

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PÓS-GRADUAÇÃO EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA
SETOR DE TECNOLOGIA**

**ESTUDO TEÓRICO E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL
DO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO
APLICADO A PROBLEMAS ELASTOSTÁTICOS LINEARES
BIDIMENSIONAIS**

CURITIBA

2007

RAPHAEL FERNANDO SCUCIATO

**ESTUDO TEÓRICO E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL
DO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO
APLICADO A PROBLEMAS ELASTOSTÁTICOS LINEARES
BIDIMENSIONAIS**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia, Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Alkimin de Lacerda

Co-Orientador: Prof. Dr. José Antônio Marques Carrer

CURITIBA

2007

TERMO DE APROVAÇÃO

RAPHAEL FERNANDO SCUCIATO

ESTUDO TEÓRICO E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A PROBLEMAS ELASTOSTÁTICOS LINEARES BIDIMENSIONAIS

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia, Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:

Prof. Luiz Alkimin de Lacerda, D. Sc.
Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, UFPR

Co-Orientador:

Prof. José Antonio Marques Carrer, D. Sc.
Departamento de Matemática, UFPR

Prof. Webe João Mansur, Ph. D.
Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ

Prof. Luiz Antonio Soares de Souza, D. Sc.
Departamento de Estruturas, UEL

Curitiba, 02 de março de 2007

*Dedico esta obra ao meu Pai,
que me ensinou os preceitos mais
importantes da Engenharia: capricho,
precisão, criatividade, dedicação e respeito.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, desejo externar meu mais profundo agradecimento a Deus, que inundou a minha vida e o meu ser com a sua maravilhosa graça; ao Senhor Jesus Cristo, meu Salvador, que morreu por mim para me salvar dos meus próprios pecados; ao Espírito Santo, meu Consolador, que me ensinou o significado da verdadeira adoração; os quais deram-me força, paciência, persistência, determinação, conforto, paz e, inquestionavelmente, inteligência e discernimento para concretizar esta obra.

Aos meus pais, Mario e Eledir, e a minha irmã, Lisiane, pela paciência, compreensão e incentivo durante os momentos mais difíceis e sem os quais, com certeza, eu não teria alcançado sucesso.

A minha amada Patricia, a maior bênção que o Senhor concedeu-me depois de minha salvação eterna, instrumento nas mãos do Pai para mostrar-me a direção certa nos momentos mais confusos; que o nosso amor transcenda à eternidade.

Aos mestres, Prof. Alkimin e Prof. Carrer, pela orientação inestimável, pela confiança depositada em mim e pela paciência em todos os momentos de dúvidas; espero que este trabalho deixe-os tão orgulhosos quanto eu estou.

Ao colega e amigo Roberto, pelo companheirismo, espirituosidade e bom humor, características que sempre me ajudaram a perceber que não estava só em meio às adversidades.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pela ajuda financeira que foi tremendamente importante para a realização de alguns sonhos pessoais.

À Maristela, pela alegria, bom humor e, claro, pelo café e chá sempre quentinhos que, inegavelmente, ajudaram a criar valiosos momentos de integração.

Aos professores e colegas do CESEC que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao Pr. Roberto, Pra. Gema, Pr. Rechier e Gislaine, pelas orações constantes que certamente empreenderam em meu favor e que, em retribuição, somente posso rogar a Deus que os recompense grandemente na Glória.

Ao colega, amigo e irmão MC Palu, pela amizade verdadeira.

"O temor do SENHOR é o princípio da sabedoria..."

Salmo 111:10a

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	xiii
LISTA DE TABELAS	xviii
LISTA DE GRÁFICOS	xx
RESUMO.....	xxiii
ABSTRACT.....	xxiv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Revisão Bibliográfica	3
1.2 Objetivos.....	7
1.3 Metodologia.....	7
1.4 Organização	8
2 ELASTOSTÁTICA	9
2.1 Preliminares Matemáticas	9

2.1.1	Notação Indicial Cartesiana.....	9
2.1.2	Delta de Kronecker.....	11
2.1.3	Função Delta de Dirac.....	12
2.1.4	Teorema da Divergência	12
2.1.5	Série de Taylor	13
2.1.6	Quadratura Gaussiana	13
2.1.7	Requisitos de Continuidade.....	14
2.1.7.1	<i>Condição de Continuidade de Hölder</i>	<i>15</i>
2.1.8	Valor Principal de Cauchy	16
2.2	Equações Básicas da Elasticidade Linear.....	18
2.2.1	Equações de Equilíbrio.....	18
2.2.2	Estado Plano de Tensões	20
2.2.3	Tensões Principais	25
2.2.4	Deformações Específicas	29
2.2.5	Equações de Compatibilidade	30
2.2.6	Relações Tensão-Deformação	32
2.2.7	Equações Governantes	34
2.2.8	Condições para Estado Plano de Tensões	36
2.2.9	Condições para Estado Plano de Deformações	37
3	FORMULAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO	39
3.1	Teorema do Trabalho Recíproco de Betti	39
3.2	Equações Integrais de Contorno.....	42
3.3	Soluções Fundamentais.....	44
3.3.1	Problemas Tridimensionais	45

3.3.2 Problemas Bidimensionais	46
3.4 Equação Integral de Contorno para Deslocamentos no Contorno	47
3.5 Regiões Infinitas	52
3.6 Discretização Numérica	55
3.7 Elementos Constantes	56
3.7.1 Formação do Sistema de Equações.....	56
3.7.2 Integração	61
3.7.2.1 Submatrizes $\mathbf{H}^{cc}$	62
3.7.2.2 Submatrizes $\mathbf{G}^{cc}$	63
3.7.2.3 Submatrizes $\mathbf{G}^{cn}$ quando $c \neq n$	64
3.7.2.4 Submatrizes $\mathbf{H}^{cn}$ quando $c \neq n$	65
3.7.3 Deslocamentos e Tensões nos Pontos Internos	67
3.8 Elementos Isoparamétricos	69
3.8.1 Formação do Sistema de Equações.....	73
3.8.1.1 Elementos Lineares	73
3.8.1.2 Elementos Quadráticos.....	77
3.8.2 Integração	80
3.8.2.1 Elementos Lineares – Coeficientes $Q_{ij}^{cn\alpha}$	80
3.8.2.2 Elementos Lineares – Coeficientes $P_{ij}^{cn\alpha}$	85
3.8.2.3 Elementos Quadráticos – Coeficientes $Q_{ij}^{cn\alpha}$	87
3.8.2.4 Elementos Quadráticos – Coeficientes $P_{ij}^{cn\alpha}$	96
3.8.3 Deslocamentos e Tensões nos Pontos Internos	98
4 CÓDIGOS COMPUTACIONAIS	99

4.1 Elementos Constantes	99
4.1.1 Organização e Funcionamento do Código	99
4.1.2 Modelo de Arquivo de Entrada de Dados	101
4.2 Elementos Lineares	102
4.2.1 Organização e Funcionamento do Código	103
4.2.2 Modelo de Arquivo de Entrada de Dados	104
4.3 Elementos Quadráticos	106
4.3.1 Organização e Funcionamento do Código	107
4.3.2 Modelo de Arquivo de Entrada de Dados	108
4.4 Múltiplos Contornos	110
4.4.1 Detalhes da Implementação Computacional	111
4.4.2 Código em Fortran 95.....	112
4.4.3 Organização e Funcionamento do Código	112
4.4.4 Modelo de Arquivo de Entrada de Dados	112
4.5 Considerações de Simetria	114
4.5.1 Problema Exemplo para Análise de Simetria	115
4.5.1.1 <i>Simetria em Relação ao Eixo Horizontal</i>	118
4.5.1.2 <i>Simetria em Relação ao Eixo Vertical</i>	122
4.5.1.3 <i>Simetria em Relação ao Eixo Horizontal e Vertical</i>	126
4.5.1.4 <i>Deslocamentos e Tensões nos Pontos Internos</i>	131
4.5.2 Detalhes da Implementação Computacional	132
4.5.3 Código em Fortran 95.....	132
4.5.4 Organização e Funcionamento do Código	133
4.5.5 Modelo de Arquivo de Entrada de Dados	133
4.6 Peculiaridades da Modelagem de Problemas Utilizando MEC	135

5 PROBLEMAS RESOLVIDOS	137
5.1 Cavidade Pressurizada.....	137
5.1.1 Considerações Gerais	137
5.1.2 Solução Analítica.....	138
5.1.3 Dados do Problema.....	139
5.1.4 Malhas de Elementos Constantes	139
5.1.4.1 Malha CAV12C	140
5.1.4.2 Malha CAV24C	140
5.1.4.3 Malha CAV48C	141
5.1.5 Malhas de Elementos Lineares	141
5.1.5.1 Malha CAV12L	142
5.1.5.2 Malha CAV24L	142
5.1.5.3 Malha CAV48L	143
5.1.6 Malhas de Elementos Quadráticos.....	143
5.1.6.1 Malha CAV6Q	144
5.1.6.2 Malha CAV12Q	144
5.1.6.3 Malha CAV24Q	145
5.1.7 Resultados.....	145
5.1.7.1 Tensões Radiais	145
5.1.7.2 Tensões Angulares	146
5.1.7.3 Deslocamentos Radiais	147
5.1.7.4 Análise dos Resultados.....	148
5.2 Cilindro Pressurizado	159
5.2.1 Considerações Gerais	159
5.2.2 Solução Analítica.....	159
5.2.3 Dados do Problema.....	160
5.2.4 Malhas de Elementos Quadráticos.....	161

5.2.4.1 Malha CIL18Q	161
5.2.4.2 Malha CIL30Q	162
5.2.4.3 Malha CIL36Q	163
5.2.5 Resultados.....	164
5.2.5.1 Tensões Radiais	164
5.2.5.2 Tensões Angulares	164
5.2.5.3 Deslocamentos Radiais	165
5.2.5.4 Análise dos Resultados.....	165
5.3 Placa com Orifício.....	172
5.3.1 Considerações Gerais	172
5.3.2 Solução Analítica.....	172
5.3.3 Dados do Problema.....	173
5.3.4 Malhas de Elementos Quadráticos	174
5.3.4.1 Malha PL68Q	175
5.3.4.2 Malha PL34QX	176
5.3.4.3 Malha PL34QY	177
5.3.4.4 Malha PL17Q	178
5.3.5 Resultados.....	179
5.3.6 Análise dos Resultados	183
6 CONCLUSÃO	186
6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros.....	187
REFERÊNCIAS.....	188

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – Componentes de tensões atuando nas faces de um volume elementar representando um ponto no interior de um corpo tridimensional	19
FIGURA 2.2 – Forças de superfície e forças internas atuando em um elemento localizado no contorno de um corpo bidimensional de espessura unitária constante	21
FIGURA 2.3 – Componentes ou projeções do vetor unitário normal ao contorno	22
FIGURA 2.4 – As tensões atuando em planos inclinados podem ser obtidas a partir de um elemento triangular extraído de um elemento localizado no interior do corpo	24
FIGURA 2.5 – Elemento triangular resultante e as tensões que atuam sobre o mesmo.....	24
FIGURA 2.6 – Solução geométrica para determinar os ângulos que definem os Planos Principais nos quais atuam as Tensões Principais.....	27
FIGURA 2.7 – Solução geométrica para determinar os ângulos que definem os planos nos quais atuam as tensões tangenciais máxima e mínima	28
FIGURA 2.8 – Componentes de deformações específicas atuando em um volume elementar representando um ponto no interior de um corpo tridimensional: a) Volume elementar sem deformação; b) Volume elementar deformado	30
FIGURA 3.1 – Uma região arbitrária com domínio Ω^* e contorno Γ^* envolvendo o problema com domínio Ω e contorno Γ	40

FIGURA 3.2 – Processo limite quando o ponto fonte está localizado no contorno de um problema bidimensional	48
FIGURA 3.3 – Processo limite quando o ponto fonte está localizado no contorno de um problema tridimensional	48
FIGURA 3.4 – Região infinita envolvendo uma cavidade.....	53
FIGURA 3.5 – Definição da normal e do sentido de integração: a) Problemas com domínio infinito; b) Problemas com domínio finito.....	55
FIGURA 3.6 – Malha modelo formada por elementos de contorno constantes	57
FIGURA 3.7 – Sistema algébrico $Hu = Gt$ destacando os valores das condições de contorno prescritas para um problema arbitrário.....	60
FIGURA 3.8 – Sistema algébrico $AY = F$ resultante da reordenação das colunas das matrizes H e G de modo a agrupar todas as incógnitas do problema no lado direito da igualdade e os valores das condições de contorno prescritas no lado esquerdo da igualdade.....	61
FIGURA 3.9 – Representação geométrica dos termos necessários para o cálculo dos coeficientes das submatrizes G^{cc}	64
FIGURA 3.10 – Representação geométrica dos termos necessários para o cálculo dos coeficientes das submatrizes G^{cn} quando $c \neq n$	65
FIGURA 3.11 – Representação geométrica dos termos necessários para o cálculo dos coeficientes das submatrizes H^{cn} quando $c \neq n$	66
FIGURA 3.12 – Elementos de contorno bidimensionais definidos em termos de um sistema de coordenadas adimensional.....	70
FIGURA 3.13 – Malha modelo formada por elementos de contorno lineares.....	74
FIGURA 3.14 – Malha modelo formada por elementos de contorno quadráticos	78

FIGURA 3.15 – Relação entre os sistemas de coordenadas adimensionais para elementos de contorno lineares conforme a posição do ponto fonte dentro do elemento.....	82
FIGURA 3.16 – Relação entre os sistemas de coordenadas adimensionais para elementos de contorno quadráticos conforme a posição do ponto fonte dentro do elemento	89
FIGURA 4.1 – Modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_CONST	101
FIGURA 4.2 – Ilustração da malha do modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_CONST	102
FIGURA 4.3 – Modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_LIN	105
FIGURA 4.4 – Ilustração da malha do modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_LIN.....	106
FIGURA 4.5 – Modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_QUAD	109
FIGURA 4.6 – Ilustração da malha do modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_QUAD.....	110
FIGURA 4.7 – Exemplo de problema que apresenta múltiplos contornos.....	111
FIGURA 4.8 – Modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_QUAD_MC....	113
FIGURA 4.9 – Ilustração da malha do modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_QUAD_MC	114
FIGURA 4.10 – Exemplo de problema que apresenta simetria.....	115
FIGURA 4.11 – Malha modelo para análise de problemas que apresentam simetria	117
FIGURA 4.12 – Malha modelo considerando apenas simetria em relação ao eixo horizontal..	119
FIGURA 4.13 – Técnica de reflexão do ponto fonte considerando apenas simetria em relação ao eixo horizontal.....	122

FIGURA 4.14 – Malha modelo considerando apenas simetria em relação ao eixo vertical	123
FIGURA 4.15 – Técnica de reflexão do ponto fonte considerando apenas simetria em relação ao eixo vertical.....	126
FIGURA 4.16 – Malha modelo considerando simetria em relação ao eixo horizontal e vertical simultaneamente	127
FIGURA 4.17 – Técnica de reflexão do ponto fonte considerando apenas simetria em relação ao eixo vertical para um problema que apresenta simetria em relação ao eixo horizontal e vertical simultaneamente	130
FIGURA 4.18 – Técnica de reflexão do ponto fonte considerando apenas simetria em relação ao eixo horizontal e vertical para um problema que apresenta simetria em relação ao eixo horizontal e vertical simultaneamente	130
FIGURA 4.19 – Técnica de reflexão do ponto fonte considerando apenas simetria em relação ao eixo horizontal para um problema que apresenta simetria em relação ao eixo horizontal e vertical simultaneamente	131
FIGURA 4.20 – Modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SIM	134
FIGURA 4.21 – Ilustração da malha do modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SIM	134
FIGURA 5.1 – Cavidade em um meio infinito sob pressão uniforme.....	138
FIGURA 5.2 – Representação geométrica da malha CAV12C.....	140
FIGURA 5.3 – Representação geométrica da malha CAV24C.....	140
FIGURA 5.4 – Representação geométrica da malha CAV48C.....	141
FIGURA 5.5 – Representação geométrica da malha CAV12L.....	142
FIGURA 5.6 – Representação geométrica da malha CAV24L.....	142

FIGURA 5.7 – Representação geométrica da malha CAV48L.....	143
FIGURA 5.8 – Representação geométrica da malha CAV6Q.....	144
FIGURA 5.9 – Representação geométrica da malha CAV12Q.....	144
FIGURA 5.10 – Representação geométrica da malha CAV24Q.....	145
FIGURA 5.11 – Cilindro sob pressão uniforme	159
FIGURA 5.12 – Representação geométrica da malha CIL18Q.....	161
FIGURA 5.13 – Representação geométrica da malha CIL30Q.....	162
FIGURA 5.14 – Representação geométrica da malha CIL36Q.....	163
FIGURA 5.15 – Placa retangular com orifício central sob tração uniforme	172
FIGURA 5.16 – Representação geométrica da malha PL68Q.....	175
FIGURA 5.17 – Representação geométrica da malha PL34QX.....	176
FIGURA 5.18 – Representação geométrica da malha PL34QY.....	177
FIGURA 5.19 – Representação geométrica da malha PL17Q.....	178

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Dados utilizados na análise do problema de cavidade pressurizada	139
Tabela 5.2 – Tensões radiais obtidas com o código MEC_ELASTIC_CONST	145
Tabela 5.3 – Tensões radiais obtidas com o código MEC_ELASTIC_LIN.....	146
Tabela 5.4 – Tensões radiais obtidas com o código MEC_ELASTIC_QUAD	146
Tabela 5.5 – Tensões angulares obtidas com o código MEC_ELASTIC_CONST.....	146
Tabela 5.6 – Tensões angulares obtidas com o código MEC_ELASTIC_LIN	147
Tabela 5.7 – Tensões angulares obtidas com o código MEC_ELASTIC_QUAD.....	147
Tabela 5.8 – Deslocamentos radiais obtidos com o código MEC_ELASTIC_CONST	147
Tabela 5.9 – Deslocamentos radiais obtidos com o código MEC_ELASTIC_LIN	148
Tabela 5.10 – Deslocamentos radiais obtidos com o código MEC_ELASTIC_QUAD	148
Tabela 5.11 – Dados utilizados na análise do problema de cilindro pressurizado	160
Tabela 5.12 – Tensões radiais obtidas com o código MEC_ELASTIC_QUAD_MC.....	164
Tabela 5.13 – Tensões angulares obtidas com o código MEC_ELASTIC_QUAD_MC	164

Tabela 5.14 – Deslocamentos radiais obtidos com o código MEC_ELASTIC_QUAD_MC.....	165
Tabela 5.15 – Dados utilizados na análise do problema de placa com orifício	173
Tabela 5.16 – Tensões angulares obtidas com o código MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SIM para a malha PL68Q	179
Tabela 5.17 – Tensões angulares obtidas com o código MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SIM para a malha PL34QX.....	180
Tabela 5.18 – Tensões angulares obtidas com o código MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SIM para a malha PL34QY	181
Tabela 5.19 – Tensões angulares obtidas com o código MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SIM para a malha PL17Q	182

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 5.1 – Solução analítica para as tensões radiais versus raio versus malhas CAV12C, CAV24C e CAV48C	150
Gráfico 5.2 – Solução analítica para as tensões radiais versus raio versus malhas CAV12L, CAV24L e CAV48L	150
Gráfico 5.3 – Solução analítica para as tensões radiais versus raio versus malhas CAV6Q, CAV12Q e CAV24Q	151
Gráfico 5.4 – Erro no cálculo das tensões radiais versus raio versus malhas CAV12C, CAV24C e CAV48C	151
Gráfico 5.5 – Erro no cálculo das tensões radiais versus raio versus malhas CAV12L, CAV24L e CAV48L	152
Gráfico 5.6 – Erro no cálculo das tensões radiais versus raio versus malha CAV6Q, CAV12Q e CAV24Q	152
Gráfico 5.7 – Solução analítica para as tensões angulares versus raio versus malhas CAV12C, CAV24C e CAV48C	153
Gráfico 5.8 – Solução analítica para as tensões angulares versus raio versus malhas CAV12L, CAV24L e CAV48L	153

Gráfico 5.9 – Solução analítica para as tensões angulares versus raio versus malhas CAV6Q, CAV12Q e CAV24Q	154
Gráfico 5.10 – Erro no cálculo das tensões angulares versus raio versus malhas CAV12C, CAV24C e CAV48C	154
Gráfico 5.11 – Erro no cálculo das tensões angulares versus raio versus malhas CAV12L, CAV24L e CAV48L	155
Gráfico 5.12 – Erro no cálculo das tensões angulares versus raio versus malha CAV6Q, CAV12Q e CAV24Q	155
Gráfico 5.13 – Solução analítica para os deslocamentos radiais versus raio versus malhas CAV12C, CAV24C e CAV48C	156
Gráfico 5.14 – Solução analítica para os deslocamentos radiais versus raio versus malhas CAV12L, CAV24L e CAV48L	156
Gráfico 5.15 – Solução analítica para os deslocamentos radiais versus raio versus malhas CAV6Q, CAV12Q e CAV24Q	157
Gráfico 5.16 – Erro no cálculo dos deslocamentos radiais versus raio versus malhas CAV12C, CAV24C e CAV48C	157
Gráfico 5.17 – Erro no cálculo dos deslocamentos radiais versus raio versus malhas CAV12L, CAV24L e CAV48L	158
Gráfico 5.18 – Erro no cálculo dos deslocamentos radiais versus raio versus malha CAV6Q, CAV12Q e CAV24Q	158
Gráfico 5.19 – Solução analítica para as tensões radiais versus raio versus malha CIL18Q...	166
Gráfico 5.20 – Solução analítica para as tensões radiais versus raio versus malha CIL30Q...	166
Gráfico 5.21 – Solução analítica para as tensões radiais versus raio versus malha CIL36Q...	167
Gráfico 5.22 – Erro no cálculo das tensões radiais versus raio versus malha CIL18Q, CIL30Q e CIL36Q	167

Gráfico 5.23 – Solução analítica para as tensões angulares versus raio versus malha CIL18Q	168
Gráfico 5.24 – Solução analítica para as tensões angulares versus raio versus malha CIL30Q	168
Gráfico 5.25 – Solução analítica para as tensões angulares versus raio versus malha CIL36Q	169
Gráfico 5.26 – Erro no cálculo das tensões angulares versus raio versus malha CIL18Q, CIL30Q e CIL36Q	169
Gráfico 5.27 – Solução analítica para os deslocamentos radiais versus raio versus malha CIL18Q	170
Gráfico 5.28 – Solução analítica para os deslocamentos radiais versus raio versus malha CIL30Q	170
Gráfico 5.29 – Solução analítica para os deslocamentos radiais versus raio versus malha CIL36Q	171
Gráfico 5.30 – Erro no cálculo dos deslocamentos radiais versus raio versus malha CIL18Q, CIL30Q e CIL36Q	171
Gráfico 5.31 – Solução analítica para as tensões angulares versus raio	183
Gráfico 5.32 – Erro no cálculo das tensões angulares versus raio versus malha PL68Q	184
Gráfico 5.33 – Erro no cálculo das tensões angulares versus raio versus malha PL34QX	184
Gráfico 5.34 – Erro no cálculo das tensões angulares versus raio versus malha PL34QY	185
Gráfico 5.35 – Erro no cálculo das tensões angulares versus raio versus malha PL17Q	185

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo, primeiramente, realizar um estudo teórico dos aspectos matemáticos e computacionais relacionados à formulação do Método de Elementos de Contorno aplicado a problemas elastostáticos lineares bidimensionais. Posteriormente, são desenvolvidos códigos em linguagem de programação Fortran 95 capazes de analisar problemas de Estado Plano de Tensões e Estado Plano de Deformações, utilizando elementos de contorno constantes, lineares e quadráticos, múltiplos contornos e considerações de simetria.

Palavras-chave: Método de Elementos de Contorno, Elastostática, Elasticidade Linear Bidimensional, Fortran 95.

ABSTRACT

The first purpose of this work is to accomplish a theoretical study of the mathematical and computational aspects related to the Boundary Element Method formulation applied to bidimensional linear elastostatic problems. Later, computational codes are developed in Fortran 95 language, which are capable of solving problems using constant, linear and quadratic boundary elements, taking multiboundaries and symmetry conditions into consideration.

Key-words: Boundary Element Method, Elastostatic, Two-dimensional Linear Elasticity, Fortran 95.

1 INTRODUÇÃO

Problemas de engenharia são frequentemente descritos por leis físicas as quais são comumente expressas por equações diferenciais parciais. Em muitos casos, uma representação matemática alternativa e equivalente do problema é encontrada em termos de equações integrais de contorno. Com o avanço nas técnicas de modelagem numérica e o incremento na capacidade de processamento dos computadores, métodos de modelagem baseados em equações integrais de contorno podem ser agora usados para a simulação de muitos problemas práticos de engenharia. A mais geral e efetiva técnica numérica para solução de equações integrais de contorno é o Método de Elementos de Contorno.¹

A redução das dimensões do problema analisado constitui uma das razões pela qual o Método de Elementos de Contorno é tão atrativo: em problemas bidimensionais, apenas o contorno unidimensional do domínio necessita ser discretizado em elementos; em problemas tridimensionais, apenas as superfícies do contorno necessitam ser discretizadas. Isso significa que, quando comparada ao Método de Elementos Finitos e a outras técnicas de análise de domínio, uma análise

¹ ALIABADI, M. H. **The Boundary Element Method**, Vol. 2, Applications in Solids and Structures. Chippingham: John Wiley & Sons, 2002. p. xiii.

de contorno resulta em uma substancial redução no esforço de modelagem computacional. Além do mais, como os parâmetros incógnitos (tais como deslocamentos e forças de superfície) são aproximados nos contornos discretizados, um sistema de equações muito menor do que o gerado pelo Método de Elementos Finitos é obtido.²

Uma peculiaridade do Método de Elementos de Contorno é que ele provê um modelo contínuo do domínio, uma vez que nenhuma discretização do mesmo é requerida. Isso conduz a uma ótima resolução dos parâmetros incógnitos no domínio do problema. As soluções nos pontos internos são calculadas após as incógnitas de contorno terem sido calculadas, de maneira semelhante a um pós-processamento. A densidade, distribuição e localização dos pontos internos não interferem na malha de contorno, tampouco nos valores das incógnitas de contorno.³

Outra característica do Método de Elementos de Contorno é a satisfação automática de condições de contorno para domínios infinitos e semi-infinitos, o que elimina a necessidade de discretização numérica em contornos remotos.⁴

Como dito anteriormente, o Método de Elementos de Contorno constitui-se numa técnica numérica, baseada num procedimento de discretização, para a solução das equações oriundas das denominadas formulações integrais de contorno. Essas formulações integrais de contorno são divididas em duas categorias diferentes. A primeira, e talvez a mais popular, é a chamada formulação direta, na qual as funções incógnitas presentes na formulação são variáveis físicas do problema. Em elasticidade, por exemplo, essas funções incógnitas são os campos de deslocamentos e forças de superfície. A outra abordagem é chamada de formulação indireta, na qual as funções incógnitas são representadas por fontes de densidade fictícias. Uma vez que essas fontes de densidade são calculadas, os valores dos parâmetros físicos podem ser obtidos através de simples integrações.⁵

Neste trabalho, o Método de Elementos de Contorno será desenvolvido usando a formulação direta.

² Ibid., p. 1.

³ Ibid., p. 2,3.

⁴ Ibid., p. 3.

⁵ Ibid., p. 15.

1.1 Revisão Bibliográfica

Apesar do Método de Elementos de Contorno ser uma técnica relativamente nova em análises de problemas de engenharia, seus fundamentos podem ser relacionados às formulações matemáticas clássicas de FREDHOLM⁶ e MIKHILIN⁷, em teoria de potencial, e BETTI⁸, SOMIGLIANA⁹ e KUPRADZE¹⁰, em elasticidade. O desenvolvimento das formulações no contexto de equações integrais de contorno é devido à JASWON¹¹, HESS e SMITH¹², MASSONNET¹³, RIZZO¹⁴ e CRUSE¹⁵. O trabalho de LACHAT¹⁶ e LACHAT e WATSON¹⁷ são provavelmente as contribuições iniciais mais significativas na direção de tornar o Método de Elementos de Contorno uma técnica numérica efetiva.¹⁸

Com relação à teoria da elasticidade, mais especificamente, os fundamentos da equação integral de contorno podem ser relacionados às formulações matemáticas clássicas de BETTI¹⁹, SOMIGLIANA²⁰, MUSKHELISHVILI²¹ e

⁶ FREDHOLM, I. Sur une classe d'equations fonctionnelles. **Acta Mathematica**, n. 27, p. 365-390, 1903.

⁷ MIKHILIN, S. G. **Integral Equations**. London: Pergamon Press, 1957.

⁸ BETTI, E. Teoria dell elasticita. **Il Nuovo Cimento**, p. 7-10, 1872.

⁹ SOMIGLIANA, C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotrope. **Il Nuovo Cimento**, n. 20, p. 181-185, 1886.

¹⁰ KUPRADZE, V. D. Potential methods in the theory of elasticity. **Israel Programme for Scientific Translations**, 1965.

¹¹ JAWSON, M. A. Integral equation method in potential theory. **Proceedings of the Royal Society of London**, n. 275, p. 23-32, 1963.

¹² HESS, J. L., SMITH, A. M. O. Calculation of potential flows about arbitrary bodies. **Progress in Aeronautical Sciences**, n. 8, 1967.

¹³ MASSONNET, C. E. Numerical use of integral procedures. **Stress Analysis**, cap. 10, p. 198-235, 1965.

¹⁴ RIZZO, F. J. An integral approach to boundary-value problems of classical elastostatics. **Quarterly Journal of Applied Mathematics**, n. 25, p. 83-95, 1967.

¹⁵ CRUSE, T. A. Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. **International Journal of Solids and Structures**, n. 5, p. 1259-1274, 1969.

¹⁶ LACHAT, J. C. **A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics**. PhD Thesis, University of Southampton, 1975.

¹⁷ LACHAT, J. C., WATSON, J. O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, n. 10, p. 991-1005, 1976.

¹⁸ ALIABADI, op. cit., p. 1.

¹⁹ BETTI, op. cit.

²⁰ SOMIGLIANA, op. cit.

KUPRADZE²². O desenvolvimento dessas formulações, no contexto de métodos numéricos, tomou forma em meados da década de 60 através dos trabalhos de MASSONNET²³, RIZZO²⁴ e CRUSE²⁵, sendo que esse último introduziu a primeira formulação para a elasticidade tridimensional. Progressos posteriores, durante a década de 70, agregaram a representação paramétrica à formulação, de maneira similar àquela usada no Método de Elementos Finitos. RICCARDELLA²⁶ e CRUSE²⁷ melhoraram a implementação numérica do Método de Elementos de Contorno por meio da introdução de variação linear sobre os elementos. No entanto, como mencionado anteriormente, a contribuição mais significativa para a construção do Método de Elementos de Contorno resultou do trabalho de LACHAT²⁸ e LACHAT e WATSON²⁹, os quais desenvolveram uma formulação isoparamétrica para o método.³⁰

Importantes aplicações da elasticidade tridimensional são as estruturas formadas por placas e cascas, muito comuns em projetos de engenharia (por exemplo: asas de aviões e painéis de fuselagem, tanques de armazenamento, lajes de edifícios, entre outros). Há duas teorias amplamente utilizadas para placas e cascas: a primeira foi desenvolvida por KIRCHHOFF³¹, e é comumente referenciada como a "teoria clássica", e a outra foi desenvolvida por REISSNER³², e é conhecida como teoria de deformação por cisalhamento.³³

²¹ MUSKHELISHVILI, N. I. **Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity**. Noordhoff: Leyden, 1953.

²² KUPRADZE, op. cit.

²³ MASSONNET, op. cit.

²⁴ RIZZO, op. cit.

²⁵ CRUSE, op. cit.

²⁶ RICCARDELLA, P. C. **An Implementation of the Boundary Integral Technique for Planar Problems of Elasticity and Elastoplasticity**. PhD Thesis, Carnegie-Mellon University, 1973.

²⁷ CRUSE, T. A., SWEDLOW, J. L. Interactive program for analysis and design problems in advanced composite technology. **Report AFML-TR-71-268**, Carnegie-Mellon University, 1971.

²⁸ LACHAT, op. cit.

²⁹ LACHAT, J. C., WATSON, J. O., op. cit.

³⁰ ALIABADI, op. cit., p. 15.

³¹ KIRCHHOFF, G. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. **J. Rein Angew Math.**, n. 40, p. 51-88, 1850.

³² REISSNER, E. On bending of elastic plates. **Quartely Journal of Applied Mathematics**, n. 5, p. 55-68, 1947.

³³ ALIABADI, op. cit., p. 103.

A aplicação do Método de Elementos de Contorno para a teoria clássica de placas foi primeiramente proposta por JASWON, MAITI e SYMM³⁴. O desenvolvimento da formulação direta do Método de Elementos de Contorno para a teoria de placas de Kirchhoff foi introduzido por FORBES e ROBINSON³⁵, seguido pelos trabalhos de BÉZINE³⁶, STERN³⁷ e TOTTENHAM³⁸. HARTMANN e ZORMANTEL³⁹ ampliaram o desenvolvimento do método e implementaram-no para placas com geometrias, carregamentos e apoios relativamente complexos. Seguindo os trabalhos anteriores, outros (ABDEL-AKHER e HARTLEY⁴⁰, KARAMI, ZARRINCHANG e FOROUGHİ⁴¹, TANAKA e MIYAZAKI⁴², VENTURINI e PAIVA⁴³ e PAIVA e ALIABADI⁴⁴) desenvolveram e aplicaram com maior profundidade a formulação integral de contorno para a teoria clássica de flexão de placas.⁴⁵

Por sua vez, o desenvolvimento da formulação direta do Método de Elementos de Contorno para a teoria de placas de Reissner foi apresentado por VANDER WEEËN⁴⁶. Mais tarde, KARAM e TELLES⁴⁷ estenderam a formulação para

³⁴ JASWON, M. A., MAITI, M., SYMM, G. T. Numerical biharmonic analysis and some applications. **International Journal of Solids and Structures**, n. 3, p. 309-332, 1967.

³⁵ FORBES, D. J., ROBINSON, A. R. Numerical analysis of elastic plates and shallow shells by an integral equation method. **Structural Research Series Report**, n. 345, University of Illinois, Urbana, 1969.

³⁶ BÉZINE, G. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. **Mech. Research Communications**, n. 5(4), p. 197-206, 1978.

³⁷ STERN, M. A general boundary integral formulation for plate bending problems. **International Journal of Solids and Structures**, n. 15, p. 769-782, 1979.

³⁸ TOTTENHAM, H., The boundary element method for plates and shells, in *Developments in Boundary Element Methods I*, Applied Science, London, 173-205, 1979.

³⁹ HARTMANN, F., ZORMANTEL, R. The direct boundary element method in plate bending. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, n. 23, p. 2049-2069, 1986.

⁴⁰ ABDEL-AKHER, A., HARTLEY, G. A. Evaluation of boundary integrals for plate bending. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, n. 28, p. 75-93, 1989.

⁴¹ KARAMI, G., ZARRINCHANG, J., FOROUGHİ, B. Analytical treatment of boundary integrals in direct boundary element analysis of plate bending problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, n. 37, p. 2409-2427, 1994.

⁴² TANAKA, M., MIYAZAKI, K. A direct BEM for elastic plate-structures subjected to arbitrary loadings. **Boundary Elements VII**, p. 4-16, 1985.

⁴³ VENTURINI, W. S., PAIVA, J. B. Plate bending analysis by the boundary element method considering zoned thickness domain. **Software for Engineering Workstations**, n. 4, p. 183-185, 1988.

⁴⁴ PAIVA, J. B., ALIABADI, M. H. Boundary element analysis of zoned plates in bending. **Computational Mechanics**, n. 25, p. 560-566, 2000.

⁴⁵ ALIABADI, op. cit., p. 103.

⁴⁶ VANDER WEEËN, F. Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, n. 18, p. 1-10, 1982.

englobar regiões infinitas e também reportaram que o modelo de placa de Reissner é adequado tanto para placas delgadas quanto espessas. BARCELLOS e SILVA⁴⁸ apresentaram uma formulação similar àquela de Vander Weeën para o modelo de placa de Mindlin. A formulação deles difere da formulação de Reissner no fator de cisalhamento. WESTPHAL e BARCELLOS⁴⁹ investigaram a importância dos termos negligenciados nas soluções fundamentais derivadas por Vander Weeën. Eles concluíram que esses termos não têm efeito sobre os resultados.⁵⁰

Formulações não-lineares para o Método de Elementos de Contorno podem ser encontradas em TELLES e KARAM⁵¹, para problemas elastoplásticos, e XIAO-YAN, MAO-KUANG e XIUXI⁵², para problemas geometricamente não-lineares. Mais recentemente, WEN, ALIABADI e YOUNG⁵³ apresentaram uma formulação de elementos de contorno para a teoria de placas de Kirchhoff no domínio da frequência. Em ALIABADI⁵⁴, avanços recentes na análise de problemas de flexão de placas com elementos de contorno podem ser encontrados.⁵⁵

Trabalhos mais recentes têm-se concentrado em desenvolver métodos mais eficientes para o tratamento matemático das integrais singulares e hiper-singulares presentes nas formulações integrais de contorno. Alguns exemplos de tais trabalhos seriam GUIGGIANI e CASALINI⁵⁶, GUIGGIANI⁵⁷, HUANG e CRUSE⁵⁸ e FLEURY, MANSUR e AZEVEDO⁵⁹.

⁴⁷ KARAM, V. J., TELLES, J. C. F. On boundary elements for Reissner's plate theory. **Engineering Analysis**, n. 5, p. 21-27, 1988.

⁴⁸ BARCELLOS, C. A., SILVA, L. H. M. A boundary element formulation for the Midlin's plate model. **Boundary Element Technology**, p. 123-130, 1989.

⁴⁹ WESTPHAL, T. Jr., BARCELLOS, C. A.. Application of the boundary element method to Reissner's and Midlin's plate model. **Boundary Elements XII**, n. 1, p. 467-477, 1990.

⁵⁰ ALIABADI, op. cit., p. 103,104.

⁵¹ TELLES, J. F. C., KARAM, V. J. Nonlinear material analysis of Reissner's plates. **Plate Bending with Boundary Elements**, p. 127-164, 1998.

⁵² XIAO-YAN, L., MAO-KUANG, H., XIUXI, W. Geometrically nonlinear analysis of Reissner type plate by the boundary element method. **Computer and Structures**, n. 37, p. 911-916, 1990.

⁵³ WEN, P. H., ALIABADI, M. H., YOUNG, A. Boundary element method for dynamic plate bending problems. **International Journal of Solids and Structures**, n. 37, p. 5177-5188, 2000.

⁵⁴ ALIABADI, M. H. **Plate Bending Analysis with Boundary Elements**. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1998.

⁵⁵ ALIABADI, op. cit., p. 104.

⁵⁶ GUIGGIANI, M., CASALINI, P. Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 24, p. 1711-1720, 1987.

1.2 Objetivos

Os principais objetivos deste trabalho são:

- a) revisão da formulação matemática da teoria da elasticidade linear;
- b) apresentação da formulação integral de contorno para a elastostática linear bidimensional;
- c) discussão dos aspectos computacionais relacionados ao processo de implementação numérica do Método de Elementos de Contorno aplicado à elastostática linear bidimensional;
- d) criação de códigos em linguagem de programação Fortran 95 capazes de analisar problemas elastostáticos lineares bidimensionais de Estado Plano de Tensões e Estado Plano de Deformações.

1.3 Metodologia

Com vistas a alcançar os objetivos estabelecidos anteriormente, a seguinte metodologia é adotada neste trabalho: em primeiro lugar, realiza-se um estudo teórico-matemático dos tópicos afins; em segundo lugar, descrevem-se as implementações computacionais (características, organização e funcionamento) e, finalmente, faz-se a validação dos códigos desenvolvidos através da análise de problemas que possuem solução analítica conhecida.

⁵⁷ GUIGGIANI, M. The evaluation of Cauchy principal value integrals in the Boundary Element Method – A review. **Mathematical Computational Modelling**, vol. 15, n. 3-5, p. 175-184, 1991.

⁵⁸ HUANG, Q., CRUSE, T. A. Some notes on singular integral techniques in boundary element analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 36, p. 2643-2659, 1993.

⁵⁹ FLEURY, P., MANSUR, W. J., AZEVEDO, J. P. S. Um novo enfoque para formulação hipersingular do MEC para a solução de problemas potenciais bidimensionais. **Anais do XVIII CILAMCE**, vol. 1, p. 261-268, 1997.

1.4 Organização

O restante deste trabalho está organizado do seguinte modo: a primeira parte do Capítulo 2 apresenta, inicialmente, uma revisão de alguns conceitos matemáticos básicos utilizados ao longo dos desenvolvimentos posteriores. A segunda parte traz uma revisão da formulação matemática da teoria da elasticidade linear, deduzindo as principais relações que serão necessárias para a apresentação do Método de Elementos de Contorno e suas aplicações a problemas de Estado Plano de Tensões e Estado Plano de Deformações.

O Capítulo 3, por sua vez, apresenta a formulação do Método de Elementos de Contorno aplicado a problemas elastostáticos lineares bidimensionais. Os aspectos computacionais relacionados à implementação numérica do método são discutidos. São considerados os casos de elementos de contorno constantes e isoparamétricos (lineares e quadráticos).

A descrição da organização e funcionamento dos códigos elaborados com base nas formulações desenvolvidas é apresentada no Capítulo 4. Particularidades da elaboração de códigos que utilizam malhas com múltiplos contornos e considerações de simetria, são discutidas nas últimas seções desse capítulo.

A validação dos códigos desenvolvidos, apresentada no Capítulo 5, é feita por meio da análise de problemas que possuem solução analítica conhecida. Cada seção desse capítulo trata de um problema específico, estando organizadas da seguinte maneira: características e dados gerais do problema, solução analítica, malhas de elementos de contorno utilizadas nas análises numéricas, tabelas comparativas de resultados e discussões pertinentes.

Conclusões e considerações finais acerca dos resultados globais e contribuições deste trabalho são abordadas no Capítulo 6.

2 ELASTOSTÁTICA

2.1 Preliminares Matemáticas

Nesta seção, alguns conceitos matemáticos básicos, que serão utilizados ao longo do desenvolvimento de todo este trabalho, serão brevemente revisados.

2.1.1 Notação Indicial Cartesiana

A Notação Indicial Cartesiana faz uso dos índices subscritos $1, 2, 3$ para representar as direções Cartesianas x, y, z , e dispensa símbolos de somatório quando ocorrem índices subscritos repetidos uma vez num mesmo termo da expressão. Por exemplo:

$$a_i a_i = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \sum_{i=1}^3 a_i a_i$$

e

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \sum_{i=1}^3 a_{ii}$$

Essa convenção de somatório é conhecida como Convenção de Somatório de Einstein. É importante ressaltar que expressões tais como $a_i b_i x_i$ não estão definidas nessa convenção, ou seja, um índice nunca deve ser repetido mais de uma vez quando a Convenção de Somatório de Einstein for usada. Consequentemente, uma expressão da forma

$$\sum_{i=1}^3 a_i b_i x_i$$

deve sempre reter seu sinal de somatório.

Com essa convenção, pode-se simplificar um sistema algébrico de N por N expressões

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} x_j = y_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

da seguinte maneira:

$$A_{ij} x_j = y_i \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

Os índices repetidos na expressão anterior implicam somatório. Vale ressaltar que $A_{ij} \neq A_{ji}$ a menos que a matriz A seja simétrica. Outra característica dessa mesma expressão é a presença do índice i uma única vez em cada termo.

Um índice que aparece uma única vez em cada termo de uma equação é chamado de índice livre e assume os valores $1, 2, \dots, N$ por vez. Como exemplo, deve-se expandir a expressão

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad i, j = 1, 2, 3$$

primeiramente, nas seguintes expressões:

$$t_1 = \sigma_{1j} n_j$$

$$t_2 = \sigma_{2j} n_j$$

$$t_3 = \sigma_{3j} n_j$$

Finalmente, a Convenção de Somatório de Einstein completa o sistema algébrico equivalente:

$$t_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3$$

$$t_2 = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3$$

$$t_3 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3$$

Se há dois índices livres aparecendo numa equação, como em

$$T_{ij} = A_{im}A_{jm} \quad i, j = 1, 2, 3$$

então essa equação é uma contração de nove equações, cada uma com um somatório de três termos no lado direito. De fato:

$$T_{11} = A_{1m}A_{1m} = A_{11}A_{11} + A_{12}A_{12} + A_{13}A_{13}$$

$$T_{12} = A_{1m}A_{2m} = A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23}$$

$$T_{13} = A_{1m}A_{3m} = A_{11}A_{31} + A_{12}A_{32} + A_{13}A_{33}$$

.....

$$T_{33} = A_{3m}A_{3m} = A_{31}A_{31} + A_{32}A_{32} + A_{33}A_{33}$$

Utilizando-se a Notação Indicial Cartesiana, a distância r entre dois pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ pode ser escrita na forma

$$r = (r_i r_i)^{1/2} \quad (2.1)$$

com

$$r_i = x_i - x'_i \quad (2.2)$$

As derivadas de r em relação aos pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ são dadas por

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = r_{,i} = \frac{r_i}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial x'_i} = -r_{,i} = -\frac{r_i}{r} \quad (2.3)$$

A derivada normal de r é dada pela expressão

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,i} n_i \quad (2.4)$$

onde n_i denota as componentes do vetor unitário normal à superfície de contorno direcionado para fora do corpo.

2.1.2 Delta de Kronecker

O Delta de Kronecker, simbolizado por δ_{ij} , é definido como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.5)$$

2.1.3 Função Delta de Dirac

A representação matemática de excitações concentradas, tais como forças pontuais em mecânica dos sólidos e dos fluidos, cargas elétricas pontuais em eletrostática ou forças de impulso em acústica, pode ser alcançada com a adoção da função Delta de Dirac.

A função Delta de Dirac, simbolizada por $\Delta(\mathbf{X}', \mathbf{X})$, é definida como

$$\Delta(\mathbf{X}', \mathbf{X}) = \begin{cases} \infty & \text{para } \mathbf{X} = \mathbf{X}' \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.6)$$

A principal característica da função Delta de Dirac é possuir o valor zero em todos os pontos $\mathbf{X}$, exceto no ponto $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$, denominado ponto fonte, onde a função torna-se infinita. Assim, essa função representa singularidades pontuais no ponto $\mathbf{X}'$.

A função Delta de Dirac possui a seguinte propriedade:

$$\int_a^b \Delta(\mathbf{X}', \mathbf{X}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = f(\mathbf{X}') \quad (2.7)$$

onde $-\infty \leq a, b \leq +\infty$ e $a \leq \mathbf{X}' \leq b$.

2.1.4 Teorema da Divergência

O Teorema da Divergência é uma identidade fundamental que relaciona uma integral de volume com uma integral de superfície, ou seja,

$$\int_V f_{i,i} dV = \int_S f_i n_i dS \quad (2.8)$$

onde $f_{i,i} = \partial f_i / \partial x_i$ e n_i denota as componentes do vetor unitário normal à superfície S direcionado para fora do corpo.

2.1.5 Série de Taylor

A Série de Taylor de uma função f (real ou complexa) infinitamente diferenciável, definida em um intervalo aberto $(a - r, a + r)$, é a série de potências dada por

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (2.9)$$

onde $n!$ é o fatorial de n e $f^{(n)}(a)$ denota a n -ésima derivada de f no ponto a . Se $a = 0$, a série também é chamada Série de MacLaurin.

Se f não for indefinidamente diferenciável em a , isto é, se f só admitir n derivadas em a , então vale a fórmula de Taylor

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots + \\ & + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + r_n(x) \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde $r_n(x)$ é uma função de x tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = 0 \quad (2.11)$$

2.1.6 Quadratura Gaussiana

Muitas das integrais que necessitam ser calculadas no âmbito da aplicação do Método de Elementos de Contorno não são triviais, ou seja, ou a primitiva da função integrando não existe explicitamente, ou é demasiado complicado obtê-la, inviabilizando, desse modo, a sua utilização prática, principalmente em códigos computacionais. Por esse motivo é essencial recorrer a técnicas de integração numérica, que também recebem a designação de regras de quadratura.

Em análise numérica, uma regra de quadratura é uma aproximação de uma integral definida de uma função, usualmente definida como uma soma ponderada dos valores da função em pontos específicos do domínio de integração.

A regra de quadratura de Gauss, ou Gaussiana, é uma regra de quadratura de n pontos construída de modo a obter resultados exatos para polinômios de grau $2n-1$ através da escolha adequada de n pontos ξ_i e n pesos w_i . O domínio de integração para tal regra é normalmente tomado como sendo o intervalo fechado $[-1,1]$, assim a quadratura de Gauss é definida como

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) + E_n \cong \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \quad (2.12)$$

onde n é o número de pontos de integração, ξ_i é a coordenada do i -ésimo ponto de integração, w_i é o peso associado ao i -ésimo ponto de integração ξ_i , e E_n é o erro ou resíduo, dado pela expressão

$$E_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} \frac{d^{2n} f(\xi)}{d\xi^{2n}} \quad (2.13)$$

Os pontos de integração ξ_i correspondem às raízes do Polinômio de Legendre, definido como

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} \left[(\xi^2 - 1)^n \right] \quad (2.14)$$

e os pesos w_i são calculados através da relação

$$w_i = \frac{2}{1 - \xi_i^2} \left[\frac{dP_n(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_i}^2 \quad (2.15)$$

É muito comum encontrar os valores dos pontos de integração ξ_i e dos pesos w_i já calculados e tabelados para uma determinada faixa de valores de ξ_i , geralmente para valores de 2 a 10 (ver, por exemplo, BREBBIA e DOMINGUEZ¹).

2.1.7 Requisitos de Continuidade

Na matemática, muitas vezes faz-se necessário assegurar que as funções ou as classes de funções com as quais se está trabalhando satisfaçam certos

¹ BREBBIA, C. A., DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements**, An Introductory Course. Boston: Computational Mechanics Publications, 1989, p. 268.

requisitos de continuidade, de modo a garantir a existência, validade ou mesmo unicidade de certas propriedades ou características.

Intuitivamente, uma função contínua em um ponto p de seu domínio é uma função cujo gráfico não apresenta "salto" em p .² Uma definição mais rigorosa para o conceito de continuidade é obtida do Cálculo Diferencial e Integral³, e pode ser enunciada na forma

$$f \text{ contínua em } p \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \text{ dado, } \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in D_f, \\ |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon \end{cases} \quad (2.16)$$

Diz-se que f é contínua em $A \subset D_f$ se f for contínua em todo $p \in A$. Diz-se, simplesmente, que f é uma função contínua se f for contínua em todo p de seu domínio. A notação $C(\Omega)$ ou $C^0(\Omega)$ é usada para denotar o conjunto de todas as funções contínuas com domínio Ω . De maneira similar, $C^1(\Omega)$ é usado para denotar o conjunto das funções diferenciáveis com domínio Ω cujas primeiras derivadas são contínuas, $C^2(\Omega)$ é usado para denotar o conjunto das funções duplamente diferenciáveis com domínio Ω cujas segundas derivadas são contínuas, e assim por diante.

2.1.7.1 Condição de Continuidade de Hölder

Uma função satisfaz a condição de continuidade de Hölder se existem constantes $k > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$ tal que

$$|f(x) - f(s)| \leq k |x - s|^\alpha \quad (2.17)$$

para x suficientemente próximo de s . A continuidade de Hölder é "mais restritiva" que a continuidade normal, de modo que apenas funções "patológicas" são contínuas sem satisfazer também a condição de Hölder.⁴

² GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Calculo**, Vol. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001 (reimp. 2004), p. 54.

³ Ibid., p. 62.

⁴ GUIGGIANI, M. The evaluation of Cauchy principal value integrals in the Boundary Element Method – A review. **Mathematical Computational Modelling**, vol. 15, n. 3-5, p. 176, 1991.

2.1.8 Valor Principal de Cauchy

Integrais de funções que se tornam infinitas em um ponto do intervalo de integração são denominadas integrais impróprias. Como será visto no próximo capítulo, o desenvolvimento matemático do Método de Elementos de Contorno conduz a várias integrais dessa natureza, sendo oportuno, portanto, realizar uma breve descrição do tratamento matemático empregado em tais situações.

Dada a integral imprópria

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

que apresenta uma assíntota vertical em $x = c$ (ou seja, uma descontinuidade infinita em $x = c$), sendo $a < c < b$, então I pode ser calculada como

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx$$

Se os dois limites existirem, a integral converge ou é convergente. Se, por outro lado

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx = \pm\infty$$

e/ou

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx = \pm\infty$$

então a integral diverge ou é divergente ou é não convergente.

Fazendo $\delta = \varepsilon$, a integral imprópria não convergente pode existir no sentido do Valor Principal de Cauchy, possuindo um valor finito, definido como

$$VPC \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right] \quad (2.18)$$

embora

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx = \pm\infty$$

e/ou

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx = \pm\infty$$

Para ilustrar esse conceito considere-se a função

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

para a qual $x = 0$ é uma assíntota vertical. A integral

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

deve ser calculada como

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^\alpha} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{+\delta}^{+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_{+\delta}^{+1} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} \left[(-\varepsilon)^{1-\alpha} - (-1)^{1-\alpha} \right] \right\} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} \left[1 - \delta^{1-\alpha} \right] \right\} \end{aligned}$$

Se $\alpha < 1$, então $k = 1-\alpha > 0$ e a integral imprópria converge, pois

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon)^k = 0 \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^k = 0 \end{cases}$$

No entanto, se $\alpha = 3$, por exemplo, então $f(x) = \frac{1}{x^3}$ e

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon)^k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon)^{-2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(-\varepsilon)^2} = +\infty \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-2} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^2} = +\infty \end{cases}$$

ou seja, a integral imprópria diverge.

Calculando o Valor Principal de Cauchy para a função $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ obtém-se

$$VPC \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[(-\varepsilon)^{1-\alpha} - (-1)^{1-\alpha} + 1 - \varepsilon^{1-\alpha} \right]$$

Quando $\alpha = 3$ encontra-se

$$VPC \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{1-3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[(-\varepsilon)^{-2} - (-1)^{-2} + 1 - \varepsilon^{-2} \right] =$$

$$= -\frac{I}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{I}{(-\varepsilon)^2} - \frac{I}{(-I)^2} + I - \varepsilon^{-2} \right] = -\frac{I}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\varepsilon^{-2} - I + I - \varepsilon^{-2} \right] = 0$$

2.2 Equações Básicas da Elasticidade Linear

Nesta seção serão apresentadas as principais relações matemáticas, concernentes à teoria da elasticidade linear, que serão necessárias para o desenvolvimento do Método de Elementos de Contorno e suas aplicações a problemas de Estado Plano de Tensões e Estado Plano de Deformações. Para uma explanação mais detalhada sobre a formulação matemática da teoria da elasticidade linear podem ser consultadas as obras de TIMOSHENKO⁵, HIBBELER⁶, CRANDALL⁷, entre outros.

2.2.1 Equações de Equilíbrio

O estado de tensões em um ponto de um corpo tridimensional pode ser descrito pelas componentes de tensões atuando em um volume elementar de lados dx , dy , dz , como apresentado na Figura 2.1. O primeiro índice subscrito de cada componente de tensão representa a direção da normal ao plano no qual a tensão atua, e o segundo, a direção na qual a tensão propriamente dita atua.

Das nove componentes de tensões, apenas seis são essenciais para descrever o estado de tensões de um ponto no interior de um corpo tridimensional. Isso porque nem todas as componentes são independentes, mas estão relacionadas

⁵ TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. 3. ed. Tokyo: McGraw-Hill, 1970.

⁶ HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.

⁷ CRANDALL, Stephen H. et al. **An Introduction to the Mechanics of Solids**. 2. ed. Singapore: McGraw-Hill, 1978.

através de equações de equilíbrio. Aplicando a equação de equilíbrio de momentos, que é escrita tomando os momentos das componentes de tensão em relação a um determinado ponto do volume elementar, produzem-se as chamadas relações complementares de cisalhamento, isto é,

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

ou então

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.19)$$

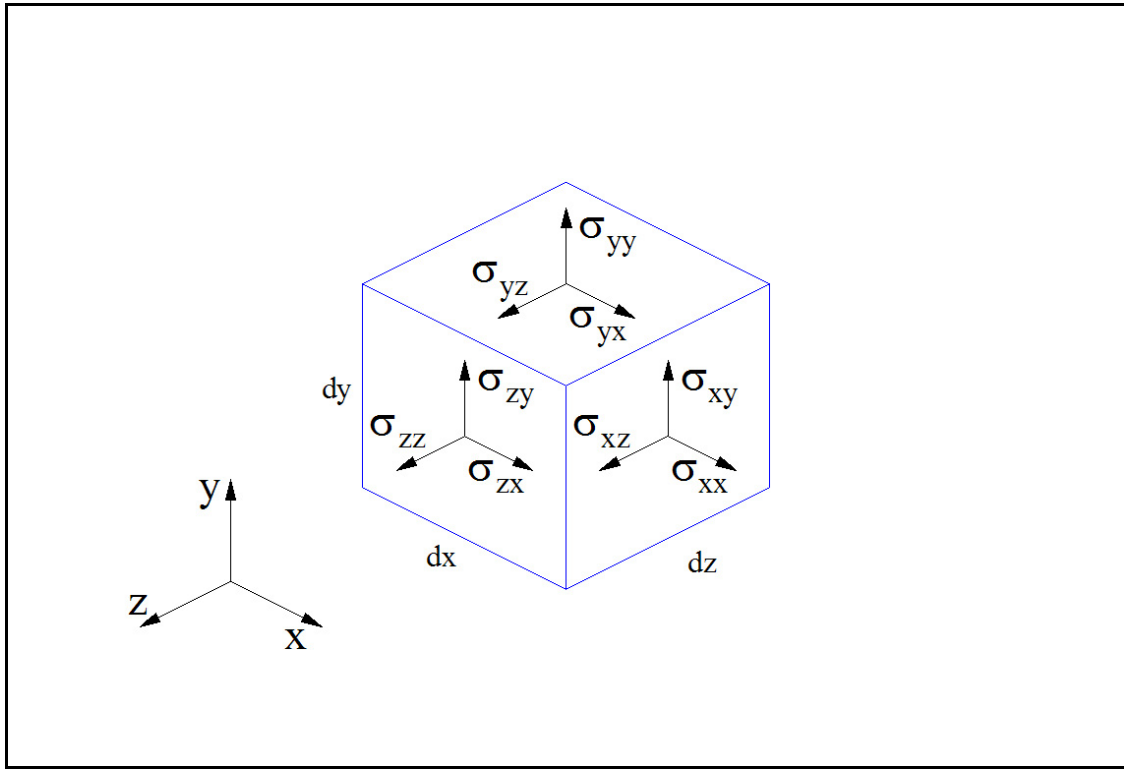


FIGURA 2.1 – Componentes de tensões atuando nas faces de um volume elementar representando um ponto no interior de um corpo tridimensional

As equações de equilíbrio, para um sistema tridimensional sujeito a forças externas e forças de corpo b_x , b_y e b_z , são dadas por

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + b_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0$$

as quais podem ser reescritas como

$$\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + b_i = 0 \quad i \neq j \neq k \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

ou ainda, de forma mais compacta,

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.20)$$

Essas equações devem ser satisfeitas em todo o interior do corpo e, por isso, são denominadas condições de equilíbrio no domínio Ω do corpo.

2.2.2 Estado Plano de Tensões

As equações de equilíbrio podem ser simplificadas para a condição bidimensional de Estado Plano de Tensões. Nessa condição, a qual é aplicável a placas delgadas, admite-se que as tensões na direção da espessura da placa são negligenciáveis. Se o eixo z estiver orientado segundo a espessura da placa, então as componentes σ_{zz} , σ_{xz} e σ_{yz} serão todas nulas. As componentes não nulas σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xy} serão avaliadas sobre a espessura da placa e serão consideradas independentes de z . As equações de equilíbrio simplificam para

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y = 0$$

ou

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad i, j = 1, 2 \quad (2.21)$$

Essas equações satisfazem os requisitos de equilíbrio em todos os pontos do domínio Ω do corpo. No entanto, o equilíbrio também deve ser satisfeito em todos os pontos do contorno Γ do corpo, onde as componentes de forças de superfície por unidade de área são denotadas por t_x e t_y .

Para o elemento triangular da Figura 2.2, localizado no contorno de um corpo bidimensional de espessura unitária constante, as forças de superfície na face AB do contorno devem estar em equilíbrio com as forças internas nas faces internas AC e CB .

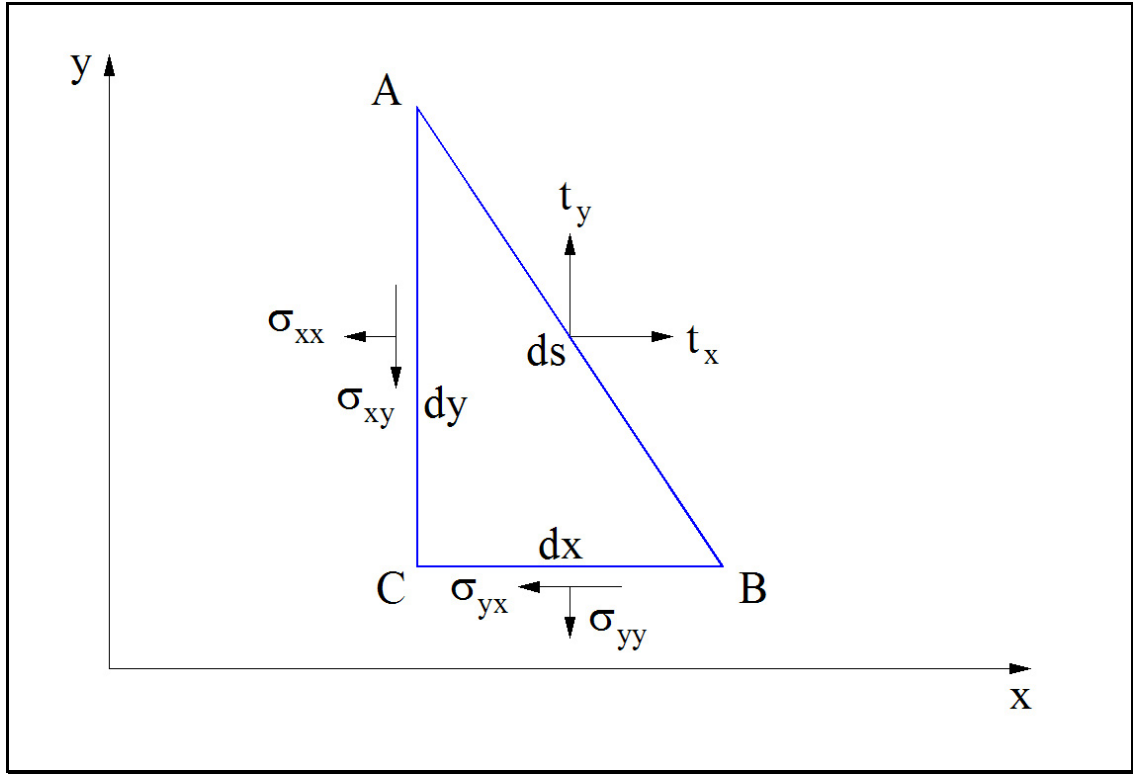


FIGURA 2.2 – Forças de superfície e forças internas atuando em um elemento localizado no contorno de um corpo bidimensional de espessura unitária constante

Somando todas as forças na direção x e isolando para t_x encontra-se

$$t_x ds - \sigma_{xx} dy - \sigma_{yx} dx = 0$$

$$t_x = \sigma_{xx} \frac{dy}{ds} + \sigma_{yx} \frac{dx}{ds}$$

Da Figura 2.3 é possível obter as relações

$$n_x = \cos \theta = l = \frac{dy}{ds} \quad n_y = \cos \gamma = m = \frac{dx}{ds} \quad (2.22)$$

As derivadas dy/ds e dx/ds são os cossenos diretores l e m dos ângulos que o vetor unitário normal à face AB forma com os eixos coordenados x e y , respectivamente. Desse modo,

$$t_x = \sigma_{xx} l + \sigma_{yx} m$$

e, de maneira análoga, para a direção y ,

$$t_y = \sigma_{xy} l + \sigma_{yy} m$$

As derivadas dy/ds e dx/ds também podem ser consideradas como sendo iguais às componentes ou projeções do vetor unitário normal à face AB segundo os

eixos coordenados x e y , respectivamente. Assim, as equações anteriores são reescritas como

$$t_x = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y$$

$$t_y = \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y$$

ou, de forma mais compacta,

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad i, j = 1, 2 \quad (2.23)$$

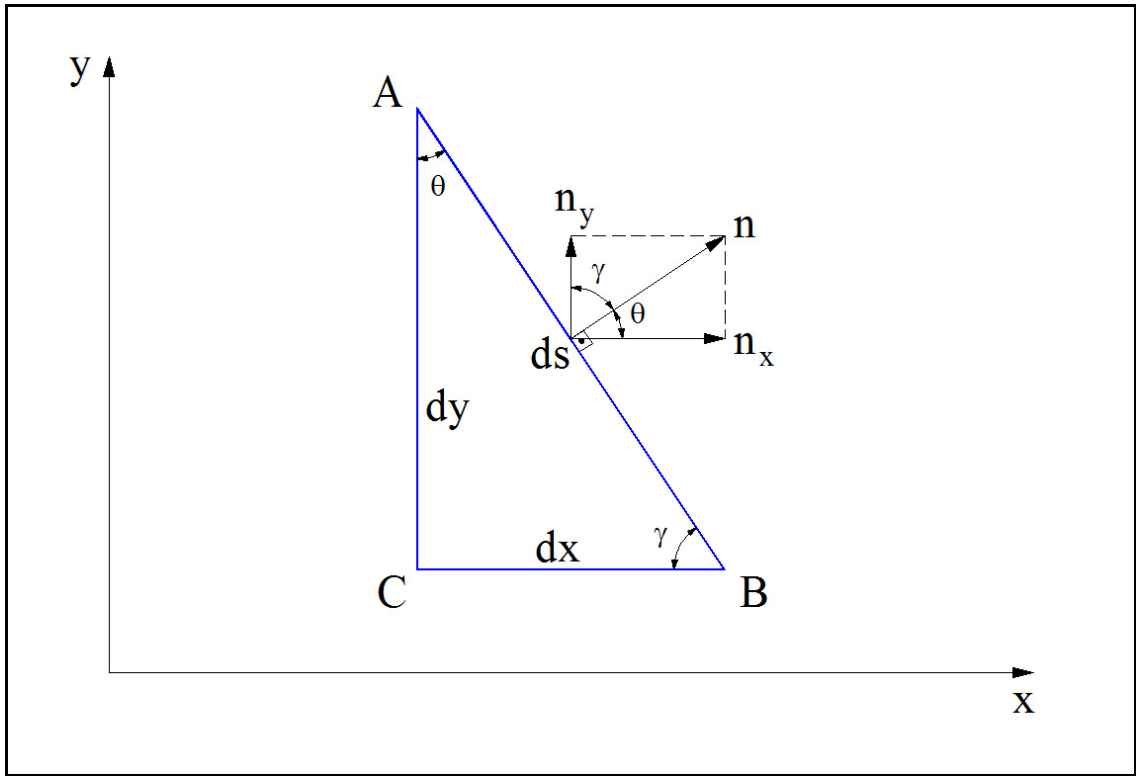


FIGURA 2.3 – Componentes ou projeções do vetor unitário normal ao contorno

A extensão para sistemas tridimensionais é relativamente simples, a saber:

$$t_x = \sigma_{xx}l + \sigma_{yx}m + \sigma_{zx}n$$

$$t_y = \sigma_{xy}l + \sigma_{yy}m + \sigma_{zy}n$$

$$t_z = \sigma_{xz}l + \sigma_{yz}m + \sigma_{zz}n$$

onde l , m e n são os cossenos diretores dos ângulos que o vetor unitário normal à superfície do contorno forma com os eixos coordenados x , y e z , respectivamente. Logo, as equações anteriores podem ser reescritas na forma

$$t_x = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{yx}n_y + \sigma_{zx}n_z$$

$$t_y = \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{zy}n_z$$

$$t_z = \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z$$

resultando em

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.24)$$

Essas equações devem ser satisfeitas em todo o contorno do corpo e, por isso, são denominadas equações ou condições de equilíbrio no contorno Γ do corpo.

As expressões para tensões em planos inclinados podem ser obtidas tendo em vista um elemento triangular extraído de um elemento localizado no interior do corpo, através de um corte inclinado de um ângulo θ em relação ao eixo y (Figura 2.4). Para que o elemento resultante ABC (Figura 2.5) esteja em equilíbrio, as tensões atuando nas faces AB , BC e CA necessitam estar em equilíbrio. Como o elemento possui espessura unitária constante, a área das faces é proporcional aos comprimentos dos lados do triângulo.

Considerando, primeiramente, que o elemento triangular esteja sujeito apenas a tensões normais e calculando o somatório das forças que atuam segundo a direção normal à face AB , obtém-se

$$\sigma_n AB - \sigma_{xx} AC \cos \theta - \sigma_{yy} BC \sin \theta = 0$$

Dividindo todos os termos por AB ,

$$\sigma_n = \sigma_{xx} \frac{AC}{AB} \cos \theta + \sigma_{yy} \frac{BC}{AB} \sin \theta$$

utilizando a Figura 2.5,

$$\sigma_n = \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta$$

e aplicando as identidades trigonométricas pertinentes, resulta

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\theta \quad (2.25)$$

De maneira similar, mas desta vez calculando o somatório das forças que atuam segundo a direção paralela à face AB , resulta

$$\sigma_t AB + \sigma_{xx} AC \sin \theta - \sigma_{yy} BC \cos \theta = 0$$

$$\sigma_t = -\sigma_{xx} \frac{AC}{AB} \sin \theta + \sigma_{yy} \frac{BC}{AB} \cos \theta$$

$$\sigma_t = -\sigma_{xx} \cos \theta \sin \theta + \sigma_{yy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma_t = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\theta \quad (2.26)$$

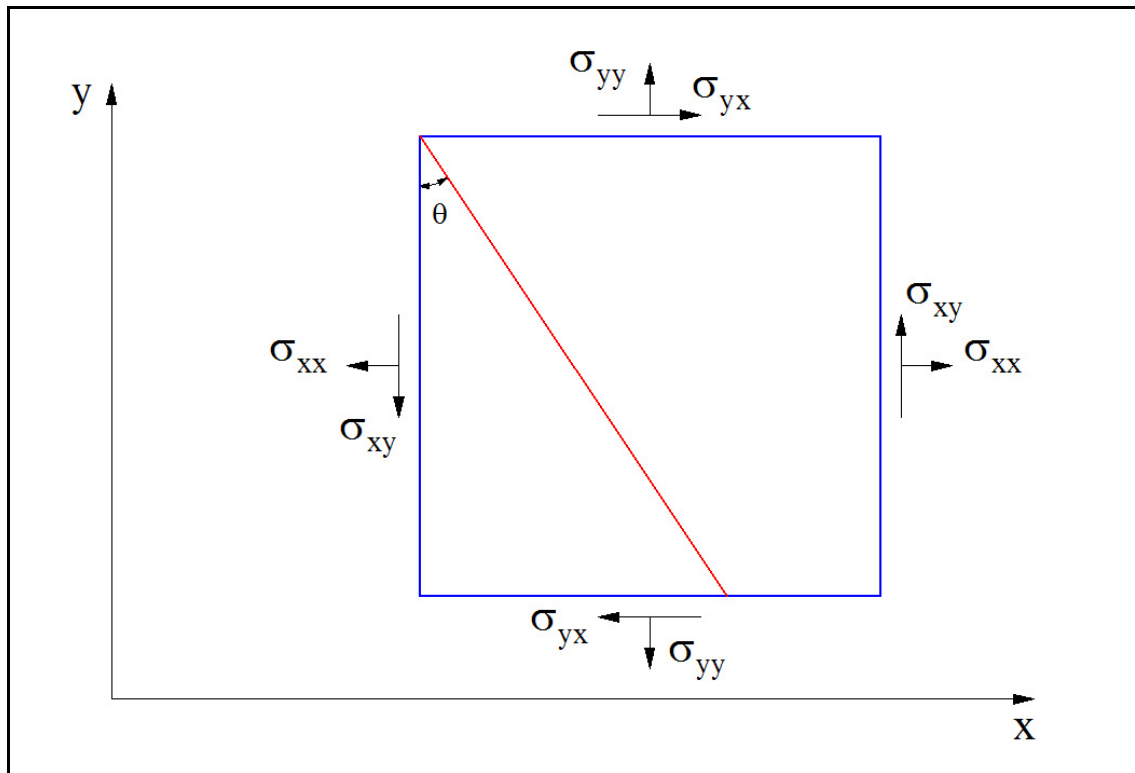


FIGURA 2.4 – As tensões atuando em planos inclinados podem ser obtidas a partir de um elemento triangular extraído de um elemento localizado no interior do corpo

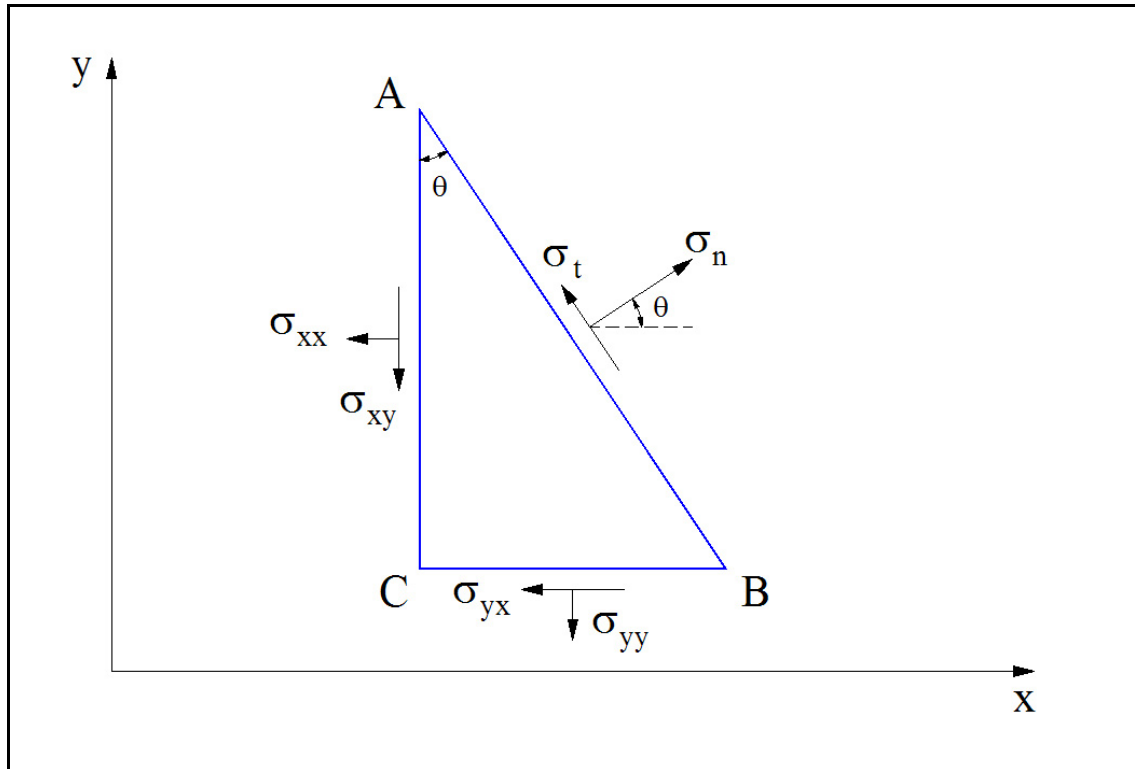


FIGURA 2.5 – Elemento triangular resultante e as tensões que atuam sobre o mesmo

Repetindo o processo anterior, mas considerando, desta vez, que o elemento triangular esteja sujeito apenas a tensões tangenciais, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \sigma_n AB - \sigma_{xy} AC \sin \theta - \sigma_{yx} BC \cos \theta &= 0 \\
 \sigma_n &= \sigma_{xy} \frac{AC}{AB} \sin \theta + \sigma_{yx} \frac{BC}{AB} \cos \theta \\
 \sigma_n &= \sigma_{xy} \cos \theta \sin \theta + \sigma_{yx} \sin \theta \cos \theta \\
 \sigma_n &= \sigma_{xy} (2 \sin \theta \cos \theta) \\
 \sigma_n &= \sigma_{xy} \sin 2\theta
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

e

$$\begin{aligned}
 \sigma_t AB - \sigma_{xy} AC \cos \theta + \sigma_{yx} BC \sin \theta &= 0 \\
 \sigma_t &= \sigma_{xy} \frac{AC}{AB} \cos \theta + \sigma_{yx} \frac{BC}{AB} \sin \theta \\
 \sigma_t &= \sigma_{xy} \cos^2 \theta - \sigma_{yx} \sin^2 \theta \\
 \sigma_t &= \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
 \sigma_t &= \sigma_{xy} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) \\
 \sigma_t &= \sigma_{xy} \cos 2\theta
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Finalmente, para um estado de tensões bidimensionais geral, as expressões das tensões atuando num plano inclinado são escritas como combinações dos resultados anteriormente obtidos, ou seja,

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\theta + \sigma_{xy} \sin 2\theta \tag{2.29}$$

e

$$\sigma_t = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\theta + \sigma_{xy} \cos 2\theta \tag{2.30}$$

2.2.3 Tensões Principais

Dado que σ_n varia com o ângulo θ , ou seja, é função de θ , então σ_n terá um valor máximo ou mínimo quando $d\sigma_n / d\theta = 0$. Da expressão (2.29) tem-se

$$\frac{d\sigma_n}{d\theta} = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin 2\theta + 2\sigma_{xy}\cos 2\theta = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (2.32)$$

A equação (2.32) apresenta duas soluções distintas: os ângulos 2θ e $2\theta + \pi$, que diferem de 180° , ou ainda os ângulos θ e $\theta + \pi/2$, que diferem de 90° . A Figura 2.6 ilustra esses ângulos graficamente. Os planos orientados segundo esses ângulos, nos quais as tensões normais são um máximo ou um mínimo, são chamados Planos Principais, e as tensões normais que atuam nesses planos são denominadas Tensões Principais. Tomando a expressão (2.31) e dividindo todos os termos por dois resulta

$$-\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin 2\theta + \sigma_{xy}\cos 2\theta = \sigma_t = 0$$

isto é, a tensão tangencial é nula nos Planos Principais.

