

ALEXANDRE ALBARELLO COSTA

**APERFEIÇOAMENTO DO MÉTODO FETD PARA SIMULAÇÃO DE
DESCARGAS ELÉTRICAS NÃO-LINEARES**

**Dissertação apresentada como requisito
parcial para a obtenção do grau de
Mestre, no Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica - PPGEE, Setor
de Tecnologia, Universidade Federal do
Paraná – UFPR.**

**Orientador: Prof. Wilson Arnaldo
Artuzi Júnior, Ph.D.**

**CURITIBA
2007**

**A força não é nada sem a inteligência
que a dirige. (Eliphas Levi)**

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por tudo o que tem colocado e proporcionado em meu caminho por esta vida.

Agradeço a minha esposa e filho, pelo conforto e auxílio em todos os momentos.

Agradeço aos meus pais e familiares, pelo apoio e incentivo constantes.

Agradeço ao Prof. Dr. Wilson A. Artuzi Jr., por todo o seu auxílio, empenho, dedicação e paciência como orientador.

Agradeço aos colegas do LACTEC e principalmente ao Eng. Ricardo Luiz Araújo, pela oportunidade de cursar este mestrado e pelo incentivo em todos os momentos em que trabalhamos juntos.

Agradeço aos colegas de trabalho da Whirlpool, pelo incentivo.

Meu MUITO OBRIGADO a todos que, direta ou indiretamente, tiveram influência no presente trabalho.

Alexandre Albarello Costa

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	iii
SUMÁRIO	iv
LISTA DE TABELAS	vi
LISTA DE SÍMBOLOS	vii
LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS	viii
RESUMO	ix
ABSTRACT	x
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. FENOMENOLOGIA	1
1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
1.3. METODOLOGIA	5
2. PLASMAS	7
2.1. FREQUÊNCIA DE PLASMA	8
2.2. EQUACIONAMENTO DE UM PLASMA	9
3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO DOMÍNIO DO TEMPO	12
3.1. MODELAGEM DE UM PROBLEMA ELETROMAGNÉTICO	12
3.2. O MÉTODO DE GALERKIN	13
3.3. O MÉTODO DE NEWMARK	16
3.4. FETD MODIFICADO	19
3.4.1. FORMULAÇÃO	19
3.4.2. ELEMENTOS FINITOS	21
3.4.3. PASSO NO TEMPO LINEAR	22
3.4.4. PASSO NO TEMPO NÃO-LINEAR	23
4. MODELAGEM COMPUTACIONAL	25
4.1. MODELO GEOMÉTRICO	25
4.2. CIRCUITO ELÉTRICO EQUIVALENTE	26
4.3. MODELO SIMPLIFICADO UTILIZANDO FETD	29
4.3.1. CONDUTIVIDADE NÃO-LINEAR ESCALAR	29
4.3.2. RESISTIVIDADE NÃO-LINEAR COM INCLINAÇÃO NEGATIVA	32
4.4. MODELO COMPLETO UTILIZANDO FETD	36
4.5. MATERIAIS E PARÂMETROS UTILIZADOS	36
4.6. DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL	38
5. PROCEDIMENTOS DE SIMULAÇÃO	40
5.1. ESTIMATIVA INICIAL DOS PARÂMETROS DO PLASMA	40
5.2. SIMULAÇÕES COM O MODELO COMPLETO	44
5.3. RESULTADOS	45
5.3.1. RESULTADOS PARA 4 nF	46
5.3.2. RESULTADOS PARA 4,5 nF	47
5.3.3. INDUTÂNCIA INERENTE À GEOMETRIA	48
5.4. ANÁLISE DOS DADOS	49
6. CONCLUSÕES	52
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	54
8. APÊNDICES	56
8.1. ALGORITMO DE REGRESSÃO POR MATRIZ PENCIL	56
8.2. FORMAS DE ONDA PARA CAPACITÂNCIA DE 4 nF	58
8.3. FORMAS DE ONDA PARA CAPACITÂNCIA DE 4,5 nF	61
8.4. ARTIGO GERADO	64

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Spark gap	4
Figura 2 - Uma variável w em função do tempo	17
Figura 3 - Comprimento da função tangente hiperbólica.	21
Figura 4 - Diagrama simplificado do dispositivo real.	25
Figura 5 – Seção transversal com as dimensões do dispositivo.	25
Figura 6 - Meio plano transversal do modelo geométrico.....	26
Figura 7 - Dados medidos durante o experimento real.....	27
Figura 8 - Circuito RLC série equivalente do dispositivo.....	27
Figura 9 - Resposta calculada do circuito com os parâmetros medidos.....	29
Figura 10 - Circuito RLC série com resistência variável	30
Figura 11 - Condutividade escalar em função do campo elétrico.	31
Figura 12 - Comportamento desejado da condutividade com a variação do campo elétrico. .	31
Figura 13 - Comportamento do campo elétrico em função da densidade de corrente	34
Figura 14 - Curva calculada com escala de campo linear.	35
Figura 15 - Curva calculada com escalas logarítmicas	35
Figura 16 - Perfil simulado do modelo completo.....	36
Figura 17 - Pulso de corrente utilizado como fonte de excitação.....	38
Figura 18 - Geometria com as condições de excitação e medição de tensão	39
Figura 19 - Modelo geométrico discretizado com $l=0.2$ mm	39
Figura 20 – Pulso limitado para carregamento das placas paralelas	40
Figura 21 - Tensão medida entre as placas.....	41
Figura 22 - Valores de R e L calculados segundo combinações com o modelo simplificado	42
Figura 23 - Forma de onda obtida em uma das combinações do modelo simplificado.	43
Figura 24 - Método de comparação entre respostas.	45
Figura 25 - Erros percentuais para capacitância de 4 nF.....	46
Figura 26 - Erros percentuais para capacitância de 4,5 nF.....	47
Figura 27 – Modelo completo com placas em curto-circuito.....	48
Figura 28 - Comparação para a frequência de plasma.	49
Figura 29 - Comparação para a resistividade do ar ionizado.	49
Figura 30 – Comparação dos erros percentuais.....	50
Figura 31 - Melhor resultado obtido para $C = 4$ nF.....	51
Figura 32 - Melhor resultado obtido para $C = 4,5$ nF.....	51
Figura 33 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 1 a 4.....	59
Figura 34 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 5 a 8.....	59
Figura 35 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 9 a 12.....	60
Figura 36 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 13 a 16.....	60
Figura 37 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 17 a 20.....	61
Figura 38 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 1 a 4.....	62
Figura 39 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 5 a 8.....	62
Figura 40 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 9 a 12.....	63
Figura 41 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 13 a 16.....	63
Figura 42 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 17 a 20.....	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Propriedade dos materiais	36
Tabela 2 - Parâmetros utilizados nas simulações	37
Tabela 3 – Combinações selecionadas	44
Tabela 4 – As quatro melhores combinações para $C=4$ nF	47
Tabela 5 - As quatro melhores combinações para $C=4,5$ nF.....	47

LISTA DE SÍMBOLOS

- Ω : “Ohm”, unidade de resistência elétrica.
- V: “Volt”, unidade de potencial elétrico.
- A: “Ampère”, unidade de corrente elétrica.
- ρ_{\max} : Resistividade do ar não-ionizado
- ρ_{\min} : Resistividade do ar ionizado
- μ_0 : Permeabilidade magnética do vácuo
- ϵ_0 : Permissividade elétrica do vácuo
- μ_r : Permeabilidade magnética relativa do meio
- ϵ_r : Permissividade elétrica relativa do meio
- f_p : Frequência do plasma em Hz
- ω_p : Frequência do plasmas em rad/s
- ν : Frequência de colisão dos elétrons.
- ∇ : Operador “nabla”, utilizado em cálculos vetoriais
- Δ : “Delta”, indicador de diferenças
- σ : Condutividade do ar

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

PEC: Do inglês *perfect electrical conductor*, ou condutor elétrico perfeito.

FETD: Do inglês *finite element in time domain*, ou método dos elementos finites no domínio do tempo.

FDTD: Do inglês *finite difference in time domain*, ou método das diferenças finitas no domínio do tempo.

FEM: Do inglês *finite element method*, ou método de elementos finitos.

PMC: Do inglês *perfect magnetic conductor*, ou condutor magnético perfeito.

R: Resistência elétrica, em Ω .

L: Indutância magnética, em H.

C: Capacitância, em F

RESUMO

A simulação de efeitos eletromagnéticos não-lineares não é uma tarefa trivial, porém, é uma necessidade das ciências e tecnologias nos dias de hoje. No presente trabalho, uma nova metodologia de cálculo é apresentada utilizando o método dos elementos finitos no domínio do tempo modificado através de um novo tratamento vetorial dos campos elétricos, em conjunto com equações eletromagnéticas não-lineares extraídas da física dos plasmas para a simulação de descargas.

Baseado em um experimento real de um dispositivo de geração de pulsos de alta corrente, foi construído um modelo computacional simplificado do mesmo ao qual foi aplicado o método.

Um ajuste prévio das propriedades físicas do plasma foi realizada e posteriormente efetuado uma seqüência de simulações variando-se alguns parâmetros chave, onde o objetivo é ajustá-los de forma a aproximar a simulação da resposta real.

Ao final, as curvas simuladas são comparadas com a curva real do dispositivo através de uma análise matemática e as devidas conclusões são apresentadas.

Palavras-chave: FETD, simulação eletromagnética, descargas elétricas, efeito corona, descargas parciais e totais.

ABSTRACT

The simulation of electromagnetic effects is not an easy task, however, it is a need of science and technology nowadays. In this work, a new math methodology is presented using the finite element in time domain modified by a new vector treatment of electric fields and electromagnetic equations extracted from nonlinear plasma physics, in order to simulate electrical discharges.

Based on a real experiment of a high current pulse generator device, a simplified computational model was built and the new method was applied.

A previous adjust of the plasma physical properties was made, followed by a sequence of simulations varying some key-parameters, where the main goal is to calculate them in order to approach the simulation with the real response.

At the end of work, the simulated curves are compared with the real device waveform with a mathematical analysis and the conclusions are presented.

Index terms: FETD, electromagnetic simulation, electrical discharges, corona effect, partial and total discharges.

1. INTRODUÇÃO

1.1. FENOMENOLOGIA

As descargas elétricas, parciais e totais são dois tipos de fenômenos elétricos comuns, porém difíceis de modelar matematicamente e de grande interesse para a comunidade científica e tecnológica. A simulação de modelos eletromagnéticos com características não-lineares é uma tarefa árdua até os dias de hoje devido à dificuldade e a pouca precisão dos métodos de cálculo conhecidos.

O processo de descarga elétrica é um mecanismo complexo, porém, é possível resumi-lo de forma a visualizar melhor suas etapas. Conforme o potencial elétrico entre dois condutores é aumentado, um canal ionizado começa a ser formado através do dielétrico existente entre ambos, formando assim um plasma ao redor do eletrodo. Conforme os canais ionizados aumentam com o aumento do potencial, pequenas descargas podem ocorrer do condutor energizado para o dielétrico, descargas estas ditas parciais. Ao efeito contínuo de descargas parciais dá-se o nome de Corona. Quando o potencial elétrico atinge o limiar de ruptura do dielétrico, um canal ionizado completo entre ambos os condutores é formado criando um caminho de alta corrente, ocorrendo assim uma descarga.

O termo corona é comumente utilizado para descrever as descargas elétricas que ocorrem em estruturas dos sistemas de energia como resultado da ionização causada por um campo elétrico intenso no isolamento sem que haja a formação de um caminho condutivo completo entre condutores, ou entre condutor e terra.

As descargas parciais e totais estão intimamente ligadas com relação aos seus mecanismos de formação, divergindo em seus estados permanentes ou finais, por isso uma formulação adequada abre um caminho de estudo para ambos os fenômenos.

O efeito destrutivo das descargas totais é bem conhecido por ser aparente, porém no caso das parciais isto não é tão evidente, degradando o equipamento sob seu

efeito gradativamente. Portanto, as descargas parciais também podem ser vistas como um fator de preocupação podendo levar a prejuízos econômicos relacionados a reparos e substituições prematuras de equipamentos, redução na segurança e eficiência dos sistemas de comunicação, e grandes prejuízos causados pela eventual interrupção dos serviços ou falha de equipamentos.

Pelos motivos citados é possível concluir a importância que tem o conhecimento sobre estes efeitos. Uma modelagem adequada, em conjunto com as ferramentas de análise hoje existentes seria de suma importância para engenheiros e cientistas que trabalham com eletricidade e que se deparam com estes fenômenos em seu dia a dia.

1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Atualmente existem modelos matemáticos simplificados das descargas elétricas, porém nenhum dos métodos conhecidos pode ser considerado genérico o bastante para abranger todos os fenômenos, nem versáteis o suficiente para simular geometrias próximas da realidade, com uma grande quantidade de detalhes. Outro grande limitador dos métodos convencionais é a sua incapacidade de trabalhar com não-linearidades, considerando normalmente em suas formulações linearizações ou simplificações que objetivam tornar o fenômeno o mais linear possível.

Em [10], foi utilizada uma abordagem microscópica das descargas parciais em conjunto com um método híbrido (FEM-FCT) para simulação do modelo. O método é uma combinação do método de elementos finitos com o método de transporte de fluxos corrigidos e apresentou resultados satisfatórios para o cálculo do fluxo de elétrons entre os eletrodos, porém, esta abordagem necessitou de uma discretização muito pequena da grade, implicando em um esforço computacional relativamente elevado e, impossibilitando assim a simulação de modelos maiores e mais complexos. Algo similar é feito em [6] e [12], porém é utilizado o método de simulação por cargas para simulação do comportamento dos íons e não há um modelo

geométrico discretizado, já que o modelo matemático foi determinado diretamente a partir do experimento real.

Em [13] é apresentada uma abordagem estocástica das descargas parciais porém não foram encontrados trabalhos de simulação utilizando este tipo de formulação.

Em [14] são combinados os métodos de elementos finitos com o método de simulação por cargas para cálculo das perdas por descargas parciais em linhas de transmissão em alta tensão. O modelo apresentou resultados próximos à realidade, porém é unidimensional e dedicado ao cálculo das perdas, restringindo assim a quantidade de informações que podem ser obtidas através da simulação.

Em [18], é levantado um modelo elétrico de um *Spark gap*, conhecido também como circuito elétrico equivalente, e simulado com PSpice no tempo. Os resultados obtidos de sua simulação são comparados com os dados reais de um dispositivo comercial. Este estudo apresentou resultados bons para os cálculos de tensão e corrente, porém esta técnica desconsidera as geometrias do *Spark gap*, o que impossibilita sua utilização para modelos com geometrias complexas e restringe os resultados obtidos, já que não é possível obter informação sobre as distribuições de campos elétricos e magnéticos no modelo.

Em [15] é feito um levantamento de vários métodos de simulação de descargas em gases. São analisados tanto métodos com abordagem microscópica quanto macroscópica, porém, todos métodos unidimensionais.

Nos artigos [8], [9], [11] são realizados cálculos baseados em métodos empíricos, o que restringe as simulações a geometrias simplificadas e não permite uma análise mais completa dos fenômenos em questão, levando em consideração somente o fenômeno para o qual foi criado o método, como perdas de energia em linhas de transmissão, fluxo de íons, etc.

Um dispositivo real conhecido como *Spark gap* (Figura 1), com dados experimentais medidos, foi utilizado como ponto de partida para este trabalho. Ele foi utilizado em um experimento realizado na Universidade Federal do Paraná e foi

escolhido por se enquadrar perfeitamente no estudo do efeito considerado aqui [21]. Um *Spark gap* é um dispositivo capaz de gerar descargas em altas tensões. É formado normalmente por dois eletrodos separados de certa distância preenchida por um gás, normalmente o ar. Um exemplo bem conhecido de *spark gap* é a vela de ignição utilizada em motores de combustão interna. Quando uma tensão suficientemente alta é aplicada aos eletrodos, uma descarga ocorre no espaçamento, sendo que o valor de tensão necessário depende da distância do espaçamento e do gás que a preenche. A partir deste experimento, alguns modelos computacionais com simetria axial foram criados, nos quais foi aplicado o método FETD com os devidos aprimoramentos.

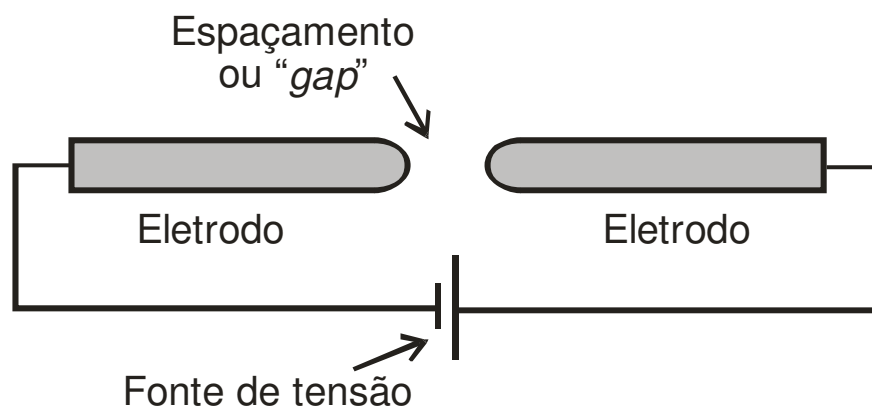


Figura 1 - Spark gap

Este tipo de dispositivo pode ser utilizado com o objetivo de gerar descargas para determinado fim ou como proteção contra surtos de alta tensão, como descargas atmosféricas ou descargas eletrostáticas.

A proposta no presente trabalho é chegar a uma formulação focada no cálculo das não-linearidades presentes nos efeitos de descargas elétricas, porém proporcionando flexibilidade de modelagem das geometrias. O objetivo principal do estudo é chegar a uma formulação capaz de simular o efeito não-linear de uma descarga elétrica com confiabilidade nos resultados. Isto por si só já é um avanço nas simulações eletromagnéticas, já que atualmente não existem recursos similares.

O método de elementos finitos se enquadra nas características desejadas de modelagem geométrica, sendo possível ainda implementar qualquer formulação matemática discretizada em seu algoritmo. É este o método escolhido e que se

pretende aperfeiçoar durante este trabalho.

1.3. METODOLOGIA

Inicialmente foi realizada uma modelagem geométrica do *spark gap* que originou os dados reais, seguida de uma modelagem simplificada por circuitos elétricos baseada na resposta real. Os parâmetros do dispositivo: resistência e indutância, são extraídos na seqüência a partir dos resultados experimentais utilizando o algoritmo de matriz pencil [1].

Em seguida, uma estimativa inicial dos parâmetros do dispositivo através de um modelo simplificado do *Spark gap* foi realizada. Neste modelo simplificado, os capacitores reais do dispositivo foram retirados, utilizando assim somente a capacitância natural do modelo. Isto se deve ao fato de o número de simulações nesta fase ser elevado e, a retirada dos capacitores faz com que a resposta do sistema seja mais rápida, diminuindo assim o tempo de simulação e memória requerida. Este tipo de simplificação é possível pelo fato dos valores de resistência e indutância, inerentes à descarga elétrica, praticamente não se alterarem após a inserção dos capacitores.

Este passo de estimação inicial dos parâmetros foi realizado em duas etapas, sendo que na primeira utilizou-se o método FETD com uma formulação não-linear escalar, onde o valor da condutividade do ar é modificada em função da intensidade do campo elétrico. Esta formulação não apresentou resultados satisfatórios devido a instabilidades numéricas apresentadas.

Na segunda etapa foi utilizado o algoritmo FETD com uma formulação não-linear vetorial retirada da física dos plasmas [5], onde a resistividade do ar varia de forma não-linear em função da intensidade da corrente de polarização do plasma [2]. Diversas simulações foram realizadas combinando os parâmetros do plasma, e os valores de resistência e indutância de cada combinação foram calculados a partir das formas de onda obtidas utilizando o algoritmo de matriz pencil.

Como as respostas do modelo numérico são diferentes da resposta do

dispositivo real devido à ausência dos capacitores, apenas a indutância e a resistência equivalentes são comparadas. Uma filtragem dos valores é realizada e as primeiras estimativas dos parâmetros do plasma são determinadas.

Finalmente, incorpora-se à estrutura o material dielétrico de alta permissividade elétrica que modela os capacitores do dispositivo real. Nesta fase os parâmetros da simulação, como tempo e duração do pulso de excitação, são ajustados para proporcionar um cenário próximo à realidade. Novamente são realizadas simulações utilizando combinações dos parâmetros do plasma dentro do novo intervalo e as formas de onda armazenadas.

Desta vez, as formas de onda simuladas são comparadas com a resposta do dispositivo real e o erro relativo em amplitude e fase é calculado, determinando assim quais valores dos parâmetros proporcionam o melhor ajuste.

Por fim, uma análise dos resultados é realizada e as conclusões apresentadas.

Os softwares utilizados durante o estudo foram o GID – GEOMETRY AND DATA, para modelagem das geometrias e pré-processamento do modelo, bem como entrada dos parâmetros das simulações, tais como tempos, características dos materiais, etc, e o Matlab, para o processamento matemático propriamente dito e pós-processamento, como obtenção de gráficos, animações e análises de erros.

2. PLASMAS

Um plasma pode ser definido como um gás ionizado contendo elétrons livres, íons e átomos neutros, mantendo-se macroscopicamente neutro. O plasma é onipresente e visível em todo o universo, sendo encontrado nas estrelas, nas nebulosas, nos ventos solares em praticamente todos os objetos astronômicos. Só em 1879, Sir William Crookes, químico e físico inglês, identificou o quarto estado da matéria, hoje conhecido como plasma. A palavra plasma foi usada pela primeira vez em 1929 por Irving Langmuir, físico e químico americano, para identificar um gás ionizado. Assim o meio plasma pode ser entendido como um gás ionizado, que exibe um comportamento coletivo, sendo o mesmo composto por íons, elétrons e algumas partículas neutras [20].

