

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ABDORAL GOMES DA SILVA JÚNIOR

O PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO DE CÁLCULO MENTAL EM
ATIVIDADES DA OBRA ARITHMETICA ELEMENTAR - LIVRO I (1919), DE GEORG
AUGUST BÜCHLER

PALOTINA/PR

2026

ABDORAL GOMES DA SILVA JÚNIOR

O PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO DE CÁLCULO MENTAL EM
ATIVIDADES DA OBRA ARITHMETICA ELEMENTAR - LIVRO I (1919), DE GEORG
AUGUST BÜCHLER

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas, Setor de Palotina, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas.

Orientadora: Prof. Dra. Danilene Gullich Donin Berticelli

Coorientadora: Prof. Dra. Neuza Bertoni Pinto

PALOTINA/PR

2026

Universidade Federal do Paraná. Sistemas de Bibliotecas.
Biblioteca UFPR Palotina.

S586 Silva Júnior, Abdoral Gomes da
O pensamento algébrico no ensino de cálculo mental em
atividades da obra *Arithmetica Elementar* – livro I (1919), de
Georg August Büchler.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná,
Setor Palotina, PR, Programa de Pós-Graduação em Educação
em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas.

Orientadora: Prof. Dra. Danilene Gullich Donin Berticelli.

Coorientadora: Prof. Dra. Neuza Bertoni Pinto.

1. *Arithmetica elementar*. 2. Cálculo mental.
3. Pensamento algébrico. I. Berticelli, Danilene Gullich Donin.
II. Pinto, Neuza Bertoni. III. Universidade Federal do Paraná.
IV. Título.

CDU 37

Bibliotecária: Aparecida Pereira dos Santos – CRB 9/1653



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR PALOTINA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EDUCAÇÃO EM
CIÊNCIAS, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS
EDUCATIVAS - 40001016174P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS EDUCATIVAS da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ABDORAL GOMES DA SILVA JÚNIOR**, intitulada: **O PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO DE CÁLCULO MENTAL EM ATIVIDADES DA OBRA ARITHMETICA ELEMENTAR - LIVRO I (1919), DE GEORG AUGUST BÜCHLER**, sob orientação da Profa. Dra. DANILENE GULLICH DONIN BERTICELLI, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Palotina, 17 de Março de 2026.

Assinatura Eletrônica

22/04/2026 14:47:55.0

DANILENE GULLICH DONIN BERTICELLI

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

22/04/2026 14:54:33.0

DAVID ANTONIO DA COSTA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA)

Assinatura Eletrônica

23/04/2026 11:16:07.0

BARBARA WINIARSKI DIESEL NOVAES

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

Dedico esse trabalho para *“Para todos que tiveram um momento de fraqueza. Não vai doer para sempre, então não deixe isso afetar o que há de melhor em você!”*

(Autor desconhecido)

AGRADECIMENTOS

Agradecer não é um verbo, é um sentimento!

Obrigado ao mestre Jesus por estar comigo em todos os momentos.

Não foi fácil – sabia que não seria –, mas fui aprendendo durante esse percurso que tudo foi preciso e necessário.

Obrigado aos meus pais, Maria e Abdoral (Abdom) por todo apoio e incentivo. Foram eles que sempre me disseram que a Educação é a única forma de mudar o destino de uma vida. Sempre estiveram certos!

Obrigado aos meus irmãos e irmãs Antonio, Gorete (*in memoriam*), Socorro, Francisco, Valmir, Valderi (*in memoriam*) e Cristina. Nos altos e baixos da vida, sempre estarei com vocês.

Aos meus primeiros amores da vida, meu sobrinho e sobrinhas: Andressa, Karliane, Karliene, Alehandro. Amo vocês!

Obrigado a minha família paranaense: Dona Maria e Seu Gilberto (Tatu), por todo acolhimento, pelas conversas, por tudo. Nunca vou esquecer vocês!

Obrigado às minhas amigas Antonia de Maria, Alzeri, Amélia, Eloneida, Fabiana, Isabel, Jaqueline, Liduina, Marcelia, Renata e Sidneia pela nossa amizade! Que seja eterno enquanto dure.

Obrigado aos meus amigos Célio, Eduardo, Natanael e Valdair.

Obrigado aos amigos do PPGECEMTE: Nathalia, Gustavo e Karol. A vida durante o mestrado só foi mais feliz porque tive vocês!

Um obrigado especial à família do Büchler, em especial, Adriana e Flávia, por toda atenção e carinho, e pela disponibilidade de arquivos.

Obrigado à banca, professor David, professora Bárbara e professora Lidiane, pelas sugestões que muito enriqueceram esse trabalho. Vocês foram fundamentais nessa pesquisa.

A todos os docentes do PPGECEMTE o meu muito obrigado, em especial, as professoras Eliana e Roberta, pelas conversas, incentivos e pelo carinho.

Agradeço ao nosso grupo de estudos, GHEMAT PR, por todas as discussões.

Agradeço ao Carlos Antônio, ex-prefeito de Poranga, por acreditar no poder da educação que liberta!

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro e pela concessão da bolsa de mestrado, fundamentais para a realização desta pesquisa.

E meu muito, muito obrigado à Professora Danilene e à Professora Neuza, por serem mais que orientadoras, por aceitarem caminhar comigo, por não terem desistido de mim, por todas as conversas, momentos, orientações. Vocês fazem parte da minha história!

Nós conseguimos!

Gratidão a todos!

Como sou pouco e sei pouco, faço o pouco que me cabe me dando por inteiro.

(Ariano Suassuna)

RESUMO

Este trabalho busca compreender elementos algébricos presentes em atividades de aritmética que mobilizam os conhecimentos de cálculo mental na obra *Arithmetica Elementar - Livro I* (1919), de Georg August Büchler (1884-1962), sob a perspectiva de base teórico-metodológica da História Cultural. Interpretando e questionando as rupturas e permanências do passado, propõe-se a articulação entre práticas sociais e representações simbólicas como um mecanismo de estudo de atividades presentes na obra a partir dos conhecimentos do cálculo mental a fim de desenvolver o pensamento algébrico. As atividades do livro mostram as práticas de escolarização, orientadas por meio das concepções pedagógicas vinculadas ao método intuitivo de Pestalozzi. Amparada pelos aportes de Valente, discute-se a noção de operação historiográfica, o conceito de disciplina escolar e de cultura escolar atrelada ao uso do livro didático. A pesquisa analisa o livro como componente da cultura escolar, de acordo com as bases curriculares da época (Paraná; 1917; 1923) e as políticas de avaliação e circulação do livro didático nacional, especialmente no âmbito da CNLD. Para realizar a análise das atividades presentes no livro de Büchler, foram mobilizadas pesquisas que discutem o cálculo mental e autores que relacionam o campo do desenvolvimento do pensamento algébrico. A metodologia contempla duas etapas principais: (i) a construção de um inventário de produções acadêmicas sobre Büchler, a fim de compreender a circulação, apropriação e permanência de sua obra no Brasil; e (ii) a análise de atividades presentes na obra, buscando identificar estratégias de cálculo mental que favoreçam a generalização, a decomposição numérica e o desenvolvimento de propriedades algébricas. Para ilustrar os conhecimentos aritméticos e algébricos mobilizados nas atividades, estes foram organizados em sete categorias identificadas a partir da análise sobre cálculo mental e pensamento algébrico: (1) método intuitivo de Pestalozzi; (2) fatos básicos e relação entre adição e subtração; (3) decomposição ou família do número; (4) número faltante com variação da pergunta; (5) senso numérico; (6) rede de relações do 10; e (7) padrões numéricos. As análises da obra de Büchler mostram que as atividades aritméticas mobilizam diversos conhecimentos de cálculo mental de forma integrada. Ao trabalhar fatos básicos, composição/decomposição, variação da pergunta e a rede de relações numéricas do 10, o autor explora relações entre adição e subtração, família do número, número faltante, comutatividade e padrões numéricos. Esses conhecimentos não são abordados de modo linear, mas articulados de forma criativa, partindo do concreto, seguindo o método intuitivo, até alcançar o nível abstrato. Os resultados indicam que as atividades de aritmética contidas na obra de Büchler atuam na prática dos conhecimentos de cálculo mental e contribuem para o pensamento algébrico. O desenvolvimento do pensamento algébrico não começa apenas quando o estudante passa a operar com letras e símbolos, mas pode ser antecipado por meio de atividades de aritmética que envolvem cálculo mental.

Palavras-chave: *Arithmetica Elementar*; Cálculo mental; Georg August Büchler; História da educação matemática; Pensamento algébrico.

ABSTRACT

This study seeks to understand algebraic elements present in arithmetic activities that mobilize mental calculation knowledge in the work *Arithmetica Elementar - Livro I* (1919) by Georg August Büchler (1884-1962), from the theoretical-methodological perspective of Cultural History. Interpreting and questioning the ruptures and continuities of the past, it proposes the articulation between social practices and symbolic representations as a mechanism for studying activities within this work, drawing on mental calculation knowledge to develop algebraic thinking. The book's activities reveal schooling practices guided by pedagogical conceptions linked to Pestalozzi's intuitive method. Supported by Valente's contributions, the study discusses the notion of historiographical operation, the concept of school discipline, and school culture as tied to the use of textbooks. The research analyzes the book as a component of school culture, in accordance with the curricular guidelines of the period (Paraná, 1917; 1923) and the evaluation and circulation policies for national textbooks, particularly within the scope of the CNLD (National Textbook Commission). To analyze the activities in Büchler's book, the study mobilizes research on mental calculation and authors who connect the field of algebraic thinking development. The methodology comprises two main stages: (i) compiling an inventory of academic productions on Büchler to understand the circulation, appropriation, and permanence of his work in Brazil; and (ii) analyzing the activities in the book to identify mental calculation strategies that favor generalization, numerical decomposition, and the development of algebraic properties. To illustrate the arithmetic and algebraic knowledge mobilized in the activities, these were organized into seven categories identified through the analysis of mental calculation and algebraic thinking: (1) Pestalozzi's intuitive method; (2) basic facts and the relationship between addition and subtraction; (3) decomposition or number family; (4) missing number with question variation; (5) number sense; (6) network of relationships around 10; and (7) numerical patterns. The analyses of Büchler's work show that the arithmetic activities mobilize various mental calculation knowledges in an integrated manner. By working with basic facts, composition/decomposition, question variation, and the network of numerical relationships around 10, the author explores relationships between addition and subtraction, number families, missing numbers, commutativity, and numerical patterns. These knowledges are not addressed linearly but are articulated creatively, starting from the concrete, following the intuitive method, and reaching the abstract level. The results indicate that the arithmetic activities in Büchler's work practice mental calculation knowledge and contribute to algebraic thinking. The development of algebraic thinking does not begin only when the student starts operating with letters and symbols; it can be anticipated through arithmetic activities involving mental calculation.

Keywords: *Arithmetica Elementar*; Mental calculation; Georg August Büchler; History of mathematics education; Algebraic thinking.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Retrato de Büchler	21
FIGURA 2 – Certificado de Conclusão de Estudos	22
FIGURA 3 – Nomeação para o cargo de administrador	23
FIGURA 4 – Certificado de Maturidade	24
FIGURA 5 – Capa do livro Aritmética Elementar - Livro I (1ª edição, 1919)	25
FIGURA 6 – Atividade para trabalhar relações numéricas.....	63
FIGURA 7 – Atividade que ilustra o método intuitivo de Pestalozzi	73
FIGURA 8 – Atividade que envolve o método intuitivo	75
FIGURA 9 – Atividade que envolve o método intuitivo	76
FIGURA 10 – Atividade fatos básicos que relacionam a adição e subtração	77
FIGURA 11 – Atividades que envolvem a decomposição de um número ou a família do número.....	79
FIGURA 12 – Atividades de composição e decomposição	80
FIGURA 13 – Atividade número faltante	82
FIGURA 14 – Atividade de subtração de forma intuitiva.....	83
FIGURA 15 – Atividade variação da pergunta - subtração.....	83
FIGURA 16 – Atividade variação na posição da pergunta	84
FIGURA 17 – Atividade senso numérico.....	85
FIGURA 18 – Atividades 1 rede de relações numéricas do 10.....	86
FIGURA 19 – Atividades 2 rede de relações numéricas do 10.....	87
FIGURA 20 – Atividades 3 rede de relações numéricas do 10.....	88
FIGURA 21 – Atividades 4 rede de relações numéricas do 10.....	89
FIGURA 22 – Atividades 5 rede de relações numéricas do 10.....	89
FIGURA 23 – Atividades 6 rede de relações numéricas do 10.....	90
FIGURA 24 – Atividades 1 padrões numéricos.....	91
FIGURA 25 – Atividades 2 padrões numéricos.....	91
FIGURA 26 – Atividades 3 padrões numéricos.....	92

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – Livros didáticos de Georg August Büchler	24
QUADRO 2 – Livros didáticos de Matemática aprovados pela Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD).....	28
QUADRO 3 – Livros didáticos de Matemática aprovados pelas duas iniciativas de avaliação	29
QUADRO 4 – Resultados obtidos no Google Acadêmico.....	40
QUADRO 5 – Referências bibliográficas encontradas na base de dados	41
QUADRO 6 – Definição dos conhecimentos necessários ao cálculo mental	53
QUADRO 7 – Local da pergunta	54
QUADRO 8 – Gradatividade dos números nas atividades.....	55
QUADRO 9 – Ensinando padrões numéricos	55
QUADRO 10 – Documentos curriculares oficiais	56
QUADRO 11 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico	60
QUADRO 12 – Atividade padrões numéricos	63
QUADRO 13 – Atividade ponte pelo 10	64
QUADRO 14 – Atividade representar o 7	64
QUADRO 15 – Atividade que envolve o senso numérico.....	65
QUADRO 16 – Aspectos e vertentes da álgebra.....	68
QUADRO 17 – Conhecimento de cálculo mental e autoras	69
QUADRO 18 – Conhecimentos para o pensamento algébrico	70
QUADRO 19 – Conhecimentos de cálculo mental que favorecem o pensamento algébrico ..	93

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CNLD	Comissão Nacional do Livro Didático
GHEMAT Brasil	Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática
GHEMAT Paraná	Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MEC	Ministério da Educação
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
PPGECEMTE	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas
UFPR	Universidade Federal do Paraná

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	APRESENTANDO A FONTE	21
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA.....	32
2.1	INVENTÁRIO DE PESQUISAS SOBRE GEORG AUGUST BÜCHLER	39
3	CÁLCULO MENTAL E AS PROPRIEDADES ALGÉBRICAS.....	52
3.1	CÁLCULO MENTAL	52
3.2	PROPRIEDADES ALGÉBRICAS	56
3.3	CONHECIMENTOS DE CÁLCULO MENTAL QUE FAVORECEM O PENSAMENTO ALGÉBRICO	69
4	CONHECIMENTOS DE CÁLCULO MENTAL QUE DESENVOLVEM O PENSAMENTO ALGÉBRICO NAS ATIVIDADES DA OBRA DE BÜCHLER (1919)	72
4.1	ATIVIDADES QUE ENVOLVEM O MÉTODO INTUITIVO DE PESTALOZZI.....	75
4.2	ATIVIDADES QUE ENVOLVEM FATOS BÁSICOS E RELACIONAM A ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO.....	77
4.3	ATIVIDADES QUE ENVOLVEM A DECOMPOSIÇÃO DE UM NÚMERO OU A FAMÍLIA DO NÚMERO	78
4.4	ATIVIDADES QUE EXPLORAM O NÚMERO FALTANTE POR MEIO DA VARIAÇÃO DA PERGUNTA.....	81
4.5	ATIVIDADES QUE EXPLORAM O SENSO NUMÉRICO.....	84
4.6	ATIVIDADES QUE EXPLORAM A REDE DE RELAÇÕES NUMÉRICAS DO 10	86
4.7	ATIVIDADES QUE EXPLORAM PADRÕES NUMÉRICOS.....	91
4.8	CONHECIMENTOS DE CÁLCULO MENTAL QUE FAVORECEM O PENSAMENTO ALGÉBRICO	92
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	94
	REFERÊNCIAS	97

1 INTRODUÇÃO

Esta apresentação tem como propósito narrar a minha trajetória acadêmica, profissional e pessoal, refletindo sobre os momentos, escolhas e ações que me conduziram a esta pesquisa, buscando mostrar as razões que despertaram meu interesse pelo tema e os fundamentos que sustentam esta investigação, que por inúmeras vezes, voltei à introdução para refletir sobre as inquietudes levantadas no percurso da pesquisa.

Ao longo das próximas páginas, apresento o objetivo deste estudo e a questão de pesquisa que me instiga a refletir e buscar por respostas, pois faz parte de inquietações que se construíram ao longo da minha carreira como professor e pesquisador. Introduzo o tema a ser explorado nas seções seguintes, mas também convido o(a) leitor(a) a compreender o viés que motiva e que confere sentido a esta dissertação.

Rememoro, neste momento, a inquietude de ser aluno de escola pública na Educação Básica. Prestei vestibular no setor público e ingressei na Universidade Estadual Vale do Acaraú (Sobral – Ceará) no curso de Licenciatura em Matemática, no qual coleí grau no início de 2022. Durante toda a minha trajetória universitária participei de projetos, como o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID)¹ e o Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC)², ambos voltados para a Educação Básica.

Embora o fluxograma do curso de Licenciatura em Matemática incluísse duas disciplinas sobre a perspectiva histórica (História da Matemática e História da Matemática Escolar no Brasil), foi no I Encontro Cearense de Mulheres nas Ciências Exatas, realizado na Universidade Estadual Vale do Acaraú em 2019, em um minicurso sobre História da Matemática, que pude refletir sobre os conceitos de Matemática utilizando a História, o que despertou o meu interesse pelo campo.

No entanto, mesmo apreciando a atuação na Educação Básica, o desejo de me tornar pesquisador permaneceu crescente. Foi então que tive o primeiro contato com a pós-graduação,

¹ O PIBID tinha como objetivo aprimorar e valorizar a formação inicial de professores para a Educação Básica já que para muitos licenciados é o primeiro contato que têm com a sala de aula, questão que não era o meu caso. Ao longo da minha trajetória profissional, atuei como professor de matemática nas redes pública e privada, lecionando no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Além da docência, exerci as funções de professor coordenador de área na rede pública (Ensino Médio) e coordenador escolar (rede pública).

² O PIC busca despertar nos alunos o interesse pela matemática e pela ciência em geral. Trabalhei diretamente com alunos medalhistas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), um projeto nacional voltado para escolas públicas e privadas, realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e financiado com recursos do Ministério da Educação (MEC) e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI).

por meio do o projeto Pós em Rede³, oferecido pelo GHEMAT Brasil⁴. A primeira disciplina que cursei (Tópicos Especiais: Ensino de Matemática e seus Aspectos Históricos II)⁵ foi no Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, vinculado ao Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, no segundo semestre de 2022.

No primeiro semestre de 2023, inscrevi-me novamente no projeto Disciplina em Rede, desta vez no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas, vinculado à Universidade Federal do Paraná – Setor Palotina. A disciplina cursada foi Tópicos Especiais: Ensino de Matemática em Seus Aspectos Históricos⁶.

Inclinado a estudar sobre a História da educação matemática⁷, no mesmo semestre passei a integrar o Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática (GHEMAT Paraná) como ouvinte, momento em que cresceu meu interesse pelo debate, questionamentos e reflexões

³ O “Pós em Rede” é um projeto colaborativo ofertado desde 2021 que reúne diferentes Programas de Pós-Graduação no âmbito nacional, articulados pelo Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática (GHEMAT Brasil). A iniciativa oferece duas disciplinas por ano aos alunos de pós-graduação: uma no primeiro semestre e outra no segundo. As atividades acontecem totalmente de forma remota, combinando encontros síncronos pela plataforma Google Meet e momentos assíncronos, realizados por meio de tarefas no Google Sala de Aula. Para que um Programa de Pós-Graduação integre a rede, é necessário que a disciplina seja aprovada pelo respectivo colegiado. Uma vez aprovada, cada programa mantém a autonomia para gerenciar todos os aspectos acadêmicos.

⁴ O Grupo Associado de Estudos e Pesquisa sobre História da Educação Matemática (GHEMAT Brasil) é uma Associação Civil sem fins lucrativos, com personalidade jurídica própria, fundada em 13 de abril de 2018. Sua sede e foro estão localizados na Rua Dr. Carvalho de Mendonça, nº 93, conjunto 32, em Santos, SP. No desenvolvimento de suas atividades, a associação atua com plena autonomia científica, podendo definir sua política de pesquisa e estudo conforme as diretrizes de sua Diretoria.

⁵ Foram trabalhadas diversas referências que contribuíram para a compreensão do saber profissional do professor que ensina matemática em perspectiva histórica. Entre os principais nomes, destacam-se André Chervel e Dominique Julia, com o conceito de cultura escolar e a reflexão sobre a constituição da matemática como disciplina escolar; Pierre Bourdieu, juntamente com Rita Hofstetter e Bernard Schneuwly, discutindo os campos científicos e disciplinares e as tensões na produção da matemática para o ensino e formação de professores; Raymond Bourdoncle e Maurice Tardif, que abordam a profissionalização docente e a constituição dos saberes do ofício de ensinar matemática; Rita Hofstetter e Bernard Schneuwly, novamente, explorando os conceitos de saber a ensinar e saber para ensinar, problematizando a matemática do ensino em sua dupla dimensão; Peter Burke, que oferece referenciais sobre a construção histórica de saberes e aspectos metodológicos de análise; além de Wagner Rodrigues Valente, Rosilda dos Santos Moraes, Luciane de Fátima Bertini e outros pesquisadores que articulam essas discussões no campo da História da educação matemática.

⁶ A disciplina se concentrou em diferentes referenciais teóricos-metodológicos voltados à pesquisa em História da educação matemática. Os temas percorreram desde a formulação de problemáticas de pesquisa até a análise do saber profissional docente. Entre os principais teóricos discutidos estão Roger Chartier, com suas contribuições para a História Cultural e a reflexão sobre práticas e representações; Michel de Certeau, abordando a operação historiográfica; Dominique Julia e André Chervel, com o conceito de cultura escolar; e Peter Burke, refletindo sobre a “nova história” e seus desdobramentos metodológicos. Foram também trabalhados Marc Bloch, Jacques Le Goff e Pierre Nora, que problematizam a memória, fontes históricas e o ofício do historiador.

⁷ Para Valente (2010, p.125) “o emprego da expressão “educação matemática” é feito no sentido lato. Significa o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, inscrito na história da escola, na história da educação escolar. Em minúsculas, não se confunde com “Educação Matemática”, em maiúsculas, campo de pesquisa constituído a partir dos anos 1980”.

levantados pelo grupo⁸, tanto por meio de pesquisas levantadas pelo grupo quanto pelos materiais discutidos durante as reuniões.

Nesse mesmo período, também realizei o curso Cálculo Mental para Professores (CalMe Pro)⁹. Esse curso intensificou meu interesse pelo cálculo mental, por meio de suas atividades práticas rotineiras, uma vez que minhas primeiras impressões indicavam seu potencial como ferramenta pedagógica capaz de auxiliar no entendimento das operações matemáticas.

Assim, as reflexões construídas ao longo deste estudo foram impulsionadas por diversas inquietações teórico-metodológicas¹⁰ que emergiram do próprio campo da História da educação matemática. Antes de chegar na obra da pesquisa a ser detalhada mais adiante, ressalto que houve interesse pelo livro, ou seja, da fonte de pesquisa, a partir da leitura do trabalho de Costa (2010)¹¹, em particular, a partir de uma reprodução do prefácio da segunda edição, remetendo à obra *Arithmetica Elementar* – Livro I (1919), de Georg August Büchler¹². Naquele momento, ao me deparar com a obra, surgiu um imenso interesse pelas atividades de aritmética do ensino primário, no qual rememoravam as atividades de conhecimentos de cálculo mental¹³ do curso do CalMe Pro, daí a aproximação.

Durante o processo de pesquisa e orientações, acerca da obra que remete ao começo do século XX, questionamos e constatamos o uso da aritmética no período relacionado, e pressupomos uma possível relação entre a aritmética e a álgebra nas atividades da obra. Dando continuidade à pesquisa, mais adiante, encontramos, no âmbito do ensino do Paraná, as

⁸ Foi nesse contexto que conheci minha orientadora, a professora Dr^a Danilene Gullich Donin Berticelli, que, além de atuar na área já mencionada, também desenvolve pesquisas sobre o cálculo mental.

⁹ Coordenado pelas professoras Dr^a Danilene Gullich Donin Berticelli (UFPR) e Dr^a Sabrina Zancan (UFSM) e promovido pelo Setor Palotina da Universidade Federal do Paraná.

¹⁰ Contribuições e reflexões da História Cultural sobre práticas, apropriações e representações (Roger Chartier); Reflexões partindo da operação historiográfica (Michel de Certeau); O conceito de cultura escolar da escola (Dominique Julia e André Chervel).

¹¹ A tese analisa a trajetória de um saber escolar, ou seja, a aritmética no curso primário brasileiro (1890-1946), que trata das transformações ocorridas com o ensino do conceito de número. Os resultados apontaram para as transformações ocorridas com a aritmética do ensino primário, e com o ensino do conceito de número, a partir do impacto da Psicologia na Educação.

¹² PREFÁCIO DA 2.^a EDIÇÃO

Esgotou-se, mais depressa que eu ousasse esperar, a primeira edição de cinco milheiros. Os elogios têm sido tais e tantos que a modéstia me proíbe publicá-los.