Reportando-se novamente à Figura 2.6 verificam-se as seguintes relações:

$$\sin 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}} \quad (2.33)$$

$$\cos 2\theta = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}} \quad (2.34)$$

$$\sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-2\sigma_{xy}}{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}} \quad (2.35)$$

$$\cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}} \quad (2.36)$$

Substituindo (2.33) e (2.34) em (2.29) resulta

$$\sigma_n = \frac{I}{2} \left[(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \right]$$

Substituindo (2.35) e (2.36) em (2.29) resulta

$$\sigma_n = \frac{I}{2} \left[(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \right]$$

Desse modo, é possível concluir que as Tensões Principais são dadas por

$$(\sigma_n)_{\min}^{\max} = \frac{I}{2} \left[(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \pm \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \right] \quad (2.37)$$

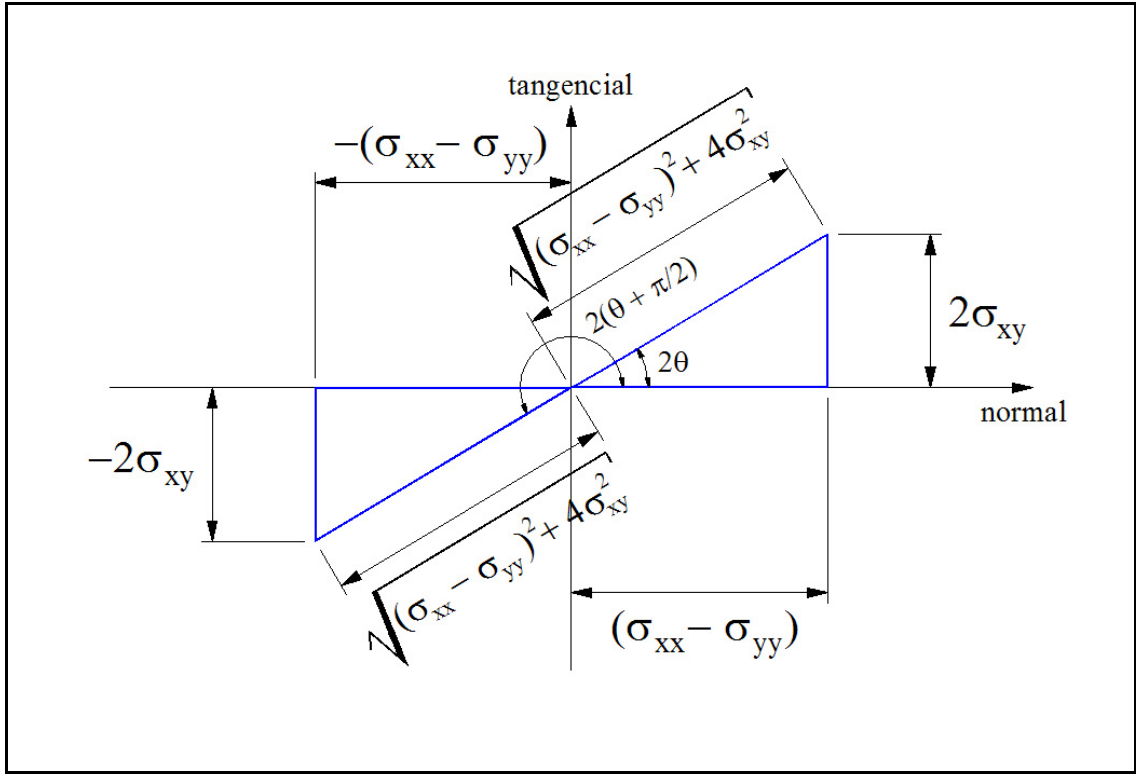


FIGURA 2.6 – Solução geométrica para determinar os ângulos que definem os Planos Principais nos quais atuam as Tensões Principais

As tensões tangenciais máxima e mínima podem ser encontradas de maneira semelhante, considerando agora $d\sigma_t / d\theta = 0$. Da expressão (2.30) obtém-se

$$\frac{d\sigma_t}{d\theta} = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\theta - 2\sigma_{xy}\sin 2\theta = 0 \quad (2.38)$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta = \frac{-(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2\sigma_{xy}} \quad (2.39)$$

A Figura 2.7 ilustra graficamente os ângulos que são soluções da equação (2.39). Conclui-se que os planos nos quais atuam as tensões tangenciais máxima e mínima são defasados 45° dos Planos Principais.

Da referida Figura 2.7 verificam-se as seguintes relações:

$$\sin 2\theta = \frac{-(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}} \quad (2.40)$$

$$\cos 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}} \quad (2.41)$$

$$\sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}} \quad (2.42)$$

$$\cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-2\sigma_{xy}}{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}} \quad (2.43)$$

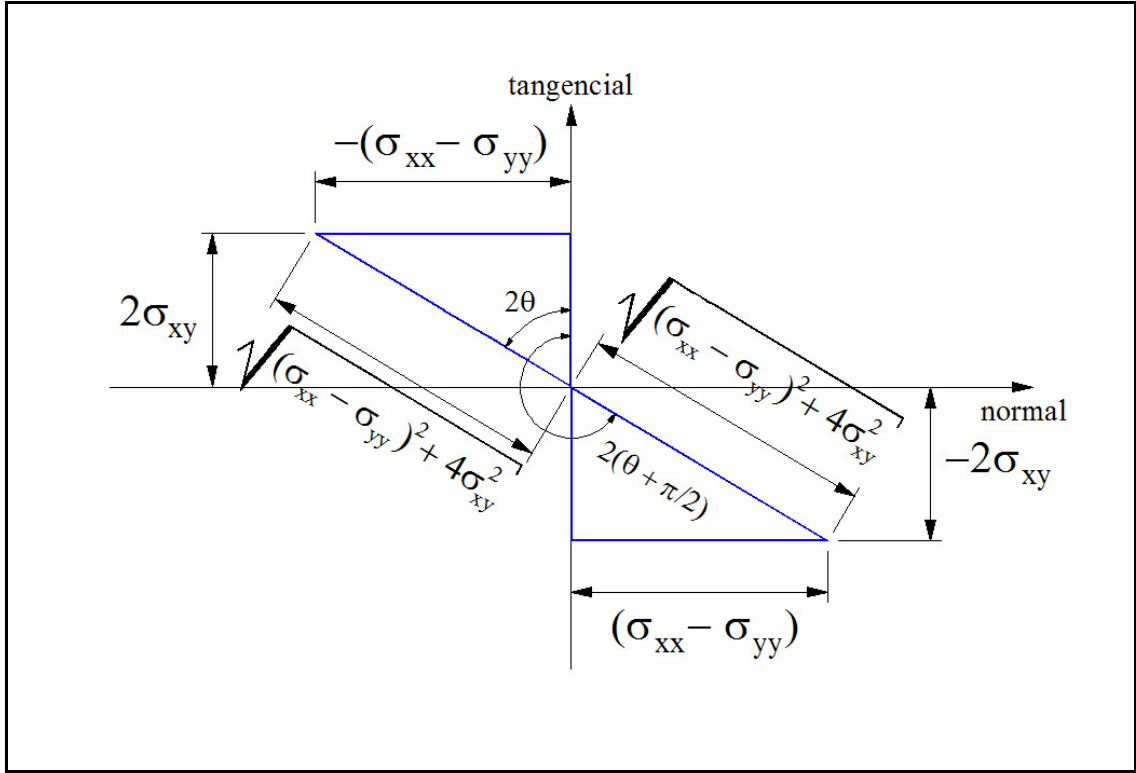


FIGURA 2.7 – Solução geométrica para determinar os ângulos que definem os planos nos quais atuam as tensões tangenciais máxima e mínima

Substituindo (2.40) e (2.41) em (2.30) resulta

$$\sigma_t = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

Substituindo (2.42) e (2.43) em (2.30) resulta

$$\sigma_t = -\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

Desse modo, é possível concluir que as tensões tangenciais máxima e mínima são dadas por

$$(\sigma_t)_{\max}^{\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad (2.44)$$

Substituindo (2.40) e (2.41) ou (2.42) e (2.43) em (2.29) resulta

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.45)$$

ou seja, os planos nos quais atuam as tensões tangenciais máxima e mínima possuem uma tensão normal associada, a qual é fornecida pela expressão (2.45).

Outra relação que pode ser obtida a partir das expressões (2.37) e (2.44) é:

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{I}{2} [(\sigma_n)_{\max} - (\sigma_n)_{\min}] \quad (2.46)$$

Os valores das tensões normais máxima e mínima e das tensões tangenciais máxima e mínima, bem como os valores dos ângulos de orientação dos planos nos quais atuam essas tensões, podem ser obtidos utilizando-se o processo gráfico do Círculo de Mohr que, em geral, é fácil de usar e lembrar. Além disso, essa abordagem permite visualizar como as tensões normais e tangenciais variam conforme o plano em que atuam esteja orientado segundo diferentes ângulos. Detalhes sobre a construção do Círculo de Mohr e exemplos de sua aplicação podem ser encontrados em HIBBELER⁸.

2.2.4 Deformações Específicas

O estado de deformações em um ponto de um corpo tridimensional pode ser descrito pelas componentes de deformações específicas atuando em um volume elementar de lados dx , dy , dz , como apresentado na Figura 2.8. As componentes ε_{xx} , ε_{yy} e ε_{zz} são denominadas deformações específicas longitudinais e as componentes ε_{xy} , ε_{xz} e ε_{yz} deformações específicas transversais. Observa-se que, em particular, deformações específicas longitudinais provocam mudança de volume do elemento infinitesimal, enquanto deformações específicas transversais provocam mudança na sua geometria.

As seis componentes de deformações específicas, correspondentes às componentes de tensões, podem ser escritas, em notação indicial, como

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.47)$$

Representando os deslocamentos por u_x , u_y e u_z (u_i e $i = 1, 2, 3$ em notação indicial), as deformações específicas estão relacionadas aos mesmos por intermédio das expressões

⁸ HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004, p. 360-367.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.48)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad (2.49)$$

Alternativamente, em notação indicial, é possível reescrever essas relações como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.50)$$

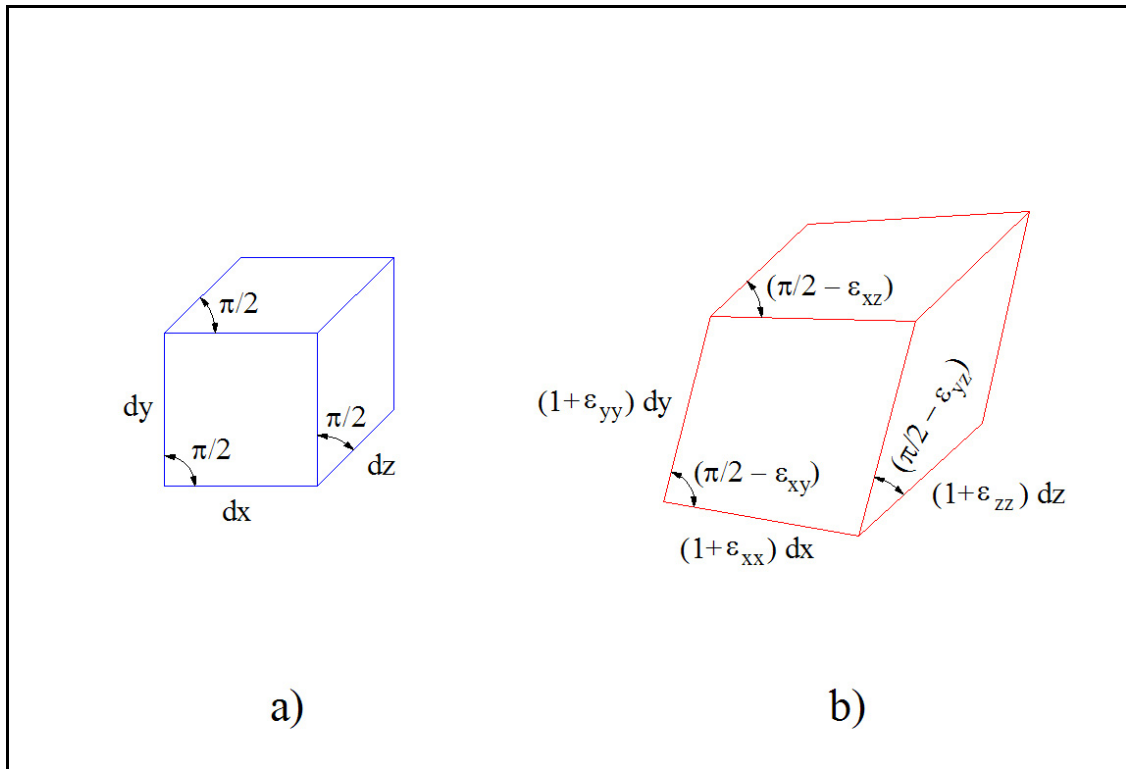


FIGURA 2.8 – Componentes de deformações específicas atuando em um volume elementar representando um ponto no interior de um corpo tridimensional: a) Volume elementar sem deformação; b) Volume elementar deformado

2.2.5 Equações de Compatibilidade

Diferenciando a primeira expressão em (2.49) em relação a x e y ,

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

reordenando os termos e a ordem das derivadas parciais,

$$-2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = 0$$

e utilizando as relações em (2.48), obtém-se

$$-2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = 0 \quad (2.51)$$

De maneira similar, para as demais expressões em (2.49), deduz-se

$$-2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = 0 \quad (2.52)$$

$$-2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = 0 \quad (2.53)$$

Diferenciando cada expressão em (2.49) do seguinte modo

$$\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)$$

e diferenciando a primeira expressão em (2.48) em relação a y e z , reordenando as derivadas parciais e substituindo progressivamente cada um dos termos isolados anteriormente, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

De modo análogo, para as demais expressões em (2.48), encontra-se

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \quad (2.56)$$

As equações (2.51) a (2.56) são denominadas equações de compatibilidade das deformações específicas e podem ser reescritas em notação indicial como

$$-2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2} = 0 \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right) = 0 \quad (2.58)$$

onde $i, j, k = 1, 2, 3$ e $i \neq j \neq k$.

2.2.6 Relações Tensão-Deformação

Para uma barra de seção transversal constante, sujeita a um carregamento axial uniforme (direcionado segundo o eixo x), as seguintes relações são válidas para pontos localizados suficientemente longe das extremidades da barra:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad \varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad \varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad (2.59)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young e ν é o coeficiente de Poisson. As equações em (2.59) são expressões da Lei de Hooke. Para um corpo sujeito a um carregamento geral, as deformações específicas são dadas por

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (2.60)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \quad (2.61)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (2.62)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xz} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz} \quad (2.63)$$

Tomando as equações (2.60) a (2.62), é possível expressar as tensões normais em função das deformações específicas. Primeiramente, essas equações devem ser reescritas da seguinte maneira:

$$\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz} = \varepsilon_{xx}E$$

$$-\nu\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz} = \varepsilon_{yy}E$$

$$-\nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \varepsilon_{zz}E$$

Colocando o sistema de equações em forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}E \\ \varepsilon_{yy}E \\ \varepsilon_{zz}E \end{Bmatrix}$$

e invertendo a matriz de coeficientes, obtém-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \\ \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \\ \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}E \\ \varepsilon_{yy}E \\ \varepsilon_{zz}E \end{Bmatrix}$$

Resolvendo para σ_{xx} resulta

$$\sigma_{xx} = \frac{\varepsilon_{xx}E - \nu\varepsilon_{xx}E + \nu\varepsilon_{yy}E + \nu\varepsilon_{zz}E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

ou, somando e subtraindo $\nu\varepsilon_{xx}E$

$$\sigma_{xx} = \frac{\varepsilon_{xx}E - 2\nu\varepsilon_{xx}E + \nu\varepsilon_{xx}E + \nu\varepsilon_{yy}E + \nu\varepsilon_{zz}E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

Finalmente

$$\sigma_{xx} = \frac{\nu E(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{\varepsilon_{xx}E(1-2\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

Definindo

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.64)$$

$$\lambda = \frac{2\nu\mu}{(1-2\nu)} \quad (2.65)$$

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (2.66)$$

respectivamente denominados módulo de elasticidade transversal, constante de Lamé e deformação específica volumétrica, tem-se

$$\sigma_{xx} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{xx} \quad (2.67)$$

e, para as demais tensões normais,

$$\sigma_{yy} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{yy} \quad (2.68)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{zz} \quad (2.69)$$

Para as tensões tangenciais o processo é direto. Das relações (2.63) resulta

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy} \quad (2.70)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xz} = 2\mu \varepsilon_{xz} \quad (2.71)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{yz} = 2\mu \varepsilon_{yz} \quad (2.72)$$

As equações (2.67) a (2.72) são denominadas Equações Constitutivas da Elasticidade, e podem ser reescritas em notação indicial como

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2.73)$$

2.2.7 Equações Governantes

As Equações Governantes da Elasticidade, conhecidas como Equações de Navier, são as condições de equilíbrio expressas em termos dos deslocamentos. Primeiramente, deve-se obter expressões para as tensões em função das derivadas dos deslocamentos substituindo as relações (2.48) e (2.49) nas equações (2.67) a (2.72), do que resulta

$$\sigma_{xx} = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)$$

Substituindo essas relações na primeira equação (2.20) e utilizando as relações (2.48) e (2.66) obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \lambda \frac{\partial e}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + b_x &= 0 \\ \lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + b_x &= 0 \\ \lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + b_x &= 0 \\ \lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + b_x &= 0 \\ \lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_x + \mu \frac{\partial e}{\partial x} + b_x &= 0 \\ \mu \nabla^2 u_x + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + b_x &= 0 \end{aligned} \quad (2.74)$$

onde $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ é o Operador Laplaciano. De maneira equivalente para as demais equações (2.20) encontra-se

$$\mu \nabla^2 u_y + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + b_y = 0 \quad (2.75)$$

$$\mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + b_z = 0 \quad (2.76)$$

As equações (2.74) a (2.76) podem ser reescritas em notação indicial na forma

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + b_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.77)$$

sendo essa última equação a condição de equilíbrio no domínio Ω do corpo.

Utilizando um processo semelhante, mas desta vez substituindo as relações apresentadas no início desta seção nas equações (2.24), deduz-se

$$\begin{aligned}
 t_x &= \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z \\
 t_x &= \left(\lambda e + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) n_x + \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) n_y + \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) n_z \\
 t_x &= \lambda e n_x + \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} n_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} n_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} n_z \right) + \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} n_x + \frac{\partial u_y}{\partial x} n_y + \frac{\partial u_z}{\partial x} n_z \right) \quad (i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_y &= \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z \\
 t_y &= \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) n_x + \left(\lambda e + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) n_y + \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) n_z \\
 t_y &= \lambda e n_y + \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} n_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} n_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} n_z \right) + \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} n_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} n_y + \frac{\partial u_z}{\partial y} n_z \right) \quad (ii)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_z &= \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z \\
 t_z &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) n_x + \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) n_y + \left(\lambda e + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) n_z \\
 t_z &= \lambda e n_z + \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} n_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} n_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} n_z \right) + \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} n_x + \frac{\partial u_y}{\partial z} n_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} n_z \right) \quad (iii)
 \end{aligned}$$

É possível reescrever essas equações em notação indicial na forma

$$t_i = \lambda u_{j,j} n_i + \mu u_{i,j} n_j + \mu u_{j,i} n_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.78)$$

ou ainda

$$t_i = \lambda u_{j,j} n_i + \mu n_j (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.79)$$

sendo essa última equação a condição de equilíbrio no contorno Γ do corpo.

2.2.8 Condições para Estado Plano de Tensões

Para placas delgadas, se nenhuma carga é aplicada perpendicularmente à superfície da placa, as tensões na direção da espessura da placa podem ser consideradas negligenciáveis. Partindo do pressuposto que o eixo z esteja orientado

segundo a espessura da placa, as tensões σ_{zz} , σ_{xz} e σ_{yz} serão todas nulas, e as tensões não nulas σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xy} serão avaliadas sobre a espessura da placa e serão admitidas independentes da direção z . Essas considerações podem ser resumidas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = 0 \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 0 \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_{xx} \neq 0 \\ \sigma_{yy} \neq 0 \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \neq 0 \end{cases}$$

Aplicando essas relações nas equações (2.60) a (2.63) obtém-se

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx})$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = 0 \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0$$

2.2.9 Condições para Estado Plano de Deformações

As condições para Estado Plano de Deformações são admitidas para corpos nos quais a geometria e o carregamento não variam significativamente na direção do eixo longitudinal do corpo, que pode ser adotado como sendo o eixo z . Nesses casos, as demais variáveis são funções apenas das coordenadas x e y . O deslocamento na direção do eixo z é nulo em todos os pontos da seção transversal e, desse modo, as deformações específicas ε_{zz} , ε_{xz} e ε_{yz} também se anulam. Essas considerações podem ser resumidas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz} = 0 \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = 0 \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} \neq 0 \\ \varepsilon_{yy} \neq 0 \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \neq 0 \end{cases}$$

Aplicando essas relações nas equações (2.60) a (2.63) obtém-se

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 0 \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{xx} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{yy} \right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{yy} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{xx} \right)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}$$

Das considerações anteriores verifica-se que a única equação de compatibilidade de deformações específicas para a condição de Estado Plano de Deformações é

$$-2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = 0$$

As expressões para a condição de Estado Plano de Deformações podem simular problemas de Estado Plano de Tensões quando se adota o coeficiente de Poisson ν' e o módulo de Young E' modificados, definidos como

$$\nu' = \frac{\nu}{1+\nu} \quad E' = E \left[1 - \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \right] \quad (2.80)$$

3 FORMULAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Existem diferentes métodos para a derivação do Método de Elementos de Contorno, entre eles o teorema da reciprocidade e o Método de Resíduos Ponderados. Neste trabalho, o Método de Elementos de Contorno será derivado usando o teorema do trabalho recíproco de Betti.

3.1 Teorema do Trabalho Recíproco de Betti

A formulação direta do Método de Elementos de Contorno para elastostática pode ser derivada do teorema do trabalho recíproco de Betti para dois estados auto-equilibrados (Figura 3.1) representados por (u_i, t_i, b_i) e (u_i^*, t_i^*, b_i^*) ; u_i e u_i^* são deslocamentos; t_i e t_i^* são forças de superfície; e b_i e b_i^* são forças de corpo.

Das equações de equilíbrio

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

é possível escrever a seguinte relação:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i^* d\Omega = 0$$

ou

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = 0 \quad (3.1)$$

onde Ω denota o domínio, com contorno Γ , do problema. As tensões, forças de corpo e de superfície e deslocamentos são funções de $\mathbf{X} \in \Omega$ [$\mathbf{X} \equiv (x, y, z)$ para um corpo tridimensional ou $\mathbf{X} \equiv (x, y)$ para um corpo bidimensional].

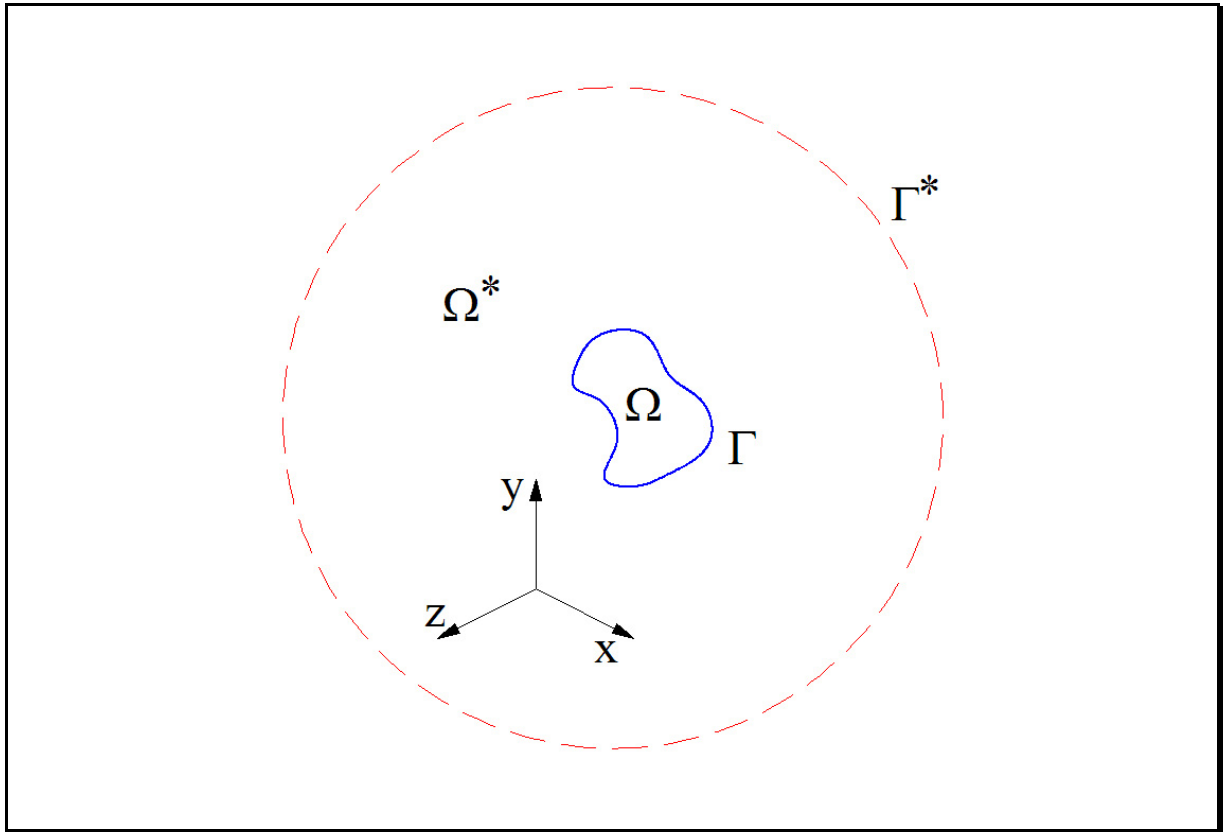


FIGURA 3.1 – Uma região arbitrária com domínio Ω^* e contorno Γ^* envolvendo o problema com domínio Ω e contorno Γ

Esse primeiro passo corresponde a um processo de ponderação da equação diferencial governante, processo esse idêntico ao que é utilizado no Método de Resíduos Ponderados. Nesse método a função de ponderação, normalmente designada por w (correspondendo a u_i^* neste caso), é arbitrária, exceto pelo fato de que deve ser contínua no domínio Ω do problema e deve possuir derivadas contínuas até um determinado grau, sendo que o grau de continuidade requerido varia conforme o problema em questão. (Para uma explicação mais detalhada a

respeito da derivação do Método de Elementos de Contorno a partir do Método de Resíduos Ponderados, ver BREBBIA e DOMINGUEZ¹).

A primeira integral em (3.1) pode ser reescrita, usando a regra da derivada de um produto de funções, como

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega$$

Observando que

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} u_{i,j}^* + \sigma_{ij} u_{j,i}^*) = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} u_{i,j}^* + \sigma_{ji} u_{j,i}^*) = \sigma_{ij} u_{i,j}^*$$

tem-se

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega$$

e, usando o Teorema da Divergência na primeira integral à direita,

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j u_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma$$

resulta

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega$$

Substituindo esse último resultado na equação (3.1) deriva-se a expressão

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (3.2)$$

Obs.: essa equação dá origem à designação "trabalho", presente no nome do teorema que se está demonstrando, uma vez que o integrando à direita do sinal de igualdade pode ser entendido sob esse ponto de vista da seguinte maneira: trabalho é igual à força (ou tensão) multiplicada por deslocamento (ou deformação específica).

Utilizando as equações constitutivas da elasticidade, definidas anteriormente como

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

a integral à direita em (3.2) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}) \varepsilon_{ij}^* d\Omega$$

¹ BREBBIA, C. A., DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements**, An Introductory Course. Boston: Computational Mechanics Publications, 1989.

ou

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}^*) d\Omega$$

Desde que

$$\delta_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{kk}^*$$

e

$$\varepsilon_{kk} = \delta_{ij} \varepsilon_{ij}$$

tem-se

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\lambda \varepsilon_{kk}^* \delta_{ij} \varepsilon_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}^*) d\Omega$$

ou

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^* + 2\mu \varepsilon_{ij}^*) \varepsilon_{ij} d\Omega$$

e, novamente usando as equações constitutivas, tem-se

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (3.4)$$

Utilizando (3.2) no lado esquerdo de (3.4) e, por analogia de notação, também no lado direito, a expressão resultante

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (3.5)$$

é denominada teorema do trabalho recíproco de Betti.

3.2 Equações Integrais de Contorno

A equação integral de contorno para problemas de elastostática pode ser derivada do teorema do trabalho recíproco de Betti tomando as forças de corpo como sendo forças pontuais num meio infinito, representadas pela função Delta de Dirac da seguinte maneira:

$$b_i^* = \Delta(\mathbf{X}', \mathbf{X}) e_i$$

onde o vetor unitário e_i corresponde a um força unitária positiva na direção i aplicada no ponto $\mathbf{X}'$, denominado ponto fonte. Em problemas bidimensionais, e_i é uma força por unidade de espessura e, em problemas tridimensionais, uma força concentrada.

Por sua vez, os deslocamentos e forças de superfície correspondentes à solução do problema para o caso particular de uma força pontual são escritos como

$$u_i^* = U_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{X})e_j$$

$$t_i^* = T_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{X})e_j$$

onde $U_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{X})$ e $T_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{X})$ representam, respectivamente, as componentes de deslocamento e forças de superfície na direção j no ponto $\mathbf{X}$ devido a uma força pontual unitária atuando na direção i no ponto fonte $\mathbf{X}'$.

Utilizando essas soluções na equação (3.5) obtém-se

$$u_i(\mathbf{X}') = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{X})b_j(\mathbf{X})d\Omega \quad (3.6)$$

onde $\mathbf{X}'$ e $\mathbf{X} \in \Omega$ e $\mathbf{x} \in \Gamma$, e os termos U_{ij} e T_{ij} são denominados soluções fundamentais. A equação acima é conhecida como identidade de Somigliana para deslocamentos. Ela relaciona o valor dos deslocamentos em um ponto do domínio Ω com os valores de forças de superfície e de deslocamentos no contorno Γ . Em forma matricial tem-se

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} d\Omega$$

para problemas bidimensionais, e

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} &= \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} d\Omega \end{aligned}$$

para problemas tridimensionais.

As deformações específicas num ponto qualquer do domínio Ω podem ser calculadas por diferenciação da equação de deslocamentos (3.6) em relação ao ponto fonte $\mathbf{X}'$ e substituição em (2.50), resultando

$$u_{i,k}(\mathbf{X}') = \int_{\Gamma} U_{ij,k}(\mathbf{X}', \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij,k}(\mathbf{X}', \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij,k}(\mathbf{X}', \mathbf{X})b_j(\mathbf{X})d\Omega \quad (3.7)$$

onde $U_{ij,k}$ e $T_{ij,k}$ são derivadas das soluções fundamentais.

Finalmente, a identidade de Somigliana para tensões nos pontos do domínio é encontrada substituindo a equação (3.7) nas equações constitutivas (3.3), resultando em

$$\sigma_{ij}(\mathbf{X}') = \int_{\Gamma} D_{kij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) t_k(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij}(\mathbf{X}', \mathbf{X}) b_k(\mathbf{X}) d\Omega \quad (3.8)$$

onde D_{kij} e S_{kij} são obtidas de $U_{ij,k}$ e $T_{ij,k}$ e da aplicação da lei de Hooke.

3.3 Soluções Fundamentais

A existência de soluções para forças pontuais desempenha um importante papel na formulação do Método de Elementos de Contorno. É possível reescrever as equações de Navier para uma força pontual unitária, aplicada ao corpo no ponto fonte $\mathbf{X}'$, como

$$\mu u_{i,jj}^* + \frac{\mu}{1-2\nu} u_{j,ji}^* + \Delta(\mathbf{X}', \mathbf{X}) e_i = 0$$

As soluções das equações governantes, devidas a uma força pontual, são comumente chamadas de "soluções fundamentais". Existem várias maneiras para obter-se essas soluções. A técnica mais popular consiste no uso do vetor de Galerkin²; no entanto, métodos alternativos baseados em funções complexas de tensões também são eficazes³. As soluções para uma força pontual num meio infinito foram originalmente derivadas por Lord Kelvin, e são conhecidas como soluções fundamentais de Kelvin.

² ALIABADI, M. H. **The Boundary Element Method**, Vol. 2, Applications in Solids and Structures. Chippingham: John Wiley & Sons, 2002. p. 31-33.

³ Ibid., p. 525-529.

3.3.1 Problemas Tridimensionais

Para problemas tridimensionais, as soluções fundamentais são dadas por⁴

$$U_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = \frac{I}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right] \quad (3.9)$$

onde $U_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x})$ representa o deslocamento na direção j no ponto $\mathbf{x}$ devido a uma força pontual unitária atuando na direção i no ponto fonte $\mathbf{X}'$, e também por

$$T_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = \frac{-I}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j} \right] + (1-2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right\} \quad (3.10)$$

onde $T_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x})$ representa a força de superfície na direção j no ponto $\mathbf{x}$ devido a uma força pontual unitária atuando na direção i no ponto fonte $\mathbf{X}'$. Diferenciando (3.9) e (3.10) em relação a $\mathbf{X}'$ tem-se

$$U_{ij,k}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = \frac{I}{16\pi\mu(1-\nu)r^2} \left[(3-4\nu)\delta_{ij}r_{,k} + 3r_{,i}r_{,j}r_{,k} - \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ik}r_{,j} \right] \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} T_{ij,k}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = & \frac{-I}{8\pi(1-\nu)r^3} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + 3r_{,i}r_{,j} \right] n_k + \right. \\ & + (1-2\nu)(\delta_{jk} - 3r_{,j}r_{,k})n_i + (1-2\nu)(\delta_{ik} - 3r_{,i}r_{,k})n_j + \\ & \left. + \left[3\delta_{jk}r_{,i} + 3\delta_{ik}r_{,j} - 3(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} - 15r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] r_{,l}n_{l,k} \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Usando as relações tensão-deformação, resulta

$$D_{kij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = \frac{I}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[(1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 3r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} S_{kij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = & \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r^3} \left\{ 3 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 5r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] + \right. \\ & \left. 3\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu)(3n_k r_{,i}r_{,j} + \delta_{ik}n_j + \delta_{jk}n_i) - (1-4\nu)\delta_{ij}n_k \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

⁴ Ibid., p. 31,32.

3.3.2 Problemas Bidimensionais

Para problemas bidimensionais, as soluções fundamentais são dadas por⁵

$$U_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = \frac{I}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{I}{r}\right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (3.15)$$

onde $U_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x})$ representa o deslocamento na direção j no ponto $\mathbf{x}$ devido a uma força pontual unitária atuando na direção i no ponto fonte $\mathbf{X}'$, e também por

$$T_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = \frac{-I}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} \right] + (1-2\nu) (n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right\} \quad (3.16)$$

onde $T_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x})$ representa a força de superfície na direção j no ponto $\mathbf{x}$ devido a uma força pontual unitária atuando na direção i no ponto fonte $\mathbf{X}'$. Diferenciando (3.15) e (3.16) em relação a $\mathbf{X}'$ tem-se

$$U_{ij,k}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = \frac{-(1+\nu)}{4\pi(1-\nu)Er} \left[(3-4\nu) \delta_{ij} r_{,k} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} - \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ik} r_{,j} \right] \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} T_{ij,k}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = & \frac{-I}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - (1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + \right. \\ & + (1-2\nu) (\delta_{jk} - 2r_{,j} r_{,k}) n_i - (1-2\nu) (\delta_{ik} - 2r_{,i} r_{,k}) n_j + \\ & \left. + [(1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j}] n_k \right\} \quad (3.18) \end{aligned}$$

Usando as relações tensão-deformação, resulta

$$D_{kij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = \frac{I}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu) (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} S_{kij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = & \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + \right. \\ & + 2\nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu) (2n_k r_{,i} r_{,j} + \delta_{ik} n_j + \delta_{jk} n_i) - (1-4\nu) \delta_{ij} n_k \left. \right\} \quad (3.20) \end{aligned}$$

As soluções fundamentais, anteriormente apresentadas, são válidas para a condição de Estado Plano de Deformações. As soluções para a condição de Estado Plano de Tensões podem ser obtidas a partir dessas mesmas soluções através da

⁵ Ibid., p. 33.

introdução do coeficiente de Poisson ν' e do módulo de Young E' modificados definidos como

$$\nu' = \frac{\nu}{1+\nu} \quad E' = E \left[1 - \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \right] \quad (3.21)$$

3.4 Equação Integral de Contorno para Deslocamentos no Contorno

A equação integral de contorno (3.6) é válida para qualquer ponto fonte $\mathbf{X}'$ localizado dentro do domínio Ω do corpo; porém, para que possa ser utilizada, necessita dos valores dos deslocamentos e forças de superfície nos pontos pertencentes ao contorno. É possível calcular tais valores avaliando-se o limite dessa expressão quando $\mathbf{X}' \in \Omega \rightarrow \mathbf{x}' \in \Gamma$.

Para tal, considere-se que o domínio do problema tenha sido aumentado, em torno do ponto fonte $\mathbf{x}'$, de uma região circular, no caso de problemas bidimensionais, ou de uma região esférica, no caso de problemas tridimensionais, com contorno Γ_ε^+ , raio ε e centro em $\mathbf{x}'$, como ilustrado nas Figuras 3.2 e 3.3, respectivamente.

O contorno aumentado Γ^A é representado por

$$\Gamma^A = (\Gamma - \Gamma_\varepsilon) + \Gamma_\varepsilon^+ \quad (3.22)$$

onde Γ_ε é a porção do contorno original que foi removida. O comportamento das soluções fundamentais pode ser estudado tomando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e, portanto, $\Gamma^A \rightarrow \Gamma$.

A primeira integral de contorno no lado direito de (3.6) é reescrita como

$$\int_\Gamma U_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (3.23)$$

onde ambas as expressões no lado direito contém integrandos singulares de ordem $O(\ln 1/r)$ em duas dimensões e $O(r^{-1})$ em três dimensões.

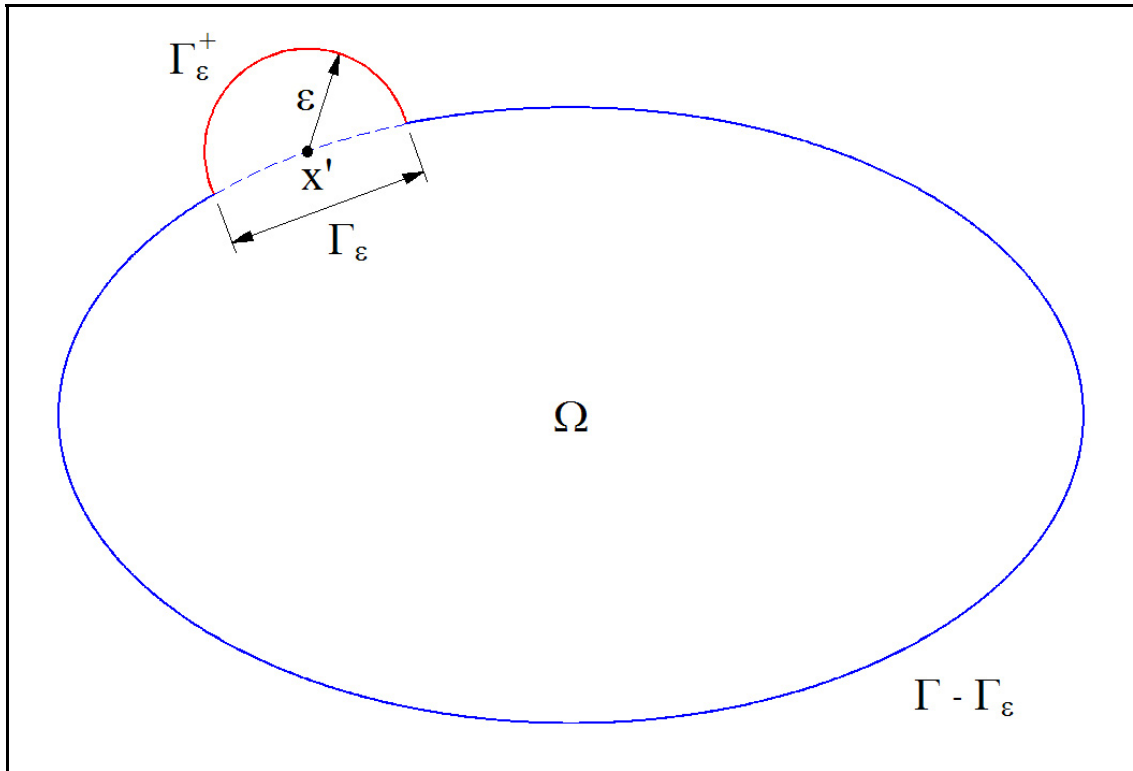


FIGURA 3.2 – Processo limite quando o ponto fonte está localizado no contorno de um problema bidimensional

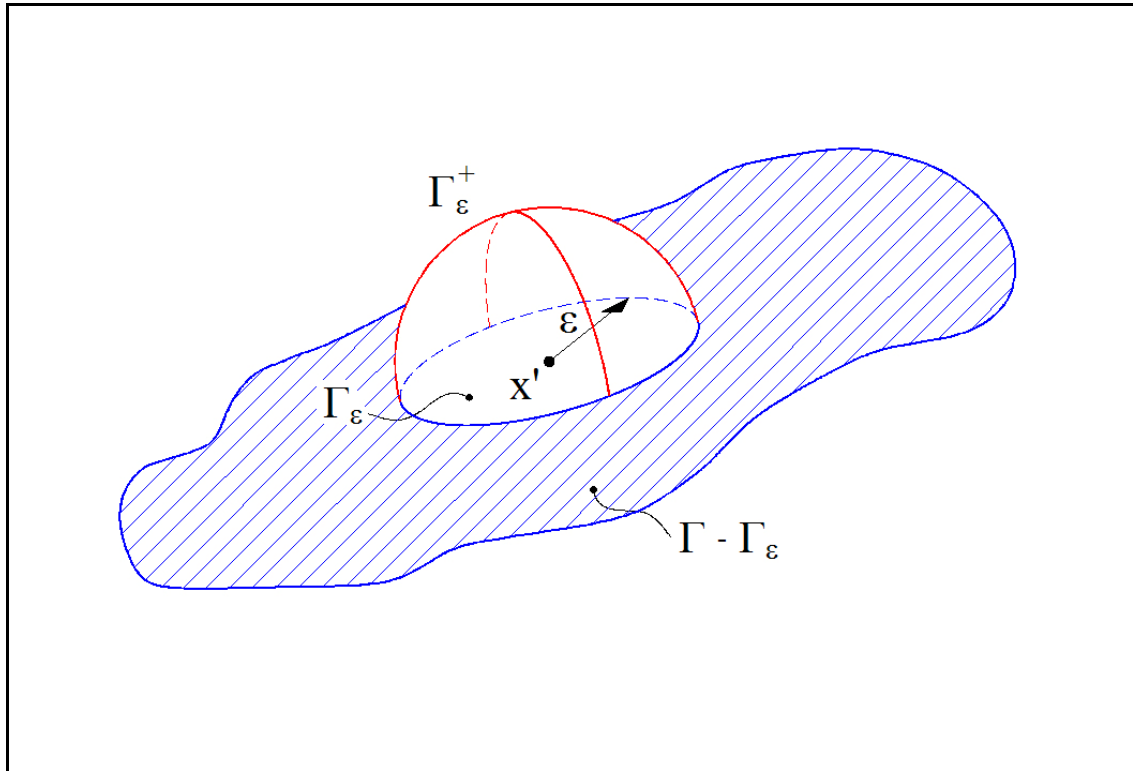


FIGURA 3.3 – Processo limite quando o ponto fonte está localizado no contorno de um problema tridimensional

A primeira integral no lado direito de (3.23) é integrável na forma de uma integral imprópria, pois o tipo de singularidade presente é o que comumente denomina-se "singularidade fraca". Como será mostrado mais adiante neste trabalho, para problemas bidimensionais, ou seja, problemas com singularidade de ordem $O(\ln 1/r)$, é possível dividir essa integral em duas partes: uma singular e outra não singular. A parte não singular é integrada utilizando a quadratura de Gauss convencional, apresentada no capítulo anterior. A parte singular é integrada utilizando uma versão modificada da referida quadratura, denominada quadratura de Gauss logarítmica (para valores calculados e tabelados de pontos e pesos de Gauss para a quadratura Gaussiana logarítmica ver, por exemplo, BREBBIA e DOMINGUEZ⁶). Já a segunda integral no lado direito de (3.23) tende a zero à medida que $\varepsilon \rightarrow 0$. Esse resultado pode ser obtido empregando coordenadas polares, para o caso bidimensional, e coordenadas esféricas, para o caso tridimensional, ao avaliar-se a integral sobre Γ_ε^+ à medida que $\varepsilon \rightarrow 0$.

A segunda integral de contorno no lado direito de (3.6) pode ser reescrita como

$$\int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (3.24)$$

onde ambas as expressões no lado direito contém integrandos singulares de ordem $O(r^{-1})$ em duas dimensões e $O(r^{-2})$ em três dimensões.

A primeira integral é calculada no sentido do Valor Principal de Cauchy⁷. A segunda integral é regularizada pelo primeiro termo da expansão dos deslocamentos em série de Taylor⁸ em torno do ponto fonte, processo que conduz a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma =$$

⁶ BREBBIA, C. A., DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements**, An Introductory Course. Boston: Computational Mechanics Publications, 1989, p. 271.

⁷ GUIGGIANI, M. The evaluation of Cauchy principal value integrals in the Boundary Element Method – A review. **Mathematical Computational Modelling**, vol. 15, n. 3-5, p. 175-184, 1991 e GUIGGIANI, M., CASALINI, P. Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 24, p. 1711-1720, 1987.

⁸ Os deslocamentos são assumidos como satisfazendo a condição de continuidade de Hölder, ou seja, $u \in C^{0,\alpha}$ se existem constantes $k > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$ tal que $|u(\mathbf{x}') - u(\mathbf{x})| \leq k r^\alpha$.

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) [u_j(\mathbf{x}) - u_j(\mathbf{x}')] d\Gamma \right\} + u_j(\mathbf{x}') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\Gamma \quad (3.25)$$

onde a primeira integral no lado direito deve ser igual a zero pelo requisito de continuidade dos deslocamentos. A segunda integral conduz a um coeficiente denotado por

$$u_j(\mathbf{x}') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\Gamma = \alpha_{ij}(\mathbf{x}') u_j(\mathbf{x}') \quad (3.26)$$

e, desse modo,

$$\int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma = VPC \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \alpha_{ij}(\mathbf{x}') u_j(\mathbf{x}') \quad (3.27)$$

onde $VPC \int_{\Gamma} (...) d\Gamma$ indica uma integral avaliada no sentido do Valor Principal de Cauchy.

Finalmente, a equação integral de contorno para deslocamentos no contorno reduz-se a

$$\begin{aligned} C_{ij}(\mathbf{x}') u_j(\mathbf{x}') + VPC \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma &= \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{X}) b_j(\mathbf{X}) d\Omega \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde $C_{ij}(\mathbf{x}') u_j(\mathbf{x}') = [\delta_{ij} + \alpha_{ij}(\mathbf{x}')] u_j(\mathbf{x}')$ e é denominado termo livre.

Para contornos bidimensionais "suaves", como o apresentado na Figura 3.2, a avaliação dos coeficientes $\alpha_{ij}(\mathbf{x}')$ pode ser obtida analiticamente. Denotando por r a distância entre o ponto fonte $\mathbf{x}'$ e um ponto $\mathbf{x}$ no contorno Γ_{ε}^+ , e usando coordenadas polares, resulta

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} = \varepsilon \cos \theta \mathbf{i} + \varepsilon \sin \theta \mathbf{j}$$

$$d\Gamma_{\varepsilon}^+ = r d\theta = \varepsilon d\theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}}{r} = \frac{r \mathbf{n} \bullet \mathbf{n}}{r} = \frac{r}{r} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1$$

$$n_1 = \cos \theta \quad n_2 = \sin \theta$$

$$r_{,1} = \cos \theta \quad r_{,2} = \sin \theta$$

Utilizando essas relações, as constantes $\alpha_{ij}(\mathbf{x}')$ são avaliadas como

$$\alpha_{11}(\mathbf{x}') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} T_{11}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\Gamma_{\varepsilon}^+ = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi} \frac{1}{\varepsilon} [(1-2\nu) + 2 \cos^2 \theta] \varepsilon d\theta =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\pi [(1-2\nu) + 2\cos^2 \theta] d\theta = \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \int_0^\pi d\theta + \int_0^\pi 2\cos^2 \theta d\theta \right] = \\
&= \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \int_0^\pi d\theta + \int_0^\pi 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta \right] = \\
&= \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \int_0^\pi d\theta + \int_0^\pi d\theta + \int_0^\pi \cos 2\theta d\theta \right] = \\
&= \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} [(1-2\nu)\pi + \pi + 0] = -\frac{(\pi - 2\nu\pi + \pi)}{4\pi(1-\nu)} = -\frac{2\pi(1-\nu)}{4\pi(1-\nu)} = -\frac{I}{2} \quad (i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{12}(\mathbf{x}') &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{12}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\Gamma_\varepsilon^+ = \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{1}{\varepsilon} (2\cos \theta \sin \theta) \varepsilon d\theta = \\
&= \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\pi 2\cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{-2}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = \\
&= \frac{-I}{2\pi(1-\nu)} \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta = \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\pi \sin 2\theta d\theta = 0 \quad (ii)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{21}(\mathbf{x}') &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{21}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\Gamma_\varepsilon^+ = \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{1}{\varepsilon} (2\sin \theta \cos \theta) \varepsilon d\theta = \\
&= \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\pi 2\sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{-2}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = \\
&= \frac{-I}{2\pi(1-\nu)} \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta = \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\pi \sin 2\theta d\theta = 0 \quad (iii)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{22}(\mathbf{x}') &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{22}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\Gamma_\varepsilon^+ = \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{1}{\varepsilon} [(1-2\nu) + 2\sin^2 \theta] \varepsilon d\theta = \\
&= \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\pi [(1-2\nu) + 2\sin^2 \theta] d\theta = \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \int_0^\pi d\theta + \int_0^\pi 2\sin^2 \theta d\theta \right] = \\
&= \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \int_0^\pi d\theta + \int_0^\pi 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta \right] = \\
&= \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \int_0^\pi d\theta + \int_0^\pi d\theta - \int_0^\pi \cos 2\theta d\theta \right] = \\
&= \frac{-I}{4\pi(1-\nu)} [(1-2\nu)\pi + \pi - 0] = -\frac{(\pi - 2\nu\pi + \pi)}{4\pi(1-\nu)} = -\frac{2\pi(1-\nu)}{4\pi(1-\nu)} = -\frac{I}{2} \quad (iv)
\end{aligned}$$

Conclusão:

$$\alpha_{ij}(\mathbf{x}') = -\frac{\delta_{ij}}{2} \quad (3.29)$$

$$C_{ij}(\mathbf{x}') = \delta_{ij} + \alpha_{ij}(\mathbf{x}') = \frac{\delta_{ij}}{2} \quad (3.30)$$

Para contornos tridimensionais "suaves", como o apresentado na Figura 3.3, o processo é análogo (utilizando, no entanto, coordenadas esféricas em lugar de coordenadas polares) e o resultado é idêntico ao encontrado para contornos bidimensionais.

Para contornos "não-suaves" os termos livres podem ser avaliados indiretamente a partir de uma consideração de movimento de corpo rígido, que será explicada posteriormente, em momento oportuno.

3.5 Regiões Infinitas

A extensão da equação (3.28) para regiões infinitas deve ser feita levando-se em consideração hipóteses adicionais relativas às funções envolvidas. Essas hipóteses estão associadas ao comportamento das funções em uma superfície infinitamente distante do ponto fonte e são denominadas condições de regularidade.

Seja ρ o raio de uma esfera com contorno Γ_ρ , centrada no ponto fonte $\mathbf{x}'$, que envolve a cavidade, ou as cavidades, do problema, como ilustrado na Figura 3.4.

A equação (3.28) é reescrita para a região entre Γ e Γ_ρ (considerando as forças de corpo nulas, para simplificar) como

$$\begin{aligned} C_{ij}(\mathbf{x}')u_j(\mathbf{x}') + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})d\Gamma + \int_{\Gamma_\rho} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})d\Gamma_\rho = \\ = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})d\Gamma + \int_{\Gamma_\rho} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})d\Gamma_\rho \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $\rho \rightarrow \infty$, a equação anterior pode ser escrita apenas em termos de integrais sobre o contorno Γ se a condição de regularidade seguinte for satisfeita:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Gamma_\rho} [T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) - U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})]d\Gamma_\rho \right\} = 0 \quad (3.31)$$

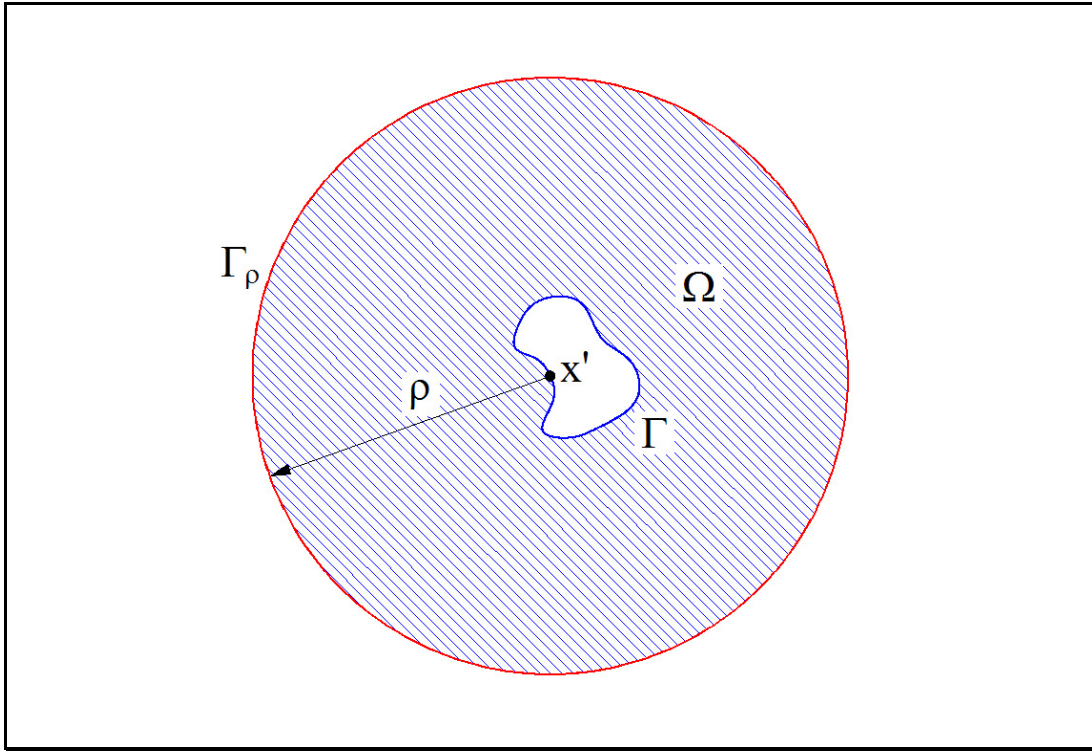


FIGURA 3.4 – Região infinita envolvendo uma cavidade

Para problemas tridimensionais, tem-se

$$U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = O(\rho^{-1})$$

$$T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = O(\rho^{-2})$$

$$d\Gamma_\rho = |\mathbf{J}| d\varphi d\theta \quad |\mathbf{J}| = O(\rho^2)$$

portanto, se na pior hipótese,

$$u_j(\mathbf{x}) = O(\rho^{-1})$$

e

$$t_j(\mathbf{x}) = O(\rho^{-2})$$

no infinito, a condição de regularidade (3.31) é satisfeita. Deve-se observar que se a carga total aplicada na superfície Γ não for auto-equilibrada, o princípio de Saint-Venant⁹ mostra que $u_j(\mathbf{x})$ e $t_j(\mathbf{x})$ terão o mesmo comportamento que a solução fundamental correspondente a uma carga concentrada na direção da resultante. Desse modo,

⁹ MALVERN, L. E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1969.

$$u_j(\mathbf{x}) = O(\rho^{-l})$$

e

$$t_j(\mathbf{x}) = O(\rho^{-2})$$

são obtidos e cada termo da condição de regularidade se anula separadamente.

Para problemas bidimensionais, tem-se

$$U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \begin{cases} O(\ln(\rho + l)) & \text{se } i = j \\ O(l) & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = O(\rho^{-l})$$

$$d\Gamma_\rho = |\mathbf{J}| d\theta \quad |\mathbf{J}| = O(\rho)$$

portanto, para garantir que cada termo da condição de regularidade (3.31) se anule separadamente, deve-se ter

$$u_j(\mathbf{x}) = O(\rho^{-l})$$

e

$$t_j(\mathbf{x}) = O(\rho^{-2})$$

como antes. Esse caso, no entanto, não corresponde ao comportamento da solução fundamental no infinito. Baseado no mesmo argumento do caso tridimensional, substituindo $u_j(\mathbf{x})$ e $t_j(\mathbf{x})$ pelos tensores correspondentes à solução fundamental bidimensional, verifica-se que a condição de regularidade é satisfeita. A única diferença é que, agora, os termos não se cancelam separadamente, mas se cancelam quando $\rho \rightarrow \infty$.

A discussão anterior permite concluir que a condição de regularidade (3.31) é sempre satisfeita se $u_j(\mathbf{x})$ e $t_j(\mathbf{x})$ comportam-se, na pior hipótese, como as correspondentes soluções fundamentais no infinito. Desse modo, problemas de cavidades em meios infinitos podem ser representados pela equação (3.28), desde que a normal ao contorno Γ e o sentido de integração sejam definidos conforme a Figura 3.5.

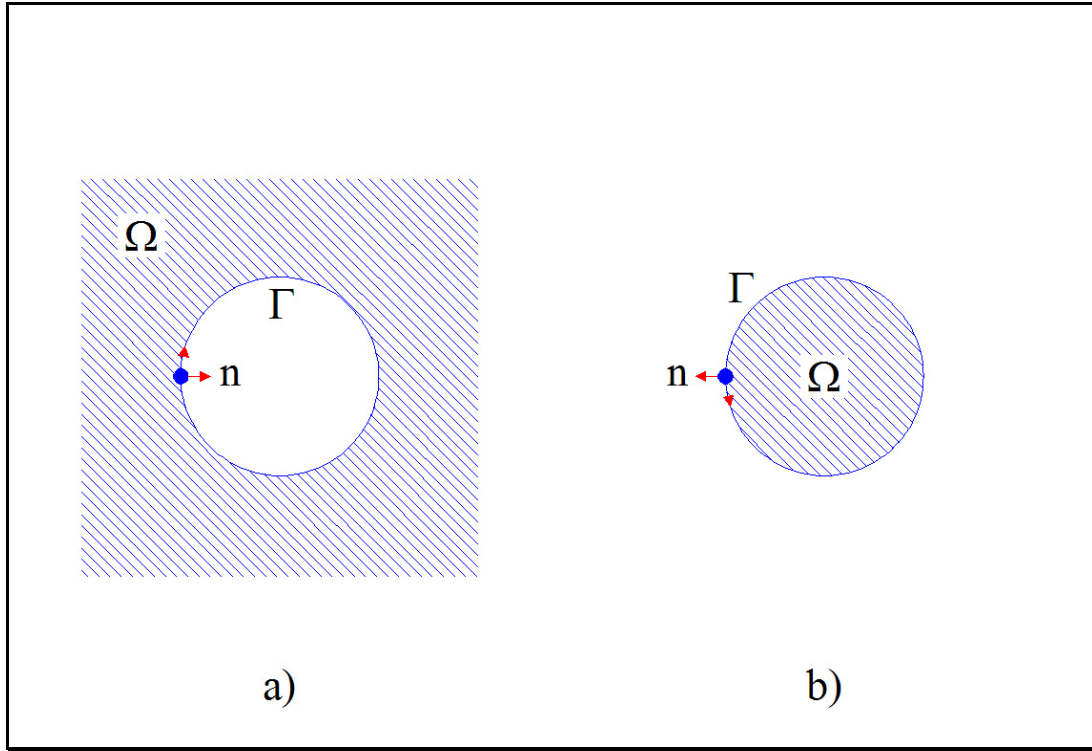


FIGURA 3.5 – Definição da normal e do sentido de integração: a) Problemas com domínio infinito; b) Problemas com domínio finito

3.6 Discretização Numérica

As equações integrais de contorno, apresentadas até agora, só podem ser resolvidas analiticamente para problemas muito simples. Para problemas constituídos de geometrias e carregamentos mais complexos, somente a adoção de métodos numéricos permite solucioná-las. O Método de Elementos de Contorno é um método numérico para solução dessas equações integrais de contorno partindo de um procedimento de discretização.

O primeiro passo nesse procedimento de discretização é dividir, ou aproximar, o contorno Γ em Ne segmentos ou elementos. Desse modo, na ausência de forças de corpo, para simplificar, a equação (3.28) pode ser reescrita na forma

$$C_{ij}(\mathbf{x}')u_j(\mathbf{x}') + \sum_{n=1}^{Ne} \int_{\Gamma_n} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})d\Gamma_n = \sum_{n=1}^{Ne} \int_{\Gamma_n} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})d\Gamma_n \quad (3.32)$$

onde $\Gamma = \sum_{n=1}^{Ne} \Gamma_n$.

3.7 Elementos Constantes

Nesse trabalho, a geometria do contorno é dividida em Ne elementos retos, e os valores das incógnitas e das condições de contorno $u_j(\mathbf{x})$ e $t_j(\mathbf{x})$ são considerados constantes ao longo do comprimento de cada elemento e iguais aos valores dessas mesmas incógnitas nos pontos centrais (também denominados pontos nodais ou nós funcionais) dos respectivos elementos. Partindo dessas considerações, reescreve-se a equação (3.32) como

$$C_{ij}^c u_j^c + \sum_{n=1}^{Ne} u_j^n \int_{\Gamma_n} T_{ij}^c d\Gamma_n = \sum_{n=1}^{Ne} t_j^n \int_{\Gamma_n} U_{ij}^c d\Gamma_n \quad (3.33)$$

onde u_j^n e t_j^n são os valores dos deslocamentos e forças de superfície nos pontos centrais dos elementos de contorno; u_j^c , $C_{ij}^c u_j^c$, T_{ij}^c e U_{ij}^c são, respectivamente, os valores dos deslocamentos, termos livres e soluções fundamentais para o ponto fonte $\mathbf{x}' = \mathbf{x}^c$.

Fazendo os pontos fonte percorrerem, sucessivamente, os pontos centrais dos elementos de contorno, isto é, fazendo $c = 1, 2, \dots, Ne$, são geradas Ne equações para Ne valores de deslocamentos e Ne valores de forças de superfície. Aplicando as condições de contorno do problema, ou seja, deslocamentos e forças de superfície prescritos para os pontos nodais, produz-se um sistema algébrico que, ao ser resolvido, resulta nos valores das incógnitas do problema. Outra observação pertinente: todo ponto fonte $\mathbf{x}^c$ está localizado em um contorno "suave", portanto, os coeficientes associados aos termos livres podem ser calculados através da expressão (3.30).

3.7.1 Formação do Sistema de Equações

Para ilustrar a aplicação da equação (3.33) far-se-á uso da malha modelo apresentada na Figura 3.6. A seguinte convenção é estabelecida quando tratar-se da representação geométrica de malhas de elementos de contorno: os elementos de

contorno são representados por linhas azuis delimitadas por pequenos traços vermelhos e sua numeração correspondente é aquela dentro dos círculos verdes; os pontos azuis, sobre os elementos de contorno, são os nós de contorno e sua numeração é aquela localizada próxima aos mesmos; caso existam pontos no domínio do problema (também chamados de pontos internos), os mesmos apresentarão cor vermelha e numeração independente daquela dos elementos ou nós de contorno.

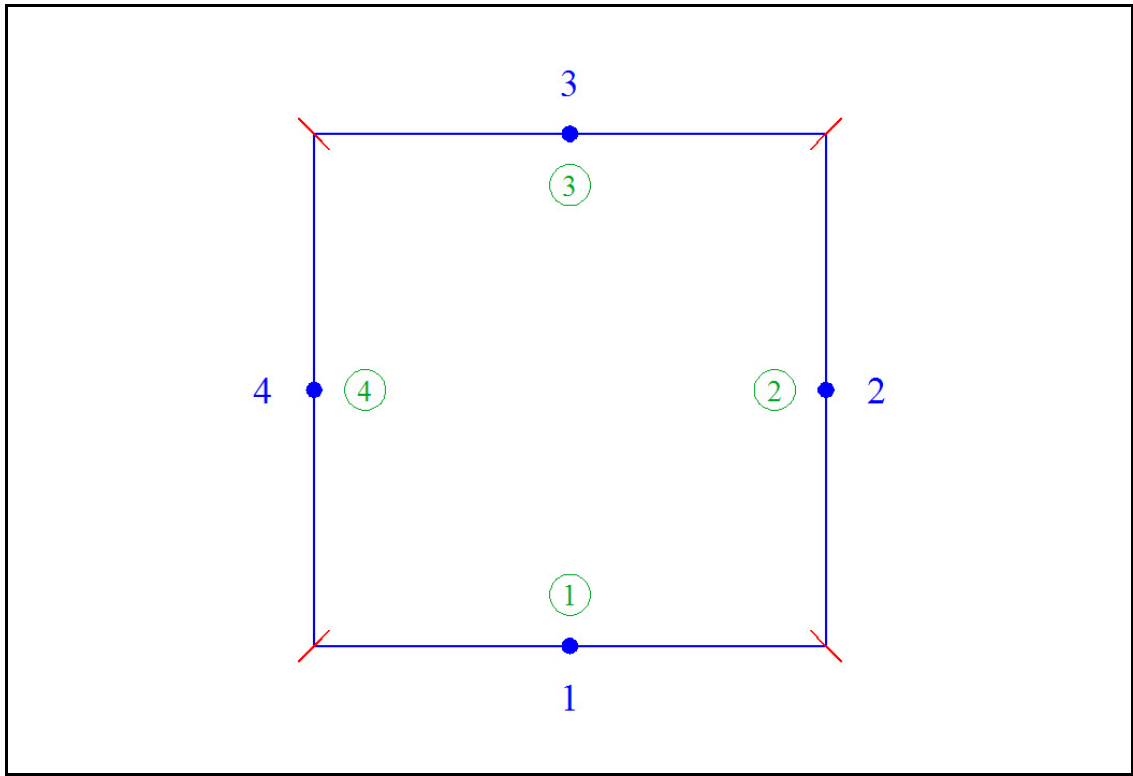


FIGURA 3.6 – Malha modelo formada por elementos de contorno constantes

Aplicando a equação (3.33), quando o ponto fonte é o *Nó 1*, resulta

$$\begin{aligned}
 & C_{11}^l u_1^l + C_{12}^l u_2^l + \int_{\Gamma_1} T_{11}^l d\Gamma_1 u_1^l + \int_{\Gamma_1} T_{12}^l d\Gamma_1 u_2^l + \int_{\Gamma_2} T_{11}^l d\Gamma_2 u_1^2 + \int_{\Gamma_2} T_{12}^l d\Gamma_2 u_2^2 + \\
 & + \int_{\Gamma_3} T_{11}^l d\Gamma_3 u_1^3 + \int_{\Gamma_3} T_{12}^l d\Gamma_3 u_2^3 + \int_{\Gamma_4} T_{11}^l d\Gamma_4 u_1^4 + \int_{\Gamma_4} T_{12}^l d\Gamma_4 u_2^4 = \\
 & = \int_{\Gamma_1} U_{11}^l d\Gamma_1 t_1^l + \int_{\Gamma_1} U_{12}^l d\Gamma_1 t_2^l + \int_{\Gamma_2} U_{11}^l d\Gamma_2 t_1^2 + \int_{\Gamma_2} U_{12}^l d\Gamma_2 t_2^2 + \\
 & + \int_{\Gamma_3} U_{11}^l d\Gamma_3 t_1^3 + \int_{\Gamma_3} U_{12}^l d\Gamma_3 t_2^3 + \int_{\Gamma_4} U_{11}^l d\Gamma_4 t_1^4 + \int_{\Gamma_4} U_{12}^l d\Gamma_4 t_2^4 \quad (i) \\
 & C_{21}^l u_1^l + C_{22}^l u_2^l + \int_{\Gamma_1} T_{21}^l d\Gamma_1 u_1^l + \int_{\Gamma_1} T_{22}^l d\Gamma_1 u_2^l + \int_{\Gamma_2} T_{21}^l d\Gamma_2 u_1^2 + \int_{\Gamma_2} T_{22}^l d\Gamma_2 u_2^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Gamma_3} T_{21}^l d\Gamma_3 u_l^3 + \int_{\Gamma_3} T_{22}^l d\Gamma_3 u_2^3 + \int_{\Gamma_4} T_{21}^l d\Gamma_4 u_l^4 + \int_{\Gamma_4} T_{22}^l d\Gamma_4 u_2^4 = \\
& = \int_{\Gamma_1} U_{21}^l d\Gamma_1 t_l^1 + \int_{\Gamma_1} U_{22}^l d\Gamma_1 t_2^1 + \int_{\Gamma_2} U_{21}^l d\Gamma_2 t_l^2 + \int_{\Gamma_2} U_{22}^l d\Gamma_2 t_2^2 + \\
& + \int_{\Gamma_3} U_{21}^l d\Gamma_3 t_l^3 + \int_{\Gamma_3} U_{22}^l d\Gamma_3 t_2^3 + \int_{\Gamma_4} U_{21}^l d\Gamma_4 t_l^4 + \int_{\Gamma_4} U_{22}^l d\Gamma_4 t_2^4 \quad (ii)
\end{aligned}$$

A expressão (i) corresponde a uma força unitária atuando no ponto fonte na direção 1; a expressão (ii) corresponde a uma força unitária atuando no ponto fonte na direção 2.