Devido à energia cinética de suas partículas, o plasma é hoje identificável como sendo o 4º estado da matéria, representando 99,99% da matéria visível do Universo. Sabe-se que, segundo o grau de aquecimento, o movimento térmico dos átomos de qualquer corpo sólido adquire um caráter cada vez mais energético, enquanto não comecem a enfraquecer e depois se rompem as ligações que determinam a estrutura da substância. A primeira coisa a romper-se é a rede cristalina, e o corpo sólido funde-se e converte-se em líquido. Depois debilitam-se as ligações entre as moléculas e a substância toma a forma de gás. Ao aquecer um vaso com gás, conforme a temperatura vai aumentando, o movimento dos átomos do gás torna-se cada vez mais enérgico, e os átomos cada vez com mais frequência e cada vez com mais força chocam-se uns com os outros. Como resultado destes choques, começam a separar-se os elétrons situados nas órbitas mais exteriores, que são os mais debilmente ligados aos núcleos dos seus átomos. Dentro do gás, aparece um “segundo gás” formado por estes elétrons, cujo número aumenta ininterruptamente, ao mesmo tempo em que se vão “despindo” os núcleos dos átomos. Depois deles, chega a vez dos elétrons “escondidos” nas órbitas mais profundas e mais sólidas. O gás, no qual, sob a ação de

uma temperatura extraordinariamente alta, teve lugar a divisão da substância, a qual se compõe de elétrons livres com uma velocidade vertiginosa, que se chocam entre si e com as paredes do vaso, com os núcleos dos átomos completamente “nus” e com os átomos que por casualidade ainda mantêm uma parte dos seus elétrons, formam o “plasma”. O plasma “ideal” com as partículas atômicas completamente divididas, corresponde a uma temperatura de várias dezenas de milhões de graus. Em todos os lugares onde a matéria está extraordinariamente quente, ela encontra-se no estado plásmico. Todavia, o plasma não é apenas uma substância aquecida até temperaturas super altas. É um estado físico completamente distinto que manifesta todo um conjunto de propriedades importantes e mesmo extraordinárias [19].

Como já citado, no seu conjunto o plasma é neutro, já que contém uma quantidade igual de partículas carregadas positiva e negativamente. Mas a interação destas cargas dá ao plasma uma grande variedade de propriedades diferentes das dos gases, como em certas condições, o plasma pode conduzir corrente elétrica melhor do que o cobre, ou pode fluir como um líquido viscoso. Além disso, é facilmente orientável em campos elétricos e magnéticos. A física do plasma tornou-se rapidamente um dos ramos mais destacados do progresso científico, apresentando grande potencial em aplicações industriais.

2.1. FREQUÊNCIA DE PLASMA

Supondo que uma partícula carregada de um plasma é afastada da sua posição de equilíbrio, a neutralidade do plasma é quebrada e cria-se um campo elétrico que vai fazer regressar a partícula à sua posição de equilíbrio. Simplesmente quando esta posição for atingida, embora o campo elétrico seja nulo, a partícula possui energia cinética (foi acelerada pelo campo elétrico desde a posição de afastamento máximo até a posição de equilíbrio), pelo que continua o seu movimento para o outro lado até que a energia cinética seja nula. Mas quando se verificar esta condição, estamos novamente numa situação de quebra da neutralidade do plasma, pelo que novamente

sob a ação de um campo elétrico a partícula inicia um movimento de sentido contrário [19].

Em outras palavras, o plasma possui uma frequência natural de oscilação, conhecida como frequência de plasma, e consiste na oscilação dos elétrons livres em torno de suas respectivas posições de equilíbrio. O valor da frequência é dado por:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m \epsilon_0}} \quad (2.1)$$

Onde:

n_e é a densidade dos elétrons;

e é o módulo da carga das partículas;

m é a massa da partícula;

ϵ_0 é a permissividade do vácuo.

Como num plasma existem dois tipos de partículas carregadas (elétrons e íons), podemos definir duas frequências de plasma, a dos elétrons (ω_{pe}) e a dos íons (ω_{pi}). Como os íons têm uma massa muito maior do que os elétrons, $\omega_{pi} \ll \omega_{pe}$, dessa forma a frequência dos elétrons pode ser considerada como a frequência dominante dentro de um plasma.

Um importante fenômeno relacionado à frequência de plasma, é o fato de ondas eletromagnéticas de frequência menor que a frequência de plasma, serem refletidas.

2.2. EQUACIONAMENTO DE UM PLASMA

No caso de um *spark gap*, o campo elétrico gerado entre os eletrodos ioniza parcialmente o ar ao mesmo tempo em que cede energia aos elétrons livres que oscilam e colidem com os átomos neutros, iniciando a formação do plasma. Quando a energia cinética na colisão excede o potencial de ionização dá-se a multiplicação de elétrons, ou efeito avalanche, e ocorre o colapso ou rompimento do gás, originando a

descarga. O colapso acontece se o ganho em densidade de elétrons causado pela ionização excede, por algum tempo, as perdas por difusão ou recombinação.

Considerando um meio isotrópico, as equações de Maxwell e as relações constitutivas para um plasma não magnetizado são dadas por:

$$\nabla \times \overset{\rho}{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \overset{\nu}{E}}{\partial t} + \overset{\rho}{J} \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \overset{\rho}{E} = -\mu_0 \frac{\partial \overset{\nu}{H}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \overset{\nu}{u}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m} \overset{\rho}{E} - \nu \overset{\rho}{u}_e \quad (2.4)$$

$$\overset{\nu}{J} = -en_e \overset{\rho}{u}_e \quad (2.5)$$

Onde:

$\overset{\nu}{E}$ é o campo elétrico;

$\overset{\nu}{H}$ é o campo magnético;

$\overset{\rho}{J}$ é a densidade de corrente de polarização;

n_e é a concentração de elétrons;

ν é a frequência de colisão dos elétrons.

e é a carga do elétron

m é a massa do elétron

As relações entre $\overset{\nu}{E}$ e $\overset{\rho}{J}$ podem ser obtidas a partir das equações (2.4) e (2.5)

$$\overset{\rho}{J}(\omega) = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{j\omega + \nu} \overset{\rho}{E}(\omega) = \sigma(\omega) \overset{\rho}{E}(\omega) \quad (2.6)$$

$$\sigma(\omega) = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{j\omega + \nu} \quad (2.7)$$

Onde ω é a frequência angular em rad/s.

Através da transformada inversa de (2.4) e (2.5), são obtidos (2.6) e (2.7) pelo uso da integral de convolução [5].

$$\mathcal{J}(t) = \int_0^t \mathcal{E}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (2.8)$$

$$\sigma(\tau) = \varepsilon_0 \omega_p^2 e^{-\nu\tau} U(\tau) \quad (2.9)$$

Onde $U(\tau)$ é a função degrau unitário no tempo.

Este equacionamento descreve o comportamento do campo elétrico de um plasma em regime permanente, e será utilizado para aprimoramento do método FETD.

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO DOMÍNIO DO TEMPO

O método de elementos finitos (FEM) é uma ferramenta de cálculo para problemas de engenharia e científicos já bem conhecida e bastante difundida. No caso específico da engenharia elétrica, é um método utilizado em problemas que vão desde as telecomunicações até sistemas de grandes potências, porém é um método dominado para problemas estáticos. Para problemas dinâmicos, envolvendo variações no tempo, existe o método dos elementos finitos no domínio do tempo, ou FETD, que tem sua origem no método dos elementos finitos e é utilizado no presente trabalho.

A flexibilidade da formulação do método FETD permite a modelagem de estruturas geometricamente complexas, e até as que apresentam características constitutivas diversas, como as que envolvem materiais heterogêneos, anisotrópicos e mesmo não-lineares, o que é de grande interesse neste estudo pois aqui será tratado o problema de ionização e descargas pelo ar, efeito este não-linear e pouco conhecido do ponto de vista matemático.

3.1. MODELAGEM DE UM PROBLEMA ELETROMAGNÉTICO

Em se tratando de um problema eletromagnético, nada mais correto que começar sua resolução pelas equações de Maxwell, neste caso, por duas de maior interesse: lei de Ampère-Maxwell e lei de Faraday no domínio do tempo em sua forma diferencial.

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.2)$$

Onde:

\vec{E} é o vetor campo elétrico [V/m]

\vec{H} é o vetor campo magnético [A/m]

\mathcal{J} é a corrente de excitação [A/m²]

μ é a permeabilidade magnética [H/m]

ϵ é a permissividade elétrica [F/m]

σ é a condutividade elétrica [S]

A partir destas duas equações, é possível chegar à equação da onda eletromagnética, conhecida também como equação de Helmholtz. Para isto basta isolar \mathcal{H} em (3.1) e substituí-lo em (3.2).

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\mu} \int \nabla \times \mathcal{E} dt \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon \mathcal{E} + \sigma \mathcal{E} + \int \frac{\nabla \times \nabla \times \mathcal{E}}{\mu} dt = -\mathcal{J} \quad (3.4)$$

Através desta equação podem ser analisados os mais variados problemas de eletrostática e eletrodinâmica, porém ela está no domínio contínuo espacial e temporal. O método FETD é um método de cálculo discreto, por isso a necessidade de discretizar a equação da onda, ou seja, transformá-la em uma equação numérica e para isto utiliza-se o método de Galerkin [3], que se caracteriza pela inserção de funções de base em conjunto com um método numérico conhecido. Estas funções têm por objetivo se aproximar do comportamento real do fenômeno que se deseja simular, por isso são de extrema importância e sua correta escolha terá peso direto sobre a qualidade dos resultados.

3.2. O MÉTODO DE GALERKIN

É um método que visa a discretização espacial do problema eletromagnético. É um método de resíduos ponderados, ou seja, onde o resíduo R é a diferença entre a solução exata f(e) e a solução aproximada f(a) da equação que descreve um problema considerado. Ou seja, quando este resíduo tende a zero aproxima-se da solução exata. Este resíduo deve satisfazer uma determinada condição que o obriga a tender a zero. No caso do método de Galerkin, aplicado aos elementos finitos, esta condição consiste em escrever Q equações tais que

$$\int_V W_q R dV = 0 \quad (3.5)$$

sendo que $1 \leq q \leq Q$ e W_q são funções de ponderação (ou peso) definidas para as Q incógnitas do domínio V .

Assim, para o problema considerado, o método de Galerkin consiste em aplicar na equação da onda o produto escalar por uma função peso $W_q R$, e integrar a mesma em todo o volume V do domínio

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \epsilon \dot{E} \dot{W}_q dV + \int_V \sigma E \dot{W}_q dV + \int_V \frac{1}{\mu} (\nabla \times \nabla \times \dot{E}) \dot{W}_q dV dt = - \int_V \dot{J} \cdot \dot{W}_q dV \quad (3.6)$$

Em seguida, com algum esforço em manipulação matemática [3], aplicando-se teoremas e propriedades da álgebra vetorial, é possível transformar a equação da onda numa forma mais apropriada para a análise:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_V \epsilon \dot{E} \dot{W}_q dV + \int_V \sigma \dot{E} \dot{W}_q dV + \oint_S \sigma_s (\hat{n} \times \dot{W}_q) \cdot (\hat{n} \times \dot{E}) dS + \\ & + \int_V \frac{1}{\mu} (\nabla \times \dot{E}) \cdot (\nabla \times \dot{W}_q) dV dt = - \int_V \dot{J} \dot{W}_q dV \end{aligned} \quad (3.7)$$

No método FETD, o campo elétrico \dot{E} é expandido em termos de funções de base \dot{W}_p , como

$$\dot{E} = - \sum_p v_p \dot{W}_p \quad (3.8)$$

para p assumindo valores inteiros entre 1 e Q , sendo que v_p são os coeficientes numéricos a determinar.

O método de Galerkin se caracteriza pelo fato de que as funções de base \dot{W}_p aplicadas, que servem para aproximar matematicamente os campos, são iguais às funções de peso \dot{W}_p utilizadas.

Aplicando-se as expansões em termos das funções de base à equação 3.7,

tem-se finalmente o sistema de equações

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \sum_p v_p \int_V \epsilon \vec{W}_p \cdot \vec{W}_q dV + \sum_p v_p \int_V \sigma \vec{W}_p \cdot \vec{W}_q dV + \sum_p v_p \oint_S \sigma_s (\hat{n} \times \vec{W}_p) \cdot (\hat{n} \times \vec{W}_q) dS + \\ & + \int \sum_p v_p \int_V \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{W}_p) \cdot (\nabla \times \vec{W}_q) dV dt = - \int_V \vec{J} \cdot \vec{W}_p dV \end{aligned} \quad (3.9)$$

que pode ser associado a uma forma matricial da equação da onda

$$\frac{d}{dt} [C][v] + [G][v] + \int_0^t [K][v] dt = [i] \quad (3.10)$$

Nesta equação, as matrizes [C], [G] e [K] podem ser identificadas como matriz de capacitâncias, matriz de condutâncias e matriz de relutâncias magnéticas.

A matriz de capacitâncias [C] é obtida através de um cálculo aproximado, onde seus valores são obtidos através de:

$$C_{p,q} = \int_V \epsilon \vec{W}_p \cdot \vec{W}_q dV \quad (3.11)$$

De maneira semelhante obtém-se a matriz de condutâncias [G], onde os elementos valem

$$G_{p,q} = \int_V \sigma \vec{W}_p \cdot \vec{W}_q dV + \oint_S \sigma_s (\hat{n} \times \vec{W}_p) \cdot (\hat{n} \times \vec{W}_q) dS \quad (3.13)$$

E a matriz de relutâncias magnéticas [K], com

$$K_{p,q} = \int_V \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{W}_p) \cdot (\nabla \times \vec{W}_q) dV \quad (3.15)$$

Como se observa, as matrizes [C], [G] e [K] envolvem as informações constitutivas dos materiais (ϵ , σ , μ) e as informações geométricas dos elementos, já que as funções de base \vec{W}_p são funções que descrevem a geometria dos elementos, associadas a nós, arestas ou faces dos mesmos.

Se as funções de base aplicadas na expansão do campo elétrico são elementos de aresta de Whitney [3] - as funções mais utilizadas no método FETD, os coeficientes associados v_p têm um significado físico bem determinado: são as diferenças de potencial entre os nós dos tetraedros.

Assim, fica evidente que, se forem determinados a geometria e os materiais da estrutura simulada, as matrizes [C], [G] e [K] podem ser calculadas, e conhecendo-se a excitação da onda, aplicada na forma de um pulso de corrente [i], o problema numérico passa a ser determinar as diferenças de potencial [v] nas arestas dos elementos.

3.3. O MÉTODO DE NEWMARK

Em contraste com as análises feitas no domínio da frequência, os cálculos no domínio do tempo permitem que a resposta transitória e as respostas em uma banda de frequência sejam obtidas em apenas uma simulação.

Para a segmentação temporal é aplicado o método de Newmark. A utilização deste método no cálculo por elementos finitos dispensa a necessidade de pós-processamento devido ao fato da resposta já ser obtida no tempo, algo muito desejado em problemas envolvendo eletricidade. Neste método, a primeira providência consiste em fazer uma mudança de variável na equação da onda na forma matricial (equação 3.10), tal que

$$[w] = \int v dt \quad (3.17)$$

de maneira que a equação fica

$$\frac{d^2}{dt^2} [C][w] + \frac{d}{dt} [G][w] + [K][w] = [i] \quad (3.18)$$

Como [C], [G] e [K] são invariáveis no tempo, é possível solucionar a equação diferencial expandindo a variável considerada em uma série de Taylor, na vizinhança do tempo $t = n\Delta t$ considerado, (sendo n o número de amostras no tempo, e Δt o passo no tempo, como ilustrado na Figura 2), como

$$[w]_t = [w]_{t=n\Delta t} + \left[\frac{dw}{dt} \right]_{t=n\Delta t} (t - n\Delta t) + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2w}{dt^2} \right]_{t=n\Delta t} (t - n\Delta t)^2 + \dots \quad (3.19)$$

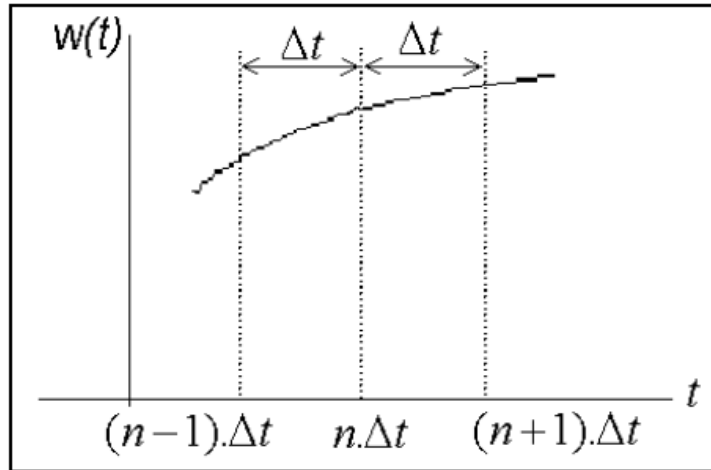


Figura 2 - Uma variável w em função do tempo

Considerando-se um instante posterior $(n+1)\Delta t$ e um instante anterior $(n-1)\Delta t$ a $t = n\Delta t$, numa aproximação de segunda ordem, tem-se que

$$[w]_{t=(n+1)\Delta t} \cong [w]_{t=n\Delta t} + \left[\frac{dw}{dt} \right]_{t=n\Delta t} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2w}{dt^2} \right]_{t=n\Delta t} \cdot \Delta t^2 \quad (3.20)$$

$$[w]_{t=(n-1)\Delta t} \cong [w]_{t=n\Delta t} - \left[\frac{dw}{dt} \right]_{t=n\Delta t} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2w}{dt^2} \right]_{t=n\Delta t} \cdot \Delta t^2 \quad (3.21)$$

Subtraindo-se e somando-se as equações (3.20) e (3.21), têm-se (3.22) e (3.23), respectivamente,

$$\left[\frac{dw}{dt} \right]_{t=n\Delta t} \cong \frac{[w]_{t=(n+1)\Delta t} - [w]_{t=(n-1)\Delta t}}{2 \cdot \Delta t} \quad (3.22)$$

$$\left[\frac{d^2w}{dt^2} \right]_{t=n\Delta t} \cong \frac{[w]_{t=(n+1)\Delta t} - 2 \cdot [w]_{t=n\Delta t} + [w]_{t=(n-1)\Delta t}}{\Delta t^2} \quad (3.23)$$

Para simplificar a notação, estas equações podem ser reescritas como

$$\left[\frac{dw}{dt} \right]_n \cong \frac{[w]_{n+1} - [w]_{n-1}}{2 \cdot \Delta t} \quad (3.24)$$

$$\left[\frac{d^2w}{dt^2} \right]_n \cong \frac{[w]_{n+1} - 2 \cdot [w]_n + [w]_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (3.25)$$

Substituindo-se em (3.10) com a mudança de variável obtém-se

$$[C] \frac{[w]_{n+1} - 2[w]_n + [w]_{n-1}}{\Delta t^2} + [G] \frac{[w]_{n+1} - [w]_{n-1}}{2\Delta t} + [K][w]_n = [i]_n \quad (3.26)$$

Estabelecendo-se que $[i]_n = 0$, $[w]_n = 0$ e $[w]_{n-1} = 0$, para $n < 1$, calcula-se $[w]$, resolvendo-se o sistema de equações lineares. A desvantagem neste método é que o problema se torna instável na medida em que se ultrapassa um valor limite para o passo de tempo Δt . Para que o método seja incondicionalmente estável, deve-se aplicar uma média ponderada sobre o termo $[w]_n$ associado à matriz $[K]$ na equação (3.26). Isto é,

$$[C] \frac{[w]_{n+1} - 2[w]_n + [w]_{n-1}}{\Delta t^2} + [G] \frac{[w]_{n+1} - [w]_{n-1}}{2\Delta t} + [K] \left\{ \frac{[w]_{n+1} + 2[w]_n + [w]_{n-1}}{4} \right\} = [i]_n \quad (3.27)$$

Com esta modificação, o método passa a ser incondicionalmente estável, porém, em baixas frequências ele apresenta respostas espúrias. Em [4] é apresentada uma técnica que elimina este problema, onde são feitas as seguintes mudanças de variáveis:

$$[v]_{n-\frac{1}{2}} = \frac{[w]_{n+1} - [w]_n}{\Delta t} \cong \left[\frac{dw}{dt} \right]_{n-\frac{1}{2}} \quad (3.28)$$

$$[u]_n = \frac{[v]_{n+\frac{1}{2}} - [v]_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \cong \left[\frac{dv}{dt} \right]_n \quad (3.29)$$

De modo que, ainda com a média ponderada do método de Newmark, a equação da onda fica

$$[C][u]_n + [G] \frac{[v]_{n+\frac{1}{2}} + [v]_{n-\frac{1}{2}}}{2} + [K] \frac{[w]_{n+1} + 2[w]_n + [w]_{n-1}}{4} = [i]_n \quad (3.30)$$

e pode ser expressa pelo conjunto de equações recursivas

$$\left([C] + \frac{\Delta t}{2} [G] + \frac{\Delta t^2}{4} [K] \right) [u]_n = [i]_n - [G][v]_{n-1/2} - [K][w]_n \quad (3.31)$$

$$[v]_{n+1/2} = [v]_{n-1/2} + \Delta t [u]_n \quad (3.32)$$

$$[w]_{n+1} = [w]_n + \Delta t [v]_{n+1/2} \quad (3.33)$$

$$[v]_{n-1/2} = 0, [w]_n = 0, [i]_n = 0, \text{ para } n < 1$$

E assim, a partir dos valores conhecidos de $[v]_{n-1/2}$, $[w]_n$ e $[i]_n$, calcula-se $[u]_n$ resolvendo assim o sistema de equações lineares. Para maiores detalhes, é recomendado o artigo [4] e seus correlatos.

