcentagem e, ao analisar os dados coletados nas entrevistas, identificamos os registros de representação utilizados pelos participantes. Embora os participantes desta pesquisa tenham feito uso de uma série de conceitos que formam o substrato da proporção-porcentagem, nem sempre conseguiram estabelecer relação do que fizeram com outros conceitos matemáticos.

Os participantes desta pesquisa não fizeram uso de todos os registros de representação semiótica necessários à compreensão da proporção-porcentagem e identificados pela literatura. Neste momento apresentamos de forma sistematizada os resultados dos registros de representação semiótica utilizados na solução do problema 1, o qual faz parte do instrumento de pesquisa dos estudos II, III, e IV. Os registros aqui apresentados também são encontrados nos registros das soluções dos demais problemas dos quatro estudos.

#### a) Registro verbal oral

Este tipo de registro pode ser visto nas transcrições das falas dos participantes, independentemente do registro verbal escrito. Tal como apresentado na literatura (Carvalho 1995 e Calazans 1996), os participantes desta pesquisa fizeram uso do cálculo mental e o externalizaram por meio de suas falas. Há que se considerar também que em algumas ocasiões as falas referiam-se ao registro escrito das operações efetuadas.

Registro de partida	Registro de chegada
Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?	Trinta por cento de cem reais, são trinta reais. Como são duzentos reais, então o aumento será de sessenta reais.

#### b) Registro verbal escrito

Quando combinado, o registro de representação verbal escrito encontra variações, a que denominamos **registro de representação semiótica misto**. Os registros de

representação mistos efetuados pelos participantes são constituídos pela linguagem natural escrita e números, como pode ser visto a seguir.

Registro de partida	Registro de chegada
Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?	<p>Comparação 30% é 30 de 100, como são 200, temos 60.</p> <p>Adição de parcelas iguais 30% é 30 de um 100. Então, 30 mais 30, que é 60.</p> <p>Duplicação 30% é 30 de 100, como são 200, temos o dobro, 60.</p>

A conversão, nos termos de Duval (1993; 1995) ocorreu entre o registro de partida e o registro de chegada. O que se destaca é a relação que foi estabelecida entre o valor absoluto e relativo da taxa percentual, e desta com a quantidade de inicial. Houve mudança de procedimento entre os registros de chegada: comparação, adição de parcelas iguais e duplicação. Os tratamentos situam-se no campo das operações fundamentais com números naturais.

### c) Registro de representação semiótica numérico

O registro de representação semiótica **numérico** congrega cinco subtipos. São eles:

- **Registro de representação numérico aritmético**

Este tipo de registro é utilizado para solucionar problemas que envolvem as operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão). Muitas vezes os participantes solucionaram os problemas utilizando-se somente das operações indicadas.

Registro de partida	Registro de chegada
Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?	<p>A multiplicação seguida divisão:</p> $200 \times 30 = 6000;$ $6000 : 100 = 60$ <p>A divisão seguida da multiplicação:</p> $200 : 100 = 2;$ $2 \times 30 = 60$ <p>Na forma de expressão numérica:</p> $(200 \times 30) : 100 = 60$ <p>Coeficiente de divisão</p> $200 : 100 = 2;$ $30 : 10 = 3;$ $100 : 10 = 10$ $2 \cdot 3 = 6;$ $6 \cdot 10 = 60$

Nos registros de chegada “a” e “b”, os tratamentos foram feitos em etapas: multiplicação seguida de uma divisão ou ao inverso; no tratamento no registro “d”, embora feito por etapas, temos um coeficiente de divisão para cada um dos termos presentes no enunciado; e no registro “c”, o tratamento de expressão numérica. Percebe-se mudança no tratamento (operações separadas com relações entre si para operações com relações coordenadas). Os procedimentos são diferentes, assim como os tratamentos (Duval 1993;1995) dados às operações, mas não há mudança de registro ou troca de registro – conversão.

O tratamento dado nesses registros pode ser visto como registros de representações semiótica já internalizados (Duval 2003) ou sobreposições de representações (Fávero e Soares 2002). Os registros dos cálculos efetuados pelos participantes PMm(43;7) (Estudo III, problema 1), PAm e PBf (Estudo I, problema 2), servem como exemplo.

Na passagem do texto em linguagem mista (linguagem natural escrita e numérica) para um registro matemático, vemos o que Duval (1993; 1995) denomina conversão. Este autor chama a atenção para três critérios ligados ao fenômeno de congruência, quais são: correspondência semântica; univocidade semântica; organização das unidades significantes.

Estes critérios nos permitem dizer que os problemas apresentados aos participantes são considerados não-congruentes. Basta que se observe que os termos aumento (problema 1), sugere uma soma; defasado (problema 2), sugere uma subtração; e sobre (problema 3), sugere uma soma, quando, primeiramente, há que se estabelecer relações entre as quantidades fornecidas e destas, com a incógnita.

Os diálogos entre o pesquisador e os participantes, assim como os registros de representação por eles efetuados, permitem-nos dizer que, quanto mais aprofundados os conhecimentos sobre os objetos matemáticos, menores serão os obstáculos causados pelos fenômenos da não-congruência que o participante terá que enfrentar. Somente o participante PMm(43;7) usou registros algébricos (equação e função).

No processo de conversão (Duval 1993; 1995) o participante seleciona os dados e as informações que deverão ser utilizados e estabelece as devidas relações entre eles; atribui o significado operatório e faz uso de registros de representação semiótica com seus respectivos tratamentos. Na execução do plano, o participante precisa operar matematicamente com os dados, isto é, dar a eles um tratamento. Este tratamento se dá por meio das operações matemáticas que são efetuadas usando os registros de representação escolhidos.

- **Registro de representação semiótica numérico percentual**

Neste tipo de registro também são utilizadas as operações básicas. No entanto, é preciso reconhecer a taxa percentual como um valor relativo sobre a qual a quantidade de inicial deve ser avaliada, assim como o valor absoluto da taxa deve ser avaliado em relação à centena. Isso significa perceber a porcentagem como razão, fração e conceber a taxa como coeficiente de proporcionalidade.

Registro de partida	Registro de chegada
Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?	<p>O produto entre o valor absoluto da taxa e a quantidade de inicial, comparado com a centena:</p> $30\% \cdot 200 = (30 \cdot 200) : 100 = 60$ <p>O produto entre a comparação da taxa percentual com a centena (fração) e a quantidade de inicial</p> $30\% \cdot 200 = 30/100 \cdot 200 = 6000/100 = 60$ <p>O produto entre a razão da taxa percentual e a quantidade de inicial</p> $30\% \cdot 200 = (30/100) \cdot 200 = 0,3 \cdot 200 = 60$ <p>O produto entre o coeficiente da taxa percentual com a quantidade de inicial</p> $30\% = 30 : 100 = 0,3$ $0,3 \cdot 200 = 60$

Nesses registros, houve a passagem (conversão) do registro na forma percentual para aritmético, registro “a”; no registro “b”, do percentual para fracionário; no registro “c”, do percentual para o fracionário e deste para o decimal; no registro “d”, do percentual para o decimal. No registro “a”, apareceu o tratamento aritmético; no registro “b”, do produto entre uma fração e um número inteiro (fracionário); no registro “c”, os tratamentos fracionário e decimal; enquanto no registro “d”, apareceu o tratamento funcional.

No registro “d”, procurou-se a quantidade relativa a 1%. Esta busca foi mencionada pelos participantes, principalmente dos estudos III e IV.

- **Registro de representação semiótica numérico na forma de fração**

Embora tenhamos mencionado o tratamento fracionário quando falamos do registro de representação percentual, o registro na forma de **fração** aparece também com outros tratamentos. Vejamos.

Registro de partida	Registro de chegada
Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?	<p>O produto entre a fração e a quantidade de inicial</p> $30\% \cdot 200 = 30/100 \cdot 200 = 6000/100 = 60$ <p>Equivalência entre frações:</p> $30\% = 30/100 = 60/200$ <p>Como razão – quociente:</p> $30\% = 30/100 = 60/200 = 0,3$ <p>d) A fração como divisão</p> $30\% = 30 : 100 = 60 : 200 = 0,3$

Nesses registros o tratamento dado é de fração (produto, equivalência, razão e divisão). A conversão, nos termos de Duval (1993; 1995) ocorreu na passagem do registro partida para o registro de chegada. Podemos dizer que houve conversão na passagem da taxa percentual (30%) para fração  $30/100$  ou  $30 : 100$  e destas para o decimal 0,3. Na equivalência entre fração  $30/100 = 60/200$ , não ocorreu mudança de registro. Na conversão 30% para  $30/100$ , temos a idéia de fração (comparação entre a parte e o todo) ou de razão (comparação entre as partes de um mesmo todo). Na operação  $30 : 100$ , temos a idéia da divisão. Ao efetuar a divisão  $30 : 100 = 0,3$ , podemos ver 0,3 como coeficiente (razão) ou quociente.

