UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Programa de Pós-Graduação em Educação

Cesar Luiz Moreira da Fonseca Marques

Esboço de transcriação

para a Metáfora Básica do Infinito

Curitiba
2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Programa de Pós-Graduação em Educação

Cesar Luiz Moreira da Fonseca Marques

Esboço de transcriação

para a Metáfora Básica do Infinito

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação do Programa de Mestrado em Educação, linha de pesquisa: Educação Matemática, do Setor de Educação da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna

Co-orientador: Prof. Dr. Alexandre Luis Trovon de Carvalho

Curitiba
2007

Catalogação na publicação
Sirlei R.Gdulla – CRB 9ª/985
Biblioteca de Ciencias Humanas e Educação - UFPR

M357 Marques, Cesar Luiz Moreira da Fonseca
Esboço de transcrição para a metáfora básica do infinito / Cesar Luiz Moreira da Fonseca Marques. – Curitiba, 2007.
106 f.

Dissertação (Mestrado) – Setor de Educação , Universidade Federal do Paraná.

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Lakoff, George. 3. Núñez, Rafael. 4. Infinito – matemática. 5. Infinito. I. Título.

CDD 372.7
CDU 511.14

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
MEC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
1912
MESTRADO E DOUTORADO
SETOR DE EDUCAÇÃO

PARECER

Defesa de Dissertação de **CESAR LUIZ MOREIRA DA FONSECA MARQUES** para obtenção do Título de MESTRE EM EDUCAÇÃO. Os abaixo-assinados DR. CARLOS ROBERTO VIANNA, DR. ANTÔNIO VICENTE MARAFIOTI GARNICA, DR. ALEXANDRE KIRILOV, DRª. GLÁUCIA DA SILVA BRITO e DR. ALEXANDRE LUÍS TROVON DE CARVALHO argüiram, nesta data, o candidato acima citado, o qual apresentou a seguinte Dissertação: **"ESBOÇO DE TRANSCRIAÇÃO PARA A METÁFORA BÁSICA DO INFINITO".**

Procedida a argüição, segundo o Protocolo aprovado pelo Colegiado, a Banca é de Parecer que o candidato está apto ao Título de MESTRE EM EDUCAÇÃO, tendo merecido as apreciações abaixo:

BANCA	ASSINATURA	APRECIAÇÃO
DR. CARLOS ROBERTO VIANNA		Aprovado
DR. ANTÔNIO VICENTE MARAFIOTI GARNICA		Aprovado
DR. ALEXANDRE KIRILOV		APROVADO
DRª. GLÁUCIA DA SILVA BRITO		Aprovado
DR. ALEXANDRE LUÍS TROVON DE CARVALHO		APROVADO

Curitiba, 31 de julho de 2007

Profª Drª Maria Tereza Carneiro Soares
Vice-Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Educação

A Deus, meu Criador e Redentor.
À Odila e Sebastião,meus guias,
meus exemplos, meus heróis, meus pais.
À Regina, minha amada esposa, minha vida.
A você, Camila, que ainda não nasceu, mas que já
traz alegria e novo significado à minha existência.

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores, Carlos Vianna e Alexandre Trovon, pela sabedoria demonstrada em seus conselhos e atitudes, pela paciência e amizade que fizeram desta jornada, mais do que uma experiência acadêmica, mas uma lição de vida.

Aos professores Vicente Garnica, Gláucia Brito e Marcos Zanlorenzi pela leitura crítica e pelas importantes contribuições a este trabalho.

Aos professores Ademir Caldeira, Ana Maria Liblik, Emerson Rolkouski, Ettiène Guérios, Jose Carlos Cifuentes, Maria Lucia Moro e Maria Tereza Soares, que ajudaram a expandir meus horizontes e conhecimento em Educação Matemática e que se tornaram objeto de minha admiração e profundo respeito.

Aos colegas Denise, Everaldo, Roberto, Kátia, Sandra, Silvia, Rudinei e aos demais amigos que fiz neste programa. Obrigado por sua amizade e apoio nos momentos bons e nos tempos difíceis. Espero ter correspondido na proporção do carinho e amizade de vocês!

A todos os mestres que encontrei em meu caminho e que contribuíram para minha formação acadêmica e pessoal, em especial aos queridos Janine e Renato Gross, cujo exemplo me motiva e inspira na busca do saber.

À Rede de Educação Adventista, especialmente ao prof. Eliseu Prates dos Reis, pela compreensão e apoio nestes anos de pós-graduação, minha sincera gratidão.

Aos meus amados pais, Sebastião e Odila, pela dedicação e amor com que encararam a difícil tarefa de educar. Espero ter correspondido à altura dos seus esforços!

A todos os que auxiliaram na elaboração deste trabalho e, principalmente, à minha querida esposa, Regina, pelo apoio, amor e compreensão que foram e são fundamentais na minha vida.

RESUMO

Propõe-se uma exposição dos principais pressupostos e idéias escritas por George Lakoff e Rafael Núñez em sua obra Where Mathematics Comes From. Trata-se não só de uma tradução, mas de uma tentativa inicial de aplicação da transcriação, tal como concebida por Haroldo de Campos, de modo a libertar o texto de possíveis associações equivocadas que possam dificultar sua compreensão, colaborando para a sua divulgação, análise, crítica e desenvolvimento pela comunidade acadêmica brasileira. Apresenta-se um panorama geral da trajetória de investigação e uma análise das idéias principais adotadas pelos autores citados, acompanhada por uma versão transcriada, em língua portuguesa, de seus termos principais, bem como uma tradução completa do oitavo capítulo da referida obra, que contém a formulação da *Metáfora Básica do Infinito.* Por fim, expõem-se exemplos e comentários, na forma de um *transglossário;* acerca dos problemas encontrados no decorrer do desenvolvimento do trabalho e as soluções escolhidas.

Palavras-chave: Educação Matemática, Metáfora Básica do Infinito, *Embodiment*, Transcriação.

ABSTRACT

This Master's thesis proposes an exposition of the main ideas written by George Lakoff and Rafael Núñez in Where Mathematics Comes From. To do that, an initial application of the principles of Haroldo de Campos's transcriation is elaborated, in a way that may liberate the text from possible mistaken associations that may bring difficulties to it's comprehension and fomenting it's analysis, debate and development, as well as to spread those ideas among the Brazilian researchers. A general overview of the driven goals that generated this research and of the most important concepts used by the quoted authors are given. It also has a complete Portuguese version on the eighth chapter of *Where Mathematics Comes From*, which presents the Basic Metaphor of Infinity formulation, as well as a creative transposed version of the main ideas used by its authors. Finally, some examples and comments are written as a *transglossary*, which deals with the problems and challenges faced in the development of this paper and the adopted solutions.

Keywords: Mathematics Education, Basic Methapor of Infinity, Embodiment, Creative Transposition.

SUMÁRIO

1. Cenários e texturas de fundo

Neste capítulo procuraremos contextualizar o projeto que desenvolvemos e, também, o trabalho dos autores do texto que escolhemos como objeto de nossa consideração e transcriação.

Contextualizar o projeto de pesquisa possibilita ao leitor uma compreensão 'em perspectiva' do mesmo. O registro dos problemas e decisões tomadas ajuda a esclarecer alguns dos porquês da forma como se apresenta a dissertação; além disso, também revela a dinâmica do processo de investigação que nos dispusemos a realizar. Concordamos com Borba e Araújo (2004, p. 27) quando, comentando acerca da busca pela pergunta de pesquisa, afirmam que "todo o processo de construção da pergunta faz parte da própria pergunta", e sugerem que seria recomendável a inclusão de um relato deste processo. No nosso caso, até o projeto foi fruto da trajetória que relatamos aqui.

Quanto aos autores, nosso objetivo é o de expor suas idéias e pressupostos principais de modo que o leitor não familiarizado possa conhecer sua inserção no contexto acadêmico e a importância do que dizem para a Educação Matemática. Essa exposição é relevante, pois o conhecimento destes fatos auxilia na compreensão do terceiro capítulo desta dissertação, onde apresentamos uma proposta de transcriação para o que julgamos ser uma das principais contribuições de Lakoff & Núñez para nossa linha de pesquisa.

Convém frisar que alguns termos importantes desta teoria já aparecem, desde essa introdução, em sua versão transcriada. Um comentário sobre nossas escolhas no processo de transcriação estará presente no capítulo quarto.

1.1. Trajetória da Pesquisa

No processo de desenvolvimento deste projeto de pesquisa pude perceber que investigar é aventurar-se. É como adentrar em um mundo desconhecido que, à primeira vista, parece um pouco mais familiar e simples do que ele realmente é. A pesquisa nos impõe desafios, dilemas que requerem decisões que muitas vezes implicam mudanças drásticas e inesperadas. De modo nenhum poderia prever que minhas primeiras inquietações e propostas de investigação me levariam à presente dissertação.

As leituras e discussões, os obstáculos e as idéias que surgiram no decorrer do percurso foram tais que me sinto no dever de expor parte deste caminho.

O presente trabalho é fruto de um processo de descoberta que se apresentou muito mais dinâmico do que inicialmente esperei. Meus interesses de pesquisa em Educação Matemática estavam vinculados ao uso de recursos tecnológicos. Inicialmente pretendia investigar grupos de reflexão sobre a prática pedagógica que trabalham com o auxílio de mídias informatizadas. Este projeto inicial, que envolvia a teoria da reorganização de Tikhomirov (1981, 1999), sofreu alterações, devido a limitações de ordem teórica e metodológica, logo nas primeiras conversas com o meu orientador de então, o professor Alexandre Trovon.

Entrementes, as possibilidades de trabalho com a teoria das metáforas conceituais, tal como colocada no contexto da Matemática por Lakoff e Núñez (2000) me foram apresentadas. Passamos, então, a trabalhar tendo em vista o efeito da tecnologia no modo como estudantes do ensino superior conceituam a idéia de limite, o que envolvia tanto a teoria da reorganização de Tikhomirov como a *Metáfora Básica do Infinito* de Lakoff & Núñez (2000).

Prosseguimos neste rumo, até que um problema de ordem teórica se apresentou: como articular duas teorias que, pelo menos aparentemente, não possuem os mesmos pressupostos e que aparecem em realidades ou cenários acadêmicos diferentes? Explico. A teoria de Tikhomirov tem suas raízes na teoria da atividade de Leontiev. Já o trabalho de Lakoff e Núñez está embasado na linha da ciência cognitiva denominada em inglês de *Embodiment* e que tem raízes filosóficas aparentemente bem distintas daquelas da psicologia soviética. Para seguir na mesma direção de pesquisa, acreditávamos que uma análise dos pressupostos de ambas deveria ser feita com cuidado, incluindo não só a teoria em si, mas suas referências principais. A articulação teórica destes dois universos teóricos distintos, mesmo sendo uma tarefa academicamente rica e interessante, exigiria muito mais do que o tempo e recursos do que dispúnhamos para a realização de um projeto em nível de mestrado. Desta feita, um recorte se fez necessário; e optamos por trabalhar apenas com uma das teorias.

Entre as várias inquietações que surgiram neste percurso, a necessidade de uma compreensão mais profunda das idéias de Lakoff & Núñez se apresentou como mais urgente e mais viável para desenvolvimento, considerando o prazo e os recursos que dispúnhamos.

Pensamos que qualquer trabalho que pretenda lidar com esta teoria, deveria conter uma exposição, a mais clara e precisa possível, de seus conceitos principais, visto tratar-se de uma teoria não muito conhecida, principalmente no Brasil[1]. Deste modo, verificamos que uma exposição crítica desta teoria em português constituiria, em si, material suficientemente rico para um trabalho de mestrado. Contudo, resolvemos enfrentar um desafio maior: além de expor, adaptar para a língua portuguesa alguns dos termos e contribuições fundamentais da teoria proposta de modo a não apenas traduzi-los, mas “transcriá-los”.

Toda esta trajetória tomou tempo e, do projeto inicial à definição de que trabalharíamos com a transcriação foi decorrido um ano e meio. Outro problema se apresentou então, o prazo concedido pelo programa de pós-graduação da UFPR que é de dois anos. Desta feita, optamos, não por uma exposição detalhada e transcriada de todas as idéias e elementos expostos pelos autores, mas por um realizar um recorte, contemplando seus principais pressupostos e sua principal contribuição que, a nosso ver, é a Metáfora Básica do Infinito.

Em suma, optamos por trabalhar na “transcriação” da teoria proposta por Lakoff & Núñez (2000), seja por se tratar de uma teoria relativamente pouco explorada na educação matemática brasileira; seja por julgarmos que tal teoria traz contribuições valiosas para a pesquisa nesta área.

A presente dissertação, portanto, contém a transcriação integral do capítulo oitavo de *Where Mathematics Comes From* (Lakoff e Núñez, 2000) que trata da *Metáfora Básica do Infinito* e da realização de um “transglossário”, com alguns dos termos mais importantes utilizados por estes autores.

Pretendemos, pois, apresentar um trabalho que possa ser o ponto de partida, não só de uma “transcriação” completa da teoria proposta, mas de sua divulgação em maior escala e posterior análise, crítica e desenvolvimento pela comunidade acadêmica brasileira.

[1] No Brasil, destacamos o trabalho da Prof. Dr.ª Janete Bolite Frant da PUC-SP.

1.2. As Idéias de George Lakoff e Rafael Núñez

Nosso intuito aqui é apresentar nossos autores de maneira geral, de modo que o leitor compreenda quem são, o que pretendem e qual a possível importância destes autores para a Educação Matemática.

Vale lembrar que os termos referentes à teoria que não aparecem em inglês, ou com o original entre parênteses, já se apresentam na versão transcriada que propomos. Discutiremos nossas escolhas e os seus detalhes mais adiante.

George Lakoff é professor da Universidade da Califórnia (Berkeley) desde 1972. Ensinou também em Harvard e na Universidade de Michigan e como visitante na Ècole des Hautes Ètudes en Sciences Sociales, Paris e na University of New Mexico.

Suas pesquisas envolvem principalmente o trabalho com metáforas conceituais. É de sua autoria, junto com Mark Johnson, professor de filosofia da Universidade de Oregon, o livro *Metaphors We Live By* (1980), editado no Brasil sob o título “Metáforas da Vida Cotidiana” (2002) e *Philosophy in The Flesh* (1999), obra em que delineiam os princípios e buscam o estabelecimento de uma filosofia baseada nos resultados obtidos pela ciência cognitiva e que ainda não foi editado em português.

Entre outros títulos de sua autoria, encontramos: *Woman, Fire and Dangerous Things, What Categories Reveal About The Mind* (1987), *Moral Politics: How Liberals and Conservatives Think* (2002).

Lakoff tem aplicado a teoria das metáforas conceituais e as idéias da ciência cognitiva na Literatura, na Filosofia, na Política e na Matemática. Nesta última, trabalhando em colaboração com Rafael Núñez, busca entender como nós, seres humanos, compreendemos as idéias matemáticas através do que eles chamam de “análise das idéias matemáticas”, a qual detalharemos mais adiante.

Rafael Núñez é psicólogo e professor do departamento de ciência cognitiva da Universidade da Califórnia (San Diego). Ensinou também em diversas universidades, incluindo: Universidade da Califórnia (Berkeley), Universidade de Fribourg, Universidade de Lausenna, Universidade de Genebra, Ecole Nationale Supérieure de Télécommunications (Paris), Universidad Autónoma de Madrid, Universidad de Barcelona, Universidad Católica del Norte (Chile) e inclusive as brasileiras, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e Universidade Federal de Pernambuco (Recife).

Dentro da linha da ciência cognitiva da mente corpoembasada (*embodied mind*) Núñez tem trabalhado no modo como compreendemos conceitos abstratos, sendo que seu trabalho se destaca na produção sobre a cognição do infinito.

A importância destes autores para a pesquisa em Educação Matemática vem da própria natureza do seu trabalho em relação à Matemática. Eles se propõem a realizar uma análise das idéias matemáticas do ponto de vista da ciência cognitiva, de modo a tentar entender como estes conceitos são formados e que mecanismos cognitivos são usados em sua compreensão.

Para esta análise, seguem uma linha de investigação científica baseada na abordagem da Ciência Cognitiva da Mente Corpoembasada e na filosofia que Lakoff & Johnson expõem em sua obra *Philosophy in the Flesh* (1999). Esta proposta filosófica é baseada em três pressupostos básicos: o processual-cognitivo-não-consciente, a mente corpoembasada e o pensamento metafórico.

George Lakoff e Rafael Núñez não são matemáticos. São cientistas cognitivos. O primeiro é lingüista e o segundo psicólogo. Achar que o trabalho deles é um trabalho matemático é um equivoco. Eles lidam com a Matemática sob um olhar da Ciência Cognitiva.

Dizer apenas que são cientistas cognitivos não basta. Até mesmo dizer que fazem parte de uma linha específica de trabalho dentro deste ramo da ciência é insuficiente. É necessária uma apresentação de suas idéias principais, mesmo que de forma abreviada, para compreendermos sua relevância não somente para a Ciência Cognitiva, mas também para a Educação Matemática.

Dentro da Ciência Cognitiva, Lakoff & Núñez podem ser definidos como integrantes da corrente da cognição corpoembasada (*embodied cognition*). Este modo de ver a cognição nasceu em grande parte como uma reação à abordagem tradicional da Inteligência Artificial. Apresenta-se como oposta ao cognitivismo, que se caracteriza pela concepção do pensar como manipulação lógico-simbólica. Além disso, está comprometida com o que Anderson (2003) chama de *Physical Grounding Project*, ou seja, com o projeto de se embasar os processos cognitivos não em entidades abstratas, mas nas relações do ser físico com o meio em que vive. De fato, esta linha de pesquisa apresenta diversas variantes. Contudo, o que é comum a todas é a idéia de que o pensamento está vinculado aos processos biológicos. A mente (local do pensamento) é intrinsecamente ligada ao corpo e às funções biológicas do organismo, bem como às suas interações com o ambiente.

Como já dissemos, em sua obra *Where Mathematics Comes From* (2000), estes autores propõem uma análise das idéias matemáticas. Esta obra é uma exposição das idéias e dos trabalhos destes autores em relação à Matemática. Nela Lakoff & Núñez dispõem-se a olhar sob o ponto de vista da Ciência Cognitiva os conceitos matemáticos, de modo a compreender como as idéias matemáticas surgem e em que elas se baseiam.

Pretendem, também, verificar se os mesmos mecanismos cognitivos usados nas idéias comuns ou cotidianas, como os que usamos para conceitos como tempo, ações e eventos, etc., são usados para compreender as idéias matemáticas.

É importante, mais uma vez, frisar que tal tarefa não é uma tarefa matemática, mas uma investigação de natureza cognitiva. Não se trata de fazer matemática ou de tentar explicar matematicamente as bases das idéias matemáticas.

Estes autores promovem a aplicação da teoria das metáforas conceituais (Lakoff & Johnson, 1980) e as idéias básicas da cognição corpoembasada no âmbito das idéias matemáticas, o que constitui, a nosso ver, uma das grandes contribuições desta obra. Chegam a mapear dezenas de metáforas conceituais que estariam vinculadas a várias idéias matemáticas.

De modo geral, as idéias expostas em *Where Mathematics Comes From* (Lakoff & Núñez, 2000) estão divididas da seguinte maneira: (1) a base teórica que viabiliza o método de investigação (chamado de análise das idéias matemáticas), e engloba conceitos gerais da linha da Ciência Cognitiva adotada em sua obra e (2) a aplicação deste método acrescida da exposição dos seus resultados. Optamos aqui neste capítulo, por contemplar a base teórica, a título de contextualização, destacando seus pontos e idéias principais. A segunda parte, ou seja, o modo como esta base é aplicada, está bem evidente no capítulo terceiro desta dissertação, onde apresentamos nossa versão transcriada de um dos capítulos da obra supracitada.

Com o já colocado acima, em sua abordagem cognitiva, os autores partem de três pressupostos básicos: o processual-cognitivo-não-consciente, a mente corpoembasada e o pensamento metafórico.

Processual-cognitivo-não-consciente

Muito do que pensamos ocorre de modo inconsciente, sem que estejamos cientes de que o estamos fazendo. Os sistemas conceituais que estruturam a compreensão não são percebidos conscientemente pelo sujeito, seriam parte do processual-cognitivo-não-consciente. Grande parte do pensamento seria inconsciente "não no sentido freudiano de estar reprimido, mas no sentido de que este opera abaixo do nível de percepção cognitiva, inacessível à consciência e muito rapidamente para ser focalizado." (Lakoff & Johnson, 1999, p. 10).

O processual-cognitivo-não-consciente não deve ser visto, no entanto, como algo que não possui relação com os processos conscientes. Na verdade ele funciona como base para estes processos. Tanto o pensamento consciente como os processos que ocorrem abaixo do nível de consciência são partes de um mesmo todo. Sem o processual-cognitivo-não-consciente, a consciência seria impossível. "A consciência envolve [...] a imensuravelmente vasta estrutura constitutiva provida pelo processual-cognitivo-não-consciente, o qual deve estar operando para que nós possamos estar conscientes de qualquer coisa afinal." (Lakoff & Johnson, 1999, p. 11).

Lakoff & Johnson (1999) chegam a comparar o pensamento consciente com a ponta de um *iceberg* e o processual-cognitivo-não-consciente como uma mão oculta que molda nossos sistemas conceituais e nosso pensamento consciente. Sobre este conceito, Lakoff & Núñez afirmam que:

> Todos nós temos sistemas de conceitos que usamos ao pensar, mas não podemos inspecionar nosso inventário conceitual conscientemente. Todos nós tiramos conclusões instantaneamente na conversação, mas não podemos olhar, conscientemente, a cada inferência e aos nossos próprios mecanismos de inferir enquanto estamos no ato de inferir em larga escala, segundo por segundo. Todos nós falamos em uma língua que tem uma gramática, mas não colocamos as frases juntas conscientemente, palavra por palavra, checando conscientemente se estamos seguindo as regras de nossa língua. Para nós, isto parece fácil: apenas falamos, ouvimos e tiramos conclusões sem esforço. Mas o que ocorre em nossas mentes, por trás das cortinas, é enormemente complexo e amplamente não disponível para nós. (2000, p. 27).

Em Educação Matemática, isto significa dizer que muitas vezes aprendemos conteúdos matemáticos, bem como seus significados e aplicações sem, no entanto, termos consciência dos mecanismos cognitivos que possibilitam este aprendizado.

“Muito do nosso entendimento matemático cotidiano acontece sem que sejamos capazes de explicar exatamente o que nós entendemos e como o entendemos.” (Lakoff & Núñez, 2000, p. 28). Não se trata de não termos consciência dos métodos de ensino, do tempo de estudo e do conceito em si. A questão é que os processos cognitivos que envolvem e possibilitam compreendermos tais conceitos ocorrem de modo inconsciente.

O fato de a maioria dos processos mentais ocorrerem de modo imperceptível leva a implicações de ordem filosófica. Por exemplo, torna-se errôneo, segundo esta visão, pensar que por meio de pura introspecção ou reflexão filosófica podemos compreender como se processa tanto o conhecimento como os modos pelos quais nossos sistemas conceituais se estruturam e são utilizados. Logicamente isto não invalida a contribuição da reflexão filosófica e da análise fenomenológica, mas apenas limita seu campo de ação.

> Há muito que dizer para a reflexão filosófica tradicional e para a análise fenomenológica. Elas podem nos fazer cientes de muitos aspectos da consciência e, em uma extensão limitada, podem aumentar nossas capacidades de percepção consciente. A reflexão fenomenológica nos permite até mesmo examinar muitas das estruturas básicas pré-reflexivas que jazem abaixo de nossa experiência consciente. Mas nenhum destes métodos pode explorar adequadamente o processual-cognitivo-não-consciente – o domínio do pensamento que é completamente e irrevogavelmente inacessível através da direta introspecção consciente. (Lakoff & Johnson, 1999, p. 12).

Mas se nenhum destes dois métodos é capaz de dar conta da desafiadora tarefa de se analisar e compreender o processual-cognitivo-não-consciente, qual seria a alternativa?

O modo pelo qual podemos acessá-lo seria através da linguagem. Dentre os métodos da Ciência Cognitiva, a investigação lingüística é o modo de abordagem da análise das idéias matemáticas proposta e realizada por Lakoff & Núñez (2000).

Mente Corpoembasada

O pensamento não é algo puramente abstrato, independente dos processos neurais. A concepção do pensar somente como manipulação lógico-simbólica é errônea. A mente é dependente do sistema nervoso. Vê-se que esta idéia é diametralmente oposta a outras visões como o cognitivismo[2] e o dualismo cartesiano, entre outras. O pensar está condicionado às funções fisiológicas, além das psicológicas.

Os processos cognitivos não dependem somente da atividade cerebral, mas estão vinculados às diversas partes do corpo humano. Os conceitos e raciocínios humanos são estruturados através das experiências cotidianas corpóreas, das interações do indivíduo com o meio ambiente, inclusive no que se refere à sociedade e à cultura.

Há, portanto, uma íntima relação entre a mente e o corpo, entre o cérebro e os demais sistemas do organismo. A dicotomia mente corpo é inexistente. “A natureza detalhada e dinâmica de nossos corpos, nosso cérebro e nosso funcionamento cotidiano no mundo, estruturam os conceitos e a razão humana. Isto inclui os conceitos matemáticos e o raciocínio matemático.” (Núñez, 2000, p. 6).

Dizer que e a mente é corpoembasada, portanto é afirmar a primazia do corpóreo. É estabelecer vínculos entre o pensamento e o ser físico. Entre as experiências mediadas pelo corpo e os conceitos gerados no cérebro.

A questão que surge é, como conceitos abstratos como, por exemplo, as noções de continuidade e limite têm sua base em experiências concretas? A resposta nos remete ao terceiro pressuposto, o pensamento metafórico.

