

Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Soluções de Ondas Viajantes em um Sistema Difusivo Predador-Presa Não Local

Por

Nome: Mehran Sabeti

sob orientação do

Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana

Curitiba / PR

2007

Soluções de Ondas Viajantes em um Sistema Difusivo Predador-Presa Não Local

Por

Nome: Mehran Sabeti

sob orientação do

Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, Programa de Pós – Graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Curitiba / PR

2007

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é analisar modelos matemáticos que descrevem as interações entre espécies no caso predador presa num meio não limitado. Isto se traduz em termos matemáticos na existência de uma solução de equilíbrio não trivial, que será a densidade limite desses indivíduos, e a forma de aproximação da densidade desses indivíduos para esta solução estacionária através de ondas viajantes.

Este estudo é realizado ao utilizarmos o modelo local e não local da equação Fisher, onde observamos que a introdução do efeito não local não altera os estados de equilíbrio deste sistema. Além disso, os tipos de estabilidades também permanecem os mesmos, sendo que a única diferença no caso não local é que no estudo da existência de ondas viajantes a aproximação destas soluções para o estado de equilíbrio em todos os casos é da forma oscilatória. A introdução desse efeito, portanto, resulta numa maior dificuldade das espécies envolvidas em alcançar a coexistência, o que é de se esperar, haja vista que uma das interpretações do efeito não local é a restrição dos recursos consumidos pela população correspondente.

A B S T R A C T

The aim of this work is to analyze mathematical models which describe the interactions among species in the prey-predator case in a unbounded environment. This can be stated, in mathematical terms, in the existence of a non-trivial equilibrium solution, which will be the steady state density of these individuals, as well as the way the density solution of these individuals approaches the stable steady state, in the traveling wave form.

This study is performed when we make use of local and a non-local models of the Fisher equation, where we note that the non-local effect feature does not alter the steady states of the former local system. Besides, the sorts of stability remain the same, although the sole difference noted in the non-local case is that the pattern of traveling waves is only noted in the oscillatory form. The introduction of this effect, therefore, turns out to impose a greater difficulty for the involved species to achieve coexistence, a fact which was expected, since one of the interpretations of the non-local interaction is the restriction of the resources consumed by the corresponding population.

*Eu dedico este trabalho aos meus pais
Nasrolla Sabeti e Noraste Kokabi.*

A G R A D E C I M E N T O S

A realização deste trabalho é, para mim, motivo de grande satisfação e alegria - sensação esta que gostaria de compartilhar com todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a sua consecução. Agradeço á Prof. Luiz Antônio Ribeiro de Santana, pelo empenho e dedicação que caracterizaram a sua orientação, contribuindo de forma efetiva para o enriquecimento da minha vida acadêmica. Agradeço aos meus pais, pelo apoio, força e carinho e incentivo recebido ao longo dos anos.

Agradeço ao UFPR, por ser uma excelente universidade, a CAPES e à Coordenação do curso de pos graduação de Matemática Aplicada e a todos aqueles que não citei e que me ajudaram a realizar este trabalho, de uma forma ou de outra.

SUMÁRIO

Resumo	ii
Abstract	iii
Introdução	ix
Capítulo 1	
Dinâmica de Populações	3
1.1 Introdução	3
1.2 Crescimento Exponencial e Crescimento Logístico	4
1.3 Modelo do Outbreak do Inseto Spruce Budworm	7
1.4 Equação de difusão no modelo de Spruce Budworm	12
1.5 Influência da Convecção na Possibilidade de ondas Viajantes ...	16
Capítulo 2	
Modelo de Interação das Populações	19
2.1 Introdução	19
2.2 Modelo de Competição	21
2.3 Modelo de Lotka-Volterra de Competição	22
2.4 Análise Gráfica do Sistema de Equações de Competição	25
2.4.1 Os equilíbrios triviais	28
2.4.2 Equilíbrio não-trivial: com coexistência e sem coexistência	29
2.5 Modelo de Predador Presa: Sistema de Lotka-Volterra	30
2.6 Modelo Realístico de Predador e Presa	35
Capítulo 3	
Equações de Reação Difusão	39
3.1 Introdução	39
3.2 Simples Excursão Aleatório e Derivada de Equação de Difusão .	40

3.3 Equação de Reação Difusão	44
Capítulo 4	
Ondas Viajantes	47
4.1 Introdução	47
4.2 Equação da soluções de ondas viajantes no modelo Fisher	48
4.3 Soluções de Ondas Viajantes Para Equação de Fisher Não Local	52
4.4 Persistência Das Ondas	53
4.5 Análise assintótica para grandes valores de c	58
Capítulo 5	
Ondas Viajantes, Modelo de Reação de Difusão (Multi-Espécies) ..	61
5.1 Introdução	61
5.2 Existência de onda viajante em sistema de predador presa	63
5.3 Existência de soluções num sistema com difusão rápida da presa	70
Capítulo 6	
Ondas Viajantes no Sistema do Predador Presa Não Local de Fisher	75
6.1 Introdução	75
6.2 Existência de ondas viajantes no sistema Fisher com interação não-loal	77
6.3 Existência de soluções num sistema não local com difusão rápida da presa	85
Capítulo 7	
Conclusões e Problemas em Aberto	91
Bibliografia	95

INTRODUÇÃO

O objetivo deste texto é o estudo de modelos matemáticos que podem ser úteis para determinação de chances de coexistência de duas espécies no modelo predador presa cujas dinâmicas de reprodução e locomoção são conhecidas.

Uma população é constituída pelo conjunto de indivíduos de uma mesma espécie que ocupam um território comum e que são capazes de interagirem entre si. Com frequência as diversas populações de uma espécie não são isoladas umas das outras. Elas se comunicam entre si e trocam genes por intermédio de indivíduos migradores que se dispersam constituindo, assim, metapopulações.

As comunidades são conjuntos pluriespecíficos que ocupam um território determinado e que correspondem a estruturas intermediárias entre as populações. Em geral, são definidas por sua composição específica. Os roedores de um campo, as formigas de uma savana ou as aves de um bosque constituem comunidades. Estas são mais fáceis de estudar do que as comunidades, cujo inventário completo constitui uma tarefa quase impossível.

As interações entre populações podem ser classificadas de várias formas, dependendo a relação entre espécies e chance de sobrevivência na convivência em ambiente. Eis alguns exemplos:

- Interações negativas entre espécies, como competição direta sobre os recursos ou predação onde uma espécie (predador) consome a outra espécies (presa).
- Interação positiva entre espécies como comensalismo onde existência de uma espécie não afeta a outra espécie, ou mutualismo onde as duas espécies têm benefícios uma com a outra.

Os dois itens anteriores são a motivação de obter respostas sobre as possibilidades de sobrevivência de organismos em situações como as descritas acima. E a forma através da qual faremos tal análise será via estudo da existência e estabilidade de soluções de equações a derivadas parciais de evolução que modelam a dinâmica vital de sistemas predador-presa.

A primeira e mais simples formulação matemática da competição e predador-presa foi desenvolvida, independentemente, pelo biofísico Americano Alfred James Lotka (1880-1949) e o matemático Italiano Vito Volterra (1860-1940) no ano de 1920. Estes modelos são uma extensão natural do modelo logístico de crescimento contínuo desenvolvido pelo matemático Belga Pierre F. Verhurst em 1837. São conhecidos por sistema competição e por sistema predador-presa de Lotka-volterra, respectivamente. O modelo predador-presa de Lotka-Volterra foi estudado também por Dunbar em 1984, onde considerou a difusibilidade entre espécies no sistema e com crescimento logístico para predador onde os predadores possuem uma única fonte de alimentos. Mais tarde o modelo de crescimento logístico foi desenvolvido por Fisher em 1937 e depois Gourley em 2000 fez uma generalização deste modelo, considerando competição intra-específica da forma não-local.

Tais equações que serão objeto de nossa análise no presente trabalho, apresentam as seguintes formas gerais,

$$\frac{\partial U}{\partial T} = AU\left(1 - \frac{U}{K}\right) - BUV + D_1\nabla^2 U \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} = CUV - DV + D_2\nabla^2 V,$$

e,

$$\frac{\partial U}{\partial T} = AU \left[\left(1 - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} gU dy \right) \right] - BUV + D_1\nabla^2 U \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} = CUV - DV + D_2\nabla^2 V.$$

Onde no sistema das equações (1) obtemos um caso local do modelo predador-presa, apresentado por Dunbar nos anos 80. As funções V e U representam, respectivamente, as densidades de indivíduos das espécies predador e presa em estudo no instante t e no espaço unidimensional.

Observando a primeira equação de (1), temos que a primeira parcela do segundo membro descreve a forma de reprodução da presa (crescimento logístico). A constante positiva A é conhecida como coeficiente de crescimento intrínseco, e denota o ritmo do crescimento de U para valores pequenos de densidade. A constante K , conhecida como capacidade de suporte do meio,

indica um limite para o crescimento da população de presas, como reflexo das limitações de espaço e alimento do meio a ser colonizado por U . Na segunda parcela da mesma equação temos interações entre predador e presa e na terceira obtemos o termo de difusão da presa com coeficiente de difusão D_1 . Na segunda equação de (1) podemos ver que o predador possui como única fonte de alimento os indivíduos da população de presas. A população de predadores possui movimento também difusivo, com coeficiente de difusão respectivo D_2 .

A equação (2) apresenta o sistema predador presa com difusão no domínio não limitado. A diferença entre os dois modelos acima é que temos a presença de um termo não local na equação da presa. O termo integral da primeira equação de (2) possui uma função g , chamada de núcleo, o qual é uma função par, positiva e tem decaimento rápido. As hipóteses acima vêm da situação ecológica que estamos estudando: a função g mede a força de interação de indivíduos que estão a uma certa distância um do outro. Como desejamos que tal influência seja sempre prejudicial, a função g é naturalmente positiva. Também desejamos que tal influência dependa somente da distância entre os indivíduos, e não de sua posição exata, e que tal influência diminua com o aumento de distância entre os indivíduos. Isso justifica o fato de a função g ser par e possuir decaimento rápido.

Os estudos dos dois modelos revelam os pontos de equilíbrios $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ e $(b, 1 - b, 0)$ onde são os mesmos em dois casos e os dois primeiros são pontos de equilíbrio instável e a última será estável. As dependências das possibilidades de coexistência das espécies V, U (predador e presa) sobre algumas limitações nos variáveis dos sistemas, por exemplo no caso local existe um valor crítico dado por,

$$a^* = \frac{1}{b(1-b)} \left[X_M^3 - X_M^2 \left(c - \frac{b}{c} \right) - X_M b \right] - c,$$

com $b = \frac{D}{ck}$ onde, para qualquer a no intervalo $0 < a < a^*$, e velocidade de onda suficientemente grande ($c > \sqrt{4a(1-b)}$) obtemos um estado de equilíbrio estável $(b, 1 - b, 0)$ e um tipo de aproximação de forma monótona das populações do ponto de equilíbrio instável $(1, 0, 0)$ para $(b, 1 - b, 0)$. E caso

$a > a^*$ temos situações contrárias, isto é, aproximação de densidade das populações dos predadores e das presas no ponto instável $(1, 0, 0)$ para $(b, 1 - b, 0)$ será oscilatória e do ponto instável $(0, 0, 0)$ para $(b, 1 - b, 0)$ será monótona.

No caso não local temos os mesmos pontos de equilíbrios com esta diferença que todas as aproximações de densidade das populações para ponto equilíbrio estável $(b, 1 - b, 0)$ são da forma oscilatória, e não existe coexistência entre as espécies se tivermos um índice baixo das populações no meio, isto é obter a condição de contorno como

$$U(-\infty) = 0, V(-\infty) = 0, U(\infty) = b \text{ e } V(\infty) = 1 - b. \quad (3)$$

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 1 estudaremos brevemente as dinâmicas de populações simples como dinâmica de população com crescimento exponencial e com crescimento logístico e veremos os modelos matemáticos destas dinâmicas, analisando os comportamentos deles em relação do tempo e a taxa de crescimento de populações. No capítulo 2 analisamos ações mutuais entre duas espécies em casos de competição e predador presa, no capítulo 3 obtemos uma definição para reação de difusão e deduzimos uma forma matemática para ele, no capítulo 4 conhecemos as ondas viajantes e o modelo matemático que podem apresentar estas ondas e importância delas na análise de existência de espécie no plano de Fase, no capítulo 5 estudamos alguns modelos matemáticos de predadores e em seguida o modelo da dinâmica populacional do Budworm, no capítulo 6 analisamos a existência das ondas viajantes no modelo de equação predador presa com reação-difusão para multi-espécies e finalmente no capítulo 7 analisamos o modelo reação de difusão para multi espécies com interação não local.

Capítulo 1

DINÂMICA DE POPULAÇÕES

Resumo do capítulo:

Neste capítulo veremos brevemente sobre as dinâmicas de populações simples, como a dinâmica com crescimento exponencial, e com crescimento logístico e em seguida o modelo da dinâmica populacional do Spruce Budworm. Veremos também os modelos matemáticos destas e analisamos os comportamentos das soluções em relação do tempo e a taxa de crescimento de populações.

1.1 Introdução

O matemático belga Pierre F. Verhurst propôs em 1837 um modelo onde supõe que uma população poderá crescer até um limite máximo, a partir do qual tende a se estabilizar. O modelo proposto por Verhurst atende a uma condição em que a taxa de crescimento de uma população varia ao longo do tempo. Esse modelo é uma alternativa ao modelo de crescimento exponencial em que a taxa de crescimento é constante e não há limitação para o tamanho da população. Esta variação de taxa de crescimento depende de vários fatores, por exemplo, as limitações de recursos que resultam em competições entre as espécies que alimentam dos mesmos recursos, ou efeito de predação que controla

a densidade da população.

1.2 Crescimento Exponencial e Crescimento Logístico

Em uma população, seu crescimento resulta da ação de vários fatores antagonísticos: a taxa de natalidade (b), taxa de mortalidade (d), a taxa de imigração (i), e a taxa de emigração (e). Se descartamos provisoriamente os dois últimos fatores, a taxa de crescimento (r) da população é igual a $b - d$. Em um meio não limitado pelo espaço e pelos recursos, pode-se supor que r seja constante e que o efetivo N em população evolua da função do tempo t e segundo a equação:

$$\frac{dN}{dt} = (b - d)N = rN \quad (1.1)$$

o que pode ser expressado por, $r = \frac{N'}{N} = (\ln N)'$, onde após integração obtemos:

$$N(t) = N_0 e^{(b-d)t} = N_0 e^{rt} \quad (1.2)$$

N_0 é o efetivo no tempo $t = 0$ (condição inicial $N_0 = 0$) e r é taxa intrínseca de crescimento (ou seja a grosso modo a velocidade de crescimento na ausência de quaisquer fatores limitantes) natural, b taxa de natalidade e d a taxa de mortalidade. Esse crescimento exponencial é raro. Tem apenas uma duração limitada e ocorre quando o intervalo de tempo em estudo é suficientemente pequeno tais que limitações ambientais não são relevantes.

Mas de acordo com a realidade é admitir que a resistência do meio aumenta com a densidade da população, e que existe uma carga biológica máxima k correspondente ao número máximo de indivíduos que o meio pode suportar. A resistência do meio é representada pelo termo $\frac{(k-N)}{k}$, e o crescimento ocorre, então segundo a fórmula:

$$\frac{dN}{dt} = rN \frac{(k - N)}{k} = r \left(1 - \frac{N}{k}\right) N \quad (1.3)$$

o que equivale a:

$$N(t) = \frac{k}{(1 + e^{a-rt})} \quad (1.4)$$

sendo a uma constante determinada a partir do valor N para $t = 0$. Quando $N = k$, o crescimento torna-se nulo. De fato pode-se observar, na equação (1.3), que quando a população tende à capacidade de suporte (k), tem-se que $dN/dt = 0$, e o tamanho da população permanece estável. O que espera ocorrer uma elevação da taxa de mortalidade devido à competição por alimento e abrigo ou uma redução da taxa de natalidade.

Para encontrar os estados de equilíbrios da população após longo tempo calculamos os pontos críticos da equação (1.3), para isto basta encontrar as soluções da equação,

$$r \left(1 - \frac{N}{k}\right) N = 0,$$

portanto temos,

$$N = 0 \text{ ou } N = k.$$

Considerando $f(N) = r \left(1 - \frac{N}{k}\right) N$, temos que $N = 0$ é um estado de equilíbrio instável pois $f'(0) = r > 0$ e que $N = k$ é estado de equilíbrio estável pois $f'(k) = -r < 0$.

Fazendo o gráfico da função f em termos de N temos uma parábola com concavidade voltada para baixo interceptando eixo N em pontos $(0, 0)$ e $(k, 0)$. Ela possui ponto de máximo em $\left(\frac{k}{2}, \frac{rk}{4}\right)$, como mostra a Figura 1.1.

Observamos que $\frac{dN}{dt} > 0$ para $0 < N < k$ logo N é uma função crescente de t neste intervalo e para $N > k$, $\frac{dN}{dt} < 0$ assim N se torna uma função decrescente.

Observamos também que no intervalo $0 < N < \frac{k}{2}$ a concavidade do gráfico é voltada para cima, pois $\frac{d^2N}{dt^2} > 0$ e no intervalo $\frac{k}{2} < N < k$ como $\frac{d^2N}{dt^2} < 0$ temos concavidade voltada para baixo. De fato sendo,

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{k}\right),$$

temos,

$$\frac{d^2N}{dt^2} = \left[r \left(1 - \frac{N}{k}\right) + rN \left(-\frac{1}{k}\right) \right] \frac{dN}{dt},$$

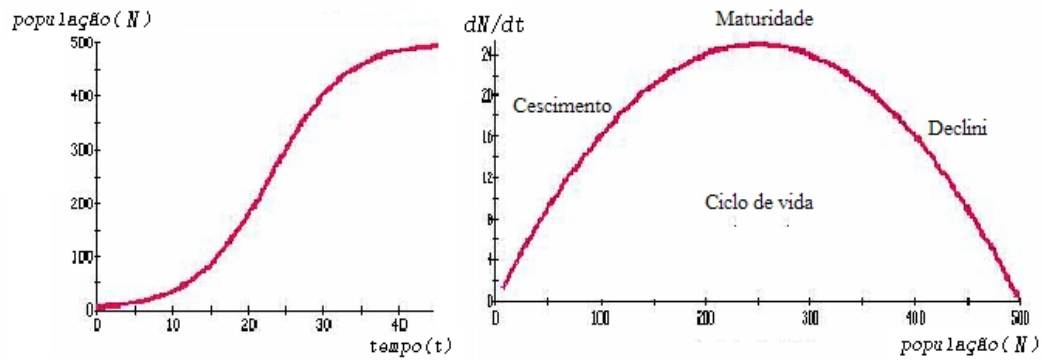


Figura 1.1: Os gráficos população vs tempo e população vs dN/dt em população para modelo logístico $r \left(1 - \frac{N}{k}\right) N$ com constantes $k = 500$, $r = 0,2$ e $N(0) = 5$.

onde nos dá

$$\frac{d^2N}{dt^2} = r^2N \left(1 - \frac{2N}{k}\right) \left(1 - \frac{N}{k}\right).$$

Isto pode ser visto na Figura 1.1.

Observe na Figura 1.2 os comportamentos das populações nos crescimentos logístico e exponencial.

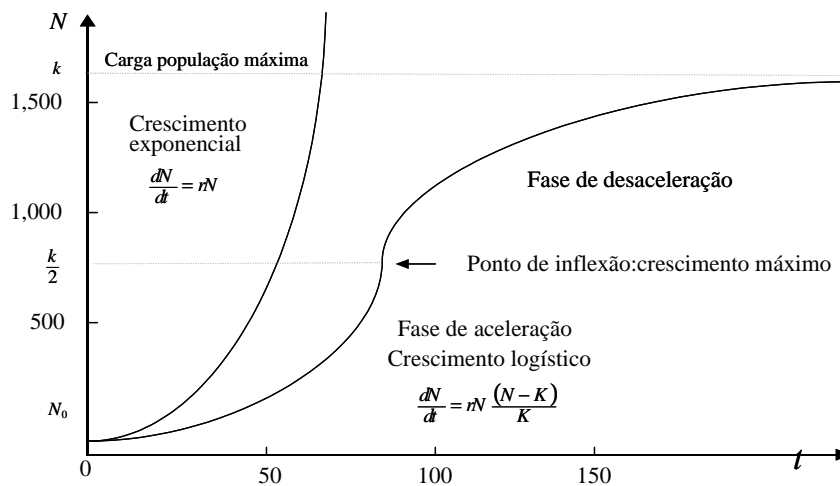


Figura 1.2: Crescimento exponencial e crescimento logístico de uma população

1.3 Modelo da dinâmica populacional do Spruce Budworm

No primeiro seção nos vimos o modelo Logístico de crescimento de uma população com ausência de outras espécies. Para que este modelo seja mais realístico acrescentamos um termo de predação, onde obtemos a seguinte equação:

$$\frac{dn}{dt} = r.n \left(1 - \frac{n}{k}\right) - p(n). \quad (1.5)$$

Observe que o lado direito da equação diferencial possui dois membros a saber: o primeiro $r.n \left(1 - \frac{n}{k}\right)$, termo de crescimento logístico com r (coeficiente de crescimento intrínico) e k (Capacidade de suporte do meio), e segundo termo $p(n)$ representa termo de predação. Observe na Figura (1.3.a) que as funções de predação geralmente saturam para grandes valores de n então existe ponto aproximado onde para valores menor do que este ponto temos pequenas quantidades de predadores, enquanto com valores acima os predadores estão perto de seu valor de saturação, portanto podemos considerar este ponto como um interruptor crítico para pequenas densidades de população (n). Por exemplo a população de insetos num jardim, e os pássaros, onde para pequenas densidade de população de insetos os pássaros tendem a buscar alimentos em outros lugares e assim o $p(n)$ cai mais rapidamente. Isto nos dá uma expressão matemática para $p(n)$ sugerido por Ludwig em 1978.

$$p(n) = \beta \cdot \frac{n^2}{\alpha^2 + n^2}. \quad (1.6)$$

Existem também outros modelos para termo de predação como,

$$p(n) = \beta \cdot \frac{(1 - e^{-an})}{n}, p(n) = \alpha n \text{ ou } p(n) = \frac{\beta n}{n + \alpha},$$

onde α , β e a são constantes positivos e os gráficos são ilustrados nas Figuras 1.3 e 1.4.