- **Registro de representação semiótica numérico na forma de razão**

O registro de representação na forma de **razão**, pode ser visto nos registros “c” e “d” – porcentagem (como coeficiente); e nos registros “c” e “d”, fração (como divisão e quociente) supra apresentados. Mas ele também é visto como comparação entre quantidades, assim:  $30\% = 30/100 = 60/200$ .

- **Registro de representação semiótica numérico na forma decimal**

Na forma **decimal**, a taxa percentual (30%) pode ser vista como divisão entre o numerador e o denominador de uma fração ( $30\% = 30/100 = 30 : 100 = 0,3$  – coeficiente);

como razão ( $30\% = 30/100 = 60/200 = 0,3$  – quociente ou coeficiente). Como coeficiente é dado tratamento funcional, temos o valor correspondente à unidade percentual (1%).

**d) Registro de representação semiótica em tabela de números proporcionais**

No registro em tabela de números proporcionais podemos encontrar os tratamentos na forma de função e escalar; o recurso metade e a duplicação. Nestes casos, encontramos tratamentos escalares pela multiplicação ou divisão, pela soma de parcelas iguais, ou ainda por subtrações sucessivas. Na tabela de números proporcionais, encontramos a estratégia pela regra de três. O diferencial neste registro reside nas relações que se estabelece entre as quantidades (relações proporcionais).

Pelo problema que estamos utilizando como exemplo, encontramos a duplicação como multiplicação (2 vezes 30 = 60 e 2 vezes 100 = 200) e soma de parcelas iguais (30 + 30 = 60 e 100 + 100 = 200).

Registro de partida	Registro de chegada					
	Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?	a) Operador função		b) Operador escalar		c) Dobro
i		qi	i	qi	i	qi
30		100	↓ 30	100	↓ 30	100
60		200	↓ 60	200	↓ 60	200
d) Valor unitário		e) Soma de parcelas =		f) Regra de		
i		qi	i	qi	i	qi
30		100	30	100	30	100
↓ 3		10	↓ 30	100	<del>x(60)</del>	<del>200</del>
↓ 60		200	↓ 60	200		

A conversão (Duval (1993; 1995) ocorre na passagem do registro de partida e no registro de chegada. Entre os registros de chegada temos tratamentos funcionais (operador função); escalar (operador escalar, dobro, valor unitário, soma de parcelas iguais) e a propriedade fundamental da proporção (regra de três). O “x” na regra de três é um símbolo utilizado para representar o valor desconhecido e não necessariamente uma incógnita. Isso não nos permite dizer que se trata do uso de conhecimentos algébricos. Nos termos de Fávero e Soares (2002), trata-se de sobreposição de representação.

**e) Registro de representação semiótica numérico por equação**

Nos registros verbais escritos efetuados por PMm(43;7) encontramos registros algébricos na forma de equação e função. No registro por **equação**, a letra (símbolo) que indica o valor desconhecido tem caráter algébrico e se caracteriza como incógnita.

Registro de partida	Registro de chegada
Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?	<p>Regra de três</p> $\begin{array}{ccc} i & & qi \\ & \diagdown & / \\ 30 & & 100 \\ & / & \diagdown \\ x & & 200 \end{array}$ <p><math>100 \cdot x = 30 \cdot 200</math></p> <p><math>x = 6000 : 100</math></p> <p><math>x = 60</math></p> <p>b) Equação</p> <p><math>30/100 = x/200</math></p> <p><math>30 \cdot 200 = 100 \cdot x</math></p> <p><math>6000 : 100 = x</math></p> <p><math>60 = x</math></p>

No registro pela regra de três, para encontrar o valor da incógnita “x”, foi aplicado a propriedade fundamental da proporção e na equação, foi utilizado o princípio da igualdade entre os termos. Em ambos os casos, os tratamentos são distintos e não houve mudança de registros. Esta só ocorreu na passagem do registro de partida para o registro de chegada.

**g) Registro de representação semiótica numérico por função**

O registro de representação por **função** foi efetuado pelo participante PMm(43;7). Ele foi efetuado na seqüência de outros registros. Pelos diálogos estabelecidos durante a realização da entrevista e os registros efetuados pelo participante, podemos afirmar que ele coordena a passagem de um registro de representação semiótica para outro, também semiótico (Duval 1993; 1995). O que nos autoriza a afirmar que este participante

compreende a proporção-porcentagem em nível conceitual. O registro de chegada, a seguir, é a transcrição do registro efetuado pelo participante.

Registro de partida	Registro de chegada
Em 2003, o salário mínimo era de R\$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?	$y = \%x$ $y = ax$ $y = aumento$ $a = \% aplicada sobre o salário$ $x = salário$ $y = ax$ $y = 30\% . 200$ $y = \underline{30} . 200$ $100$ $y = 0,3 . 200$ $y = 60,00.$

Pelo registro efetuado por PMm(43;7), é possível perceber a coordenação da passagem do registro percentual para fracionário e decimal, assim como o reconhecimento das variáveis dependente “y” e independente “x” e o do operador função 0,3 (coeficiente angular).

Ao analisar o processo desencadeado pelos participantes para solucionar os problemas, os registros de representação semiótica e as estratégias utilizadas, em consonância com o referencial teórico adotado para o desenvolvimento da pesquisa, fez-se necessário retomar e ampliar o Diagrama I, no qual apresentamos três aspectos fundamentais à compreensão da proporção-porcentagem: o sentido; o significado operatório e as situações-problema.

A ampliação desse esboço nos auxilia na compreensão e na explicitação das relações que se estabelecem no processo de solução dos problemas de proporção-porcentagem. Nehring (2001, p. 34) elaborou um esquema semelhante, para melhor compreender a operação de multiplicação.

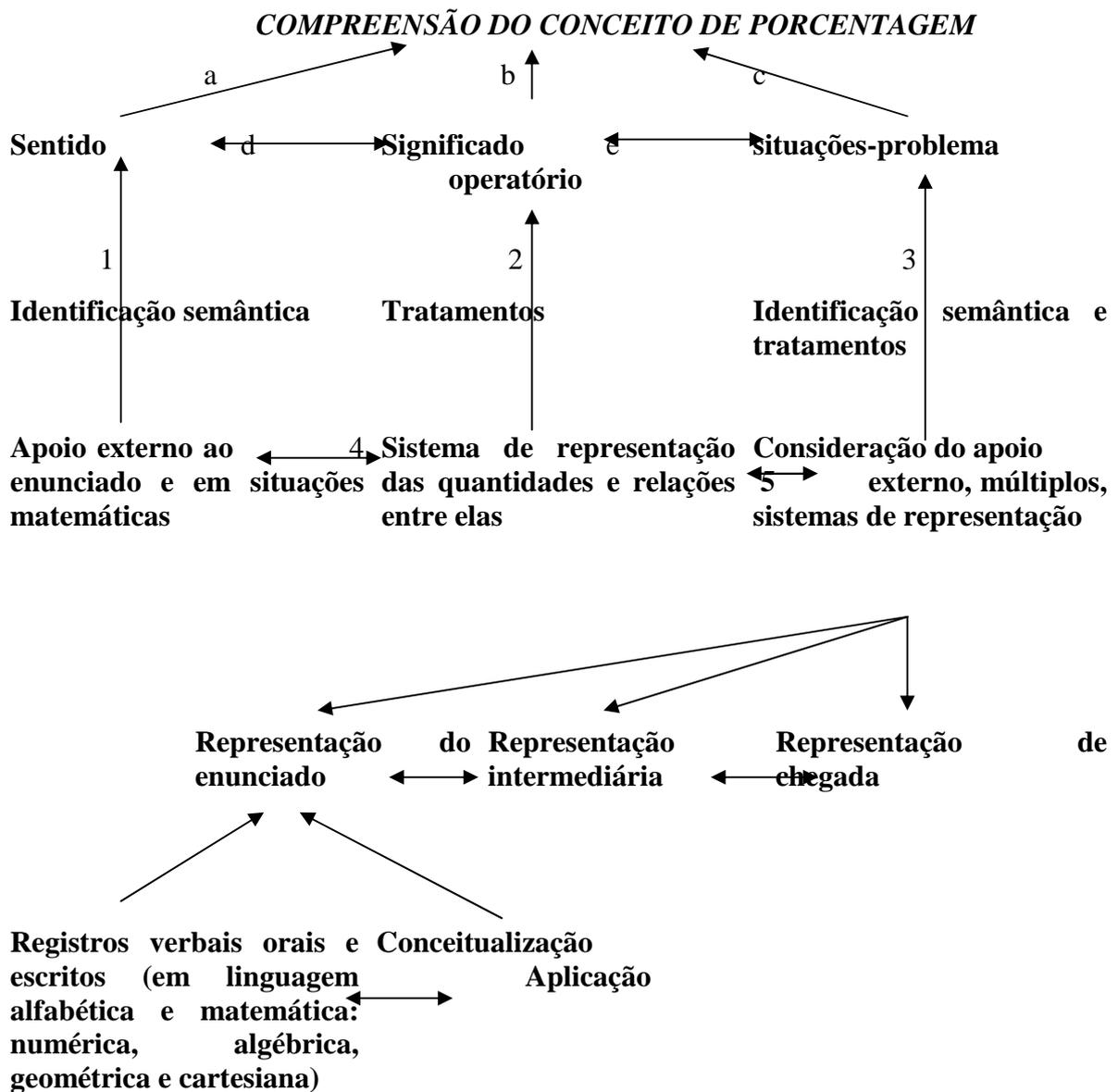


Figura 19 Aspectos relativos à conceitualização de proporção-porcentagem

As setas 1, 2 e 3 indicam os aspectos e suas relações com o tratamento necessário para o registro de representação, considerando as regras de significado e funcionamento de cada registro e do conteúdo cognitivo considerado. As setas 4 e 5 destacam a necessidade da complementaridade entre os registros de representação.