Em forma matricial, essas expressões são agrupadas do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} C_{11}^l & C_{12}^l \\ C_{21}^l & C_{22}^l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_l^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} + \int_{\Gamma_1} \begin{bmatrix} T_{11}^l & T_{12}^l \\ T_{21}^l & T_{22}^l \end{bmatrix} d\Gamma_1 \begin{Bmatrix} u_l^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} + \int_{\Gamma_2} \begin{bmatrix} T_{11}^l & T_{12}^l \\ T_{21}^l & T_{22}^l \end{bmatrix} d\Gamma_2 \begin{Bmatrix} u_l^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + \\
& + \int_{\Gamma_3} \begin{bmatrix} T_{11}^l & T_{12}^l \\ T_{21}^l & T_{22}^l \end{bmatrix} d\Gamma_3 \begin{Bmatrix} u_l^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} + \int_{\Gamma_4} \begin{bmatrix} T_{11}^l & T_{12}^l \\ T_{21}^l & T_{22}^l \end{bmatrix} d\Gamma_4 \begin{Bmatrix} u_l^4 \\ u_2^4 \end{Bmatrix} = \\
& = \int_{\Gamma_1} \begin{bmatrix} U_{11}^l & U_{12}^l \\ U_{21}^l & U_{22}^l \end{bmatrix} d\Gamma_1 \begin{Bmatrix} t_l^1 \\ t_2^1 \end{Bmatrix} + \int_{\Gamma_2} \begin{bmatrix} U_{11}^l & U_{12}^l \\ U_{21}^l & U_{22}^l \end{bmatrix} d\Gamma_2 \begin{Bmatrix} t_l^2 \\ t_2^2 \end{Bmatrix} + \\
& + \int_{\Gamma_3} \begin{bmatrix} U_{11}^l & U_{12}^l \\ U_{21}^l & U_{22}^l \end{bmatrix} d\Gamma_3 \begin{Bmatrix} t_l^3 \\ t_2^3 \end{Bmatrix} + \int_{\Gamma_4} \begin{bmatrix} U_{11}^l & U_{12}^l \\ U_{21}^l & U_{22}^l \end{bmatrix} d\Gamma_4 \begin{Bmatrix} t_l^4 \\ t_2^4 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

ou, de forma mais compacta,

$$\begin{bmatrix} C_{11}^l & C_{12}^l \\ C_{21}^l & C_{22}^l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_l^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\int_{\Gamma_n} \begin{bmatrix} T_{11}^l & T_{12}^l \\ T_{21}^l & T_{22}^l \end{bmatrix} d\Gamma_n \begin{Bmatrix} u_l^n \\ u_2^n \end{Bmatrix} \right) = \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\int_{\Gamma_n} \begin{bmatrix} U_{11}^l & U_{12}^l \\ U_{21}^l & U_{22}^l \end{bmatrix} d\Gamma_n \begin{Bmatrix} t_l^n \\ t_2^n \end{Bmatrix} \right)$$

De maneira análoga, para o Nó 2,

$$\begin{bmatrix} C_{11}^2 & C_{12}^2 \\ C_{21}^2 & C_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_l^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\int_{\Gamma_n} \begin{bmatrix} T_{11}^2 & T_{12}^2 \\ T_{21}^2 & T_{22}^2 \end{bmatrix} d\Gamma_n \begin{Bmatrix} u_l^n \\ u_2^n \end{Bmatrix} \right) = \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\int_{\Gamma_n} \begin{bmatrix} U_{11}^2 & U_{12}^2 \\ U_{21}^2 & U_{22}^2 \end{bmatrix} d\Gamma_n \begin{Bmatrix} t_l^n \\ t_2^n \end{Bmatrix} \right)$$

para o Nó 3,

$$\begin{bmatrix} C_{11}^3 & C_{12}^3 \\ C_{21}^3 & C_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_l^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\int_{\Gamma_n} \begin{bmatrix} T_{11}^3 & T_{12}^3 \\ T_{21}^3 & T_{22}^3 \end{bmatrix} d\Gamma_n \begin{Bmatrix} u_l^n \\ u_2^n \end{Bmatrix} \right) = \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\int_{\Gamma_n} \begin{bmatrix} U_{11}^3 & U_{12}^3 \\ U_{21}^3 & U_{22}^3 \end{bmatrix} d\Gamma_n \begin{Bmatrix} t_l^n \\ t_2^n \end{Bmatrix} \right)$$

e para o Nó 4,

$$\begin{bmatrix} C_{11}^4 & C_{12}^4 \\ C_{21}^4 & C_{22}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_l^4 \\ u_2^4 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\int_{\Gamma_n} \begin{bmatrix} T_{11}^4 & T_{12}^4 \\ T_{21}^4 & T_{22}^4 \end{bmatrix} d\Gamma_n \begin{Bmatrix} u_l^n \\ u_2^n \end{Bmatrix} \right) = \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\int_{\Gamma_n} \begin{bmatrix} U_{11}^4 & U_{12}^4 \\ U_{21}^4 & U_{22}^4 \end{bmatrix} d\Gamma_n \begin{Bmatrix} t_l^n \\ t_2^n \end{Bmatrix} \right)$$

Ao adotar-se a notação

$$\mathbf{C}^n = \begin{bmatrix} C_{11}^n & C_{12}^n \\ C_{21}^n & C_{22}^n \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^n = \begin{Bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{Bmatrix} \quad \mathbf{t}^n = \begin{Bmatrix} t_1^n \\ t_2^n \end{Bmatrix} \quad \mathbf{U}^n = \begin{bmatrix} U_{11}^n & U_{12}^n \\ U_{21}^n & U_{22}^n \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^n = \begin{bmatrix} T_{11}^n & T_{12}^n \\ T_{21}^n & T_{22}^n \end{bmatrix}$$

as equações anteriores passam a ser reescritas como

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^1 \mathbf{u}^1 + \sum_{n=1}^{Ne=4} \int_{\Gamma_n} \mathbf{T}^1 d\Gamma_n \mathbf{u}^n &= \sum_{n=1}^{Ne=4} \int_{\Gamma_n} \mathbf{U}^1 d\Gamma_n \mathbf{t}^n \\ \mathbf{C}^2 \mathbf{u}^2 + \sum_{n=1}^{Ne=4} \int_{\Gamma_n} \mathbf{T}^2 d\Gamma_n \mathbf{u}^n &= \sum_{n=1}^{Ne=4} \int_{\Gamma_n} \mathbf{U}^2 d\Gamma_n \mathbf{t}^n \\ \mathbf{C}^3 \mathbf{u}^3 + \sum_{n=1}^{Ne=4} \int_{\Gamma_n} \mathbf{T}^3 d\Gamma_n \mathbf{u}^n &= \sum_{n=1}^{Ne=4} \int_{\Gamma_n} \mathbf{U}^3 d\Gamma_n \mathbf{t}^n \\ \mathbf{C}^4 \mathbf{u}^4 + \sum_{n=1}^{Ne=4} \int_{\Gamma_n} \mathbf{T}^4 d\Gamma_n \mathbf{u}^n &= \sum_{n=1}^{Ne=4} \int_{\Gamma_n} \mathbf{U}^4 d\Gamma_n \mathbf{t}^n \end{aligned}$$

ou, de maneira equivalente,

$$\mathbf{C}^c \mathbf{u}^c + \sum_{n=1}^{Ne=4} \int_{\Gamma_n} \mathbf{T}^c d\Gamma_n \mathbf{u}^n = \sum_{n=1}^{Ne=4} \int_{\Gamma_n} \mathbf{U}^c d\Gamma_n \mathbf{t}^n \quad c = 1, 2, \dots, Ne = 4$$

Denotando as integrais das soluções fundamentais por

$$\overline{\mathbf{H}}^{cn} = \int_{\Gamma_n} \mathbf{T}^c d\Gamma_n \quad \mathbf{G}^{cn} = \int_{\Gamma_n} \mathbf{U}^c d\Gamma_n$$

tem-se

$$\mathbf{C}^c \mathbf{u}^c + \sum_{n=1}^{Ne=4} \overline{\mathbf{H}}^{cn} \mathbf{u}^n = \sum_{n=1}^{Ne=4} \mathbf{G}^{cn} \mathbf{t}^n \quad c = 1, 2, \dots, Ne = 4$$

Definindo

$$\begin{cases} \mathbf{H}^{cn} = \overline{\mathbf{H}}^{cn} & \text{quando } c \neq n \\ \mathbf{H}^{cn} = \overline{\mathbf{H}}^{cn} + \mathbf{C}^c & \text{quando } c = n \end{cases}$$

resulta

$$\sum_{n=1}^{Ne=4} \mathbf{H}^{cn} \mathbf{u}^n = \sum_{n=1}^{Ne=4} \mathbf{G}^{cn} \mathbf{t}^n \quad c = 1, 2, \dots, Ne = 4$$

A equação anterior, reescrita em forma matricial, produz o sistema algébrico

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{t}$$

o qual, quando reordenado através da aplicação das condições de contorno prescritas para o problema, produz o sistema algébrico final

$$\mathbf{A} \mathbf{Y} = \mathbf{F}$$

onde o vetor $\mathbf{Y}$ contém todas as incógnitas (deslocamentos ou forças de superfície) do problema; a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ é formada de colunas de $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$; o vetor $\mathbf{F}$ é formado de colunas de $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ multiplicadas pelas condições de contorno prescritas. Uma vez que esse sistema esteja resolvido, todos os valores das incógnitas de contorno serão conhecidos.

O processo de introdução das condições de contorno no sistema algébrico $\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}$, transformando-o, dessa maneira, no sistema algébrico final $\mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{F}$, será ilustrado através das Figuras 3.7 e 3.8.

A Figura 3.7 apresenta o sistema algébrico $\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}$ resultante para a malha modelo da Figura 3.6, destacando, na cor azul, os valores dos deslocamentos prescritos e, na cor vermelha, os valores das forças de superfície prescritas para um problema arbitrário. Também estão destacadas as colunas das matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ que multiplicam os valores das condições de contorno prescritas.

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccccc}
 H_{11}^{11} & H_{12}^{11} & H_{11}^{12} & H_{12}^{12} & H_{11}^{13} & H_{12}^{13} & H_{11}^{14} & H_{12}^{14} \\
 H_{21}^{11} & H_{22}^{11} & H_{21}^{12} & H_{22}^{12} & H_{21}^{13} & H_{22}^{13} & H_{21}^{14} & H_{22}^{14} \\
 H_{11}^{21} & H_{12}^{21} & H_{11}^{22} & H_{12}^{22} & H_{11}^{23} & H_{12}^{23} & H_{11}^{24} & H_{12}^{24} \\
 H_{21}^{21} & H_{22}^{21} & H_{21}^{22} & H_{22}^{22} & H_{21}^{23} & H_{22}^{23} & H_{21}^{24} & H_{22}^{24} \\
 H_{11}^{31} & H_{12}^{31} & H_{11}^{32} & H_{12}^{32} & H_{11}^{33} & H_{12}^{33} & H_{11}^{34} & H_{12}^{34} \\
 H_{21}^{31} & H_{22}^{31} & H_{21}^{32} & H_{22}^{32} & H_{21}^{33} & H_{22}^{33} & H_{21}^{34} & H_{22}^{34} \\
 H_{11}^{41} & H_{12}^{41} & H_{11}^{42} & H_{12}^{42} & H_{11}^{43} & H_{12}^{43} & H_{11}^{44} & H_{12}^{44} \\
 H_{21}^{41} & H_{22}^{41} & H_{21}^{42} & H_{22}^{42} & H_{21}^{43} & H_{22}^{43} & H_{21}^{44} & H_{22}^{44}
 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_1^4 \\ u_2^4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccccc}
 G_{11}^{11} & G_{12}^{11} & G_{11}^{12} & G_{12}^{12} & G_{11}^{13} & G_{12}^{13} & G_{11}^{14} & G_{12}^{14} \\
 G_{21}^{11} & G_{22}^{11} & G_{21}^{12} & G_{22}^{12} & G_{21}^{13} & G_{22}^{13} & G_{21}^{14} & G_{22}^{14} \\
 G_{11}^{21} & G_{12}^{21} & G_{11}^{22} & G_{12}^{22} & G_{11}^{23} & G_{12}^{23} & G_{11}^{24} & G_{12}^{24} \\
 G_{21}^{21} & G_{22}^{21} & G_{21}^{22} & G_{22}^{22} & G_{21}^{23} & G_{22}^{23} & G_{21}^{24} & G_{22}^{24} \\
 G_{11}^{31} & G_{12}^{31} & G_{11}^{32} & G_{12}^{32} & G_{11}^{33} & G_{12}^{33} & G_{11}^{34} & G_{12}^{34} \\
 G_{21}^{31} & G_{22}^{31} & G_{21}^{32} & G_{22}^{32} & G_{21}^{33} & G_{22}^{33} & G_{21}^{34} & G_{22}^{34} \\
 G_{11}^{41} & G_{12}^{41} & G_{11}^{42} & G_{12}^{42} & G_{11}^{43} & G_{12}^{43} & G_{11}^{44} & G_{12}^{44} \\
 G_{21}^{41} & G_{22}^{41} & G_{21}^{42} & G_{22}^{42} & G_{21}^{43} & G_{22}^{43} & G_{21}^{44} & G_{22}^{44}
 \end{array} \right] \begin{bmatrix} t_1^1 \\ t_2^1 \\ t_1^2 \\ t_2^2 \\ t_1^3 \\ t_2^3 \\ t_1^4 \\ t_2^4 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$\mathbf{H}$
 $\mathbf{u}$
 $\mathbf{G}$
 $\mathbf{t}$

FIGURA 3.7 – Sistema algébrico $\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}$ destacando os valores das condições de contorno prescritas para um problema arbitrário

Para agrupar todas as incógnitas do problema no lado esquerdo da igualdade e todos os valores das condições de contorno prescritas no lado direito da igualdade, basta trocar as colunas das matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ da forma indicada na Figura

3.8 e inverter o sinal dos coeficientes. Agora, o lado direito da igualdade possui apenas valores conhecidos, o que dá origem ao vetor F , enquanto que o lado esquerdo da igualdade possui a matriz de coeficientes A que multiplica o vetor de incógnitas Y , isto é, o sistema algébrico $AY = F$.

$$\begin{array}{c}
 \ominus \quad \quad \quad \ominus \quad \ominus \quad \quad \quad \ominus \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 G_{11}^{11} & H_{12}^{11} & H_{11}^{12} & G_{12}^{12} & G_{11}^{13} & H_{12}^{13} & H_{11}^{14} & G_{12}^{14} \\
 G_{21}^{11} & H_{22}^{11} & H_{21}^{12} & G_{22}^{12} & G_{21}^{13} & H_{22}^{13} & H_{21}^{14} & G_{22}^{14} \\
 G_{11}^{21} & H_{12}^{21} & H_{11}^{22} & G_{12}^{22} & G_{11}^{23} & H_{12}^{23} & H_{11}^{24} & G_{12}^{24} \\
 G_{21}^{21} & H_{22}^{21} & H_{21}^{22} & G_{22}^{22} & G_{21}^{23} & H_{22}^{23} & H_{21}^{24} & G_{22}^{24} \\
 G_{11}^{31} & H_{12}^{31} & H_{11}^{32} & G_{12}^{32} & G_{11}^{33} & H_{12}^{33} & H_{11}^{34} & G_{12}^{34} \\
 G_{21}^{31} & H_{22}^{31} & H_{21}^{32} & G_{22}^{32} & G_{21}^{33} & H_{22}^{33} & H_{21}^{34} & G_{22}^{34} \\
 G_{11}^{41} & H_{12}^{41} & H_{11}^{42} & G_{12}^{42} & G_{11}^{43} & H_{12}^{43} & H_{11}^{44} & G_{12}^{44} \\
 G_{21}^{41} & H_{22}^{41} & H_{21}^{42} & G_{22}^{42} & G_{21}^{43} & H_{22}^{43} & H_{21}^{44} & G_{22}^{44}
 \end{array} \right]
 \begin{bmatrix} t_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ t_2^2 \\ t_1^3 \\ u_2^3 \\ u_1^4 \\ t_2^4 \end{bmatrix}
 =
 \begin{array}{c}
 \ominus \quad \quad \quad \ominus \quad \ominus \quad \quad \quad \ominus \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 H_{11}^{11} & G_{12}^{11} & G_{11}^{12} & H_{12}^{12} & H_{11}^{13} & G_{12}^{13} & G_{11}^{14} & H_{12}^{14} \\
 H_{21}^{11} & G_{22}^{11} & G_{21}^{12} & H_{22}^{12} & H_{21}^{13} & G_{22}^{13} & G_{21}^{14} & H_{22}^{14} \\
 H_{11}^{21} & G_{12}^{21} & G_{11}^{22} & H_{12}^{22} & H_{11}^{23} & G_{12}^{23} & G_{11}^{24} & H_{12}^{24} \\
 H_{21}^{21} & G_{22}^{21} & G_{21}^{22} & H_{22}^{22} & H_{21}^{23} & G_{22}^{23} & G_{21}^{24} & H_{22}^{24} \\
 H_{11}^{31} & G_{12}^{31} & G_{11}^{32} & H_{12}^{32} & H_{11}^{33} & G_{12}^{33} & G_{11}^{34} & H_{12}^{34} \\
 H_{21}^{31} & G_{22}^{31} & G_{21}^{32} & H_{22}^{32} & H_{21}^{33} & G_{22}^{33} & G_{21}^{34} & H_{22}^{34} \\
 H_{11}^{41} & G_{12}^{41} & G_{11}^{42} & H_{12}^{42} & H_{11}^{43} & G_{12}^{43} & G_{11}^{44} & H_{12}^{44} \\
 H_{21}^{41} & G_{22}^{41} & G_{21}^{42} & H_{22}^{42} & H_{21}^{43} & G_{22}^{43} & G_{21}^{44} & H_{22}^{44}
 \end{array} \right]
 \begin{bmatrix} u_1^1 \\ t_2^1 \\ t_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ t_2^3 \\ t_1^4 \\ u_2^4 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

$\begin{matrix} A & Y & F \end{matrix}$

FIGURA 3.8 – Sistema algébrico $AY = F$ resultante da reordenação das colunas das matrizes H e G de modo a agrupar todas as incógnitas do problema no lado direito da igualdade e os valores das condições de contorno prescritas no lado esquerdo da igualdade

3.7.2 Integração

Todas as integrais, nas expressões anteriores, podem ser avaliadas numericamente. Para o caso específico de elementos constantes, entretanto, é mais simples e mais exato calcular algumas dessas integrais analiticamente, particularmente aquelas sobre o elemento que apresenta singularidade, isto é, quando $c = n$. Nos demais elementos, os valores das integrais em H^{cn} e G^{cn} são computados utilizando-se o processo de quadratura de Gauss.

3.7.2.1 Submatrizes $\mathbf{H}^{cc}$

As submatrizes $\mathbf{H}^{cc}$, que formam a diagonal de submatrizes de $\mathbf{H}$, são dadas por

$$\mathbf{H}^{cc} = \begin{bmatrix} H_{11}^{cc} & H_{12}^{cc} \\ H_{21}^{cc} & H_{22}^{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Esse resultado é obtido considerando-se a relação¹⁰

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial r / \partial n}{r} = \frac{1}{\rho}$$

onde ρ denota o raio de curvatura do elemento. Para elementos com geometria reta, $\rho = \infty$, logo

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial r / \partial n}{r} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Quando essa última relação é utilizada na avaliação da integral da solução fundamental apresentada em (3.16), em torno do ponto fonte $\mathbf{x}^c$ e ao longo do elemento que contém o ponto fonte, verifica-se que essa integral é nula. Desse modo, as submatrizes $\mathbf{H}^{cc}$ são dadas por

$$\mathbf{H}^{cc} = \begin{bmatrix} H_{11}^{cc} & H_{12}^{cc} \\ H_{21}^{cc} & H_{22}^{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}^c & C_{12}^c \\ C_{21}^c & C_{22}^c \end{bmatrix}$$

Como mencionado anteriormente, em elementos constantes com geometria reta, todo ponto fonte $\mathbf{x}^c$ está localizado em um contorno "suave", portanto, os coeficientes C_{ij}^c podem ser calculados através da expressão (3.30), conduzindo ao resultado apresentado inicialmente.

¹⁰ MANSUR, W. J., TELLES, J. C. F., PRODANOFF, J. H. A., FRAUCHES, E. On BEM singular integrals for two-dimensional potencial applications. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 9, p. 185-187, 1992.

3.7.2.2 Submatrizes $\mathbf{G}^{cc}$

As submatrizes $\mathbf{G}^{cc}$, que formam a diagonal de submatrizes de $\mathbf{G}$, calculadas analiticamente a partir da solução fundamental apresentada em (3.15), em torno do ponto fonte $\mathbf{x}^c$ e ao longo do elemento que contém o ponto fonte, resultam em¹¹

$$\mathbf{G}^{cc} = \begin{bmatrix} G_{11}^{cc} & G_{12}^{cc} \\ G_{21}^{cc} & G_{22}^{cc} \end{bmatrix}$$

sendo que

$$G_{11}^{cc} = \frac{2R}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu)(1-\ln R) + \frac{(r_1)^2}{4R^2} \right]$$

$$G_{12}^{cc} = G_{21}^{cc} = \frac{2R}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{r_1 r_2}{4R^2} \right]$$

$$G_{22}^{cc} = \frac{2R}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu)(1-\ln R) + \frac{(r_2)^2}{4R^2} \right]$$

onde R , r_1 e r_2 são definidos, com a ajuda da Figura 3.9, como

$$r_1 = \|\vec{r}_1\| = x_1^2 - x_1^l$$

$$r_2 = \|\vec{r}_2\| = x_2^2 - x_2^l$$

$$R = \|\vec{R}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2}$$

¹¹ BREBBIA, C. A., DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements**, An Introductory Course. Boston: Computational Mechanics Publications, 1989, p. 199-202.

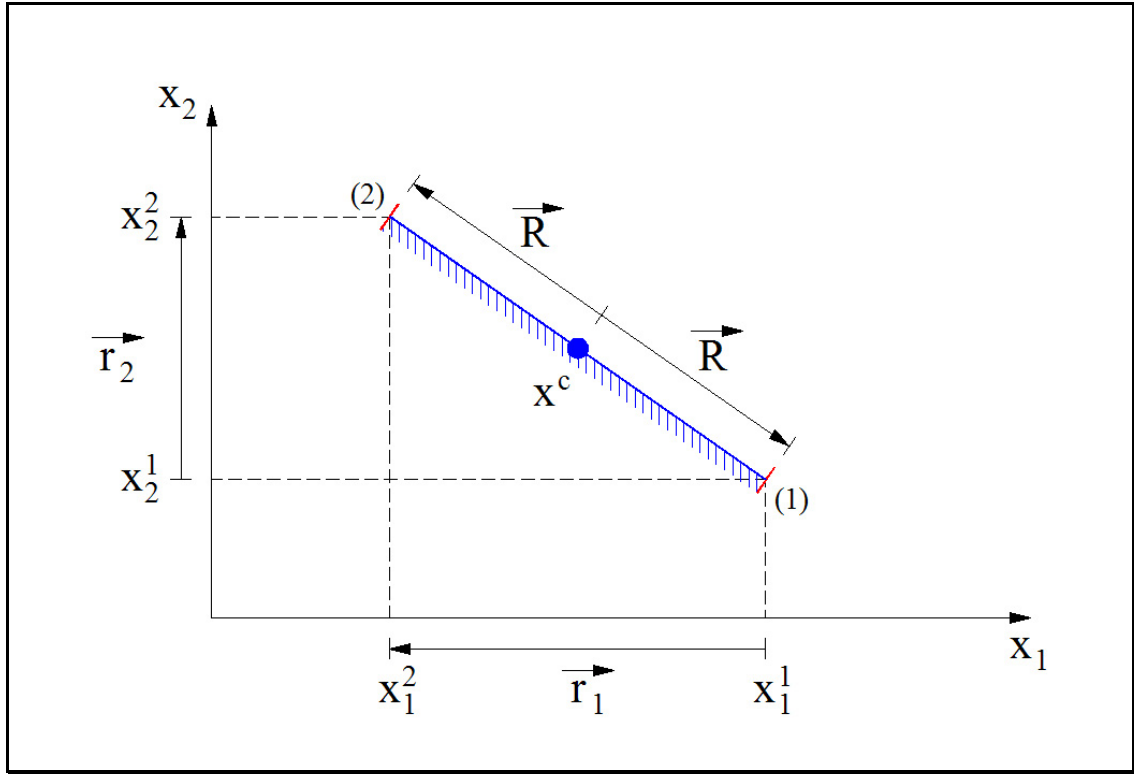


FIGURA 3.9 – Representação geométrica dos termos necessários para o cálculo dos coeficientes das submatrizes G^{cc}

3.7.2.3 Submatrizes G^{cn} quando $c \neq n$

As submatrizes G^{cn} quando $c \neq n$ (as submatrizes de G posicionadas fora da diagonal de submatrizes) são calculadas através da integração numérica da solução fundamental apresentada em (3.15). Para tanto é preciso definir os termos r , $r_{,1}$ e $r_{,2}$. Usando a Figura 3.10, onde g denota um ponto de integração de Gauss, conclui-se que

$$r_1 = \|\vec{r}_1\| = x_1^g - x_1^c$$

$$r_2 = \|\vec{r}_2\| = x_2^g - x_2^c$$

$$r = \|\vec{r}\| = \sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2} = \sqrt{(x_1^g - x_1^c)^2 + (x_2^g - x_2^c)^2}$$

$$r_{,1} = \frac{\|\vec{r}_1\|}{\|\vec{r}\|} = \frac{x_1^g - x_1^c}{\sqrt{(x_1^g - x_1^c)^2 + (x_2^g - x_2^c)^2}}$$

$$r_{,2} = \frac{\|\vec{r}_2\|}{\|\vec{r}\|} = \frac{x_2^g - x_2^c}{\sqrt{(x_1^g - x_1^c)^2 + (x_2^g - x_2^c)^2}}$$

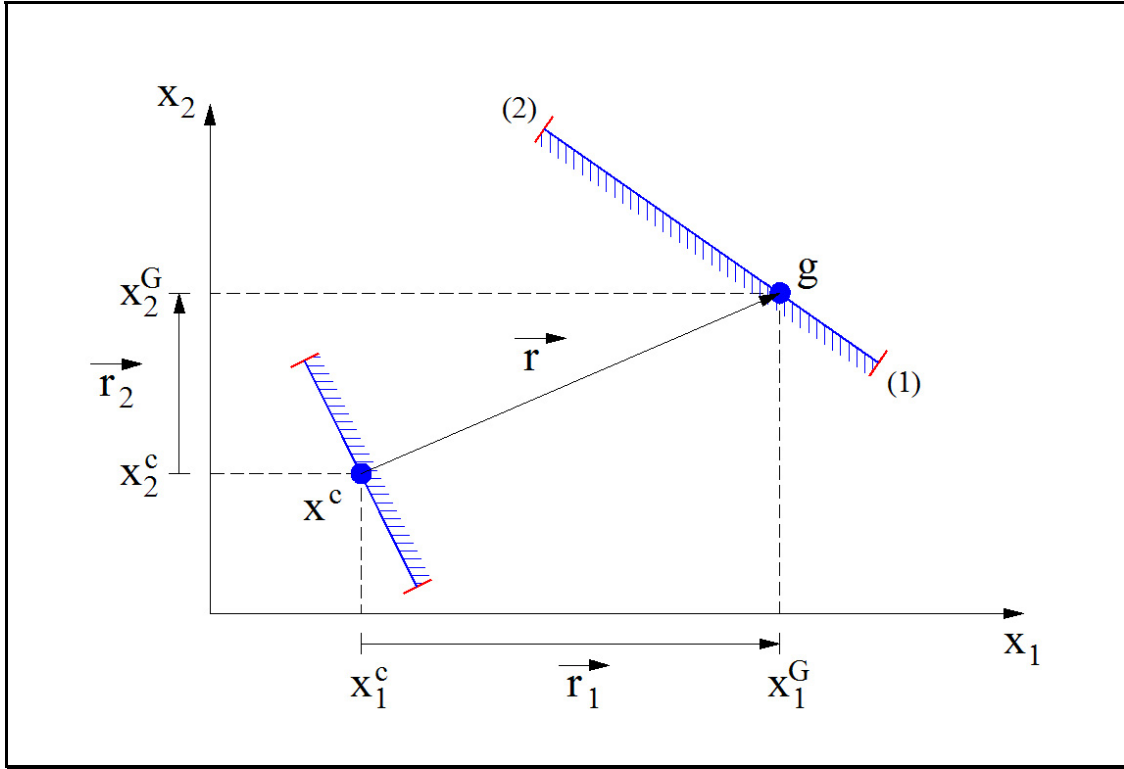


FIGURA 3.10 – Representação geométrica dos termos necessários para o cálculo dos coeficientes das submatrizes G^{cn} quando $c \neq n$

3.7.2.4 Submatrizes H^{cn} quando $c \neq n$

As submatrizes H^{cn} quando $c \neq n$ (as submatrizes de H posicionadas fora da diagonal de submatrizes) são calculadas através da integração numérica da solução fundamental apresentada em (3.16). Para tanto é preciso definir, além dos termos já definidos na seção anterior, os termos $\partial r / \partial n$, n_1 e n_2 . Usando a Figura 3.11 conclui-se que

$$n_1 = \|\vec{n}_1\| = \|\vec{n}\| \cos \alpha = \cos \alpha = \cos(\theta - 90^\circ) = \cos \theta \cos 90^\circ + \sin \theta \sin 90^\circ = \sin \theta$$

$$n_2 = \|\vec{n}_2\| = \|\vec{n}\| \sin \alpha = \sin \alpha = \sin(\theta - 90^\circ) = \sin \theta \cos 90^\circ - \cos \theta \sin 90^\circ = -\cos \theta$$

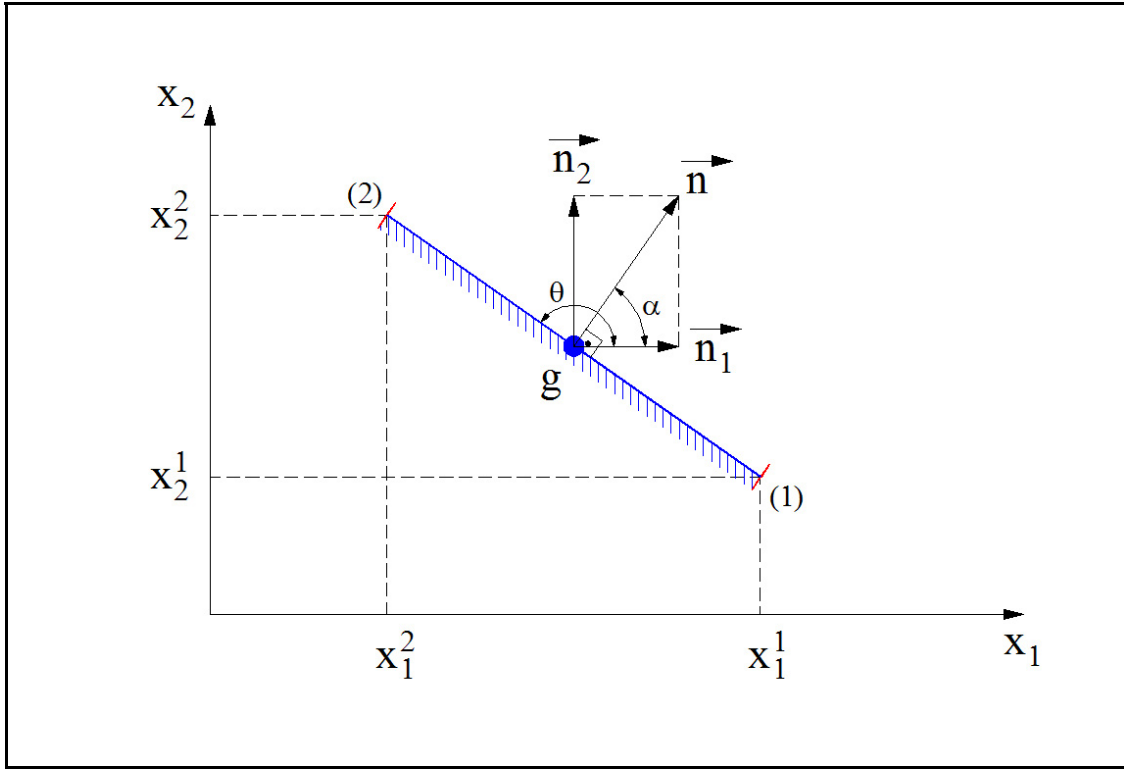


FIGURA 3.11 – Representação geométrica dos termos necessários para o cálculo dos coeficientes das submatrizes $\mathbf{H}^{cn}$ quando $c \neq n$

O ângulo θ representa a inclinação do elemento em relação ao eixo x_l , isto é,

$$\cos \theta = \frac{x_l^2 - x_l^1}{\sqrt{(x_l^2 - x_l^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{x_2^2 - x_2^1}{\sqrt{(x_l^2 - x_l^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2}}$$

e assim

$$n_l = \frac{x_2^2 - x_2^1}{\sqrt{(x_l^2 - x_l^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2}}$$

$$n_2 = \frac{x_l^1 - x_l^2}{\sqrt{(x_l^2 - x_l^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2}}$$

Finalmente,

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,l} n_l + r_{,2} n_2$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{x_l^g - x_l^c}{\sqrt{(x_l^g - x_l^c)^2 + (x_2^g - x_2^c)^2}} \frac{x_2^2 - x_2^1}{\sqrt{(x_l^2 - x_l^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2}} +$$

$$+ \frac{x_2^g - x_2^c}{\sqrt{(x_1^g - x_1^c)^2 + (x_2^g - x_2^c)^2}} \frac{x_1^l - x_1^2}{\sqrt{(x_1^2 - x_1^l)^2 + (x_2^2 - x_2^l)^2}}$$

3.7.3 Deslocamentos e Tensões nos Pontos Internos

Os deslocamentos e tensões nos pontos pertencentes ao domínio Ω do problema podem, uma vez que os valores das incógnitas de contorno tenham sido obtidos, ser calculados utilizando-se as identidades de Somigliana (3.6) e (3.8), respectivamente.

Para $\mathbf{X}^d \in \Omega$, a expressão (3.6) será reescrita, na ausência de forças de corpo, como

$$u_i(\mathbf{X}^d) = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{X}^d, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{X}^d, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma$$

e, de modo equivalente, para o contorno discretizado, na forma

$$u_i^d = \sum_{n=1}^{Ne} t_j^n \int_{\Gamma_n} U_{ij}^d d\Gamma_n - \sum_{n=1}^{Ne} u_j^n \int_{\Gamma_n} T_{ij}^d d\Gamma_n$$

Desenvolvendo a notação indicial e reagrupando matricialmente, de maneira análoga ao que foi feito anteriormente, obtém-se

$$\begin{Bmatrix} u_1^d \\ u_2^d \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_n} \begin{bmatrix} U_{11}^d & U_{12}^d \\ U_{21}^d & U_{22}^d \end{bmatrix} d\Gamma_n \begin{Bmatrix} t_1^n \\ t_2^n \end{Bmatrix} \right) - \sum_{n=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_n} \begin{bmatrix} T_{11}^d & T_{12}^d \\ T_{21}^d & T_{22}^d \end{bmatrix} d\Gamma_n \begin{Bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{Bmatrix} \right)$$

Adotando as mesmas notações já utilizadas, resulta

$$\mathbf{u}^d = \sum_{n=1}^{Ne} \int_{\Gamma_n} \mathbf{U}^d d\Gamma_n \mathbf{t}^n - \sum_{n=1}^{Ne} \int_{\Gamma_n} \mathbf{T}^d d\Gamma_n \mathbf{u}^n$$

ou

$$\mathbf{u}^d = \sum_{n=1}^{Ne} \mathbf{G}^{dn} \mathbf{t}^n - \sum_{n=1}^{Ne} \overline{\mathbf{H}}^{dn} \mathbf{u}^n$$

Essa equação relaciona os deslocamentos em um ponto qualquer do domínio com os valores dos deslocamentos e forças de superfície de todo o contorno, e pode ser facilmente avaliada dado que as soluções fundamentais não apresentam singularidades.

Considerando o mesmo ponto $\mathbf{X}^d \in \Omega$, a expressão (3.8) será reescrita, na ausência de forças de corpo, para simplificar, como

$$\sigma_{ij}(\mathbf{X}^d) = \int_{\Gamma} D_{kij}(\mathbf{X}^d, \mathbf{x}) t_k(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij}(\mathbf{X}^d, \mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma$$

e, de modo equivalente, para o contorno discretizado, na forma

$$\sigma_{ij}^d = \sum_{n=1}^{Ne} t_k^n \int_{\Gamma_n} D_{kij}^d d\Gamma_n - \sum_{n=1}^{Ne} u_k^n \int_{\Gamma_n} S_{kij}^d d\Gamma_n$$

Desenvolvendo a notação indicial e reagrupando matricialmente, de maneira análoga ao que foi feito anteriormente, obtém-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^d \\ \sigma_{12}^d \\ \sigma_{21}^d \\ \sigma_{22}^d \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_n} \begin{bmatrix} D_{111}^d & D_{211}^d \\ D_{112}^d & D_{212}^d \\ D_{121}^d & D_{221}^d \\ D_{122}^d & D_{222}^d \end{bmatrix} d\Gamma_n \begin{Bmatrix} t_1^n \\ t_2^n \end{Bmatrix} \right) - \sum_{n=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_n} \begin{bmatrix} S_{111}^d & S_{211}^d \\ S_{112}^d & S_{212}^d \\ S_{121}^d & S_{221}^d \\ S_{122}^d & S_{222}^d \end{bmatrix} d\Gamma_n \begin{Bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{Bmatrix} \right)$$

Entretanto, levando em conta que $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, a expressão anterior simplifica para

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^d \\ \sigma_{12}^d \\ \sigma_{22}^d \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_n} \begin{bmatrix} D_{111}^d & D_{211}^d \\ D_{112}^d & D_{212}^d \\ D_{122}^d & D_{222}^d \end{bmatrix} d\Gamma_n \begin{Bmatrix} t_1^n \\ t_2^n \end{Bmatrix} \right) - \sum_{n=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_n} \begin{bmatrix} S_{111}^d & S_{211}^d \\ S_{112}^d & S_{212}^d \\ S_{122}^d & S_{222}^d \end{bmatrix} d\Gamma_n \begin{Bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{Bmatrix} \right)$$

Adotando as mesmas notações já utilizadas, acrescidas de

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^d \\ \sigma_{12}^d \\ \sigma_{22}^d \end{Bmatrix} \quad \mathbf{D}^d = \begin{bmatrix} D_{111}^d & D_{211}^d \\ D_{112}^d & D_{212}^d \\ D_{122}^d & D_{222}^d \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}^d = \begin{bmatrix} S_{111}^d & S_{211}^d \\ S_{112}^d & S_{212}^d \\ S_{122}^d & S_{222}^d \end{bmatrix}$$

resulta

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \sum_{n=1}^{Ne} \int_{\Gamma_n} \mathbf{D}^d d\Gamma_n \mathbf{t}^n - \sum_{n=1}^{Ne} \int_{\Gamma_n} \mathbf{S}^d d\Gamma_n \mathbf{u}^n$$

Denotando as integrais por

$$\mathbf{D}^{dn} = \int_{\Gamma_n} \mathbf{D}^d d\Gamma_n \quad \mathbf{S}^{dn} = \int_{\Gamma_n} \mathbf{S}^d d\Gamma_n$$

obtém-se

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \sum_{n=1}^{Ne} \mathbf{D}^{dn} \mathbf{t}^n - \sum_{n=1}^{Ne} \mathbf{S}^{dn} \mathbf{u}^n$$

Essa equação relaciona as tensões em um ponto qualquer do domínio com os valores dos deslocamentos e forças de superfície de todo o contorno. Assim

como no cálculo dos deslocamentos nos pontos internos, pode ser facilmente avaliada dado que as soluções fundamentais não apresentam singularidades.

3.8 Elementos Isoparamétricos

Uma contribuição significativa na elaboração do Método de Elementos de Contorno foi a introdução de uma representação paramétrica para a geometria e para as funções incógnitas, similar à formulação isoparamétrica do Método de Elementos Finitos¹². Nesse tipo de formulação, o parâmetro geométrico $\mathbf{x}$, as incógnitas de deslocamento $u_j(\mathbf{x})$ e as incógnitas de forças de superfície $t_j(\mathbf{x})$ são aproximadas utilizando funções de interpolação, da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j = \sum_{\alpha=1}^m N_{\alpha}(\eta) x_j^{\alpha} \\ u_j = \sum_{\alpha=1}^m N_{\alpha}(\eta) u_j^{\alpha} \\ t_j = \sum_{\alpha=1}^m N_{\alpha}(\eta) t_j^{\alpha} \end{array} \right. \quad (3.34)$$

onde N_{α} são polinômios de grau $m-1$ e apresentam, como característica fundamental, o fato de terem valor unitário no ponto α e valor nulo nos demais pontos. Os termos x_j^{α} , u_j^{α} e t_j^{α} são, respectivamente, as coordenadas geométricas, os deslocamentos e as forças de superfície no ponto α . Essas funções de interpolação são definidas em termos de coordenadas adimensionais η , sendo que $-1 \leq \eta \leq 1$, como mostra a Figura 3.12.

¹² LACHAT, J. C. **A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics**. PhD Thesis, University of Southampton, 1975 e LACHAT, J. C., WATSON, J. O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, n. 10, p. 991-1005, 1976.

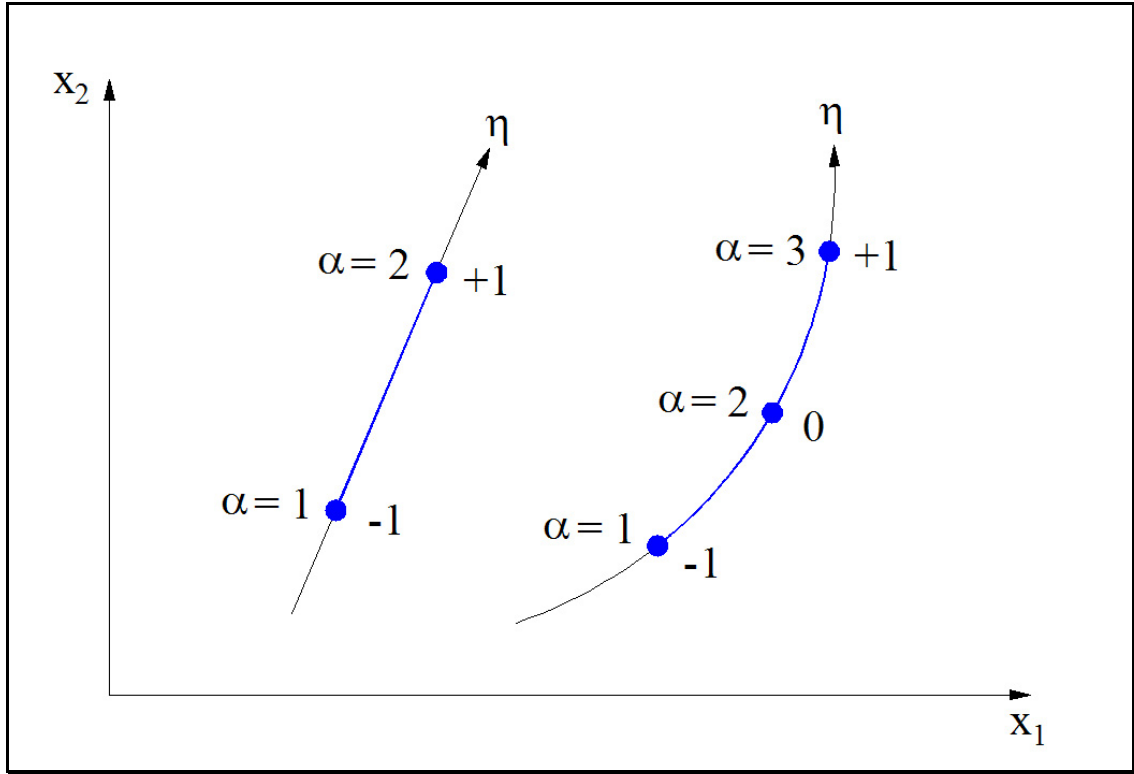


FIGURA 3.12 – Elementos de contorno bidimensionais definidos em termos de um sistema de coordenadas adimensional

Para elementos lineares, ou seja, $m = 2$, tem-se

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\eta) \quad N_2 = \frac{1}{2}(1+\eta) \quad (3.35)$$

e para elementos quadráticos, onde $m = 3$,

$$N_1 = \frac{1}{2}\eta(\eta-1) \quad N_2 = 1-\eta^2 \quad N_3 = \frac{1}{2}\eta(\eta+1) \quad (3.36)$$

Em geral, as funções de interpolação podem ser derivadas dos polinômios Lagrangianos, os quais são definidos, para o grau $m-1$, como

$$N_\alpha(\eta) = \prod_{i=0, i \neq \alpha}^m \frac{\eta - \eta_i}{\eta_\alpha - \eta_i} \quad (3.37)$$

É possível observar que $N_\alpha(\eta)$ é dado pelo produto de m fatores lineares. Os polinômios de Lagrange possuem as seguintes propriedades: para um ponto qualquer β , $N_\alpha(\eta_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, onde $\eta_0 \leq \eta \leq \eta_m$; a soma dos polinômios é igual à unidade, ou seja, $\sum_{\alpha=1}^m N_\alpha(\eta) = 1$; a soma das derivadas primeiras dos polinômios é igual a zero.

Uma formulação discretizada de elementos de contorno é alcançada através da substituição das expressões definidas em (3.34) na equação integral de contorno (3.32), resultando em

$$C_{ij}(\mathbf{x}')u_j(\mathbf{x}') + \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^m P_{ij}^{n\alpha}(\mathbf{x}')u_j^{n\alpha} = \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^m Q_{ij}^{n\alpha}(\mathbf{x}')t_j^{n\alpha} \quad (3.38)$$

onde os coeficientes $P_{ij}^{n\alpha}(\mathbf{x}')$ e $Q_{ij}^{n\alpha}(\mathbf{x}')$ são definidos em termos das integrais das soluções fundamentais sobre os segmentos de contorno Γ_n (com $d\Gamma_n = J_n(\eta)d\eta$, onde $J_n(\eta)$ é o Jacobiano da transformação de coordenadas) da seguinte maneira:

$$P_{ij}^{n\alpha}(\mathbf{x}') = \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) T_{ij}[\mathbf{x}', \mathbf{x}(\eta)] J_n(\eta) d\eta \quad (3.39)$$

$$Q_{ij}^{n\alpha}(\mathbf{x}') = \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) U_{ij}[\mathbf{x}', \mathbf{x}(\eta)] J_n(\eta) d\eta \quad (3.40)$$

O Jacobiano da transformação de coordenadas é dado por¹³

$$J_n(\eta) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} = \sqrt{\left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{dN_\alpha}{d\eta} x_1^{n\alpha}\right)^2 + \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{dN_\alpha}{d\eta} x_2^{n\alpha}\right)^2} \quad (3.41)$$

O método mais direto de solução da equação (3.38) é o método de colocação pontual, ou seja, essa equação é avaliada nos pontos nodais $\mathbf{x}^c$, para $c = 1, 2, \dots, Nn$, onde Nn corresponde ao número total de nós de contorno, gerando, desse modo, um sistema algébrico de equações que pode ser facilmente resolvido, após a aplicação das condições de contorno prescritas do problema, para determinar os valores das incógnitas de deslocamentos e forças de superfície. Assim:

$$C_{ij}^c u_j^c + \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^m P_{ij}^{cn\alpha} u_j^{n\alpha} = \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^m Q_{ij}^{cn\alpha} t_j^{n\alpha} \quad c = 1, 2, \dots, Nn \quad (3.42)$$

O duplo somatório no lado esquerdo de (3.42) deve ser avaliado mantendo-se em mente que alguns nós são compartilhados entre elementos. Uma vez que os valores de deslocamentos são definidos de maneira única nesses nós, esse somatório pode, então, ser combinado em um único somatório sobre todos os nós de contorno, ou seja,

¹³ ALIABADI, M. H. **The Boundary Element Method**, Vol. 2, Applications in Solids and Structures. Chippingham: John Wiley & Sons, 2002. p. 45.

$$C_{ij}^c u_j^c + \sum_{\gamma=1}^{Nn} \bar{H}_{ij}^{c\gamma} u_j^\gamma = \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^m G_{ij}^{cn\alpha} t_j^{n\alpha} \quad c = 1, 2, \dots, Nn \quad (3.43)$$

onde $\bar{H}_{ij}^{c\gamma}$ é formado da combinação de coeficientes $P_{ij}^{cn\alpha}$ e $G_{ij}^{cn\alpha}$ é igual aos coeficientes $Q_{ij}^{cn\alpha}$.

Definindo

$$\begin{cases} H_{ij}^{c\gamma} = \bar{H}_{ij}^{c\gamma} & \text{quando } c \neq \gamma \\ H_{ij}^{c\gamma} = \bar{H}_{ij}^{c\gamma} + C_{ij}^c & \text{quando } c = \gamma \end{cases}$$

resulta

$$\sum_{\gamma=1}^{Nn} H_{ij}^{c\gamma} u_j^\gamma = \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^m G_{ij}^{cn\alpha} t_j^{n\alpha} \quad c = 1, 2, \dots, Nn \quad (3.44)$$

Essa equação pode ser escrita em forma matricial como

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{t}$$

onde $\mathbf{H}$ é uma matriz de dimensões $2Nn \times 2Nn$; $\mathbf{G}$ é uma matriz de dimensões $2Nn \times 2(Ne)(m)$; $\mathbf{u}$ é um vetor com $2Nn$ componentes e $\mathbf{t}$ é um vetor com $2(Ne)(m)$ componentes. Após a substituição das condições de contorno prescritas para o problema, o sistema de equações anterior produz o sistema algébrico

$$\mathbf{A} \mathbf{Y} = \mathbf{F}$$

onde o vetor $\mathbf{Y}$ contém todas as incógnitas (deslocamentos ou forças de superfície) do problema; a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ é formada de colunas de $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$; o vetor $\mathbf{F}$ é formado de colunas de $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ multiplicadas pelas condições de contorno prescritas. Uma vez que esse sistema esteja resolvido, todos os valores das incógnitas de contorno serão conhecidos.

Da expressão (3.44) é possível deduzir que as submatrizes diagonais de $\mathbf{H}$, as quais contêm os coeficientes C_{ij}^c , podem ser avaliadas indiretamente a partir de uma consideração de movimento de corpo rígido, ou seja, se for imposto ao problema somente condições de contorno de deslocamentos, tem-se

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

e, desse modo,

$$H_{ij}^{cc} = - \sum_{\gamma=1, c \neq \gamma}^{Nn} H_{ij}^{c\gamma} \quad (3.45)$$

A expressão (3.45) só é válida para domínios finitos. Para domínios infinitos as condições de regularidade no infinito não são mais satisfeitas, isso porque um movimento de corpo rígido assume

$$u_j(\mathbf{x}) = O(l)$$

Nessa situação, a condição de regularidade torna-se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\rho} [T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) - U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x})] d\Gamma_\rho \right\} = u_j(\mathbf{x}) \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\Gamma_\rho = u_j(\mathbf{x})$$

e a seguinte relação é obtida

$$H_{ij}^{cc} = \delta_{ij} - \sum_{\gamma=1, c \neq \gamma}^{Nn} H_{ij}^{c\gamma} \quad (3.46)$$

3.8.1 Formação do Sistema de Equações

Para ilustrar a aplicação da equação (3.42) far-se-á uso das malhas modelo apresentadas na Figura 3.13 e na Figura 3.14, para os casos de elementos de contorno lineares e quadráticos, respectivamente.

3.8.1.1 Elementos Lineares

Aplicando a equação (3.42), quando o ponto fonte é o Nó 1, resulta

$$\begin{aligned} C_{11}^l u_1^l + C_{12}^l u_2^l + \sum_{n=1}^{Ne=4} (P_{11}^{lnl} u_1^{nl} + P_{12}^{lnl} u_2^{nl} + P_{11}^{ln2} u_1^{n2} + P_{12}^{ln2} u_2^{n2}) = \\ = \sum_{n=1}^{Ne=4} (Q_{11}^{lnl} t_1^{nl} + Q_{12}^{lnl} t_2^{nl} + Q_{11}^{ln2} t_1^{n2} + Q_{12}^{ln2} t_2^{n2}) \end{aligned} \quad (i)$$

$$\begin{aligned} C_{21}^l u_1^l + C_{22}^l u_2^l + \sum_{n=1}^{Ne=4} (P_{21}^{lnl} u_1^{nl} + P_{22}^{lnl} u_2^{nl} + P_{21}^{ln2} u_1^{n2} + P_{22}^{ln2} u_2^{n2}) = \\ = \sum_{n=1}^{Ne=4} (Q_{21}^{lnl} t_1^{nl} + Q_{22}^{lnl} t_2^{nl} + Q_{21}^{ln2} t_1^{n2} + Q_{22}^{ln2} t_2^{n2}) \end{aligned} \quad (ii)$$

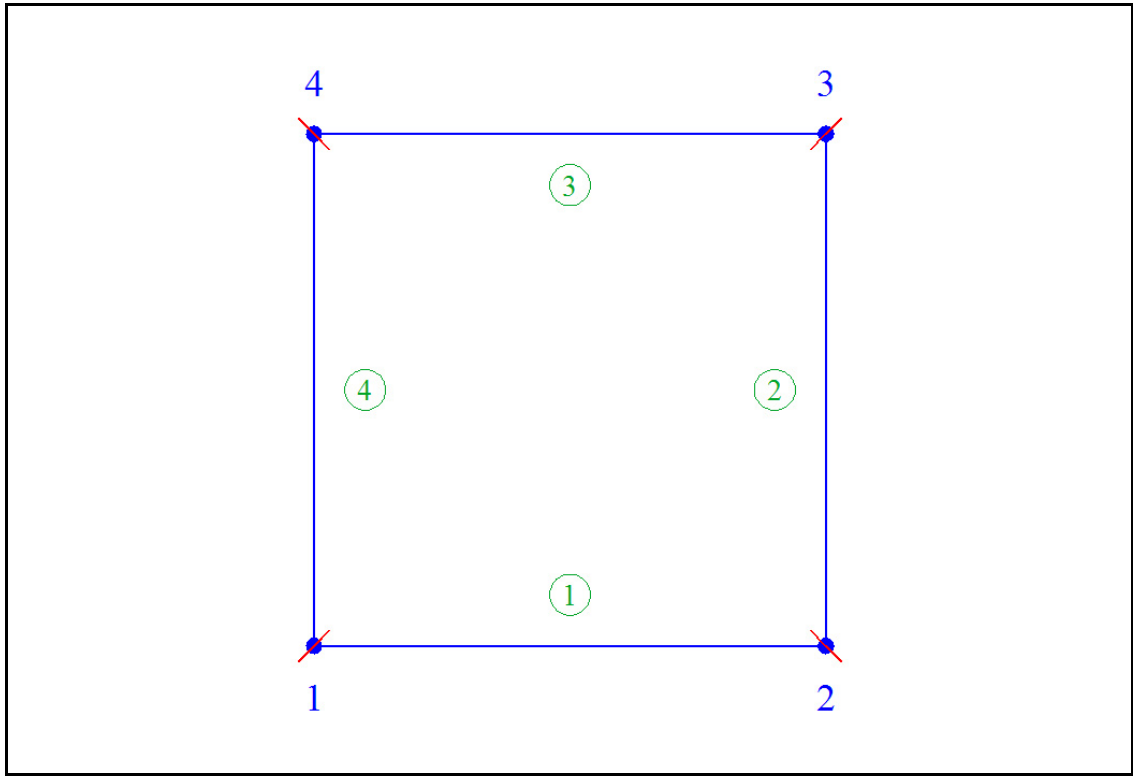


FIGURA 3.13 – Malha modelo formada por elementos de contorno lineares

Em forma matricial, essas equações passam a ser agrupadas do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} C_{11}^I & C_{12}^I \\ C_{21}^I & C_{22}^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} P_{11}^{ln1} & P_{12}^{ln1} & P_{11}^{ln2} & P_{12}^{ln2} \\ P_{21}^{ln1} & P_{22}^{ln1} & P_{21}^{ln2} & P_{22}^{ln2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n1} \\ u_2^{n1} \\ u_1^{n2} \\ u_2^{n2} \end{Bmatrix} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} Q_{11}^{ln1} & Q_{12}^{ln1} & Q_{11}^{ln2} & Q_{12}^{ln2} \\ Q_{21}^{ln1} & Q_{22}^{ln1} & Q_{21}^{ln2} & Q_{22}^{ln2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{n1} \\ t_2^{n1} \\ t_1^{n2} \\ t_2^{n2} \end{Bmatrix} \right)$$

De maneira análoga, para o *Nó 2*,

$$\begin{bmatrix} C_{11}^2 & C_{12}^2 \\ C_{21}^2 & C_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} P_{11}^{2n1} & P_{12}^{2n1} & P_{11}^{2n2} & P_{12}^{2n2} \\ P_{21}^{2n1} & P_{22}^{2n1} & P_{21}^{2n2} & P_{22}^{2n2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n1} \\ u_2^{n1} \\ u_1^{n2} \\ u_2^{n2} \end{Bmatrix} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} Q_{11}^{2n1} & Q_{12}^{2n1} & Q_{11}^{2n2} & Q_{12}^{2n2} \\ Q_{21}^{2n1} & Q_{22}^{2n1} & Q_{21}^{2n2} & Q_{22}^{2n2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{n1} \\ t_2^{n1} \\ t_1^{n2} \\ t_2^{n2} \end{Bmatrix} \right)$$

para o Nó 3,

$$\begin{bmatrix} C_{11}^3 & C_{12}^3 \\ C_{21}^3 & C_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} P_{11}^{3n1} & P_{12}^{3n1} & P_{11}^{3n2} & P_{12}^{3n2} \\ P_{21}^{3n1} & P_{22}^{3n1} & P_{21}^{3n2} & P_{22}^{3n2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n1} \\ u_2^{n1} \\ u_1^{n2} \\ u_2^{n2} \end{Bmatrix} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} Q_{11}^{3n1} & Q_{12}^{3n1} & Q_{11}^{3n2} & Q_{12}^{3n2} \\ Q_{21}^{3n1} & Q_{22}^{3n1} & Q_{21}^{3n2} & Q_{22}^{3n2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{n1} \\ t_2^{n1} \\ t_1^{n2} \\ t_2^{n2} \end{Bmatrix} \right)$$

e para o Nó 4,

$$\begin{bmatrix} C_{11}^4 & C_{12}^4 \\ C_{21}^4 & C_{22}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} P_{11}^{4n1} & P_{12}^{4n1} & P_{11}^{4n2} & P_{12}^{4n2} \\ P_{21}^{4n1} & P_{22}^{4n1} & P_{21}^{4n2} & P_{22}^{4n2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n1} \\ u_2^{n1} \\ u_1^{n2} \\ u_2^{n2} \end{Bmatrix} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} Q_{11}^{4n1} & Q_{12}^{4n1} & Q_{11}^{4n2} & Q_{12}^{4n2} \\ Q_{21}^{4n1} & Q_{22}^{4n1} & Q_{21}^{4n2} & Q_{22}^{4n2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{n1} \\ t_2^{n1} \\ t_1^{n2} \\ t_2^{n2} \end{Bmatrix} \right)$$

ou, de maneira equivalente,

$$\begin{bmatrix} C_{11}^c & C_{12}^c \\ C_{21}^c & C_{22}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^c \\ u_2^c \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} P_{11}^{cn1} & P_{12}^{cn1} & P_{11}^{cn2} & P_{12}^{cn2} \\ P_{21}^{cn1} & P_{22}^{cn1} & P_{21}^{cn2} & P_{22}^{cn2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n1} \\ u_2^{n1} \\ u_1^{n2} \\ u_2^{n2} \end{Bmatrix} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} Q_{11}^{cn1} & Q_{12}^{cn1} & Q_{11}^{cn2} & Q_{12}^{cn2} \\ Q_{21}^{cn1} & Q_{22}^{cn1} & Q_{21}^{cn2} & Q_{22}^{cn2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{n1} \\ t_2^{n1} \\ t_1^{n2} \\ t_2^{n2} \end{Bmatrix} \right) \quad c = 1, 2, \dots, Nn = 4$$

Tendo em mente que alguns nós são compartilhados entre elementos e que os valores dos deslocamentos são definidos de maneira única nesses nós, o somatório à esquerda na expressão anterior pode ser avaliado da seguinte maneira:

$$\sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} P_{11}^{cn1} & P_{12}^{cn1} \\ P_{21}^{cn1} & P_{22}^{cn1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n1} \\ u_2^{n1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{cn2} & P_{12}^{cn2} \\ P_{21}^{cn2} & P_{22}^{cn2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n2} \\ u_2^{n2} \end{Bmatrix} \right)$$

Expandindo o somatório obtém-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P_{11}^{c11} & P_{12}^{c11} \\ P_{21}^{c11} & P_{22}^{c11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{11} \\ u_2^{11} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c12} & P_{12}^{c12} \\ P_{21}^{c12} & P_{22}^{c12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{12} \\ u_2^{12} \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} P_{11}^{c21} & P_{12}^{c21} \\ P_{21}^{c21} & P_{22}^{c21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{21} \\ u_2^{21} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c22} & P_{12}^{c22} \\ P_{21}^{c22} & P_{22}^{c22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{22} \\ u_2^{22} \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} P_{11}^{c31} & P_{12}^{c31} \\ P_{21}^{c31} & P_{22}^{c31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{31} \\ u_2^{31} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c32} & P_{12}^{c32} \\ P_{21}^{c32} & P_{22}^{c32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{32} \\ u_2^{32} \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} P_{11}^{c41} & P_{12}^{c41} \\ P_{21}^{c41} & P_{22}^{c41} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{41} \\ u_2^{41} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c42} & P_{12}^{c42} \\ P_{21}^{c42} & P_{22}^{c42} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{42} \\ u_2^{42} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

As parcelas que apresentam a mesma cor devem ser combinadas, pois possuem nós comuns a um mesmo elemento, isto é: o nó 2 do elemento 1 é o nó 1 do elemento 2; o nó 2 do elemento 2 é o nó 1 do elemento 3; o nó 2 do elemento 3 é o nó 1 do elemento 4; o nó 2 do elemento 4 é o nó 1 do elemento 1. Adotando uma notação do tipo nó $\gamma = 1, 2, \dots, Nn$, ao invés da notação "nó α do elemento n ", é possível agrupar esses termos do seguinte modo:

$$\sum_{\gamma=1}^{Nn=4} \left(\begin{bmatrix} \bar{H}_{11}^{c\gamma} & \bar{H}_{12}^{c\gamma} \\ \bar{H}_{21}^{c\gamma} & \bar{H}_{22}^{c\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{\gamma} \\ u_2^{\gamma} \end{Bmatrix} \right)$$

A equação geral pode, agora, ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} C_{11}^c & C_{12}^c \\ C_{21}^c & C_{22}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^c \\ u_2^c \end{Bmatrix} + \sum_{\gamma=1}^{Nn=4} \left(\begin{bmatrix} \bar{H}_{11}^{c\gamma} & \bar{H}_{12}^{c\gamma} \\ \bar{H}_{21}^{c\gamma} & \bar{H}_{22}^{c\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{\gamma} \\ u_2^{\gamma} \end{Bmatrix} \right) = \\ & = \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} G_{11}^{cn1} & G_{12}^{cn1} & G_{11}^{cn2} & G_{12}^{cn2} \\ G_{21}^{cn1} & G_{22}^{cn1} & G_{21}^{cn2} & G_{22}^{cn2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{n1} \\ t_2^{n1} \\ t_1^{n2} \\ t_2^{n2} \end{Bmatrix} \right) \quad c = 1, 2, \dots, Nn = 4 \end{aligned}$$

onde $G_{ij}^{cna} = Q_{ij}^{cna}$.

Agrupando todos os deslocamentos incógnitos, resulta

$$\sum_{\gamma=1}^{Nn=4} \left(\begin{bmatrix} H_{11}^{c\gamma} & H_{12}^{c\gamma} \\ H_{21}^{c\gamma} & H_{22}^{c\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^\gamma \\ u_2^\gamma \end{Bmatrix} \right) = \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} G_{11}^{cn1} & G_{12}^{cn1} & G_{11}^{cn2} & G_{12}^{cn2} \\ G_{21}^{cn1} & G_{22}^{cn1} & G_{21}^{cn2} & G_{22}^{cn2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{n1} \\ t_2^{n1} \\ t_1^{n2} \\ t_2^{n2} \end{Bmatrix} \right) \quad c = 1, 2, \dots, Nn = 4$$

A equação anterior pode ser reescrita em forma matricial como

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}$$

onde $\mathbf{H}$ é uma matriz de dimensões $2Nn \times 2Nn$; $\mathbf{G}$ é uma matriz de dimensões $2Nn \times 4Ne$; $\mathbf{u}$ é um vetor com $2Nn$ componentes e $\mathbf{t}$ é um vetor com $4Ne$ componentes.

3.8.1.2 Elementos Quadráticos

Aplicando a equação (3.42), quando o ponto fonte é o Nó 1, resulta

$$\begin{aligned} C_{11}^l u_1^l + C_{12}^l u_2^l + \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(P_{11}^{ln1} u_1^{n1} + P_{12}^{ln1} u_2^{n1} + P_{11}^{ln2} u_1^{n2} + P_{12}^{ln2} u_2^{n2} + P_{11}^{ln3} u_1^{n3} + P_{12}^{ln3} u_2^{n3} \right) = \\ = \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(Q_{11}^{ln1} t_1^{n1} + Q_{12}^{ln1} t_2^{n1} + Q_{11}^{ln2} t_1^{n2} + Q_{12}^{ln2} t_2^{n2} + Q_{11}^{ln3} t_1^{n3} + Q_{12}^{ln3} t_2^{n3} \right) \end{aligned} \quad (i)$$

$$\begin{aligned} C_{21}^l u_1^l + C_{22}^l u_2^l + \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(P_{21}^{ln1} u_1^{n1} + P_{22}^{ln1} u_2^{n1} + P_{21}^{ln2} u_1^{n2} + P_{22}^{ln2} u_2^{n2} + P_{21}^{ln3} u_1^{n3} + P_{22}^{ln3} u_2^{n3} \right) = \\ = \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(Q_{21}^{ln1} t_1^{n1} + Q_{22}^{ln1} t_2^{n1} + Q_{21}^{ln2} t_1^{n2} + Q_{22}^{ln2} t_2^{n2} + Q_{21}^{ln3} t_1^{n3} + Q_{22}^{ln3} t_2^{n3} \right) \end{aligned} \quad (ii)$$

Procedendo de maneira análoga para os demais nós de contorno, é possível resumir as equações resultantes numa única equação equivalente, dada por

$$\begin{bmatrix} C_{11}^c & C_{12}^c \\ C_{21}^c & C_{22}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^c \\ u_2^c \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} P_{11}^{cn1} & P_{12}^{cn1} & P_{11}^{cn2} & P_{12}^{cn2} & P_{11}^{cn3} & P_{12}^{cn3} \\ P_{21}^{cn1} & P_{22}^{cn1} & P_{21}^{cn2} & P_{22}^{cn2} & P_{21}^{cn3} & P_{22}^{cn3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n1} \\ u_2^{n1} \\ u_1^{n2} \\ u_2^{n2} \\ u_1^{n3} \\ u_2^{n3} \end{Bmatrix} \right) =$$

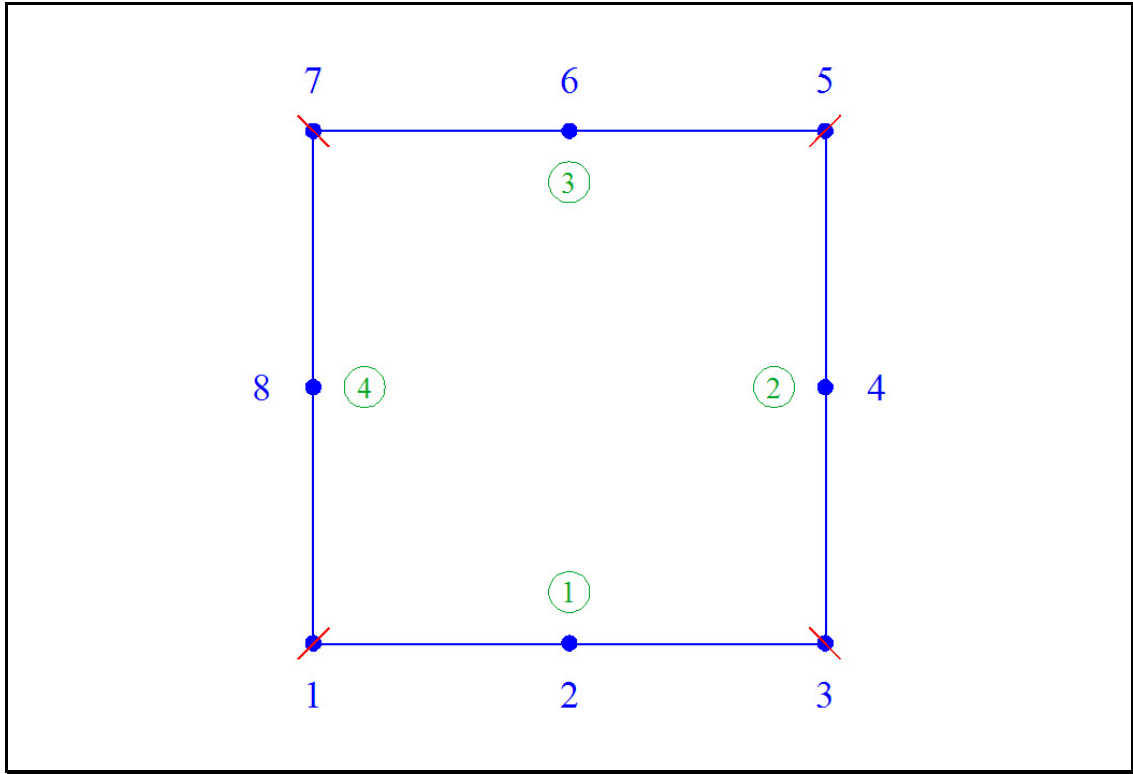


FIGURA 3.14 – Malha modelo formada por elementos de contorno quadráticos

$$= \sum_{n=1}^{Ne=4} \left[\begin{matrix} Q_{11}^{cn1} & Q_{12}^{cn1} & Q_{11}^{cn2} & Q_{12}^{cn2} & Q_{11}^{cn3} & Q_{12}^{cn3} \\ Q_{21}^{cn1} & Q_{22}^{cn1} & Q_{21}^{cn2} & Q_{22}^{cn2} & Q_{21}^{cn3} & Q_{22}^{cn3} \end{matrix} \right] \begin{Bmatrix} t_1^{n1} \\ t_2^{n1} \\ t_1^{n2} \\ t_2^{n2} \\ t_1^{n3} \\ t_2^{n3} \end{Bmatrix} \quad c = 1, 2, \dots, Nn = 8$$

Tendo em mente que alguns nós são compartilhados entre elementos e que os valores dos deslocamentos são definidos de maneira única nesses nós, o somatório a esquerda na expressão anterior pode ser avaliado da seguinte maneira:

$$\sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} P_{11}^{cn1} & P_{12}^{cn1} \\ P_{21}^{cn1} & P_{22}^{cn1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n1} \\ u_2^{n1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{cn2} & P_{12}^{cn2} \\ P_{21}^{cn2} & P_{22}^{cn2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n2} \\ u_2^{n2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{cn3} & P_{12}^{cn3} \\ P_{21}^{cn3} & P_{22}^{cn3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n3} \\ u_2^{n3} \end{Bmatrix} \right)$$

Expandindo o somatório obtém-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P_{11}^{c11} & P_{12}^{c11} \\ P_{21}^{c11} & P_{22}^{c11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{11} \\ u_2^{11} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c12} & P_{12}^{c12} \\ P_{21}^{c12} & P_{22}^{c12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{12} \\ u_2^{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c13} & P_{12}^{c13} \\ P_{21}^{c13} & P_{22}^{c13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{13} \\ u_2^{13} \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} P_{11}^{c21} & P_{12}^{c21} \\ P_{21}^{c21} & P_{22}^{c21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{21} \\ u_2^{21} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c22} & P_{12}^{c22} \\ P_{21}^{c22} & P_{22}^{c22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{22} \\ u_2^{22} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c23} & P_{12}^{c23} \\ P_{21}^{c23} & P_{22}^{c23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{23} \\ u_2^{23} \end{Bmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} P_{11}^{c31} & P_{12}^{c31} \\ P_{21}^{c31} & P_{22}^{c31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{31} \\ u_2^{31} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c32} & P_{12}^{c32} \\ P_{21}^{c32} & P_{22}^{c32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{32} \\ u_2^{32} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c33} & P_{12}^{c33} \\ P_{21}^{c33} & P_{22}^{c33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{33} \\ u_2^{33} \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} P_{11}^{c41} & P_{12}^{c41} \\ P_{21}^{c41} & P_{22}^{c41} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{41} \\ u_2^{41} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c42} & P_{12}^{c42} \\ P_{21}^{c42} & P_{22}^{c42} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{42} \\ u_2^{42} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c43} & P_{12}^{c43} \\ P_{21}^{c43} & P_{22}^{c43} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{43} \\ u_2^{43} \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

As parcelas que apresentam a mesma cor devem ser combinadas, pois possuem nós comuns a um mesmo elemento, isto é: o nó 3 do elemento 1 é o nó 1 do elemento 2; o nó 3 do elemento 2 é o nó 1 elemento 3; o nó 3 do elemento 3 é o nó 1 do elemento 4; o nó 3 do elemento 4 é o nó 1 do elemento 1. Adotando uma notação do tipo nó $\gamma = 1, 2, \dots, Nn$, ao invés da notação "nó α do elemento n ", é possível agrupar esses termos do seguinte modo:

$$\sum_{\gamma=1}^{Nn=8} \left(\begin{bmatrix} \bar{H}_{11}^{c\gamma} & \bar{H}_{12}^{c\gamma} \\ \bar{H}_{21}^{c\gamma} & \bar{H}_{22}^{c\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^\gamma \\ u_2^\gamma \end{Bmatrix} \right)$$

A equação geral pode, agora, ser reescrita como

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} C_{11}^c & C_{12}^c \\ C_{21}^c & C_{22}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^c \\ u_2^c \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{Nn=8} \left(\begin{bmatrix} \bar{H}_{11}^{c\gamma} & \bar{H}_{12}^{c\gamma} \\ \bar{H}_{21}^{c\gamma} & \bar{H}_{22}^{c\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^\gamma \\ u_2^\gamma \end{Bmatrix} \right) = \\
& = \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} Q_{11}^{cn1} & Q_{12}^{cn1} & Q_{11}^{cn2} & Q_{12}^{cn2} & Q_{11}^{cn3} & Q_{12}^{cn3} \\ Q_{21}^{cn1} & Q_{22}^{cn1} & Q_{21}^{cn2} & Q_{22}^{cn2} & Q_{21}^{cn3} & Q_{22}^{cn3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{n1} \\ t_2^{n1} \\ t_1^{n2} \\ t_2^{n2} \\ t_1^{n3} \\ t_2^{n3} \end{Bmatrix} \right) \quad c = 1, 2, \dots, Nn = 8
\end{aligned}$$

onde $G_{ij}^{cn\alpha} = Q_{ij}^{cn\alpha}$.