Pensamento Metafórico

O modo como ocorre a estruturação dos conceitos citados acima é através do pensamento metafórico. Os conceitos abstratos são compreendidos através de metáforas conceituais que os ligam a situações concretas. Estas metáforas constituem, portanto, um mecanismo cognitivo fundamental para a construção e compreensão de conteúdos abstratos, inclusive os matemáticos. A metáfora seria a base da abstração. O mecanismo pelo qual a maior parte do nosso sistema conceitual é estruturado.

Mas o que se entende por metáfora?

Desta perspectiva, podemos dizer que “metáfora é principalmente um modo de conceber uma coisa em termos de outra e sua função primordial é a

[2] Abordagem positivista que procura explicar a cognição por meio de experimentos e em termos de leis e algoritmos.

compreensão.” (Lakoff & Johnson, 1980, p. 36). Não é então, apenas uma figura de linguagem com finalidades estéticas, um recurso poético, mas um mecanismo cognitivo que possibilita a compreensão de conceitos que, de outra maneira, não poderiam ser compreendidos.

A metáfora conceitual faz parte do processual-cognitivo-não-consciente, é algo de que não nos damos conta, mas que estrutura significativamente nossa compreensão do mundo.

As metáforas conceituais apresentam dois domínios distintos, o domínio fonte e o domínio alvo. O domínio fonte se refere à experiência que dá suporte àquela do domínio alvo. Por exemplo, na metáfora ‘Tempo é Dinheiro’, que é evidenciada por frases como: “preciso *gastar* melhor o meu tempo*”, “*não *invista* seu tempo nisso”, o domínio fonte é o dinheiro e o domínio alvo o tempo, sendo o segundo entendido em termos do primeiro.

As metáforas são passíveis de um mapeamento específico. De fato, Lakoff & Núñez apresentam vários destes mapas. A seguir, tem-se um exemplo do mapeamento da metáfora ‘Categorias são Recipientes’:

CATEGORIAS SÃO RECIPIENTES

Domínio Fonte Recipientes		*Domínio Alvo* Categorias
Regiões demarcadas no espaço	→	Categorias
Objetos dentro das regiões demarcadas	→	Elementos da categoria
Uma região demarcada dentro da outra	→	Uma subcategoria de uma categoria maior

Fonte: Lakoff & Núñez 2000, p. 43.

Percebe-se um direcionamento único que vai do domínio fonte para o domínio alvo. Uma das características das metáforas conceituais é esta relação unidirecional entre os domínios. As propriedades do domínio fonte são projetadas no domínio alvo. A compreensão do domínio alvo depende do domínio fonte, sendo que a recíproca não é verdadeira. É este o sentido de se “conceber uma coisa em termos de outra” (Lakoff & Johnson, 1980, p. 36).

Partindo destes pressupostos e buscando analisar as idéias matemáticas através da ótica da Ciência Cognitiva, Lakoff & Núñez expõem alguns mecanismos cognitivos necessários para ir-se das habilidades numéricas básicas ou inatas[3] à imensamente mais complexa Matemática, como a conhecemos academicamente. Estes mecanismos são: (1) Esquemas Imagéticos; (2) Esquemas Aspectuais; (3) Mesclas Conceituais; (4) Metáforas Conceituais.

Esquemas Imagéticos

Nossas atividades cotidianas como dirigir até o trabalho ou tomar um copo de água, por exemplo, são muito mais complexas, cognitivamente falando, do que imaginamos. Seria impossível nos relacionarmos no espaço e no tempo como o fazemos se não tivéssemos os mecanismos cognitivos que nos permitem raciocinar em termos espaciais e temporais. Apesar de ainda não conhecermos todos estes mecanismos, podemos afirmar que os esquemas imagéticos constituem um dos mais importantes.

Há, nas diversas línguas ao redor do planeta, sistemas vinculados às relações espaciais. Tais sistemas variam, de acordo com o idioma, mas as expressões podem ser decompostas em estruturas pré-linguísticas que emergem de interações corpóreas com o ambiente, de nosso contexto lingüístico e histórico-cultural.

Os esquemas imagéticos seriam decomposições em rudimentos conceituais das relações espaciais contidas na linguagem em geral. Lakoff & Núñez afirmam que há evidências de que tais esquemas são universais.

Estes esquemas seriam responsáveis pelo entendimento que temos de várias experiências cotidianas, nos provendo uma estrutura racional para estes. Além disso, configuram um recurso presente em muitas metáforas conceituais e “estão entre as fontes das formas de lógica usadas no raciocínio abstrato.” (Lakoff & Johnson, 1999, p. 36).

---

[3] *Subtizing*

Ao dizermos que algo está sobre a mesa, a preposição “sobre” é um composto de três idéias: a idéia de que algo está em cima da mesa; a idéia de que algo está em contato com a mesa e a idéia de que algo está sendo suportado pela mesa. Desta forma, ao decompor-se a referida preposição, encontra-se os conceitos primitivos de que ela é composta, seus esquemas imagéticos, que de acordo com o exemplo acima seriam: (1) o Esquema Acima-de; (2) esquema Em-contato-com; e (3) o Esquema de Apoio.

> O Esquema Acima-de é orientacional; ele especifica uma orientação no espaço relativo à gravidade que sentimos em nossos corpos. O Esquema Em-contato-com é um de uma série de esquemas topológicos; indica a ausência de brechas. O Esquema de Apoio é dinâmico, no sentido da Física, por natureza; indica a direção e natureza de uma força. Em geral, os esquemas imagéticos estáticos caem em uma destas categorias: orientacional, topológica dinâmico. (Lakoff & Núñez, 2000, p. 30).

Um importante esquema imagético utilizado na compreensão das idéias matemáticas é o chamado Esquema de Recipiente, que se constitui de uma fronteira, um exterior e um interior. Este esquema é fundamental para os conceitos gerais de dentro e fora e serve como fundamento em Matemática para os diagramas de Venn, por exemplo.

Os esquemas imagéticos funcionam como elementos de ligação entre a razão e o sistema visual. Eles se apresentam como igualmente conceituais e perceptuais. As inferências lógicas da Figura 1 (na próxima página) podem ser extraídas apenas por meio visual, não havendo necessidade dos elementos simbólicos. Consegue-se inferir apenas de modo visual que se X está contido em A e A está contido em Y, então X está contido em Y.

> “Devido aos esquemas imagéticos possuírem uma lógica espacial construída em sua estrutura imagística, eles podem funcionar como conceitos espaciais e ser usados diretamente no raciocínio espacial. O raciocínio espacial parece ser feito diretamente em termos espaciais, usando esquemas imagéticos mais do que símbolos, como nas provas matemáticas e deduções na lógica simbólica.” (Lakoff & Núñez, 2000, p. 31).

O Esquema de Recipiente utiliza-se de uma lógica espacial que só é possível devido a uma série de mecanismos neurais específicos que vinculam a visão à cognição topológica e espacial, bem como orientacional, constitui um conceito que só existe em função da relação não dicotômica entre corpo e mente.

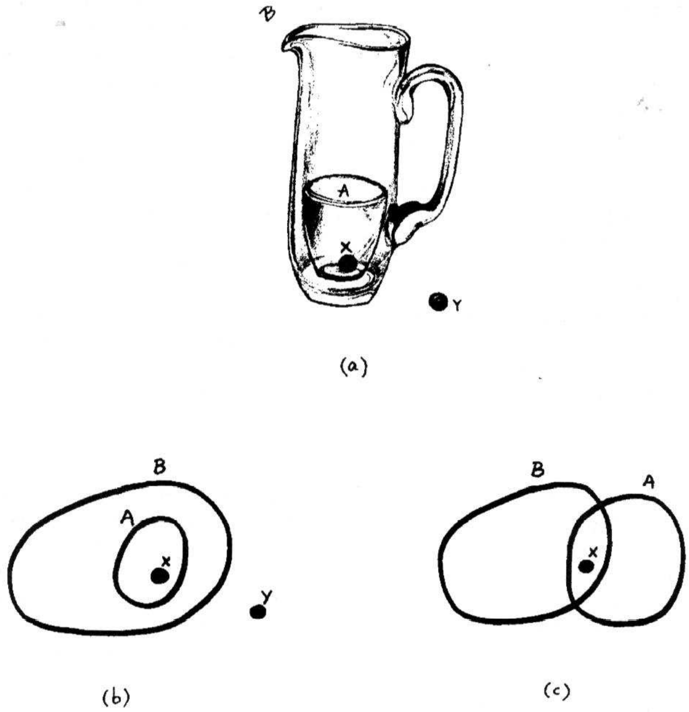

Figura 1: *Container Schema* (Lakoff & Núñez, 2000. p. 32).

Outro ponto a destacar é que tanto nas idéias matemáticas, como na linguagem geral, vemos o Esquema de Recipiente como base de diversos conceitos.

> Os conceitos de contenção e orientação não são particulares à Matemática, mas são usados no pensamento e linguagem em geral. Como quaisquer outros conceitos, aparecem apenas via mecanismos neurais no tipo certo de circuito neural. É de especial interesse que o circuito neural que usamos para outros propósitos é parte inerente da Matemática, o que sugere que a Matemática corpoembasada não existe independentemente de outros conceitos corpoembasados usados na vida cotidiana. Como alternativa, a Matemática usa de nossas capacidades adaptativas – nossa habilidade de adaptar outros mecanismos cognitivos para fins matemáticos. (Lakoff & Núñez, 2000, p. 33).

Uma das principais idéias destes autores é a de que os mesmos mecanismos cognitivos usados em situações cotidianas, são utilizados na cognição matemática. De certa forma, estes mecanismos não só são usados na compreensão das idéias matemáticas, mas constituem o próprio fundamento sem o qual tais idéias não existiriam.

Esquemas Aspectuais

Além das relações espaciais, as diferentes línguas possuem em sua estrutura, meios de codificar o que concebemos como ações ou eventos. O que a Ciência Cognitiva diz é que esta estrutura gramatical deriva diretamente do sistema motor.

Segundo o modelo de Narayanan (cf. Lakoff & Núñez, 2000, p. 34 e 35), a estrutura dos sistemas de controle motor apresenta basicamente os mesmos aspectos: (1) prontidão, ou o estado de estar apto a realizar uma ação corpórea qualquer; (2) o início, ou a ação inicial do processo; (3) o processo principal, ou a ação em si; (4) possíveis interrupções e retomadas; (5) repetição ou continuação da ação; (6) propósito, ou a avaliação se a ação atingiu seu objetivo; (7) completude e (8) estado final, onde se pode perceber as conseqüências da ação. O fato é que esta estrutura básica é a mesma que é utilizada para conceber ações ou eventos.

Os conceitos abstratos relativos às ações ou eventos possuem a mesma estruturação das ações corpóreas do sistema motor. Esta estrutura é chamada por Lakoff & Núñez (2000) de *esquema aspectual.* Esta conclusão possui significado especial na análise das idéias matemáticas, por exemplo, naquelas que envolvem os conceitos de limite, continuidade e infinito, pois é capaz de estabelecer as conexões entre estes conceitos abstratos e as experiências corpóreas.

Mesclas Conceituais

“Uma mescla conceitual é uma combinação conceitual de duas estruturas conceituais distintas com correspondências fixas entre elas.” (Lakoff & Núñez, 2000, p. 48). Os autores dão o exemplo de um círculo, que quando colocado em um plano cartesiano apresenta características que não possuía quando visto apenas sob a ótica da geometria Euclideana.

Estas *mesclas* podem ser de natureza metafórica, quando estas correspondências fixas ocorrem via metáfora, o que, segundo os autores, aparece freqüentemente na Matemática.

Um relato mais detalhado sobre as mesclas conceituais encontra-se em Falconnier & Turner (2002).

Metáforas Conceituais

Já mencionamos que, segundo esta teoria, a abstração depende do pensamento metafórico, mais especificamente das chamadas metáforas conceituais. Como vimos anteriormente, tais metáforas são "mecanismos cognitivos que nos permitem fazer inferências em um domínio da experiência (*domínio alvo*) baseadas nas inferências que pertencem a outro domínio (*domínio fonte*)" (Núñez, 1999, p. 45).

Estas inferências podem ser mapeadas como um sistema entre estes domínios[4]. Um exemplo de metáfora conceitual importante em Matemática é a metáfora "Aritmética é Coleção de Objetos", onde as deduções obtidas através das experiências corpóreas da lida com objetos produzem deduções no campo aritmético, conforme descrito no mapeamento abaixo:

ARITMÉTICA É UMA COLEÇÃO DE OBJETOS

Domínio Fonte COLEÇÃO DE OBJETOS		*Domínio Alvo* ARITMÉTICA
Coleção de objetos de mesmo tamanho	$\longrightarrow$	Números
O Tamanho de uma coleção	$\longrightarrow$	O tamanho do número
Maior	$\longrightarrow$	Maior
Menor	$\longrightarrow$	Menor
A menor coleção	$\longrightarrow$	A unidade (um)
Juntar coleções	$\longrightarrow$	Adição
Tirar uma coleção menor de uma coleção maior	$\longrightarrow$	Subtração

Fonte: Lakoff & Núñez, 2000, p. 55.

Este exemplo mostra como se dá a passagem de um domínio concreto (coleção de objetos) para um domínio abstrato (aritmética) via uma metáfora conceitual. Este fenômeno não é exclusivo da Matemática ou da aritmética, mas

[4] Este mapeamento não necessariamente é uma função.

está presente na linguagem de forma ampla. É comum usarmos estruturas metafóricas para concebermos idéias gerais no cotidiano, o que reforça a tese de que os mecanismos cognitivos utilizados para o cotidiano também são utilizados para o pensamento matemático.

Lakoff & Núñez (2000) sugerem dois tipos de metáforas conceituais: *Metáforas Corpoembasantes* e *Metáforas de Ligação*, onde a primeira lida com idéias básicas e a segunda, seria responsável pelas idéias mais sofisticadas ou abstratas. A diferenciação se dá por conta de que o pensamento metafórico não ocorre apenas do concreto para o abstrato, como no exemplo tratado, mas também entre domínios abstratos. São as Metáforas de Ligação que tornam possíveis as idéias matemáticas mais elaboradas.

As Metáforas Corpoembasantes, portanto, são aquelas que ligam domínios concretos da experiência corpórea a domínios abstratos, enquanto que as Metáforas de Ligação fazem a ligação entre uma idéia abstrata (que em geral possui uma base corpórea) e outra idéia abstrata.

Essa diferenciação também é importante para explicar como os conceitos matemáticos se desenvolvem em um domínio abstrato, sem ter aparentemente nada a ver com a experiência corpórea. As metáforas que agem apenas em domínios abstratos têm necessariamente uma base ou uma metáfora primeira baseada na experiência concreta.

Não é preciso destacar a importância das pesquisas em cognição para a Educação em geral, e para a Educação Matemática em particular. O entendimento e conhecimento sobre o modo como compreendemos conceitos, quer abstratos ou não, tem fundamentado práticas docentes, projetos pedagógicos e políticas educacionais. No caso da cognição corpoembasada, uma contribuição importante é o entendimento de que os mecanismos cognitivos para a compreensão dos conceitos matemáticos não são específicos, mas são os mesmos que utilizamos para conceitos do dia-dia e estão presentes em cada ser humano.

Apresentamos aqui, um breve relato de nossa trajetória e uma pequena introdução às idéias de Lakoff & Núñez. Tal relato nos colocou a par dos problemas e decisões que nos levaram a este projeto, bem como, deu-nos uma visão geral das idéias e da importância dos autores do texto que escolhemos para transcriar. No próximo capítulo, delinearemos alguns dos fundamentos sobre linguagem, tradução, transcriação, enfim, nossa base teórica para lidar com o propósito estabelecido, a saber, o de transcriar os principais pontos da teoria de Lakoff & Núñez, tal como apresentados em *Where Mathematics Comes From* (2000).

2. Língua, Tradução e Transcriação

Neste capítulo apresentaremos algumas questões, relevantes em nossa proposta, sobre língua e tradução; além de expor o que entendemos por transcriação. Em princípio, o próprio trabalho de transcriação já demonstraria o que é uma transcriação e colocaria implicitamente as questões de linguagem com que nos deparamos. No entanto, optamos por apresentar aos possíveis leitores desta dissertação um exercício de organização de nossas idéias sobre o assunto, tendo em vista que, geralmente, estes leitores interessados, advêm de uma área em que a familiaridade com tais temas não é essencial. Cremos que esta introdução pode esclarecer nossa proposta e, quem sabe, despertar a curiosidade sobre questões que, a nosso ver, são importantes para investigações em Educação Matemática. Neste contexto, a revisão bibliográfica é parcial e aproximativa, embora a consideremos suficiente para os objetivos deste capítulo.

Na primeira parte deste capítulo, tratamos das questões mais gerais da língua e da tradução e, na seqüência apresentamos idéias sobre a transcriação. Dentre as obras revistas para a elaboração da parte inicial, destaca-se o trabalho de George Steiner (2005) por se tratar de uma exposição suficientemente profunda e esclarecedora sobre este tema. Já no tratamento da questão específica da transcriação, notar-se-á uma maior variedade de textos e fontes, pois já não se trata de um texto introdutório, mas de uma revisão bibliográfica de caráter mais importante para a tarefa que nos propomos e que, por isso mesmo, precisava ser mais completa.

2.1 – Língua e Tradução

Fenômeno humano e mutante, longe de ser algo absoluto e rígido, a língua apresenta-se de forma dinâmica, sendo influenciada por aspectos sociológicos, históricos, culturais, entre outros. A língua

> "está, literalmente a cada momento, sujeita à mudança. Esta assume diferentes formas. Novas palavras entram enquanto antigas desaparecem.

> Convenções gramaticais se alteram sob a pressão do próprio uso ou por práticas culturais." (STEINER, 2005, p. 44 e 45).

Outro ponto importante a se destacar é o fato de que, por ser um fenômeno social, a língua depende da compreensão, ou seja, da capacidade de interpretação. Neste sentido, uma frase pronunciada ou escrita não diz nada se não for interpretada e compreendida por um ouvinte. Steiner afirma que o que "dá vida à língua para além do momento e lugar da enunciação ou escrita imediatas" é a "interpretação" (2005, p. 53). Assim, o intérprete, como o autor, apresenta-se como ator no processo comunicativo.

Estabelecida a natureza dinâmica da língua, quer em aspectos sócio-culturais, geográficos e históricos, fica a questão: se numa mesma língua temos diferenças até certo ponto marcantes, o que dizer de línguas diferentes? Até que ponto é possível uma tradução completa e "pura" de um texto?

O fenômeno da tradução geralmente é concebido como o evento em que uma mensagem passa de uma língua para outra tendo como mediador o tradutor/interprete. Se analisarmos bem, isso ocorre até entre mensagens numa mesma língua. Ao lermos um texto de Camões, por exemplo, ou ouvirmos o Português de alguém com o qual não estamos acostumados, a interpretação é importante. No entanto, ela também é necessária ao lermos qualquer texto, mesmo em uma língua em que tenhamos familiaridade. Quer se tratando de uma mensagem onde a barreira é a língua diferente, quer se tratando de mensagem onde os aspectos culturais, históricos, geográficos o são, a interpretação é necessária para a realização do ato comunicativo.

> "Qualquer modelo da comunicação é simultaneamente um modelo da tradução, de uma transferência horizontal ou vertical de significação. Não há duas épocas históricas, duas classes sociais, duas localidades que usem as palavras e a sintaxe para expressar as mesmas coisas, para enviar sinais idênticos de valoração e inferência. Nem dois seres humanos. Cada uma das pessoas se serve, deliberadamente ou por costume espontâneo, de duas fontes do suprimento lingüístico: a língua corrente que corresponde a seu grau de letramento e um tesouro privado. Este é inextricavelmente uma parte de seu subconsciente, de suas memórias desde que elas possam ser verbalizadas, e do conjunto singular, específico, irredutível de sua identidade psicológica e somática." (Steiner, 2005, p. 70).

Pode-se afirmar que raramente um texto traduzido ou interpretado é completo no sentido de reter todas as nuances e intenções do autor, ou seu significado “puro”. Até mesmo a leitura que se faz na língua original depende da interpretação pessoal. No entanto, o fato de não conseguirmos esta totalidade ou “pureza” não impede a sua interpretação ou tradução. Sempre perdemos algo ao traduzir, mas isso não é motivo para não fazê-lo. Na verdade, sempre estamos traduzindo. O processo de tradução é inevitável. “Assim, um ser humano realiza um ato de tradução, no sentido completo da palavra, quando recebe uma mensagem verbal de qualquer outro ser humano.” (Steiner, 2005, p. 71). A tradução, portanto, é um fenômeno inerente à própria linguagem.

> “A ‘tradução’ adequadamente entendida é um caso especial do arco da comunicação que cada ato de linguagem bem-sucedido fecha no interior de uma dada língua. No nível interlingüístico, a tradução vai trazer problemas condensados, visivelmente intratáveis; mas esses mesmos problemas são também abundantes num nível intralingüístico, um nível mais velado ou convencionalmente negligenciado. O modelo ‘emissor para receptor’ que representa qualquer processo semiótico e semântico é equivalente ontologicamente ao modelo ‘língua de partida para língua de chegada’ usado na teoria da tradução. Em ambos os esquemas, há ‘no meio’ uma operação de decifração interpretativa, uma função codificadora-decodificadora, uma sinapse. Lá onde duas ou mais línguas se encontram numa interconexão articulada, as barreiras no meio serão claramente mais salientes e o empreendimento da inteligibilidade mais consciente. [...] Em suma: *entre línguas ou no interior de uma língua, a comunicação humana é igual à tradução.* Um estudo da tradução é um estudo da linguagem.” (Steiner, 2005, p. 72, grifo do autor).

Existem, basicamente, dois modos de enxergar o processo lingüístico. Um é universalista e afirma que todas as línguas possuem uma estrutura comum e que as diferenças seriam apenas superficiais. A outra visão se contrapõe a esta dizendo que não existe tal estrutura universal e que cada língua é única e particular, sendo que a busca por uma estrutura presente em cada linguagem é algo sem sentido.

Seja como for, a questão que se nos apresenta é a da possibilidade do ato tradutor. Penso que esta já está respondida na medida em que estabelecemos que a tradução (ou interpretação) se faz presente, e é essencial, até no âmbito de uma única língua. Seja qual for a visão de linguagem, a tradução ou interpretação é necessária.

É certo que as perdas são inevitáveis. Como colocamos acima, raramente é possível uma compreensão “pura” de um texto, mesmo dentro de sua própria língua, mas haveria um meio de compensá-las? Já que a tradução é necessária e inevitável, como realizá-la de modo a evitar abusos e distorções?

Sempre baseados em Steiner, podemos dizer que o processo da tradução tem sido, geralmente, visto de três maneiras ou classificações. A primeira delas é aquela vê este processo como o de se buscar a correspondência mais estrita possível, termo a termo, palavra por palavra. A segunda seria a da tradução que busca, na medida do possível, a fidelidade ao texto, mas que se permite o exercício autônomo de produzir um texto familiar, fluente na língua de chegada. Outra maneira é a da tradução livre, no sentido de ser mais criativa, recriadora do original, imitativa, da interpretação paralela.

Esta divisão está longe de dar conta do fenômeno da tradução, pois raramente se vê exemplos tão estanques. Steiner (2005, p. 274), inclusive defende a idéia de que esta diferenciação entre os tipos de tradução é algo "tosco", para ele tanto *"a tradução do material comum – privado, comercial, administrativo, efêmero – e a transposição recriadora de um texto literário, filosófico ou religioso",* envolvem aspectos que se sobrepõem, de modo que categorizá-los como totalmente distintos torna-se um equívoco. A distinção existe, mas ela é prática, operacional e tem que ver com a natureza do texto, mais do que com uma escolha estética. "O mistério da transferência semântica é, na essência, o mesmo quando traduzimos uma breve nota de despacho ou o *Paraíso.* No entanto, a distinção operacional é óbvia e útil." (Idem, p. 275). As possibilidades dependem do texto. "O poema e o discurso filosófico englobam aqueles aspectos herméticos e criativos que estão no núcleo da linguagem. A tradução, sempre que se dirigir a um texto importante, estará envolvida com esse núcleo." (Idem, p. 275).

Steiner rejeita a teoria baseada na diferenciação entre literalismo, paráfrase e imitação livre e defende uma visão de tradução como um processo com quatro fases. A primeira seria a da confiança inicial, a da crença na possibilidade de significação do texto; a segunda, a da agressão invasiva e extrativa, apropriadora do texto por parte do tradutor; uma terceira fase de incorporação, de assimilação e acomodação do material importado, que pode se caracterizar tanto pela completa familiaridade como pelo total estranhamento e uma última, que seria a do estabelecimento da reciprocidade, da reconstrução do equilíbrio, do compensar a perda inevitável e que seria a "base moral da tradução" (2005, p. 321).

A questão da fidelidade na tradução fica assim atrelada a esta relação de equilíbrio entre o texto original e o traduzido.

> "Fidelidade não é literalismo ou qualquer recurso técnico para traduzir o 'espírito'. [...] O tradutor, o exegeta, o leitor são *fiéis* ao texto, tornam suas respostas responsáveis, somente quando ousam restaurar o equilíbrio de forças, de presença integral, que a compreensão apropriadora rompeu. [...] Uma tradução é, mais do que um ato de dupla entrada; os livros devem estar equilibrados tanto formal quanto moralmente." (Steiner, 2005, p. 323).

Se formos definir nosso trabalho transcriador em termos da classificação que divide a tradução entre três linhas, a saber, a do literalismo, a da paráfrase e a da imitação livre, nossa transcriação estaria mais ligada à terceira. No entanto, fica evidente que tal classificação não dá conta da complexidade da experiência e tarefa que realizamos. Englobamos diversos aspectos que perpassam as três classificações dadas acima.

De certa forma, também passamos pelos quatro estágios propostos por Steiner. Imergimos no texto de Lakoff & Núñez com a crença inicial das possibilidades de compreensão e significação, invadindo seu território e apropriando-nos de seu conteúdo e idéias, interpretando-as e incorporando seus significados, familiarizando-nos com suas expressões e conceitos, sendo transformados por esta experiência, buscando em seguida compensar as perdas pela busca da reciprocidade entre os textos, do equilíbrio ético e estético não unidirecional, mas numa relação de simbiose.