Além do vasto campo de aplicabilidade da proporção-porcentagem, dos conceitos que ela congrega e dá suporte, há que se considerar o objeto matemático em estudo e selecionar os registros de representação de partida (enunciado). Estes devem apresentar identificação semântica, que está relacionada ao sentido e tem em sua base a passagem do objeto real para os signos. Nos termos de Duval (1993; 1995), esta passagem denomina-se

semiotização. O uso dos signos deve permitir a comunicação do objeto para si e para outrem; trata-se da mediação semiótica de que fala Vygotsky (1994).

Estamos dizendo que o registro de partida deve permitir que alguém (o próprio sujeito ou outra pessoa) deve garantir a comunicação. Ele constitui num instrumento, por meio do qual se estabelece a comunicação.

A compreensão que se tem da representação permite que se atribua sentido e significado ao objeto em estudo. Muitas vezes a compreensão que se tem sobre o objeto matemático é insuficiente para se atribuir um tratamento matemático de ordem estrita; daí a necessidade da busca de apoio em outras situações, a exemplo daquelas já descritas, quer seja em relação ao tema (extra-matemática), seja em relação ao objeto matemático, são estratégias que visam elucidar aspectos do conteúdo cognitivo e tratar matematicamente os dados e as informações, de forma a atribuir-lhes um significado operatório.

A atribuição do significado operatório se dá por meio dos tratamentos (Duval 1993; 1995; 2003) que o sujeito consegue dar aos registros de representação de partida, às representações intermediárias que consegue efetuar e aos registros de representação de chegada que faz uso. As relações que se estabelecem entre o sentido e o significado operatório sustentam a conversão – mudança de registro de representação semiótica (Duval 1993; 1995; 2003).

Já dissemos que os enunciados dos problemas apresentados aos participantes sofrem influência dos fenômenos de não-congruência. Para superar as dificuldades da não congruência, o professor tem um papel decisivo – de mediador. Para além da re-leitura, o professor precisa instigar os alunos a perceber as relações que se estabelecem entre os dados e informações presentes no enunciado, para que estes lancem mão de representações intermediárias não-discursivas, tanto para entender como para se fazer entender. Como exemplo, entre outros, podemos destacar: desenhos, esquemas e tabelas – complementaridade de registros (Duval 1993; 1995; 2003).

O sentido e o significado operatório com seus respectivos tratamentos e conversões, sustentam não só os registros de representação semiótica utilizados; eles são igualmente indispensáveis à coordenação e ao trânsito entre os diferentes registros de representação semiótica, como descreve Maranhão e Iglioni (2003). O significado operatório diz respeito à compreensão da operação e não pode ser confundido com uso de algoritmos. Estes dizem respeito ao processo de execução de uma dada operação e não exige a compreensão dos conceitos nela implicados.

A análise dos resultados nos permite dizer que os participantes desta pesquisa também buscaram apoio em seus contextos culturais; utilizaram os recursos metade, 50% e dobro, 10%; rememoraram aspectos da matematização escolar anterior e atual; fizeram uso de registros de representação semiótica mistos (linguagem natural escrita e numérica), numéricos (aritméticos, razão, fração, porcentagem, decimal), tabela de numéricos proporcionais, equação e função; utilizaram estratégias escalares (soma de parcelas iguais ou pela via da multiplicação), funcionais (operador produto ou quociente), coeficiente de proporcionalidade, valor unitário, regra de três, entre outros.

O que dissemos até aqui nos impele às considerações finais e conclusões, apontando perspectivas à EM na EJA.

## **6. CONSIDERAÇÕES FINAIS**

No decorrer de nossa existência, deparamo-nos com situações para as quais não temos respostas às perguntas que nos instigam ou intrigam; nesta pesquisa não foi diferente. Hoje, temos mais perguntas sem respostas do que quando começamos esta investigação; trazemos mais incertezas do que certezas. Esta é mais uma etapa concluída do que um ponto final. O trabalho de investigação passa a ser parte integrante de nosso fazer pedagógico.

Como em todas as pesquisas, precisamos delimitar o foco de nossa investigação; optamos por investigar sobre o modo como os professores e alunos de um curso de EJA registram a solução de problemas de proporção-porcentagem, os registros de representação semiótica utilizados no processo de solução desses problemas.

Nossa inserção inscreve-se no campo da conceitualização da proporção-porcentagem na EJA, o que nos obrigou a fazer uma revisão da literatura sobre a formação de professores que ensinam matemática, sobre a Educação Matemática na EJA e sobre a proporção-porcentagem, para buscar elementos que nos permitissem delimitar o objeto de investigação e subsidiar o trabalho de análise dos dados.

Ao tecer as considerações finais e conclusões, fazemos algumas considerações sobre a formação de professores que ensinam Matemática na EJA, destacando alguns elementos que julgamos importantes ao fazer pedagógico desta disciplina. Apresentamos alguns aspectos que julgamos importantes ao processo de ensino e aprendizagem da proporção-porcentagem. Sistematizamos os resultados de nossa investigação, destacando alguns pontos de apoio que os participantes buscaram para solucionar os problemas. Identificamos os registros de representação semiótica utilizados no processo de solução dos problemas e analisamos os conhecimentos mobilizados.

### **6.1. Algumas considerações sobre a formação de professores que ensinam Matemática na EJA**

A literatura sobre a formação de professores que ensinam Matemática, especialmente na EJA, aponta para a necessidade de o professor conhecer o contexto social

em que a escola está inserida, para que possa lançar mão de elementos da cultura dos alunos e considerá-los como ponto de partida para a proposição das atividades de sala de aula. Assim, destacamos que, além de profundo conhecedor do conteúdo da disciplina que leciona, o professor também precisa conhecer a cultura local, para melhor compreender a forma como as pessoas utilizam os conhecimentos matemáticos, a fim de solucionar problemas de seu dia-a-dia. O que acabamos de dizer encontra eco nos estudos de Fonseca (2001; 2002), especialmente quando faz referência às dimensões para a formação do educador matemático de jovens e adultos: sua sensibilidade para as especificidades da vida adulta, sua consciência política e sua intimidade com a Matemática.

Sob o entendimento de que o trabalho de investigação dos professores pode lhes auxiliar na elaboração e proposição de atividades que possibilitam aos alunos ampliarem seus conhecimentos de forma mais articulada, sugerimos enfaticamente que o professor se torne um investigador de sua própria prática pedagógica. Para além do conhecimento do contexto cultural dos alunos, o professor precisa conhecer com profundidade os conteúdos matemáticos e ter subsídios teóricos e metodológicos que dêem sustentação para seu fazer em sala de aula.

Ao tratarmos do processo de ensino e aprendizagem, o professor, como mediador nesse processo, precisa instigar os alunos a perceberem as relações que se estabelecem entre os dados e as informações presentes no enunciado, para que eles possam lançar mão de representações que lhes permitam fazer as devidas conversões entre o registro de partida e o de chegada.

Quando um aluno busca apoio em situações de seu contexto social mais imediato, o professor precisa saber considerar as variáveis pertinentes ao conteúdo cognitivo e fazer com que o aluno as perceba. Não se trata de negar ou negligenciar sua forma de fazer e de pensar: pelo contrário, trata-se de estimulá-lo e instigá-lo, para que perceba outras possibilidades. Acreditamos que este deve ser o ponto de partida no processo de ensino e aprendizagem de proporção-porcentagem e recomendamos que o professor proponha atividades que levem em consideração a mudança de registro de representação semiótica, o que propicia a compreensão conceitual.

Nosso entendimento é de que, para conhecer com profundidade os objetos matemáticos, é preciso reconhecê-los em diferentes registros de representação semiótica e coordenar o processo de conversão de que trata Duval (1993; 1995; 2003). A coordenação na passagem de um registro de representação semiótica para outro permite que os

professores e os alunos passem a perceber a interconexão entre os objetos matemáticos e a identificar os conceitos que dão sustentação ao objeto em estudo. Não se trata de pré-requisito como muitas vezes são vistos ou tratados, mas sim estruturas, propriedades e relações que se mantêm nos diferentes sistemas de representações. Isso significa reconhecer que, ao representar objetos matemáticos, os registros de representação semiótica comportam uma série de conceitos que, interconectados, compõem objetos/conceitos cada vez mais amplos e complexos.