Considere a equação,

$$\frac{dn}{dt} = r.n \left(1 - \frac{n}{k}\right) - \beta \cdot \frac{n^2}{\alpha^2 + n^2}, \quad (1.7)$$

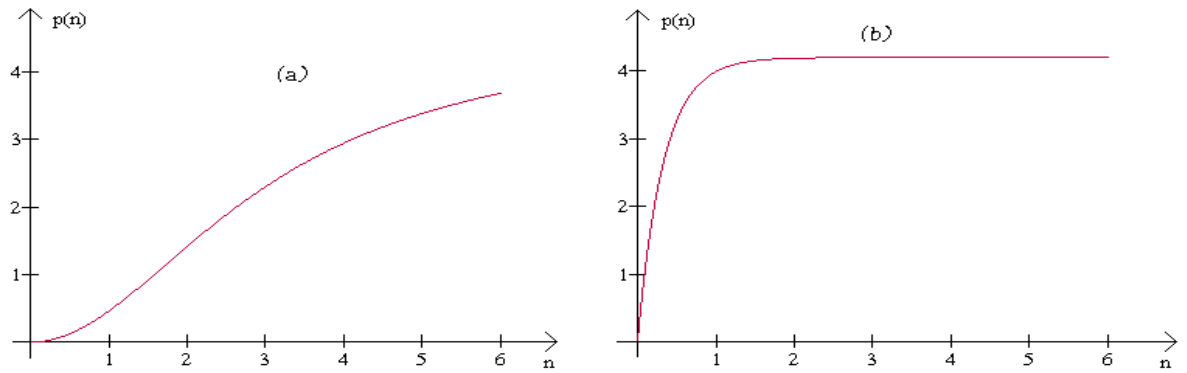


Figura 1.3: Os gráficos das funções de predação, a) $p(n) = \beta \cdot \frac{n^2}{\alpha^2 + n^2}$ e b) $p(n) = \beta \cdot \frac{(1 - e^{-\alpha n})}{n}$ com constantes $\alpha = 3$ e $\beta = 4.6$

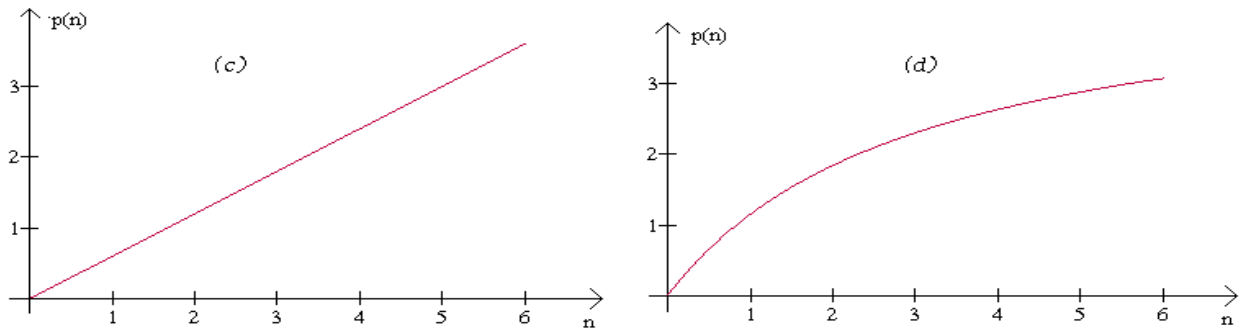


Figura 1.4: os graficos dos predadores, c) $p(n) = \alpha n$ e d) $p(n) = \frac{\beta n}{n + \alpha}$ com constantes $\alpha = 3$ e $\beta = 4.6$

onde consideramos o termo de predação como:

$$p(n) = \beta \cdot \frac{n^2}{\alpha^2 + n^2}$$

com α e β constantes positivos. Na análise desta equação para encontrar os pontos de equilíbrio (onde $\frac{dn}{dt} = 0$) e suas estabilidades a equação (1.7) deve satisfazer,

$$r \cdot n \left(1 - \frac{n}{k}\right) - \beta \cdot \frac{n^2}{\alpha^2 + n^2} = 0.$$

É claro que $n = 0$ é um dos pontos de equilíbrios é os outros pontos satisfazam a equação,

$$r \cdot \left(1 - \frac{n}{k}\right) - \beta \cdot \frac{n}{\alpha^2 + n^2} = 0. \quad (1.8)$$

O número de pontos de equilíbrios depende de quatro parâmetros, r , k , β e α onde na próxima etapa adimensionalizamos a equação (1.8), para isto consideramos $u = \frac{n}{\alpha}$ e temos:

$$r \cdot \left(1 - \frac{\alpha u}{k}\right) u - \beta \cdot \frac{\alpha u^2}{\alpha^2 + u^2 \alpha^2} = 0$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{\alpha}{\beta}$ e considerando,

$$\frac{r\alpha}{\beta} = R \text{ e } \frac{k}{\alpha} = Q$$

obtemos:

$$R \left(1 - \frac{u}{Q}\right) = \frac{u}{(1+u^2)}. \quad (1.9)$$

Considerando

$$g(u) = R \left(1 - \frac{u}{Q}\right) \text{ e } h(u) = \frac{u}{(1+u^2)}, \quad (1.10)$$

obtemos os gráficos na Figura 1.5.

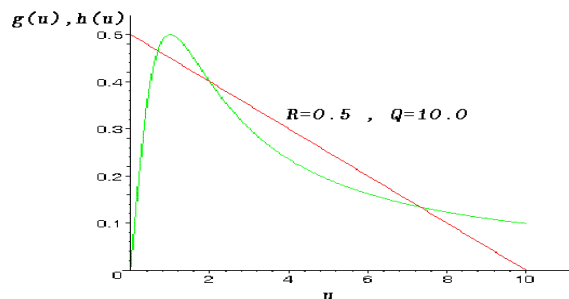


Figura 1.5: intersecção dos graficos $R \left(1 - \frac{u}{Q}\right)$ e $\frac{u}{(1+u^2)}$ e pontos de equilibrio de equação Budworm com constantes $R = 0.5$ e $Q = 10.0$.

Observe que os pontos críticos u_1 , u_2 e u_3 são dependentes dos valores de Q e R , isto é quando Q varia e R fixo, ou R varia e Q fixo na equação (1.9) obtemos no mínimo um e no máximo três pontos de equilíbrio denominado neste

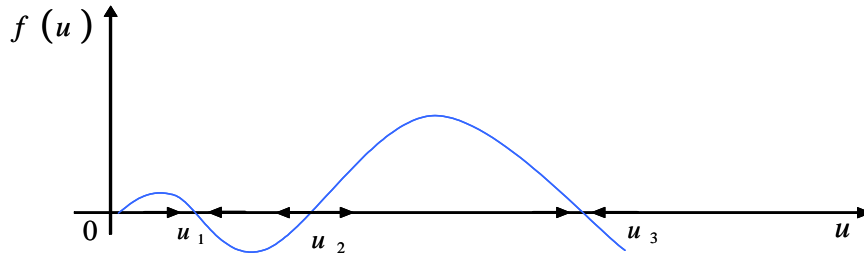


Figura 1.6: Gráfico da função $f(u, R, Q) = R \left(1 - \frac{u}{Q}\right) - \frac{u}{(1+u^2)}$

caso tem u_1 como ponto superior u_2 ponto médio e u_3 como ponto inferior de equilíbrio também temos que os pontos de equilíbrio u_1 e u_3 são estáveis. De fato,

$$\frac{\partial f}{\partial u} < 0 \text{ para } u = u_1 \text{ e } u = u_3,$$

de modo análogo u_2 e 0 são instáveis pois,

$$\frac{\partial f}{\partial u} > 0 \text{ para } u = 0 \text{ e } u = u_2.$$

Podemos afirmar que neste modelo a densidade u pode convergir para estado de equilíbrio u_1 ou u_3 (Figura 1.6) onde isto depende dos dados iniciais.

Observe na equação (1.7) que existe um domínio para os parâmetros R e Q onde a equação possui três raízes. Podemos mostrar este domínio no plano R vs Q como na Figura 1.7.

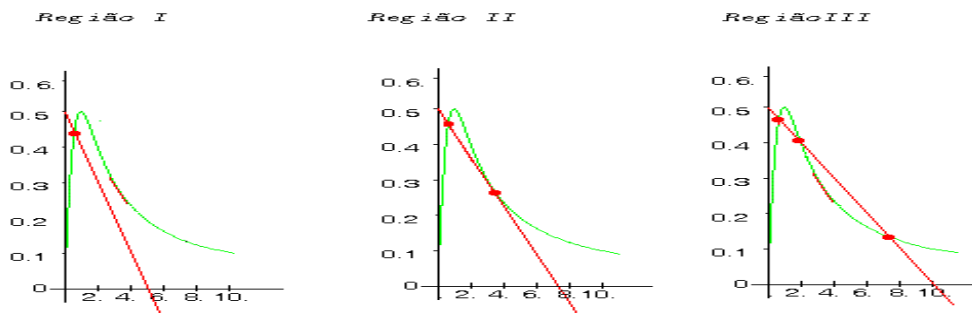


Figura 1.7: Estados de equilíbrio para o modelo de Budworm (4.4) com variação de $5 \leq Q \leq 10$ e a constante $R = 0.5$ onde equilíbrio são dados pelas interseções das linhas $R(1 - \frac{u}{Q})$ e $\frac{u}{1+u^2}$.

Se na equação (1.9) fixamos o parâmetro R e diminuimos o valor do parâmetro Q observamos que os pontos de equilíbrio (u_2 e u_3) tendem a coincidir em um único ponto. Portanto existe um domínio no plano R vs Q para os parâmetros R e Q onde a equação (1.7) possui três raízes (Figura 1.8).

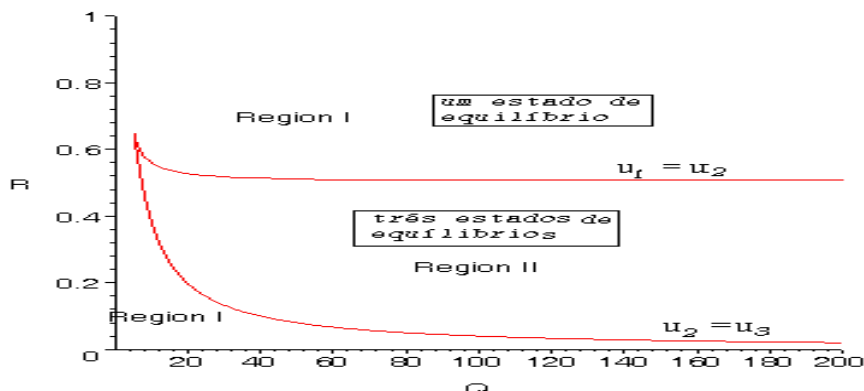


Figura 1.8: Os domínios para os parâmetros R e Q para que a equação (1.11) possui um ou três pontos de equilíbrio.

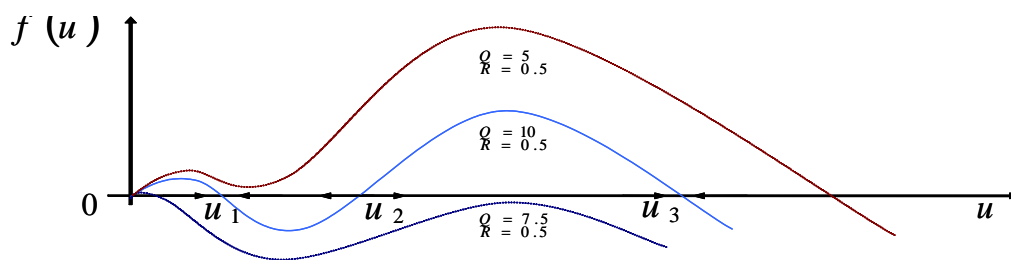


Figura 1.9: Estado de equilíbrio e tipo de estabilidade para variação de parâmetros $6 < Q < 10$ e $R = 50$.

1.4 Equação de difusão no modelo de Spruce Budworm

Considera-se a equação de difusão no modelo de Budworm (1.7), obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.11)$$

onde,

$$f(u) = Ru \left(1 - \frac{u}{Q}\right) - \frac{u^2}{1+u^2}.$$

Já vimos na seção anterior que existe uma relação entre R , Q e $f(u)$, isto é existe um intervalo para os parâmetros R e Q onde $f(u)$ possui três soluções não nulas.

A nossa intenção nesta parte do trabalho é também de encontrar a existência de soluções de ondas viajantes entre pontos de equilíbrio da equação (1.11). Para isto, usando a variável de onda, $(u(x, t) = U(z)$ com $z = x - ct$) na equação (1.11) e obtemos,

$$u_t = \frac{dU}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dU}{dz} (-c) = -cU', \quad (1.12)$$

$$u_x = \frac{dU}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dU}{dz} = U',$$

$$u_{xx} = \frac{dU'}{dz} = U'', \quad (1.13)$$

onde após substituição obtemos:

$$U'' + cU' + f(U) = 0. \quad (1.14)$$

Reescrevendo a equação (1.13), como um sistema de equações de primeira ordem, temos:

$$\begin{cases} U' = V \\ V' = -cV - f(U). \end{cases} \quad (1.15)$$

Como já foi visto no capítulo anterior os pontos $\{0, u_1, u_2, u_3\}$ são raízes do $f(U)$, portanto as soluções do sistema serão $(0, 0)$, $(u_1, 0)$, $(u_2, 0)$ e $(u_3, 0)$.

Agora procuramos os comportamento das soluções na vizinhança dos pontos críticos pelos autovalores do matiz jacobiana. Para isto consideramos $f(U, V) = V$, $g(U, V) = -cV - f(U)$ e obtemos,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{f(U,V)}{\partial U} & \frac{f(U,V)}{\partial V} \\ \frac{g(U,V)}{\partial U} & \frac{g(U,V)}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f'(u) & -c \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

Portanto o polinômio característico será,

$$\det(\lambda I - J) = \det \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ f'(u) & \lambda + c \end{vmatrix} = 0, \quad (1.17)$$

ou seja,

$$\lambda^2 + c\lambda + f'(u) = 0,$$

que nos dá autovalores,

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4f'(u)}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4f'(u)}}{2}. \quad (1.18)$$

No ponto crítico $(0, 0)$ obtemos autovalores como:

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2}, \quad (1.19)$$

considerando $c > 0$ temos, pelo Figura 1.6 que $f'(0) > 0$ portanto para valores de $f'(0) > \frac{c^2}{4}$ ou seja,

$$c < 2\sqrt{f'(0)},$$

obtemos autovalores complexos $(\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ com $\alpha < 0$ e $\beta < 0$), portanto o ponto crítico $(0, 0)$ é um ponto de espiral estável no plano de fase nesse caso.

Se $c^2 - 4f'(0) > 0$ ou seja,

$$c > 2\sqrt{f'(0)},$$

temos autovalores reais um positivo e o outro negativo portanto, o ponto crítico $(0, 0)$ será um nó estável. Como nosso raciocínio para valores de $u < 0$ não tem sentido (densidade negativa) logo o ponto crítico $(0, 0)$ é um nó estável e $c > 2\sqrt{f'(0)}$. Portanto para valores de c (velocidade da onda) suficientemente

grandes (maior do que $2\sqrt{f'(0)}$) existe possibilidade de onda viajante entrando neste estado de equilíbrio. Analogamente para o ponto crítico $(0, u_2)$ temos $f'(u_2) > 0$ (Figura 1.6) e portanto se

$$c^2 > \max \{4 [f'(0), f'(u_2)]\} \quad (1.20)$$

o ponto $(0, u_2)$ é ponto espiral no plano de fase. Os pontos críticos $(0, u_1)$ e $(0, u_3)$ são pontos da sela. De fato temos os seguintes polinômios característicos

$$\det(\lambda I - J(0, u_1)) = \det \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ f'(u_1) & \lambda + c \end{vmatrix} = 0, \quad (1.21)$$

$$\lambda^2 + c\lambda + f'(u_1) = 0,$$

e

$$\det(\lambda I - J(0, u_3)) = \det \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ f'(u_3) & \lambda + c \end{vmatrix} = 0, \quad (1.22)$$

$$\lambda^2 + c\lambda + f'(u_3) = 0,$$

onde nos dá os seguintes autovalores,

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4f'(u_1)}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4f'(u_1)}}{2} \quad (1.23)$$

e

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4f'(u_3)}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4f'(u_3)}}{2} \quad (1.24)$$

como $f'(u_1) < 0$ e $f'(u_3) < 0$ (Figura 1.6) isto implica autovalores reais com sinais opostos.

A Figura 1.10 mostra o possível plano de fase para c satisfazendo a equação (1.19) avaliando os pontos críticos $(0, 0)$, $(u_1, 0)$, $(u_2, 0)$ e $(u_3, 0)$.

Se dividimos este plano de fase em três faixas d_1 , d_2 , e d_3 como mostra a Figura 1.10 temos na faixa d_1 que está no intervalo de $(0, 0)$ e $(u_1, 0)$, as ondas viajantes se deslocam para $(0, 0)$ isto é $U(-\infty) = u_1$ e $U(\infty) = 0$, onde a existência desta onda depende do valor de c isto é $c > 2\sqrt{f'(0)}$. Nós temos situações análoga nas faixas d_2 e d_3 , assim como mostra a figura 1.11, as ondas viajantes correspondente em cada intervalo.

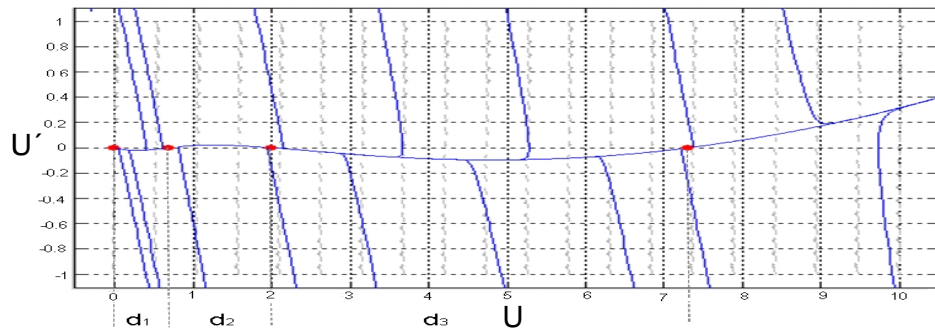


Figura 1.10: O plano de fase para equação (1.6) com constantes $R = 0.5$, $Q = 10$ e $c = 3$, e divisão domínio em regiões d_1, d_2 e d_3 .

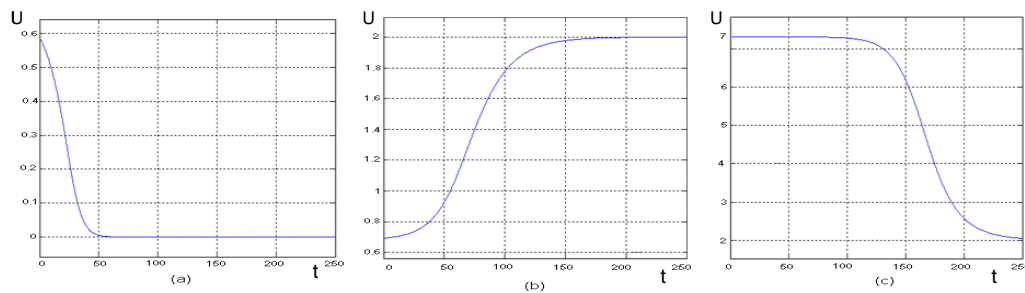


Figura 1.11: a) As ondas viajantes no região d_1 no plano de fase. b) As ondas viajantes no região d_2 no plano de fase. c) As ondas viajantes no região d_3 no plano de fase.

Como vimos a equação (1.8) pode obter três pontos críticos como $(0,0)$, $(u_1,0)$ e $(u_3,0)$ variando os parâmetros R e Q Figura (1.7). Neste caso temos no plano de fase a origem como nó estável para c suficiente grande ($c > 2\sqrt{f'(0)}$) e $(u_1,0)$, $(u_3,0)$ como ponto da sela pois $f'(u_1) < 0$ e $f'(u_2) < 0$, e temos autovalores como (1.23) e (1.24) respectivamente, portanto obtemos os gráficos da Figura 1.12.

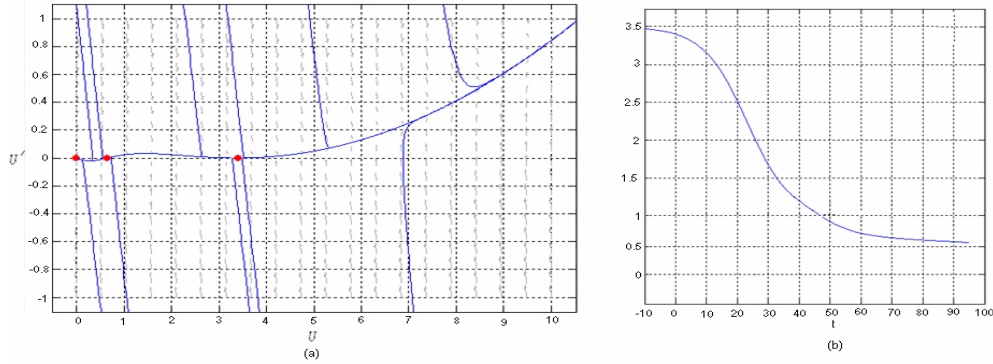


Figura 1.12: a) O plano de fase para equação (1.6) caso só existem dois pontos de equilíbrio u_1 e u_3 com constantes $R = 0.5$, $Q = 7.414$ e $c = 3$. b) Ondas viajantes para equação Budworm com dois pontos de equilíbrios.

1.5 Influência da Convecção na Possibilidade de ondas Viajantes

Se na seção anterior consideramos a dinâmica de população como:

$$\frac{\delta U}{\delta T} = D \frac{\delta^2 U}{\delta X^2} + \alpha \frac{\delta U}{\delta X} + rU \left(1 - \frac{U}{k}\right). \quad (1.25)$$

Dividindo a equação (1.25) por r e considerando as seguintes mudanças de variáveis,

$$u = \frac{U}{k}, t = rT \text{ e } X = x \sqrt{\frac{r}{D}},$$

temos,

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m \frac{\partial u}{\partial x} + u(1 - u) \text{ onde } m = \frac{\alpha}{(rD)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.26)$$

Analogamente aos seções anteriores, para encontrar a solução de onda viajante usaremos a variável de onda $[u(x, t) = U(x - ct) = U(z) \text{ onde } c \text{ é Velocidade de onda}]$ na equação (1.26) obtemos,

$$\begin{cases} u_t = \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial z} (-c) = -cU \\ u_x = \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial z} = U \\ u_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = U \\ u = U, \end{cases} \quad (1.27)$$

portanto a equação (1.25) se tornará:

$$U'' + (m + c)U' + U(1 - U) = 0. \quad (1.28)$$

Observe que m é um parâmetro dado em problema .

A questão é que, dado m quais são as possibilidades de existencia das ondas viajantes. Ou seja, será que existe alguns valores de m tal que as ondas viajantes não existem. Por isto escrevemos a equação (1.28) em sistema de primeira ordem, para encontrar os pontos críticos e as estabilidades destes pontos no plano de fase. Portanto obtemos,

$$\begin{cases} U' = V \\ V' = -(m + c)V - U(1 - U), \end{cases} \quad (1.29)$$

para encontrar os autovalores, calculamos a matriz jacobiana a seguir,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2U & -(m + c) \end{bmatrix},$$

e polinômio característico:

$$\det(\lambda I - J) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 - 2U & \lambda + (m + c) \end{vmatrix} = 0.$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(m + c) + (1 - 2U),$$

e autovalores,

$$\lambda_1 = \frac{-(m + c) + \sqrt{(m + c)^2 - 4(1 - 2U)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-(m + c) - \sqrt{(m + c)^2 - 4(1 - 2U)}}{2}.$$

No ponto crítico $(0,0)$ temos auto valores,

$$\lambda_1 = \frac{-(m + c) + \sqrt{(m + c)^2 - 4}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-(m + c) - \sqrt{(m + c)^2 - 4}}{2}.$$

Onde os auto valores tem valores reais se $(m + c)^2 - 4 \geq 0$ ou seja $|m + c| \geq 2$. Neste caso temos dois autovalores reais negativos, portanto temos as seguintes limitações para o valor de c (velocidade de onda).

$$c \geq 2 - m \text{ ou } c \leq -(2 + m) \quad (1.30)$$

onde para esta limitação na velocidade de onda o ponto crítico $(0,0)$ é um ponto estável.