Nesta dissertação, propomos uma tradução "produtiva" ou criativa, como algo que ilumine o pensamento dos autores e que também seja livre para acrescentar algo mais à comunidade que tem contato com este pensamento, no sentido de lidar com os problemas inerentes ao texto que propomos traduzir, na medida em que este mesmo texto os coloca, propondo alternativas que não só compensem as perdas inevitáveis, mas que, no exercício da liberdade recriadora (transcriadora) e das possibilidades que esta nos permite, completem ou ampliem as idéias dos autores.

2.1. Transcriação

O que propomos nesta dissertação é mais do que traduzir, como entendido no senso comum, é tentar libertar o texto de possíveis associações equivocadas que podem dificultar sua compreensão, procurando ou criando termos e palavras da língua portuguesa que expressem e incorporem melhor e de forma mais direta e compreensível as idéias e conceitos propostos pelos autores.

Em nossa busca por um meio de realizar este objetivo, a transcriação se apresentou como uma alternativa interessante e original, e como um desafio estimulante que continha em si ricas possibilidades, quer no que se refere à experiência de trabalho, como no tocante aos resultados práticos.

A seguir, pretendemos apresentar algumas reflexões sobre a transcriação em si, de modo a esclarecer seu significado, importância e lugar dentro deste trabalho.

As experiências de transcriação de que dispomos são no âmbito da linguagem poética. Especialmente nos inspiraram os trabalhos do poeta concretista Haroldo de Campos (1993, 1994, 1998, 2000, 2004, 2005), como em "Transblanco" (Paz & Campos, 1986, 1994), uma transcriação da poesia "Blanco" de Osvaldo Paz. Há também algum material sobre a transcriação como parte da elaboração de textos em história oral (MEIHY, 1991; GARNICA, 2003, 2004).

Diferentemente da tradução pura e simples, a transcriação pretende mais do que apenas propiciar a passagem de um código para o outro. Visa à compreensão dos significados e idéias, das nuances, contidas no signo e relativos ao contexto cultural de ambas as línguas.

Neste processo, ocorre uma transformação do que foi dito, uma manipulação por parte do tradutor/transcriador de modo que o que está sendo traduzido assume uma nova cara, que, de modo nenhum oblitera a figura do autor, mas a enaltece, pois torna o seu texto mais vivo, mais pleno de sentido. Como frisa Meihy, comentando sobre a transcriação como técnica aplicada em história oral: "O processo de transcriação, enfim, implica evidenciar o narrador [no nosso caso, o autor] em sua essência maior." (1991, p. 33).

A transcriação vem da asserção de que a tradução literal, via relação termo a termo e principalmente no que se refere a textos artísticos, é impossível. Não existe uma tradução pura e perfeita, em que todos os elementos da língua original se fazem presentes no texto traduzido. Não é possível, mesmo entre as línguas mais próximas, representar todos os aspectos do texto original em sua tradução. Os vocábulos assumem papéis que dependem de diversos fatores. O significado de uma palavra em uma língua depende do contexto e da época em que ela é falada ou escrita, da realidade social, histórica e cultural. É por isso que não se pode dizer, como exemplificamos anteriormente, que o português do Brasil é o mesmo do de Portugal.

Ao se traduzir sempre perdemos algo do original, nem que seja apenas no seu aspecto estético, afinal, os signos não são os mesmos. A tradução, portanto, carrega em si o sinete da imperfeição, o carma da impossibilidade. No entanto, ela é válida e necessária sim. Tal imperfeição não é razão para a sua inexistência. Como bem observa Campos,

> “admitida e tese da impossibilidade em princípio da tradução de textos criativos, parece-nos que esta engendra o corolário da possibilidade, também em princípio, da recriação desses textos. Teremos, [...] em outra língua, uma outra informação estética, autônoma, mas ambas estarão ligadas entre si por uma relação de isomorfia: serão diferentes enquanto linguagem, mas, como os corpos isomorfos, cristalizar-se-ão dentro de um mesmo sistema.” (2004, p. 34).

A transcriação poética, tal como preconizada por Haroldo de Campos, representa a busca pela possibilidade, a recusa da aceitação impotente do inevitável. É uma reação às limitações impostas pelas diferenças lingüísticas. Tal tarefa só é possível se ampliarmos as fronteiras léxicas. Diante deste desafio,

> o tradutor tem que transcriar, excedendo os lindes de sua língua, estranhando-lhe o léxico, recompensando a perda aqui com uma intromissão inventiva acolá, a infratradução forçada com a hipertradução venturosa, até que o desatine e desapodere aquela última *húlbris* (culpa luciferina, transgressão semiológica?), que é transformar o original na tradução de sua tradução. (Campos, 1998, p. 82).

No nosso caso, aplicamos esta idéia em um contexto acadêmico. Tanto o texto como os termos que transcriamos não têm como principal preocupação a questão estética. A preocupação maior é com o sentido, com a idéia.

Enquanto que nas obras artístico-literárias a representação e o representado se fundem, de modo que a alteração do signo afeta o seu significado e altera toda a peça (ponto este que torna a tradução literária ‘impossível’) no texto acadêmico, isso não ocorre. O significado é o que importa mais, os signos o servem.

Nossa transcriação, neste sentido está mais vinculada ao isomorfismo do sentido, mais do que ao da informação estética. Procuramos respeitar, tanto quanto possível, as características formais e estéticas do texto original, mas não tivemos nisto nosso principal foco. Assim, nossa tradução se aproximou mais da transcriação utilizada nos trabalhos de história oral, que pretendem “recriar o ambiente da entrevista” (Meihy, 1991, p. 31) concretizando na forma de um texto fluente a oralidade do autor do relato.

Almejamos recriar o sentido dos termos da teoria, segundo o autor, e nossa interpretação destes, dando voz a este, fazendo-o entender-se em outra cultura, por meio de uma transcriação onde as idéias principais fossem “materializadas” nos termos que utilizamos.

3. A Metáfora Básica do Infinito

Apresentamos aqui nosso esboço de transcriação do capítulo oitavo de *Where Mathematics Comes From* (2000), que versa sobre a Metáfora Básica do Infinito. Dentro da produção de Lakoff & Núñez, em sua análise das idéias matemáticas, consideramos esta como a mais importante contribuição destes autores.

Cumpre alertar que o texto se apresenta com uma formatação diferente dos demais capítulos desta dissertação. Assim fizemos por dois motivos: primeiro para manter uma semelhança gráfica, ainda que não estrita, com o texto original (que consta, como anexo, no final desse trabalho); uma semelhança que é, frisamos, mais de aparência estética do que uma co-relação. Segundo, para deixar claro que sou o autor da transcriação, não do texto original; e que a natureza dessa autoria é diferente daquela que se apresenta no restante dessa dissertação.

Lembramos também que, como o trecho é parte integrante de outra obra, ao encontrar referência a outros capítulos, o leitor deve ter em mente que se está tratando de partes da obra original, partes estas que não estão disponíveis aqui. Entretanto, para facilitar as consultas às fontes originais, incluímos as referências bibliográficas do capítulo, ainda que não tenhamos tido acesso à maior parte delas.

8

A Metáfora Básica do Infinito

O Infinito Corpoembasado

Pode-se pensar que se há algum conceito que não pode ser corpoembasado é o de infinito. Afinal, nossos corpos são finitos, nossas experiências são finitas e tudo com o que nos deparamos com nossos corpos é finito. De onde vem, então, o conceito de infinito?

Uma primeira suposição pode ser a de que ele venha da noção do que é finito – aquilo que tem um fim ou um limite – e da noção de negação: algo que *não* é finito. Mas esta suposição não nos provê nada da riqueza das nossas concepções de infinito. Mais importante ainda, ela não caracteriza *coisas* infinitas: conjuntos infinitos, uniões infinitas, pontos no infinito, números transfinitos. Para fazermos isso, precisamos não apenas de uma noção negativa ("não finito"), mas de uma noção positiva – uma noção de infinito como uma entidade em si mesma.

O que necessitamos aqui é de uma análise *geral* das idéias matemáticas dos vários conceitos de infinito em Matemática. Tal análise deve responder a certas questões: O que as várias formas de infinito têm em comum entre si? Isto é, qual a relação entre idéias como conjuntos infinitos, pontos no infinito, e indução matemática (indução finita), onde uma afirmação é verdadeira para uma infinidade de casos. Como estas idéias estão relacionadas com a idéia de limite de uma seqüência infinita? Ou com uma soma infinita? Ou com uma intersecção infinita? E, finalmente, como as coisas infinitamente grandes estão relacionadas com as coisas infinitamente pequenas?

Para começarmos a ver a fonte corpoembasada da idéia de infinito, devemos olhar para um dos sistemas conceituais humanos mais comuns, aquele que os lingüistas chamam de *sistema aspectual*. O sistema aspectual caracteriza a estrutura dos conceitos-eventos – eventos como nós os conceituamos. Algumas ações, por exemplo, são inerentemente iterativas, como respirar ou bater palmas. Outras são inerentemente contínuas, como o movimentar-se. Algumas possuem pontos iniciais e finais inerentes, como pular. Algumas apenas possuem pontos finais, como chegar. Outras apenas possuem pontos de início, como sair ou embarcar em uma viagem. Aquelas que têm pontos finais, também possuem estados resultantes. Além disso, algumas ações têm sua completude conceituada como parte da ação. (por exemplo, pousar é parte de pular), enquanto outras têm suas completudes conceituadas como externas à ação (por exemplo, normalmente não conceituamos pousar como parte de voar, como quando uma água voa pelo céu).

Na vida, é claro, quando alguém faz algo, dificilmente o continua fazendo para sempre. Ainda assim, conceituamos respirar, bater palmas, e mover como *não tendo completudes*. Esta conceituação é chamada de *aspecto imperfectivo*. Como vimos no capítulo 2, o conceito de aspecto parece ser corpoembasado no sistema de controle motor do cérebro. Narayanan (1997), em um estudo de modelagem computacional neural, mostrou que a estrutura computacional neural do sistema aspectual é a mesma que encontramos no sistema de controle motor.

Dado que o sistema aspectual é corpoembasado deste modo, podemos vê-lo como a fonte fundamental do conceito de infinito. Fora da Matemática, um processo é visto como infinito se ele continua (ou itera) indefinidamente sem parar. Isto é, ele tem um aspecto imperfectivo (continua indefinidamente) sem um ponto final. Este é o *conceito literal de infinito*, fora da Matemática. Ele é usado sempre que pensamos em movimento perpétuo – movimento que continua se repetindo para sempre.

Processos Contínuos são Processos Iterativos

Um processo conceituado como não tendo um fim, é chamado de processo imperfectivo – que não é "perfectivado," isto é, completo ou acabado. Dois dos subtipos dos processos imperfectivos são os *contínuos* e os *iterativos* (aqueles que se repetem e têm um ponto final intermediário e um resultado intermediário). Nas línguas ao redor do mundo, processos contínuos são conceituados como se fossem processos iterativos. A sintaxe usada é comumente aquela da conjunção. Considere a frase: "João pulou e pulou de novo e pulou de novo". Aqui temos uma iteração de três pulos. Mas "João pulou e pulou e pulou" é usualmente interpretada não como três pulos, mas como algo de final aberto, sem número definido.

Agora, "pular" é um verbo inerentemente perfectivo: Cada pulo tem um ponto final e um resultado. Mas verbos como *nadar, voar* e *rolar* são imperfectivos, com nenhum ponto final indicado. Considere estas frases, indicando iteração via o mecanismo sintático da conjunção: João nadou e nadou e nadou. A águia voou e voou e voou. A estrutura desta frase, que normalmente indicaria iterações indefinidas com verbos perfeitos, indica aqui um processo contínuo de nadar ou voar. O mesmo é verdade no caso de partículas aspectuais como as inglesas *on* e *over*. Por exemplo[1], *John said the sentence over* (João disse a frase de novo) indica uma interação única da sentença. Mas *John said the sentence over and over and over* (João disse a frase de novo e de novo e de novo) indica repetição contínua. Similarmente, *The barrel rolled over and over* (o barril rolou de novo e de novo) indica um rolar indefinidamente contínuo, e *The eagle flew on and on* (A águia voou e continuou) indica um vôo indefinidamente contínuo. Nestas frases, a linguagem de iteração para perfectivos (por exemplo, verbo *"e"* verbo *"e"* verbo; *over and over and over*) é usada com imperfectivos para expressar algo bem diferente – a saber, um processo indefinidamente contínuo. Resumindo, a idéia de ação iterada está sendo usada em várias formas sintáticas para expressar a idéia de ação contínua. Isto pode ser caracterizado em termos cognitivos pela metáfora Processos Contínuos Indefinidos São Processos Iterativos.

Existe uma razão cognitiva para a existência de tal metáfora. Processos em geral, são conceituados metaforicamente em termos de movimento via metáfora da estrutura dos eventos, na qual processos são movimentos estendidos (ver Lakoff & Johnson, 1999). Movimentos indefinidamente contínuos são difíceis de visualizar sendo, até mesmo, impossíveis de visualizar em períodos extremamente longos. O que fazemos, ao invés, é visualizar movimentos curtos e, então, os repetimos, conceituando assim movimentos indefinidamente contínuos como movimentos repetidos. Mais ainda, as ações contínuas cotidianas tipicamente requerem ações iterativas. Por exemplo, o andar contínuo requer a tomada de repetidos passos; o nadar contínuo requer o mover repetido de braços e pernas; o voar contínuo de um pássaro requer o bater repetido das asas. Esta combinação de ação contínua e ações repetidas traz à tona a metáfora pela qual ações contínuas são conceituadas em termos de ações repetidas.

Porque esta metáfora é importante para o infinito? A razão é que comumente a aplicamos a processos infinitamente contínuos. Os processos contínuos sem fim – processos contínuos infinitos – são conceituados, via esta metáfora, como se eles fossem processos infinitos iterativos, processos que iteram sem fim, mas nos quais cada iteração tem um ponto final e um resultado. Por exemplo, considere o movimento infinitamente contínuo, que não

[1] Nestes casos, resolvemos colocar os exemplos em inglês, pois não conseguimos, até o momento, recriar em português a idéia contida nas partículas *on* e *over* de modo a manter seu propósito e sentido original. Algo que evidencia a "frustração" muitas vezes presente nas nossas tentativas de transcriar este texto... N.T.

tem pontos finais intermediários e nenhum local intermediário onde o movimento para. Tal movimento infinitamente contínuo pode ser conceituado metaforicamente como movimento iterado com pontos finais intermediários ao movimento e locais intermediários – mas com infinitamente muitas iterações.

Esta metáfora é usada na conceituação da Matemática para quebrar processos contínuos em processos que iteram passo a passo infinitamente, nos quais cada passo é discreto e minimal. Por exemplo, o processo indefinidamente contínuo de alcançar um limite é tipicamente conceituado via esta metáfora como uma seqüência infinita de passos bem definidos.

Infinito Atual

O tipo de infinito que acabamos de ver – processos contínuos ou movimentos sem fim – era chamado de *infinito potencial* por Aristóteles, que o distinguiu do *infinito atual*, que é o infinito conceituado como uma "coisa" percebida. O infinito potencial aparece na Matemática o tempo todo: quando você imagina a construção de uma série de polígonos regulares com cada vez mais lados; quando você imagina a escrita de cada vez mais decimais da $\sqrt{2}$, e assim por diante (ver figura 1). Mas os casos interessantes de infinito na Matemática contemporânea são casos de infinito atual – casos que vão além de meros processos contínuos ou iterativos que não têm fim. Dentre estes, incluem-se, por exemplo, conjuntos infinitos (como o conjunto dos números naturais) e pontos no infinito – entidades matemáticas caracterizadas pela infinidade.

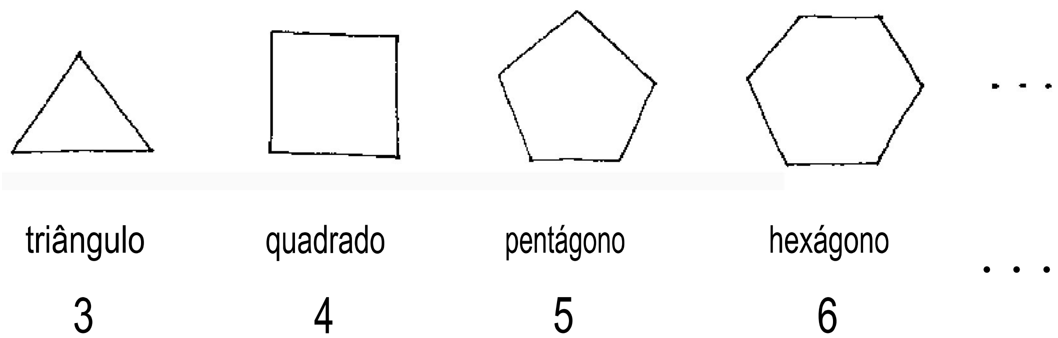

Figura 1 – Um caso de infinito potencial: a seqüência dos polígonos regulares com *n* lados, iniciando com *n* = 3. Esta é uma seqüência sem fim, em que nenhum polígono regular caracteriza um resultado último.

Sustentamos a hipótese de que a idéia de infinito atual na Matemática é metafórica, que os vários exemplos de infinito atual fazem uso de um resultado final metafórico de um processo sem fim. Literalmente, não há tal coisa como o resulto de um processo sem fim: se o processo não tem fim, não pode haver um “resultado final”. Mas os mecanismos metafóricos nos permitem conceituar o “resultado” de um processo infinito – do único modo que possuímos para conceituar o resultado de um processo – isto é, em termos de um processo que tem um fim.

Nossa hipótese é a de que todos os casos de infinito atual – conjuntos infinitos, pontos no infinito, limites de séries infinitas, intersecções infinitas, supremo – são casos especiais de uma única geral metáfora conceitual na qual processos que continuam indefinidamente são conceituados como tendo um fim e um resultado último. Chamamos esta metáfora de *Metáfora Básica do Infinito*, ou a MBI para resumir. O domínio alvo da MBI é o domínio dos processos sem fim – isto é, o que os lingüistas chamam de processos imperfectivos. O efeito da MBI é adicionar uma completude metafórica ao processo contínuo, de modo que ele seja visto como tendo um resultado – uma *coisa* infinita.

O domínio fonte da MBI consiste de um processo iterativo ordinário com um número indefinido (mas finito) de iterações com uma completude e estado resultante. Os domínios fonte e alvo são parecidos em certos sentidos:

- Ambos têm um estado inicial.
- Ambos têm um processo iterativo com um número não especificado de iterações.
- Ambos têm um estado resultante depois de cada iteração.

Na metáfora, o estado inicial, o processo iterativo, e o resultado depois de cada iteração são mapeados nos elementos correspondentes do domínio alvo. Mas o efeito crucial da metáfora é *adicionar ao domínio alvo, a completude do processo e seu estado resultante.* Esta adição metafórica é indicada em negrito na descrição da metáfora que se segue. É esta última parte da metáfora que nos permite conceituar o processo contínuo em termos de um processo completo – e assim, produzir o conceito de infinito atual.

A METÁFORA BÁSICA DO INFINITO

Domínio Fonte PROCESSOS ITERATIVOS COMPLETOS		*Domínio Alvo* PROCESSO ITERATIVOS CONTÍNUOS
O estado inicial	→	O estado inicial
Estado resultante do estágio inicial do processo	→	Estado resultante do estágio inicial do processo
O processo: de um dado estado intermediário, produza próximo estado.	→	O processo: de um dado estado intermediário, produza o o próximo estado.
O resultado intermediário depois dessa iteração do processo	→	O resultado intermediário depois dessa iteração do processo
O estado final resultante	→	**“O estado final resultante” (Infinito Atual)**
Implicação *I*: O estado final resultante é único e segue cada estado não final.	→	**Implicação *I* : O estado final resultante é único e segue cada estado não final.**

Note que o domínio fonte da metáfora tem algo que não corresponde a nada no domínio alvo literal – a saber, o estado resultante final. O mapeamento conceitual impõe um “estado final resultante” a um processo sem fim. O processo sem fim literal está colocado ao lado direito das primeiras três flechas. O estado final resultante (que caracteriza um infinito atual) metaforicamente imposto é indicado em negrito no lado direito da quinta linha no mapa.

Além disso, existe uma implicação crucial que surge no domínio fonte e é imposta ao domínio alvo pela metáfora. Em qualquer processo completo, o estado final resultante é único. O fato de que este é o estado final do processo significa que:

- Não há nenhum estado final antes deste; isto é, não existe nenhum estado prévio, distinto, dentro do processo que, ao mesmo tempo, siga o estágio de completude do processo e ainda preceda o estado final do processo.

- Igualmente, não existe nenhum estado final após este no processo; isto é, não existe outro estado do processo que ao mesmo tempo resulta da completude do processo e segue o estado final do processo. Qualquer suposto estado teria que estar “fora do processo” como nós o conceituamos.

Assim, a unicidade do estado final de um processo completo é um produto da cognição humana e não um fato sobre o mundo externo. Isto é, ela vem do modo como nós conceituamos os processos completos. Esta implicação é também mostrada em negrito.

A Metáfora Básica do Infinito mapeia a propriedade da unicidade para estados resultantes finais de processos em infinito atual. O infinito atual, como caracterizado por *qualquer aplicação da MBI*, é único. Como veremos mais tarde, a existência de graus de infinidade (como nos números transfinitos) requer aplicações múltiplas da MBI.

O que resulta da MBI é uma criação metafórica que não ocorre literalmente: um processo que continua indefinidamente e ainda tem um estado único final resultante, um estado “no infinito”. Esta metáfora nos permite conceituar o infinito “potencial”, que não tem nem final nem resultado, em termos de um tipo familiar de processo que tem um único resultado. Via MBI, o infinito é convertido de um processo aberto, sem fim, em uma entidade única, específica.

Formulamos esta metáfora em termos de um processo iterativo simples, passo a passo – a saber: de um dado estado, produza o próximo estado. De um estado inicial, o processo produz estados resultantes intermediários. O processo metafórico tem uma infinidade de tais estados intermediários e um final metafórico único, o estado resultante.

Note que a natureza do processo não é especificada na metáfora. A metáfora é geral: cobre qualquer tipo de processo. Portanto, podemos formar casos especiais desta metáfora geral, especificando que processo temos em mente. O processo pode ser um mecanismo para formar conjuntos de números naturais resultando em um conjunto infinito. Ou pode ser o mecanismo de mover-se em uma reta até que o “ponto no infinito” seja alcançado. Nossa formulação da metáfora é suficientemente precisa e suficientemente geral, de modo que podemos preencher em detalhes uma variedade de diferentes tipos de infinito em diferentes domínios matemáticos. De fato, esta será nossa estratégia, tanto neste como nos capítulos que se seguem. Argumentaremos que um número considerável de processos infinitos na Matemática são casos especiais da MBI que podem ser atingidos especificando o que o processo iterativo é em detalhes. Acreditamos que *todas* as noções de infinito na Matemática podem ser vistas como casos especiais da MBI, e discutiremos o que esperamos seja uma gama suficientemente ampla de exemplos para defender nosso ponto de vista.

A Origem da MBI Fora da Matemática

A Metáfora Básica do Infinito é um mecanismo cognitivo geral. Ela pode ocorrer por si mesma, como quando se fala de "o infinito" como uma coisa. Mas a maioria das pessoas não sai por aí falando sobre "o infinito" como uma coisa; esta noção ocorre usualmente apenas em contextos filosóficos ou espirituais – ou em casos especiais nos quais alguns processos particulares estão sob discussão.

Existe uma longa história do uso desta metáfora em casos especiais, uma história que vem desde, pelo menos, a filosofia pré-socrática. A filosofia Grega, desde o seu remoto início, sustentava que qualquer coisa particular é um exemplo de uma categoria maior. Por exemplo, um cabrito particular é um exemplo da categoria Cabrito. Mais ainda, cada categoria como esta era tida como sendo, por si só, uma coisa no mundo. Isto é, não apenas existiam cabritos individuais no mundo, mas a categoria Cabrito – um tipo natural – era também vista como uma entidade no mundo. Isto significava que ela, também, era um exemplo de uma categoria ainda maior, e assim por diante.

Conseqüentemente, assumia-se a existência de uma hierarquia ascendente indefinidamente longa de categorias. Mais tarde, assumiu-se que esta hierarquia ascendente possuía um final – a categoria do Ser, que englobava a todas (ver Lakoff & Johnson, 1999, caps. 16-18). O raciocínio implícito neste movimento de uma hierarquia indefinidamente longa para uma maior, um ponto da hierarquia que englobava tudo, pode ser vista como um exemplo da Metáfora Básica do Infinito, no qual o resultado de um processo iterativo indefinido de categorizações maiores que resulta em uma categoria maior. A tabela seguinte mostra, para cada elemento do domínio alvo da MBI, o elemento correspondente do caso especial[2] (a formação de categorias ascendentes). O símbolo "→" indica a relação entre os elementos do domínio alvo e seus casos especiais correspondentes.

[2] Como caso especial, referimo-nos aos diferentes tipos de aplicação da MBI, portanto, não se deve entender tratar-se de algo exclusivo e único como no sentido matemático do termo.

A CATEGORIA MAIOR - SER

Domínio Fonte PROCESSOS ITERATIVOS CONTÍNUOS		*Caso Especial do Domínio Fonte* A FORMAÇÃO DE CATEGORIAS ASCENDENTES
O estado inicial	→	Entidades específicas sem categorias
Estado resultante do estágio inicial do processo	→	Categorias de entidades específicas: o nível mais baixo de categorias
O processo: de um dado estado intermediário, produza o próximo estado.	→	De categorias em um dado nível, forme categorias no próximo nível mais alto que englobe as categorias mais baixas.
O resultado intermediário depois dessa iteração do processo	→	Categorias de nível intermediário formadas por cada iteração do processo
O estado final resultante	→	**"O estado final resultante": A categoria do Ser**
Implicação *I*: O estado final resultante é único e segue cada estado não final.	→	**Implicação *I* : A categoria do Ser é única e engloba todas as outras categorias.**

Neste caso, o processo especificado na MBI é o processo de formação de categorias mais altas. O primeiro passo é formar uma categoria de casos específicos e fazer desta categoria uma coisa. O processo iterativo é formar categorias maiores das categorias imediatamente mais baixas. O estado final resultante é a maior categoria, a categoria do Ser.