3.4. FETD MODIFICADO

Considerando que quando um campo elétrico começa a ionizar o ar próximo, está ocorrendo a formação de um plasma de baixa intensidade, verifica-se que o uso destas equações está de acordo com o problema em questão, necessitando somente dos devidos ajustes. A formulação proposta é baseada na equação do movimento de um plasma não magnetizado em conexão com as equações do método FETD.

3.4.1. FORMULAÇÃO

A equação da onda eletromagnética (equação de Helmholtz) pode ser reescrita se adicionada a ela um termo que descreve uma corrente elétrica fluindo por um plasma em estado permanente.

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \epsilon_r \overset{\vee}{E} + \int \frac{\nabla \times \nabla \times \overset{\vee}{E}}{\mu_0} dt = -\overset{\vee}{J}_p - \overset{\vee}{J} \quad (3.34)$$

Onde

$\overset{\vee}{J}$ é a densidade de corrente de excitação;

$\overset{\vee}{J}_p$ é a densidade de corrente de polarização do plasma;

ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo;

ϵ_r é a permissividade elétrica relativa do meio;

μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo;

μ_r é a permeabilidade magnética relativa do meio;

O termo J_p^{ν} não-linear é o termo que pode viabilizar a simulação de efeitos eletromagnéticos não-lineares como as descargas elétricas. É através dele que se pretende modificar o método FETD para viabilizar este tipo de simulação.

Para um plasma em regime permanente [5], J_p^{ν} é definida através da equação diferencial

$$\frac{\partial J_p^{\rho}}{\partial t} + \varepsilon_0 \omega_p^2 (\rho J_p^{\rho} - E) = 0 \quad (3.35)$$

onde

ω_p é a frequência do plasma

ν é a frequência de colisão iônica

A equação (3.35) estabelece uma relação entre a corrente de polarização e o campo elétrico em termos da frequência de plasma ω_p e de sua resistividade $\rho = \nu / \varepsilon_0 \omega_p^2$, a qual por sua vez é função da frequência de colisão eletrônica ν .

É possível reescrever agora (3.34) com a substituição da equação do plasma integrada no tempo, obtendo assim a equação da onda eletromagnética com influência de uma corrente de plasma interagindo com os campos elétricos.

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_r \varepsilon_0 \bar{E} + \int \left(\frac{\nabla \times \nabla \times \bar{E}^{\nu}}{\mu} + \varepsilon_0 \omega_p^2 \bar{E} \right) dt = -\bar{J} + \int \varepsilon_0 \omega_p^2 \rho J_p^{\rho} dt \quad (3.36)$$

Para simular a descarga elétrica, o comportamento não-linear deve ser incorporado. Se a resistividade do plasma for muito alta, isto pode representar um gás não-ionizado com $J_p^{\nu} \rightarrow 0$, caso contrário, isto representará o processo de ionização de um gás conforme J_p^{ν} aumenta.

A tangente hiperbólica é uma função apropriada para a implementação de uma transição suave entre dois estados conforme mostrado na Figura 3. Através desta função, é possível conseguir a variação de um patamar de amplitude a outro de forma suave e previsível.

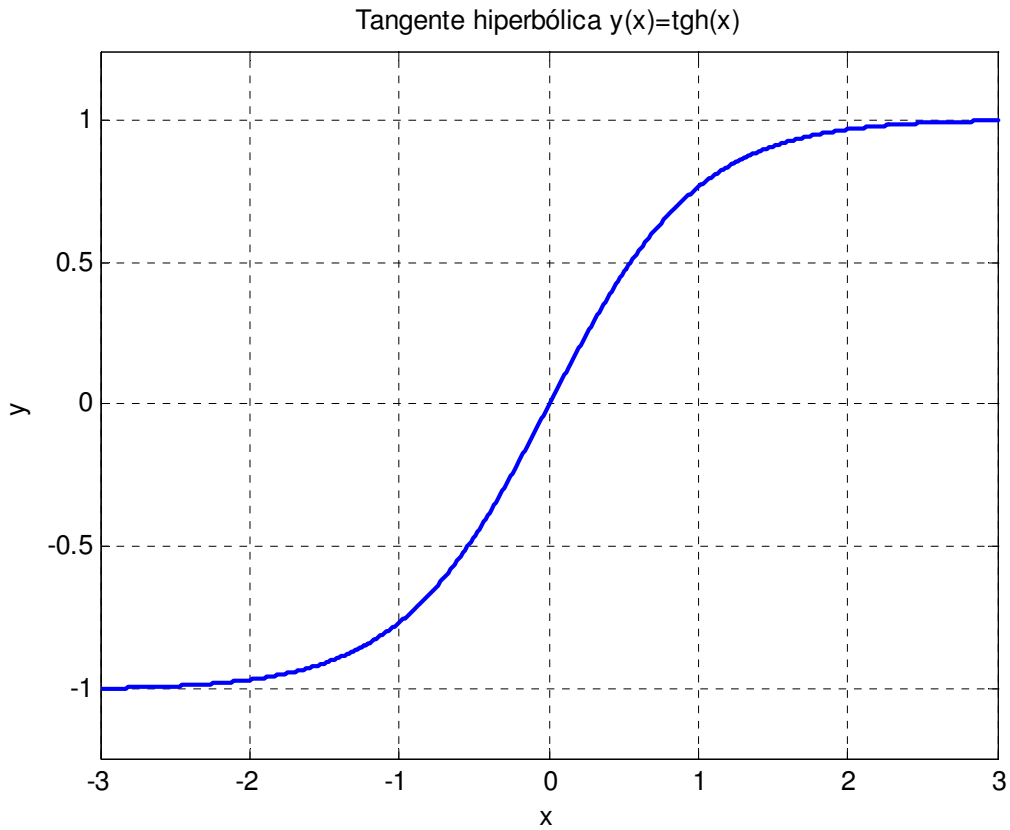


Figura 3 - Comprtamento da função tangente hiperbólica.

$$\rho = \frac{\rho_{\min} + \rho_{\max}}{2} + \frac{\rho_{\min} - \rho_{\max}}{2} \tanh \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{|J_p|}{J_t} - 1 \right) \right] \quad (3.37)$$

Onde:

ρ_{\max} é a resistividade do ar não ionizado;

ρ_{\min} é a resistividade do ar ionizado;

J_t é a densidade de corrente que ajusta o ponto de transição

O comportamento desta resistividade é apresentado com maiores detalhes no capítulo 4.

3.4.2. ELEMENTOS FINITOS

A discretização espacial da equação de onda vetorial segue a expansão convencional do campo elétrico dentro de um elemento finito como

$$\vec{E} = -\sum_j v_j \vec{W}_j \quad (3.38)$$

Onde \vec{W}_j são funções de base vetoriais de Whitney [3] associadas com as arestas dos elementos, e os escalares v_j dependentes do tempo são tensões ao longo das arestas correspondentes. A aplicação do método de Galerkin possibilita transformar (3.36) na equação de circuitos elétricos na forma matricial (3.39)

$$C \frac{d}{dt} v + (K + Q) \int v dt = i_e + i_p + Q \int v dt \quad (3.39)$$

Onde v e i_e são vetores coluna os quais contêm tensões desconhecidas e correntes de excitação conhecidas nas arestas dos elementos, C , K e Q são matrizes quadradas simétricas cujas entradas são dadas por

$$C_{jk} = \int_V \epsilon_r \epsilon_0 \vec{W}_j \cdot \vec{W}_k dV \quad (3.40)$$

$$K_{jk} = \int_V \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{W}_j \cdot \nabla \times \vec{W}_k + \epsilon_0 \omega_p^2 \vec{W}_j \cdot \vec{W}_k \right) dV \quad (3.41)$$

$$Q_{jk} = \int_V \epsilon_0 \omega_p^2 \vec{W}_j \cdot \vec{W}_k dV \quad (3.42)$$

e i_p é um vetor coluna com

$$i_{pk} = \int_V \vec{J}_p \cdot \vec{W}_k dV \quad (3.43)$$

sendo V o volume do elemento. A equação global da onda é alcançada pela realização da superposição das entradas de C , K , Q e i_p quando todas as arestas são endereçadas sob um procedimento global de enumeração.

3.4.3. PASSO NO TEMPO LINEAR

A equação global da onda é alcançada fazendo a superposição dos valores de C , K e i_p quando todas as arestas são endereçadas através de um procedimento de enumeração global. A discretização no tempo é baseada na técnica β -Newmark com $\beta=1/4$. Seguindo o procedimento descrito em [4], a equação (3.39) pode ser aproximada pelo conjunto de equações recursivas

$$\left[C + \frac{\Delta t^2}{4} (K + Q) \right] u^n = i_e^n + i_p^n - Kw^n \quad (3.44)$$

$$v^{n+1/2} = v^{n-1/2} + \Delta t u^n \quad (3.45)$$

$$w^{n+1} = w^n + \Delta t v^{n+1/2} \quad (3.46)$$

Onde Δt é o passo no tempo e o índice n representa o instante de tempo $n\Delta t$. O sistema de equações lineares (3.43) pode ser solucionada eficientemente pelo método dos gradientes conjugados com condicionamento diagonal [4]. As tensões desejadas nas arestas dos elementos são atualizadas em (3.44). As atualizações de $i_p^{n+1/2}$, entretanto, dependem da solução da equação diferencial não-linear (3.35).

3.4.4. PASSO NO TEMPO NÃO-LINEAR

A formulação supracitada possibilita que a equação diferencial vetorial não-linear do plasma seja resolvida separadamente para cada elemento da discretização espacial onde o campo elétrico e a corrente de polarização possam ser considerados constantes dentro de cada elemento, mas dependentes do tempo. Por simplicidade, apenas duas componentes vetoriais serão consideradas, devido à simetria axial existente. A discretização temporal de (3.35) é conduzida pela integração trapezoidal resultando em

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_m = \frac{1}{\epsilon_0 \omega_p^2 \Delta t} \left(\begin{bmatrix} J_{px} \\ J_{py} \end{bmatrix}_m^{n+1} - \begin{bmatrix} J_{px} \\ J_{py} \end{bmatrix}_m^n \right) + \frac{\rho_m^{n+1}}{2} \begin{bmatrix} J_{px} \\ J_{py} \end{bmatrix}_m^{n+1} + \frac{\rho_m^n}{2} \begin{bmatrix} J_{px} \\ J_{py} \end{bmatrix}_m^n - \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}_m^{n+1/2} \quad (3.47)$$

Um processo iterativo representado pelo índice m deve ser aplicado a (3.47) para encontrar os novos valores de J_{px} e J_{py} que minimize os resíduos X e Y . Seguindo [2], o método de Newton-Raphson é dado por

$$\begin{bmatrix} J_{px} \\ J_{py} \end{bmatrix}_{m+1}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} J_{px} \\ J_{py} \end{bmatrix}_{m+1}^{n+1/2} - \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial J_{px}} & \frac{\partial X}{\partial J_{py}} \\ \frac{\partial Y}{\partial J_{px}} & \frac{\partial Y}{\partial J_{py}} \end{bmatrix}_m^{-1} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_m \quad (3.48)$$

e é empregado tomando

$$\begin{bmatrix} J_{px} \\ J_{py} \end{bmatrix}_1^{n+1} = \begin{bmatrix} J_{px} \\ J_{py} \end{bmatrix}^n \quad (3.49)$$

como uma consideração inicial para a primeira iteração. Este processo iterativo tem de ser repetido a cada novo passo no tempo. As derivadas dos resíduos levam em conta apenas os novos valores de J_{px} e J_{py} como

$$\left[\frac{\partial X}{\partial J_{px}} \right]_m = \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{2} \left(\rho + J_{px} \frac{\partial \rho}{\partial J_{px}} \right) \right]_m^{n+1} \quad (3.50)$$

$$\left[\frac{\partial X}{\partial J_{py}} \right]_m = \left[\frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{2} J_{px} \frac{\partial \rho}{\partial J_{py}} \right]_m^{n+1} \quad (3.51)$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial J_{px}} \right]_m = \left[\frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{2} J_{py} \frac{\partial \rho}{\partial J_{px}} \right]_m^{n+1} \quad (3.52)$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial J_{py}} \right]_m = \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{2} \left(\rho + J_{py} \frac{\partial \rho}{\partial J_{py}} \right) \right]_m^{n+1} \quad (3.53)$$

A equação (3.38) é usada para avaliar $E^{n+1/2}$ no baricentro de cada elemento e o cálculo no passo do tempo é completado utilizando (3.42) para computar i_p^{n+1} necessário em (3.46).

4. MODELAGEM COMPUTACIONAL

4.1. MODELO GEOMÉTRICO

O *spark gap* utilizado pode ser representado conforme a

Figura 4. Duas placas circulares paralelas entre si, sendo que uma das placas possui um pino central que faz o papel de eletrodo de descarga. Capacitores são conectados entre ambas as placas para aumento da energia armazenada e conseqüente aumento da corrente de descarga. As principais dimensões das partes constituintes encontram-se na Figura 5.

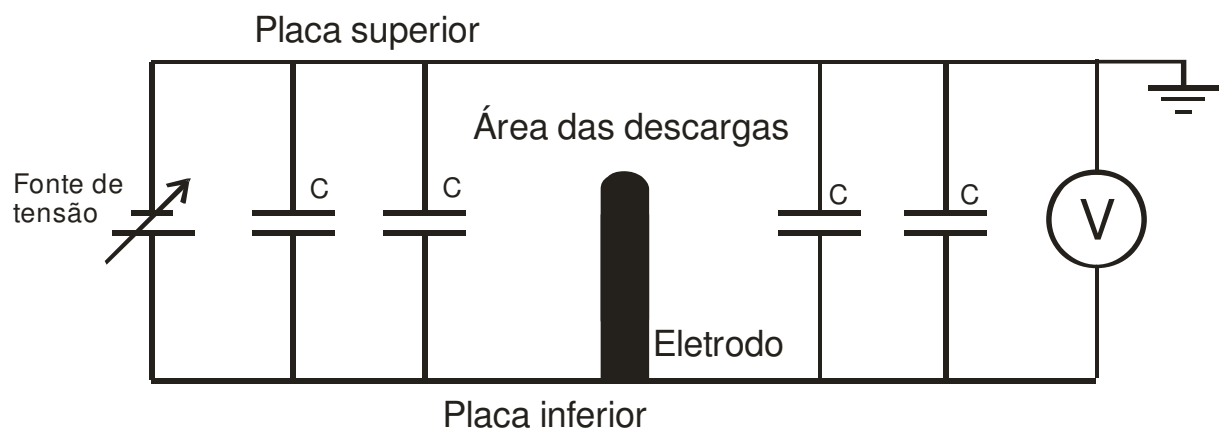


Figura 4 - Diagrama simplificado do dispositivo real.

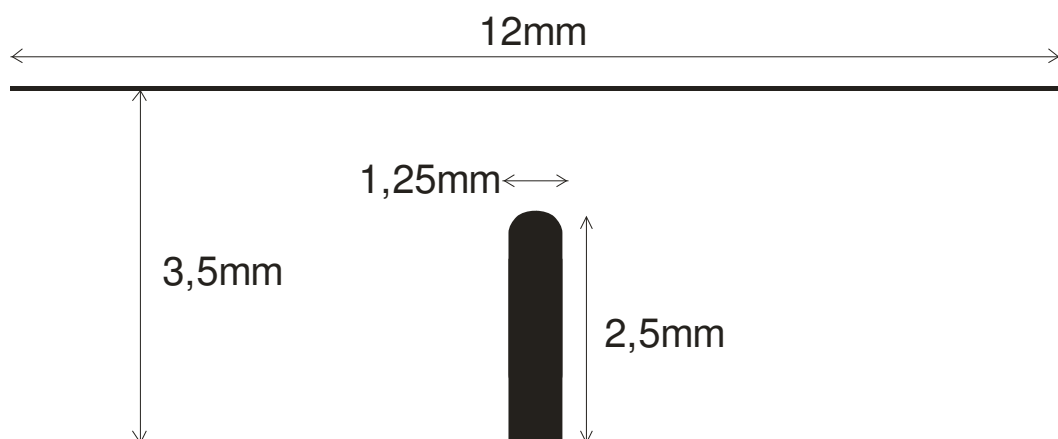


Figura 5 – Seção transversal com as dimensões do dispositivo.

O funcionamento do dispositivo é simples e pode ser explicado resumidamente da seguinte forma: uma tensão é aplicada entre as placas e é

aumentada gradativamente, o campo elétrico vai tornando-se mais intenso e se acumulando no eletrodo até atingir o ponto de ruptura do dielétrico, no caso o ar. A descarga, de forma de onda bem definida, é medida e registrada por um osciloscópio digital.

O modelo computacional é um pouco mais simples do que o dispositivo real, já que não possui capacitores conectados entre as placas, porém, o efeito capacitivo é ajustado diretamente nas características do dielétrico aplicado entre as placas, compensando assim a falta destes componentes.

Como há simetria axial no modelo, é possível utilizar somente o perfil transversal, conforme mostrado na Figura 6, pois os valores de campo elétrico são simétricos no sentido de rotação da estrutura. Esta prática de simplificação do modelo através de suas simetrias é amplamente utilizada em simulações computacionais devido à grande redução de memória e esforço computacional.



Figura 6 - Meio plano transversal do modelo geométrico

4.2. CIRCUITO ELÉTRICO EQUIVALENTE

Através da resposta em tensão medida no dispositivo real, pode-se observar uma característica senoidal exponencialmente amortecida, conforme mostra a Figura 7, o que significa que o dispositivo pode ser representado por um circuito RLC série ressonante, mostrado na Figura 8.

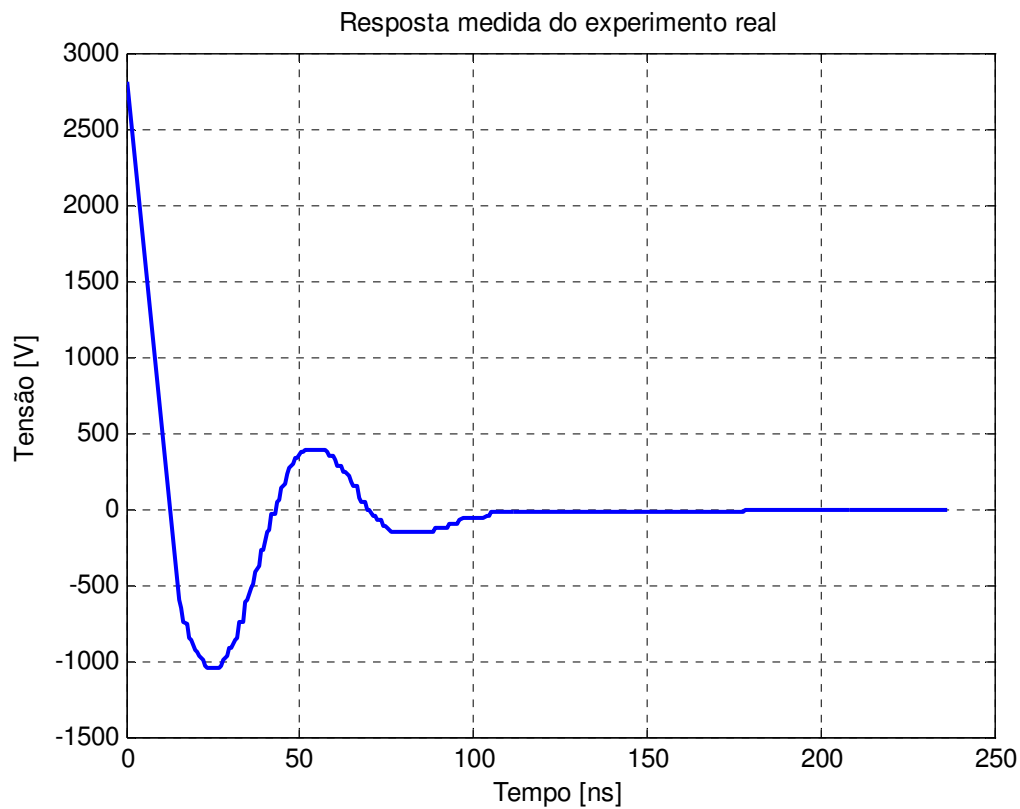


Figura 7 - Dados medidos durante o experimento real.

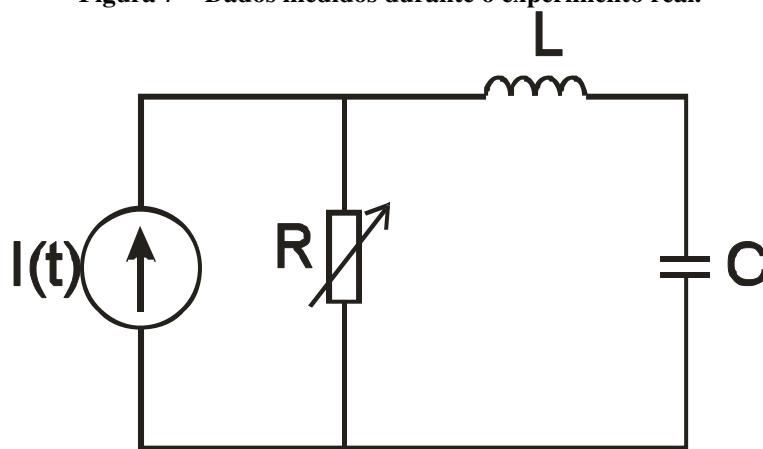


Figura 8 - Circuito RLC série equivalente do dispositivo.