Na coordenação da passagem de um registro de representação semiótica para outro, o professor pode identificar uma série de conceitos que são mobilizados pelos alunos no processo de solução dos problemas e, com isso, promover novas discussões e reflexões e, ao mesmo tempo, propor a utilização de registros diferentes daqueles utilizados. Este, talvez, seja um modo de fazer com que os alunos passem a compreender melhor os objetos matemáticos.

Lançamos o desafio para que as instituições responsáveis pela formação (inicial e contínua) do professor passem a dar atenção aos aspectos apontados a seguir. Acreditamos que eles são de vital importância ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática, inclusive na EJA.

Pesquisadores em Educação Matemática na EJA como Carvalho (1995), Franco (2000), Fonseca (2001; 2002) e Piconez (2002), entre outros, concordam que os alunos possuem conhecimentos matemáticos que foram adquiridos em seu contexto social e que são mobilizados para solucionar problemas propostos em sala de aula. Destacam que estes conhecimentos devem ser considerados pelos professores no processo de ensino e aprendizagem. No entanto, o que percebemos é que muitos dos professores que ensinam Matemática têm dificuldades em identificar os conhecimentos que os alunos possuem e a forma como os utilizam para solucionar problemas, assim como em aproveitar estes conhecimentos para propor atividades de sala de aula. Embora nossa trajetória profissional não seja o melhor exemplo, ela é um forte indicativo de que as reflexões sobre o próprio fazer pedagógico auxilia sobremaneira na formação e constituição do professor.

Quando desenvolvemos nossa pesquisa de Mestrado (Vizolli, 2001), percebemos que as pesquisas no campo da Matemática pouco têm se preocupado em tematizar a proporção-porcentagem, o que também acontece na EJA. Naquela ocasião, já apontávamos para a necessidade de um estudo mais acurado sobre a forma como os alunos solucionam os problemas que envolvem este conceito. Em estudos mais recentes (Vizolli e Moreira

2006; Vizolli e Penna 2006), observamos que muitos alunos concluem cursos de Administração, Ciências Contábeis e Comércio Exterior, por exemplo, sem compreender em nível conceitual a proporção-porcentagem. Os estudos de Maia (1998; 1999) indicam que as noções de operador são pouco valorizadas no processo de ensino e aprendizagem da porcentagem.

No processo de ensino e aprendizagem da matemática escolar, comumente os professores atribuem à proporção-porcentagem um sentido utilitário, justificando esse procedimento com a sua aplicabilidade na solução de problemas de ordem financeira (Maia, 1999). A visão utilitarista que muitas vezes marca o ensino da matemática na EJA e, em especial, o da proporção-porcentagem tende a ignorar a capacidade que os alunos adultos têm de aceder ao conhecimento sistematizado e mesmo de desenvolverem-se intelectualmente. Poucas vezes a proporção-porcentagem é tratada como objeto matemático que comporta uma série de conceitos interconectados como, por exemplo: multiplicação, divisão, razão, de fração, proporção, números decimais e de relação. Conceitos estes que formam o substrato de conceitos mais amplos como a equação e da função; assim como pouca atenção se tem dado aos registros de representação semiótica de que trata Duval (1993; 1995; 2003).

A solução de problemas de proporção-porcentagem que versam sobre diferentes contextos/situações em que fazemos uso de conceitos matemáticos (como os supracitados) e efetuamos operações para obter dados ou informações como probabilidades, índices percentuais, transações financeiras, entre outras, podem requer a utilização de registros de representação semiótica. Quando tratamos matematicamente os dados e as informações contidos nos problemas, atribuímos significado operatório e, muitas vezes, fazemos conversões (Duval 1993; 1995; 2003) entre diferentes registros de representação semiótica. Para coordenar o processo de conversão, é necessário que se percebam semelhanças e diferenças, propriedades e relações entre os registros. As propriedades e relações interconectam os objetos matemáticos expressos por meio de registros de representação semiótica.

Segundo esse autor, a utilização de diferentes registros de representação propicia a compreensão conceitual, mas é no processo de conversão que os sujeitos se apropriam do objeto de conhecimento. Maranhão e Iglioni (2003) observam que no processo de conversão há que se levar em consideração a coordenação entre o registro de representação de partida e o de chegada.

Na EJA é bastante comum os alunos responderem oralmente a uma série de problemas de Matemática que são apresentados em sala de aula, mas nem sempre registram suas respostas obedecendo às regras de significado e funcionamento da linguagem matemática (Duval 1993; 1995). O que impele o professor a fazer uma ausculta nos registros verbais orais e escritos pelo aluno, na tentativa de explicitar as relações entre as diferentes formas de conhecimento do objeto em estudo, valorizando ou indicando novas possibilidades de registro.

## **6.2. Os pontos de apoio na solução dos problemas**

Após a leitura de cada problema proposto, os participantes de nossa pesquisa procuraram entender determinados termos presentes no enunciado, para depois atribuir um tratamento matemático aos dados e às informações. Para tratar matematicamente os dados e as informações, muitos deles procuraram estabelecer relações de cunho matemático e não matemático entre o problema proposto e algum problema cujo tema/assunto e quantidades lhes fossem familiares.

O tema/assunto que buscaram tratava de situações típicas do contexto social (salário, transações comerciais, partilha do valor monetário do pescado) ou de problemas resolvidos em sala de aula. Neste caso, podemos dizer que os participantes saíram do contexto do problema proposto e buscaram apoio em problemas cujo tema/assunto lhes fosse mais conhecido. Identificado o tema/assunto, buscaram apoio em quantidades, valores ou taxas percentuais que lhes fossem mais acessíveis.

No Estudo I, por exemplo, os participantes buscaram apoio em situações vivenciadas em seu contexto social imediato como o cálculo de aumento de salário e taxas percentuais que lhes eram mais acessíveis, como 5% e 10%. Utilizaram o termo “metade”; desmembraram o todo em partes iguais e, a partir de valores cujos percentuais lhes fossem conhecidos, por meio de adições sucessivas, compuseram o resultado, respondendo o que foi perguntado no enunciado do problema. No segundo estudo, embora o tema/assunto dos problemas versassem sobre salário, os participantes fizeram uso do termo “partes” (forma utilizada pelos pescadores para efetuar o cálculo da partilha do valor do pescado) e procuraram rememorar situações vivenciadas em sala de aula, principalmente quando do retorno ao processo de escolarização. Nas soluções dos problemas resolvidos pela dupla de

professores (Estudo III), também aparece o apoio em situações típicas do contexto social (como os pais resolviam os problemas de estrutura multiplicativa ou como aprenderam quando alunos). Os participantes do Estudo IV, com mais frequência do que nos Estudo II, buscaram e apoio em problemas resolvidos em sala de aula.

Nos quatro estudos, os participantes tomaram como ponto de apoio elementos do contexto social, seja em relação ao tema/assunto, seja em taxas percentuais múltiplas de 5% ou 10%, metade, dobro, decomposição das quantidades e problemas resolvidos no decorrer da entrevista.

A partir dos pontos de apoio os participantes de nossa pesquisa retomavam os dados e as informações do enunciado do problema proposto e, por analogia, procuravam atribuir-lhes um significado operatório que lhes permitisse chegar a um resultado. Quando o resultado numérico não respondia ou não fazia sentido com o que era perguntado no enunciado do problema, os participantes procuravam outros tratamentos matemáticos para encontrar uma resposta condizente. Neste caso procuravam articular os dados e as informações contidos no enunciado do problema proposto.

O movimento feito pelos participantes desta pesquisa para solucionar os problemas pode ser representado pelo diagrama XV, a seguir, em que as setas indicam o movimento nos dois sentidos.

