

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E SETOR DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM
ENGENHARIA**

ROBERTO JOSÉ VANZUIT

**ANÁLISE DO FLUXO BIDIMENSIONAL DE CALOR PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO COM SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS
INDEPENDENTES DO TEMPO**

**Curitiba, PR
2007**

ROBERTO JOSÉ VANZUIT

**ANÁLISE DO FLUXO BIDIMENSIONAL DE CALOR PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO COM SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS
INDEPENDENTES DO TEMPO**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos do Setor de Tecnologia/Setor de Ciências Exatas, Departamento de Engenharia Civil/Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná

Orientador: Prof. JOSÉ ANTONIO MARQUES CARRER

Orientador: Prof. LUIZ ALKIMIN DE LACERDA

CURITIBA
2007

TERMO DE APROVAÇÃO

Roberto José Vanzuit

“ANÁLISE DO FLUXO BIDIMENSIONAL DE CALOR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS INDEPENDENTES DO TEMPO”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Área de Concentração em Mecânica Computacional, Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:

Prof. José Antonio Marques Carrer, D. Sc.
Departamento de Matemática da UFPR

Co-Orientador:

Luiz Alkimin de Lacerda, D. Sc.
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos e
Engenharia – UFPR

Prof. José Cláudio de Faria Telles, Ph. D.
COPPE/ UFRJ

Prof. Sérgio Scheer, D. Sc.
CESEC/UFPR

Prof^a. Simone dos Santos Hoefel, D. Sc.
Departamento de Engenharia Mecânica, Unicenp

Curitiba, 17 de Outubro de 2007.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer a Deus, que em todos os momentos esteve presente, dando-me ânimo, coragem, força, consolo, ajuda e principalmente amor, para que o sonho de fazer mestrado, postergado durante tantos anos, pudesse se tornar realidade.

A minha esposa Leila e as minhas filhas: Amanda, Debora e Alessandra, pelo apoio e incentivo no decorrer de todo este tempo, onde tantas dificuldades e incertezas foram vivenciadas. A minha mãe Glacy e a minha irmã Roselaine pelo socorro sempre presente nas horas de necessidades.

Aos meus orientadores: Prof. Carrer, pela amizade, compreensão e estímulo para que este trabalho fosse realizado e ao Prof. Alkimin pela disponibilidade e atenção.

A secretária do Cesec, Maristela Bandil, pelo encorajamento desde primeiro contato, pela amizade desenvolvida no decorrer do tempo e o cafezinho sempre pronto para repor as energias.

Aos professores do programa que possibilitaram os ensinamentos necessários para que os objetivos fossem alcançados.

Ao Raphael, que colaborou imensamente nas dificuldades encontradas no período de adaptação ao retorno da vida acadêmica e ao Lucas pela paciência e companheirismo desenvolvido neste tempo de convivência.

Ao pessoal do “aquário”: Cassius, Celso, Fernando, Gladis, Luiz, Maiko, Ricardo, Rodrigo e Wyrllen, pessoas que tiveram um papel determinante na conclusão deste trabalho, através de suas atitudes de amizade, solidariedade e principalmente pelos momentos agradáveis que proporcionaram uma descontração terapêutica.

E as demais pessoas que direta ou indiretamente colaboraram para a conclusão desta dissertação.

“ O conhecimento sem a sabedoria
é como um navio sem leme. ”
Roberto Vanzuit

SUMÁRIO

LISTA DE TABELA	vii
LISTA DE FIGURAS	viii
RESUMO	x
ABSTRACT	xi
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
1.2 ORGANIZAÇÃO	6
2 TEORIA DE TRANSMISSÃO DE CALOR	7
2.1 CAMPO ESCALAR	7
2.2 TRANSMISSÃO DE CALOR	9
2.3 LEIS BÁSICAS DE TRANSMISSÃO DE CALOR	9
2.4 DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO	12
3 METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA DIFUSÃO TRANSIENTE	16
3.1 DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO E DO DOMÍNIO	23
3.2 MARCHA NO TEMPO E SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES	25
4 EXEMPLOS NÚMERICOS	30
4.1 EXEMPLO 1	31
4.1.1 Validação dos Resultados	32
4.2 EXEMPLO 2	35
4.2.1 Validação dos Resultados	37
4.3 EXEMPLO 3	41
4.3.1 Validação dos Resultados	44
4.4 EXEMPLO 4	48
4.4.1 Validação dos Resultados	50
REFERÊNCIAS	53
APENDICE A	60
APENDICE B	65

LISTA DE TABELA

Tabela 4.1 Valor da temperatura dos pontos internos em função do tempo obtidos com o MEC.....	46
Tabela 4.2 Valor da temperatura dos pontos internos em função do tempo obtidos com o MEC.....	51

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Isotermas para um campo escalar	8
Figura 2.2 Distribuição de temperatura para condução de calor	11
Figura 2.3 Esquema para a derivação da equação da difusão em coordenadas cartesianas.....	13
Figura 3.1 Domínio e condições de contorno.....	17
Figura 3.2 Definição do ângulo interno para cálculo de $c(\xi)$	22
Figura 3.3 Exemplos de elementos de contorno.....	23
Figura 3.4 Discretização do contorno Γ e do domínio Ω	24
Figura 4.1 Geometria e condições de contorno.....	32
Figura 4.2 Potencial em $A(l/2, l/4)$ e em $B(l, l/4)$: a) esquema MEC-DR, b) esquema MEC-DRH.....	33
Figura 4.3 Fluxo em $C(0, l/4)$: a) esquema MEC-DR, b) esquema MEC-DRH.....	34
Figura 4.4 Distribuição de temperatura para $t = 10$	34
Figura 4.5 Geometria e condições de contorno.....	36
Figura 4.6 Potencial em $A(l/2, l/4)$: a,c,e) esquema MEC-DR, b,d,f) esquema MEC-DRH.....	38
Figura 4.7 Fluxo em $B(l, l/4)$: a,c,e) esquema MEC-DR, b,d,f) esquema MEC-DRH ...	39
Figura 4.8 Fluxo em $C(0, l/4)$: a,c,e) esquema MEC-DR, b,d,f) esquema MEC-DRH .	41
Figura 4.9 Geometria e Carregamento da Placa.....	42
Figura 4.10 Potencial nos pontos A e B pelo esquema MEC-DR.....	44
Figura 4.11 Potencial nos pontos A e B pelo esquema MEC-DRH.....	45
Figura 4.12 Localização dos pontos na placa para gerar gráfico das isotérmicas.....	46
Figura 4.13 Distribuição de temperatura.....	47
Figura 4.14 Esquema da Geometria e carregamento da placa	48
Figura 4.15 Esquema das células triangulares para 40 elementos	49
Figura 4.16 Placa circular: potencial no ponto central: esquema MEC-DR, b) esquema MEC-DRH.....	50
Figura 4.17 Visualização das faixas isotérmicas para o instante $t=5s$	52

Figura A.1. Circulo de raio r centrado em ξ no domínio infinito Ω_∞ .	61
Figura A.2. Circulo de raio r centrado em ξ no domínio infinito Ω_∞ .	63
Figura B.1 Discretização do domínio Ω em células triangulares.	65
Figura B.2 Numeração local para uma célula triangular.	66
Figura B.3 Áreas para a definição de coordenadas triangulares	67
Figura B.4 Coordenadas polares com origem no ponto	71
Figura B.5 Coordenadas polares com origem no ponto ξ_i	72
Figura B.6 Ponto fonte $\underline{\xi}$ como origem do sistema para a célula singular	73

RESUMO

Apresenta-se o desenvolvimento de uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para fluxo de calor na qual é empregada, como solução fundamental, a solução da equação de Laplace. Note-se que, embora a análise seja no domínio do tempo, emprega-se uma solução fundamental que não seja dependente do tempo. Como consequência, nas equações integrais do MEC correspondentes ao problema analisado, uma integral de domínio envolvendo o produto da solução fundamental e a derivada primeira da variável básica do problema permanece na formulação. A presença da integral de domínio impõe a necessidade de discretização de todo o domínio do problema quando da solução numérica. Para essa discretização são empregadas células triangulares lineares. O processo de marcha no tempo, que é outro tópico que merece atenção, emprega esquemas de diferenças finitas e Houbolt. A utilização de um programa de computador, em linguagem Fortran, proporciona as diversas análises efetuadas, com o objetivo de se verificar a acurácia dos resultados obtidos com o emprego da formulação proposta.

ABSTRACT

It is presented a Boundary Element Method formulation for heat flow in which is used, as the fundamental solution, the Laplace equation solution. It is noticeable that, even though it is a time domain analysis, a fundamental solution that is not dependent on time can be used. As a consequence, in those integral equations of BEM correspondent to the problem analyzed, a domain integral involving the product of the fundamental solution and the first derivative of the basic variable of the problem remains in the formulation. The presence of the domain integral imposes the necessity of discretization of the entire problem domain for the numeric solution. For this discretization triangular linear cells are used. The marching process in time, which is another topic that deserves attention, is implemented with finite differences and Houbolt schemes. Several analyses are performed, with the objective of verifying the accuracy of the obtained results with the proposed formulation.

1 INTRODUÇÃO

O assunto a ser tratado neste trabalho será a aplicação do Método dos Elementos de Contorno aos problemas de fluxo bidimensional de calor com o emprego de soluções fundamentais independentes do tempo; em outras palavras, o trabalho consiste na solução numérica da equação da difusão com o emprego do Método dos Elementos de Contorno. De acordo com INCROPERA e DeWITT (1992), o principal objetivo na análise da condução de calor é determinar o campo de temperatura que resulta das condições impostas no contorno do meio estudado. Isto é, a finalidade é conhecer a distribuição de temperatura, ou a variação da temperatura em função da posição no meio. Uma vez conhecida esta distribuição, o fluxo de calor para qualquer ponto no meio ou na superfície pode ser calculado pela 1ª lei de Fourier. Outras importantes grandezas de interesse podem ser também determinadas; por exemplo: para um sólido o conhecimento da distribuição de temperatura pode ser usado em análise de integridade estrutural através da determinação da tensão térmica, de expansões e de deformações. A análise da distribuição de temperatura pode ser usada também para otimizar a espessura ou para indicar o emprego de determinado material isolante.

A procura do homem em compreender os fenômenos da natureza tem sido incessante; as pesquisas que se tem desenvolvido ao longo do tempo objetivam reproduzir os fenômenos estudados, principalmente através de formulações matemáticas, para que se consiga entender o funcionamento de cada sistema. A impossibilidade de se encontrar uma solução analítica para a maior parte dos problemas estudados, de um lado, e a dificuldade de se encontrar soluções aproximadas com o emprego de métodos numéricos, de outro, foram entraves para a análise de muitos fenômenos de interesse. Com a evolução dos computadores os métodos numéricos passaram a ser utilizado para um número bem maior de problemas.

Entre os métodos numéricos empregados em engenharia e nas ciências em geral, podem ser citados: Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Elementos de Contorno (MEC), etc. Todos

apresentam vantagens e desvantagens e, muitas vezes, a sua utilização depende de uma análise criteriosa do problema a ser resolvido. O acoplamento das diversas técnicas também tem sido objeto de estudo, de tal modo a se tirar proveito somente das características favoráveis dos métodos empregados. Por exemplo, em problemas de interação solo-estrutura, o solo (considerado um meio semi-infinito) pode ser discretizado com o emprego do MEC e a estrutura, com emprego do MEF.

O Método dos Elementos de Contorno tem se estabelecido como uma importante técnica de análise de problemas da mecânica do contínuo. A técnica consiste na transformação da equação diferencial que descreve o fenômeno estudado em uma equação integral que relaciona somente valores de contorno, por exemplo, potencial e fluxo quando o problema a ser resolvido é governado pela equação de Laplace. As incógnitas, isto é, as soluções aproximadas, são encontradas a partir da resolução de um sistema de equações algébricas gerado após a introdução de aproximações nas grandezas envolvidas na análise. Valores das grandezas em pontos internos, quando requeridos, são calculados a partir dos dados do contorno. Como toda aproximação numérica que somente toma valores do contorno, a dimensão do problema é reduzida em uma unidade e o sistema de equações tende a ser menor quando comparado com os sistemas gerados por outras técnicas numéricas. Ao lado da redução da dimensionalidade, outra vantagem das formulações do MEC, a elevada acurácia dos resultados, merece ser citada.

Como mencionado no início desta Introdução, este trabalho trata da aplicação do Método dos Elementos de Contorno aos problemas de fluxo bidimensional de calor com o emprego de solução fundamental independente do tempo. Devido ao emprego da solução independente do tempo, as equações do MEC passam a apresentar uma integral de domínio que envolve o produto da solução fundamental com a derivada, em relação ao tempo, do potencial. A integração de domínio não apresenta dificuldades técnicas; o assunto que requer atenção e merece ser estudado mais profundamente diz respeito problema de avanço no tempo, isto é, a aproximação que será adotada para a derivada temporal do potencial. A escolha do intervalo de tempo a ser adotado também é um assunto que merece estudo, uma vez que, até onde é do conhecimento do autor,

essa escolha tem sido feita com base empírica. Duas alternativas de avanço no tempo são apresentadas nesse trabalho: na primeira, emprega-se uma fórmula de diferença finita regressiva durante toda a análise; na segunda, emprega-se uma fórmula de diferença regressiva no início da análise, durante os dois primeiros intervalos de tempo, em seguida, emprega-se o esquema de HOUBOLT (1950).

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Conforme BREBBIA, TELLES e WROBEL (1984), historicamente, a aplicação das equações integrais para a formulação a fundamentação de problemas de valor de contorno da teoria de potencial data de 1903 quando FREDHOLM (1903), mostrou a existência de soluções para tais equações, na base de um procedimento de discretização. Devido à dificuldade de encontrar soluções analíticas, o uso de equações integrais tem, na maior parte das vezes, sido limitado pela investigação teórica para a existência e uma solução única dos problemas de física matemática.

A equação integral de Fredholm segue da representação do potencial harmônico por integrais simples e duplas de potenciais e é o fundamento para o chamado método dos elementos de contorno indireto. A equação integral vetorial analogamente a equação integral de Fredholm da teoria do potencial foi introduzida por KUPRADZE (1965), no contexto da teoria da elasticidade.

A equação integral para problemas lineares pode alternativamente ser formulada através da aplicação da terceira identidade de Green, KELLOGG (1929), a qual representa uma função harmônica como a superposição de uma camada simples e uma camada dupla do potencial. Tomando o ponto campo do contorno, uma equação integral, relacionando somente os valores do contorno e as derivadas normais das funções harmônicas é obtida. Em contrapartida na elasticidade é identidade de Somigliana, SOMIGLIANA (1886), e seu uso ocasionou o método dos elementos de contorno direto. Mais recentemente, foi demonstrado que a relação da mesma integral pode ser obtida pela consideração dos resíduos ponderados, BREBBIA (1978). Desse modo, torna-se fácil relacionar e combinar o método dos elementos de contorno com outras técnicas numéricas, tais como o Método dos Elementos Finitos, bem como

estendê-lo para análises de problemas governados por equações diferenciais mais complexas, incluindo as não lineares

JASWON (1963) e SYMM (1963) apresentaram uma técnica numérica para resolver a equação de contorno integral de Fredholm. A técnica consiste na discretização do contorno em uma pequena série de segmentos (elementos), admitindo que a densidade da fonte permanece constante dentro de cada segmento

O método dos elementos de contorno tem sido relacionado com outras técnicas numéricas tais como método dos elementos finitos, ZIENKIEWICZ, KELLY e BETTESS (1977), e, também em BREBBIA e GEORGIU (1979), e diferenças finitas, como descrito em BREBBIA, TELLES e WROBEL (1984).

O MEC tem sido aplicado para uma variedade de problemas de transferência de calor nos últimos trinta anos. Aplicações iniciais do método foram feitas para problemas estacionários de condução de calor, descritos pela equação de Laplace. No entanto, formulações do MEC também podem ser desenvolvidas para outros modos de transferência de calor, tais como, convecção e radiação. A primeira formulação foi proposta em RIZZO e SHIPPY, 1970, que aplicaram a formulação direta do método dos elementos de contorno em conjunto com a transformada de Laplace para resolver os problemas de condução de calor transiente. Admitindo que todas as funções pertinentes possuem transformada de Laplace, uma equação integral de contorno é derivada e resolvida no espaço das transformadas, para uma seqüência valores reais positivos de transformar o parâmetro. Um procedimento de inversão na transformação numérica é então empregado para computar as variáveis físicas no espaço real. Usando esta aproximação, o problema de dependência do tempo é temporariamente removido. Notou-se que a equação diferencial parcial elíptica é mais simples de resolver do que a equação diferencial parcial parabólica original.

BUTTERFIELD e TOMLIN (1972) empregam a formulação indireta para a análise do meio ortotrópico, tais como ocorrem na engenharia geotécnica . Soluções transientes eram geradas por distribuição instantânea de fontes sobre a região do problema para o tempo zero para reproduzir as condições iniciais e fontes contínuas

sobre a região de contorno e interfaces, satisfazendo as condições de contorno prescritas e as condições de interface.

CHANG, KANG e CHEN (1972) empregam a solução fundamental dependente do tempo no contexto do método direto para resolver problemas de condução de calor bidimensional no meio isotrópico e anisotrópico. A discretização da equação integral de contorno foi realizada com divisões no espaço e o tempo com valores constantes para as variáveis.

Outra formulação integral alternativa para a solução do problema transiente é o acoplamento do elemento de contorno com o método das diferenças finitas proposta por BREBBIA e WALKER (1980). Nesta aproximação, a derivada no tempo é aproximada na forma de uma diferença finita é um procedimento de diferença finita empregado passo a passo para uma solução de avanço no tempo.

Os esquemas alternativos de marcha no tempo, Houbolt e Newmark, como mostrado em LOEFFLER NETO (1988) e CARRER e MANSUR (2004), também são utilizados.

De acordo com LOEFFLER NETO, 1988, basicamente a formulação criada por NARDINI e BREBBIA (1982), por eles denominada “Dupla Reciprocidade”, consiste no emprego de soluções fundamentais independentes do tempo, juntamente com um procedimento que elimina todas as integrações no domínio, mesmo as originárias do processo transiente ou da presença de ações no interior do sistema. Outras características importantes são a simplicidade, facilidade de implementação, baixo custo computacional e universalidade. Essas formulações com usadas de diferenças finitas, dupla reciprocidade e solução fundamental independente do tempo, foram utilizadas nos trabalhos de JESUS (2001) e também em CAVALCANTI e TELLES (2003).

Os primeiros esforços visando entender a equação integral do MEC para abranger problemas variáveis com o tempo foram feitos, segundo relata WROBEL, (2002), por RIZZO e SHIPPY (1970). Essa iniciativa dedicava-se a análise de problemas de transmissão de calor e empregava a transformada de Laplace para reescrever a equação integral em termos de outro espaço matemático, onde a

dependência do problema no tempo era removida. A solução no domínio do tempo era, então, obtida a partir de soluções no espaço transformado através de um algoritmo numérico de inversão de transformadas. A mesma técnica foi empregada com as primeiras publicações enfocando vibrações e propagação de ondas elásticas. Um trabalho que utilizou a teoria apresentada por WROBEL (1981), sem a consideração da contribuição de termos envolvendo integrais de domínio, foi o de EFREN (1997).