Analisamos a existência das ondas viajantes em relação com o sinal do m . Caso $m > 0$ temos deslocamento das partículas a favor do movimento logo em (1.29) a existência de ondas viajantes ficam mais fácil. Caso $m < 0$ temos deslocamento das partículas em sentido contrário de onda logo em (1.29) a existência de ondas viajantes ficam cada vez mais difícil. Portanto, a velocidade crítica nesse caso é $2 - m$.

Para ponto crítico $(1,0)$ temos as seguintes autovalores,

$$\lambda_1 = \frac{-(m + c) + \sqrt{(m + c)^2 + 4}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-(m + c) - \sqrt{(m + c)^2 + 4}}{2}.$$

onde possui sempre valores reais (pois $|(m + c) + 2| > c + m$) com $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ para todo valor de m , logo as ondas viajantes sempre existem se $c > 2 - m$.

Portanto na influência da convecção as ondas viajantes vão existir para valores de c suficiente mente grande.

Capítulo 2

MODELO DE INTERAÇÃO DAS POPULAÇÕES

Resumo do capítulo

Neste capítulo analisamos ações mútuas entre duas espécies em casos de competição e predador presa, onde observamos os modelos matemáticos que aproximadamente correspondem à situação de cada um dos casos. No caso de competição analisamos também coexistência permanente de espécies que competem entre si na utilização de um recurso limitado [2].

2.1 Introdução

Nenhuma população existe isoladamente, exceto, talvez, em condições laboratoriais muito particulares. As populações interagem de diversas maneiras e, na verdade, não é possível compreender muitos fenômenos populacionais sem considerar estas interações. Duas espécies em coexistência, permanente ou temporária, podem interagir segundo seis maneiras fundamentais, correspondentes às seis possíveis combinações dos três símbolos: 0, + e $-$, tomados dois a dois. O símbolo 0 significa que a espécie não é afetada pela presença da outra. O símbolo + significa que a espécie é favorecida ou requer a presença da outra. E o símbolo $-$ que a espécie é prejudicada pela presença da outra.

como se esquematiza na Tabela 6.1. A Tabela não pretende ser exaustiva, pois existem várias formas de parasitismo, de competição indireta etc., mas constitui um sumário útil das principais ações mútuas numa comunidade biológica [3].

Tipos de interação	Espécie 1	Espécie 2	Exemplo
1.Neutral	0	0	Nenhuma das duas espécies afeta a outra
Interações negativas			
2.Competição direta	-	-	Predação mútua,etc. Consumo de recursos
3.Competição indireta	-	-	limitados comuns às duas espécies.
4.Predação	+	-	A espécie 1, predador, consome a espécie 2, presa.
Interações positivas			
5.Comensalismo	+	0	A espécie 1, comensal, se beneficia da presença da 2, que não é afetada.
6.Mutualismo	+	+	As duas espécies se favorecem mutuamente e requerem a presença de outra.

Tabela 2.1. Ações mútuas entre duas espécies (1 e 2) diferentes.

0 a espécie não é afetada pela presença da outra

+ a espécie beneficia ou requer a presença da outra

- a espécie é prejudicada pela presença da outra

Quanto à competição, cabe perguntar se será possível a coexistência permanente de espécies que competem entre si na utilização de um recurso limitado, e, em caso afirmativo, em que condições tal se pode verificar.

Observe na Tabela 2.1, quando as espécies interagem a dinâmica de população de cada espécie é afetada. Em geral há uma rede inteira de espécie

interagindo. Nós consideramos aqui sistemas que envolvem duas espécies e analisamos dois tipos principais destas interações.

- I) Se a taxa de crescimento de cada população diminui (situação de competição) tabela 2.1 itens 2 e 3.
- II) Se a taxa de crescimento de uma população diminui e a outra aumenta (esta é uma situação de predador–presa) tabela 2.1 itens 4.

2.2 Modelo de Competição

Existem diferentes definições, refletindo a maior ou menor ênfase colocada pelos autores nos mecanismos de interação competitiva, nas respostas das populações a testes experimentais, ou em qualquer outro aspecto particular.

Keddy em 1989 abordou a competição e, definiu que existe competição entre organismos sempre que um deles exerça um efeito negativo sobre outro, quer consumindo quer controlando o acesso a um recurso cuja disponibilidade é limitada. Observe que para existência de competição é necessário que pelo menos um recurso seja limitado. Pode suceder que duas espécies potencialmente competidoras estejam tão restritas por outros fatores (por exemplo, mortalidade por predação) que nunca se tornem abundantes ao ponto de poder considerar-se que existem um recurso limitado para elas. Nestes casos poderá não haver qualquer efeito negativo destas espécies entre si. Portanto, em termos absolutos, qualquer recurso é sempre restrito e, por isso, podem-se esperar que em muitos casos haja recursos que obriguem espécies a competir.

Existe um critério de classificação de tipos de competição, utilizado pela maioria dos ecologistas. Neste critério, a classificação é feita quanto ao tipo de entidades que competem. A competição diz-se intraespecífica se ocorre entre indivíduos da mesma espécie e diz-se interespecífica se ocorre entre indivíduos de espécies diferentes. Seguem-se alguns exemplos.

O caso mais óbvio (e mais investigado) de competição é a competição in-

terespecífica, isto é aquele em que populações de duas espécies (diga-se A e B) competem. Observe que neste caso raramente o efeito de A sobre B é igual ao efeito de B sobre A.

Na natureza, contudo, uma população é afetada por muitas populações (de espécies diferentes) que partilham os mesmos recursos. Introduziu-se o termo competição difusa, para designar o efeito cumulativo destes competidores sobre a população de interesse. Pressupõe-se, neste caso, que nenhum competidor particular tem um efeito claramente predominante sobre a população.

2.3 Modelos Lotka-Volterra de Competição

A maioria dos estudos teóricos de interações populacionais foi formulada em termos de tempo contínuo, usando equações diferenciais. A principal razão é a maior simplicidade matemática permitida pelas equações diferenciais. Nesta seção começando com o mecanismo de competição mais simples que tem um tratamento matemático: a competição puramente consumista com utilização coletivista do espaço. Se duas ou mais espécies partilham (um ou mais) recursos num espaço coletivo e estão limitadas por esses recursos, então prejudicam-se mutuamente pela simples razão de que uma unidade de recurso consumida pela espécie 1 não pode ser usada pela espécie 2. Um par de espécies pode, portanto, entrar em competição consumista mesmo em situações em que os indivíduos de uma não se apercebam da existência dos indivíduos da outra. A primeira e mais simples formulação matemática da competição contempla o consumismo puro e foi desenvolvida, independentemente, por biofísico americano Alfred James Lotka (1880-1949) e o matemático Italiano Vito Volterra(1860-1940) no ano de 1920.

O modelo tradicional de competição é uma extensão natural do modelo logístico de crescimento contínuo. Neste modelo, a contribuição por indivíduo para a variação instantânea da densidade populacional $\left(\frac{dN_1}{N_1 dt}\right)$ é uma função

decrecente da própria densidade. Representando por N_1 a densidade populacional e obtemos,

$$\frac{dN_1}{N_1 dt} = r - \frac{r}{K} N_1. \quad (2.1)$$

Observamos na equação (2.1), a constante $\frac{r}{K}$ mede a competição intraespecífica.

Se existe uma segunda espécie, com densidade populacional N_2 , que compete com a primeira, a taxa de crescimento *per capita* da primeira é diminuída de uma quantidade adicional, devido à presença da segunda espécie. Portanto temos,

$$\frac{dN_1}{N_1 dt} = r_1 - \frac{r_1}{K_1} N_1 - C_{12} N_2 \frac{r_1}{K_1}. \quad (2.2)$$

Na equação (2.2) as primeiras duas parcelas do segundo membro são idênticas à equação logística (2.1), a única diferença reside num índice introduzido que permite identificar a densidade e os parâmetros da espécie N_1 . Apenas a terceira parcela é nova. Esta parcela inclui um parâmetro novo, C_{12} , que se designa por coeficiente de competição e representa, neste caso, o efeito de um indivíduo da espécie N_2 sobre um indivíduo da espécie N_1 . Note-se três coisas importantes desta forma de representar a competição:

(i) Na simbologia utilizada para representar coeficientes de interação entre espécies (neste caso competição) convencionou-se colocar a identificação da espécie que recebe o efeito "do lado de dentro" em subscrito. A identificação da espécie que causa o efeito (neste caso a espécie N_2) coloca-se do "lado de fora" em subscrito. Assim, C_{ij} é o "efeito de j sobre i ".

(ii) A constante $\frac{r_1}{K_1}$ está presente na parcela que representa diminuição do crescimento em consequência da competição. Assim sendo, C_{12} representa a força da competição interespecífica com a espécie N_2 , relativamente à força da competição intraespecífica dentro da espécie N_1 . Note-se que se $C_{12} = 1$, então o efeito da presença de um indivíduo da espécie N_2 sobre a taxa de crescimento da espécie N_1 , é exatamente igual ao efeito da presença de um indivíduo da própria espécie N_1 isto é a competição interespecífica é tão forte quanto a competição intraespecífica. Contudo, se $C_{12} < 1$, a competição interespecífica tem

menos efeito negativo sobre o crescimento da espécie N_1 que a competição intraespecífica. Se $C_{12} > 1$, a competição interespecífica é mais forte que a intraespecífica.

(iii) O coeficiente de competição mede o efeito per capita (i.e. por indivíduo) dos indivíduos da espécie N_2 sobre os da espécie N_1 , relativamente ao efeito per capita dentro da própria espécie N_1 (medido por $\frac{r_1}{K_1}$). Notemos que o produto de C_{12} pela densidade da espécie N_2 , mede o efeito total da espécie N_2 sobre o crescimento por indivíduo da espécie N_1 .

A representação matemática da competição entre as duas espécies, deverá ter em conta não apenas o que sucede ao crescimento da espécie N_1 (2.2) mas, simultaneamente, o que sucede ao crescimento da espécie N_2 . Assim, pode-se escrever uma equação equivalente a (2.2) para a espécie N_2 , dando origem a um sistema de duas equações diferenciais:

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{r_1}{K_1} (K_1 - N_1 - C_{12}N_2) N_1 \quad (2.3)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{r_2}{K_2} (K_2 - N_2 - C_{21}N_1) N_2.$$

Estas equações são nomeadas por equações Lotka-Volterra de competição. Relacionam a taxa de crescimento de cada população com a densidade de ambas e é óbvio que, quando $C_{12} = C_{21} = 0$, ambas as populações crescem de acordo com o modelo logístico.

Observamos que as equações (2.3) são facilmente estendidas a uma situação em que exista um número qualquer, n , de espécies em competição. Representando por N_i a densidade da espécie i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) a equação generalizada de Lotka-Volterra para qualquer espécie i escreve-se:

$$\frac{dN_i}{dt} = \frac{r_i}{K_i} \left(k_i - N_i - \sum_{j \neq i} C_{ij} N_j \right) N_i \quad \text{onde } i = 1, 2, \dots, n$$

2.4 Análise Gráfica do Sistema de Competição Lotka-Volterra.

O principal objetivo do estudo das equações de Lotka-Volterra é estabelecer o que determina se duas espécies podem coexistir e, se não podem, qual delas eliminará a outra sendo os únicos parâmetros das equações, os r 's e os K 's e os coeficientes de competição. A solução a obter será dada em termos destes parâmetros.

Inicialmente analisamos as equações (2.3) por meio de um método gráfico. Se bem que esta forma de análise não seja extensível a três ou mais populações competidoras, a análise gráfica é simples e intuitiva.

Considere-se um gráfico que tenha a densidade da espécie N_1 em abcissas e a da N_2 em ordenadas. Cada ponto neste gráfico representa, em simultâneo, a densidade populacional das duas espécies. Considere-se agora a equação (2.3) da espécie N_1 . A população pára de crescer ($\frac{dN_1}{dt} = 0$ ou $\frac{dN_2}{dt} = 0$) nas situações triviais em que $N_1 = 0$ ou $r_1 = 0$, e em todo um conjunto de valores de N_1 e de N_2 que anula o termo dentro do parêntesis.

Isto é, quando

$$K_1 - N_1 - C_{12}N_2 = 0 \Rightarrow N_1 = K_1 - C_{12}N_2 \quad (2.4)$$

$$K_2 - N_2 - C_{21}N_1 = 0 \Rightarrow N_2 = K_2 - C_{21}N_1.$$

O lugar geométrico dos equilíbrios não triviais é uma reta no plano N_1 vs N_2 de inclinação negativa, que corta as ordenadas em $\frac{k_1}{C_{12}}$ e as abcissas em K_1 (Figura. 2.1).

Um espaço euclidiano, como nas Figuras 2.2 e 2.3 cujos eixos são as variáveis dependentes do sistema de equações (2.3) e (2.4) designa-se por plano de fase do referido sistema. Cada ponto neste espaço corresponde a um possível estado do sistema. Se, com o passar do tempo, as densidades populacionais forem mudando, esse ponto desloca-se no plano de fase, traçando uma trajetória do sistema formado por N_1 e N_2 . Como as densidades populacionais

nunca podem ser negativas, o espaço de fase neste exemplo está definido apenas no quadrante em que os dois eixos são positivos. Uma linha (reta ou não) no espaço de fase, sobre a qual a taxa de variação de uma das variáveis (por exemplo, N_1) seja nula ($\frac{dN_1}{dt} = 0$), designa-se por nulidade dessa variável.

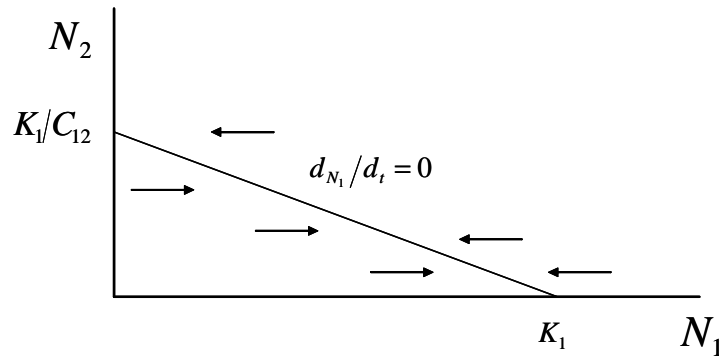


Figura 2.1: Segmento de reta ao longo do qual $\frac{dN}{dt} = 0$. Esta reta é a nulidade da variável N . As setas indicam o sentido de deslocamento de N nas duas regiões do plano definido pela nulidade.

A nulidade de N_1 divide o espaço em duas zonas (Figura 2.1). Acima da nulidade, a taxa de crescimento da espécie N_1 é positiva, e abaixo desta reta é negativa. De fato, considere-se o caso em que $N_2 = 0$, (abaixo da nulidade). Sendo $N_1 < K_1$ e, portanto, a taxa de crescimento da espécie N_1 é positiva, já que N_1 tende para K_1 na ausência de outra espécie. À medida que N_2 cresce, a taxa de crescimento da espécie N_1 abaixo da nulidade continua a ser positiva, simplesmente o seu K_1 decresce, devido à competição com a espécie 2. Por uma razão análoga a taxa de crescimento da espécie N_1 é negativa acima da nulidade.

Analogamente na equação (2.4) da espécie N_2 , temos que a nulidade (2.4) pode ser representada em espaço de fase, como uma reta com inclinação negativa, que corta as ordenadas em K_2 e as abscissas em $\frac{K_2}{C_{21}}$. Existem, evidentemente, quatro formas diferentes de posicionar, relativamente uma à outra, duas retas com inclinação negativa num plano euclidiano (Figura 2.2). Tudo depende de as retas se intersectarem, ou não, e, em qualquer dos casos, de

qual delas corta o eixo das ordenadas (ou das abscissas) mais perto da origem. Quando as nulidades não se cruzam (Figuras 2.2,1 e 2.2,2), ficam definidas três regiões no espaço de fase. Quando as nulidades se cruzam (Figuras 2.3,3 e 2.3,4), ficam definidas quatro regiões.

As setas pequenas indicam as direções de deslocação da espécie N_1 , N_2 e a resultante pelas duas espécies em cada região do plano de fase. Na Figura 2.2,1 equilíbrio só é possível com extinção da espécie N_2 . E na Figura 2.2,2 equilíbrio só possível com extinção da espécie N_1 , enquanto na 2.3,3 existe um ponto de equilíbrio estável: Coexistência possível e na 2.3,4 existe um ponto de equilíbrio instável: Competição contingente.

Qual dos quatro casos (das Figuras 2.2 e 2.3) ocorre, em cada situação particular de duas espécies em competição, é algo que depende inteiramente do valor relativo das intercessões das nulidades nos eixos coordenados.

Assim, as condições para que se verifiquem cada um dos casos (das Figuras 2.2 e 2.3) são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 \text{Caso1 : } & K_1 > \frac{K_2}{CN_2N_1}, & K_2 < \frac{K_1}{CN_1N_2} \\
 \text{Caso2 : } & K_2 > \frac{K_1}{CN_1N_2}, & K_1 < \frac{K_2}{CN_2N_1} \\
 \text{Caso3 : } & K_2 < \frac{K_1}{CN_1N_2}, & K_1 < \frac{K_2}{CN_2N_1} \\
 \text{Caso4 : } & K_2 > \frac{K_1}{CN_1N_2}, & K_1 < \frac{K_2}{CN_2N_1}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

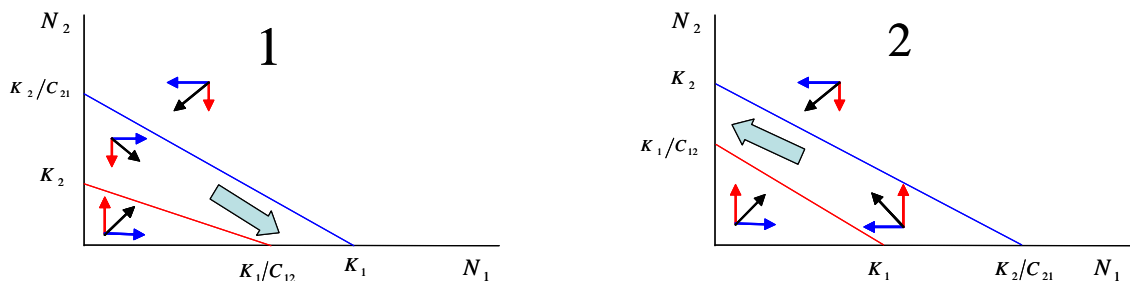


Figura 2.2: O grafico 1, N_2 extingue-se. O grafico 2, N_1 extingue-se.

Em seguida veremos análise de cada um dos casos.

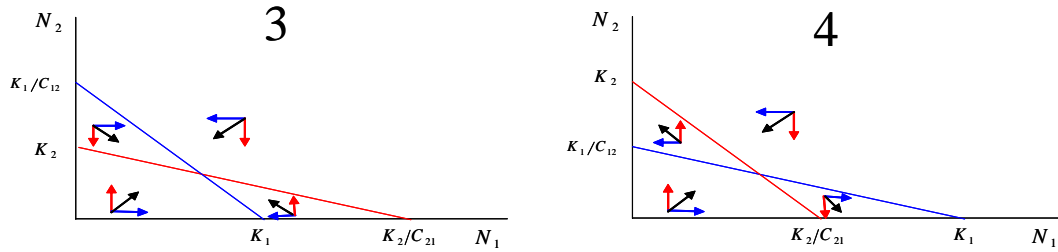


Figura 2.3: No gráfico 3, N_1 e N_2 tendem para o ponto equilíbrio e coexistem. O gráfico 4 N_1 ou N_2 é eliminada.

2.4.1 Os equilíbrios triviais

Consideramos a figura 2.2,1 onde possui três zonas no plano de fase, um ponto abaixo das nulidades de N_1 e N_2 tem a taxa de crescimento das duas espécies positiva, A resultante da deslocação das duas espécies indica a direção de deslocação do sistema de duas espécies, como podemos ver na figura 2.2, 1 a deslocação da densidade populacional das duas espécies na direção das suas nulidades e a força de resultante. Onde este resultado indica a direção do sistema de duas espécies. Assim se o sistema encontrar situações abaixo das duas nulidades, com o passar do tempo tenderá a deslocar-se em direção à nulidade da espécie N_2 (o que sucede na zona acima das duas nulidades é o oposto, mas tem consequências idênticas).

Portanto após um tempo todos os pontos aí estão abaixo da nulidade da espécie N_1 (crescimento na espécie N_1) e acima da nulidade da espécie N_2 (decrecimento na espécie N_2). Portanto, o sistema tem um equilíbrio trivial ($N_1 = K_1, N_2 = 0$) para o qual tende quaisquer que sejam as condições iniciais (desde, evidentemente, que $N_1 > 0$ no início): a espécie N_1 elimina a espécie N_2 .

O caso 2 está representado na Figura.2.2, 2. Seguindo raciocínio idêntico ao anterior, concluímos que qualquer ponto fora da zona entre as nulidades tende igualmente para o interior dessa zona. Uma vez aí, N_1 diminui até à extinção, enquanto a espécie N_2 aumenta até K_2 . O sistema tende para o equilíbrio trivial ($N_2 = K_2, N_1 = 0$). Neste caso foi a espécie N_2 que eliminou a espécie N_1 .

2.4.2 Equilíbrio não-trivial: com coexistência e sem coexistência

Nos casos 3 e 4, representado nas Figuras 2.2, 3 e 2.2, 4, as duas nulidade intersectam-se, dando origem a 4 zonas no espaço de fase. Tal como anteriormente, a posição das setas nas Figuras. 2.3.3 e 2.3.4 indica o sentido de deslocação das densidades populacionais em cada uma das zonas do espaço de fase.

Consideramos o caso 3. Como as setas indicam existe um ponto de equilíbrio globalmente estável, esse ponto encontra-se na intercessão das duas nulidades e atrai todas as trajetórias do sistema. Este resultado significa que no caso 3 é possível a coexistência entre as duas espécies, as suas densidades de equilíbrio, na presença uma da outra, são dadas pelas coordenadas do ponto de intercessão das nulidade onde são

$$N_1^* = \frac{K_1 - C_{12}K_2}{1 - C_{12}C_{21}} \text{ e } N_2^* = \frac{K_2 - C_{21}K_1}{1 - C_{12}C_{21}},$$

isto recorre pelo sistema escrito pelas equações (2.5).

O caso 4 (Figura 2.3,4). Recorde-se que o sistema acaba sempre por entrar numa das duas zonas entre nulidades, com extinção, da espécie N_2 ou da espécie N_1 . A espécie que se extingue depende da zona entre nulidade em que o sistema entra, o que, por sua vez, depende das abundâncias iniciais das espécies. A coexistência não é possível.

Yodzis (1989) designa este tipo de competição por competição contingente, na medida em que o destino final do sistema é contingente às condições iniciais do sistema [2].

Observe alguns exemplos numéricos para sistema de competição (2.3) onde envolve os quatro casos (2.6).

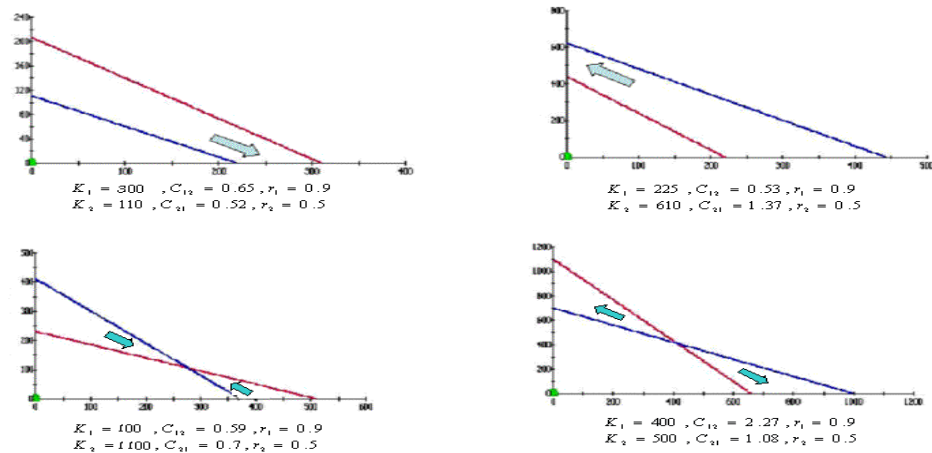


Figura 2.4: Alguns exemplos numéricos onde envolvem os quatro casos de competição.