O que acabamos de fazer é considerar um caso especial da MBI fora da matemática, e mostramos que por considerar a categoria do Ser como produzida pela MBI, temos todas as suas propriedades necessárias. Daqui em diante, usaremos a mesma estratégia dentro da Matemática para produzir casos especiais de infinito atual e usaremos tabelas semelhantes para ilustrar cada caso especial.

Este conceito metafórico de infinito como uma entidade única – a maior entidade – foi naturalmente estendido à religião. No judaísmo, o conceito cabalístico de Deus como *Ein Sof* – isto é, "sem fim," um único Deus. A implicação da unicidade aplicada às divindades levou ao monoteísmo. No cristianismo, Deus é *todo*-poderoso: dada uma hierarquia ascendente de poder, essa hierarquia é assumida como tendo um único ponto maior, algo todo-poderoso – a saber, o poder de Deus. Não é coincidência que Georg Cantor acreditava que o estudo do infinito em matemática tinha uma importância teológica. Ele viu, no seu conceito matemático de infinito, um modo de reconciliar Matemática e religião. (Dauben, 1983).

Processos como Coisas

Processos são comumente conceituados como se fossem coisas estáticas – geralmente containeres, ou caminhos de movimento, ou objetos físicos. Conseqüentemente, nós falamos sobre estar *no meio* de um processo ou no *final* dele. Vemos um processo como tendo um *comprimento* – *curto* ou *longo* – capaz de ser *estendido* ou *atenuado, feito curto.* Falamos de *partes* de um processo, como se este fosse um objeto com partes e com tamanho. Isso se estende aos processos infinitos também: algumas infinidades são *maiores* do que outras infinidades.

Como vimos no Capítulo 2, um dos mais importantes mecanismos cognitivos para ligar processos com coisas é o que Talmy (1996, 2000) chamou "movimento fictício," casos nos quais um caminho, objeto ou forma alongados podem ser conceituados metaforicamente como um processo, traçando o comprimento deste caminho, objeto ou forma. Um exemplo clássico é *A estrada passa através da floresta*, onde o termo *passa* é usado metaforicamente como um traço mental do caminho da estrada.

Os processos, como comumente os pensamos, acontecem no tempo. Mas em Matemática, os processos podem ser conceituados como atemporais. Por exemplo, considere a seqüência de Fibonnacci, na qual o $(n + 2)$ – ésimo termo é a soma do n – ésimo termo e o $(n + 1)$ – ésimo termos. A seqüência pode ser conceituada tanto como um processo infinito contínuo de produzir sempre mais termos ou como uma coisa, uma seqüência infinita que é atemporal. Esta conceituação dual, como vimos, não é especial à Matemática, mas é parte da cognição cotidiana.

Nesse capítulo, vamos falar de processos infinitos em Matemática. Algumas vezes os conceituamos como acontecendo no decorrer do tempo, e outras como sendo estáticos. Para o nosso propósito aqui, a diferença não importará, visto que todos nós temos mecanismos conceituais (os esquemas de movimento fictício de Talmy) para caminharmos entre conceituações estáticas e dinâmicas dos processos. Por conveniência, estaremos usando a caracterização dinâmica.

O que é o Infinito?

Nosso trabalho neste capítulo é responder à questão geral, *O que é o infinito?* Ou, colocando de outro modo, *Como nós, meros seres humanos, conceituamos o infinito?* Esta não é uma questão fácil de responder, devido às suas limitações. Primeiro, a resposta deve ser biologicamente e cognitivamente plausível. Isto é, deve fazer uso de mecanismos neurais e cognitivos normais. Segundo, a resposta deve cobrir todos os casos em Matemática, que, superficialmente são muito diferentes um do outro: indução matemática, pontos se encontrando no infinito, o conjunto infinito dos números naturais, números transfinitos, limites (funções aproximam-se arbitrariamente deles), coisas que são infinitamente pequenas (infinitésimos), e assim por diante. Terceiro, a resposta deve ser suficientemente precisa, de modo que possa ser demonstrado que esse e outros conceitos de infinito em Matemática podem de fato ser caracterizados como casos especiais de um mecanismo cognitivo geral.

Nossa resposta é que este mecanismo cognitivo geral é a Metáfora Básica do Infinito, a MBI. Ela tem tanto plausibilidade neural como cognitiva. Devotaremos o restante deste capítulo para mostrar como ela se aplica a uma variedade ampla de casos. Os capítulos 9 até 14 estendem esta análise a ainda mais casos.

O “Número” ∞

Uma das primeiras coisas que lingüistas, psicólogos e cientistas cognitivos aprendem é que quando existem avisos explicita e culturalmente sancionados para não se fazer algo, você pode estar certo que de as pessoas vão fazê-lo. De outra forma, não haveria necessidade para os avisos. Um exemplo maravilhoso de tal aviso vem do magnífico texto clássico de G. H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics* (1955; pp.116-117):

> Suponha que *n* assuma sucessivamente os valores 1, 2, 3, ... A palavra “sucessivamente” naturalmente sugere sucessão no tempo, e podemos supor que *n*, se quisermos, assuma estes valores em momentos sucessivos no tempo. [...] Não importa o quão grande um número pode ser, chegará um tempo em que *n* tornar-se-á maior que este número. [...] Esta, entretanto é uma mera questão de conveniência, a variação de *n* não tendo, usualmente, nada a ver com o tempo.

> O leitor não pode se impressionar muito que quando dizemos que *n* “tende a ∞” queremos simplesmente dizer que *n* pode assumir uma série de valores que aumentam além de qualquer limite. *Não existe um número “infinito”*: uma equação como
>
> $$n = \infty$$
>
> é, deste modo, *sem sentido*: Um número *n* não pode ser igual a ∞, porque “igual a ∞” não significa nada. [...] O símbolo ∞ não significa nada afinal, exceto na frase “tende a ∞”, em que o significado explicamos acima.

Hardy tem todo este trabalho para evitar que o leitor pense no infinito como um número apenas porque as pessoas tendem a pensar no infinito como um número, que é o que as expressões “tende ao infinito” e “se aproxima do infinito”, escolhidas pelos matemáticos, indicam. Hardy sugere que é um erro pensar no infinito como um número – um erro que muitos cometem. Se as pessoas estão erradas ou não, conceituando o infinito como um número, então nosso trabalho como cientistas cognitivos é caracterizar os mecanismos cognitivos pelos quais elas cometem esse “erro.” E se estamos corretos em sugerir que um único mecanismo cognitivo – a saber, a MBI – é usado para todas as concepções de infinito, então temos que mostrar como a MBI pode ser usada para conceituar o infinito como um número, seja isso um “erro” ou não.

A Ciência Cognitiva é, afinal, *de*scritiva, não *pre*scritiva. E ela precisa explicar, também, porque as pessoas pensam do modo como elas pensam. O “erro” de se pensar no infinito como um número não é aleatório. “∞” é geralmente usado com um significado preciso – como um número em uma enumeração, não como um número em um cálculo. Em “1, 2, 3, ..., ∞” ∞ é tido como um ponto final em uma enumeração, maior do que qualquer número finito e além de todos eles. Mas as pessoas não usam ∞ como um número nos cálculos: Não vemos casos de “17 vezes ∞, menos 473,” o que é, é claro, uma expressão sem sentido, como Hardy corretamente coloca.

A moral aqui é que existem, cognitivamente, diferentes usos para números – enumerações, comparações e cálculo. Como um número, ∞ é usado em enumeração e comparação, mas não no cálculo. Até mesmo os matemáticos usam o infinito como um número em enumeração, como na soma de uma série que vai de $n = 1$ a $n = \infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Quando Hardy nos previne a não assumir que ∞ é um número, é porque os matemáticos criaram noções e modos de pensar, falar e escrever, nos quais ∞ é um número com respeito à enumeração, mas não ao cálculo.

De fato, a idéia do ∞ como um número pode também ser vista como um caso especial da MBI. Note que a MBI não possui quaisquer números nela mesma. Suponhamos que apliquemos a MBI aos inteiros usados para indicar uma ordem de enumeração. A estrutura inerente do domínio alvo, independente da metáfora, tem um infinito potencial, uma seqüência sem fim de inteiros ordenados. O efeito da MBI é tornar isto um infinito atual com o "número" maior ∞.

A MIB PARA ENUMERAÇÃO

Domínio Fonte PROCESSOS ITERATIVOS CONTÍNUOS		*Caso Especial* A SEQÜÊNCIA SEM FIM DOS INTEIROS USADOS PARA ENUMERAÇÃO
O estado inicial	→	Nenhum Inteiro
Estado resultante do estágio inicial do processo	→	O Inteiro 1
O processo: de um dado estado intermediário, produza o próximo estado.	→	Dado um inteiro *n*-1, forme o próximo inteiro maior *n*.
O resultado intermediário depois dessa iteração do processo	→	$n > n\text{-}1$
O estado final resultante	→	**O "inteiro"** ∞
Implicação *I*: O estado final resultante é único e segue cada estado não final.	→	**Implicação *I* : O "inteiro"** ∞ **é único e maior que todos os outros inteiros.**

A MBI por si só não tem números. Entretanto, a seqüência sem fim dos inteiros usados para enumeração (mas não para cálculo) pode ser um caso especial do domínio alvo da

MBI. Como tal, a MBI produz ∞ como o maior inteiro usado para enumeração. Este é o modo como a maioria das pessoas entende ∞ como um número. Ele não pode ser usado para cálculo. Funciona apenas como uma *extremidade*. Suas operações são amplamente indefinidas. Sendo assim, $\infty/0$ é indefinido, como o é $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$ e ∞/∞. Assim, ∞ não é um número completo, o que era a idéia de Hardy. Para Hardy, uma entidade ou é um número ou não é, visto que ele acreditava que os números eram entidades objetivamente existentes. Esta idéia de um "número" que tem uma das funções de número (enumeração) mas não as outras funções (por exemplo, cálculo) era uma impossibilidade para ele. Mas não é uma impossibilidade da perspectiva cognitiva, e, de fato, as pessoas realmente usam isto. ∞ como *o número natural extremo* é comumente usado com a seqüência explicita ou implícita "1, 2, 3, ..., ∞" na caracterização dos processos infinitos. Cada um desses envolve um uso escondido da MBI para conceituar ∞ como um número natural extremo.

Os matemáticos usam "1, ..., *n*, ..., ∞" para indicar os termos de uma seqüência infinita. Embora a MBI não possua números em si mesma, será notadamente conveniente, a partir daqui, se indexar os elementos do domínio alvo da MBI com os inteiros "terminando" com o metafórico "∞". Para os matemáticos puristas devemos notar que quando uma expressão como *n-1* é usada, ela é tomada apenas como a notação indexante do estágio prévio a *n*, e não como o resultado da operação de se subtrair 1 de *n*.

Domínio Alvo

PROCESSOS ITERATIVOS CONTÍNUOS

O estado inicial (0)
O estado (1) resultante do estagio inicial do processo
O processo: de um primeiro estagio intermediário (*n*-1) produza o próximo estado (*n*).
O resultado intermediário depois desta iteração do processo (a relação entre *n* e *n*-1)
"O estado final resultante" (infinito atual "∞")
Implicação *I*: O estado final resultante ("∞") é único e segue a todo estado não final.

A utilidade desta notação será mais aparente na próxima seção.

Geometria Projetiva: Onde as Retas Paralelas se Encontram no Infinito

Na geometria projetiva, existe um axioma que diz que *todas as retas paralelas se encontram no infinito*. De uma perspectiva cognitiva, este axioma apresenta os seguintes problemas. (1) Como podemos conceituar o que significa existir um ponto “no infinito”? (2) Como podemos conceituar as retas paralelas se “encontrando” neste ponto? (3) Como pode, tal conceituação, usar os mesmos mecanismos gerais para compreender este infinito que são usados para outros conceitos envolvendo infinito?

Bem, nós responderemos a estas questões tomando a MBI e preenchendo-a de um modo apropriado, com um processo plenamente compreensivo que produzirá um resultado final, representado por “∞”, no qual as retas paralelas se encontram em um ponto *no* infinito. Nossa resposta deve dar conta de um importante problema. O ponto no infinito deve funcionar como qualquer outro ponto; por exemplo, ele deve ser capaz de funcionar como uma intersecção de retas como o vértice de um triângulo. Os teoremas sobre intersecções, retas e vértices de triângulos devem funcionar com os “pontos no infinito”.

Para produzir este caso especial da MBI, temos que especificar certos parâmetros:

- Uma *estrutura da disciplina*, indicando que a disciplina é geometria – especificamente, que é sobre retas e intersecções em um ponto.

- O passo inicial do processo.

- O *processo iterativo*, ou a *condição passo a passo* que liga cada estado resultante do processo ao próximo estado.

- O *estado resultante* depois da iteração.

- Uma *implicação* de unicidade do estado resultante final.

No caso da geometria projetiva, tomamos como estrutura da disciplina um triângulo isósceles, por razões que se tornarão claras em breve (ver Figura 2).

A ESTRUTURA DO TRIÂNGULO ISÓSCELES

Um triângulo isóscele, ABC_n com
Lados: AB, AC_n, BC_n
Ângulos: α_n, β_n
D_n: A distância de A até C_n

Onde:
$AC_n = BC_n$
$\alpha_n = \beta_n$

Inferência:

Se AC_n está sobre L_{1n} e BC_n está sobre L_{2n}, então L_{1n} intersecta L_{2n}.

O processo iterativo neste caso é mover o ponto C_n mais e mais longe dos pontos A e B. À medida em que a distância D_n entre A e C_n fica maior, os ângulos α_n e β_n aproximam-se cada vez mais de 90 graus. Como resultado, os segmentos L_{1n} e L_{2n} ficam cada vez mais perto de se tornarem paralelos. Este é um processo sem fim, infinito. Em cada estagio *n*, as retas se encontram no ponto C_n. (Para detalhes, ver Kline, 1962, cap. 11; Maor, 1987.)

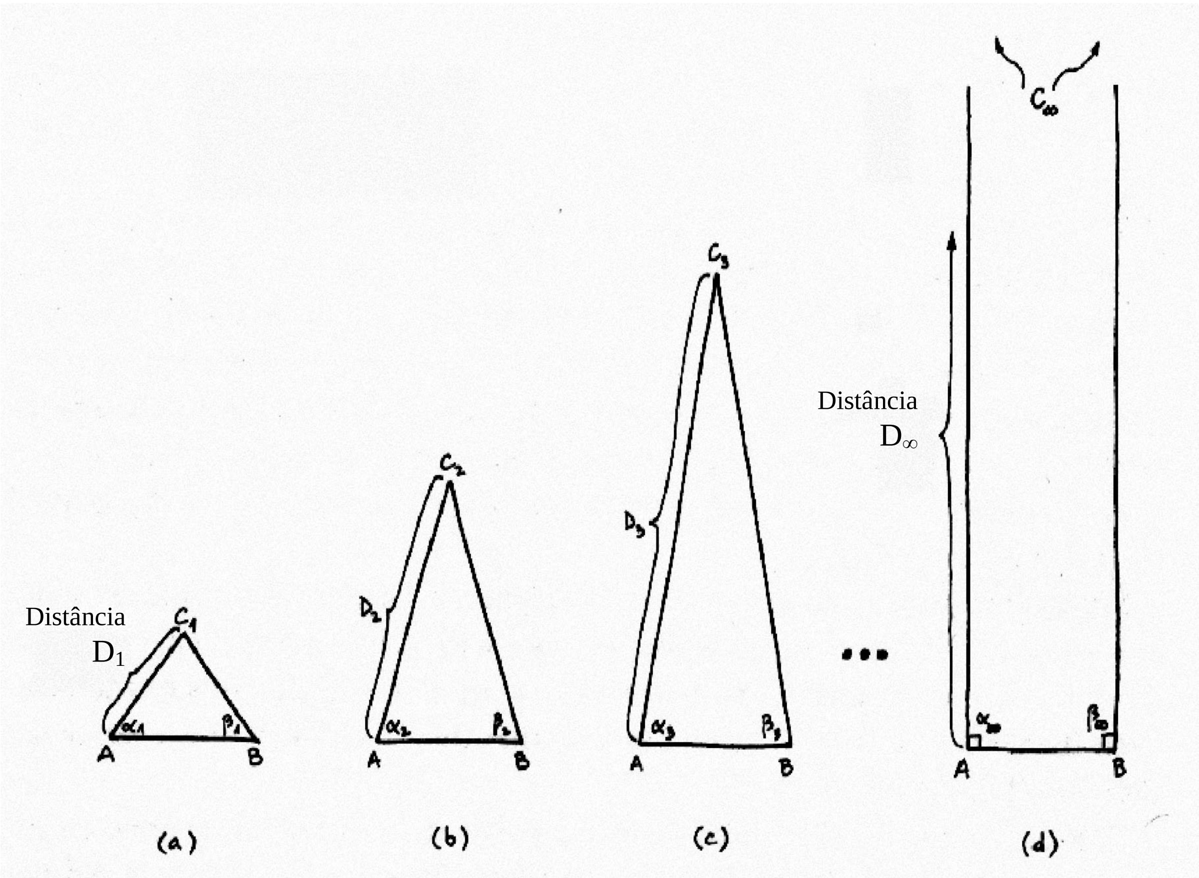

Figura 2: A aplicação da Metáfora Básica do Infinito à geometria projetiva. (a) mostra o triângulo isósceles ABC_1, o primeiro membro da seqüência da MBI. (b) e (c) mostram os triângulos isósceles ABC_2 e ABC_3, nos quais os lados iguais se alongam progressivamente e os ângulos iguais se aproximam cada vez mais de 90º. (d) mostra o estado final resultante da MBI: ABC_∞, onde ao ângulos *são* 90º. Os lados iguais são infinitamente longos e metaforicamente "se encontram" no infinito – a saber, o ponto único C_∞.

A idéia de "mover o ponto C_n mais e mais longe" é capturada por uma seqüência de movimentos, com cada movimento estendendo-se sobre uma distância arbitrária. Pela condição "distância arbitrária", queremos dizer quantificar sobre *todas* as distâncias pelas quais esta condição se sustém.

Aqui estão os detalhes para preenchimento nos parâmetros na MBI neste caso.

RETAS PARALELAS SE ENCONTRAM NO INFINITO

Domínio Fonte PROCESSOS ITERATIVOS CONTÍNUOS		*Caso Especial* GEOMETRIA PROJETIVA
O estado inicial (0)	→	A estrutura do triângulo isósceles, com o triângulo ABC_0
Estado (1) resultante do estágio inicial do processo	→	O triângulo ABC_1, onde o comprimento de AC_1 é D_1
O processo: De um dado estado intermediário (*n*-1), produza o próximo estado.	→	Forme AC_n de AC_{n-1}, fazendo D_n arbitrariamente maior que D_{n-1}.
O resultado intermediário depois desta iteração do processo (a relação entre *n* e *n-1*)	→	$D_n > D_{n-1}$ e $(90° - \alpha_n) < (90° - \alpha_{n-1})$.
“O estado final resultante” (Infinito Atual “ ∞ ”)	→	**$\alpha_\infty = 90°$. D_∞ é infinitamente longo. Os lados AC_∞ e BC_∞ são infinitamente longos, paralelos e se encontram em C_∞ - um ponto “no infinito”.**
Implicação *I*: O estado final resultante (“∞”) é único e segue cada estado não final.	→	**Implicação *I* : Existe um único AC_∞ (distância D_∞) maior que AC_n (distância D_n) para todo *n* finito.**

Como resultado da MBI, os segmentos L_1 e L_2 são paralelos, encontram-se no infinito, e são separadas pelo comprimento do segmento de reta *AB*. Visto que o comprimento *AB* não foi especificado, assim como a orientação do triângulo, este resultado se “encaixará” em todas as retas paralelas a L_1 e L_2 no plano. Assim, esta aplicação da MBI define o mesmo sistema de geometria como o axioma básico da geometria projetiva – a saber, que todas as retas paralelas no plano se encontram no infinito. Conseqüentemente, para cada orientação existe uma família infinita de retas paralelas, todas se encontrando “no infinito”. Visto que existe tal família de retas paralelas para cada orientação no plano, existe um “ponto no infinito” em cada direção.

Sendo assim, vimos que existe um caso especial da MBI que define a noção “ponto no infinito” na geometria projetiva, que é um caso especial de infinito atual como definido pela MBI. Devemos lembrar o leitor aqui que essa é uma análise cognitiva do conceito “ponto no infinito” na geometria projetiva. Não é uma analise matemática, não foi concebida para ser uma analise matemática e não deve ser confundida com uma. Nossa afirmação é uma afirmação cognitiva: o conceito “ponto no infinito” na geometria projetiva é, de uma perspectiva cognitiva, um caso especial da noção geral de infinito atual. Até o momento, não temos nenhuma evidência experimental para embasar esta afirmação. De modo a mostrar que a afirmação é plausível, teremos que mostrar que uma ampla variedade de conceitos de infinito em Matemática surge como casos especiais da MBI. Mesmo então, isto não provará empiricamente que eles o são; mas vai, entretanto, fazer esta afirmação altamente plausível. A importância desta afirmação não é de que apenas existe um único mecanismo cognitivo geral sob todas as conceituações humanas de infinito em Matemática, mas também que este único mecanismo faz uso dos elementos comuns da cognição humana – *aspecto* e metáfora conceitual.

O Ponto no Infinito na Geometria Inversiva

A geometria inversiva também tem um conceito de “ponto no infinito”, mas é um conceito muito diferente daquele encontrado na geometria projetiva. A geometria inversiva é definida por uma determinada transformação do plano cartesiano. Considere o plano cartesiano descrito em coordenadas polares, no qual cada ponto é representado por (r, θ) onde θ é um ângulo e r é a distância da origem. Considere a transformação que leva r em $1/r$. Esta transformação mapeia a círculo unitário em si mesmo, o interior do círculo unitário no seu exterior, e seu exterior em seu interior. Vamos considerar o que acontece ao zero sob esta transformação.

Considere um segmento partindo de zero se estendendo para fora indefinidamente a um ângulo θ (ver figura 3). Dentro do círculo, à medida em que r se aproxima de 0, $1/r$ se afasta. Conseqüentemente, $\frac{1}{1\,000}$ é levado em 1 000, $\frac{1}{1\,000\,000}$ é levado em 1 000 000 e assim por diante. À medida que r se aproxima de 0, $1/r$ se aproxima de ∞. Qual é o ponto em que 0 é levado? Somos tentados a levar 0, reta por reta, em um ponto no ∞ nessa reta. Mas existiriam muitos pontos como este, um em cada reta. O que a geometria inversiva faz é definir um único "ponto no infinito" para todas as linhas, e leva-se 0, que é único, no único "ponto no infinito".

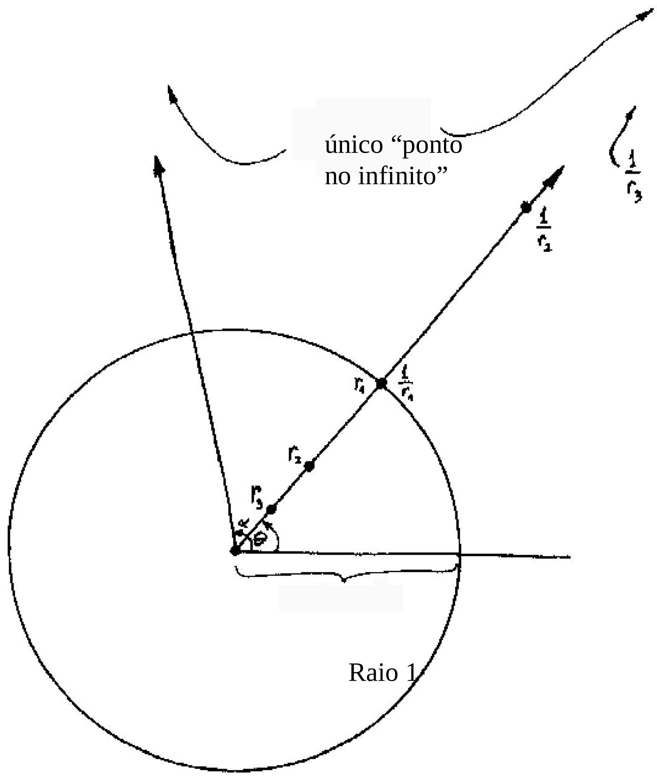

Figura 3: Geometria inversiva: um plano com um círculo de raio 1 e raios que se estendem a partir do centro do círculo. Cada raio é uma reta real não-negativa, com zero no centro do círculo e 1 na circunferência. Existe uma função, $f(x) = 1/x$, que leva os pontos r, em cada raio dentro do círculo, nos pontos correspondentes $1/r$ neste raio fora do círculo, e reciprocamente, com zero mapeado em ∞. Visto que existe apenas um zero, existe apenas um "ponto no infinito," que está em todos os raios.

Se estivermos corretos em afirmar que a MBI caracteriza o infinito atual em todas as suas formas, então o ponto no infinito na geometria inversiva deve também ser um caso especial da MBI. Mas, como em muitos casos, a formulação precisa requer algum cuidado. Ao passo que na geometria projetiva existe uma infinidade de pontos no infinito, na geometria inversiva só existe um. Este deve emergir como uma implicação da MBI, dados os parâmetros apropriados: a estrutura e o processo iterativo. Aqui está a estrutura, que preenche o parâmetro de "assunto" da MBI. A estrutura é simples.