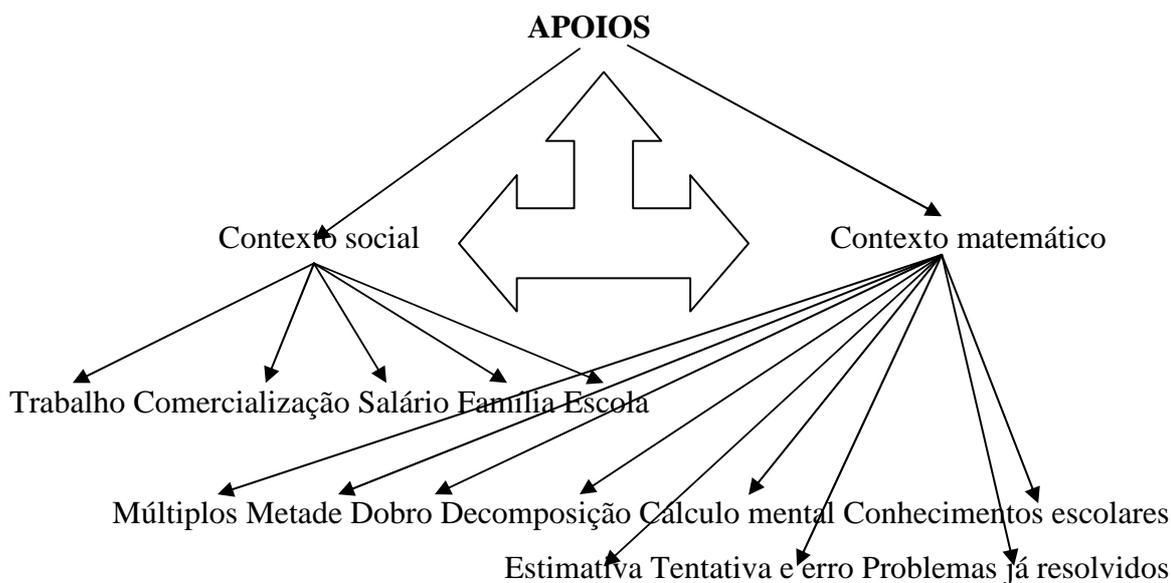


Figura 20 Pontos de apoio na solução dos problemas de proporção-porcentagem

Algumas vezes os participantes desta pesquisa estabeleceram relação entre os dados e as informações contidos no próprio enunciado do problema, isto é, sem buscar apoio em tema/assunto fora do problema. Independentemente disso, pode-se dizer que os participantes desta pesquisa buscaram apoio nos conhecimentos de que já dispunham, principalmente em conhecimentos matemáticos.

Estes resultados desta pesquisa coadunam-se aos resultados de pesquisadores como Acioly-Régnier (1997) e Piconez (2002), segundo os quais, as significações e justificativas mudam em função da representação que o sujeito tem ou faz da situação. Trata-se de variáveis culturais as quais desempenham um papel importante no processo de conceitualização. De acordo com Fonseca (2001), as demandas da vida social extra-escolar, particularmente a da vida profissional, constituem uma das condições que favorecem a aprendizagem da matemática. Podemos dizer que o ambiente social é um componente determinante nas construções cognitivas dos adultos.

### **6.3. Os registros de representação semiótica na solução dos problemas**

Em relação aos registros de representação semiótica necessários ao processo de conceitualização de proporção-porcentagem, quando da elaboração da dissertação de Mestrado (Vizolli, 2001), identificamos os registros em língua natural, numéricos (aritmético, fracionário, decimal, percentual), tabela com números proporcionais, geométrico e gráfico cartesiano. Ao aprofundar os estudos sobre registros de representação semiótica, identificamos ainda os registros algébricos na forma de equação e função.

Ao analisar os registros de representação efetuados pelos participantes desta pesquisa, percebemos que os alunos fizeram uso principalmente de registros de representação semiótica mistos (combinação de linguagem natural escrita e números) e numérico aritméticos. Quando instigados ou orientados, fizeram uso da tabela de números proporcionais. Somente um dos participantes (professor) fez uso de uma diversidade maior de registros de representação semiótica. Só não fez uso de registros geométricos e gráficos cartesianos (registro de representação não-discursiva – Duval 2003).

Esses resultados permitem-nos dizer que, quanto mais aprofundados os conhecimentos sobre os objetos matemáticos, menores serão os obstáculos causados pelos fenômenos da não-congruência de que trata Duval (1993; 1995). Prova disso é que

somente o participante PMm(43;7) usou de registros algébricos (equação e função). Os diálogos estabelecidos com este participante durante a realização da entrevista e os registros de representação que efetuou permitem-nos dizer que ele coordena a passagem de um registro de representação num sistema semiótico para outro, também semiótico, o que nos leva a crer que ele compreende a proporção-porcentagem em nível conceitual.

Como um registro de representação semiótica pode ser mais ou menos congruente, cabe ao professor fazer esta análise, antes de apresentar o problema aos alunos. Nesse sentido, uma das tarefas do professor é considerar que um enunciado pode auxiliar ou não o aluno no processo de compreensão conceitual; daí a necessidade da utilização de vários registros de representação para um mesmo objeto matemático e estabelecer a conversão entre eles. No processo de conversão, é importante que se dê atenção à coordenação, porque é na passagem de um registro de representação para outro que podemos identificar os conhecimentos que são mobilizados no processo de solução.

A compreensão que se tem sobre um dado registro de representação permite que se atribua o sentido e o significado quando da solução de um dado problema. No entanto, quando esta compreensão é parcial, não se tem a atribuição de um tratamento matemático de ordem estrita; daí a necessidade da busca de apoio em outras situações, tanto em relação ao tema/assunto como em relação ao objeto matemático. Independente disso são estratégias que visam elucidar aspectos do conteúdo cognitivo e tratar matematicamente os dados e as informações.

Em algumas ocasiões, os registros de representação utilizados pelos participantes não foram suficientes para esclarecer os conhecimentos mobilizados, principalmente quando se tratava de representações semióticas já internalizadas. Neste caso, o registro verbal oral forneceu elementos que nos permitiram saber um pouco mais sobre a forma como os participantes pensavam para solucionar o problema e a compreensão que demonstraram sobre o registro efetuado. Isso nos levou a considerar a fala como um instrumento de mediação entre o participante e o pesquisador; entre os participantes e o registro por ele utilizado; entre o pesquisador e o registro efetuado pelo participante. Por meio da fala, os participantes foram levados a pensar sobre o pensado; falar sobre o pensado; pensar e falar sobre o registrado. O pesquisador foi levado a auscultar o registrado, o falado e inferir sobre o pensado do participante. Esta situação deveria ser uma prática permanente no processo de ensino e aprendizagem.

Embora os alunos tenham utilizado uma série de conceitos que formam o substrato para a compreensão do conceito da proporção-porcentagem, o fato de terem lançado mão principalmente de registros de representação semiótica mistos e numérico aritméticos, não nos autoriza a afirmar que os alunos os compreendem em nível conceitual a proporção-porcentagem. Em determinados momentos, nem mesmo os professores conseguiram perceber as idéias matemáticas que a proporção-porcentagem comporta. Basta ver que nos protocolos das transcrições da entrevista, tanto a atribuição do significado operatório com seus respectivos registros de representação semiótica como as conversões ocorreram a partir das indagações do pesquisador.

Durante o processo de solução dos problemas ficou patente, principalmente com os alunos, o uso de registros numérico aritméticos com tratamentos inerentes às operações fundamentais. Somente os professores e alguns alunos do Estudo IV fizeram uso da regra de três. Para os alunos, o uso desta regra, assim como encontrar o valor correspondente à unidade percentual, não passava de uma forma ou método para solucionar os problemas. Dificilmente conseguiam estabelecer as devidas relações entre as quantidades e a taxa percentual, isto é, reconhecer a proporção.

Este panorama nos permite considerar que os modos utilizados por professores e alunos de EJA ao solucionarem problemas de proporção-porcentagem expressam os conhecimentos que eles possuem sobre o objeto matemático. Tomando como base os princípios da teoria dos registros de representação semiótica, podemos dizer que os alunos possuem compreensão parcial do conceito de proporção-porcentagem, assim como um dos professores. Mesmo que, no primeiro momento, o professor de Matemática tenha se equivocado no processo de solução do problema 2, a retomada das reflexões sobre este problema e os registros de representação semiótica utilizados na solução deste e dos demais problemas, permite-nos dizer que ele compreende a proporção-porcentagem em nível conceitual.

Os alunos procuraram utilizar formas que lhes permitissem atribuir um significado operatório ao problema proposto, as quais, nos termos de Duval (1993), podem ser vistas como representações intermediárias entre o registro de representação de partida e de chegada.

Os resultados desta investigação confirmam a hipótese de que uma ausculta nas falas, notações ou registros de representação efetuados por alunos e professores, poderia nos auxiliar a compreender como os participantes articulam os dados e as informações para

solucionar os problemas de matemática que lhes são propostos em sala de aula. O que pode nos permitir uma aproximação contínua da forma como os alunos e os professores aprendem/ensinam.

Acreditamos que esta pesquisa potencializa novas investigações no campo da Educação Matemática na EJA, principalmente sobre os conhecimentos que os alunos e professores construíram em seus contextos sociais e suas representações sobre a matemática. Embora possam ser constatados expressivos avanços, ainda é bastante grande a demanda por pesquisas que explicitem e discutam as diferentes formas como os professores e alunos de EJA dialogam e registram a solução de problemas de proporção-porcentagem, durante as aulas de matemática. Mesmo tendo apresentado os registros de representação semiótica necessários à compreensão do conceito de proporção-porcentagem e indicado uma série de conceitos que estão em sua base, concordamos com Maia (1999) que são necessários estudos mais acurados em relação aos invariantes operatórios de que trata Vergnaud (1983; 1990). Recomendamos novos estudos e reflexões sobre os fenômenos de congruência, devido sua importância no processo de conversão entre os diferentes registros de representação semiótica.