Podemos também destacar outros trabalhos com a solução dependentes do tempo, tais como YOUNG, TSAI, MURUGESAN e CHEN (2004) e OCHIAI, SLADEK e SLADEK (2006).

1.2 ORGANIZAÇÃO

O trabalho foi organizado da seguinte maneira:

No capítulo 2 é feita uma revisão da teoria da transmissão de calor, que consta da definição de campo escalar, das várias formas de transmissão de calor, das leis básicas e finaliza com a dedução da equação de difusão.

No capítulo 3, é feita a abordagem do Método de Elemento de Contorno para a difusão transiente, apresentando o procedimento de marcha no tempo e a solução numérica das equações integrais.

No capítulo 4 são apresentados os problemas resolvidos. Destes, os dois primeiros são de natureza unidimensional e os dois últimos, bidimensionais de fato. Para todos os exemplos são apresentadas as soluções analíticas correspondentes, o que possibilita verificar a precisão das respostas numéricas.

Considerações finais e propostas de novos trabalhos são apresentadas no capítulo Conclusões.

Dois apêndices foram incluídos: o Apêndice A contém a solução fundamental e o Apêndice B, a integração das células triangulares lineares.

2 TEORIA DE TRANSMISSÃO DE CALOR

Transmissão de calor é a denominação dada à passagem da energia térmica (que durante a transferência recebe o nome de calor) de um corpo para outro ou de uma parte para outra do mesmo corpo. Este capítulo será desenvolvido abordando os seguintes tópicos: campo escalar, transmissão de calor, leis básicas da transmissão de calor e dedução da equação da difusão.

2.1 CAMPO ESCALAR

Segundo LOEFFLER NETO (1988), a teoria de campo ou potencial constitui-se numa abordagem recente, desenvolvida principalmente no século passado, objetivando integrar os diversos problemas físicos presentes na natureza segundo um enfoque matemático.

Esse enfoque associa a cada ponto de uma determinada região do espaço ou domínio do sistema um ou mais números que representam uma quantidade física contida nesse domínio. Esses números ou potenciais podem especificar temperatura, pressão, densidade elétrica, deslocamentos e outras grandezas. Essa totalidade de quantidades físicas constitui um campo, que toma a designação específica de cada fenômeno, tal como: campo gravitacional, campo elétrico, campo térmico, campo de deslocamentos, etc.

O modelo matemático concebido pela teoria de campos estabelece uma rede de linhas de fluxo e linhas equipotenciais, que representam o comportamento da grandeza física no espaço considerado.

Muitos problemas envolvem a especificação de uma única quantidade para cada ponto do espaço; nestes casos, diz-se existir um campo escalar. O campo físico mais simples é um campo escalar. Caso o problema exija a associação de dois ou mais números a cada ponto, tem-se aí um campo vetorial.

Como um exemplo de um campo escalar, considere um bloco de material sólido que foi aquecido em algumas partes e esfriado em outras, de modo que a temperatura do corpo varia de um ponto a outro. Então a temperatura será uma função das coordenadas cartesianas (x,y,z) no espaço. A temperatura é um campo escalar. Conseqüentemente, a cada ponto (x,y,z) do espaço está associado um número $T(x,y,z)$

Uma maneira útil de trabalhar com campos escalares consiste em se definir "contornos", ou superfícies imaginárias, que passam em todos os pontos do campo que possuem o mesmo valor, como linhas de nível em um mapa. Para um campo de temperatura os contornos são chamados "superfícies isotérmicas" ou isotermas. A Figura 2.1, ilustra um campo de temperatura e mostra a dependência de $T = T(x,y)$ quando $z = 0$. Várias isotermas estão desenhadas.

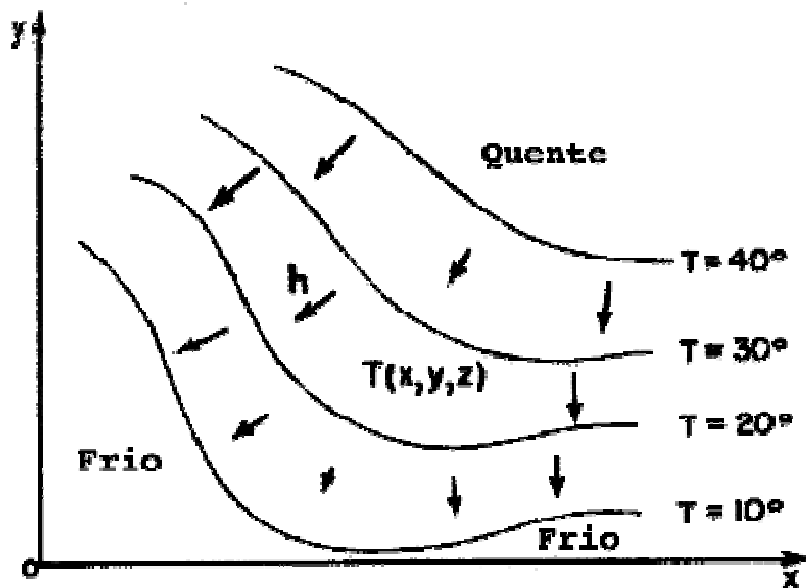


Figura 2.1 Isotermas para um campo escalar

2.2 TRANSMISSÃO DE CALOR

Em KREITH (1973), a transmissão de calor é definida como transmissão de energia de uma região para outra como resultado de uma diferença de temperatura entre as regiões. Como existem diferenças de temperatura em todo o universo, os fenômenos da transmissão de calor são tão universais quanto os associados às atrações gravitacionais.

A transmissão de calor ocorre de três maneiras distintas:

a) CONDUÇÃO – é o processo pela qual o calor flui de uma região de temperatura mais alta para outra de temperatura mais baixa, dentro de um meio (sólido, líquido ou gasoso) ou entre meios diferentes em contato físico direto. Na transmissão de calor por condução, a energia é transmitida por meio da comunicação molecular direta, sem apreciável deslocamento das moléculas.

b) CONVECÇÃO – o modo de transferência de calor pela convecção compreende dois mecanismos. Além da transferência de energia provocada pelo movimento molecular aleatório (difusão), a energia também se transfere pelo movimento de massa, ou macroscópico, do fluido.

c) RADIAÇÃO – é um processo pelo qual o calor é transmitido de um corpo a alta temperatura para outro com temperatura mais baixa quando tais corpos estão separados no espaço ainda que exista vácuo entre eles.

2.3 LEIS BÁSICAS DE TRANSMISSÃO DE CALOR

Qualquer análise significativa na engenharia requer uma resposta quantitativa. Para executar tal análise dos problemas de transmissão de calor, devem ser investigadas as leis e relações físicas que governam os vários mecanismos de condução de calor. Como o enfoque deste trabalho é a condução de calor, será usada a relação básica para transmissão de calor por condução, que foi proposta por J.B. Fourier em 1822, é uma lei fenomenológica, isto é, uma lei desenvolvida a partir de

fenômenos observados e não desenvolvida por princípios fundamentais. É possível quantificar o processo de transferência de calor através da seguinte equação:

$$q_k = -\alpha A \frac{dT}{dx} \quad (2. 1)$$

onde:

q_k = calor transmitido por unidade de tempo

α = condutividade térmica do material

A = área da seção através da qual o calor flui por condução , medida perpendicularmente à direção do fluxo.

dT/dx = gradiente de temperatura na seção, isto é, a razão de variação de temperatura com a distância, na direção do fluxo de calor x .

Pela segunda lei da Termodinâmica, o calor automaticamente fluirá dos pontos de temperatura mais alta para os de temperatura mais baixa; o fluxo de calor será positivo quando o gradiente de temperatura for negativo.

Para o caso simples de transmissão de calor em regime permanente através de uma parede plana, o gradiente de temperatura e o calor transmitido por unidade de tempo não variam com o tempo, e a área da seção transversal no caminho do fluxo é uniforme. As variáveis na equação (2.1) podem ser separadas, e a equação resultante fica:

$$\frac{q_x}{A} \int_0^L dx = \int_{T_{quente}}^{T_{frio}} \alpha dT \quad (2. 2)$$

Os limites de integração podem ser identificados na Figura 2.2, onde a temperatura na face esquerda ($x=0$) é uniforme e designada por T_{quente} e a temperatura na face direita ($x=L$) também é uniforme e é designada por T_{fria} .

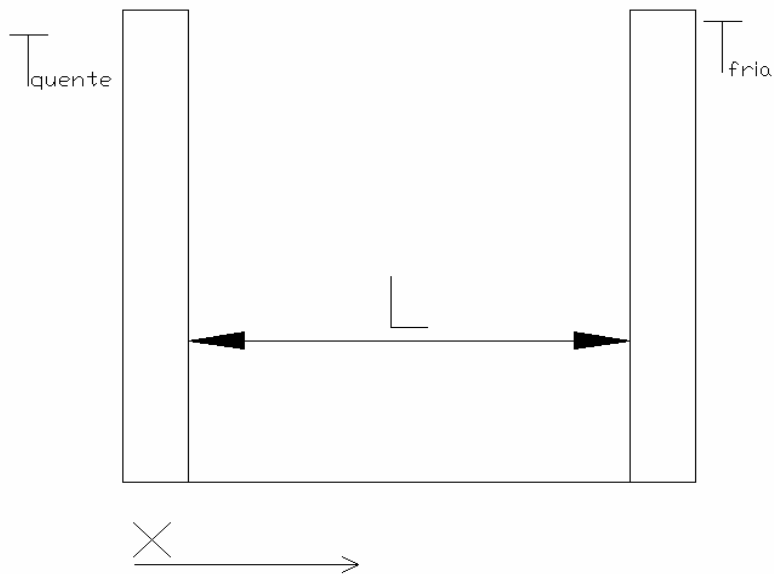


Figura 2.2 Distribuição de temperatura para condução de calor

Se α for independente do tempo, após a integração a seguinte equação é obtida para a condução de calor através da parede:

$$q_k = \frac{A\alpha}{L}(T_{quente} - T_{fria}) = \frac{\Delta T}{L/A\alpha} \quad (2.3)$$

Nesta equação $\Delta T = T_{quente} - T_{fria}$ consiste no potencial que causa a transmissão de calor.

O quociente $L/A\alpha$ é equivalente a uma *resistência térmica* R_α que a parede oferece à transmissão de calor por condução; assim:

$$R_\alpha = \frac{L}{A\alpha} \quad (2.4)$$

A recíproca da resistência térmica é chamada *condutância térmica*

$$K_\alpha = \frac{A\alpha}{L} \quad (2.5)$$

2.4 DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO

Considere-se um pequeno elemento de material num corpo sólido, KREITH (1973). O elemento tem forma de um paralelepípedo, de lados dx , dy e dz paralelos, respectivamente, aos eixos coordenados x, y e z , como mostrado na Fig 2.3. Para a obtenção da equação que governa a distribuição de temperaturas, é feito o balanço de energia para o elemento que, semanticamente, adquire a forma:

calor que entra por unidade de tempo	+	calor gerado por unidade de tempo	=	calor que sai por unidade de tempo	+	variação de energia interna com o tempo
---	---	--------------------------------------	---	---------------------------------------	---	--

ou algebricamente como:

$$(q_x + q_y + q_z) + \dot{q}(dxdydz) = (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) + c\rho(dxdydz) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.6)$$

onde \dot{q} , o calor gerado por unidade de tempo e por unidade de volume, e a temperatura T são, em geral, funções das coordenadas espaciais (x, y, z) e do tempo t .

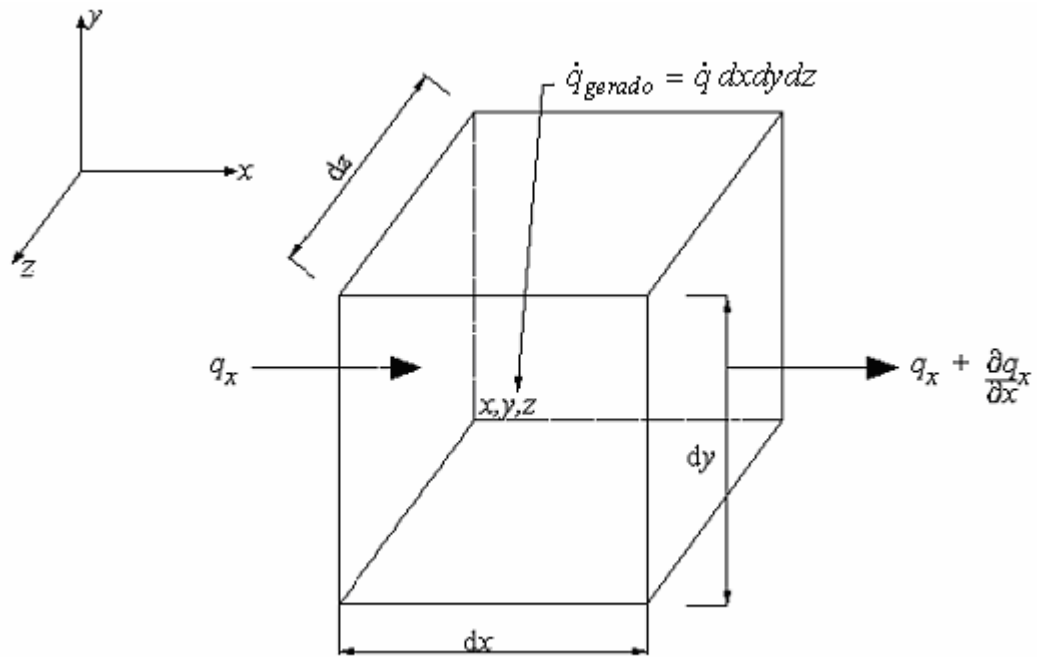


Figura 2.3 Esquema para a derivação da equação da difusão em coordenadas cartesianas.

O calor transmitido para o elemento por unidade de tempo através da face à esquerda, na direção x , q_x , pode ser escrito, de acordo com a equação (2.1), como:

$$q_x = \left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) dydz \quad (2.7)$$

O calor transmitido para fora do elemento, por unidade de tempo, através da face à direita, em $x + dx$, é:

$$q_{x+dx} = \left[\left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dydz \quad (2.8)$$

Subtraindo-se o calor conduzido para fora do elemento do calor conduzido para dentro do elemento, obtém-se

$$q_x - q_{x+dx} = -\frac{\partial\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial x} dx dy dz \quad (2.9)$$

Procedendo-se analogamente para as direções y e z :

$$q_y - q_{y+dy} = -\frac{\partial\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial y}\right)}{\partial y} dx dy dz \quad (2.10)$$

$$q_z - q_{z+dz} = -\frac{\partial\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial z}\right)}{\partial z} dx dy dz \quad (2.11)$$

Substituindo essas relações no balanço de energia e dividindo cada termo por $dx dy dz$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.12)$$

se o sistema que o meio é homogêneo, que o calor específico c juntamente com a densidade ρ são independente da temperatura e que α seja admitido uniforme, a Eq. (2.12) poderá ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{\alpha} = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.13)$$

onde a constante $k = \alpha/\rho c$ é chamada *difusividade térmica* e tem dimensão em m^2/h , no sistema métrico. A Eq. (2.13) é conhecida como a *equação geral de condução de calor*, e estabelece a distribuição de temperatura e a transmissão de calor por condução em um sólido que possui propriedades físicas uniformes.

Se o sistema não incluir geração interna de calor, a Eq. (2.13) se reduzirá à *Equação de Fourier*:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.14)$$

Se o sistema estiver em regime permanente, mas incluir geração interna de calor, a Eq. (2.14) se transformará na *equação de Poisson*:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{\alpha} = 0 \quad (2.15)$$

Em regime permanente, a distribuição de temperatura num corpo sem geração interna de calor deverá satisfazer a *equação de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2.16)$$

3 METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA DIFUSÃO TRANSIENTE

Neste capítulo serão apresentadas as equações integrais de contorno correspondentes aos problemas governados pela equação da difusão transiente, nos quais as variáveis são: o potencial (u) e sua derivada normal o fluxo (q).

A equação diferencial que governa o problema de fluxo de calor, dada pela Eq. (2.14), pode ser reescrita conforme BREBBIA, TELLES e WROBEL (1984):

$$\nabla^2 u(x,t) - \frac{1}{k} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \quad x \in \Omega \quad (3.1)$$

O coeficiente k , que é o coeficiente de difusividade térmica, na Eq.(3.1) admite diferentes interpretações de acordo com o problema físico em questão, supondo-se que seja constante no tempo e no espaço

com as condições de contorno essenciais ou de Dirichlet:

$$u(x,t) = \bar{u}(x,t) \quad x \in \Gamma_u \quad (3.2)$$

com as condições de contorno naturais ou de Neumann:

$$q(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial n(x)} = \bar{q}(x,t) \quad x \in \Gamma_q \quad (3.3)$$

A Figura 3.1 representa, esquematicamente, o domínio Ω e as partes do contorno designadas por Γ_u e Γ_q . Note-se que $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$.

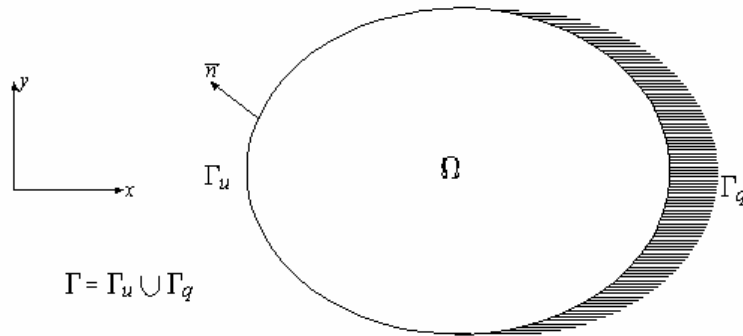


Figura 3.1 Domínio e condições de contorno

Como o problema é dependente do tempo devem-se prescrever as condições iniciais no tempo:

$$u_o(x) = \bar{u}(x,0) \quad x \in \Omega \quad (3.4)$$

Aplicando-se a técnica de resíduos ponderados, pode-se transformar a Eq.(3.1), em uma equação integral. Os passos serão apresentados na seqüência.