Agrupando todos os deslocamentos incógnitos, resulta

$$\begin{aligned}
& \sum_{\gamma=1}^{Nn=8} \left(\begin{bmatrix} H_{11}^{c\gamma} & H_{12}^{c\gamma} \\ H_{21}^{c\gamma} & H_{22}^{c\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^\gamma \\ u_2^\gamma \end{Bmatrix} \right) = \sum_{n=1}^{Ne=4} \left(\begin{bmatrix} Q_{11}^{cn1} & Q_{12}^{cn1} & Q_{11}^{cn2} & Q_{12}^{cn2} & Q_{11}^{cn3} & Q_{12}^{cn3} \\ Q_{21}^{cn1} & Q_{22}^{cn1} & Q_{21}^{cn2} & Q_{22}^{cn2} & Q_{21}^{cn3} & Q_{22}^{cn3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{n1} \\ t_2^{n1} \\ t_1^{n2} \\ t_2^{n2} \\ t_1^{n3} \\ t_2^{n3} \end{Bmatrix} \right) \\
& c = 1, 2, \dots, Nn = 8
\end{aligned}$$

A equação anterior pode ser reescrita em forma matricial como

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}$$

onde $\mathbf{H}$ é uma matriz de dimensões $2Nn \times 2Nn$; $\mathbf{G}$ é uma matriz de dimensões $2Nn \times 6Ne$; $\mathbf{u}$ é um vetor com $2Nn$ componentes e $\mathbf{t}$ é um vetor com $6Ne$ componentes.

3.8.2 Integração

A avaliação dos coeficientes $P_{ij}^{cn\alpha}$ e $Q_{ij}^{cn\alpha}$, dados pelas expressões (3.39) e (3.40), respectivamente, quando o ponto fonte c não coincide com nenhum dos nós do elemento n , não apresenta maiores dificuldades e pode ser alcançada através do processo de quadratura de Gauss convencional. No entanto, quando o ponto fonte c é um dos nós do elemento n , as expressões (3.39) e (3.40) apresentarão singularidades e precisam ser avaliadas de maneira ligeiramente diferente. As próximas seções descrevem o processo matemático necessário para contornar essa dificuldade, tanto para elementos lineares quanto para elementos quadráticos.

3.8.2.1 Elementos Lineares – Coeficientes $Q_{ij}^{cn\alpha}$

A expressão (3.40) pode ser reescrita como

$$Q_{ij}^{cn\alpha} = \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) U_{ij}^{cn}[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta \quad (3.47)$$

Para problemas lineares, as funções de interpolação são dadas por

$$N_1(\eta) = \frac{I}{2}(I - \eta) \quad N_2(\eta) = \frac{I}{2}(I + \eta) \quad (3.48)$$

e a geometria do contorno, por sua vez, é dada por

$$x_j = \sum_{\alpha=1}^2 N_{\alpha}(\eta) x_j^{\alpha} \quad j = 1, 2 \quad (3.49)$$

Desse modo, as coordenadas de um ponto qualquer no contorno são escritas como

$$\begin{cases} x_1^g = N_1(\eta)x_1^I + N_2(\eta)x_1^2 \\ x_2^g = N_1(\eta)x_2^I + N_2(\eta)x_2^2 \end{cases} \quad (3.50)$$

Substituindo (3.48) em (3.50) resulta

$$\begin{cases} x_I^g = \frac{I}{2} \eta (x_I^2 - x_I^l) + \frac{I}{2} (x_I^2 + x_I^l) \\ x_2^g = \frac{I}{2} \eta (x_2^2 - x_2^l) + \frac{I}{2} (x_2^2 + x_2^l) \end{cases} \quad (3.51)$$

Utilizando (3.51) em (3.41) é possível determinar $J_n(\eta)$, logo

$$J_n(\eta) = \sqrt{\left(\frac{dx_I}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} = \sqrt{\left[\frac{I}{2} (x_I^2 - x_I^l)\right]^2 + \left[\frac{I}{2} (x_2^2 - x_2^l)\right]^2} = \frac{I}{2} L \quad (3.52)$$

onde L é o comprimento do elemento n que está sendo integrado.

Voltando à expressão (3.47), a solução fundamental é expressa por

$$U_{ij}^{cn}[r(\eta)] = \frac{I}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{I}{r(\eta)}\right) \delta_{ij} + r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) \right] \quad (3.53)$$

ou, então,

$$U_{ij}^{cn}[r(\eta)] = \frac{(3-4\nu)}{8\pi\mu(1-\nu)} \ln\left(\frac{I}{r(\eta)}\right) \delta_{ij} + \frac{I}{8\pi\mu(1-\nu)} r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) \quad (3.54)$$

Definindo

$$CTE1 = \frac{(3-4\nu)}{8\pi\mu(1-\nu)} \quad CTE2 = \frac{I}{8\pi\mu(1-\nu)} \quad (3.55)$$

a solução fundamental torna-se

$$U_{ij}^{cn}[r(\eta)] = CTE1 \ln\left(\frac{I}{r(\eta)}\right) \delta_{ij} + CTE2 r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) \quad (3.56)$$

e, desse modo, a expressão (3.47) é reescrita na forma

$$Q_{ij}^{cn\alpha} = CTE1 \int_{-I}^{+I} N_\alpha(\eta) \ln\left(\frac{I}{r(\eta)}\right) \delta_{ij} d\eta \frac{L}{2} + CTE2 \int_{-I}^{+I} N_\alpha(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) d\eta \frac{L}{2} \quad (3.57)$$

Na determinação dos termos $r(\eta)$ e $r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta)$, dois casos devem ser considerados, de acordo com a posição do ponto fonte c dentro do elemento n , conforme ilustra a Figura 3.15: o *Caso 1* corresponde ao ponto fonte localizado no nó inicial do elemento; o *Caso 2* corresponde ao ponto fonte localizado no nó final do elemento.

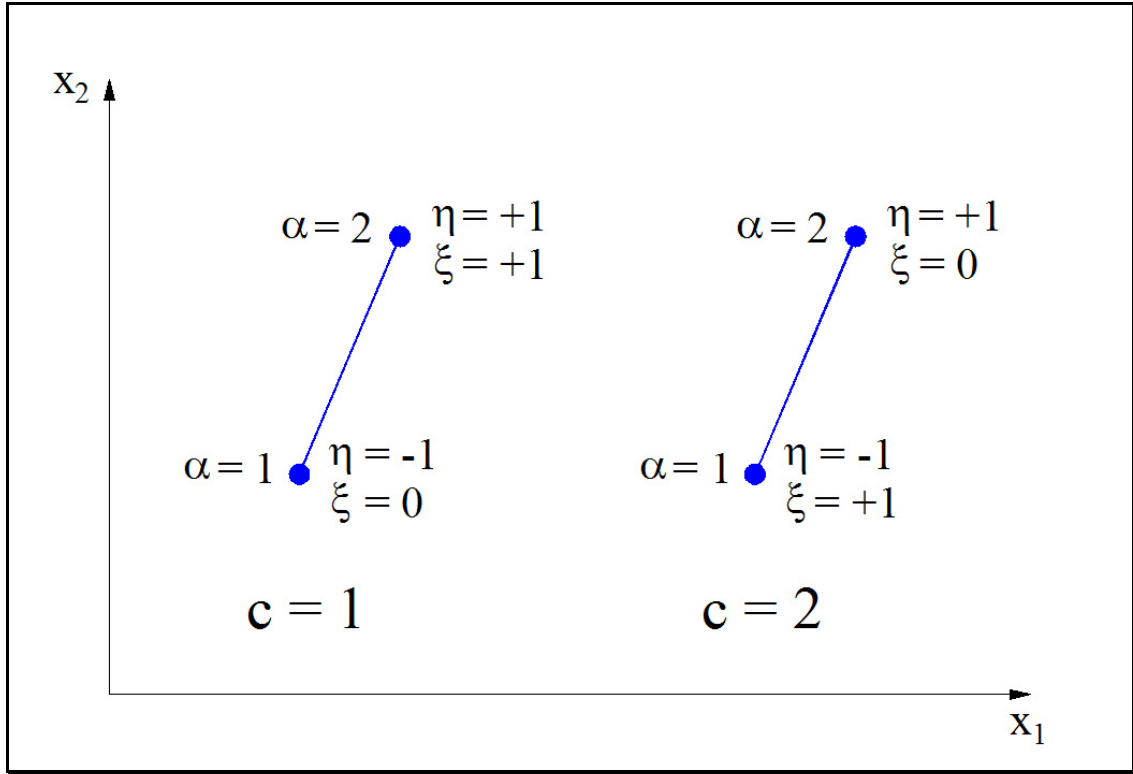


FIGURA 3.15 – Relação entre os sistemas de coordenadas adimensionais para elementos de contorno lineares conforme a posição do ponto fonte dentro do elemento

Caso 1:

$$r(\eta) = \sqrt{(x_1^g - x_1^l)^2 + (x_2^g - x_2^l)^2}$$

$$\begin{cases} (x_1^g - x_1^l) = \frac{L}{2}(1+\eta)(x_1^2 - x_1^l) \\ (x_2^g - x_2^l) = \frac{L}{2}(1+\eta)(x_2^2 - x_2^l) \end{cases}$$

$$r(\eta) = \frac{L}{2}(1+\eta)\sqrt{(x_1^2 - x_1^l)^2 + (x_2^2 - x_2^l)^2} = \frac{L}{2}(1+\eta) \quad (3.58)$$

$$r_{,1}(\eta)r_{,1}(\eta) = \frac{(x_1^g - x_1^l)(x_1^g - x_1^l)}{r(\eta)r(\eta)} = \frac{(x_1^2 - x_1^l)^2}{L^2} \quad (3.59)$$

$$r_{,2}(\eta)r_{,2}(\eta) = \frac{(x_2^g - x_2^l)(x_2^g - x_2^l)}{r(\eta)r(\eta)} = \frac{(x_2^2 - x_2^l)^2}{L^2} \quad (3.60)$$

$$r_{,1}(\eta)r_{,2}(\eta) = \frac{(x_1^g - x_1^l)(x_2^g - x_2^l)}{r(\eta)r(\eta)} = \frac{(x_1^2 - x_1^l)(x_2^2 - x_2^l)}{L^2} \quad (3.61)$$

Caso 2:

$$r(\eta) = \sqrt{(x_l^g - x_l^2)^2 + (x_2^g - x_2^2)^2}$$

$$\begin{cases} (x_l^g - x_l^2) = \frac{L}{2}(1-\eta)(x_l^l - x_l^2) \\ (x_2^g - x_2^2) = \frac{L}{2}(1-\eta)(x_2^l - x_2^2) \end{cases}$$

$$r(\eta) = \frac{L}{2}(1-\eta)\sqrt{(x_l^l - x_l^2)^2 + (x_2^l - x_2^2)^2} = \frac{L}{2}(1-\eta) \quad (3.62)$$

$$r_{,1}(\eta)r_{,1}(\eta) = \frac{(x_l^g - x_l^2)(x_l^g - x_l^2)}{r(\eta)r(\eta)} = \frac{(x_l^l - x_l^2)^2}{L^2} \quad (3.63)$$

$$r_{,2}(\eta)r_{,2}(\eta) = \frac{(x_2^g - x_2^2)(x_2^g - x_2^2)}{r(\eta)r(\eta)} = \frac{(x_2^l - x_2^2)^2}{L^2} \quad (3.64)$$

$$r_{,1}(\eta)r_{,2}(\eta) = \frac{(x_l^g - x_l^2)(x_2^g - x_2^2)}{r(\eta)r(\eta)} = \frac{(x_l^l - x_l^2)(x_2^l - x_2^2)}{L^2} \quad (3.65)$$

Substituindo esses resultados na equação (3.57) resulta

Caso 1:

$$Q_{ij}^{cn\alpha} = -CTE1 \int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) \ln\left(\frac{L}{2}(1+\eta)\right) \delta_{ij} d\eta \frac{L}{2} + CTE2 r_{,i} r_{,j} \int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) d\eta \frac{L}{2}$$

$$Q_{ij}^{cn\alpha} = -CTE1 \left[\int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) \ln(L) \delta_{ij} d\eta + \int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) \ln\left(\frac{1+\eta}{2}\right) \delta_{ij} d\eta \right] \frac{L}{2} +$$

$$+ CTE2 r_{,i} r_{,j} \int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) d\eta \frac{L}{2}$$

$$Q_{ij}^{cn\alpha} = -CTE1 \int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) \ln\left(\frac{1+\eta}{2}\right) \delta_{ij} d\eta \frac{L}{2} - CTE1 \ln(L) \int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) \delta_{ij} d\eta \frac{L}{2} +$$

$$+ CTE2 r_{,i} r_{,j} \int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) d\eta \frac{L}{2} \quad (3.66)$$

Caso 2:

$$Q_{ij}^{cn\alpha} = -CTE1 \int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) \ln\left(\frac{L}{2}(1-\eta)\right) \delta_{ij} d\eta \frac{L}{2} + CTE2 r_{,i} r_{,j} \int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) d\eta \frac{L}{2}$$

$$Q_{ij}^{cn\alpha} = -CTE1 \left[\int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) \ln(L) \delta_{ij} d\eta + \int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) \ln\left(\frac{1-\eta}{2}\right) \delta_{ij} d\eta \right] \frac{L}{2} +$$

$$+ CTE2 r_{,i} r_{,j} \int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) d\eta \frac{L}{2}$$

$$\begin{aligned}
Q_{ij}^{cna} = & -CTE1 \int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) \ln\left(\frac{1-\eta}{2}\right) \delta_{ij} d\eta \frac{L}{2} - CTE1 \ln(L) \int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) \delta_{ij} d\eta \frac{L}{2} + \\
& + CTE2 r_{,i} r_{,j} \int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) d\eta \frac{L}{2}
\end{aligned} \quad (3.67)$$

As singularidades na primeira integral em (3.66) e na primeira integral em (3.67) podem ser contornadas através das transformações de coordenadas apresentadas na Figura 3.15, ou seja,

Caso 1:

$$c = 1 \Rightarrow \xi = \frac{1+\eta}{2} \quad (3.68)$$

Caso 2:

$$c = 2 \Rightarrow \xi = \frac{1-\eta}{2} \quad (3.69)$$

Consequentemente, novas funções de interpolação serão obtidas para cada caso da posição do ponto fonte, isto é,

Caso 1:

$$N_1(\xi) = (1 - \xi) \quad N_2(\xi) = \xi \quad (3.70)$$

Caso 2:

$$N_1(\xi) = \xi \quad N_2(\xi) = (1 - \xi) \quad (3.71)$$

Também são encontradas novas relações (3.51) e (3.52) para cada caso da posição do ponto fonte.

Caso 1:

$$\begin{cases} x_1^g = \xi (x_1^2 - x_1^l) + x_1^l \\ x_2^g = \xi (x_2^2 - x_2^l) + x_2^l \end{cases} \quad (3.72)$$

$$J_n(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} = \sqrt{(x_1^2 - x_1^l)^2 + (x_2^2 - x_2^l)^2} = L \quad (3.73)$$

Caso 2:

$$\begin{cases} x_1^g = -\xi (x_1^2 - x_1^l) + x_1^2 \\ x_2^g = -\xi (x_2^2 - x_2^l) + x_2^2 \end{cases} \quad (3.74)$$

$$J_n(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} = \sqrt{(x_1^2 - x_1^l)^2 + (x_2^2 - x_2^l)^2} = L \quad (3.75)$$

Substituindo (3.68) e (3.69) em (3.66) e (3.67), respectivamente, obtém-se

Caso 1:

$$\begin{aligned}
 Q_{ij}^{cn\alpha} = & -CTE1 \int_0^{+1} N_\alpha(\xi) \ln(\xi) \delta_{ij} 2d\xi \frac{L}{2} - CTE1 \ln(L) \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) \delta_{ij} d\eta \frac{L}{2} + \\
 & + CTE2 r_{,i} r_{,j} \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) d\eta \frac{L}{2} \\
 Q_{ij}^{cn\alpha} = & CTE1 \int_0^{+1} N_\alpha(\xi) \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) \delta_{ij} d\xi L - CTE1 \ln(L) \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) \delta_{ij} d\eta \frac{L}{2} + \\
 & + CTE2 r_{,i} r_{,j} \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) d\eta \frac{L}{2}
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Caso 2:

$$\begin{aligned}
 Q_{ij}^{cn\alpha} = & -CTE1 \int_{+1}^0 N_\alpha(\xi) \ln(\xi) \delta_{ij} (-2)d\xi \frac{L}{2} - CTE1 \ln(L) \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) \delta_{ij} d\eta \frac{L}{2} + \\
 & + CTE2 r_{,i} r_{,j} \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) d\eta \frac{L}{2} \\
 Q_{ij}^{cn\alpha} = & CTE1 \int_0^{+1} N_\alpha(\xi) \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) \delta_{ij} d\xi L - CTE1 \ln(L) \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) \delta_{ij} d\eta \frac{L}{2} + \\
 & + CTE2 r_{,i} r_{,j} \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) d\eta \frac{L}{2}
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

A primeira integral em (3.76) e a primeira integral em (3.77) são avaliadas por meio de uma quadratura de Gauss modificada, denominada quadratura de Gauss logarítmica (para valores calculados e tabelados de pontos e pesos de Gauss para a quadratura Gaussiana logarítmica ver, por exemplo, BREBBIA e DOMINGUEZ¹⁴). Essas integrais poderiam, alternativamente, ser calculadas analiticamente.

3.8.2.2 Elementos Lineares – Coeficientes $P_{ij}^{cn\alpha}$

A expressão (3.39) pode ser reescrita como

$$P_{ij}^{cn\alpha} = \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) T_{ij}^{cn}[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta \tag{3.78}$$

sendo que

¹⁴ BREBBIA, C. A., DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements**, An Introductory Course. Boston: Computational Mechanics Publications, 1989, p. 271.

$$T_{ij}^{cn}[r(\eta)] = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(\eta)} \left\{ \frac{\partial r(\eta)}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] + (1-2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right\}$$

ou

$$T_{ij}^{cn}[r(\eta)] = \frac{1}{r(\eta)} f[r(\eta)]$$

onde $f[r(\eta)]$ é, nitidamente, não singular.

Verificando o comportamento da expressão (3.78), para cada caso da posição do ponto fonte, observa-se:

Caso 1:

$$\begin{aligned} P_{ij}^{cn1} &= \int_{-l}^{+l} N_l(\eta) \frac{1}{r(\eta)} f[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \int_{-l}^{+l} \left(\frac{1}{2}(1-\eta) \right) \frac{1}{\left(\frac{1}{2}L(1+\eta) \right)} f[r(\eta)] \left(\frac{1}{2}L \right) d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} \frac{1-\eta}{1+\eta} f[r(\eta)] d\eta \\ P_{ij}^{cn2} &= \int_{-l}^{+l} N_2(\eta) \frac{1}{r(\eta)} f[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \int_{-l}^{+l} \left(\frac{1}{2}(1+\eta) \right) \frac{1}{\left(\frac{1}{2}L(1+\eta) \right)} f[r(\eta)] \left(\frac{1}{2}L \right) d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} f[r(\eta)] d\eta \end{aligned}$$

(Conclusão: apenas a primeira expressão apresenta singularidade).

Caso 2:

$$\begin{aligned} P_{ij}^{cn1} &= \int_{-l}^{+l} N_l(\eta) \frac{1}{r(\eta)} f[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \int_{-l}^{+l} \left(\frac{1}{2}(1-\eta) \right) \frac{1}{\left(\frac{1}{2}L(1-\eta) \right)} f[r(\eta)] \left(\frac{1}{2}L \right) d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} f[r(\eta)] d\eta \\ P_{ij}^{cn2} &= \int_{-l}^{+l} N_2(\eta) \frac{1}{r(\eta)} f[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \int_{-l}^{+l} \left(\frac{1}{2}(1+\eta) \right) \frac{1}{\left(\frac{1}{2}L(1-\eta) \right)} f[r(\eta)] \left(\frac{1}{2}L \right) d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} \frac{1+\eta}{1-\eta} f[r(\eta)] d\eta \end{aligned}$$

(Conclusão: apenas a segunda expressão apresenta singularidade).

Os coeficientes $P_{ij}^{cn\alpha}$ singulares são exatamente os coeficientes que compõem as submatrizes diagonais de $\mathbf{H}$, as quais são calculadas indiretamente

através de consideração de movimento de corpo rígido, como discutido anteriormente. A conclusão é que, para efeitos de implementação computacional, a avaliação dos coeficientes $P_{ij}^{cn\alpha}$, quando c é um dos nós do elemento n , pode ser feita através da quadratura de Gauss convencional, pois os coeficientes singulares, calculados imprecisamente através desse processo, são desprezados e recalculados em função dos demais coeficientes, resultantes de integrações não singulares e, portanto, precisamente avaliados.

3.8.2.3 Elementos Quadráticos – Coeficientes $Q_{ij}^{cn\alpha}$

A expressão (3.40) pode ser reescrita como

$$Q_{ij}^{cn\alpha} = \int_{-l}^{+l} N_{\alpha}(\eta) U_{ij}^{cn} [r(\eta)] J_n(\eta) d\eta \quad (3.79)$$

Para problemas quadráticos, as funções de interpolação são dadas por

$$N_1 = \frac{l}{2} \eta (\eta - l) \quad N_2 = 1 - \eta^2 \quad N_3 = \frac{l}{2} \eta (\eta + l) \quad (3.80)$$

e a geometria do contorno, por sua vez, é dada por

$$x_j = \sum_{\alpha=1}^3 N_{\alpha}(\eta) x_j^{\alpha} \quad j = 1, 2 \quad (3.81)$$

Desse modo, as coordenadas de um ponto qualquer no contorno são escritas como

$$\begin{cases} x_1^g = N_1(\eta) x_1^l + N_2(\eta) x_1^2 + N_3(\eta) x_1^3 \\ x_2^g = N_1(\eta) x_2^l + N_2(\eta) x_2^2 + N_3(\eta) x_2^3 \end{cases} \quad (3.82)$$

Substituindo (3.80) em (3.82) resulta

$$\begin{cases} x_1^g = \frac{l}{2} \eta^2 (x_1^l - 2x_1^2 + x_1^3) + \frac{l}{2} \eta (x_1^3 - x_1^l) + x_1^2 \\ x_2^g = \frac{l}{2} \eta^2 (x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + \frac{l}{2} \eta (x_2^3 - x_2^l) + x_2^2 \end{cases} \quad (3.83)$$

Utilizando (3.83) em (3.41) é possível determinar $J_n(\eta)$, logo

$$\begin{aligned} J_n(\eta) &= \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left[\eta (x_1^l - 2x_1^2 + x_1^3) + \frac{l}{2} (x_1^3 - x_1^l)\right]^2 + \left[\eta (x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + \frac{l}{2} (x_2^3 - x_2^l)\right]^2} \quad (3.84) \end{aligned}$$

Voltando à expressão (3.79), a solução fundamental é expressa por

$$U_{ij}^{cn}[r(\eta)] = \frac{I}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{I}{r(\eta)}\right) \delta_{ij} + r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) \right] \quad (3.85)$$

ou, então,

$$U_{ij}^{cn}[r(\eta)] = \frac{(3-4\nu)}{8\pi\mu(1-\nu)} \ln\left(\frac{I}{r(\eta)}\right) \delta_{ij} + \frac{I}{8\pi\mu(1-\nu)} r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) \quad (3.86)$$

Definindo novamente

$$CTE1 = \frac{(3-4\nu)}{8\pi\mu(1-\nu)} \quad CTE2 = \frac{I}{8\pi\mu(1-\nu)} \quad (3.87)$$

a solução fundamental torna-se

$$U_{ij}^{cn}[r(\eta)] = CTE1 \ln\left(\frac{I}{r(\eta)}\right) \delta_{ij} + CTE2 r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) \quad (3.88)$$

e, desse modo, a expressão (3.79) é reescrita na forma

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{cna} = & CTE1 \int_{-l}^{+l} N_{\alpha}(\eta) \ln\left(\frac{I}{r(\eta)}\right) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta + \\ & + CTE2 \int_{-l}^{+l} N_{\alpha}(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (3.89)$$

Na determinação dos termos $r(\eta)$ e $r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta)$, três casos devem ser considerados, de acordo com a posição do ponto fonte c dentro do elemento n , conforme ilustra a Figura 3.16: o *Caso 1* corresponde ao ponto fonte localizado no nó inicial do elemento; o *Caso 2* corresponde ao ponto fonte localizado no nó intermediário do elemento; o *Caso 3* corresponde ao ponto fonte localizado no nó final do elemento.

Caso 1:

$$\begin{aligned} r(\eta) &= \sqrt{(x_l^g - x_l^l)^2 + (x_2^g - x_2^l)^2} \\ \left\{ \begin{aligned} (x_l^g - x_l^l) &= (\eta + l) \left[\frac{l}{2} \eta (x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^2 - x_l^l) \right] \\ (x_2^g - x_2^l) &= (\eta + l) \left[\frac{l}{2} \eta (x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^2 - x_2^l) \right] \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$r(\eta) = |\eta + 1| \sqrt{\left[\frac{1}{2} \eta (x_1' - 2x_1^2 + x_1^3) + (x_1^2 - x_1') \right]^2 + \left[\frac{1}{2} \eta (x_2' - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^2 - x_2') \right]^2} \quad (3.90)$$

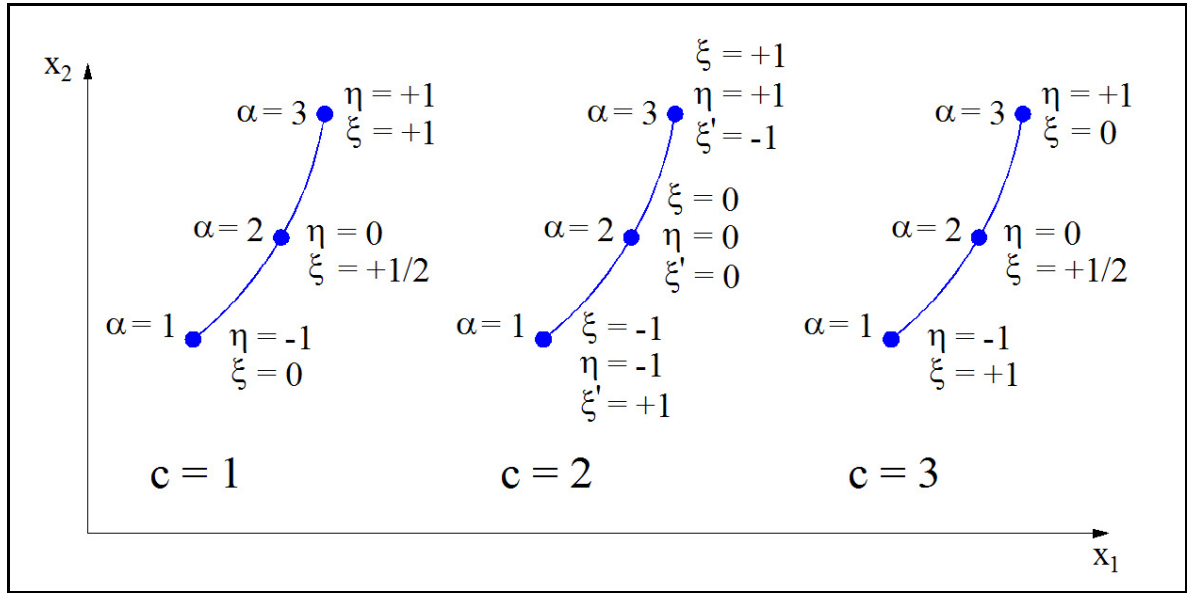


FIGURA 3.16 – Relação entre os sistemas de coordenadas adimensionais para elementos de contorno quadráticos conforme a posição do ponto fonte dentro do elemento

$$\begin{aligned} r_{,1}(\eta)r_{,1}(\eta) &= \frac{(x_1^g - x_1')}{r(\eta)} \frac{(x_1^g - x_1')}{r(\eta)} = \\ &= \frac{\left[\frac{1}{2} \eta (x_1' - 2x_1^2 + x_1^3) + (x_1^2 - x_1') \right]^2}{\left[\frac{1}{2} \eta (x_1' - 2x_1^2 + x_1^3) + (x_1^2 - x_1') \right]^2 + \left[\frac{1}{2} \eta (x_2' - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^2 - x_2') \right]^2} \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} r_{,2}(\eta)r_{,2}(\eta) &= \frac{(x_2^g - x_2')}{r(\eta)} \frac{(x_2^g - x_2')}{r(\eta)} = \\ &= \frac{\left[\frac{1}{2} \eta (x_2' - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^2 - x_2') \right]^2}{\left[\frac{1}{2} \eta (x_1' - 2x_1^2 + x_1^3) + (x_1^2 - x_1') \right]^2 + \left[\frac{1}{2} \eta (x_2' - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^2 - x_2') \right]^2} \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$r_{,1}(\eta)r_{,2}(\eta) = \frac{(x_1^g - x_1')}{r(\eta)} \frac{(x_2^g - x_2')}{r(\eta)} =$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{2} \eta (x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^2 - x_l^l) \right] \left[\frac{1}{2} \eta (x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^2 - x_2^l) \right]}{\left[\frac{1}{2} \eta (x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^2 - x_l^l) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} \eta (x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^2 - x_2^l) \right]^2} \quad (3.93)$$

Caso 2:

$$r(\eta) = \sqrt{(x_l^g - x_l^2)^2 + (x_2^g - x_2^2)^2}$$

$$\begin{cases} (x_l^g - x_l^2) = \frac{1}{2} \eta \left[\eta (x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^3 - x_l^l) \right] \\ (x_2^g - x_2^2) = \frac{1}{2} \eta \left[\eta (x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^3 - x_2^l) \right] \end{cases}$$

$$r(\eta) = \frac{1}{2} |\eta| \sqrt{\left[\eta (x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^3 - x_l^l) \right]^2 + \left[\eta (x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^3 - x_2^l) \right]^2} \quad (3.94)$$

$$r_{,1}(\eta) r_{,1}(\eta) = \frac{(x_l^g - x_l^2)(x_l^g - x_l^2)}{r(\eta) r(\eta)} =$$

$$= \frac{\left[\eta (x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^3 - x_l^l) \right]^2}{\left[\eta (x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^3 - x_l^l) \right]^2 + \left[\eta (x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^3 - x_2^l) \right]^2} \quad (3.95)$$

$$r_{,2}(\eta) r_{,2}(\eta) = \frac{(x_2^g - x_2^2)(x_2^g - x_2^2)}{r(\eta) r(\eta)} =$$

$$= \frac{\left[\eta (x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^3 - x_2^l) \right]^2}{\left[\eta (x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^3 - x_l^l) \right]^2 + \left[\eta (x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^3 - x_2^l) \right]^2} \quad (3.96)$$

$$r_{,1}(\eta) r_{,2}(\eta) = \frac{(x_l^g - x_l^2)(x_2^g - x_2^2)}{r(\eta) r(\eta)} =$$

$$= \frac{\left[\eta (x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^3 - x_l^l) \right] \left[\eta (x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^3 - x_2^l) \right]}{\left[\eta (x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^3 - x_l^l) \right]^2 + \left[\eta (x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^3 - x_2^l) \right]^2} \quad (3.97)$$

Caso 3:

$$r(\eta) = \sqrt{(x_l^g - x_l^3)^2 + (x_2^g - x_2^3)^2}$$

$$\begin{cases} (x_l^g - x_l^3) = (\eta - 1) \left[\frac{1}{2} \eta (x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^3 - x_l^2) \right] \\ (x_2^g - x_2^3) = (\eta - 1) \left[\frac{1}{2} \eta (x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^3 - x_2^2) \right] \end{cases}$$

$$r(\eta) = |\eta - l| \sqrt{\left[\frac{l}{2} \eta (x_l' - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^3 - x_l^2) \right]^2 + \left[\frac{l}{2} \eta (x_2' - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^3 - x_2^2) \right]^2} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} r_{,l}(\eta) r_{,l}(\eta) &= \frac{(x_l^g - x_l^3)(x_l^g - x_l^3)}{r(\eta)} = \\ &= \frac{\left[\frac{l}{2} \eta (x_l' - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^3 - x_l^2) \right]^2}{\left[\frac{l}{2} \eta (x_l' - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^3 - x_l^2) \right]^2 + \left[\frac{l}{2} \eta (x_2' - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^3 - x_2^2) \right]^2} \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} r_{,2}(\eta) r_{,2}(\eta) &= \frac{(x_2^g - x_2^3)(x_2^g - x_2^3)}{r(\eta)} = \\ &= \frac{\left[\frac{l}{2} \eta (x_2' - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^3 - x_2^2) \right]^2}{\left[\frac{l}{2} \eta (x_l' - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^3 - x_l^2) \right]^2 + \left[\frac{l}{2} \eta (x_2' - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^3 - x_2^2) \right]^2} \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} r_{,l}(\eta) r_{,2}(\eta) &= \frac{(x_l^g - x_l^3)(x_2^g - x_2^3)}{r(\eta)} = \\ &= \frac{\left[\frac{l}{2} \eta (x_l' - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^3 - x_l^2) \right] \left[\frac{l}{2} \eta (x_2' - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^3 - x_2^2) \right]}{\left[\frac{l}{2} \eta (x_l' - 2x_l^2 + x_l^3) + (x_l^3 - x_l^2) \right]^2 + \left[\frac{l}{2} \eta (x_2' - 2x_2^2 + x_2^3) + (x_2^3 - x_2^2) \right]^2} \end{aligned} \quad (3.101)$$

Substituindo esses resultados na equação (3.89) resulta

Caso 1:

$$r(\eta) = |\eta + l| f(\eta)$$

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{cn\alpha} &= -CTE1 \int_{-l}^{+l} N_\alpha(\eta) \ln(|\eta + l| f(\eta)) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta + \\ &+ CTE2 \int_{-l}^{+l} N_\alpha(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{cn\alpha} &= -CTE1 \left[\int_{-l}^{+l} N_\alpha(\eta) \ln(|\eta + l|) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta + \int_{-l}^{+l} N_\alpha(\eta) \ln(f(\eta)) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta \right] + \\ &+ CTE2 \int_{-l}^{+l} N_\alpha(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \end{aligned}$$

$$Q_{ij}^{cn\alpha} = -CTE1 \int_{-l}^{+l} N_\alpha(\eta) \ln(|\eta + l|) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta - CTE1 \int_{-l}^{+l} N_\alpha(\eta) \ln(f(\eta)) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta$$

$$+ CTE 2 \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \quad (3.102)$$

Caso 2:

$$r(\eta) = |\eta| \frac{I}{2} f(\eta)$$

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{cn\alpha} &= -CTE 1 \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) \ln\left(|\eta| \frac{I}{2} f(\eta)\right) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta + \\ &\quad + CTE 2 \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \\ Q_{ij}^{cn\alpha} &= -CTE 1 \left[\int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) \ln(|\eta|) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta + \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) \ln\left(\frac{I}{2} f(\eta)\right) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta \right] + \\ &\quad + CTE 2 \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \\ Q_{ij}^{cn\alpha} &= -CTE 1 \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) \ln(|\eta|) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta - CTE 1 \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) \ln\left(\frac{I}{2} f(\eta)\right) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta \\ &\quad + CTE 2 \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \\ Q_{ij}^{cn\alpha} &= -CTE 1 \int_{-I}^0 N_{\alpha}(\eta) \ln(|\eta|) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta - CTE 1 \int_0^{+I} N_{\alpha}(\eta) \ln(|\eta|) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta \\ &\quad - CTE 1 \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) \ln\left(\frac{I}{2} f(\eta)\right) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta + CTE 2 \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \quad (3.103) \end{aligned}$$

Caso 3:

$$r(\eta) = |\eta - I| f(\eta)$$

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{cn\alpha} &= -CTE 1 \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) \ln(|\eta - I| f(\eta)) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta + \\ &\quad + CTE 2 \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \\ Q_{ij}^{cn\alpha} &= -CTE 1 \left[\int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) \ln(|\eta - I|) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta + \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) \ln(f(\eta)) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta \right] + \\ &\quad + CTE 2 \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \\ Q_{ij}^{cn\alpha} &= -CTE 1 \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) \ln(|\eta - I|) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta - CTE 1 \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) \ln(f(\eta)) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta \\ &\quad + CTE 2 \int_{-I}^{+I} N_{\alpha}(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \quad (3.104) \end{aligned}$$

As singularidades na primeira integral em (3.102), na primeira e na segunda integrais em (3.103) e na primeira integral em (3.104) podem ser contornadas através das transformações de coordenadas apresentadas na Figura 3.16, ou seja,

Caso 1:

$$c = 1 \Rightarrow \xi = \frac{l + \eta}{2} \quad (3.105)$$

Caso 2:

$$c = 2 \Rightarrow \xi = \eta \quad e \quad \xi' = -\eta \quad (3.106)$$

Caso 3:

$$c = 3 \Rightarrow \xi = \frac{l - \eta}{2} \quad (3.107)$$

Consequentemente, novas funções de interpolação serão obtidas para cada caso da posição do ponto fonte, isto é,

Caso 1:

$$N_1(\xi) = (2\xi - l)(\xi - l) \quad N_2(\xi) = 4\xi(l - \xi) \quad N_3(\xi) = \xi(2\xi - l) \quad (3.108)$$

Caso 2:

$$N_1(\xi) = \frac{l}{2}\xi(\xi - l) \quad N_2(\xi) = l - \xi^2 \quad N_3(\xi) = \frac{l}{2}\xi(\xi + l) \quad (3.109)$$

$$N_1(\xi') = \frac{l}{2}\xi'(\xi' + l) \quad N_2(\xi') = l - (\xi')^2 \quad N_3(\xi') = \frac{l}{2}\xi'(\xi' - l) \quad (3.110)$$

Caso 3:

$$N_1(\xi) = \xi(2\xi - l) \quad N_2(\xi) = 4\xi(l - \xi) \quad N_3(\xi) = (2\xi - l)(\xi - l) \quad (3.111)$$

Também são encontradas novas relações (3.83) e (3.84) para cada caso da posição do ponto fonte.

Caso 1:

$$\begin{cases} x_l^g = 2\xi^2(x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + \xi(-3x_l^l + 4x_l^2 - x_l^3) + x_l^l \\ x_2^g = 2\xi^2(x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + \xi(-3x_2^l + 4x_2^2 - x_2^3) + x_2^l \end{cases} \quad (3.112)$$

$$J_n(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx_l}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} = \sqrt{\left[4\xi(x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + (-3x_l^l + 4x_l^2 - x_l^3)\right]^2 + \left[4\xi(x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + (-3x_2^l + 4x_2^2 - x_2^3)\right]^2} \quad (3.113)$$

Caso 2:

$$\begin{cases} x_l^g = \frac{I}{2} \xi^2 (x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + \frac{I}{2} \xi (x_l^3 - x_l^l) + x_l^2 \\ x_2^g = \frac{I}{2} \xi^2 (x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + \frac{I}{2} \xi (x_2^3 - x_2^l) + x_2^2 \end{cases} \quad (3.114)$$

$$J_n(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx_l}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} = \sqrt{\left[\xi(x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + \frac{I}{2}(x_l^3 - x_l^l)\right]^2 + \left[\xi(x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + \frac{I}{2}(x_2^3 - x_2^l)\right]^2} \quad (3.115)$$

$$\begin{cases} x_l^g = \frac{I}{2} (\xi')^2 (x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) - \frac{I}{2} \xi' (x_l^3 - x_l^l) + x_l^2 \\ x_2^g = \frac{I}{2} (\xi')^2 (x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) - \frac{I}{2} \xi' (x_2^3 - x_2^l) + x_2^2 \end{cases} \quad (3.116)$$

$$J_n(\xi') = \sqrt{\left(\frac{dx_l}{d\xi'}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi'}\right)^2} = \sqrt{\left[\xi'(x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) - \frac{I}{2}(x_l^3 - x_l^l)\right]^2 + \left[\xi'(x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) - \frac{I}{2}(x_2^3 - x_2^l)\right]^2} \quad (3.117)$$

Caso 3:

$$\begin{cases} x_l^g = 2\xi^2 (x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + \xi (-x_l^l + 4x_l^2 - 3x_l^3) + x_l^3 \\ x_2^g = 2\xi^2 (x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + \xi (-x_2^l + 4x_2^2 - 3x_2^3) + x_2^3 \end{cases} \quad (3.118)$$

$$J_n(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx_l}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} = \sqrt{\left[4\xi(x_l^l - 2x_l^2 + x_l^3) + (-x_l^l + 4x_l^2 - 3x_l^3)\right]^2 + \left[4\xi(x_2^l - 2x_2^2 + x_2^3) + (-x_2^l + 4x_2^2 - 3x_2^3)\right]^2} \quad (3.119)$$

Substituindo (3.105), (3.106) e (3.107) em (3.102), (3.103) e (3.104), respectivamente, obtém-se

Caso 1:

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{cn\alpha} = & -CTE1 \int_0^{+l} N_\alpha(\xi) \ln(2\xi) \delta_{ij} J_n(\xi) d\xi - CTE1 \int_{-l}^{+l} N_\alpha(\eta) \ln(f(\eta)) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta \\ & + CTE2 \int_{-l}^{+l} N_\alpha(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{cn\alpha} = & -CTE1 \int_0^{+l} N_\alpha(\xi) \ln(\xi) \delta_{ij} J_n(\xi) d\xi - CTE1 \int_{-l}^{+l} N_\alpha(\eta) \ln(2f(\eta)) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta \\ & + CTE2 \int_{-l}^{+l} N_\alpha(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{ij}^{cn\alpha} = & CTE1 \int_0^{+1} N_\alpha(\xi) \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) \delta_{ij} J_n(\xi) d\xi - CTE1 \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) \ln(2f(\eta)) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta \\
& + CTE2 \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta
\end{aligned} \quad (3.120)$$

Caso 2:

$$\begin{aligned}
Q_{ij}^{cn\alpha} = & -CTE1 \int_{+1}^0 N_\alpha(\xi') \ln(\xi') \delta_{ij} J_n(\xi') d\xi' - CTE1 \int_0^{+1} N_\alpha(\xi) \ln(\xi) \delta_{ij} J_n(\xi) d\xi \\
& - CTE1 \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) \ln\left(\frac{1}{2}f(\eta)\right) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta + CTE2 \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \\
Q_{ij}^{cn\alpha} = & CTE1 \int_{+1}^0 N_\alpha(\xi') \ln\left(\frac{1}{\xi'}\right) \delta_{ij} J_n(\xi') d\xi' - CTE1 \int_0^{+1} N_\alpha(\xi) \ln(\xi) \delta_{ij} J_n(\xi) d\xi \\
& - CTE1 \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) \ln\left(\frac{1}{2}f(\eta)\right) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta + CTE2 \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \\
Q_{ij}^{cn\alpha} = & CTE1 \int_{+1}^0 N_\alpha(\xi') \ln\left(\frac{1}{\xi'}\right) \delta_{ij} J_n(\xi') d\xi' + CTE1 \int_0^{+1} N_\alpha(\xi) \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) \delta_{ij} J_n(\xi) d\xi \\
& - CTE1 \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) \ln\left(\frac{1}{2}f(\eta)\right) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta + CTE2 \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \quad (3.121)
\end{aligned}$$

Caso 3:

$$\begin{aligned}
Q_{ij}^{cn\alpha} = & -CTE1 \int_{+1}^0 N_\alpha(\xi) \ln(2\xi) \delta_{ij} J_n(\xi) d\xi - CTE1 \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) \ln(f(\eta)) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta \\
& + CTE2 \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \\
Q_{ij}^{cn\alpha} = & -CTE1 \int_{+1}^0 N_\alpha(\xi) \ln(\xi) \delta_{ij} J_n(\xi) d\xi - CTE1 \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) \ln(2f(\eta)) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta \\
& + CTE2 \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \\
Q_{ij}^{cn\alpha} = & CTE1 \int_{+1}^0 N_\alpha(\xi) \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) \delta_{ij} J_n(\xi) d\xi - CTE1 \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) \ln(2f(\eta)) \delta_{ij} J_n(\eta) d\eta \\
& + CTE2 \int_{-1}^{+1} N_\alpha(\eta) r_{,i}(\eta) r_{,j}(\eta) J_n(\eta) d\eta \quad (3.122)
\end{aligned}$$

A primeira integral em (3.120), a primeira e a segunda integrais em (3.121) e a primeira integral em (3.122) são avaliadas por meio de uma quadratura de Gauss modificada, denominada quadratura de Gauss logarítmica (para valores calculados e tabelados de pontos e pesos de Gauss para a quadratura Gaussiana logarítmica ver,

por exemplo, BREBBIA e DOMINGUEZ¹⁵). Como mencionado para o caso de elementos lineares, essas integrais poderiam, alternativamente, ser calculadas analiticamente.

3.8.2.4 Elementos Quadráticos – Coeficientes $P_{ij}^{cn\alpha}$

A expressão (3.39) pode ser reescrita como

$$P_{ij}^{cn\alpha} = \int_{-1}^{+1} N_{\alpha}(\eta) T_{ij}^{cn}[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta \quad (3.123)$$

sendo que

$$T_{ij}^{cn}[r(\eta)] = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(\eta)} \left\{ \frac{\partial r(\eta)}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] + (1-2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right\}$$

ou

$$T_{ij}^{cn}[r(\eta)] = \frac{1}{r(\eta)} g[r(\eta)]$$

onde $g[r(\eta)]$ é, nitidamente, não singular.

Verificando o comportamento da expressão (3.123), para cada caso da posição do ponto fonte, observa-se:

Caso 1:

$$r(\eta) = |\eta + 1| f(\eta)$$

$$\begin{aligned} P_{ij}^{cn1} &= \int_{-1}^{+1} N_1(\eta) \frac{1}{r(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{2} \eta(\eta - 1) \right) \left(\frac{1}{|\eta + 1| f(\eta)} \right) g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\eta - 1)}{|\eta + 1| f(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{ij}^{cn2} &= \int_{-1}^{+1} N_2(\eta) \frac{1}{r(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \int_{-1}^{+1} ((1 + \eta)(1 - \eta)) \left(\frac{1}{|\eta + 1| f(\eta)} \right) g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - \eta)}{f(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta \end{aligned}$$

¹⁵ BREBBIA, C. A., DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements**, An Introductory Course. Boston: Computational Mechanics Publications, 1989, p. 271.

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{cn3} &= \int_{-l}^{+l} N_3(\eta) \frac{1}{r(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \int_{-l}^{+l} \left(\frac{1}{2} \eta (\eta + l) \right) \frac{1}{(|\eta + l| f(\eta))} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} \frac{\eta}{f(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta
\end{aligned}$$

(Conclusão: apenas a primeira expressão apresenta singularidade).

Caso 2:

$$r(\eta) = |\eta| \frac{1}{2} f(\eta)$$

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{cn1} &= \int_{-l}^{+l} N_1(\eta) \frac{1}{r(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \int_{-l}^{+l} \left(\frac{1}{2} \eta (\eta - l) \right) \frac{1}{\left(|\eta| \frac{1}{2} f(\eta) \right)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \\
&= \int_{-l}^{+l} \frac{(\eta - l)}{f(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{cn2} &= \int_{-l}^{+l} N_2(\eta) \frac{1}{r(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \int_{-l}^{+l} ((l + \eta)(l - \eta)) \frac{1}{\left(|\eta| \frac{1}{2} f(\eta) \right)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \\
&= 2 \int_{-l}^{+l} \frac{(l + \eta)(l - \eta)}{|\eta| f(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{cn3} &= \int_{-l}^{+l} N_3(\eta) \frac{1}{r(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \int_{-l}^{+l} \left(\frac{1}{2} \eta (\eta + l) \right) \frac{1}{\left(|\eta| \frac{1}{2} f(\eta) \right)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \\
&= \int_{-l}^{+l} \frac{(\eta + l)}{f(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta
\end{aligned}$$

(Conclusão: apenas a segunda expressão apresenta singularidade).

Caso 3:

$$r(\eta) = |\eta - l| f(\eta)$$

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{cn1} &= \int_{-l}^{+l} N_1(\eta) \frac{1}{r(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \int_{-l}^{+l} \left(\frac{1}{2} \eta (\eta - l) \right) \frac{1}{(|\eta - l| f(\eta))} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} \frac{\eta}{f(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{cn2} &= \int_{-l}^{+l} N_2(\eta) \frac{1}{r(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \int_{-l}^{+l} ((l + \eta)(l - \eta)) \frac{1}{(|\eta - l| f(\eta))} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \\
&= \int_{-l}^{+l} \frac{(l + \eta)}{f(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{cn3} &= \int_{-l}^{+l} N_3(\eta) \frac{l}{r(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \int_{-l}^{+l} \left(\frac{l}{2} \eta (\eta + l) \right) \left(\frac{l}{|\eta - l| f(\eta)} \right) g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta = \\
&= \frac{l}{2} \int_{-l}^{+l} \frac{\eta(\eta + l)}{|\eta - l| f(\eta)} g[r(\eta)] J_n(\eta) d\eta
\end{aligned}$$

(Conclusão: apenas a terceira expressão apresenta singularidade).

Os coeficientes $P_{ij}^{cn\alpha}$ singulares são exatamente os coeficientes que compõem as submatrizes diagonais de $\mathbf{H}$, as quais são calculadas indiretamente através de consideração de movimento de corpo rígido, como discutido anteriormente. A conclusão é que, para efeitos de implementação computacional, a avaliação dos coeficientes $P_{ij}^{cn\alpha}$, quando c é um dos nós do elemento n , pode ser feita através da quadratura de Gauss convencional, pois os coeficientes singulares, calculados imprecisamente através desse processo, são desprezados e recalculados em função dos demais coeficientes, resultantes de integrações não singulares e, portanto, precisamente avaliados.

3.8.3 Deslocamentos e Tensões nos Pontos Internos

É possível obter os valores dos deslocamentos e tensões nos pontos internos a partir dos valores dos deslocamentos e forças de superfície do contorno utilizando-se as identidades de Somigliana para deslocamentos, (3.6), e tensões, (3.8), que podem ser discretizadas de maneira similar à expressão (3.43).

Para um ponto qualquer $\mathbf{X}^d \in \Omega$, a versão discretizada de (3.6) é

$$u_i^d = \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^m G_{ij}^{dn\alpha} t_j^{n\alpha} - \sum_{\gamma=1}^{Nn} \bar{H}_{ij}^{d\gamma} u_j^\gamma \quad (3.124)$$

e a versão discretizada de (3.8) é

$$\sigma_{ij}^d = \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^m D_{kij}^{dn\alpha} t_k^{n\alpha} - \sum_{\gamma=1}^{Nn} S_{kij}^{d\gamma} u_k^\gamma \quad (3.125)$$

4 CÓDIGOS COMPUTACIONAIS

4.1 Elementos Constantes

As considerações matemáticas relativas ao desenvolvimento do Método de Elementos de Contorno utilizando elementos de contorno constantes, apresentadas no capítulo precedente, foram implementadas no código denominado MEC_ELASTIC_CONST, escrito em linguagem de programação Fortran 95, que consta do CD anexo a este trabalho. Esse código é formado pelos seguintes arquivos fonte:

- a) MEC_ELASTIC_CONST.f90;
- b) MEC_ELASTIC_CONST_SUBROTINAS.f90.

4.1.1 Organização e Funcionamento do Código

A organização e o funcionamento desse código podem ser resumidos nas seguintes etapas:

- a) declaração do nome do programa e dos módulos e bibliotecas utilizadas;

- b) declaração das variáveis globais e definições;
- c) atribuição do número dos arquivos de entrada e saída de dados;
- d) leitura do nome dos arquivos de entrada e saída de dados e abertura dos mesmos (em caso de erro o programa encerra sua execução alertando o usuário);
- e) chamada da sub-rotina `INPUT1` para leitura dos dados contidos no arquivo de entrada de dados: leitura da linha de título do problema e linha de parâmetros globais do problema;
- f) alocação de memória para as variáveis do problema (em caso de erro o programa encerra sua execução alertando o usuário);
- g) chamada da sub-rotina `INPUT2` para leitura dos demais dados contidos no arquivo de entrada de dados;
- h) chamada da sub-rotina `MATRIZES_G_H` para cálculo dos coeficientes das matrizes **G** e **H** e formação do sistema $\mathbf{AY} = \mathbf{F}$;
 - chamada da sub-rotina `INTEGRACAO_LOCAL` para cálculo dos coeficientes das submatrizes diagonais de **G**;
 - chamada da sub-rotina `INTEGRACAO_EXTERNA` para cálculo dos coeficientes das submatrizes posicionadas fora das diagonais de **G** e **H**;
- i) chamada da sub-rotina `SOLVER` para solução do sistema de equações através do método de Gauss (em caso de erro o programa encerra sua execução alertando o usuário);
- j) chamada da sub-rotina `SOLUCAO_CONTORNO` para reordenação dos valores calculados no contorno do problema;
- k) chamada da sub-rotina `PONTOS_INTERNOS` para cálculo dos deslocamentos e tensões nos pontos internos;
 - chamada da sub-rotina `INTEGRACAO_EXTERNA` para cálculo dos coeficientes necessários para a obtenção dos deslocamentos nos pontos internos;
 - chamada da sub-rotina `TENSOES_INTERNAS` para cálculo dos coeficientes necessários para a obtenção das tensões nos pontos internos;
- l) chamada da sub-rotina `OUTPUT` para transcrição dos resultados no arquivo de saída de dados;
- m) fechamento dos arquivos de entrada e saída de dados.

4.1.2 Modelo de Arquivo de Entrada de Dados

Um exemplo de arquivo de entrada de dados para o código MEC_ELASTIC_CONST é apresentado na Figura 4.1 (e ilustrado na Figura 4.2), constituindo-se dos seguintes campos:

```

***                               CAVIDADE CIRCULAR SOB PRESSAO CONSTANTE (12 ELEMENTOS CONSTANTES)                               ***
0 0 12 7 10 20500.0 0.3 1.0E-10 1.0E-3 1.0E-3
1 -0.7765 -2.8978
2 -2.1213 -2.1213
3 -2.8978 -0.7765
4 -2.8978 0.7765
5 -2.1213 2.1213
6 -0.7765 2.8978
7 0.7765 2.8978
8 2.1213 2.1213
9 2.8978 0.7765
10 2.8978 -0.7765
11 2.1213 -2.1213
12 0.7765 -2.8978
1 1 -50.0000 1 -86.6025
2 1 -86.6025 1 -50.0000
3 1 -100.0000 0 0.0000
4 1 -86.6025 1 50.0000
5 1 -50.0000 1 86.6025
6 0 0.0000 1 100.0000
7 1 50.0000 1 86.6025
8 1 86.6025 1 50.0000
9 1 100.0000 0 0.0000
10 1 86.6025 1 -50.0000
11 1 50.0000 1 -86.6025
12 0 0.0000 1 -100.0000
1 4.0000 0.0000
2 5.0000 0.0000
3 6.0000 0.0000
4 7.0000 0.0000
5 8.0000 0.0000
6 9.0000 0.0000
7 10.0000 0.0000

```

FIGURA 4.1 – Modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_CONST

- linha de título do problema: contém uma breve descrição do problema analisado (máximo 100 caracteres);
- linha de parâmetros globais do problema: índice do tipo de domínio do problema (0 para domínio infinito e 1 para domínio finito); índice do estado plano adotado (0 para Estado Plano de Deformações e 1 para Estado Plano de Tensões); número de elementos de contorno; número de pontos internos; número de pontos de Gauss para integração numérica (valores possíveis: 2, 4, 8 ou 10); módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young; coeficiente de Poisson; valor de tolerância adotado na solução do sistema de equações para determinar coeficientes nulos; valor de tolerância adotado para o arredondamento dos valores de deslocamentos

- calculados; valor de tolerância adotado para o arredondamento dos valores de tensões e forças de superfície calculados;
- c) bloco de coordenadas dos pontos extremos dos elementos de contorno: número do ponto; coordenada X ; coordenada Y ;
- d) bloco de condições de contorno prescritas para os nós de contorno: número do nó; índice do tipo de condição de contorno prescrita para a direção X (0 para deslocamentos prescritos e 1 para forças de superfície prescritas); valor da condição de contorno prescrita para a direção X ; índice do tipo de condição de contorno prescrita para a direção Y (0 para deslocamentos prescritos e 1 para forças de superfície prescritas); valor da condição de contorno prescrita para a direção Y ;
- e) bloco de coordenadas dos pontos internos: número do ponto; coordenada X ; coordenada Y .

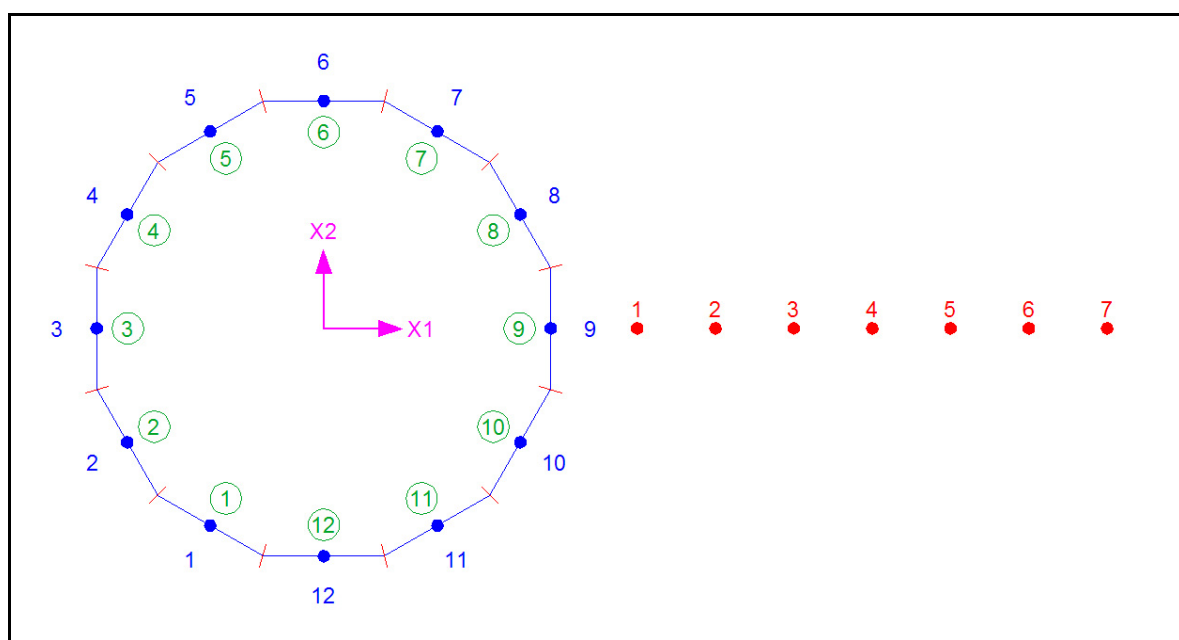


FIGURA 4.2 – Ilustração da malha do modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_CONST

4.2 Elementos Lineares

As considerações matemáticas relativas ao desenvolvimento do Método de Elementos de Contorno utilizando elementos de contorno lineares, apresentadas no

capítulo precedente, foram implementadas no código denominado MEC_ELASTIC_LIN, escrito em linguagem de programação Fortran 95, que consta do CD anexo a este trabalho. Esse código é formado pelos seguintes arquivos fonte:

- a) MEC_ELASTIC_LIN.f90;
- b) MEC_ELASTIC_LIN_SUBROTINAS.f90.

4.2.1 Organização e Funcionamento do Código

A organização e o funcionamento desse código podem ser resumidos nas seguintes etapas:

- a) declaração do nome do programa e dos módulos e bibliotecas utilizadas;
- b) declaração das variáveis globais e definições;
- c) atribuição do número dos arquivos de entrada e saída de dados;
- d) leitura do nome dos arquivos de entrada e saída de dados e abertura dos mesmos (em caso de erro o programa encerra sua execução alertando o usuário);
- e) chamada da sub-rotina INPUT1 para leitura dos dados contidos no arquivo de entrada de dados: leitura da linha de título do problema e linha de parâmetros globais do problema;
- f) alocação de memória para as variáveis do problema (em caso de erro o programa encerra sua execução alertando o usuário);
- g) chamada da sub-rotina INPUT2 para leitura dos demais dados contidos no arquivo de entrada de dados;
- h) chamada da sub-rotina MATRIZES_G_H para cálculo dos coeficientes das matrizes **G** e **H** e formação do sistema $\mathbf{AY} = \mathbf{F}$;
 - chamada da sub-rotina INTEGRACAO_LOCAL_P para cálculo dos coeficientes das submatrizes **P** quando o ponto fonte é um dos nós do elemento que está sendo integrado;
 - chamada da sub-rotina INTEGRACAO_LOCAL_Q para cálculo dos coeficientes das submatrizes **Q** quando o ponto fonte é um dos nós do elemento que está sendo integrado;

- chamada da sub-rotina `INTEGRACAO_EXTERNA` para cálculo dos coeficientes das submatrizes **P** e **Q** quando o ponto fonte não é um dos nós do elemento que está sendo integrado;
- i) chamada da sub-rotina `SOLVER` para solução do sistema de equações através do método de Gauss (em caso de erro o programa encerra sua execução alertando o usuário);
- j) chamada da sub-rotina `SOLUCAO_CONTORNO` para reordenação dos valores calculados no contorno do problema;
- k) chamada da sub-rotina `PONTOS_INTERNOS` para cálculo dos deslocamentos e tensões nos pontos internos;
 - chamada da sub-rotina `INTEGRACAO_EXTERNA` para cálculo dos coeficientes necessários para a obtenção dos deslocamentos nos pontos internos;
 - chamada da sub-rotina `TENSOES_INTERNAS` para cálculo dos coeficientes necessários para a obtenção das tensões nos pontos internos;
- l) chamada da sub-rotina `OUTPUT` para transcrição dos resultados no arquivo de saída de dados;
- m) fechamento dos arquivos de entrada e saída de dados.

4.2.2 Modelo de Arquivo de Entrada de Dados

Um exemplo de arquivo de entrada de dados para o código `MEC_ELASTIC_LIN` é apresentado na Figura 4.3 (e ilustrado na Figura 4.4), constituindo-se dos seguintes campos:

- a) linha de título do problema: contém uma breve descrição do problema analisado (máximo 100 caracteres);
- b) linha de parâmetros globais do problema: índice do tipo de domínio do problema (0 para domínio infinito e 1 para domínio finito); índice do estado plano adotado (0 para Estado Plano de Deformações e 1 para Estado Plano de Tensões); número de elementos de contorno; número de pontos internos; número de pontos de Gauss para integração numérica (valores

possíveis: 2, 4, 8 ou 10); módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young; coeficiente de Poisson; valor de tolerância adotado na solução do sistema de equações para determinar coeficientes nulos; valor de tolerância adotado para o arredondamento dos valores de deslocamentos calculados; valor de tolerância adotado para o arredondamento dos valores de tensões e forças de superfície calculados;

```

***                               CAVIDADE CIRCULAR SOB PRESSAO CONSTANTE (12 ELEMENTOS LINEARES)                               ***
0 0 12 7 10 20500.0 0.3 1.0E-10 1.0E-3 1.0E-3
1 -1.5000 -2.5981
2 -2.5981 -1.5000
3 -3.0000 0.0000
5 -2.5981 1.5000
5 -1.5000 2.5981
6 0.0000 3.0000
7 1.5000 2.5981
8 2.5981 1.5000
9 3.0000 0.0000
10 2.5981 -1.5000
11 1.5000 -2.5981
12 0.0000 -3.0000
1 1 -50.0000 1 -86.6025 1 -86.6025 1 -50.0000
2 1 -86.6025 1 -50.0000 1 -100.0000 0 0.0000
3 1 -100.0000 0 0.0000 1 -86.6025 1 50.0000
4 1 -86.6025 1 50.0000 1 -50.0000 1 86.6025
5 1 -50.0000 1 86.6025 0 0.0000 1 100.0000
6 0 0.0000 1 100.0000 1 50.0000 1 86.6025
7 1 50.0000 1 86.6025 1 86.6025 1 50.0000
8 1 86.6025 1 50.0000 1 100.0000 0 0.0000
9 1 100.0000 0 0.0000 1 86.6025 1 -50.0000
10 1 86.6025 1 -50.0000 1 50.0000 1 -86.6025
11 1 50.0000 1 -86.6025 0 0.0000 1 -100.0000
12 0 0.0000 1 -100.0000 1 -50.0000 1 -86.6025
1 4.0000 0.0000
2 5.0000 0.0000
3 6.0000 0.0000
4 7.0000 0.0000
5 8.0000 0.0000
6 9.0000 0.0000
7 10.0000 0.0000

```

FIGURA 4.3 – Modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_LIN

- c) bloco de coordenadas dos nós de contorno: número do nó; coordenada X ; coordenada Y ;
- d) bloco de condições de contorno prescritas para os elementos de contorno: número do elemento; índice do tipo de condição de contorno prescrita para a direção X do primeiro nó do elemento (0 para deslocamentos prescritos e 1 para forças de superfície prescritas); valor da condição de contorno prescrita para a direção X do primeiro nó do elemento; índice do tipo de condição de contorno prescrita para a direção Y do primeiro nó do elemento (0 para deslocamentos prescritos e 1 para forças de superfície prescritas); valor da condição de contorno prescrita para a direção Y do primeiro nó do elemento; índice do tipo de condição de contorno prescrita para a direção X do segundo nó do elemento (0 para

deslocamentos prescritos e I para forças de superfície prescritas); valor da condição de contorno prescrita para a direção X do segundo nó do elemento; índice do tipo de condição de contorno prescrita para a direção Y do segundo nó do elemento (0 para deslocamentos prescritos e I para forças de superfície prescritas); valor da condição de contorno prescrita para a direção Y do segundo nó do elemento;

e) bloco de coordenadas dos pontos internos: número do ponto; coordenada X ; coordenada Y .

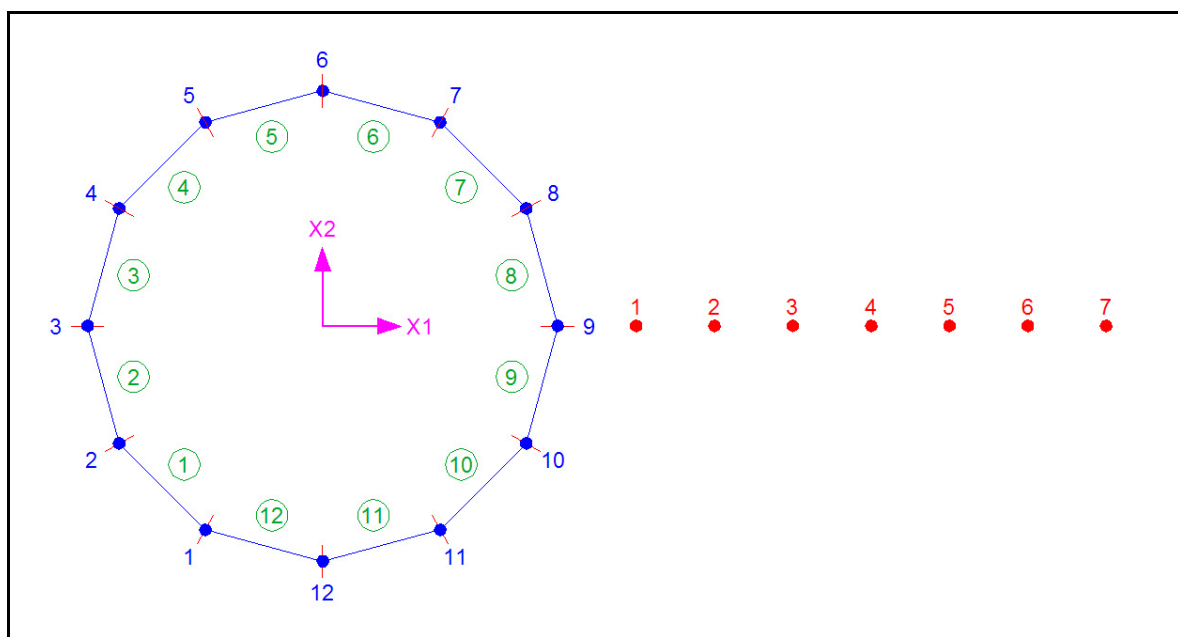


FIGURA 4.4 – Ilustração da malha do modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_LIN

4.3 Elementos Quadráticos

As considerações matemáticas relativas ao desenvolvimento do Método de Elementos de Contorno utilizando elementos de contorno quadráticos, apresentadas no capítulo precedente, foram implementadas no código denominado MEC_ELASTIC_QUAD, escrito em linguagem de programação Fortran 95, que consta do CD anexo a este trabalho. Esse código é formado pelos seguintes arquivos fonte:

- MEC_ELASTIC_QUAD.f90;
- MEC_ELASTIC_QUAD_SUBROTINAS.f90.

4.3.1 Organização e Funcionamento do Código

A organização e o funcionamento desse código podem ser resumidos nas seguintes etapas:

- a) declaração do nome do programa e dos módulos e bibliotecas utilizadas;
- b) declaração das variáveis globais e definições;
- c) atribuição do número dos arquivos de entrada e saída de dados;
- d) leitura do nome dos arquivos de entrada e saída de dados e abertura dos mesmos (em caso de erro o programa encerra sua execução alertando o usuário);
- e) chamada da sub-rotina `INPUT1` para leitura dos dados contidos no arquivo de entrada de dados: leitura da linha de título do problema e linha de parâmetros globais do problema;
- f) alocação de memória para as variáveis do problema (em caso de erro o programa encerra sua execução alertando o usuário);
- g) chamada da sub-rotina `INPUT2` para leitura dos demais dados contidos no arquivo de entrada de dados;
- h) chamada da sub-rotina `MATRIZES_G_H` para cálculo dos coeficientes das matrizes **G** e **H** e formação do sistema $\mathbf{AY} = \mathbf{F}$;
 - chamada da sub-rotina `INTEGRACAO_LOCAL_P` para cálculo dos coeficientes das submatrizes **P** quando o ponto fonte é um dos nós do elemento que está sendo integrado;
 - chamada da sub-rotina `INTEGRACAO_LOCAL_Q` para cálculo dos coeficientes das submatrizes **Q** quando o ponto fonte é um dos nós do elemento que está sendo integrado;
 - chamada da sub-rotina `INTEGRACAO_EXTERNA` para cálculo dos coeficientes das submatrizes **P** e **Q** quando o ponto fonte não é um dos nós do elemento que está sendo integrado;
- i) chamada da sub-rotina `SOLVER` para solução do sistema de equações através do método de Gauss (em caso de erro o programa encerra sua execução alertando o usuário);

- j) chamada da sub-rotina SOLUCAO_CONTORNO para reordenação dos valores calculados no contorno do problema;
- k) chamada da sub-rotina PONTOS_INTERNOS para cálculo dos deslocamentos e tensões nos pontos internos;
 - chamada da sub-rotina INTEGRACAO_EXTERNA para cálculo dos coeficientes necessários para a obtenção dos deslocamentos nos pontos internos;
 - chamada da sub-rotina TENSOES_INTERNAS para cálculo dos coeficientes necessários para a obtenção das tensões nos pontos internos;
- l) chamada da sub-rotina OUTPUT para transcrição dos resultados no arquivo de saída de dados;
- m) fechamento dos arquivos de entrada e saída de dados.

4.3.2 Modelo de Arquivo de Entrada de Dados

Um exemplo de arquivo de entrada de dados para o código MEC_ELASTIC_QUAD é apresentado na Figura 4.5 (e ilustrado na Figura 4.6), constituindo-se dos seguintes campos:

- a) linha de título do problema: contém uma breve descrição do problema analisado (máximo 100 caracteres);
- b) linha de parâmetros globais do problema: índice do tipo de domínio do problema (0 para domínio infinito e 1 para domínio finito); índice do estado plano adotado (0 para Estado Plano de Deformações e 1 para Estado Plano de Tensões); número de elementos de contorno; número de pontos internos; número de pontos de Gauss para integração numérica (valores possíveis: 2, 4, 8 ou 10); módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young; coeficiente de Poisson; valor de tolerância adotado na solução do sistema de equações para determinar coeficientes nulos; valor de tolerância adotado para o arredondamento dos valores de deslocamentos calculados; valor de tolerância adotado para o arredondamento dos valores de tensões e forças de superfície calculados;

c) bloco de coordenadas dos nós de contorno: número do nó; coordenada X ; coordenada Y ;

```

***                               CAVIDADE CIRCULAR SOB PRESSAO CONSTANTE (6 ELEMENTOS QUADRÁTICOS)                               ***
0 0 6 7 10 20500.0 0.3 1.0E-10 1.0E-3 1.0E-3
1 -1.5000 -2.5981
2 -2.5981 -1.5000
3 -3.0000 0.0000
4 -2.5981 1.5000
5 -1.5000 2.5981
6 0.0000 3.0000
7 1.5000 2.5981
8 2.5981 1.5000
9 3.0000 0.0000
10 2.5981 -1.5000
11 1.5000 -2.5981
12 0.0000 -3.0000
1 1 -50.0000 1 -86.6025 1 -86.6025 1 -50.0000 1 -100.0000 0 0.0000
2 1 -100.0000 0 0.0000 1 -86.6025 1 50.0000 1 -50.0000 1 86.6025
3 1 -50.0000 1 86.6025 0 0.0000 1 100.0000 1 50.0000 1 86.6025
4 1 50.0000 1 86.6025 1 86.6025 1 50.0000 1 100.0000 0 0.0000
5 1 100.0000 0 0.0000 1 86.6025 1 -50.0000 1 50.0000 1 -86.6025
6 1 50.0000 1 -86.6025 0 0.0000 1 -100.0000 1 -50.0000 1 -86.6025
1 4.0000 0.0000
2 5.0000 0.0000
3 6.0000 0.0000
4 7.0000 0.0000
5 8.0000 0.0000
6 9.0000 0.0000
7 10.0000 0.0000

```

FIGURA 4.5 – Modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_QUAD

d) bloco de condições de contorno prescritas para os elementos de contorno: número do elemento; índice do tipo de condição de contorno prescrita para a direção X do primeiro nó do elemento (0 para deslocamentos prescritos e 1 para forças de superfície prescritas); valor da condição de contorno prescrita para a direção X do primeiro nó do elemento; índice do tipo de condição de contorno prescrita para a direção Y do primeiro nó do elemento (0 para deslocamentos prescritos e 1 para forças de superfície prescritas); valor da condição de contorno prescrita para a direção Y do primeiro nó do elemento; índice do tipo de condição de contorno prescrita para a direção X do segundo nó do elemento (0 para deslocamentos prescritos e 1 para forças de superfície prescritas); valor da condição de contorno prescrita para a direção X do segundo nó do elemento; índice do tipo de condição de contorno prescrita para a direção Y do segundo nó do elemento (0 para deslocamentos prescritos e 1 para forças de superfície prescritas); valor da condição de contorno prescrita para a direção Y do segundo nó do elemento; índice do tipo de condição de contorno prescrita para a direção X do terceiro nó do elemento (0 para deslocamentos prescritos e 1 para forças de superfície prescritas); valor

da condição de contorno prescrita para a direção X do terceiro nó do elemento; índice do tipo de condição de contorno prescrita para a direção Y do terceiro nó do elemento (0 para deslocamentos prescritos e 1 para forças de superfície prescritas); valor da condição de contorno prescrita para a direção Y do terceiro nó do elemento;

e) bloco de coordenadas dos pontos internos: número do ponto; coordenada X ; coordenada Y .