2.5 Modelos de Predador–Presa: Sistemas de Lotka–Volterra

Alfred James Lotka e Vito Volterra de forma independente propuseram um mesmo modelo, denominado Lotka-Volterra, para explicar as interações entre populações de presas e predadores. As equações de Lotka-Volterra retratam um sistema presa-predador de duas espécies onde uma espécie, o predador, determina a abundância da outra, a presa.

Como exemplo podemos citar a interação entre raposas e coelhos, joaninhas e pulgões, tubarões e peixes, lincos e lebres, e etc.

Devido a interação entre as espécies, basicamente podem ocorrer três situações:

1. coexistência de presas e predadores;
2. presas são extintas e em consequência predadores também.
3. apenas predadores são extintos.

É importante lembrar que um modelo que contempla a interação de apenas duas espécies não é capaz de descrever completamente as relações que existem em um ecossistema. No entanto o entendimento de modelos mais simples é o passo inicial para a compreensão de outros mais complicados.

Se denotarmos por $N(T)$ e $P(T)$ as populações, respectivamente da presa e do predador em momento T então o modelo de Lotka- Volterra é:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dT} &= N(a - bP) \\ \frac{dP}{dT} &= P(cN - d).\end{aligned}\tag{2.6}$$

onde a , b , c e d são constantes positivas, a e d são respectivamente a taxa de crescimento da presa e a taxa de mortalidade do predador, b e c são medidas dos efeitos da interação entre as duas espécies.

As suposições no modelo Lotka–Volterra são:

- I) A presa na ausência de qualquer depredação cresce a uma taxa proporcional à população presente, isto é o um termo aN em (2.7).
- II) Os números de encontros do predador com a presa é proporcional ao produto das respectivas populações, cada encontro tende a promover o crescimento do predador e inibir o crescimento da presa. Assim a taxa de crescimento do predador é acrescida por parcela cNP em (2.7), enquanto a taxa de crescimento da presa é diminuída por uma parcela $-bPN$.
- III) Na ausência de qualquer presa para alimentar o predador, a taxa de mortalidade do predador resulta em decadência exponencial a sua população atual, assim se $N = 0$, $\frac{dp}{dt} = -Pd$, $d > 0$.

Note que as equações Lotka-Volterra formam um sistema não linear.

Obtendo o modelo, a próxima etapa é extrair informações dele. Uma maneira óbvia de fazê-lo seria resolver as equações diferenciais encontrando $N(T)$ e $P(T)$, através de uma solução numérica, por exemplo. entretanto, é possível conseguir informação sobre o comportamento das soluções de forma analítica sem necessariamente resolver as equações o que constitui uma boa abordagem inicial para o problema, pois não existe uma abordagem única e sistematizada para resolver equações não lineares (diferentemente de equações lineares).

Portanto na análise do modelo de Lotka–Volterra nós adimensionalizamos sistema, com as seguintes mudanças de variáveis,

$$u(t) = \frac{cN(T)}{d}, v(t) = \frac{bP(T)}{a}, t = aT \text{ e } \alpha = \frac{d}{a}. \quad (2.7)$$

Considerando a equação da presa em (2.7),

$$\frac{dN}{dT} = N(a - bP),$$

obtemos:

$$\frac{d}{c} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dT} = \frac{du(t)}{c} (a - av(t)),$$

o que após as simplificações obtemos:

$$\frac{du}{dt} = u(1 - v).$$

Analogamente para equação do predador no sistema (2.7)

$$\frac{dP}{dT} = P(cN - d),$$

temos:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{dv}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dT} = \frac{av(t)}{b} \left(\frac{cdu}{c} - d \right),$$

onde após simplificações e divisão por d obtemos,

$$\frac{dv}{dt} = \alpha v(u - 1).$$

Portanto o sistema (2.7) será escrito como

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u(1 - v) \\ \frac{dv}{dt} &= \alpha v(u - 1), \end{aligned} \quad (2.8)$$

dividindo as equações uma pela outra temos,

$$\frac{dv}{du} = \alpha \frac{v(u - 1)}{u(1 - v)}. \quad (2.9)$$

Logo temos pontos singulares $u = v = 0$ e $u = v = 1$. Integrando a equação (2.10) temos soluções periódicas,

$$\alpha u + v - \ln u^\alpha v = H. \quad (2.10)$$

De fato a equação (2.10) pode ser escrita da forma

$$\frac{a(u-1)du}{u} + \frac{(v-1)dv}{v} = 0,$$

onde possui a seguinte integral,

$$\alpha(u - \ln u) + v - \ln v = H \quad (2.11)$$

que pode ser escrita como (2.11).

Observe que H é constante, determinado pelos condições iniciais $u(0)$, $v(0)$ e $u(1)$, $v(1)$ e caso $u = v = 1$ temos $H_{\min} = 1 + \alpha$. Se $H > 1 + \alpha$ as trajetórias (2.11) no plano de fase são fechadas como ilustra em Figura 2.5.a.

Uma trajetória fechada no plano de fase u, v implica soluções periódicas em t para u e v em (2.9). As condições iniciais, $u(0)$ e $v(0)$, determinam a constante H em (2.12) e conseqüentemente a trajetória no plano de fase na Figura 2.5.a. Soluções periódicas de $u(t)$ e $v(t)$ são mostrados na Figura 2.5.b.

De fato examinamos inicialmente as soluções do sistema (2.9) nas vizinhanças da origem, pelos autovalores da matriz jacobiana. Considerando

$$f(u, v) = u(1 - v) \text{ e } g(u, v) = \alpha v(u - 1)$$

temos,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - v) & -u \\ \alpha v & \alpha(u - 1) \end{bmatrix}.$$

Portanto no ponto crítico $(0, 0)$ temos

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} = A,$$

a qual possui polinômio característico,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

e os autovalores como:

$$\lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = -\alpha.$$

Como um dos autovalores λ_1 é positivo e o outro, λ_2 , negativo, o ponto crítico $(0,0)$ é um ponto da sela instável.

Vamos agora considerar o ponto crítico $(u,v) = (1,1)$. Neste caso temos a matriz A como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

que, aqual possui polinômio característico,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ \alpha & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

e os autovalores como:

$$\lambda_1 = i\sqrt{\alpha} \text{ e } \lambda_2 = -i\sqrt{\alpha}.$$

Portanto o ponto crítico $(u,v) = (1,1)$ é Centro estável, pois auto valores são imaginários puros, e as soluções são da forma,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Ie^{i\sqrt{\alpha}t} + Me^{-i\sqrt{\alpha}t},$$

onde I e M são autovetores, portanto as soluções na vizinhança $u = v = 1$ são periódicas com período $\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}$ considerando (2.8) temos periodo $T = 2\pi \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$, observamos que este período de oscilação é independente das condições iniciais.

Foram observadas na natureza variações cíclicas de populações de predador e de presa previstas pelas equações (2.7). Com base nos registros da Hudson Bay Company, do Canadá, as populações de lincês e de lebres (lebres americanos), indicadas pelo número de peles recolhidas durante período de (1845-1935), mostram variações periódicas nítidas, com período de nove a dez anos. Os picos de abundância são seguidos por declínios muito rápidos, e os picos de abundância de lincês e de lebres estão fora de fase, com o das lebres precedendo ao dos lincês por um ano ou mais.

O modelo de Lotka-Volterra para problema do predador e presa revelou uma variação cíclica que poderia, talvez, ser antecipada. Por outro lado, a utilização do modelo Lotka-Volterra em outras situações pode levar a conclusões que não são intuitivamente evidente.

Uma crítica às equações de Lotka-Volterra é a de que na ausência de predador a população da presa cresce além de qualquer limite. Este fato pode ser corrigido introduzindo um efeito de inibição natural que uma população muito grande teria sobre a taxa de crescimento da população.

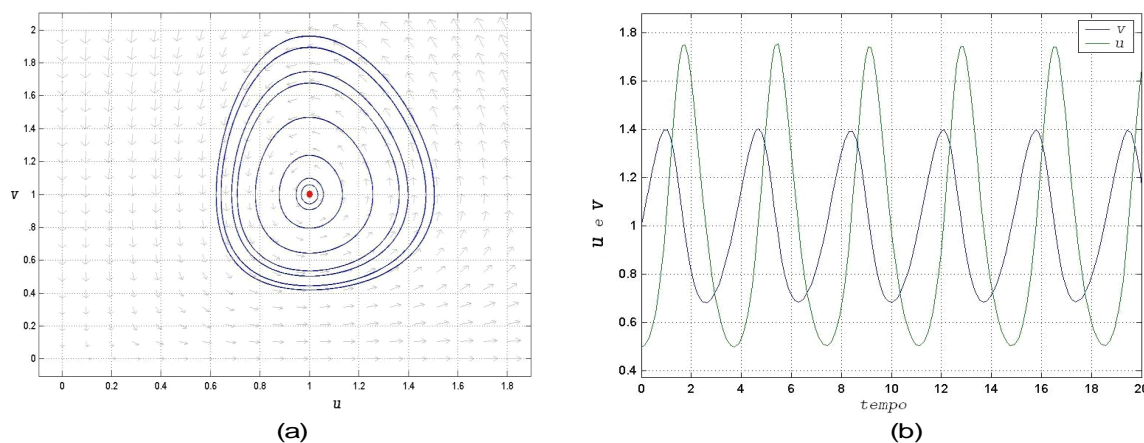


Figura 2.5: (a) Trajetórias do plano de fase (u, v) para (2.11) com vários valores de H , para o sistema de Lotka-Volterra, com $\alpha = 3$.(b) Soluções periódicas do sistema Lotka-Volterra.

2.6 Modelo Realístico de Peredador e Presa

O modelo Lotka-Volterra não é realístico embora sugere interação entre predador simples pode obter resultados periódicos nas populações. De fato

quando a população de presas aumenta isto estimula crescimento da população de predadores. E quando os predadores consomem mais presas essa população começa reduzir, e com menos comida ao redor do predador a população de predadores diminui. Este acontecimento permite o crescimento da presa, e o ciclo inteiro recomeça novamente, onde dependendo do sistema detalhado tais oscilações crescem ou se decrescem ou tendem a uma oscilação de limite cíclico estável. (uma solução de limite cíclico é uma trajetória fechada, no espaço de Predador-Preso, que não é de uma família contínua de trajetórias fechadas, como as soluções do modelo de Lotka-Volterra ilustrado em figura (3.1). Mas é uma trajetória que qualquer perturbação pequena, a distancia entre as trajetórias se tende para zero). Um exemplo esquemático de uma trajetória com limite cíclico é em um predador (P) de duas espécies e presa (N).

Uma das suposições irreais nos modelos de Lotka-Volterra (2.7) é que o crescimento de presa é ilimitado na ausência de predação. Nesta forma nós escrevemos este modelo onde este crescimento é mais realista;

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= NF(N, P) \\ \frac{dP}{dt} &= PG(N, P),\end{aligned}\tag{2.13}$$

onde as funções de F e G dependem da interação entre as espécies. Como primeiro passo nós poderíamos esperar que a presa tivesse um crescimento logístico na ausência de qualquer predador ou alguma dinâmica de crescimento semelhante, que tem algum ponto máximo de reprodutividade. Com esta condição nós temos;

$$\frac{dN}{dt} = NF(N, P) \quad \text{com} \quad F(N, P) = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) - PR(N).$$

Onde $R(N)$ é um termo de predação e K é constante (capacidade de suporte para presa quando $P \equiv 0$).

Alguns exemplos de termo de predação $NR(N)$ estão sendo mostrados nos próximos capítulos. A equação do predador no sistema Lotka-Volterra também pode ser mais realística. De fato, podemos escrever (modelo de Leslie);

$$G(N, P) = K \left(1 - \frac{hP}{N}\right) \quad \text{ou} \quad G(N, P) = -d + eR(N),\tag{2.14}$$

onde K , h , d e e são constantes positivas e $R(N)$ termo de predação. A primeira equação do (2.15) nos diz que a capacidade de predador é diretamente proporcional à densidade de presa.

Os modelos como estes são exemplos de muitos que foi propostos e estudados, eles são mais realista que o modelo clássico de Lotka-Volterra.

Todo estudo ao longo desta seção sobre sistema presa-predador leva em conta equações nas quais a interação entre as espécies considerada como acontecendo em uma mesma região do espaço. Este tipo de modelo, dito sem estrutura espacial, trata de população de toda uma região, e que sabe-se ser extensa espacialmente, como uma entidade única, desprezando as variações locais das populações. Isto seria equivalente a supor que as populações se distribuem homoganeamente no espaço. Assim, já que na natureza observa-se a ocorrência de populações distribuídas heterogeneamente nos seus habitantes, estes modelos deixam de lado esta questão importante:

Qual é a influência desta heterogeneidade sobre a dinâmica das populações?

Nos próximos capítulos nos desejamos modelar a dinâmica de um sistema predador-presa de um determinado ambiente, sendo que é importante conhecer, além da dinâmica temporal, a dinâmica espacial das populações também.

Uma maneira de abordar este problema seria dividir o ambiente em diversas regiões e adotar modelo local para cada região. Quando maior número de divisões maior seria a precisão do modelo. Para alcançar a precisão máxima teríamos que supor o tamanho de cada região como sendo uma infinitesimal de espaço, por conseqüência o modelo resultante seria de natureza contínua em relação do espaço.

Note que o modelo (2.13) não contempla a migração de indivíduos. Para acrescentar isto à modelagem, será considerado que o movimento dos indivíduos ocorre da forma aleatória, o que corresponde a considerar que as densidades populacionais obedecem a equações de difusão.

Capítulo 3

EQUAÇÕES DE REAÇÃO DIFUSÃO

Resumo do capítulo:

Neste capítulo faremos um estudo sobre equações reação de difusão, deduzindo uma fórmula matemática em relação à densidade das partículas no espaço unidimensional e tridimensional.

3.1 Introdução

Em conjunto dos indivíduos (como bactérias, células, produtos químicos, animais e etc.) cada partícula tem movimento, onde estes movimentos não são regulares, por exemplo no caso de células. Quando estes movimentos microscópicos irregulares juntam obtemos um grande movimento regular que chamaremos de processo de difusão.

É claro que existe alguma influência do meio ambiente no movimento regular das partículas, que não pode ser dito simplesmente difusão. Analisaremos o comportamento microscópico para obtenção do modelo de equação global em termo de densidade de partícula ou concentração.

Nós mostramos a probabilidade de movimento em uma partícula a um determinado modelo. Para simplificar consideremos inicialmente só com espaço

unidimensional, generalização de dimensão superior é analogamente simples.

3.2 Simples Excursão Aleatório e Derivada de Equação de Difusão

Suponhamos que uma partícula movimenta para frente e para atrás, fixamos um deslocamento (Δx) em determinado tempo (Δt), existem duas probabilidades, a partícula pode parar do lado direito ou esquerdo do ponto inicial.

Se ponto inicial de movimento seja origem após $n \cdot \Delta t$ tempo a partícula pode se localizado em $-n\Delta x$ ou $n\Delta x$.

Portanto se nós liberamos muitas partículas na posição $x = 0$ a probabilidade de encontrar uma delas em posição $x = n\Delta x$ após n etapas é muito pouco comparando com pontos mais próximos de $x = 0$, nós queremos a probabilidade de encontrar uma partícula na posição m após tempo n ($p(m, n)$) onde $x = m\Delta x$ e $t = n\Delta t$. Portanto temos $m = a - b$, $n = a + b$ logo $a = \frac{n+m}{2}$, $b = n - a$.

O número de possibilidade de caminhos para uma partícula chegar ao ponto $x = m\Delta x$ é

$$\frac{n!}{a!b!} = \frac{n!}{a!(n-a)!} = C_a^n,$$

isto é o total possibilidade de uma partícula chegar no ponto n após a etapas de deslocamento onde C_a^n é coeficiente de binomial,

$$(x, y)^n = \sum_{a=0}^n C_a^n x^{n-a} y^a. \quad (3.1)$$

Por exemplo um dos caminhos para que uma partícula localizada no ponto $x = 0$ chegar em ponto $x = -2$ após $n = 8$ etapas de deslocamentos é mostrada na Figura 3.1 onde neste caso temos $m = a - b = -2$ e $n = a + b = 8$,

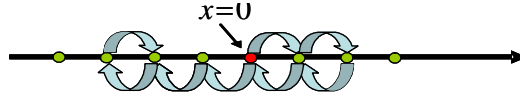


Figura 3.1: No caso $a = 3$ e $b = 5$.

Total possibilidade em n -ésima etapa é 2^n logo temos:

$$P(m, n) = \frac{\text{possibilidade, favoritas}}{\text{total, possibilidade}} = \frac{\frac{n!}{a!(n-a)!}}{2^n} = \frac{n!}{2^n a!(n-a)!} \text{ onde } a = \frac{n+m}{2}. \quad (3.2)$$

Se $n = m$ temos $a = \frac{n+n}{2} = n$ e $b = 0$ então,

$$p(m, n) = \frac{n!}{a!(n-a)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad (3.3)$$

portanto;

$$\sum_{m=-n}^n p(m, n) = 1, \quad (3.4)$$

de fato:

$$\sum_{m=-n}^n p(m, n) = \sum_{a=0}^n C_a^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-a} \left(\frac{1}{2}\right)^a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^n = 1.$$

Agora se n for suficiente grande então $n+m$ e $n-m$ são grandes também, então temos esta aproximação,

$$n! \sim (2\pi n)^{\frac{1}{2}} n^n e^{-n} \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Obs: considerando a função Gama (Γ) que está definido como:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = n!,$$

onde pode ser considerado como uma generalização da função fatorial.

Observe que quando $n \rightarrow \infty$ obtemos aproximação (3.6).

Usando as equações (3.3) e (3.5) obtemos,

$$p(m, n) \sim \left[\frac{2}{\pi n}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{-m^2}{2n}\right], \quad (3.6)$$

com $m \gg 1$ e $n \gg 1$.

Se nós consideramos $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, então $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ quando x e t são limitados, então isto não é adequado para ter $p(m, n)$ pois para $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ a probabilidade mostra zero. Por isto consideramos $u = \frac{p}{2\Delta x}$ logo $u2\Delta x$ é probabilidade de encontrar uma partícula no intervalo $(x, x + \Delta x)$ em tempo t , portanto sabendo que $m = \frac{x}{\Delta x}$ e $n = \frac{t}{\Delta t}$ na equação (3.7) obtemos:

$$\frac{p\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{t}{\Delta t}\right)}{2\Delta x} \sim \left[\frac{2}{2\pi\frac{t}{\Delta t}\Delta x}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{-x^2}{\frac{2t}{\Delta t}2\Delta x}\right],$$

ou seja,

$$\left[\frac{\Delta t}{2\pi t(\Delta x^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{-x^2\Delta t}{2t(\Delta x)^2}\right]$$

portanto,

$$\frac{p\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{t}{\Delta t}\right)}{2\Delta x} \sim \left[\frac{\Delta t}{2\pi t(\Delta x^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{-x^2\Delta t}{2t(\Delta x)^2}\right]. \quad (3.7)$$

Se assumimos que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0} \frac{p\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{t}{\Delta t}\right)}{2\Delta x} = D \neq 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$ a equação anterior nos obtemos,

$$u(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0} \frac{p\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{t}{\Delta t}\right)}{2\Delta x} \sim \left[\frac{1}{4\pi Dt}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{-x^2}{4Dt}\right], \quad (3.8)$$

onde D é chamado de coeficiente difusão ou difusividade de partícula com unidade de $\frac{(\text{comprimento})^2}{\text{tempo}}$, e medida de D varia com partícula espalhar com auto ou baixo de densidade. Por exemplo as moléculas de Hemoglobina de sangue tem difusividade de ordem $10^{-7} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ e oxigeno no sangue tem ordem $10^{-5} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$.

Portanto, se consideramos $c(x, t)$ como concentração de partícula então a difusão instavel (J) é dado por;

$$J = -D \frac{\partial c}{\partial x}. \quad (3.9)$$

Agora para generalizar se região é $x_0 < x < x_1$ então: $\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_0}^{x_1} c(x, t) dx = J(x_0, t) - J(x_1, t)$ se $x_1 = x_0 + \Delta x$ tomando $\Delta x \rightarrow 0$ e sabendo a igualdade

(3.10) nos temos equação difusão clássica em espaço unidimensional,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\partial \left(D \frac{\partial c}{\partial x} \right)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (3.10)$$

Se nós liberamos uma quantidade N de partícula em posição $x = 0$ em $t = 0$ isto é $c(x, 0) = N\delta(x)$ onde $\delta(x)$ é função Delta, então a solução da equação diferencial (3.11) é:

$$c(x, t) = \frac{N}{2(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \quad t > 0 \quad (3.11)$$

Portanto a probabilidade de que uma partícula em $x = 0$ e $t = 0$ desloca x em t tempo onde em $t - \Delta t$ a partícula esteja em $x - \Delta x$ ou $x + \Delta x$. Considerando α e β como probabilidade de partícula se mover para direita ou esquerda, é:

$$p(x, t) = \alpha p(x - \Delta x, t - \Delta t) + \beta p(x + \Delta x, t - \Delta t), \quad (3.12)$$

onde $\alpha + \beta = 1$, o caso estas probabilidades sejam iguais ($\alpha = \beta = 1/2$) temos,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left[\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \right] \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \dots, \quad (3.13)$$

Se $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$ $\lim \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} = D$ logo temos,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (3.14)$$

se total número de partículas são N então a concentração das partículas é,

$$c(x, t) = N.P(x, t), \quad (3.15)$$

de fato

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (3.16)$$

de (3.16) e (3.17) obtemos

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D. \quad (3.17)$$

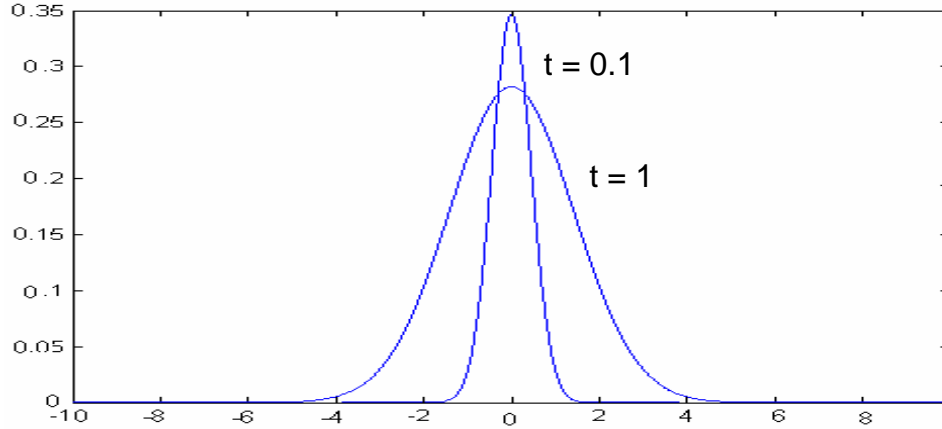


Figura 3.2: Distribuição de concentração de partícula para N partículas lançado em $x = 0$ a $t = 0$, e difusão de acordo com equação de difusão 3.12

3.3 Equação de Reação Difusão

Considere agora a difusão no espaço tridimensional e seja S um subespaço com volume V .