Considerando o processo de ensino e aprendizagem, estamos convictos de que precisamos de novos estudos, novas reflexões e novas pesquisas para darmos mais coerência e consistência ao fazer pedagógico de sala de aula, especialmente na EM na EJA.

## 7. REFERÊNCIAS

ACIOLY-RÉGNIER, N. (1997). A justa medida: Um estudo sobre as competências matemática de trabalhadores da cana-de-açúcar no domínio da medida. In: SCHLIEMANN, A. D. et al. **Estudos em psicologia da educação Matemática**. 2ª ed. Recife: UFPE, pp 108 – 137.

ALMOULOUD, S. A. (2003). Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos. In : MACHADO, S. A. D. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: SP, Papirus, pp. 125-148. (Coleção Papirus Educação)

BAIL, V. S. (2002). **Educação matemática de jovens e adultos: trabalho e inclusão**. Florianópolis, SC: Insular. (Caçador, SC: UnC – Dissertação de Mestrado)

BALDINI, L. A. F.; SARDINHA, M. O. e DIAS, M. R. (2005). Investigação matemática na educação de jovens e adultos. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/c26>> Acessado em: 20/09/2005.

BITTAR, M. (2003). O ensino de vetores e os registros de representação semiótica. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, pp. 71-94. (Coleção Papirus Educação).

BRASIL (2002). **Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação de Jovens e Adultos – EJA**. São Paulo: Ação Educativa. Disponível em: <<http://www.acaoeducativa.org.br/downloads/parecerp.pdf>> Acessado em: 15/08/2005.

\_\_\_\_\_ (2004). 4º indicador de alfabetismo funcional: um diagnóstico para a inclusão social pela educação [avaliação de habilidades matemáticas]. In: **Instituto Paulo Montenegro; Ação Educativa; IBOPE**. Disponível em: <<http://www.acaoeducativa.org.br/downloads/inaf04.pdf>> Acessado em 10/10/2006

\_\_\_\_\_ (1996). **Lei de Diretrizes e Bases da Educação – Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. DOU, 23 de dezembro – Seção 1 – p. 278-39. Disponível em: <<http://bethania.uvanet.br/nucleo/leidiretrbaseduc.php>> Acessado em: 08/08/2002.

\_\_\_\_\_ (1999). Ministério da Educação e Cultura. **Educação para Jovens e Adultos: ensino Fundamental: proposta curricular – 1º segmento**. 3ª ed, São Paulo: Ação educativa: Brasília: MEC, pp 97-160.

\_\_\_\_\_ (1999). Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: SEF/MEC, v.3.

\_\_\_\_\_ (1997). Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, v. 3.

\_\_\_\_\_ (2002). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. (2002). **Proposta curricular para a educação de jovens e adultos: segundo segmento do ensino fundamental (5ª a 8ª série)**. MEC/SEF, v 03, pp 11-67.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. V.7, n.2, pp.33-115.

\_\_\_\_\_ (1988). Le contrat didactique: le milieu. In: **Recherches em didactique des mathématiques**. Grenoble, v. 9, n° 3, pp 309-336.

BUENO, F, da S. (1980) **Dicionário escolar de língua portuguesa**. 11ª ed, Rio de Janeiro: FENAME.

CALAZANS, A. M. (1996). **A Matemática na Alfabetização: o pensar e o fazer numa prática dialógica**. 3ª ed. Porto Alegre: Kaurup. (Série Alfabetização).

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W. e SCHLIEMANN, A. D. (1988). Matemática escrita versus matemática oral. In: CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D.. **Na vida dez, na escola zero**. 2a ed. São Paulo: Cortez, pp. 45-67.

\_\_\_\_\_ (1988). Na vida, dez; na escola, zero: os contextos culturais da aprendizagem da matemática. In: CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W. e SCHLIEMANN, A. D. **Na vida dez, na escola zero**. 2a ed. São Paulo: Cortez, pp. 23-43.

CARVALHO, D. L de. (1995). **A interação entre o conhecimento matemático da prática e o escolar**. Campinas, SP: UNICAMP. (Tese de Doutorado)

\_\_\_\_\_ (2001). A leitura do texto escrito e o conhecimento matemático. In: RIBEIRO, V. M. (Org). **Educação de jovens e adultos: novos leitores, novas leituras**. Campinas, SP: Mercado das letras: Associação de Leitura no Brasil – ALB; São Paulo: Ação Educativa, pp. 89-98. (Coleção Leituras no Brasil).

\_\_\_\_\_ (2003). A linguagem matemática escolar nas reminiscências de alunas adultas. In: Anais **II Simpósio Internacional de Educação Matemática – SIPEM**. Santos, SP: SBEM, GT 09, CD.

CASTRO FILHO, J. A. de e CARRAHER, D. W. (1994). A porcentagem no contexto escolar. In: **Anais II CEIBEM**. Comunicação de experiência. Blumenau, SC, 17 a 22 de julho.

CAVALCANTI, L. S. (2005). Cotidiano, mediação pedagógica e formação de conceitos: uma contribuição de Vygotski ao ensino de geografia. In: **Cadernos CEDES**, maio/ago, vol. 25, n° 66, p. 185-207. ISSN 0101-3272. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0101-32622005000200004&lng=pt&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-32622005000200004&lng=pt&nrm=iso)>. Acessado em: 11/02/2006.

CUKIERKORN, M. M. de O. (2002). Concepções e práticas pedagógicas. In: HADDAD, S. (Coord). **Educação de jovens e adultos no Brasil**. Brasília, DF: MEC/Inep/Comped, pp. 65-84. (Série estado do conhecimento n° 8). Disponível em:

<<http://www.publicacoes.inep.gov.br/resultados.asp?cat=12&subcat=30#>> Acessado em: 10/10/2005.

DA ROS, S. Z. (2002). **Pedagogia e mediação em Ruven Feuerstein: o processo de mudança em adultos com história de deficiência**. São Paulo: Plexus Editora.

DAMM W. L. (1998). **Les problemes de pourcentage: une application des problèmes de conversion proportion-quantité**. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM, 6, pp.197-212.

DAMM, R F. (1992). **Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte**. Strasbourg: ULP. (Tese de Doutorado).

\_\_\_\_\_ (1999). Registros de representação. In : MACHADO, S. A. D. (Org.). **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, pp 135-154. (Série Trilhas).

\_\_\_\_\_ (2003). Representação, compreensão e resolução de problemas aditivos. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, pp. 35-48. (Coleção Papirus Educação).

DOUADY, R. (1993). L'Ingénierie Didactique. In: **Cahier de DIDIREM**, n. 19, jan. IREM Université – Paris – VII.

DUARTE, N. (1987). **A relação entre o lógico e o histórico no ensino da matemática elementar**. São Carlos, SP: UFCar. (Dissertação de Mestrado).

\_\_\_\_\_ (1995). **O ensino de matemática na educação de adultos**. 7ª ed. São Paulo: Cortez.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnements cognitifs de la pensée. In: **Annales de didactique et Sciences Cognitives**. Strasbourg: IREM-ULP vol.5, pp. 37-65.

\_\_\_\_\_ (1995). **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Bern, Berlin, Frankfurt/M. New York, Paris, Wien: Peter Lang, éditions scientifiques européennes.

\_\_\_\_\_ (1996). Quel cognitif retenir. In: **Didactique des mathématiques**. V. 16, n° 3. pp. 349-382.

\_\_\_\_\_ (1999). L'analyse cognitive du fonctionnement de la pensée et de l'activité mathématique. In: São Paulo: PUC. (Curso ministrado por Duval).

\_\_\_\_\_ (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. A. D. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, pp. 11-34. (Coleção Papirus Educação).

FANTINATO, M. C. de C. B. (2003). **Identidade e sobrevivência no Morro de São Carlos: representações quantitativas e espaciais entre jovens e adultos**. São Paulo: FEUSP. (Tese de Doutorado).

\_\_\_\_\_ (2004). A construção de saberes matemáticos entre jovens e adultos do Morro de São Carlos. In: **Revista Brasileira de Educação**. Rio de Janeiro: ANPED, nº 27, set/out/nov/dez, pp. 109-124. Disponível em: <<http://www.anped.org.br/rbe27/anped-n27-art07.pdf>> Acessado em: 20/09/2005.

FAVERO, M. H. (2005). Desenvolvimento psicológico, mediação semiótica e representações sociais: por uma articulação teórica e metodológica. In: **Psicologia: Teoria e Pesquisa**. jan./abr. 2005, vol. 21, no. 1, pp.17-25. ISSN 0102-3772. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0102-37722005000100004&lng=pt&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-37722005000100004&lng=pt&nrm=iso)>. Acessado em: 11/02/2006.

FAVERO, M. H. e SOARES, M. T C. (2002). Iniciação escolar e a notação numérica: uma questão para o estudo do desenvolvimento adulto. In: **Psicologia: Teoria e Pesquisa**. [online]. jan./abr. 2002, vol. 18, no. 1 [citado 19 Dezembro 2005], pp.43-50. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0102-37722002000100006&lng=pt&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-37722002000100006&lng=pt&nrm=iso)>. Acessado em 11/02/2006.