Nesta nova edição fiz várias modificações sugeridas por professores de renome. Eu seria ingrato se, entre eles, não citasse o Prof. Heribaldo Costa - Fortaleza - que, em um estudo (Publicado na "Revista Nacional", 1923, n. 10, p.657.) sobre a minha "Aritmética Elementar" deu um belo exemplo de como o desejo de ser compreendido encontra, onde quer que seja, espíritos desejosos de compreender. E, foi além. Escreveu uma introdução filosófica sobre o estudo da matemática que merece ser meditada por qualquer lente da matéria.

¹³ Conhecimentos de cálculo mental referem-se a estratégias que mobilizam raciocínio, criatividade e flexibilidade na manipulação das operações, conforme Berticelli e Zancan (2024).

Diretrizes Curriculares do Período de acordo com o Código do Ensino do Estado do Paraná (Decreto nº 17, de 9 de janeiro de 1917) e a Organização Curricular das Bases Educativas (1923) do Curso Geral, corroborando com a hipótese, como mencionadas abaixo:

CAPÍTULO II - Da Organização Geral do Ensino Primário

SEÇÃO I - Dos Programas e da Distribuição do Tempo

Art. 55. O ensino primário completo é dividido em quatro séries graduais, cujo programa será organizado de acordo com as conclusões mais avançadas da Pedagogia e com as necessidades do meio paranaense, devendo ser observadas as seguintes regras:

1ª A primeira série constará principalmente:

- b) dos passos iniciais da leitura, da escrita, da Aritmética e da Geografia;
- c) de exercícios próprios para melhorar a linguagem, cultivar a memória e despertar os sentimentos superiores.

6ª Entre outras matérias do ensino primário, devem ser compreendidas:

- a) Para todas as séries, em cursos graduais: Lições de Coisas, Desenho, Exercícios de Reflexão, de Memória e de Elocução, Exercícios de Caligrafia. (Código do Ensino do Estado do Paraná. Decreto nº 17, de 9 de janeiro de 1917)

Observações sobre o ensino de Matemática:

A Álgebra será ministrada juntamente com a Aritmética, reduzida às noções indispensáveis, da seguinte forma:

- Após o ensino das quatro operações aritméticas fundamentais, estas serão generalizadas com caráter algébrico.
- Concluídas as seis operações aritméticas e antes do estudo das proporções, serão introduzidas as equações do primeiro grau.

Em seguida, será retomado o restante das doutrinas aritméticas, conforme programa a ser elaborado.

Em toda a Matemática, o professor deverá fazer com que os alunos trabalhem ativamente, assegurando que, na Aritmética, por exemplo, todos os requisitos desse ensino sejam atendidos, de modo que seja:

- Experimental, com perfeita materialização dos erros e objetivação dos cálculos;
- Prático, raciocinado, natural e progressivo.
- O exercício mental correspondente à matéria dada no dia será realizado pelos alunos, sob a orientação do professor, em cada lição (Bases Educativas do Estado do Paraná, 1923).

Esses documentos orientavam questões da prática pedagógica no ensino primário do Paraná, como: a aritmética usada apenas de forma técnica passaria a ser usada de forma educativa, voltada à formação do raciocínio e do caráter; a álgebra começa a ser introduzida precocemente, como forma de generalização das operações aritméticas; a prática da reflexão, da memória e do cálculo mental torna-se parte estruturante da rotina escolar; e a figura do professor aparece como mediador ativo, que conduz o aluno à descoberta e não à repetição mecânica.

Delimita-se, assim, a ideia de uma indissociabilidade entre o uso da aritmética como ferramenta para a resolução de problemas e da álgebra como linguagem de generalização e de

estruturação do pensamento algébrico¹⁴. Considera-se como a realização das atividades aritméticas presentes na obra poderia ser alinhada de modo indissociável aos conhecimentos de cálculo mental. Seria possível analisar tais atividades a partir dessa perspectiva? Estaríamos diante de aritmética, de álgebra ou isso dependerá do olhar? Que teóricos problematizam o que se entende por álgebra e por pensamento algébrico? De que maneira as atividades aritméticas da obra, quando trabalhadas por meio do cálculo mental, poderiam remeter ao pensamento algébrico?

Diante dessas indagações, considerou-se a possibilidade de que, no contexto da época, a álgebra estivesse presente de forma implícita, ou seja, invisível aos olhos de uma abordagem mais tradicional, voltada para a mecanização das atividades¹⁵ aritméticas.

Então, qual seria a finalidade do cálculo mental para a época? Para Pinto (2017), o cálculo mental é visto como procedimento que atende um objetivo tão atual quanto o considerado no ensino de aritmética em épocas anteriores, ou seja, capaz de estimular o pensamento matemático. Para a autora, o cálculo mental não é uma prática nova, e pode contribuir para a resolução de problemas, trazendo benefícios ao cotidiano. “Em meados do século XX, resolver as quatro operações aritméticas era um saber nuclear na programação da aritmética da escola primária” (Pinto, 2017, p. 198), ou seja, todo o ensino girava em torno desse domínio básico. A autora analisou ensinamentos direcionados ao cálculo mental, que foram recomendados em programas oficiais para o ensino primário do Paraná à época.

A relevância do ensino das operações estava associada ao tipo de atividade oferecida aos alunos, já que o cálculo mental favorece o desenvolvimento de estratégias de pensamento mais flexíveis e originais, estimulando as crianças a praticar técnicas próprias da aritmética ativa. Sobre os saberes para calcular e resolver problemas, a pesquisadora destaca que

o cálculo mental, procedimento um tanto em desuso nos dias atuais, dado o surgimento das calculadoras, foi abordado em manuais pedagógicos que circularam em meados dos anos de 1950, principalmente naqueles recomendados por programas oficiais de formação de normalistas cuja base pedagógica estava alinhada aos ideais da Escola Nova (Pinto, 2017, p. 205).

¹⁴ A definição de pensamento algébrico, segundo esta pesquisa, ganha forma teórica a partir de 1990 a qual será tratada em um capítulo seguinte.

¹⁵ Ainda que a edição de referência da utilização de atividades seja Büchler (1919), optou-se, em determinadas situações que veremos posteriormente, pela utilização de Büchler (1943), por apresentar melhor qualidade de reprodução das páginas e figuras, considerando que ambas as edições apresentam as mesmas atividades.

Ainda de acordo com Pinto (2017), em meados do século XX o cálculo mental passou a ser compreendido como uma prática fundamental no processo de aprendizagem, considerado um saber prático e instrumental, em sintonia com a concepção de aritmética própria da escola ativa. Nessa perspectiva, era recomendado como recurso pedagógico capaz de agilizar o raciocínio e atender à finalidade central da matemática escolar: possibilitar a resolução rápida dos cálculos presentes nos problemas do cotidiano.

O interesse pelo cálculo mental tem se consolidado, no âmbito de pesquisas do GHEMAT Paraná, tendo como referência inicial a tese de doutorado de minha orientadora, a professora e pesquisadora Dra. Danilene Gullich Donin Berticelli.

Em sua tese, Berticelli (2017) pesquisou o “Cálculo mental no ensino primário (1950-1970): um olhar particular para o Paraná”, investigando as finalidades do cálculo mental no Ensino Primário no referido período, com um olhar particular local. Diante da relevância dessa pesquisa para o grupo, outros estudos sobre cálculo mental também passaram a ser desenvolvidos, sendo abordados a partir de diferentes perspectivas.

A pesquisa de Frana (2023), intitulada “O cálculo mental da adição e subtração na obra Lógica do Cálculo 2: fundamentos e estratégias”, mostrou que as atividades envolvendo adição e subtração (com fundamento e estratégias do cálculo mental) contribuem para o desenvolvimento do sentido de número e da argumentação operatória em crianças de 7 a 8 anos.

Cosme (2024) investigou as “Estratégias de cálculo mental com números racionais: um olhar sobre a expertise profissional de Cecilia Parra”, e concluiu que os materiais elencados na pesquisa se mostram ricos em conhecimentos e estratégias voltadas ao ensino do cálculo mental com números racionais.

Por fim, a defesa mais recente vinculada ao GHEMAT Paraná é o trabalho de Salla (2025), intitulada “A matemática do ensino de cálculo mental: transformações e permanências em atividades das coleções GRUEMA (1974/75) e Ápis Mais (2021)”, que analisou diversas atividades presentes em ambas as coleções, destacando os conhecimentos e as estratégias relacionadas ao ensino do cálculo mental. A pesquisa indicou que nas duas coleções, o cálculo mental é destacado, mas com abordagens diferentes: na Gruema, há foco no pensamento algébrico e na repetição de conjuntos numéricos; já na Ápis Mais, ele é usado na resolução de problemas do cotidiano, explorando o sistema de numeração decimal.

No âmbito de pesquisas do GHEMAT Brasil, temos o trabalho de Conceição (2021), intitulado “O cálculo mental para ensinar: uma análise de produções de Maria do Carmo Santos Domite, 1980-1995”. A partir das análises, foram identificadas orientações ao professor

sistematizadas por Domite para o ensino do cálculo mental, que envolvem a explicação oral da solução pelo aluno, seguida da sistematização escrita das estratégias utilizadas.

Ao direcionar o olhar para as décadas de 1900 a 1950, a partir da obra *Arithmetica Elementar* - Livro I (1919), de Georg August Büchler, busco trazer elementos também voltados para o cálculo mental destacando atividades de aritmética que mobilizam conhecimentos de cálculo mental e podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico, que se justificaram ao longo da pesquisa e que serão tratadas adiante, podendo trazer novas contribuições para a História da educação matemática.

1.1 APRESENTANDO A FONTE

Segundo Silva (2020), Georg August Büchler nasceu em 21 de maio de 1884, em Steinbach, Hessen, onde iniciou seus estudos primários e, posteriormente, frequentou a escola secundária em Darmstadt, cursando diversas disciplinas, entre elas, Aritmética, Álgebra e Geometria. Por volta de 1903, ingressou no Seminário de Formação de Professores de Hessen, obtendo certificação em Pedagogia e em Música no ano seguinte.

Segundo a autora, ainda que a documentação sobre sua conclusão seja incompleta, sabe-se que, em 1905, Büchler imigrou para o Brasil a convite da Escola Alemã de Blumenau, onde passou a lecionar Aritmética e Inglês, assumindo depois também o ensino de Português. Com o fechamento da instituição em 1917, durante a Primeira Guerra Mundial, ele foi afastado e passou a trabalhar no comércio até 1920, quando retornou à docência. Nesse período, dedicou-se a estudos matemáticos e iniciou a produção de livros, publicando Guia de Cubagem (1925), voltado à área madeireira, e, a partir de 1919, deu início à série de livros didáticos que o tornaram conhecido no ensino primário brasileiro (Silva, 2020).

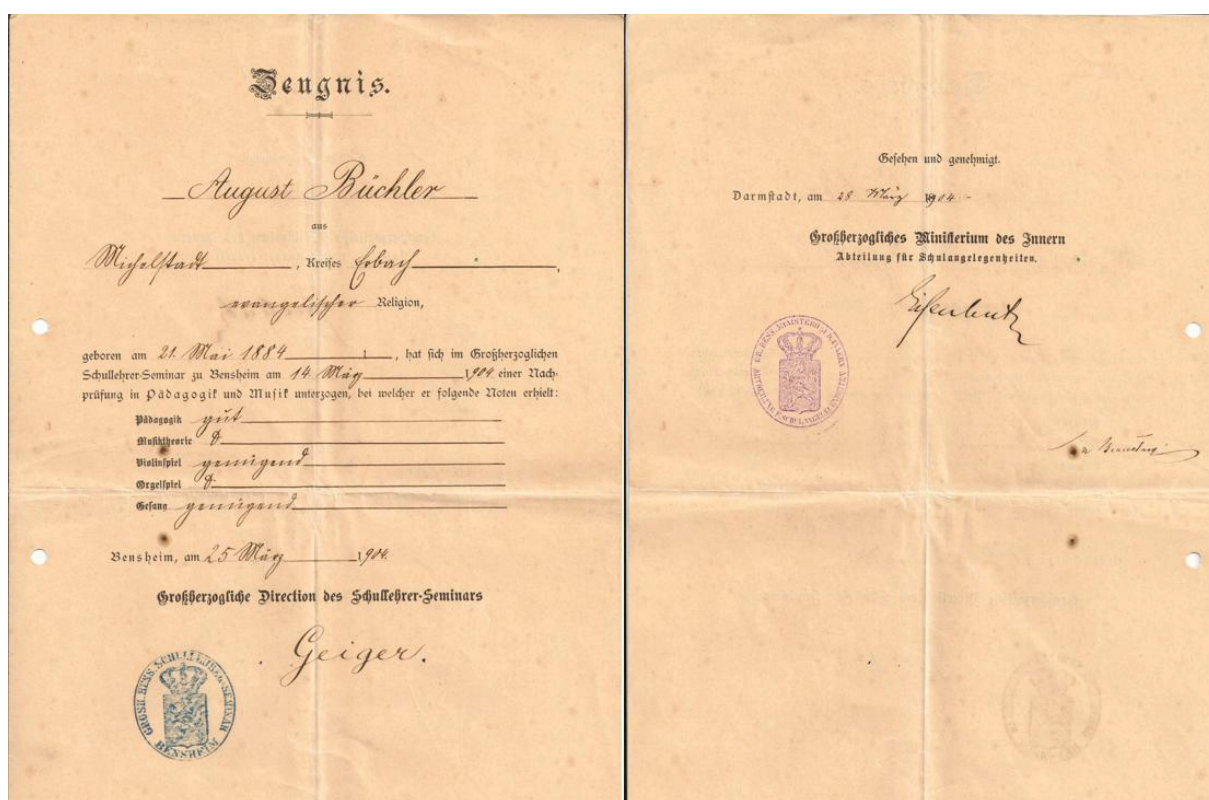
FIGURA 1 – Retrato de Büchler



FONTE: Arquivo Pessoal Georg August Büchler.

A formação¹⁶ de Georg August Büchler no *Großherzogliches Schullehrer-Seminar zu Bensheim*, oficialmente certificada em 1904 e homologada pelo Ministério do Interior do Grão-Ducado de Hessen, comprova que ele recebeu uma formação docente segundo os padrões alemães da época, com ênfase em Pedagogia e Música. A Figura 2 (frente e verso) mostra estes detalhes, em que obteve as seguintes notas: Pedagogia: bom, Teoria Musical: satisfatório, Violino: satisfatório, Órgão: bom, Canto: Satisfatório.

FIGURA 2 – Certificado de Conclusão de Estudos

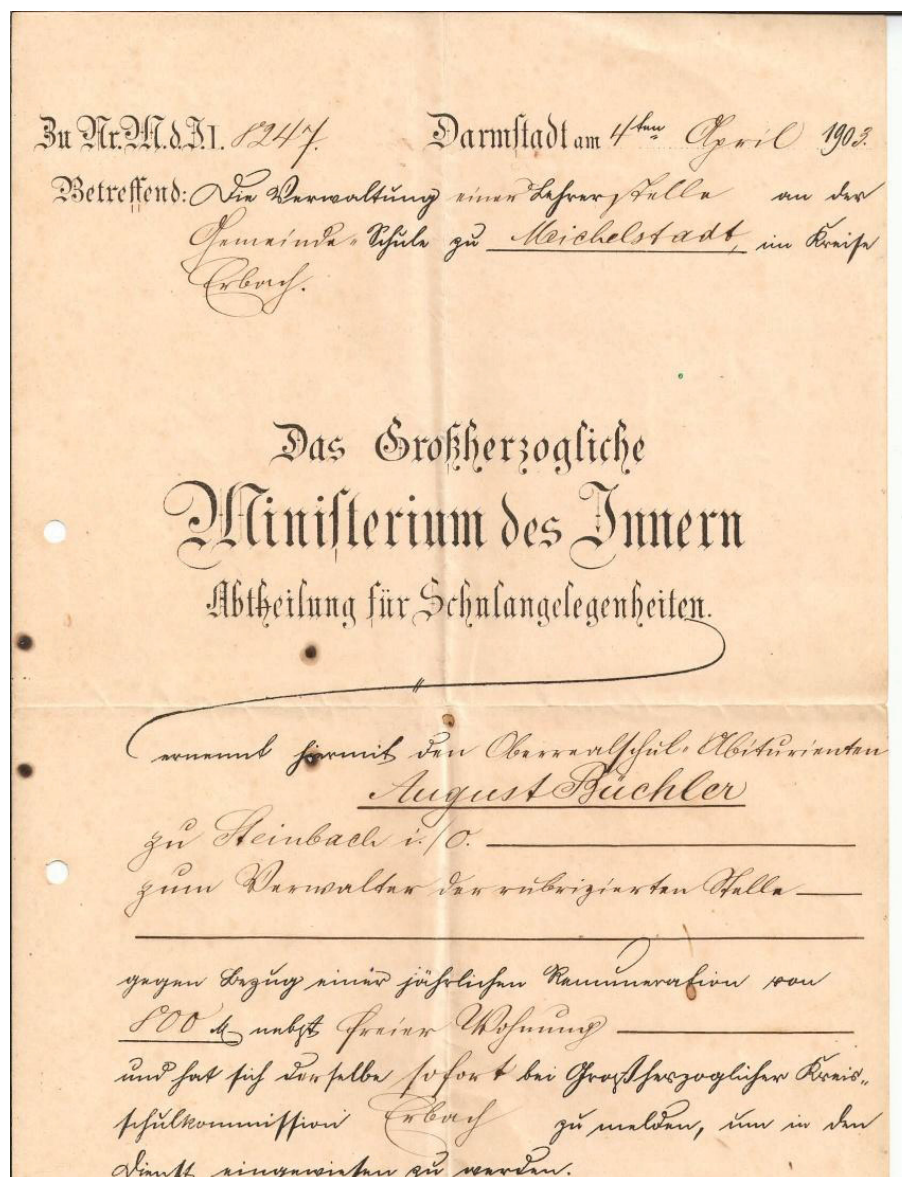


FONTE: Arquivo Pessoal Georg August Büchler.

Entre os documentos do acervo, encontra-se uma nomeação expedida em 4 de abril de 1903 pelo Ministério do Interior do Grão-Ducado de Hessen, nomeando Georg August Büchler para o cargo de administrador (direção geral) da escola comunal de Michelstadt, com salário anual e moradia, comprovando seu ingresso no magistério público alemão antes de sua vinda ao Brasil, mencionado em Silva (2020) como mostra abaixo:

¹⁶ A partir de um contato com uma tetraneta de Georg August Büchler, obtive acesso a documentos inéditos pertencentes ao acervo familiar.

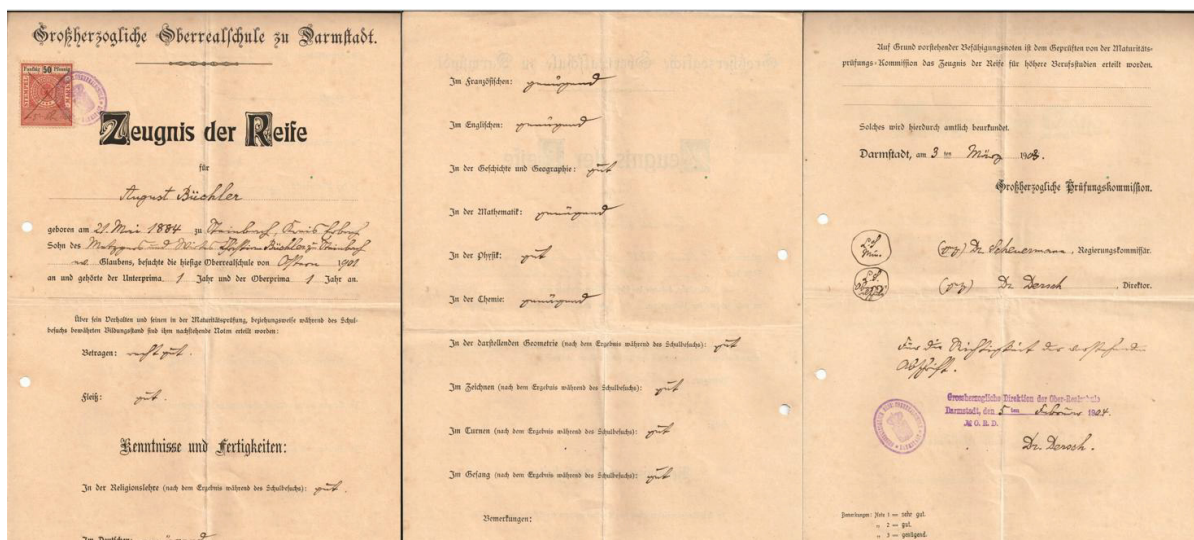
FIGURA 3 – Nomeação para o cargo de administrador



FONTE: Arquivo Pessoal Georg August Büchler

Outro certificado, e como mencionado no trabalho de Silva (2020) e na Figura 4 a seguir, Büchler concluiu sua formação secundária superior na *Oberrealschule de Darmstadt*, obtendo em 1903 o *Zeugnis der Reife* (Certificado de Maturidade), requisito formal para ingresso em cursos superiores e seminários de formação pedagógica na Alemanha. Este certificado confirma, portanto, que Büchler possuía escolarização completa antes de ingressar no Seminário de Professores de Bensheim em 1903-1904.

FIGURA 4 – Certificado de Maturidade



FONTE: Arquivo Pessoal Georg August Büchler

Partindo para as obras, a coleção Arithmetica Elementar de Georg August Büchler foi impressa nas oficinas gráficas da Companhia Melhoramentos, de São Paulo, e publicada em três volumes (I, II e III)¹⁷, passando por diversas reedições ao longo do tempo, o que indicou sua permanência no cenário educacional brasileiro até pelo menos a década de 1940. De todo modo, como observa Dynnikov (2016), as obras de Büchler tiveram longa circulação no Brasil, já que sua primeira edição remonta a 1919 e a última em 1943. Ainda sobre circulação dos livros didáticos de matemática, segundo Almeida (2016) alguns elementos importantes estão no Quadro 1, como o título do livro, a finalidade e datas da primeira e última edição:

QUADRO 1 – Livros didáticos de Georg August Büchler

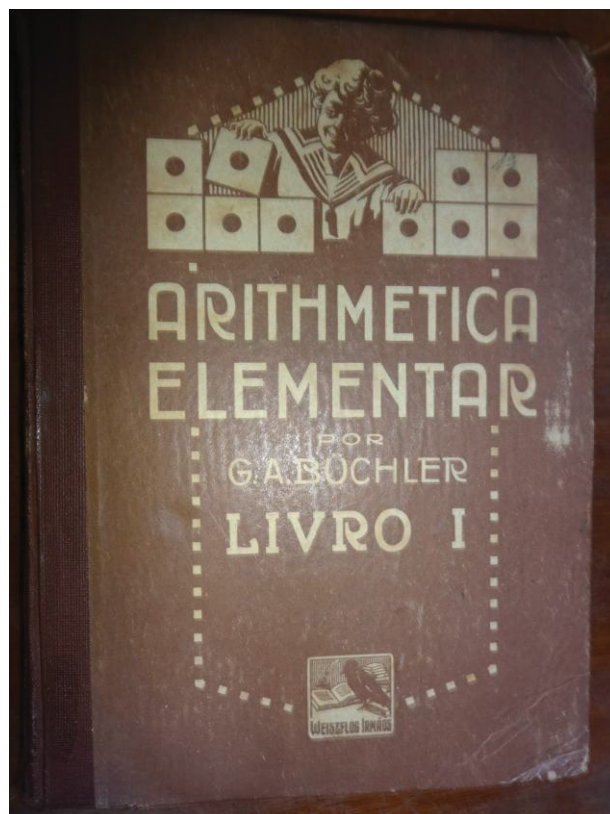
Título	Finalidade	1ª Edição	Última Edição Conhecida
Arithmetica Elementar: Livro I	Para o ensino primário, de acordo com os programmas officiaes	1919	1943
Arithmetica Elementar: Caderno Auxiliar do Livro I	Caderno auxiliar do Livro I	1919	—
Arithmetica Elementar: Livro II	Para o ensino primário, de acordo com os programmas officiaes	1921	1935
Arithmetica Elementar: Livro III	Para o ensino primário, de acordo com os programmas officiaes	1924	1937

FONTE: Almeida (2016) adaptado pelo autor (2025).

¹⁷ Para o livro Arithmetica Elementar I havia um Caderno Auxiliar.

Para este estudo, considera-se a obra *Arithmetica Elementar - Livro I* (1919), cuja capa é apresentada na Figura 5.

FIGURA 5 – Capa do livro *Aritmética Elementar - Livro I* (1ª edição, 1919)



FONTE: Büchler (1919)¹⁸

A coleção *Arithmetica Elementar* indica que as obras foram elaboradas para o ensino primário¹⁹, em conformidade com os programas oficiais da época, sendo recomendada para uso em todos os estados do Brasil. No prefácio desta edição e volume, Büchler (1919) apresenta sua visão crítica sobre o ensino de aritmética nos primeiros anos de escolarização, apontando que o excesso de abstração, a mecanização e a ênfase na memorização comprometem o aprendizado. Para ele, há um equívoco metodológico ao desconsiderar a natureza concreta do pensamento infantil. Como afirma, “Tendo sempre em vista que o espírito infantil só é capaz

¹⁸ Publicada pela Editora Melhoramentos (sucessora da Weiszflog e Irmãos), reúne 25 lições inspiradas no cotidiano, como O café, A compra de pães, O leite, A bola, A semana, O tropeiro, entre outras, além de seções de exercícios, notas ao professor e um prefácio. O manual possui 229 páginas, índice, quadro de distribuição da matéria por semanas, propagandas da editora, ilustrado e com algumas páginas coloridas. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/218645>

¹⁹ Antes da Reforma do Ensino instituída pela Lei nº 5.692/1971, o sistema escolar brasileiro estava estruturado de forma segmentada, onde o ensino primário correspondia aos quatro primeiros anos da escolarização obrigatória, geralmente destinado a crianças de 7 a 10 anos de idade (UNIVESP, 2018).

de noções concretas pela intuição direta, procuramos associar sempre às abstrações aritméticas as coisas ambientes” (Büchler, p. IV, 1919). Nessa perspectiva, destaca a importância do método baseado na observação e na intuição, alinhando-se às propostas pedagógicas de Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827). Os elementos presentes no prefácio expõem, portanto, créditos das ideias pestalozzianas e à própria formação de Büchler como professor.