A ESTRUTURA DA GEOMETRIA INVERSIVA

O Plano Cartesiano, com coordenadas polares.
A função biunívoca $f(x) = 1/x$, para x em um raio que se estende da origem para fora.

Esta estrutura assume um caso especial do domínio alvo da MBI. Para preencher este caso especial da MBI, precisamos caracterizar o processo iterativo.

A idéia por detrás do processo é simples. Tome um raio e um ponto x_1 neste raio, menor que 1. Este ponto tem um inverso, que é maior que 1. Continue tomando pontos x_n no mesmo raio, mais e mais próximos de zero. Os pontos inversos $1/x_n$ se aproximam cada vez mais da origem. Este é um processo infinito, sem fim.

Nós tomamos este processo por iterativo na MBI. Aqui estão os detalhes:

O PONTO NO INFINITO NA GEOMETRIA INVERSIVA

Domínio Fonte PROCESSOS ITERATIVOS CONTÍNUOS		*Caso Especial* GEOMETRIA INVERSIVA
O estado inicial (0)	→	A origem, com raios projetando-se para fora em toda direção, e com um raio arbitrário *r* no ângulo θ designado.
Estado (1) resultante do estágio inicial do processo	→	Um ponto x_1 em *r* em uma distância arbitrária $d_1 < 1$ da origem. Existe um ponto inverso x_1', em uma distância $1/d_1 > 1$ da origem.
O processo: de um dado estado intermediário (*n*-1), produza o próximo estado (*n*).	→	Dado um ponto x_{n-1} na distância d_{n-1} da origem, encontre o ponto x_n na distância d_n da origem, onde d_n é arbitrariamente menor do que d_{n-1}.
O resultado intermediário depois dessa iteração do processo (a relação entre *n* e *n*-1)	→	Existe um ponto inverso, x_n', em uma distância $1/d_n$ da origem e mais distante da origem do que x_{n-1}' é.
“O estado final resultante” **(infinito atual “∞”)**	→	**x_∞ está na origem; isto é, sua distância da origem é zero. x_∞' é um único ponto infinitamente mais distante da origem.**
Implicação *I*: O estado final resultante (“∞”) é único e segue cada estado não final.	→	**Implicação *I* : x_∞ é único e mais próximo da origem que qualquer outro ponto no raio *r*. Existe um único x_∞' que está mais distante da origem do que qualquer outro ponto no raio *r*.**

A MBI, então, aplica-se a este processo sem fim, infinito e conceitua-o metaforicamente como tendo um estado final resultante único "∞." Neste estado final metafórico, x_∞ está na origem, e a distância da origem para x_∞' é infinitamente longa. Na geometria inversiva, a aritmética é estendida para incluir ∞ como um número em relação à divisão: $D_\infty = \infty$, $1/D_\infty = 1/\infty = 0$, e $1/0 = \infty$. Esta extensão da aritmética não diz nada sobre a adição ou subtração de ∞. Ela é peculiar à geometria inversiva devido ao modo como este caso especial da MBI é definido: Todos os pontos devem ter inversos, incluindo o ponto da origem. Normalmente, a divisão por zero não é possível, esta metáfora estende ordinariamente a divisão para dar um valor metafórico a 1/0 e 1/∞. Na geometria inversiva, ∞ não existe como um número e tem possibilidades específicas limitadas para o cálculo.

Mais ainda, visto que existe apenas um ponto zero compartilhado por todos os raios, e visto que $f(x) = 1/x$ é uma função biunívoca que, via esta metáfora, mapeia 0 em ∞ e ∞ em 0, deve portanto existir apenas um ponto ∞ compartilhado por todos os raios.

O que é interessante sobre este caso é que a mesma metáfora geral, a MBI, produz um conceito de ponto no infinito bem diferente daquele da geometria projetiva. Na geometria projetiva, existe uma infinidade de pontos no infinito (como exemplo, pense na linha do horizonte), enquanto na geometria inversiva existe apenas um. Mais ainda, a geometria projetiva não tem nenhuma associação aritmética implícita, enquanto a geometria inversiva possui uma aritmética implícita (diferente da aritmética normal no que se refere ao seu tratamento do zero e do infinito).

Finalmente, apesar de termos caracterizado a geometria inversiva em termos de um mecanismo cognitivo, a MBI, os matemáticos, é claro, não o fazem. Eles simplesmente definem a geometria inversiva em termos matemáticos normais. Nosso objetivo é mostrar como o mesmo conceito de infinito está envolvido na geometria inversiva e outras formas de matemática, respeitando as diferenças no conceito de infinito entre os ramos da Matemática.

O Conjunto Infinito dos Números Naturais

Dentro da aritmética formal, os números naturais são usualmente caracterizados pela operação de sucessor: iniciando com 1. Adicione 1 para obter um resultado. Adicione 1 ao resultado para obter um novo resultado. E assim por diante. Este é um processo sem fim, infinito. Ele produz os números naturais, um de cada vez. Não o *conjunto infinito* contendo *todos* os números naturais. Apenas os números naturais por si só, cada um dos quais é finito.

Visto que não é capaz de ser usado no cálculo, ∞ não é um elemento do conjunto dos números naturais.

Aqui está o problema de caracterização do conjunto dos números naturais. O conjunto deve ser infinito, visto que contém *todos* os infinitos números naturais, mas não pode conter ∞ como um número.

Para conseguir o conjunto dos números naturais, temos que coletar cada número no momento em que é formado. O conjunto cresce sem fim. Para conseguir o conjunto *completo* dos números naturais – todos eles, mesmo que este conjunto nunca pare de crescer – precisamos de algo mais. Na axiomática da teoria de conjuntos, adicionamos um axioma que simplesmente estipula que o conjunto existe. De uma perspectiva cognitiva, este conjunto pode ser construído conceitualmente via uma versão da Metáfora Básica do Infinito. A MBI impõe uma completude metafórica ao processo sem fim da coleção dos números naturais. O resultado é a coleção inteira, o conjunto de todos os números naturais!

O CONJUNTO DE TODOS OS NÚMEROS NATURAIS

Domínio Fonte PROCESSOS ITERATIVOS CONTÍNUOS		*Caso Especial* O CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS
O estado inicial (0)	→	A estrutura do número natural, com o conjunto dos números existentes e uma operação de sucessor que adiciona 1 ao último número e forma um conjunto novo.
Estado (1) resultante do estágio inicial do processo	→	O conjunto vazio, o conjunto dos números naturais menores que 1.
O processo: de um dado intermediário (n-1), produza o próximo estado (n).	→	Dado S_{n-1}. o conjunto dos estado números naturais menores do que n-1, forme $S_{n-1} \cup \{n-1\} = S_n$.
O resultado intermediário depois dessa iteração do processo (a relação entre n e n-1)	→	No estado n, temos S_n, o conjunto dos números naturais menores do que n.

"O estado final resultante" **(infinito atual "∞")**	$\longrightarrow$	***S*∞, o conjunto de *todos* os números menores do que ∞ - isto é, o conjunto de *todos* números naturais (que não inclui ∞ como um número).**
Implicação *I*: O estado final resultante ("∞") é único e segue cada estado não final.	$\longrightarrow$	**Implicação *I* : o conjunto de *todos* os números naturais é único e inclui cada número natural (nem mais, nem menos)**

Este caso especial da MBI faz o mesmo trabalho de uma perspectiva cognitiva que o axioma do infinito na teoria dos conjuntos; isto é, ele assegura a existência de um conjunto infinito cujos membros são todos os números naturais. Este é um ponto importante. A MBI, como veremos, é geralmente de equivalência conceitual a alguns axiomas que garantem a existência de alguns tipos de entidades infinitas (por exemplo, um supremo). Assim como os axiomas, os casos especiais da MBI determinam o conjunto certo de inferências requeridas.

Este exemplo nos ensina algo que deve ser mantido na mente através do restante deste livro. O significado de "tudo" ou "inteiro" está longe de ser óbvio quando seus predicados são os conjuntos infinitos. Em geral, o significado de "tudo" envolve completude. Um dos primeiros usos da palavra "tudo" aprendidos em português é o que a criança usa em "acabou tudo" para indicar a completude de um processo de consumo, retirada ou destruição. *Dos doze quadros, roubaram tudo* indica completude do roubo – a coleção *inteira* foi roubada. Mas no caso do infinito, não existe tal coisa como uma completude literal de um processo infinito. A MBI é necessária de alguma maneira – implícita ou explicita – para caracterizar qualquer "tudo" que se relaciona a um processo infinito. Seja onde for que exista uma totalidade infinita, a MBI está sendo usada.

Esta análise via MBI nos mostra exatamente como a mesma noção de infinito usada para compreender pontos no infinito pode ser também usada para conceituar o conjunto infinito dos números naturais. Neste caso, podemos ver uma versão um pouco diferente do conceito de infinito. Pontos no infinito nos dão um conceito de uma *extremidade infinita.* Mas o conjunto dos números naturais não é uma extremidade infinita; ao invés, é uma *totalidade infinita*. Totalidades sempre envolvem conjuntos. Extremidades apenas envolvem ordens lineares.

Indução Matemática

O processo de indução matemática é crucial nas provas matemáticas. Ele funciona como se segue: prove que

1. A afirmação *S* é válida para 1;
2. Se a afirmação *S* é válida para $n - 1$, então ela é válida para *n*.

Literalmente, tudo o que isto faz é prover uma seqüência sem fim, infinitamente desdobrada dos números naturais para os quais a afirmação *S* é verdadeira. Isto não prova que a afirmação é verdadeira para *todos* os números naturais. Algo é preciso para ir de uma seqüência sem fim de números naturais individuais, para os quais *S* é uma verdade geral única, para *todos* os números naturais.

Na axiomática da aritmética, existe um axioma especial que caracteriza a indução matemática e que é preciso para transpor o vão entre a seqüência sem fim das verdades *específicas* para cada número, um de cada vez, e a generalização única para a totalidade infinita de *todos* os números naturais. O axioma simplesmente postula que se (1) e (2) estão provados, então, a afirmação é verdadeira para cada membro do conjunto de *todos* os números naturais.

O axioma que caracteriza a indução matemática é equivalente à Metáfora Básica do Infinito aplicada à questão da prova indutiva. Para ver o porquê, podemos conceituar o conteúdo do axioma em termos da MBI. Note que este exemplo da MBI envolve uma totalidade infinita – o conjunto de todos os números naturais finitos – não uma extremidade infinita como o “número” ∞. Nesta versão da MBI, um conjunto é construído de todos os números naturais finitos para os quais a afirmação dada é verdadeira. No estado final resultante, existe um conjunto infinito de números finitos.

A MBI PARA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Domínio Fonte PROCESSOS ITERATIVOS CONTÍNUOS		*Caso Especial* INDUÇÃO MATEMÁTICA
O estado inicial (0)	→	Uma afirmação $S(x)$, onde x varia dentro do conjunto dos números naturais
Estado (1) resultante do estágio inicial do processo	→	$S(1)$ é verdadeiro para os membros de $\{1\}$ – o conjunto contendo o número 1.
O processo: de um dado estado intermediário (n-1), produza o próximo estado (n).	→	Dada a validade de $S(n\text{-}1)$ para os membros do conjunto $\{1, ..., n\text{-}1\}$, estabeleça a validade de $S(n)$ para os membros de $\{1, ..., n\}$.
O resultado intermediário depois dessa iteração do processo (a relação entre n e n-1)	→	$S(n)$ é válida para todos os membros do conjunto $\{1, ..., n\}$.
"O estado final resultante" (infinito atual "∞")	→	**$S(\infty)$ é válida para os membros do conjunto de *todos* os números naturais.**
Implicação *I*: O estado final resultante ("∞") é único e segue cada estado não final.	→	**Implicação *I* : O conjunto dos números naturais em que $S(\infty)$ é válida é único e inclui *todos* os números naturais finitos.**

Assim, a indução matemática pode ser também vista como um caso especial da MBI.

Fecho Gerador

A idéia de fecho gerador para operações que geram conjuntos infinitos também faz uso implícito da MBI. Por exemplo, suponha que comecemos com o conjunto contendo o inteiro 1 e a operação de adição. Adicionando-se 1 a ele mesmo no primeiro estágio, obtemos 2, que não está no conjunto original. Isto significa que o conjunto original não estava "fechado" sob a operação da adição. Na busca do fecho, podemos então, estender este conjunto de modo que ele inclua o número 2. No próximo estágio, aplicamos a operação binária da adição sobre 1 e 2, e sobre 2 e 2, obtendo os novos elementos 3 e 4. Então, estendemos o conjunto anterior pela inclusão de 3 e 4. E assim por diante. Isto define uma seqüência infinita de extensões de conjuntos. Se aplicarmos a MBI, conseguimos o “fecho” sob a adição – o conjunto de *todas* as extensões resultantes.

Isto funcionará iniciando-se com qualquer conjunto finito de elementos e qualquer número finito de operações binárias sobre estes elementos. Pelo menos neste caso simples, o conceito de fecho pode ser visto como um caso especial da MBI. Podemos ver a partir deste caso, como afirmar o caso geral do fecho em termos da MBI. Seja C_0 qualquer conjunto de elementos e O qualquer conjunto finito de operações, cada qual aplicada sobre algum elemento ou par de elementos em C_0. Aqui está o processo iterativo:

- No estágio 1, efetue todas as operações uma vez, de todas as maneiras com que ela possa se efetuar nos elementos de C_0. Colete os resultados em um conjunto S_0 e forme a união de S_0 com C_0 para obter C_1.
- No estágio 2, efetue todas as operações uma vez, de todas as maneiras com que ela possa se efetuar nos elementos de C_1. Colete os resultados em um conjunto S_1 e forme a união de S_1 com C_1 para obter C_2.
- E assim por diante.

Se esse processo falhar em gerar novos elementos em qualquer estágio – isso é, se $C_{n-1} = C_n$, então o fecho é finito e o processo pára. De outra forma, ele continua. Note que para cada n, C_n contém como um subconjunto, todos os C_i, para $i < n$.

Sendo esse um processo iterativo, podemos caracterizar o fecho infinito usando a Metáfora Básica do Infinito do seguinte modo. Em ∞, C_∞ contém todo C_n, para $n < \infty$. Isso é, contem cada combinação finita de operações.

A MBI PARA FECHO GERADOR

Domínio Fonte PROCESSOS ITERATIVOS CONTÍNUOS		*Caso Especial* FECHO GERADOR
O estado inicial (0)	→	Um conjunto finito de elementos C_0 e uma coleção finita *O* de operações binárias sobre estes elementos.
Estado (1) resultante do estágio inicial do processo	→	C_1 = a união de C_0 com o conjunto S_0 de elementos resultantes de uma única aplicação de cada operador em *O* para cada par de elementos de C_0.
O processo: De um dado intermediário (n-1), produza o próximo estado (n).	→	Dado C_{n-1}, forme o conjunto estado S_{n-1}de elementos resultantes de uma única aplicação de cada operador em *O* para cada par de elementos de C_{n-1}**;** $C_n = C_{n-1} \cup S_{n-1}$.
O resultado intermediário depois desta iteração do processo (a relação entre n e n-1)	→	No estado n, temos C_n = a união de C_0 e a união de todo S_k, para $k < n$. Se $C_{n-1} = C_n$, então o o fecho é finito e o processo acaba. Se não, continua.
“O estado final resultante” **(infinito atual “∞”)**	→	**C_∞ = o fecho infinito de C_0 e suas extensões sobre as operações em O.**
Implicação *I*: O estado final resultante (“∞”) é único e segue cada estado não final.	→	**Implicação *I* : C_∞ é único e inclui todas as iterações finitas das aplicações das operações em *O* aos elementos de C_0 e elementos resultantes destas operações.**

Note que apesar do fechamento ser infinito, não existem seqüências infinitas de operações. Cada seqüência de operações é finita, mas não há fronteiras para o seu comprimento.

“Todos”

É comum na lógica formal usar o símbolo “$\forall$” para o quantificador universal em afirmações ou axiomas que concernem tais entidades como o conjunto de *todos* os números naturais. Este é apenas um símbolo e requer uma interpretação para ter significado. Na lógica formal, interpretações de tais quantificadores são dados em duas vias: (1) via metalinguagem e (2) via mapeamento em uma estrutura matemática – por exemplo, o fecho gerador produzido a partir do conjunto {1} sobre a operação “+”, escrito “fecho [{1}, +]”.

1) “$(\forall x : x \in \mathrm{N})$, (x) é inteiro” é verdadeira se e somente se x é um inteiro para todos os elementos do conjunto dos números naturais, N.
2) “$(\forall x : x \in \mathrm{N})$, (x) é inteiro” é verdadeira se e somente se x é um elemento do Fecho[{1}, +].

Na afirmação (1) acima, a palavra “todos” ocorre em expressão metalingüística à direita de “se e somente se.” Na afirmação (2), o fecho de {1} e suas extensões sobre operação da adição ocorrem à direita de “se e somente se”.

Agora, na afirmação (1), o símbolo $\forall$ é definido em termos de um entendimento prévio do termo “todos.” Do ponto de vista cognitivo, isto apenas nos leva à questão do que $\forall$ significa, visto que isso requer um relato cognitivo do que “todos” significa quando aplicado aos conjuntos infinitos. Cognitivamente, “todos” é entendido em termos de uma escala linear de inclusão, com “nenhum” em uma extremidade, “todos” na outra, e valores como “alguns,” “a maioria”, e “quase todos” no meio. Para dar um relato cognitivo do significado de “todos” aplicado a um conjunto infinito, precisamos da escala de inclusão e de um relato cognitivo de conjuntos infinitos, que é dado pela MBI.

A afirmação (2) é uma tentativa de caracterizar o significado de $\forall$ para um dado conjunto infinito sem usar a palavra “todos” e usando, ao invés, o conceito de fecho gerador. De uma perspectiva cognitiva, isso requer um relato cognitivo do significado de fecho gerador para os conjuntos infinitos, o qual acabamos de dar em termos da MBI.

A moral é que, em cada caso, uma ou outra versão da MBI é necessária para nos dar uma caracterização cognitiva do significado de $\forall$ quando aplicado a conjuntos infinitos. O uso do símbolo $\forall$ na lógica simbólica não nos livra do problema de dar uma caracterização cognitiva para os conjuntos infinitos. Tanto quanto possamos dizer, a MBI é realmente suficiente em todos os casos, como veremos nos capítulos seguintes.

Até esse ponto, mostramos seis usos matemáticos do infinito atual que podem ser conceituados como casos especiais da Metáfora Básica do Infinito. Cada caso envolve ou *extremidade infinita* (pontos no infinito e o número ∞) ou *totalidade infinita* (o conjunto dos números naturais e indução matemática).

Conclusões Básicas

Comparando os casos especiais, pode-se ver precisamente como uma ampla variedade de conceitos matemáticos, superficialmente diferentes, possuem uma estrutura similar de uma perspectiva cognitiva. Como muitos matemáticos estão preocupados com comparações de tipos de estruturas matemáticas, esse tipo de análise cai dentro da tradição de comparação estrutural em Matemática. Essas análises podem ser vistas como estando próximas da tradição da álgebra ou teoria de categorias, no fato de que elas procuram revelar profundas similaridades em casos que superficialmente não parecem similares.

A diferença, obviamente, é que estamos discutindo estruturas conceituais de uma perspectiva *cognitiva*, levando em conta limitações cognitivas, mais do que de um ponto de vista puramente matemático, que não possui limitações cognitivas, ou seja lá o que for. Isto é, os matemáticos não são obrigados a tentar compreender como o entendimento matemático é corpoembasado e como ele faz uso dos mecanismos cognitivos normais, como esquemas imagéticos, estrutura aspectual, metáforas conceituais, e assim por diante.

Estamos supondo que a análise dada acima esteja correta de uma perspectiva cognitiva. Esta hipótese é verificável, pelo menos em princípio. (Ver Gibbs, 1994, para uma visão geral da literatura para verificação de afirmações sobre o pensamento metafórico.) A hipótese envolve certas sub-hipóteses;

- A MBI é parte do nosso sistema conceitual não-consciente. Você não está ciente, em geral, dos mecanismos conceituais enquanto os está usando. Isto também deve ser verdade para a MBI. Correspondentemente, *não* estamos afirmando que o uso da MBI é consciente.

- O conceito de infinito atual, como caracterizado pela MBI, faz uso de um conceito de aspecto baseado metaforicamente – aspecto imperfectivo (em eventos contínuos) e aspecto perfectivo (em eventos completos).

- Como em todo modelo cognitivo, supõe-se que as implicações do modelo são verdadeiras para a cognição humana.

Fornecemos neste capítulo uma análise das idéias matemáticas de vários conceitos de infinito. Os matemáticos por si só não caracterizam o que é comum sobre eles. A noção matemática comum sobre infinito – "...," como na seqüência "1 +1/2 +1/4 + ..." – nem mesmo distingue entre infinito potencial e atual. Se é infinito potencial, a soma apenas nos dá uma seqüência sem fim de somas parciais sempre menores que 2; se é infinito atual, a soma é exatamente 2. Nossa análise da idéia em termos da MBI torna explícito o que está implícito.

Além disso, nossa análise da idéia matemática provê uma clara e explicita resposta à questão de como seres com corpos finitos podem conceituar o infinito – a saber, via metáfora conceitual, especialmente a MBI! E mostra o relacionamento entre as várias idéias de infinito encontradas na Matemática.

Referências[3]

DAUBEN, J. W. (1983). Georg Cantor and the origins of transfinite set theory. *Scientific American,* June: 122-154.

GIBBS, R. (1994). *The Poetics of Mind: Figurative Thought, Language and Understand.* New York: Cambridge University Press.

HARDY, G. H. (1955). *A Course of Pure Mathematics.* New York: Cambridge University Press.

KLINE, M. (1962). *Mathematics: A Cultural Approach.* Reading, Mass.: Addison-Wesley.

LAKOFF, G., & JOHNSON, M. (1999). *Philosophy in the Flesh.* New York: Basic Books.

MAOR, E. (1987)[4]. *To Infinite and Beyond: A Cultural History of Infinite.* Princeton: Princeton University Press.

[3] As referências aqui apresentadas estão formatadas do mesmo modo como se encontram em Lakoff & Núñez (2000).
[4] Na listagem bibliográfica de *Where Mathematics Comes From* (Lakoff & Núñez, 2000), a referência a esta obra coloca o ano de publicação como sendo 1991, no entanto, o ano correto é 1987, como aparece no texto.

NARAYANAN, S. (1997). *Embodiment in language understanding: sensory-motor representations for metaphoric reasoning about event descriptions.* Ph. D. dissertation, Department of Computer Science, University of California at Berkley.

TALMY, L. (1996). Fictive motion in language and “ception.” In P. Bloom, M. Peterson, L. Nadel, & M. Garrett (eds.), *Language and SpaceI.* Cambridge: MIT Press.

_______. (2000). *Toward a Cognitive Linguistics.* Cambridge: MIT Press.

4. Circunstâncias e configurações

Trataremos aqui de algumas questões que se fizeram presentes no decorrer do processo de tradução e esboço de transcriação que realizamos. Tecemos alguns comentários sobre circunstâncias da experiência geral, especificando algumas das dificuldades que tivemos que enfrentar, e apresentando um breve *transglossário* com os termos utilizados pelos autores e que foram submetidos ao processo de transcriação. Ilustramos nossa jornada, expomos algumas incertezas, decisões e indecisões com as quais nos deparamos ao longo deste processo, uma jornada que possui um ponto de parada, mas que não se dá por concluída.

Ao revisarmos uma bibliografia sobre a transcriação, vimos que não existe, pelo menos no nosso conhecimento, uma tentativa de transcriação de um texto acadêmico ou uma metodologia de transcriação que contemple a tradução de uma teoria científica. Na verdade, a transcriação não é uma metodologia ou método, mas uma forma de ver e de encarar a tradução.

Nossa proposta foi a de experimentar esta prática como alternativa a desafios que encontramos na tarefa de traduzir as idéias de Lakoff & Núñez. Pretendemos comunicar suas idéias, fazê-las soar naturais a ouvidos de nossa cultura, de nossa língua. Isso nos parece inviável através de uma tradução simples, através da mera transposição de uma língua para outra ou da tradução que permanece com diversos termos na língua original (recurso muito utilizado por aqueles que, no Brasil, lidam com as idéias de Lakoff & Núñez).

O fato de não fixarmos uma metodologia permitiu a escolha de alguns procedimentos que, caso a caso, julgamos prestar melhor a nossa empreitada. Dentre tais procedimentos destacamos a revisão da literatura sobre as idéias a serem transcriadas; a busca por palavras e conceitos-chave, expressões que se destacam no todo das exposições de Lakoff & Núñez; a realização de uma primeira tradução, sem pretensão, do texto e das expressões; a avaliação dos possíveis problemas desta primeira tradução; a busca por soluções e a elaboração do texto ‘definitivo’ contendo, além da tradução, em si, um relato explicativo dos problemas e soluções propostas (que constitui o presente capítulo).

A revisão de literatura é um passo óbvio, visto que a compreensão do original não se faz apenas por um texto, mas também pelo seu contexto. Realizamos uma revisão ampla e cuidadosa. Era preciso entender as idéias dos autores e o contexto em que foram escritas. Uma avaliação de seus pontos principais e a busca por palavras e conceitos-chave não se desvincularam deste trabalho, tornando ambos os itens simultâneos.

O próximo passo, que realizamos simultaneamente com os demais, foi o de gerar um texto inicial contendo a tradução literal mais provável das expressões e palavras-chave. Tal primeira versão serviu como guia para a posterior avaliação dos possíveis problemas de compreensão e de adaptação lingüísticas. Essa avaliação levou em conta se as idéias e associações feitas pelo leitor da versão traduzida encontrariam um "isomorfismo" com o do texto na versão original.