FIORENTINI, D. (Org). (2003). **Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas, SP: Mercado das letras.

FIORENTINI, D; NACARATO, A. M. (2005). Introdução. In: FIORENTINI, D; NACARATO, A. M. (Orgs). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática: investigando e teorizando a partir da prática**. São Paulo: Musa editora; Campinas, SP: GEPFPM-PRAPEM-FE/UNICAMP, pp. 7-17.

FIORENTINI, D.; SOUZA Jr., A. e MELO, G. F. A. de. (1998). Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: GERALDI, C. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. de A. (Orgs). **Cartografias do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a)**. Campinas, SP: Mercado das Letras: Associação de Leitura do Brasil - ALB, pp 307-35. (Coleção leituras do Brasil).

FONSECA, M. da C. F. R. (1999). Os limites do sentido no ensino da matemática. In: **Educação e pesquisa**. São Paulo jan/jun, v. 25, nº 1.

\_\_\_\_\_ (2001a). **Discurso, memória e inclusão: reminiscências da matemática escolar de alunos adultos do ensino fundamental**. Campinas, SP: FE/UNICAMP. (Tese de doutorado).

\_\_\_\_\_ (2001b). Lembranças da matemática escolar: a constituição dos alunos da EJA como sujeitos da aprendizagem. In: **Educação e Pesquisa**. São Paulo, v 27, nº 2, jul/dez/2001. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S157-97022001000200010&1...](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S157-97022001000200010&1...)> Acessado em: 10/09/2003

\_\_\_\_\_ (2001c). Discurso, memória e inclusão: reminiscências da matemática escolar de alunos adultos do ensino fundamental. In: **24ª ANPED**, Caxambú, MG. Disponível em: <<http://.anped.org.br/24>> Acessado em 20/09/2005.

\_\_\_\_\_ (2002). **Educação matemática de jovens e adultos: especificidades, desafios e contribuições**. Belo Horizonte: Autêntica. (Tendências em educação matemática; 5).

\_\_\_\_\_ (2002b). Aproximações da questão da significação no ensino-aprendizagem da matemática na EJA. In: **25ª ANPED**. Caxambú, MG. Disponível em: Disponível em: <<http://www.anped.org.br/25>> Acessado em 20/09/2005.

\_\_\_\_\_ (2003). Estratégias retóricas, linguagem matemática e inclusão cultural na Educação de Jovens e adultos. In: **26ª ANPED**, Caxambú, MG. Disponível em: <<http://.anped.org.br/26>> Acessado em 20/09/2005.

\_\_\_\_\_ (2003). Negociação de significados, estratégias retóricas e gênero discursivo: análise de interações na Educação Matemática de alunos adultos da Escola Básica. In **Anais II Simpósio Internacional de Educação Matemática – SIPEM**. Santos, SP: SBEM, GT 09, CD.

\_\_\_\_\_ (2004). A educação matemática e a ampliação das demandas de leitura e escrita da população brasileira. In: Fonseca, M da C. F. R. (Org). **Letramento no Brasil: Habilidades Matemáticas: reflexões a partir do INAF 2002**. São Paulo: Global: Ação Educativa Assessoria, Pesquisa e Informação: Instituto Paulo Montenegro. pp. 11-28.

FONTANA, R. A. C. (2005). Mediação pedagógica na sala de aula. 4ª ed. Campinas, SP: Autores Associados. (Coleção educação contemporânea).

FRANCO, S. R. K. (2000). As construções cognitivas do adulto e suas repercussões no processo educativo. In: **23ª ANPED**. Caxambú, MG. Disponível em: <<http://www.anped.org.br/23/textos/1810t.PDF>> Acessado em 05/09/2005.

FREIRE, P. (1991). **A educação na cidade**. São Paulo: Cortez.

FREITAS, L. L. M. de. (2003). Registros de representação na produção de provas na passagem da aritmética para a álgebra. In : MACHADO, S. A. D. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papyrus, pp. 113-124. (Coleção Papyrus Educação)

GIARDINETTO, J. R. B. (1999). **Matemática escolar e matemática da vida cotidiana**. Campinas, SP: Autores associados. (Coleção polêmicas do nosso tempo)

GONÇALVES, R. de C. (2004). A formação dos Educadores no EJA de Blumenau: Uma experiência com a matemática. In: **Educação de Jovens e Adultos – EJA**. Prefeitura Municipal de Blumenau, Blumenau, SC: Publicação da Secretaria Municipal de Educação.

JAPIASSÚ, H.; MARCONDES, D. (1996). **Dicionário básico de filosofia**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora.

KNIJNIK, G. (1996). **Exclusão e resistência: Educação Matemática e legitimidade cultural**. Porto Alegre: Artes Médicas.

MAIA, L. de S. L. (1998). Produção de significado para dez por cento. In: **Anais VI ENEM**, v. 2, SBEM, São Leopoldo, RS: UNISINOS, 21 a 24 de junho, pp. 446-448.

\_\_\_\_\_ (1999). Representação e formação: um estudo sobre o ensino da porcentagem. In: **22ª ANPED**, Caxambu, MG, set, GT 19 – Educação Matemática. Disponível em: Disponível em: <<http://www.anped.org.br/>> Acessado em 20/09/2000.

MARANHÃO, M. C. S. A.; IGLIORI, S. B. C. (2003). Registros de representação e números racionais. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papyrus, pp. 57-70. (Coleção Papyrus Educação).

MAURMANN, E. A. C. (1999). **Resolução de problemas dedutivos de três termos: um estudo com adultos em processo de alfabetização**. Brasília, UNB. (Dissertação de Mestrado)

MELO, G. F. A. de. (2005). Saberes docentes de professores de matemática em um contexto de inovação curricular. In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (Orgs.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática**. São Paul: Musa Editora: Campinas, SP: GEPFPM-PRAPEM-FE/UNICAMP, pp. 33-48

MERTZ E. (1985). Beyond symbolic antropology: Introducing smiotic mediation. In: MERTZ e PARMENTIER, R. J. (Orgs.), **Semiotic Mediation. Sociocultural and Psychological Perspectives**. Orlando, Flórida: Academic Press, pp.1-19.

MIGLIORANÇA, F. (2004). A atuação do professor de Matemática na Educação de Jovens e Adultos: conhecendo a problemática. São Carlos, SP: UFSCar. (Dissertação de Mestrado). Resumo disponível em: <<http://servicos.capes.gov.br/capesdw/resumo.html?idtese=20016242007011003P6>> Acessado em 22 de abril de 2006.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. (2005). O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. In: **Revista Brasileira de educação**. Rio de Janeiro: ANPED, nº 28, jan/fev/mar/abr, pp. 50-61. Disponível em: <<http://www.anped.org.br/rbe/28/anped.n28>> Acessado em: 08 de julho de 2005

MORO, M. L. F. (1998). *A aprendizagem inicial da matemática: principais contribuições de Gérard Vergnaud. Texto para estudo extraído e adaptado de: MORO, M. L. F. Aprendizagem construtivista da adição/subtração e interações sociais. O percurso de três parceiros. Curitiba: UFPR, vol. 1, pp. 50-63. (Tese de Professor Titular).*

MOYSÉS, L. (1997). Aplicações de Vygotsky à educação matemática. Campinas, SP: Papyrus. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).

NEHRING, C. M. (1997). **A Multiplicação e seus registros de representação nas séries iniciais**. Ijuí, RS: Ed. UNIJUÍ. (Coleção Trabalhos Acadêmico – Científicos. Dissertação de Mestrado).

\_\_\_\_\_ (2001). **Compreensão de texto: Enunciados de problemas multiplicativos elementares de combinatória**. Florianópolis: UFSC, 2001. (Tese de Doutorado em Educação)

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. (2004). Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática por meio da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Orgs). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, pp. 223-231.

ONUCHIC, L. R. (1999). Ensino-aprendizagem de matemática por meio da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora da UNESP, pp 199-220.

PICONEZ, E. C. B. (2002). **Educação escolar de jovens e adultos**. Campinas, SP: Papirus. (Coleção papirus educação).

PIMENTA, M. L. (2003). **“De mais ou de menos?”: A resolução de problemas por alunos surdos adultos**. Brasília: UNB, Instituto de Psicologia. (Dissertação de Mestrado).

PINO, A. (2005). As marcas do humano: as origens da constituição cultural da criança na perspectiva de Lev S. Vigotski. São paulo: Cortez.

POLYA, G. (1995). **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1975. Trad.: ARAÚJO, H. L. B. de.

PONTE, J. P. da. (1994). O desenvolvimento profissional do professor de Matemática. In: **Revista Educação e Matemática**. APM, nº 31, pp 9-12 e 20. Disponível em: <[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/94-Ponte\(Edu&Mat\).rtf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/94-Ponte(Edu&Mat).rtf)> Acessado em: 08 de julho de 2005.