Para compreender a incidência do cálculo mental no ensino da aritmética, é importante destacar a contribuição de Pestalozzi, que reconhecia nesse tipo de prática um papel central na formação intelectual dos alunos. Pinto (2017) aponta que

Pestalozzi deu uma atenção especial ao ensino da Aritmética, concedendo um lugar especial ao número, por considerá-lo o melhor meio de instrução, dentre os três elementos de sua trilogia intuitiva, o que permite a precisão dos conceitos. Sabe-se que na arte do cálculo, seus ensinamentos tiveram o maior sucesso e que muitos dos seus alunos que maravilhavam os visitantes pelos cálculos feitos de cabeça, obtiveram brilhantes resultados em seus estudos de matemáticas e engenharias. Considerava que o cálculo mental possuía um valor educativo maior que o cálculo escrito. Defendia a ideia de que os primeiros cálculos fossem feitos mentalmente, sem uso de papel (Pinto, 2017, p. 207-208).

As ideias do ensino intuitivo, entusiasmadas por Pestalozzi, começaram a ganhar destaque no cenário educacional brasileiro entre o final do século XIX e o início do século XX. Ao pesquisar questões neste âmbito, Costa (2010) identificou que alguns livros didáticos da época, como a obra de Büchler publicada em 1923, incorporam elementos alinhados ao ideário pestalozziano. Nesse contexto, as reflexões de Pestalozzi sobre o ensino da aritmética indicaram sua convicção de que o cálculo mental possuía um valor formativo superior ao cálculo escrito, como observa Pinto (2017)

A aritmética não é, para Pestalozzi, um simples exercício de memória, um saber mecânico e rotineiro, porém, resultado de uma percepção clara e precisa que conduz à verdade. Nesse sentido, é considerado um dos promotores do cálculo mental, ao defender a ideia de que os cálculos, sem que sejam abreviados ou mecânicos, para serem educativos devem ser graduados e ter estreita relação com a vida real da criança. Tal observação não deixa dúvidas de que ele foi um precursor da Escola Nova. Como representante do método intuitivo discutiu sobre as relações dos números pela observação intuitiva, observando que conhecer as relações entre os números pressupõe uma capacidade que pode ser desenvolvida pelo exercício da comparação. Para a criança estabelecer tais comparações, o mestre irá levá-la a observar objetos comparáveis, distinguindo o mais, o menos, ação que parte de observações simples às mais complexas (Pinto, 2017, p. 208).

A análise da obra de Büchler requer um olhar para os ideais pestalozzianos em tempos de Escola Nova, considerando as práticas de ensino intuitivo mobilizadas no ensino de

aritmética, em especial os conhecimentos de cálculo mental que contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A coleção *Arithmetica Elementar* passou a ser divulgada na imprensa paulistana em 1920. Na época, o *Correio Paulistano* dedicou um longo artigo à coleção, destacando seu impacto e saudando-a como um marco importante no avanço das práticas pedagógicas:

Os antigos métodos de ensino, depois dos estudos baseados na observação e na psicologia ultimamente realizados pelos eminentes educadores, daquém e além-mar, já não cansam lamentavelmente o cérebro dos jovens estudantes. Hoje os processos são outros - e outros os resultados que se obtém. A análise, o fato, as figuras concretas substituíram as longas e inócuas atrocidades das declamações de cór. [...] A obra que temos em mãos - uma *arithmetica* - é mais um exemplo a seguir. Ela se funda na observação, que é a base de todo o conhecimento, como queria Pestalozzi (*Correio Paulistano*, 1920, p. 1).

Telo (2017), em seu estudo sobre os processos de regulamentação de livros didáticos de 1938 a 1971, aponta que, após mais de três décadas de atuação das comissões avaliadoras do Rio de Janeiro, São Paulo e da esfera federal, foi autorizado um expressivo número de livros didáticos de matemática, em especial a obra *Arithmetica Elementar - Livro I*, de Georg August Büchler, cujos dados serão apresentados posteriormente. Essas iniciativas, segundo o autor, acabaram desempenhando um papel importante para se compreender o perfil dos materiais oficialmente aceitos no país ao longo do período, especialmente no que diz respeito aos livros destinados ao ensino de Matemática.

Ainda para o autor, a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD) foi criada no Brasil em 1938, com o objetivo de examinar e autorizar o uso de livros didáticos nas escolas. Atualmente, a CNLD não existe mais com essa nomenclatura, tendo sido substituída pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), vinculado ao Ministério da Educação (MEC), que avalia e distribui obras didáticas, pedagógicas e literárias para escolas públicas de Educação Básica.

No Quadro 2, apresentam-se as obras de autoria de Georg August Büchler, que foram autorizadas de acordo com sua aprovação pela CNLD. As obras são indicadas para o Ensino Primário, o que mostra que Büchler estruturou sua coleção pensando sobre a aritmética para os primeiros anos de escolarização. As edições autorizadas são, em sua maioria, 2ª e 3ª edições, o que caracteriza que os livros já estavam em circulação e foram reeditados. Há também registros de uma 4ª e 8ª edições no ano de 1947, o que pode indicar a permanência da obra.

QUADRO 2 – Livros didáticos de Matemática aprovados pela Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD)

24 de Setembro de 1947 – Lista Parcial nº 1			
Ensino Primário			
Autor	Título	Série	Edição
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar	---	8ª Ed.
6 de Novembro de 1947 – Lista Parcial Condicional nº 2			
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar	1ª	4ª Ed.
8 de Dezembro de 1939 – Boletim nº 278			
Autor	Título	Editores	Edição
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar – 1º Ano	Melhoramentos	3ª Ed.
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar – 2º Ano	Melhoramentos	3ª Ed.
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar – 3º Ano	Melhoramentos	2ª Ed.
4 de Abril de 1940 – Boletim nº 72			
Relação com todos os livros autorizados até a referida data			
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar – 1º Ano	Melhoramentos	3ª Ed.
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar – 2º Ano	Melhoramentos	3ª Ed.
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar – 3º Ano	Melhoramentos	2ª Ed.
2 de Agosto de 1941 – Boletim nº 155			
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar – 1º Ano	Melhoramentos	3ª Ed.
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar – 2º Ano	Melhoramentos	3ª Ed.
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar – 3º Ano	Melhoramentos	2ª Ed.
27 de Junho de 1950 – Edital nº3			
Relação de todos os livros autorizados até a referida data			
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar – 1º Ano	Melhoramentos	3ª Ed.
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar – 2º Ano	Melhoramentos	3ª Ed.
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar – 3º Ano	Melhoramentos	2ª Ed.

FONTE: Elaborado pelo autor com base em Telo (2017).

Telo (2017) sintetiza os resultados do trabalho realizado pelas comissões avaliadoras ao longo dos anos. A unificação do Quadro 2 sinaliza que os volumes de Aritmética Elementar permaneceram oficialmente autorizados de 1939 a 1950, indicando possível consolidação como obras de referência. A coleção mantém estrutura seriada estável (1º, 2º e 3º ano), sem alterações significativas de edição e reedições. Uma possível ruptura que pode ser notada, de acordo com o Quadro 3, ocorreu somente em 1947, não sendo localizado, até o presente momento desta pesquisa, nenhum registro que explique por que somente um volume foi aprovado em 1947.

Entre os dados levantados, destaca-se que o conceito de compêndio, conforme definido no Decreto-Lei Federal nº 8.460/45, foi incorporado tanto pelas comissões do Rio de Janeiro quanto pelas de São Paulo, como mencionado no Quadro 3:

QUADRO 3 – Livros didáticos de Matemática aprovados pelas duas iniciativas de avaliação

Livros aprovados			
Autor	Título	CNLD	Comissões do Rio de Janeiro (CRJ)
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar	4 ^a /1947 8 ^a /1947	---
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar – 1º Ano	4 ^a /1947	3 ^a /1939 3 ^a /1940 3 ^a /1941 3 ^a /1950
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar – 2º Ano	---	3 ^a /1939 3 ^a /1940 3 ^a /1941 3 ^a /1950
Büchler, George Augusto	Aritmética Elementar – 3º Ano	---	2 ^a /1939 2 ^a /1940 2 ^a /1941 2 ^a /1950

FONTE: Elaborado pelo autor com base em Telo (2017).

Pode-se verificar a inserção da coleção *Arithmetica Elementar* de Georg August Büchler no contexto educacional brasileiro a partir dos comentários de Costa (1923), em publicação na Revista Nacional, que mostram que os professores obteriam “vantagens” em seguir o processamento indicado na obra. No artigo, o autor também aponta que, naquele tempo, estava em curso uma reforma do ensino orientada pelo Prof. Lourenço Filho, que adotou o livro de Büchler (Costa, 1923 apud Almeida, 2016, p. 68).

A partir de pesquisas no âmbito do GHEMAT Paraná, no que se refere aos estudos de cálculo mental, foram analisadas as atividades de aritmética da referida obra, que podem ser trabalhadas a partir dos conhecimentos de cálculo mental e da álgebra, por meio de elementos próprios de cada área do conhecimento, como facilitador no desenvolvimento do pensamento algébrico. Observa-se, no entanto, uma ausência de investigações que estabeleçam vínculos entre a aritmética e a álgebra e, no contexto do cálculo mental, há uma lacuna de estudos que antecedem a década de 1950, reforçando a necessidade desta pesquisa.

Nesse sentido, estudos internacionais, como o de Kuzu (2023), destacam o cálculo mental como uma ponte possível entre a aritmética e a álgebra, especialmente quando os alunos são encorajados a explicar e sistematizar suas estratégias. Apesar desse avanço, percebe-se que há escassez de pesquisas que tratem dessa relação, em especial da perspectiva da História da educação matemática, com base na análise de obras didáticas brasileiras. A partir desse viés, eis então a questão norteadora deste trabalho²⁰: **Que elementos do pensamento algébrico**

²⁰ A Prof.^a Dr.^a Neuza Bertoni Pinto, no primeiro encontro da Pós em Rede (2022), na disciplina Tópicos Especiais: Ensino de Matemática em seus Aspectos Históricos, oferecido pelo GHEMAT-Brasil, apresentou o conceito de “pergunta sincera”. Para ela, não existe pesquisa sem um problema, e esse problema deve ir além de uma simples curiosidade: precisa ser legítimo, capaz de fazer avançar o conhecimento histórico e envolver o pesquisador na busca de respostas. A pergunta sincera é aquela que não admite resposta imediata e que, ao surgir de uma problemática, abre possibilidades investigativas. Ao buscar elementos para formular a questão, o pesquisador analisa o que já foi produzido sobre o tema, identifica o que já foi investigado e elimina o que está resolvido, até

estão presentes em atividades que envolvem cálculo mental, propostas na obra *Arithmetica Elementar* - Livro I (1919), de Georg August Büchler?

Como objetivo geral, busca-se compreender os elementos algébricos presentes em atividades de aritmética que mobilizem os conhecimentos de cálculo mental na obra *Arithmetica Elementar* - Livro I (1919), de Georg August Büchler. Com vistas ao desdobramento da pesquisa, os objetivos específicos estabelecidos foram: (i) Apresentar estudos sobre mobilização do cálculo mental no ensino de aritmética; (ii) Apresentar como categorias de análise os conhecimentos de cálculo mental e algébricos que podem ser mobilizados no ensino de aritmética; (iii) Analisar as diretrizes curriculares do período, buscando identificar os elementos de álgebra articulados com a aritmética; e (iv) Analisar a obra *Arithmetica Elementar* - Livro I (1919), de Georg August Büchler, buscando identificar atividades aritméticas que envolvam conhecimentos de cálculo mental que auxiliam no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Com a finalidade de explicitar o percurso investigativo, apresenta-se a organização desta dissertação bem como seus desdobramentos. Na Introdução, situa-se o problema de pesquisa no campo da História da educação matemática, delimitando o problema de pesquisa para questões do cálculo mental e sua possível relação com elementos do pensamento algébrico. Apresenta-se a fonte de pesquisa que é a obra *Arithmetica Elementar* - Livro I (1919), de Georg August Büchler, buscando compreender os elementos algébricos presentes em atividades de aritmética que mobilizam os conhecimentos de cálculo mental.

No Capítulo 1, apresentam-se os fundamentos teórico-metodológicos da pesquisa, sob o viés da perspectiva da História Cultural (Chartier, 1988; 1990; 2002; Barros, 2005; Certeau, 1982), discutindo a noção de operação historiográfica (Certeau, 1982), o conceito de disciplina escolar (Chervel, 1990), da cultura escolar da escola a partir do uso do livro didático (Julia, 2001; Choppin, 2004). Neste capítulo, descrevemos os procedimentos adotados, em especial para o inventário de pesquisas sobre Georg August Büchler.

O Capítulo 2 trata do cálculo mental e do pensamento algébrico. Para isso, foram mobilizadas pesquisas que discutem o cálculo mental (Berticelli, 2017; Berticelli; Zancan, 2024) e autores que relacionam esse campo ao desenvolvimento do pensamento algébrico (Blanton; Kaput, 2005; Boaler, 2018; Canavarro, 2007; Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993;

encontrar uma lacuna real, ainda não respondida pelos estudos existentes. Por isso, antes de formular a questão, é essencial consultar trabalhos recentes e anteriores para propor algo novo, que não repita o que já foi dito.

Kaput, 1998; 1999; 2008; Kieran *et al.*, 2016; Ponte; Branco; Matos, 2009; Thorndike, 1922; Usiskin, 1988).

No Capítulo 3 foi realizada a análise da obra *Arithmetica Elementar* - Livro I (Büchler, 1919), identificando atividades de aritmética presentes na obra, em busca de compreender os conhecimentos de cálculo mental que podem mobilizar o pensamento algébrico.

Por fim, nas Considerações Finais, retoma-se à questão de pesquisa, sintetizando os principais resultados obtidos e indicando as contribuições do estudo. Destaca-se a importância de compreender os conhecimentos do cálculo mental como fator importante no desenvolvimento do pensamento algébrico. Sugerem-se, ainda, desdobramentos para futuras investigações que ampliem o olhar para essa e para outras obras de Büchler.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Ao refletir sobre os caminhos da história, é necessário lembrar que o papel do historiador não é o de prever o futuro, mas o de lançar luz sobre os sentidos das transformações ocorridas ao longo do tempo. O olhar do historiador deve ser voltado para o passado, buscando compreender as rupturas e permanências que moldam a experiência humana, especialmente no que se refere às práticas de leitura, escrita e circulação do saber. Assim, para Chartier (2002)

A tarefa dos historiadores não é profetizar a história. Enganaram-se eles com tanta frequência ao aventurar-se a tal exercício que acabaram se tornando prudentes. O olhar voltado para trás tem outra função: ajudar a compreender quais são os significados e os efeitos das rupturas que implicam os usos, ainda minoritários e desiguais, mas a cada dia mais vencedores, de novas modalidades de composição, de difusão e de apropriação do escrito. Entre as lamentações nostálgicas e os entusiasmos ingênuos suscitados pelas novas tecnologias, a perspectiva histórica pode traçar um caminho mais sensato, por ser mais bem informado (Chartier, 2002, p. 9).

Neste sentido, em vez de se deixar levar por lamentações ou entusiasmos precipitados diante das mudanças, a perspectiva histórica oferece um caminho significativo, já que a história cumpre seu papel não apenas como ferramenta de compreensão do passado, mas também como chave para interpretar criticamente os desafios do presente.

Em sua obra “A história cultural: entre práticas e representações”, Chartier (1988) propõe reflexões para compreender o ofício do historiador, sugerindo que seu trabalho é articular as práticas sociais e as representações simbólicas. Chartier (1988) afirma que “A história cultural, tal como a entendemos, tem por principal objeto identificar o modo como em diferentes lugares e momentos uma determinada realidade social é construída, pensada, dada a ler” (p. 16-17). Nesse sentido, ela não se limita a propor uma nova maneira de contar o passado, mas representa uma mudança na forma de pensar os próprios problemas históricos, ou seja, os objetos de estudo e os métodos utilizados na investigação. Logo, ao nos voltarmos para a obra *Arithmetica Elementar* - Livro I (1919), de Georg August Büchler, podemos encontrar elementos que podem auxiliar na compreensão do pensamento algébrico, conceito não explícito no ensino de aritmética, mas mobilizado posteriormente, no ensino de álgebra.

Chartier (1988) mostrou como a história passou a incorporar questões oriundas de outros campos do saber, como a antropologia, a linguística e a sociologia, deslocando o foco da análise para os modos como os indivíduos e os grupos constroem significados e produzem representações sobre o mundo que habitam.

As representações se estabelecem “em um campo de concorrências e de competições cujos desafios se enunciam em termos de poder e de dominação” (Chartier, 1990, p. 17), ou seja, não surgem de forma neutra. “E estas lutas geram inúmeras ‘apropriações’ possíveis das representações, de acordo com os interesses sociais, com as imposições e resistências políticas, com as motivações e necessidades que se confrontam no mundo humano” (Barros, 2005, p. 139). Elas se constroem em meio a disputas, embates e relações de força, refletindo posições sociais e interesses diversos.

Ainda para Barros (2005)

Para encaminhar esta interação entre cultura e poder, tal modelo tem à sua entrada outra noção primordial. “Apropriação”, conjuntamente com as noções de “representação” e de “prática”, constitui precisamente a terceira noção fundamental que conforma a perspectiva de História Cultural desenvolvida por Roger Chartier (Barros, 2005, p. 18).

Chartier (1988) argumenta que, para compreender essas representações, é preciso considerar as práticas que as sustentam, ou seja, os usos sociais, as condições materiais e os dispositivos institucionais que tornam possível a circulação, a apropriação e a reinterpretação dos discursos, textos e imagens no interior de uma cultura. O historiador cultural se ocupa não apenas do que foi produzido, mas também de como isso foi recebido e interpretado por diferentes públicos, em distintos contextos históricos.

Neste estudo, a partir da apropriação da fonte histórica estabelecida, busca-se identificar práticas por meio das atividades de modo a construir as representações que indicam a relação entre os conhecimentos aritméticos de cálculo mental que favorecem na construção do pensamento algébrico. Nesse sentido, um inventário das pesquisas acerca do autor Georg August Büchler foi estruturado, a fim de apontar pistas sobre circulação e permanência de sua coleção no Brasil.

Ao fazer o movimento entre teoria e método, Chartier (1988) oferece ao historiador instrumentos para analisar os processos culturais comprometidos com a compreensão crítica dos modos como o passado é construído, representado e transmitido, especialmente no que diz respeito às relações entre saber, poder e identidade, já que sua proposta, também se tornou referência entre pesquisadores do campo da História da educação no Brasil.

Conforme aponta Chartier (1988), a principal tarefa do historiador, assim como a do etnólogo, é reencontrar as representações antigas em sua especificidade irreduzível, evitando enquadrá-las em categorias anacrônicas ou julgá-las a partir dos padrões mentais do século XX, muitas vezes tomados como resultado inevitável de um progresso contínuo.

Corroborando, temos que

Por outro lado, pensar o trabalho histórico como um trabalho sobre a relação entre representações e práticas – alargando o referido questionário aos outros tipos de representações manipuláveis pelo historiador – significa considerar, em princípio, que entre umas e outras só existem relações conjecturais (Chartier, 1988, p. 87-88).

Chartier (1988) propõe que o trabalho do historiador deve ir além da simples descrição de fatos e se concentrar na relação entre representações (ou seja, as ideias, crenças, discursos e imagens produzidas por uma sociedade) e as práticas sociais concretas, como modos de ensinar, de aprender, de viver o cotidiano.

Ao sugerir que essa análise deve incluir diferentes tipos de representações manipuláveis pelo historiador, como documentos, livros, registros escolares, jornais, entre outros, ele alerta para um ponto importante: não há uma ligação direta e garantida entre o que as pessoas pensam ou dizem e o que realmente fazem. Para Valente (2006)

Esse ofício de buscar revelar a historicidade dos elementos presentes no cotidiano das práticas pedagógicas do professor de matemática leva-nos a uma seara mais ampla de reflexão sobre o tempo, sobre como caracterizamos a sua cronologia e sobre como pensamos em mudanças (Valente, 2006, p. 39).

Isso quer dizer que cabe ao historiador considerar que a relação entre representações e práticas é provisória e construída a partir de vestígios. É uma relação conjectural; ou seja, baseada em interpretações e hipóteses, e não em certezas absolutas (Chartier, 1988). Logo, quando um historiador analisa uma fonte, ele não deve tomá-la como um reflexo fiel da realidade, mas como um ponto de partida para compreender como as pessoas pensavam, agiam e davam sentido ao mundo em determinado tempo e espaço. Nesse sentido, busca-se elencar indicações de utilização do material bem como a circulação e apropriação, na tentativa de entender as transformações ocorridas diante das mudanças e críticas da época.

Segundo Valente (2006) os fatos históricos

(...) são constituídos a partir de traços, de rastros deixados no presente pelo passado. Assim, o trabalho do historiador consiste em efetuar um trabalho sobre esses traços para construir os fatos. Desse modo, um fato não é outra coisa que o resultado de uma elaboração, de um raciocínio, a partir das marcas do passado, segundo as regras de uma crítica. Mas, a história que se elabora não consiste tão simplesmente na explicação de fatos (Valente, 2006, p. 31).

Valente (2006) nos convida a pensar a história não como algo pronto ou fixo, mas como algo que precisa ser construído. Os chamados “fatos históricos” não estão simplesmente

esperando para serem descobertos; na verdade, devem ser o resultado de um trabalho de interpretação feito pelo historiador, a partir de vestígios por meio de uma análise crítica. Fazer história é muito mais do que simplesmente contar o que aconteceu, é compreender, interrogar, interpretar e, principalmente, construir sentido a partir das marcas deixadas no tempo (Valente, 2006). Logo, “cabe ao historiador, portanto, construir o passado como um objeto determinado de trabalho para sua investigação” (Valente, 2006, p.35).

Assim, olhar para o passado, em uma perspectiva histórica, não é simplesmente tentar reconstruí-lo fielmente, mas sim buscar nas fontes (como livros didáticos, diários de classe, cadernos de alunos ou relatos de aula) os vestígios que denotam os caminhos já trilhados pela História da educação matemática (Hem). É nesse movimento que se constroem representações capazes de dialogar com a comunidade e dar sentido à trajetória histórica dessa área do conhecimento.

Afinal, o que realmente queremos dizer quando falamos em História da educação matemática (Hem)? Ou, ainda: como podemos compreender essa área, que une o passado da Educação com o ensino da Matemática?

Para Barros (2005), entre as várias modalidades da História que se desenvolveram no século XX

(...) algumas primam pela riqueza de possibilidades que abrem aos historiadores, que as praticam, por vezes, com perspectivas antagônicas entre si. A História Cultural - campo historiográfico que se torna mais preciso e evidente a partir das últimas décadas do século XX, mas que tem claros antecedentes desde o início do mesmo século - é particularmente rica no sentido de abrigar no seu seio diferentes possibilidades de tratamento (Barros, 2005, p. 126).

Ou seja, Barros (2005) destaca que, ao longo deste século, diversas formas de fazer história foram se consolidando, cada uma com suas particularidades. Entre elas, a História Cultural se apresenta como um campo especialmente fértil, justamente por acolher diferentes abordagens. Mesmo que os historiadores que a praticam adotem por vezes perspectivas bastante distintas/opostas, a diversidade nas abordagens pode ser vista como uma riqueza, e não como um problema.

Para elaborar uma representação na área da HEM, é importante que um tema seja transformado em um problema de pesquisa. Nesse sentido, de acordo com Valente (2021), ao transformar um tema em problema, a pesquisa deixa de ser apenas uma busca por dados ou informações e passa a se tornar uma investigação que permite avançar na compreensão do passado.

Booth, Colomb e Williams (2008) explicam que um problema de pesquisa nasce de uma lacuna no conhecimento ou de uma compreensão ainda insuficiente sobre determinado assunto. Embora possa surgir a necessidade de resolver uma questão prática, sua resolução não se limita a transformar a realidade, mas sim a aprofundar a compreensão teórica sobre o tema investigado. Assim, o valor de um problema de pesquisa está menos na aplicação imediata e mais na construção de saberes que ampliem o entendimento sobre determinado campo do conhecimento.

A problematização, nesse contexto, é um movimento de questionamentos que possibilita ao pesquisador revisitar o passado na tentativa de reconstruir narrativas. É justamente por meio desse exercício que se torna possível dar novos significados às fontes históricas e, conseqüentemente, ampliar o conhecimento produzido sobre a HEM (Valente, 2021).