Após esta análise dos problemas, iniciamos a busca por soluções. Neste processo, além de prescindirmos dos recursos lingüísticos já disponíveis, nos demos a liberdade de ir além. Às vezes, foi a criação de novos termos que nos deu instrumentos para encontrar soluções mais adequadas, no nosso ponto de vista, aos problemas encontrados. A nossa tradução pôde, então, lançar mão do processo criativo, da tentativa de reconstrução, consciente de que o resultado não seria uma reprodução exata do texto original, mas uma obra que, esperamos, esteja ligada a este como um irmão gêmeo, com suas características de independência. Isto é o que entendemos por tradução à qual foram incorporados elementos de transcriação.

Lembramos que não se trata de defender a supremacia da transcriação sobre outros tipos ou formas de tradução, mas de apresentá-la, em forma de esboço, como uma alternativa rica e válida para a tarefa que empreendemos.

A seguir expomos alguns exemplos, tanto de termos e expressões, como de situações que encontramos no processo de traduzir as idéias principais de Lakoff & Núñez e o texto do capítulo oitavo de *Where Mathematics Comes From* (2000).

4.1. Transglossário

Embodiment: **Corpoembasamento**

O termo *Embodiment* dá nome ao ramo da ciência cognitiva em que Lakoff & Núñez se inserem. Sua tradução literal seria *corporificação*. Nossa proposta é pela não utilização da tradução literal, principalmente porque quando dizemos "corporificação", pensamos em algo que estava fora do corpo e que se corporifica, se incorpora, como num processo de "encarnação", onde o que é abstrato, impalpável, ganha um corpo, adquirindo propriedades físicas tangíveis. Esta idéia, não retrata exatamente a idéia por detrás do *embodiment* utilizado pelos autores, que é a de algo que tem no corpo e nas experiências corpóreas sua base, sua fonte primária de existência.

Aliás, um ponto importante no discurso dos autores é exatamente a crítica à idéia platônica de que as idéias existem por si só, como entidades abstratas reais. O *Embodiment* de Lakoff & Núñez é contrário a essa afirmação, diz que as idéias só existem se estiverem vinculadas ao corpo.

Desta feita, precisávamos de um termo que rompesse com a idéia que o vocábulo 'corporificado' apresenta em português e que refletisse o conceito de *Embodiment* tal como concebido pelos autores.

A escolha que fizemos foi pela criação do termo Corpoembasamento, pois assim, invertemos o fluxo da associação idéia/corpo. Ao utilizamos o termo Corpoembasamento, a associação é inversa àquela de se pensar em algo abstrato, pré-existente, que se corporifica. Pode ser que não se chegue a pensar no sentido contrário, o de algo que tem como sua base o corpo e suas experiências, mas pelo menos este termo evita a idéia platônica combatida por Lakoff & Núñez.

Além disso, há um ponto interessante nesta escolha. Refiro-me à semelhança fonética entre *embodied* e *embasado,* entre *embodiment* e *embasamento*. Em Corpoembasamento, adicionamos "corpo" como meio de compensar a perda do significado.

Embodied Mind: Mente Corpoembasada

Neste caso, fica evidente o vínculo entre os termos *Embodiment* e *Embodied Mind.* O segundo "deriva" do primeiro e se refere à idéia de que a mente, ou seja, os processos mentais, incluindo o pensamento e a linguagem, são dependentes das relações corpóreas com o meio ambiente. A mente não é isolada, como aquela da concepção cartesiana, ela depende do corpo e das funções corporais que a estruturam.

As mesmas associações aparecem aqui, mas de modo um pouco diferente. A tradução literal seria Mente Corporificada. O uso de ‘corporificada’ em associação com a palavra ‘mente’, nos dá a idéia de que a mente, tal como concebida por Descartes, como entidade abstrata e autônoma, adquire um corpo. Esta é uma idéia que os autores, como dito acima, rejeitam.

Já que em *Embodiment* nossa solução foi Corpoembasamento, é natural que para *Embodied Mind*, a proposta fosse Mente Corpoembasada.

Outro termo derivado de *Embodiment* e que aparece no texto desta dissertação é *Embodied Cognition* que traduzimos então por Cognição Corpoembasada.

Cognitive Unconscious: Processual-Cognitivo-Não-Consciente

O termo “cognitive unconscious”, tem como primeira opção de tradução “inconsciente cognitivo”. É usado para designar a idéia de que não temos consciência dos processos cognitivos que ocorrem de forma subconsciente em nossa mente, no momento em que estes acontecem. Além disso, não podemos ter consciência dos mesmos por meio da introspecção. Em inglês, esta expressão dá a idéia do inconsciente como um local onde ocorrem os processos cognitivos sem que sejam percebidos conscientemente.

Existem dois problemas que uma tradução literal teria que enfrentar neste caso. O primeiro é o da similaridade fonética entre a tradução literal “inconsciente cognitivo” e a expressão “inconsciente coletivo”. Ao ouvirmos o termo pela primeira vez, tal similaridade pode nos remeter a idéias que não estão em nada relacionadas ao que os autores estão dizendo.

O segundo, é que o termo não “incorpora” a idéia em si (fato que ocorre até mesmo com o termo original). O “inconsciente”, por exemplo, exige uma explicação por parte dos autores que afirmam não se tratar do sentido freudiano, o de algo que é reprimido, mas de inconsciente no sentido de não podermos acessá-lo conscientemente.

Achar uma alternativa que trouxesse, incluísse em si mesma, a idéia ou parte dela seria a melhor solução. A alternativa que adotamos foi Processual-cognitivo-não-consciente

O uso de “processual” aparece como forma de atrelar a idéia de processos cognitivos no termo. Esta opção veio em oposição à utilização do vocábulo ‘cognitivo’ isoladamente, o que, apesar de mais próximo do original literal, não traz a associação com o conceito utilizado pelos autores, ou seja, o de *cognitive unconscious* como um local onde ocorrem os processos cognitivos que não conseguimos perceber.

Por fim, usamos não-consciente, de modo a evitar a associação freudiana que aparece quando usamos inconsciente.

Este termo é um exemplo de como utilizamos a liberdade da transcriação, indo além do próprio original, reinventando-o. Contudo, o fizemos sem prejuízo ao termo, pelo contrário, priorizando o conceito, buscamos sua iluminação.

Outro termo que deriva deste e que se encontra no final do capítulo terceiro desta dissertação é *unconscious conceptual system*, que traduzimos por sistema conceptual não-consciente.

Conceptual Metaphor: Metáfora Conceitual

Metaphorical Thought: Pensamento Metafórico

Creio que a tarefa de se traduzir seria mais fácil se todos os termos e situações da tradução fossem como a destes casos. Aqui, a chamada tradução literal resolve de imediato a questão. A opção primeira, aquela da tradução ao “pé da letra” funciona de modo apropriado. Dá conta do problema e torna sem sentido a busca por opções diferentes. Mantivemos a tradução literal e não perdemos o significado.

Target Domain: Domínio Alvo

Source Domain: Domínio Fonte

Estes termos designam os dois domínios que aparecem ao analisarmos as metáforas conceituais. Como vimos, tal metáfora é entendida como “um modo de conceber uma coisa em termos de outra” (Lakoff & Johnson, 1980, p. 36). O domínio fonte representa aquele da experiência primeira, o da primeira coisa que será projetada para a compreensão metafórica da outra.

Como no caso anterior, a tradução literal mostrou-se suficiente, pelo menos em uma primeira análise.

Grounding Metaphors: Metáforas Corpoembasantes

Neste caso, a tradução literal seria ‘metáforas de base’, ou ‘metáforas de embasamento’. Escolhemos *metáforas corpoembasantes* pela relação deste termo como conceito em si, mais do que em vista de sua relação com o termo em inglês. Para os autores, todo conceito abstrato tem sua base nas experiências corpóreas. As *grounding metaphors* possibilitam a projeção metafórica entre domínios da experiência corpórea aos conceitos abstratos. Mais uma vez utilizamos uma opção ampliadora do termo original para englobar o sentido mais pleno do conceito.

Linking Metaphors: Metáforas de Ligação

As *linking metaphors* são responsáveis por ligar domínios abstratos. São metáforas que possibilitam um nível de abstração maior do que as metáforas corpoembasantes. O pensamento metafórico não ocorre apenas do corpóreo para o abstrato, mas, através das *linking metaphors*, pode ocorrer do abstrato para o abstrato.

Neste caso, insatisfeitos, optamos por manter a tradução literal.

Image Schemas: Esquemas Imagéticos

Image Schemas é um dos termos que mais nos desafiam. O conceito é complexo, o que torna a tarefa de encontrar ou criar um termo que o incorpore algo demorado e que requer paciência e reflexão. Nessa dissertação, optamos por *esquemas imagéticos* por ser este o termo que encontramos em alguns trabalhos de pesquisadores brasileiros que lidam com estes autores.

Container Schema: Esquema de Recipiente

Como vimos, o *Container Schema* é fundamental para conceitos matemáticos como conjuntos, por exemplo (ver capítulo 2, pp. 19 e 20). Este termo tem sua tradução primeira como esquema de container. Escolhemos esquema de recipiente devido à associação que a palavra container apresenta em português. Quando falamos em container aqui no Brasil, pensamos em algo relacionado ao transporte de cargas, especialmente por via marítima.

Em relação ao conceito, o inglês *container* tem mais a ver com a idéia que temos de um recipiente, um pote, por exemplo. Todos nós temos, desde criança, experiências com recipientes, mas poucos com transporte de cargas. O termo recipiente, então, é mais geral em português, como o é o *container* no inglês.

Above Schema: Esquema acima-de

Contact Schema: Esquema em-contato-com

Support Schema: Esquema de apoio

Este três termos aparecem na explicação dada pelos autores sobre os esquemas imagéticos. Todos são esquemas imagéticos, mas cada um tem sua peculiaridade. A princípio pensamos em deixar estes termos no original, sem traduzi-los, visto se configurarem como periféricos. No entanto, vimos que seria interessante apresentar uma proposta de tradução, mesmo assim.

Em *Above Schema,* temos a idéia do esquema imagético que nos permite perceber e raciocinar que algo está *sobre* algo. Deste modo, esquema *acima-de* nos pareceu a melhor opção de tradução.

Em *Contact Schema*, a idéia é aquela do contato e a tradução imediata esquema de contato, apesar de apresentar a palavra contato, não o coloca no contexto do conceito geral. Em esquema *em-contato-com* este contexto aparece de forma mais clara.

Em *Support Schema*, a tradução literal esquema de suporte não nos pareceu melhor do que esquema *de apoio*, pois em português suporte também pode evocar a idéia de suportar como tolerar algo desagradável. Já, apoio, não tem este problema.

Aspectual Schemas: Esquemas Aspectuais

Aspectual System: Sistema Aspectual

Aqui, o termo desafiador é *Aspectual*. No entanto não foi necessária uma criação ou mudança. Aspectual em português também tem o mesmo sentido. É um termo técnico usado em lingüística que apesar de não evocar praticamente nada do conceito original para quem é leigo, é muito claro para quem é da área. Sendo assim, escolhemos não alterá-lo, de modo a evitar confusões para os que o conhecem, visto que este seria um mal maior do que o estranhamento daquele que o vê pela primeira vez.

Imperfective Aspect: Aspecto Imperfectivo

Perfective Aspect: Aspecto Perfectivo

Imperfective Aspect: Processo Imperfectivo

No caso destes três termos os termos *imperfective e perfective,* assim como ocorre com *aspect*, são técnicos e já existem na lingüística em português. Optamos portanto, por mantê-los na sua forma técnica, assim como fizemos no caso anterior.

Conceptual Blend: Mescla Conceitual

Conceptual Blend designa um mecanismo cognitivo que nos permite criar idéias novas pela associação de duas outras idéias. Diferentemente da metáfora, onde algo é entendido em termos de outro e existe uma relação unilateral entre domínios (de domínio fonte para domínio alvo), no *conceptual blend*, esta relação se dá em duas vias. O termo significa, literalmente, mistura conceitual.

Este é outro termo que aparece de modo periférico dentro do escopo de nosso trabalho, mas sua tradução apresentar a opção que adotamos de modo a contribuir para sua divulgação. Sendo assim, tínhamos inicialmente três opções: mistura conceitual, mescla conceitual e combinação conceitual.

Ao usarmos *mistura*, a imagem que nos vem a mente, na maioria dos casos, é a de algo que se forma a partir de dois ou mais materiais, mas que se configura como algo único, homogêneo. Já em *mescla*, consegue-se ver partes dos materiais, como num tecido mesclado. Em *combinação*, as partes constituintes acabam assumindo uma configuração mais independente, mas combinada, como uma combinação de roupa, por exemplo.

O exemplo que os autores colocam é a do plano cartesiano mesclado ao círculo euclidiano. Nesta imagem podemos ver que os elementos constituintes são distinguíveis, mas afetados um pelo outro. Tanto o plano, quanto o círculo assumem características que não possuíam separados.

Desta feita, *mescla conceitual* nos parece a melhor das opções que tínhamos até aqui.

Basic Metaphor of Infinity : Metáfora Básica do Infinito

Aparentemente este é um dos casos em que a tradução primeira (aquela que resulta da simples passagem direta dos termos de uma língua para outra) pareceu-nos a melhor. Um ponto, porém, nos incomodou no início: *infinity.* No inglês, esta palavra (um substantivo) apresenta o sentido de infinito como algo que se estende, diferentemente de *infinite* (adjetivo) que designa algo sem limites, largo, grande, amplo e que é usado em relação ao universo e até mesmo à divindade (cf. Cambridge, 1995). *Infinity,* portanto, não é o mesmo que *infinite*, tem um sentido mais relacionado ao infinito atual, como um ponto distante que não pode ser alcançado, com o infinito como uma *coisa*. Em português, duas palavras, a principio se apresentaram como possíveis escolhas, infinito e infinidade. Optamos por infinito, pois infinidade dá a idéia de algo amplo, mais ou menos como *infinite*. Também porque infinito, apesar de se apresentar como adjetivo, também pode ser usado para designar uma entidade, uma coisa, como quando usamos a expressão: “com *x* tendendo a *infinito*”.

4.2. Comentários

No decorrer deste trabalho nos deparamos com desafios diversos no que tange à tradução e que merecem estes comentários a título de exemplificação da tarefa de se transpor um texto de uma língua a outra.

Concepts-events: Conceitos-eventos

No original o termo é concepts-events e refere-se ao modo como conceituamos os eventos. A idéia causa um certo estranhamento e os autores acabam por adicionar uma pequena explicação após usar o termo. Deste modo, resolvemos não evitar este estranhamento no português e traduzir literalmente o termo por conceitos-eventos. É um caso que ilustra que, às vezes, a tradução literal, mesmo que estranha; pode ser uma opção válida e até mesmo produzir efeitos que, de outro modo não alcançaríamos.

Tapping: Bater Palmas

A primeira vista pode parecer estranha a tradução de *tapping* para bater palmas, afinal, bater palmas em inglês tem a ver como verbo *to clap.* O vocábulo *Tapping* não tem similar em português (pelo menos no que é de nosso conhecimento) e carrega a idéia similar a quando damos várias palmadas no fundo de uma lata para retirar o seu conteúdo.

No contexto do capítulo que traduzimos, *tapping* é um exemplo importante, pois os autores o usam para exemplificar processos iterativos. O desafio era usar um termo similar e que carregasse consigo a iteratividade. Bater palmas nos pareceu suficiente e bem apropriado para este caso. Provavelmente o leitor mesmo, se não conhecia o original e teve contato com nossa versão transcriada não deve ter percebido nada de anormal ao ler “bater palmas”.

A comet flies by the earth : uma águia voa pelo céu

Como vimos no capítulo dois deste trabalho, uma tradução sempre acarretará em alguma perda. É impossível manter o texto exatamente igual ao original. Este caso é um exemplo interessante de como se perde o sentido devido às diferenças culturais e lingüísticas.

Em meio à discussão sobre como conceituamos algumas ações em relação à sua completude, os autores dizem que algumas ações são iterativas enquanto outras contínuas. Também colocam que algumas ações apresentam um fim que é entendido como parte da própria ação, enquanto outras têm sua completude entendida como estando separada da ação. Para exemplificar esse ultimo caso, Lakoff & Núñez utilizam a seguinte frase: “we do not normally conceptualize landing as part of flying, as when a comet flies by the earth” (2000, p.156). Ao traduzir-se literalmente essa frase, temos: “... como quando um cometa voa pela terra”. Fica evidente que este não é o uso comum em nossa cultura. Para nós, brasileiros, um cometa não “voa”, um cometa “passa”. Deste modo, teríamos que utilizar a frase: “como quando um cometa passa pelo céu.” Tudo bem, se não fosse o fato de que o que mais importa aqui é o verbo, já que os autores estão querendo enfatizar o modo como conceituamos as ações e, especificamente, o fenômeno de se entender a completude como parte isolada da ação principal. O verbo “passar” não tem completude, nem inerente, nem separada.

Tivemos, portanto, que manter o verbo, mas mudar o sujeito, de modo que a frase fizesse sentido tanto no português como no contexto do texto. Resolvemos colocar deste modo: “como uma águia voa pelo céu”, pois assim passamos a idéia do verbo, que no português, apesar do exemplo mais pobre do que o do original, também é entendido como tendo sua completude separada da ação.

Perfected: Perfectivado

Neste caso, os autores utilizam *perfected* para explicar o que é um processo imperfectivo. Em inglês o significado de *perfected* tem o sentido de *feito perfeito*, e carrega a noção de completude. Em português, quando dizemos ‘perfeito’ (que seria a primeira opção de tradução com que nos deparamos) esta idéia de completude não é clara. Resolvemos então jogar com o objetivo da utilização do termo pelos autores, fazendo um trocadilho com o oposto de imperfectivo, aplicando-lhe o particípio, obtendo *perfectivado,* cujo estranhamento, neste contexto, é elemento amplificador do entendimento de imperfectivo.

John said the sentence over

John said the sentence over and over and over

The barrel rolled over and over

The eagle flew on and on

Para exemplificar como entendemos os processos contínuos em termos de processos iterativos, Lakoff & Núñez utilizam uma série de frases que, devido à sua estrutura gramatical, ilustram claramente suas idéias. O problema é que a estrutura gramatical que ajuda em inglês, atrapalha em português. Os mecanismos gramaticais utilizados nestes exemplos não existem em português, afinal, não temos partículas auxiliares como *"on"* e *"over"*. Não temos, em português, maneiras de expressar as mesmas idéias com a mesma estrutura gramatical. Para não deixarmos estas frases no original era preciso encontrar (ou criar) estruturas sintáticas paralelas e similares ao original, pois este é o ponto chave da argumentação dos autores. É na análise destas estruturas que eles justificam suas afirmações. Deste modo, a opção de se deixar no original, ainda que frustrante, nos pareceu a melhor, até o momento.

all : tudo, todos

O vocábulo *"all"* pode ser traduzido como todo, toda, todos, todas, tudo e inteiro. Este é um caso particular de algo que ocorre muito na tradução e que apesar de não ser tão complexo como o caso da ambigüidade, exigiu-nos alguma consideração.

Esta palavra aparece normalmente em qualquer texto em inglês e sua tradução geralmente é feita sem problemas. No nosso caso, no entanto, é uma palavra especial, visto que os autores estão trabalhando com idéias que envolvem o infinito.

Em determinado trecho, Lakoff & Núnez (2000, p.175) discutem sobre o significado de *“all”* e dão o exemplo de que um dos primeiros usos que as crianças fazem deste termo é quando dizem: *“all gone”*. Em português, isso equivale ao “acabou tudo”. Deste modo, neste trecho, todas as vezes que a palavra *“all”* aparece antes deste exemplo, traduzimos por “tudo”, para dar um sentido de coerência ao texto. Coerência que nos fez alterar a frase *“All twelve of the paintings were stolen”*, cuja tradução literal seria “todos os doze quadros foram roubados” para “dos doze quadros, roubaram tudo”.

Mais a frente, os autores discutem a questão do significado do símbolo “$\forall$”, que em português chamamos de: “para todos”. Nesta parte, traduzimos “*all*” por “todos”, o que resolve a questão.

Final: uma narrativa em *off*

O texto dessa dissertação começou com “Cenários e texturas de fundo”, onde buscamos contextualizar a trajetória da investigação, o percurso que nos levou à realização deste projeto. Desde aquela ocasião, até agora, no momento de apresentar as “conclusões”, pairava um espectro no ar: em que medida uma tradução poderia ser considerada como um trabalho digno de ser apresentado como uma dissertação de mestrado? Não achamos necessário tecer um “discurso de justificação” para isso; ao invés, apresentamos os autores, um pouco de suas idéias e algumas considerações sobre como elas podem interferir no discurso da Educação Matemática. A relevância e adequação do que fizemos ficam a critério da comunidade a quem o texto se destina.

Tradução e a transcriação são coisas distintas. Entretanto poderíamos advogar uma proximidade, de tal modo que a “idéia” de tradução viesse a se confundir com a transcriação. Ou seja, uma tradução, somente seria assim entendida se tivesse aquelas características que apresentamos como cruciais para a transcriação - e que sintetizamos aqui como sendo uma abordagem global e orgânica do texto, colocando-o em outro contexto com um grau de recepção semelhante àquele que teve em seu contexto original... Neste trabalho demos alguns passos em direção à realização da transcriação completa do texto de um capítulo. Nosso trabalho termina agora, abruptamente, em cumprimento a prazos institucionais... No entanto: quando é que o trabalho terminaria? Seria na multiplicação infinita das explicações e comentários? Ou seria na busca de uma síntese que o colocasse, gradativamente, com um número cada vez mais reduzido de páginas? Não temos resposta para tais indagações. Julgamos que nosso trabalho deixa abertos caminhos, propostas e possibilidades de novos projetos; ele abre possibilidades para novos cenários, texturas de fundo e outras narrativas.

REFERÊNCIAS

Anderson, Michael L. Embodied cognition: a field guide. **Artificial Intelligence**, Essex, v. 149, n.1, p. 91–130, Set. 2003.

BORBA, Marcelo de Carvalho. ARAÚJO, Jussara de Loiola. Construindo pesquisas coletivamente em educação matemática. In: _______. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004, p. 25-45.

CAMBRIDGE international dictionary of english. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

CAMPOS, Haroldo de. **Pedra e luz na poesia de Dante**. Rio de Janeiro: Imago Ed., 1998.

_______. **A ira de Aquiles:** canto I da Ilíada de Homero. São Paulo: Nova Alexandria, 1994.

_______. **Hagoromo de Zeami:** o charme sutil. São Paulo: editora Estação Liberdade, 1993.

_______. **Metalinguagem e outras metas**. São Paulo: Perspectiva, 2004.

_______. **Bere'shith:** a cena da origem. São Paulo, Perspectiva, 2000.

_______. **Deus e o Diabo no Fausto de Goethe**. São Paulo, Perspectiva, 2005.

FAUCONNIER, Gilles. TURNER, Mark. **The way we think:** conceptual blending and the mind's hidden complexities. New York: Basic Books, 2002.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. História oral e educação matemática: de um inventário a uma regulação. **Revista Zetetiké**, Campinas, v. 11, n. 19, p. 9-55, Jan./Jun. 2003.

_______. História oral e educação matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004, p. 77-98.

LAKOFF, George. **Women, fire, and dangerous things:** what categories reveal about the mind. Chicago: University of Chicago Press, 1987.

_______. **Moral politics:** how liberals and conservatives think. Chicago: The University of Chicago Press, 2002.

LAKOFF, George. JOHNSON, Mark. **Philosophy in the flesh:** the embodied mind and its challenge to western thought. New York: Basic Books, 1999.

_______. **Metaphors we live by**. Chicago and London: The University of Chicago Press, 1980.

_______. **Metáforas da vida cotidiana**. São Paulo: Educ, 2002.

LAKOFF, George. NÚÑEZ, Rafael. **Where mathematics comes from:** how embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books, 2000.

MEIHY, José Carlos Sebe Bom. **Canto de morte kaiowá:** história oral de vida. São Paulo: Edições Loyola, 1991.

NÚÑEZ, Rafael. Could The Future Taste Purple? Reclaiming mind, body and cognition. In: R. Núñez & W. J. Freeman (eds.), **Reclaiming cognition:** the primacy of action, intention, and emotion. Thoverton, U.K.: Imprint Academic, 1999, p. 41-60.

_______. Mathematical Idea Analysis: What Embodied Cognitive Science can say about the Human Nature of Mathematics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 24., 2000, Hiroshima. **Proceedings…** Hiroshima, Vol 1, n. 1, 2000, p. 3–22.

PAZ, Octavio. CAMPOS, Haroldo de. **Transblanco**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 1986.

_______. **Transblanco**. São Paulo: Siciliano, 1994.

STEINER, George. **Depois de Babel:** questões de linguagem e tradução. Curitiba: Editora da UFPR, 2005.

Tikhomirov, O. K.: The Psychological consequences of computerization. In: J. V. Wertsch (Ed.) **The concept of activity in soviet psychology**. New York: M. E. Sharpe. Inc, 1981, p. 256-278.

________. The theory of activity changed by information technology. In ENGERSTRÖM, Y, MIETTINEN, R., PUNAMÄKI, R. (Eds.). **Perspectives on Activity Theory**. Cambridge: Cambridge University Press. 1999, p. 347 – 359.

ANEXO: reprodução do original do capítulo oitavo de *Where Mathematics Comes From* (Lakoff & Núñez, 2000)

8

The Basic Metaphor of Infinity

Infinity Embodied

One might think that if any concept cannot be embodied, it is the concept of infinity. After all, our bodies are finite, our experiences are finite, and everything we encounter with our bodies is finite. Where, then, does the concept of infinity come from?

A first guess might be that it comes from the notion of what is finite—what has an end or a bound—and the notion of negation: something that is *not* finite. But this does not give us any of the richness of our conceptions of infinity. Most important, it does not characterize infinite *things*: infinite sets, infinite unions, points at infinity, transfinite numbers. To do this, we need not just a negative notion ("not finite") but a positive notion—a notion of infinity as an entity-in-itself.