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V c(x, t) dx = - \int_S J ds + \int_V f dv, \quad (3.18)$$

com J fluxo de material, e f fonte material onde pode ser em relação c , x e t . Aplicando o teorema da superfície integral, e assumindo que $c(x, t)$ é contínua obtemos,

$$\int_V \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla J - f(c, x, t) \right] dv = 0 \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla J - f(c, x, t) = 0, \quad (3.19)$$

desde que volume (V) é arbitrário integral deve ser zero e equação de conservação para c é;

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla J = f(c, x, t). \quad (3.20)$$

Esta equação generaliza forma geral de fluxo J tanto para difusão como para outro processo. Como $J = -D\nabla c$ então temos,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = f + \nabla (D\nabla c), \quad (3.21)$$

onde D é função em relação de x e c , e f função de c , x e t . O termo de fonte f em um contexto ecológico poderia representar o nascimento, e c densidade

de população, portanto no crescimento logístico de população (1.3) onde r é a taxa de reprodução linear e k a capacidade de suporte, nos resulta,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = r.N \left(1 - \frac{N}{k}\right) + D\nabla^2 N, \quad (3.22)$$

conhecido como a equação de Fisher-Kolmogoroff analisado detalhadamente no capítulo 4.

Existe uma generalização da equação (3.22) onde existe varias espécies ou substâncias químicas interagindo . Temos um vetor $u_i(x, t)$ com $i = 1, 2, \dots, m$ de densidade ou concentrações com seu próprio coeficiente de difusão D_i , interagindo de acordo com f , portanto a equação (3.22) se torna como,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f + \nabla (D\nabla u).$$

Nos próximos capítulos usamos termo de difusão nos modelos apresentados para que sejam mais realísticos.

Capítulo 4

ONDAS VIAJANTES

Resumo do capítulo:

Neste capítulo estudaremos a mudança da densidade de uma população de uma espécie em longo tempo em uma equação de reação difusão, e definimos as ondas viajantes, onde nos mostra a mudança da densidade após longo tempo. E apresentamos um modelo matemático que pode representar estas ondas e a importância deles na análise de existência da espécie, também serão estudados o modelo de Fisher-Kolmogorov no caso local e não local.

4.1 Introdução

Nesta parte, estamos interessados nas relações entre os pontos críticos e os comportamentos das trajetórias no plano de fase na dinâmica da população. Para isto consideramos a equação de reação de difusão no espaço de unidimensional,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde u é concentração de espécie, $f(u)$ representa as cinéticas e D é coeficiente de difusão (neste caso constante). Neste capítulo definimos ondas viajantes como uma onda que viaja sem mudança de forma. Assim se $u(x, t)$ representa uma onda viajante, então a forma da solução será o mesmo em todo tempo e a

velocidade de propagação desta onda é uma constante, que denotamos por c . O modelo matemático que podemos apresentar para esta onda é:

$$u(x, t) = U(x - ct) = U(z) \quad \text{com } z = x - ct \quad (4.1)$$

então $u(x, t)$ é onda viajante, onde move com velocidade constante c na direção de x positivo. Observe que se $x - ct$ é constante, então u também será constante onde mostra a coordenada de movimento do sistema com velocidade c . Quando c está na direção de x negativo, então temos $U(x + ct)$. A variável dependente z é chamada de variável de onda. Quando nós procuramos soluções de ondas viajantes numa equação em x e t na forma (4.1), nós temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{du}{dz} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dz}.$$

Observe que as equações parciais em x e t , tornam-se como equações diferenciais ordinárias em z , e por outro lado $u(z)$ deve ser sempre positiva pois o caso realístico sob ponto de visto ecológica ($u(z)$ representa densidades como substâncias químicas, populações, bactérias,...).

Embora a maioria dos modelos realistas de interesse biológico envolve mais de uma dimensão espacial e mais de uma variável dependente, nós por simplicidade, consideramos o modelo de Fisher-Kolmogorov numa dimensão espacial e analisamos a existência de ondas viajantes entre os pontos de críticos deste modelo.

4.2 Equação e propagação das soluções de ondas viajantes no modelo Fisher-Kolmogorov

Considere o caso clássico de equação de difusão sugerido por Fisher em 1937 com crescimento logístico na dinâmica da população:

$$\frac{\partial u}{\partial T} = ru \left(1 - \frac{u}{k}\right) - D \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}, \quad (4.2)$$

onde os parâmetros k e D são reais positivos nomeados capacidade de suporte do meio e coeficiente de difusão, respectivamente.

Adimensionalizamos a equação (4.2) para reduzir o número de parâmetros com as seguintes variáveis:

$$t = kT \text{ e } x = X \left(\frac{k}{D} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Com isso, nós obtemos,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1-u) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.3)$$

Como já foi visto no primeiro capítulo, temos que o primeiro termo da equação (4.3) possui dois pontos de equilíbrio ($u = 0$ e $u = 1$) onde o ponto equilíbrio $u = 0$ é instável e $u = 1$ estável. Portanto devemos procurar a possibilidade de ondas viajantes da equação (4.3) no intervalo entre os pontos de críticos. Neste caso as soluções de ondas viajantes podem ser escritas como,

$$u(x, t) = U(z) \text{ , } z = x - ct.$$

Assumimos que $c \geq 0$ (velocidade da onda) e fazendo a mudança de variável para variável de onda em (4.3), isto é:

$$u_t = \frac{dU}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dU}{dz} (-c) = -cU', \quad (4.4)$$

$$u_{xx} = \frac{dU'}{dz} = U'',$$

onde após substituição em (4.3) temos:

$$U'' + cU' + U(1-U) = 0. \quad (4.5)$$

para obter mais informações do ponto de vista qualitativo escrevemos a equação (4.5) como um sistema de equações de primeira ordem, isto é:

$$\begin{cases} U' = V \\ V' = -cV - U(1-U), \end{cases} \quad (4.6)$$

que nos dá o comportamento das soluções no plano de fase como,

$$\frac{dV}{dU} = \frac{-cV - U(1 - U)}{V}.$$

O sistema (4.6) possui dois pontos singulares $(0, 0)$ e $(1, 0)$. Para estudarmos o tipo de estabilidade destes pontos no plano de fase calculamos os autovalores da matriz jacobiano do sistema (4.6). De fato, se consideramos $f(U, V) = V$ e $g(U, V) = -cV - U(1 - U)$ então temos,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial U} & \frac{\partial f}{\partial V} \\ \frac{\partial g}{\partial U} & \frac{\partial g}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2U - 1 & -c \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Analisando o polinômio característico no ponto $(0, 0)$, obtemos,

$$\det(\lambda I - J(0, 0)) = \det \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + c \end{vmatrix} = 0, \quad (4.8)$$

ou seja,

$$\lambda^2 + c\lambda + 1 = 0,$$

que nos dá os autovalores

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4}}{2}. \quad (4.9)$$

portanto, o ponto $(0, 0)$ é um nó estável se $c^2 > 4$, pois os autovalores serão reais com sinais negativos, e será um nó espiral estável se $c^2 < 4$. Portanto, para obter soluções realísticas, em ponto de vista ecológico, consideramos $c \geq 2$ pois no caso contrario obtemos $-2 < c < 2$ que é um nó espiral e obtemos valores negativos para densidade da população ou $c < -2$ sendo a velocidade de onda é não negativo esta possibilidade também não será possível.

No ponto crítico $(1, 0)$ obtemos o seguinte polinômio característico:

$$\det(\lambda I - J(1, 0)) = \det \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda + c \end{vmatrix} = 0, \quad (4.10)$$

ou seja,

$$\lambda^2 + c\lambda - 1 = 0,$$

com autovalores.

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4}}{2}, \quad (4.11)$$

portanto o ponto $(1,0)$ é um ponto da sela instável para todo valor de $c > 0$, pois os autovalores são reais com sinais opostos. Logo, considerando os resultados em pontos críticos, existe a possibilidade de onda viajante do ponto de equilíbrio instável $(1,0)$ para o ponto de equilíbrio estável $(0,0)$ na forma monótona se $c \geq 2$. Assim, como pode ser visto na Figura (4.1).

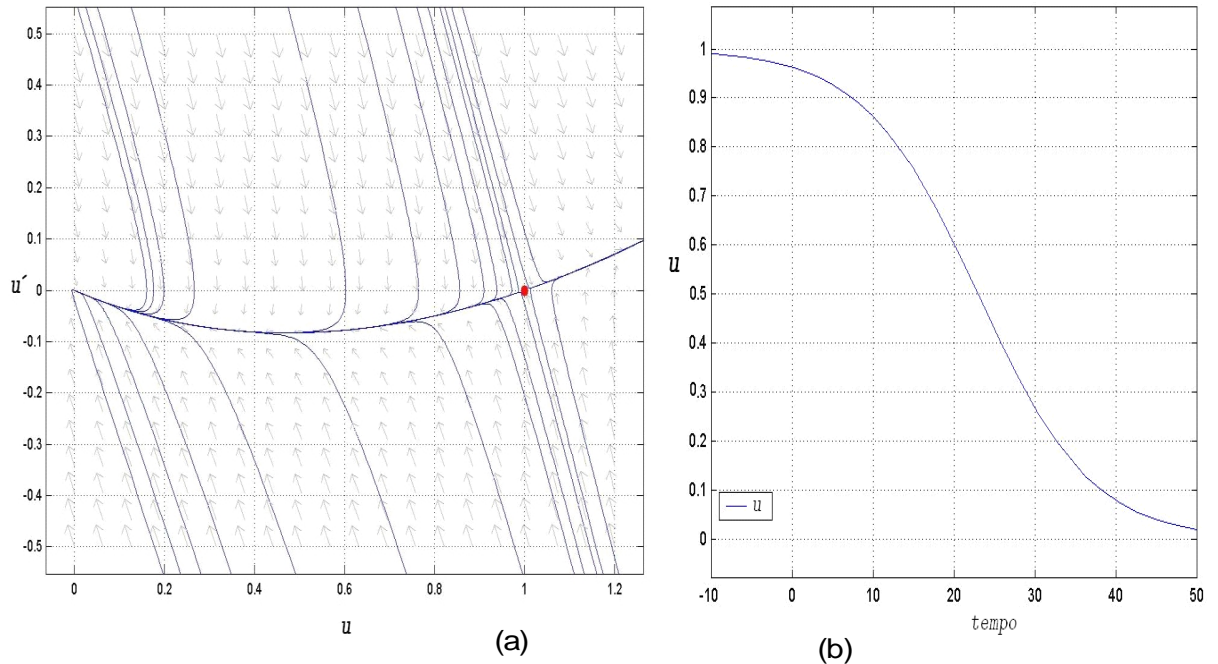


Figura 4.1: a) O plano de fase para equação (5.3) com velocidade de onda $c = 7$. b) Onda viajante para correspondente a equação (5.3).

4.3 Soluções de Ondas Viajantes Para Equação de Fisher Não Local

O nosso objetivo é analisar a pergunta da existência, e perfil qualitativo das soluções por ondas viajantes da equação não local de Fisher com uma espécie.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(x, t) \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) u(y, t) dy \right), \quad (4.12)$$

em domínio $x = (-\infty, \infty)$.

O motivo de estudo este tipo de equação é pela hipótese de recursos limitados e análise desta equação é baseada no artigo de Gourley [5] com maiores detalhes.

A função g , conhecido como a função núcleo, faz parte do termo não local da equação. Supomos que,

$$\begin{aligned} \text{I) } & g \geq 0, \\ \text{II) } & g(x) = g(-x), \\ \text{III) } & \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

De fato como a influência dos indivíduos dessa espécie entre si somente depende de distância entre eles e não do sentido, consideramos a função núcleo g uma função par e para simplificação das contas e obter os pontos de equilíbrio semelhantes à equação de Fisher local, consideramos $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$. Um caso particular para g pode ser considerado, a título de ilustração como:

$$g(x) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda|x|} \text{ com } \lambda > 0, \quad (4.14)$$

que é chamada de Distribuição de Laplace ou distribuição exponencial bilateral. (Figura 4.2)

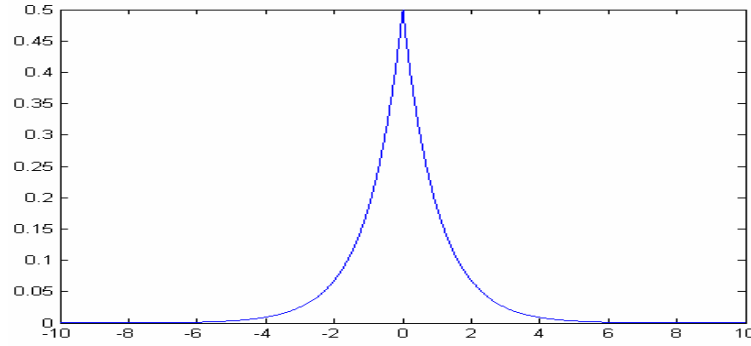


Figura 4.2: O gráfico da distribuição exponencial bilateral (4.14) com $\lambda = 1$.

4.4 Persistência Das Ondas.

Nós sabemos que soluções do tipo ondas viajantes existem para a equação de Fisher (4.2). Nesta seção analisamos a equação de Fisher não local (4.12) e os pontos de equilíbrio, estabilidade e a existência de ondas viajantes entre estes pontos. Matematicamente então nós mostremos nesta seção a existência das ondas viajantes entre as soluções de equação (4.12) conectando estados de equilíbrio $u = 0$ e $u = 1$.

Para isto consideramos a variável de onda [$u(x, t) = U(z) = U(x - ct)$] na equação (4.12) para obter

$$U'' + cU' + U \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} g(w) U(z - w) dw \right) = 0. \quad (4.15)$$

Para simplificar a equação (4.15) com termo integral, aproximamos esta equação em série Taylor sobre termo não local $U(z - w)$ sobre variável z , onde este série é representado como:

$$U(z - w) = U(z) + \frac{U'(z)}{1!} (-w) + \frac{U''(z)}{2!} (-w)^2 + \frac{U'''(z)}{3!} (-w)^3 + \dots,$$

substituindo na equação (4.15) e notando que $\int_{-\infty}^{\infty} w^n g(w) = 0$ se n é Impar (pois $g(w)$ é uma função par e temos $w^{2n+1}g(w)$ uma função Impar) portanto a equação (4.15) se reescreve como,

$$U'' + cU' + U \left\{ 1 - \int_{-\infty}^{\infty} g(w) \left[U(z) + \frac{U'(z)}{1!} (-w) + \dots \right] d(w) \right\} = 0,$$

ou seja,

$$U'' + cU' + U \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2n!} \int_{-\infty}^{\infty} w^{2n} g(w) dw \right] U^{2n}(z) \right\} = 0, \quad (4.16)$$

onde temos um equação diferencial de ordem infinito.

Nosso objetivo é escrever o núcleo g , de tal forma que para algum parâmetro pequeno ε o núcleo se aproxime da função Delta de Dirac quando $\varepsilon \rightarrow 0$ de forma que as equações (4.15) e (4.16) se reduzam para a equação de Fisher.

Neste caso assumimos que o núcleo satisfaz as propriedades P definidas como:

- I) g é da forma $g(w) = \frac{1}{\varepsilon} g^* \left(\frac{w}{\varepsilon} \right)$
- II) $\int_{-\infty}^{\infty} g^*(w) dw = 1$
- III) $|g^*(w)| \leq A e^{-M|w|}$ para algumas constantes A, M positivas.

Portanto para qualquer $\varepsilon > 0$ temos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(w) dw = 1,$$

e quando $w \neq 0$ obtemos,

$$|g(w)| = \frac{1}{\varepsilon} \left| g^* \left(\frac{w}{\varepsilon} \right) \right| \leq \frac{A}{\varepsilon} \left(e^{-M|w|} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Note que $\frac{A}{\varepsilon} \left(e^{-M|w|} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, com $w \neq 0$. Portanto g tende para a função Delta logo a equação (4.16) pode ser escrita, considerando $g(w) = \frac{1}{\varepsilon} g^* \left(\frac{w}{\varepsilon} \right)$, como:

$$U'' + cU' + U \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\varepsilon^{2n}}{2n!} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{2n} g^*(\varepsilon) d\varepsilon \right] U^{2n}(z) \right\} = 0. \quad (4.17)$$

Observe que a equação (4.16) pode ser aproximada truncando a soma infinita para os primeiros termos desta série pelo fato de que a função g ter decaimento rápido quando $|w| \rightarrow \infty$. Portanto os primeiros termos de esta função já fornecem uma boa aproximação para g .

$$U'' + cU' + U \left\{ 1 - \sum_{n=0}^2 \varepsilon^{2n} a_{2n} U^{2n}(z) \right\} = 0,$$

onde $\delta = \varepsilon^2$ e $a_{2n} = \frac{1}{2n!} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{2n} g(\varepsilon) d\varepsilon$. Ou seja,

$$U'' + cU' + U \left[1 - a_0U(z) - \delta a_2U''(z) - \delta^2 a_4U''''(z) \right] = 0.$$

Reformulamos a equação acima como um sistema de primeira ordem,

$$\begin{cases} U' = V_1 \\ V_1' = V_2 \\ \delta V_2' = V_3 \\ \delta a_4 UV_3' = V_2 + cV_1 + U(1 - U - \delta a_2 V_2). \end{cases} \quad (4.18)$$

A solução deste sistema está no espaço 4-dimensinal (U, V_1, V_2, V_3) . portanto as soluções (4.18) são da forma, $(0, 0, 0, 0)$ e $(1, 0, 0, 0)$, portanto o sistema tem dois estados de equilíbrio (ponto Critico), $(0, 0, 0, 0)$ e $(1, 0, 0, 0)$.

Se uma conexão heterocíclica pode ser encontrada entre estes pontos então temos chance da existência de uma solução em (4.15).

Note que quando $\delta = 0$ sistema acima se reduz a duas equações. Neste caso a solução do sistema tem como suporte variedade M_0 definida como,

$$M_0 = \left\{ (U, V_1, V_2, V_3) \in R^4; V_3 = 0 \text{ e } V_2 + cV_1 + U(1 - U) = 0 \right\}, \quad (4.19)$$

que é bidimensional.

O que nós afirmamos é que quando $\delta > 0$ temos pequenos perturbações de M_0 em uma variedade M_δ que também possui os dois pontos de equilíbrio,

$$M_\delta = \left\{ \begin{array}{l} (U, V_1, V_2, V_3) \in R^4; V_3 = g(U, V_1, \delta) \text{ e} \\ V_2 = -cV_1 - U(1 - U) + h(U, V_1, \delta) \end{array} \right\}, \quad (4.20)$$

onde g e h satisfazem,

$$g(U, V_1, 0) = h(U, V_1, 0) = 0. \quad (4.21)$$

Substituindo as igualdades (4.20) no sistema (4.18) obtemos na 3ª equação desta sistema que;

$$\delta [-cV_1 - U(1 - U) + h(U, V, \delta)]' = g(U, V_1, V_2),$$

onde nos dá:

$$\delta \left[\left(-c + \frac{\delta h}{\delta V_1} \right) [-cV_1 + U(1-U) + h] + \frac{\delta h}{\delta U} V_1 - (1-2U)V_1 \right] = g(U, V_1, V_2), \quad (4.22)$$

e na 4ª equação,

$$\delta a_4 UV_3' = V_2 + cV_1 + U(1-U - \delta a_2 V_2),$$

obtemos,

$$\delta a_4 U \left\{ \frac{\delta g}{\delta U} V_1 + \frac{\delta g}{\delta V_1} [-cV_1 - U(1-U) + h] \right\} = h - \delta a_2 U [-cV_1 - U(1-U) + h]. \quad (4.23)$$

Nós supomos que as funções g e h são bem comportadas em relação ao termo δ . Logo podemos buscar soluções em termo de série de perturbações em δ devido a (4.21). Assim, nós temos:

$$\begin{aligned} g(U, V_1, \delta) &= \delta g_1(U, V_1) + \delta^2 g_2(U, V_1) + \dots, \\ h(U, V_1, \delta) &= \delta h_1(U, V_1) + \delta^2 h_2(U, V_1) + \dots, \end{aligned} \quad (4.24)$$

embora tenhamos, g e h nós so precisamos de h para encontrar as soluções da sistema. substituindo e comparando as potencias de δ achamos,

$$\begin{aligned} h_1(U, V_1) &= a_2 U [-cV_1 - U(1-U)], \\ h_2(U, V_1) &= U [-cV_1 - U(1-U)] \left\{ a_2^2 U + a_4 (c^2 - 1 + 2U) \right\} \\ &\quad + a_4 UV_1 [2V_1 + c(1-2U)], \end{aligned} \quad (4.25)$$

a dinâmica no múltiplo M_δ é determinada pelas primeiras duas equações de(4.18) junto com equação h relativo com outros variáveis na definição de M_δ assim,

$$\begin{cases} U' = V_1 \\ V_1' = -cV_1 - U(1-U) + \delta h_1(U, V_1) + \delta^2 h_2(U, V_1) \end{cases} \quad (4.26)$$

onde h_1 e h_2 são como dado em (4.25). Note que (4.26) ainda possui dois pontos de equilíbrio $(U, V_1) = (0,0)$ e $(U, V_1) = (1,0)$ quando $\delta = 0$. Como já

foi visto no início do capítulo na equação (4.5) o ponto crítico $(0,0)$ é um nó estável para valores grandes de c e o ponto crítico $(1,0)$ é um ponto de sela, e existe uma conexão entre os estados de equilíbrio $(0,0)$ e $(1,0)$. Portanto para $\delta > 0$ mas pequenos, também pode ser mostrado que plano de fase para (4.26) ainda inclui esta conexão. nós temos que provar a equação (4.12) tem soluções de ondas viajantes para regiões bem localizadas.

O sistema (4.26) no ponto de equilíbrio $(1,0)$ tem um autovalor satisfazendo a seguinte equação (polinômio característico),

$$\lambda^2 + \alpha\lambda - \beta = 0, \quad (4.27)$$

onde:

$$\alpha = c - \delta a_2 c + \delta^2 a_2^2 c + \delta^2 a_4 c^3 + 2\delta^2 c a_4$$

e

$$\beta = 1 - \delta a_2 + \delta^2 \left[a_2^2 + a_4 (c^2 + 1) \right].$$

De fato este sistema possui a seguinte matriz jacobiana:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2u - 1 - \delta \frac{\partial h_1}{\partial u} + \delta^2 \frac{\partial h_2}{\partial u} & -c - \delta \frac{\partial h_1}{\partial v} + \delta^2 \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{bmatrix}$$

sendo que h_1, h_2 são dados na equação (4.25), onde apos encontrar as derivadas parciais (h_1, h_2) e substituição do ponto $(1,0)$ na matriz jacobiano temos o polinômio (4.27). Note que os autovalores sempre são reais e com sinal opostos, isto confirma que o ponto equilíbrio $(1,0)$ é ponto da sela.