Este circuito possui uma resposta muito semelhante à do dispositivo e pode ser calculada através da teoria de circuitos elétricos, conforme as equações (4.1) e (4.2).

$$i(t) = \frac{v(0)/L}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} e^{-tR/2L} \cdot \text{sen} \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \cdot t \right) \quad (4.1)$$

$$v(t) = v(0) - \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (4.2)$$

Onde:

$v(0)$ é a tensão inicial do capacitor;

R é a resistência equivalente do sistema em [Ω];

L é a indutância em [H];

C é a capacitância em [F];

i é a corrente de excitação em [A];

t é o tempo em [s].

Calculando-se a integral e com algum esforço de manipulação matemática, chega-se a:

$$v(t) = v(0) - \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{v(0)/L}{n} \right) \left[\frac{e^{at}}{a^2 + n^2} \cdot (a \cdot \text{sen}(n \cdot t) - n \cdot \text{cos}(n \cdot t)) \right] \quad (4.3)$$

Onde:

$$n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2} \quad (4.4)$$

$$a = \left(-\frac{R}{2L} \right) \quad (4.5)$$

Na Figura 9 está a resposta calculada através de (4.3). Neste cálculo foram utilizados os valores $R=1,5732 \Omega$ e $L=17,567 \text{ nH}$ obtidos através de regressão por matriz pencil tomando-se como conhecida capacitância $C=4 \text{ nF}$ do dispositivo real numa escala de tempo do instante 0 até 200 ns. É possível verificar a validade da curva calculada pela proximidade com a curva real.

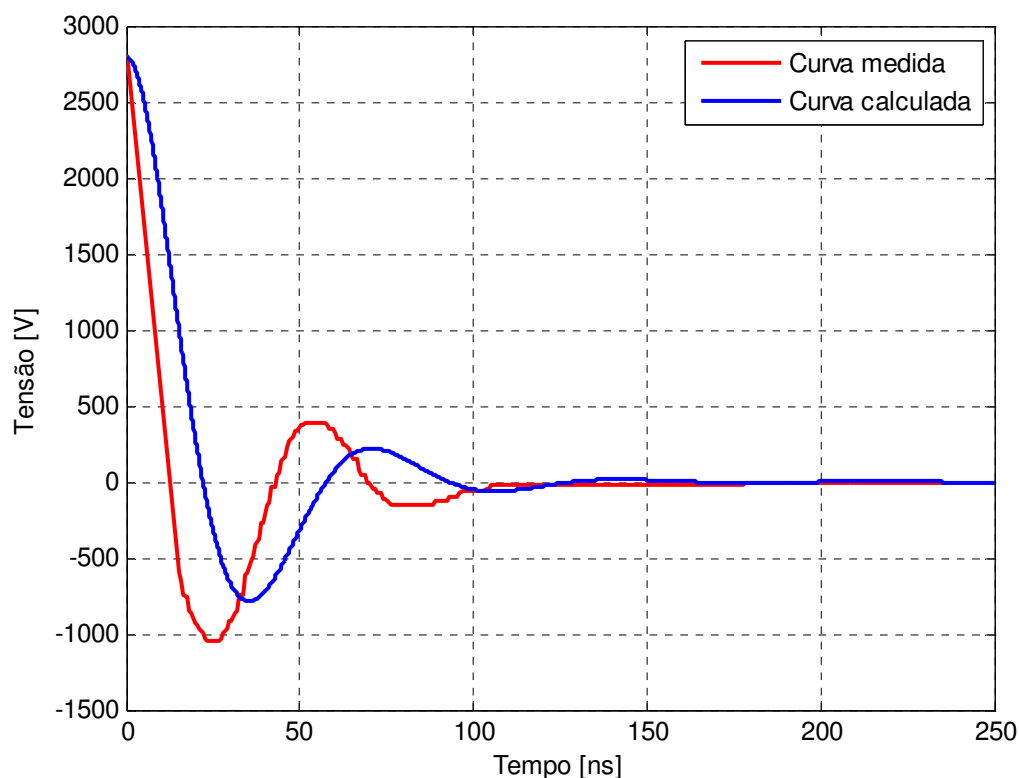


Figura 9 - Resposta calculada do circuito com os parâmetros medidos

O valor de capacitância do *spark gap* real é previamente conhecido porém há uma certa dúvida quanto à sua exatidão devido aos equipamentos utilizados para sua medição. Este valor oscila entre 4 e 4,5 nF, e para evitar dúvidas nos resultados, os procedimentos de simulação foram realizados com os dois valores para uma posterior comparação dos resultados. Maiores detalhes são apresentados no Capítulo 5.

4.3. MODELO SIMPLIFICADO UTILIZANDO FETD

4.3.1. CONDUTIVIDADE NÃO-LINEAR ESCALAR

Neste primeiro momento, foi tentada a inserção de um modelo com condutividade variável não linear no método FETD, conforme a Figura 10. Em teoria, a variação da condutividade do material ar, que está diretamente relacionada com a resistência equivalente do conjunto, poderia aproximar a curva de tensão medida durante a simulação, o que significaria uma aproximação macroscópica do efeito de

ionização e descarga. Algo muito semelhante ocorre no fenômeno real se observado macroscopicamente. Se um campo elétrico tem sua intensidade aumentada gradativamente, praticamente nada ocorre até um primeiro limiar, a partir deste limiar o ar começa a ionizar e descargas parciais se iniciam, como se a condutividade do ar estivesse aumentando e permitindo a fuga de corrente, se o campo continua aumentando e alcança um segundo limiar, a ruptura do dielétrico ocorre como se ele se transformasse em um condutor, ou seja, sua condutividade teria aumentado significativamente.

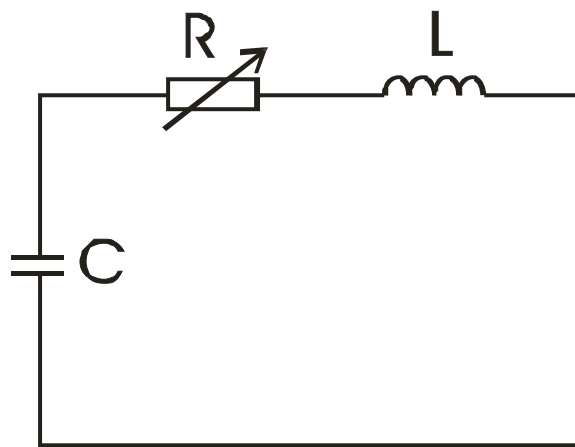


Figura 10 - Circuito RLC série com resistência variável

A curva de condutividade utilizada para esta aproximação é uma composição de tangentes hiperbólicas, descrita como:

$$\sigma(E) = \sigma_p \left\{ 1 + \operatorname{tgh} \left[\frac{(E - E_2)}{(E_1 - E_2)} (E - E_1 - \pi) + \frac{(E - E_1)}{(E_2 - E_1)} (E - E_2 - \pi) \right] \right\} \quad (4.6)$$

Onde:

$\sigma(E)$ é a condutividade do ar em função do campo elétrico;

σ_p é o máximo valor de condutividade que pode ser alcançado, equivalente a uma condutividade de ruptura do dielétrico;

E é o campo elétrico calculado no tempo e no espaço;

E_1 é o limiar de ionização do dielétrico

E_2 é o limiar de ruptura do dielétrico

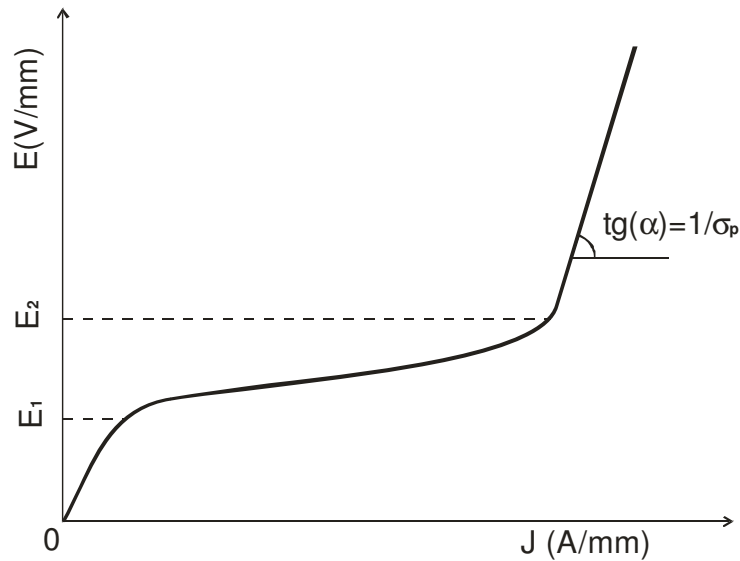


Figura 11 - Condutividade escalar em função do campo elétrico.

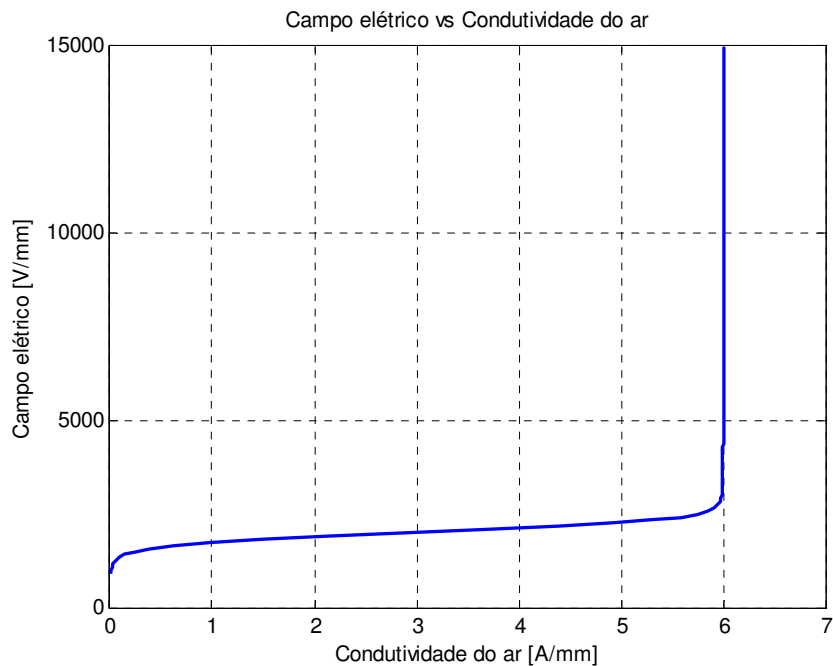


Figura 12 - Comportamento desejado da condutividade com a variação do campo elétrico.

O gráfico presente nas Figura 11 e Figura 12 descrevem o comportamento desejado da condutividade do ar com relação ao campo elétrico aplicado, sendo que o primeiro tem caráter ilustrativo. No segundo gráfico foram utilizados os valores de $E_1 = 1\text{ kV/mm}$, $E_2 = 3\text{ kV/mm}$ e $\sigma_p = 6\text{ S/mm}$. Conforme o campo elétrico vai aumentando, a condutividade do ar aumenta até um primeiro limiar E_1 , onde deveria ter início a ionização do ar e as descargas parciais. A partir do momento em que o campo passa o segundo limiar E_2 , a descarga total ocorre.

Esta técnica, apesar de surgir de um embasamento teórico palpável, não apresentou resultados satisfatórios. O principal motivo disto foi a falta de convergência do método para o efeito não-linear de variações de condutividade e de campos elétricos.

Foram realizadas várias simulações com variação dos parâmetros como passo no tempo, limites de campo elétrico, condutividade e intensidade da fonte de excitação, e um dos principais efeitos constatados foi a instabilidade do cálculo. Uma pequena variação nestes parâmetros ocasionava uma mudança drástica dos resultados, mudanças estas que iam desde um ruído em alta frequência sobre a curva simulada a até resultados sem nexos, como tensões da ordem de 10^{12} volts. Este conjunto de resultados instáveis invalidou este método de cálculo.

4.3.2. RESISTIVIDADE NÃO-LINEAR COM INCLINAÇÃO NEGATIVA

Conforme já citado, os vários artigos publicados sobre este assunto abordam o efeito das descargas elétricas desprezando suas não-linearidades, e simulando as descargas de forma simplória ou considerando um ambiente extremamente simplificado e previsível. Uma grande quantidade de trabalhos se baseiam em métodos empíricos de cálculo pois objetivam resultados práticos e imediatos, como estimativa das perdas ocasionadas por efeito corona em linhas de transmissão em alta tensão, ou rádio-interferência gerada pelas mesmas. Estes métodos em muitos casos se aproximam relativamente bem da realidade, porém não são métodos aprofundados nem com um nível elevado de detalhamento e sofisticação técnica, apesar de serem satisfatórios em muitos casos práticos de engenharia.

Somente dois artigos publicados no início de 2006, possuíam uma formulação matemática voltada a cálculos envolvendo não-linearidades eletromagnéticas. No artigo [5], o método FDTD, em conjunto com uma formulação de física dos plasmas foi utilizado para simulação de ondas eletromagnéticas se propagando em meios dispersivos lineares, considerando o plasma ionizado em regime

permanente. No artigo [2], é discutido um método de cálculo de equações diferenciais vetoriais para ótica não-linear. A junção da abordagem matemática do segundo com a física dos plasmas apresentada no primeiro deu origem ao método FETD modificado utilizado aqui para cálculo de efeitos não lineares ocorridos durante o fenômeno de ionização do ar.

Considerando o vetor campo elétrico \vec{E}_p variando conforme o produto de uma resistividade ρ não-linear pela densidade de corrente \vec{J}_p , tem-se

$$\vec{E}_p = \rho \vec{J}_p \quad (4.7)$$

$$J_p = \sqrt{J_{px}^2 + J_{py}^2} \quad (4.8)$$

A resistividade não-linear é dependente da intensidade de J_p e é definida como

$$\rho = \frac{\rho_{\min} + \rho_{\max}}{2} + \frac{\rho_{\min} - \rho_{\max}}{2} \tanh \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{J_p}{J_m} - 1 \right) \right] \quad (4.9)$$

Onde:

ρ_{\max} é a resistividade do ar não ionizado

ρ_{\min} é a resistividade do ar ionizado

J_m é a densidade de corrente de transição

O comportamento da equação (4.7) é representado na Figura 13.

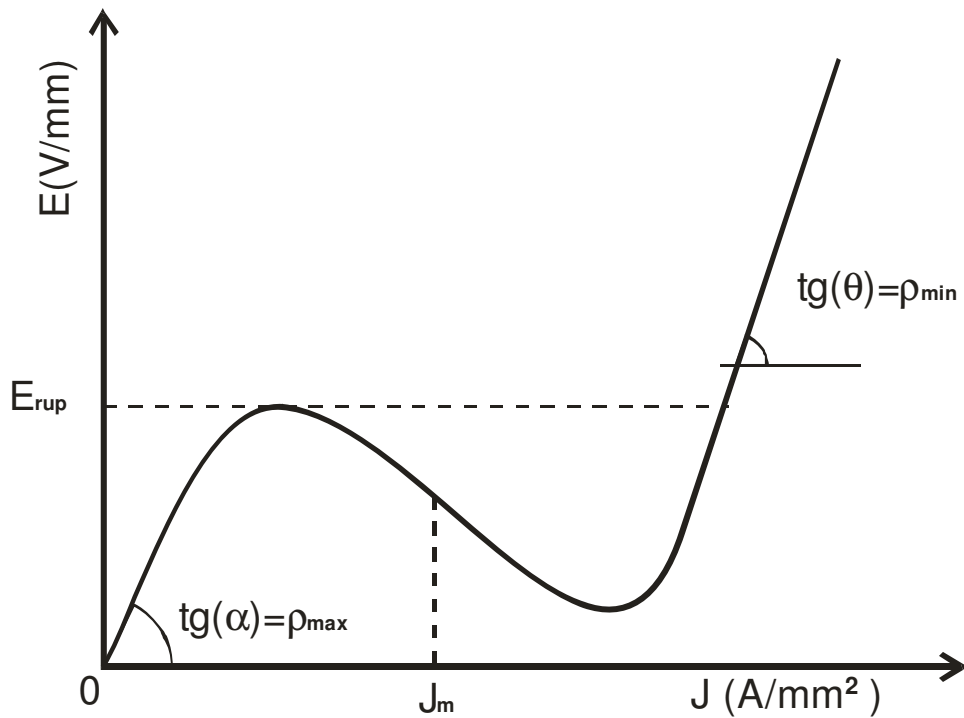


Figura 13 - Comportamento do campo elétrico em função da densidade de corrente

Na Figura 14 e na Figura 15 a equação foi calculada com alguns valores utilizados durante as simulações, ou seja, com $\rho_{\max} = 10^9 \Omega \cdot mm$, $\rho_{\min} = 6 \Omega \cdot mm$ e $j_m = 6 \cdot 10^{-6} A/mm^2$, porém estas curvas possuem caráter ilustrativo.

O E_{rup} , que é o primeiro limiar de campo elétrico para ocorrência de descargas parciais, pode ser calculado como sendo

$$E_{rup} \approx J_m \cdot \frac{(\rho_{min} + \rho_{max})}{2} \quad (4.10)$$

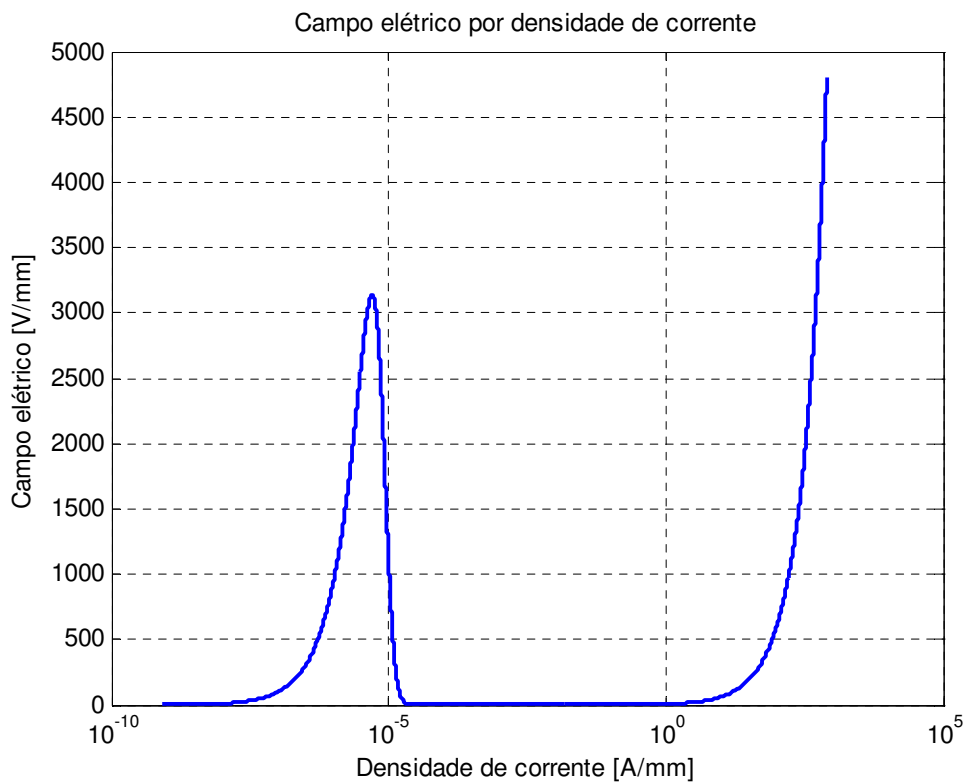


Figura 14 - Curva calculada com escala de campo linear.

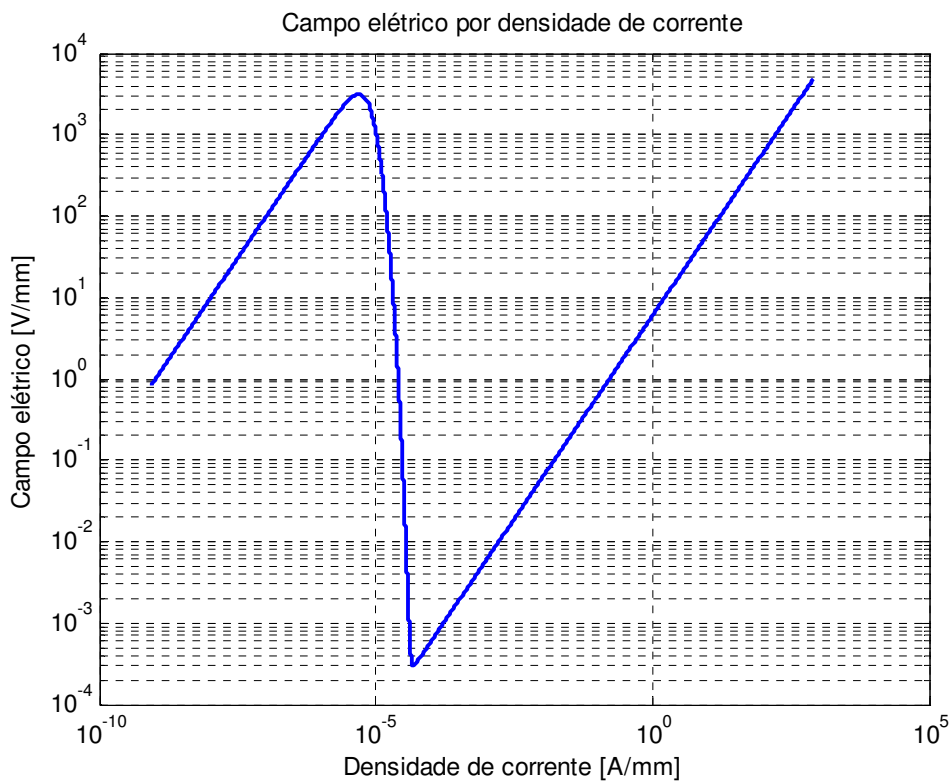


Figura 15 - Curva calculada com escalas logarítmicas

Esta curva de resistividade não-linear é que será utilizada nos cálculos com elementos finitos no domínio do tempo para simulação das descargas.