\_\_\_\_\_ (1995). Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores. In: PONTE, J. P.; MONTEIRO, C.; MAIA, M.; SERRAZINA, L.; LOUREIRO, C. **Desenvolvimento profissional dos professores de Matemática: Que formação?**. Lisboa: SPCE, pp 193-211. Disponível em: <[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/95-Ponte\(luso\)rft](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/95-Ponte(luso)rft)> Acessado em: 08 de julho de 2005.

\_\_\_\_\_ (1996). Investigação sobre concepções, saberes e desenvolvimento profissional de professores de Matemática. In: **Actas do VII Seminário de Investigação em educação Matemática**. Lisboa: APM. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/97-SIEMVII.rtf>> Acessado em: 08 de julho de 2005.

\_\_\_\_\_ (2000). A investigação sobre o professor de Matemática: problemas e perspectivas. In: **Conferência realizada no I SIPEM/SBEM**. Serra Negra, SP, nov.

Disponível em: [http://www.educ.fc.ul.pt/jponte/docs.pt/00-Ponte%20\(DUF-Brasil\).doc](http://www.educ.fc.ul.pt/jponte/docs.pt/00-Ponte%20(DUF-Brasil).doc)  
Acessado em: 08 de julho de 2005.

\_\_\_\_\_ (2004). Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática. In: **Educar em revista**. Curitiba: Editora da UFPR, nº 24, pp. 37-66. Disponível em: [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/04-Ponte-\(ArtigoER-Curitiba\).C.doc](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/04-Ponte-(ArtigoER-Curitiba).C.doc).  
Acessado em: 08 de julho de 2005.

PORTO, A. C.; CARVALHO, R. T. de. (2000). Educação matemática na educação de jovens e adultos: sobre aprender e ensinar conceitos. In: **23ª ANPED**, Caxambú, MG. Disponível em: [Disponível em: <http://www.anped.org.br/23>](http://www.anped.org.br/23) Acessado em 20/09/2005.

REIS, R. M. M. M. (1998). Produção de significado para dez por cento. In: **Anais VI ENEM**, v. 2, SBEM, São Leopoldo, RS: UNISINOS, 21 a 24 de junho, pp. 443-445.

RIBEIRO, B. O. L. (1992). **Estudo fenomenológico do ensino aprendizagem na escola noturna: casuística de evasão e repetência**. Uberlândia, MG, UFU. (Dissertação de Mestrado).

ROCHA, R. F. da. (1999). **Iniciação à Matemática na escola: um estudo sobre a representação e a notação de adultos em processo de alfabetização**. Brasília, DF: UNB. (Dissertação de Mestrado).

RODRIGUES, J. M. S. (2005). **Formação matemática de professor de atuação multidisciplinar nas séries iniciais do ensino fundamental: indicativos com vistas a estudo de noções de Probabilidade**. Curitiba: UFPR. (Dissertação de Mestrado).

SANTA CATARINA, SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA. (2005). **Proposta Curricular da Santa Catarina: Estudos Temáticos**. Florianópolis: IOESC.

SANTOS, M. E. da C. (2004). **Posso fazer do meu jeito?: registros das estratégias de adultos desafiados a resolver problemas matemáticos aditivos**. Itajaí, SC: UNIVALI. (Dissertação de Mestrado).

SCHLIEMANN, A. (1998). Da matemática da vida diária à matemática da escola. In: SCHLIEMANN, A. e CARRAHER, D. W. (Orgs). **A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa**. Campinas, SP: Papius, pp 11-38 (Perspectivas em educação matemática).

SILVA, B. A. da. (2003). O conceito de probabilidade condicional: registros de representação. In: MACHADO, S. A. D. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papius, pp. 95-112. (Coleção Papius Educação).

SILVA, J. A. de M. (2002). **Educação Matemática & exclusão social: tratamento diferenciado para realidades desiguais**. Brasília: Plano Editora.

SILVA, V.; SILVA, O. e AGUIAR, M. C. (2000). Uma experiência de ensino articulada ao decimal e à porcentagem. In: **Educação Matemática em Revista**, SBEM, v. 7, n. 8, junho, pp. 16-23.

SOUZA, A. M. C. (1988). **Educação matemática na alfabetização de adultos e adolescentes segundo a proposta pedagógica de Paulo Freire**. Vitória, ES: Educ.-FE-UFES. (Dissertação de Mestrado).

SPINILLO, A. G. (1992). A importância do referencial 'metade' e o desenvolvimento do conceito de proporção. In: **Psicologia: Teoria e pesquisa**. 8(3), pp. 305-317.

\_\_\_\_\_ (1994). Raciocínio proporcional em crianças: considerações acerca de alternativas educacionais. In: **Pro-Posições: Revista quadrimestral da faculdade de educação Unicamp**. Campinas, SP: UNICAMP, v. 5, n 1[13], março, pp109 – 114.

\_\_\_\_\_ (1995). Estratégias na resolução de tarefas de proporção por crianças. In: **Livro de resumos – Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife, pp 14-18.

SOARES, M. (1998). **Letramento: um tema em três gêneros**. Belo Horizonte: Autêntica.

SOUZA, A. M. M.; DEPRESBITERIS, L.; MACHADO, O. T. M. (2004). **A mediação como princípio educacional: bases teóricas das abordagens de Reuven Feuerstein**. São Paulo: Editora Senac São Paulo.

TEIXEIRA, L. R. M. (2005). As representações da escrita numérica: questões para pensar o ensino e a aprendizagem. In: MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C.. **Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática na escola**. Curitiba: Ed. da UFPR, pp. 19-40.

TIENGO, A. (1988). **O estudo supletivo através do ensino individualizado por módulos é uma solução adequada com módulos de matemática?** Vitória, ES: FE-UFES. (Dissertação de Mestrado).

TOLEDO, M. E. R. de O. (2001). As estratégias metacognitivas de pensamento e registro matemático de adultos pouco escolarizados. In: **24ª ANPED/Intelectuais conhecimento e espaço público**, Caxambú, MG. Disponível em: Disponível em: <<http://www.anped.org.br/24>> Acessado em 20/09/2005.

TÔRRES, P. L. (2002). Competência matemáticas de jovens e adultos em processo de alfabetização. In: **25ª ANPED**. Caxambú, MG. Disponível em: Disponível em: <<http://www.anped.org.br/25>> Acessado em 20/09/2005.

VERGNAUD, G. (1983) Multiplicative Structures. In: RESH, R.; LANDAU, M. **Acquisition of mathematics: Concepts and processes**. New York, Academic Press, pp. 127-173.

\_\_\_\_\_ (1990). La théorie des champs conceptuels. In: **Recherches em Didactique des Mathématiques**, 10 (2-3), pp. 133-170.

\_\_\_\_\_ (1993). **Signifiants et signifiés dans une approche psychologique de la representation**. In: Les Sciences de l'éducation 1-3, pp 9-16.

\_\_\_\_\_ (1994). Le rôle de l'enseignant a la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. In: M. ARTIGUE; R. GRAS; C. LABORDE e P. TAVIGNOT(Eds.) **Vingt ans de didactique des mathématiques en France**. Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 177-191

\_\_\_\_\_ (1995) Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation, In: Actes de l'Ecole d'Eté. IREM de Clermond Ferand, pp. 174-185.

\_\_\_\_\_ (1991). A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. (1996). **Didática das matemáticas**. Portugal, Lisboa: Instituto Piaget. Coleção Horizontes Pedagógicos.

VIZOLLI, I. (2001). **Registro de representação semiótica no estudo de porcentagem**. Florianópolis: UFSC. (Dissertação de Mestrado. Mestrado em Educação – Linha de Investigação: Educação e Ciência).

VIZOLLI, I. e MOREIRA, R. (2006). Índice de desempenho de alunos de graduação na solução de problemas de proporção-porcentagem. In: **II Semana de Estudos, VI Jornada de Pedagogia, IV Ciclo de Palestras do NAC. O Mundo do Trabalho: realidades e perspectivas na contemporaneidade**. UNIVALI, Campus Balneário Piçarras, SC.

VIZOLLI, I. e PENNA, R, M. (2006). **O desempenho de alunos de graduação na solução de problemas de proporção-porcentagem**. Itajaí, SC: UNIVALI. (Projeto de pesquisa aprovado pelo artigo 170: em desenvolvimento)

VYGOTSKY, L. S. e LURIA, A. R. (1994). Tool and symbol in child development. In: VAN DER VEER, R. e VALSINER, J. (Eds.). **The Vygotsky reader**. Oxford (UK) e Cambridge (USA): Bleckwell, pp. 99-174.

WESCHENFELDER, M. H. (2004). **A matematização da educação de jovens, adultas e idosos**. Passo Fundo, RS: UPF.

WIEBE, J. H. (1986). Manipulando porcentagens. Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura, IBECC/UNESCO, Núcleo de Documentação sobre a Formação Científica, NDFC, São Paulo. In: **Mathematics Teacher**, janeiro. (Tradução para fins didáticos).