Consideramos λ_+ como autovalor positivo relacionado ao ponto crítico $(1,0)$ com $\delta = 0$, portanto para $\delta > 0$ porém suficientemente pequeno temos autovalor,

$$\lambda = \lambda_+ + \delta\lambda_1 + O(\delta^2)$$

substituindo $\lambda = \lambda_+ + \delta\lambda_1$ em (4.27) nos dá

$$\lambda_1 = \frac{a_2(1 - c\lambda_+)}{2\lambda_+ + c}$$

é visto facilmente que $\lambda_+ < \frac{1}{c}$ da forma que $\lambda_1 > 0$, e efeito de δ é aumentar autovalor positivo e correspondentemente autovetor $(1, \lambda)^T$.

4.5 Análise assintótica para grandes valores de c

Nesta seção nos analisamos uma aproximação assintótica para solução

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(x, t) \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) u(y, t) dy \right], \quad (4.28)$$

no limite quando $c \rightarrow \infty$ onde agora o núcleo é qualquer função que satisfaz as propriedades (4.13) na equação de ondas viajantes (4.15) com condição de contorno

$$U(-\infty) = 1 \text{ e } U(+\infty) = 0.$$

Para fixar a posição de onda consideramos $U(0) = \frac{1}{2}$, e assumimos c (velocidade de onda) suficientemente grande e introduzimos pequeno parâmetro $\varepsilon = \frac{1}{c^2}$, onde olhamos para as soluções de (4.15) de forma $U(z) = f(\zeta)$ e $\zeta = \varepsilon^{\frac{1}{2}} z = \frac{z}{c}$. Portanto a equação (4.15) pode ser escrita como,

$$\varepsilon f'' + f' + f \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}\right) f(\eta) \frac{\partial \eta}{\sqrt{\varepsilon}} \right] = 0, \quad (4.29)$$

onde $f(-\infty) = 1$, $f(\infty) = 0$ e $f(0) = \frac{1}{2}$. De fato,

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \frac{1}{c}$$

logo,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2} \frac{1}{c^2}$$

e

$$U(w) = f\left(\frac{w}{c}\right) = f\left(\frac{C\eta}{C}\right) = f(\eta).$$

Se substituirmos em equação (4.15) obtemos (4.29). O modo singular no qual ε surge no integral pode ser removido pela substituição $\frac{(\varepsilon-\eta)}{\sqrt{\varepsilon}} = w$, depois do qual a integral se torna:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(w) f(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon}w) dw,$$

que pode ser aproximado, aplicando em f uma série de Taylor sobre o termo ζ . com isso obtemos;

$$f(\zeta - \sqrt{\varepsilon}w) = f(\zeta) + \frac{f'(\zeta)}{1!} (-\sqrt{\varepsilon}w) + \frac{f''(\zeta)}{2!} (-\sqrt{\varepsilon}w)^2 + \dots,$$

sendo $\int_{-\infty}^{\infty} w^n g(w) = 0$ quando n é ímpar. Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(w) \left[f(\zeta) + \frac{f'(\zeta)}{1!} (-\sqrt{\varepsilon}w) + \frac{f''(\zeta)}{2!} (-\sqrt{\varepsilon}w)^2 \right] dw.$$

Após distribuição de integral temos:

$$f(\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} g(w) dw + \frac{f'(\zeta)}{1!} \int_{-\infty}^{\infty} g(w) (-\sqrt{\varepsilon}w) dw + \frac{f''(\zeta)}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} g(w) (-\sqrt{\varepsilon}w)^2 dw + \dots$$

onde a primeira integral é um e a segunda é zero pois a potência de $(-\sqrt{\varepsilon}w)$ é ímpar. Logo a equação (4.29) pode ser escrita na forma aproximada como:

$$\varepsilon(1 - \gamma f) f'' + f' + f(1 - f) = 0 \quad \text{onde} \quad \gamma = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 g(w) dw. \quad (4.30)$$

Nós buscamos uma solução para (4.30) da forma

$$f(\zeta) = f_0(\zeta) + \varepsilon f_1(\zeta) + O(\varepsilon^2),$$

substituindo esta solução em (4.30) e considerando $f'(\zeta) = f'_0(\zeta) + \varepsilon f'_1(\zeta) + O(\varepsilon^2)$, e $f''(\zeta) = f''_0(\zeta) + \varepsilon f''_1(\zeta) + O(\varepsilon^2)$ temos,

$$\{f'_0 + f_0(1 - f_0)\} + \varepsilon \{(1 - \gamma f_0) f''_0 + f'_1 + (1 - 2f_0) f_1\} + \dots = 0,$$

logo a potência ε^0 nos dá $f'_0 + f_0(1 - f_0) = 0$ com condição inicial $f(0) = \frac{1}{2}$, resolvendo desta equação (pelo método Bernoulli) temos:

$$-f_0^2 u' + f_0 - f_0^2 = 0 \quad \text{onde} \quad u = f_0^{-1}, \quad (4.31)$$

logo temos,

$$u' = -f_0^{-2} f'_0,$$

ou seja,

$$f'_0 = -f_0^2 u'.$$

Dividindo a equação (4.31) em f_0^2 temos,

$$-u' + u = 1,$$

onde nos dá:

$$u(t) = ce^t + 1,$$

como $f_0(0) = \frac{1}{2}$ então

$$u(0) = c + 1 = 2,$$

portanto, $c = 1$. Logo,

$$u(t) = e^t + 1$$

e

$$f_0(t) = \frac{1}{e^t + 1}.$$

Para a potência de ε temos $f_1' + (1 - 2f_0)f_1 = (\gamma f_0 - 1)f_0''$ com $f_1(0) = 0$ que possui a solução:

$$f_1(\varepsilon) = \frac{e^\varepsilon}{(e^\varepsilon + 1)^3} [\gamma(e^\varepsilon - 1) - (e^\varepsilon + 1) \{(\gamma - 1)\varepsilon - (\gamma - 2)(\ln(e^\varepsilon + 1) - \ln 2)\}].$$

Logo a solução (4.28) para valores grandes de c é

$$u(z) = f_0\left(\frac{z}{c}\right) + \frac{1}{c^2} f_1\left(\frac{z}{c}\right) + \dots, \quad (4.32)$$

Os gráficos da Figura 4.3 ilustram o efeito do termo não local.

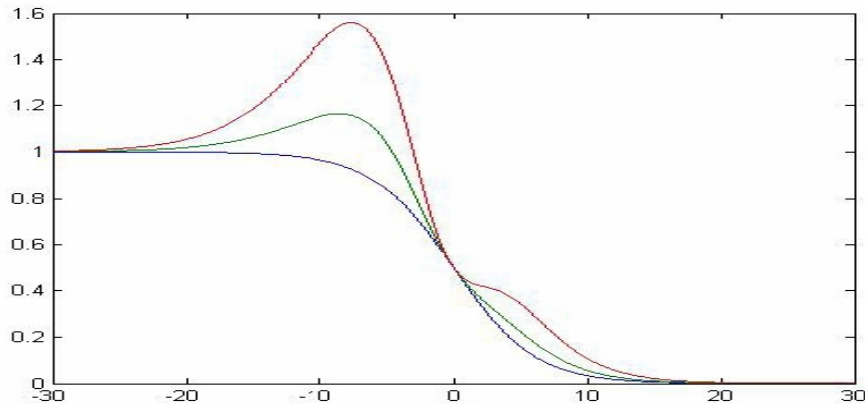


Figura 4.3: Onda viajante dado pelo equação (5.48) com valores de $c = 2$ e $\gamma = 0.1, 2$ e 4 .

Capítulo 5

ONDAS VIAJANTES, COM MODELO DE REAÇÃO DE DIFUSÃO PARA MULTI-ESPÉCIES

Resumo do capítulo:

Neste capítulo analisamos a existência das ondas viajantes no modelo de sistema predador presa com reação-difusão para multi-espécies e observamos que as ondas viajantes existem entre os pontos de equilíbrios, para velocidades acima de um determinado valor crítico. Verificamos que a maneira com a qual solução se comporta nas proximidades do ponto crítico, que representa coexistência das espécies pode ser monotônica ou oscilatória, como veremos a seguir.

5.1 Introdução

O modelo específico que nós estudamos é a modificação do modelo de Lotka-Volterra, onde há crescimento logístico da presa na ausência do predador

e na presença de ambos com difusão, que foi analisado anteriormente por Dunbar (1983 - 1984). Mais especificamente, o modelo que nós consideramos é

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial T} &= AU\left(1 - \frac{U}{K}\right) - BUV + D_1 \nabla^2 U \\ \frac{\partial V}{\partial T} &= CUV - DV + D_2 \nabla^2 V.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Onde U e V são respectivamente as densidades das populações de presas e predadores, como funções do tempo e espaço. Por abuso de notação, representamos as populações de presa e predador também pelas letras U e V . As constantes envolvidas são: A (taxa intrínseca de crescimento da presa), B e C (medidas dos efeitos da interação entre as duas espécies), D (a taxa de mortalidade do predador) e K (a capacidade suporte da presa), as quais são todas constantes positivas. Além disso, supomos que D_1 e D_2 (coeficiente de difusão da presa e do predador respectivamente) possuem valores diferentes e positivos ($D_1 \neq D_2$). Observe que neste sistema, a única fonte de alimentação do predador é a presa, pois de fato na ausência da mesma ($U = 0$), a população de predadores diminui tendo em vista que a segunda equação do (6.1) se torna,

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -DV + D_2 \nabla^2 V.$$

Analogamente na ausência do predador ($V = 0$) as presas tem crescimento logístico, pois nesse caso a equação (6.1) se reduz a

$$\frac{\partial U}{\partial T} = AU\left(1 - \frac{U}{K}\right) + D_1 \nabla^2 U.$$

Nós consideramos aqui o problema no espaço unidimensional pela simplicidade em notações, e pois estamos focados na obtenção de resultados do ponto de vista qualitativo, conforme veremos a seguir.

5.2 Existência de onda viajante em sistema de predador presa.

Considerando o sistema (6.1), após adimensionalização do sistema com as seguintes variáveis,

$$u = \frac{U}{K}, \quad v = \frac{BV}{A}, \quad t = AT, \quad x = X \left(\frac{A}{D_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.2)$$

$$d = \frac{D_1}{D_2}, \quad a = \frac{CK}{A}, \quad b = \frac{D}{CK} \quad (5.3)$$

obtemos pela regra de cadeia o sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= u(1 - u - v) + d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= av(u - b) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

De fato:

$$\frac{\partial U}{\partial T} = K \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial T}, \quad \frac{\partial U}{\partial X} = K \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = K \frac{A}{D_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

portanto,

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial T} = KA \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial U}{\partial X} = K \left(\frac{A}{D_2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = K \frac{A}{D_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{cases}$$

Usando o variável de onda no sistema (6.4) isto é:

$$u(x, t) = u(z) \quad \text{e} \quad v(x, t) = v(z) \quad \text{onde} \quad z = x + ct,$$

obtemos,

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial z} (c) = cU' \\ u_x &= \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial z} = U' \end{aligned}$$

portanto as equações (6.4) tornam:

$$\begin{aligned} cU' &= U(1 - U - V) + dU'' \\ cV' &= aV(U - b) + V'', \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde a derivada é em relação a z .

A análise deste sistema envolve o estudo de plano de fase de dimensão quatro. Por simplicidade, nós consideramos aqui o coeficiente de difusão da presa D_1 muito pequeno em relação com coeficiente de difusão do predador D_2 com isto obtemos aproximadamente:

$$d = \frac{D_1}{D_2} \simeq 0,$$

o que nos ajuda a diminuir a dimensão do espaço de fase sendo que razoavelmente o comportamento das soluções do sistema com $d \neq 0$ mais ou menos similar com $d = 0$, de acordo com Dunbar [D]. Onde podemos ver o caso prático desta situação nos lobos (predadores) e os coelhos (presas), observando que a coeficiente de difusão do lobo é maior que o do coelho. Agora encontramos as populações de equilíbrio do sistema (6.5), observamos condições necessárias para estabilidade das populações nos pontos de equilíbrio, e verificamos a existência de ondas viajantes entre estados de equilíbrio. Para isto reescrevendo sistema (6.5) como um sistema de equações ordinárias de primeira ordem, temos:

$$\begin{cases} U = \frac{U(1-U-V)}{c} \\ V = W \\ W = cW - aV(U - b). \end{cases} \quad (5.6)$$

O nosso objetivo nesse ponto se concentra na possibilidade de soluções do tipo ondas viajantes, ligando os pontos equilíbrio $(1, 0, 0)$ e $(b, 1 - b, 0)$, onde representa no meio com densidade de população da presa no limite máxima onde foi introduzidos os predadores, e após longo tempo se estabilizam (coexistência) as populações de predador e presa. E os pontos $(0, 0, 0)$ e $(b, 1 - b, 0)$. Onde mostra que as duas espécies foram introduzidas no meio ao mesmo tempo. Assim nós olhamos para soluções do sistema (6.5) como $(U(z), V(z))$ com condições de contorno:

$$U(-\infty) = 1, V(-\infty) = 0, U(\infty) = b \text{ e } V(\infty) = 1 - b \quad (5.7)$$

e

$$U(-\infty) = 0, V(-\infty) = 0, U(\infty) = b \text{ e } V(\infty) = 1 - b. \quad (5.8)$$

Nosso interesse é encontrar estabilidade de pontos críticos no sistema (6.4) e encontrar uma solução do tipo onda viajante que satisfaz condições de contorno (6.7) ou (6.8).

Primeiramente analisamos as condições de contorno (6.7). Neste caso analisamos existência de valores de c para esta condição de contorno.

O sistema (6.6) possui três pontos de equilíbrio: $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(b, 1 - b, 0)$. Em seguida analisamos a estabilidade e comportamento das soluções nas vizinhanças destes pontos para obtermos informações sobre a possibilidade de existência de ondas viajantes ligando pontos de equilíbrio com as condições de contorno (6.7) e (6.8).

Inicialmente analisamos o estado de equilíbrio $(1, 0, 0)$ no sistema linear (6.6) : Temos que a matriz jacobiana para este sistema é a seguinte:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1-2U-V}{c} & \frac{-U}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -aV & -aU + ab & c \end{bmatrix},$$

logo, para o ponto de equilíbrio $(1, 0, 0)$, temos que os autovalores da matriz jacobiana nesse ponto satisfazem a equação

$$\det[\lambda I - J(1, 0, 0)] = \det \begin{bmatrix} \lambda + \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & a(1-b) & \lambda - c \end{bmatrix} = 0,$$

ou $(\lambda + \frac{1}{c})(\lambda^2 - c\lambda - ab + a) = 0$, que nos dá os autovalores

$$\lambda_1 = \frac{-1}{c}, \lambda_2 = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4a(1-b)}}{2} \text{ e } \lambda_3 = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4a(1-b)}}{2}.$$

Portanto notamos instabilidade do ponto crítico $(1, 0, 0)$ para todo $c > 0$, sendo que os autovalores λ_2 e λ_3 são reais positivos para todo $c > \sqrt{4a(1-b)}$. Logo, existe a possibilidade de onda viajante saindo neste ponto de forma monótona se $c > \sqrt{4a(1-b)}$, o que constitui o nosso interesse, pois dessa maneira a solução não se torna negativa nas proximidades desse ponto crítico.

Agora nós analisamos estado de equilíbrio $(b, 1 - b, 0)$ no sistema linear (6.6) : os autovalores da matriz jacobiana calculada nesse ponto são raízes da

equação

$$p(\lambda) = \det [J(b, 1 - b, 0) - \lambda I] = \det \begin{bmatrix} -\lambda - \frac{b}{c} & \frac{-b}{c} & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -a(1 - b) & 0 & c - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^3 - \left(c - \frac{b}{c}\right) \lambda^2 - b\lambda - \frac{ab(1 - b)}{c} = 0. \quad (5.9)$$

Como o polinômio é de grau três, temos que o cálculo explícito de suas raízes é uma tarefa difícil, e que não nos interessa, sob o ponto de vista qualitativo. De maneira mais específica, desejamos saber o sinal das raízes, ou se são raízes complexas, e quantas raízes são de cada tipo. Essa informação pode ser obtida mediante o comportamento dos pontos críticos do polinômio característico em função das constantes adimensionais que estamos considerando. Para isso, calculamos os pontos de máximo e mínimo locais do polinômio característico $p(\lambda)$ através de sua derivada $p'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\left(c - \frac{b}{c}\right)\lambda - b = 0$. Portanto, temos que o ponto de máximo X_M e o ponto de mínimo X_m de $p(\lambda)$ são respectivamente

$$X_M = \frac{\left(c - \frac{b}{c}\right) - \sqrt{\left(c - \frac{b}{c}\right)^2 + 3b}}{3} \quad \text{e} \quad X_m = \frac{\left(c - \frac{b}{c}\right) + \sqrt{\left(c - \frac{b}{c}\right)^2 + 3b}}{3}.$$

Observe que X_M e X_m têm sinais opostos ($X_M < 0$ e $X_m > 0$) e são independentes de valor a . Também temos que a constante a do polinômio característico (6.9) somente influi no deslocamento vertical de seu gráfico, pois essa constante somente aparece no seu termo independente. E portanto para valor de $a = 0$, o polinômio característico (6.9) tem uma solução negativa e a outra positiva, logo existe um valor crítico a^* de a onde o polinômio (6.9) possui uma raiz real dupla negativa. De fato,

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 \left(c - \frac{b}{c}\right) - \lambda b,$$

onde tem auto valores:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{\left(c - \frac{b}{c}\right) + \sqrt{\left(c - \frac{b}{c}\right)^2 + 4b}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{\left(c - \frac{b}{c}\right) - \sqrt{\left(c - \frac{b}{c}\right)^2 + 4b}}{2}.$$

Isto pode ser visto nos gráficos da Figura 6.1, onde podemos ver o valor crítico a^* e comportamento das soluções de (6.9) para $a > a^*$ e $0 < a < a^*$.

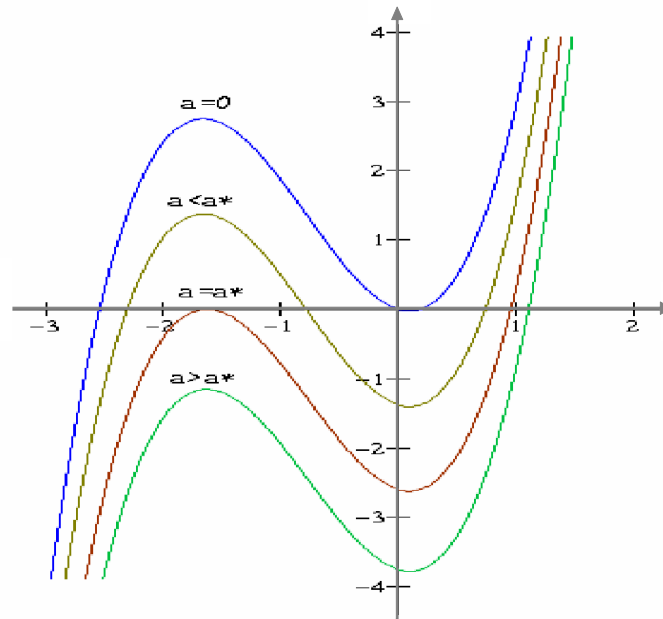


Figura 5.1: As raízes do polinômio característico (6.9) com diferentes valores de a com respeito ao valor crítico a^* e constantes $b = 0.5$, $c = 0.2$, $1 < a < a^*$ e $a^* = 2.1$.

Observe que o valor crítico a^* é tal que X_M seja raiz do polinômio (6.9). Com isso, obtemos uma fórmula explícita de a em função de X_M , a saber:

$$p(X_M) = X_M^3 - X_M^2 \left(c - \frac{b}{c} \right) - X_M b - \frac{a^* b (1-b)}{c} = 0,$$

ou

$$a^* = \frac{1}{b(1-b)} \left[X_M^3 - X_M^2 \left(c - \frac{b}{c} \right) - X_M b \right] - c.$$

Portanto para qualquer $0 < a < a^*$ existem duas raízes negativas e uma raiz positiva e se $a > a^*$ as raízes negativas do caso anterior se tornam complexas com parte real negativa.

A existência do valor crítico a^* significa que para $a > a^*$ as soluções de ondas viajantes (U, V) em relação às equações (6.6) e condições de contorno (6.7), chegam ao estado equilíbrio $(b, 1 - b, 0)$ na forma oscilatória; e para $a < a^*$, esta aproximação ao ponto equilíbrio $(b, 1 - b, 0)$ é monótona, de acordo com Dunbar [D]. As Figuras (6.2, a) e (6.2, b) mostram estas duas possibilidades.

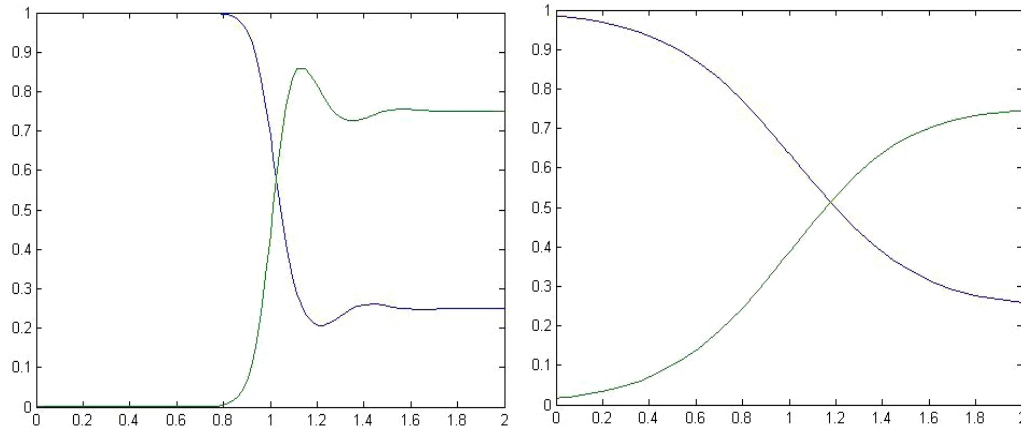


Figura 5.2: (a) Aproximação oscilatória para estado de equilíbrio $(b, 1 - b)$ com $a > a^*$ com constantes de $b = 0.75$ e $c = 2$. (b) aproximação monótona de (u, v) em $(b, 1 - b)$ com $a < a^*$, [6].

Agora consideramos a condição de contorno (6.8) onde existe a baixa densidade do predador e da presa no sistema (6.6). Isto representa a situação onde as duas espécies foram introduzidas no meio em mesmo tempo. E verificamos as condições necessárias para existência de onda viajante entre os estados de equilíbrios $(0, 0, 0)$ e $(b, 1 - b, 0)$ para este, analisamos o comportamento das soluções nas vizinhanças do ponto de equilíbrio $(0, 0, 0)$. A matriz jacobiana calculada neste ponto crítico é

$$\det [J(0, 0, 0) - \lambda I] = \det \begin{vmatrix} \frac{1}{c} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & ab & c - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Portanto obtemos o polinômio de característico,

$$p(\lambda) = \left(\frac{1}{c} - \lambda\right) [\lambda^2 - c\lambda - ab] = 0,$$

que possui raízes:

$$\lambda_1 = \frac{1}{c}, \lambda_2 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4ab}}{2}, \lambda_3 = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4ab}}{2}.$$

Logo temos dois autovalores positivos reais e autovalor real negativo para todo $c > 0$. Portanto, o ponto equilíbrio $(0,0,0)$ é instável. Observe que nessa situação os autovalores nunca são complexos, portanto as soluções obtidas são sempre razoáveis do ponto de vista ecológico. Como esse ponto crítico é instável então existe a possibilidade de crescimento da população nas vizinhanças deste ponto crítico. Para verificar se existe um equilíbrio no crescimento desta população, observamos a estabilidade linear do ponto crítico $(b, 1 - b, 0)$.