4.4. MODELO COMPLETO UTILIZANDO FETD

O modelo completo do dispositivo possui entre as placas um material dielétrico aplicado para ajuste de seus valores de capacitância, conforme a Figura 16.

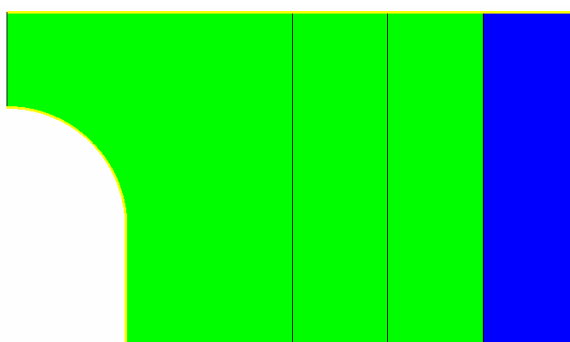


Figura 16 - Perfil simulado do modelo completo.

Este material aplicado faz as vezes dos capacitores conectados no *spark gap* real, tornando o modelo mais próximo da realidade com relação às suas características elétricas.

4.5. MATERIAIS E PARÂMETROS UTILIZADOS

As constantes físicas têm em seus valores a chave para o sucesso deste estudo e são os valores corretos de algumas que são buscados aqui. A tabela 1 relaciona as constantes físicas utilizadas nos materiais aplicados.

Tabela 1 - Propriedade dos materiais

	Ar	PEC	Dielétrico (4nF)	Dielétrico (4,5nF)
Permissividade relativa do meio (ϵ_x)	1	1	46000	51750
Permeabilidade relativa do meio (μ_x)	1	1	1	1
Condutividade volumétrica (σ_y) [S/mm]	0	0	0	0
Condutividade superficial [S] [S/mm]	0	10^{12}	0	0
Resistividade do ar não-ionizado	10^9	Não possui	Não possui	Não possui

Resistividade do ar ionizado	A descobrir	Não possui	Não possui	Não possui
Frequência do plasma [GHz]	A descobrir	Não possui	Não possui	Não possui
Densidade de corrente de transição [A/mm ²]	$6 \cdot 10^{-6}$	Não possui	Não possui	Não possui

Os parâmetros utilizados nas simulações são encontrados na tabela 2:

Tabela 2 - Parâmetros utilizados nas simulações

Tempo simulado com modelo simplificado	40 ns
Tempo simulado com modelo completo	150 ns
Duração do pulso de excitação com modelo simplificado	10 ns
Duração do pulso de excitação com modelo completo	30 ns
Amplitude do pulso de corrente para o modelo simplificado	0,1 A
Amplitude do pulso de corrente para o modelo completo (4 nF)	800 A
Amplitude do pulso de corrente para o modelo completo (4,5 nF)	900 A
Fator de estabilidade	1
Número de iterações do método do gradiente conjugado	8
Número de iterações da método de Newton-Raphson	3
Permissividade elétrica do espaço livre [nF/mm]	$8,854 \cdot 10^{-6}$
Permeabilidade magnética do espaço livre [nH/mm]	1,257
Número de linhas	157
Número de triângulos	1051
Número de nós	582

Existem métodos de simulação baseados em elementos finitos que se utilizam de cálculos no domínio da frequência, sendo assim necessário definir em qual harmônica que se deseja obter o resultado. Aqui, por se tratarem de simulações no domínio do tempo, e não da frequência, não há necessidade de especificar uma frequência de análise.

A Figura 17 mostra o pulso de excitação do modelo, utilizado durante as simulações no tempo. Trata-se de um pulso de corrente com 30 ns de duração, que tem por objetivo carregar as placas e ocasionar a descarga entre o eletrodo e a placa superior.

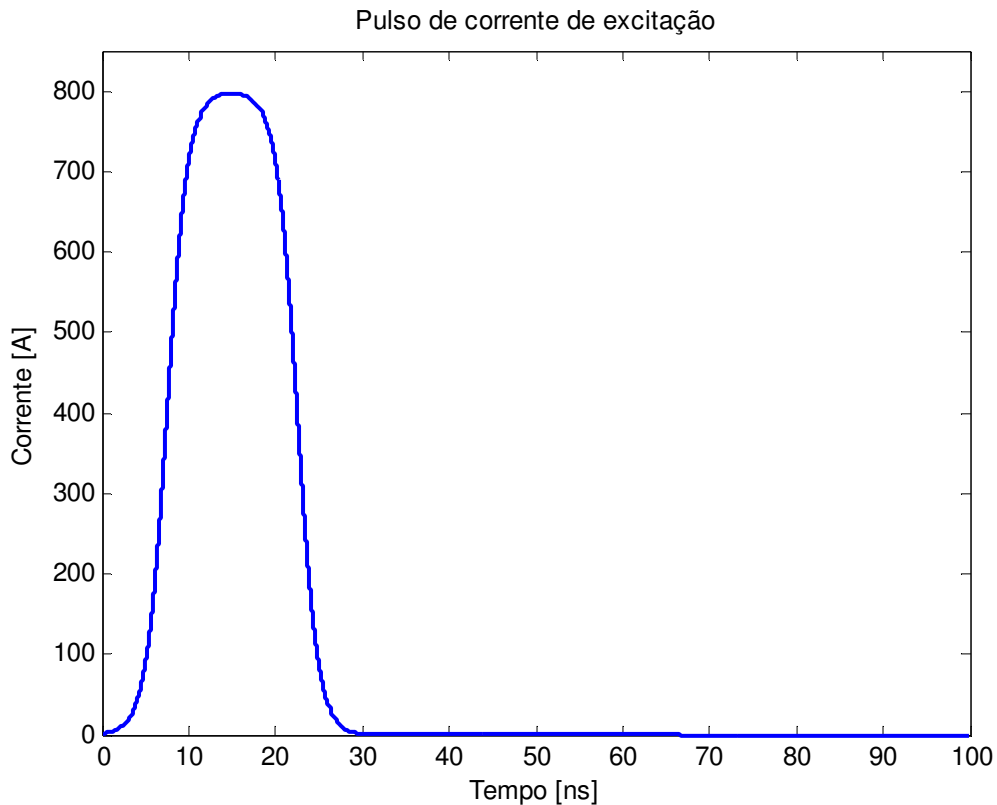


Figura 17 - Pulso de corrente utilizado como fonte de excitação.

4.6. DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL

No modelo computacional foram colocados sobre a mesma reta a fonte de excitação e a tensão a ser medida. Em outras palavras, o pulso de corrente será aplicado entre ambas as placas pela lateral direita enquanto a tensão é medida entre as mesmas. A Figura 18 mostra o segmento em questão.

Durante as simulações, o material PMC – Condutor Magnético Perfeito, é automaticamente considerado como condição de contorno nos limiares onde não existem outros materiais aplicados e há paralelismo com o campo elétrico, simulando assim uma simetria magnética, em que as componentes tangenciais do campo magnético e as componentes normais do campo elétrico são nulas.

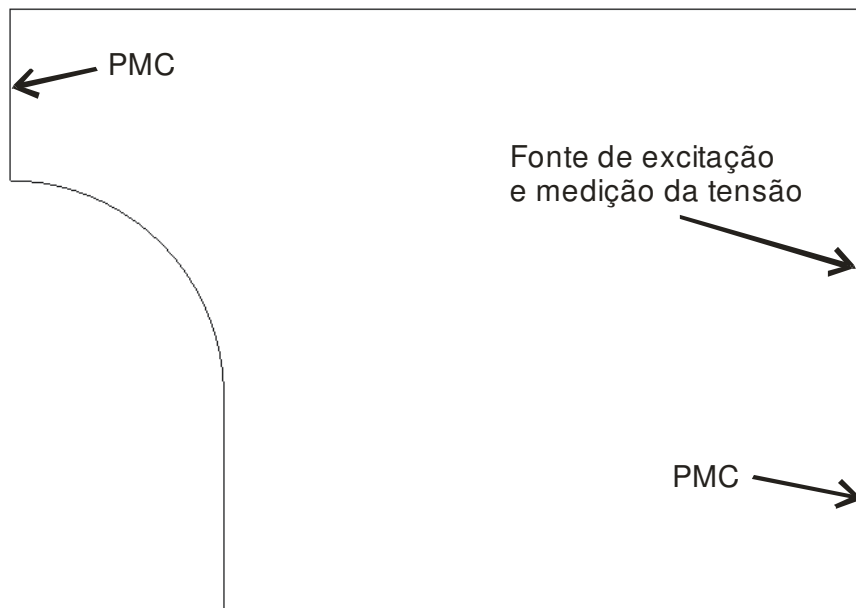


Figura 18 - Geometria com as condições de excitação e medição de tensão

O comprimento médio das arestas da malha está diretamente relacionado com o comprimento de onda da máxima frequência envolvida nos cálculos, ou seja, quanto maior a frequência, menor deverá ser a malha para assegurar que a velocidade que a onda se propaga é a real e não está sendo superestimada, originando assim resultados incorretos. Uma aresta média de 0,2 mm foi utilizada durante as simulações para discretização espacial da geometria, mostrada na Figura 19.

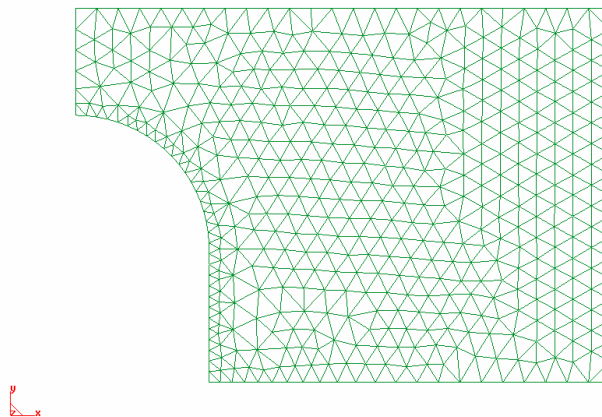


Figura 19 - Modelo geométrico discretizado com $l=0.2$ mm

Um maior refinamento da malha, na região axial, consta em 8.4. Este refinamento visa melhorar ainda mais os resultados obtidos nas simulações.

5. PROCEDIMENTOS DE SIMULAÇÃO

Os vários passos adotados na metodologia possuem procedimentos para a sua execução, e são estes passos que são apresentados no presente capítulo, ou seja, como foi executada cada etapa do trabalho.

5.1. ESTIMATIVA INICIAL DOS PARÂMETROS DO PLASMA

Nas simulações com o modelo simplificado, o principal objetivo é o cálculo da resistência e indutância do modelo para uma estimativa inicial da frequência do plasma e da condutividade do ar ionizado, portanto, o tempo de simulação é menor, bem como a duração do pulso de excitação.

É interessante aqui saber qual a capacitância inerente do modelo. Para descobrir este valor, é necessário limitar o pulso de corrente de excitação de forma a carregar as placas condutoras até o limiar de ruptura, mas sem permitir que a descarga ocorra. Para tanto, através de tentativas, foi encontrado o valor de 7,4 ns como limiar de duração do pulso. A forma de onda do pulso encontra-se na Figura 20.

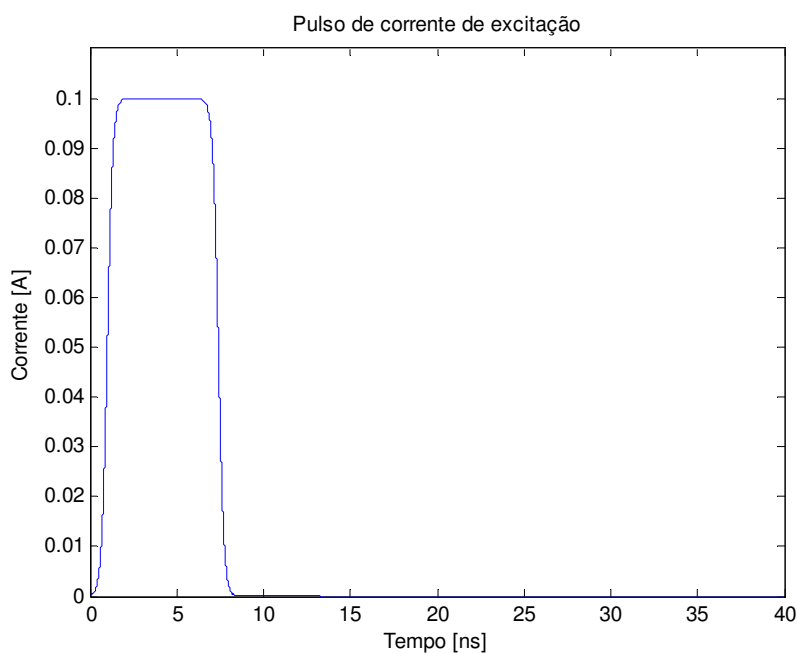


Figura 20 – Pulso limitado para carregamento das placas paralelas

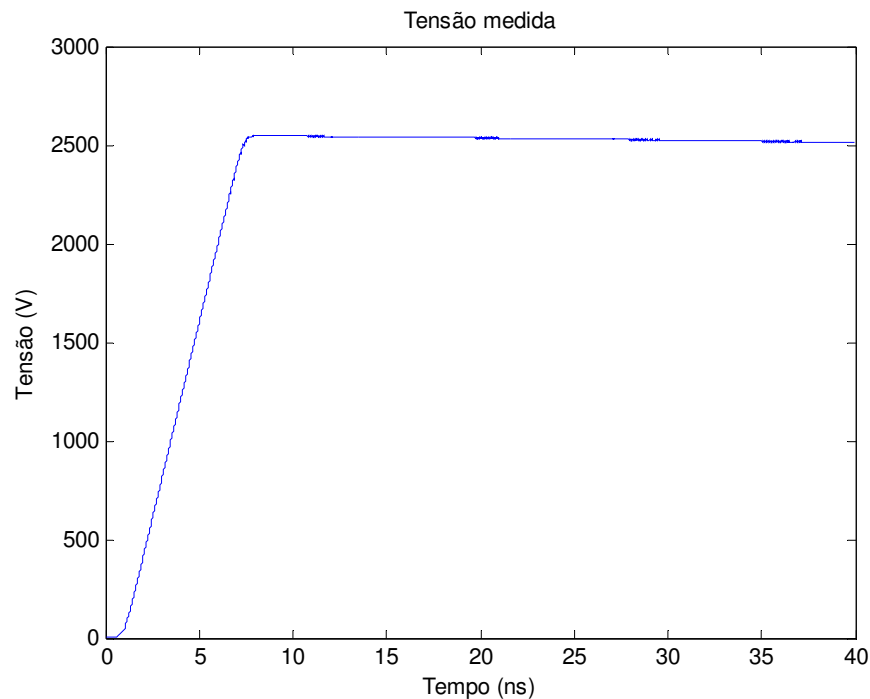


Figura 21 - Tensão medida entre as placas

Com as duas curvas simuladas, é calculado o valor de capacitância do modelo computacional contendo apenas o ar como dielétrico. Com a curva de tensão simulada até o limite de ruptura, Figura 21, é verificada a tensão máxima alcançada e calculado o valor de C através da equação de tensão de um capacitor:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (5.1)$$

Isolando o valor de C,

$$C = \frac{1}{v_{\max}} \int i(t) dt \quad (5.2)$$

Utilizando (5.2) chegamos ao valor de 0,25 pF, o que é um valor condizente com a capacitância calculada através da teoria eletromagnética para duas placas paralelas, 0,2 pF. Se levado em consideração a existência de um eletrodo no seu interior, fica explicado o ligeiro aumento em seu valor ocasionado pelo aumento da área efetiva.

O primeiro passo para início das simulações é obter os valores de resistência e indutância equivalentes do dispositivo real, para isto é utilizada a regressão por

matriz pencil. Ao entrar com os valores de 4 e 4,5 nF no algoritmo, chegamos aos valores de $R=1,5732 \Omega$, $L=17,567 \text{ nH}$, e $R=1,3984 \Omega$, $L=15,615 \text{ nH}$ respectivamente, para o dispositivo real. Estes valores serão utilizados para filtragem e obtenção das estimativas da frequência de plasma (f_p) e resistividade do ar ionizado (ρ_{\min}).

Para uma melhor aproximação, f_p e ρ_{\min} foram variados unitariamente a cada simulação, originando assim combinações de valores. Os valores de f_p foram variados de 1 a 9 GHz, ao mesmo tempo em que os valores de ρ_{\min} foram variados de 1 a $20 \Omega \cdot \text{mm}$. Ao total, foram realizadas 180 simulações nesta fase.

Conforme explicado anteriormente, em cada combinação foi utilizada a capacitância nominal do modelo computacional, ou seja, 0,25 pF, para cálculo da tensão entre as placas. Ao final de cada simulação, os valores de R e L foram calculados pelo algoritmo de matriz pencil e armazenados. Finalizadas todas as combinações, uma filtragem é aplicada aos resultados utilizando os valores reais de resistência e indutância para escolha das combinações que mais se aproximam da realidade.

Os 180 valores de resistência e indutância são mostrados na Figura 22.

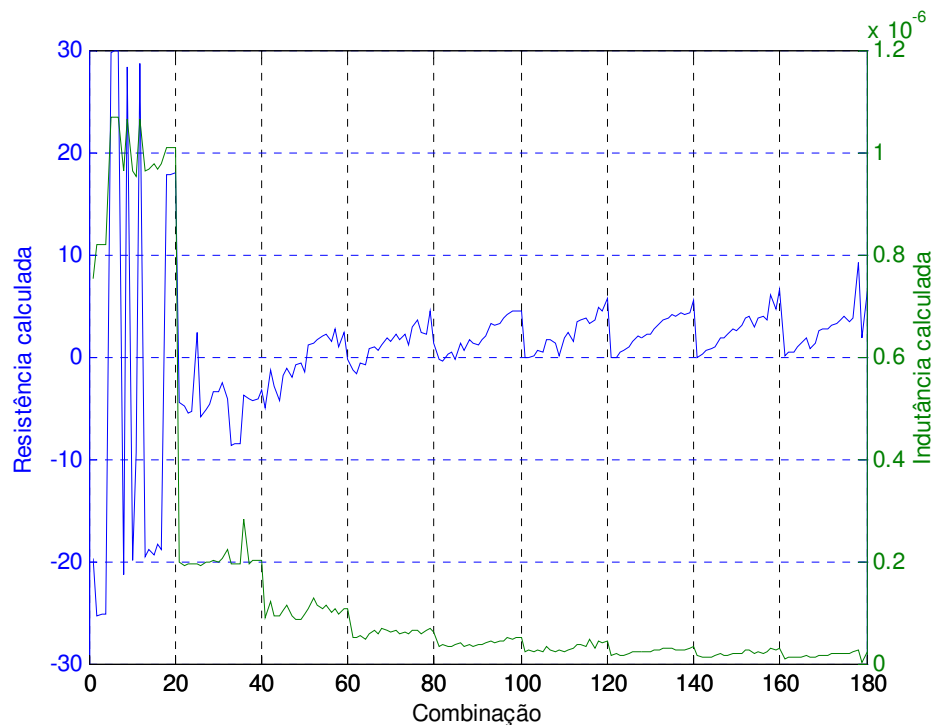


Figura 22 - Valores de R e L calculados segundo combinações com o modelo simplificado

Em azul estão representados os 180 valores de resistência calculados. É possível perceber que a partir de determinado trecho, o seu valor começa a oscilar no intervalo de 0 a 10 Ohms. Em verde estão os 180 valores de indutância calculados que, pelo gráfico, tendem a uma ordem de grandeza de nH, o que é condizente com a realidade.

A Figura 23 mostra um exemplo de uma resposta obtida em uma das 180 combinações. Nela foram utilizados os valores de $f_p = 5GHz$ e $\rho_{min} = 5\Omega \cdot mm$. É possível observar maior frequência de oscilação devido ao valor reduzido de capacitância do modelo simplificado.

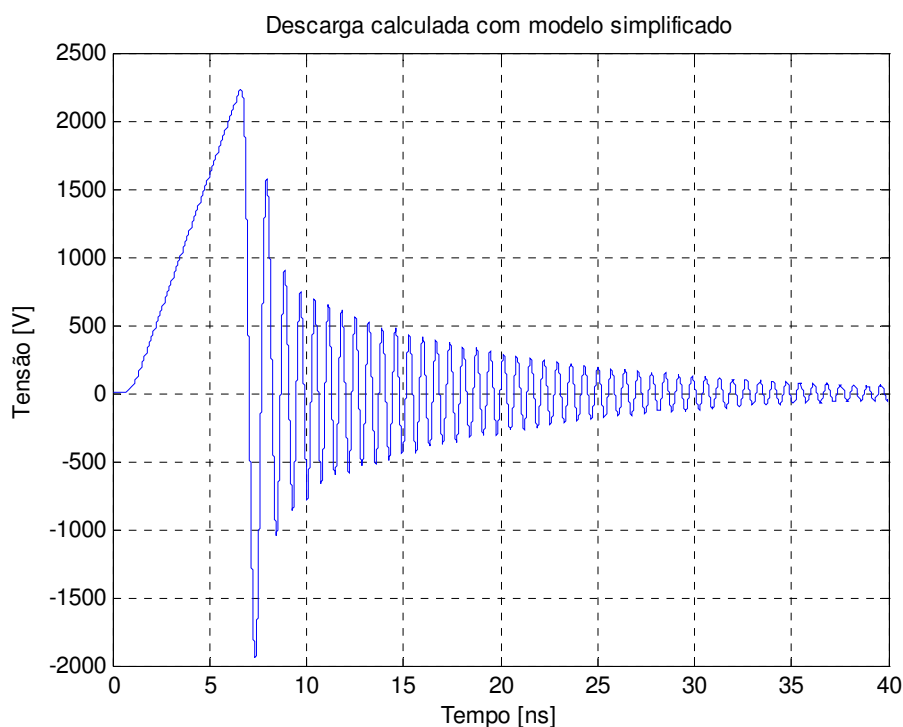


Figura 23 - Forma de onda obtida em uma das combinações do modelo simplificado.