Admitindo que, agora, $u(x,t)$ representa a solução aproximada do problema, a substituição dessa solução aproximada na equação (3.1) gera um resíduo, ou erro, no domínio, representado por R_Ω :

$$R_\Omega = \left[\nabla^2 u(x,t) - \frac{1}{k} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right] \quad (3.5)$$

Além de R_Ω , também são gerados erros ou resíduos no contorno. Esses resíduos são:

$$R_{\Gamma_u} = u(x,t) - \bar{u}(x,t) \quad x \in \Gamma_u \quad (3.6)$$

$$R_{\Gamma_q} = q(x,t) - \bar{q}(x,t) \quad x \in \Gamma_q \quad (3.7)$$

Definido o resíduo no domínio, e no contorno, a sentença de resíduos ponderados pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} \left[\nabla^2 u(x,t) - \frac{1}{k} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right] w_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_q} [q(x,t) - \bar{q}(x,t)] w_{\Gamma_q} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} [u(x,t) - \bar{u}(x,t)] w_{\Gamma_u} d\Gamma = 0 \quad (3.8)$$

onde w_{Ω} , w_{Γ_q} e w_{Γ_u} , são as funções de ponderação. As funções de ponderação na Eq. (3.8) podem ser escolhidas de maneira conveniente, de modo a simplificar a expressão final. Assim sendo, as seguintes escolhas foram feitas:

$$w_{\Omega} = u^*(\xi, x) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r) \quad (3.9)$$

$$w_{\Gamma_u} = -u^*(\xi, x) \quad (3.10)$$

$$w_{\Gamma_q} = q^*(\xi, x) = \frac{\partial u^*}{\partial n} \quad (3.11)$$

onde ξ , assim como x , é um ponto no domínio do problema.

Substituindo as expressões para as funções de ponderação na sentença de resíduos ponderados Eq.(3.8), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u(x,t) u^*(\xi, x) d\Omega - \frac{1}{k} \int_{\Omega} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} u^*(\xi, x) d\Omega = \int_{\Gamma_u} [u(x,t) - \bar{u}] q^*(\xi, x) d\Gamma + \int_{\Gamma_q} [q(x,t) - \bar{q}] u^*(\xi, x) d\Gamma \quad (3.12)$$

A 2ª identidade de Green:

$$\int_{\Omega} \left[u^* (\nabla^2 u) - u (\nabla^2 u^*) \right] d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} u^* - \frac{\partial u^*}{\partial n} u \right) d\Gamma \quad (3.13)$$

pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \left[u^* (\nabla^2 u) - u (\nabla^2 u^*) \right] d\Omega = \int_{\Gamma} (u^* q - q^* u) d\Gamma \quad (3.14)$$

ou ainda:

$$\int_{\Omega} \left[u^* (\nabla^2 u) \right] d\Omega = \int_{\Omega} u (\nabla^2 u^*) d\Omega + \int_{\Gamma} (u^* q - q^* u) d\Gamma \quad (3.15)$$

Substituindo o primeiro termo da Eq.(3.12) pelo termo correspondente na Eq.(3.15), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u (\nabla^2 u^*) + \int_{\Gamma} (u^* q - q^* u) d\Gamma - \frac{1}{k} \int_{\Omega} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} u^* d\Omega = \\ \int_{\Gamma_q} q u^* d\Gamma_q - \int_{\Gamma_q} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} u q^* d\Gamma_u - \int_{\Gamma_u} \bar{u} q^* d\Gamma_u \end{aligned} \quad (3.16)$$

A Eq. (3.16) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u (\nabla^2 u^*) d\Omega - \frac{1}{k} \int_{\Omega} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} u^* (\xi, x) d\Omega = \\ - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_q} q u^* d\Gamma_q - \int_{\Gamma_q} \bar{q} u^* d\Gamma_q + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} u q^* d\Gamma_u + \int_{\Gamma_u} \bar{u} q^* d\Gamma_u \end{aligned} \quad (3.17)$$

Agrupando-se convenientemente os termos da equação Eq. (3.17):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u (\nabla^2 u^*) d\Omega - \frac{1}{k} \int_{\Omega} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} u^* (\xi, x) d\Omega = - \left[\int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_q} q u^* d\Gamma_q \right] - \\ \int_{\Gamma_q} \bar{q} u^* d\Gamma_q + \left[\int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} u q^* d\Gamma_u \right] + \int_{\Gamma_u} \bar{u} q^* d\Gamma_u \end{aligned} \quad (3.18)$$

Como $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$, a Eq. (3.18) fica:

$$\int_{\Omega} u(\nabla^2 u^*) d\Omega - \frac{1}{k} \int_{\Omega} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} u^*(\xi, x) d\Omega = - \int_{\Gamma_u} q u^* d\Gamma_u - \int_{\Gamma_q} \bar{q} u^* d\Gamma_q + \int_{\Gamma_q} u q^* d\Gamma_q + \int_{\Gamma_u} \bar{u} q^* d\Gamma_u \quad (3.19)$$

Agrupando-se termos semelhantes:

$$\int_{\Omega} u(\nabla^2 u^*) d\Omega - \frac{1}{k} \int_{\Omega} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} u^*(\xi, x) d\Omega = - \left[\int_{\Gamma_u} q u^* d\Gamma_u + \int_{\Gamma_q} \bar{q} u^* d\Gamma_q \right] + \int_{\Gamma_q} u q^* d\Gamma_q + \int_{\Gamma_u} \bar{u} q^* d\Gamma_u \quad (3.20)$$

A integração de domínio envolvendo o integrando $u \nabla^2 u^*$ na Eq.(3.20) pode ser evitada com o uso de uma função de ponderação, usualmente denominada *solução fundamental* quando empregada no desenvolvimento de formulações do MEC, que seja solução da equação:

$$\nabla^2 u^*(\xi, x) = -\delta(\xi, x) \quad (3.21)$$

onde $\delta(\xi, x)$ é a função Delta de Dirac. Assim, a solução fundamental é interpretada como sendo o efeito em um ponto x , denominado ponto campo, de um Delta de Dirac aplicado em um ponto ξ , denominado ponto fonte.

O Delta de Dirac possui a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega} \delta(\xi, x) f(x) d\Omega(x) = f(\xi); \quad \xi \in \Omega \quad (3.22)$$

Da substituição da Eq.(3.21) na integral de domínio do lado esquerdo da Eq. (3.20) e posterior aplicação da propriedade Eq.(3.22) resulta a equação integral abaixo para pontos $\xi \in \Omega$:

$$u(\xi, t) + \int_{\Gamma} u(x, t) q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x, t) u^*(\xi, x) d\Gamma - \frac{1}{k} \int_{\Omega} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} u^*(\xi, t) d\Omega \quad (3.23)$$

onde:

$$\int_{\Gamma} q(x, t) u^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma_u} q u^* d\Gamma_u + \int_{\Gamma_q} \bar{q} u^* d\Gamma_q \quad (3.24)$$

$$\int_{\Gamma} u(x, t) q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma_q} u q^* d\Gamma_q + \int_{\Gamma_u} \bar{u} q^* d\Gamma_u \quad (3.25)$$

A equação (3.23) permite que se calcule o valor de $u(\xi)$ em um ponto interno ξ , desde que os valores das incógnitas no contorno u e q sejam conhecidos para tempo, pode-se avançar no processo do tempo para resolver a Eq.(3.23) numericamente. O cálculo destas incógnitas é feito a partir da equação integral para os pontos fontes, localizados no contorno.

Tomando-se o limite da Eq.(3.23) quando o ponto ξ tende ao contorno Γ , tal como descrito em BREBBIA, TELLES e WROBEL (1984), desta forma, obtém-se a equação básica para a presente formulação do MEC:

$$c(\xi, t)u(\xi, t) + \int_{\Gamma} u(x, t) q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x, t) u^*(\xi, x) d\Gamma - \frac{1}{k} \int_{\Omega} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} u^*(\xi, t) d\Omega \quad (3.26)$$

Esta equação é válida para pontos ξ internos Eq. (3.23) ou pertencentes ao contorno Γ desde que se observe que, para o espaço bidimensional, os valores de $c(\xi, t)$ são calculados, como descrito em BREBBIA, TELLES e WROBEL (1984), usando-se os seguintes valores:

$$c(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi \notin \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{se } \xi \in \text{contorno suave} \\ 1 & \text{se } \xi \in \Omega \end{cases}$$

Para o caso geral, pode-se utilizar a seguinte expressão para $c(\xi)$

$$c(\xi) = \frac{\alpha}{2\pi} c \quad (3.27)$$

onde α é o ângulo interno mostrado na Fig. 3.2 abaixo.

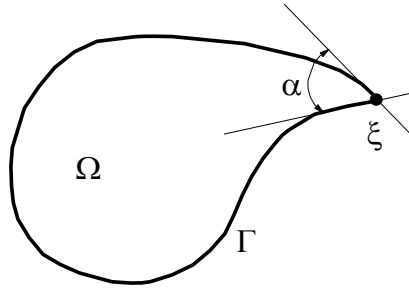


Figura 3.2 Definição do ângulo interno para cálculo de $c(\xi)$

A solução fundamental da equação possui a seguinte expressão:

$$u^*(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3.28)$$

onde $r = r(x, \xi)$ é a distância entre os pontos campo e fonte.

A derivada de u^* na direção normal, o fluxo q^* , é:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (3.29)$$

O procedimento para obtenção da solução fundamental está apresentado no Apêndice A.

3.1 DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO E DO DOMÍNIO

Conforme MANSUR, PRODANOFF e AZEVEDO (1996), para se obter a solução numérica da equação integral de contorno é necessário que o contorno Γ seja discretizado por elementos que sejam capazes de proporcionar uma boa aproximação para a geometria e que as variáveis u e q também sejam aproximadas de maneira satisfatória ao longo do contorno.

Os pontos nos quais os valores de u e de q são definidos são chamados de *nós funcionais*, para distinguí-los dos que definem a geometria do elemento, denominados *nós geométricos*. Da figura 3.3a, elementos constantes apresentam o nó funcional no meio do elemento; nos elementos lineares, os nós funcionais estão definidos nos extremos do elemento (caso mais comum), figura 3.3b e, na figura 3.3c, os nós funcionais dos elementos quadráticos estão definidos nos extremos e também no meio do elemento.

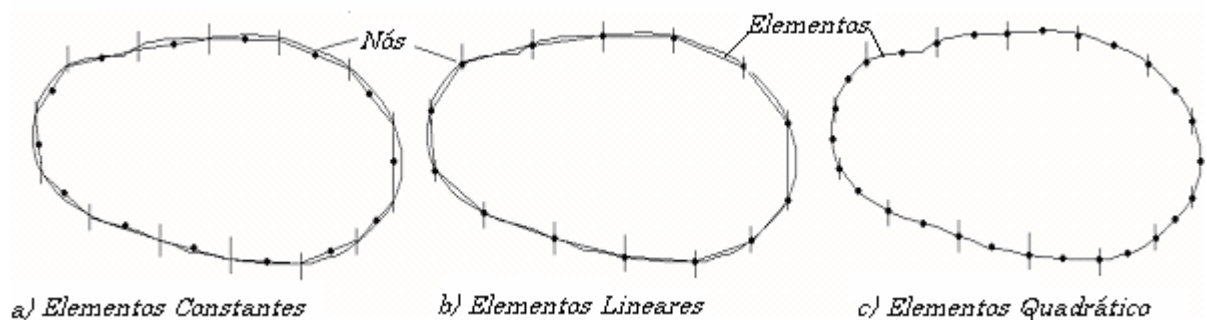


Figura 3.3 Exemplos de elementos de contorno.

Neste trabalho serão usados elementos lineares na discretização do contorno.

A permanência da integral de domínio envolvendo a solução fundamental e a derivada do potencial na equação (3.26) torna necessária a discretização de todo o

domínio para a solução do problema. Essa discretização é realizada com o emprego de células lineares triangulares, nas quais se admite variação linear para $\partial u/\partial t$ (ver figura 3.4 abaixo).

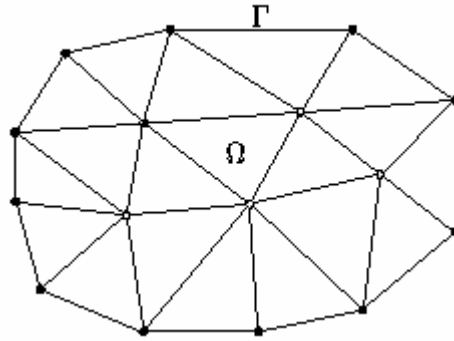


Figura 3.4 Discretização do contorno Γ e do domínio Ω .

Como todo o domínio é discretizado, a formulação apresentada neste trabalho é designada, em inglês, por D-BEM (D significando *domain*). Um termo equivalente em português poderia ser Método dos Elementos de Contorno no Domínio (ou de Domínio) (MEC-D) que, na opinião do autor, não soa bem. Assim, na ausência de um termo de uso comum entre os pesquisadores de língua portuguesa, a presente formulação será designada por MEC-DR ou MEC-DRH, indicando o uso de Diferença Finita Regressiva (DR) ou o uso de Diferença Regressiva e do esquema Houbolt (DRH) na aproximação da derivada de u em relação ao tempo (maiores detalhes serão apresentados a seguir), ficando implícito, nessa designação, o emprego de células.

Discretizando-se o contorno com NE elementos e a do domínio com NC células, a integral de contorno, equação (3.26), pode ser reescrita como uma soma de integrais sobre elementos e células para um nó genérico ξ_i :

$$c(\xi_i)u(\xi_i) + \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} u(x) q^*(\xi, x) d\Gamma = \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} q(x) u^*(\xi, x) d\Gamma - \sum_{j=1}^{NC} \int_{\Omega_j} \dot{u}(x) u^*(\xi, x) d\Gamma \quad (3.30)$$

Detalhes relativos à integração das células são apresentados nos Apêndice B.

3.2 MARCHA NO TEMPO E SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.

Conforme mencionado, a derivada no tempo será aproximada de duas formas, isto é, serão desenvolvidos dois procedimentos para o avanço no tempo. O primeiro, denominado MEC-DR, emprega uma diferença finita regressiva para a aproximação, conforme BREBBIA; TELLES e WROBEL, 1984. O segundo, denominado MEC-DRH emprega uma diferença finita regressiva e o método de Houbolt, de acordo com CARRER e MANSUR (2004).

Admite-se, inicialmente, que a derivada no tempo presente na integral de domínio à direita da igualdade na equação (3.26) possa ser aproximada por uma fórmula de diferença finita regressiva; assim, para um Δt suficientemente pequeno:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \quad (3.31)$$

Uma maneira conveniente e mais compacta para a equação (3.31) é:

$$\dot{u}_{n+1} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} \quad (3.32)$$

onde o índice $(n+1)$, se refere ao tempo, $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ sendo Δt o intervalo de tempo adotado na discretização temporal.

Quando se emprega o esquema Houbolt, a aproximação adotada é:

$$\dot{u}_{n+1} = \frac{1}{6\Delta t} [11u_{n+1} - 18u_n + 9u_{n-1} - 2u_{n-2}] \quad (3.33)$$

Note-se que a expressão (3.33) foi obtida da derivada primeira em relação a t , no ponto t_{n+1} , do polinômio de Lagrange de terceiro grau definido pelos pares (t_{n+1}, u_{n+1}) , (t_n, u_n) , (t_{n-1}, u_{n-1}) , (t_{n-2}, u_{n-2}) .

Para se efetuar a solução numérica, deve-se observar que a integral de domínio demonstra que os valores das variáveis de contorno também dependem dos valores da derivada de u em relação a t no domínio; assim sendo, em decorrência das aproximações utilizadas para a derivada em t , torna-se necessária a determinação simultânea dos valores de u tanto no contorno quanto no domínio. Em termos matriciais, o resultado dessa necessidade pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^{dc} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^c \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} - \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cc} & \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dc} & \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^c \\ \dot{\mathbf{u}}^d \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Seguindo a notação usualmente adotada no MEC, as matrizes \mathbf{H} resultam das integrais de contorno que contêm o integrando $q^*(\xi, x)u(x)$, as matrizes \mathbf{G} , das integrais de contorno que contêm o integrando $u^*(\xi, x)q(x)$ e as matrizes \mathbf{M} , das integrais de domínio, cujo integrando é $u^*(\xi, x)\dot{u}(x)$.

Os superíndices c e d em (3.34) designam, respectivamente, contorno e domínio. No duplo superíndice, o primeiro corresponde à posição do ponto fonte e o segundo, à posição do ponto campo. A submatriz identidade à esquerda da igualdade correspondente aos coeficientes $c(\xi) = 1$ dos pontos internos.

Tendo em vista que a aproximação da derivada temporal por diferenças finitas regressivas, equação (3.32), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}^c \\ \dot{u}^d \end{Bmatrix}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left[\begin{Bmatrix} u^c \\ u^d \end{Bmatrix}_{n+1} - \begin{Bmatrix} u^c \\ u^d \end{Bmatrix}_n \right] \quad (3.35)$$

Substituindo (3.33) em (3.32), já escrita para o tempo t_{n+1} , e reordenando termos semelhantes:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc} \left(H^{cc} + \frac{1}{k\Delta t} M^{cc} \right) & \frac{1}{k\Delta t} M^{cd} \\ \left(H^{dc} + \frac{1}{k\Delta t} M^{dc} \right) & \left(I + \frac{1}{k\Delta t} M^{dd} \right) \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u^c \\ u^d \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} G^{cc} \\ G^{dc} \end{bmatrix} \{q^c\}_{n+1} + \\ & \frac{1}{k\Delta t} \begin{bmatrix} M^{cc} & M^{cd} \\ M^{dc} & M^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^c \\ u^d \end{Bmatrix}_n \end{aligned} \quad (3.36)$$

A equação (3.36) descreve o método denominado MEC-DR, por utilizar unicamente, na aproximação da derivada no tempo, a diferenças finitas regressivas. Neste caso, o índice $n \geq 0$.

A equação (3.36) pode ser escrita de maneira compacta como:

$$\bar{H}u_{n+1} = \bar{G}q_{n+1} + \bar{M}u_n \quad (3.37)$$

Na equação acima, a matriz \bar{H} contém contribuições das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{M} .

Após a imposição das condições de contorno, o sistema de equações correspondente à equação (3.35) pode ser escrito como:

$$Ay_{n+1} = f_{n+1} + f_n \quad (3.38)$$

onde o vetor y_{n+1} contém valores incógnitos de u_{n+1} e de q_{n+1} , o vetor independente f_{n+1} contém as contribuições das condições de contorno em t_{n+1} e o vetor f_n contém as contribuições do instante anterior (quanto $n = 0$, f_0 contém as contribuições das condições iniciais).

Tendo em vista que a aproximação da derivada temporal pelo método de Houbolt, equação (3.31), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}^c \\ \dot{u}^d \end{Bmatrix}_{n+1} = \frac{1}{6\Delta t} \left[11 \begin{Bmatrix} u^c \\ u^d \end{Bmatrix}_{n+1} - 18 \begin{Bmatrix} u^c \\ u^d \end{Bmatrix}_n + 9 \begin{Bmatrix} u^c \\ u^d \end{Bmatrix}_{n-1} - 2 \begin{Bmatrix} u^c \\ u^d \end{Bmatrix}_{n-2} \right] \quad (3.39)$$

Substituindo (3.39) na equação (3.34), já escrita para t_{n+1} :

$$\begin{bmatrix} \left(H^{cc} + \frac{11}{6k\Delta t} M^{cc} \right) & \frac{11}{6k\Delta t} M^{cd} \\ \left(H^{dc} + \frac{11}{6k\Delta t} M^{dc} \right) & \left(I + \frac{11}{6k\Delta t} M^{dd} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^c \\ u^d \end{Bmatrix}_{n+1} = \quad (3.40)$$

$$\begin{bmatrix} G^{cc} \\ G^{dc} \end{bmatrix} \{q^c\}_{n+1} + \frac{1}{6k\Delta t} \begin{bmatrix} M^{cc} & M^{cd} \\ M^{dc} & M^{dd} \end{bmatrix} \left[18 \begin{Bmatrix} u^c \\ u^d \end{Bmatrix}_n - 9 \begin{Bmatrix} u^c \\ u^d \end{Bmatrix}_{n-1} + 2 \begin{Bmatrix} u^c \\ u^d \end{Bmatrix}_{n-2} \right]$$

As equações (3.39) e (3.40) descrevem o método denominado MEC-DRH; neste caso, a equação (3.33) é utilizada durante os dois primeiros passos de tempo, isto é, para $n = 0, 1$; a equação (3.40) é utilizada a partir do passo correspondente a $n = 2$. Este procedimento é adotado em função da presença dos termos u_{n-1} e u_{n+2} em (3.40).