Valente (2014) destaca que a HEM possui uma especificidade própria dentro do campo historiográfico. Segundo o autor, a produção de conhecimento nessa área não deve estar subordinada a finalidades didáticas ou a uma lógica de instrumentalização do ensino, ou seja, em vez de servir como ferramenta pedagógica, o estudo da HEM busca afirmar a História como campo autônomo de conhecimento, com métodos e objetivos próprios, voltados à compreensão dos processos educativos em sua complexidade e historicidade.

Cabe destacar ainda que, para estudar a HEM, é fundamental usar os métodos e conceitos próprios da História, como fazem os historiadores. Segundo Valente (2014), abordagens vindas apenas da História da Matemática, da Didática ou de reflexões filosóficas não são suficientes para compreender adequadamente o passado educativo da matemática, seja ele distante ou mais recente. Ainda na perspectiva do autor, a construção desse percurso investigativo demanda um olhar atento às fontes e aos contextos históricos, permitindo que se compreendam como determinados saberes matemáticos foram ensinados, apropriados e ressignificados ao longo do tempo.

Ao observar vestígios do passado da Educação Matemática como os livros didáticos, é possível perceber traços da cultura escolar. Cada escola carrega sua própria dinâmica, e cabe ao pesquisador se abrir para compreendê-la em seu cotidiano. Segundo Julia (2001), a cultura escolar pode ser compreendida como um conjunto de normas que orienta tanto os saberes a serem ensinados quanto os comportamentos a serem transmitidos, além de englobar as práticas responsáveis por viabilizar essa transmissão e assimilação no ambiente escolar.

Para Julia (2001), a cultura escolar

(...) não pode ser estudada sem a análise precisa das relações conflituosas ou pacíficas que ela mantém, a cada período de sua história, com o conjunto das culturas que lhe são contemporâneas: cultura religiosa, cultura política ou cultura popular. Para ser breve, poder-se-ia descrever a cultura escolar como um conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos; normas e práticas coordenadas a finalidades que podem variar segundo as épocas (finalidades religiosas, sociopolíticas ou simplesmente de socialização) (Julia, 2001, p. 10).

A cultura escolar é a forma como a escola organiza o que se ensina e como se ensina, incluindo também os comportamentos que valoriza. Ela muda com o tempo porque está sempre ligada ao que acontece na sociedade, seja na política, na religião ou nos costumes. Por isso, entender a cultura escolar exige olhar também para o contexto histórico em que ela está inserida.

Para Valente (2008, p. 143) “investigar como ocorreram essas transformações implicará investigar a própria História da educação matemática”, pois essas transformações não ocorrem de forma isolada. Elas fazem parte de um processo histórico, ligado a contextos sociais, culturais, políticos e científicos. O autor também coloca que os livros didáticos estão profundamente ligados à Educação Matemática, e investigar as mudanças neles contidas é, também, uma forma de compreender a própria história dessa educação, reconhecendo os livros como fontes históricas, pois os livros didáticos e a Educação Matemática são indissociáveis.

Choppin (2004) corrobora ao afirmar que

A tendência mais evidente das pesquisas desenvolvidas nos últimos vinte anos é a da extensão do campo de investigação e, nesse sentido, ocorre a diversificação das problemáticas e a multiplicação dos agentes. O livro didático, como observou Chris Stray, em 1993, é um produto cultural complexo... [que] se situa no cruzamento da cultura, da pedagogia, da produção editorial e da sociedade (Choppin, 2004, p. 563).

Segundo Choppin (2004), o livro didático pode ser compreendido como uma expressão do currículo, funcionando como uma tradução fiel dos programas de ensino, se configurando como o principal suporte dos conteúdos escolares, preservando e transmitindo os saberes considerados essenciais por determinada sociedade. Ainda de acordo com o autor, o livro didático exerce uma função instrumental ao propor métodos de aprendizagem e atividades que visam facilitar a assimilação de conhecimentos e o desenvolvimento de competências, sejam elas específicas de uma disciplina ou de natureza mais ampla.

Choppin (2004) também aponta que o livro didático possui uma importante função ideológica e cultural, sobretudo a partir do século XIX, quando passou a ser utilizado como ferramenta de afirmação da identidade nacional e de difusão dos valores dominantes.

O autor destaca a função documental do livro didático, a qual se relaciona à sua capacidade de apresentar textos e imagens que, por si só, podem estimular o pensamento crítico dos alunos. Essa função, segundo Choppin (2004), está ligada a práticas pedagógicas mais recentes e reflexivas, que valorizam a autonomia do aluno e exigem um elevado nível de formação docente.

No tocante à obra apresentada, buscou-se também mostrar elementos que poderiam justificar o uso do material estudado no ambiente escolar, considerando que o ensino de matemática revela-se como o processo de passagem do campo disciplinar matemático para o meio escolar e que parte da premissa de que o papel da escola é o da transmissão dos saberes do campo disciplinar (Valente, 2023).

Conforme discutem Bertini e Valente (2021) no trabalho “Problemas Aritméticos como Elementos da Matemática do Ensino”, há processos e dinâmicas que se estabelecem entre uma Matemática a ensinar e uma Matemática para ensinar²¹, os quais, articulados, compõem a Matemática do ensino. Logo, a Matemática do ensino “distingue-se daquela representante do campo disciplinar matemático. Liga-se à formação de professores e ao ensino” (Bertini; Valente, 2021, p. 231).

Segundo Valente (2023), a passagem dos saberes matemáticos produzidos no campo disciplinar para o contexto escolar implica um processo de organização desses conhecimentos, de modo a torná-los ensináveis aos estudantes. Nesse movimento, o autor ressalta que há diferenças de nível entre a matemática acadêmica (Ensino Superior), e aquela destinada à Educação Básica, a qual se apresenta de forma elementar com as etapas de escolarização.

Neste sentido, pode-se perceber que a obra estudada nesta pesquisa vai além das questões levantadas e envolvidas no ensino. De acordo com Bertini e Valente (2021), a elaboração das categorias matemática a ensinar e matemática para ensinar, como objeto e ferramenta de trabalho docente, considera que a Matemática não permanece invariável diante das práticas do trabalho docente e que se transforma ao longo do tempo.

Eis que, a partir dessas categorias e da existência de uma cultura escolar construída historicamente – com suas práticas e normas –, torna-se evidente que é possível sistematizar a matemática do ensino pelos rastros do passado que permanecem no presente. Um caminho para

²¹ A matemática a ensinar corresponde aos conhecimentos provenientes do campo disciplinar que devem compor a formação dos estudantes (saberes da academia), enquanto a matemática para ensinar diz respeito a um saber profissional, historicamente elaborado, que integra a formação específica do professor e orienta sua prática docente (Valente, 2019).

dar continuidade às investigações com esse objetivo é considerar os elementos estruturantes da matemática do ensino, sendo um deles a graduação (Valente, 2023). O que vem primeiro? O que se aprende primeiro? Antes isto ou aquilo? O autor explica que essa organização pode ser compreendida em diferentes escalas, isto é, em modos de pensar a distribuição dos conteúdos ao longo da escolarização, considerando, em nível macro, a sequência histórica: aritmética-geometria-álgebra.

Neste estudo, queremos olhar para a obra *Arithmetica Elementar - livro I* (1919), de Georg August Büchler, buscando identificar atividades que envolvem os conhecimentos de cálculo mental e contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Estudar as práticas da educação matemática de outros tempos, interrogando o que delas nos foi deixado, pode significar fazer perguntas aos livros didáticos de matemática utilizados em cotidianos passados (Valente, 2006).

Os livros didáticos representam um dos traços que o passado nos deixou, os quais podem ser interrogados e podem permitir a construção de uma História da educação matemática (Valente, 2006). A partir dessa contextualização histórica, apresentamos o inventário sobre Georg August Büchler – não apenas para sistematizar os dados sobre sua trajetória e a produção da coleção, mas principalmente para compreender de que maneira a obra *Arithmetica Elementar - livro I* (1919) foi apropriada e colocada em prática no contexto escolar.

2.1 INVENTÁRIO DE PESQUISAS SOBRE GEORG AUGUST BÜCHLER

Ao buscar evidências de trabalhos produzidos ao longo do tempo sobre Georg August Büchler, sob as mais diversas perspectivas – incluindo a HEM –, sentimos a necessidade de catalogá-los por meio de um inventário.

Apresentamos um inventário priorizando, sempre que possível e de acordo com as necessidades vigentes deste estudo, a abordagem metodológica adotada por cada autor e as implicações decorrentes dessa escolha. Ainda assim, buscamos oferecer uma visão geral de cada pesquisa, situando o leitor em seu respectivo contexto.

Para isso, realizamos diversas pesquisas bibliográficas, a fim de identificar pistas de utilização de sua obra, discutir questões sobre o uso metodológico e teórico da época, bem como analisar as diversas nuances que podem ser encontradas e estabelecidas, tanto para este estudo quanto para pesquisas futuras.

Para este inventário, escolhemos utilizar o Google Acadêmico pela sua acessibilidade, abrangência e praticidade na busca por dados relevantes. Como plataforma gratuita, ele reúne artigos, teses e publicações de diversas bases, garantindo um amplo acesso ao conhecimento sem a necessidade de múltiplos cadastros. Além disso, sua interface intuitiva e filtros facilitam a busca por materiais relevantes, permitindo uma seleção criteriosa das fontes e garantindo a qualidade da investigação.

Para responder à nossa questão de pesquisa, iniciamos com uma busca preliminar para identificar as palavras-chave mais relevantes para o estudo. Consideramos os termos “Georg August Büchler”, “George Augusto Büchler”, “Büchler” e “Buchler”, pois estão diretamente ligados ao nosso objeto de investigação e ajudam a localizar os trabalhos mais pertinentes. Definimos como critérios gerais a busca exclusivamente em Português, incluindo apenas publicações com citações, excluindo patentes e sem delimitação temporal. Detalhes adicionais sobre os critérios adotados são apresentados no QUADRO 4.

QUADRO 4 – Resultados obtidos no Google Acadêmico

Base	Palavras-chave	Especificações	Res.
Google Acadêmico	(Georg August Büchler)	Idioma: Apenas publicações em Português.	53
	(George Augusto Büchler)	Citações: Inclusão de trabalhos que apenas mencionam as palavras-chave com aprofundamento no tema. Patentes: Não serão consideradas, uma vez que o foco está em pesquisas acadêmicas. Campo de Pesquisa: A busca será realizada em qualquer parte que apareça o termo. Período: Sem limite temporal, permitindo a identificação tanto de estudos clássicos quanto de pesquisas mais recentes. Formato da Busca: As palavras-chave foram inseridas entre parênteses, sem o uso de operadores booleanos (como AND, OR, NOT), respeitando as diretrizes específicas.	28
	Büchler		71
	Buchler		83
	Total de trabalhos encontrados		235

FONTE: Elaborado pelo autor (2025).

A partir dos resultados obtidos em todas as buscas, foi realizada a unificação das produções, garantindo que apenas uma versão de cada trabalho fosse mantida. Em seguida, o processo de seleção foi conduzido em duas etapas.

Na primeira, analisou-se o título, o resumo e as palavras-chave, adotando como critério de inclusão os trabalhos que apresentavam relação direta ou indireta com o autor pesquisado.

Na segunda etapa, foi realizada uma nova leitura das publicações para identificar contextos que pudessem indicar potencialidades de pesquisa sobre ou a partir do autor.

Como resultado, identificamos um total de 22 trabalhos, distribuídos da seguinte forma: 02 (duas) publicações em anais de eventos, 10 (dez) artigos, 04 (quatro) dissertações, 05 (cinco) teses e um livro (Germanidade e matemática escolar no sul do Brasil (Silva, 2024) – composto por 3 artigos publicados anteriormente e que não consta no inventário). A distribuição por ano de publicação pode ser observada no Quadro 5.

QUADRO 5 – Referências bibliográficas encontradas na base de dados

	Ano	Autor(es)	Título	Tipo de Publicação
1.	1991	João Klug	Consciência germânica e luteranismo na comunidade alemã de Florianópolis (1868-1938)	Dissertação
2.	2004	Rosinéte Gaertner	A Matemática Escolar em Blumenau (SC) no período de 1889 a 1968: da Neue Deutsche Schule à Fundação Universidade Regional de Blumenau	Tese
3.	2009	José Marcelo Freitas de Luna	A Escola Nova Alemã de Blumenau e o seu Programa de Português	Artigo
4.	2010	David Antonio da Costa	A Aritmética Escolar no Ensino Primário Brasileiro: 1890-1946	Tese
5.	2015	Márcio Oliveira D’Esquivel	O ensino de Desenho e Geometria para a escola primária na Bahia (1835-1925)	Dissertação
6.	2016	André Francisco de Almeida	Apropriação de tabuadas no ensino de aritmética da escola primária paranaense: 1903-1932	Dissertação
7.	2016	Circe Mary Silva da Silva Dynnikov	Representações de aritmética no livro de Georg Büchler	Artigo
8.	2017	Circe Mary Silva da Silva	Imagens nos livros didáticos de matemática: Georg Augusto Büchler e Karl Sölter	Artigo
9.	2017	Marcus Aldenison de Oliveira	A Aritmética Escolar e o Método Intuitivo: Um novo saber para o curso primário (1870-1920)	Tese
10.	2017	Ricardo Motta Telo	As comissões avaliadoras de livros didáticos entre 1938 e 1971 no Brasil	Dissertação
11.	2017	Heloisa Hernandez de Fontes Salvador	A condução do ensino das operações aritméticas nas séries iniciais: do tradicional ao intuitivo	Tese
12.	2018	Deoclecia de Andrade Trindade	As artes de medir: saberes matemáticos no ensino primário de São Paulo, 1890-1950	Tese
13.	2018	Rosa Lydia Teixeira Corrêa, Roberto João Eissler, Denilson Roberto Schena	A ideia de pátria nos livros didáticos Aritmética Elementar - Livro 1 e Nossa Pátria	Artigo
14.	2019	Circe Mary Silva da Silva	Aritmômetros e seus usos no Brasil nos séculos XIX e XX	Artigo
15.	2019	Roberto João Eissler, Priscila Juliana da Silva	Diálogos entre Arithmetica Elementar de Georg August Büchler e o método intuitivo de Pestalozzi	Artigo

16.	2019	Maria Célia Leme da Silva	O ensino de número na escola primária: transformações lidas em manuais didáticos (1888-1965)	Artigo
17.	2020	Karina Cristina dos Santos Pavarin	Problemas de aritmética em tempos de Aritmética Intuitiva: uma análise em livros didáticos (1890-1930)	Dissertação
18.	2020	Circe Mary Silva da Silva	Georg August Büchler: um adepto do ensino intuitivo no Brasil	Anais
19.	2021	Cleber Schaefer Barbaresco, David Antonio da Costa	Os métodos de ensino das escolas de aprendizes artífices	Artigo
20.	2021(a)	Denise Medina França, Késia Ramires Neves, Edilene Simões Costa dos Santos	SABERES PROFISSIONAIS DA DOCÊNCIA: como introduzir as frações em tempos da pedagogia intuitiva	Anais
21.	2021(b)	Denise Medina França, Késia Ramires, Edilene Simões Costa dos Santos	Büchler (1921, 1923): saberes de referência para ensinar frações	Artigo
22.	2022	Karina Pavarin	Os problemas de aritmética nos livros didáticos: finalidades de uso (1890-1920)	Artigo

FONTE: Elaborado pelo autor (2025).

Com os trabalhos identificados, avançamos para uma análise mais aprofundada e detalhada. Nosso objetivo foi compreender não apenas a quantidade das produções, mas também a forma como esses estudos dialogavam com o autor pesquisado e suas possíveis contribuições para o campo da HEM.

Para isso, procedeu-se à leitura dos textos, buscando compreender objetivos e resultados, como eles foram referenciados, debatidos e incorporados em diferentes contextos acadêmicos. Também foram analisadas as metodologias empregadas, almejando compreender os caminhos escolhidos pelos pesquisadores para desenvolver seus estudos. Além disso, foi dada uma atenção especial aos objetos de pesquisa abordados, observando se havia recorrências temáticas ou lacunas ainda não exploradas, que possivelmente poderiam corroborar a pesquisa.

O aprofundamento do inventário permitiu uma visão mais fidedigna do impacto das produções e de como elas contribuem para a construção do conhecimento na área da HEM, possibilitando reflexões sobre futuras investigações e diálogos acadêmicos que podem ser estabelecidos a partir dessas publicações.

Klug (1991) investigou a relação entre germanidade e confessionalidade luterana em Florianópolis, destacando o papel da igreja como pilar de sustentação da identidade germânica entre os imigrantes alemães em Santa Catarina. A pesquisa considera a distribuição geográfica da imigração, o associativismo e os impactos dos repatriamentos, além da apologia e das críticas

direcionadas aos imigrantes germânicos. O estudo enfatiza a colônia alemã luterana na capital e arredores, onde se desenvolveram as manifestações etnoculturais dessa comunidade.

No recorte temporal de 1868 a 1938, Klug (1991) destaca a Escola Alemã como elemento central da identidade cultural dos luteranos em Florianópolis. O primeiro registro encontrado sobre essa instituição data de 1868, contudo, a partir de 1932 há menções a dificuldades financeiras enfrentadas pela comunidade, levando à separação administrativa entre igreja e escola. Até então, o pastor também acumulava a função de diretor da instituição.

A pesquisa apontou que, naquele contexto, Georg August Büchler assumiu a direção da escola, tornando-se o primeiro diretor que não era pastor. Apesar disso, o clérigo ainda mantinha uma posição de impacto. Klug (1991) não identifica documentos que esclareçam as razões dessa separação, mas ressalta que a mudança representou uma transição na organização educacional da comunidade luterana, possivelmente impactando a estrutura e o funcionamento da escola.

Adiante, no estudo de Gaertner (2004), a história da educação e do ensino de Matemática na região de Blumenau (SC) é investigada, com ênfase no papel das escolas de colonização alemã entre 1889 e 1968. Por meio da História Oral e da análise de documentos, a autora resgata informações sobre as instituições escolares e seus professores, proporcionando um panorama detalhado do contexto educacional da época.

Dentre os documentos analisados, um relatório de 1910, elaborado por Georg August Büchler enquanto atuava como diretor interino da Escola Nova Alemã, se destaca por ser o único redigido em português, exceto pelos programas de idiomas. Nos relatórios da escola entre 1912 e 1913, Büchler aparece também como professor das disciplinas de aritmética, matemática, álgebra e geometria, destacando sua atuação na formação matemática dos alunos da instituição (Gaertner, 2004).

Apesar da importância de Büchler para a educação na região, há escassez de registros sobre sua trajetória. Segundo Gaertner (2004), as informações sobre ele e outros professores da Escola Alemã foram perdidas, restando apenas fragmentos preservados na memória de ex-alunos. A destruição de documentos durante a Segunda Guerra Mundial dificultou a reconstrução de sua trajetória docente, reforçando a relevância dos testemunhos orais como fonte de pesquisa.

Outros elementos sugeridos sobre Büchler são elencados também no trabalho de Luna (2009), que investigou a história da Escola Nova Alemã de Blumenau, com ênfase na estrutura curricular e no ensino de português para imigrantes e descendentes de alemães. A pesquisa,

baseada em fontes primárias coletadas no Brasil e na Europa, aponta que, ao contrário das políticas de nacionalização da época, o ensino da língua portuguesa já fazia parte do sistema escolar teuto-brasileiro.

Dentre os registros analisados, destacam-se informações sobre Georg August Büchler, que iniciou suas atividades docentes na instituição em 1905, enviado pela Associação Escolar Alemã. Em Blumenau, ele participou da produção de materiais didáticos e revistas especializadas voltadas para a Escola Alemã, contribuindo significativamente para a organização do ensino na comunidade (Luna, 2009).

O primeiro relatório sobre as atividades da Escola, datado de 1910, apresenta detalhes sobre sua estrutura, incluindo matrículas, distribuição de aulas e organização curricular. Além das disciplinas matemáticas que já lecionava, Büchler também foi responsável pelo ensino de Caligrafia e História do Brasil, ampliando sua atuação na instituição. A partir de 1914, um livro de sua autoria passou a ser adotado como material didático, e os relatórios escolares passaram a registrar de forma mais detalhada as abordagens teórico-metodológicas utilizadas no ensino (Luna, 2009). Mesmo não sendo possível destacar qual livro foi usado, esses registros reforçam a relevância de Büchler na formação educacional da comunidade germânica em Blumenau, expondo sua participação tanto na prática docente quanto na elaboração de conteúdos pedagógicos para a Escola Alemã (Luna, 2009).

Costa (2010), em sua tese sobre a trajetória da aritmética no curso primário brasileiro, o autor analisa as transformações ocorridas no ensino do conceito de número entre 1890 e 1946, destacando a presença da obra *Arithmetica Elementar* - Livro I (4ª Edição, 1923), de Georg August Büchler, como um exemplo representativo desse processo histórico.

Ainda segundo Costa (2010), o conceito de número em Büchler está associado à observação de fatos numéricos vinculados às quantidades, sendo os objetos concretos do cotidiano infantil utilizados como elementos motivadores para a compreensão das relações numéricas, ou seja, uma maneira para compreender o conceito de número. O autor observa que o Livro I, com suas ilustrações e textos, reflete a prática das lições de coisas ao promover a aprendizagem a partir da observação dos elementos naturais, enquanto os Livros II e III se distanciam parcialmente dessa abordagem, concentrando-se nas formalizações e nas operações aritméticas como formas abreviadas da contagem.

Traços da utilização da obra de Büchler são encontrados no estudo de D'Esquivel (2015), que investiga a escolarização dos conhecimentos de Desenho e Geometria na Bahia

entre 1835 e 1925. A pesquisa analisou o processo de constituição desses saberes no ensino primário, considerando suas transformações ao longo do tempo.

Uma das constatações do estudo é a ausência de indicação de materiais didáticos específicos para o ensino de Geometria no período. No entanto, o Diário Oficial de 12 de dezembro de 1926 lista a obra *Arithmetica Elementar*, de Büchler, como referência para o ensino primário, sem menção a livros voltados para Desenho ou Geometria. Esse é mais um registro que sinalizou a marcante atuação de Büchler no contexto educacional, sendo seu material reconhecido oficialmente como recurso didático (D'Esquivel, 2015).

A pesquisa aponta que a institucionalização do ensino de Desenho e Geometria na Bahia ocorreu de forma gradual, com avanços e retrocessos ao longo das reformas educacionais. O significado atribuído a esses saberes pela escola permaneceu em constante transformação, refletindo mudanças nas políticas educacionais e na organização curricular. Nesse cenário, a presença da obra de Büchler na lista oficial de materiais didáticos sugere seu impacto no ensino da matemática no período (D'Esquivel, 2015).

Adiante, nos deparamos com o trabalho de Almeida (2016), que investigou como as tabuadas foram apropriadas em livros didáticos de Aritmética nas primeiras décadas do século XX, utilizando a História Cultural e a História das disciplinas escolares como referenciais teóricos. Entre as obras analisadas, *Arithmetica Elementar* (1919), de Georg August Büchler, destacou-se pela ampla repercussão no ensino primário da época.

No início do século XX, o uso da tabuada era amplamente recomendado nos programas escolares e valorizado por autores de livros didáticos, sendo considerado essencial para o desenvolvimento da rapidez nos cálculos aritméticos. A obra de Büchler foi um dos materiais didáticos que contribuíram para essa abordagem, ganhando reconhecimento editorial e impactando a prática docente no ensino primário (Almeida, 2016).

A análise das edições de 1919 mostrou que Büchler construiu o conceito de tabuada por meio de histórias que remetiam ao cotidiano do período, apresentando as lições de forma contextualizada. Essa estratégia buscava não apenas ensinar a multiplicação dos números, mas também proporcionar uma compreensão mais aprofundada do processo, diferenciando-se das abordagens tradicionais que priorizam a mera memorização (Almeida, 2016).

Os resultados do estudo indicam que a abordagem de Büchler representou um avanço em relação às práticas anteriores, alinhando-se a métodos intuitivos que renovaram o ensino de Aritmética. Sua obra contribuiu para uma mudança na forma como a tabuada era ensinada,

incentivando a compreensão do raciocínio matemático em vez da simples repetição mecânica dos cálculos (Almeida, 2016).

Em seguida, Dynnikov (2016) analisa a obra *Arithmetica Elementar*, de Georg August Büchler, publicada inicialmente em 1919 pela Editora Melhoramentos, em São Paulo, com o objetivo de identificar as representações de aritmética presentes nos livros destinados ao ensino primário. A autora destaca que a escolha desse material é representativa de uma transposição da pedagogia alemã para o contexto brasileiro, especialmente pela ênfase no método intuitivo de inspiração pestalozziana. Nesse sentido, Büchler é compreendido como um agente cultural responsável por promover a transferência de saberes matemáticos elementares da Alemanha para o Brasil no início do século XX.

No ano seguinte, a mesma autora, Silva (2017)²² analisou, sob a perspectiva da História Cultural, o uso de imagens em livros didáticos de matemática escritos por Georg August Büchler, cuja primeira obra foi publicada em 1919 e voltada aos alunos de grupos escolares e instituições germano-brasileiras. De acordo com a autora, as imagens inseridas nas obras, elaboradas com base no método intuitivo, cumprem uma função essencialmente didática, embora também apresentem traços ideológicos. Ao incorporar essas ilustrações, a autora procurou tornar os livros mais atrativos para as crianças, aproximando o conteúdo da experiência infantil e rompendo com a abstração excessiva, criticada por Pestalozzi. Os conteúdos matemáticos presentes nos materiais concentram-se em noções elementares da aritmética, em diálogo direto com o cotidiano escolar e familiar das crianças.