Como vimos anteriormente, as raízes do polinômio característico da matriz jacobiana calculada no ponto $(b, 1 - b, 0)$ são dadas por:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= \frac{\left(c - \frac{b}{c}\right) + \sqrt{\left(c - \frac{b}{c}\right)^2 + 4b}}{2} \\ \lambda_3 &= \frac{\left(c - \frac{b}{c}\right) - \sqrt{\left(c - \frac{b}{c}\right)^2 + 4b}}{2} \end{aligned}$$

Então, para valores de $a > a^*$ as soluções de ondas viajantes (U, V) em relação a (6.6) e condições de contorno (6.8) chegam ao estado de equilíbrio $(b, 1 - b, 0)$ sob a forma oscilatória, e para $a < a^*$ esta aproximação se dá de forma monótona como mostra a Figura 6.3.

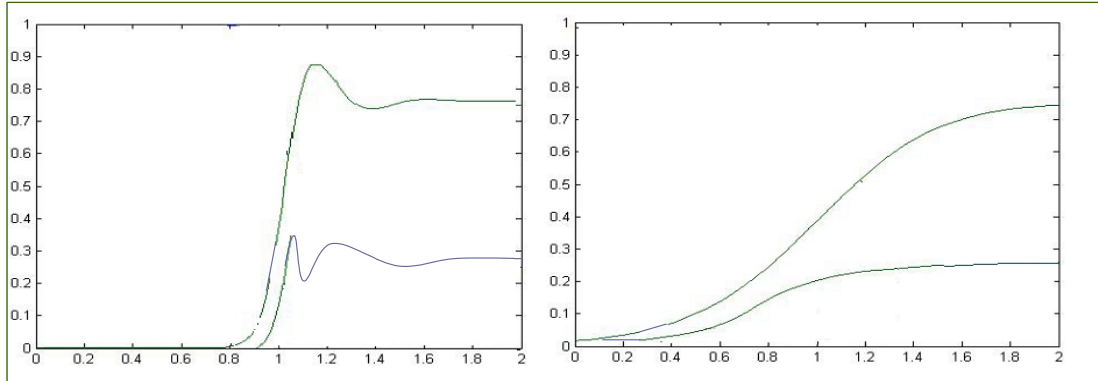


Figura 5.3: a) aproximação oscilatória para estado de equilíbrio $(b, 1 - b)$ com $a > a^*$ e condição inicial (6.8). b) aproximação monótona de (u, v) para estado de equilíbrio $(b, 1 - b)$ com $a < a^*$.

5.3 Existência de soluções num sistema com difusão rápida da presa

Se no sistema predador presa Lotka-Volterra consideramos coeficiente de difusão do predador (D_2) muito menor do que o da presa (D_1) então temos que a razão entre o coeficiente de difusão do predador com a presa é aproximadamente zero ($L = \frac{D_2}{D_1} \simeq 0$), onde podemos ver o caso prático desta situação nos sapos (predadores) e os mosquitos (presas), observando que a coeficiente de difusão do mosquito é maior que o do sapo. De maneira análoga à seção anterior, encontramos as populações de equilíbrio do sistema (6.1), observamos condições necessárias para estabilidade das populações nos pontos de equilíbrio, e verificamos a existência de ondas viajantes entre estes pontos. Para isto adimensionamos o sistema (6.1) com as seguintes variáveis:

$$u = \frac{U}{K}, \quad v = \frac{BV}{A}, \quad t = AT, \quad x = X \frac{A}{D_2},$$

$$L = \frac{D_2}{D_1}, \quad a = \frac{CK}{A}, \quad b = \frac{D}{CK}$$

obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= u(1 - u - v) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= av(u - b) + L\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Usando as funções auxiliares,

$$u(x, t) = U(z) \text{ e } v(x, t) = V(z) \text{ onde } z = x + ct,$$

temos:

$$\begin{aligned}cU' &= U(1 - U - V) + U'' \\ cV' &= aV(U - b) + L\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\end{aligned}\tag{5.10}$$

Analogamente a seção anterior, análise deste sistema envolve o estudo de plano de fase de dimensão quatro e pela simplicidade consideramos o coeficiente de difusão do predador D_2 suficientemente menor em relação com coeficiente de difusão da presa D_1 para obter,

$$L = \frac{D_1}{D_2} \simeq 0,$$

o que nos ajuda a diminuir a dimensão do espaço de fase sendo que razoavelmente o comportamento das soluções do sistema com $L \neq 0$ é similar com $L = 0$, de acordo com Dunbar [D]. Onde pode ser visto o caso prático desta situação nos sapos (predadores) e os mosquitos (presas), observando que a coeficiente de difusão do sapo é maior que o mosquito. Agora encontramos as populações de equilíbrio do sistema (6.5), observamos condições necessárias para estabilidade das populações nos pontos de equilíbrio, e verificamos a existência de ondas viajantes entre estados de equilíbrio. Para isto reescrevendo sistema (6.10) como um sistema de equações ordinárias de primeira ordem, temos:

$$\begin{cases} U' = \frac{aV(U-b)}{c} \\ V' = W \\ W' = cW - U(1 - U - V). \end{cases}$$

Os pontos críticos do sistema acima são $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(b, 1 - b, 0)$. Observe que a mudança de hipótese da razão entre os coeficientes de difusão do

predador e da presa não altera os pontos críticos obtidos na seção anterior. Analisando a estabilidade dos pontos críticos pela matriz jacobiana, temos os seguintes resultados:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{aV}{c} & \frac{aU-ab}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2U-1+V & U & c \end{bmatrix}.$$

Para o ponto crítico $(0,0,0)$ nós temos o polinômio característico

$$p(\lambda) = \det[\lambda I - J(0,0,0)] = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{ab}{c} & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - c \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^3 - c\lambda^2 - \frac{ab}{c} = 0. \quad (5.11)$$

Observe que $p(0) = -\frac{ab}{c} < 0$, e os pontos de máximo e mínimo local do gráfico $p(\lambda)$ são respectivamente $X_M = \frac{-2c}{3}$ e $X_m = 0$ (calculado pelos zeros do polinômio $p'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2c\lambda$). Portanto existe um autovalor positivo, pois $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} p(\lambda) = \infty$, o que nos mostra que o ponto $(0,0,0)$ é instável. E para qualquer valor de $c > 0$ os autovalores λ_2 e λ_3 são complexos; logo, o comportamento da solução na vizinhança do ponto crítico $(0,0,0)$ é a forma espiral. Logo temos valores negativos para as funções U e V , onde é impossível em ponto de vista ecológico, portanto não existe onda viajante partindo do ponto $(0,0,0)$. Isto mostra índice baixo da população do predador e da presa e não existe estabilidade entre as espécies após longo tempo.

Analogamente para estado de equilíbrio $(1,0,0)$ temos a seguinte equação característica,

$$p(\lambda) = \det[\lambda I - J(1,0,0)] = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{ab-a}{c} & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - c \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^3 - c\lambda^2 - \lambda + \frac{ab-a}{c} = 0. \quad (5.12)$$

e $p'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\lambda c - 1$ com $X_M = \frac{c - \sqrt{c^2 + 3}}{3}$ e $X_m = \frac{c + \sqrt{c^2 + 3}}{3}$ as raízes da derivada do polinômio característico (máximo e mínimo locais respectivamente).

Observe que a forma de $p(\lambda)$ também não depende de a (pois a constante a está localizada no termo independente). Portanto se no polinômio de característico consideramos $a = 0$ então os autovalores serão $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = c$ e $\lambda_3 = -c$ com $c > 0$ (observe que neste caso temos uma raiz positiva e a outra negativa o que garante a instabilidade do ponto $(1, 0, 0)$). Como para valores diferentes de a temos deslocamento vertical no gráfico do polinômio característico (6.12), concluímos que existe um valor crítico a^* onde $p(\lambda)$ possui uma raiz real dupla negativa. O valor de a^* também pode ser encontrado explicitamente aqui, considerando o fato de que no caso $a = a^*$ temos $P(X_M) = 0$. Isto nos dá:

$$p(X_M) = X_M^3 - cX_M^2 - X_M + \frac{a^*(b-1)}{c} = 0,$$

onde obtemos:

$$a^* = \frac{c}{(b-1)} [X_M^3 - X_M^2 c - X_M] - c. \quad (5.13)$$

Portanto para qualquer $0 < a < a^*$ (onde a^* é dado por (6.13)) obtemos duas raízes λ_1 e λ_2 negativas e λ_3 real positiva, como pode ser observado na Figura 6.1.

Se $a > a^*$ temos duas raízes complexas com parte real negativa e uma raiz positiva, o que é inaceitável do ponto de vista ecológico, pois o comportamento das soluções na vizinhança do ponto crítico $(1, 0, 0)$ é a forma espiral, e por isso obtemos alguns valores negativos das funções U e V . Logo existem ondas viajantes se $0 < a < a^*$, onde é mostrado na Figura 6.1.

Para o ponto crítico $(b, 1 - b, 0)$ com $0 < b < 1$ temos,

$$p(\lambda) = \det[\lambda I - J(b, 1 - b, 0)] = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{a(1-b)}{c} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -b & -b & \lambda - c \end{vmatrix} = 0,$$

$$-\lambda^3 + \left(c + \frac{a(1-b)}{c}\right) \lambda^2 + a(2b-1)\lambda + \frac{ab(b-1)}{c} = 0. \quad (5.14)$$

Desejamos saber o sinal das raízes, ou se são raízes complexas, e quantas raízes são de cada tipo. Essa informação pode ser obtida mediante o comportamento dos pontos críticos do polinômio característico (6.14) em função das constantes adimensionais que estamos considerando. Para isso, observamos,

$$p(0) = \frac{ab(b-1)}{c} < 0$$

e $\lim p(\lambda) = -\infty$ quando $\lambda \rightarrow \infty$ e $\lim p(\lambda) = \infty$ quando $\lambda \rightarrow -\infty$, portanto existe uma autovalor real negativo. Considerando λ_1 , λ_2 e λ_3 os autovalores da equação (6.14), temos

$$\lambda_1 < 0 \tag{5.15}$$

e supor que λ_2 e λ_3 complexos ($\lambda_2 = a + ib$ e $\lambda_3 = a - ib$), pelo método de Girard-Viète temos,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c + \frac{a(1-b)}{c} \tag{5.16}$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = a(1-2b)$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{ab(b-1)}{c}.$$

Substituindo os valores de λ_2 e λ_3 em sistema (6.16) obtemos:

$$\lambda_1 + 2a = c + \frac{a(1-b)}{c}$$

$$\lambda_1(2a) + a^2 + b^2 = a(1-2b)$$

$$\lambda_1(a^2 + b^2) = \frac{ab(b-1)}{c}.$$

Observe na terceira equação que,

$$\lambda_1 = \frac{ab(b-1)}{c(a^2 + b^2)} > 0$$

isto contradiz o nosso resultado obtido no (6.15). Portanto, os outros autovalores são reais positivos, logo temos aproximação das ondas viajantes partindo do ponto crítico $(1, 0, 0)$ para $(b, 1-b, 0)$ da forma monótona.

O estudo deste modelo nos incentiva a ampliar este modelo com a interação não local da presa. No próximo capítulo estudamos o modelo de equação não local de Fisher e procuramos as soluções de ondas viajantes e comportamento destas ondas.

Capítulo 6

ONDAS VIAJANTES NO SISTEMA PREDEDOR-PRESA COM MODELO DE EQUAÇÃO NÃO LOCAL DE FISHER.

Resumo do capítulo

Neste capítulo analisamos o modelo reação de difusão para duas espécies com interação não-local da presa. Observamos que os pontos de equilíbrio do sistema predador-presa com difusão não mudam em relação ao sistema presa-predador local analisado no capítulo anterior. As soluções de ondas viajantes entre os pontos de equilíbrio continuam a existir; porém, essas soluções se comportam de maneira oscilatória nas proximidades do ponto crítico que representa a coexistência das espécies, independentemente das variações de parâmetros ao modelo, como veremos a seguir.

6.1 Introdução

O modelo específico que nós estudamos é uma modificação do modelo predador presa Lotka-Volterra com difusão analisado no capítulo anterior, onde

o termo de crescimento logístico da presa será de forma integral. assim como ja foi visto no capítulo 4 nas equação não local de Fisher. Para visualisarmos melhor essa nova situação, consideremos o sistema predador presa não local abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial T} &= AU \left[\left(1 - \frac{1}{K} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)U(y,t)dy \right) \right] - BUV + D_1 \nabla^2 U \\ \frac{\partial V}{\partial T} &= CUV - DV + D_2 \nabla^2 V.\end{aligned}\quad (6.1)$$

Onde as funções $U = U(X, T)$ e $V = V(X, T)$ representam, respectivamente, as densidades das populações de presa e predador. As constantes A , que representa a taxa intrínseca de crescimento da presa em densidades baixas da mesma; B e C , medidas dos efeitos da interação entre as duas espécies; D , a taxa de mortalidade do predador; e K , a capacidade suporte da presa onde são todas positivas. Além disso, as constantes positivas D_1 e D_2 , denotado como coeficientes de difusão da presa e do predador, respectivamente, possuem valores diferentes e positivos. Observe na segunda equação de (7.1) que, tal como no capítulo anterior, a única fonte de alimentação do predador é a presa.

A função g , denotada aqui como núcleo, faz parte do termo não local da equação da presa. Supomos que g é uma função par e positiva. Isto significa que estamos tratando de uma situação que sempre existe uma contribuição do tipo competição intra-específica dependente somente da distância dos indivíduos da espécie da presa. Além disso, supomos que g tem decaimento rápido. Em suma, supomos que g satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\text{i) } &g \geq 0, \\ \text{ii) } &g(x) = g(-x), \\ \text{iii) } &\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1.\end{aligned}\quad (6.2)$$

Nós consideramos aqui o problema no espaço unidimensional pela simplicidade em notações, e pois estamos focados na obtenção de resultados do ponto de vista qualitativo, conforme veremos a seguir.

6.2 Existência de ondas viajantes no sistema presa predador com interação não-local

Adimensionalizando o sistema (7.1) com as seguintes mudanças de variáveis:

$$u = \frac{U}{k}, \quad v = \frac{VA}{B}, \quad t = AT, \quad d = \frac{D_1}{D_2},$$

$$x = X \left(\frac{A}{D_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad a = \frac{Ck}{A} \quad \text{e} \quad b = \frac{D}{Ck'}$$

de maneira similar ao capítulo anterior obtemos,

$$u_t = u \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) u(y,t) dy \right) - uv + du_{xx}$$

$$v_t = (u-b)av + v_{xx}.$$

Usando a variável de onda $z = x + ct$ e as funções $U(z) = u(x,t)$ e $V(z) = v(x,t)$ obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$cU' = U \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} g(w) U(y-w) dw \right) - UV + dU''$$

$$cV' = aV(U-b) + V''. \quad (6.3)$$

A análise deste sistema envolve o estudo de espaço de fase com dimensão quatro. Por simplicidade consideramos inicialmente que D_2 (coeficiente de difusão do predador) seja suficientemente maior do que D_1 (coeficiente de difusão da presa), para que posamos assumir que $d = \frac{D_1}{D_2} \simeq 0$. Para simplificar a análise do sistema (7.3), faremos uma aproximação do termo integral, aplicando a série de Taylor em $U(z-w)$ em torno de z , isto é:

$$U(z-w) = U(z) + \frac{U'(z)}{1!}(-w) + \frac{U''(z)}{2!}(-w)^2 + \dots$$

Substituindo o desenvolvimento acima em (7.3) e notando que $\int_{-\infty}^{\infty} w^n g(w) dw = 0$ se $n = 2k + 1$ temos que o sistema pode ser re-escrito como:

$$cU' = U \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n)!} \int_{-\infty}^{\infty} w^{2n} g(w) dw \right) - U^{2n}(z) \right] - UV$$

$$cV' = aV(U-b) + V''. \quad (6.4)$$

Assumindo que o núcleo g , além das propriedades (7.2), satisfaz as propriedades

- i) g é da forma $g(w) = \frac{1}{\varepsilon} g^* \left(\frac{w}{\varepsilon} \right)$
- ii) $\int_{-\infty}^{\infty} g^*(w) dw = 1$
- iii) $|g^*(w)| \leq Ae^{-M|w|}$ para algumas constantes A, M positivas.

Se g satisfaz a propriedade P então para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(w) dw = 1,$$

e quando $w \neq 0$

$$|g(w)| = \frac{1}{\varepsilon} \left| g^* \left(\frac{w}{\varepsilon} \right) \right| \leq \frac{A}{\varepsilon} \left(e^{-M|w|} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

logo g define uma seqüência de Dirac quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Essa propriedade nos diz que o caso local analisado no capítulo anterior é o caso limite da situação que estamos estudando, pois quando $\varepsilon \rightarrow 0$, retornamos ao modelo presa predador local. Reescrevendo o sistema (7.4) temos,

$$\begin{aligned} cU' &= U \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} a_{2n} U^{2n}(z) \right] - UV \\ cV' &= aV(U - b) + V'', \end{aligned} \tag{6.5}$$

onde,

$$a_{2n} = \frac{1}{(2n)!} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{2n} g^*(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Observamos que, se a não-localidade não for muito forte, ou em termos mais específicos, se a função g for suficientemente localizada em torno da origem, o sistema (7.5) pode ser aproximado truncando a soma infinita, para o seus dois primeiros termos. Considerando $\delta := \varepsilon^2$ e $a_0 = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(w) dw = 1$ obtemos:

$$\begin{aligned} cU' - U(1 - U - \delta a_2 U'') + UV &= 0 \\ cV' - aV(U - b) - V'' &= 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Reescrevendo o sistema (7.6) na forma do sistema de equações de primeira ordem e considerando $\delta_2 = \delta a_2$ temos:

$$\begin{cases} U' = W_1 \\ V' = W \\ W_1' = \frac{-cW_1}{\delta_2 U} + \frac{1}{\delta_2} - \frac{U}{\delta_2} - \frac{V}{\delta_2} \\ W' = cW + aV(b - U). \end{cases} \tag{6.7}$$

Observe que o sistema acima tem três soluções (pontos de equilíbrio):

$$\begin{aligned}
 i) \quad & (U, V, W_1, W) = (0, 0, 0, 0), \\
 ii) \quad & (U, V, W_1, W) = (1, 0, 0, 0), \\
 iii) \quad & (U, V, W_1, W) = (b, 1 - b, 0, 0),
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

e que a não localidade não interfere nos pontos de equilíbrio do sistema, conforme foi visto no capítulo anterior. Aqui, tal como capítulo anterior, também consideramos as condições de contorno como:

$$U(-\infty) = 1, \quad V(-\infty) = 0, \quad U(\infty) = b \quad \text{e} \quad V(\infty) = 1 - b \tag{6.9}$$

e

$$U(-\infty) = 0, \quad V(-\infty) = 0, \quad U(\infty) = b \quad \text{e} \quad V(\infty) = 1 - b. \tag{6.10}$$

Em seguida, analisaremos a estabilidade e comportamento das soluções nas vizinhanças destes pontos para obtermos informação sobre a possibilidade de existência de ondas viajantes ligando pontos de equilíbrio com as condições de contorno (7.9) e (7.10).

Inicialmente analisamos o sistema acima com condições de contorno (7.9), as quais representam o meio com a densidade de população da presa próxima da capacidade de suporte, e no qual foram introduzidos os predadores. Analisando a estabilidade e comportamento da solução na vizinhança do ponto de equilíbrio $(1, 0, 0, 0)$ e calculando o polinômio característico da matriz jacobiana, temos:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{c\delta_2 W_1}{\delta_2^2 U^2} - \frac{1}{\delta_2} & \frac{-1}{\delta_2} & 0 & \frac{-c}{\delta_2 U} \\ -aV & ab - aU & c & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det [\lambda I - J(1, 0, 0, 0)] = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ \frac{1}{\delta_2} & \frac{1}{\delta_2} & \lambda & \frac{c}{\delta_2} \\ 0 & -ab + a & -c & \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Isto nos dá:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \frac{c^2 + 1}{\delta_2} \lambda^2 + \frac{c(ab - a + 1)}{\delta_2} \lambda + \frac{ab - a}{\delta_2} \quad (6.11)$$

Temos que a equação característica

$$\lambda^4 + \frac{c^2 + 1}{\delta_2} \lambda^2 + \frac{c(ab - a + 1)}{\delta_2} \lambda + \frac{ab - a}{\delta_2} = 0, \quad (6.12)$$

possui pelo menos uma raiz real positiva e pelo menos uma raiz real negativa.

De fato:

$$p(0) = \frac{ab - a}{\delta_2} < 0 \text{ pois } 0 < b < 1.$$

Além disso $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} p(\lambda) = +\infty$ quando $\lambda \rightarrow \infty$ ou $\lambda \rightarrow -\infty$. Para facilitar o nosso análise consideramos as seguintes variações nos coeficientes do polinômio (7.12),

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{c^2 + 1}{\delta_2} \\ \beta &= \frac{c(ab - a + 1)}{\delta_2} \\ \gamma &= \frac{ab - a}{\delta_2} \end{aligned}$$

Observamos que o coeficiente β será positivo quando $a < \frac{1}{1-b}$ e será negativo se $a > \frac{1}{1-b}$. Portanto pela Regra de Sinais de Descartes, no caso $a < \frac{1}{1-b}$, temos no máximo uma raiz positiva, pois existe somente uma mudança de sinal nos coeficientes do polinômio característico (7.11). Logo, como já sabemos que existe de fato uma raiz real positiva, concluímos que ela é única.

Por um raciocínio similar, temos que $p(-\lambda)$ tem também uma mudança de sinal para seus coeficientes, quando $a < \frac{1}{1-b}$. Portanto tem exatamente uma raiz negativa.

Usamos os métodos de (Girard-Viète) e a regra de mudança de sinal para obtemos informações sobre os zeros do polinômio (7.12). Consideremos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ como os zeros do polinômio (7.11). Temos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} i) \quad & \sum \lambda_i = 0 \\ ii) \quad & \prod \lambda_i = \frac{a(b-1)}{\delta_2} < 0 \\ iii) \quad & \sum \lambda_i \lambda_j = \frac{c^2+1}{\delta_2} > 0 \\ iv) \quad & \sum \lambda_i \lambda_j \lambda_k = \frac{-c}{\delta_2} (ab - a + 1) \text{ com } i, j, k = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Reescrevendo as equações (7.13) no sistema obtemos os seguintes resultados, {considerando $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ reais e λ_3, λ_4 complexos ($\lambda_3 = \alpha + i\beta, \lambda_4 = \alpha - i\beta$)}

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + (2\alpha + 1)(\lambda_1 + \lambda_2) + \alpha^2 + \beta^2 = \frac{c^2+1}{\delta_2} \\ (\alpha^2 + \beta^2)(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2(2\alpha) = \frac{-c}{\delta_2}(ab - a + 1) \\ \lambda_1\lambda_2(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{a(b-1)}{\delta_2}. \end{cases}$$

Logo após substituição temos:

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 - (2\alpha + 1)2\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = \frac{c^2+1}{\delta_2} \\ [-(\alpha^2 + \beta^2) + \lambda_1\lambda_2](2\alpha) = \frac{-c}{\delta_2}(ab - a + 1) \\ \lambda_1\lambda_2(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{a(b-1)}{\delta_2}, \end{cases}$$

onde a segunda equação nos dá o valor de α (parte real dos autovalores λ_3, λ_4),

$$\alpha = \frac{-c}{2\delta_2} [ab - a + 1] \left[\frac{1}{\lambda_1\lambda_2 - (\alpha^2 + \beta^2)} \right]. \quad (6.14)$$

Como α é parte real dos autovalores complexos, para existência das soluções de ondas viajantes partindo no estado equilíbrio $(1, 0, 0, 0)$ é necessário que α seja negativo. Para isto e pela igualdade (7.14) temos a seguinte relação:

$$ab - a + 1 < 0.$$

Já que os outros dois termos são negativos, existe possibilidade de onda viajante saindo do ponto crítico $(1, 0, 0, 0)$ quando,

$$a > \frac{1}{1-b}. \quad (6.15)$$

Sabendo que

$$a = \frac{CK}{A} \text{ e } b = \frac{D}{CK}$$

a desigualdade (7.15) pode ser escrito como,

$$A < CK - D.$$

Sendo A a taxa de crescimento Intrínseco da presa e $CK - D$ o crescimento Intrínseco máximo do predador, temos que as ondas viajantes entre os pontos críticos $(1, 0, 0, 0)$ e $(b, 1-b, 0, 0)$ vão existir se a taxa Intrínseco da presa seja menor do que a taxa máxima do crescimento Intrínseco do predador.