Com o conjunto completo de valores, uma filtragem foi aplicada com o objetivo de escolher quais combinações melhor se aproximam dos valores obtidos da curva real, independentemente de sua margem de erro, ou seja, foram escolhidos os valores calculados mais próximos dos valores teóricos. A Tabela 3 mostra estes valores obtidos como estimativa inicial.

Tabela 3 – Combinações selecionadas

	f_p	ρ_{\min}	R teórico [Ω]	R calculado [Ω]	Erro (%)	L teórico [H]	L calculado [H]	Erro (%)
C=4nF	8	7	1,5732	1,764	10,82	1,75675E-08	1,5744E-08	10,38
C=4,5nF	9	5	1,3984	1,3187	-6,04	1,56150E-08	1,2909E-08	17,33

É possível observar pela tabela comparativa a proximidade dos valores de R e L obtidos quando se muda a capacitância de 4 para 4,5 nF, o que não permite dizer com certeza qual o melhor valor a ser utilizado no próximo passo e torna obrigatória a análise com estes dois valores.

5.2. SIMULAÇÕES COM O MODELO COMPLETO

Com estas primeiras estimativas de f_p e ρ_{\min} , é possível definir intervalos menores a serem combinados para utilização nas simulações com parâmetros de tempo reais. Os intervalos foram definidos como

$$6 \leq f_p \leq 9 \text{ GHz e } 4 \leq \rho_{\min} \leq 8 \text{ } [\Omega \cdot \text{mm}]$$

Considerando todas as possíveis combinações dentro dos intervalos acima, conforme feito anteriormente, resultam em novas 20 simulações. Como o mesmo foi feito tanto para o material de 4 nF quanto para o material de 4,5 nF, há um total de 40 novas simulações das quais será escolhida a que melhor se aproximar da curva real.

Com estes novos intervalos de f_p e ρ_{\min} definidos, é possível simular o modelo completo com as novas combinações, sabendo que as formas de onda obtidas a partir deste ponto devem seguir a resposta real de ionização e descarga. Estas simulações são realizadas e as formas de onda armazenadas para análise.

5.3. RESULTADOS

Com as novas 40 formas de onda disponíveis, é possível aplicar um método de análise para comparação das respostas em amplitude e em fase. O método utilizado aqui se baseia no cálculo dos erros relativos em amplitude e tempo entre picos e vales. A Figura 24 ilustra o que são os deltas obtidos sempre entre dois picos consecutivos.

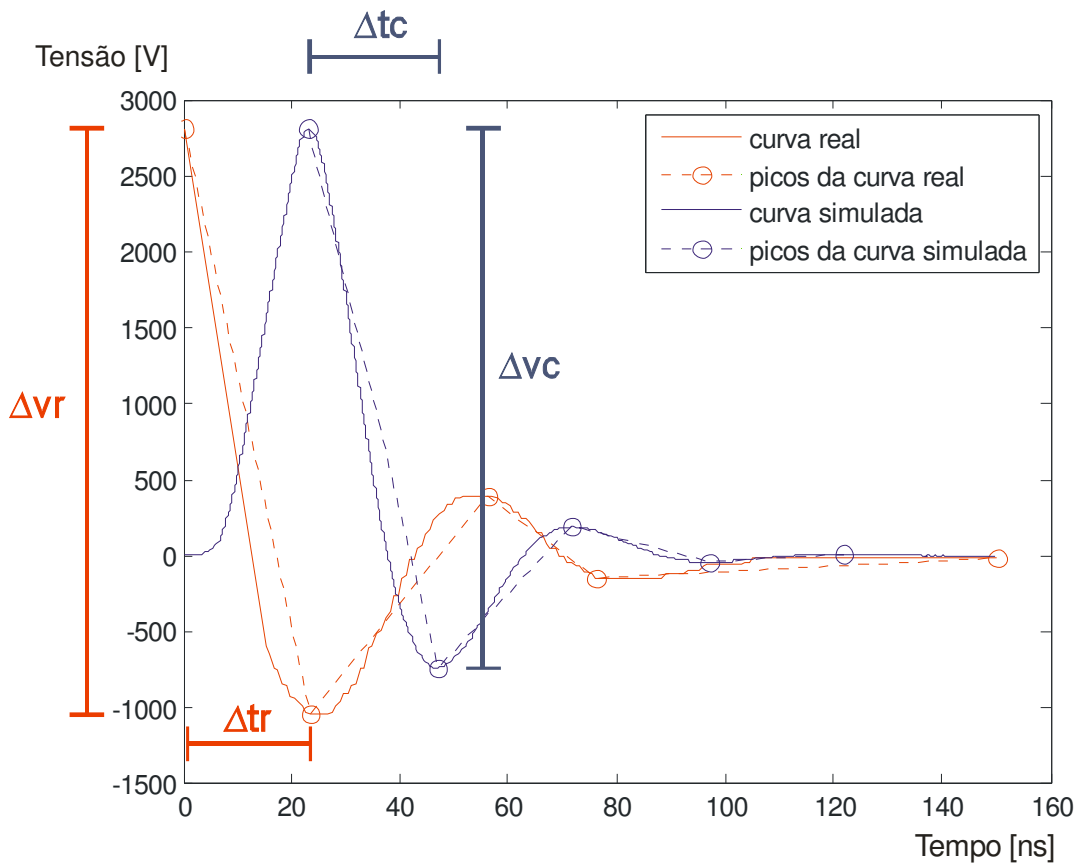


Figura 24 - Método de comparação entre respostas.

Pela definição de erro relativo, obtém-se

$$Err_v = \frac{|\Delta V_c - \Delta V_r|}{|\Delta V_r|} \quad (8.1)$$

$$Err_t = \frac{|\Delta t_c - \Delta t_r|}{|\Delta t_r|} \quad (8.2)$$

Sendo que o erro relativo percentual é

$$Err_v \% = Err_v \cdot 100 \quad (8.3)$$

$$Err_i \% = Err_i \cdot 100 \quad (8.4)$$

O erro percentual em amplitude e em fase é calculado sempre entre um pico e um vale consecutivo, tirando uma média aritmética dos dois valores. Este erro percentual é calculado somente até o segundo vale, pois a partir dele as variações temporais das formas de onda simuladas tornam-se muito elevadas, fazendo com que o restante da forma de onda torne-se um fator de dúvida.

Uma média aritmética entre estes três valores de erro percentual é calculada para cada resposta obtida durante as simulações com o modelo completo. Ao final é verificado qual o mínimo valor de erro percentual obtido.

As formas de onda para todas as combinações são apresentadas no Anexo A.

5.3.1. RESULTADOS PARA 4 nF

No gráfico da Figura 25 são apresentados os erros percentuais.

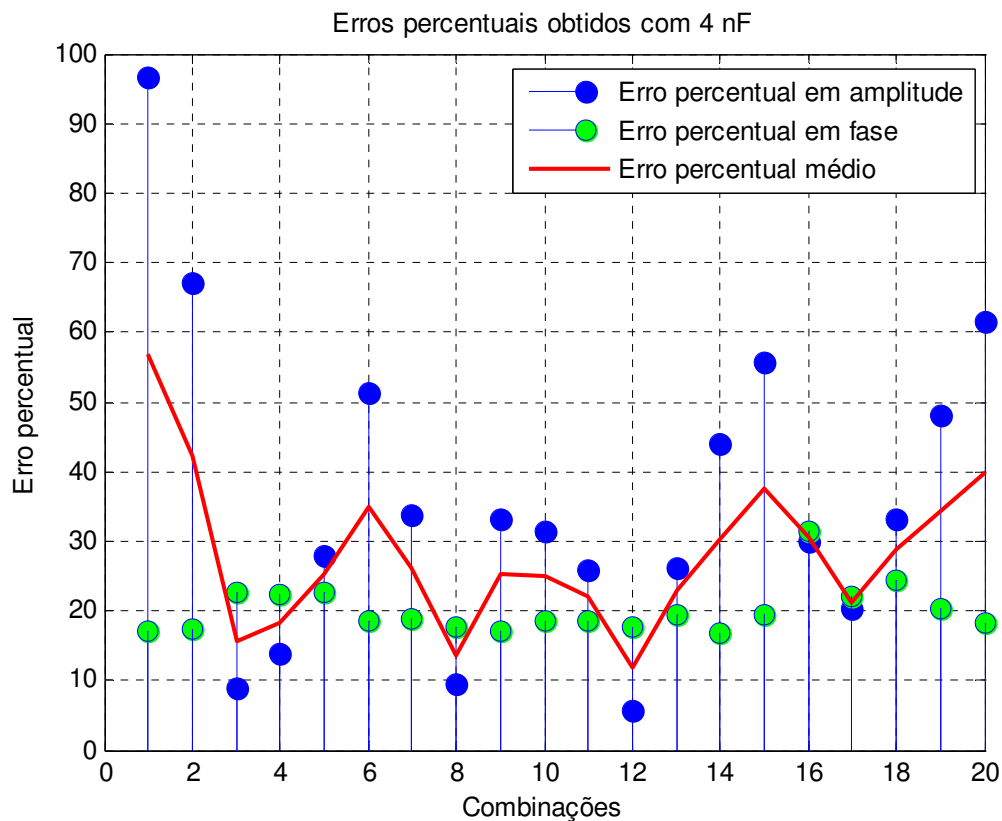


Figura 25 - Erros percentuais para capacitância de 4 nF

A Tabela 4 mostra os quatro melhores resultados obtidos e seus respectivos erros relativos médios

Tabela 4 – As quatro melhores combinações para C=4 nF

f_p [GHz]	ρ_{\min} [$\Omega \cdot mm$]	Erro %
8	5	11,75 %
7	6	13,63 %
6	6	15,73 %
6	7	18,21 %

5.3.2. RESULTADOS PARA 4,5 nF

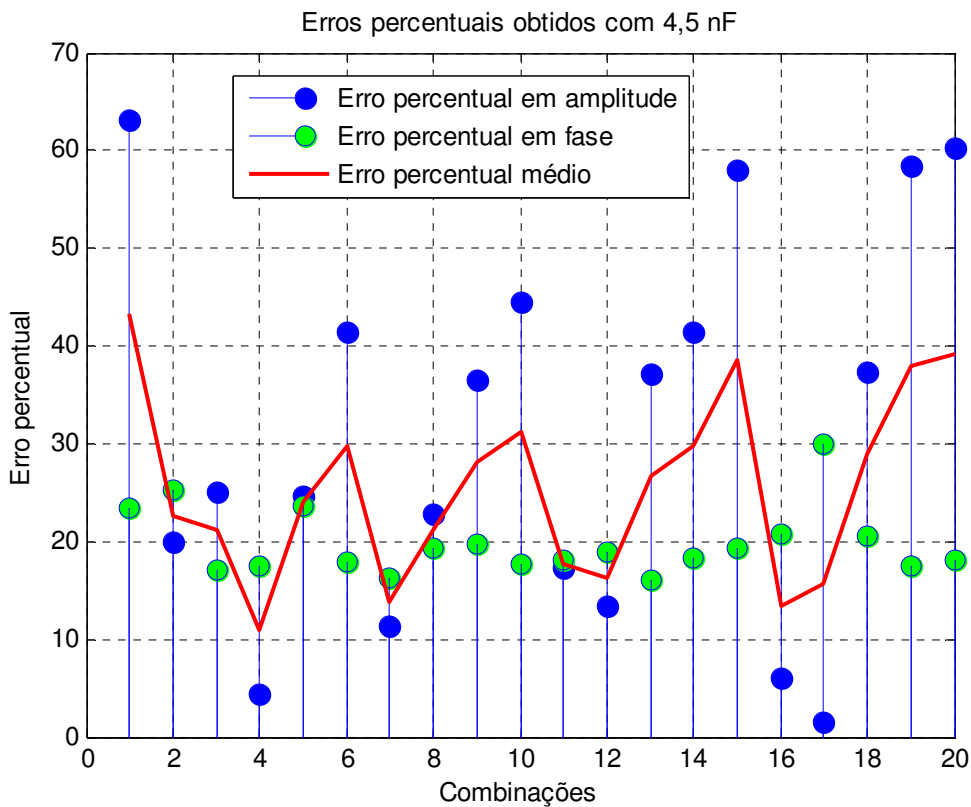


Figura 26 - Erros percentuais para capacitância de 4,5 nF

Conforme feito anteriormente, os melhores resultados obtidos para este valor de capacitância são mostrados na Tabela 5.

Tabela 5 - As quatro melhores combinações para C=4,5 nF

f_p [GHz]	ρ_{\min} [$\Omega \cdot mm$]	Erro %
6	7	10,99 %

9	4	13,41 %
7	5	13,79 %
9	5	15,73 %

5.3.3. INDUTÂNCIA INERENTE À GEOMETRIA

Um dado interessante neste estudo é saber o quanto o valor de indutância do modelo é alterado devido ao efeito do plasma. Para isto, o modelo completo foi modificado através da colocação de um curto-circuito entre eletrodo de descarga e a placa superior.

Com a eliminação do espaçamento entre ambos pelo curto-circuito não há a formação do plasma entre eletrodo e placa e conseqüentemente não há formação de descarga elétrica, dessa forma, a análise da forma de onda de tensão gerada pelo curto-circuito, através de regressão por matriz pencil, deverá indicar o valor aproximado de indutância inerente à geometria do modelo. A Figura 27 indica o local do modelo em que esta modificação foi realizada. O material aplicado nesta linha é o mesmo das placas e eletrodo, ou seja, o PEC.

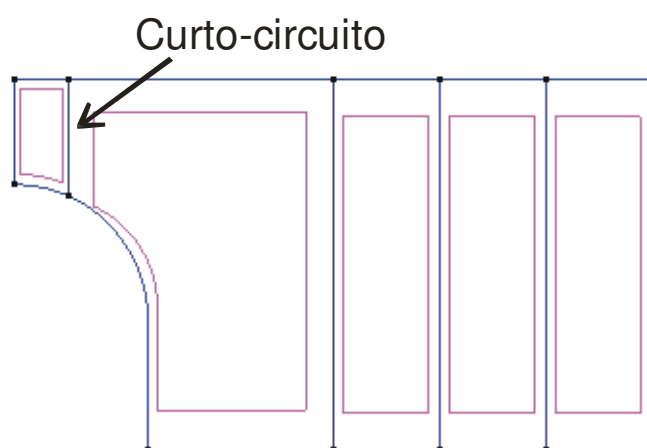


Figura 27 – Modelo completo com placas em curto-circuito

Após a simulação e análise da resposta, chegou-se a um valor de indutância de 1,235 nH, algo razoável pelas dimensões do modelo.

Por este valor é possível concluir que a maior influência no valor de indutância do modelo deve-se ao plasma formado. Os valores obtidos de indutância

durante as descargas foram mais de 10 vezes superiores ao valor de indutância da geometria.

5.4. ANÁLISE DOS DADOS

Conforme pode ser observado nas Tabela 4 e Tabela 5, quatro pares de valores se destacaram para cada valor de capacitância analisado. Nas Figura 28, Figura 29 e Figura 30 os valores são desenhados em um gráfico para uma visualização mais adequada.

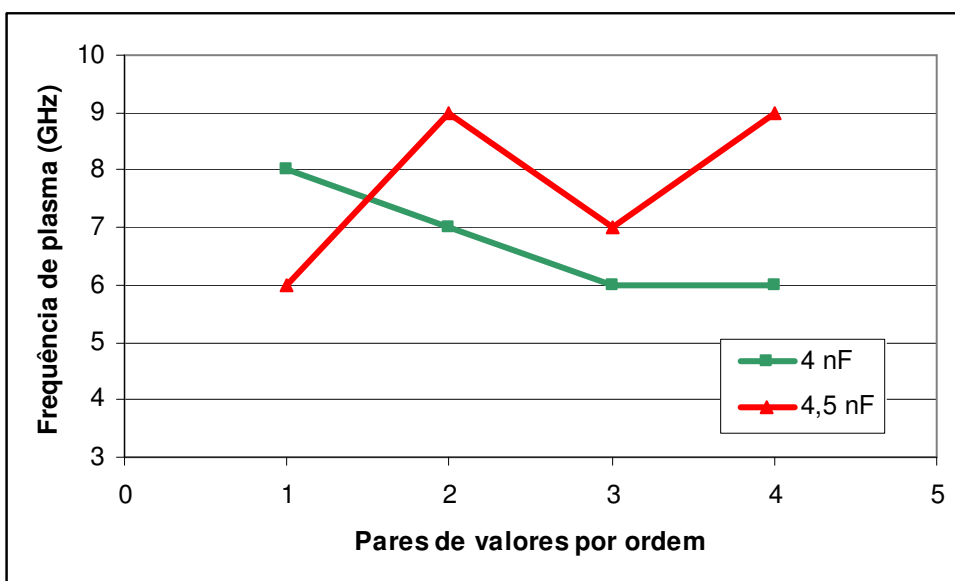


Figura 28 - Comparação para a frequência de plasma.

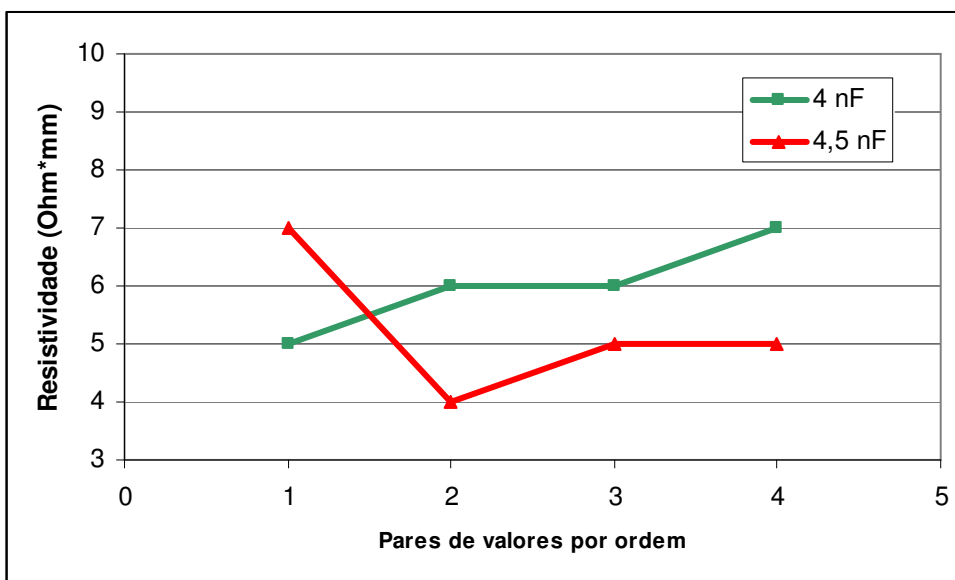


Figura 29 - Comparação para a resistividade do ar ionizado.

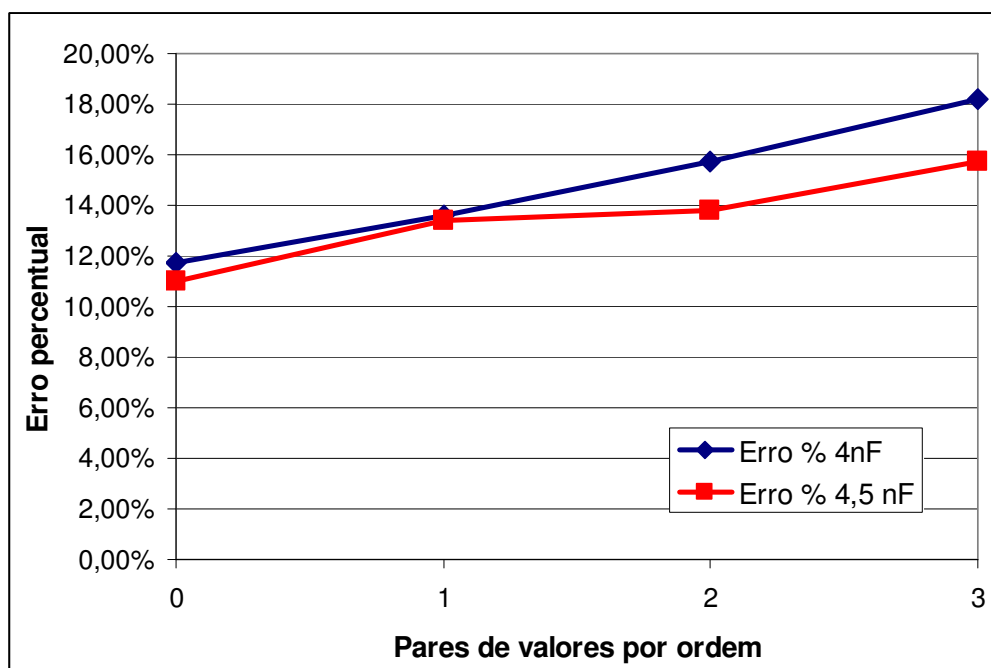


Figura 30 – Comparação dos erros percentuais

É interessante notar que, apesar dos valores de f_p e ρ_{\min} variarem com a variação da capacitância do modelo, os valores dos erros percentuais se mantiveram relativamente estáveis, já que as maiores variações não passaram de dois por cento nos piores casos.