No estudo realizado por Oliveira (2017), o objetivo foi compreender como a Aritmética escolar se constituiu como um novo saber no curso primário, a partir das transformações promovidas pela pedagogia moderna, fortemente impactada pelos avanços da psicologia e da fisiologia. A investigação concentrou-se no período de 1870 a 1920, destacando o legado do ensino intuitivo na reconfiguração dos saberes aritméticos.

Com esse objetivo em vista, Oliveira (2017)

“tomou-se também para análise o livro Aritmética elementar (livro I), na 2ª edição de 1924, com autoria de George Augusto Büchler. Por que escolher esse livro? Por três razões: 1ª) porque à época da circulação desse livro seu autor era visto como um “especialista do ativo e brilhante mundo pedagógico de São Paulo” (Jornal do Comércio, 1923, p. 2); 2ª) porque no período de luta contra o analfabetismo o autor da Aritmética elementar apresentou uma solução para o problema máximo da época -

²² Nome em citações bibliográficas de acordo com o currículo lattes e/ou periódico: Silva, C. M.S.; SILVA, CIRCE MARY SILVA DA; SILVA, CIRCE MARY SILVA; Da Silva, Circe Mary Silva; Dynnikov, Circe Mary Silva da Silva.

a extinção do analfabetismo no país; 3ª) porque não é novidade que esse livro difundia nas suas páginas uma proposta de ensino intuitivo. Em síntese: trata-se de um livro com uma proposta de ensino intuitivo da Aritmética, o qual foi produzido e difundido na república iletrada do Brasil das décadas iniciais dos Novecentos” (Oliveira, 2017, p. 2017).

O autor identificou que a finalidade atribuída à escola primária teve papel central na forma como os saberes aritméticos foram concebidos: quando a instrução visava preparar indivíduos para o trabalho prático, os conteúdos eram utilitários e essenciais; por outro lado, quando a meta era fornecer uma base ampla de conhecimentos, os saberes assumiram caráter mais científico.

Telo (2017) investigou como os livros didáticos de Matemática participaram dos processos de regulamentação educacional no Brasil entre 1938 e 1971. O estudo teve como objetivo principal compreender o papel dessas obras, incluindo as de Georg August Büchler, dentro das políticas públicas, a partir do Decreto-Lei nº 1.006/38, que criou a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD) e definiu normas para produção, importação e uso desses materiais em todo o país.

A pesquisa destacou não apenas a atuação da comissão federal, mas também as iniciativas paralelas desenvolvidas no Rio de Janeiro e em São Paulo, sinalizando os critérios adotados para avaliação dos livros, os conflitos que surgiram nesse processo, os nomes envolvidos nas comissões e os resultados práticos, refletidos nas listas de obras aprovadas, como iremos apresentar posteriormente (Telo, 2017).

Salvador (2017) analisou a trajetória da Aritmética como saber escolar no curso primário brasileiro, destacando especialmente o período entre a segunda metade do século XIX e a terceira década do século XX. A autora identifica a coexistência de duas formas distintas de condução do ensino das operações fundamentais: uma de caráter tradicional, centrada na memorização da tabuada, na repetição de algoritmos e em exercícios pouco conectados à realidade dos alunos; e outra que incorpora princípios do método intuitivo, valorizando a observação, a experimentação, o uso de ilustrações e a construção gradual dos conceitos a partir da experiência concreta. Os livros didáticos (incluindo a obra *Arithmetica Elementar*, de Georg August Büchler) são tomados como fontes principais da investigação, conduzida a partir dos referenciais da História Cultural.

Trindade (2018) investigou o ensino do saber *medidas* nas orientações curriculares paulistas entre 1890 e 1950, buscando compreender suas finalidades e formas de mobilização nas propostas escolares. A pesquisa, fundamentada na História Cultural e na História das disciplinas escolares, analisou programas de ensino, manuais e revistas pedagógicas da época.

No *corpus* de fontes analisado por Trindade (2018), entre cinco coleções de obras sobre Aritmética que foram investigadas, uma é de autoria de Georg August Büchler. Ao tratar os manuais escolares como produtos culturais que respondem estrategicamente às prescrições dos textos oficiais, a autora propõe refletir sobre as formas de apropriação das orientações curriculares por parte desses materiais, em especial, os que incorporaram as mobilizações e finalidades do ensino de medidas previstas nos programas de Aritmética.

Leme da Silva (2019) propôs uma reflexão sobre o saber número como conteúdo recorrente na escola primária brasileira, analisando sua transformação ao longo do tempo por meio de quatro manuais escolares, entre eles, a obra de Büchler (1943). A autora mobiliza os conceitos de *saberes a ensinar* e *saberes para ensinar*, com o objetivo de aprofundar os estudos já desenvolvidos no GHEMAT e contribuir para a construção de objetos teóricos no campo da História da educação matemática. Ao analisar a obra de Büchler (1943), a autora identifica uma ruptura importante: a ausência de definições matemáticas explícitas nos conteúdos apresentados mostra um distanciamento em relação a uma das marcas tradicionais do campo disciplinar da Matemática.

Corrêa, Eissler e Schena (2018) analisaram como a ideia de pátria foi construída em livros didáticos utilizados nas escolas primárias brasileiras durante a Primeira República. A partir de reflexões desenvolvidas em um grupo de pesquisa voltado às disciplinas escolares, os autores aproximam diferentes objetos de estudo que têm em comum o uso de livros como fonte, entre eles a *Aritmética Elementar* - Livro I (1919), de Georg August Büchler. Na obra de Büchler não há referência direta a feitos históricos nacionais nem à origem alemã do autor. Em vez disso, ele utiliza a figura de uma família fictícia (os Motta) para apresentar noções aritméticas por meio de histórias com lições morais. Nessa narrativa, valores como trabalho, esforço e disciplina aparecem como pilares para a construção simbólica da nação, ensinados de forma sutil e integrada aos conteúdos escolares.

Silva (2019) analisou o processo de transferência cultural por meio da circulação de ideias e artefatos pedagógicos entre países, tomando como foco o uso do “contador”, ferramenta didática descrita no livro *Arithmetica Elementar* de Georg August Büchler, publicado em 1919. A autora destaca que Büchler utilizou o livro didático como meio para justificar a importância do contador no ensino do sistema decimal, fruto de sua formação em uma escola normal germânica, que lhe proporcionou contato com diferentes recursos didáticos. Embora a investigação não tenha confirmado o uso efetivo do contador nas escolas primárias brasileiras, sinaliza-se uma apropriação de aparatos pedagógicos de origem germânica. Nesse sentido,

obras como a de Büchler, ao apresentar a aritmética sob uma ótica inovadora, ampliam o debate sobre o papel do livro didático na história do ensino da aritmética no Brasil.

Eissler e Silva (2019) analisam a obra *Arithmetica Elementar* de Georg August Büchler, publicada em 1919, com o objetivo de identificar a presença dos princípios e fundamentos do método intuitivo de Pestalozzi, em que suas “experiências como educador, o processo de ensino-aprendizagem parte do mundo conhecido da criança possibilitando sua expressão e que, a partir da observação desse mundo, o raciocínio por meio da linguagem vai se estruturando” (Eissler; Silva, 2019, p. 514).

A pesquisa mostra que a estrutura do livro, a seleção dos conteúdos e a metodologia adotada apresentam uma recontextualização desses princípios, em que as lições são construídas com base em histórias e experiências do universo infantil, incorporando materiais concretos e estratégias que vão além das prescrições oficiais da época. A abordagem de Büchler, ao articular número, forma e palavra, reflete os fundamentos da pedagogia pestalozziana (Eissler; Silva, 2019).

Pavarin (2020), com base na História Cultural, analisa o uso de problemas de aritmética no contexto do método intuitivo, aprofundando uma discussão iniciada por Oliveira (2017) sobre a constituição da Aritmética Intuitiva como novo saber escolar. A autora examina cinco livros didáticos destacados por Oliveira, entre eles a *Arithmetica Elementar* de Büchler, edição de 1923. Destaca-se que essa obra apresenta textos explicativos mais longos do que os demais livros analisados, com os problemas de aritmética surgindo somente após a introdução conceitual.

Em outro trabalho, Silva (2020) analisou a obra *Arithmetica Elementar* de Georg August Büchler, publicada em 1919, como um exemplo significativo da transposição da pedagogia alemã para o contexto brasileiro, com ênfase no método intuitivo. A autora destaca que Büchler atuou como um agente cultural, responsável por transferir saberes matemáticos elementares da Alemanha para o Brasil no início do século XX. A formação de Büchler no Seminário de Professores de Bensheim/Alemanha, marcada pelos estudos, como de Pestalozzi, perceptível já no volume 1 da obra, ascendeu diretamente sua obra. Além do valor pedagógico, Silva (2020) sugere que a publicação dos livros pode ter representado uma forma de subsistência para Büchler em solo brasileiro.

Barbaresco e Costa (2021) investigaram os métodos de ensino utilizados nas Escolas de Aprendizes Artífices, com base na categoria “saberes para ensinar”, buscando marcas de uma metodologia própria à instituição. A análise de documentos normativos e relatórios

ministeriais permitiu identificar elementos que orientavam a prática docente como instrumentos de ensino. No contexto da pesquisa, os autores também buscaram evidências sobre o uso da obra *Arithmetica Elementar* - Livro I (1919), de Georg August Büchler, entendendo que essas práticas contribuem para consolidar um repertório de saberes pedagógicos voltados à formação profissional.

Outras pesquisas também dialogavam sobre o método intuitivo. De acordo com França, Neves e Santos (2021a; 2021b), buscou-se ilustrar e discutir aspectos históricos do ensino das frações no contexto da pedagogia intuitiva, ressaltando como as propostas didáticas daquele período refletiam um ideal de formação voltado à observação e à compreensão concreta dos conceitos numéricos. Para as autoras, os saberes para ensinar frações se articulam ao método intuitivo, valorizando o uso de ilustrações e situações do cotidiano como recursos para favorecer a percepção das partes do inteiro e a resolução de problemas, tal como se observa na obra de Büchler.

Em sua dissertação, Pavarin (2022) baseia-se na perspectiva da História Cultural para discutir o uso de problemas de aritmética no contexto do método intuitivo, denotando que os livros didáticos analisados apontam traços característicos da Aritmética Intuitiva. Segundo a autora, tais manuais apresentavam os problemas aritméticos com a finalidade de instruir e aplicar os conteúdos ensinados, entre eles a *Arithmetica Elementar* - livro II (1923), de Georg August Büchler. Nesta obra, observa-se a presença de textos explicativos mais extensos que os encontrados em outros manuais do mesmo período, sendo os problemas propostos após a exposição dos conteúdos, o que reforça o caráter didático e reflexivo da proposta de ensino.

Os trabalhos reunidos sobre o personagem Georg August Büchler formam um percurso histórico que vai muito além da simples descrição de sua produção, derivada das ideias pedagógicas de origem europeia e materializada na construção dos livros didáticos. É um emaranhado cheio de significados para o campo da Educação Matemática, bem como para os estudos da História da educação matemática, uma vez que as ideias presentes nesses trabalhos podem representar uma forte atuação nas práticas escolares desde as primeiras décadas do século XX.

Nos primeiros estudos, como os de Klug (1991), Gaertner (2004) e Luna (2009), a figura de Büchler aparece ligada à história das comunidades alemãs e luteranas no sul do Brasil, mostrando que o modelo de educação funcionava como um instrumento de preservação da identidade cultural dos imigrantes.

A partir de Costa (2010) e de autores como Almeida (2016), Dynnikov (2016) e Oliveira (2017), o foco desloca-se para o conteúdo propriamente pedagógico, e por vezes, matemático. Esses estudos analisam as concepções de número, tabuada e método intuitivo presentes na *Arithmetica Elementar*, destacando como Büchler traduziu em linguagem didática os princípios herdados de Pestalozzi, buscando por meio de histórias e exemplos cotidianos, aproximar o aprendizado matemático da realidade das crianças.

Outros trabalhos, como os de Telo (2017), Salvador (2017) e Trindade (2018), inserem a obra de Büchler no contexto das políticas educacionais e da regulamentação dos livros didáticos no Brasil. Eles mostram que a obra *Arithmetica Elementar* não circulou apenas nas escolas germano-brasileiras, mas também foi reconhecida oficialmente em listas e relatórios de órgãos públicos, o que mostrou sua ampla aceitação e permanência.

Nas pesquisas mais recentes como as de Leme da Silva (2019), Eissler e Silva (2019), Pavarin (2020; 2022), Silva (2020) e França, Neves e Santos (2021), o olhar dos pesquisadores se torna ainda mais direcionado para o nosso campo de pesquisa. As pesquisas exploram o livro, tecendo ideias sobre as imagens, os problemas propostos, os instrumentos de contagem e as estratégias de ensino, ou seja, o livro é visto como um artefato cultural, e não apenas como um livro escolar.

Tal levantamento permitiu, além de formular questionamentos, adentrar na obra *Arithmetica Elementar* - Livro I (1919), de Georg August Büchler, com o propósito de identificar atividades aritméticas que envolvam os conhecimentos de cálculo mental e o pensamento algébrico, de modo a auxiliar no processo de ensino da álgebra por meio da aritmética. Para essa busca, é necessária uma compreensão acerca dos conhecimentos de cálculo mental, bem como os elementos que compõem os conhecimentos algébricos que serão propostos no capítulo seguinte.

3 CÁLCULO MENTAL E AS PROPRIEDADES ALGÉBRICAS

Neste capítulo, buscamos mostrar de que maneira o cálculo mental e as propriedades algébricas se articulam com as atividades de aritmética da obra mencionada. Para isso, apresenta-se, em um primeiro momento, os conhecimentos do cálculo mental, com destaque para pesquisas recentes na área da História da educação matemática. Em seguida, discutimos o pensamento algébrico e as propriedades que o sustentam, bem como suas relações com a aritmética. Essa discussão serve de base para construir uma análise da que forma com que todos esses conhecimentos aparecem e são mobilizados em atividades na obra *Arithmetica Elementar* - Livro I (1919), de Georg August Büchler no capítulo posterior.

3.1 CÁLCULO MENTAL

A concepção de cálculo mental tem sido abordada ao longo da história em diversas fontes, desde livros didáticos e manuais pedagógicos até artigos científicos e documentos oficiais. Essa temática reflete a preocupação de professores e pesquisadores em compreender as estratégias e os conhecimentos que podem ser utilizados pelos alunos para realizar operações matemáticas.

O cálculo mental tem sido objeto de pesquisa no campo da História da educação matemática, especialmente em suas aplicações e questionamentos voltados para a Educação Básica. Seu estudo está relacionado à compreensão de como os alunos desenvolvem estratégias e aplicam esses conhecimentos para resolver operações matemáticas sem o uso de papel, lápis e/ou calculadoras.

Na pesquisa *Cálculo mental no ensino primário (1950-1970) - um olhar particular para o Paraná*, de Berticelli (2017), o cálculo mental, como proposto, era utilizado como ferramenta pedagógica no ensino e na resolução de problemas matemáticos. Segundo a pesquisadora, seu objetivo era auxiliar na contextualização e compreensão das operações, buscando atribuir sentido e significado à Matemática. O cálculo mental vai além de um procedimento mecânico realizado pelo aluno, pois envolve raciocínio, criatividade e flexibilidade na manipulação das operações (Berticelli, 2017), desempenhando, portanto, um papel fundamental no desenvolvimento do pensamento matemático.

As estratégias utilizadas no cálculo mental estão diretamente ligadas às memórias construídas pelos alunos. Nesse sentido, conforme apontam Berticelli e Zancan (2024), é necessário considerar que

A possibilidade de várias combinações entre estratégias faz com que cada indivíduo escolha aquela que lhe for mais conveniente, a partir dos sentidos e significados dos números por ele estabelecidos. A escolha de diferentes estratégias está relacionada às memórias, tornando o cálculo mental algo particular (Berticelli; Zancan, 2024, p. 9).

A investigação e os questionamentos relacionados a esse tema permitem compreender os múltiplos e amplos significados atribuídos ao cálculo mental ao longo do tempo, bem como seu impacto na formação do pensamento matemático dos alunos. Diferentes abordagens foram sendo incorporadas e pesquisadas, buscando não apenas potencializar a rapidez nos cálculos, mas também favorecer a compreensão de outros conceitos matemáticos.

De acordo com Berticelli e Zancan (2024), os conhecimentos essenciais para o cálculo mental de adições podem ser organizados em quatro categorias principais: Fatos Básicos, Decomposição, Dobros e Rede de Relações Numéricas do 10 (RRN do 10).

QUADRO 6 – Definição dos conhecimentos necessários ao cálculo mental

Categoria	Definição e Exemplos
Fatos Básicos	Operações de adição ou subtração cujo resultado não ultrapassa a dezena mais próxima, alterando apenas a unidade das parcelas. Exemplos: $5+3$, $7+2$, $14+5$, $21+8$, $32+7$.
Decomposição	Memorização de todas as possíveis decomposições dos números menores que 10. Exemplos: $2=1+1$; $3=1+2$; $4=1+3=2+2$; $5=1+4=2+3$; $6=1+5=2+4=3+3$; $7=1+6=2+5=3+4$; $8=1+7=2+6=3+5=4+4$; $9=1+8=2+7=3+6=4+5$.
Dobros	Memorização dos dobros dos números de 1 a 20 e suas operações inversas. Exemplos: $7+7=14$ e $14-7=7$; $12+12=24$ e $24-12=12$; $15+15=30$ e $30-15=15$.
Rede de Relações Numéricas do 10 (RRN do 10)	Conhecimentos que envolvem o 10 nas parcelas ou no resultado, bem como os múltiplos de 10. Exemplos: $10=1+9=2+8=3+7=4+6=5+5$; $10-1=9$, $10-2=8$, $10-7=3$; $10+1=11$, $10+2=12$, $10+3=13$; $10=11-1=12-2=13-3=14-4$; $20+1=21$, $20+2=22$, $20+3=23$; $20=21-1=22-2=23-3=24-4$; $11+10=21$, $10+15=25$, $30+14=44$; $13-10=3$, $25-10=15$.

FONTE: Adaptado de Berticelli e Zancan (2024, p. 6).

Apropriando-se dos conhecimentos acima descritos, o indivíduo pode realizar cálculos mentais, pois, a partir deles, em conjunto com propriedades numéricas, é possível elaborar estratégias e obter resultados de operações de adição sem recorrer a algoritmos ou contagem, possibilitando maior agilidade e completude do pensamento algébrico. Por exemplo, para realizar a operação $6+7$, pode-se recorrer a diferentes estratégias, que são ancoradas nos conhecimentos básicos expostos no quadro. A operação $6+7$ pode ser feita como $6+6+1$ em que o 7 foi decomposto em $6+1$, e utilizou-se uma memória de dobros do $6+6$. Pode ser resolvido

também como $7+7-1$, utilizando a memória de dobros do 7 e pensando no 6 como $7-1$. Outra forma é passando pelo 10, e resolvendo $6+4+3$ ou $7+3+3$. Em todos os exemplos, utilizamos os conhecimentos essenciais de cálculo mental que constam no quadro. Segundo Berticelli e Zancan (2024), a utilização de estratégias favorece a memorização de determinados resultados, permitindo a construção de novos conhecimentos e contribuindo para o desenvolvimento de novas abordagens para o cálculo mental. Conforme destacado pelas autoras, esse processo estabelece um movimento cíclico entre conhecimentos e estratégias, aprimorando o senso numérico e a flexibilidade com os números. A repetição contínua desse mecanismo fortalece as memórias matemáticas, consolidando o aprendizado e tornando as operações cada vez mais automáticas e eficientes.

As autoras apresentam sugestões de atividades para a construção dos conhecimentos de cálculo mental, indicando atividades que primam pela flexibilidade quanto à forma de apresentação das adições. Afirmam que, em geral, as adições são apresentadas da forma $a+b=$ ____ . Elas propõem que a mesma adição $a+b=c$, seja trabalhada alternadamente entre doze possibilidades diferentes, mudando o “local da pergunta”, conforme apresentado no Quadro 7:

QUADRO 7 – Local da pergunta

$a + b = \text{ ____ }$	$a + \text{ ____ } = c$	$c = \text{ ____ } + b$
$b + a = \text{ ____ }$	$\text{ ____ } + a = c$	$c = b + \text{ ____ }$
$\text{ ____ } = a + b$	$b + \text{ ____ } = c$	$c = a + \text{ ____ }$
$\text{ ____ } = b + a$	$\text{ ____ } + b = c$	$c = \text{ ____ } + a$

FONTE: Berticelli e Zancan (2024, p. 7).

As autoras afirmam que essa variação na apresentação da mesma operação é o ponto fundamental que permite exercitar a flexibilidade do estudante com os números, de modo que ele se familiariza aos poucos com as diferentes apresentações. Deste modo, a operação $6+4=$ ____ pode ser explorada como $\text{ ____ }=6+4$, $10=\text{ ____ }+4$, $10=6+\text{ ____ }$. Para as autoras, “esta abordagem influencia fortemente no entendimento da álgebra, quando o aluno entende a equação $10=x+4$ como equivalente a $x+4=10$ ” (Berticelli; Zancan, 2024, p. 7).

Outra sugestão das autoras no ensino dos conhecimentos de cálculo mental, é quanto ao grau de dificuldade das atividades, que deve apresentar-se de forma gradativa (Berticelli; Zancan, 2024). No Quadro 08, apresentam-se as sugestões das autoras quanto à gradatividade dos números nas atividades que abordam estes conhecimentos.

QUADRO 8 – Gradatividade dos números nas atividades

Fatos Básicos		
Tarefas com números de 1 a 10	Tarefas com números menores do que 20	Tarefas com números até 40
1+7= 3+4= 7+2= 8+1= 3+5= 5+4= 2+3=	11+7= 13+4= 17+2= 18+1= 13+5= 15+4= 12+3=	11+__=18 13+__=17 17+__=19 __+3=18 __+13=18 3+__=18 13+__=18
Decomposição		
4= __ + __ 4= __ + __ 5= __ + __ 5= __ + __ 7= __ + __ 7= __ + __ 7= __ + __	5=2+__ 7=__+3 7=2+__ 8=__+5 9=5+__ 9=__+4 9=3+__	__+__=4 __+__=4 __+__=5 __+__=5 __+__=6 __+__=6 __+__=6
Memória de dobros		
4+4 5+5= 6+6= 7+7= 8+8= 9+9=	11+11= 12+12= 13+13= 15+15= 14=7+__ 16=__+8 18=9+__	15+15= 16+16= 17+17= 18+18= 32=__+__ 34=__+__ 36=__+__
RRN10		
4+6= 3+7= 2+8= 10=__+__ 10=__+__ 10=__+__ 10=__+__	14+6= 13+7= 12+8= 18+10= 18+20= 10+8= 20+8=	15=10+__ 16=10+__ 10+__=18 20+__=28 __+9=19 __+9=29 __+19=29

FONTE: Adaptado de Berticelli e Zancan (2024, p. 8).

Pelos exemplos do quadro, é possível notar que os números aumentam de forma gradativa e, ao mesmo tempo, a posição da pergunta varia. Para as autoras, essa gradatividade é fundamental na construção dos conhecimentos e dos padrões numéricos, presentes no ensino de aritmética e de álgebra. Elas defendem a ideia de que, ao aprender que $3+4=7$, esse conhecimento leva a construção de outros elementos derivados, como mostra o Quadro 09.

QUADRO 9 – Ensinando padrões numéricos

3+ 4= 7 13+4=17 23+4=27 33+4=37	3+ 4= 7 3+14=17 3+24=27 3+34=37	3+4=7 7=3+4 7-4=3 7-3=4	3+4=7 30+40=70 300+400=700 3000+4000=7000
---	---	---	---

FONTE: Elaborado pelo autor (2025).

Para as autoras essa compreensão é fundamental para a construção dos conhecimentos de cálculo mental e, posteriormente, para a elaboração de uma estratégia. Estes conhecimentos de cálculo mental preparam o pensamento para questões algébricas, como será visto a seguir.

3.2 PROPRIEDADES ALGÉBRICAS

A álgebra é uma construção do ser humano, e surgiu para atender às necessidades práticas do dia a dia. Por isso, está presente em muitos aspectos da nossa vida cotidiana, mesmo que nem sempre a percebamos.

A partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, é possível notar de forma mais explícita a questão do pensamento algébrico desde os primeiros anos escolares no Brasil. Mas nem sempre foi assim.

No Quadro 10 são destacados alguns documentos que fazem referência ao que hoje denominamos pensamento algébrico, sendo que o percurso histórico das diretrizes curriculares mostra uma continuidade de intenções que culmina na formulação atual da BNCC.