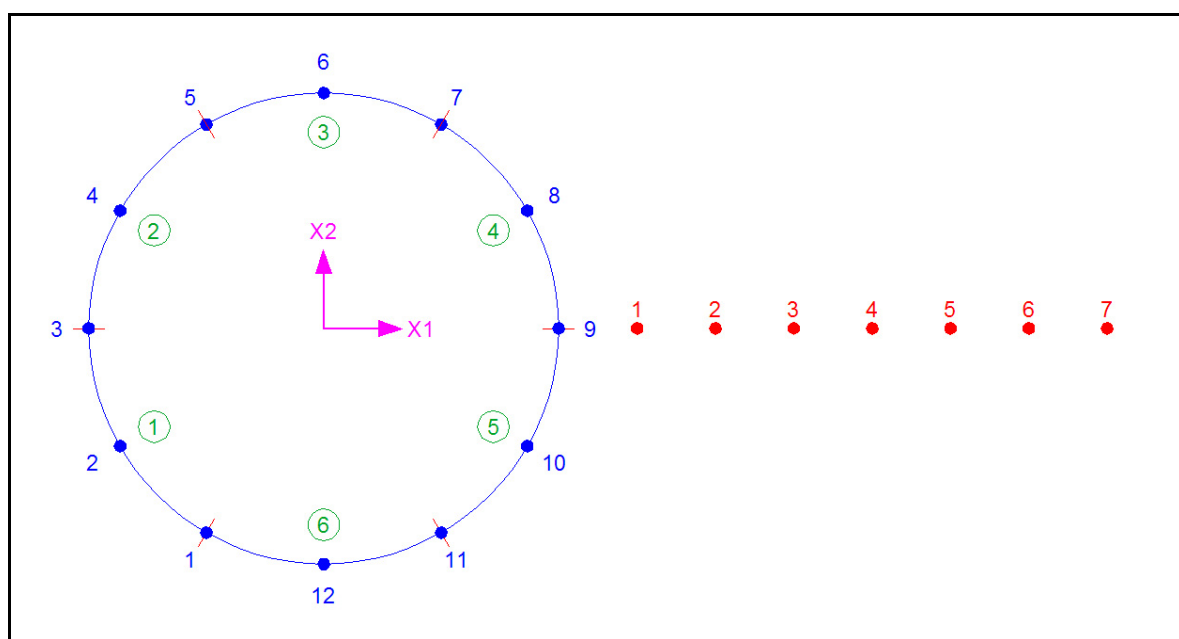


FIGURA 4.6 – Ilustração da malha do modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_QUAD

4.4 Múltiplos Contornos

Na prática da engenharia muitos problemas apresentam mais de um contorno, tal como ilustrado na Figura 4.7. Essa figura representaria, por exemplo, uma chapa utilizada numa ligação parafusada de uma estrutura metálica.

Esse tipo de problema pode ser facilmente analisado desde que a direção da normal a cada contorno esteja bem definida. Para tanto, em problemas bidimensionais, basta adotar a regra de que o contorno externo é discretizado em sentido anti-horário e os contornos internos em sentido horário.

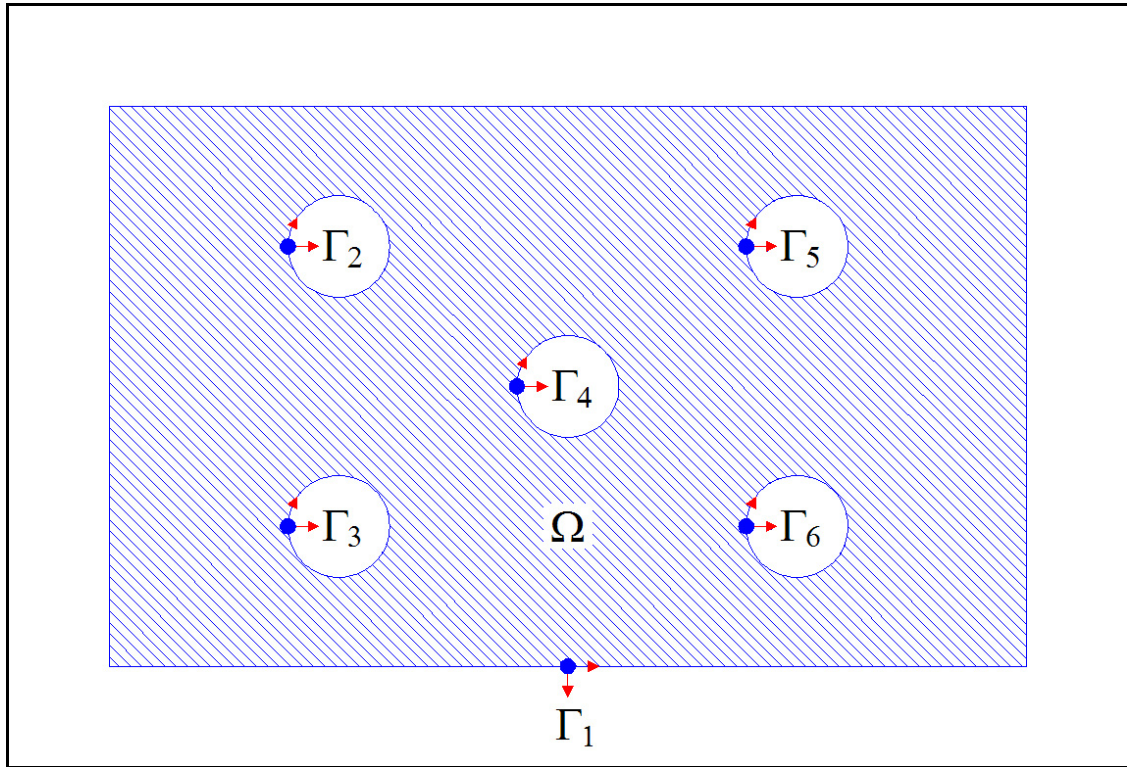


FIGURA 4.7 – Exemplo de problema que apresenta múltiplos contornos

4.4.1 Detalhes da Implementação Computacional

Os códigos apresentados e discutidos anteriormente são facilmente adaptados para a solução de problemas de múltiplos contornos desde que seja fornecido o número de contornos do problema e o último nó de cada contorno.

Obviamente, as sub-rotinas `INPUT1` e `INPUT2` devem ser modificadas de modo a armazenar esses novos valores; no entanto, as modificações mais importantes para o pleno funcionamento dos novos códigos ocorrem nas sub-rotinas `MATRIZES_G_H`, `SOLUCAO_CONTORNO` e `PONTOS_INTERNOS`. Essas sub-rotinas necessitam de alterações nos algoritmos que identificam as situações de final de contorno, permitindo, desse modo, a correta integração dos elementos de contorno, montagem das matrizes de coeficientes e obtenção dos valores das incógnitas do problema. A sub-rotina `OUTPUT` também necessita ser modificada de modo a transcrever corretamente os resultados no arquivo de saída de dados.

Para finalizar, vale ressaltar que nenhuma alteração é necessária nas sub-rotinas que realizam as integrações das soluções fundamentais.

4.4.2 Código em Fortran 95

As considerações matemáticas apresentadas na seção precedente foram implementadas no código denominado MEC_ELASTIC_QUAD_MC, escrito em linguagem de programação Fortran 95, que consta do CD anexo a este trabalho. Esse código é formado pelos seguintes arquivos fonte:

- a) MEC_ELASTIC_QUAD_MC.f90;
- b) MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SUBROTINAS.f90.

4.4.3 Organização e Funcionamento do Código

A organização e o funcionamento desse código são idênticos ao do código MEC_ELASTIC_QUAD.

4.4.4 Modelo de Arquivo de Entrada de Dados

Um exemplo de arquivo de entrada de dados para o código MEC_ELASTIC_QUAD_MC é apresentado na Figura 4.8 (e ilustrado na Figura 4.9), constituindo-se dos mesmos campos do arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_QUAD acrescido das seguintes modificações:

- a) linha de parâmetros globais do problema: índice do tipo de domínio do problema (0 para domínio infinito e 1 para domínio finito); índice do estado plano adotado (0 para Estado Plano de Deformações e 1 para Estado Plano de Tensões); número de contornos do problema; número de

elementos de contorno; número de pontos internos; número de pontos de Gauss para integração numérica (valores possíveis: 2, 4, 8 ou 10); módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young; coeficiente de Poisson; valor de tolerância adotado na solução do sistema de equações para determinar coeficientes nulos; valor de tolerância adotado para o arredondamento dos valores de deslocamentos calculados; valor de tolerância adotado para o arredondamento dos valores de tensões e forças de superfície calculados;

b) linha de identificação dos contornos do problema: número do último nó de cada contorno.

```

***                               CILINDRO CIRCULAR SOB PRESSAO CONSTANTE (6 ELEMENTOS QUADRÁTICOS)                               ***
1 0 2 6 9 10 20500.0 0.3 1.0E-10 1.0E-4 1.0E-1
8 12
1 0.0000 -8.0000
2 5.6569 -5.6569
3 8.0000 0.0000
4 5.6569 5.6569
5 0.0000 8.0000
6 -5.6569 5.6569
7 -8.0000 0.0000
8 -5.6569 -5.6569
9 -3.0000 0.0000
10 0.0000 3.0000
11 3.0000 0.0000
12 0.0000 -3.0000
1 0 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 0 0.0
2 1 0.0 0 0.0 1 0.0 1 0.0 0 0.0 1 0.0
3 0 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 0 0.0
4 1 0.0 0 0.0 1 0.0 1 0.0 0 0.0 1 0.0
5 1 -100.0000 0 0.0000 0 0.0000 1 100.0000 1 100.0000 0 0.0000
6 1 100.0000 0 0.0000 0 0.0000 1 -100.0000 1 -100.0000 0 0.0000
1 3.5 0.0
2 4.0 0.0
3 4.5 0.0
4 5.0 0.0
5 5.5 0.0
6 6.0 0.0
7 6.5 0.0
8 7.0 0.0
9 7.5 0.0

```

FIGURA 4.8 – Modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_QUAD_MC

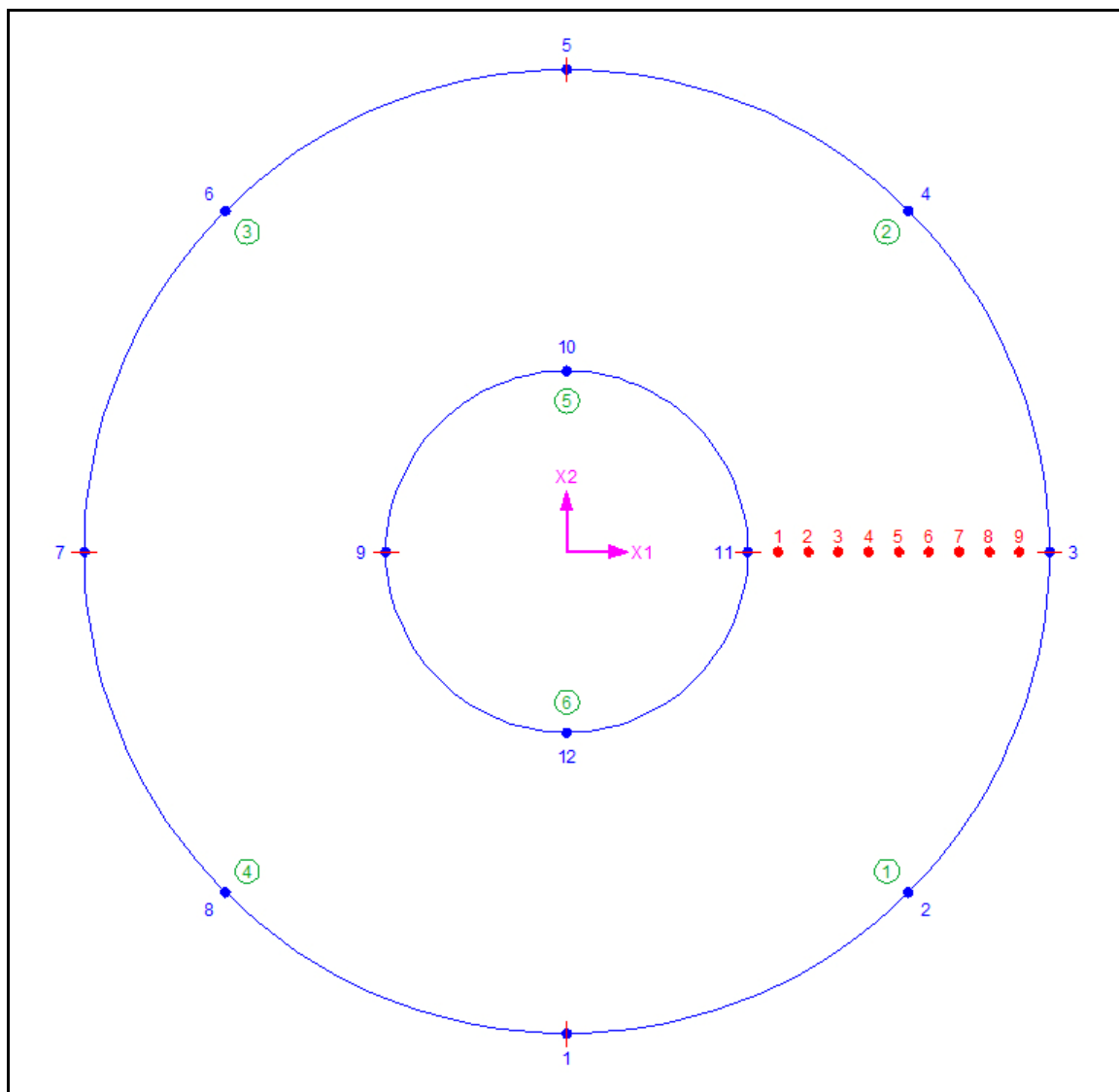


FIGURA 4.9 – Ilustração da malha do modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_QUAD_MC

4.5 Considerações de Simetria

Outra situação muito comum na prática da engenharia são os problemas que apresentam simetria em termos de geometria e carregamento, tal como ilustrado na Figura 4.10.

É possível tomar partido dessas simetrias para reduzir o número de incógnitas do problema e, conseqüentemente, diminuir o esforço de modelagem

empregado na análise do problema. As seções a seguir demonstram esse procedimento em detalhes.

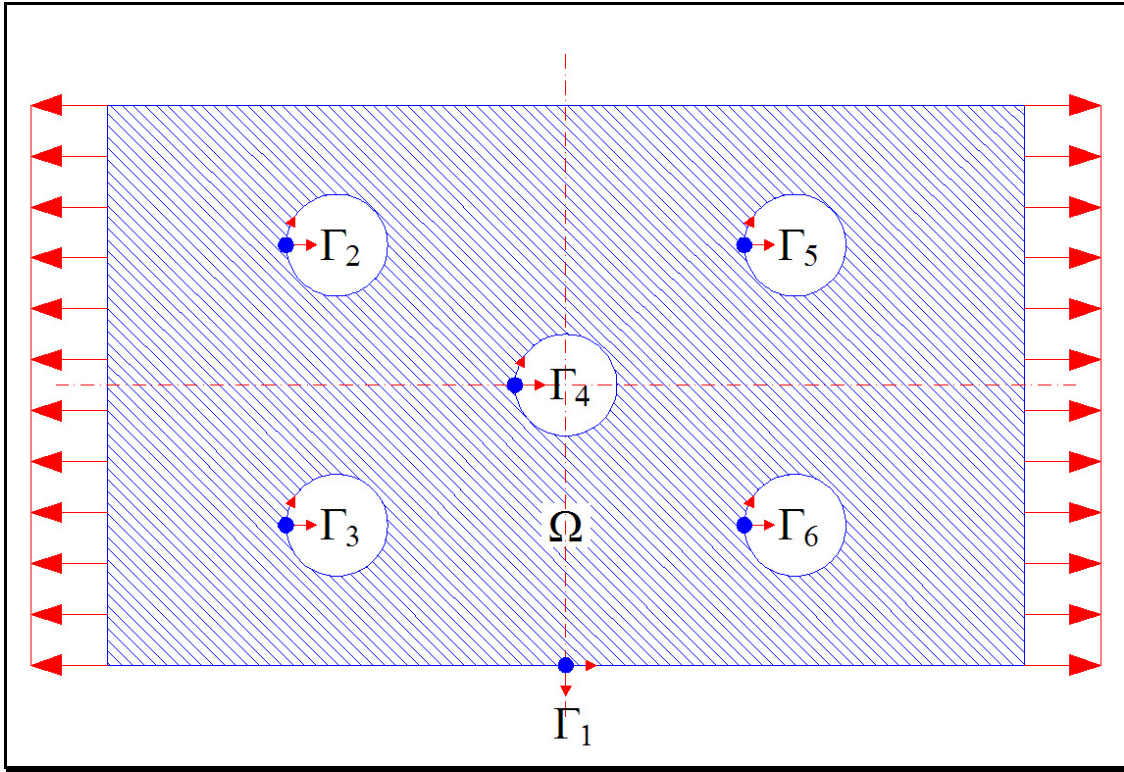


FIGURA 4.10 – Exemplo de problema que apresenta simetria

4.5.1 Problema Exemplo para Análise de Simetria

Tomando a equação integral de contorno discretizada

$$\sum_{\gamma=1}^{Nn} H_{ij}^{c\gamma} u_j^\gamma = \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^m G_{ij}^{c n \alpha} t_j^{n \alpha} \quad c = 1, 2, \dots, Nn$$

e desenvolvendo-a para a malha modelo da Figura 4.11 obtém-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_{11}^{c1} & H_{12}^{c1} \\ H_{21}^{c1} & H_{22}^{c1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c2} & H_{12}^{c2} \\ H_{21}^{c2} & H_{22}^{c2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c3} & H_{12}^{c3} \\ H_{21}^{c3} & H_{22}^{c3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c4} & H_{12}^{c4} \\ H_{21}^{c4} & H_{22}^{c4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} H_{11}^{c5} & H_{12}^{c5} \\ H_{21}^{c5} & H_{22}^{c5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^5 \\ u_2^5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c6} & H_{12}^{c6} \\ H_{21}^{c6} & H_{22}^{c6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^6 \\ u_2^6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c7} & H_{12}^{c7} \\ H_{21}^{c7} & H_{22}^{c7} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^7 \\ u_2^7 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c8} & H_{12}^{c8} \\ H_{21}^{c8} & H_{22}^{c8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^8 \\ u_2^8 \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} H_{11}^{c9} & H_{12}^{c9} \\ H_{21}^{c9} & H_{22}^{c9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^9 \\ u_2^9 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c10} & H_{12}^{c10} \\ H_{21}^{c10} & H_{22}^{c10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{10} \\ u_2^{10} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c11} & H_{12}^{c11} \\ H_{21}^{c11} & H_{22}^{c11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{11} \\ u_2^{11} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c12} & H_{12}^{c12} \\ H_{21}^{c12} & H_{22}^{c12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{12} \\ u_2^{12} \end{Bmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} H_{11}^{c13} & H_{12}^{c13} \\ H_{21}^{c13} & H_{22}^{c13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{13} \\ u_2^{13} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c14} & H_{12}^{c14} \\ H_{21}^{c14} & H_{22}^{c14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{14} \\ u_2^{14} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c15} & H_{12}^{c15} \\ H_{21}^{c15} & H_{22}^{c15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{15} \\ u_2^{15} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c16} & H_{12}^{c16} \\ H_{21}^{c16} & H_{22}^{c16} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{16} \\ u_2^{16} \end{Bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} G_{11}^{c11} & G_{12}^{c11} & G_{11}^{c12} & G_{12}^{c12} & G_{11}^{c13} & G_{12}^{c13} \\ G_{21}^{c11} & G_{22}^{c11} & G_{21}^{c12} & G_{22}^{c12} & G_{21}^{c13} & G_{22}^{c13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{11} \\ t_2^{11} \\ t_1^{12} \\ t_2^{12} \\ t_1^{13} \\ t_2^{13} \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} G_{11}^{c21} & G_{12}^{c21} & G_{11}^{c22} & G_{12}^{c22} & G_{11}^{c23} & G_{12}^{c23} \\ G_{21}^{c21} & G_{22}^{c21} & G_{21}^{c22} & G_{22}^{c22} & G_{21}^{c23} & G_{22}^{c23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{21} \\ t_2^{21} \\ t_1^{22} \\ t_2^{22} \\ t_1^{23} \\ t_2^{23} \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} G_{11}^{c31} & G_{12}^{c31} & G_{11}^{c32} & G_{12}^{c32} & G_{11}^{c33} & G_{12}^{c33} \\ G_{21}^{c31} & G_{22}^{c31} & G_{21}^{c32} & G_{22}^{c32} & G_{21}^{c33} & G_{22}^{c33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{31} \\ t_2^{31} \\ t_1^{32} \\ t_2^{32} \\ t_1^{33} \\ t_2^{33} \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} G_{11}^{c41} & G_{12}^{c41} & G_{11}^{c42} & G_{12}^{c42} & G_{11}^{c43} & G_{12}^{c43} \\ G_{21}^{c41} & G_{22}^{c41} & G_{21}^{c42} & G_{22}^{c42} & G_{21}^{c43} & G_{22}^{c43} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{41} \\ t_2^{41} \\ t_1^{42} \\ t_2^{42} \\ t_1^{43} \\ t_2^{43} \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} G_{11}^{c51} & G_{12}^{c51} & G_{11}^{c52} & G_{12}^{c52} & G_{11}^{c53} & G_{12}^{c53} \\ G_{21}^{c51} & G_{22}^{c51} & G_{21}^{c52} & G_{22}^{c52} & G_{21}^{c53} & G_{22}^{c53} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{51} \\ t_2^{51} \\ t_1^{52} \\ t_2^{52} \\ t_1^{53} \\ t_2^{53} \end{Bmatrix} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} G_{11}^{c61} & G_{12}^{c61} & G_{11}^{c62} & G_{12}^{c62} & G_{11}^{c63} & G_{12}^{c63} \\ G_{21}^{c61} & G_{22}^{c61} & G_{21}^{c62} & G_{22}^{c62} & G_{21}^{c63} & G_{22}^{c63} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{61} \\ t_2^{61} \\ t_1^{62} \\ t_2^{62} \\ t_1^{63} \\ t_2^{63} \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} G_{11}^{c71} & G_{12}^{c71} & G_{11}^{c72} & G_{12}^{c72} & G_{11}^{c73} & G_{12}^{c73} \\ G_{21}^{c71} & G_{22}^{c71} & G_{21}^{c72} & G_{22}^{c72} & G_{21}^{c73} & G_{22}^{c73} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{71} \\ t_2^{71} \\ t_1^{72} \\ t_2^{72} \\ t_1^{73} \\ t_2^{73} \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} G_{11}^{c81} & G_{12}^{c81} & G_{11}^{c82} & G_{12}^{c82} & G_{11}^{c83} & G_{12}^{c83} \\ G_{21}^{c81} & G_{22}^{c81} & G_{21}^{c82} & G_{22}^{c82} & G_{21}^{c83} & G_{22}^{c83} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{81} \\ t_2^{81} \\ t_1^{82} \\ t_2^{82} \\ t_1^{83} \\ t_2^{83} \end{Bmatrix} \quad c = 1, 2, \dots, 16
\end{aligned}$$

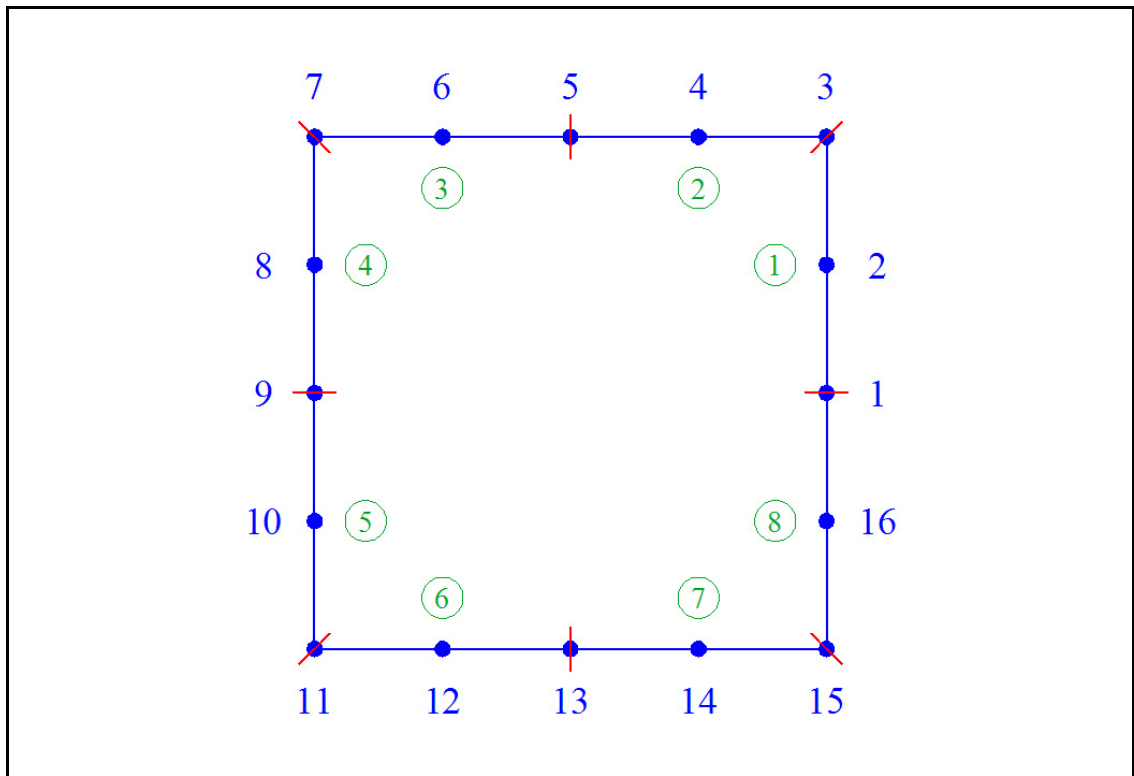


FIGURA 4.11 – Malha modelo para análise de problemas que apresentam simetria

Dependendo do tipo de simetria apresentada pelo problema, essa equação pode ser rearranjada de diferentes maneiras.

4.5.1.1 Simetria em Relação ao Eixo Horizontal

Se o problema apresentar somente simetria em relação ao eixo horizontal, tal como ilustrado na Figura 4.12, as condições de contorno para deslocamentos serão dadas por

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_1^I \\ 0 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_1^{I6} \\ -u_2^{I6} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_1^{I5} \\ -u_2^{I5} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_1^{I4} \\ -u_2^{I4} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} u_1^5 \\ u_2^5 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_1^{I3} \\ -u_2^{I3} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} u_1^6 \\ u_2^6 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_1^{I2} \\ -u_2^{I2} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_1^7 \\ u_2^7 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_1^{I1} \\ -u_2^{I1} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} u_1^8 \\ u_2^8 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_1^{I0} \\ -u_2^{I0} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} u_1^9 \\ u_2^9 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_1^9 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

e as condições de contorno para forças de superfície por

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} t_1^{11} \\ t_2^{11} \\ t_1^{12} \\ t_2^{12} \\ t_1^{13} \\ t_2^{13} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} t_1^{83} \\ -t_2^{83} \\ t_1^{82} \\ -t_2^{82} \\ t_1^{81} \\ -t_2^{81} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} t_1^{21} \\ t_2^{21} \\ t_1^{22} \\ t_2^{22} \\ t_1^{23} \\ t_2^{23} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} t_1^{73} \\ -t_2^{73} \\ t_1^{72} \\ -t_2^{72} \\ t_1^{71} \\ -t_2^{71} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} t_1^{31} \\ t_2^{31} \\ t_1^{32} \\ t_2^{32} \\ t_1^{33} \\ t_2^{33} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} t_1^{63} \\ -t_2^{63} \\ t_1^{62} \\ -t_2^{62} \\ t_1^{61} \\ -t_2^{61} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} t_1^{41} \\ t_2^{41} \\ t_1^{42} \\ t_2^{42} \\ t_1^{43} \\ t_2^{43} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} t_1^{53} \\ -t_2^{53} \\ t_1^{52} \\ -t_2^{52} \\ t_1^{51} \\ -t_2^{51} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando essas condições de contorno na equação integral de contorno genérica encontra-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_{11}^{c1} & H_{12}^{c1} \\ H_{21}^{c1} & H_{22}^{c1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c2} & H_{12}^{c2} \\ H_{21}^{c2} & H_{22}^{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c16} & -H_{12}^{c16} \\ H_{21}^{c16} & -H_{22}^{c16} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} H_{11}^{c3} & H_{12}^{c3} \\ H_{21}^{c3} & H_{22}^{c3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c15} & -H_{12}^{c15} \\ H_{21}^{c15} & -H_{22}^{c15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c4} & H_{12}^{c4} \\ H_{21}^{c4} & H_{22}^{c4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c14} & -H_{12}^{c14} \\ H_{21}^{c14} & -H_{22}^{c14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} H_{11}^{c5} & H_{12}^{c5} \\ H_{21}^{c5} & H_{22}^{c5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c13} & -H_{12}^{c13} \\ H_{21}^{c13} & -H_{22}^{c13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^5 \\ u_2^5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c6} & H_{12}^{c6} \\ H_{21}^{c6} & H_{22}^{c6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c12} & -H_{12}^{c12} \\ H_{21}^{c12} & -H_{22}^{c12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^6 \\ u_2^6 \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} H_{11}^{c7} & H_{12}^{c7} \\ H_{21}^{c7} & H_{22}^{c7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c11} & -H_{12}^{c11} \\ H_{21}^{c11} & -H_{22}^{c11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^7 \\ u_2^7 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c8} & H_{12}^{c8} \\ H_{21}^{c8} & H_{22}^{c8} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c10} & -H_{12}^{c10} \\ H_{21}^{c10} & -H_{22}^{c10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^8 \\ u_2^8 \end{Bmatrix} + \end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} H_{11}^{c9} & H_{12}^{c9} \\ H_{21}^{c9} & H_{22}^{c9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^9 \\ u_2^9 \end{Bmatrix} =$$

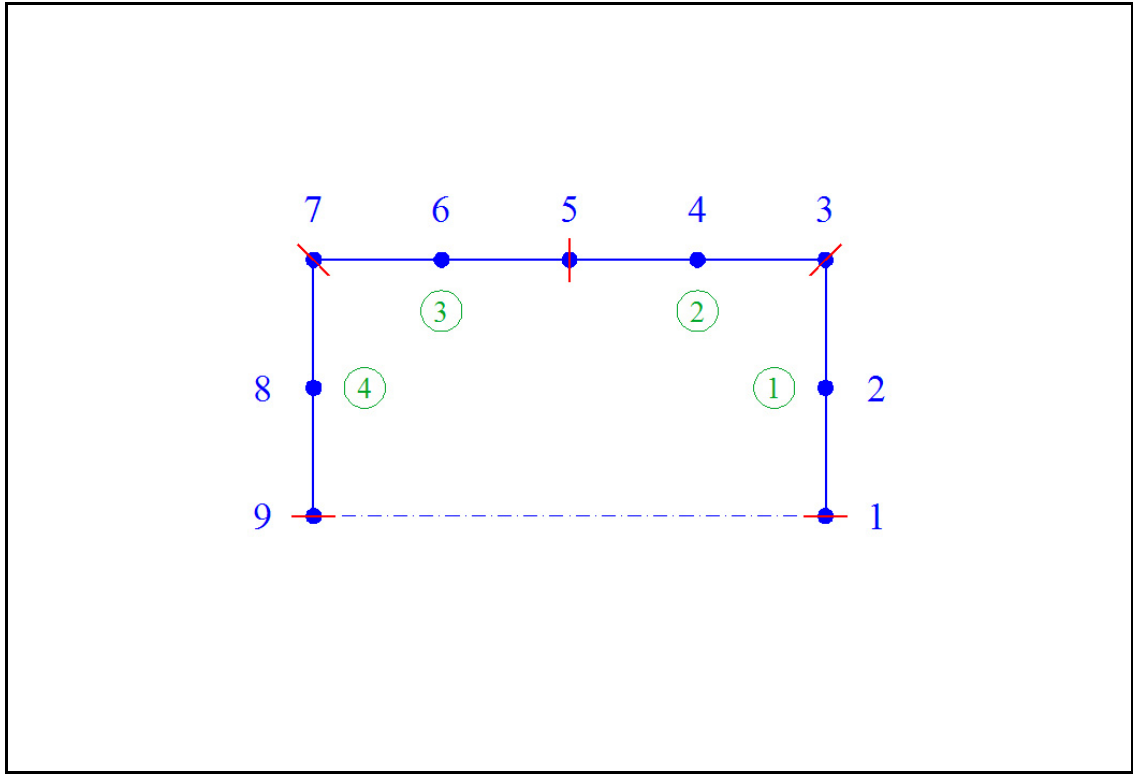


FIGURA 4.12 – Malha modelo considerando apenas simetria em relação ao eixo horizontal

$$= \begin{bmatrix} G_{11}^{c11} & G_{12}^{c11} & G_{11}^{c12} & G_{12}^{c12} & G_{11}^{c13} & G_{12}^{c13} \\ G_{21}^{c11} & G_{22}^{c11} & G_{21}^{c12} & G_{22}^{c12} & G_{21}^{c13} & G_{22}^{c13} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} t_1^{11} \\ t_2^{11} \\ t_1^{12} \\ t_2^{12} \\ t_1^{13} \\ t_2^{13} \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} G_{11}^{c83} & -G_{12}^{c83} & G_{11}^{c82} & -G_{12}^{c82} & G_{11}^{c81} & -G_{12}^{c81} \\ G_{21}^{c83} & -G_{22}^{c83} & G_{21}^{c82} & -G_{22}^{c82} & G_{21}^{c81} & -G_{22}^{c81} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{12} \\ t_2^{12} \\ t_1^{13} \\ t_2^{13} \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} G_{11}^{c21} & G_{12}^{c21} & G_{11}^{c22} & G_{12}^{c22} & G_{11}^{c23} & G_{12}^{c23} \\ G_{21}^{c21} & G_{22}^{c21} & G_{21}^{c22} & G_{22}^{c22} & G_{21}^{c23} & G_{22}^{c23} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} t_1^{21} \\ t_2^{21} \\ t_1^{22} \\ t_2^{22} \\ t_1^{23} \\ t_2^{23} \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} G_{11}^{c73} & -G_{12}^{c73} & G_{11}^{c72} & -G_{12}^{c72} & G_{11}^{c71} & -G_{12}^{c71} \\ G_{21}^{c73} & -G_{22}^{c73} & G_{21}^{c72} & -G_{22}^{c72} & G_{21}^{c71} & -G_{22}^{c71} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{22} \\ t_2^{22} \\ t_1^{23} \\ t_2^{23} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\begin{array}{cc} G_{11}^{c31} & G_{12}^{c31} \\ G_{21}^{c31} & G_{22}^{c31} \end{array} \quad \begin{array}{cc} G_{11}^{c32} & G_{12}^{c32} \\ G_{21}^{c32} & G_{22}^{c32} \end{array} \quad \begin{array}{cc} G_{11}^{c33} & G_{12}^{c33} \\ G_{21}^{c33} & G_{22}^{c33} \end{array} \right] + \left\{ \begin{array}{c} t_1^{31} \\ t_2^{31} \\ t_1^{32} \\ t_2^{32} \\ t_1^{33} \\ t_2^{33} \end{array} \right\} + \\
& + \left[\begin{array}{cc} G_{11}^{c63} & -G_{12}^{c63} \\ G_{21}^{c63} & -G_{22}^{c63} \end{array} \quad \begin{array}{cc} G_{11}^{c62} & -G_{12}^{c62} \\ G_{21}^{c62} & -G_{22}^{c62} \end{array} \quad \begin{array}{cc} G_{11}^{c61} & -G_{12}^{c61} \\ G_{21}^{c61} & -G_{22}^{c61} \end{array} \right] \\
& + \left[\begin{array}{cc} G_{11}^{c41} & G_{12}^{c41} \\ G_{21}^{c41} & G_{22}^{c41} \end{array} \quad \begin{array}{cc} G_{11}^{c42} & G_{12}^{c42} \\ G_{21}^{c42} & G_{22}^{c42} \end{array} \quad \begin{array}{cc} G_{11}^{c43} & G_{12}^{c43} \\ G_{21}^{c43} & G_{22}^{c43} \end{array} \right] + \left\{ \begin{array}{c} t_1^{41} \\ t_2^{41} \\ t_1^{42} \\ t_2^{42} \\ t_1^{43} \\ t_2^{43} \end{array} \right\} \quad c = 1, 2, \dots, 9
\end{aligned}$$

ou, de maneira equivalente,

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c11} & P_{12}^{c11} \\ P_{21}^{c11} & P_{22}^{c11} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c83} & P_{12}^{c83} \\ P_{21}^{c83} & P_{22}^{c83} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1^1 \\ u_2^1 \end{array} \right\} + \\
& + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c12} & P_{12}^{c12} \\ P_{21}^{c12} & P_{22}^{c12} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c82} & -P_{12}^{c82} \\ P_{21}^{c82} & -P_{22}^{c82} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1^2 \\ u_2^2 \end{array} \right\} + \\
& + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c13} & P_{12}^{c13} \\ P_{21}^{c13} & P_{22}^{c13} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c21} & P_{12}^{c21} \\ P_{21}^{c21} & P_{22}^{c21} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c81} & -P_{12}^{c81} \\ P_{21}^{c81} & -P_{22}^{c81} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c73} & -P_{12}^{c73} \\ P_{21}^{c73} & -P_{22}^{c73} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1^3 \\ u_2^3 \end{array} \right\} + \\
& + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c22} & P_{12}^{c22} \\ P_{21}^{c22} & P_{22}^{c22} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c72} & -P_{12}^{c72} \\ P_{21}^{c72} & -P_{22}^{c72} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1^4 \\ u_2^4 \end{array} \right\} + \\
& + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c23} & P_{12}^{c23} \\ P_{21}^{c23} & P_{22}^{c23} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c31} & P_{12}^{c31} \\ P_{21}^{c31} & P_{22}^{c31} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c71} & -P_{12}^{c71} \\ P_{21}^{c71} & -P_{22}^{c71} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c63} & -P_{12}^{c63} \\ P_{21}^{c63} & -P_{22}^{c63} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1^5 \\ u_2^5 \end{array} \right\} + \\
& + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c32} & P_{12}^{c32} \\ P_{21}^{c32} & P_{22}^{c32} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c62} & -P_{12}^{c62} \\ P_{21}^{c62} & -P_{22}^{c62} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1^6 \\ u_2^6 \end{array} \right\} + \\
& + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c33} & P_{12}^{c33} \\ P_{21}^{c33} & P_{22}^{c33} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c41} & P_{12}^{c41} \\ P_{21}^{c41} & P_{22}^{c41} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c61} & -P_{12}^{c61} \\ P_{21}^{c61} & -P_{22}^{c61} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c53} & -P_{12}^{c53} \\ P_{21}^{c53} & -P_{22}^{c53} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1^7 \\ u_2^7 \end{array} \right\} + \\
& + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c42} & P_{12}^{c42} \\ P_{21}^{c42} & P_{22}^{c42} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} P_{11}^{c52} & -P_{12}^{c52} \\ P_{21}^{c52} & -P_{22}^{c52} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1^8 \\ u_2^8 \end{array} \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\begin{bmatrix} P_{11}^{c43} & P_{12}^{c43} \\ P_{21}^{c43} & P_{22}^{c43} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c51} & P_{12}^{c51} \\ P_{21}^{c51} & P_{22}^{c51} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^9 \\ u_2^9 \end{Bmatrix} = \\
& = \left[\begin{bmatrix} Q_{11}^{c11} & Q_{12}^{c11} & Q_{11}^{c12} & Q_{12}^{c12} & Q_{11}^{c13} & Q_{12}^{c13} \\ Q_{21}^{c11} & Q_{22}^{c11} & Q_{21}^{c12} & Q_{22}^{c12} & Q_{21}^{c13} & Q_{22}^{c13} \end{bmatrix} + \right. \\
& \quad \left. + \begin{bmatrix} Q_{11}^{c83} & -Q_{12}^{c83} & Q_{11}^{c82} & -Q_{12}^{c82} & Q_{11}^{c81} & -Q_{12}^{c81} \\ Q_{21}^{c83} & -Q_{22}^{c83} & Q_{21}^{c82} & -Q_{22}^{c82} & Q_{21}^{c81} & -Q_{22}^{c81} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} t_1^{11} \\ t_2^{11} \\ t_1^{12} \\ t_2^{12} \\ t_1^{13} \\ t_2^{13} \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} Q_{11}^{c21} & Q_{12}^{c21} & Q_{11}^{c22} & Q_{12}^{c22} & Q_{11}^{c23} & Q_{12}^{c23} \\ Q_{21}^{c21} & Q_{22}^{c21} & Q_{21}^{c22} & Q_{22}^{c22} & Q_{21}^{c23} & Q_{22}^{c23} \end{bmatrix} + \right. \\
& \quad \left. + \begin{bmatrix} Q_{11}^{c73} & -Q_{12}^{c73} & Q_{11}^{c72} & -Q_{12}^{c72} & Q_{11}^{c71} & -Q_{12}^{c71} \\ Q_{21}^{c73} & -Q_{22}^{c73} & Q_{21}^{c72} & -Q_{22}^{c72} & Q_{21}^{c71} & -Q_{22}^{c71} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} t_1^{21} \\ t_2^{21} \\ t_1^{22} \\ t_2^{22} \\ t_1^{23} \\ t_2^{23} \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} Q_{11}^{c31} & Q_{12}^{c31} & Q_{11}^{c32} & Q_{12}^{c32} & Q_{11}^{c33} & Q_{12}^{c33} \\ Q_{21}^{c31} & Q_{22}^{c31} & Q_{21}^{c32} & Q_{22}^{c32} & Q_{21}^{c33} & Q_{22}^{c33} \end{bmatrix} + \right. \\
& \quad \left. + \begin{bmatrix} Q_{11}^{c63} & -Q_{12}^{c63} & Q_{11}^{c62} & -Q_{12}^{c62} & Q_{11}^{c61} & -Q_{12}^{c61} \\ Q_{21}^{c63} & -Q_{22}^{c63} & Q_{21}^{c62} & -Q_{22}^{c62} & Q_{21}^{c61} & -Q_{22}^{c61} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} t_1^{31} \\ t_2^{31} \\ t_1^{32} \\ t_2^{32} \\ t_1^{33} \\ t_2^{33} \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} Q_{11}^{c41} & Q_{12}^{c41} & Q_{11}^{c42} & Q_{12}^{c42} & Q_{11}^{c43} & Q_{12}^{c43} \\ Q_{21}^{c41} & Q_{22}^{c41} & Q_{21}^{c42} & Q_{22}^{c42} & Q_{21}^{c43} & Q_{22}^{c43} \end{bmatrix} + \right. \\
& \quad \left. + \begin{bmatrix} Q_{11}^{c53} & -Q_{12}^{c53} & Q_{11}^{c52} & -Q_{12}^{c52} & Q_{11}^{c51} & -Q_{12}^{c51} \\ Q_{21}^{c53} & -Q_{22}^{c53} & Q_{21}^{c52} & -Q_{22}^{c52} & Q_{21}^{c51} & -Q_{22}^{c51} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} t_1^{41} \\ t_2^{41} \\ t_1^{42} \\ t_2^{42} \\ t_1^{43} \\ t_2^{43} \end{Bmatrix} \quad c = 1, 2, \dots, 9
\end{aligned}$$

Os coeficientes $P_{ij}^{cn\alpha}$ e $Q_{ij}^{cn\alpha}$ resultantes das integrações sobre os elementos não discretizados podem ser obtidos através da técnica de reflexão do ponto fonte ilustrada na Figura 4.13.

$$\begin{Bmatrix} t_1^{11} \\ t_2^{11} \\ t_1^{12} \\ t_2^{12} \\ t_1^{13} \\ t_2^{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -t_1^{83} \\ t_2^{83} \\ -t_1^{82} \\ t_2^{82} \\ -t_1^{81} \\ t_2^{81} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} t_1^{21} \\ t_2^{21} \\ t_1^{22} \\ t_2^{22} \\ t_1^{23} \\ t_2^{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -t_1^{73} \\ t_2^{73} \\ -t_1^{72} \\ t_2^{72} \\ -t_1^{71} \\ t_2^{71} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} t_1^{31} \\ t_2^{31} \\ t_1^{32} \\ t_2^{32} \\ t_1^{33} \\ t_2^{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -t_1^{63} \\ t_2^{63} \\ -t_1^{62} \\ t_2^{62} \\ -t_1^{61} \\ t_2^{61} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} t_1^{41} \\ t_2^{41} \\ t_1^{42} \\ t_2^{42} \\ t_1^{43} \\ t_2^{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -t_1^{53} \\ t_2^{53} \\ -t_1^{52} \\ t_2^{52} \\ -t_1^{51} \\ t_2^{51} \end{Bmatrix}$$

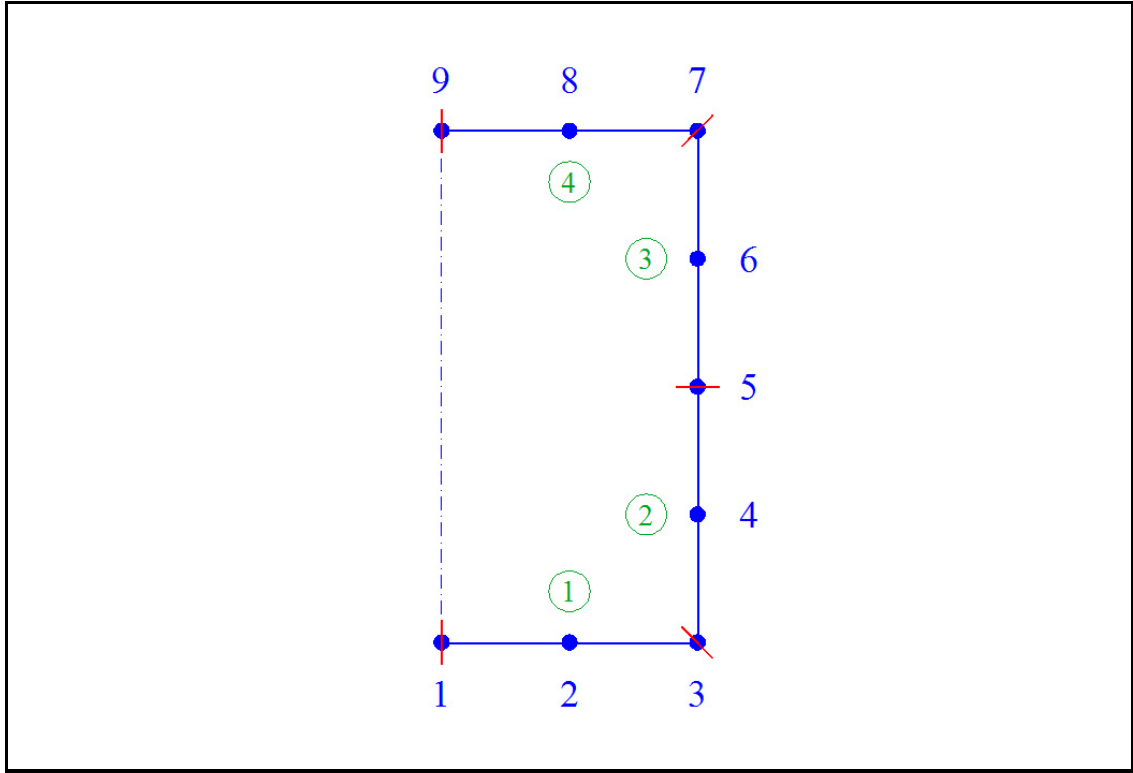


FIGURA 4.14 – Malha modelo considerando apenas simetria em relação ao eixo vertical

Aplicando essas condições de contorno na equação integral de contorno genérica encontra-se

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} H_{11}^{c1} & H_{12}^{c1} \\ H_{21}^{c1} & H_{22}^{c1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c2} & H_{12}^{c2} \\ H_{21}^{c2} & H_{22}^{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{11}^{c16} & H_{12}^{c16} \\ -H_{21}^{c16} & H_{22}^{c16} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} H_{11}^{c3} & H_{12}^{c3} \\ H_{21}^{c3} & H_{22}^{c3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{11}^{c15} & H_{12}^{c15} \\ -H_{21}^{c15} & H_{22}^{c15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c4} & H_{12}^{c4} \\ H_{21}^{c4} & H_{22}^{c4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{11}^{c14} & H_{12}^{c14} \\ -H_{21}^{c14} & H_{22}^{c14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \end{Bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} H_{11}^{c5} & H_{12}^{c5} \\ H_{21}^{c5} & H_{22}^{c5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{11}^{c13} & H_{12}^{c13} \\ -H_{21}^{c13} & H_{22}^{c13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^5 \\ u_2^5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c6} & H_{12}^{c6} \\ H_{21}^{c6} & H_{22}^{c6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{11}^{c12} & H_{12}^{c12} \\ -H_{21}^{c12} & H_{22}^{c12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^6 \\ u_2^6 \end{Bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} H_{11}^{c7} & H_{12}^{c7} \\ H_{21}^{c7} & H_{22}^{c7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{11}^{c11} & H_{12}^{c11} \\ -H_{21}^{c11} & H_{22}^{c11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^7 \\ u_2^7 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c8} & H_{12}^{c8} \\ H_{21}^{c8} & H_{22}^{c8} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{11}^{c10} & H_{12}^{c10} \\ -H_{21}^{c10} & H_{22}^{c10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^8 \\ u_2^8 \end{Bmatrix} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} H_{11}^{c9} & H_{12}^{c9} \\ H_{21}^{c9} & H_{22}^{c9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^9 \\ u_2^9 \end{Bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} G_{11}^{c11} & G_{12}^{c11} & G_{11}^{c12} & G_{12}^{c12} & G_{11}^{c13} & G_{12}^{c13} \\ G_{21}^{c11} & G_{22}^{c11} & G_{21}^{c12} & G_{22}^{c12} & G_{21}^{c13} & G_{22}^{c13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -G_{11}^{c83} & G_{12}^{c83} & -G_{11}^{c82} & G_{12}^{c82} & -G_{11}^{c81} & G_{12}^{c81} \\ -G_{21}^{c83} & G_{22}^{c83} & -G_{21}^{c82} & G_{22}^{c82} & -G_{21}^{c81} & G_{22}^{c81} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{11} \\ t_2^{11} \\ t_1^{12} \\ t_2^{12} \\ t_1^{13} \\ t_2^{13} \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} G_{11}^{c21} & G_{12}^{c21} & G_{11}^{c22} & G_{12}^{c22} & G_{11}^{c23} & G_{12}^{c23} \\ G_{21}^{c21} & G_{22}^{c21} & G_{21}^{c22} & G_{22}^{c22} & G_{21}^{c23} & G_{22}^{c23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -G_{11}^{c73} & G_{12}^{c73} & -G_{11}^{c72} & G_{12}^{c72} & -G_{11}^{c71} & G_{12}^{c71} \\ -G_{21}^{c73} & G_{22}^{c73} & -G_{21}^{c72} & G_{22}^{c72} & -G_{21}^{c71} & G_{22}^{c71} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{21} \\ t_2^{21} \\ t_1^{22} \\ t_2^{22} \\ t_1^{23} \\ t_2^{23} \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} G_{11}^{c31} & G_{12}^{c31} & G_{11}^{c32} & G_{12}^{c32} & G_{11}^{c33} & G_{12}^{c33} \\ G_{21}^{c31} & G_{22}^{c31} & G_{21}^{c32} & G_{22}^{c32} & G_{21}^{c33} & G_{22}^{c33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -G_{11}^{c63} & G_{12}^{c63} & -G_{11}^{c62} & G_{12}^{c62} & -G_{11}^{c61} & G_{12}^{c61} \\ -G_{21}^{c63} & G_{22}^{c63} & -G_{21}^{c62} & G_{22}^{c62} & -G_{21}^{c61} & G_{22}^{c61} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{31} \\ t_2^{31} \\ t_1^{32} \\ t_2^{32} \\ t_1^{33} \\ t_2^{33} \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} G_{11}^{c41} & G_{12}^{c41} & G_{11}^{c42} & G_{12}^{c42} & G_{11}^{c43} & G_{12}^{c43} \\ G_{21}^{c41} & G_{22}^{c41} & G_{21}^{c42} & G_{22}^{c42} & G_{21}^{c43} & G_{22}^{c43} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -G_{11}^{c53} & G_{12}^{c53} & -G_{11}^{c52} & G_{12}^{c52} & -G_{11}^{c51} & G_{12}^{c51} \\ -G_{21}^{c53} & G_{22}^{c53} & -G_{21}^{c52} & G_{22}^{c52} & -G_{21}^{c51} & G_{22}^{c51} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{41} \\ t_2^{41} \\ t_1^{42} \\ t_2^{42} \\ t_1^{43} \\ t_2^{43} \end{Bmatrix} \quad c = 1, 2, \dots, 9
\end{aligned}$$

ou, de maneira equivalente,

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{bmatrix} P_{11}^{c11} & P_{12}^{c11} \\ P_{21}^{c11} & P_{22}^{c11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c83} & P_{12}^{c83} \\ P_{21}^{c83} & P_{22}^{c83} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} P_{11}^{c12} & P_{12}^{c12} \\ P_{21}^{c12} & P_{22}^{c12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c82} & P_{12}^{c82} \\ -P_{21}^{c82} & P_{22}^{c82} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} P_{11}^{c13} & P_{12}^{c13} \\ P_{21}^{c13} & P_{22}^{c13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c21} & P_{12}^{c21} \\ P_{21}^{c21} & P_{22}^{c21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c81} & P_{12}^{c81} \\ -P_{21}^{c81} & P_{22}^{c81} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c73} & P_{12}^{c73} \\ -P_{21}^{c73} & P_{22}^{c73} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\begin{bmatrix} P_{11}^{c22} & P_{12}^{c22} \\ P_{21}^{c22} & P_{22}^{c22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c72} & P_{12}^{c72} \\ -P_{21}^{c72} & P_{22}^{c72} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} P_{11}^{c23} & P_{12}^{c23} \\ P_{21}^{c23} & P_{22}^{c23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c31} & P_{12}^{c31} \\ P_{21}^{c31} & P_{22}^{c31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c71} & P_{12}^{c71} \\ -P_{21}^{c71} & P_{22}^{c71} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c63} & P_{12}^{c63} \\ -P_{21}^{c63} & P_{22}^{c63} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^5 \\ u_2^5 \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} P_{11}^{c32} & P_{12}^{c32} \\ P_{21}^{c32} & P_{22}^{c32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c62} & P_{12}^{c62} \\ -P_{21}^{c62} & P_{22}^{c62} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^6 \\ u_2^6 \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} P_{11}^{c33} & P_{12}^{c33} \\ P_{21}^{c33} & P_{22}^{c33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c41} & P_{12}^{c41} \\ P_{21}^{c41} & P_{22}^{c41} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c61} & P_{12}^{c61} \\ -P_{21}^{c61} & P_{22}^{c61} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c53} & P_{12}^{c53} \\ -P_{21}^{c53} & P_{22}^{c53} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^7 \\ u_2^7 \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} P_{11}^{c42} & P_{12}^{c42} \\ P_{21}^{c42} & P_{22}^{c42} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c52} & P_{12}^{c52} \\ -P_{21}^{c52} & P_{22}^{c52} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^8 \\ u_2^8 \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} P_{11}^{c43} & P_{12}^{c43} \\ P_{21}^{c43} & P_{22}^{c43} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c51} & P_{12}^{c51} \\ P_{21}^{c51} & P_{22}^{c51} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^9 \\ u_2^9 \end{Bmatrix} = \\
& = \left[\begin{bmatrix} Q_{11}^{c11} & Q_{12}^{c11} & Q_{11}^{c12} & Q_{12}^{c12} & Q_{11}^{c13} & Q_{12}^{c13} \\ Q_{21}^{c11} & Q_{22}^{c11} & Q_{21}^{c12} & Q_{22}^{c12} & Q_{21}^{c13} & Q_{22}^{c13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Q_{11}^{c83} & Q_{12}^{c83} & -Q_{11}^{c82} & Q_{12}^{c82} & -Q_{11}^{c81} & Q_{12}^{c81} \\ -Q_{21}^{c83} & Q_{22}^{c83} & -Q_{21}^{c82} & Q_{22}^{c82} & -Q_{21}^{c81} & Q_{22}^{c81} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} t_1^{11} \\ t_2^{11} \\ t_1^{12} \\ t_2^{12} \\ t_1^{13} \\ t_2^{13} \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} Q_{11}^{c21} & Q_{12}^{c21} & Q_{11}^{c22} & Q_{12}^{c22} & Q_{11}^{c23} & Q_{12}^{c23} \\ Q_{21}^{c21} & Q_{22}^{c21} & Q_{21}^{c22} & Q_{22}^{c22} & Q_{21}^{c23} & Q_{22}^{c23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Q_{11}^{c73} & Q_{12}^{c73} & -Q_{11}^{c72} & Q_{12}^{c72} & -Q_{11}^{c71} & Q_{12}^{c71} \\ -Q_{21}^{c73} & Q_{22}^{c73} & -Q_{21}^{c72} & Q_{22}^{c72} & -Q_{21}^{c71} & Q_{22}^{c71} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} t_1^{21} \\ t_2^{21} \\ t_1^{22} \\ t_2^{22} \\ t_1^{23} \\ t_2^{23} \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} Q_{11}^{c31} & Q_{12}^{c31} & Q_{11}^{c32} & Q_{12}^{c32} & Q_{11}^{c33} & Q_{12}^{c33} \\ G_{21}^{c31} & G_{22}^{c31} & G_{21}^{c32} & G_{22}^{c32} & G_{21}^{c33} & G_{22}^{c33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Q_{11}^{c63} & Q_{12}^{c63} & -Q_{11}^{c62} & Q_{12}^{c62} & -Q_{11}^{c61} & Q_{12}^{c61} \\ -Q_{21}^{c63} & Q_{22}^{c63} & -Q_{21}^{c62} & Q_{22}^{c62} & -Q_{21}^{c61} & Q_{22}^{c61} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} t_1^{31} \\ t_2^{31} \\ t_1^{32} \\ t_2^{32} \\ t_1^{33} \\ t_2^{33} \end{Bmatrix} +
\end{aligned}$$

$$+ \left[\begin{array}{ccccc} Q_{11}^{c41} & Q_{12}^{c41} & Q_{11}^{c42} & Q_{12}^{c42} & Q_{11}^{c43} & Q_{12}^{c43} \\ Q_{21}^{c41} & Q_{22}^{c41} & Q_{21}^{c42} & Q_{22}^{c42} & Q_{21}^{c43} & Q_{22}^{c43} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccccc} -Q_{11}^{c53} & Q_{12}^{c53} & -Q_{11}^{c52} & Q_{12}^{c52} & -Q_{11}^{c51} & Q_{12}^{c51} \\ -Q_{21}^{c53} & Q_{22}^{c53} & -Q_{21}^{c52} & Q_{22}^{c52} & -Q_{21}^{c51} & Q_{22}^{c51} \end{array} \right] + \left\{ \begin{array}{l} t_1^{41} \\ t_2^{41} \\ t_1^{42} \\ t_2^{42} \\ t_1^{43} \\ t_2^{43} \end{array} \right\} \quad c = 1, 2, \dots, 9$$

Os coeficientes $P_{ij}^{c\alpha}$ e $Q_{ij}^{c\alpha}$ resultantes das integrações sobre os elementos não discretizados podem ser obtidos através da técnica de reflexão do ponto fonte ilustrada na Figura 4.15.

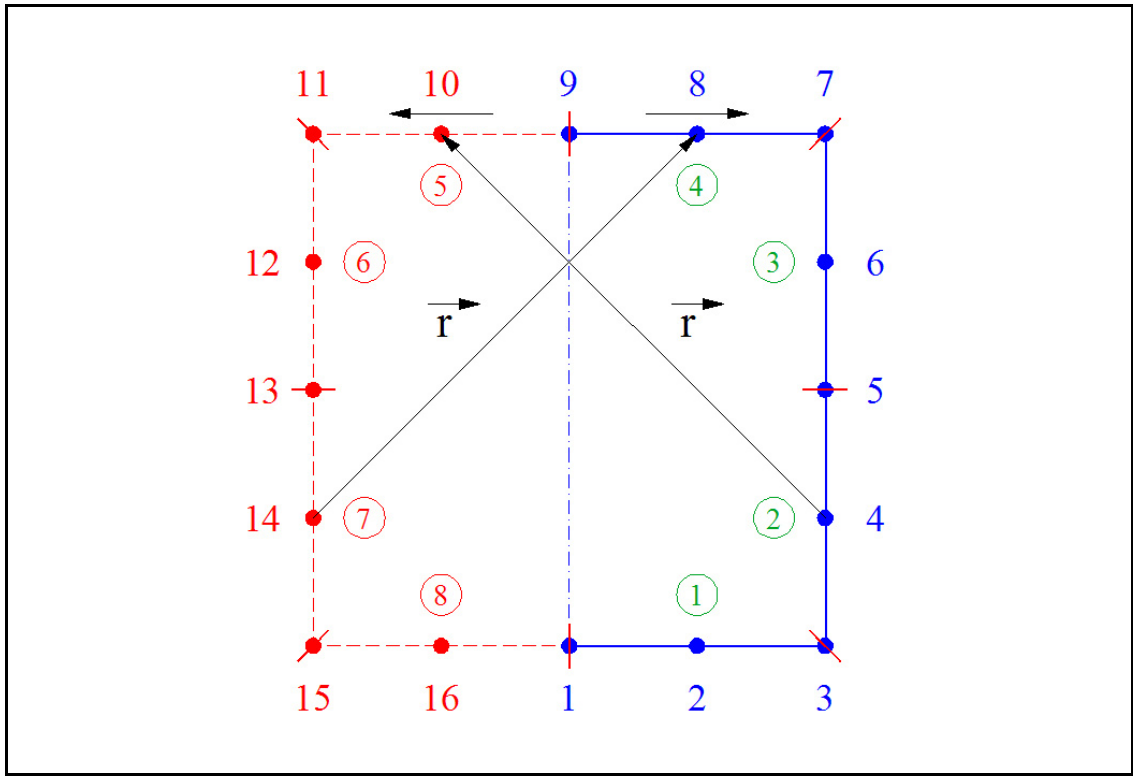


FIGURA 4.15 – Técnica de reflexão do ponto fonte considerando apenas simetria em relação ao eixo vertical

4.5.1.3 Simetria em Relação ao Eixo Horizontal e Vertical

Se o problema apresentar simetria em relação ao eixo horizontal e vertical simultaneamente, tal como ilustrado na Figura 4.16, as condições de contorno para deslocamentos serão dadas por

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -u_1^9 \\ u_2^9 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -u_1^8 \\ u_2^8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -u_1^{10} \\ -u_2^{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^{16} \\ -u_2^{16} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -u_1^7 \\ u_2^7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -u_1^{11} \\ -u_2^{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^{15} \\ -u_2^{15} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -u_1^6 \\ u_2^6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -u_1^{12} \\ -u_2^{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^{14} \\ -u_2^{14} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_1^5 \\ u_2^5 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2^5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^{13} \\ -u_2^{13} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

e as condições de contorno para forças de superfície por

$$\begin{Bmatrix} t_1^{11} \\ t_2^{11} \\ t_1^{12} \\ t_2^{12} \\ t_1^{13} \\ t_2^{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -t_1^{43} \\ t_2^{43} \\ -t_1^{42} \\ t_2^{42} \\ -t_1^{41} \\ t_2^{41} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -t_1^{51} \\ -t_2^{51} \\ -t_1^{52} \\ -t_2^{52} \\ -t_1^{53} \\ -t_2^{53} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1^{83} \\ -t_2^{83} \\ t_1^{82} \\ -t_2^{82} \\ t_1^{81} \\ -t_2^{81} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} t_1^{21} \\ t_2^{21} \\ t_1^{22} \\ t_2^{22} \\ t_1^{23} \\ t_2^{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -t_1^{33} \\ t_2^{33} \\ -t_1^{32} \\ t_2^{32} \\ -t_1^{31} \\ t_2^{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -t_1^{61} \\ -t_2^{61} \\ -t_1^{62} \\ -t_2^{62} \\ -t_1^{63} \\ -t_2^{63} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1^{73} \\ -t_2^{73} \\ t_1^{72} \\ -t_2^{72} \\ t_1^{71} \\ -t_2^{71} \end{Bmatrix}$$

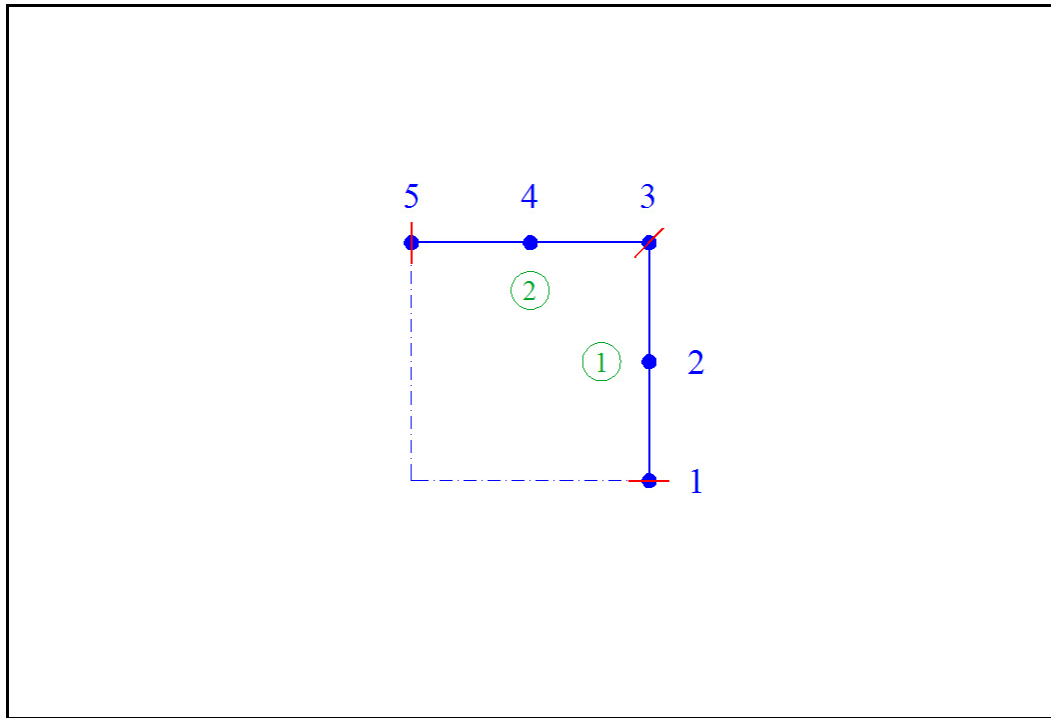


FIGURA 4.16 – Malha modelo considerando simetria em relação ao eixo horizontal e vertical simultaneamente

Aplicando essas condições de contorno na equação integral de contorno genérica encontra-se

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{bmatrix} H_{11}^{c1} & H_{12}^{c1} \\ H_{21}^{c1} & H_{22}^{c1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{11}^{c9} & H_{12}^{c9} \\ -H_{21}^{c9} & H_{22}^{c9} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} H_{11}^{c2} & H_{12}^{c2} \\ H_{21}^{c2} & H_{22}^{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{11}^{c8} & H_{12}^{c8} \\ -H_{21}^{c8} & H_{22}^{c8} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{11}^{c10} & -H_{12}^{c10} \\ -H_{21}^{c10} & -H_{22}^{c10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c16} & -H_{12}^{c16} \\ H_{21}^{c16} & -H_{22}^{c16} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} H_{11}^{c3} & H_{12}^{c3} \\ H_{21}^{c3} & H_{22}^{c3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{11}^{c7} & H_{12}^{c7} \\ -H_{21}^{c7} & H_{22}^{c7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{11}^{c11} & -H_{12}^{c11} \\ -H_{21}^{c11} & -H_{22}^{c11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c15} & -H_{12}^{c15} \\ H_{21}^{c15} & -H_{22}^{c15} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} H_{11}^{c4} & H_{12}^{c4} \\ H_{21}^{c4} & H_{22}^{c4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{11}^{c6} & H_{12}^{c6} \\ -H_{21}^{c6} & H_{22}^{c6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{11}^{c12} & -H_{12}^{c12} \\ -H_{21}^{c12} & -H_{22}^{c12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c14} & -H_{12}^{c14} \\ H_{21}^{c14} & -H_{22}^{c14} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} H_{11}^{c5} & H_{12}^{c5} \\ H_{21}^{c5} & H_{22}^{c5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^{c13} & -H_{12}^{c13} \\ H_{21}^{c13} & -H_{22}^{c13} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^5 \\ u_2^5 \end{Bmatrix} = \\
& = \left[\begin{bmatrix} G_{11}^{c11} & G_{12}^{c11} & G_{11}^{c12} & G_{12}^{c12} & G_{11}^{c13} & G_{12}^{c13} \\ G_{21}^{c11} & G_{22}^{c11} & G_{21}^{c12} & G_{22}^{c12} & G_{21}^{c13} & G_{22}^{c13} \end{bmatrix} + \right. \\
& + \begin{bmatrix} -G_{11}^{c43} & G_{12}^{c43} & -G_{11}^{c42} & G_{12}^{c42} & -G_{11}^{c41} & G_{12}^{c41} \\ -G_{21}^{c43} & G_{22}^{c43} & -G_{21}^{c42} & G_{22}^{c42} & -G_{21}^{c41} & G_{22}^{c41} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} -G_{11}^{c51} & -G_{12}^{c51} & -G_{11}^{c52} & -G_{12}^{c52} & -G_{11}^{c53} & -G_{12}^{c53} \\ -G_{21}^{c51} & -G_{22}^{c51} & -G_{21}^{c52} & -G_{22}^{c52} & -G_{21}^{c53} & -G_{22}^{c53} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} G_{11}^{c83} & -G_{12}^{c83} & G_{11}^{c82} & -G_{12}^{c82} & G_{11}^{c81} & -G_{12}^{c81} \\ G_{21}^{c83} & -G_{22}^{c83} & G_{21}^{c82} & -G_{22}^{c82} & G_{21}^{c81} & -G_{22}^{c81} \end{bmatrix} \left. \begin{Bmatrix} t_1^{11} \\ t_2^{11} \\ t_1^{12} \\ t_2^{12} \\ t_1^{13} \\ t_2^{13} \end{Bmatrix} + \right. \\
& + \left[\begin{bmatrix} G_{11}^{c21} & G_{12}^{c21} & G_{11}^{c22} & G_{12}^{c22} & G_{11}^{c23} & G_{12}^{c23} \\ G_{21}^{c21} & G_{22}^{c21} & G_{21}^{c22} & G_{22}^{c22} & G_{21}^{c23} & G_{22}^{c23} \end{bmatrix} + \right. \\
& + \begin{bmatrix} -G_{11}^{c33} & G_{12}^{c33} & -G_{11}^{c32} & G_{12}^{c32} & -G_{11}^{c31} & G_{12}^{c31} \\ -G_{21}^{c33} & G_{22}^{c33} & -G_{21}^{c32} & G_{22}^{c32} & -G_{21}^{c31} & G_{22}^{c31} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} -G_{11}^{c61} & -G_{12}^{c61} & -G_{11}^{c62} & -G_{12}^{c62} & -G_{11}^{c63} & -G_{12}^{c63} \\ -G_{21}^{c61} & -G_{22}^{c61} & -G_{21}^{c62} & -G_{22}^{c62} & -G_{21}^{c63} & -G_{22}^{c63} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} G_{11}^{c73} & -G_{12}^{c73} & G_{11}^{c72} & -G_{12}^{c72} & G_{11}^{c71} & -G_{12}^{c71} \\ G_{21}^{c73} & -G_{22}^{c73} & G_{21}^{c72} & -G_{22}^{c72} & G_{21}^{c71} & -G_{22}^{c71} \end{bmatrix} \left. \begin{Bmatrix} t_1^{21} \\ t_2^{21} \\ t_1^{22} \\ t_2^{22} \\ t_1^{23} \\ t_2^{23} \end{Bmatrix} \right] c = 1, 2, \dots, 5
\end{aligned}$$

ou, de maneira equivalente,

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{bmatrix} P_{11}^{c11} & P_{12}^{c11} \\ P_{21}^{c11} & P_{22}^{c11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c43} & P_{12}^{c43} \\ -P_{21}^{c43} & P_{22}^{c43} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c51} & P_{12}^{c51} \\ -P_{21}^{c51} & P_{22}^{c51} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c83} & P_{12}^{c83} \\ P_{21}^{c83} & P_{22}^{c83} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} P_{11}^{c12} & P_{12}^{c12} \\ P_{21}^{c12} & P_{22}^{c12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c42} & P_{12}^{c42} \\ -P_{21}^{c42} & P_{22}^{c42} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c52} & -P_{12}^{c52} \\ -P_{21}^{c52} & -P_{22}^{c52} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c82} & -P_{12}^{c82} \\ P_{21}^{c82} & -P_{22}^{c82} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} P_{11}^{c13} & P_{12}^{c13} \\ P_{21}^{c13} & P_{22}^{c13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c21} & P_{12}^{c21} \\ P_{21}^{c21} & P_{22}^{c21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c33} & P_{12}^{c33} \\ -P_{21}^{c33} & P_{22}^{c33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c41} & P_{12}^{c41} \\ -P_{21}^{c41} & P_{22}^{c41} \end{bmatrix} + \right. \\
& \left. + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c53} & -P_{12}^{c53} \\ -P_{21}^{c53} & -P_{22}^{c53} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c61} & -P_{12}^{c61} \\ -P_{21}^{c61} & -P_{22}^{c61} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c73} & -P_{12}^{c73} \\ P_{21}^{c73} & -P_{22}^{c73} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c81} & -P_{12}^{c81} \\ P_{21}^{c81} & -P_{22}^{c81} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} P_{11}^{c22} & P_{12}^{c22} \\ P_{21}^{c22} & P_{22}^{c22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c32} & P_{12}^{c32} \\ -P_{21}^{c32} & P_{22}^{c32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}^{c62} & -P_{12}^{c62} \\ -P_{21}^{c62} & -P_{22}^{c62} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c72} & -P_{12}^{c72} \\ P_{21}^{c72} & -P_{22}^{c72} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} P_{11}^{c23} & P_{12}^{c23} \\ P_{21}^{c23} & P_{22}^{c23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c31} & P_{12}^{c31} \\ P_{21}^{c31} & P_{22}^{c31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c63} & -P_{12}^{c63} \\ P_{21}^{c63} & -P_{22}^{c63} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{c71} & -P_{12}^{c71} \\ P_{21}^{c71} & -P_{22}^{c71} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1^5 \\ u_2^5 \end{Bmatrix} = \\
& = \left[\begin{bmatrix} Q_{11}^{c11} & Q_{12}^{c11} & Q_{11}^{c12} & Q_{12}^{c12} & Q_{11}^{c13} & Q_{12}^{c13} \\ Q_{21}^{c11} & Q_{22}^{c11} & Q_{21}^{c12} & Q_{22}^{c12} & Q_{21}^{c13} & Q_{22}^{c13} \end{bmatrix} + \right. \\
& + \begin{bmatrix} -Q_{11}^{c43} & Q_{12}^{c43} & -Q_{11}^{c42} & Q_{12}^{c42} & -Q_{11}^{c41} & Q_{12}^{c41} \\ -Q_{21}^{c43} & Q_{22}^{c43} & -Q_{21}^{c42} & Q_{22}^{c42} & -Q_{21}^{c41} & Q_{22}^{c41} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} -Q_{11}^{c51} & -Q_{12}^{c51} & -Q_{11}^{c52} & -Q_{12}^{c52} & -Q_{11}^{c53} & -Q_{12}^{c53} \\ -Q_{21}^{c51} & -Q_{22}^{c51} & -Q_{21}^{c52} & -Q_{22}^{c52} & -Q_{21}^{c53} & -Q_{22}^{c53} \end{bmatrix} + \\
& \left. + \begin{bmatrix} Q_{11}^{c83} & -Q_{12}^{c83} & Q_{11}^{c82} & -Q_{12}^{c82} & Q_{11}^{c81} & -Q_{12}^{c81} \\ Q_{21}^{c83} & -Q_{22}^{c83} & Q_{21}^{c82} & -Q_{22}^{c82} & Q_{21}^{c81} & -Q_{22}^{c81} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} t_1^{11} \\ t_2^{11} \\ t_1^{12} \\ t_2^{12} \\ t_1^{13} \\ t_2^{13} \end{Bmatrix} + \\
& + \left[\begin{bmatrix} Q_{11}^{c21} & Q_{12}^{c21} & Q_{11}^{c22} & Q_{12}^{c22} & Q_{11}^{c23} & Q_{12}^{c23} \\ Q_{21}^{c21} & Q_{22}^{c21} & Q_{21}^{c22} & Q_{22}^{c22} & Q_{21}^{c23} & Q_{22}^{c23} \end{bmatrix} + \right. \\
& + \begin{bmatrix} -Q_{11}^{c33} & Q_{12}^{c33} & -Q_{11}^{c32} & Q_{12}^{c32} & -Q_{11}^{c31} & Q_{12}^{c31} \\ -Q_{21}^{c33} & Q_{22}^{c33} & -Q_{21}^{c32} & Q_{22}^{c32} & -Q_{21}^{c31} & Q_{22}^{c31} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} -Q_{11}^{c61} & -Q_{12}^{c61} & -Q_{11}^{c62} & -Q_{12}^{c62} & -Q_{11}^{c63} & -Q_{12}^{c63} \\ -Q_{21}^{c61} & -Q_{22}^{c61} & -Q_{21}^{c62} & -Q_{22}^{c62} & -Q_{21}^{c63} & -Q_{22}^{c63} \end{bmatrix} + \\
& \left. + \begin{bmatrix} Q_{11}^{c73} & -Q_{12}^{c73} & Q_{11}^{c72} & -Q_{12}^{c72} & Q_{11}^{c71} & -Q_{12}^{c71} \\ Q_{21}^{c73} & -Q_{22}^{c73} & Q_{21}^{c72} & -Q_{22}^{c72} & Q_{21}^{c71} & -Q_{22}^{c71} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} t_1^{21} \\ t_2^{21} \\ t_1^{22} \\ t_2^{22} \\ t_1^{23} \\ t_2^{23} \end{Bmatrix} \quad c = 1, 2, \dots, 5
\end{aligned}$$

Os coeficientes $P_{ij}^{c\alpha}$ e $Q_{ij}^{c\alpha}$ resultantes das integrações sobre os elementos não discretizados podem ser obtidos através da técnica de reflexão do ponto fonte ilustrada nas Figuras 4.17, 4.18 e 4.19.