What is required is a *general* mathematical idea analysis of all the various concepts of infinity in mathematics. Such an analysis must answer certain questions: What do the various forms of infinity have to do with each other? That is, What is the relationship among ideas like infinite sets, points at infinity, and mathematical induction, where a statement is true for an infinity of cases. How are these ideas related to the idea of a limit of an infinite sequence? Or an infinite sum? Or an infinite intersection? And finally, how are infinitely large things conceptually related to infinitely small things?

To begin to see the embodied source of the idea of infinity, we must look to one of the most common of human conceptual systems, what linguists call the *aspectual system*. The aspectual system characterizes the structure of event-concepts—events as we conceptualize them. Some actions, for example, are inherently iterative, like tapping or breathing. Others are inherently continuous, like moving. Some have inherent beginning and ending points, like jumping. Some just have ending points, like arriving. Others just have starting points, like leaving or embarking on a trip. Those that have ending points also have resulting states. In addition, some actions have their completions conceptualized as part of the action (e.g., landing is part of jumping), while others have their completions conceptualized as external to the actions (e.g., we do not normally conceptualize landing as part of flying, as when a comet flies by the earth).

Of course, in life, hardly anything one does goes on forever. Yet we conceptualize breathing, tapping, and moving as *not having completions*. This conceptualization is called *imperfective aspect*. As we saw in Chapter 2, the concept of aspect appears to be embodied in the motor-control system of the brain. Narayanan (1997), in a study of computational neural modeling, showed that the neural computational structure of the aspectual system is the same as that found in the motor-control system.

Given that the aspectual system is embodied in this way, we can see it as the fundamental source of the concept of infinity. Outside mathematics, a process is seen as infinite if it continues (or iterates) indefinitely without stopping. That is, it has imperfective aspect (it continues indefinitely) without an endpoint. This is *the literal concept of infinity* outside mathematics. It is used whenever one thinks of perpetual motion—motion that goes on and on forever.

Continuative Processes Are Iterative Processes

A process conceptualized as not having an end is called an imperfective process—one that is not "perfected," that is, completed. Two of the subtypes of imperfective processes are *continuative* (those that are continuous) and *iterative* (those that repeat and have an intermediate endpoint and an intermediate result). In languages throughout the world, continuous processes are conceptualized as if they were iterative processes. The syntax used is commonly that of conjunction. Consider a sentence like *John jumped and jumped again, and jumped again.* Here we have an iteration of three jumps. But *John jumped and jumped and jumped* is usually interpreted not as three jumps but as an open-ended, indefinite number.

Now, "jump" is an inherently perfective verb: Each jump has an endpoint and a result. But verbs like *swim, fly,* and *roll* are imperfective, with no indicated endpoint. Consider sentences indicating iteration via the syntactic device of conjunction: *John swam and swam and swam. The eagle flew and flew and* *flew.* This sentence structure, which would normally indicate indefinite iteration with perfective verbs, here indicates a continuous process of swimming or flying. The same is true in the case of aspectual particles like *on* and *over*. For example, *John said the sentence over* indicates a single iteration of the sentence. But *John said the sentence over and over and over* indicates ongoing repetition. Similarly, *The barrel rolled over and over* indicates indefinitely continuous rolling, and *The eagle flew on and on* indicates indefinitely continuous flying. In these sentences, the language of iteration for perfectives (e.g., verb *and* verb *and* verb; *over and over and over*) is used with imperfectives to express something quite different—namely, an indefinitely continuous process. In short, the idea of iterated action is being used in various syntactic forms to express the idea of continuous action. This can be characterized in cognitive terms by the metaphor Indefinite Continuous Processes Are Iterative Processes.

There is a cognitive reason why such a metaphor should exist. Processes in general are conceptualized metaphorically in terms of motion via the event structure metaphor, in which processes are extended motions (see Lakoff & Johnson, 1999). Indefinitely continuous motion is hard to visualize, and for extremely long periods it is impossible to visualize. What we do instead is visualize short motions and then repeat them, thus conceptualizing indefinitely continuous motion as repeated motion. Moreover, everyday continuous actions typically require iterated actions. For example, continuous walking requires repeatedly taking steps; continuous swimming requires repeatedly moving the arms and legs; continuous flying by a bird requires repeatedly flapping the wings. This conflation of continuous action and repeated actions gives rise to the metaphor by which continuous actions are conceptualized in terms of repeated actions.

Why is this metaphor important for infinity? The reason is that we commonly apply it to infinitely continuous processes. Continuous processes without end—infinite continuous processes—are conceptualized via this metaphor as if they were infinite iterative processes, processes that iterate without end but in which each iteration has an endpoint and a result. For example, consider infinitely continuous motion, which has no intermediate endpoints and no intermediate locations where the motion stops. Such infinitely continuous motion can be conceptualized metaphorically as iterated motion with intermediate endings to motion and intermediate locations—but with infinitely many iterations.

This metaphor is used in the conceptualization of mathematics to break down continuous processes into infinitely iterating step-by-step processes, in which each step is discrete and minimal. For example, the indefinitely continuous process of reaching a limit is typically conceptualized via this metaphor as an infinite sequence of well-defined steps.

Actual Infinity

The kind of infinity we have just seen—ongoing processes or motions without end—was called *potential infinity* by Aristotle, who distinguished it from *actual infinity*, which is infinity conceptualized as a realized "thing." Potential infinity shows up in mathematics all the time: when you imagine building a series of regular polygons with more and more sides, when you imagine writing down more and more decimals of $\sqrt{2}$, and so on (see Figure 8.1). But the interesting cases of infinity in modern mathematics are cases of actual infinity—cases that go beyond mere continuous or iterative processes with no end. These include, for example, infinite sets (like the set of natural numbers) and points at infinity—mathematical entities characterized by infiniteness.

We hypothesize that the idea of actual infinity in mathematics is metaphorical, that the various instances of actual infinity make use of the ultimate metaphorical *result* of a process without end. Literally, there is no such thing as the result of an endless process: If a process has no end, there can be no "ultimate result." But the mechanism of metaphor allows us to conceptualize the "result" of an infinite process—in the only way we have for conceptualizing the result of a process—that is, in terms of a process that does have an end.

We hypothesize that all cases of actual infinity—infinite sets, points at infinity, limits of infinite series, infinite intersections, least upper bounds—are special cases of a single general conceptual metaphor in which processes that go on indefinitely are conceptualized as having an end and an ultimate result. We call this metaphor the *Basic Metaphor of Infinity*, or the BMI for short. The target domain of the BMI is the domain of processes without end—that is, what linguists call imperfective processes. The effect of the BMI is to add a metaphorical completion to the ongoing process so that it is seen as having a result—an infinite *thing*.

The source domain of the BMI consists of an ordinary iterative process with an indefinite (though finite) number of iterations with a completion and resultant state. The source and target domains are alike in certain ways:

- Both have an initial state.
- Both have an iterative process with an unspecified number of iterations.
- Both have a resultant state after each iteration.

In the metaphor, the initial state, the iterative process, and the result after each iteration are mapped onto the corresponding elements of the target domain. But the crucial effect of the metaphor is *to add to the target domain the completion of the process and its resulting state*. This metaphorical addition is

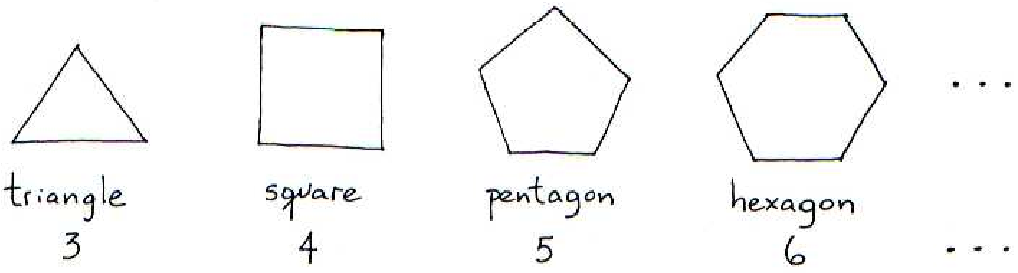

FIGURE 8.1 A case of potential infinity: the sequence of regular polygons with n sides, starting with $n = 3$. This is an unending sequence, with no polygon characterizing an ultimate result.

indicated in boldface in the statement of the metaphor that follows. It is this last part of the metaphor that allows us to conceptualize the ongoing process in terms of a completed process—and so to produce the concept of actual infinity.

THE BASIC METAPHOR OF INFINITY

Source Domain COMPLETED ITERATIVE PROCESSES		*Target Domain* ITERATIVE PROCESSES THAT GO ON AND ON
The beginning state	→	The beginning state
State resulting from the initial stage of the process	→	State resulting from the initial stage of the process
The process: From a given intermediate state, produce the next state.	→	The process: From a given intermediate state, produce the next state.
The intermediate result after that iteration of the process	→	The intermediate result after that iteration of the process
The final resultant state	→	**"The final resultant state" (actual infinity)**
Entailment *E*: The final resultant state is unique and follows every nonfinal state.	→	**Entailment *E*: The final resultant state is unique and follows every nonfinal state.**

Notice that the source domain of the metaphor has something that does not correspond to anything in the literal target domain—namely, a final resultant state.

The conceptual mapping imposes a "final resultant state" on an unending process. The literal unending process is given on the right-hand side of the top three arrows. The metaphorically imposed final resultant state (which characterizes an actual infinity) is indicated in boldface on the right side of the fifth line of the mapping.

In addition, there is a crucial entailment that arises in the source domain and is imposed on the target domain by the metaphor. In any completed process, the final resultant state is *unique*. The fact that it is the *final* state of the process means that:

- There is no earlier final state; that is, there is no distinct previous state within the process that both follows the completion stage of the process yet precedes the final state of the process.
- Similarly, there is no later final state of the process; that is, there is no other state of the process that both results from the completion of the process and follows the final state of the process. Any such putative state would have to be "outside the process" as we conceptualize it.

Thus, the uniqueness of the final state of a complete process is a product of human cognition, not a fact about the external world. That is, it follows from the way we conceptualize completed processes. This entailment is also shown in boldface.

The Basic Metaphor of Infinity maps this uniqueness property for final resultant states of processes onto actual infinity. Actual infinity, as characterized by *any given application of the BMI*, is unique. As we shall see later, the existence of degrees of infinity (as with transfinite numbers) requires multiple applications of the BMI.

What results from the BMI is a metaphorical creation that does not occur literally: a process that goes on and on indefinitely and yet has a unique final resultant state, a state "at infinity." This metaphor allows us to conceptualize "potential" infinity, which has neither end nor result, in terms of a familiar kind of process that has a unique result. Via the BMI, infinity is converted from an open-ended process to a specific, unique entity.

We have formulated this metaphor in terms of a simple iterative step-by-step process—namely: From a given state, produce the next state. From an initial state, the process produces intermediate resultant states. The metaphorical process has an infinity of such intermediate states and a metaphorical final, unique, resultant state.

Notice that the nature of the process is unspecified in the metaphor. The metaphor is general: It covers any kind of process. Therefore, we can form special cases of this general metaphor by specifying what process we have in mind. The process could be a mechanism for forming sets of natural numbers resulting in an infinite set. Or it could be a mechanism for moving further and further along a line until the "point at infinity" is reached. Our formulation of the metaphor is sufficiently precise and sufficiently general so that we can fill in the details of a wide variety of different kinds of infinity in different mathematical domains. Indeed, this will be our strategy, both in this chapter and in chapters to come. We will argue that a considerable number of infinite processes in mathematics are special cases of the BMI that can be arrived at by specifying what the iterative process is in detail. We believe that *all* notions of infinity in mathematics can be seen as special cases of the BMI, and we will discuss what we hope is a wide enough range of examples to make our case.

The Origin of the BMI Outside Mathematics

The Basic Metaphor of Infinity is a general cognitive mechanism. It can occur by itself, as when one speaks of "the infinite" as a thing. But most people don't go around speaking of "the infinite" as a thing; the notion occurs usually only in philosophical or spiritual contexts—or in special cases in which some particular process is under discussion.

There is a long history to the use of this metaphor in special cases, a history that goes back at least to pre-Socratic philosophy. Greek philosophy from its earliest beginnings held that any particular thing is an instance of a higher category. For example, a particular goat is an instance of the category Goat. Moreover, every such category was assumed to be itself a thing in the world. That is, not only were individual goats in the world but the category Goat—a natural kind—was also seen as an entity in the world. This meant that it, too, was an instance of a still higher category, and so on.

Thus there was taken to be an indefinitely long ascending hierarchy of categories. It was further assumed that this indefinitely ascending hierarchy had an end—the category of Being, which encompassed everything (see Lakoff & Johnson, 1999, chs. 16–18). The reasoning implicit in this move from an indefinitely ascending hierarchy to a highest, all-encompassing point in the hierarchy can be seen as an instance of the Basic Metaphor of Infinity, in which the result of an indefinitely iterative process of higher categorization results in a highest category. The following table shows, for each element of the target domain of the BMI, the corresponding element of the special case (the formation of ascending categories). The symbol "⇒" indicates the relation between target domain elements and their corresponding special cases.

THE HIGHEST CATEGORY—BEING

Target Domain ITERATIVE PROCESSES THAT GO ON AND ON		*Special Case of the Target Domain* THE FORMATION OF ASCENDING CATEGORIES
The beginning state	⇒	Specific entities with no categories
State resulting from the initial stage of the process	⇒	Categories of specific entities: The lowest level of categories
The process: From a prior intermediate state, produce the next state.	⇒	From categories at a given level, form categories at the next highest level that encompass lower-level categories.
The intermediate result from that iteration of the process	⇒	Intermediate-level categories formed by each iteration of the process
"The final resultant state" (actual infinity)	⇒	**"The final resultant state": The category of Being**
Entailment *E:* The final resultant state is unique and follows every nonfinal state.	⇒	**Entailment *E:* The category of Being is unique and encompasses all other categories.**

In this case, the process specified in the BMI is the process of forming higher categories. The first step is to form a category from specific cases and make that category a thing. The iterative process is to form higher categories from immediately lower categories. And the final resultant state is the highest category, the category of Being.

What we have just done is consider a special case of the BMI outside mathematics, and we have shown that by considering the category of Being as produced by the BMI, we get all of its requisite properties. Hereafter, we will use the same strategy *within* mathematics to produce special cases of actual infinity, and we will use similar tables to illustrate each special case.

This metaphorical concept of infinity as a unique entity—the highest entity—was extended naturally to religion. In Judaism, the Kabbalistic concept of God is *Ein Sof*—that is, "without end," a single, unique God. The uniqueness entailment applied to deities yields monotheism. In Christianity, God is *all*-powerful: Given an ascending hierarchy of power, that hierarchy is assumed to have a unique highest point, something all-powerful—namely, the power of God. It is no coincidence that Georg Cantor believed that the study of infinity in mathematics had a theological importance. He sought, in his mathematical concept of the infinite, a way to reconcile mathematics and religion (Dauben, 1983).

Processes As Things

Processes are commonly conceptualized as if they were static things—often containers, or paths of motion, or physical objects. Thus we speak of being *in the middle of* a process or at the *tail end* of it. We see a process as having a *length—short* or *long*—able to be *extended* or *attenuated, cut short*. We speak of the *parts* of a process, as if it were an object with parts and with a size. This extends to infinite processes as well: Some infinities are *bigger* than other infinities.

As we saw in Chapter 2, one of the most important cognitive mechanisms for linking processes and things is what Talmy (1996, 2000) has called "fictive motion," cases in which an elongated path, object, or shape can be conceptualized metaphorically as a process tracing the length of that path, object, or shape. A classic example is *The road runs through the forest*, where *runs* is used metaphorically as a mental trace of the path of the road.

Processes, as we ordinarily think of them, extend over time. But in mathematics, processes can be conceptualized as atemporal. For example, consider Fibonnacci sequences, in which the $n + 2^{nd}$ term is the sum of the n^{th} term and the $n + 1^{st}$ term. The sequence can be conceptualized either as an ongoing infinite process of producing ever more terms or as a thing, an infinite sequence that is atemporal. This dual conceptualization, as we have seen, is not special to mathematics but part of everyday cognition.

Throughout this chapter, we will speak of infinite processes in mathematics. Sometimes we conceptualize them as extending over time, and sometimes we conceptualize them as static. For our purpose here, the difference will not matter, since we all have conceptual mechanisms (Talmy's fictive-motion schemas) for going between static and dynamic conceptualizations of processes. For convenience, we will be using the dynamic characterization throughout.

What Is Infinity?

Our job in this chapter is to answer a general question, *What is infinity?* Or, put another way, *How do we, mere human beings, conceptualize infinity?* This is not an easy question to answer, because of all the constraints on it. First, the answer must be biologically and cognitively plausible. That is, it must make use of normal cognitive and neural mechanisms. Second, the answer must cover all the cases in mathematics, which on the surface are very different from one another: mathematical induction, points meeting at infinity, the infinite set of natural numbers, transfinite numbers, limits (functions get infinitely close to them), things that are infinitely small (infinitesimal numbers and points), and so on. Third, the answer must be sufficiently precise so that it can be demonstrated that these and other concepts of the infinite in mathematics can indeed be characterized as special cases of a general cognitive mechanism.

Our answer is that that general cognitive mechanism is the Basic Metaphor of Infinity, the BMI. It has both neural and cognitive plausibility. We will devote the remainder of this chapter to showing how it applies in a wide variety of cases. Chapters 9 through 14 extend this analysis to still more cases.

The "Number" ∞

One of the first things that linguists, psychologists, and cognitive scientists learn is that when there are explicit culturally sanctioned warnings not to do something, you can be sure that people are doing it. Otherwise there would be no point to the warnings. A marvelous example of such a warning comes from G. H. Hardy's magnificent classic text, *A Course of Pure Mathematics* (1955; pp. 116–117):

> Suppose that n assumes successively the values 1, 2, 3, ... The word "successively" naturally suggests succession in time, and we may suppose n, if we like, to assume these values at successive moments of time. . . . However large a number we may think of, a time will come when n has become larger than this number. . . . This however is a mere matter of convenience, the variation of n having usually nothing to do with time.
>
> The reader cannot impress upon himself too strongly that when we say that n "tends to ∞" we mean simply that n is supposed to assume a series of values which increases beyond all limit. *There is no number "infinity"*: Such an equation as
>
> $$n = \infty$$
>
> is as it stands *meaningless*: A number n cannot be equal to ∞, because "equal to ∞" means nothing. . . . [T]he symbol ∞ means nothing at all except in the phrase "tends to ∞," the meaning of which we have explained above.

Hardy is going through all this trouble to keep the reader from thinking of infinity as a number just because people do tend to think of infinity as a number, which is what the language "tends to infinity" and "approaches infinity" chosen by mathematicians indicates. Hardy suggests that it is a mistake to think of infinity as a number—a mistake that many people make. If people are, mistakenly or not, conceptualizing infinity as a number, then it is our job as cognitive scientists to characterize the cognitive mechanism by which they are making that "mistake." And if we are correct in suggesting that a single cognitive mechanism—namely, the BMI—is used for all conceptions of infinity, then we have to show how the BMI can be used to conceptualize infinity as a number, whether it is a "mistake" to do so or not.

Cognitive science is, after all, *de*scriptive, not *pre*scriptive. And it must explain, as well, why people think as they do. The "mistake" of thinking of infinity as a number is not random. "∞" is usually used with a precise meaning—as a number in an enumeration, not as a number in a calculation. In "1, 2, 3, . . . , ∞" ∞ is taken as an endpoint in an enumeration, larger than any finite number and beyond all of them. But people do not use ∞ as a number in calculations: We see no cases of "17 times ∞, minus 473," which is of course a meaningless expression, as Hardy correctly points out. The moral here is that there are, cognitively, different uses for numbers—enumeration, comparison, and calculation. As a number, ∞ is used in enumeration and comparison but not in calculation. Even mathematicians use infinity as a number in enumeration, as in the sum of a sequence a_n from $n = 1$ to $n = \infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

When Hardy warns us not to assume that ∞ is a number, it is because mathematicians have devised notions and ways of thinking, talking, and writing, in which ∞ is a number with respect to enumeration, though not calculation.

Indeed, the idea of ∞ as a number can also be seen as a special case of the BMI. Note that the BMI does not have any numbers in it. Suppose we apply the BMI to the integers used to indicate order of enumeration. The inherent structure of the target domain, independent of the metaphor, has a potential infinity, an unending sequence of ordered integers. The effect of the BMI is to turn this into an actual infinity with a largest "number" ∞.

THE BMI FOR ENUMERATION

Target Domain ITERATIVE PROCESSES THAT GO ON AND ON		*Special Case* THE UNENDING SEQUENCE OF INTEGERS USED FOR ENUMERATION
The beginning state	⇒	No integers
State resulting from the initial stage of the process	⇒	The integer 1

The process: From a prior intermediate state, produce the next state.	$\Rightarrow$	Given integer $n-1$, form the next largest integer n.
The intermediate result after that iteration of the process.	$\Rightarrow$	$n > n-1$
"The final resultant state" (actual infinity)	$\Rightarrow$	**The "integer" ∞**
Entailment *E:* The final resultant state is unique and follows every nonfinal state.	$\Rightarrow$	**Entailment *E:* The "integer" ∞ is unique and larger than every other integer.**

The BMI itself has no numbers. However, the unending sequence of integers used for enumeration (but not calculation) can be a special case of the target domain of the BMI. As such, the BMI produces ∞ as the largest integer used for enumeration. This is the way most people understand ∞ as a number. It cannot be used for calculation. It functions exclusively as an *extremity*. Its operations are largely undefined. Thus, $\infty/0$ is undefined, as is $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$, and ∞/∞. And thus ∞ is not a full-fledged number, which was Hardy's point. For Hardy, an entity either was a number or it wasn't, since he believed that numbers were objectively existing entities. The idea of a "number" that had one of the functions of a number (enumeration) but not other functions (e.g., calculation) was an impossibility for him. But it is not an impossibility from a cognitive perspective, and indeed people do use it. ∞ as *the extreme natural number* is commonly used with the implicit or explicit sequence "1, 2, 3, . . . , ∞" in the characterization of infinite processes. Each such use involves a hidden use of the BMI to conceptualize ∞ as the extreme natural number.

Mathematicians use "1, . . . , n, . . . , ∞" to indicate the terms of an infinite sequence. Although the BMI in itself is number-free, it will be notationally convenient from here on to index the elements of the target domain of the BMI with the integers "ending" with metaphorical "∞." For mathematical purists we should note that when an expression like $n-1$ is used, it is taken only as a notation indexing the stage previous to stage n, and not as the result of the operation of subtraction of 1 from n.

Target Domain
ITERATIVE PROCESSES THAT GO ON AND ON

The beginning state (0)
State (1) resulting from the initial stage of the process

The process: From a prior intermediate state $(n-1)$, produce the next state (n).
The intermediate result after that iteration of the process (the relation between n and $n-1$)
"The final resultant state" (actual infinity "∞")
Entailment *E:* The final resultant state ("∞") is unique and follows every nonfinal state.

The utility of this notation will become apparent in the next section.

Projective Geometry: Where Parallel Lines Meet at Infinity

In projective geometry, there is an axiom that *all parallel lines meet at infinity.* From a cognitive perspective, this axiom presents the following problems. (1) How can we conceptualize what it means for there to be a point "at infinity?" (2) How can we conceptualize parallel lines as "meeting" at such a point? (3) How can such a conceptualization use the same general mechanism for comprehending infinity that is used for other concepts involving infinity?

We will answer these questions by taking the BMI and filling it in in an appropriate way, with a fully comprehensible process that will produce a final result, notated by "∞," in which parallel lines meet at a point *at* infinity. Our answer must fit an important constraint. The point at infinity must function like any other point; for example, it must be able to function as the intersection of lines and as the vertex of a triangle. Theorems about intersections of lines and vertices of triangles must hold of "points at infinity."

To produce such a special case of the BMI, we have to specify certain parameters:

- A *subject-matter frame,* indicating that the subject matter is geometry—specifically, that it is about lines that intersect at a point.
- The initial step of the process.
- The *iterated process,* or a *step-by-step condition* that links each state resulting from the process to the next state.
- The *resultant state* after each iteration.
- An *entailment* of the uniqueness of the final resultant state.

In the case of projective geometry, we take as the subject-matter frame an isosceles triangle, for reasons that will shortly become clear (see Figure 8.2).

THE ISOSCELES TRIANGLE FRAME
An isosceles triangle, ABC_n with Sides: AB, AC_n, BC_n Angles: α_n, β_n D_n: The distance from A to C_n Where: $AC_n = BC_n$ $\alpha_n = \beta_n$ Inference: If AC_n lies on L_{1n} and BC_n lies on L_{2n}, then L_{1n} intersects L_{2n}.

The iterative process in this case is to move point C_n further and further away from points A and B. As the distance D_n between A and C_n gets larger, the angles α_n and β_n approach 90 degrees more and more closely. As a result, the intersecting lines L_{1n} and L_{2n} get closer and closer to being parallel. This is an unending, infinite process. At each stage n, the lines meet at point C_n. (For details, see Kline, 1962, ch. 11; Maor, 1987.)

The idea of "moving point C_n further and further" is captured by a sequence of moves, with each move extending over an arbitrary distance. By the condition "arbitrary distance" we mean to quantify over *all* the distances for which the condition holds.

Here are the details for filling in the parameters in the BMI in this special case.

PARALLEL LINES MEET AT INFINITY

Target Domain ITERATIVE PROCESSES THAT GO ON AND ON		*Special Case* PROJECTIVE GEOMETRY
The beginning state (0)	$\Rightarrow$	The isosceles-triangle frame, with triangle ABC_0
State (1) resulting from the initial stage of the process	$\Rightarrow$	Triangle ABC_1, where the length of AC_1 is D_1
The process: From a prior intermediate state (n–1), produce the next state (n).	$\Rightarrow$	Form AC_n from AC_{n-1} by making D_n arbitrarily larger than D_{n-1}.
The intermediate result after that iteration of the process (the relation between n and n–1)	$\Rightarrow$	$D_n > D_{n-1}$ and $(90° - \alpha_n) < (90° - \alpha_{n-1})$.