A equação (3.40) pode ser escrita de maneira compacta como:

$$\bar{H}u_{n+1} = \bar{G}q_{n+1} + \bar{M}[18u_n - 9u_{n-1} + 2u_{n-2}] \quad (3.41)$$

Após a imposição das condições de contorno, o sistema de equações correspondente à equação (3.39) pode ser escrito como:

$$Ay_{n+1} = f_{n+1} + f_n + f_{n-1} + f_{n-2} \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.42)$$

onde o vetor y_{n+1} contém valores incógnitos de u_{n+1} e de q_{n+1} , o vetor independente f_{n+1} contém as contribuições das condições de contorno em t_{n+1} . Os vetores f_n , f_{n-1} e f_{n-2} contêm as contribuições dos instantes anteriores (quanto $n = 2$, f_0 contém as contribuições das condições iniciais).

4 EXEMPLOS NÚMERICOS

A transmissão de calor em corpos sólidos caracteriza-se pela transferência lenta de energia das partes com potencial mais elevado. O fluxo de energia formado durante este processo tende a se estabilizar, alcançando um gradiente de equilíbrio que caracteriza os denominados estados ou regimes estacionários. A etapa transiente neste tipo de problemas consiste, portanto, do período compreendido entre o instante de aplicação de ações externas e a nova posição de equilíbrio estacionária. Dadas essas características, pode-se perceber que os problemas térmicos lineares constituídos unicamente pela condução de calor apresentam uma resposta bem comportada.

Nos exemplos apresentados neste item foram feitas três análises, correspondentes a três valores distintos do coeficiente de difusividade térmica k , isto é: $k = 0,25$; $k = 1,0$ e $k = 4,0$.

Uma estimativa adequada para o intervalo de tempo a ser adotado, é dada por WROBEL (1981):

$$\Delta t = \frac{l^2}{2k} \quad (4. 1)$$

onde:

Δt = passo de tempo

l = comprimento do elemento

k = difusividade térmica.

As soluções numéricas foram comparadas com as soluções analíticas, de maneira a evidenciar a acurácia dos resultados obtidos com as duas formulações do MEC: MEC-DR e MEC-DRH.

4.1 EXEMPLO 1

Este exemplo simula a difusão transiente em uma barra unidimensional.

Para as condições de contorno:

$$u(0,t) = U_0, \quad t \geq 0$$

$$u(l,t) = 0 \quad t \geq 0$$

e condição inicial:

$$u(x,0) = 0 \quad 0 \leq x \leq l$$

a solução analítica obtida seguindo o procedimento apresentado por STEPHENSON (1970), é:

$$u(x,t) = U_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right) - \frac{2U_0}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{-r^2 \pi^2 kt/l^2}}{r} \operatorname{sen} \left(\frac{r \pi x}{l} \right)$$

Na discretização do contorno foram utilizados vinte e quatro elementos e na discretização do domínio, sessenta e quatro células. No total, foram utilizados vinte e oito nós de contorno, devido ao emprego de nós duplos nos cantos, e vinte e um pontos internos.

Na Figura 4.1 estão representadas a geometria e as condições de contorno do problema e a discretização adotada para o contorno e domínio.

O passo de tempo foi estabelecido conforme a equação (4.1); assim, sendo $l = 1,5$, os seguintes valores foram adotados:

$$k = 1,00 \rightarrow \Delta t = 1,125$$

$$k = 4,00 \rightarrow \Delta t = 0,28125$$

$$k = 0,25 \rightarrow \Delta t = 4,50$$

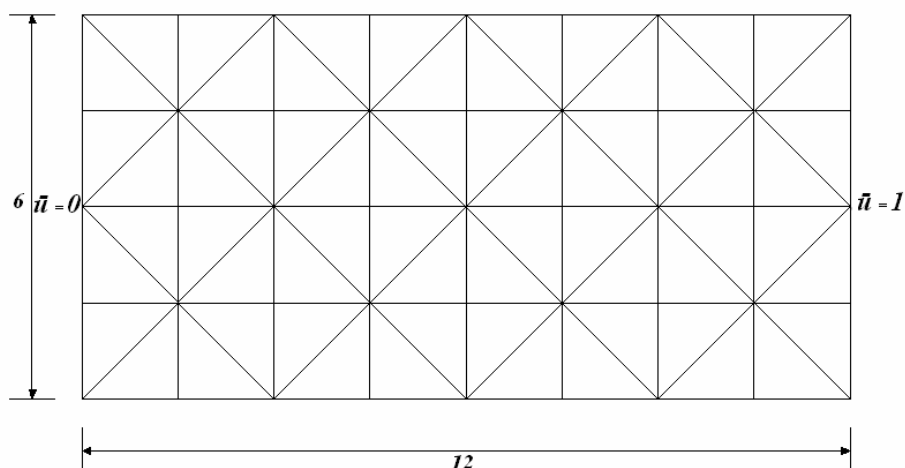


Figura 4.1 Geometria e condições de contorno

4.1.1 Validação dos Resultados

A comparação entre a solução analítica e a solução numérica será feita através de gráficos para valores de u em $x = l/2 = 6$ (ponto $A(l/2, l/4)$) e em $x = l = 12$ (nó $(l/2, l)$). Nas Figuras 4.2a e 4.2b encontram-se os gráficos comparativos entre as soluções analítica e numérica. As respostas usando diferenças finitas regressivas estão apresentadas no gráfico (a); no gráfico (b) estão apresentadas as respostas obtidas com o emprego de diferenças finitas e diferenças finitas regressiva acoplada com o Houbolt. O comportamento dos gráficos, para cada situação, demonstram que a solução numérica através do MEC, tanto para o esquema MEC-DR quanto para o esquema MEC-DRH, tem um resultado muito bom, quando comparada com a solução analítica.

Como era de se esperar, a variação da difusividade térmica (k) determina a variação do potencial em função do tempo: quanto maior o k mais rapidamente o potencial se estabiliza.

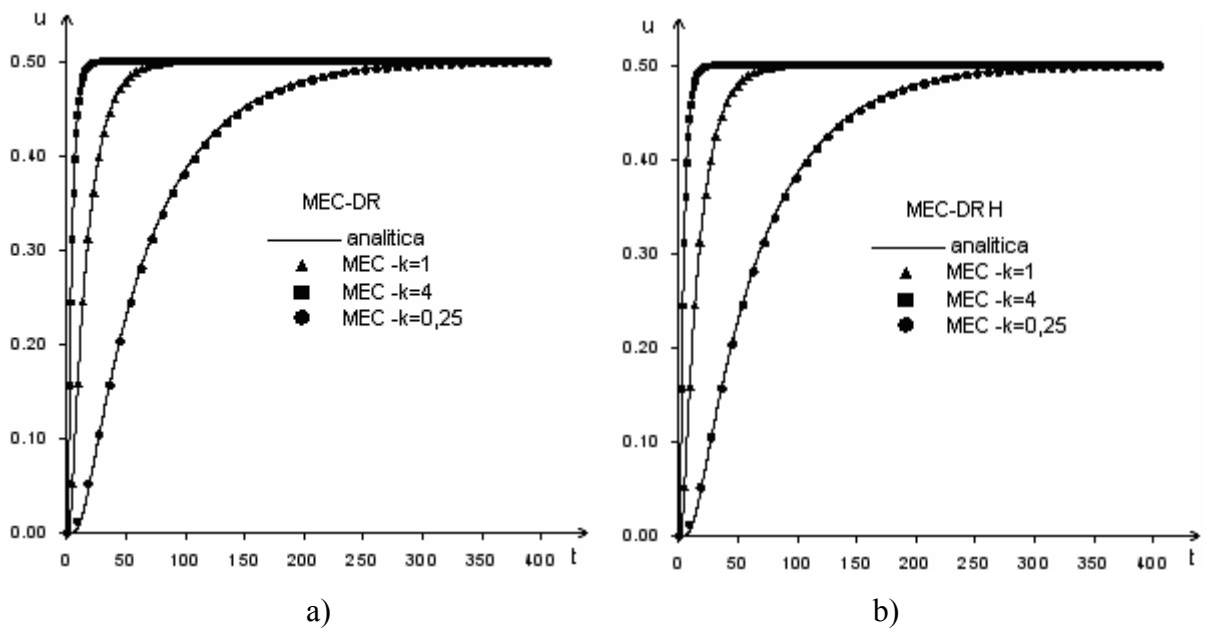


Figura 4.2 Potencial em $A(l/2, l/4)$ e em $B(l, l/4)$: a) esquema MEC-DR, b) esquema MEC-DRH

A comparação para o fluxo du/dn em $x = 0$ (nó C(0,l/4)) está apresentada nas Figuras 4.3a e 4.3b. Novamente, pode-se observar boa concordância entre as soluções analítica e numérica.

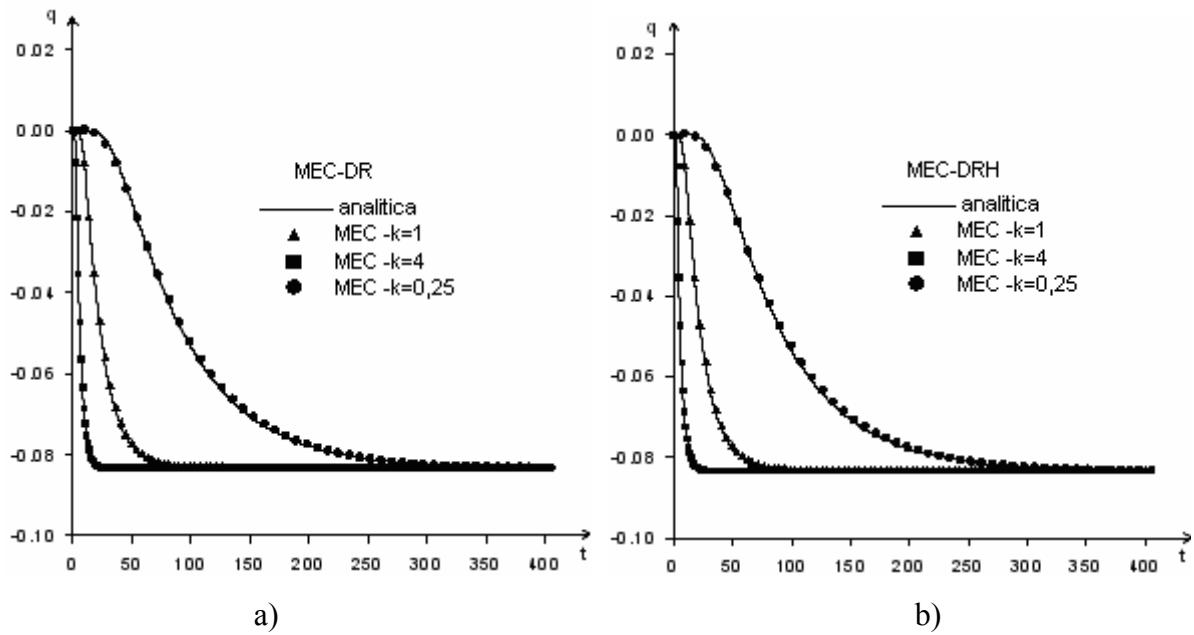


Figura 4.3 Fluxo em C(0,l/4): a) esquema MEC-DR, b) esquema MEC-DRH

A evolução da distribuição de temperatura na barra unidimensional, considerando a difusividade térmica, ($k = 1$) e o tempo igual a 10 é apresentada na Figura 4.4. Para melhor visualização os resultados foram multiplicados por 100.

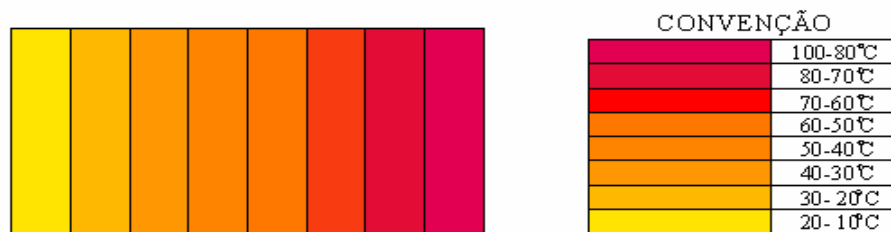


Figura 4.4 Distribuição de temperatura para $t = 10$

4.2 EXEMPLO 2

Este exemplo consiste da análise de uma barra unidimensional sujeita às condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad t \geq 0$$

$$u(l, t) = \bar{U}(1 - \cos \beta t) \quad t \geq 0$$

e à condição inicial:

$$u(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq l$$

A solução analítica do problema, obtida seguindo o procedimento apresentado por STEPHENSON (1970), é:

$$u(x, t) = \frac{x}{l}(1 - \cos \beta t) + w(x, t)$$

onde:

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} w_r(t) \operatorname{sen} \left(\frac{r\pi x}{l} \right)$$

com:

$$w_r(t) = 2\tau\beta \frac{\cos(r\pi)}{(r\pi)} \left\{ \frac{-\beta \cos \beta t + k \left(\frac{r\pi}{l} \right) \operatorname{sen} \beta t}{k^2 \left(\frac{r\pi}{l} \right)^4 + \beta^2} + \frac{e^{-k \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2} \beta}{k^2 \left(\frac{r\pi}{l} \right)^4 + \beta^2} \right\}$$

Para a análise numérica foi empregada uma malha mais refinada, devido à condição de contorno variável com o tempo em $x = l$; assim, o contorno foi discretizado com quarenta e oito elementos e o domínio, com duzentas e cinqüenta e seis células. No total, a análise empregou cinqüenta e dois nós de contorno e cento e cinco pontos internos (Figura 4.5).

O passo de tempo foi estabelecido conforme a equação (4.1); assim, sendo $l = 0,75$, os seguintes valores foram adotados:

$$k = 1,00 \rightarrow \Delta t = 0,28125$$

$$k = 4,00 \rightarrow \Delta t = 0,0703125$$

$$k = 0,25 \rightarrow \Delta t = 1,125$$

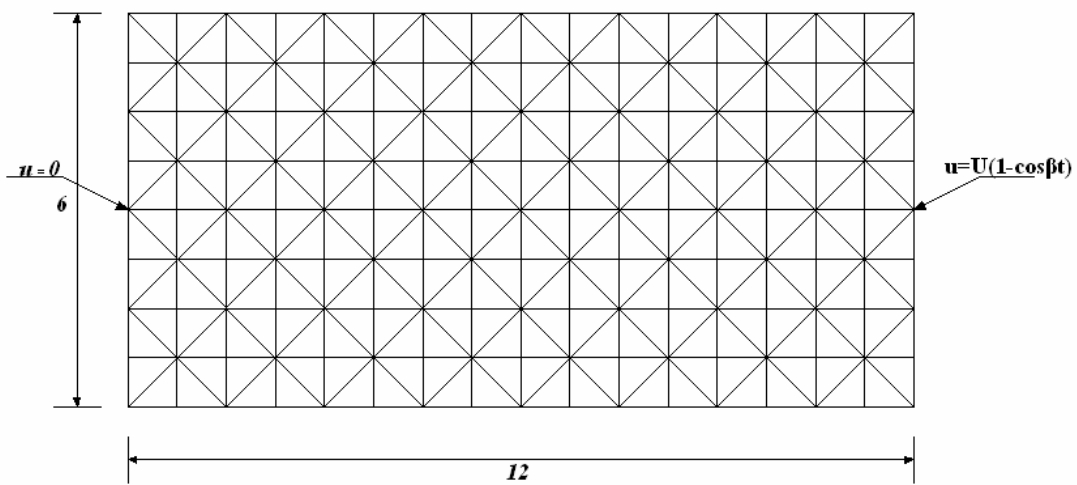


Figura 4.5 Geometria e condições de contorno

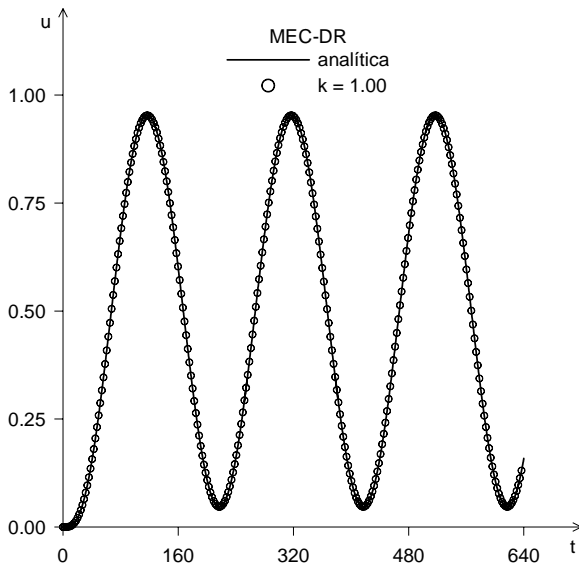
Como particularidade da análise deve-se observar que, uma vez efetuada a discretização, nos nós com abscissa $x = l$, isto é, localizados na face vertical à direita, o valor de \dot{u}_{n+1} não será aproximado nem por diferenças finitas regressivas nem pelo esquema Houbolt. Para esses nós \dot{u}_{n+1} será determinado diretamente da condição de contorno, isto é:

$$\dot{u}_{n+1} = \bar{U} \beta \text{sen} \beta t_{n+1}$$

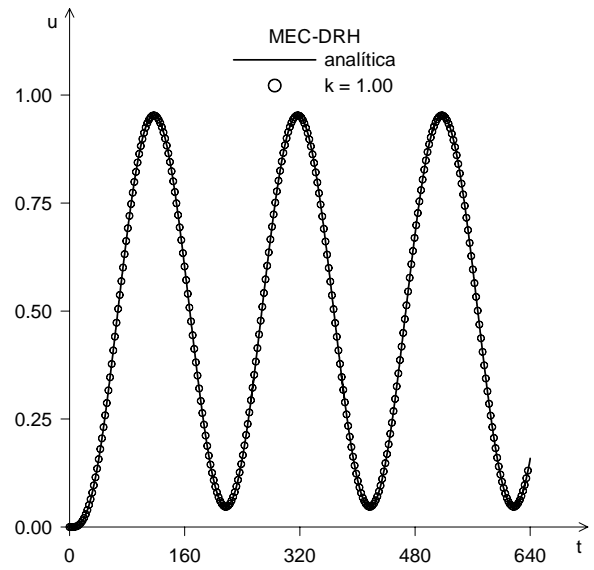
Uma vez conhecido o valor de \dot{u}_{n+1} para $x = l$, esse valor contribui diretamente para a formação do vetor independente no sistema de equações algébricas.