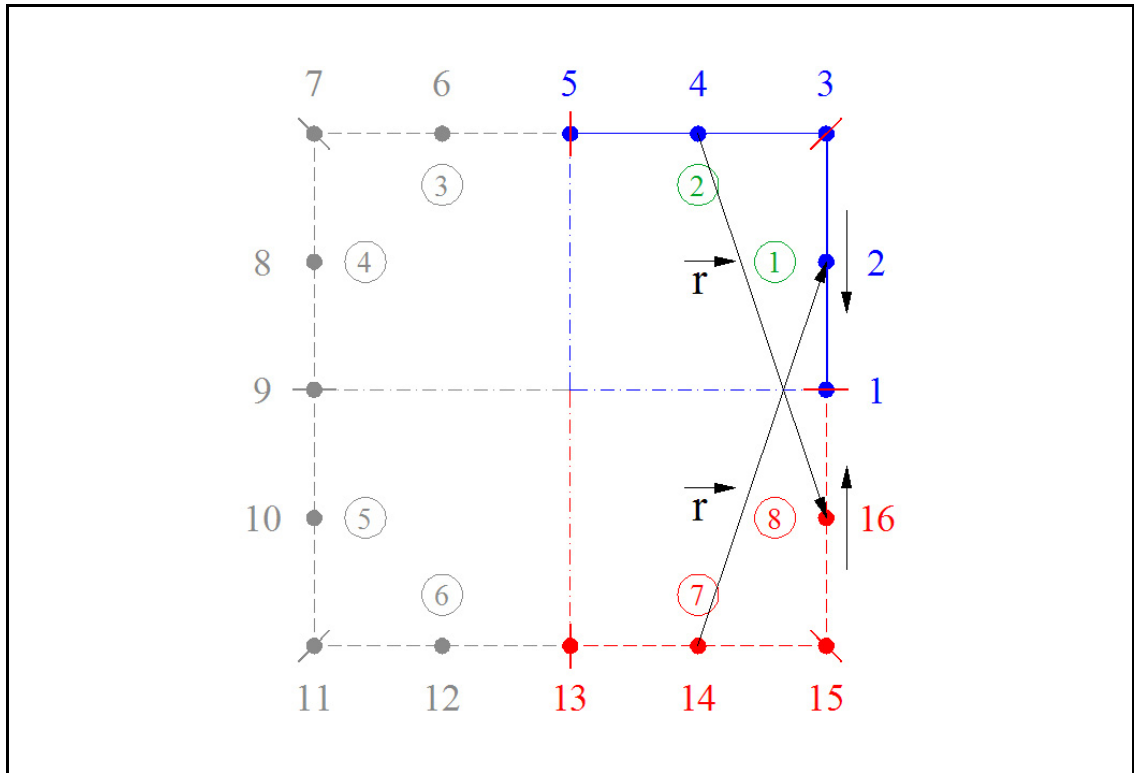


FIGURA 4.19 – Técnica de reflexão do ponto fonte considerando apenas simetria em relação ao eixo horizontal para um problema que apresenta simetria em relação ao eixo horizontal e vertical simultaneamente

4.5.1.4 Deslocamentos e Tensões nos Pontos Internos

Para a determinação dos deslocamentos e tensões nos pontos internos, as equações integrais de contorno discretizadas

$$u_i^d = \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^m G_{ij}^{dn\alpha} t_j^{n\alpha} - \sum_{\gamma=1}^{Nn} \bar{H}_{ij}^{d\gamma} u_j^{\gamma}$$

e

$$\sigma_{ij}^d = \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^m D_{kij}^{dn\alpha} t_k^{n\alpha} - \sum_{\gamma=1}^{Nn} S_{kij}^{d\gamma} u_k^{\gamma}$$

são avaliadas de maneira idêntica ao processo descrito nas seções precedentes: os coeficientes são agrupados em função das condições de contorno prescritas para o problema e os coeficientes resultantes de integrações sobre os elementos não discretizados são obtidos através das técnicas de reflexão do ponto fonte ilustradas anteriormente.

4.5.2 Detalhes da Implementação Computacional

O código para múltiplos contornos apresentado e discutido anteriormente é facilmente adaptado para a solução de problemas que apresentam considerações de simetria desde que seja fornecido o tipo de simetria do problema e o tipo de cada contorno do problema, ou seja, se um dado contorno é aberto ou fechado.

Obviamente, as sub-rotinas `INPUT1` e `INPUT2` devem ser modificadas de modo a armazenar esses novos valores; no entanto, as modificações mais importantes para o pleno funcionamento do novo código ocorrem nas sub-rotinas `MATRIZES_G_H`, `SOLUCAO_CONTORNO` e `PONTOS_INTERNOS`. Essas sub-rotinas devem ser alteradas de modo a efetuar os processos de reflexão dos pontos fonte e a correta sinalização dos coeficientes de acordo com o tipo de simetria do problema, permitindo, desse modo, a correta integração dos elementos de contorno, montagem das matrizes de coeficientes e obtenção dos valores das incógnitas do problema. A sub-rotina `OUTPUT` também necessita ser modificada de modo a transcrever corretamente os resultados no arquivo de saída de dados.

Para finalizar, vale ressaltar que nenhuma alteração é necessária nas sub-rotinas que realizam as integrações das soluções fundamentais.

4.5.3 Código em Fortran 95

As considerações matemáticas apresentadas nas seções precedentes foram implementadas no código denominado `MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SIM`, escrito em linguagem de programação Fortran 95, que consta do CD anexo a este trabalho. Esse código é formado pelos seguintes arquivos fonte:

- a) `MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SIM.f90`;
- b) `MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SIM_SUBROTINAS.f90`.

4.5.4 Organização e Funcionamento do Código

A organização e o funcionamento desse código são idênticos ao do código MEC_ELASTIC_QUAD_MC.

4.5.5 Modelo de Arquivo de Entrada de Dados

Um exemplo de arquivo de entrada de dados para o código MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SIM é apresentado na Figura 4.20 (e ilustrado na Figura 4.21), constituindo-se dos mesmos campos do arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_QUAD_MC acrescido das seguintes modificações:

- a) linha de parâmetros globais do problema: índice do tipo de domínio do problema (0 para domínio infinito e 1 para domínio finito); índice do estado plano adotado (0 para Estado Plano de Deformações e 1 para Estado Plano de Tensões); índice para o tipo de simetria do problema (0 para nenhuma simetria; 1 para simetria em relação ao eixo X ; 2 para simetria em relação ao eixo Y ; 3 para simetria em relação ao eixo X e Y simultaneamente); número de contornos do problema; número de elementos de contorno; número de nós de contorno; número de pontos internos; número de pontos de Gauss para integração numérica (valores possíveis: 2, 4, 8 ou 10); módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young; coeficiente de Poisson; valor de tolerância adotado na solução do sistema de equações para determinar coeficientes nulos; valor de tolerância adotado para o arredondamento dos valores de deslocamentos calculados; valor de tolerância adotado para o arredondamento dos valores de tensões e forças de superfície calculados;
- b) linha de identificação dos contornos do problema: número do último nó de cada contorno;
- c) linha de identificação do tipo de cada contorno do problema (0 para contornos fechados e 1 para contornos abertos).

```

***  CONCENTRACAO DE TENSOES EM PLACA RETANGULAR COM ORIFICIO CIRCULAR CENTRAL (10 QUADRÁTICOS) ***
1 1 3 2 10 22 8 10 20500.0 0.3 1.0E-10 1.0E-3 1.0E-1
19 22
1 1
1 20.0000 0.0000
2 20.0000 2.0000
3 20.0000 4.0000
4 20.0000 6.0000
5 20.0000 8.0000
6 20.0000 9.0000
7 20.0000 10.0000
8 19.0000 10.0000
9 18.0000 10.0000
10 16.0000 10.0000
11 14.0000 10.0000
12 12.0000 10.0000
13 10.0000 10.0000
14 8.0000 10.0000
15 6.0000 10.0000
16 4.0000 10.0000
17 2.0000 10.0000
18 1.0000 10.0000
19 0.0000 10.0000
20 0.0000 1.0000
21 0.7071 0.7071
22 1.0000 0.0000
1 1 100.0 1 0.0 1 100.0 1 0.0 1 100.0 1 0.0
2 1 100.0 1 0.0 1 100.0 1 0.0 1 100.0 1 0.0
3 1 100.0 1 0.0 1 100.0 1 0.0 1 100.0 1 0.0
4 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0
5 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0
6 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0
7 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0
8 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0
9 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0
10 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0 1 0.0
1 0.0000 2.0000
2 0.0000 3.0000
3 0.0000 4.0000
4 0.0000 5.0000
5 0.0000 6.0000
6 0.0000 7.0000
7 0.0000 8.0000
8 0.0000 9.0000

```

FIGURA 4.20 – Modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SIM

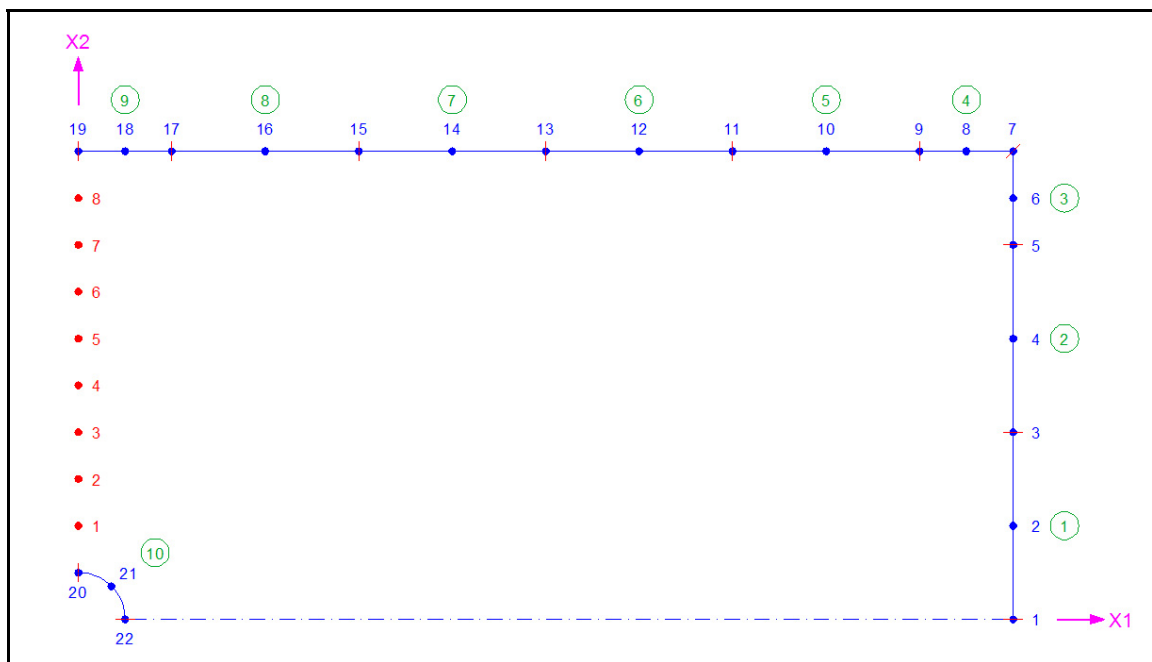


FIGURA 4.21 – Ilustração da malha do modelo de arquivo de entrada de dados do código MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SIM

4.6 Peculiaridades da Modelagem de Problemas Utilizando MEC

Alguns aspectos devem ser mantidos em mente no que diz respeito à modelagem de problemas elastostáticos lineares bidimensionais através do Método de Elementos de Contorno:

- a) todo problema deve possuir ao menos uma condição de contorno de deslocamento prescrita para cada direção do problema¹ (não necessariamente em um mesmo nó de contorno, tampouco em nós de um mesmo contorno, no caso de problemas com múltiplos contornos). Isso ocorre porque a matriz $\mathbf{H}$ é inerentemente singular, logo, se o problema for modelado somente com forças de superfície prescritas, a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ do sistema de equações corresponderá diretamente à matriz $\mathbf{H}$ e, portanto, o problema não terá solução;
- b) para os contornos abertos em problemas que apresentam simetria em relação ao eixo horizontal, a prescrição de deslocamentos verticais nulos para os pontos localizados sobre o eixo de simetria horizontal gera um sistema de equações "instável". Isso se deve ao fato de que, devido à própria consideração de simetria horizontal, qualquer valor de força de superfície vertical calculada nesses pontos será anulada pela sua contraparte simétrica, ou seja, existem infinitos valores de forças de superfície que satisfazem o problema para esses pontos. No entanto, a observação apontada no item "a)" continua válida para a direção horizontal, isto é, deve-se ter ao menos uma condição de contorno de deslocamento prescrita na direção horizontal do problema (em qualquer nó de contorno, inclusive naqueles sobre o eixo de simetria horizontal);
- c) para contornos abertos em problemas que apresentam simetria em relação ao eixo vertical, a prescrição de deslocamentos horizontais nulos para os pontos localizados sobre o eixo de simetria vertical gera um sistema de equações "instável". Isso se deve ao fato de que, devido à

¹ Obs.: essa condição aplica-se não só ao Método de Elementos de Contorno, mas a qualquer método numérico.

própria consideração de simetria vertical, qualquer valor de força de superfície horizontal calculada nesses pontos será anulada pela sua contraparte simétrica, ou seja, existem infinitos valores de forças de superfície que satisfazem o problema para esses pontos. No entanto, a observação apontada no item "a)" continua válida para a direção vertical, isto é, deve-se ter ao menos uma condição de contorno de deslocamento prescrita na direção vertical do problema (em qualquer nó de contorno, inclusive naqueles sobre o eixo de simetria vertical);

- d) para contornos abertos em problemas que apresentam simetria em relação ao eixo horizontal e vertical simultaneamente, a prescrição de deslocamentos verticais/horizontais nulos para os pontos localizados sobre os eixos de simetria horizontal/vertical gera um sistema de equações "instável". Isso se deve ao fato de que, devido à própria consideração de simetria horizontal e vertical simultânea, qualquer valor de força de superfície vertical/horizontal calculada nesses pontos será anulada pela sua contraparte simétrica, ou seja, existem infinitos valores de forças de superfície que satisfazem o problema para esses pontos. Nessa situação não é necessário cumprir a observação apontado no item "a)", ou seja, é possível modelar o problema somente com forças de superfície prescritas;
- e) Quando os coeficientes das matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ são reordenados, mediante a introdução das condições de contorno prescritas para o problema, compondo a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, os coeficientes provenientes da matriz $\mathbf{G}$ são multiplicados pelo módulo de elasticidade transversal de modo que todos os coeficientes da matriz $\mathbf{A}$ tenham a mesma ordem de grandeza. Esse procedimento ajuda a aumentar a precisão da solução numérica calculada.

5 PROBLEMAS RESOLVIDOS

A validação dos códigos desenvolvidos será feita mediante a análise de problemas que possuem solução analítica conhecida e que, portanto, podem servir de referência para determinar a precisão das soluções numéricas obtidas.

Os arquivos de entrada e saída de dados de todos os problemas apresentados neste capítulo encontram-se no CD anexo a este trabalho.

5.1 Cavidade Pressurizada

5.1.1 Considerações Gerais

Considere-se o problema de uma cavidade em um meio infinito sob pressão uniforme tal como ilustrado na Figura 5.1, onde r_i denota o raio interno da cavidade, p denota a pressão interna da cavidade e r denota a distância do centro da cavidade até um ponto qualquer localizado no domínio do problema.

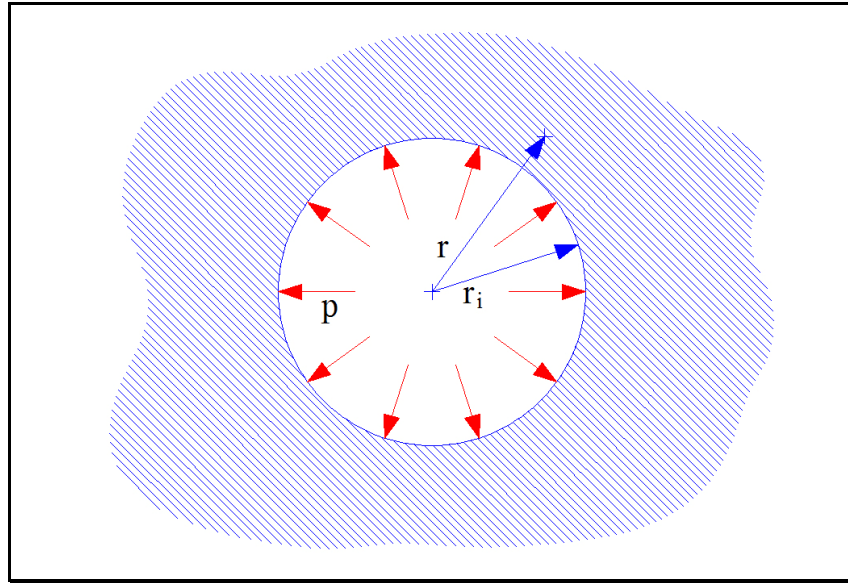


FIGURA 5.1 – Cavidade em um meio infinito sob pressão uniforme

5.1.2 Solução Analítica

A solução analítica para esse problema é dada por¹

$$\sigma_{rr} = -\frac{pr_i^2}{r^2} \quad (5.1)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pr_i^2}{r^2} \quad (5.2)$$

$$u_r = \frac{(1+\nu)}{E} \frac{pr_i^2}{r} \quad (5.3)$$

onde σ_{rr} denota a tensão radial, $\sigma_{\theta\theta}$ denota a tensão angular e u_r denota o deslocamento radial.

¹ A solução analítica apresentada aqui foi obtida a partir da solução analítica para o problema de cilindro pressurizado dada na seção 5.2.2 tomando o limite quando $r_e \rightarrow \infty$

5.1.3 Dados do Problema

A tabela a seguir apresenta os dados utilizados na análise do problema de cavidade pressurizada.

Tabela 5.1 – Dados utilizados na análise do problema de cavidade pressurizada

E (KN/cm ²)	20500,0
ν	0,3
p (KN/cm ²)	100,0
r_i (cm)	3,0

5.1.4 Malhas de Elementos Constantes

As seções a seguir ilustram as malhas de elementos de contorno constantes utilizadas na análise do problema de cavidade pressurizada.²

² Para a convenção adotada na representação geométrica de malhas de elementos de contorno neste trabalho ver a seção 3.7.1.

5.1.4.1 Malha CAV12C

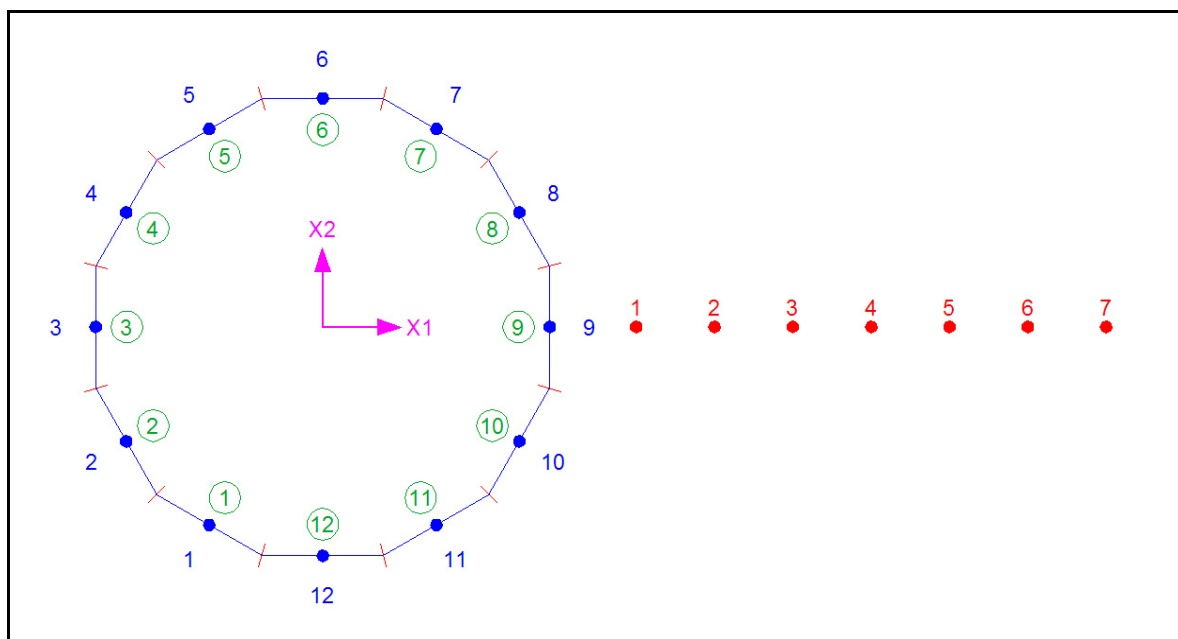


FIGURA 5.2 – Representação geométrica da malha CAV12C

5.1.4.2 Malha CAV24C

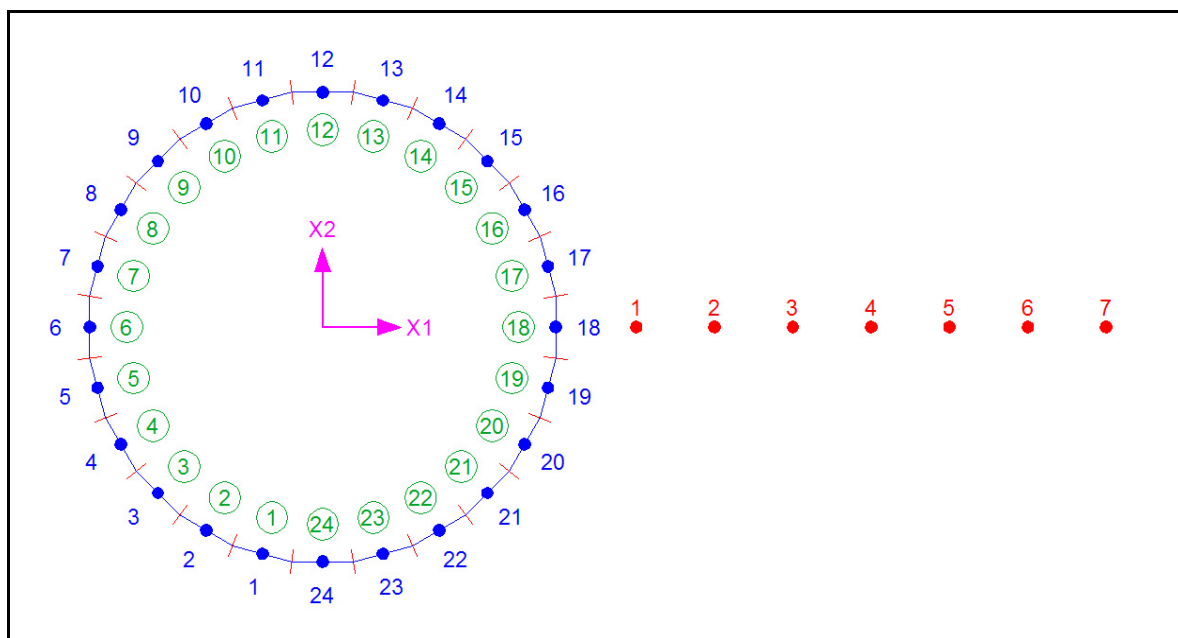


FIGURA 5.3 – Representação geométrica da malha CAV24C

5.1.4.3 Malha CAV48C

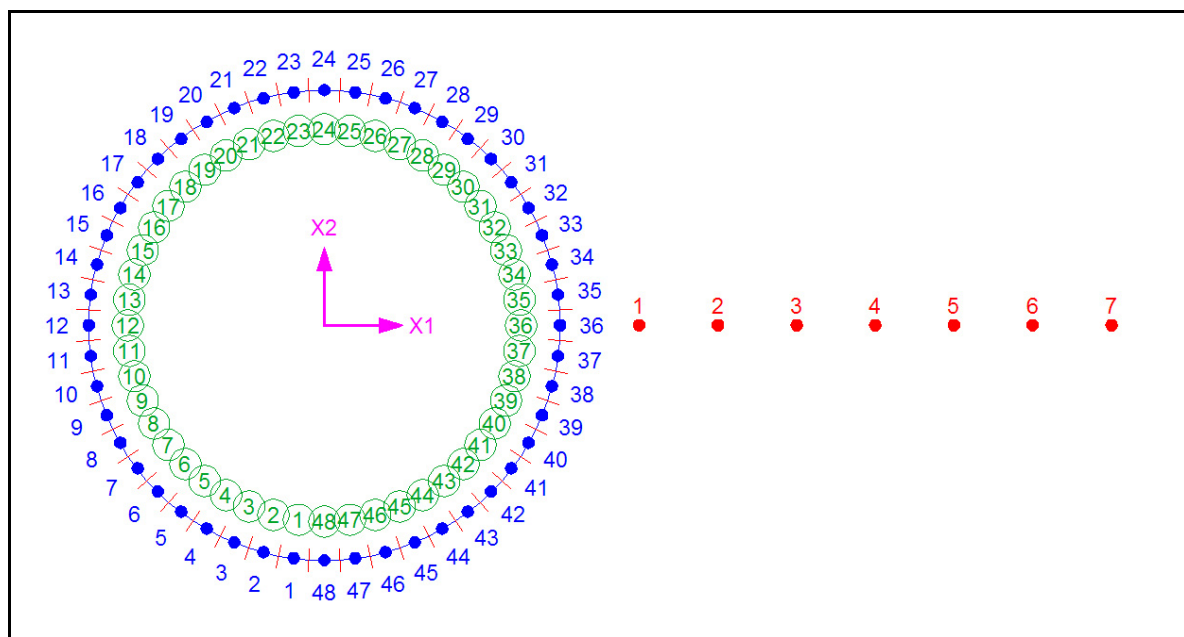


FIGURA 5.4 – Representação geométrica da malha CAV48C

5.1.5 Malhas de Elementos Lineares

As seções a seguir ilustram as malhas de elementos de contorno lineares utilizadas na análise do problema de cavidade pressurizada.³

³ Para a convenção adotada na representação geométrica de malhas de elementos de contorno neste trabalho ver a seção 3.7.1.

5.1.5.1 Malha CAV12L

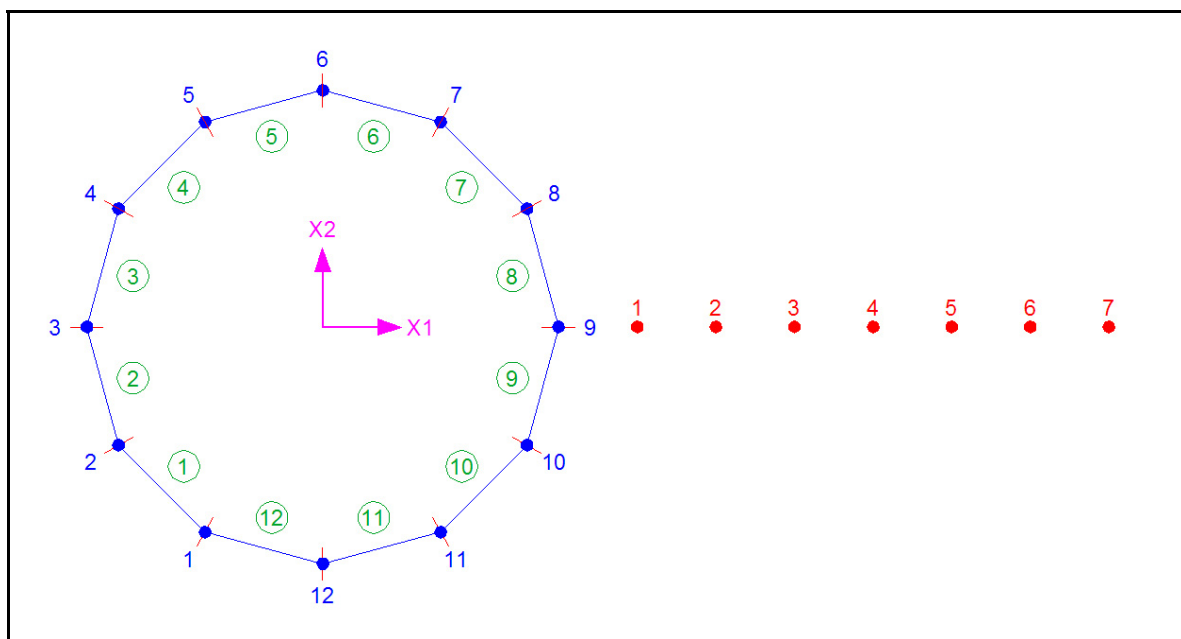


FIGURA 5.5 – Representação geométrica da malha CAV12L

5.1.5.2 Malha CAV24L

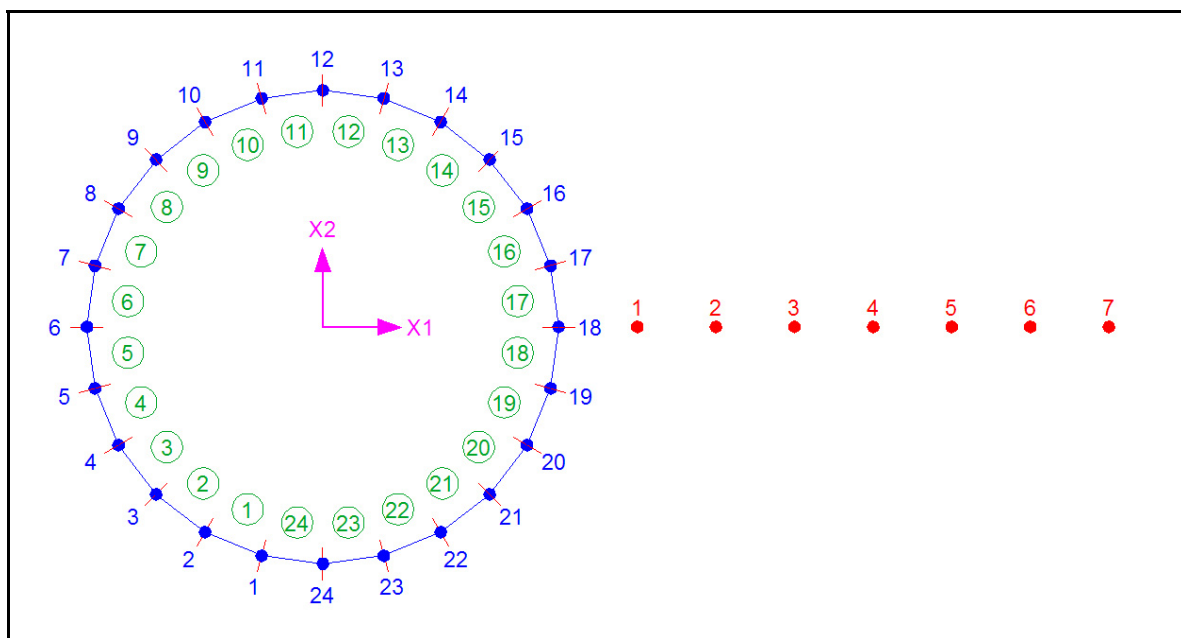


FIGURA 5.6 – Representação geométrica da malha CAV24L

5.1.5.3 Malha CAV48L

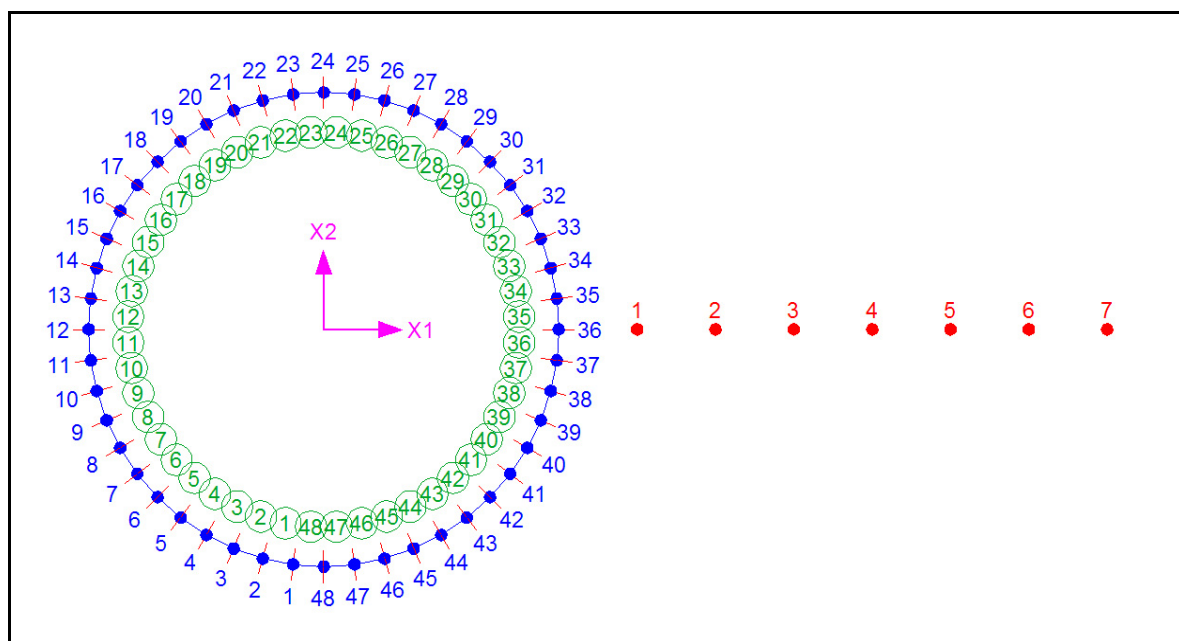


FIGURA 5.7 – Representação geométrica da malha CAV48L

5.1.6 Malhas de Elementos Quadráticos

As seções a seguir ilustram as malhas de elementos de contorno quadráticos utilizadas na análise do problema de cavidade pressurizada.⁴

⁴ Para a convenção adotada na representação geométrica de malhas de elementos de contorno neste trabalho ver a seção 3.7.1.

5.1.6.1 Malha CAV6Q

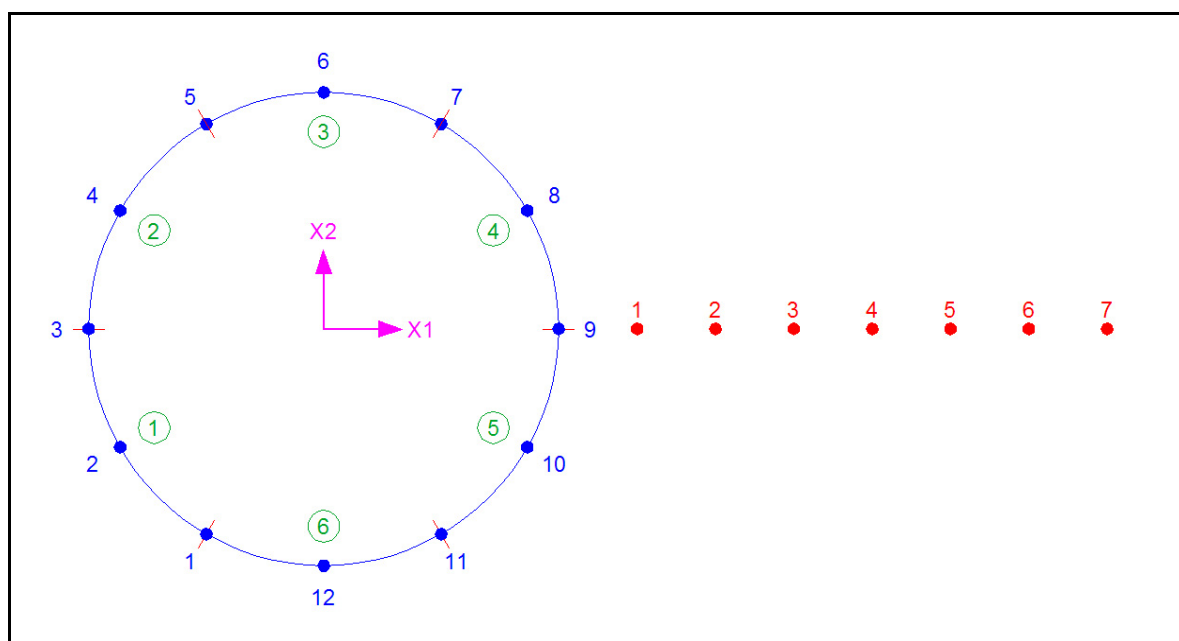


FIGURA 5.8 – Representação geométrica da malha CAV6Q

5.1.6.2 Malha CAV12Q

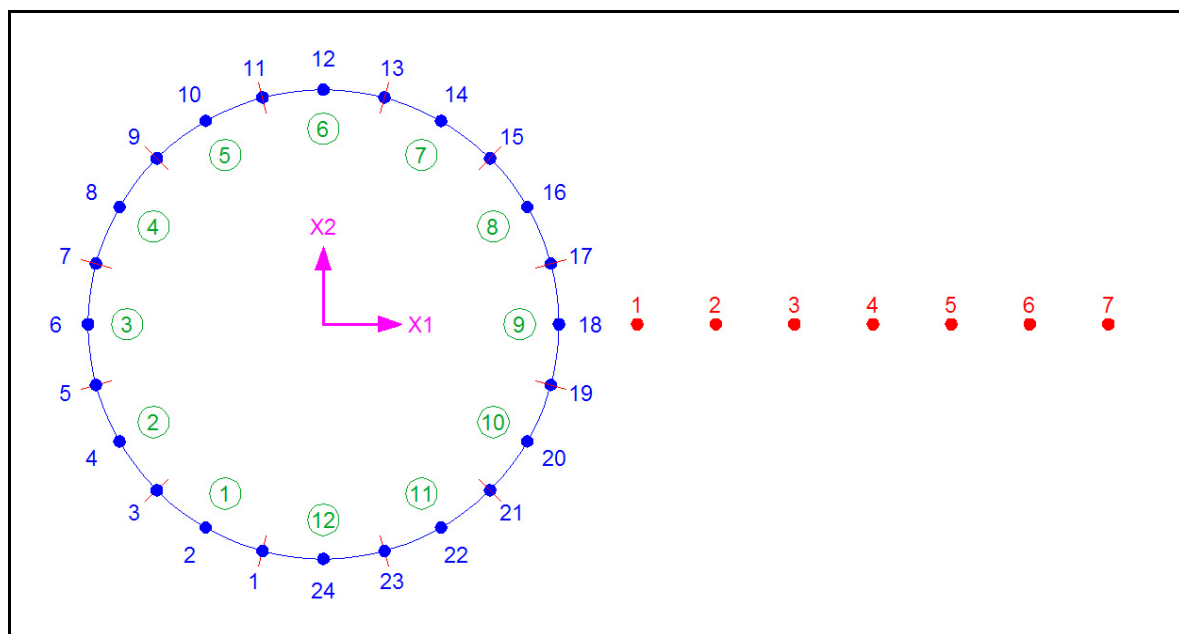


FIGURA 5.9 – Representação geométrica da malha CAV12Q

5.1.6.3 Malha CAV24Q

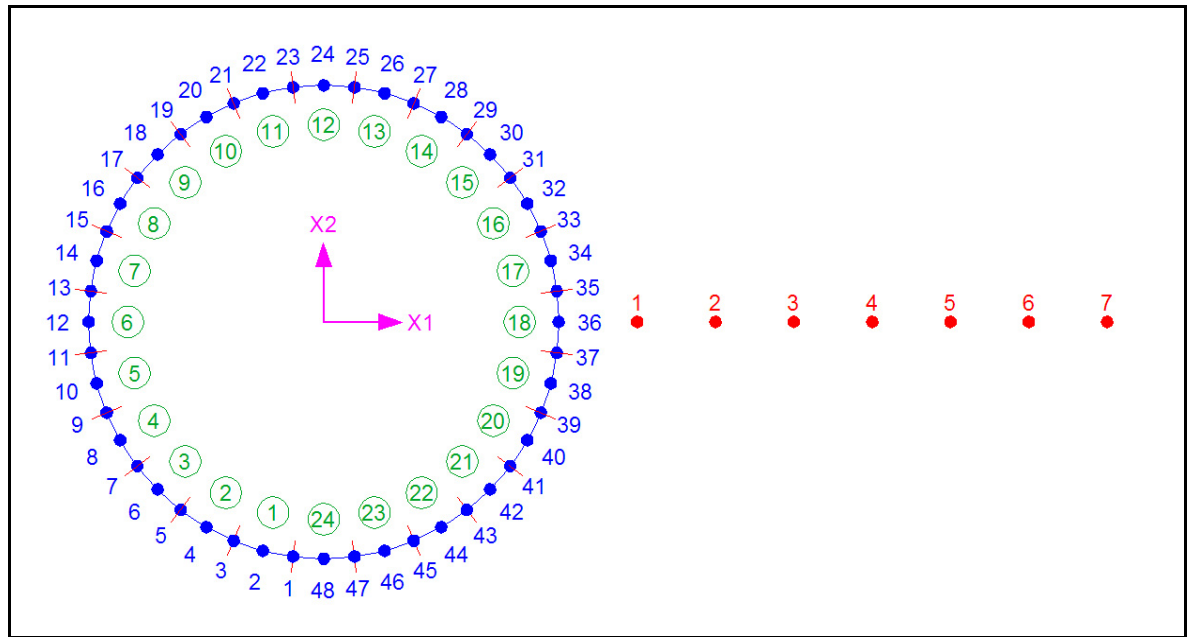


FIGURA 5.10 – Representação geométrica da malha CAV24Q

5.1.7 Resultados

5.1.7.1 Tensões Radiais

Tabela 5.2 – Tensões radiais obtidas com o código MEC_ELASTIC_CONST

Pt	r (cm)	Solução Analítica (KN/cm ²)	Malha CAV12C (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV24C (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV48C (KN/cm ²)	Erro (%)
1	4,0	-5,625000E+01	-6,552230E+01	16,48	-5,783670E+01	2,82	-5,683420E+01	1,04
2	5,0	-3,600000E+01	-3,821910E+01	6,16	-3,675030E+01	2,08	-3,637310E+01	1,04
3	6,0	-2,500000E+01	-2,612290E+01	4,49	-2,551900E+01	2,08	-2,525910E+01	1,04
4	7,0	-1,836735E+01	-1,913700E+01	4,19	-1,874850E+01	2,08	-1,855770E+01	1,04
5	8,0	-1,406250E+01	-1,464240E+01	4,12	-1,435430E+01	2,08	-1,420830E+01	1,04
6	9,0	-1,111111E+01	-1,156740E+01	4,11	-1,134160E+01	2,07	-1,122630E+01	1,04
7	10,0	-9,000000E+00	-9,369130E+00	4,10	-9,186700E+00	2,07	-9,093310E+00	1,04

Tabela 5.3 – Tensões radiais obtidas com o código MEC_ELASTIC_LIN

Pt	r (cm)	Solução Analítica (KN/cm ²)	Malha CAV12L (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV24L (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV48L (KN/cm ²)	Erro (%)
1	4,0	-5,625000E+01	-5,110290E+01	-9,15	-5,469580E+01	-2,76	-5,585120E+01	-0,71
2	5,0	-3,600000E+01	-3,226460E+01	-10,38	-3,499220E+01	-2,80	-3,574460E+01	-0,71
3	6,0	-2,500000E+01	-2,236960E+01	-10,52	-2,430000E+01	-2,80	-2,482260E+01	-0,71
4	7,0	-1,836735E+01	-1,643030E+01	-10,55	-1,785310E+01	-2,80	-1,823690E+01	-0,71
5	8,0	-1,406250E+01	-1,257880E+01	-10,55	-1,366870E+01	-2,80	-1,396260E+01	-0,71
6	9,0	-1,111111E+01	-9,938620E+00	-10,55	-1,080000E+01	-2,80	-1,103220E+01	-0,71
7	10,0	-9,000000E+00	-8,050250E+00	-10,55	-8,748000E+00	-2,80	-8,936060E+00	-0,71

Tabela 5.4 – Tensões radiais obtidas com o código MEC_ELASTIC_QUAD

Pt	r (cm)	Solução Analítica (KN/cm ²)	Malha CAV6Q (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV12Q (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV24Q (KN/cm ²)	Erro (%)
1	4,0	-5,625000E+01	-5,581630E+01	-0,77	-5,623160E+01	-0,03	-5,624960E+01	-0,0007
2	5,0	-3,600000E+01	-3,573920E+01	-0,72	-3,598560E+01	-0,04	-3,599950E+01	-0,0014
3	6,0	-2,500000E+01	-2,482980E+01	-0,68	-2,498970E+01	-0,04	-2,499950E+01	-0,0020
4	7,0	-1,836735E+01	-1,824650E+01	-0,66	-1,835970E+01	-0,04	-1,836700E+01	-0,0019
5	8,0	-1,406250E+01	-1,397160E+01	-0,65	-1,405670E+01	-0,04	-1,406220E+01	-0,0021
6	9,0	-1,111111E+01	-1,104000E+01	-0,64	-1,110650E+01	-0,04	-1,111080E+01	-0,0028
7	10,0	-9,000000E+00	-8,942770E+00	-0,64	-8,996270E+00	-0,04	-8,999780E+00	-0,0024

5.1.7.2 Tensões Angulares

Tabela 5.5 – Tensões angulares obtidas com o código MEC_ELASTIC_CONST

Pt	r (cm)	Solução Analítica (KN/cm ²)	Malha CAV12C (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV24C (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV48C (KN/cm ²)	Erro (%)
1	4,0	5,625000E+01	6,080350E+01	8,10	5,768610E+01	2,55	5,683500E+01	1,04
2	5,0	3,600000E+01	3,788520E+01	5,24	3,674840E+01	2,08	3,637360E+01	1,04
3	6,0	2,500000E+01	2,608540E+01	4,34	2,551840E+01	2,07	2,525930E+01	1,04
4	7,0	1,836735E+01	1,913110E+01	4,16	1,874820E+01	2,07	1,855780E+01	1,04
5	8,0	1,406250E+01	1,464130E+01	4,12	1,435410E+01	2,07	1,420830E+01	1,04
6	9,0	1,111111E+01	1,156710E+01	4,10	1,134150E+01	2,07	1,122630E+01	1,04
7	10,0	9,000000E+00	9,369050E+00	4,10	9,186630E+00	2,07	9,093340E+00	1,04

Tabela 5.6 – Tensões angulares obtidas com o código MEC_ELASTIC_LIN

Pt	r (cm)	Solução Analítica (KN/cm ²)	Malha CAV12L (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV24L (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV48L (KN/cm ²)	Erro (%)
1	4,0	5,625000E+01	5,075290E+01	-9,77	5,468980E+01	-2,77	5,584970E+01	-0,71
2	5,0	3,600000E+01	3,224090E+01	-10,44	3,499220E+01	-2,80	3,574410E+01	-0,71
3	6,0	2,500000E+01	2,236690E+01	-10,53	2,430000E+01	-2,80	2,482230E+01	-0,71
4	7,0	1,836735E+01	1,642990E+01	-10,55	1,785310E+01	-2,80	1,823680E+01	-0,71
5	8,0	1,406250E+01	1,257870E+01	-10,55	1,366880E+01	-2,80	1,396260E+01	-0,71
6	9,0	1,111111E+01	9,938600E+00	-10,55	1,080000E+01	-2,80	1,103220E+01	-0,71
7	10,0	9,000000E+00	8,050240E+00	-10,55	8,748000E+00	-2,80	8,936040E+00	-0,71

Tabela 5.7 – Tensões angulares obtidas com o código MEC_ELASTIC_QUAD

Pt	r (cm)	Solução Analítica (KN/cm ²)	Malha CAV6Q (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV12Q (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV24Q (KN/cm ²)	Erro (%)
1	4,0	5,625000E+01	5,588290E+01	-0,65	5,622910E+01	-0,04	5,624810E+01	-0,0034
2	5,0	3,600000E+01	3,576080E+01	-0,66	3,598540E+01	-0,04	3,599900E+01	-0,0028
3	6,0	2,500000E+01	2,483730E+01	-0,65	2,498970E+01	-0,04	2,499930E+01	-0,0028
4	7,0	1,836735E+01	1,824950E+01	-0,64	1,835980E+01	-0,04	1,836690E+01	-0,0024
5	8,0	1,406250E+01	1,397300E+01	-0,64	1,405670E+01	-0,04	1,406210E+01	-0,0028
6	9,0	1,111111E+01	1,104070E+01	-0,63	1,110650E+01	-0,04	1,111080E+01	-0,0028
7	10,0	9,000000E+00	8,943140E+00	-0,63	8,996270E+00	-0,04	8,999760E+00	-0,0027

5.1.7.3 Deslocamentos Radiais

Tabela 5.8 – Deslocamentos radiais obtidos com o código MEC_ELASTIC_CONST

Pt	r (cm)	Solução Analítica (KN/cm ²)	Malha CAV12C (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV24C (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV48C (KN/cm ²)	Erro (%)
1	4,0	1,426830E-02	1,501930E-02	5,26	1,456890E-02	2,11	1,441620E-02	1,04
2	5,0	1,141460E-02	1,190290E-02	4,28	1,165140E-02	2,07	1,153300E-02	1,04
3	6,0	9,512200E-03	9,905250E-03	4,13	9,709490E-03	2,07	9,610830E-03	1,04
4	7,0	8,153300E-03	8,488110E-03	4,11	8,322400E-03	2,07	8,237860E-03	1,04
5	8,0	7,134100E-03	7,426700E-03	4,10	7,282100E-03	2,07	7,208130E-03	1,04
6	9,0	6,341500E-03	6,601410E-03	4,10	6,472970E-03	2,07	6,407230E-03	1,04
7	10,0	5,707300E-03	5,941250E-03	4,10	5,825670E-03	2,07	5,766500E-03	1,04

Tabela 5.9 – Deslocamentos radiais obtidos com o código MEC_ELASTIC_LIN

Pt	r (cm)	Solução Analítica (KN/cm ²)	Malha CAV12L (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV24L (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV48L (KN/cm ²)	Erro (%)
1	4,0	1,426830E-02	1,277970E-02	-10,43	1,386900E-02	-2,80	1,416700E-02	-0,71
2	5,0	1,141460E-02	1,021180E-02	-10,54	1,109500E-02	-2,80	1,133350E-02	-0,71
3	6,0	9,512200E-03	8,508620E-03	-10,55	9,245850E-03	-2,80	9,444610E-03	-0,71
4	7,0	8,153300E-03	7,292940E-03	-10,55	7,925020E-03	-2,80	8,095370E-03	-0,71
5	8,0	7,134100E-03	6,381290E-03	-10,55	6,934390E-03	-2,80	7,083450E-03	-0,71
6	9,0	6,341500E-03	5,672250E-03	-10,55	6,163900E-03	-2,80	6,296400E-03	-0,71
7	10,0	5,707300E-03	5,105020E-03	-10,55	5,547510E-03	-2,80	5,666750E-03	-0,71

Tabela 5.10 – Deslocamentos radiais obtidos com o código MEC_ELASTIC_QUAD

Pt	r (cm)	Solução Analítica (KN/cm ²)	Malha CAV6Q (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV12Q (KN/cm ²)	Erro (%)	Malha CAV24Q (KN/cm ²)	Erro (%)
1	4,00	1,426830E-02	1,417380E-02	-0,66	1,426250E-02	-0,04	1,426800E-02	-0,0021
2	5,00	1,141460E-02	1,134090E-02	-0,65	1,140990E-02	-0,04	1,141440E-02	-0,0018
3	6,00	9,512200E-03	9,451550E-03	-0,64	9,508250E-03	-0,04	9,511950E-03	-0,0026
4	7,00	8,153300E-03	8,101660E-03	-0,63	8,149930E-03	-0,04	8,153090E-03	-0,0026
5	8,00	7,134100E-03	7,089100E-03	-0,63	7,131190E-03	-0,04	7,133950E-03	-0,0021
6	9,00	6,341500E-03	6,301500E-03	-0,63	6,338830E-03	-0,04	6,341280E-03	-0,0035
7	10,00	5,707300E-03	5,671390E-03	-0,63	5,704950E-03	-0,04	5,707170E-03	-0,0023

5.1.7.4 Análise dos Resultados

Os Gráficos 5.1, 5.2 e 5.3 apresentam a solução analítica para as tensões radiais ao longo da linha de pontos internos comparada às soluções numéricas obtidas com as malhas constantes, lineares e quadráticas, respectivamente. Nota-se que quanto mais se afasta da borda da cavidade, menor é a influência da pressão interna da cavidade. Por exemplo, para um ponto localizado na posição $r = 10\text{cm}$, isto é, distante 7cm da borda da cavidade, o que equivale a pouco mais do 2,3 vezes o raio da cavidade, a tensão radial é menor do que 10% do valor da pressão interna da cavidade. O mesmo se dá com a solução analítica para as tensões angulares ao longo da linha de pontos internos, ilustrada nos Gráficos 5.7, 5.8 e 5.9 e comparada às soluções numéricas obtidas com as malhas constantes, lineares e quadráticas, respectivamente. Finalmente, os Gráficos 5.13, 5.14 e 5.15 apresentam a solução

analítica para os deslocamentos radiais ao longo da linha de pontos internos comparada às soluções numéricas obtidas com as malhas constantes, lineares e quadráticas, respectivamente. O mesmo tipo de comportamento é identificado: quanto mais distante o ponto se encontra da borda da cavidade, menor é a influência da deformação da cavidade no deslocamento radial desse ponto. Obviamente, o maior deslocamento radial ocorre na borda da cavidade e é igual a $0,19mm$, aproximadamente $0,32\%$ do diâmetro da cavidade.

Os Gráficos 5.4, 5.5 e 5.6 apresentam os erros obtidos no cálculo das tensões radiais para as malhas constantes, lineares e quadráticas, respectivamente; os Gráficos 5.10, 5.11 e 5.12 apresentam os erros obtidos no cálculo das tensões angulares para as malhas constantes, lineares e quadráticas, respectivamente; e os Gráficos 5.16, 5.17 e 5.18 apresentam os erros obtidos no cálculo dos deslocamentos radiais para as malhas constantes, lineares e quadráticas, respectivamente.

Em todos esses gráficos observa-se o mesmo comportamento: os erros das malhas de elementos constantes são positivos enquanto os erros das malhas lineares e quadráticas são negativos; malhas mais discretizadas, ou seja, com maior número de elementos, obtêm resultados mais exatos e apresentam erros mais uniformes; malhas menos discretizadas apresentam erros menos uniformes e mais grosseiros, principalmente nos pontos mais próximos do contorno da cavidade (com exceção dos resultados numéricos para tensões radiais e angulares das malhas lineares menos discretizadas, onde ocorre exatamente o contrário, ou seja, os pontos mais próximos do contorno da cavidade apresentam erros menores). Finalmente, e curiosamente, somente as malhas lineares mais discretizadas são capazes de obter resultados mais exatos que os obtidos com as malhas constantes.

Gráfico 5.1 – Solução analítica para as tensões radiais versus raio versus malhas CAV12C, CAV24C e CAV48C

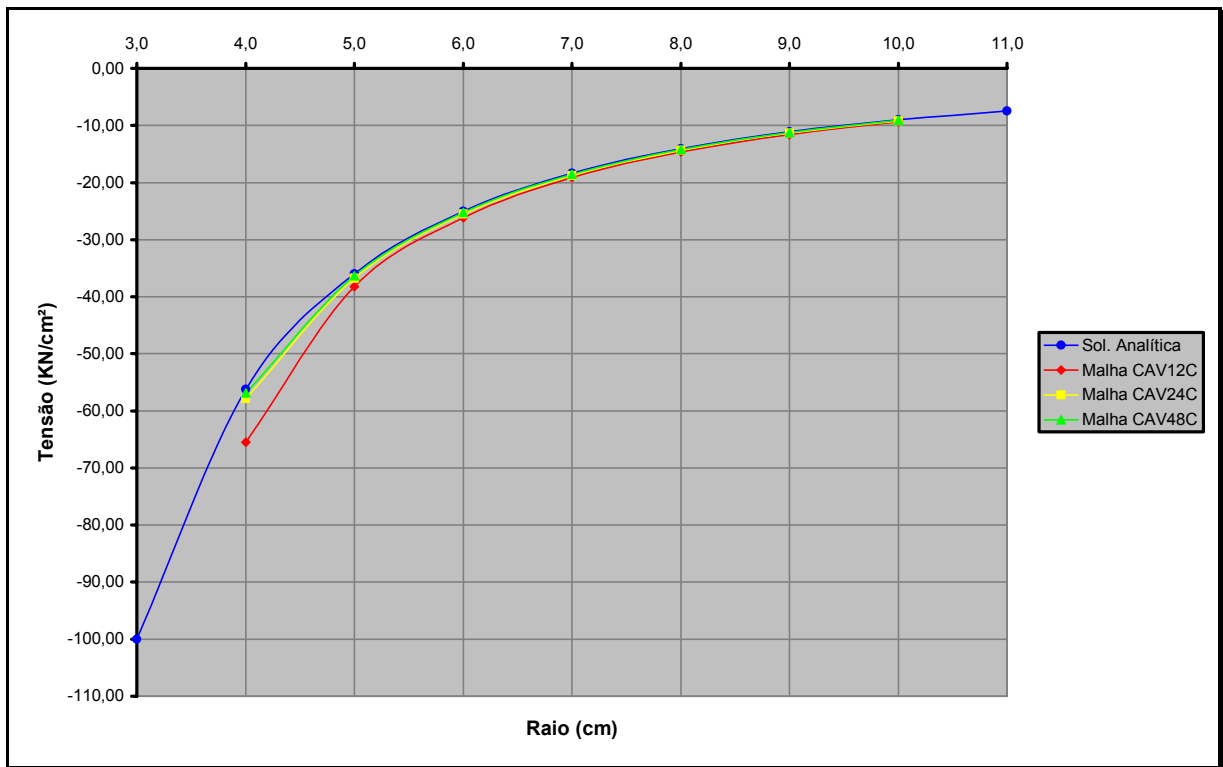


Gráfico 5.2 – Solução analítica para as tensões radiais versus raio versus malhas CAV12L, CAV24L e CAV48L

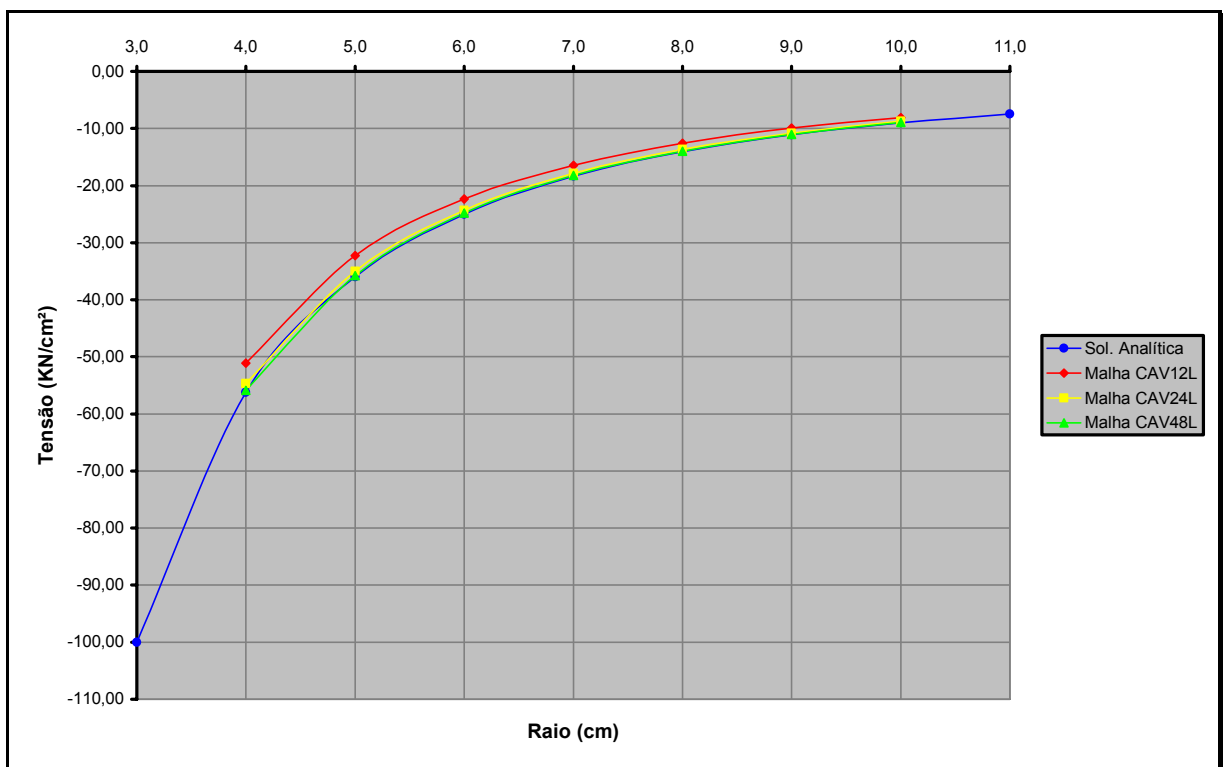


Gráfico 5.3 – Solução analítica para as tensões radiais versus raio versus malhas CAV6Q, CAV12Q e CAV24Q

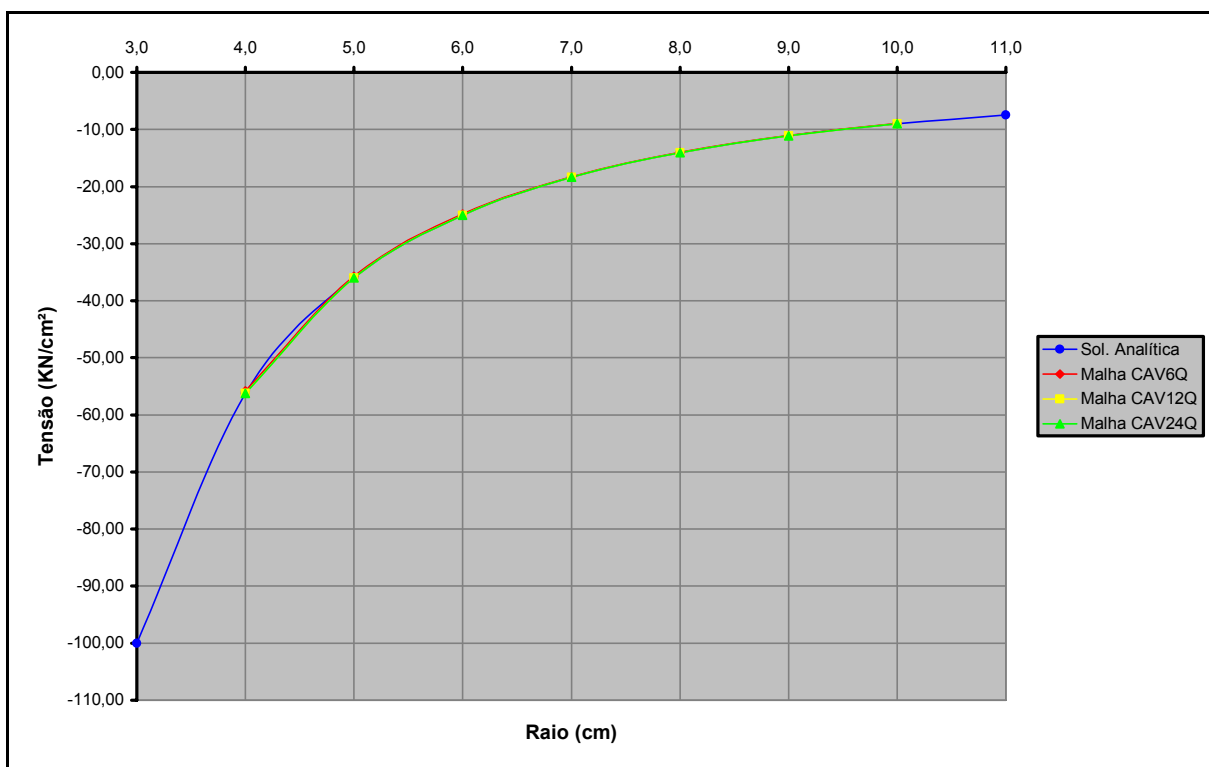


Gráfico 5.4 – Erro no cálculo das tensões radiais versus raio versus malhas CAV12C, CAV24C e CAV48C

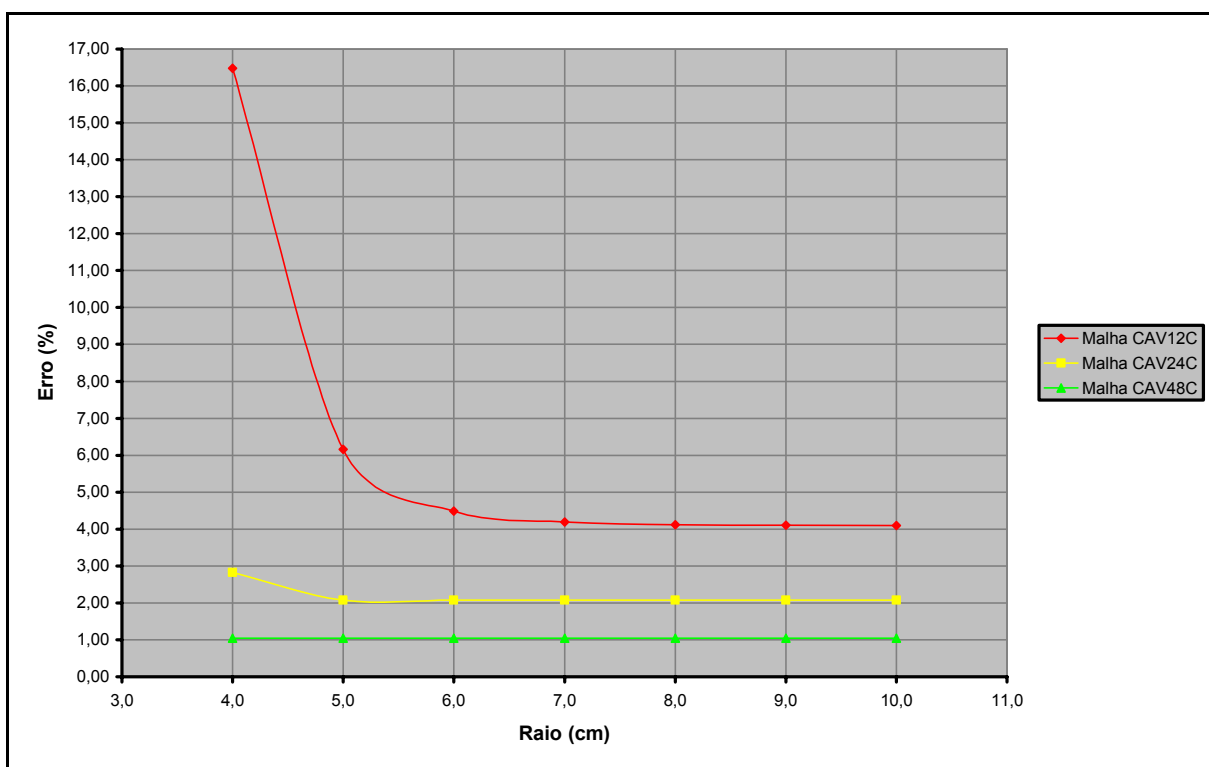


Gráfico 5.5 – Erro no cálculo das tensões radiais versus raio versus malhas CAV12L, CAV24L e CAV48L

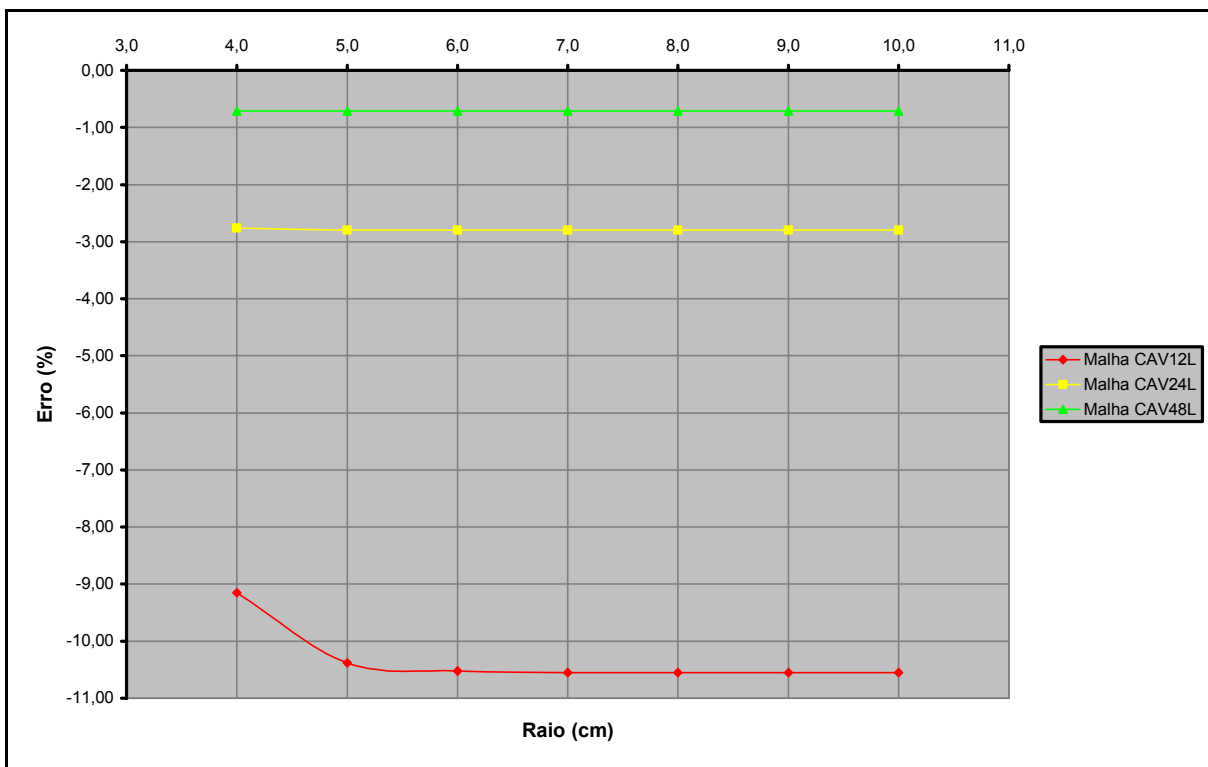


Gráfico 5.6 – Erro no cálculo das tensões radiais versus raio versus malha CAV6Q, CAV12Q e CAV24Q