Outro comportamento interessante é o da variação das grandezas quando o valor de capacitância é alterado. É possível observar que com o maior valor de capacitância, o valor de f_p tende a aumentar enquanto o de ρ_{\min} tende a diminuir para compensá-lo. O inverso ocorre quando o menor valor de capacitância é utilizado, já que o valor de f_p tende a diminuir enquanto o de ρ_{\min} tende a aumentar.

Estas variações mostram que estes resultados foram os mais próximos à realidade, devido ao fato de que neles foi mantido o equilíbrio entre os parâmetros de capacitância, indutância e resistência do modelo, conforme ocorre fisicamente no *spark gap*.

As combinações dos parâmetros do plasma que originaram perdas, ou interações entre campos elétricos e magnéticos não condizentes com a estrutura geométrica e de materiais do modelo utilizado aqui, originaram respostas adversas não

condizentes com a realidade.

Nas Figura 31 e Figura 32 são apresentadas as formas de onda dos melhores resultados obtidos para 4 e 4,5 nF respectivamente.

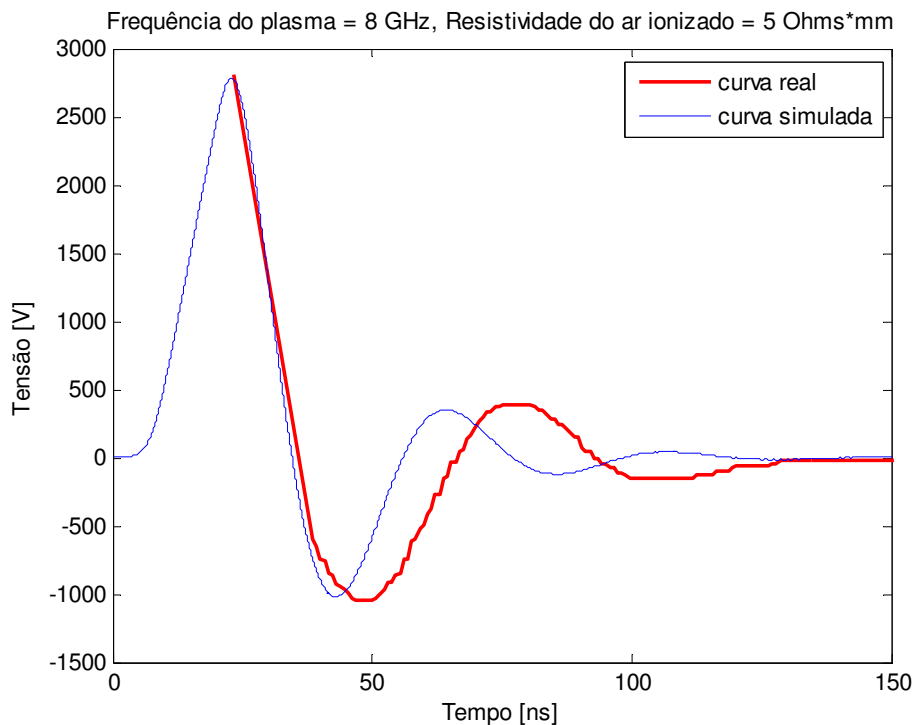


Figura 31 - Melhor resultado obtido para C = 4 nF

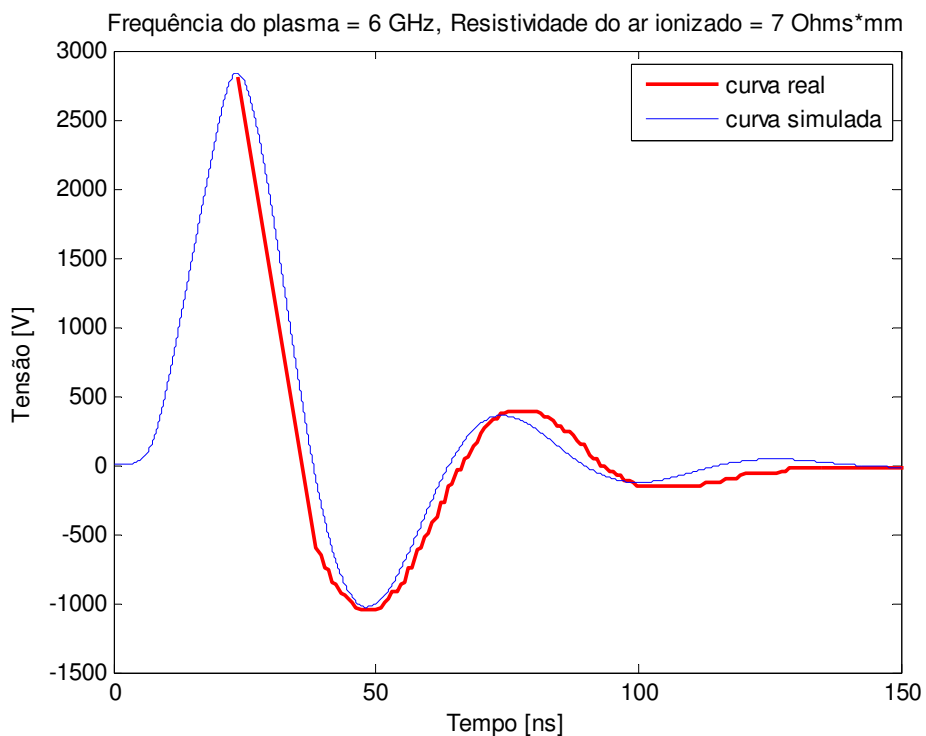


Figura 32 - Melhor resultado obtido para C = 4,5 nF

6. CONCLUSÕES

A utilização da formulação retirada da física dos plasmas para modificação do método FETD, tornando-o capaz de calcular efeitos eletromagnéticos não-lineares no tempo mostrou-se possível. O ajuste das variáveis físicas do problema em questão possibilitou uma aproximação satisfatória da realidade, mostrando sua eficácia.

A ordenação lógica dos melhores resultados obtidos, mostrando um compromisso de equilíbrio entre os valores obtidos para as variáveis e os efeitos eletromagnéticos em andamento no modelo, mostram a eficácia de sua formulação em seguir os princípios físicos do eletromagnetismo.

Considerando as imprecisões inerentes aos métodos numéricos, é possível dizer que os valores dos erros percentuais encontrados estão satisfatoriamente próximos da realidade. O que se quer dizer com isso é que, apesar de os fenômenos de ionização, descargas parciais e descargas totais possuírem uma quantidade expressiva de variáveis e considerações, é possível simular satisfatoriamente estes efeitos com um número reduzido de parâmetros e uma formulação adequada.

Esta nova formulação eletromagnética apresentada aqui, aliada a um método amplo como o de elementos finitos no domínio do tempo, abre um leque de possibilidades para a simulação de fenômenos eletromagnéticos não-lineares diversos em geometrias complexas.

Com os devidos aperfeiçoamentos do método, tornar-se-á possível a análise numérica de modelos geometricamente mais próximos da realidade e eletromagneticamente mais complexos e precisos, análises estas que nos dias de hoje somente seriam possíveis com medições em modelos reais.

Como continuação deste trabalho, podem ser levantados alguns tópicos listados como segue:

- Aprimoramento do método de cálculo para simulação de descargas parciais propriamente ditas e efeitos relacionados, como perdas de energia, ruído em RF

gerado e ruído sonoro gerado;

- Levantamento mais aprimorado das propriedades físicas dos materiais, de forma a aproximar mais seus modelos da realidade;
- Simulações com outras geometrias e materiais, de forma a verificar o quão genérico é o método e calcular sua eficácia;
- Otimização do algoritmo, possibilitando sua aplicação a modelos mais complexos, que exijam um tempo maior de simulação;
- Aprimoramento do método para simulação de componentes elétricos e eletrônicos sujeitos a ação de surtos elétricos.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Sarkar, T. K., Pereira, O.; *Using the Matrix Pencil Method to Estimate the Parameters of a Sum of Complex Exponentials*, IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 37, No. 1, February 1995.
- [2] Greene, J. H.; Taflove, A.; *General Vector Auxiliary Differential Equation Finite-Difference Time-Domain Method for Nonlinear Optics*, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Northwestern University, 4 September 2006
- [3] Schmidke, W.; *Tratamento de Singularidades Em Estruturas Condutoras para o Método FETD*, UFPR - Universidade Federal do Paraná, Brasil, 2006
- [4] Wilson A. Artuzi Jr., “*Improving the Newmark time integration scheme in finite element time domain methods*” - IEEE Transactions on Microwave and Wireless Components Letters, vol. 15, pp. 898-900, December 2005.
- [5] Liu, S.; Yuan, N.; Mo, J., *A Novel FDTD Formulation for Dispersive Media*, IEEE Microwave and Wireless Components Letters, VOL. 13, NO. 5, MAY 2003
- [6] Rodriguez, A. E.; Morgan, W. L.; Touryan, K. J.; Moeny, W. M., *An Air Breakdown Kinetic Model*, American Institute of Physics, 1991.
- [7] Iliceto, F.; Cinieri, E.; *Analysis of Half-Wave Length Transmission Lines With Simulation of Corona Losses*, IEEE – Transactions on Power Delivery, Vol. 3., No 4, October, 1988.
- [8] Carneiro, S.; Marti, J. R.; Dommel, H. W.; Barros, H. M.; *An Efficient Procedure for the Implementation of Corona Models In Electromagnetic Transient Programs*, IEEE – Transactions on Power Delivery, Vol. 9, No 2, April, 1994.
- [9] *EPRI AC Transmission Line Reference Book – 200 kV and Above*, Third Edition
- [10] Min, W.; Kim, H.; Lee, S.; Hahn, S.; *An Investigation of FEM-FCT Method for Streamer Corona Simulation*, IEEE Transaction on Magnetics, Vol. 36, No 4, July, 2000.
- [11] Phaiboon, S.; Vivek, V.; Somkuarnpanit, S.; *Analisis and Measurement of Radio-Frequency Interference Due to the Corona From 500kV Transmission Lines*, IEEE, 2000.
- [12] HIGASHINAMA, Y.; YAMANAKA, K.; ASANO K.; *ANALYSIS OF THE BEHAVIOR OF IONS PRODUCED BY PULSED CORONA DISCHARGE*, IEEE, 1994.

- [13] Brunt, R. J. V.; *Stochastic Properties of Partial-discharge Phenomena*, IEEE Transactions on Electrical Insulation, Vol. 28, No. 5, October 1991.
- [14] Al-Hamouz, Z. M.; *Combined Finite-Element – Charge Simulation Computation of Monopolar Corona on Bundle Wires*, Electrical Engineering Dept., King Fahd University of Petroleum & Minerals, Saudi Arabia.
- [15] Raju, G. R. G.; Liu, J.; *Simulation of Electrical Discharges in Gases – Nonuniform Electric Fields*, Department of Electrical Engineering, University of Windsor, Windsor, Ontario, Canada
- [16] Kalenderli, Ö; Önal, E.; Altay, Ö.; *Computing the Corona Onset and the Utilization Factor of Rod-Plane Electrode by Using Charge Simulation Method*, IEEE, Electrical Engineering Department, Istanbul, Turkey, 2001
- [17] Artuzi, W. A. Jr., *An unconditionally stable FDTD method using tetrahedral cells* – Universidade Federal do Paraná – IMOC/SBMO, 2004.
- [18] Bönisch, S.; Kalkner, W.; *Measurement and Simulation of the Behavior of a Short Spark Gap Used as ESD Protection Device*, Technical University of Berlin.
- [19] Costa, R. N. P.; *Plasma Gerado por Fonte de Rádio Freqüência*, Unicamp, 2003, pp. 2-7
- [20] Farias, E. E.; *Estudo do Plasma Produzido por Descarga Elétrica no Limiar da Transição Townsend – Glow*, Universidade Federal Fluminense – 2003, pp. 2-3,
- [21] K. Mackey, M. Bonfim, D. Givord and A. Fontaine, *"50 T pulsed magnetic fields in microcoils,"* Journal of Applied Physics, vol. 87, no. 4, pp. 1996-2002, Feb. 2000.

8. APÊNDICES

8.1. ALGORITMO DE REGRESSÃO POR MATRIZ PENCIL

Este algoritmo é utilizado para descobrir os parâmetros significativos de curvas com componentes exponenciais complexas.

Esta entidade matemática surge quando combinadas duas funções definidas em um intervalo comum, com um parâmetro escalar λ , [1]:

$$f(t, \lambda) = g(t) + \lambda h(t) \quad (8.1)$$

$f(t, \lambda)$ é chamada de função pencil de $g(t)$ e $h(t)$, parametrizada por λ .

De forma geral, um sinal amostrado pode ser representado por

$$y(kT_s) = x(kT_s) + n(kT_s) \approx \sum_{i=1}^M R_i z_i^k + n(kT_s) \quad \text{para } k = 0, K, N-1 \quad (8.2)$$

$$z_i = e^{s_i T_s} = e^{(-\alpha_i + j\omega_i) T_s} \quad \text{para } i = 1, 2, K, M \quad (8.3)$$

Onde

$y(kT_s)$ é a resposta observada;

$x(kT_s)$ é o sinal;

$n(kT_s)$ é o ruído adicionado ao sinal.

O método de regressão por matriz pencil consiste em primeiramente subdividir o espaço de amostras em subintervalos, montando a seguinte matriz:

$$[Y] = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \dots & y(L) \\ y(1) & y(2) & \dots & y(L+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(N-L-1) & y(N-L) & \dots & y(N-1) \end{bmatrix}_{(N-L) \times (L+1)} \quad (8.4)$$

Onde L é um parâmetro das matrizes pencil e normalmente é escolhido como sendo a metade do vetor de tensão [1], ou $L = N/2$, e N o número de

amostras do vetor de tensão.

Em seguida, é aplicada à matriz Y uma decomposição em valores singulares. Esta decomposição é definida como sendo

$$[Y] = [U][\Sigma][V]^H \quad (8.5)$$

Aqui, $[U]$ e $[V]$ são matrizes unitárias compostas pelos autovetores de $[Y][Y]^H$ e $[Y]^H[Y]$, respectivamente, $[\Sigma]$ é a matriz diagonal contendo os valores singulares de $[Y]$ e o expoente H significa o transposto conjugado da matriz. Como a simulação pode apresentar ruídos nos valores de tensão medidos, $[\Sigma]$ pode conter muitos valores significativos em sua diagonal. Foi limitado aqui até o terceiro valor, já que os mais significativos termos da exponencial amortecida seriam a atenuação, frequência e *offset*.

Com $[V']$ contendo apenas as colunas dos valores singulares de $[V]$, ou $[V'] = [v_1, v_2, \dots, v_M]$, é utilizada a relação

$$\{[V'_2]^H - \lambda[V'_1]^H\} \Rightarrow \{[V'_1]^H\} \{[V'_2]^H\}^+ - \lambda[I] \quad (8.6)$$

Z é a matriz dos autovalores acima relacionado, definida como

$$z = \text{autovalores} \{ [V'_1]^H \{ [V'_2]^H \}^+ \} \quad (8.7)$$

Onde $[V'_1]$ é conseguido de $[V']$ excluindo-se a última linha, $[V'_2]$ é obtido de $[V']$ excluindo-se a primeira linha, e o expoente $+$ significa matriz pseudo-inversa, conforme (8.7).

$$[X]^+ = \{ [X^H][X] \}^{-1} [X]^H \quad (8.8)$$

Uma vez que são conhecidos M e z , os resíduos R_i são encontrados seguindo o método dos mínimos quadrados como

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & K & 1 \\ z_1 & z_2 & \Lambda & z_M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M & M & & M \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & K & z_M^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_M \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

Com R conhecido, aplica-se

$$\sum_{i=1}^M R_i z_i^k \quad (8.10)$$

e

$$z_i = e^{s_i T_s} = e^{(-\alpha_i + j\omega_i) T_s} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, M \quad (8.11)$$

Neste passo, o vetor z_i já possui os três valores significativos relacionados ao sinal. Considerando que o único número com parte imaginária nula refere-se ao *offset* de tensão, e que os outros dois são complexos conjugados, é possível pegar somente um dos complexos e chegar aos valores de atenuação e frequência por:

$$freq. = |im\{\ln(z)\} / dt| \quad (8.12)$$

$$att. = \Re\{\ln(z)\} / dt \quad (8.13)$$

8.2. FORMAS DE ONDA PARA CAPACITÂNCIA DE 4 NF

Nos gráficos a seguir são comparados cada conjunto de quatro simulações com a curva real do dispositivo. De forma a facilitar a visualização, o início da curva real foi deslocada no tempo para o mesmo instante do início da descarga simulada, facilitando assim uma comparação.