QUADRO 10 – Documentos curriculares oficiais

Documento	Ano	Citação ao pensamento algébrico, e/ou álgebra, e/ou aritmética
Base Nacional Comum Curricular (Ensino Fundamental)	2017	“O pensamento algébrico deve ser desenvolvido desde os anos iniciais, por meio do reconhecimento, da generalização e do estabelecimento de relações entre regularidades e padrões.” (Brasil, 2017, p. 267)
Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática	1997	“A introdução à Álgebra não deve se restringir à manipulação de letras, mas ao desenvolvimento do pensamento algébrico desde o início da escolaridade, em situações que envolvam generalizações e regularidades.” (Brasil, 1997, p. 47)
Guia Curricular de Matemática – 1º grau do Estado de São Paulo	1975	“A Álgebra deve ser compreendida como uma extensão da Aritmética e como instrumento para a generalização das operações e resolução de problemas.” (São Paulo, 1975, p. 82)
Programa de Ensino Primário do Ministério da Educação	1951	“Deve-se insistir na resolução de problemas práticos e na verificação de relações entre quantidades, preparando o raciocínio necessário aos estudos de Álgebra.” (Brasil, 1951, p. 32)
Programas do Ensino Primário do Estado do Paraná	1932	“O ensino da Aritmética deve levar o aluno à compreensão de relações numéricas, sem recorrer ao cálculo mecânico, mas por meio da observação e do raciocínio.” (Paraná, 1932, p. 16)
Código do Ensino do Paraná (Decreto nº 17)	1917	“A Álgebra será ministrada juntamente com a Aritmética.” (Paraná, 1917, Art. 55, §6º)
Programas do Ensino Primário do Estado de São Paulo	1894	“A Aritmética deve ser ensinada de modo intuitivo, conduzindo a criança a descobrir as relações entre os números, preparando o espírito para o raciocínio lógico e algébrico.” (São Paulo, 1894, p. 22)

FONTE: Elaborado pelo autor (2025).

Por meio desses documentos, é possível perceber que a Álgebra no Brasil aparece por volta do início do século XX vinculada ao ensino de Aritmética. Antes disso, o programa

referia-se somente à Aritmética. Em meados do século XX, a Álgebra vincula-se à resolução de problemas; logo em seguida, é compreendida como uma extensão da Aritmética; e, no final do século XX, começa a ser associada à ideia de generalizações e regularidades. Atualmente, pode-se observar o pensamento algébrico relacionando-se com regularidades e padrões, como será apontado posteriormente. Nessa perspectiva, é possível observar um movimento de compreensão da finalidade do ensino de Álgebra, que em alguns momentos está mais próximo da Aritmética. Embora alguns documentos não mencionam explicitamente o termo “álgebra”, isso não significa ausência de elementos relacionados ao pensamento algébrico, como podemos ver de acordo com o Quadro 10.

Neste âmbito, diversos pesquisadores ressaltam a importância de inserir a álgebra nos currículos escolares desde os primeiros anos de escolarização. Kieran *et al.* (2016) destacam que esse contato inicial com a álgebra ajuda a preparar os alunos para estudos mais avançados na área, além de contribuir para o desenvolvimento de hábitos próprios da prática matemática, como a identificação de estruturas e a expressão de regularidades.

Para Kaput (1998; 1999), o pensamento algébrico manifesta-se quando o sujeito, ao lidar com dados e relações matemáticas, formula conjecturas e argumentos que o conduzem à elaboração de generalizações progressivamente mais formais. Tais generalizações podem surgir a partir de contextos aritméticos.

No âmbito do pensamento algébrico, o interesse perpassa dos números e objetos isolados para as relações que estabelecem entre si. Por isso, é importante que os alunos aprendam a representar essas relações e a raciocinar de forma abstrata. Ainda para estes autores, um elemento igualmente central ao pensamento algébrico é a ideia de generalização:

[...] descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos. Ou seja, no pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objetos, mas principalmente às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover este raciocínio é o estudo de regularidades num dado conjunto de objetos (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 10).

Para Canavarro (2007), a introdução do pensamento algébrico nos anos iniciais pode contribuir para uma abordagem mais integrada e envolvente da Matemática, favorecendo a construção do conhecimento com compreensão. A autora argumenta que a inserção de conhecimentos do pensamento algébrico desde cedo pode ajudar os alunos a desenvolverem uma postura mais positiva diante da disciplina, reconhecendo sua unidade, valor e potencial,

além de promover uma preparação mais sólida para as aprendizagens futuras, especialmente no campo da álgebra.

A mesma autora reforça ainda que a Álgebra pode ser construída com base na estrutura da Aritmética, desde que haja uma mudança no foco da análise:

É a partir da estrutura da Aritmética que se podem construir os aspectos sintáticos da álgebra, o que implica analisar as expressões aritméticas não em termos do valor numérico obtido através do cálculo, mas em termos da sua forma (por exemplo, concluir que $33 + 8 = 8 + 33$ não porque ambos constituem 41, mas porque na adição a ordem das parcelas é indiferente) (Canavarro, 2007, p. 89).

Canavarro (2007) enfatiza que o conceito de pensamento algébrico difere significativamente da concepção tradicional de álgebra que predominou no ensino escolar por décadas no Brasil, como apontado nos documentos curriculares dos mais variados períodos. Segundo a autora, essa visão tradicional tende a reduzir a álgebra à manipulação de símbolos e à aplicação mecânica de regras operatórias, muitas vezes sem a devida compreensão.

Para Ponte, Branco e Matos (2009), uma das dimensões do pensamento algébrico envolve a habilidade de utilizar diferentes formas de representação, especialmente as de natureza simbólica. Destaca-se, aqui, a importância de relacionar objetos matemáticos e generalizar propriedades, pois a partir da resolução de problemas envereda-se para as representações algébricas.

Alguns pesquisadores defendem a superação da separação entre aritmética e álgebra, ressaltando que essas áreas estão profundamente interligadas, como afirmam Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2018):

Tradicionalmente, os currículos dispõem os conteúdos matemáticos iniciando por aqueles referentes à Aritmética (o trabalho com o sistema de numeração decimal e as quatro operações básicas) para, somente em seguida, abordar de forma sistemática os elementos algébricos. Imbuídos de dados que evidenciam que os alunos não precisam aprender primeiramente Aritmética para, só depois, aprender Álgebra, alguns autores vêm questionando essa separação entre Álgebra e Aritmética, apregoando que existe uma relação intrínseca entre esses dois domínios da Matemática (Ferreira; Ribeiro; Ribeiro; 2018, p. 55).

Nos anos iniciais, o principal objetivo do trabalho com a Álgebra é promover o desenvolvimento do pensamento algébrico. Blanton e Kaput (2005) definem esse tipo de pensamento como um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas, expressando essas generalizações por meio da argumentação e por modelos que tendem a se tornar progressivamente mais formais. Neste sentido, para Ponte, Branco e Matos (2009, p. 13),

“existe, também, um movimento no sentido de promover uma iniciação ao pensamento algébrico desde os 1.º e 2.º ciclos²³, preparando o terreno para as aprendizagens posteriores”.

O pensamento algébrico vai além da simples manipulação de números e equações. Ele se manifesta como uma forma poderosa de pensar e resolver problemas, presente em diversos campos do conhecimento. Para isso, apoiamo-nos em Fiorentini, Miorim e Miguel (2016, p. 88), que afirmam que “não existe uma única forma de se expressar o pensamento algébrico”.

Para eles, o pensamento algébrico

pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica (Fiorentini; Miorim; Miguel; 2016, p. 88).

Assim, o ser humano pode se comunicar de diversas maneiras: a) linguagem natural: é o meio usual de comunicação, por meio da fala e da escrita; b) linguagem aritmética: trata-se da linguagem dos números e das operações matemáticas; c) linguagem geométrica: usada para descrever e compreender formas, tamanhos e posições no espaço; e d) linguagem algébrica: uma linguagem específica para resolver problemas matemáticos de forma simbólica, utilizando letras e símbolos para representar números e operações.

Canavarro (2007) destaca a importância de trabalhar com diferentes linguagens no ensino da Matemática, não apenas o uso de letras, mas também a construção de significados que ajudem os alunos a compreender o fazer matemático de maneira mais ampla. Já Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) chamam a atenção para os modos de raciocínio que os alunos desenvolvem ao longo de sua aprendizagem, apontando que nem todo tipo de operacionalização realizada por eles se encaixa necessariamente no que se entende como pensamento algébrico.

Ponte, Branco e Matos (2009, p. 10) destacam que “aprender álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação”. Assim, reduzir a álgebra à simples manipulação de símbolos é deixar de lado toda a sua riqueza e complexidade. Para caracterizar o pensamento algébrico, os autores apontam três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas, como indicado no Quadro 11.

²³ 1º ciclo: do 1º ao 4º ano de escolaridade - crianças de aproximadamente 6 a 10 anos. No Brasil representa os alunos do 1º ao 4º/5º ano.

2º ciclo: do 5º ao 6º ano de escolaridade - alunos de aproximadamente 10 a 12 anos. No Brasil, representa os alunos de 5º e 6º anos.

QUADRO 11 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico

Representar	▪ Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; ▪ Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; ▪ Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	▪ Relacionar (em particular, analisar propriedades); ▪ Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; ▪ Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	▪ Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

FONTE: Ponte, Branco e Matos (2009, p. 11).

Partindo da apresentação dos conhecimentos de cálculo mental e do pensamento algébrico, surgem algumas questões, como: de que maneira a aritmética está conectada com a álgebra? Os conhecimentos algébricos podem ser trabalhados por meio da aritmética? Nosso intuito é tentar responder a esses questionamentos por meio da análise de documentos associada à nossa fonte histórica.

Sabe-se que a álgebra compõe um dos ramos da Matemática. Na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) vigente atualmente, a álgebra constitui-se como uma das Unidades Temáticas, junto com Números, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística. O documento aponta como finalidade da álgebra

[...] o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento - o pensamento algébrico - que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas e de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (Brasil, 2018, p. 270).

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), às finalidades do ensino de álgebra foram sofrendo algumas modificações. De uma Álgebra voltada para o ensino exclusivo de expressões e equações passou para uma álgebra em que as relações matemáticas abstratas podem ser representadas por outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos. Para alguns autores, a álgebra trata de um conjunto de regras de transformações de expressões e processos de resoluções de equações do 1º e 2º grau e de sistemas de equações. Para outros o objeto central da álgebra são os símbolos, de modo que neste campo a Matemática se define por uma linguagem própria, por meio de símbolos e expressões algébricas.

Kaput (1999) tem defendido uma visão da álgebra, delimitando o que deve ser ensinado na escola básica e secundária, de modo que seus estudos sinalizam a relevância de caracterizar o pensamento algébrico. Para este autor,

[...] o pensamento algébrico é algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático leccionado desde os primeiros anos de escolaridade (Kaput, 1999 *apud* Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 9).

Kaput (1999) sinaliza um caminho de estudos que nos leva a compreender a articulação entre o ensino de aritmética e álgebra, auxiliando-nos a responder nossos questionamentos que visam identificar conhecimentos algébricos no ensino de aritmética, ou melhor, identificar conhecimentos algébricos em atividades que mobilizam os conhecimentos essenciais de cálculo mental. Kaput (1999) identificou cinco facetas do pensamento algébrico, das quais destacamos uma que se relaciona diretamente com a Aritmética: “a generalização e formalização de padrões e restrições”. Para ele, essa faceta, juntamente com “a manipulação de formalismos guiada sintaticamente”, constituem os “aspectos nucleares” do ensino de álgebra, por meio do simbolismo e da generalização.

De modo geral, estamos interessados na parte da álgebra que se dedica a levar o estudante à compreensão de padrões, relações e funções, pois entendemos que esses conhecimentos podem ser ensinados no ensino básico, por meio da aritmética. De acordo com a BNCC, algumas dimensões do trabalho com a álgebra podem estar presentes desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, por meio das ideias de regularidades, generalizações de padrões e propriedades da igualdade, porém sem o uso de letras. Como sugestão indicam atividades que levem os alunos a reconhecer que se $2 + 3 = 5$ e $5 = 4 + 1$, então $2 + 3 = 4 + 1$, bem como atividades aritméticas que mobilizam conhecimentos como fatos básicos, que podem contribuir para a compreensão de conhecimentos algébricos.

Thorndike (1922) promoveu uma aproximação entre esses dois ramos da matemática, na obra *The Psychology of Arithmetic*, ao versar sobre “a forma da equação”, em que

a forma da equação com uma quantidade desconhecida a ser determinada, ou um número faltante a ser encontrado, deve ser conectada com o seu significado e com a atitude do problema muito antes de um aluno começar a álgebra e nas

mentes dos alunos que nunca estudarão álgebra (Thorndike, 1922, p. 77, *tradução nossa*)²⁴.

Para ele era fundamental relacionar a álgebra com a aritmética por meio de atividades como a do exemplo:

Escreva os números faltantes:

$$4+8=\underline{\quad}$$

$$5+\underline{\quad}=14$$

$$\underline{\quad}+3=11$$

$$\underline{\quad}=5+2$$

$$16=7+\underline{\quad}$$

$$12=\underline{\quad}+5$$

(Thorndike, 1922, p. 77, *tradução nossa*)²⁵

Segundo o autor, ao compreender essas diferentes formas de apresentar uma equação, em que a posição do número faltante varia conforme a citação acima, o aluno pode expandir esse conhecimento para a compreensão de símbolos como parênteses e sinais de frações. Essa é uma excelente contribuição que a aritmética poderia oferecer para a álgebra.

Ponte, Matos e Branco (2009) propõem atividades semelhantes na construção das relações numéricas em termos de desenvolvimento do pensamento algébrico:

²⁴ “The equation form with an unknown quantity to be determined, or a missing number to be found, should be connected with its meaning and with the problem attitude long before a pupil begins algebra, and in the minds of pupils who never will study algebra.”

²⁵ “Write the missing numbers:

$$4+8=\underline{\quad}$$

$$5+\underline{\quad}=14$$

$$\underline{\quad}+3=11$$

$$\underline{\quad}=5+2$$

$$16=7+\underline{\quad}$$

$$12=\underline{\quad}+15”$$

FIGURA 6 – Atividade para trabalhar relações numéricas

4.2.1. Relações numéricas	
<i>Exemplo 1 – Igualdade de expressões numéricas.</i> Os alunos devem trabalhar sequências de expressões numéricas com o intuito de encontrarem relações numéricas, reforçando o significado de equivalência do sinal de igual. Eis diversas expressões numéricas que se podem propor:	
$11 + \square = 26$	$\square = 15 + 11$
$11 + 15 = \square + 11$	$11 + \square = 11 + 15$
$11 + 15 = 12 + \square$	$14 + \square = 11 + 15$
$11 + 15 = \square + 16$	$\square + 12 = 11 + 15$
$11 + 15 = \square + 17$	$\square + 13 = 11 + 15$

FONTE: Ponte, Matos e Branco (2009, p. 29).

Pode-se observar que atividades semelhantes são propostas com intuítos diferentes: enquanto Thorndike (1922) está propondo construir o pensamento aritmético (a aritmética deveria desenvolver a capacidade de resolver problemas práticos, mas também que o aluno deveria compreender a ideia de “equação”, mesmo que nunca viesse a estudar álgebra formalmente), Ponte, Matos e Branco (2009) estão interessados em desenvolver o pensamento algébrico. Isso nos mostra que aritmética e álgebra têm muito a contribuir uma com a outra.

Outra característica da atividade, além da variação da posição do número faltante são os padrões numéricos que podem ser identificados. Na tarefa de Ponte, Matos e Branco (2009) podemos observar os padrões abaixo.

QUADRO 12 – Atividade padrões numéricos

$11+15=10+16$	$14+12=11+15$
$11+15=9+17$	$13+13=11+15$

FONTE: Ponte, Matos e Branco (2009, p. 29).

Neste tipo de situação, observa-se que, quando um dos números das parcelas diminui, o outro número de parcelas aumenta e isso gera uma generalização na resolução da adição.

Thorndike (1922) também destaca a relevância dos padrões e das generalizações, consideradas elemento essencial no ensino de álgebra. Para ele, em aritmética é fundamental apresentar as operações de adição em que a dezena vai aumentando, segundo um padrão, como no exemplo: “ $16+7=23$, $26+7=33$, $36+7=43$ ” (Thorndike, 1922, p. 75). Esses modelos de atividades vêm ao encontro das atividades propostas por Berticelli e Zancan (2024), que envolvem os conhecimentos de cálculo mental.

A generalização das relações e a observação de padrões são duas características que indicam a relação entre a aritmética e a álgebra. Quando o estudante percebe que, para resolver uma operação, pode mobilizar uma estratégia e que esta estratégia pode ser generalizada para outra situação, está conectando um conhecimento aritmético a um conhecimento algébrico. Por exemplo: para resolver a operação $7+5$ faz $7+3+2$, ou seja, $7+5=7+3+2=10+2=12$. O pensamento utilizado mobilizou a estratégia Ponte pelo 10, que é “passar” pela dezena mais próxima para realizar a operação. O conhecimento pode ser ampliado para qualquer operação, incluindo com números maiores, depois que o processo foi compreendido, como mostrado no Quadro 13.

QUADRO 13 – Atividade ponte pelo 10

$18+6=18+2+4=20+4$	$26+8=26+4+4=30+4=34$	$53+15=53+7+8=60+8=68$	$47+24=47+3+21=50+21=71$
--------------------	-----------------------	------------------------	--------------------------

FONTE: Elaborado pelo autor (2025).

Para identificar na obra de Büchler (1919) as atividades que envolvem conhecimentos de cálculo mental e contribuem para desenvolver o pensamento algébrico, é necessário compreendermos conceitos fundamentais no ensino de álgebra.

Ponte, Branco e Matos (2009) trazem a relevância de levar os alunos a compreenderem que:

QUADRO 14 – Atividade representar o 7

$7=1+6, 7=2+5, 7=3+4, 7=4+3, 7=5+2, 7=6+1.$

FONTE: Ponte, Matos e Branco (2009, p. 20).

Para eles, é importante que os alunos reconheçam diferentes formas de representar o 7 (ou qualquer outro número) por meio de igualdades numéricas. Em termos de conhecimentos de cálculo mental, neste exemplo temos as diferentes decomposições do 7, e esse conhecimento será útil na resolução de uma operação por meio de estratégia de cálculo mental (Berticelli; Zancan, 2024). Por exemplo, para resolver a operação $9+7$ utilizando a Ponte pelo 10, é importante ter conhecimento das diferentes “decomposições do 7” (conhecimento de cálculo mental), ou das diferentes formas de representar o 7 (conhecimento algébrico), e escolher aquela que melhor se encaixa na resolução dessa operação: $9+7=9+1+6=10+6=16$.

Em termos algébricos, perceber que $5+2=7$ indica que se “tivermos um conjunto de 5 elementos e o reunirmos com um conjunto com 2 elementos obtemos um conjunto com 7 elementos” (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 20). Os autores referem-se à “Família do 7”

incluindo nela o $7+0$ e $0+7$. Ao avançar para construções mais complexas, os autores sugerem situações como “ $3+5=0+8=1+7=...$ ” (p. 21). Em termos de conhecimento de cálculo mental, esse tipo de situação põe-se a desenvolver o senso numérico, ao mostrar que é possível trabalhar com os números de forma flexível, ou seja, quebrar e remontar da forma que for conveniente. No exemplo, temos números até 10; porém, ao compreendermos a ideia, podemos utilizar o conhecimento para outras operações, envolvendo números maiores do que 10, como por exemplo:

QUADRO 15 – Atividade que envolve o senso numérico

Diante do problema 21 - 6 perceber que pode resolver o problema fazendo $20 - 5$ pois as operações são equivalentes e a segunda é mais fácil de resolver do que a primeira.

FONTE: Adaptado de Boaler (2018, p. 33).

Utilizar esse meio significa que os alunos têm senso numérico, demonstrando uma compreensão profunda de matemática “focada em dar sentido a números e quantidades” (Boaler, 2018, p. 33).

Progredindo no processo de ensino, Boaler (2018) traz a expressão $8+4=\square+5$. Esse tipo de situação pode ser amplamente trabalhada em atividades aritméticas e, de certa forma, está construindo o pensamento algébrico que será utilizado no futuro, em que o quadrado será substituído por uma letra: $8 + 4 = x + 5$.

Segundo Kaput (2008), existem algumas razões relevantes para repensar e retrabalhar a álgebra na matemática dos anos iniciais. Para resolver o problema da álgebra, devemos atender a quatro objetivos principais, como aponta o autor.

1. Para adicionar um grau de coerência, profundidade e poder normalmente ausente na matemática do ensino fundamental e médio.
2. Melhorar, se não eliminar, o elemento curricular mais pernicioso e alienante da matemática escolar de hoje: cursos de álgebra tardios, abruptos, isolados e superficiais do ensino médio.
3. Democratizar o acesso a ideias poderosas, transformando a álgebra de um motor inadvertido de desigualdade em um motor deliberado de poder matemático.
4. Desenvolver capacidade conceitual e institucional e abrir espaço curricular para a nova matemática do século XXI, desesperadamente necessária no nível secundário, espaço bloqueado pelo currículo do ensino médio do século XIX, atualmente em vigor (Kaput, 2008, p. 6, *tradução nossa*)²⁶.

²⁶ “1. To add a degree of coherence, depth, and power typically missing in K–8 mathematics.

2. To ameliorate, if not eliminate, the most pernicious and alienating curricular element of today’s school mathematics: late, abrupt, isolated, and superficial high school algebra courses.

Entretanto, de acordo Kaput (2008), a solução do problema da álgebra exige uma ampla reestruturação curricular, acompanhada de transformações nas práticas de sala de aula, nos processos avaliativos e na formação docente. Essas mudanças, entretanto, precisam ocorrer considerando as limitações de tempo, recursos, materiais didáticos em uso e a própria capacidade do corpo docente em formação e em serviço (Kaput, 2008).

Ponte, Branco e Matos (2009) destacam que o desenvolvimento do sentido de número pode ser favorecido por atividades que explorem diferentes relações numéricas, permitindo aos alunos identificar e generalizar regularidades. Para os autores, esse processo contribui diretamente para a formação do pensamento algébrico. Entre os exemplos, incluem-se: relações inversas entre operações, como em $39 - 17 = 22$, pois $39 = 22 + 17$; relações de compensação, como $31 + 9 = 30 + 10$ ou $39 - 17 = 40 - 18$; processos de composição e decomposição, como $23 + 11 + 9 = 23 + 20$, $39 - 17 = 39 - 10 - 7$ ou $17 - 8 = 17 - 10 + 2$.

Os autores reforçam que o professor deve incentivar os alunos a justificar essas relações, analisar padrões, buscar contraexemplos e verificar sua validade para quaisquer números. Já nos anos iniciais, o trabalho com relações como “o dobro de” e “a metade de” também auxilia na elaboração de estratégias de cálculo mental e na compreensão da tabuada.

Segundo Kaput (2008), o problema da álgebra, ao considerar a questão do pensamento algébrico, passou a ganhar destaque em pesquisas desenvolvidas ao longo de várias décadas, com o foco, nos anos 1980, voltado principalmente para os erros e limitações da aprendizagem dos alunos. Assim, para compreender o problema da álgebra e construir caminhos de solução que já incluam os anos iniciais do ensino fundamental torna-se importante definir “ ‘álgebra’ e ‘raciocínio algébrico’, especialmente como um objeto de pensamento nos anos iniciais do ensino fundamental” (Kaput, 2008, p. 8, *tradução nossa*)²⁷.

Para Kaput (2008), existem várias maneiras de pensar sobre álgebra. Há aqueles que pensam em álgebra como raciocínio e há outros que pensam a álgebra apenas como uma disciplina. Para o primeiro, consideram as maneiras como os alunos fazem, pensam e falam sobre matemática, ou seja, é uma atividade humana e que depende desses humanos para existir. Para o segundo, a álgebra é herdada e sentem-se confortáveis falando sobre ela sem pensar em

3. To democratize access to powerful ideas by transforming algebra from an inadvertent engine of inequity to a deliberate engine of mathematical power.

4. To build conceptual and institutional capacity and open curricular space for new 21st-century mathematics desperately needed at the secondary level, space locked up by the 19th-century high school curriculum now in place.”

²⁷ “‘algebra’ and ‘algebraic reasoning,’ especially as an object of thinking in the elementary grades.”

peessoas. Eles podem recorrer a propriedade da comutatividade da adição, por exemplo, sem precisar explicar sua origem ou como os alunos aprendem (ou deixam de aprender), pois a propriedade é própria da matemática.

Entretanto, para Usiskin (1988), a álgebra não é algo que pode ser definido facilmente, pois a maneira como ela é ensinada na escola possui uma abordagem bastante diferente daquela que é ensinada para alunos de matemática no nível universitário. O autor ainda questiona sobre o contexto do que é uma álgebra escolar, ou seja, aquela que pertence justamente à sala de aula. Para elencar essa situação, o autor traz elementos e define a ideia de variável, questão indispensável no ensino de álgebra, como mostrado a seguir:

1. $A = LW$
2. $40 = 5x$
3. $\sin x = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$
4. $l = n - \left(\frac{1}{n}\right)$
5. $y = kx$

Cada uma dessas expressões possui um significado distinto. Geralmente, chamamos (1) de fórmula; (2) de equação (ou sentença aberta a ser resolvida); (3) de identidade; (4) de propriedade; e (5) de equação de uma função de variação direta (que não precisa ser resolvida) (Usiskin, 1988, p. 9, *tradução nossa*)²⁸.

Para Usiskin (1988), as diferentes denominações das expressões algébricas refletem os variados usos atribuídos à ideia de variável. Assim, em alguns casos, como na fórmula da área $A = LW$, as letras representam grandezas conhecidas (área, comprimento e largura); em outros, como em $40 = 5x$, a variável surge como um desconhecido. Também pode assumir o papel de argumento de uma função (dependendo do contexto), como em $\sin x = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$, ou ainda generalizar um padrão aritmético, como ocorre em $l = n - (1/n)$. Já na equação $y = kx$, além de x ser um argumento de função, y corresponde ao valor e k atua como constante ou parâmetro. Nesse último exemplo é que se destaca, de forma mais clara, a noção de variabilidade, origem do próprio termo variável (Usiskin, 1988).