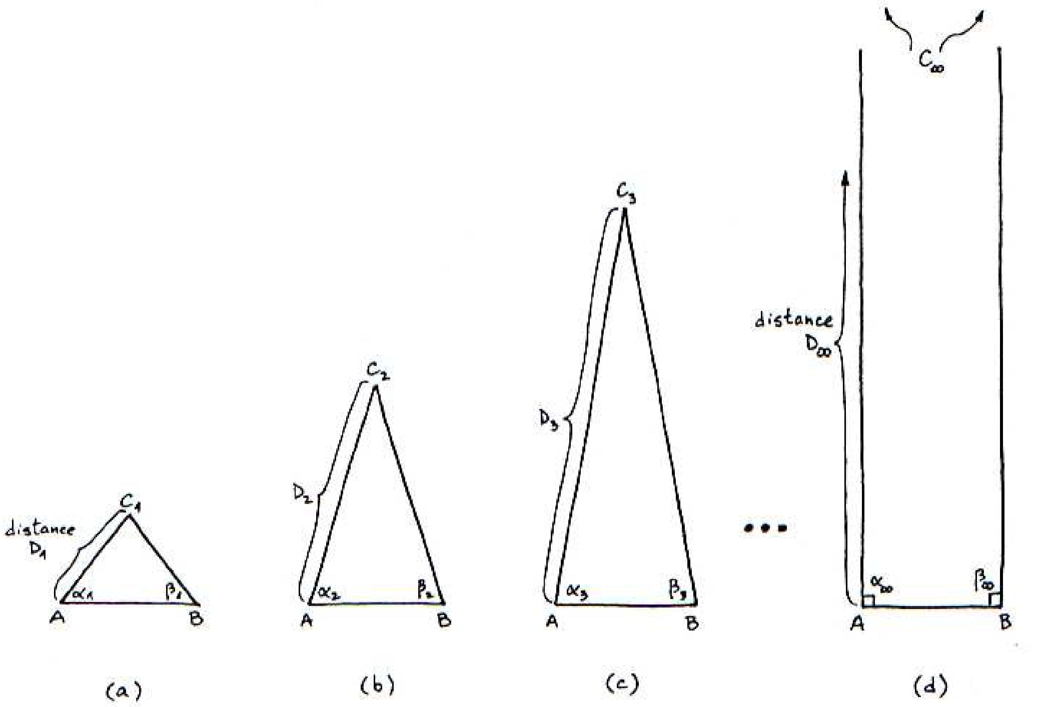

FIGURE 8.2 The application of the Basic Metaphor of Infinity to projective geometry. Drawing (a) shows the isosceles triangle ABC_1, the first member of the BMI sequence. Drawings (b) and (c) show isosceles triangles ABC_2 and ABC_3, in which the equal sides get progressively longer and the equal angles get closer and closer to 90°. Drawing (d) shows the final resultant state of the BMI: ABC_∞, where the angles *are* 90°. The equal sides are infinitely long, and they metaphorically "meet" at infinity—namely the unique point C_∞.

"The final resultant state" (actual infinity "∞")	⇒	**$\alpha_\infty = 90°$. D_∞ is infinitely long. Sides AC_∞ and BC_∞ are infinitely long, parallel, and meet at C_∞—a point "at infinity."**
Entailment *E*: The final resultant state ("∞") is unique and follows every nonfinal state.	⇒	**Entailment *E*: There is a unique AC_∞ (distance D_∞) that is longer than AC_n (distance D_n) for all finite *n*.**

As a result of the BMI, lines L_1 and L_2 are parallel, meet at infinity, and are separated by the length of line segment AB. Since the length AB was left unspecified, as was the orientation of the triangle, this result will "fit" all lines parallel to L_1 and L_2 in the plane. Thus, this application of the BMI defines the same system of geometry as the basic axiom of projective geometry—namely, that all parallel lines in the plane meet at infinity. Thus, for each orientation there is an infinite family of parallel lines, all meeting "at infinity." Since there is such a family of parallel lines for each orientation in the plane, there is a "point at infinity" in every direction.

Thus, we have seen that there is a special case of BMI that defines the notion "point at infinity" in projective geometry, which is a special case of actual infinity as defined by the BMI. We should remind the reader here that this is a cognitive analysis of the concept "point at infinity" in projective geometry. It is not a mathematical analysis, is not meant to be one, and should not be confused with one. Our claim is a cognitive claim: The concept "point at infinity" in projective geometry is, from a cognitive perspective, a special case of the general notion of actual infinity.

We have at present no experimental evidence to back up this claim. In order to show that the claim is a plausible one, we will have to show that a wide variety of concepts of infinity in mathematics arise as special cases of the BMI. Even then, this will not prove empirically that they are; it will, however, make the claim highly plausible.

The significance of this claim is not only that there is a single general cognitive mechanism underlying all human conceptualizations of infinity in mathematics, but also that this single mechanism makes use of common elements of human cognition—aspect and conceptual metaphor.

The Point at Infinity in Inversive Geometry

Inversive geometry also has a concept of a "point at infinity," but it is a concept very different from the one found in projective geometry. Inversive geometry is defined by a certain transformation on the Cartesian plane. Consider the Cartesian plane described in polar coordinates, in which every point is represented by (r, θ) where θ is an angle and r is the distance from the origin. Consider the transformation that maps r onto $1/r$. This transformation maps the unit circle onto itself, the interior of the unit circle onto its exterior, and its exterior onto its interior. Let us consider what happens to zero under this transformation.

Consider a ray from zero extending outward indefinitely at some angle θ (see Figure 8.3). As r inside the circle gets closer to 0, $1/r$ gets further away. Thus, 1/1,000 is mapped onto 1,000, 1/1,000,000 is mapped onto 1,000,000, and so on. As r approaches 0, $1/r$ approaches ∞. What is the point at 0 mapped onto? It is tempting to map 0, line by line, into a point at ∞ on that line. But there would be many such points, one for each line. What inversive geometry does is define a single "point at infinity" for all lines, and it maps 0, which is unique, onto the unique "point at infinity."

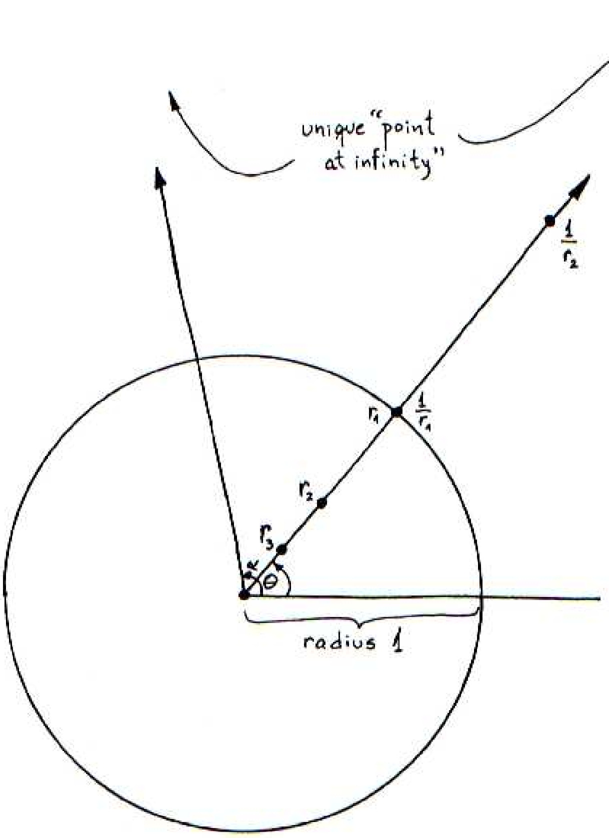

FIGURE 8.3 Inversive geometry: a plane with a circle of radius 1 and rays extending from the center of the circle. Each ray is a nonnegative real-number line, with zero at the center of the circle and 1 on the circle. There is a function $f(x) = 1/x$, mapping points r on each ray inside the circle to corresponding points $1/r$ on that ray outside the circle, and conversely, with zero mapped to ∞. Since there is only one zero, there is only one "point at infinity," which is in all the rays.

If we are correct that the BMI characterizes actual infinity in all of its many forms, then the point at infinity in inversive geometry should also be a special case of the BMI. But, as in most cases, the precise formulation takes some care. Whereas in projective geometry there is an infinity of points at infinity, in inversive geometry there is only one. This must emerge as an entailment of the BMI, given the appropriate parameters: the frame and the iterative process. Here is the frame, which fills in the "subject matter" parameter of the BMI. The frame is straightforward.

THE INVERSIVE GEOMETRY FRAME

The Cartesian plane, with polar coordinates.
The one-to-one function $f(x) = 1/x$, for x on a ray that extends from the origin outward.

This frame picks a special case of the target domain of the BMI. To fill out this special case of the BMI, we need to characterize the iterative process.

The idea behind the process is simple. Pick a ray and pick a point x_1 on that ray smaller than 1. That point has an inverse, which is greater than 1. Keep picking points x_n on the same ray, closer and closer to zero. The inverse points $1/x_n$ get further and further from the origin. This is an infinite, unending process.

We take this process as the iterative process in the BMI. Here are the details:

THE POINT AT INFINITY IN INVERSIVE GEOMETRY

Target Domain ITERATIVE PROCESSES THAT GO ON AND ON		*Special Case* INVERSIVE GEOMETRY
The beginning state (0)	⇒	The origin, with rays projecting outward in every direction, and with an arbitrary ray r at angle θ designated
State (1) resulting from the initial stage of the process	⇒	A point x_1 on r at an arbitrary distance $d_1 < 1$ from the origin. There is an inverse point x_1', at a distance $1/d_1 > 1$ from the origin.
The process: From a prior intermediate state (n–1), produce the next state (n).	⇒	Given point x_{n-1} at distance d_{n-1} from the origin, find point x_n at distance d_n from the origin, where d_n is arbitrarily smaller than d_{n-1}.
The intermediate result after that iteration of the process (the relation between n and n–1)	⇒	There is an inverse point, x_n', at a distance $1/d_n$ from the origin and further from the origin than x_{n-1}' is.
"The final resultant state" (actual infinity "∞")	⇒	**x_∞ is at the origin; that is, its distance from the origin is zero. x_∞' is a unique point infinitely far from the origin.**
Entailment *E*: The final resultant state ("∞") is unique and follows every nonfinal state.	⇒	**Entailment *E*: x_∞ is unique and is closer to the origin than any other point on ray *r*. There is a unique x_∞' that is further from the origin than any other point on ray *r*.**

The BMI then applies to this infinite, unending process and conceptualizes it metaphorically as having a unique final resultant state "∞." At this metaphorical final state, x_∞ is at the origin, and the distance from the origin to x_∞' is infinitely long. In inversive geometry, arithmetic is extended to include ∞ as a number with respect to division: $D_\infty = \infty$, $1/D_\infty = 1/\infty = 0$, and $1/0 = \infty$. This extension of arithmetic says nothing about the addition or subtraction of ∞. It is peculiar to inversive geometry because of the way this special case of the BMI is defined: All points must have inverses, including the point at the origin. Where dividing by zero is normally not possible, this metaphor extends ordinary division to give a metaphorical value to $1/0$ and $1/\infty$. In inversive geometry, ∞ does exist as a number and has limited specified possibilities for calculation.

Moreover, since there is only one zero point shared by all rays, and since $f(x) = 1/x$ is a one-to-one mapping that, via this metaphor, maps 0 onto ∞ and ∞ onto 0, there must therefore be only one ∞ point shared by all rays.

What is interesting about this case is that the same general metaphor, the BMI, produces a concept of the point at infinity very different from that in the case of projective geometry. In projective geometry, there is an infinity of points at infinity (for an image, think of the horizon line), while in inversive geometry there is only one. Moreover, projective geometry has no implicit associated arithmetic, while inversive geometry has an implicit arithmetic (differing from normal arithmetic in its treatment of zero and infinity).

Finally, though we have characterized inversive geometry in terms of a cognitive mechanism, the BMI, mathematicians of course do not. They simply define inversive geometry in normal mathematical terms. Our goal is to show how the same concept of infinity is involved in inversive geometry and other forms of mathematics, while respecting the differences in the concept of infinity across branches of mathematics.

The Infinite Set of Natural Numbers

Within formal arithmetic, the natural numbers are usually characterized by the successor operation: Start with 1. Add 1 to yield a result. Add 1 to the result to yield a new result. And so on. This is an unending, infinite process. It yields the natural numbers, one at a time. Not the *infinite set* containing *all* the natural numbers. Just the natural numbers themselves, each of which is finite. Since it is incapable of being used in calculation, ∞ is not a full-fledged member of the infinite set of natural numbers.

Here is the problem of characterizing the set of natural numbers. The set must be infinite since it contains *all* of the infinitely many numbers, but it cannot contain ∞ as a number.

To get the *set* of natural numbers, you have to collect up each number as it is formed. The set keeps growing without end. To get the *entire* set of natural numbers—all of them, even though the set never stops growing—you need something more. In axiomatic set theory, you add an axiom that simply stipulates that the set exists. From a cognitive perspective, that set can be constructed conceptually via a version of the Basic Metaphor of Infinity. The BMI imposes a metaphorical completion to the unending process of natural-number collection. The result is the *entire collection*, the set of *all* natural numbers!

THE SET OF ALL NATURAL NUMBERS

Target Domain ITERATIVE PROCESSES THAT GO ON AND ON		*Special Case* THE SET OF NATURAL NUMBERS
The beginning state (0)	$\Rightarrow$	The natural number frame, with a set of existing numbers and a successor operation that adds 1 to the last number and forms a new set
State (1) resulting from the initial stage of the process	$\Rightarrow$	The empty set, the set of natural numbers smaller than 1.
The process: From a prior intermediate state (n–1), produce the next state (n).	$\Rightarrow$	Given S_{n-1}, the set of natural numbers smaller than n–1, form $S_{n-1} \cup \{n-1\} = S_n$.
The intermediate result after that iteration of the process (the relation between n and n–1)	$\Rightarrow$	At state n, we have S_n, the set of natural numbers smaller than n.
"The final resultant state" (actual infinity "∞")	$\Rightarrow$	**S_∞, the set of *all* natural numbers smaller than ∞—that is, the set of *all* natural numbers (which does not include ∞ as a number).**
Entailment *E*: The final resultant state ("∞") is unique and follows every nonfinal state.	$\Rightarrow$	**Entailment *E*: The set of all natural numbers is unique and includes every natural number (no more, no less).**

This special case of the BMI does the same work from a cognitive perspective as the axiom of Infinity in set theory; that is, it ensures the existence of an infinite set whose members are all the natural numbers. This is an important point. The BMI, as we shall see, is often the conceptual equivalent of some axiom that guarantees the existence of some kind of infinite entity (e.g., a least upper bound). And just as axioms do, the special cases of the BMI determines the right set of inferences required.

This example teaches us something to be borne in mind throughout the remainder of this book. The meaning of "all" or "entire" is far from obvious when they are predicated of infinite sets. In general, the meaning of "all" involves completeness. One of the first uses of "all" learned in English is the child's use of "all gone" to indicate the completion of a process of consumption, removal, or destruction. *All twelve of the paintings were stolen* indicates completeness of the theft—the *entire* collection was stolen. But in the case of infinity, there is no such thing as the literal completeness of an infinite process. The BMI is necessary in some form—implicit or explicit—to characterize any "all" that ranges over an infinite process. Wherever there is infinite totality, the BMI is in use.

This BMI analysis shows us exactly how the same notion of infinity used to comprehend points at infinity can also be used to conceptualize the infinite set of natural numbers. In this case, we can see a somewhat different version of the concept of infinity. Points at infinity give us a concept of an *infinite extremity*. But the set of natural numbers is not an infinite extremity; rather, it is an *infinite totality*. Totalities always involve sets. Extremities only involve linear orderings.

Mathematical Induction

The process of mathematical induction is crucial in mathematical proofs. It works as follows: Prove that

1. The statement S is true for 1;
2. If the statement S is true for $n-1$, then it is true for n.

Literally, all this does is provide an unending, infinitely unfolding sequence of natural numbers for which the statement S is true. It does not prove that the statement is true for *all* natural numbers. Something is needed to go from the unending sequence of individual natural numbers, for which S is a single general truth, to *all* natural numbers.

In axiomatic arithmetic, there is a special axiom of Mathematical Induction needed to bridge the gap between the unending sequence of *specific* truths for each number, one at a time, and the single generalization to the infinite totality of *all* natural numbers. The axiom simply postulates that if (1) and (2) are proved, then the statement is true for every member of the set of *all* natural numbers.

The axiom of Mathematical Induction is the equivalent of the Basic Metaphor of Infinity applied to the subject matter of inductive proof. To see why, we can conceptualize the content of the axiom in terms of the BMI. Note that this instance of the BMI involves an infinite totality—the infinite set of all finite natural numbers—not an infinite extremity such as the "number" ∞. In this version of the BMI, a set is built up of all the finite natural numbers that the given statement is true of. At the final resultant state, there is an infinite set of finite numbers.

THE BMI FOR MATHEMATICAL INDUCTION

Target Domain ITERATIVE PROCESSES THAT GO ON AND ON		*Special Case* MATHEMATICAL INDUCTION
The beginning state (0)	$\Rightarrow$	A statement $S(x)$, where x varies over the set of natural numbers
State (1) resulting from the initial stage of the process	$\Rightarrow$	$S(1)$ is true for the members of $\{1\}$—the set containing the number 1.
The process: From a prior intermediate state $(n-1)$, produce the next state (n).	$\Rightarrow$	Given the truth of $S(n-1)$ for the members of the set $\{1, \ldots, n-1\}$, establish the truth of $S(n)$ for the members of $\{1, \ldots, n\}$.
The intermediate result after that iteration of the process (the relation between n and $n-1$).	$\Rightarrow$	$S(n)$ is true for the members of the set $\{1, \ldots, n\}$.
"The final resultant state" (actual infinity "∞")	$\Rightarrow$	**$S(\infty)$ is true for the members of the set of *all* natural numbers.**
Entailment *E:* The final resultant state ("∞") is unique and follows every nonfinal state.	$\Rightarrow$	**Entailment *E*: The set of natural numbers for which $S(\infty)$ is true is unique and includes *all* finite natural numbers.**

Thus, mathematical induction can also be seen as a special case of the BMI.

Generative Closure

The idea of generative closure for operations that generate infinite sets also makes implicit use of the BMI. For example, suppose we start with the set containing the integer 1 and the operation of addition. By adding 1 to itself at the first stage, we get 2, which is not in the original set. That means that the original set was not "closed" under the operation of addition. To move toward closure, we can then extend that set to include 2. At the next stage, we perform the binary operation of addition on 1 and 2, and on 2 and 2, to get new elements 3 and 4. We then extend the previous set by including 3 and 4. And so on. This defines an infinite sequence of set extensions. If we apply the BMI, we get "closure" under addition—the set of *all* resulting extensions.

This will work starting with any finite set of elements and any finite number of binary operations on those elements. At least in this simple case, the concept of closure can be seen as a special case of the BMI. We can also see from this case how to state the general case of closure in terms of the BMI. We let C_0 be any set of elements and O be any finite set of operations, each applying to some element or pair of elements in C_0. Here is the iterative process:

- At stage 1, apply every operation once in every way it can apply to the elements of C_0. Collect the results in a set S_0 and form the union of S_0 with C_0 to yield C_1.
- At stage 2, apply every operation once in every way it can apply to the elements of C_1. Collect the results in a set S_1 and form the union of S_1 with C_1 to yield C_2.
- And so on.

If this process fails to yield new elements at any stage—that is, if $C_{n-1} = C_n$—then the closure is finite and the process stops. Otherwise it goes on. Note that for each n, C_n contains as a subset all of the C_i, for $i < n$.

Letting this be the iterative process, we can characterize infinite closure using the Basic Metaphor of Infinity in the following way. At ∞, C_∞ contains every C_n, for $n < \infty$. That is, it contains every finite combination of operations.

THE BMI FOR GENERATIVE CLOSURE

Target Domain ITERATIVE PROCESSES THAT GO ON AND ON		*Special Case* GENERATIVE CLOSURE
The beginning state (0)	⇒	A finite set of elements C_0 and a finite collection O of binary operations on those elements
State (1) resulting from the initial stage of the process	⇒	C_1 = The union of C_0 and the set S_0 of elements resulting from a single application of each operator in O to each pair of elements of C_0
The process: From a prior intermediate state (n–1), produce the next state (n).	⇒	Given C_{n-1}, form S_{n-1}, the set of elements resulting from a single application of each operator in O to each pair of elements of C_{n-1}. $C_n = C_{n-1} \cup S_{n-1}$.

The intermediate result after that iteration of the process (the relation between n and $n-1$).	$\Rightarrow$	At state n, we have C_n = the union of C_0 and the union of all S_k, for $k < n$. If $C_{n-1} = C_n$, then the closure is finite and the process ends. Otherwise it continues.
"The final resultant state" (actual infinity "∞")	$\Rightarrow$	**C_∞ = the infinite closure of C_0 and its extensions under the operations in *O*.**
Entailment *E:* The final resultant state ("∞") is unique and follows every nonfinal state.	$\Rightarrow$	**Entailment *E:* C_∞ is unique and includes all possible finite iterations of applications of the operations in *O* to the elements of C_0 and elements resulting from those operations.**

Notice that although the closure is infinite, there are no infinite sequences of operations. Each sequence of operations is finite, but there is no bound to their length.

"All"

It is commonplace in formal logic to use the symbol for the universal quantifier "$\forall$" in statements or axioms concerning such entities as the set of *all* natural numbers. This symbol is just a symbol and requires an interpretation to be meaningful. In formal logic, interpretations of such quantifiers are given in two ways: (1) via a metalanguage and (2) via a mapping onto a mathematical structure—for instance, the generative closure produced from the set {1} under the operation "+", written "Closure [{1}, +]".

1) "($\forall x$: $x \in N$) Integer (x)" is true if and only if x is an integer for *all* members of the set of natural numbers, N.
2) "($\forall x$: $x \in N$) Integer (x)" is true if and only if x is a member of Closure [{1}, +].

In statement (1) above, the word "all" occurs in the metalanguage expression on the right of "if and only if." In statement (2), the closure of {1} and its extensions under the operation of addition occurs on the right of "if and only if."

Now, in statement (1), the symbol $\forall$ is defined in terms of a prior understanding of the word "all." From a cognitive point of view, this just begs the question of what ∀ means, since it requires a cognitive account of what "all" means when applied to infinite sets. Cognitively, "all" is understood in terms of a linear scale of inclusion, with "none" at one endpoint, "all" at the other, and values like "some," "most," and "almost all" in between. To give a cognitive account of the meaning of "all" applied to an infinite set, we need both the scale of inclusion and a cognitive account of infinite sets, which is given by the BMI.

Statement (2) is an attempt to characterize the meaning of ∀ for a given infinite set without using the word "all" and instead using the concept of generative closure. From a cognitive perspective, this requires a cognitive account of the meaning of generative closure for infinite sets, which we have just given in terms of the BMI.

The moral is that, in either case, one version of the BMI or another is needed to give a cognitive characterization of the meaning of ∀ when it is applied to infinite sets. The use of the symbol ∀ in symbolic logic does not get us out of the problem of giving a cognitive characterization of infinite sets. As far as we can tell, the BMI does suffice in all cases, as we shall see in the chapters to come.

Up to this point, we have shown six diverse mathematical uses of actual infinity which can each be conceptualized as a special case of the Basic Metaphor of Infinity. Each case involves either *infinite extremity* (points at infinity and the number ∞) or *infinite totality* (the set of natural numbers and mathematical induction).

The Basic Conclusions

By comparing the special cases, one can see precisely how a wide variety of superficially different mathematical concepts have a similar structure from a cognitive perspective. Since much of mathematics is concerned with comparisons of kinds of mathematical structures, this sort of analysis falls within the tradition of structural comparison in mathematics. These analyses can be seen as being very much in the tradition of algebra or category theory, in that they seek to reveal deep similarities in cases that superficially look dissimilar.

The difference, of course, is that we are discussing conceptual structure from a *cognitive* perspective, taking into account cognitive constraints, rather than from a purely mathematical point of view, which has no cognitive constraints whatsoever. That is, mathematicians are under no obligation to try to understand how mathematical understanding is embodied and how it makes use of normal cognitive mechanisms, like image schemas, aspectual structure, conceptual metaphors, and so on.

We are hypothesizing that the analyses given above are correct from a cognitive perspective. This hypothesis is testable, at least in principle. (See Gibbs, 1994, for an overview of literature for testing claims about metaphorical thought.) The hypothesis involves certain subhypotheses.

- The BMI is part of our *unconscious* conceptual system. You are generally not aware of conceptual mechanisms while you are using them. This should also hold true of the BMI. It is correspondingly *not* claimed that the use of the BMI is conscious.
- The concept of actual infinity, as characterized by the BMI, makes use of a metaphor based on the concept of aspect—imperfective aspect (in ongoing events) and perfective aspect (in completive events).
- As with any cognitive model, it is hypothesized that the entailments of the model are true of human cognition.

What we have provided in this chapter is a mathematical idea analysis of various concepts of infinity. Mathematics itself does not characterize what is common among them. The common mathematical notion for infinity—". . . ," as in the sequence "1 + 1/2 +1/4 + . . . "—does not even distinguish between potential and actual infinity. If it is potential infinity, the sum only gives an endless sequence of partial sums always less than 2; if it is actual infinity, the sum is exactly 2. Our idea analysis in terms of the BMI makes explicit what is implicit.

In addition, our mathematical idea analysis provides a clear and explicit answer to the question of how finite embodied beings can have a concept of infinity—namely, via conceptual metaphor, specifically the BMI! And it shows the relationships among the various ideas of infinity found in mathematics.