4.2.1 Validação dos Resultados

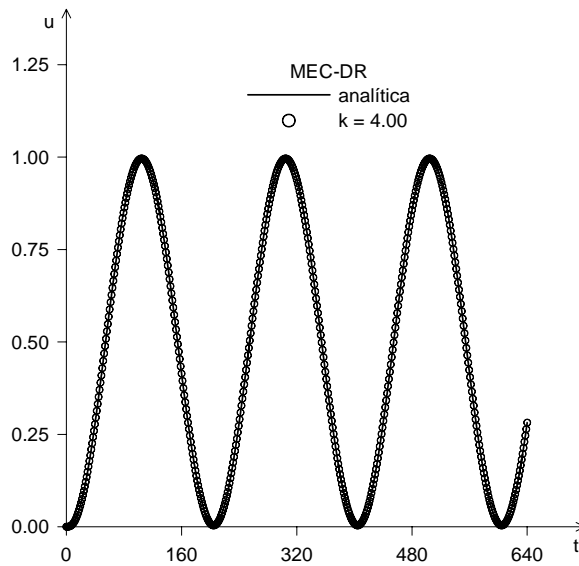
Como neste exemplo o potencial prescrito não-nulo varia de acordo com a função estabelecida, que é uma função periódica, nos gráficos da figura 4.6 fica evidenciado o comportamento cíclico das respostas obtidas, tanto na solução analítica como através do MEC.



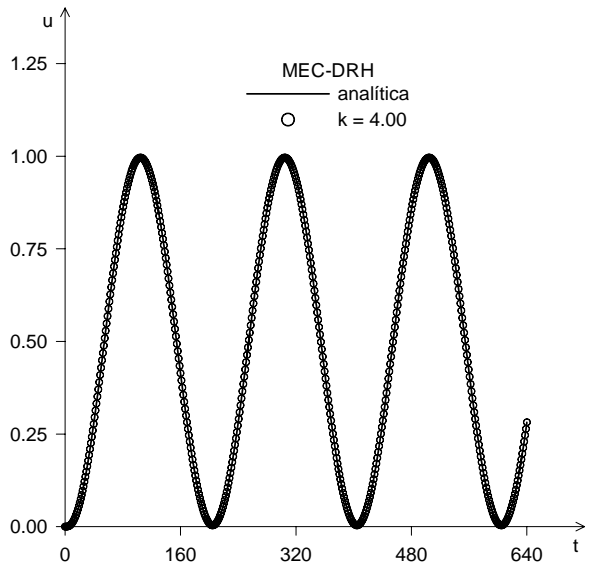
a)



b)



c)



d)

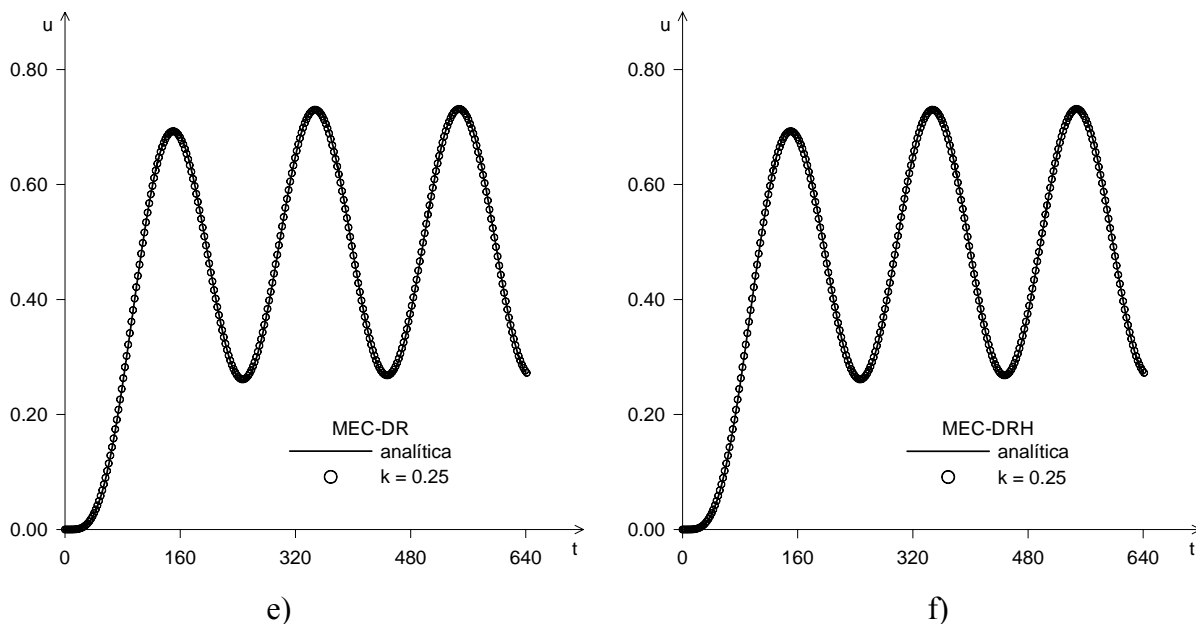
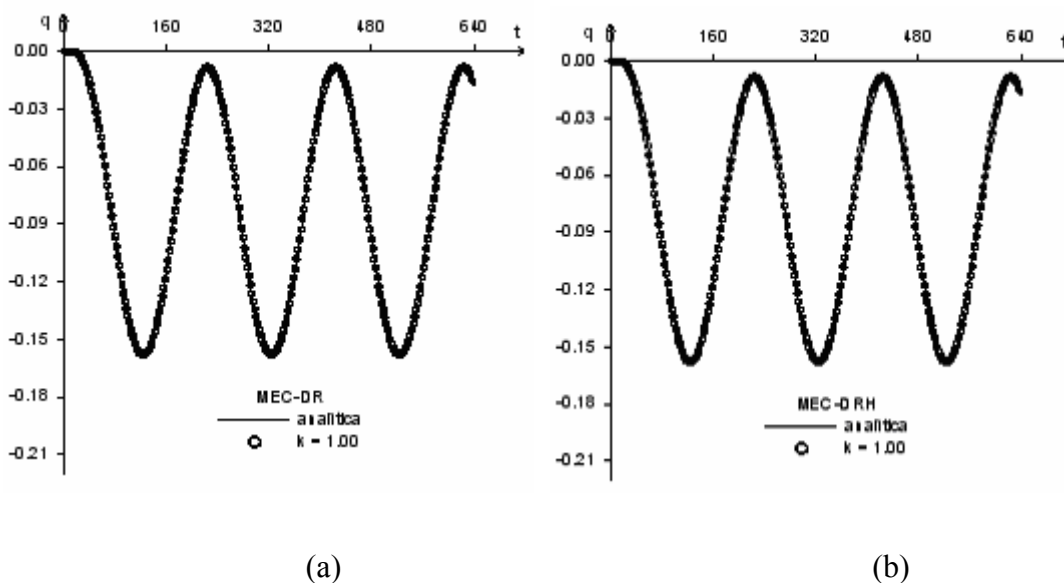
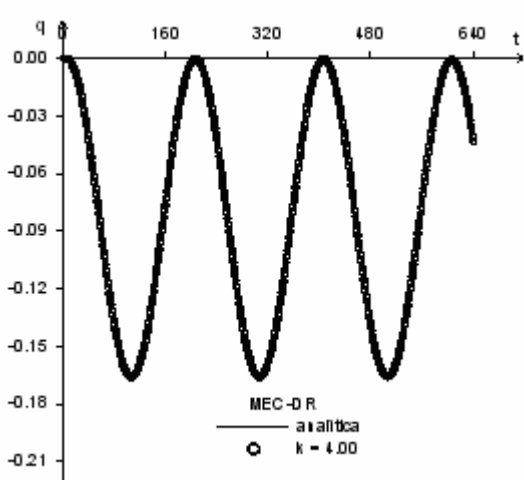


Figura 4.6 Potencial em $A(l/2, l/4)$: a,c,e) esquema MEC-DR, b,d,f) esquema MEC-DRH

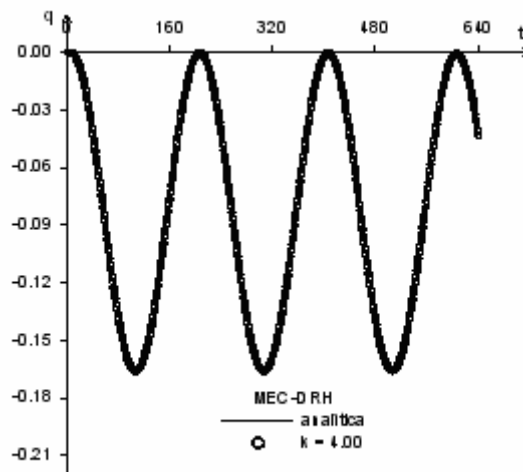
Os gráficos das Figuras 4.6 a - f mostram uma boa concordância entre as respostas obtidas com os esquemas MEC-DR e MEC-DRH e a solução analítica que é razoavelmente complexa.

Para comprovar o bom funcionamento do MEC, também foi analisado o fluxo nos nós $B(l, l/4)$, ver Figuras 4.6 a - f, e $C(0, l/4)$, ver Figuras 4.7 a - f. Mais uma vez, uma boa concordância entre os resultados pôde ser observada.

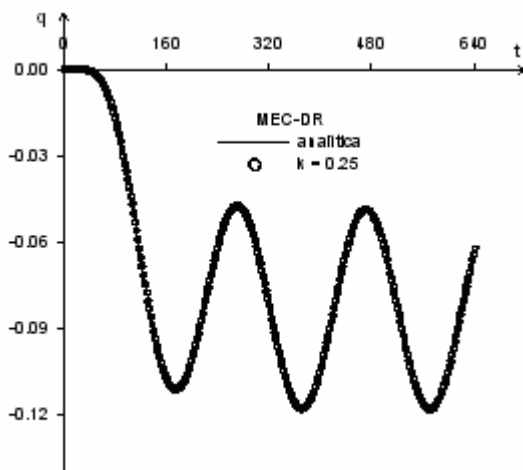




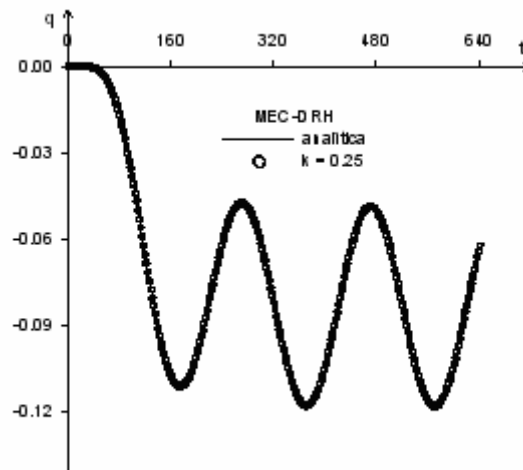
(c)



(d)

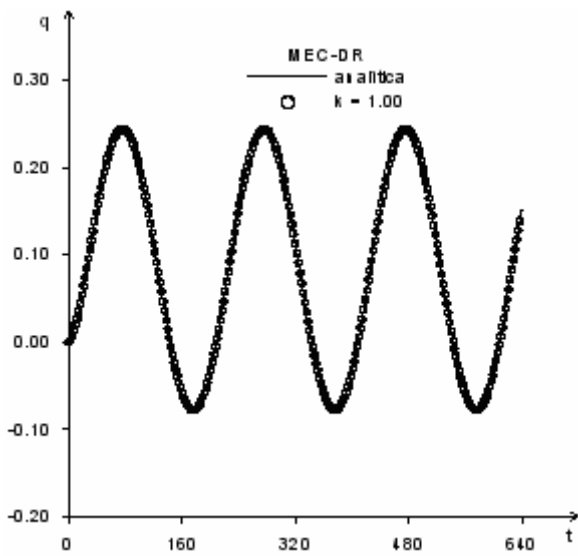


(e)

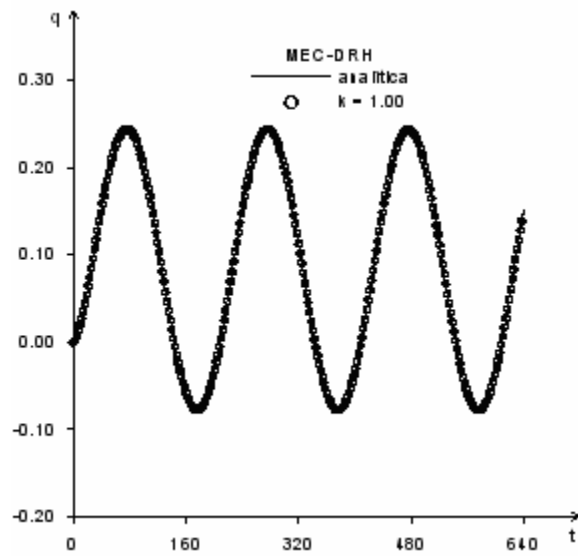


(f)

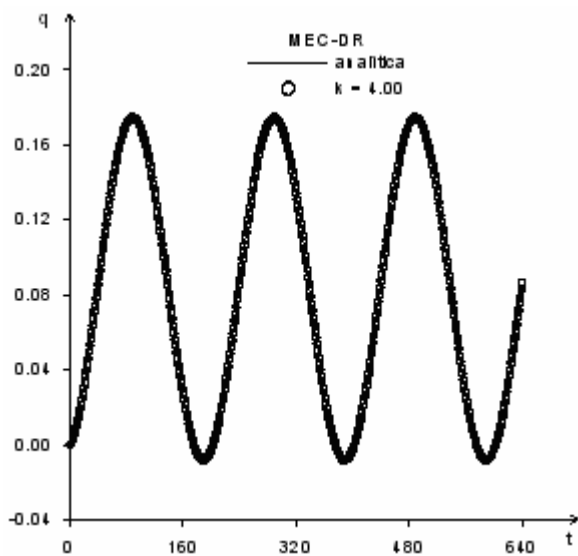
Figura 4.7 Fluxo em $B(l, l/4)$: a,c,e) esquema MEC-DR, b,d,f) esquema MEC-DRH



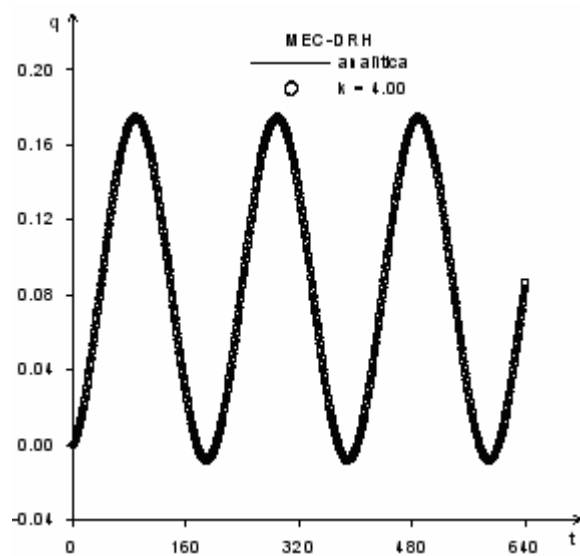
(a)



(b)



(c)



(d)

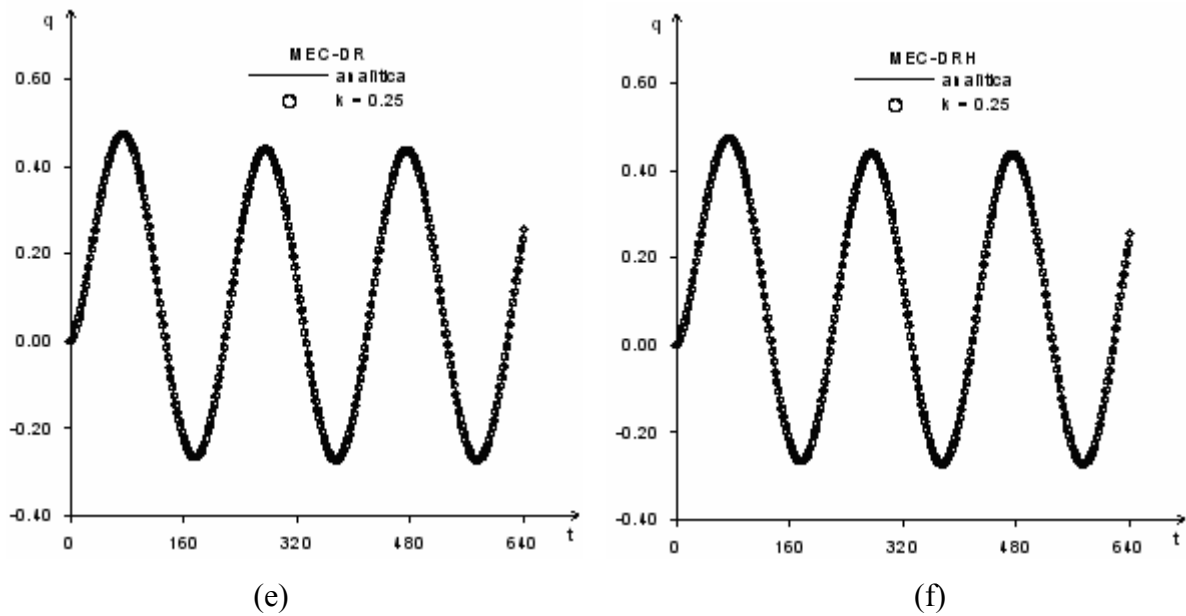


Figura 4.8 Fluxo em $C(0,1/4)$: a,c,e) esquema MEC-DR, b,d,f) esquema MEC-DRH

4.3 EXEMPLO 3

Este exemplo simula a difusão transiente em uma placa quadrada bidimensional com potencial prescrito em todo o contorno $\bar{u} = 100$. A discretização do contorno foi feita com oitenta elementos e a do domínio, com oitocentas células. O número de nós é igual a oitenta, 361 pontos internos e 800 células triangulares. Neste exemplo, não foi adotado nós duplo nos cantos da placa.