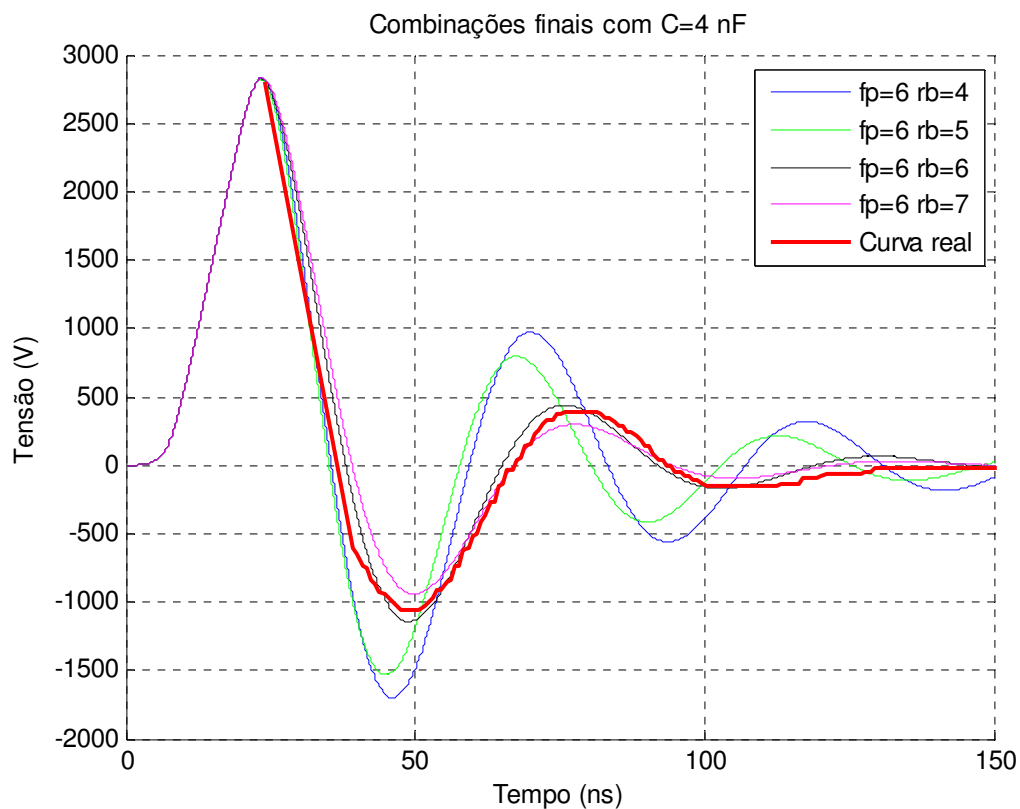


Figura 33 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 1 a 4

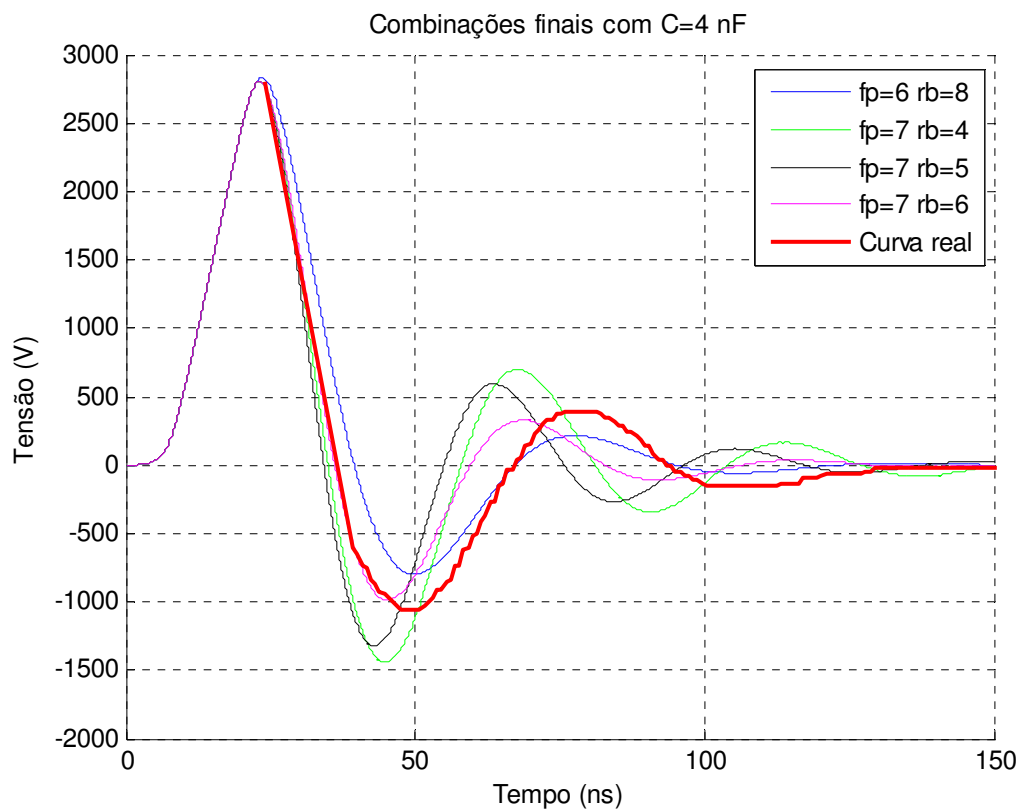


Figura 34 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 5 a 8

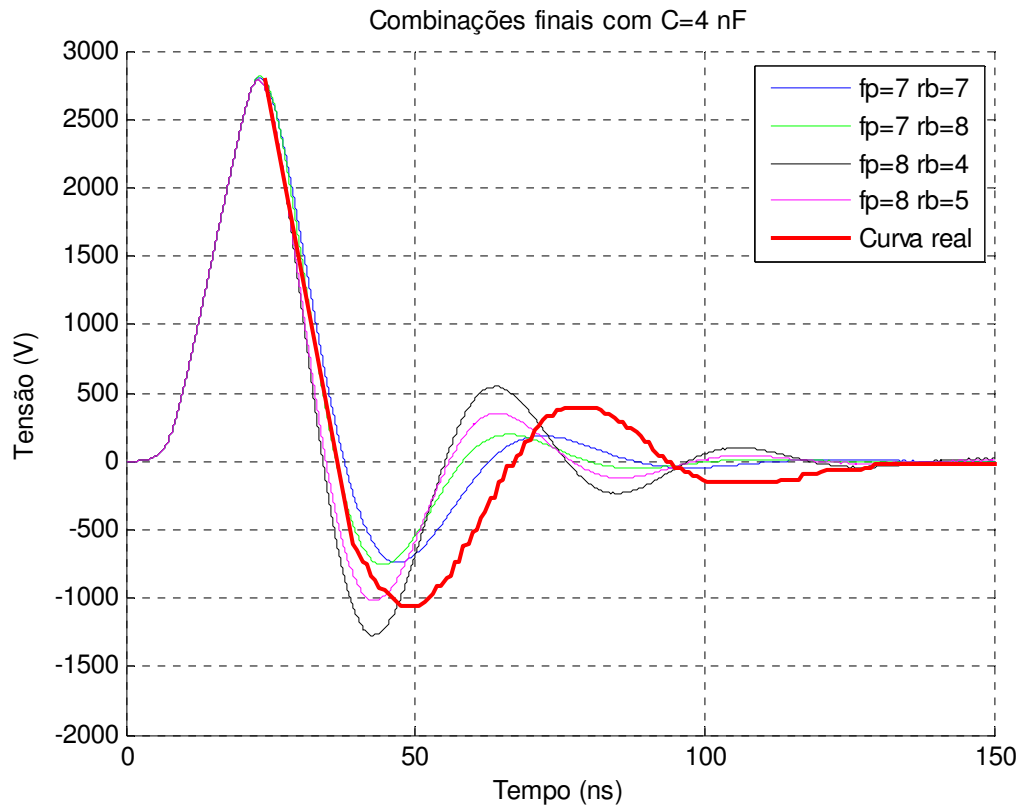


Figura 35 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 9 a 12

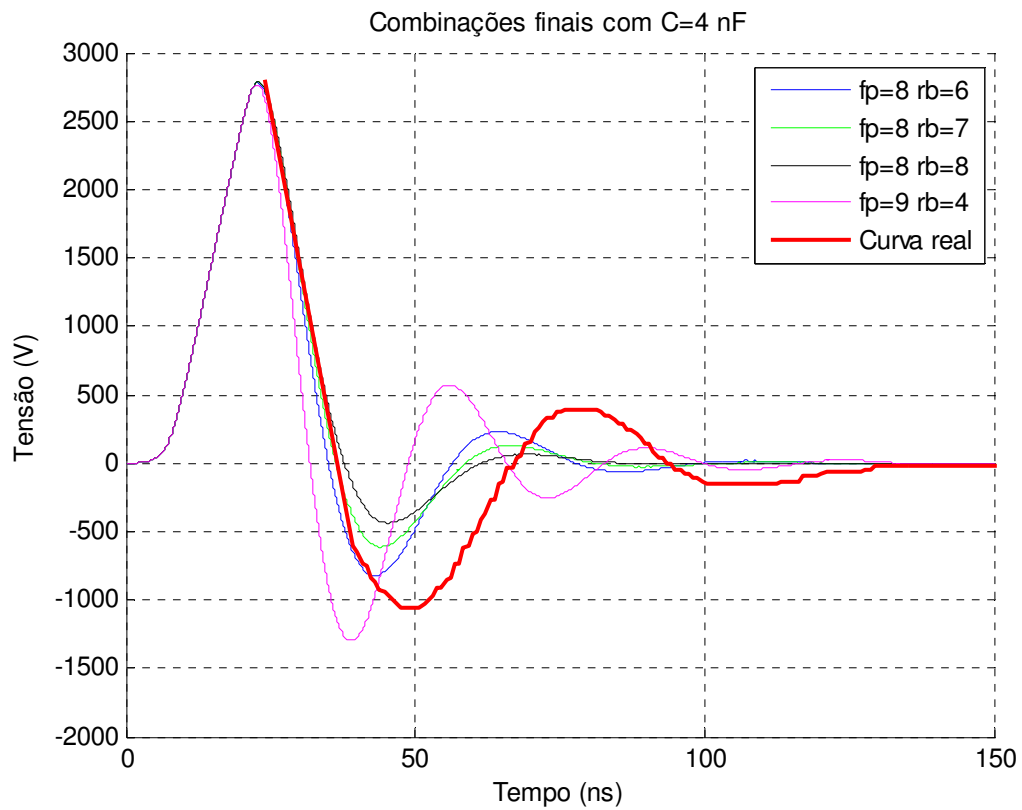


Figura 36 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 13 a 16

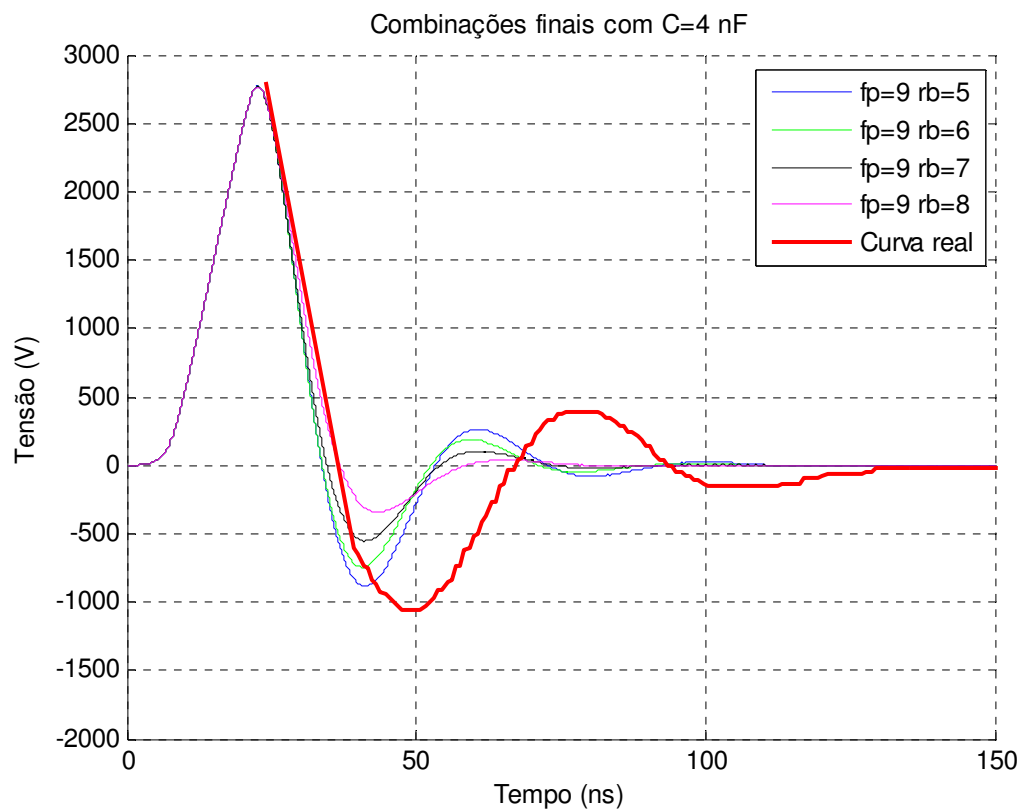


Figura 37 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 17 a 20

8.3. FORMAS DE ONDA PARA CAPACITÂNCIA DE 4,5 nF

O mesmo procedimento feito anteriormente para 4 nF é repetido aqui, conforme mostrado a seguir.

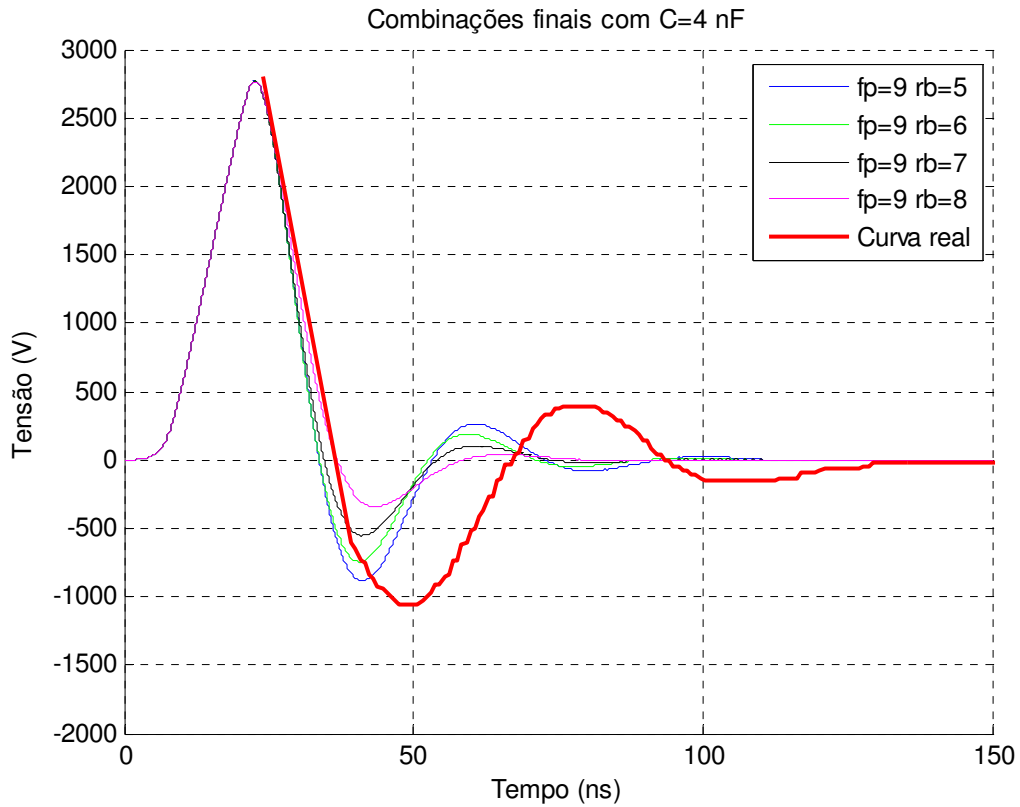


Figura 38 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 1 a 4

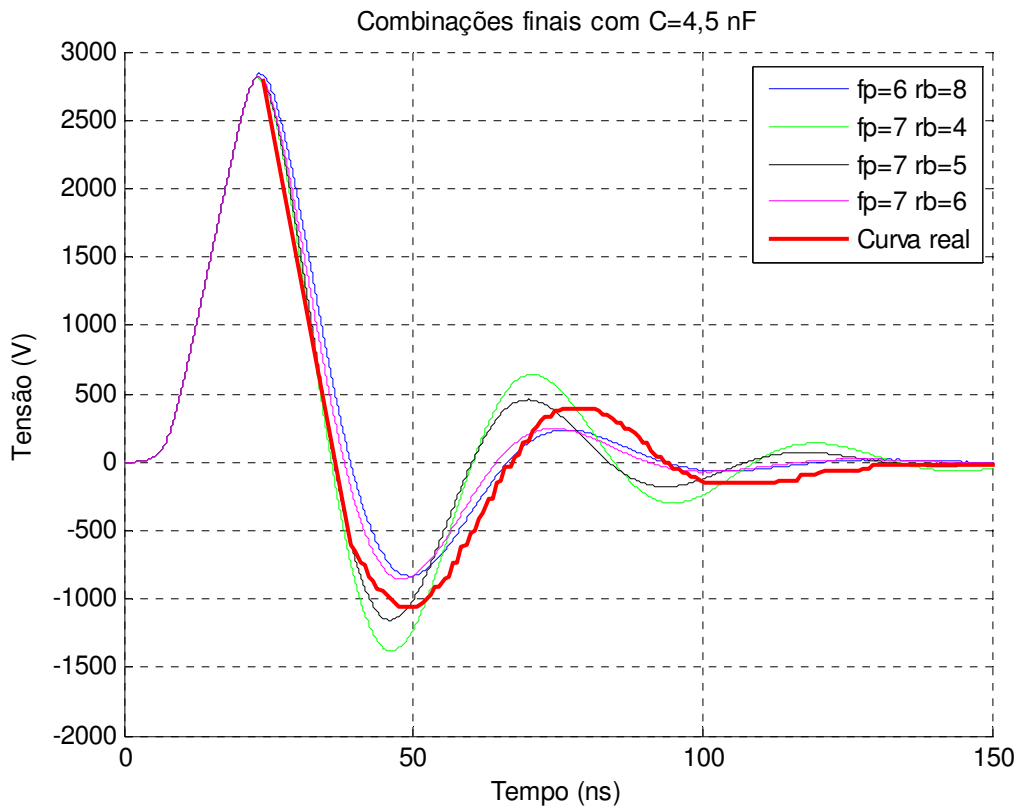


Figura 39 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 5 a 8

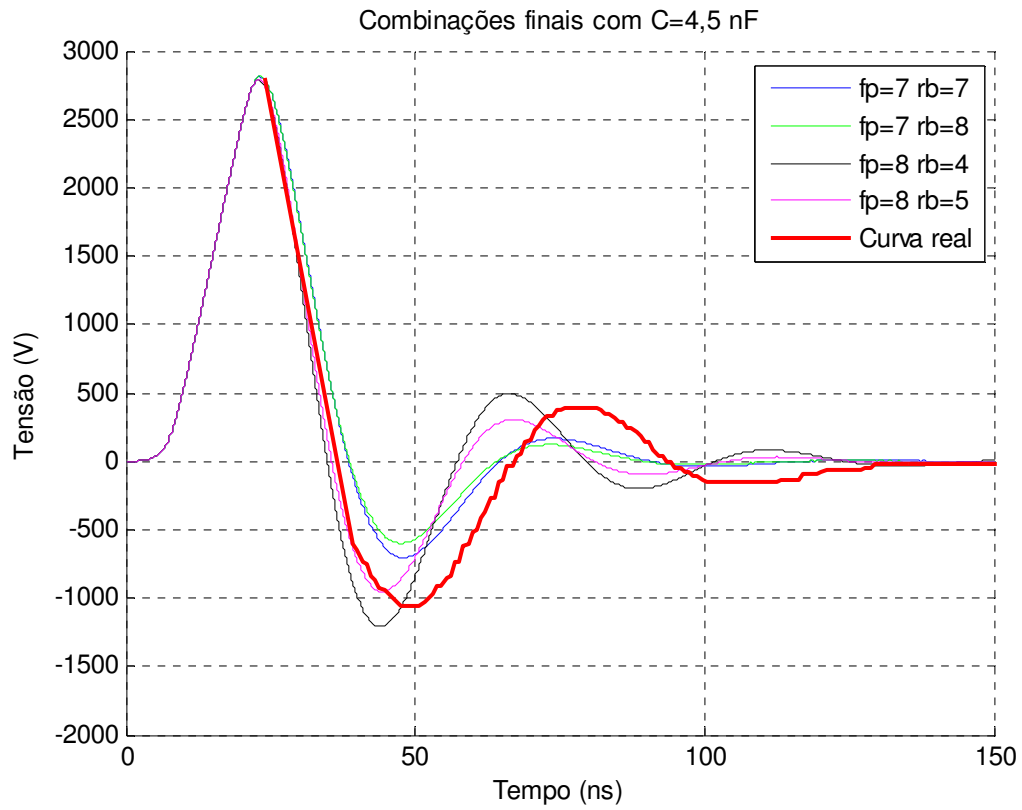


Figura 40 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 9 a 12

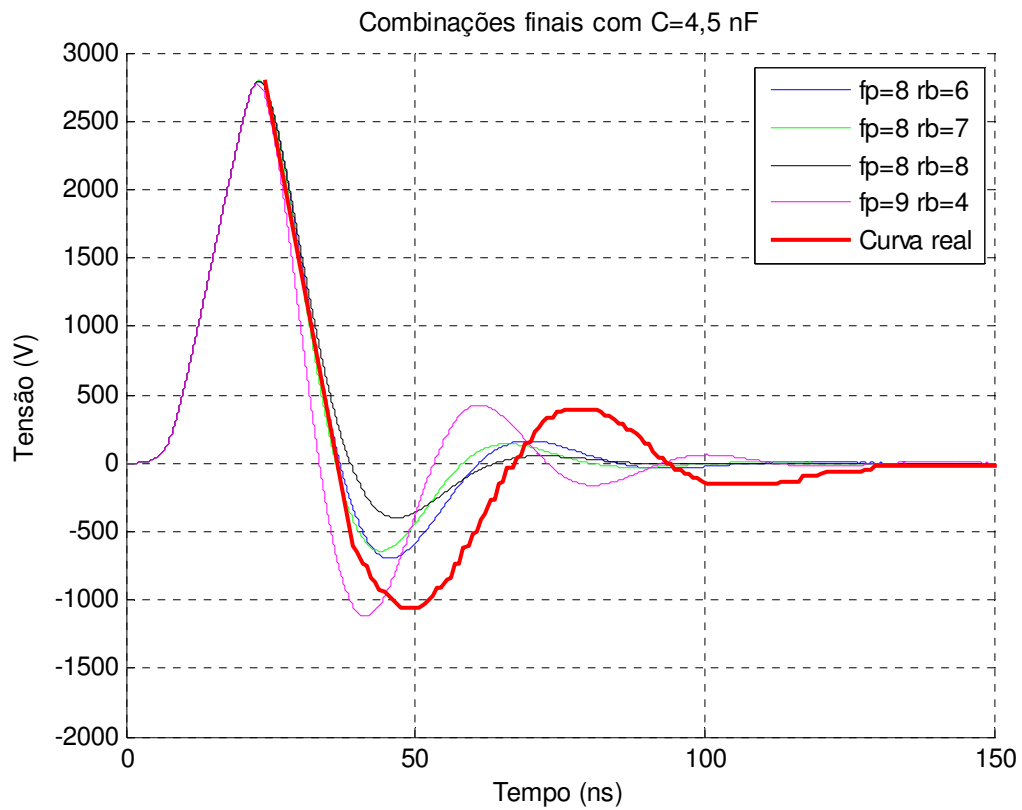


Figura 41 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 13 a 16

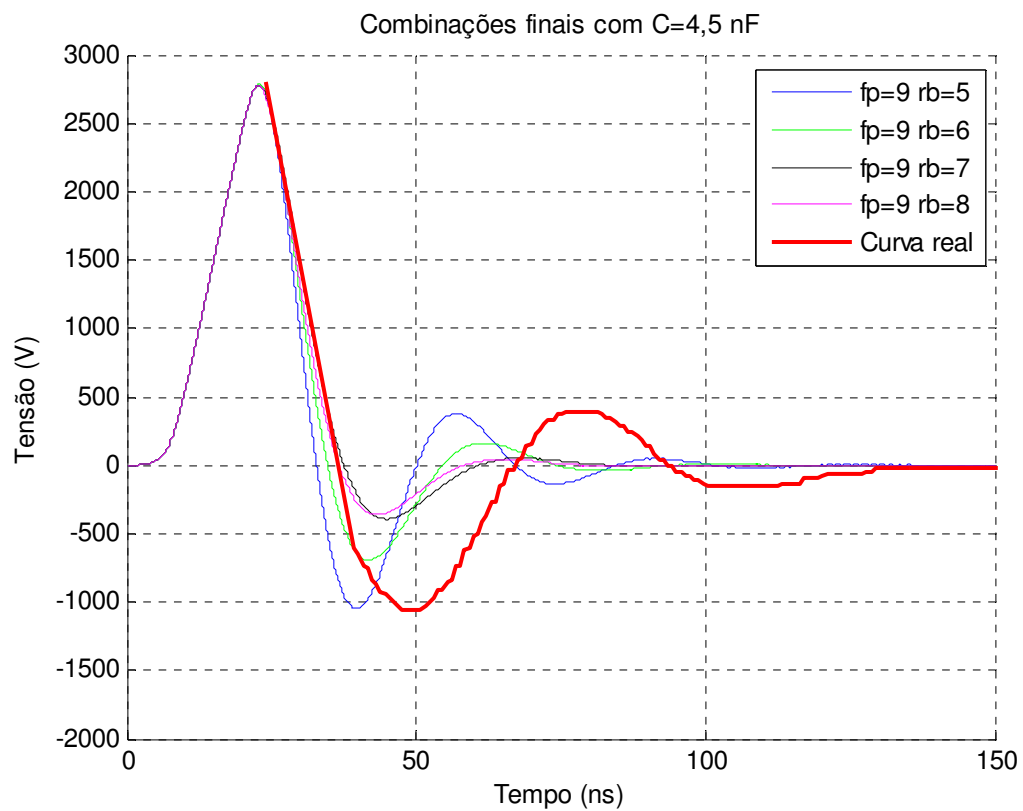


Figura 42 - Comparação das curvas calculadas com a curva real. Curvas 17 a 20

8.4. ARTIGO GERADO