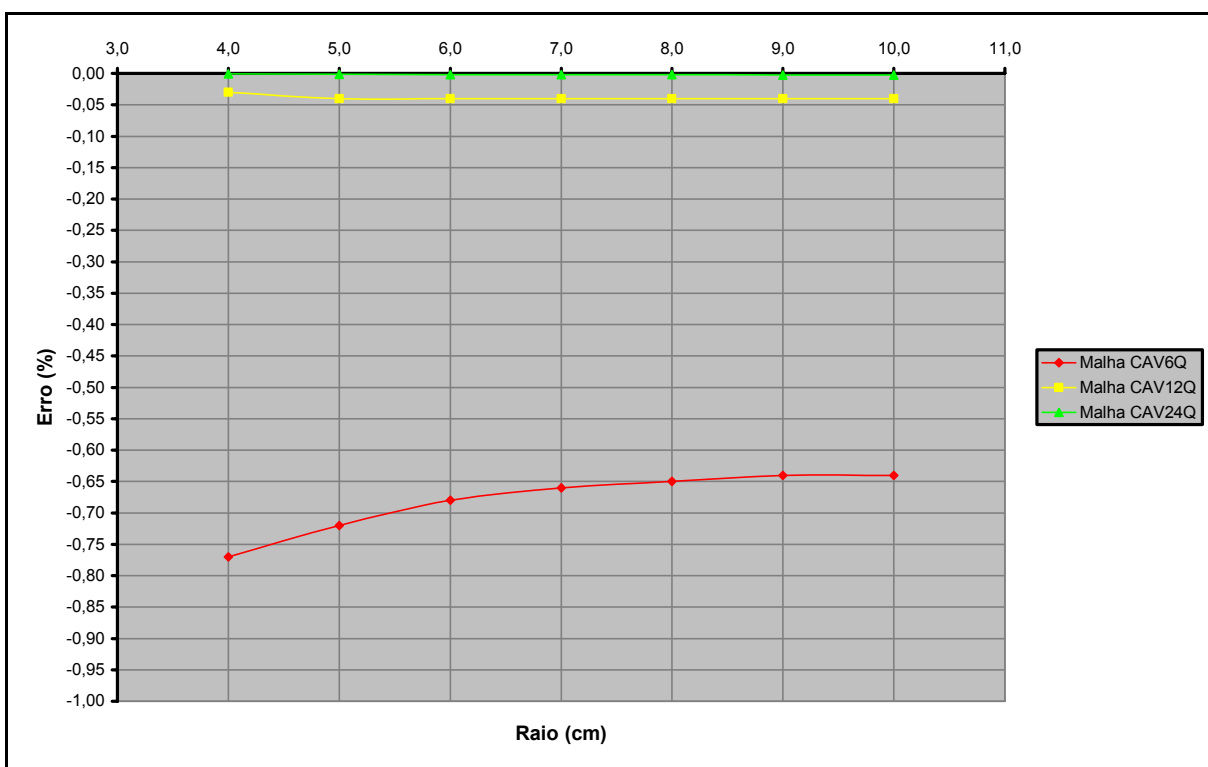


Gráfico 5.7 – Solução analítica para as tensões angulares versus raio versus malhas CAV12C, CAV24C e CAV48C

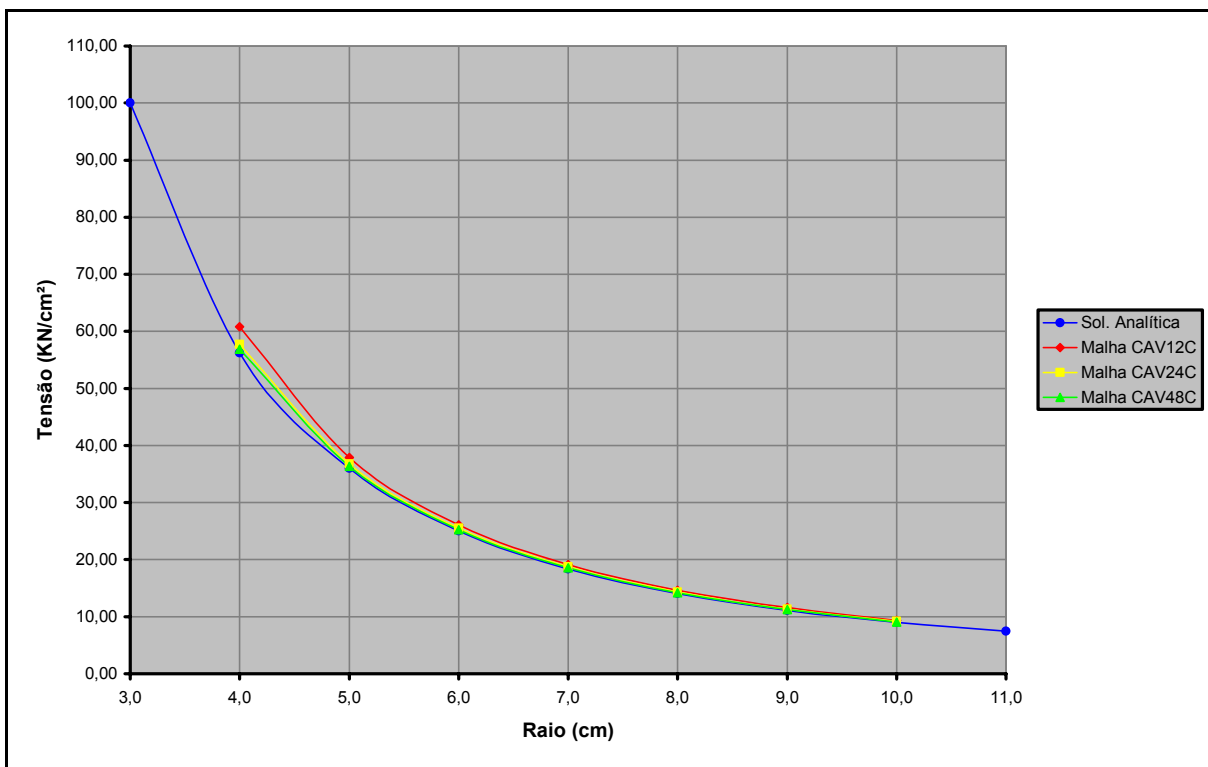


Gráfico 5.8 – Solução analítica para as tensões angulares versus raio versus malhas CAV12L, CAV24L e CAV48L

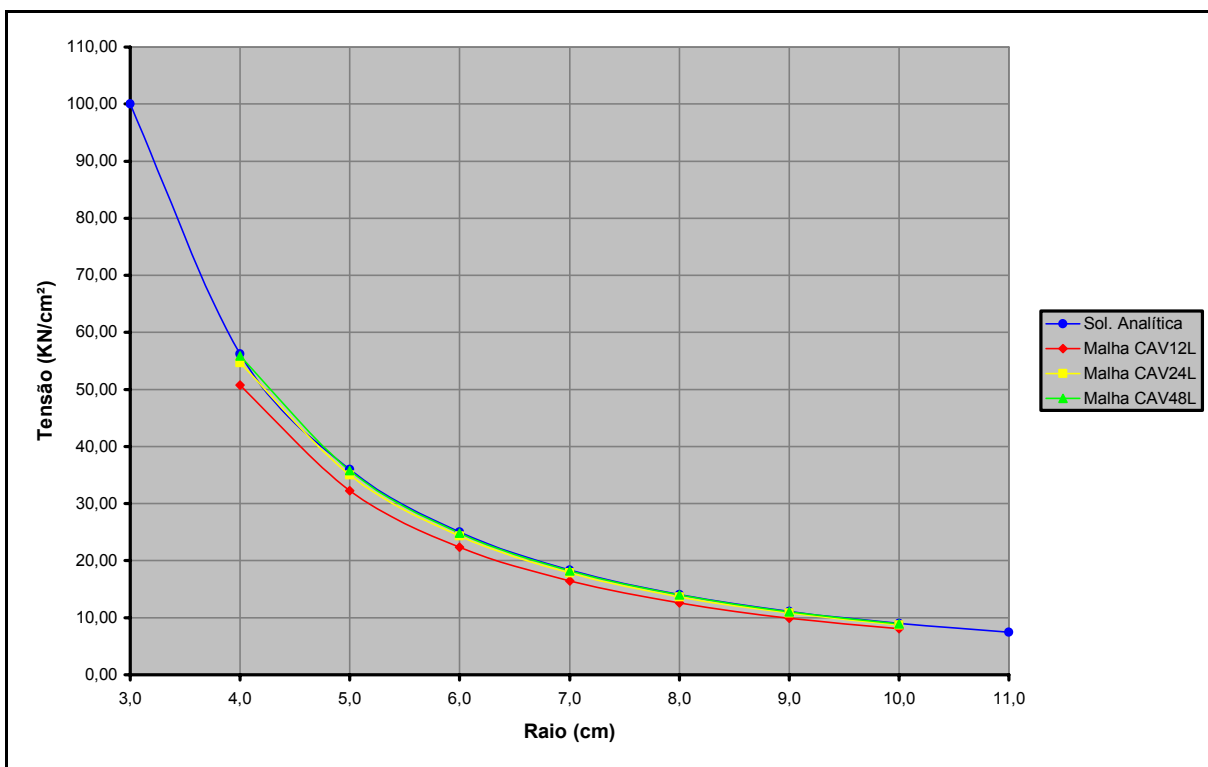


Gráfico 5.9 – Solução analítica para as tensões angulares versus raio versus malhas CAV6Q, CAV12Q e CAV24Q

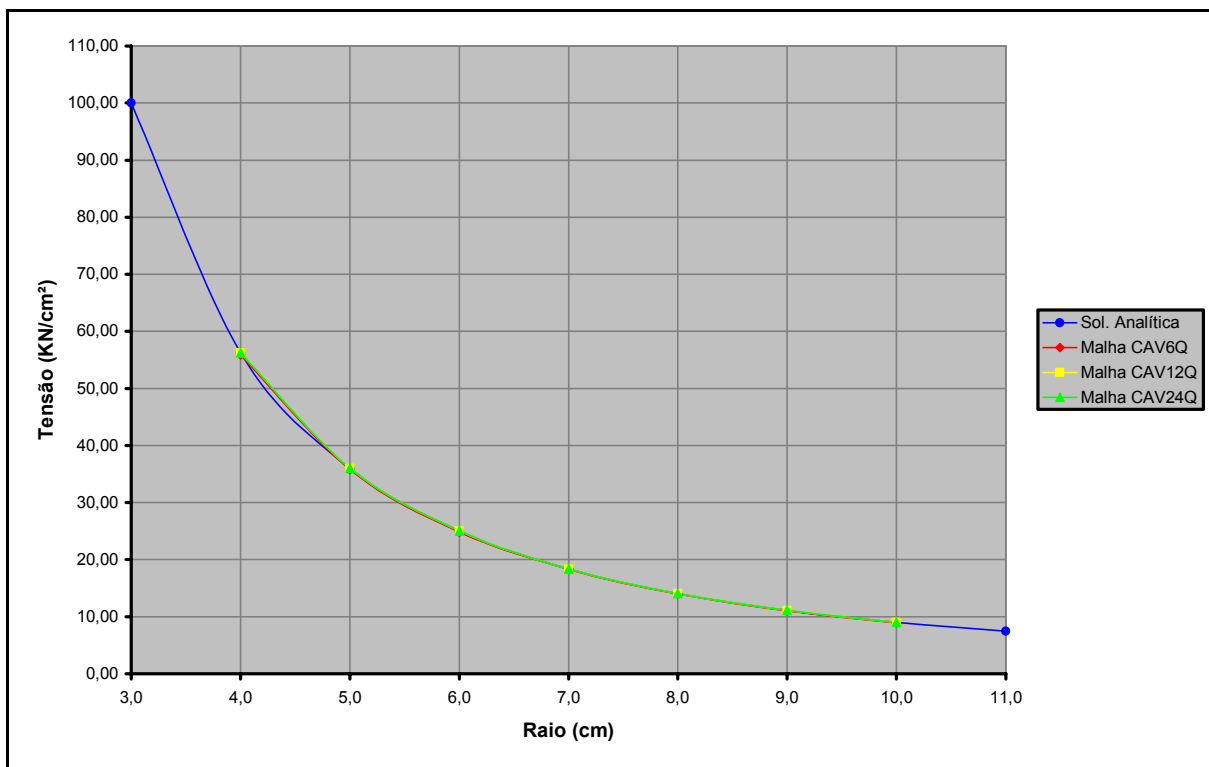


Gráfico 5.10 – Erro no cálculo das tensões angulares versus raio versus malhas CAV12C, CAV24C e CAV48C

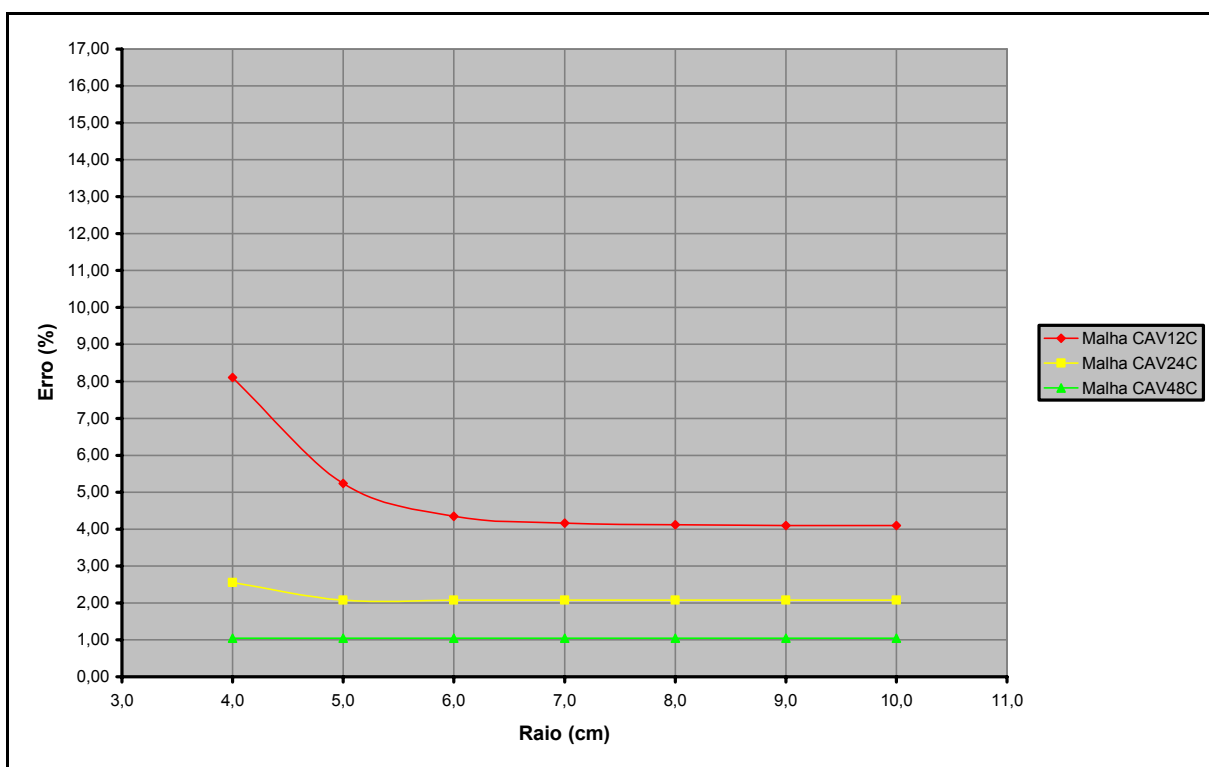


Gráfico 5.11 – Erro no cálculo das tensões angulares versus raio versus malhas CAV12L, CAV24L e CAV48L

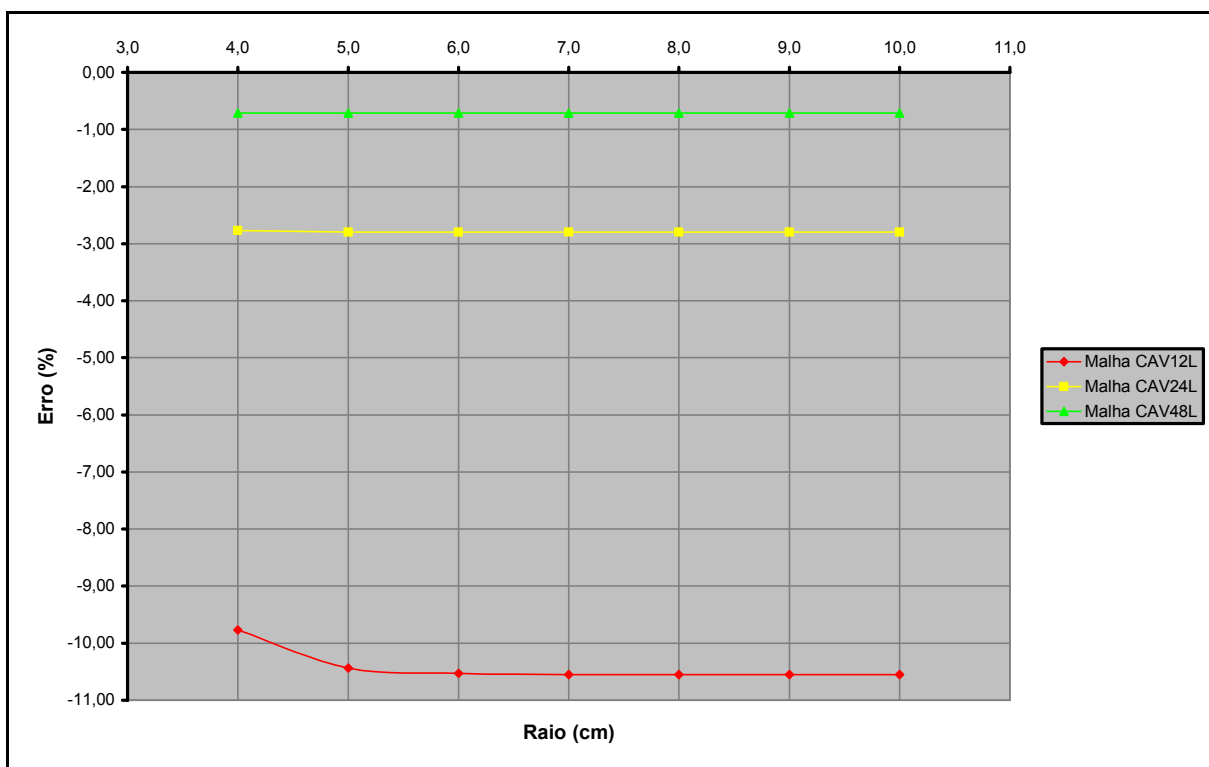


Gráfico 5.12 – Erro no cálculo das tensões angulares versus raio versus malha CAV6Q, CAV12Q e CAV24Q

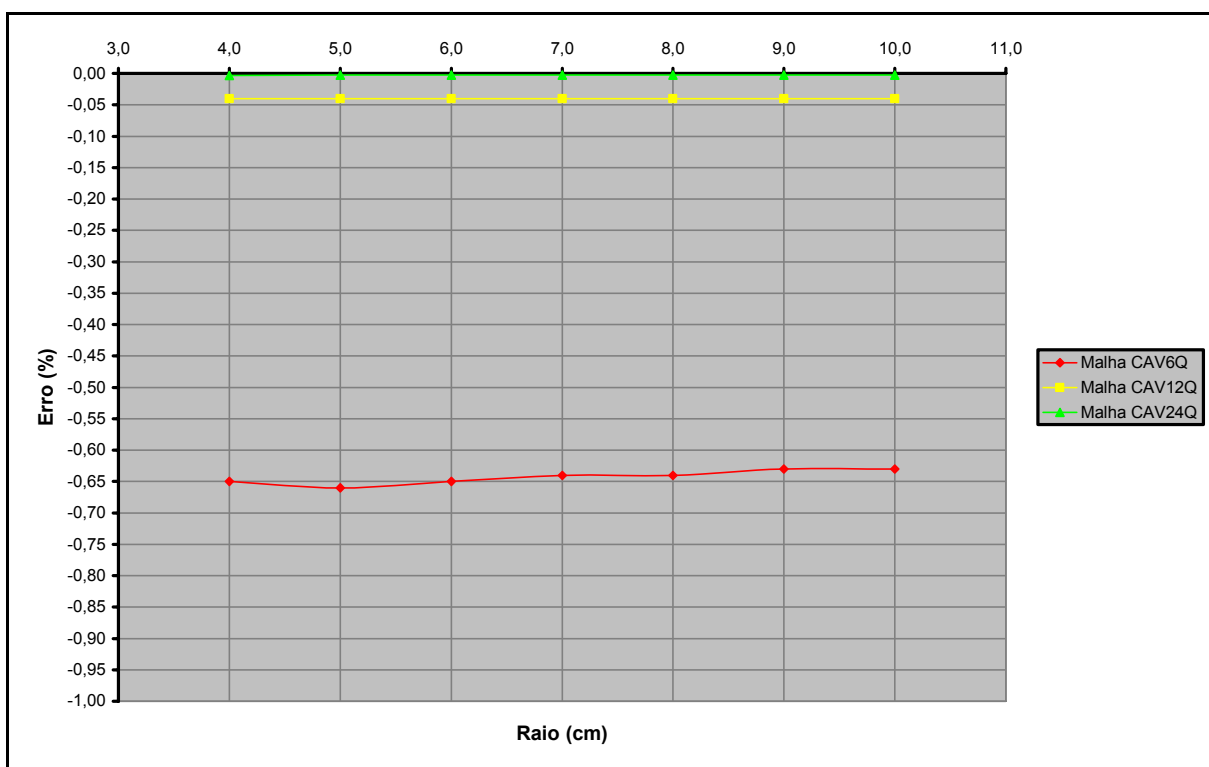


Gráfico 5.13 – Solução analítica para os deslocamentos radiais versus raio versus malhas CAV12C, CAV24C e CAV48C

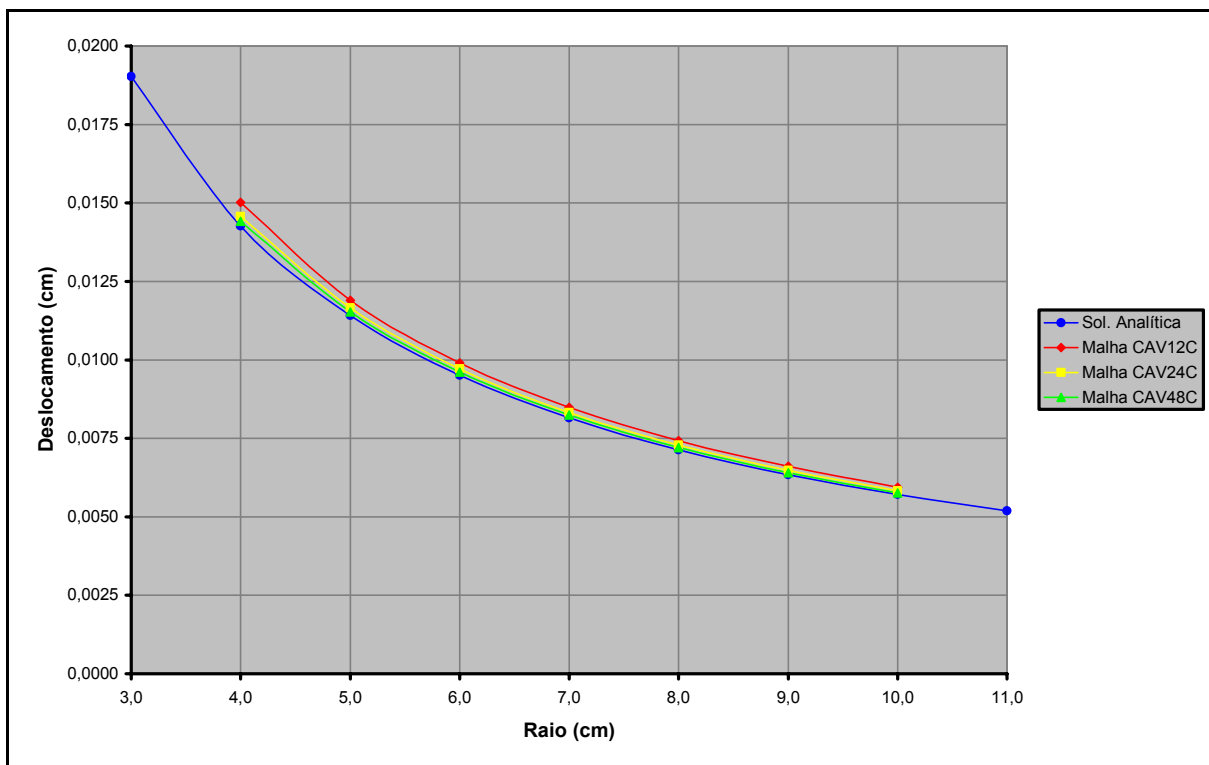


Gráfico 5.14 – Solução analítica para os deslocamentos radiais versus raio versus malhas CAV12L, CAV24L e CAV48L

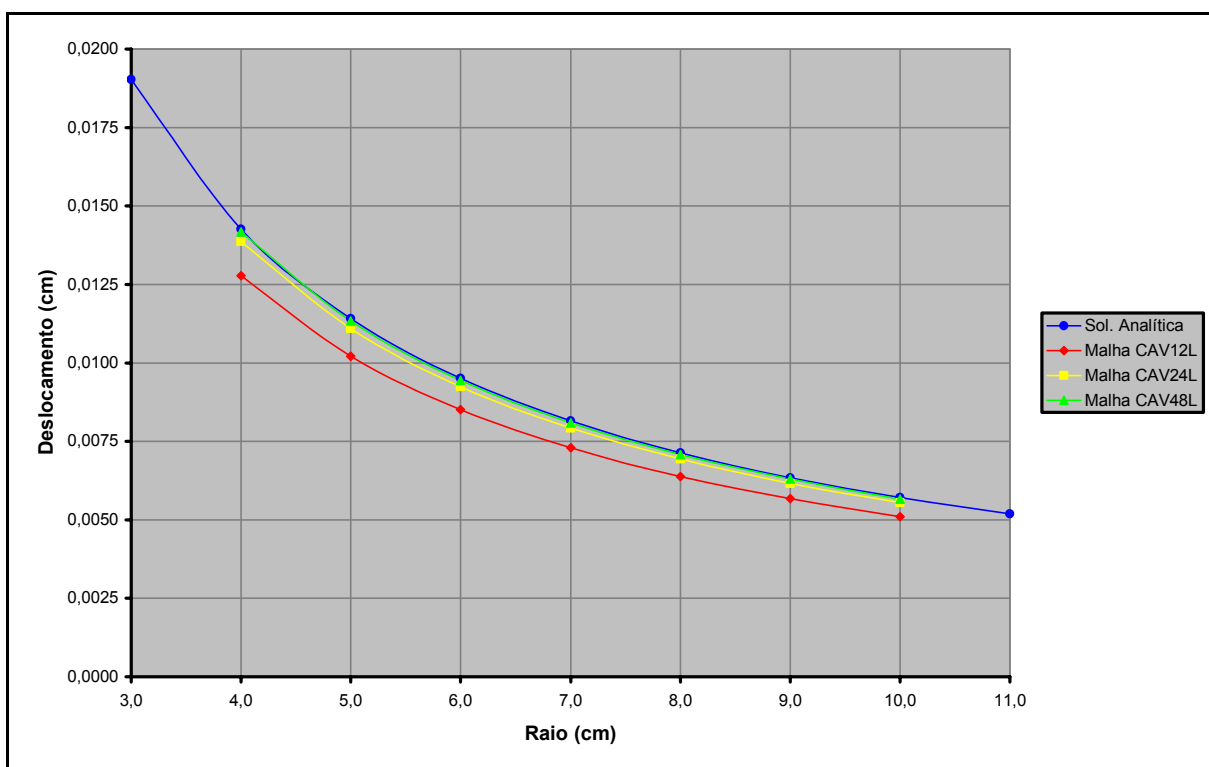


Gráfico 5.15 – Solução analítica para os deslocamentos radiais versus raio versus malhas CAV6Q, CAV12Q e CAV24Q

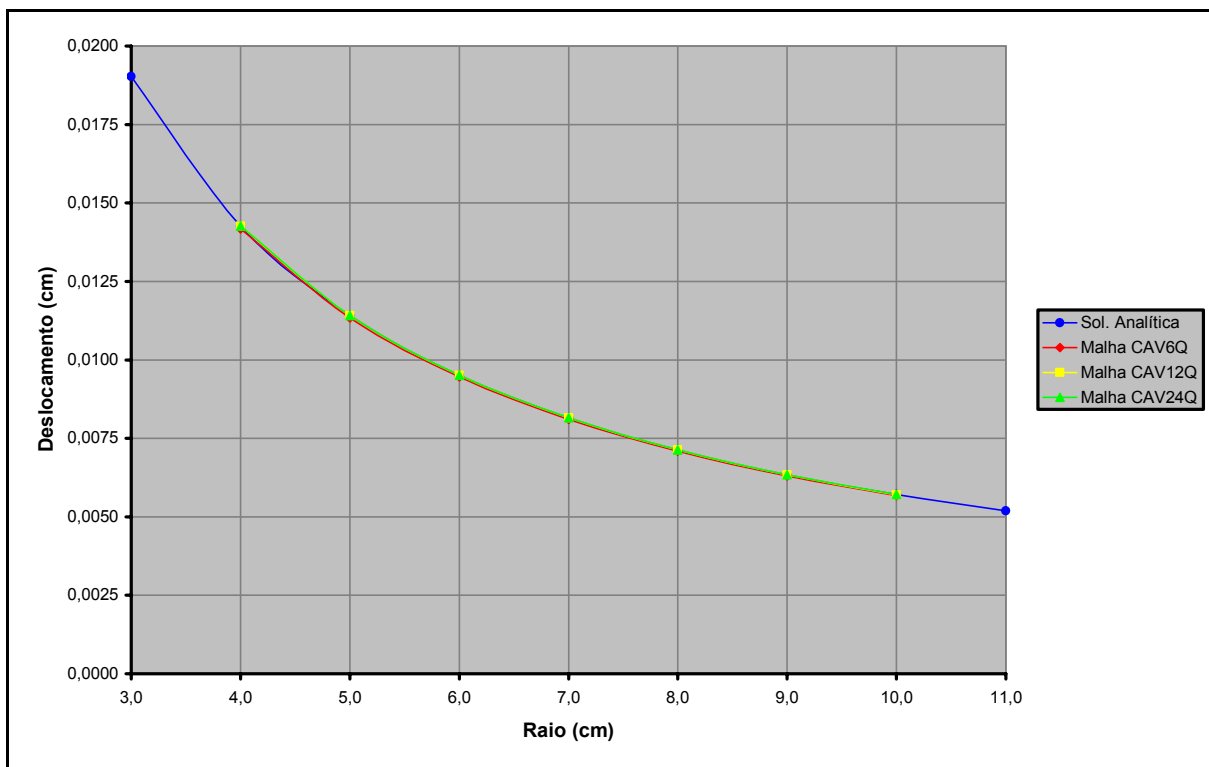


Gráfico 5.16 – Erro no cálculo dos deslocamentos radiais versus raio versus malhas CAV12C, CAV24C e CAV48C

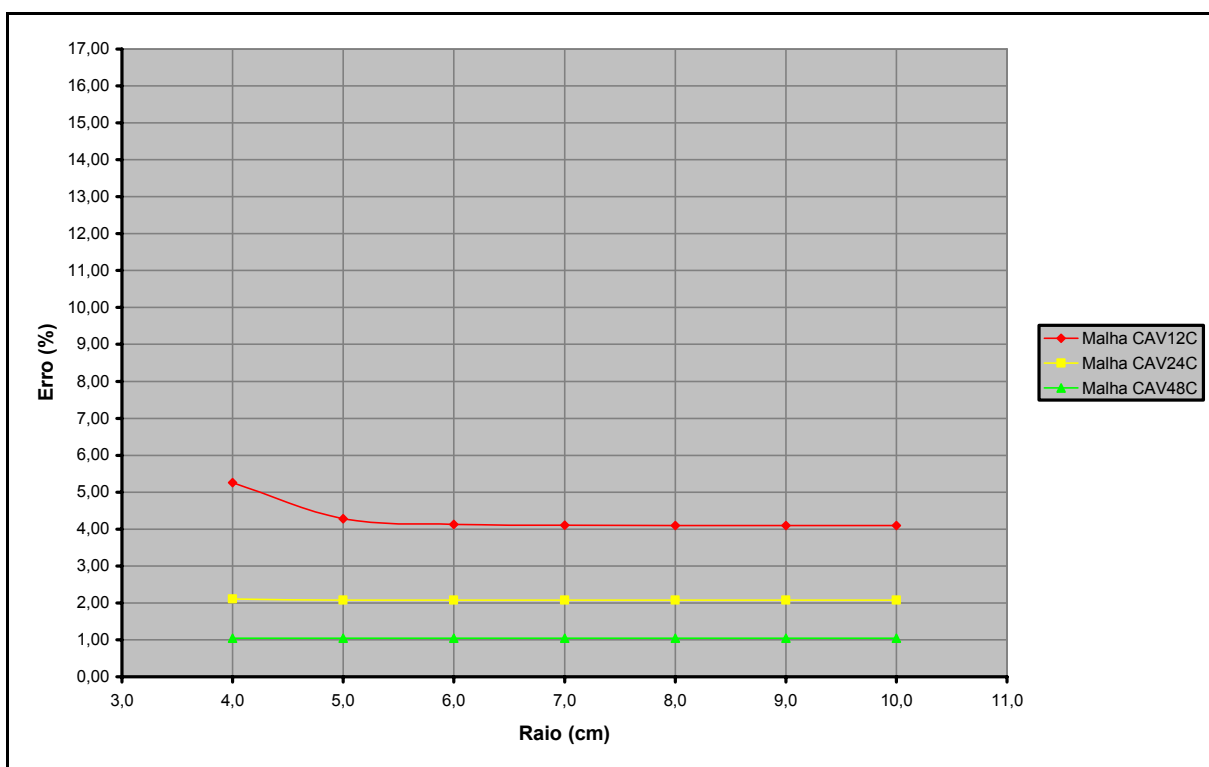


Gráfico 5.17 – Erro no cálculo dos deslocamentos radiais versus raio versus malhas CAV12L, CAV24L e CAV48L

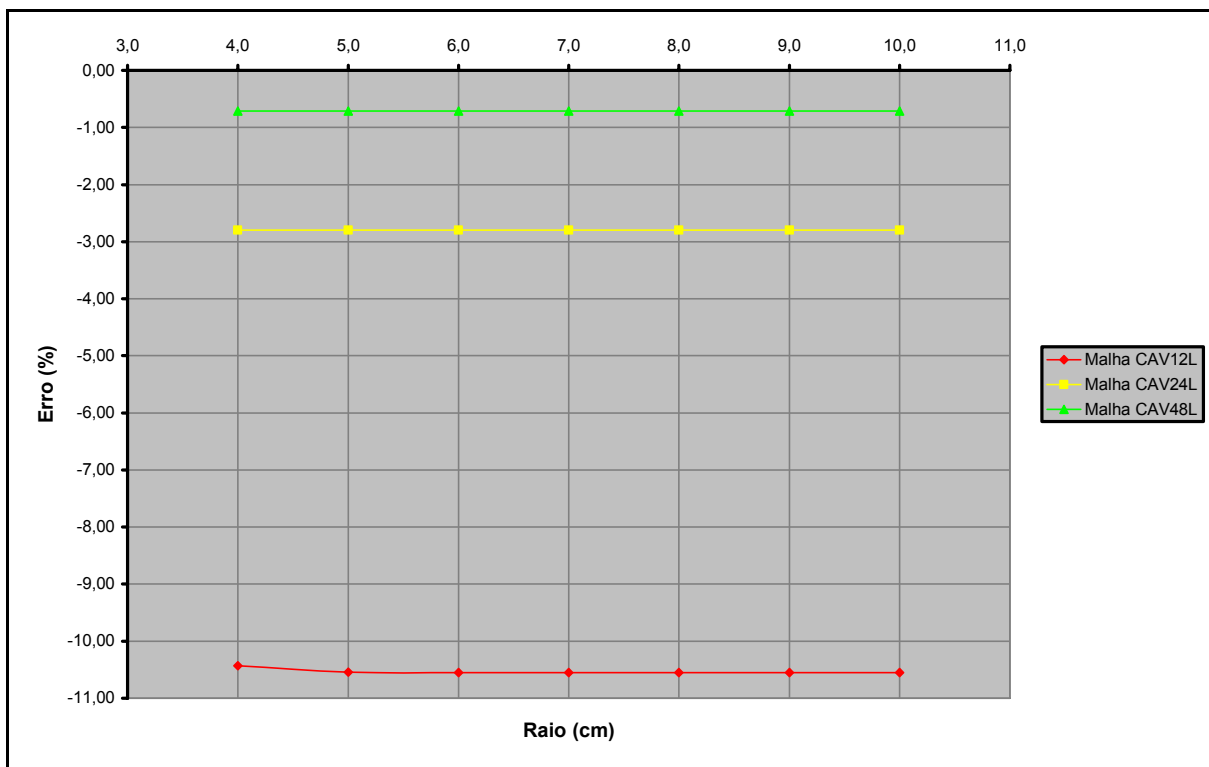
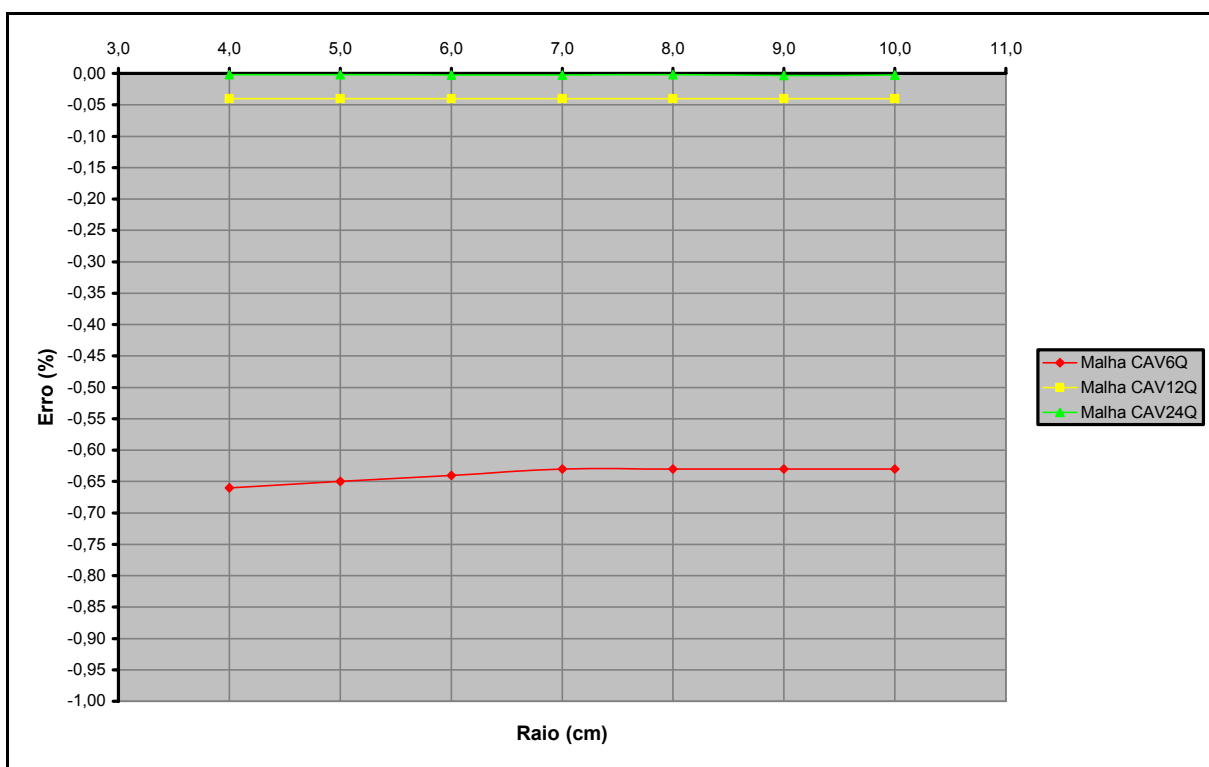


Gráfico 5.18 – Erro no cálculo dos deslocamentos radiais versus raio versus malha CAV6Q, CAV12Q e CAV24Q



5.2 Cilindro Pressurizado

5.2.1 Considerações Gerais

Considere-se o problema de um cilindro sob pressão uniforme tal como ilustrado na Figura 5.11, onde r_i denota o raio interno do cilindro, r_e denota o raio externo do cilindro, p denota a pressão interna do cilindro e r denota a distância do centro do cilindro até um ponto qualquer localizado no domínio do problema.

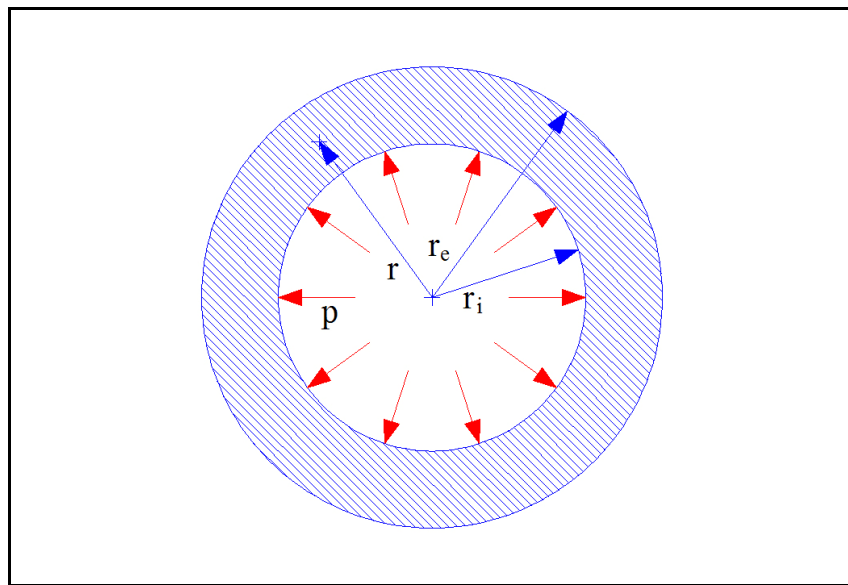


FIGURA 5.11 – Cilindro sob pressão uniforme

5.2.2 Solução Analítica

A solução analítica para esse problema é dada por⁵

$$\sigma_{rr} = \frac{pr_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right) \quad (5.4)$$

⁵ ALIABADI, M. H. **The Boundary Element Method**, Vol. 2, Applications in Solids and Structures. Chippenham: John Wiley & Sons, 2002, p. 83.

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pr_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right) \quad (5.5)$$

$$u_r = \frac{(1+\nu)pr}{E \left[\left(\frac{r_e}{r_i} \right)^2 - 1 \right]} \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^2 + (1-2\nu) \right] \quad (5.6)$$

onde σ_{rr} denota a tensão radial, $\sigma_{\theta\theta}$ denota a tensão angular e u_r denota o deslocamento radial.

5.2.3 Dados do Problema

A tabela a seguir apresenta os dados utilizados na análise do problema de cilindro pressurizado.

Tabela 5.11 – Dados utilizados na análise do problema de cilindro pressurizado

E (KN/cm ²)	20500,0
ν	0,3
P (KN/cm ²)	100,0
r_e (cm)	8,0
r_i (cm)	3,0

5.2.4 Malhas de Elementos Quadráticos

As seções a seguir ilustram as malhas de elementos de contorno quadráticos utilizadas na análise do problema de cilindro pressurizado.⁶

5.2.4.1 Malha CIL18Q

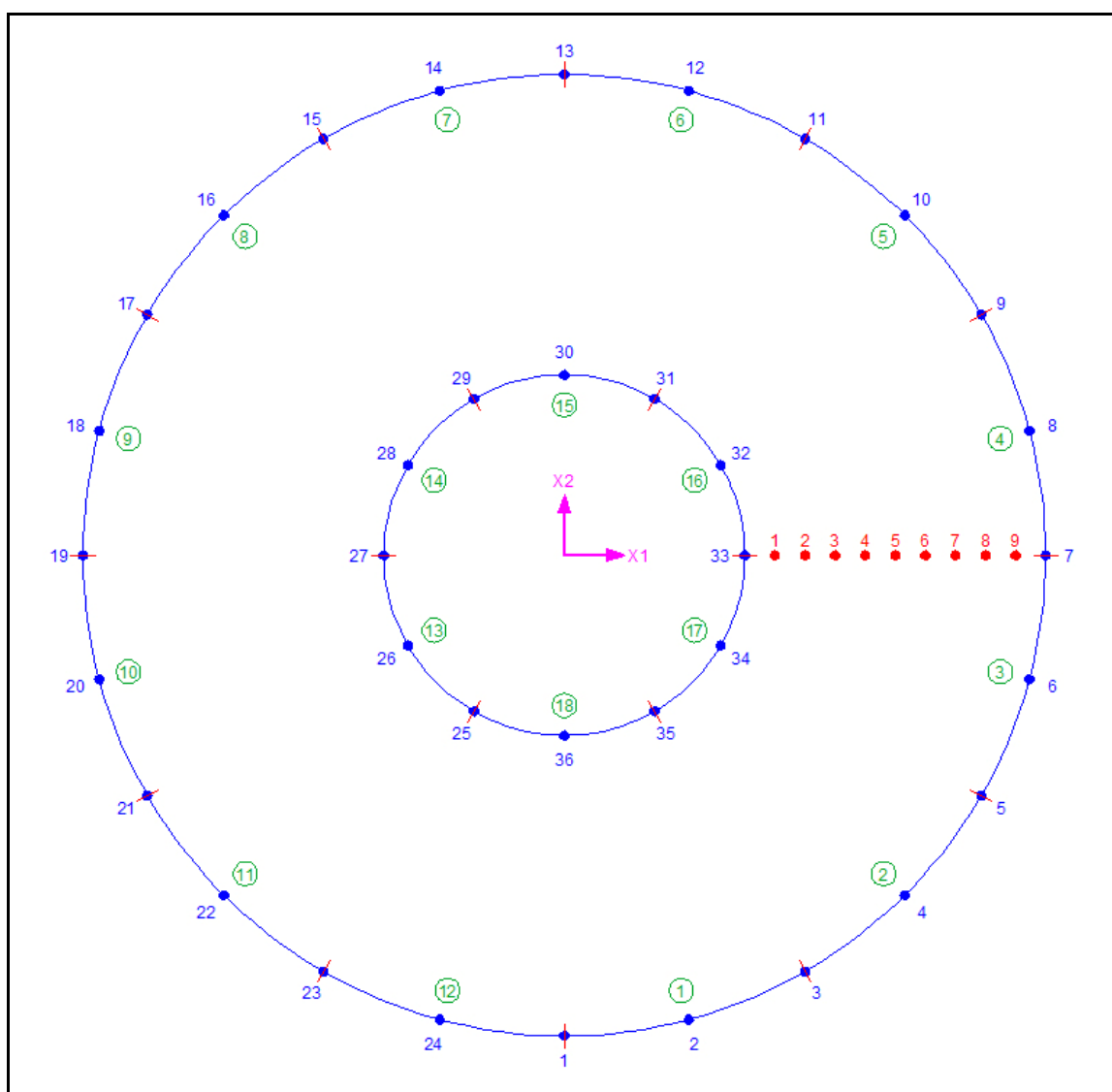


FIGURA 5.12 – Representação geométrica da malha CIL18Q

⁶ Para a convenção adotada na representação geométrica de malhas de elementos de contorno neste trabalho ver a seção 3.7.1.

5.2.4.2 Malha CIL30Q

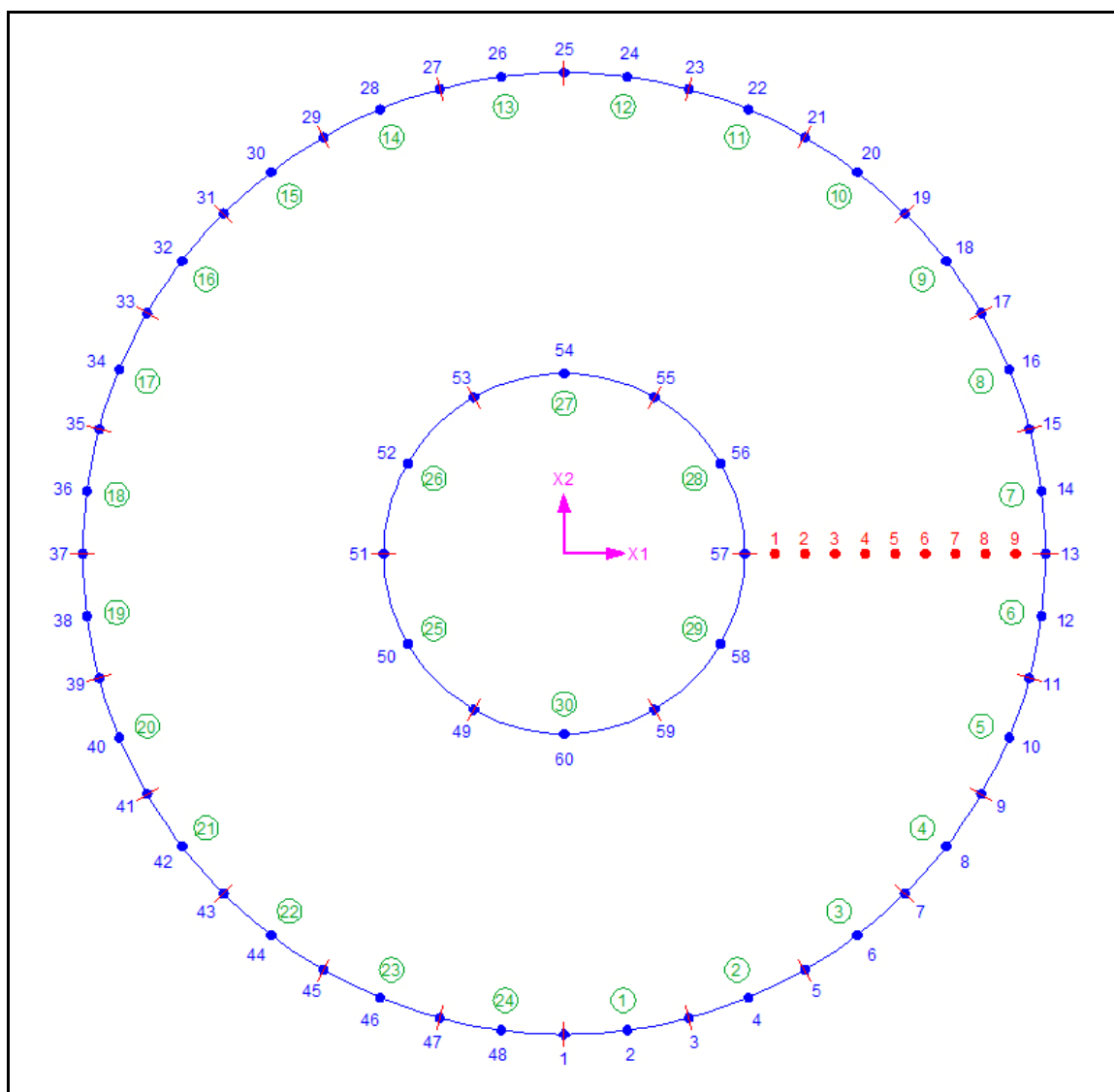


FIGURA 5.13 – Representação geométrica da malha CIL30Q

5.2.4.3 Malha CIL36Q

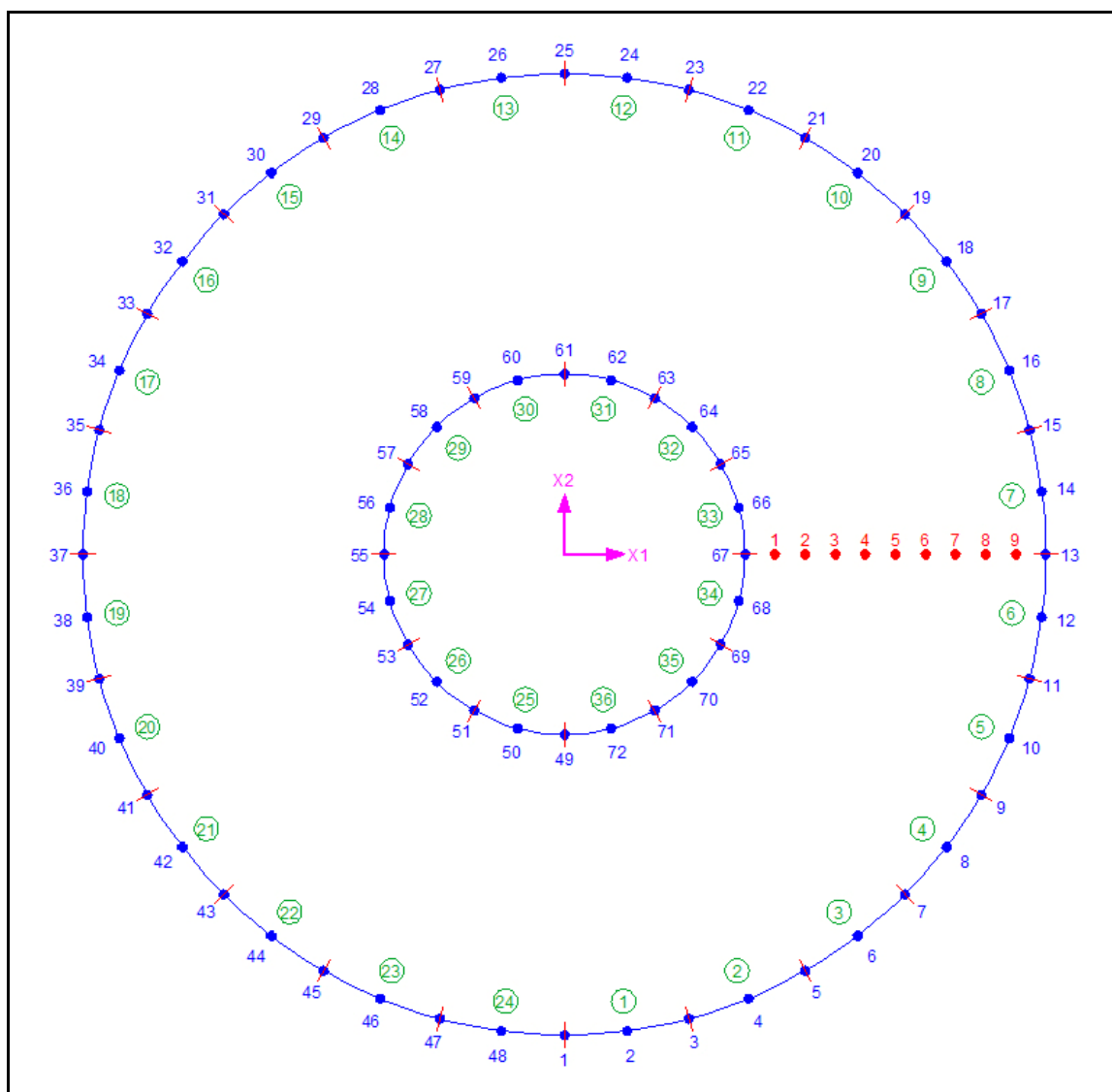


FIGURA 5.14 – Representação geométrica da malha CIL36Q

5.2.5 Resultados

5.2.5.1 Tensões Radiais

Tabela 5.12 – Tensões radiais obtidas com o código MEC_ELASTIC_QUAD_MC

Pt	r (cm)	Solução Analítica (KN/cm2)	Malha CIL18Q (KN/cm2)	Erro (%)	Malha CIL30Q (KN/cm2)	Erro (%)	Malha CIL36Q (KN/cm2)	Erro (%)
1	3,5	-6,912801E+01	-6,850150E+01	-0,91	-6,850190E+01	-0,91	-6,908050E+01	-0,07
2	4,0	-4,909091E+01	-4,865240E+01	-0,89	-4,865310E+01	-0,89	-4,906530E+01	-0,05
3	4,5	-3,535354E+01	-3,504060E+01	-0,89	-3,504160E+01	-0,88	-3,533640E+01	-0,05
4	5,0	-2,552727E+01	-2,530830E+01	-0,86	-2,530950E+01	-0,85	-2,551530E+01	-0,05
5	5,5	-1,825695E+01	-1,810470E+01	-0,83	-1,810600E+01	-0,83	-1,824850E+01	-0,05
6	6,0	-1,272727E+01	-1,262360E+01	-0,81	-1,262470E+01	-0,81	-1,272140E+01	-0,05
7	6,5	-8,423884E+00	-8,356800E+00	-0,80	-8,357470E+00	-0,79	-8,420050E+00	-0,05
8	7,0	-5,009276E+00	-4,972120E+00	-0,74	-4,970650E+00	-0,77	-5,007070E+00	-0,04
9	7,5	-2,254546E+00	-2,801990E+00	24,28	-2,240640E+00	-0,62	-2,256640E+00	0,09

5.2.5.2 Tensões Angulares

Tabela 5.13 – Tensões angulares obtidas com o código MEC_ELASTIC_QUAD_MC

Pt	r (cm)	Solução Analítica (KN/cm2)	Malha CIL18Q (KN/cm2)	Erro (%)	Malha CIL30Q (KN/cm2)	Erro (%)	Malha CIL36Q (KN/cm2)	Erro (%)
1	3,5	1,018553E+02	1,010090E+02	-0,83	1,010070E+02	-0,83	1,017980E+02	-0,06
2	4,0	8,181818E+01	8,121510E+01	-0,74	8,121320E+01	-0,74	8,177870E+01	-0,05
3	4,5	6,808081E+01	6,757450E+01	-0,74	6,757280E+01	-0,75	6,804900E+01	-0,05
4	5,0	5,825455E+01	5,782530E+01	-0,74	5,782350E+01	-0,74	5,822760E+01	-0,05
5	5,5	5,098422E+01	5,061220E+01	-0,73	5,061040E+01	-0,73	5,096060E+01	-0,05
6	6,0	4,545455E+01	4,512560E+01	-0,72	4,512330E+01	-0,73	4,543340E+01	-0,05
7	6,5	4,115116E+01	4,085520E+01	-0,72	4,085210E+01	-0,73	4,113180E+01	-0,05
8	7,0	3,773655E+01	3,746680E+01	-0,71	3,746200E+01	-0,73	3,771870E+01	-0,05
9	7,5	3,498182E+01	3,527590E+01	0,84	3,472710E+01	-0,73	3,496640E+01	-0,04

5.2.5.3 Deslocamentos Radiais

Tabela 5.14 – Deslocamentos radiais obtidos com o código MEC_ELASTIC_QUAD_MC

Pt	r (cm)	Solução Analítica (cm)	Malha CIL18Q (cm)	Erro (%)	Malha CIL30Q (cm)	Erro (%)	Malha CIL36Q (cm)	Erro (%)
1	3,5	2,042770E-02	2,027640E-02	-0,74	2,027600E-02	-0,74	2,041800E-02	-0,05
2	4,0	1,826340E-02	1,812770E-02	-0,74	1,812730E-02	-0,75	1,825480E-02	-0,05
3	4,5	1,662620E-02	1,650400E-02	-0,73	1,650360E-02	-0,74	1,661840E-02	-0,05
4	5,0	1,535790E-02	1,524600E-02	-0,73	1,524560E-02	-0,73	1,535070E-02	-0,05
5	5,5	1,435790E-02	1,425390E-02	-0,72	1,425350E-02	-0,73	1,435120E-02	-0,05
6	6,0	1,355920E-02	1,346130E-02	-0,72	1,346090E-02	-0,72	1,355290E-02	-0,05
7	6,5	1,291530E-02	1,282220E-02	-0,72	1,282190E-02	-0,72	1,290930E-02	-0,05
8	7,0	1,239300E-02	1,230380E-02	-0,72	1,230350E-02	-0,72	1,238720E-02	-0,05
9	7,5	1,196810E-02	1,188200E-02	-0,72	1,188160E-02	-0,72	1,196240E-02	-0,05

5.2.5.4 Análise dos Resultados

Os Gráficos 5.19 a 5.21, 5.23 a 5.25 e 5.27 a 5.29 apresentam, respectivamente, a solução analítica para as tensões radiais ao longo da linha de pontos internos, a solução analítica para as tensões angulares ao longo da linha de pontos internos e a solução analítica para os deslocamentos radiais ao longo da linha de pontos internos, comparadas às soluções numéricas obtidas com as malhas CIL18Q, CIL30Q e CIL36Q, respectivamente.

O Gráfico 5.22 apresenta o erro obtido no cálculo das tensões radiais para as diferentes malhas quadráticas; o Gráfico 5.26 apresenta o erro obtido no cálculo das tensões angulares para as diferentes malhas quadráticas; e o Gráfico 5.30 apresenta o erro obtido no cálculo dos deslocamentos radiais para as diferentes malhas quadráticas.

Tanto para as tensões radiais quanto para as tensões angulares a malha CIL18Q apresenta erros grosseiros no ponto mais próximo da borda externa do cilindro. A malha CIL30Q elimina essas discrepâncias e a malha CIL36Q converge uniformemente para as soluções analíticas. Para os deslocamentos radiais a malha CIL30Q não apresenta melhorias em relação aos resultados da malha CIL18Q. A malha CIL36Q, por sua vez, converge uniformemente para a solução analítica.

Gráfico 5.19 – Solução analítica para as tensões radiais versus raio versus malha CIL18Q

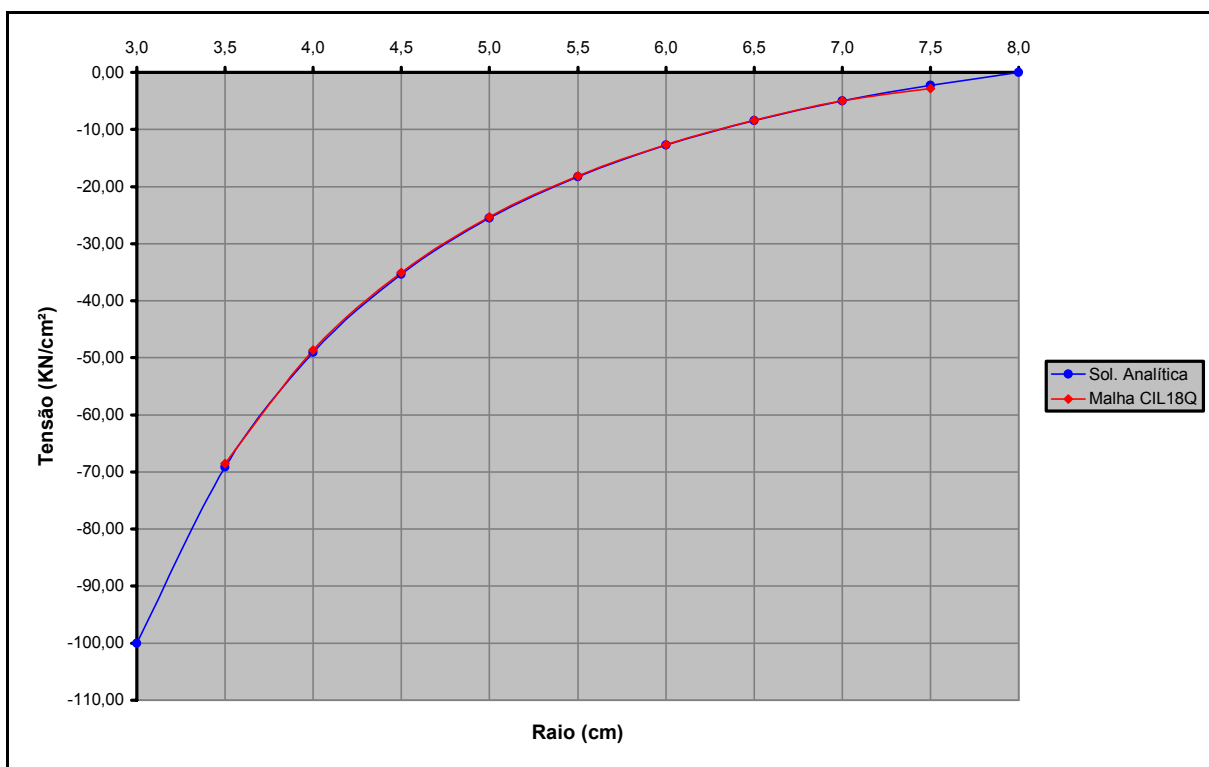


Gráfico 5.20 – Solução analítica para as tensões radiais versus raio versus malha CIL30Q

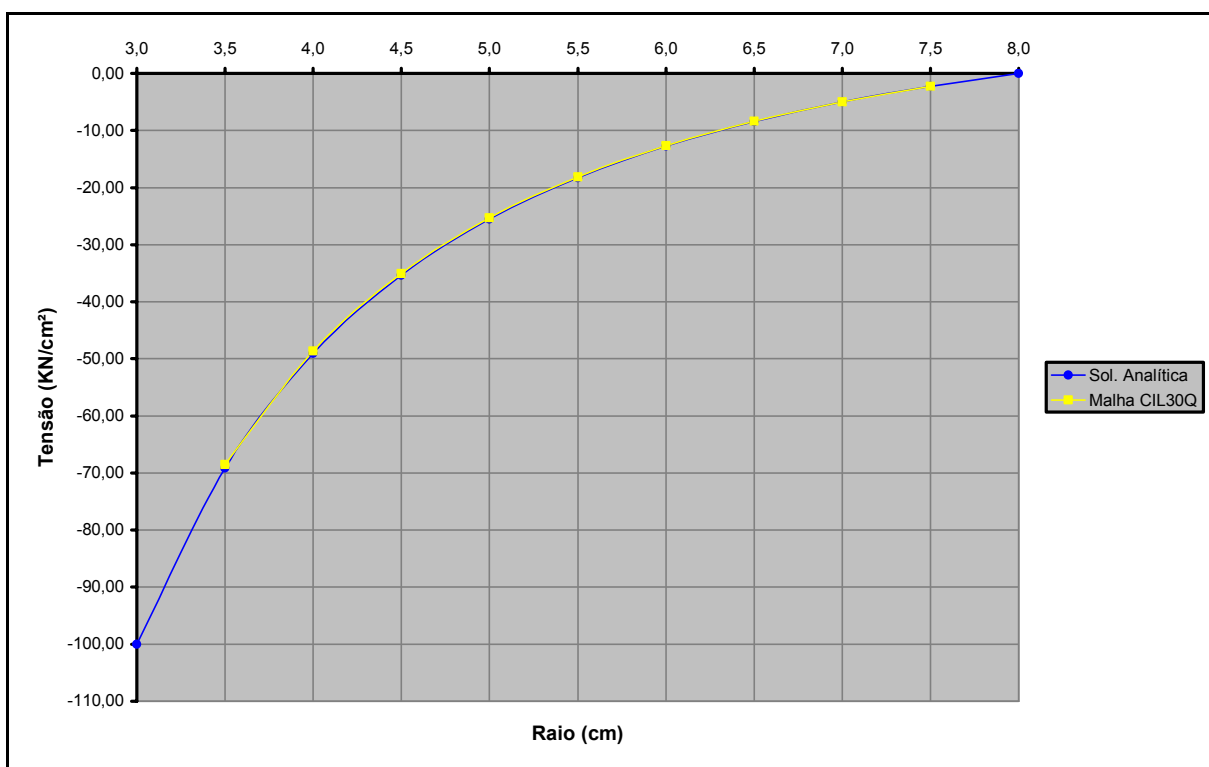


Gráfico 5.21 – Solução analítica para as tensões radiais versus raio versus malha CIL36Q

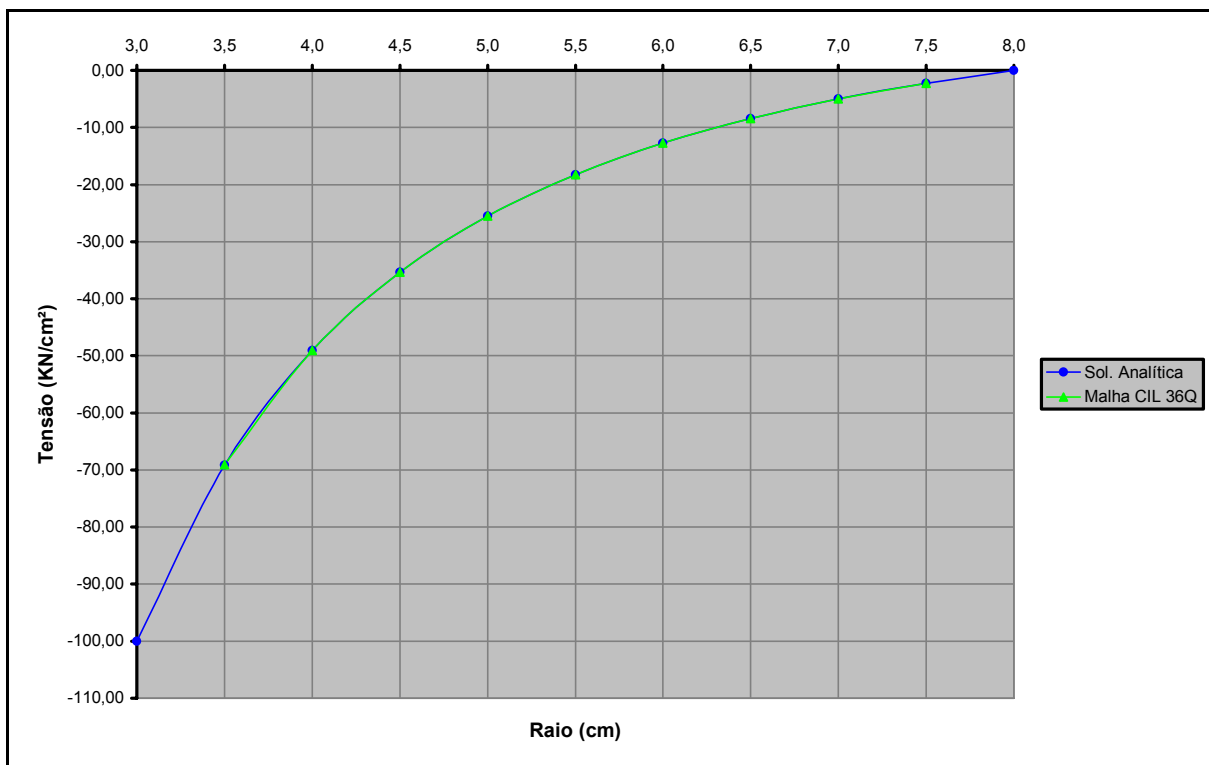


Gráfico 5.22 – Erro no cálculo das tensões radiais versus raio versus malha CIL18Q, CIL30Q e CIL36Q

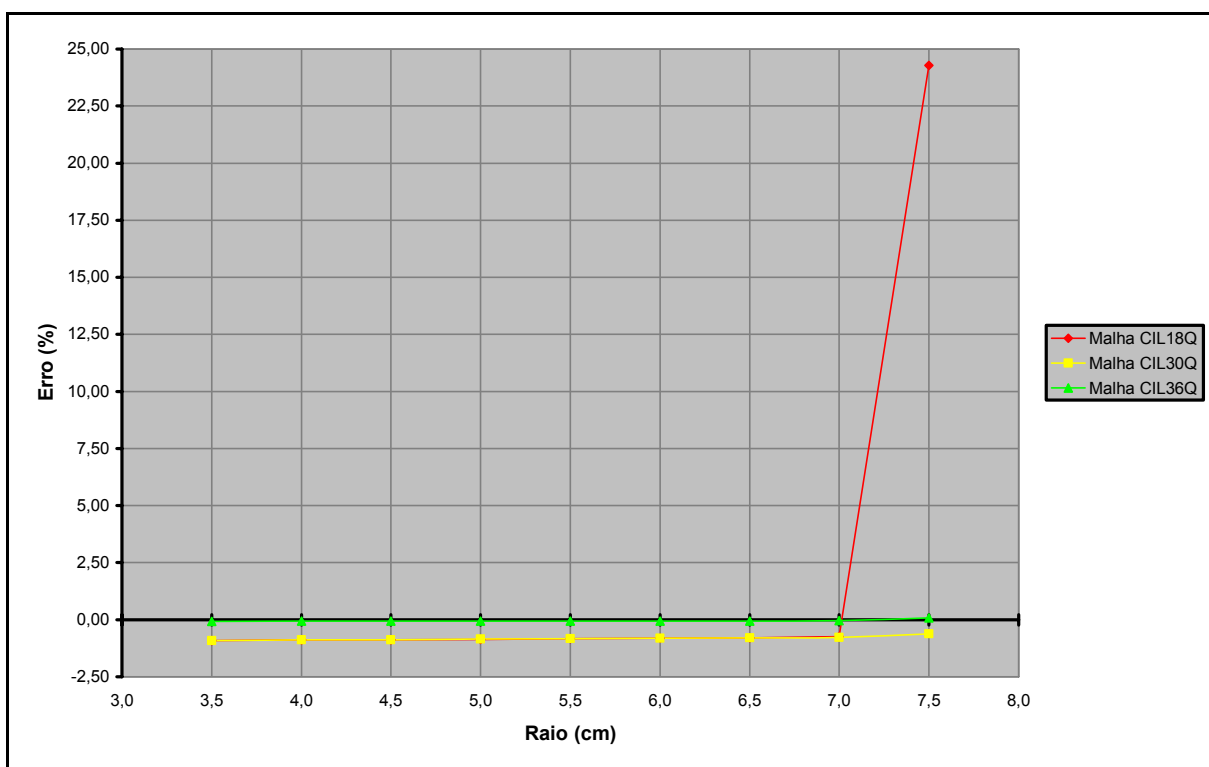


Gráfico 5.23 – Solução analítica para as tensões angulares versus raio versus malha CIL18Q