Agora analisamos o ponto crítico $(b, 1 - b, 0, 0)$ através da matriz jacobiana,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{c\delta_2 W_1}{\delta_2^2 U^2} - \frac{1}{\delta_2} & \frac{-1}{\delta_2} & 0 & \frac{-c}{\delta_2 U} \\ -aV & ab - aU & c & 0 \end{bmatrix}.$$

Seu polinômio característico é

$$\det[\lambda I - J(b, 1 - b, 0, 0)] = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ \frac{b}{\delta_2} & \frac{b}{\delta_2} & \lambda & \frac{c}{\delta_2} \\ a - ab & 0 & -c & \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \left[\frac{b + c^2}{\delta_2} + (a - ab) \right] \lambda^2 + \frac{bc}{\delta_2} \lambda + \frac{b(a - ab)}{\delta_2}. \quad (6.16)$$

Observe que no polinômio característico (7.14) obtemos:

$$\prod \lambda_i = \frac{b(a - ab)}{\delta_2} > 0 \text{ pois } 0 < b < 1$$

$$\sum \lambda_i = 0 \text{ para } i = 1, 2, 3, 4.$$

Portanto, se todos os autovalores forem reais obrigatoriamente teremos pelo menos um autovalor negativo. Isto mostra que existe possibilidade de onda viajante partindo dos pontos críticos $(1, 0, 0, 0)$ para ponto crítico $(b, 1 - b, 0, 0)$. Caso polinômio (7.14) possui soluções complexas,

$$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \lambda_2 = \alpha_1 - i\beta_1, \lambda_3 = \alpha_2 + i\beta_2, \lambda_4 = \alpha_2 - i\beta_2,$$

temos,

$$\sum \lambda_i = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2, \quad (6.17)$$

portanto temos os autovalores complexos com parte real negativa, o que confirma analogamente a existência de ondas viajantes. Observe que a equação (7.14) não pode admitir todas as raízes imaginárias puras ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$), pois caso contrário deveremos obter o produto de autovalores dois a dois como,

$$- \left[\frac{(b + c^2 + (a - ab) \delta_2)}{\delta_2} \right] < 0,$$

mas por outro lado,

$$\begin{aligned} & \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 \\ & = \beta_1^2 - \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_2 - \beta_1\beta_2 + \beta_2^2 > 0, \end{aligned}$$

onde é uma contradição.

Caso existam autovalores complexos, portanto o seu complementar também é como outro autovalor, considerando x_1 e x_2 como autovalores reais e λ_1 e λ_2 autovalores complexos portanto temos,

$$\sum \lambda_i = x_1 + x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 = x_1 + x_2 + 2\alpha_1 = 0.$$

Portanto existe um autovalor real negativo ou autovalor complexo com parte real negativo, logo em qualquer caso sempre existirá um autovalor negativo, onde confirma a existência de ondas viajantes.

Vamos analisar o tipo de aproximação destas ondas no ponto equilíbrio $(b, 1 - b, 0, 0)$ para isto olhamos para as raízes da equação característica,

$$\lambda^4 + \left[\frac{b+c^2}{\delta_2} + (a-ab) \right] \lambda^2 + \frac{cb}{\delta_2} \lambda + \frac{b(a-ab)}{\delta_2} = 0 \quad (6.18)$$

Consideremos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ como as raízes da equação, temos os seguintes resultados,

$$\begin{aligned} i) & \sum \lambda_i = 0 \\ ii) & \prod \lambda_i = \frac{ab(1-b)}{\delta_2} > 0 \\ iii) & \prod \lambda_i \lambda_j = \frac{b+c^2}{\delta_2} + (a-ab) \\ iv) & \prod \lambda_i \lambda_j \lambda_k = \frac{-bc}{\delta_2} < 0 \text{ com } i, j, k = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Observe que na quarta equação (os produtos das raízes três a três) $\prod \lambda_i \lambda_j \lambda_k$ é negativo, portanto pela lei de Decart temos no máximo zero raízes positivos, pois não existe mudança de sinal nos coeficientes do polinômio característico (7.14), como o valor de polinômio na origem é positivo ($p(0) > 0$). Por um raciocínio similar temos que $p(-\lambda)$ tem uma mudança de sinal para seus coeficientes, portanto tem no máximo uma raiz negativa (autovalores negativo). Portanto podemos concluir que as raízes são complexas e como vimos

no (7.15) estes autovalores possuem parte real negativo, logo aproximação das ondas viajantes no ponto equilíbrio $(b, 1 - b, 0, 0)$ com condição inicial (7.9) é da forma oscilatória.

Agora considerando a condição de contorno (7.10) onde represente índice baixo de densidade das populações (predadores e presas), e analisamos o estado de equilíbrio $(0, 0, 0, 0)$, observamos que quando $\delta_2 = 0$ o sistema (7.7) se reduz na forma:

$$\begin{cases} V' = W \\ U' = \frac{1}{c} (U - U^2 - UV) \\ W' = cW + aV (b - U) , \end{cases} \quad (6.20)$$

onde possui o seguinte polinômio característico:

$$\det [\lambda I - J(0, 0, 0)] = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -\frac{1}{c} & \lambda & 0 \\ 0 & -ab & \lambda - c \end{bmatrix} = 0 \quad (6.21)$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 c - \frac{ab}{c}, \quad (6.22)$$

Observe que $p(0) = -\frac{ab}{c} < 0$. Como já foi visto no capítulo anterior este polinômio possui máximo e mínimo local nos pontos,

$$X_M = 0 \text{ e } X_m = \frac{2c}{3},$$

sabendo que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} p(\lambda) = +\infty$ quando $\lambda \rightarrow +\infty$, então existe uma raiz real positiva. Como $p(0) < 0$ temos os outros autovalores complexos, o que nos confirma que nas vizinhanças da origem o comportamento das soluções no plano de fase é a forma espiral, e portanto impossível do ponto de vista ecológico. Logo para $\delta = 0$ não existem ondas viajantes, e como já vimos no Capítulo 5, via argumentos de continuidade, para valores de $\delta_2 > 0$ suficientemente pequenos temos o mesmo resultado.

6.3 Existência de soluções num sistema não local com difusão rápida da presa.

Se no sistema (7.1) consideramos coeficiente difusão do predador (D_2) muito menor do que a presa (D_1) logo temos a razão entre o coeficiente de difusão do predador com presa é aproximadamente é zero ($L = \frac{D_2}{D_1} \simeq 0$). Adimensionalizando este sistema com as seguintes variáveis:

$$u = \frac{U}{K}, \quad v = \frac{BV}{A}, \quad t = AT, \quad x = X \frac{A}{D_2},$$

$$L = \frac{D_2}{D_1}, \quad a = \frac{CK}{A}, \quad b = \frac{D}{CK}$$

obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) u(y, t) dy \right) - uv + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (u - b) av + L \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Usando variável de onda,

$$u(x, t) = U(z) \text{ e } v(x, t) = V(z) \text{ onde } z = x + ct,$$

obtemos:

$$cU' = U \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} a_{2n} U^{2n}(z) \right) - UV + U''$$

$$cV' = aV(U - b).$$

Para simplificarmos as contas, tal como fizemos na seção anterior, truncamos o somatório para $n = 1$ e consideramos $\delta = \varepsilon^2$ para obtermos as equações:

$$cU' - U(1 - U - \delta a_2 U'') + UV - U'' = 0$$

$$cV' - aV(U - b) = 0,$$

que podem ser re-escritas como:

$$\begin{cases} U'' = \frac{cU' - U + U^2 - UV}{1 - \delta a_2 U} \\ V' = \frac{aVU - abv}{c}. \end{cases}$$

Reescrevendo este sistema como sistema de equações ordinárias de primeira ordem, nós obtemos

$$\begin{cases} U' = W \\ V' = \frac{aV(U-b)}{c} \\ W' = \frac{cW-U+U^2+UV}{1-\delta_2 U}. \end{cases}$$

Onde temos pontos críticos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ e $(b,1-b,0)$. Analogamente à seção anterior consideremos as condições de contorno (7.9) e (7.10) para este sistema. Na condição de contorno (7.10) onde temos baixas densidades das populações de predadores e presas, analisamos a estabilidade dos pontos críticos e o comportamento das soluções nas vizinhanças destes pontos para verificarmos a existência de ondas viajantes entre os estados de equilíbrio pela matriz jacobiana. Temos os seguintes resultados:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{aV}{c} & \frac{aU-ab}{c} & 0 \\ \frac{(-1+2U+V)(1-\delta_2 U)+\delta_2(cW-U+U^2+UV)}{(1-\delta_2 U)^2} & \frac{U}{1-\delta_2 U} & \frac{c}{1-\delta_2 U} \end{bmatrix},$$

$$\det[J(0,0,0) - \lambda I] = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-ab}{c} - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & c - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

com polinômio característico,

$$p(\lambda) = \left(\frac{-ab}{c} - \lambda \right) (\lambda^2 - c\lambda + 1),$$

onde temos os seguintes autovalores:

$$\lambda_1 = \frac{-ab}{c}, \quad \lambda_2 = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4}}{2} \text{ e } \lambda_3 = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4}}{2}.$$

Observe que o ponto crítico $(0,0,0)$ é um ponto de equilíbrio instável. Para existência de ondas viajantes realísticas neste ponto é necessário que os autovalores sejam reais. Para que isso ocorra, devemos ter a seguinte limitação para a velocidade da onda:

$$c \geq 2.$$

Portanto para $c \geq 2$ sempre existem ondas viajantes partindo do ponto crítico $(0, 0, 0)$.

Analisemos agora os comportamentos das soluções na vizinhança do ponto crítico $(b, 1 - b, 0)$. Para isso calculamos polinômio característico da matriz jacobiana neste ponto:

$$\det[J(b, 1 - b, 0) - \lambda I] = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ \frac{a(1-b)}{c} & \frac{-2ab}{c} - \lambda & 0 \\ \frac{b}{1-\delta_2 b} & \frac{b}{1-\delta_2 b} & \frac{c}{1-\delta_2 b} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \left(\frac{c^2 - 2ab(1 - \delta_2 b)}{c(1 - \delta_2 b)} \right) \lambda^2 + \frac{b(2a + 1)}{1 - \delta_2 b} \lambda + \frac{ab(1 + b)}{c(1 - \delta_2 b)}. \quad (6.23)$$

Observamos que:

$$p(0) = \frac{ab(1 + b)}{c(1 - \delta_2 b)}.$$

Primeiramente analisamos o caso onde $p(0) > 0$. Este caso ocorre se $1 - \delta_2 b > 0$ ou seja,

$$\delta_2 < \frac{1}{b}.$$

Temos que $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} p(\lambda) \rightarrow -\infty$ quando $\lambda \rightarrow \infty$, o que garante a existência de um autovalor positivo. Se $c^2 > 2ab(1 - \delta_2 b)$ então o coeficiente de λ^2 será positivo e pela Regra de Sinais de Descartes temos somente uma raiz real positiva. Então, os outros autovalores são reais negativos ou complexos. Caso os outros autovalores sejam complexos ($\lambda_2 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_3 = \alpha - i\beta$), temos:

$$\begin{aligned} \lambda_2 + \lambda_3 &= 2\alpha \\ \lambda_2 \lambda_3 &= \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned} \quad (6.24)$$

observamos que a soma das raízes é

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{c^2 - 2ab(1 - \delta_2 b)}{c(1 - \delta_2 b)},$$

que sempre é positiva (com $0 < b < 1$). Por (7.22) obtemos:

$$2\alpha = \frac{c^2 - 2ab(1 - \delta_2 b)}{c(1 - \delta_2 b)} - \lambda_1,$$

e por outro lado, na soma das raízes dois a dois temos,

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \frac{-b(2a+1)}{1-\delta_2b}$$

ou seja,

$$\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3 = \frac{-b(2a+1)}{1-\delta_2b},$$

onde após substituição em (7.22) temos:

$$2\alpha\lambda_1 + \alpha^2 + \beta^2 = \frac{-b(2a+1)}{1-\delta_2b}.$$

Observe neste caso, que

$$2\alpha = \frac{-b(2a+1)}{(1-\delta_2b)\lambda_1} < 0,$$

portanto as raízes complexas (λ_2 e λ_3) têm parte real negativa. Logo, podemos concluir que aproximação das ondas viajantes no ponto equilíbrio $(b, 1-b, 0)$ é da forma oscilatória.

Caso $p(0) < 0$, isto é,

$$1 - \delta_2b > 0 \text{ ou seja } \delta_2 > \frac{1}{b},$$

existe um autovalor negativo. Neste caso temos que os coeficientes de λ^2 , λ e o termo independente no polinômio característico (7.21) são todos negativos, o que nos garante que não existe raiz real positiva. Como temos nesse caso, que $p(0) < 0$, obrigatoriamente as outras raízes são complexas. Se considerarmos $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_3 = \alpha - i\beta$, temos os seguintes resultados:

$$\lambda_2 + \lambda_3 = 2\alpha \tag{6.25}$$

$$\lambda_2\lambda_3 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \frac{c^2 - 2ab(1-\delta_2b)}{c(1-\delta_2b)} \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 &= \frac{-b(2a+1)}{1-\delta_2b} \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= \frac{ab(1+b)}{c(1-\delta_2b)}, \end{aligned}$$

Se considerarmos (7.23) na primeira equação, obtemos:

$$2\alpha = \frac{c^2 - 2ab(1 - \delta_2 b)}{c(1 - \delta_2 b)} - \lambda_1,$$

e na segunda equação temos,

$$2\alpha\lambda_1 + (\alpha^2 + \beta^2) = \frac{-b(2a + 1)}{1 - \delta_2 b}.$$

Analogamente de terceira equação,

$$\lambda_1 (\alpha^2 + \beta^2) = \frac{ab(1 + b)}{c(1 - \delta_2 b)},$$

que após substituição resultam em

$$\alpha = \frac{-ab(1 + b)}{2\lambda_1^2 c(1 - \delta_2 b)} - \frac{b(2a + 1)}{2\lambda_1(1 - \delta_2 b)} < 0.$$

Com isso, obtemos que para $\delta_2 > \frac{1}{b}$, a aproximação da onda viajante ao estado de equilíbrio $(b, 1 - b, 0)$, também se dá de maneira oscilatória.

Portanto temos a seguinte resultado: existe uma solução de onda viajante entre estados de equilíbrios $(0, 0, 0)$ e $(b, 1 - b, 0)$ se $c \geq 2$ onde estas ondas saem no ponto $(0, 0, 0)$ de forma monótona e chegam no ponto crítico $(b, 1 - b, 0)$ de forma oscilatória, independentemente dos valores das constantes envolvidas no problema.

Agora consideramos a condição de contorno (7.9). Onde representa o meio com a densidade de população da presa próxima da capacidade de suporte, e no qual foram introduzidos os predadores. verificamos os comportamentos das soluções nas vizinhanças do ponto crítico $(1, 0, 0)$ e existência de onda viajante entre este estado de equilíbrio e ponto de equilíbrio $(b, 1 - b, 0)$. Para isto calculamos os autovalores da matriz jacobiana pelo polinômio característico no ponto de equilíbrio $(1, 0, 0)$ isto é,

$$\det[J(1, 0, 0) - \lambda I] = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & \frac{a(1-b)}{c} - \lambda & 0 \\ \frac{1}{1-\delta_2} & \frac{1}{1-\delta_2} & \frac{c}{1-\delta_2} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$p(\lambda) = \left(\frac{a(1-b)}{c} - \lambda \right) \left[\lambda^2 - \frac{c}{1-\delta_2} \lambda - \frac{1}{1-\delta_2} \right], \quad (6.26)$$

onde possui autovalores:

$$\lambda_1 = \frac{a(1-b)}{c}, \quad \lambda_2 = \frac{\frac{c}{1-\delta_2} - \sqrt{\left(\frac{c}{1-\delta_2}\right)^2 + \frac{4}{1-\delta_2}}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{\frac{c}{1-\delta_2} + \sqrt{\left(\frac{c}{1-\delta_2}\right)^2 + \frac{4}{1-\delta_2}}}{2}. \quad (6.27)$$

Observe que sempre existe um autovalor real positivo λ_1 , ou seja existe possibilidade de onda viajante partindo no ponto $(1, 0, 0)$ de maneira monótona, se os outros autovalores forem reais, isto é $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Observe na equação (7.25) que os autovalores λ_2 e λ_3 serão reais se,

$$\left(\frac{c}{1-\delta_2}\right)^2 + \frac{4}{1-\delta_2} > 0.$$

Note que esta condição é satisfeita para qualquer valor de $c > 0$ caso tenhamos a não-localidade suficientemente grande, a qual é representada aqui pela constante δ_2 . Sob o ponto de vista da ecologia do modelo, note que a grande não localidade implica, sob a interpretação contida em Gourley 2000, que há ex-cassez de recursos de alimentação da população de presas. Isto implica que em virtude, a população dessas presas não se encontram em quantidade suficiente para sustentar a população de predadores introduzida no meio, não sendo possível a condução para a população de equilíbrio da coexistência. Cabe notar aqui que no caso onde $\delta_2 < 1$, onde a não localidade é muito pequena, um resultado similar de instabilidade do ponto crítico $(1, 0, 0)$ é obtido aqui (conforme foi visto no Capítulo 6), o que reflete o fato de que a população de presas é suficientemente grande para o desenvolvimento dos predadores em análise.

Capítulo 7

Conclusões e Problemas em Aberto

No início deste trabalho, estudamos o processo de modelagem de sistemas dinâmicos, mais especificamente, sistemas de competição e predador-presa. Deu-se destaque aos conceitos importantes para o entendimento de sistemas dinâmicos, como pontos críticos, trajetórias e estabilidade, que foram abordados. No passo seguinte, discutimos e definimos um modelo predador-presa estruturado espacialmente com difusão. Foi estabelecido também que as condições iniciais do sistema seriam escolhidas de duas formas diferentes, sendo que a primeira representa o meio com a densidade de população da presa próxima da capacidade de suporte, e no qual foram introduzidos os predadores. E a segunda, representa baixa densidade do predador e da presa. Isto representa a situação onde as duas espécies foram introduzidas no meio ao mesmo tempo.

Foram analisados dois modelos de sistema do predador-presa com termo de difusão, um com forma local e o outro com forma não local, e com as condições iniciais acima. Observamos que em ambos os modelos os pontos de equilíbrios continuam sendo os mesmos, e para modelo local obtemos as seguintes resultados:

No caso em que tanta presa e tanta predador foram introduzidos no mesmo tempo, temos a existência de onda viajante entre os pontos de equilíbrios. A aproximação das ondas será da forma monótona ou oscilatória, isto é a densidade das populações sempre tende para equilíbrio de modo monótono ou

oscilatório, dependendo o valor de a . Temos para valores de a (cociente de capacidade suporte com Taxa de Crescimento.) suficientemente grandes (acima de um valor crítico a^*) a solução é oscilatória e no caso contrário, a solução se aproxima monotonicamente do ponto de equilíbrio da coexistência.

O caso que representa o meio com a densidade de população da presa próxima da capacidade de suporte, e no qual foram introduzidos os predadores, obtemos a existência de ondas viajantes, para a velocidade mínima de:

$$c \geq \sqrt{4a(1-b)}.$$

Neste caso também temos formas monótonas ou oscilatórias para ondas viajantes no ponto de equilíbrio estável se,

$$0 < a < a^* \text{ e } a > a^*, \quad (7.1)$$

respectivamente.

No sistema não local quando ambas as espécies são introduzidas, não existe nenhuma onda mas se consideramos o meio com a densidade de população da presa próxima da capacidade de suporte, e no qual foram introduzidos os predadores, nenhuma onda existirá se

$$a < \frac{1}{1-b}$$

e se obtemos

$$a > \frac{1}{1-b}$$

existe a solução de onda viajante para todo valor de c e as densidades das populações sempre tendam para estado de equilíbrio da coexistência de modo oscilatório.

A determinação numérica das trajetórias dos sistemas presa-predador difusivos considerados acima é difícil, mesmo no caso local. Isto se dá pelo fato de que o plano de fase respectivo possui muitas trajetórias ilimitadas, e poucas (talvez uma única) trajetória limitada, ligando os pontos críticos do sistema. Portanto, um estudo mais detalhado do ponto de vista computacional seria

interessante para verificarmos se alguma característica interessante, e não observada em nossa análise teórica, pudesse ser obtida, visando um melhor entendimento da situação ecológica que modelamos.

Em um dos modelos estudados acima, o termo não-local de interação entre a população de presas foi estudado. Uma pergunta natural que segue é o que acontece, no que diz respeito a pontos de equilíbrios, trajetórias ligando esses pontos, etc. no caso no qual a interação não local ocorre na interação entre presas e predadores. Mais especificamente, uma análise de uma situação na qual a atuação de uma espécie de predador com longo alcance sobre as presas (por exemplo, populações de aranhas) poderia ser estudada.

A modelagem matemática aplicada a problemas em ecologia visa conhecermos melhor as interações entre espécies com determinadas características. Aplicações desses modelos existem em tentativas de se preservar espécies ameaçadas, bem como controlar populações que são prejudiciais a determinadas atividades humanas (como pragas em plantações). Ao final desse texto, esperamos ter dado informações relevantes sobre dinâmicas de populações, e que nos auxiliem, de uma maneira ou de outra, a compreender a natureza, seja para nosso bem, ou para aqueles que nos sucederão.

Bibliografia

- [1] N.F. Britton. *Essential Mathematical Biology*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [2] R. Dajoz. *Princípios de Ecologia*, Artmed, 7^a Edição, 2005.
- [3] S. Dunbar, *Traveling Waves in Diffusive Predator – Prey Equations : Periodic Orbits and Point to Periodic Heteroclinic Orbits*. SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 46, No. 6 (1986), pp. 1057-1078.
- [4] S. A. Gourley, N. F. Britton, A Predator-prey reaction-diffusion system with nonlocal effects. *Journal of Mathematical Biology*, (1996), pp. 297-332.
- [5] S. Gourley, *Traveling Front Solutions of a Nonlocal Fisher Equation*. *Journal of Mathematical Biology*, No. 41 (2000), pp. 272-284.
- [6] B. Kim, *Computing Traveling – Wave Front Solutions in a Diffusive Predator – Prey Model*. REU Program, University of Michigan (2004).
- [7] D. Ludwig, D. G. Aronson e H. F. Weinberger, *Spatial Patterning of Spruce Budworm*. *Journal of Mathematical Biology*, No. 8 (1979), pp. 217-258.
- [8] J.D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.