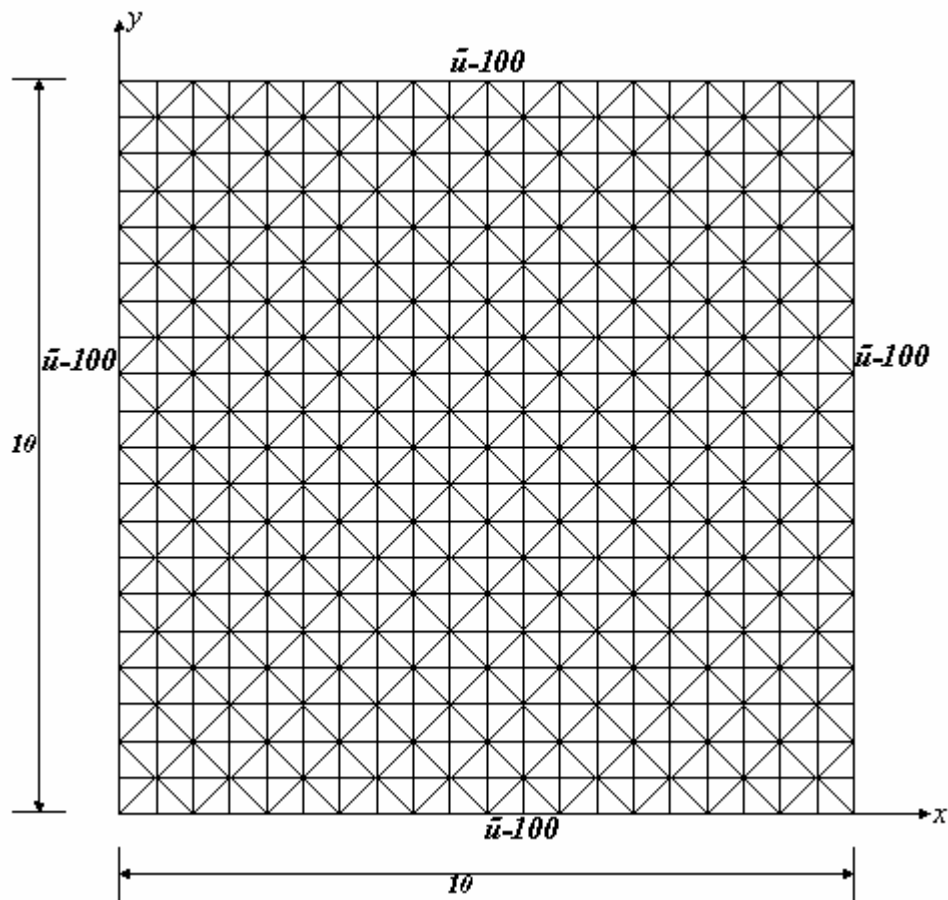


Figura 4.9 Geometria e Carregamento da Placa

O passo de tempo foi estabelecido conforme a equação (4.1), sendo $l = 0,5$, os valores do passo de tempo são:

$$k = 1,00 \rightarrow \Delta t = 0,125$$

$$k = 4,00 \rightarrow \Delta t = 0,03125$$

$$k = 0,25 \rightarrow \Delta t = 1,00$$

Dadas as condições de contorno, para $t \geq 0$:

$$u(x,0,t) = 100$$

$$u(x,l,t) = 100$$

$$u(0,y,t) = 100$$

$$u(l,y,t) = 100$$

e a condição inicial:

$$u(x,0) = 0$$

a solução analítica obtida seguindo o procedimento recomendado em KREYSZIG (1999), é escrita como:

$$u(x, y, t) = \bar{u} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16\bar{u}}{(2m-1)((2n-1)\pi)^2} e^{-\lambda_{(2m-1)(2n-1)}} \text{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi y}{b}\right)$$

onde:

$$\lambda_{(2m-1)(2n-1)}^2 = k\pi \left(\frac{(2m-1)^2}{a^2} + \frac{(2n-1)^2}{b^2} \right)$$

4.3.1 Validação dos Resultados

Para a validação dos resultados, foram escolhidos dois pontos, os pontos de $A(a/2,a/2)$ e o ponto $B(a/2,3a/4)$. Os resultados estão apresentados na Figura 4.10, para o esquema MEC-DR e na Figura 4.11, para o esquema MEC-DRH. Mais uma vez, a boa concordância foi observada entre os resultados.

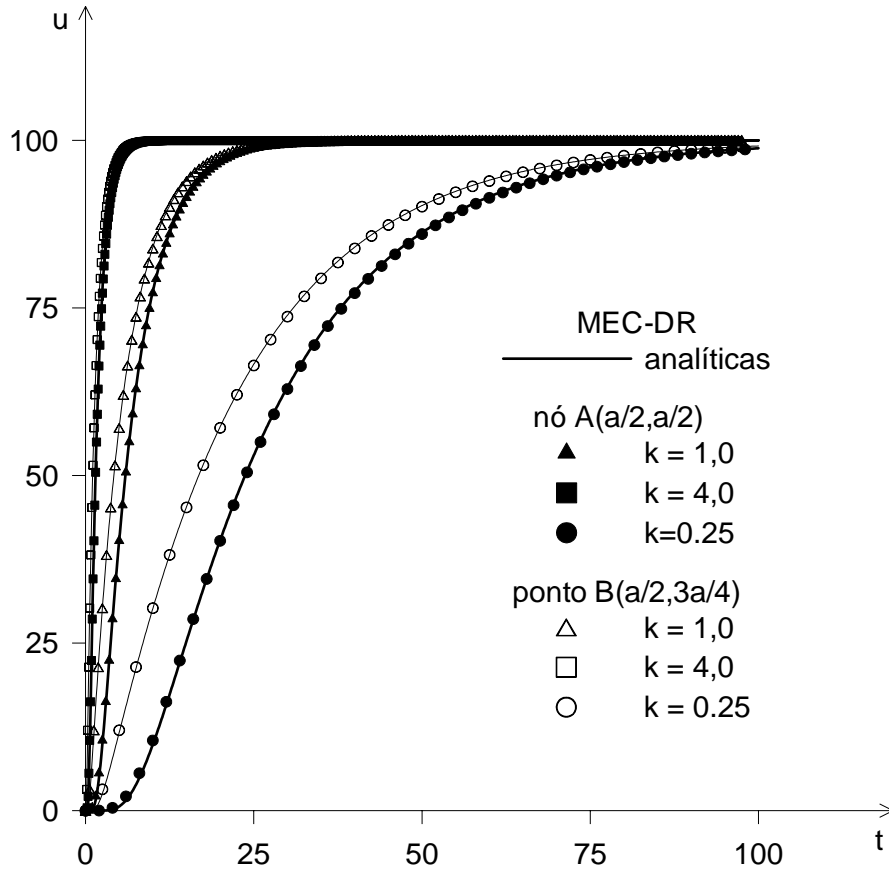


Figura 4.10 Potencial nos pontos A e B pelo esquema MEC-DR

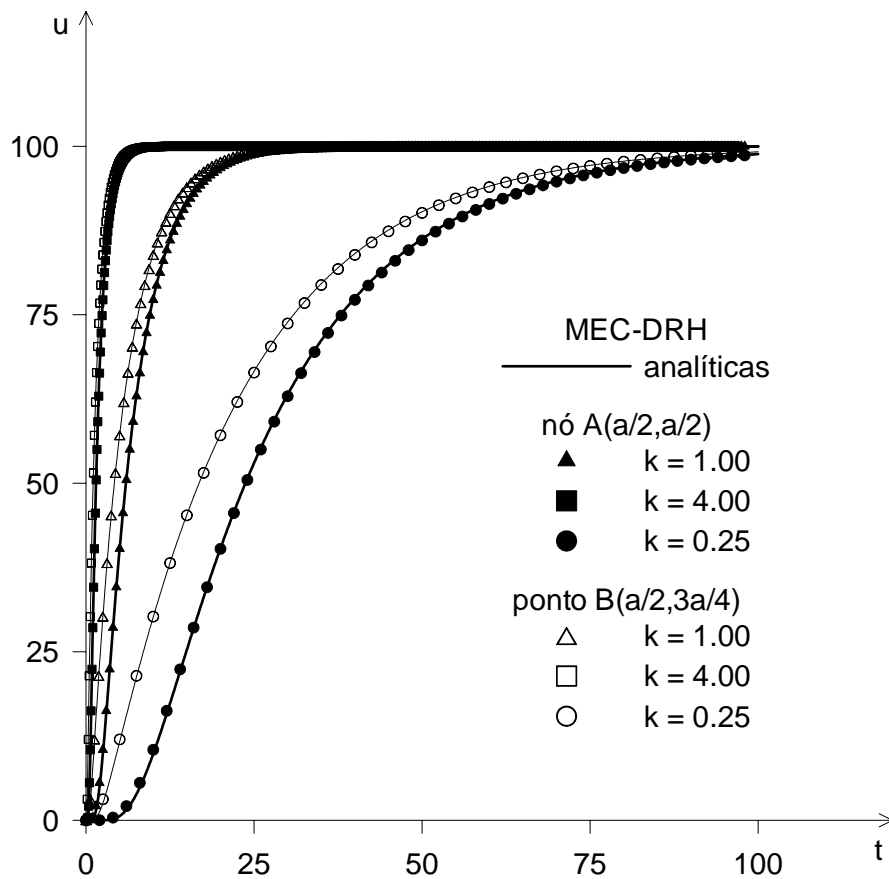


Figura 4.11 Potencial nos pontos A e B pelo esquema MEC-DRH

A próxima análise é feita para avaliação da evolução da temperatura com a variação dos pontos e dos passos de tempo. Com os dados: coordenadas dos pontos conforme a figura 4.11, fixação da difusividade térmica ($k = 1$) e o passo de tempo $\Delta t = 0,125$, é possível obter o resultados do MEC, gerando o potencial para todos os pontos e todos passos de tempo, que possibilitam o preenchimento da Tabela 4.1.

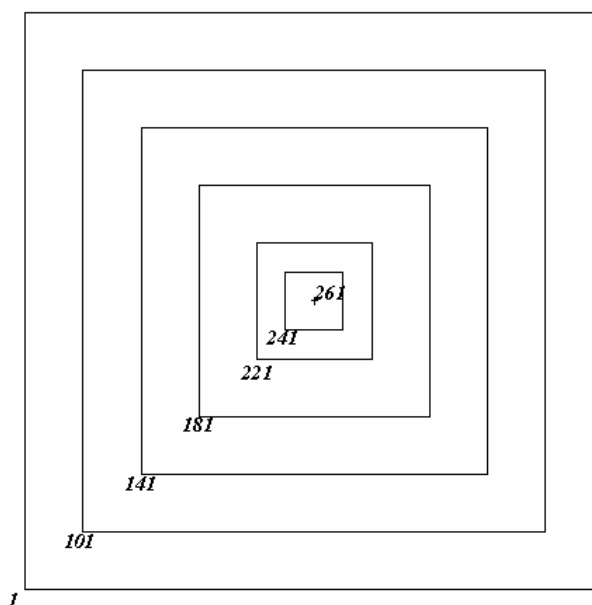


Figura 4.12 Localização dos pontos na placa para gerar gráfico das isotérmicas

Tabela 4.1 Valor da temperatura dos pontos internos em função do tempo obtidos com o MEC.

(x ; y)	PONTOS INTERNOS					
	(1,0 ; 1,0)	(2,0 ; 2,0)	(3,0 ; 3,0)	(4,0 ; 4,0)	(4,5 ; 4,5)	(5,0 ; 5,0)
TEMPO	101	141	181	221	241	261
5 s	93,64	78,52	60,07	45,65	41,64	40,26
10 s	97,81	92,11	85,08	79,39	77,77	77,22
15 s	99,17	97,03	94,39	92,25	91,64	91,43
20 s	99,91	98,87	98,89	97,08	96,85	96,78
25 s	99,96	99,57	99,20	98,90	98,81	98,78
30 s	99,94	99,83	99,69	99,57	99,55	99,54
40 s	99,98	99,97	99,95	99,93	99,92	99,92

Com os dados Tabela 4.1, gera-se a Figura 4.13, que possibilita a visualização das faixas isotérmicas para o instante $t = 5$ s. Como no exemplo anterior, ocorre a homogeneidade na distribuição da temperatura.

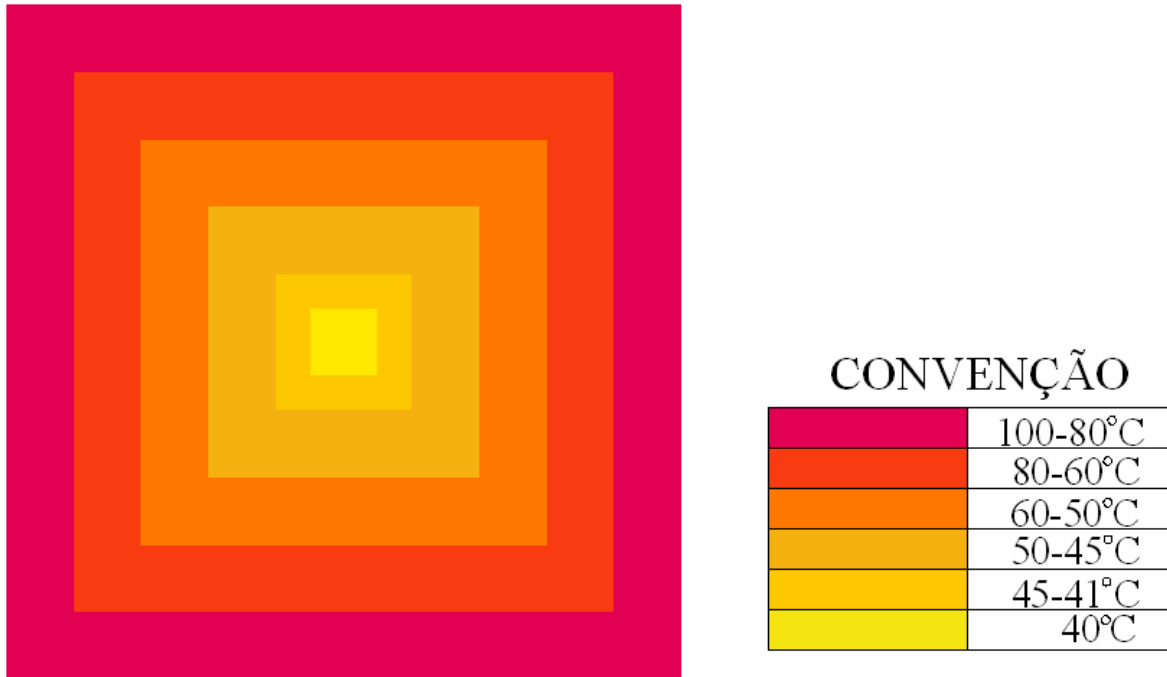


Figura 4.13 Distribuição de temperatura

4.4 EXEMPLO 4

Este exemplo estuda o problema da difusão transiente em uma placa circular que apresenta temperatura prescrita em todo o seu contorno.

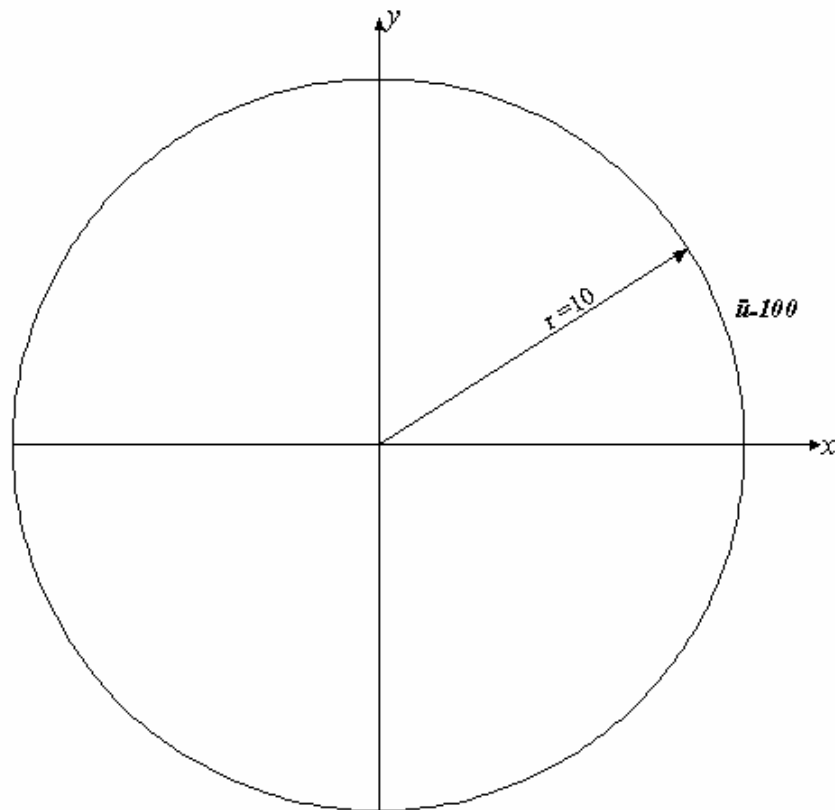


Figura 4.14 Esquema da Geometria e carregamento da placa

Devido à geometria, torna-se mais conveniente escrever a equação diferencial que governa o problema em coordenadas polares. Observando, ainda, que as variáveis envolvidas na análise independem da coordenada angular θ , a equação é escrita como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}$$

A solução analítica para este exemplo, para as condições de contorno:

$$u(c,t) = \bar{u} = 100$$

e inicial:

$$u(r,0) = 0$$

é dada por GREENBERG (1998):

$$u(r,t) = \bar{u} - \frac{2\bar{u}}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n c)} e^{-k\lambda_n^2 t}$$

onde J_0 e J_1 são funções de Bessel de primeira espécie de ordens zero e um, respectivamente. Os parâmetros λ_n são as raízes positivas da equação $J_0(\lambda_n) = 0$.

Para a análise via MEC, o contorno foi discretizado com quarenta elementos e o domínio, com o emprego de 161 pontos internos de quatrocentas células (Figura 4.14). O passo de tempo foi estabelecido conforme a equação (4.1), sendo $l = 1,58$, os valores do passo de tempo são:

$$k = 1,00 \rightarrow \Delta t = 1,25$$

$$k = 4,00 \rightarrow \Delta t = 0,312$$

$$k = 0,25 \rightarrow \Delta t = 5,00$$

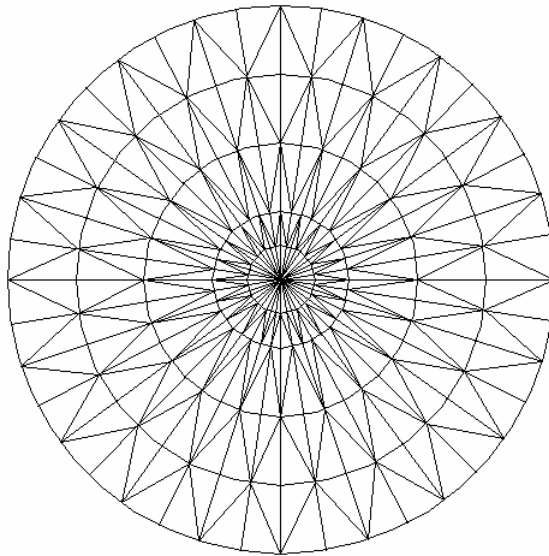


Figura 4.15 Esquema das células triangulares para 40 elementos

4.4.1 Validação dos Resultados

Para a comparação dos resultados foi escolhido o ponto central. Na Figura 4.15a estão apresentados os resultados obtidos com o emprego do esquema MEC-DR e na Figura 4.15b, os resultados obtidos com o esquema MEC-DRH. Devido à complexidade do problema, evidenciada pela da solução analítica, optou-se por adotar uma malha bastante refinada. Os resultados estão em boa concordância com a solução analítica. Note-se que esse problema também foi estudado por WROBEL, 1981 que, mesmo adotando uma discretização do domínio bastante simples, também obteve resultados bastante satisfatórios.