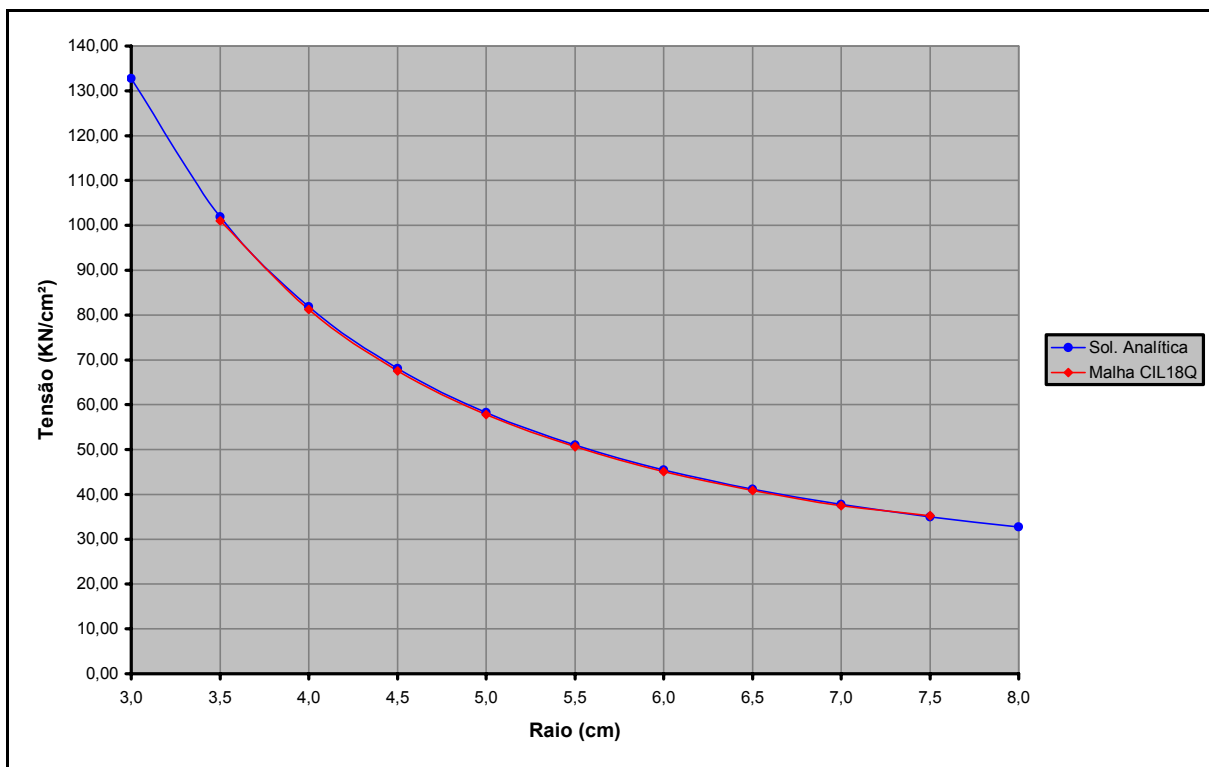


Gráfico 5.24 – Solução analítica para as tensões angulares versus raio versus malha CIL30Q

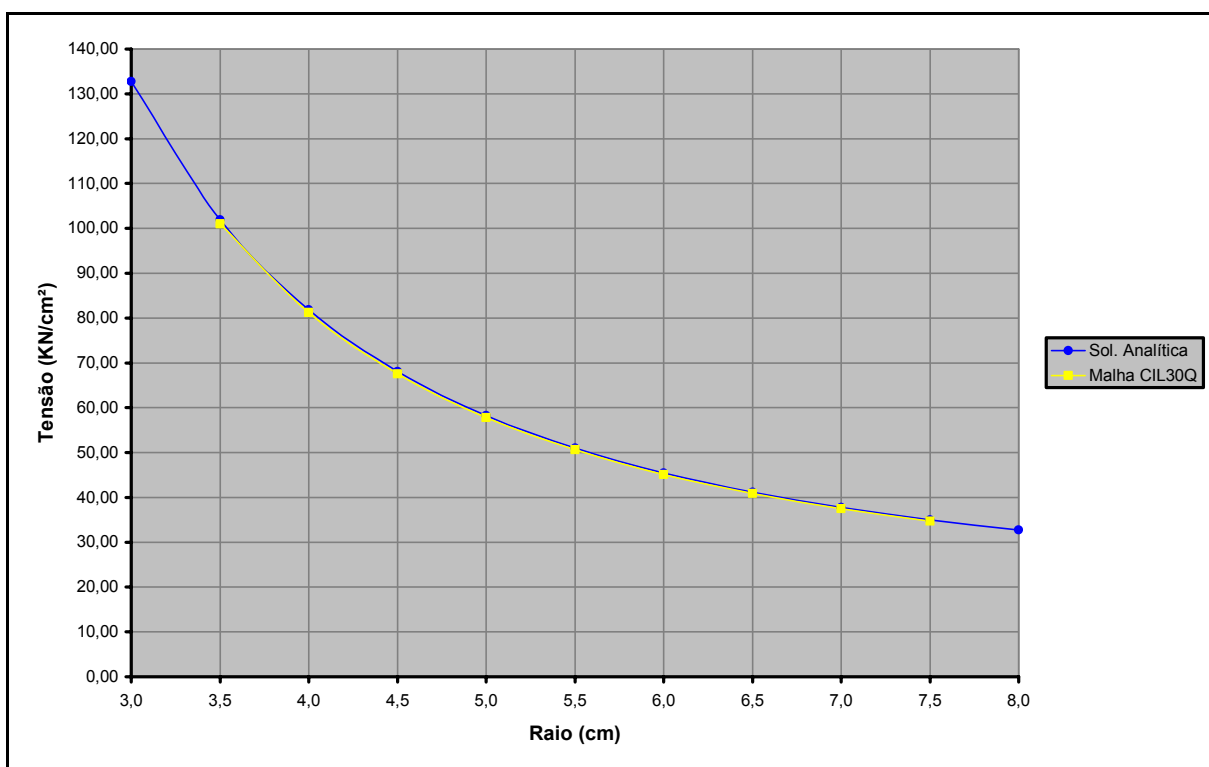


Gráfico 5.25 – Solução analítica para as tensões angulares versus raio versus malha CIL36Q

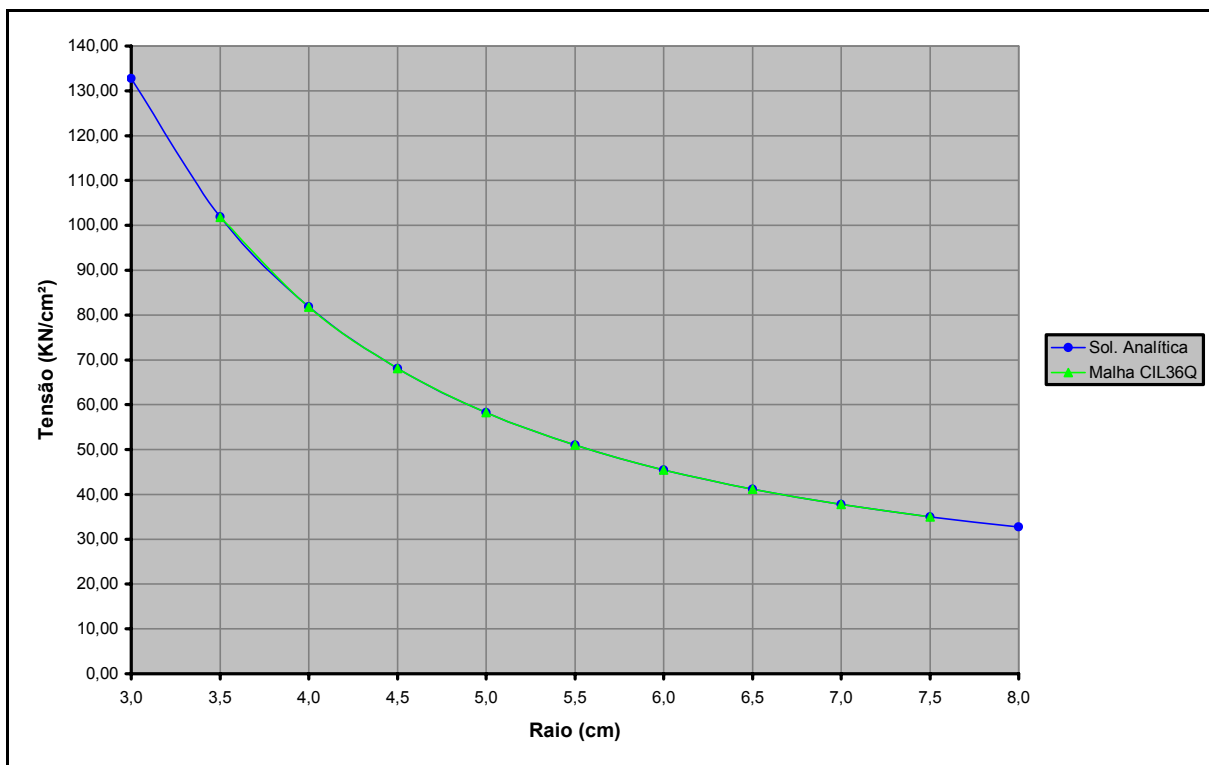


Gráfico 5.26 – Erro no cálculo das tensões angulares versus raio versus malha CIL18Q, CIL30Q e CIL36Q

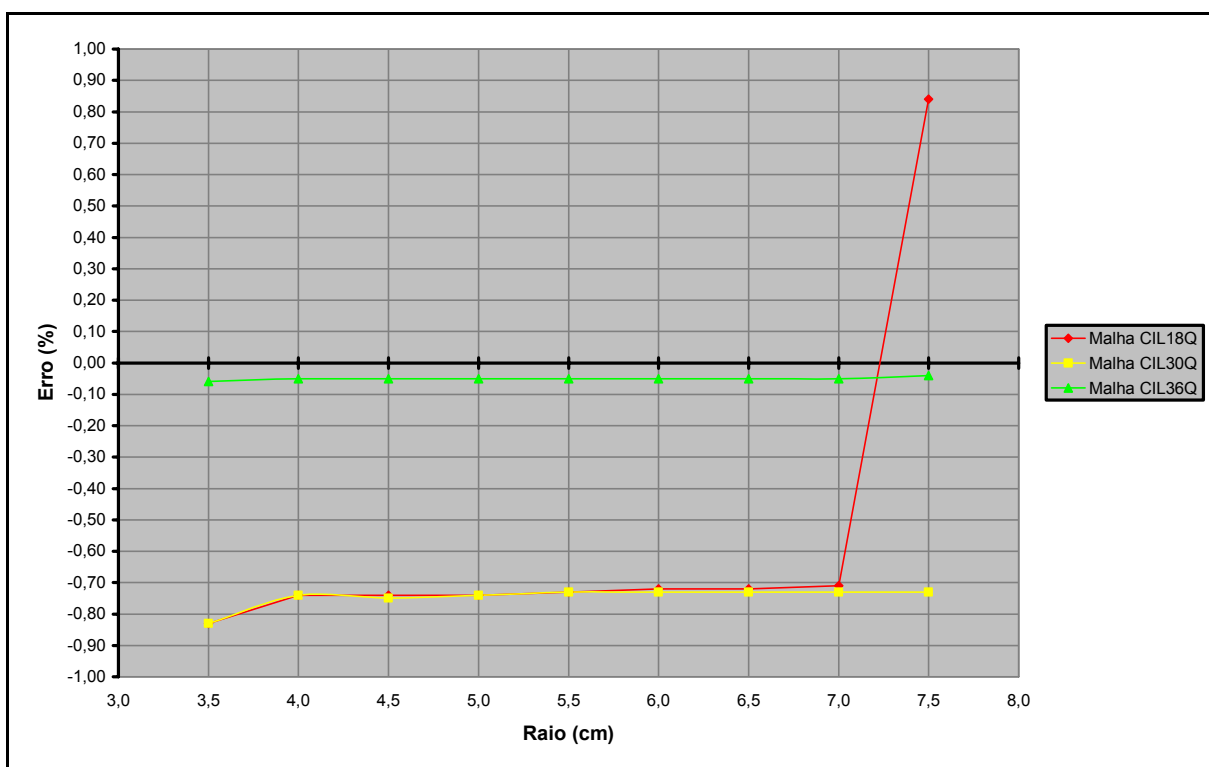


Gráfico 5.27 – Solução analítica para os deslocamentos radiais versus raio versus malha CIL18Q

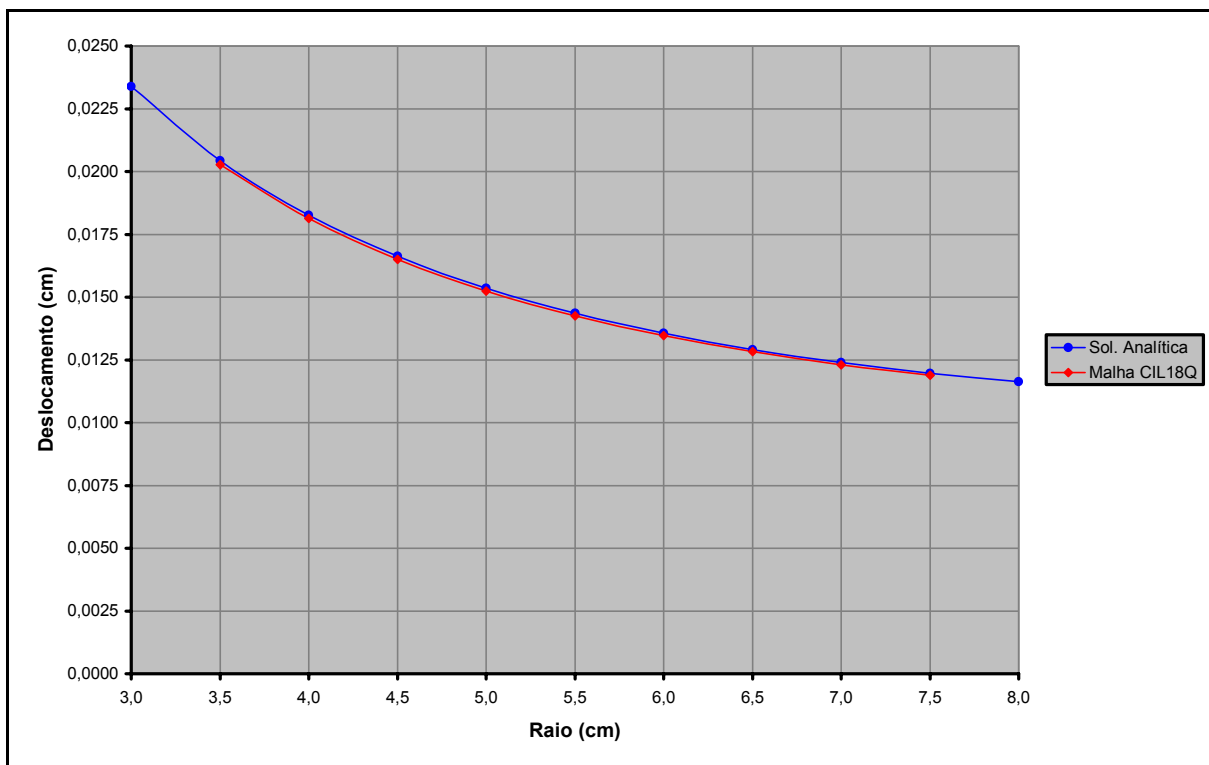


Gráfico 5.28 – Solução analítica para os deslocamentos radiais versus raio versus malha CIL30Q

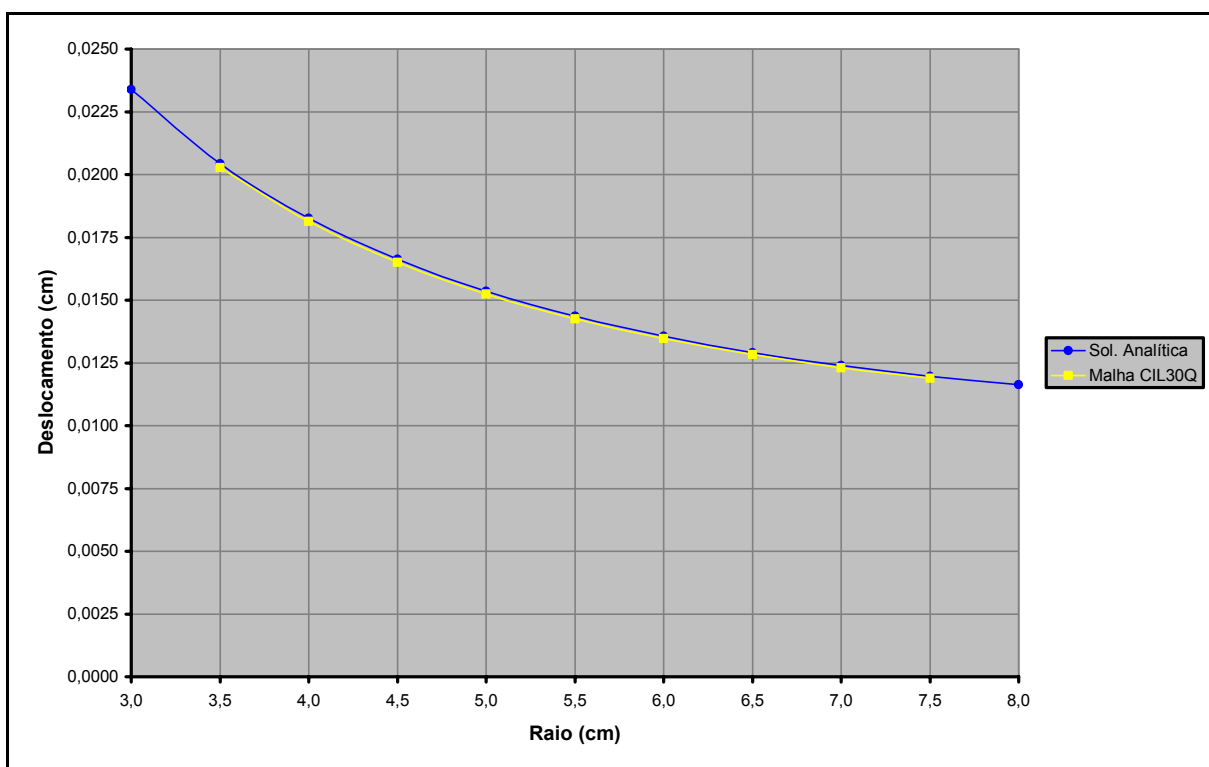


Gráfico 5.29 – Solução analítica para os deslocamentos radiais versus raio versus malha CIL36Q

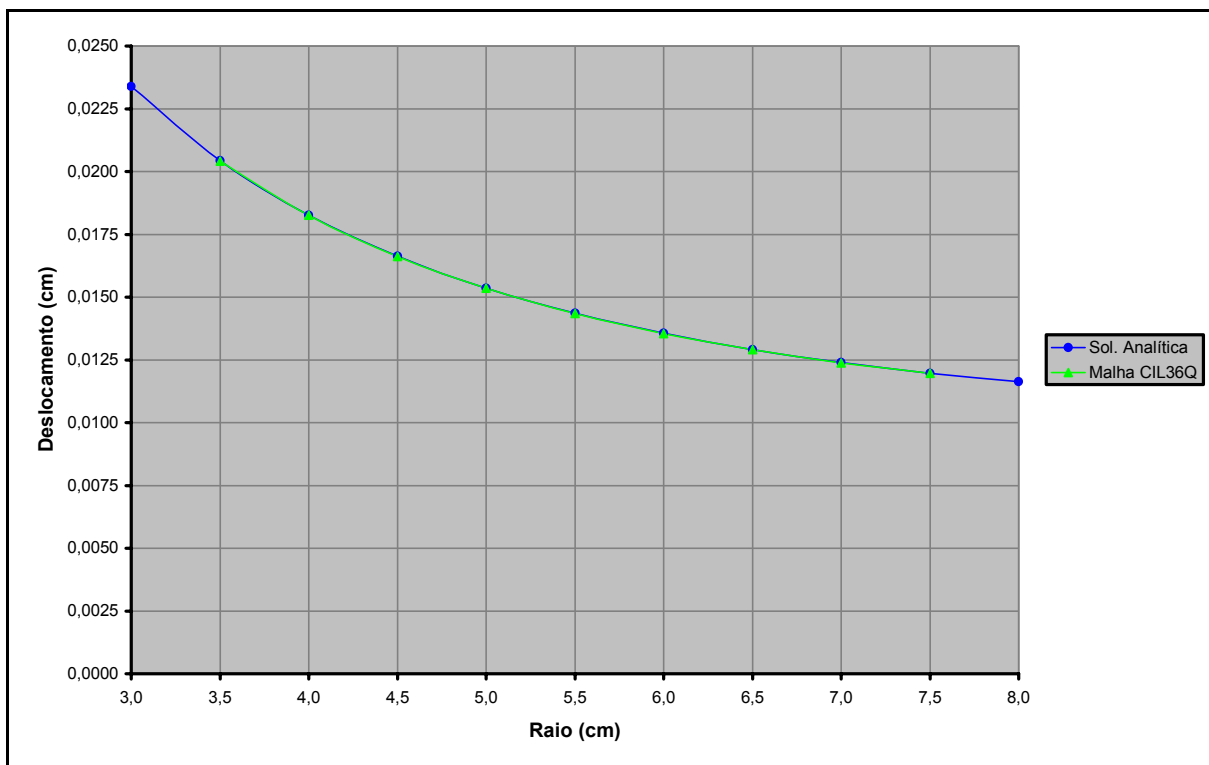
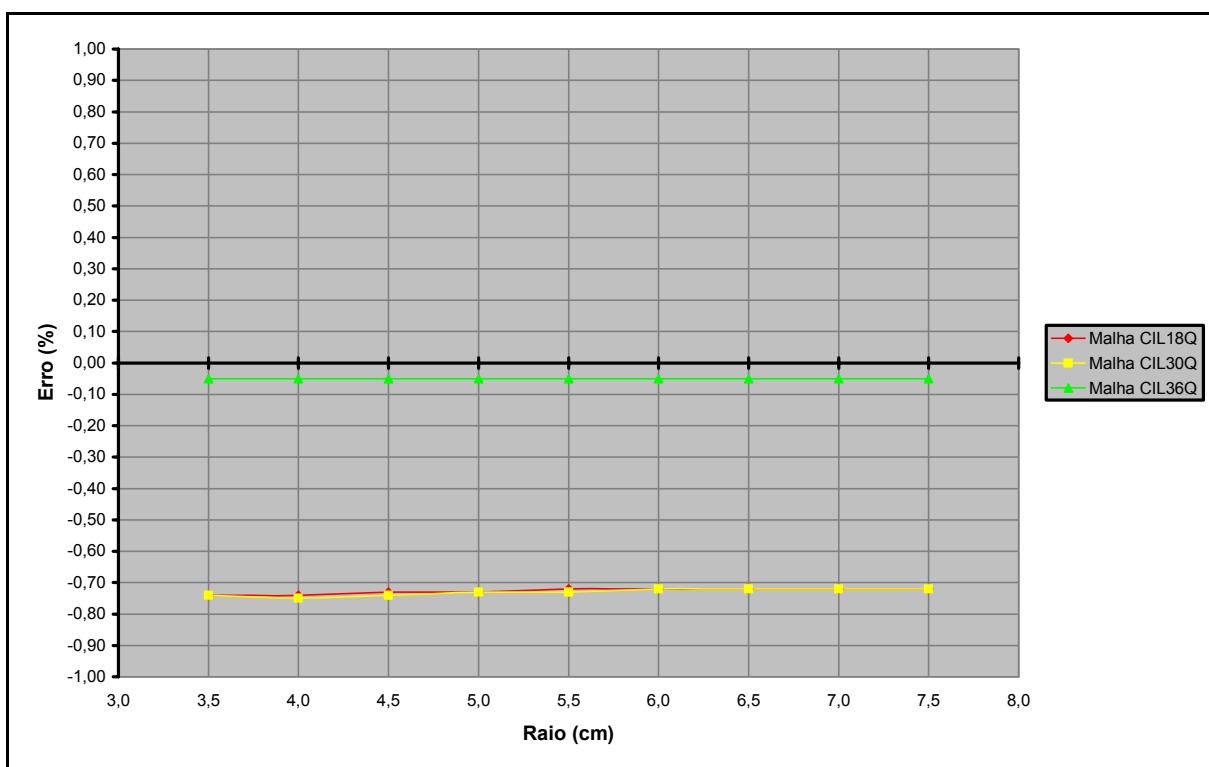


Gráfico 5.30 – Erro no cálculo dos deslocamentos radiais versus raio versus malha CIL18Q, CIL30Q e CIL36Q



5.3 Placa com Orifício

5.3.1 Considerações Gerais

Considere-se o problema de uma placa retangular com orifício central sob tração uniforme, tal como ilustrado na Figura 5.15, onde r_i denota o raio interno do orifício, σ_0 denota a tração a qual a placa está submetida, L_x e L_y denotam as dimensões da placa e r denota a distância do centro do orifício, segundo um ângulo θ com a horizontal, até um ponto qualquer localizado no domínio do problema.

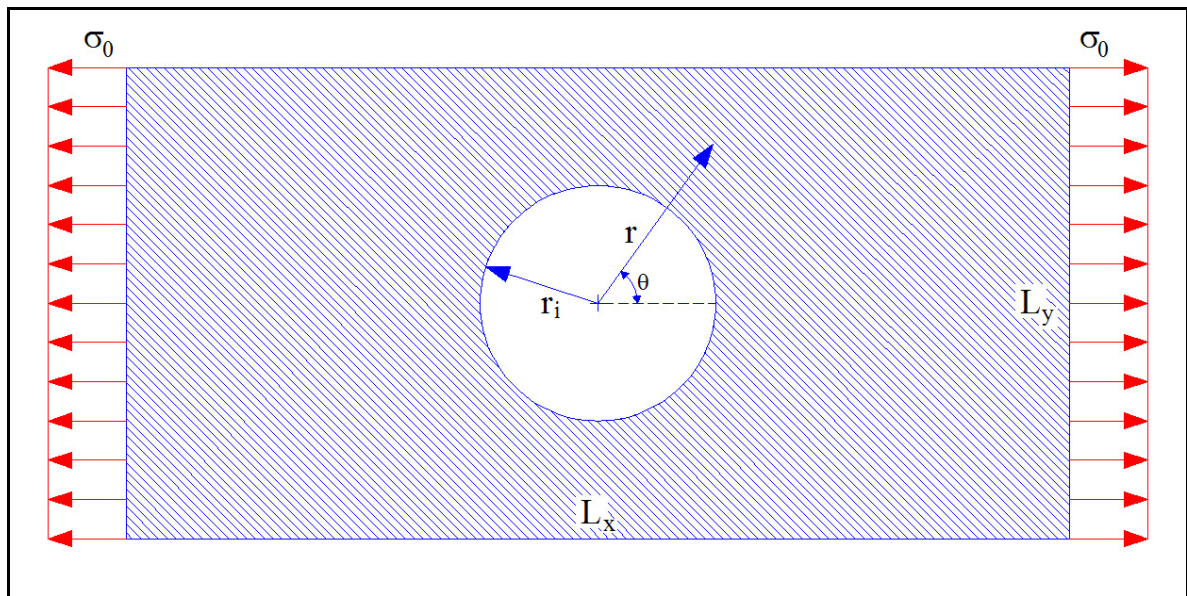


FIGURA 5.15 – Placa retangular com orifício central sob tração uniforme

5.3.2 Solução Analítica

A solução analítica para esse problema é dada por

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{3r_i^4}{r^4} - \frac{4r_i^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (5.7)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{3r_i^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (5.8)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{3r_i^4}{r^4} + \frac{2r_i^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \quad (5.9)$$

onde σ_{rr} denota a tensão normal radial, $\sigma_{\theta\theta}$ denota a tensão normal angular e $\sigma_{r\theta}$ denota a tensão tangencial.

As expressões anteriores correspondem a uma placa de tamanho infinito, no entanto, segundo TIMOSHENKO⁷, podem ser utilizadas como solução para o caso de uma placa de dimensões finitas desde que o diâmetro do orifício não seja superior a $\frac{1}{4}$ da dimensão L_y da placa.

5.3.3 Dados do Problema

A tabela a seguir apresenta os dados utilizados na análise do problema de placa com orifício.

Tabela 5.15 – Dados utilizados na análise do problema de placa com orifício

E (KN/cm ²)	20500,0
ν	0,3
σ_0 (KN/cm)	100,0
r_i (cm)	1,0
L_x (cm)	40,0
L_y (cm)	20,0

⁷ TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. 3. ed. Tokyo: McGraw-Hill, 1970, p. 90.

5.3.4 Malhas de Elementos Quadráticos

As seções a seguir ilustram as malhas de elementos de contorno quadráticos utilizadas na análise do problema de placa com orifício.⁸

⁸ Para a convenção adotada na representação geométrica de malhas de elementos de contorno neste trabalho ver a seção 3.7.1.

5.3.4.1 Malha PL68Q

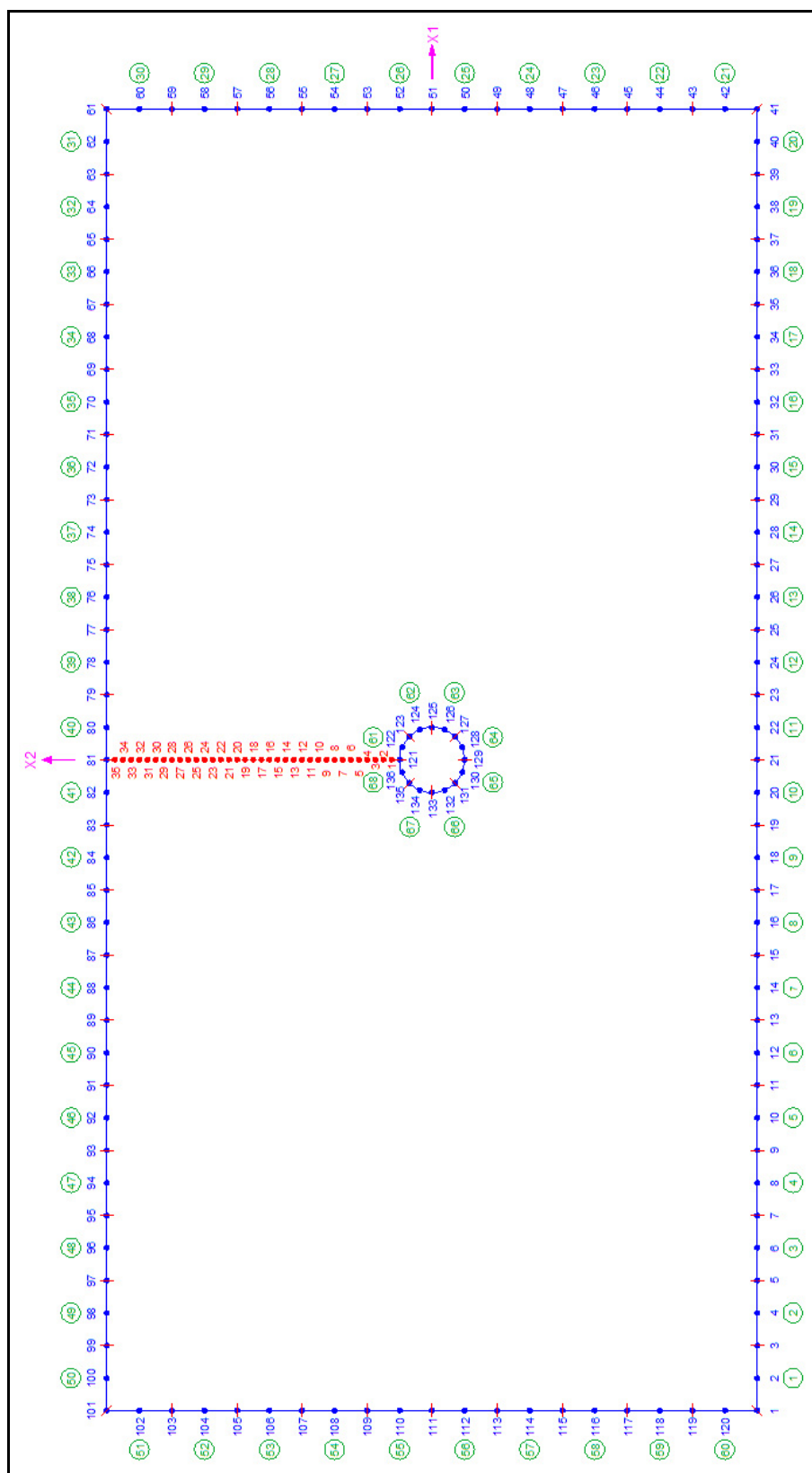


FIGURA 5.16 – Representação geométrica da malha PL68Q

5.3.4.4 Malha PL17Q

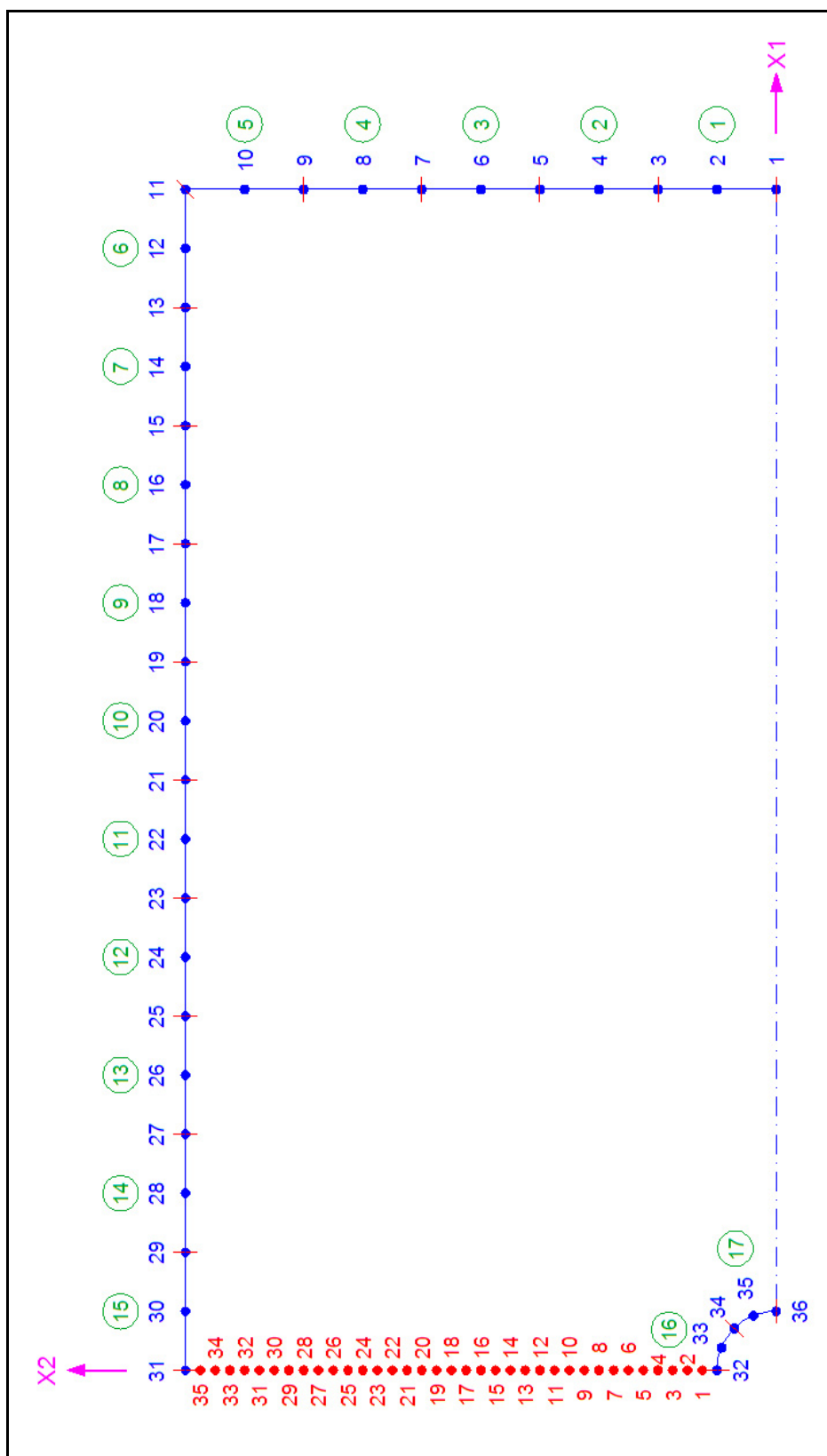


FIGURA 5.19 – Representação geométrica da malha PL17Q

5.3.5 Resultados

**Tabela 5.16 – Tensões angulares obtidas com o código
MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SIM para a malha PL68Q**

Pt	r (cm)	θ (°)	Solução Analítica (KN/cm ²)	Malha PL68Q (KN/cm ²)	Erro (%)
1	1,25	90,00	1,934400E+02	1,953060E+02	0,96
2	1,50	90,00	1,518519E+02	1,532650E+02	0,93
3	1,75	90,00	1,323199E+02	1,335270E+02	0,91
4	2,00	90,00	1,218750E+02	1,229800E+02	0,91
5	2,25	90,00	1,157293E+02	1,167780E+02	0,91
6	2,50	90,00	1,118400E+02	1,128550E+02	0,91
7	2,75	90,00	1,092343E+02	1,102260E+02	0,91
8	3,00	90,00	1,074074E+02	1,083830E+02	0,91
9	3,25	90,00	1,060782E+02	1,070390E+02	0,91
10	3,50	90,00	1,050812E+02	1,060300E+02	0,90
11	3,75	90,00	1,043141E+02	1,052500E+02	0,90
12	4,00	90,00	1,037109E+02	1,046340E+02	0,89
13	4,25	90,00	1,032279E+02	1,041370E+02	0,88
14	4,50	90,00	1,028349E+02	1,037290E+02	0,87
15	4,75	90,00	1,025107E+02	1,033870E+02	0,85
16	5,00	90,00	1,022400E+02	1,030960E+02	0,84
17	5,25	90,00	1,020115E+02	1,028440E+02	0,82
18	5,50	90,00	1,018168E+02	1,026220E+02	0,79
19	5,75	90,00	1,016495E+02	1,024230E+02	0,76
20	6,00	90,00	1,015046E+02	1,022420E+02	0,73
21	6,25	90,00	1,013783E+02	1,020730E+02	0,69
22	6,50	90,00	1,012675E+02	1,019130E+02	0,64
23	6,75	90,00	1,011697E+02	1,017570E+02	0,58
24	7,00	90,00	1,010829E+02	1,016040E+02	0,52
25	7,25	90,00	1,010055E+02	1,014490E+02	0,44
26	7,50	90,00	1,009363E+02	1,012890E+02	0,35
27	7,75	90,00	1,008740E+02	1,011220E+02	0,25
28	8,00	90,00	1,008179E+02	1,009430E+02	0,12
29	8,25	90,00	1,007670E+02	1,007500E+02	-0,02
30	8,50	90,00	1,007208E+02	1,005370E+02	-0,18
31	8,75	90,00	1,006787E+02	1,003010E+02	-0,38
32	9,00	90,00	1,006401E+02	1,000370E+02	-0,60
33	9,25	90,00	1,006049E+02	9,973720E+01	-0,86
34	9,50	90,00	1,005724E+02	9,939070E+01	-1,18
35	9,75	90,00	1,005426E+02	9,798090E+01	-2,55

**Tabela 5.17 – Tensões angulares obtidas com o código
MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SIM para a malha PL34QX**

Pt	r (cm)	θ (°)	Solução Analítica (KN/cm ²)	Malha PL34QX (KN/cm ²)	Erro (%)
1	1,25	90,00	1,934400E+02	1,953130E+02	0,97
2	1,50	90,00	1,518519E+02	1,532680E+02	0,93
3	1,75	90,00	1,323199E+02	1,335280E+02	0,91
4	2,00	90,00	1,218750E+02	1,229800E+02	0,91
5	2,25	90,00	1,157293E+02	1,167780E+02	0,91
6	2,50	90,00	1,118400E+02	1,128550E+02	0,91
7	2,75	90,00	1,092343E+02	1,102260E+02	0,91
8	3,00	90,00	1,074074E+02	1,083820E+02	0,91
9	3,25	90,00	1,060782E+02	1,070390E+02	0,91
10	3,50	90,00	1,050812E+02	1,060290E+02	0,90
11	3,75	90,00	1,043141E+02	1,052490E+02	0,90
12	4,00	90,00	1,037109E+02	1,046330E+02	0,89
13	4,25	90,00	1,032279E+02	1,041360E+02	0,88
14	4,50	90,00	1,028349E+02	1,037280E+02	0,87
15	4,75	90,00	1,025107E+02	1,033860E+02	0,85
16	5,00	90,00	1,022400E+02	1,030940E+02	0,84
17	5,25	90,00	1,020115E+02	1,028430E+02	0,82
18	5,50	90,00	1,018168E+02	1,026210E+02	0,79
19	5,75	90,00	1,016495E+02	1,024220E+02	0,76
20	6,00	90,00	1,015046E+02	1,022400E+02	0,72
21	6,25	90,00	1,013783E+02	1,020720E+02	0,68
22	6,50	90,00	1,012675E+02	1,019110E+02	0,64
23	6,75	90,00	1,011697E+02	1,017560E+02	0,58
24	7,00	90,00	1,010829E+02	1,016030E+02	0,51
25	7,25	90,00	1,010055E+02	1,014480E+02	0,44
26	7,50	90,00	1,009363E+02	1,012880E+02	0,35
27	7,75	90,00	1,008740E+02	1,011210E+02	0,24
28	8,00	90,00	1,008179E+02	1,009420E+02	0,12
29	8,25	90,00	1,007670E+02	1,007490E+02	-0,02
30	8,50	90,00	1,007208E+02	1,005360E+02	-0,18
31	8,75	90,00	1,006787E+02	1,003010E+02	-0,38
32	9,00	90,00	1,006401E+02	1,000360E+02	-0,60
33	9,25	90,00	1,006049E+02	9,973710E+01	-0,86
34	9,50	90,00	1,005724E+02	9,939130E+01	-1,17
35	9,75	90,00	1,005426E+02	9,798270E+01	-2,55

**Tabela 5.18 – Tensões angulares obtidas com o código
MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SIM para a malha PL34QY**

Pt	r (cm)	θ (°)	Solução Analítica (KN/cm ²)	Malha PL34QY (KN/cm ²)	Erro (%)
1	1,25	90,00	1,934400E+02	1,953130E+02	0,97
2	1,50	90,00	1,518519E+02	1,532680E+02	0,93
3	1,75	90,00	1,323199E+02	1,335280E+02	0,91
4	2,00	90,00	1,218750E+02	1,229800E+02	0,91
5	2,25	90,00	1,157293E+02	1,167780E+02	0,91
6	2,50	90,00	1,118400E+02	1,128550E+02	0,91
7	2,75	90,00	1,092343E+02	1,102260E+02	0,91
8	3,00	90,00	1,074074E+02	1,083820E+02	0,91
9	3,25	90,00	1,060782E+02	1,070390E+02	0,91
10	3,50	90,00	1,050812E+02	1,060290E+02	0,90
11	3,75	90,00	1,043141E+02	1,052490E+02	0,90
12	4,00	90,00	1,037109E+02	1,046330E+02	0,89
13	4,25	90,00	1,032279E+02	1,041360E+02	0,88
14	4,50	90,00	1,028349E+02	1,037280E+02	0,87
15	4,75	90,00	1,025107E+02	1,033860E+02	0,85
16	5,00	90,00	1,022400E+02	1,030950E+02	0,84
17	5,25	90,00	1,020115E+02	1,028430E+02	0,82
18	5,50	90,00	1,018168E+02	1,026210E+02	0,79
19	5,75	90,00	1,016495E+02	1,024220E+02	0,76
20	6,00	90,00	1,015046E+02	1,022400E+02	0,72
21	6,25	90,00	1,013783E+02	1,020720E+02	0,68
22	6,50	90,00	1,012675E+02	1,019110E+02	0,64
23	6,75	90,00	1,011697E+02	1,017560E+02	0,58
24	7,00	90,00	1,010829E+02	1,016030E+02	0,51
25	7,25	90,00	1,010055E+02	1,014480E+02	0,44
26	7,50	90,00	1,009363E+02	1,012880E+02	0,35
27	7,75	90,00	1,008740E+02	1,011210E+02	0,24
28	8,00	90,00	1,008179E+02	1,009420E+02	0,12
29	8,25	90,00	1,007670E+02	1,007490E+02	-0,02
30	8,50	90,00	1,007208E+02	1,005360E+02	-0,18
31	8,75	90,00	1,006787E+02	1,003010E+02	-0,38
32	9,00	90,00	1,006401E+02	1,000360E+02	-0,60
33	9,25	90,00	1,006049E+02	9,973710E+01	-0,86
34	9,50	90,00	1,005724E+02	9,939130E+01	-1,17
35	9,75	90,00	1,005426E+02	9,798290E+01	-2,55

**Tabela 5.19 – Tensões angulares obtidas com o código
MEC_ELASTIC_QUAD_MC_SIM para a malha PL17Q**

Pt	r (cm)	θ (°)	Solução Analítica (KN/cm ²)	Malha PL17Q (KN/cm ²)	Erro (%)
1	1,25	90,00	1,934400E+02	1,953130E+02	0,97
2	1,50	90,00	1,518519E+02	1,532680E+02	0,93
3	1,75	90,00	1,323199E+02	1,335280E+02	0,91
4	2,00	90,00	1,218750E+02	1,229800E+02	0,91
5	2,25	90,00	1,157293E+02	1,167780E+02	0,91
6	2,50	90,00	1,118400E+02	1,128550E+02	0,91
7	2,75	90,00	1,092343E+02	1,102260E+02	0,91
8	3,00	90,00	1,074074E+02	1,083820E+02	0,91
9	3,25	90,00	1,060782E+02	1,070390E+02	0,91
10	3,50	90,00	1,050812E+02	1,060290E+02	0,90
11	3,75	90,00	1,043141E+02	1,052490E+02	0,90
12	4,00	90,00	1,037109E+02	1,046330E+02	0,89
13	4,25	90,00	1,032279E+02	1,041360E+02	0,88
14	4,50	90,00	1,028349E+02	1,037280E+02	0,87
15	4,75	90,00	1,025107E+02	1,033860E+02	0,85
16	5,00	90,00	1,022400E+02	1,030950E+02	0,84
17	5,25	90,00	1,020115E+02	1,028430E+02	0,82
18	5,50	90,00	1,018168E+02	1,026210E+02	0,79
19	5,75	90,00	1,016495E+02	1,024220E+02	0,76
20	6,00	90,00	1,015046E+02	1,022400E+02	0,72
21	6,25	90,00	1,013783E+02	1,020720E+02	0,68
22	6,50	90,00	1,012675E+02	1,019110E+02	0,64
23	6,75	90,00	1,011697E+02	1,017560E+02	0,58
24	7,00	90,00	1,010829E+02	1,016030E+02	0,51
25	7,25	90,00	1,010055E+02	1,014480E+02	0,44
26	7,50	90,00	1,009363E+02	1,012880E+02	0,35
27	7,75	90,00	1,008740E+02	1,011210E+02	0,24
28	8,00	90,00	1,008179E+02	1,009420E+02	0,12
29	8,25	90,00	1,007670E+02	1,007490E+02	-0,02
30	8,50	90,00	1,007208E+02	1,005360E+02	-0,18
31	8,75	90,00	1,006787E+02	1,003010E+02	-0,38
32	9,00	90,00	1,006401E+02	1,000360E+02	-0,60
33	9,25	90,00	1,006049E+02	9,973720E+01	-0,86
34	9,50	90,00	1,005724E+02	9,939140E+01	-1,17
35	9,75	90,00	1,005426E+02	9,798290E+01	-2,55

5.3.6 Análise dos Resultados

O Gráfico 5.31 apresenta a solução analítica para as tensões angulares ao longo da linha de pontos internos. Observa-se que a partir de uma determinada distância da borda do furo central (aproximadamente 5 cm), as concentrações de tensões causadas pelo orifício não exercem mais influência sobre as tensões angulares dos pontos internos. Outro ponto importante: na borda do furo central a tensão angular equivale a 3 vezes o valor da tração uniforme aplicada à placa.

Os Gráficos 5.32 a 5.35 apresentam os erros obtidos no cálculo das tensões angulares para as diferentes malhas quadráticas. Com exceção dos dois pontos mais próximos da borda da placa, os resultados são satisfatórios e atestam a funcionalidade do código desenvolvido, pois, independentemente da discretização adotada, os resultados são idênticos.

Gráfico 5.31 – Solução analítica para as tensões angulares versus raio

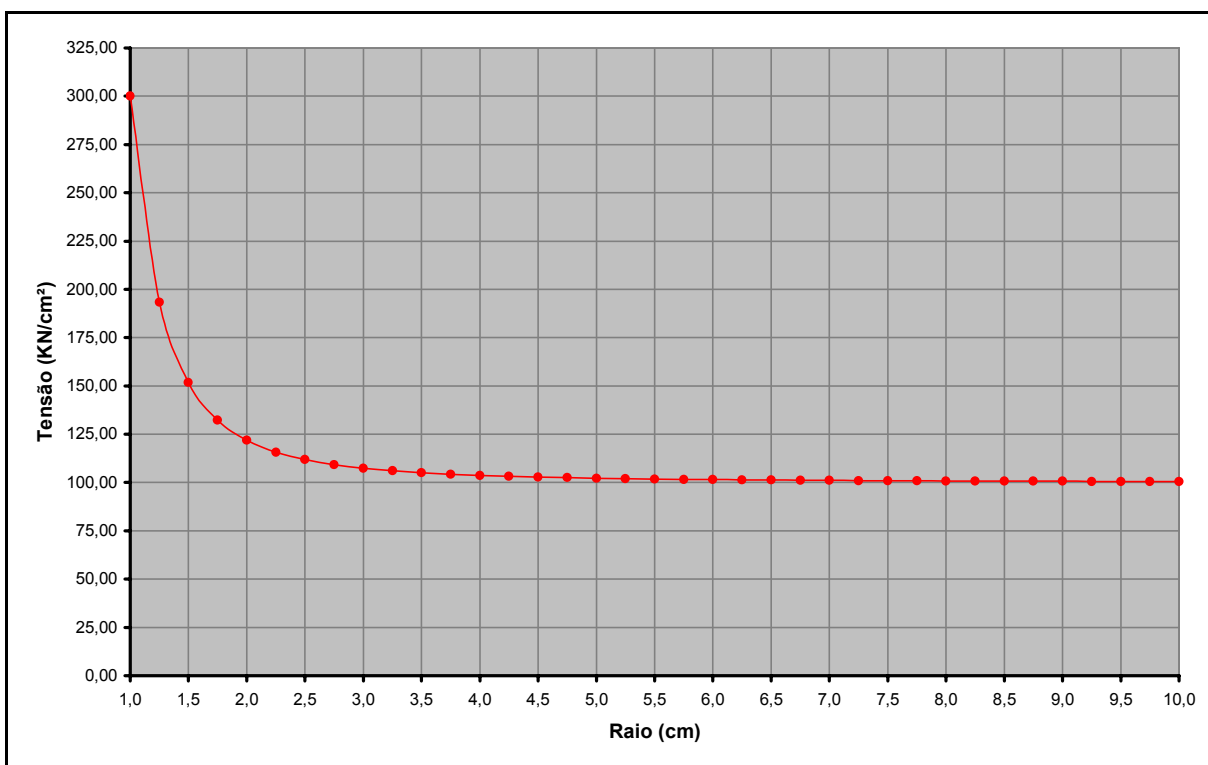


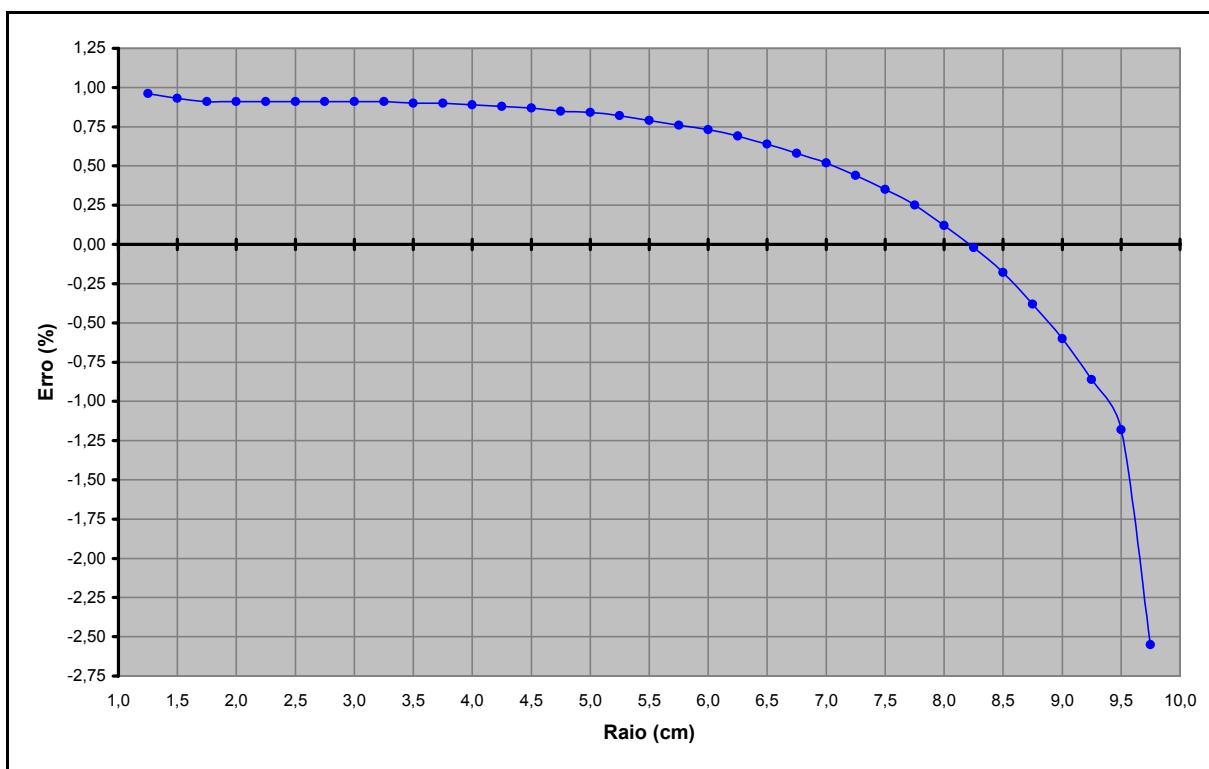
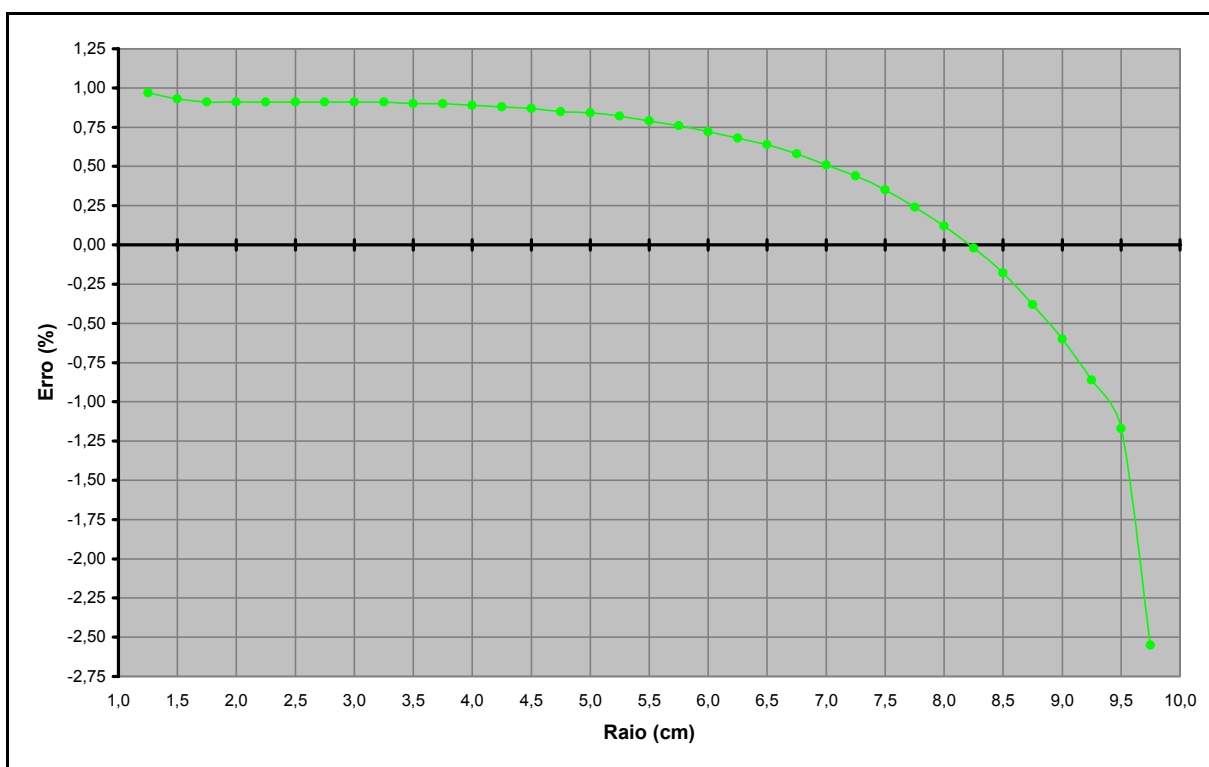
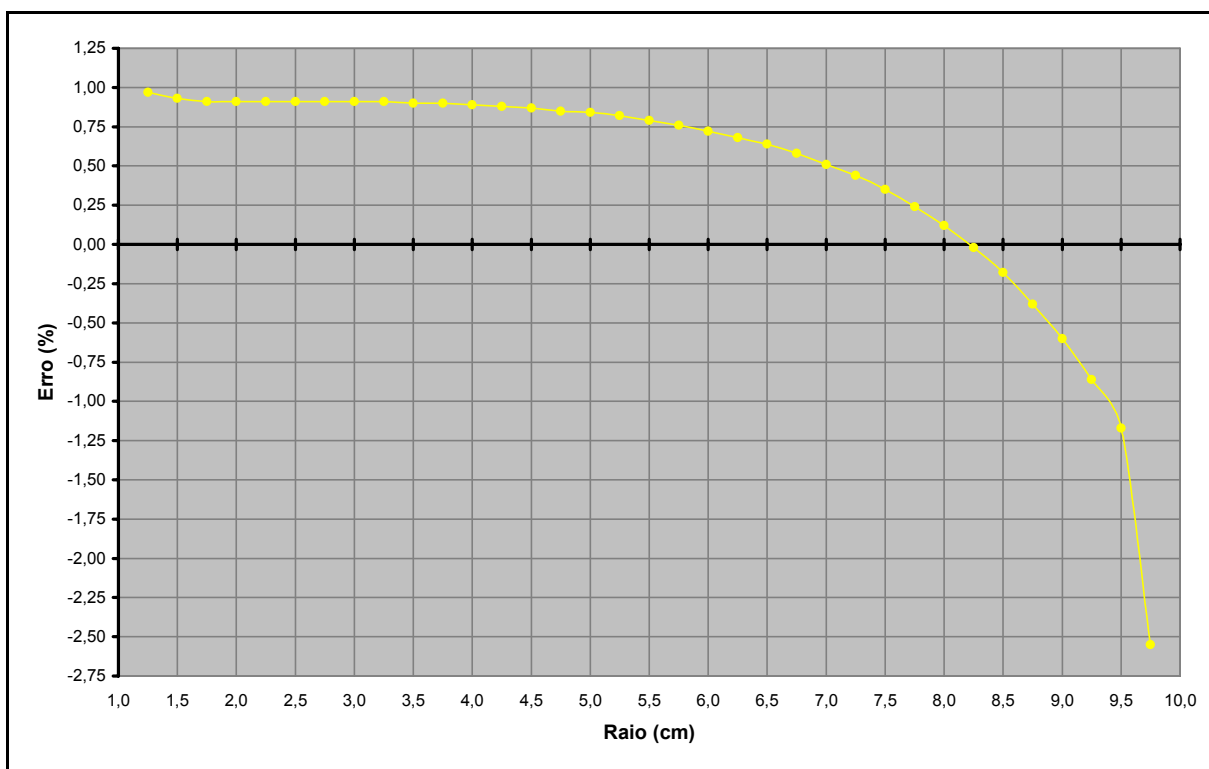
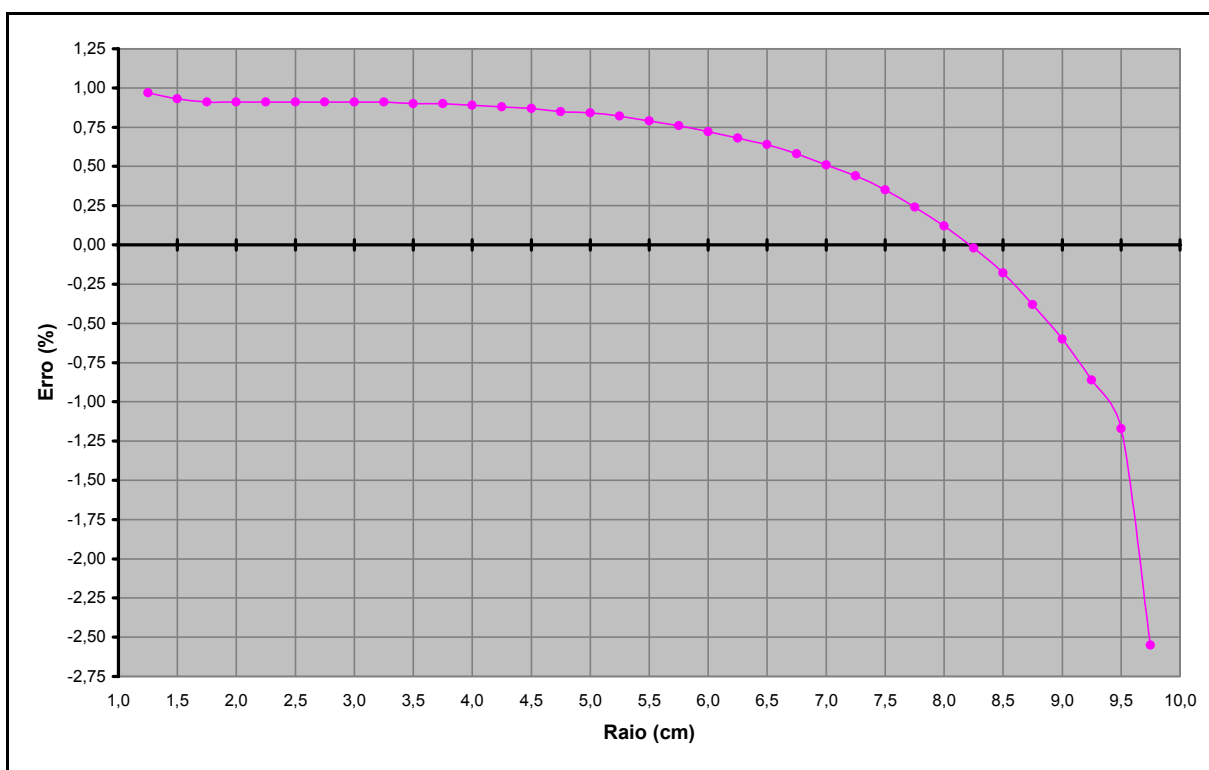
Gráfico 5.32 – Erro no cálculo das tensões angulares versus raio versus malha PL68Q**Gráfico 5.33 – Erro no cálculo das tensões angulares versus raio versus malha PL34QX**

Gráfico 5.34 – Erro no cálculo das tensões angulares versus raio versus malha PL34QY**Gráfico 5.35 – Erro no cálculo das tensões angulares versus raio versus malha PL17Q**

6 CONCLUSÃO

O Método de Elementos de Contorno prova ser uma técnica numérica que apresenta um alicerce matemático muito bem estabelecido e que, a despeito do fato de ser relativamente nova, quando comparado a outros métodos de análise numérica utilizados em diferentes áreas da Engenharia, possui características inerentes que o colocam em pé de igualdade ou mesmo, para determinadas classes de problemas, o tornam uma escolha altamente interessante.

Sob esse ponto de vista, uma das principais contribuições deste trabalho é constituir-se numa fonte bibliográfica introdutória para o Método de Elementos de Contorno, principalmente dentro do Programa de Pós-Graduação em Método Numéricos em Engenharia (PPGMNE), fomentando o interesse de futuros alunos do programa pelo método. Para tanto, uma estrutura didática e detalhada foi adotada na apresentação dos tópicos afins e na elaboração dos códigos computacionais.

No que se refere aos códigos computacionais, esses foram implementados em linguagem de programação Fortran 95 que, ao contrário de sua antecessora (Fortran 77), incorpora o que há de mais moderno em termos de programação estruturada, alocação dinâmica de memória, compartilhamento de dados entre procedimentos, verificação da consistência entre argumentos de chamada e variáveis mudas em tempo de compilação, criação de estruturas de dados

complexas a partir de tipos de dados definidos pelo usuário, ponteiros e programação orientada a objetos. Ou seja, os códigos estão implementados em uma linguagem poderosa que oferece uma ampla gama de recursos de programação, possibilitando que futuras melhorias e inclusões de novos recursos se dêem de maneira muito fácil.

6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

As principais sugestões para futuros trabalhos que venham a ser desenvolvidos a partir da presente obra compreenderiam:

- a) estudo matemático e implementação computacional do cálculo dos coeficientes P_{ij}^{cna} singulares através da avaliação de integrais no sentido do Valor Principal de Cauchy, descartando, desse modo, a necessidade de considerações de movimento de corpo rígido para a obtenção dos referidos coeficientes (atrelado a esse item estaria a necessidade de determinar os coeficientes C_{ij}^c associados aos termos livres para qualquer tipo de geometria do contorno nos pontos fonte, inclusive contornos considerados "não-suaves");
- b) estudo matemático e implementação computacional da equação integral de contorno para tensões no contorno, calculando as integrais singulares e hiper-singulares, resultantes das soluções fundamentais $D_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ e $S_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$, através da avaliação de integrais no sentido do Valor Principal de Cauchy e de Hadamard, respectivamente;
- c) análise do comportamento numérico e computacional dos códigos desenvolvidos mediante a introdução de novos algoritmos para solução de sistemas de equações lineares;
- d) criação de uma interface gráfica para entrada de dados e visualização dos resultados obtidos.

REFERÊNCIAS

- ABDEL-AKHER, A., HARTLEY, G. A. Evaluation of boundary integrals for plate bending. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, n. 28, p. 75-93, 1989.
- ALIABADI, M. H. **Plate Bending Analysis with Boundary Elements**. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1998.
- ALIABADI, M. H. **The Boundary Element Method**, Vol. 2, Applications in Solids and Structures. Chippingham: John Wiley & Sons, 2002.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NB-14 (NBR-8800)**: Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios (método dos estados limites). Rio de Janeiro, 1986.
- BARCELLOS, C. A., SILVA, L. H. M. A boundary element formulation for the Midlin's plate model. **Boundary Element Technology**, p. 123-130, 1989.
- BETTI, E. Teoria dell elasticita. **Il Nuovo Cimento**, p. 7-10, 1872.
- BÉZINE, G. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. **Mech. Research Communications**, n. 5(4), p. 197-206, 1978.
- BREBBIA, C. A., DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements**, An Introductory Course. Boston: Computational Mechanics Publications, 1989.
- BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F., WROBEL, L. C. **Boundary Element Techniques**. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- CHAPMAN, S. J. **Fortran 90/95 for Scientists and Engineers**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 2004.
- CRANDALL, Stephen H. et al. **An Introduction to the Mechanics of Solids**. 2. ed. Singapore: McGraw-Hill, 1978.
- CRUSE, T. A. Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. **International Journal of Solids and Structures**, n. 5, p. 1259-1274, 1969.
- CRUSE, T. A., SWEDLOW, J. L. Interactive program for analysis and design problems in advanced composite technology. **Report AFML-TR-71-268**, Carnegie-Mellon University, 1971.
- FLEURY, P., MANSUR, W. J., AZEVEDO, J. P. S. Um novo enfoque para formulação hipersingular do MEC para a solução de problemas potenciais bidimensionais. **Anais do XVIII CILAMCE**, vol. 1, p. 261-268, 1997.

- FORBES, D. J., ROBINSON, A. R. Numerical analysis of elastic plates and shallow shells by an integral equation method. **Structural Research Series Report**, n. 345, University of Illinois, Urbana, 1969.
- FREDHOLM, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. **Acta Mathematica**, n. 27, p. 365-390, 1903.
- GREENBERG, M. D. **Advanced Engineering Mathematics**. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1998.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**, Vol. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001 (reimp. 2004).
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**, Vol. 2. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001 (reimp. 2004).
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**, Vol. 3. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002 (reimp. 2004).
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**, Vol. 4. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- GUIGGIANI, M. The evaluation of Cauchy principal value integrals in the Boundary Element Method – A review. **Mathematical Computational Modelling**, vol. 15, n. 3-5, p. 175-184, 1991.
- GUIGGIANI, M., CASALINI, P. Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 24, p. 1711-1720, 1987.
- HARTMANN, F., ZORMANTEL, R. The direct boundary element method in plate bending. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, n. 23, p. 2049-2069, 1986.
- HESS, J. L., SMITH, A. M. O. Calculation of potential flows about arbitrary bodies. **Progress in Aeronautical Sciences**, n. 8, 1967.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.
- HUANG, Q., CRUSE, T. A. Some notes on singular integral techniques in boundary element analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 36, p. 2643-2659, 1993.
- JAWSON, M. A. Integral equation method in potential theory. **Proceedings of the Royal Society of London**, n. 275, p. 23-32, 1963.
- JASWON, M. A., MAITI, M., SYMM, G. T. Numerical biharmonic analysis and some applications. **International Journal of Solids and Structures**, n. 3, p. 309-332, 1967.
- KARAM, V. J., TELLES, J. C. F. On boundary elements for Reissner's plate theory. **Engineering Analysis**, n. 5, p. 21-27, 1988.
- KARAMI, G., ZARRINCHANG, J., FOROUGH, B. Analytical treatment of boundary integrals in direct boundary element analysis of plate bending problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, n. 37, p. 2409-2427, 1994.
- KIRCHHOFF, G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. **J. Rein Angew Math.**, n. 40, p. 51-88, 1850.
- KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- KUPRADZE, V. D. Potential methods in the theory of elasticity. **Israel Programme for Scientific Translations**, 1965.
- LACHAT, J. C. **A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics**. PhD Thesis, University of Southampton, 1975.
- LACHAT, J. C., WATSON, J. O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, n. 10, p. 991-1005, 1976.

- LAI, W. M., RUBIN, D., ERHARD, K. **Introduction to Continuum Mechanics**. 3. ed. Great Britain: Pergamon Press, 1993.
- MALVERN, L. E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1969.
- MANSUR, W. J., TELLES, J. C. F., PRODANOFF, J. H. A., FRAUCHES, E. On BEM singular integrals for two-dimensional potencial applications. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 9, p. 185-187, 1992.
- MASSONNET, C. E. Numerical use of integral procedures. **Stress Analysis**, cap. 10, p. 198-235, 1965.
- MIKHILIN, S. G. **Integral Equations**. London: Pergamon Press, 1957.
- MUSKHELISHVILI, N. I. **Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity**. Noordhoff: Leyden, 1953.
- PAIVA, J. B., ALIABADI, M. H. Boundary element analysis of zoned plates in bending. **Computacional Mechanics**, n. 25, p. 560-566, 2000.
- REISSNER, E. On bending of elastic plates. **Quartely Journal of Applied Mathematics**, n. 5, p. 55-68, 1947.
- RICCARDELLA, P. C. **An Implementation of the Boundary Integral Technique for Planar Problems of Elasticity and Elastoplasticity**. PhD Thesis, Carnegie-Mellon University, 1973.
- RIZZO, F. J. An integral approach to boundary-value problems of classical elastostatics. **Quaterly Journal of Applied Mathematics**, n. 25, p. 83-95, 1967.
- SOMIGLIANA, C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotrope. **Il Nuovo Cimento**, n. 20, p. 181-185, 1886.
- STERN, M. A general boundary integral formulation for plate bending problems. **International Journal of Solids and Structures**, n. 15, p. 769-782, 1979.
- TANAKA, M., MIYAZAKI, K. A direct BEM for elastic plate-structures subjected to arbitrary loadings. **Boundary Elements VII**, p. 4-16, 1985.
- TELLES, J. F. C., KARAM, V. J. Nonlinear material analysis of Reissner's plates. **Plate Bending with Boundary Elements**, p. 127-164, 1998.
- TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. 3. ed. Tokyo: McGraw-Hill, 1970.
- TOTTENHAM, H., The boundary element method for plates and shells, in *Developments in Boundary Element Methods I*, Applied Science, London, 173-205, 1979.
- VANDER WEEËN, F. Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, n. 18, p. 1-10, 1982.
- VENTURINI, W. S., PAIVA, J. B. Plate bending analysis by the boundary element method considering zoned thickness domain. **Software for Engineering Workstations**, n. 4, p. 183-185, 1988.
- WEN, P. H., ALIABADI, M. H., YOUNG, A. Boundary element method for dynamic plate bending problems. **International Journal of Solids and Structures**, n. 37, p. 5177-5188, 2000.
- WESTPHAL, T. Jr., BARCELLOS, C. A.. Application of the boundary element method to Reissner's and Midlin's plate model. **Boundary Elements XII**, n. 1, p. 467-477, 1990.
- WROBEL, L. C. **The Boundary Element Method**: Vol. 1, Applications in Thermo-Fluids and Acoustics. Chippingham: John Wiley & Sons, 2002.

XIAO-YAN, L., MAO-KUANG, H., XIUXI, W. Geometrically nonlinear analysis of Reissner type plate by the boundary element method. **Computer and Structures**, n. 37, p. 911-916, 1990.