Em seu trabalho, Kaput (2008) adotou uma perspectiva voltada à simbolização para estruturar as redes de ideias, notações e atividades que são envolvidas na álgebra e no

²⁸ “1. $A = LW$
 2. $40 = 5x$
 3. $\sin x = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$
 4. $l = n - (1/n)$
 5. $y = kx$

Each of these has a different feel. We usually call (1) a formula, (2) an equation (or open sentence) to solve, (3) an identity, (4) a property, and (5) an equation of a function of direct variation (not to be solved).”

pensamento algébrico, pois o campo deste é composto por processos complexos de simbolização que servem para a generalização proposital e ao seu raciocínio.

Segundo Usiskin (1988), muitos alunos acreditam que a variável deve sempre ser representada por uma letra, percepção reforçada por educadores ao tratarem expressões como $3 + x = 7$ e $3 + \Delta = 7$ como exemplos de álgebra, enquanto deixam de reconhecer formas como $3 + ___ = 7$ e $3 + ? = 7$, ainda que estas sejam logicamente equivalentes às primeiras no contexto da busca por uma solução da equação.

Outra questão destacada por Kaput (2008) refere-se à necessidade de descrever a álgebra de modo que respeite sua riqueza e sutileza, reconhecendo que ela não constitui um corpo estático de conhecimento, ou seja,

Ela evolui como um artefato cultural em termos dos sistemas de símbolos que incorpora (mais recentemente devido às tecnologias eletrônicas) e evolui como uma atividade humana à medida que os alunos aprendem e se desenvolvem (Kaput, 2008, p. 9, *tradução nossa*)²⁹.

Para compreender a amplitude do que se entende por álgebra e raciocínio algébrico, Kaput (2008) propõe dois aspectos fundamentais: a álgebra como um sistema de símbolos que expressa generalizações de regularidades e restrições e, ao mesmo tempo, como um conjunto de raciocínios e ações guiados sintaticamente sobre essas generalizações. Esses aspectos manifestam-se em três vertentes que se articulam, abrangendo desde a aritmética generalizada até o estudo de funções e a modelagem matemática. O Quadro 16 organiza esses elementos, ilustrando-os com exemplos práticos que expõem sua presença na matemática.

QUADRO 16 – Aspectos e vertentes da álgebra

Aspectos principais	Vertentes	Explicações / Exemplos
(A) Álgebra como símbolo sistemático de generalizações de regularidades e	1. Álgebra como aritmética generalizada (estruturas e sistemas extraídos da aritmética e raciocínio quantitativo)	- Generalização de operações aritméticas e propriedades: zero, comutatividade, inversas. - Generalização de relações numéricas: a soma de dois números pares é par; três números consecutivos têm soma divisível por 3. - Regularidades em tabuadas e propriedades numéricas: multiplicar por 10 ou 100 acrescenta zeros. - Estratégias de cálculo mental: $18 + 3 = 3 + 18$ (comutatividade); compensar adicionando 1 e depois subtraindo 1. - Expansão do conceito de equivalência: do “=” como resultado para o “≡” como equivalência geral.

²⁹ “It evolves as a cultural artifact in terms of the symbol systems it embodies (most recently due to electronic technologies), and it evolves as a human activity as students learn and develop”.

restrições.	2. Álgebra como estudo de funções, relações e variação conjunta	- Generalização por padrões (numéricos ou geométricos): números triangulares, áreas de figuras. - Uso de sistemas de representação: tabelas, gráficos, máquinas de funções. - Comparação de expressões equivalentes: determinar raízes de equações, restrições de funções. - Envolve ideias de linearidade, taxa de variação e mudança.
(B) Álgebra como raciocínio e ações guiadas sintaticamente sobre generalizações expressas em sistemas de símbolos convencionais.	3. Álgebra como linguagem de modelagem	- Modelagem aritmética: resolver restrições numéricas simples como $2x + 5 = 11$. - Modelagem por generalização: uso de variáveis para expressar padrões ou funções em situações dentro ou fora da matemática. - Modelagem ampliada: transformar um problema aritmético específico em situação algébrica mais geral (algebrificar um problema). - Exemplo: generalizar problemas de figuras geométricas ou comparar diferentes modelos matemáticos.

FONTE: Adaptado de Kaput (2008).

Ao finalizar a base teórica que fundamenta os conhecimentos de cálculo mental e o pensamento algébrico, parte-se para a análise das convergências entre estes conhecimentos, a fim de identificar atividades que os mobilizem na obra de Büchler. Na próxima seção apresentamos as características que embasam nossas análises.

3.3 CONHECIMENTOS DE CÁLCULO MENTAL QUE FAVORECEM O PENSAMENTO ALGÉBRICO

A partir dos conhecimentos de cálculo mental e do pensamento algébrico apresentados nas seções anteriores, é possível construir os Quadros 17 e 18:

QUADRO 17 – Conhecimento de cálculo mental e autoras

Conhecimentos de cálculo mental e atividades	Exemplos		Autoras
Fatos básicos	$5+3=$ $7+2=$ $8+1=$	$4+5=$ $14+5=$ $24+5=$	Berticelli e Zancan (2024)
Decomposição	$7=1+6$ $7=2+5$ $7=3+4$ $7=4+3$ $7+5=2$ $7=6+1$	$17=14+3$ $17=15+2$ $17=16+1$ $27=24+3$ $27=25+2$ $27=26+1$	Berticelli e Zancan (2024)
Dobros	$1+1=2$ $2+2=4$ $3+3=6$ $11+11=22$	$7+7=14$ $14-7=7$ $17+17=34$ $34-17=17$	Berticelli e Zancan (2024)

	12+12=24		
Rede de Relações Numéricas do 10 (RRN do 10)	1+9=10 2+8=10 3+7=10 10+3=13 20+3=23	4+6=10 14+6=20 24+6=30 10-3=7 10-7=3	Berticelli e Zancan (2024)
Variação da pergunta	3+5=____ 5+3=____ ____=3+5 ____=5+3 13+5=____ 15+3=____ ____=13+5 ____=15+3	8=3+____ 8=____+5 ____+5=8 3+____=8 18=3+____ 18=____+5 ____+5=18 3+____=18	Berticelli e Zancan (2024)
Padrões Numéricos	3+4= 7 13+4=17 23+4=27 33+4=37 3+ 4= 7 3+14=17 3+24=27 3+34=37	3 + 4= 7 30 + 40= 70 300 +400=700 3+4=7 7-4=3 7-3=4	Berticelli e Zancan (2024)

FONTE: Elaborado pelo autor (2025).

O Quadro 17 apresenta uma síntese dos conhecimentos mobilizados para o ensino de cálculo mental, enquanto o Quadro 18 apresenta os conhecimentos mobilizados para a construção do pensamento algébrico.

QUADRO 18 – Conhecimentos para o pensamento algébrico

Conhecimentos algébricos	Exemplos		Autores
Comutatividade	33+8=8+33		Canavarro (2007)
Senso numérico	2+3=5 5=4+1 2+3=4+1		BNCC (2018)
Senso numérico	31+9=30+10		Boaler (2018)
Número faltante	4+8=____ 5+____=14 ____+3=11 ____=5+2 16=7+____ 12=____+5		Thorndike (1922)
Relações numéricas	11+□=26 11+15=□+11 11+15=12+□ 11+15=□+16 11+15=□+17	□=15+11 11+□=11+15 14+□=11+15 □+12=11+15 □+13=11+15	Ponte, Matos e Branco (2009)
Padrões	16+7=23 26+7=33 36+7=43		Thorndike (1922)

Família de um número	$7=1+6$ $7=2+5$ $7=3+4$	$7=4+3$ $7=5+2$ $7=6+1$	Ponte, Branco e Matos (2009)
Relação inversa	$39-17=22$ pois $39=22+17$		Ponte, Branco e Matos (2009)

FONTE: Elaborado pelo autor (2025).

Analisando os dois quadros, é possível perceber que conhecimentos comuns são tratados com nomes diferentes quando se trata da aritmética ou da álgebra. Por exemplo, os fatos básicos são trabalhados na aritmética e na álgebra são apresentados para trabalhar o senso numérico. Os números faltantes que são trabalhados na álgebra, são também trabalhados na aritmética como a variação da pergunta.

Desta forma, é possível perceber que os conhecimentos algébricos são iniciados no ensino de aritmética, envolvendo os conhecimentos de cálculo mental. São esses conhecimentos que buscaremos identificar na obra de Büchler, uma vez que estes preparam o pensamento algébrico em atividades de aritmética.

4 CONHECIMENTOS DE CÁLCULO MENTAL QUE DESENVOLVEM O PENSAMENTO ALGÉBRICO NAS ATIVIDADES DA OBRA DE BÜCHLER (1919)

No prefácio da obra *Arithmetica Elementar* (1919), de Georg August Büchler, voltada para o ensino primário segundo os programas oficiais, observa-se menção à Pestalozzi, um nome de destaque no ensino de Matemática da época.

Segundo Oliveira e Valdemarin (2022), Pestalozzi tornou-se referência na inovação metodológica para o ensino elementar no século XIX e início do século XX ao estabelecer modelos para o ensino por meio de métodos intuitivos. Segundo os autores,

A intuição foi entendida como a via que estimula o desenvolvimento da criança a partir de suas próprias forças internas, capturando dos objetos exteriores a fonte de todo o conhecimento e despertando a consciências das impressões que eles produzem. Assim, a intuição se tornou o princípio, a base e o meio para a instrução elementar (Oliveira; Valdemarin, 2022, p. 7).

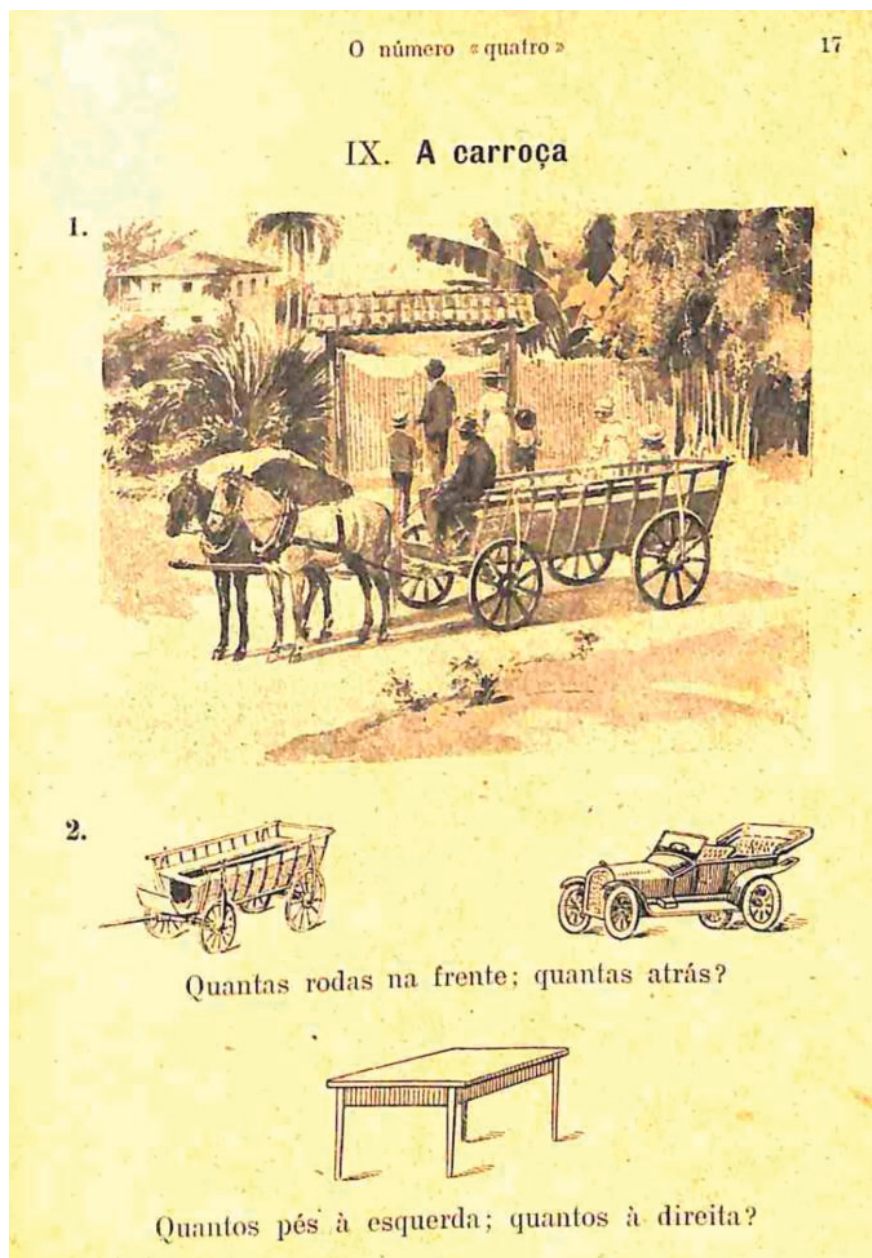
Em termos de ensino, os autores Oliveira e Valdemarin (2022) apontam elementos da aritmética que se encaixavam com a álgebra de acordo com o pensamento de Pestalozzi. Afirmam que, para Pestalozzi a primeira etapa do ensino e do aprendizado da álgebra não ocorreria por meio de fórmulas, dadas por expressões de relações, mas sim por exercícios do ensino intuitivo da aritmética. Por meio dessa graduação, os primeiros elementos da álgebra emergiram das generalizações das relações entre as coisas percebidas intuitivamente, agrupadas à aritmética.

Oliveira e Valdemarin (2022) afirmam que a álgebra de Pestalozzi iniciava por cálculo mental, que conduzia o raciocínio para a solução dos problemas. Por meio do cálculo mental, os alunos eram levados a resolver situações algébricas sem o uso de sinais ou letras em um primeiro momento, de modo que o ensino da álgebra seguia vinculado ao ensino da aritmética e seus primeiros elementos emergiram na solução mental dos problemas. Sem sinais e sem fórmulas, comparava-se uma quantidade conhecida com uma quantidade desconhecida fazendo comparações que resultavam em relações. A graduação era um elemento essencial que assegurava a elevação progressiva da marcha da instrução de um grau para o outro (Oliveira; Valdemarin, 2022).

Podemos notar o método intuitivo na obra de Büchler por meio da Figura 7, que introduz o número 4 mediante uma situação que não envolve símbolos matemáticos, ou seja, sem sinais e sem fórmulas. Assim como aparece com o número 4, toda a obra apresenta essa

mesma característica, de introduzir um conteúdo de forma intuitiva, começando pelo número 1 até chegar no 10. As demais atividades variam de acordo com a graduação em que são submetidas.

FIGURA 7 – Atividade que ilustra o método intuitivo de Pestalozzi



FONTE: Büchler (1943, p. 17).

Na Figura 7, extraída da página 17 do livro, inferimos que o autor está trabalhando com o número 4, de forma intuitiva, sem apresentar sinais ou fórmulas, apenas comparando e contando quantidades que podem formar o número 4, pautado no ensino intuitivo, conforme recomenda Pestalozzi. Percebemos a apresentação do número “quatro” no título, bem como

elementos que o representam: seja a partir da figura do cavalo, seja do carro, seja da carroça. No item dois consta: “Quantas rodas na frente; quantas rodas atrás?” e “Quantos pés à esquerda; quantos à direita?”. Esses são elementos do método pestalozziano em que igualdade se materializa por meio da figura, sem recorrer a sinais e símbolos.

O ensino de álgebra pelo método intuitivo de Pestalozzi seguia a mesma marcha do ensino de aritmética³⁰: intuição das unidades, cálculo mental, cálculo escrito, cálculo mental algébrico, cálculo literal ou álgebra propriamente dita. Para ele, “a marcha seguida no cálculo intuitivo encaminharia o aluno até o cálculo literal, e por isso, aritmética e álgebra poderiam ser trabalhadas conjuntamente” (Oliveira; Valdemarin, 2022, p. 12). O cálculo mental configurou como instrumento nessa relação: por meio dele, as crianças poderiam resolver problemas de primeiro grau, com um ou mais valores desconhecidos, sem a assistência do professor.

A partir dessa reflexão sobre o método de Pestalozzi no ensino de álgebra, buscamos identificar atividades na obra de Büchler que, por meio de conhecimentos de cálculo mental, constroem o pensamento algébrico.

Büchler (1919) versa sobre as dificuldades do ensino de matemática em comparação com outras matérias, como leitura e geografia. Aponta que o “defeito” está nos métodos adotados, e que neste livro, o que irá nortear a aprendizagem da aritmética são princípios baseados em ideias de pedagogos e sua própria experiência de magistério.

Para ilustrar os conhecimentos aritméticos e algébricos mobilizados por meio das atividades, vamos apresentá-los de acordo com sete categorias que emergiram de nossas análises aos conhecimentos de cálculo mental e do pensamento algébrico: 1) Atividades que envolvem o método intuitivo de Pestalozzi; 2) Atividades que envolvem fatos básicos e relacionam a adição e subtração; 3) Atividades que envolvem a decomposição de um número ou a família do número; 4) Atividades exploram o número faltante por meio da variação da pergunta; 5) Atividades que exploram o senso numérico; 6) Atividades que exploram a rede de relações numéricas do 10; e 7) Atividades que exploram padrões numéricos.

A seguir, temos atividades que envolvem o método intuitivo e as ideias de Pestalozzi, em que a igualdade se materializa por meio da imagem. Essa é uma das várias situações que são trazidas no livro que não envolvem símbolos e sinais matemáticos.

³⁰ Jullien (1812b) defende que a noção de número se forma pela observação concreta de objetos, nos quais a criança percebe a relação entre quantidade e valor numérico. A ideia aparece citada em Oliveira e Valdemarin (2022).

4.1 ATIVIDADES QUE ENVOLVEM O MÉTODO INTUITIVO DE PESTALOZZI

O método intuitivo, que ocupou um espaço expressivo nos sistemas escolares no final do século XIX e início do século XX, era considerado o caminho para a educação por meio do sentido, por meio da experiência, utilizando-se de objetos e coisas. Fundamentava-se na ideia de que, a partir de objetos do cotidiano e coisas do mundo real, a criança seria capaz de compreender, construir e expressar ideias. Este método é destaque na obra de Büchler, como podemos observar na Figura 8.

FIGURA 8 – Atividade que envolve o método intuitivo



FONTE: Büchler (1943, p. 11).

O autor utiliza garrafas para apresentar uma situação matemática, mostra “3 garrafas, 2 na mão esquerda, 1 na mão direita”. A ideia da atividade é levar o aluno a concluir que “3 garrafas é igual a 2 garrafas mais 1 garrafa”, o que mais tarde será representado por $3=2+1$. Percebe-se o uso de objetos do cotidiano para ilustrar uma situação matemática sem símbolos, em um primeiro momento.

O livro está repleto desse tipo de atividade. Para cada número novo apresentado, diferentes figuras são utilizadas para mostrar a composição deste número. A apresentação do título referente a uma determinada atividade já mostra o número que será trabalhado: nosso exemplo traz o número cinco. Neste caso vemos a apresentação do cinco, que pode ser formado por “2 pétalas mais 3 pétalas”, ou “2 para cima mais 3 para baixo”, ou ainda “1 para cima mais

4 para baixo”, indicando diferentes composições para o 5, ou seja, pode ser $5 = 2 + 3$ ou $5 = 1 + 4$, como mencionado na Figura 9.

FIGURA 9 – Atividade que envolve o método intuitivo



FONTE: Büchler (1943, p. 21).

Do ponto de vista do cálculo mental (Berticelli; Zancan, 2024), identificam-se, no mínimo, duas decomposições possíveis do número cinco ($2 + 3$ e $1 + 4$). Já no âmbito do pensamento algébrico, conforme a BNCC (Brasil, 2018), destaca-se o desenvolvimento do senso numérico, uma vez que o número 5 é compreendido a partir de suas diferentes decomposições ($5 = 2 + 3$ e/ou $5 = 1 + 4$). Além disso, mostra-se o conceito de família de um número, no caso o 5, conforme discutido por Ponte, Branco e Matos (2009).

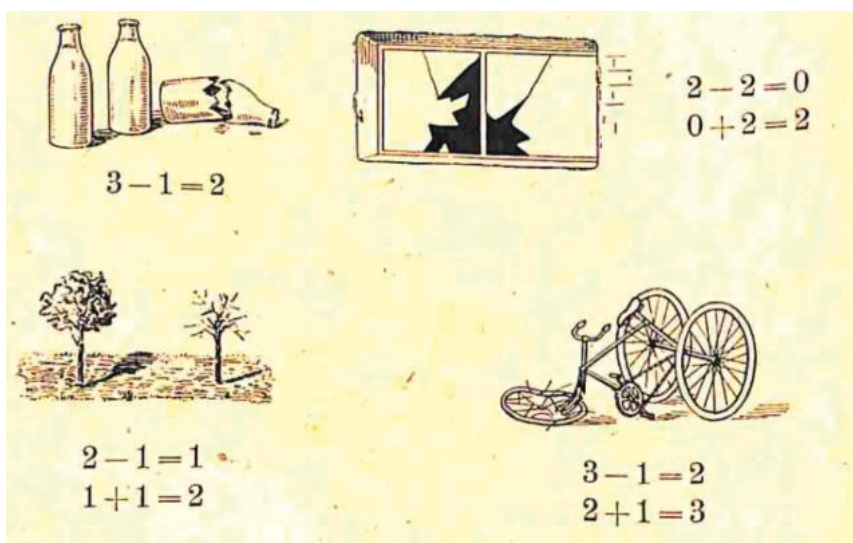
De modo geral, a obra de Büchler apresenta uma variedade significativa de atividades segundo o método intuitivo de Pestalozzi, nas quais os números são introduzidos gradativamente. Observa-se que, ao longo das atividades propostas, cada novo número é trabalhado por meio de diferentes figuras, favorecendo a compreensão matemática antes mesmo da formalização simbólica propriamente dita.

4.2 ATIVIDADES QUE ENVOLVEM FATOS BÁSICOS E RELACIONAM A ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Ao mesmo tempo em que apresenta os números, o autor vai apresentando operações que envolvem esses números. Na Figura 10, observa-se uma situação em que se mostra a atividade $3 - 1 = 2$ e $2 + 1 = 3$. Em outra representação, o autor explora as atividades $2 - 1 = 1$ e $1 + 1 = 2$, ensinando os fatos básicos em termos do cálculo mental (Berticelli; Zancan, 2024). No âmbito do pensamento algébrico, temos a relação inversa, ou seja, a relação entre a adição e a subtração como operações inversas, conforme discutido por Ponte, Branco e Matos (2009).

Do ponto de vista do cálculo mental, essas atividades mobilizam os fatos básicos da adição e da subtração, favorecendo a flexibilidade e a compreensão dos resultados (Berticelli e Zancan, 2024). Já sob a perspectiva do pensamento algébrico, torna-se possível identificar a exploração da relação inversa entre a adição e a subtração, uma vez que o aluno é levado a perceber que uma operação pode desfazer ou complementar a outra, conforme apontam Ponte, Branco e Matos (2009).

FIGURA 10 – Atividade fatos básicos que relacionam a adição e subtração



FONTE: Büchler (1943, p.14).

Ao analisarmos a Figura 10, identificamos a retomada de questões semelhantes às trabalhadas nas Figuras 08 e 09, mostrando novamente a mobilização do pensamento intuitivo de Pestalozzi. A principal diferença dessa atividade reside no fato de que, a partir das ilustrações, são explicitadas as operações matemáticas.

Nessa proposta, o autor apresenta quatro imagens, organizadas da esquerda para a direita e de cima para baixo: (1) três garrafas, das quais uma está quebrada, resultando em duas garrafas; (2) duas janelas, ambas quebradas, indicando a ausência de janelas, isto é, zero (elucidando a relação de inversa); zero janelas mais duas janelas resultam em duas janelas; (3) duas árvores, das quais uma morre, restando uma árvore; e (4) uma bicicleta com três pneus, sendo um pneu furado, o que resulta em dois pneus cheios, permitindo também a interpretação de que dois pneus mais um pneu totalizam três pneus.

As atividades analisadas fazem parte de uma obra repleta de questões que articulam o método intuitivo, reverberando situações voltadas aos conhecimentos do cálculo mental (Berticelli; Zancan, 2024), ao mesmo tempo em que antecipa noções do pensamento algébrico, ao explorar as relações entre adição e subtração como operações inversas, conforme apontam Ponte, Branco e Matos (2009).

4.3 ATIVIDADES QUE ENVOLVEM A DECOMPOSIÇÃO DE UM NÚMERO OU A FAMÍLIA DO NÚMERO

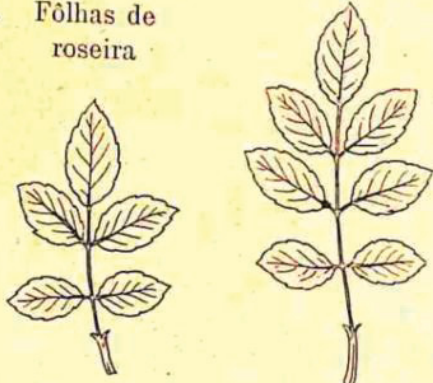
A proposta a seguir é uma atividade muito recorrente ao longo do livro. Observa-se na obra diversas atividades que exploram a decomposição de um número, mobilizando conhecimentos relacionados ao cálculo mental. Este conhecimento, no campo do pensamento algébrico, é materializado como a família de um número. O método intuitivo volta a se fazer presente, uma vez que o autor utiliza elementos de Pestalozzi, com elementos familiares ao aluno, como as folhas da roseira e os dedos da mão, para representar os números e suas diferentes decomposições, como ilustrado na Figura 11.