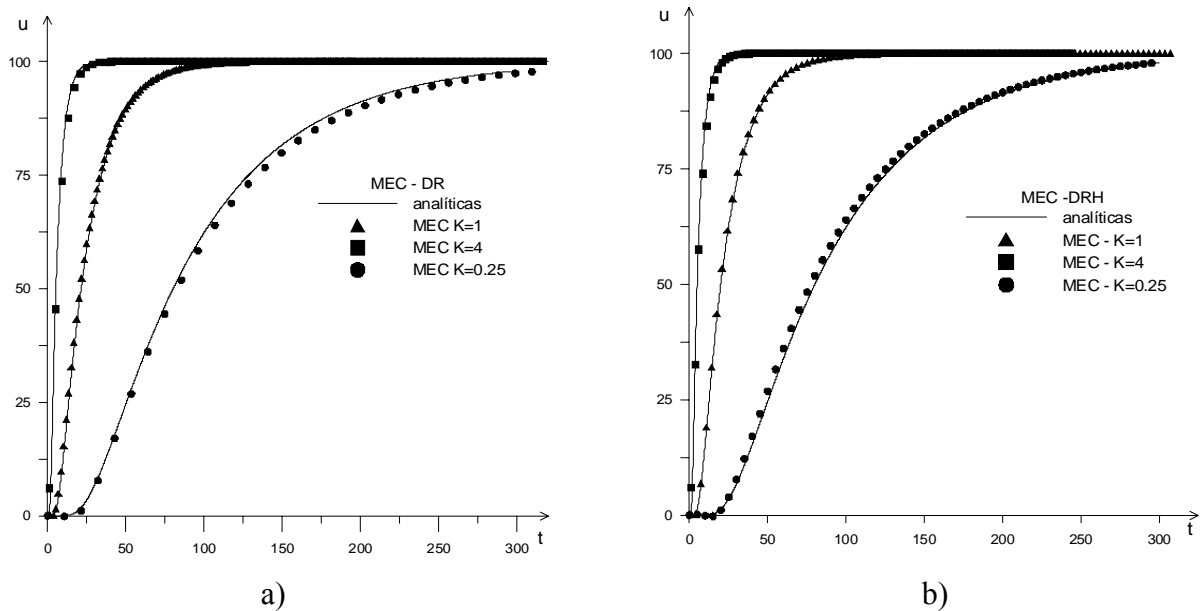


Figura 4.16 Placa circular: potencial no ponto central: esquema MEC-DR, b) esquema MEC-DRH

Tabela 4.2 Valor da temperatura dos pontos internos em função do tempo obtidos com o MEC.

TEMPO	PONTOS INTERNOS					
	81	161	241	321	401	481
5 s	61,61	30,05	11,74	4,20	2,94	2,73
10 s	75,32	51,49	32,95	21,92	19,51	19,01
15 s	82,03	64,03	49,01	39,40	37,21	36,82
20 s	86,83	73,42	62,02	54,57	52,85	52,54
25 s	90,07	79,91	71,23	65,53	64,21	63,97
30 s	92,61	85,06	78,58	74,33	73,34	73,17
35 s	94,50	88,88	84,06	80,89	80,16	80,03
50 s	97,69	95,33	93,31	91,99	91,68	91,62
70 s	99,26	98,51	97,87	97,45	97,35	97,33
90 s	99,76	99,53	99,33	99,20	99,17	99,16
120 s	99,95	99,91	99,87	99,85	99,85	99,84

Com os dados Tabela 4.2, gera-se a Figura 4.17 que possibilita a visualização das faixas isotérmicas para o instante $t = 5$ s. Como nos outros exemplos, ocorre a homogeneidade na distribuição da temperatura, em virtude das considerações feitas anteriormente .

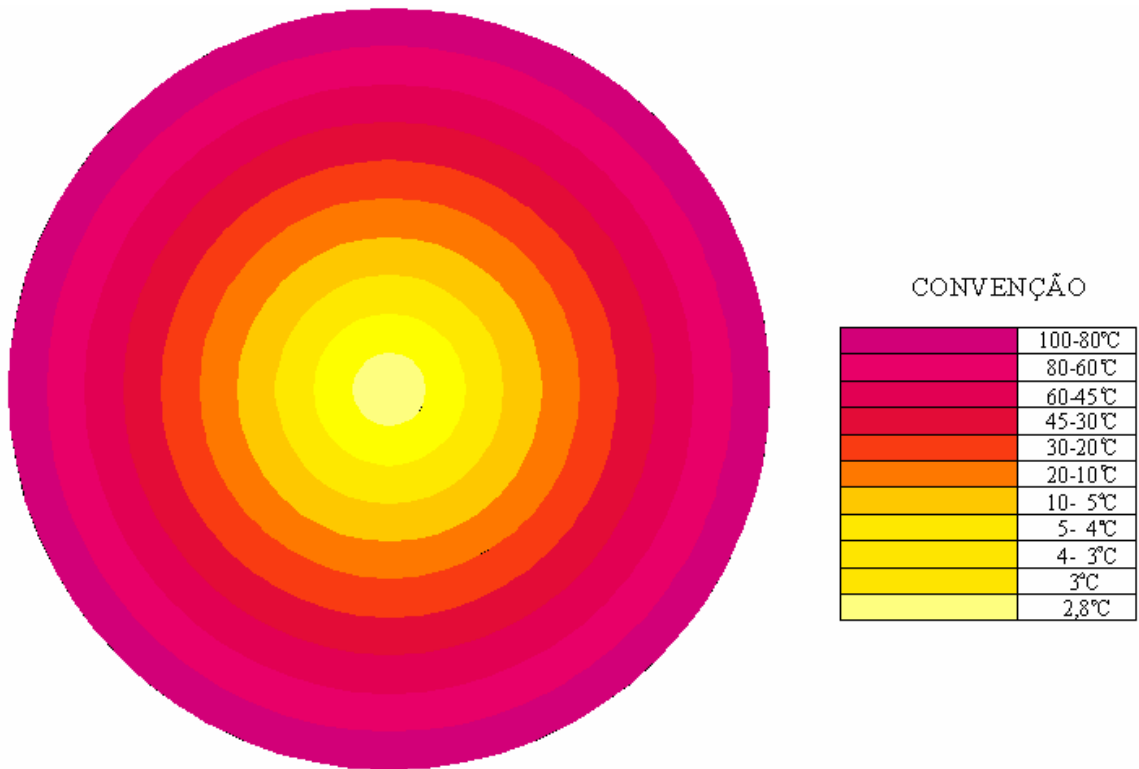


Figura 4.17 Visualização das faixas isotérmicas para o instante $t=5s$

5 CONCLUSÕES

A análise dos exemplos apresentados mostra que os resultados obtidos com o MEC estão em acordo com a solução analítica, o que indica a eficiência do método proposto para resolver a equação da difusão. Este desempenho credencia a formulação como uma ótima ferramenta para o trato de problemas de campo escalar.

Quanto aos esquemas adotados para a marcha no tempo, tanto a diferença finita regressiva, como o esquema do acoplamento de diferenças finitas regressiva com o método Houbolt, as boas respostas obtidas permitem concluir que ambos são confiáveis. Note-se que a precisão dos resultados está condicionada à escolha de um intervalo de tempo apropriado, o que foi feito com a adoção de uma relação geral entre o comprimento do elemento, o passo de tempo e a difusividade térmica. O emprego dessa relação, determinada de forma empírica, proporcionou os resultados apresentados.

Nos problemas analisados neste trabalho, as respostas tendem para a condição de regime estacionário, que é atingida tanto mais rapidamente quanto maior for a difusividade térmica. O segundo exemplo merece atenção especial, devido ao fato de apresentar condição de contorno essencial dependente do tempo e periódica: neste caso o regime estacionário não é atingido. Observa-se também que a solução numérica do problema requereu atenção especial para a consideração das contribuições da derivada primeira da condição de contorno conhecida. As respostas obtidas apresentam boa concordância com as analíticas.

Pelo descrito acima, pode-se concluir que a aplicação do MEC para a solução da equação de difusão permite avaliações seguras, encorajando, conseqüentemente, o desenvolvimento de pesquisas futuras. Espera-se, também, que muitas das conclusões sejam válidas para as formulações baseadas na dupla reciprocidade.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

As principais sugestões para trabalhos futuros são:

- Utilização de materiais com difusividades térmicas diferentes, isto é, emprego de sub-regiões.
- Simulação de trocadores de calor, através de condições de contornos variáveis.
- Acoplamento com a formulação usando a solução fundamental dependente do tempo.
- Aplicação para a teoria da elasticidade: estudo das deformações obtidas através de variação de temperatura, análise conjunta de tensões e temperaturas.
- Ampliação do estudo para casos tridimensionais.
- Implementação de outros métodos de marcha no tempo, tal como o método Newmark.
- Desenvolvimento de estudos teóricos objetivando estabelecer critérios mais precisos para a determinação dos intervalos de tempo.

REFERÊNCIAS

BREBBIA, C. A., **The Boundary Element Method for Engineers**, Pentech Press, London, 1978.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L. C., **Boundary element techniques-Theory and application in engineering**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J., **Boundary elements: an introductory course**, Computacional Mechanics Publications and McGraw-Hill, Southhampton, 1989.

BREBBIA C. A.; GEORGIU P.; Combination of boundary and finite elements for elastostatics. **Appl. Math. Modelling**, 212–220, 1979

BREBBIA, C.A.; WALKER, S.; **Boundary elements Techniques in Engineering**, Newnes-Butterworths, Londres, 1980

BUTTERFIELD, R.; TOMLIN, G.R.; Integral Techniques for Solving Zoned Anisotropic Continuum Problems, In: BREBBIA, C. A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L. C., **Boundary element techniques -Theory and application in engineering**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984

CHANG, Y.P.; KANG, C.S.; CHEN D.J., The Use of Fundamental Greens's Function for the Solution of Problems of Heat Conduction in Anisotropic Media, In: BREBBIA, C. A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L. C., **Boundary element techniques -Theory and application in engineering**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984

CARRER, J.A.M.; MANSUR, W.J., Alternative time-marching schemes for elastodynamic analysis with the domain boundary element method formulation, **Computational Mechanics**, Berlin, v. 34, n. 5, p. 387-399, 2004

CAVALCANTI M.C.; TELLES J.C.F.; Biot's consolidation theory-application of BEM with time independent fundamental solutions for poro-elastic saturated media **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Volume 27, Issue 2, February 2003, Pages 145-157

EFFREN, T.C. **Implementação Computacional do Método dos Elementos de Contorno para a Solução de Problemas de Difusão**. Rio de Janeiro, 1997
Dissertação de Mestrado. COPPE/UFRJ

FREDHOLM, L., “Sur une d’equation fonctionelles”, In: BREBBIA, C. A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L. C., **Boundary element techniques -Theory and application in engineering**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984

GREENBERG, M. D., “**Advanced Engineering Mathematics**”, Prentice Hall-2ª edição, New Jersey, 1998

HOUBOLT, J.C., A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, *J. Aeronautical Sci*, v.17, p. 540-550, 1950 In: CARRER, J.A.M.; MANSUR, W.J. **Alternative time-marching schemes for elastodynamic analysis with the domain boundary element method formulation**, *Computational Mechanics*, Berlin, v. 34, n. 5, p. 387-399, 2004

INCROPERA, FRANK P. ; DeWITT DAVID P., **Fundamentos de transferência de calor e de massa**; Guanabara Koogan-3ª edição, Rio de Janeiro, 1992

JASWON, M.A., Integral Equation Methods in Potential Theory, I, In: BREBBIA, C. A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L. C., **Boundary element techniques -Theory and application in engineering**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984

JESUS, J.C., **Implementação Computacional pelo Método dos Elementos de Contorno para a Solução da Equação da Difusão Transiente 2D Utilizando a Solução Fundamental Independente do Tempo**. Rio de Janeiro, 2001. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ

KELLOGG, O.D., Foundations of Potential Theory, In: BREBBIA, C. A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L. C., **Boundary element techniques -Theory and application in engineering**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984

KREITH, F. **Pincípios da Transmissão de Calor**, Editora Edgar Blücher, São Paulo,1973.

KREYSZIG, E., **Advanced Engineering Mathematics**, John Wiley & Sons, Inc., 8th edition, 1999

KUPRADZE, V.D., Potential Methods in the Theory of Elasticity, In: BREBBIA, C. A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L. C., **Boundary element techniques -Theory and application in engineering**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984

LOWFFLER NETO, C.F. **Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicados a Problemas de Campo Escalar**, Rio de Janeiro, 1988. Tese de Doutorado. COPPE/UFRJ

MANSUR, W.J.; PRODANOFF, J.H.A; AZEVEDO J.P.S.; Método dos Elementos de Contorno em Recursos Hídricos, In: SILVA, R. V.; **Métodos Numéricos em Recursos Hídricos**, 2^a ed.,Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Porto Alegre, Brasil, 1996

NARDINI D.; BREBBIA C.A.; A new approach to free vibrations analysis using boundary elements, Boundary elements in engineering, **Computational Mechanics Publications**, Southampton and Springer, Berlin (1982), pp. 312–326

OCHIAI, Y.; SLADEK, V.; SLADEK, J.; Transient Heat Conduction Analysis by Triple-reciprocity Boundary Element Method, **Engineering Analysis with Boundary Elements** , v. 30, p. 194-204, 2005

RIZZO, F.J.; SHIPPY, D.J.; A Method of Solution for Certain Problems of Transient Heat Conduction, In: BREBBIA, C. A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L. C., **Boundary element techniques -Theory and application in engineering**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984

SENNA, A.M.S. **Uma Nova Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Análise Propagação de Ondas Escalares**, Rio de Janeiro, 2003, Tese de Doutorado. COPPE/UFRJ

SOMIGLIANA C., Sopra l'equilibrío di un corpo elastico isotropo, Il Nuovo Ciemento p.17-19 (1886) In: BREBBIA, C. A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L. C., **Boundary element techniques -Theory and application in engineering**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984

SYMM, G.T., Integral Equation Methods in Potential Theory, 2, In: BREBBIA, C. A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L. C., **Boundary element techniques -Theory and application in engineering**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984

STEPHENSONS G.; **An Introduction to Partial Differential Equations for Science Students**, Longman, 1970

WROBEL, L.C.; **Potential and Viscous Flow Problems Using the Boundary Element Method**, U.K., 1981, Ph.D. Thesis, University of Southampton

WROBEL, L. C., **Boundary Element Method - Volume 1**, John Wiley & Sons. Ltd, England, 2002

ZIENKIEWICZ, O. C.; KELLY, D. W.; BETTESS, D. P.; The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. **Int. J. Num. Meth. Engng.** (1977), pp. 355–375

YOUNG, D.L.; TSAI, C.C.; MURUGESAN, K.; FAN, C.M.;CHEN C.W.; Time-dependent Fundamental Solutions for Homogeneous Diffusion Problems, **Engineering Analysis with Boundary Elements** , v. 28, p. 1463-1473, 2004

APENDICE A

Solução fundamental

A solução fundamental u^* é a solução da equação:

$$\nabla^2 u^* = -\delta(\xi, X) \quad (A.1)$$

onde $\delta = \delta(X-X^i)$ representa a função Delta de Dirac a qual tende a infinito em qualquer ponto $X = X^i$ e é igual a zero em qualquer outro ponto. A integral de δ , contudo, é igual a um. O uso da função delta de Dirac é uma forma elegante de representar cargas concentradas, por exemplo.

Em coordenadas cartesianas, a equação (A.1) é escrita como:

$$\nabla^2 u^* = \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = -\delta(\xi, X) = -\delta(\xi_x - x, \xi_y - y) \quad (A.3)$$

Transformando em coordenadas polares:

$$\nabla^2 u^* = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^*}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} = -\delta(\xi, x) \quad (A.3)$$

Observe-se que, na equação (A.3):

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_x, \xi_y) \\ X &= (x, y) \end{aligned} \quad (A.4)$$

e

$$r = X - \xi \quad (A.5)$$

ou

$$r = \sqrt{(x - \xi_x)^2 + (y - \xi_y)^2} \quad (A.5)$$

A solução fundamental é circularmente simétrica conforme mostra a Figura

A.1

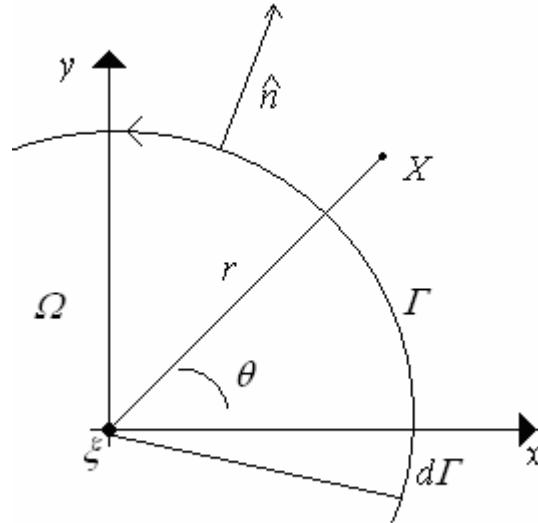


Figura A.1. Círculo de raio r centrado em ξ no domínio infinito Ω_∞ .

Logo para $r > 0 \Rightarrow \delta(\xi, x) = 0$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^*}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} = 0 \quad (A.6)$$

Devido à simetria circular, a equação (A.6) fica:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^*}{\partial r} \right) = 0 \quad (A.7)$$

A equação (A.7) pode ser resolvida com integração unidimensional (considerando o domínio isotrópico).

$$\int \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^*}{\partial r} \right) dr = \int 0 dr \quad (A.8)$$

ou

$$r \frac{\partial u^*}{\partial r} = A \quad (A.9)$$

logo

$$\int \frac{\partial u^*}{\partial r} dr = \int \frac{A}{r} dr \quad (A.10)$$

Portanto, a solução da equação homogênea (A.7) é:

$$u^* = A \ln(r) + B \quad (A.11)$$

Observe-se que u é singular em $r = 0$.

Para determinar os valores das constantes A e B , será utilizada a propriedade da função Delta de Dirac:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* d\Omega = - \int_{\Omega} \delta(x, \xi) d\Omega = -1 \quad (A.12)$$

Aplicando o teorema de Green-Gauss (teorema da divergência) a integral de domínio será transformada em uma integral de contorno:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 w d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (A.13)$$

Logo:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = -1 \quad (A.14)$$

Define-se, a seguir, um domínio circular Ω , de raio r , ao redor de ξ conforme mostra a Figura A.2

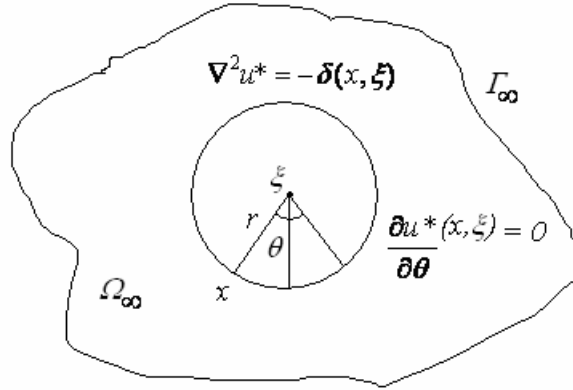


Figura A.2. Círculo de raio r centrado em ξ no domínio infinito Ω_∞ .

A partir da equação (A.9):

$$\frac{\partial u^*}{\partial r} = \frac{A}{r} \quad (A.15)$$

Como \vec{r} e \hat{n} possuem a mesma direção pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u^*}{\partial r} r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{A}{r} r d\theta \quad (A.16)$$

Assim:

$$A = \frac{-1}{2\pi} \quad (A.17)$$

Portanto, a solução fundamental será:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{B}{cte} \quad (A.18)$$

onde B é uma constante arbitrária; adotando-se $B = 0$, a expressão da solução fundamental da equação (A.1) é:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (A.19)$$

O fluxo q^* é dado por:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (A.20)$$

APENDICE B

Células Triangulares Lineares

De acordo com SENNA (2003), para a análise do problema transiente, as integrais de domínio, dos termos inerciais, devem ser incluídas na formulação e, para efeito de implementação numérica, sua resolução contribui no termo independente do sistema linear resultante.

A inclusão destas integrais torna obrigatória a discretização do domínio em células internas. Neste trabalho, o subdomínio onde as condições iniciais não são todas nulas será discretizado com células triangulares sobre as quais o potencial u^0 e a velocidade v^0 serão interpoladas linearmente por funções de forma.

Para efetuar os cálculos, o domínio Ω é dividido em L subdomínios triangulares Ω_l , como mostra figura B.1.

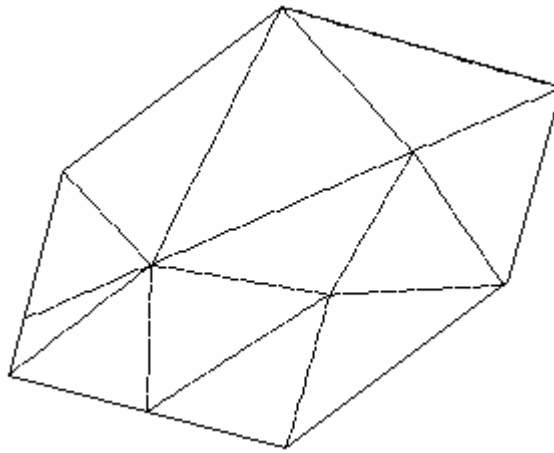


Figura B.1 Discretização do domínio Ω em células triangulares

A generalização das funções de interpolação para uma célula triangular é simplificada se for adotado o sistema de coordenadas triangulares. Para isto, a área de uma célula triangular Ω_l é dada por:

$$\text{Área do triângulo } \Omega_l = A_l = \frac{1}{2} \text{base} \times \text{altura} \quad (B.1)$$

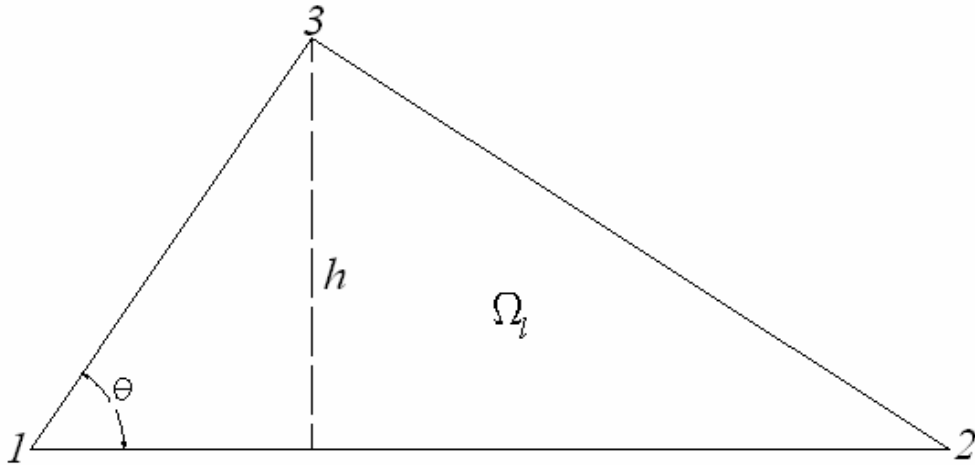


Figura B.2 Numeração local para uma célula triangular.

A figura B.2, mostra um esquema de orientação para a numeração do triângulo genérico Ω_l e nela pode-se observar que:

$$A_l = \frac{1}{2} \|v\| h \quad (B.2)$$

$$A_l = \frac{1}{2} \|v\| \|w\| \text{sen} \theta \quad (B.3)$$

$$A_l = \frac{1}{2} \|v \times w\| \quad (B.4)$$

onde o símbolo \times denota o produto vetorial. Com base na Álgebra Linear, a área do triângulo Ω_l pode ser expressa como:

$$\text{área do triângulo } \Omega_l = A_l = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \quad (B.5)$$

Considerando um ponto genérico $\underline{x} \in \Omega_l$, unido os vértices do triângulo Ω_l ao ponto \underline{x} , formam-se três triângulos interiores a Ω_l , os quais são denominados triângulos auxiliares, conforme a figura B.3.

Pelos argumentos anteriores, pode-se expressar as áreas A_α de cada triângulo auxiliar $\Omega_{\alpha l}$, $\alpha=1,2,3$, $l = 1,2, \dots, L$, em função da área de Ω_l como segue:

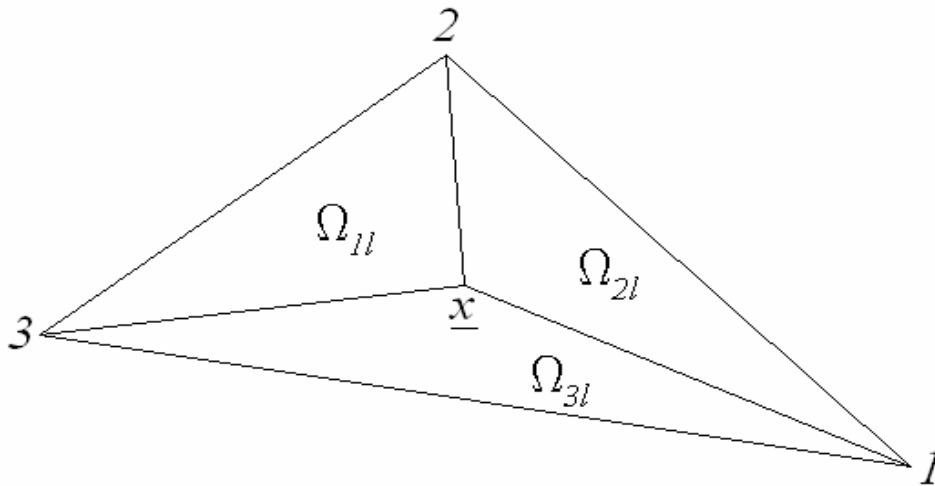


Figura B.3 Áreas para a definição de coordenadas triangulares

$$\text{área } \Omega_{2l} = A_{2l} = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (B.6)$$

$$\text{área } \Omega_{3l} = A_{3l} = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (B.7)$$

ou

$$\begin{aligned} A_{1l} &= \frac{1}{2}[(xy_2 + yx_3 + x_2y_3) - (xy_3 + yx_2 + x_3y_2)] \\ &= \frac{1}{2}[x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2) + (x_2y_3 - x_3y_2)] \end{aligned} \quad (B.8)$$

$$A_{2l} = \frac{1}{2}[x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) + (x_3y_1 - x_1y_3)] \quad (B.9)$$

$$A_{3l} = \frac{1}{2}[x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1)] \quad (B.10)$$

O sistema de coordenadas triangulares $\mu_l = (\mu_{1l} + \mu_{2l} + \mu_{3l})$ é definido em função das áreas A_{1l}, A_{2l} e A_{3l} , como segue:

$$\mu_{1l} = \mu_1 = \frac{A_{1l}}{A_l} = \frac{A_1}{A_l} \quad (B.11)$$

$$\mu_{2l} = \mu_2 = \frac{A_{2l}}{A_l} = \frac{A_2}{A_l} \quad (B.12)$$

$$\mu_{3l} = \mu_3 = \frac{A_{3l}}{A_l} = \frac{A_3}{A_l} \quad (B.13)$$

Convém observar que $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, uma vez que $A_{1l} + A_{2l} + A_{3l} = A_l$. Dentro de cada célula, $u^0(\underline{x}), v^0(\underline{x})$ e são interpolados linearmente, obtendo-se as seguintes expressões:

$$u^0(\underline{x}) = u(\underline{x}, 0) = u_{1l}^0 \mu_1 + u_{2l}^0 \mu_2 + u_{3l}^0 \mu_3 = \sum_{\alpha=1}^3 u_{\alpha l}^0 \mu_\alpha \quad (B.14)$$

$$v^0(\underline{x}) = v(\underline{x}, 0) = v_{1l}^0 \mu_1 + v_{2l}^0 \mu_2 + v_{3l}^0 \mu_3 = \sum_{\alpha=1}^3 v_{\alpha l}^0 \mu_\alpha \quad (B.15)$$

$$\frac{du^0(\underline{x})}{dr} = \frac{d}{dr}[u(\underline{x},0)] = u_{1l}^0 \frac{d\mu_1}{dr} + u_{2l}^0 \frac{d\mu_2}{dr} + u_{3l}^0 \frac{d\mu_3}{dr} = \sum_{\alpha=1}^3 u_{\alpha l}^0 \mu_{\alpha} \frac{d\mu_{\alpha}}{dr} \quad (B.16)$$

onde $u_{\alpha l}^0 = u_{\alpha}^0$, é o valor do potencial e $v_{\alpha l}^0 = v_{\alpha}^0$ é o valor da velocidade no nó local α , $\alpha=1,2,3$ da célula Ω_{1l} , $l = 1,2, \dots, L$, no tempo $t_0 = 0$. Esta numeração é local e deve ser convenientemente relacionada posteriormente com numeração global.

As coordenadas triangulares podem ser relacionadas com as coordenadas retangulares da seguinte maneira:

$$\mu_{\alpha} = \frac{A_{\alpha}}{A} + \frac{1}{2A}(b_{\alpha}x + a_{\alpha}y) \quad (B.17)$$

onde:

$$a_{\alpha} = x_{\gamma} - x_{\beta} \quad (B.18)$$

$$b_{\alpha} = y_{\beta} - y_{\gamma} \quad (B.19)$$

$$2A_{\alpha} = x_{\beta}y_{\gamma} - x_{\lambda}y_{\beta} \quad (B.20)$$

$$A = \frac{1}{2}(b_1a_2 - b_2a_1) \quad (B.21)$$

com $\alpha=1,2,3$ para $\beta=2,3,1$ e $\gamma=3,1,2$. Considerando o sistema de coordenadas polares (r, θ) com origem no ponto ξ_i , conforme a figura B.4., tem-se:

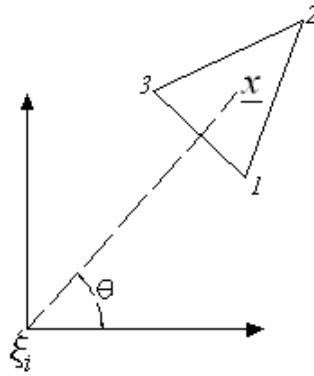


Figura B.4 Coordenadas polares com origem no ponto

$$x = x(r, \theta) = r \cos(\theta) \quad (B.22)$$

$$y = y(r, \theta) = r \text{sen}(\theta) \quad (B.23)$$

e a expressão (B.17) torna-se:

$$\mu_\alpha = \frac{A_\alpha}{A} + \frac{1}{2A} r [b_\alpha \cos(\theta) + a_\alpha \text{sen}(\theta)] = C_\alpha + r D_\alpha(\theta) \quad (B.24)$$

onde, claramente

$$C_\alpha = \frac{A_\alpha}{A} \quad (B.25)$$

$$D_\alpha = \frac{1}{2A} [b_\alpha \cos(\theta) + a_\alpha \text{sen}(\theta)] \quad (B.26)$$

Substituindo (B.17) em (B.14) (B.15) (B.16), vem:

$$u^0(\underline{x}) = u^0(r, \theta) = u_1^0 [C_1 + r D_1(\theta)] + u_2^0 [C_2 + r D_2(\theta)] + u_3^0 [C_3 + r D_3(\theta)] \quad (B.27)$$

$$v^0(\underline{x}) = v^0(r, \theta) = v_1^0 [C_1 + r D_1(\theta)] + v_2^0 [C_2 + r D_2(\theta)] + v_3^0 [C_3 + r D_3(\theta)] \quad (B.28)$$

$$\frac{d[u^0(\underline{x})]}{dr} = \frac{d}{dr} [u^0(r, \theta)] = u_1^0 D_1(\theta) + u_2^0 D_2(\theta) + u_3^0 D_3(\theta) \quad (B.29)$$

A integração de cada célula, então, será executada usando coordenadas polares e cada integral sobre Ω_l será calculada como soma de três integrais sobre as células auxiliares Ω_{1l}, Ω_{2l} e Ω_{3l} , conforme mostra a figura C.5. Uma análise permanente geométrica da figura C.5. revela claramente que a área de Ω_l é:

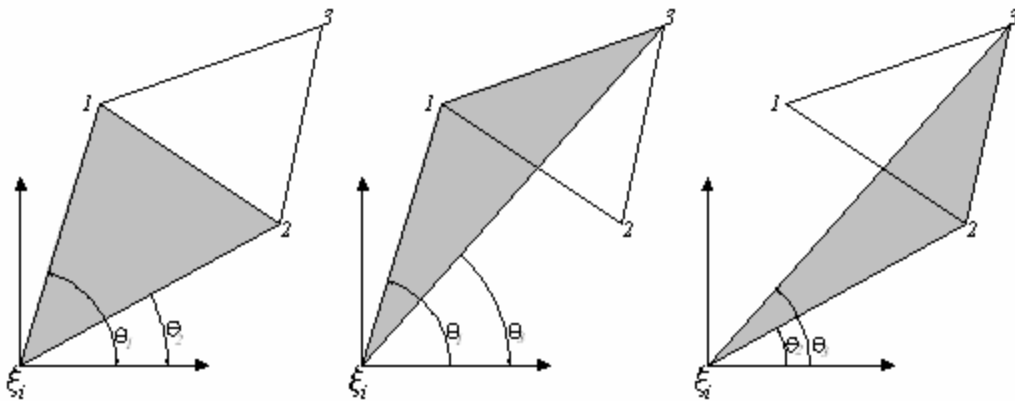


Figura B.5 Coordenadas polares com origem no ponto ξ_i

Em cada integral sobre $\Omega_{\alpha l}$, $\alpha=1,2,3$, a variação θ_α pode ser calculada por:

$$\theta_\alpha = \arctan\left(\frac{y_\alpha}{x_\alpha}\right) \quad (B.30)$$

enquanto que a variação em r figura B.5 é obtida de (106), é dada por:

$$r = r(\theta) = \frac{-2A}{b_\alpha \cos(\theta) + a_\alpha \sin(\theta)} \quad (B.31)$$

Assim, para cada célula Ω_l , tem-se:

$$u_\alpha^0 = u_\alpha^0(r, \theta) = u_\alpha^0[\underline{x}(r, \theta), 0] \quad (B.32)$$

$$v_\alpha^0 = v_\alpha^0(r, \theta) = v_\alpha^0[\underline{x}(r, \theta), 0] \quad (B.33)$$

$$D_\alpha = D_\alpha(\theta), \quad \alpha=1,2,3, \quad (B.34)$$

Células Singulares

Quando o ponto fonte coincide com um dos vértices \underline{x}_α da célula, a célula é dita singular. Como consequência, tem-se $A = A_\alpha$ e, portanto

$$\mu_\alpha = \frac{A_\alpha}{A} + \frac{1}{2A}(b_\alpha x + a_\alpha y) = \begin{cases} 0, & \text{se } \underline{\xi} \neq \underline{x}_\alpha \\ 1, & \text{se } \underline{\xi} = \underline{x}_\alpha \end{cases} \quad (B.35)$$

Por uma translação,

$$\underline{\chi} = \underline{x} - \underline{\xi} \quad (B.36)$$

Pode-se fazer um ponto fonte $\underline{\xi}$ como origem do sistema e com isso, todas as células podem ser tratadas como soma de três células singulares, como mostra a figura B.6.

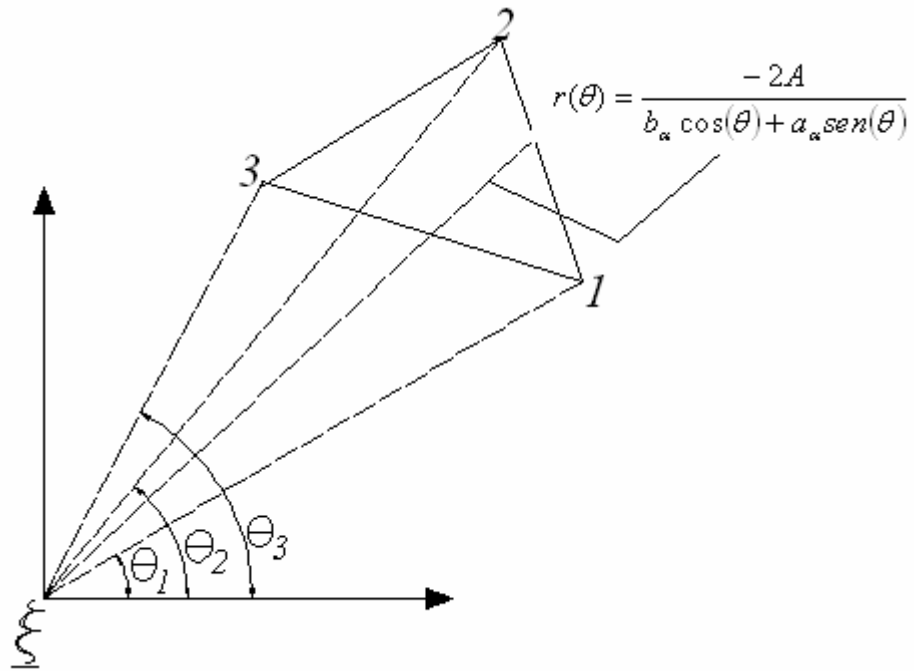


Figura B.6 Ponto fonte $\underline{\xi}$ como origem do sistema para a célula singular

A motivação para este procedimento é auxiliar a integração numérica dupla, no sentido de reduzir o erro da quadratura.

As integrais em r serão calculadas analiticamente; a expressão analítica obtida é função de θ e será integrada numericamente por quadratura de Gauss em θ .