FIGURA 11 – Atividades que envolvem a decomposição de um número ou a família do número

30

O número « sete »

2. Fôlhas de roseira

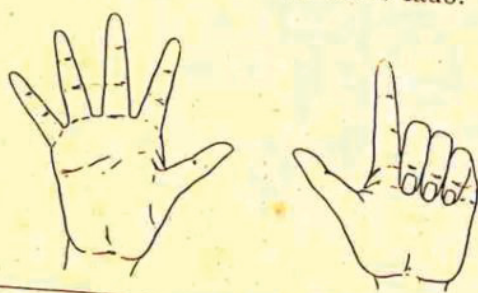


Quantos pares de folíolos tem esta fôlha de roseira?
 Quantos folíolos, à esquerda?
 Quantos, à direita?
 Quantos, na ponta?
 Compare as duas fôlhas!
 7 folíolos são 5 mais 2.

3. Escreva:

7	=	5	+	2
---	---	---	---	---

7 folíolos são 6 de um lado, mais 1 do outro lado.
 7 folíolos são 1 de um lado, mais 6 do outro lado.
 7 são 5 de um lado, mais 2 do outro lado.
 7 dedos são 5 à esquerda, mais 2 à direita.
 7 são 2 de um lado, mais 5 do outro lado.



4.

7 são 4 embaixo, mais 3 em-cima.
7 são 5 de um lado, mais 2 do outro lado.
7 são 6 de um lado, mais 1 do outro lado.

FONTE: Büchler (1943, p. 30).

O ensino por meio de objetos familiares ao aluno, como folhas, garrafas, bicicletas, ou mesmo os dedos, evidencia o desenvolvimento de habilidades sensitivas e mentais, por meio da observação e da experiência, valorizando o aspecto, a realidade, a intuição, o sentido. Essa é uma prática recorrente no material de Büchler.

Na Figura 11, o autor explora o número 7 por meio da imagem de uma folha de roseira, indicando que na primeira temos 5 folhas e na segunda temos 7 folhas, o que significa que, na segunda temos 2 unidades a mais em relação a anterior. Logo em seguida o autor escreve isso

em forma de expressão, mostrando que $7 = 5 + 2$. O autor está mostrando que, para compor o 7, são necessárias 5 folhas mais 2 folhas.

Na sequência mostra outras diferentes decomposições do 7, em forma de frases. O intuito é levar os alunos a perceberem que $7 = 6 + 1$, $7 = 1 + 6$, $7 = 5 + 2$, $7 = 2 + 5$, $7 = 4 + 3$. Em termos do cálculo mental estamos trabalhando com fatos básicos e a decomposição do 7 (Berticelli; Zancan, 2024). No âmbito do pensamento algébrico, essa atividade envolve a família de um número (Ponte; Branco; Matos, 2009), além de outros conhecimentos como a comutatividade (Canavarro, 2007) e o senso numérico (Brasil, 2018; Boaler, 2018).

Em seguida, essa atividade é apresentada em forma de problema, como podemos analisar na Figura 12:

FIGURA 12 – Atividades de composição e decomposição

5. Problemas.

○ 1) $7 = 6 +$	2) $7 - 1 =$	3) $5 + 2 =$	4) $7 - 2 =$
$7 = 4 +$	$7 - 5 =$	$6 + 1 =$	$5 - 2 =$
$7 = 1 +$	$7 - 3 =$	$4 + 3 =$	$3 - 2 =$
$7 = 5 +$	$7 - 6 =$	$2 + 5 =$	$1 + 2 =$
$7 = 3 +$	$7 - 2 =$	$1 + 6 =$	$3 + 2 =$
$7 = 2 +$	$7 - 4 =$	$3 + 4 =$	$5 + 2 =$

FONTE: Büchler (1943, p. 31).

Após o trabalho com as imagens, o autor parte para o abstrato, conforme percebemos na Figura 12. Em termos de conhecimentos de cálculo mental (Berticelli; Zancan, 2024) é possível observar as diferentes decomposições do 7, na primeira coluna ($7 = 6 + \underline{\quad}$, $7 = 5 + \underline{\quad}$, $7 = 4 + \underline{\quad}$, $7 = 3 + \underline{\quad}$, $7 = 2 + \underline{\quad}$, $7 = 1 + \underline{\quad}$). Em termos de pensamento algébrico, o autor explora a família de um número.

Esta atividade explora ainda a posição da pergunta, ou do número faltante (Thorndike, 1922), em que $7 = 6 + \underline{\quad}$ conduz o aluno ao seguinte pensamento: “7 é igual a 6 mais quanto?” Esta sentença passa por transformações, até chegar em uma sentença que envolve a variável: $7 = 6 + \underline{\quad}$, depois $7 = 6 + \square$, em seguida $7 = 6 + x$.

Na segunda coluna, percebemos a relação inversa (se $7 = 6 + \underline{\quad}$, então $7 - 1 = \underline{\quad}$) (Ponte; Branco; Matos, 2009), que compõe o rol dos conhecimentos algébricos, enquanto para o cálculo mental, é considerado um fato básico (Berticelli; Zancan, 2024). A terceira coluna

também explora um fato básico da adição, por meio das diferentes composições do 7 ($5+2=$ ____, $6+1=$ ____, $4+3=$ ____, $2+5=$ ____, $1+6=$ ____, $3+4=$ ____).

A quarta coluna traz um misto de expressões que já foram trabalhadas, buscando recordar e memorizar alguns resultados, processo fundamental na construção de memórias para o cálculo mental. As atividades evidenciam os conhecimentos aritméticos e algébricos, indicando que a álgebra pode ser ensinada por meio de conhecimentos aritméticos.

Nota-se que o autor traz um novo conhecimento, como ao explorar a família do 7 e, ao mesmo tempo, retoma conhecimentos apresentados, como a ideia de adição e subtração como operações inversas, ampliando o repertório matemático do aluno.

As atividades no decorrer do livro desenvolvem o cálculo mental e o pensamento algébrico por meio de diferentes abordagens. A decomposição do número 7, como ilustrado no exemplo, favorece a compreensão das composições aditivas e estimula um raciocínio avançado para a idade, especialmente quando o aluno precisa identificar o termo desconhecido em expressões como $7 = 6 +$ _____. Além disso, as atividades exploram a relação inversa entre adição e subtração, articulando conhecimentos algébricos e fatos básicos do cálculo mental. As diferentes abordagens retomam composições já trabalhadas e promovem a memorização de resultados, elemento essencial para a fluência no cálculo mental (Berticelli; Zancan, 2024).

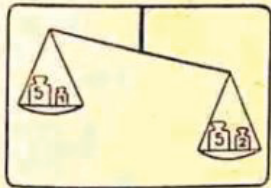
4.4 ATIVIDADES QUE EXPLORAM O NÚMERO FALTANTE POR MEIO DA VARIAÇÃO DA PERGUNTA

Outro modelo de atividade que se destaca na obra explora relações numéricas por meio da variação da pergunta, um conhecimento de cálculo mental (Berticelli; Zancan, 2024), que no âmbito do pensamento algébrico é conhecido como número faltante (Thorndike, 1922).

Na Figura 13, é possível perceber que a expressão que representa o problema ilustrado $6+$ ____= 7 , é diferente das anteriores. Aqui temos a ideia de completar para chegar em um número. O pensamento é “6 mais quanto é igual a 7?”. Neste caso não se usa a subtração para resolver esta operação. É um conhecimento de cálculo mental com ênfase no conhecimento algébrico. No aprofundamento de conteúdos matemáticos, essa expressão irá evoluir para $6+x=7$.

FIGURA 13 – Atividade número faltante

Igualar acrescentando 33



Ponha 7 kg. no prato direito!
 Você ponha 6 kg. no prato esquerdo!
 Onde devo aumentar o peso para a balança ficar em equilíbrio?
 Quantos quilos preciso acrescentar? Veja o que escrevo no quadro-negro:

6	+		=	7
---	---	--	---	---

Vá escrever o quilo que eu pus no prato esquerdo!

6	+	1	=	7
---	---	---	---	---

Vou escrever alguns problemas no quadro-negro para que você me diga quanto falta do lado esquerdo para os pesos serem iguais em um e outro prato.

⊙ 1) $5 + \quad = 7$

$4 + \quad = 7$

$6 + \quad = 7$

$2 + \quad = 7$

$1 + \quad = 7$

$3 + \quad = 7$

2) $4 + \quad = 6$

$1 + \quad = 6$

$3 + \quad = 6$

$2 + \quad = 6$

$5 + \quad = 6$

$3 + \quad = 6$

3) $4 + \quad = 5$

$2 + \quad = 5$

$1 + \quad = 5$

$1 + \quad = 4$

$2 + \quad = 4$

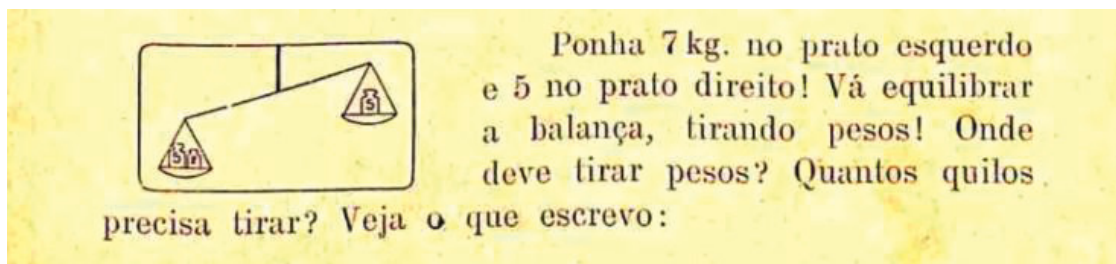
$3 + \quad = 4$

FONTE: Büchler (1943, p. 10).

Na Figura 13, é possível perceber que Büchler trabalha a composição dos números 7, 6, 5 e 4 explorando essa variação no lugar da pergunta. Em termos do cálculo mental, o autor está trabalhando os fatos básicos, composição e a variação da pergunta (Berticelli; Zancan, 2024) e no âmbito do pensamento algébrico, está trabalhando a família de um número (Ponte; Branco; Matos, 2009) e o número faltante (Thorndike, 1922).

Percebe-se, que o autor apresenta um novo conhecimento, a posição do número faltante, e ao mesmo tempo, retoma conhecimentos já trabalhados em outras atividades, como a composição e decomposição. Em seguida, para ilustrar uma subtração (Figura 14), retoma ao método intuitivo, por meio de coisas que fazem parte da realidade do aluno.

FIGURA 14 – Atividade de subtração de forma intuitiva



FONTE: Büchler (1943, p. 33).

Na sequência dos conteúdos, é possível perceber que o autor traz a subtração de forma intuitiva, elucidando novamente Pestalozzi, por meio da mesma ideia. Utiliza uma figura (Figura 14) com a balança para mostrar o que precisa ser retirado para equilibrar os valores. A expressão matemática $7 - \underline{\quad} = 5$ vem logo em seguida para representar o problema ilustrado. Percebemos novamente os fatos básicos do cálculo mental (Berticelli; Zancan, 2024) e a operação inversa dos conhecimentos algébricos (Ponte; Branco; Matos, 2009).

Na Figura 15 é possível perceber novamente que Büchler explora a composição dos números 7, 6, 5 e 4 explorando essa variação no lugar da pergunta. Em termos do cálculo mental, o autor está trabalhando novamente os fatos básicos, composição e a variação da pergunta; porém, na subtração (Berticelli; Zancan, 2024) e no âmbito do pensamento algébrico, está trabalhando a família de um número (Ponte; Branco; Matos, 2009) e o número faltante (Thorndike, 1922).

FIGURA 15 – Atividade variação da pergunta - subtração

34 Igualar tirando. Os dias da semana

7	-	2	=	5
---	---	---	---	---

Δ 1)	7 -	= 5	2)	6 -	= 3	3)	5 -	= 1	4)	4 -	= 1
	7 -	= 3		6 -	= 1		5 -	= 3		4 -	= 0
	7 -	= 2		6 -	= 2		5 -	= 5		4 -	= 3
	7 -	= 1		6 -	= 5		5 -	= 2		3 -	= 2
	7 -	= 4		6 -	= 4		5 -	= 4		3 -	= 1
	7 -	= 6		6 -	= 0		4 -	= 2		2 -	= 1

FONTE: Büchler (1943, p. 10).

Essas atividades perpassam o material e é possível perceber o aumento dos números, conforme o campo numérico é explorado, como podemos notar na Figura 16, em que o autor traz o número faltante em expressões envolvendo números até 100.

FIGURA 16 – Atividade variação na posição da pergunta

100	Problemas		
	V		
1) $51 + \quad = 58$	2) $46 + \quad = 49$	3) $26 + \quad = 29$	
$42 + \quad = 47$	$22 + \quad = 28$	$2 + \quad = 7$	
$76 + \quad = 78$	$86 + \quad = 89$	$34 + \quad = 39$	
$33 + \quad = 36$	$54 + \quad = 59$	$71 + \quad = 75$	
$94 + \quad = 99$	$63 + \quad = 67$	$43 + \quad = 49$	
$82 + \quad = 86$	$41 + \quad = 46$	$62 + \quad = 68$	

FONTE: Büchler (1943, p. 100).

As atividades da seção 4.4 não se limitam à vastidão dos conhecimentos mencionados nas seções anteriores; elas também exploram a variação da pergunta (Berticelli; Zancan, 2024), além de abordar os conhecimentos do cálculo mental e o número faltante (Thorndike, 1922) no que se refere às questões do pensamento algébrico. Nesse contexto, observa-se uma progressão de atividades que se articulam, ora voltadas para o cálculo mental, ora para o pensamento algébrico.

Ao longo das propostas, Büchler introduz gradualmente (do simples para o complexo) atividades que emergem do método intuitivo de Pestalozzi, em que o aluno é levado a completar, retirar ou equilibrar valores, mobilizando conhecimentos como fatos básicos, composições numéricas e a compreensão das operações como inversas, seja na adição ou subtração, bem como número faltante ou posição da pergunta. A recorrência dessas atividades em toda a obra, quando aliadas a uma progressão no campo numérico do aluno, vai ao encontro do ensino matemático proposto pelo autor.

4.5 ATIVIDADES QUE EXPLORAM O SENSO NUMÉRICO

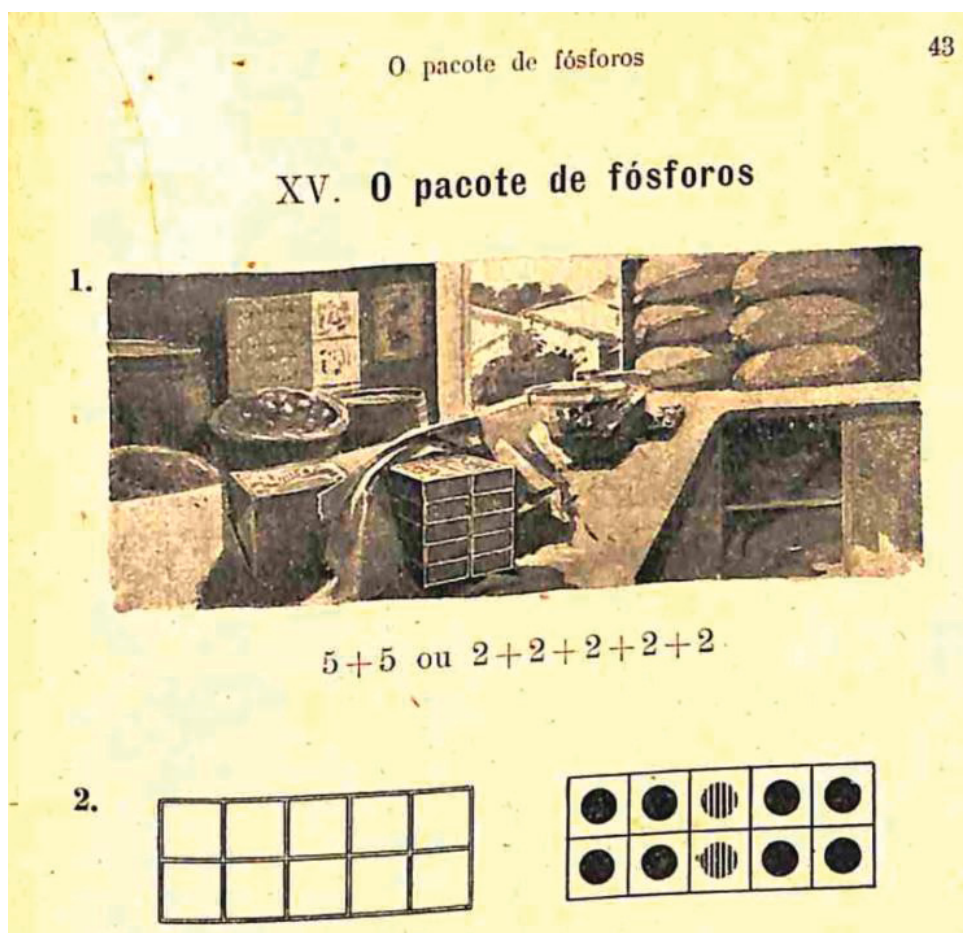
O senso numérico (Brasil, 2018; Boaler, 2018) também é destacado nas atividades propostas na obra decorrentes do pensamento algébrico. Na próxima atividade analisada,

percebemos que o autor está mostrando a composição do 10 por meio de duas representações diferentes: $5+5$ e $2+2+2+2+2$. Primeiro elucidando por meio do método intuitivo de Pestalozzi, mostrando o pacote de fósforo contendo 10 caixas, e depois, por meio de operações matemáticas.

Essas diferentes decomposições do número (Berticelli; Zancan, 2024) 10, ou seja, $5+5$ e $2+2+2+2+2$ permitem que o aluno compreenda que um mesmo número pode ter várias formas de decomposição, o que favorece a escolha de uma determinada estratégia na resolução da atividade de modo mais eficiente. Este é um conhecimento essencial para o cálculo mental (Berticelli; Zancan, 2024) e também para o pensamento algébrico (Brasil, 2018; Boaler, 2018).

A Figura 17 expõe atividades que exploram o senso numérico.

FIGURA 17 – Atividade senso numérico



FONTE: Büchler (1943, p. 43).

Além dessa, há uma nuance de atividades de senso numérico em toda a obra de Büchler, em que se exploram os mais variados conhecimentos, desde o método intuitivo de Pestalozzi até as questões dessa seção.

Ao apresentar diferentes decomposições de um mesmo número, como no caso do 10, o autor possibilita que o aluno compreenda a flexibilidade dos números e reconheça múltiplas estratégias para a resolução de situações matemáticas. A Figura 17 ilustra a caixa dividida em 10 partes, o que nos dias atuais é conhecido como “*Ten frame*”, um recurso prático para o ensino de números e quantidades (Zancan; Berticelli, 2023).

4.6 ATIVIDADES QUE EXPLORAM A REDE DE RELAÇÕES NUMÉRICAS DO 10

Outra forma de abordagem discutida neste trabalho e que está presente em várias atividades da obra, é a Rede de Relações Numéricas do 10 (RRN10), amplamente explorada nas atividades da coleção. Primeiro como um conhecimento de cálculo mental, como apontado por Berticelli e Zancan (2024), observando a graduação dos números, e na sequência é um conhecimento útil na elaboração da estratégia Ponte pelo 10. Além desses conhecimentos, é válido mencionar conhecimentos ora aprendidos antes de adentrar nesse conteúdo, como os conhecimentos de cálculo mental (Berticelli; Zancan, 2024), como decomposição, dobros e variação da pergunta.

FIGURA 18 – Atividades 1 rede de relações numéricas do 10

O número « dez »				45
5. Problemas:				
1)	2)	3)	4)	
10 = 9 +	10 - 5 =	5 + 5 =	10 - = 9	
10 = 5 +	10 - 1 =	7 + 3 =	10 - = 7	
10 = 6 +	10 - 3 =	6 + 4 =	10 - = 5	
10 = 1 +	10 - 4 =	9 + 1 =	10 - = 6	
10 = 4 +	10 - 2 =	8 + 2 =	10 - = 8	
10 = 7 +	10 - 9 =	4 + 6 =	10 - = 1	
10 = 8 +	10 - 7 =	1 + 9 =	10 - = 4	
10 = 3 +	10 - 8 =	3 + 7 =	10 - = 2	
10 = 2 +	10 - 6 =	2 + 8 =	10 - = 3	

FONTE: Büchler (1943, p. 45).

Na Figura 18, coluna 1, o autor está trabalhando as diferentes decomposições do 10. É um conhecimento de cálculo mental, da RRN10. Ao mostrar essas diferentes decomposições,

aborda outros conhecimentos, como a comutatividade, pois o aluno percebe que $10=9+1$ e $10=1+9$, então $9+1=1+9$. Outra característica é perceber que $9+1=8+2=7+3$, e assim sucessivamente. Outro conhecimento relevante para o cálculo mental na escolha da expressão que irá definir a estratégia.

A operação inversa da adição envolvendo o 10 é apresentada nas colunas 2 e 4. Para resolver as expressões, ancora-se no conhecimento $10=4+6$. Esse conhecimento é utilizado para resolver a expressão $10-4=$ ___ e $10-$ ___ $=6$.

Na coluna 3, o autor trabalha as diferentes composições do 10 e, neste caso, a resposta de todas as expressões é o 10. Novamente explora a comutatividade e a compensação: $5+5=$ ___, $7+3=$ ___, $6+4=$ ___, $9+1=$ ___, $8+2=$ ___, $4+6=$ ___, $1+9=$ ___, $3+7=$ ___, $2+8=$ ___.

A RRN10 (Berticelli; Zancan, 2024) é explorada nas quatro colunas; já a variação da posição da pergunta é destaque nas colunas 1 e 4. Em termos de conhecimentos algébricos, temos a família de um número, ou seja, a “família do 10”, como mencionado por Ponte, Branco e Matos (2009). Além disso, o autor explora a subtração como inverso da adição ao trazer operações de adições e subtrações envolvendo o 10 também discutido pelos autores.

A Figura 19 também explora a RRN10, porém o 10 aparece como uma parcela nas colunas 1, 2 e 4. Já na coluna 3 ele é a resposta da expressão. Em termos de conhecimentos temos a família de um número (ou seja, do 10), a relação inversa, ambos conhecimentos do pensamento algébrico (Ponte; Branco; Matos, 2009) e a variação da posição da pergunta, que é um conhecimento do cálculo mental (Berticelli; Zancan, 2024).

FIGURA 19 – Atividades 2 rede de relações numéricas do 10

64

Os números de 10 até 15

3. Problemas:

I

1) $11 = 10 +$	2) $10 + 4 =$	3) $14 - 4 =$	4) $2 + 10 =$
$12 = 10 +$	$10 + 5 =$	$12 - 2 =$	$5 + 10 =$
$13 = 10 +$	$10 + 1 =$	$15 - 5 =$	$4 + 10 =$
$14 = 10 +$	$10 + 3 =$	$13 - 3 =$	$3 + 10 =$
$15 = 10 +$	$10 + 2 =$	$11 - 1 =$	$1 + 10 =$

FONTE: Büchler (1943, p. 64).

Na Figura 20, observam-se os mesmos conhecimentos relacionados à RRN10, agora explorados por meio de uma graduação do campo numérico, envolvendo números maiores que 10 e menores que 50. A atividade propõe a decomposição dos números a partir das dezenas completas (20, 30 e 40), associadas a acréscimos de unidades, como em $25 = 20 + 5$, $35 = 30 + 5$ e $45 = 40 + 5$, favorecendo o reconhecimento de regularidade numéricas e que os números podem ser pensados como composições entre dezenas e unidades.

FIGURA 20 – Atividades 3 rede de relações numéricas do 10

81

Problemas

2. Problemas:

I

1) $20 = 20 + 0$ 21 = 22 = 23 = 24 =	2) $25 = 20 + 5$ 26 = 27 = 28 = 29 =	3) $30 = 30 + 0$ 31 = 32 = 33 = 34 =
4) $35 = 30 + 5$ 36 = 37 = 38 = 39 =	5) $40 = 40 + 0$ 41 = 42 = 43 = 44 =	6) $45 = 40 + 5$ 46 = 47 = 48 = 49 =

FONTE: Büchler (1943, p. 81).

Na Figura 21, destacamos que esses conhecimentos mencionados anteriormente, tanto no âmbito do cálculo mental como os do pensamento algébrico, são úteis em atividades como as da próxima figura, em que o autor conduz os estudantes a utilizarem uma estratégia de cálculo mental, conhecida como Ponte Pelo 10 (Berticelli; Zancan, 2024), que é a ideia de completar o 10 para efetuar a operação. Então, no exemplo $2+8+1$ a intenção é que se faça primeiro o $2+8$, que é 10 e em seguida, adicione o 1. Segue em seguida, o $6+4$ somando-se com o próximo número. Segue para $3+7$, $5+5$, $4+6$ e $8+2$. Essa é a estratégia que é estimulada em todas as atividades das colunas 15, 16 e 17.

FIGURA 21 – Atividades 4 rede de relações numéricas do 10

15) $2 + 8 + 1 =$	16) $3 + 7 + 1 =$	17) $4 + 6 + 1 =$
$6 + 4 + 1 =$	$3 + 7 + 2 =$	$4 + 6 + 3 =$
$6 + 4 + 3 =$	$5 + 5 + 1 =$	$4 + 6 + 2 =$
$6 + 4 + 5 =$	$5 + 5 + 3 =$	$8 + 2 + 1 =$
$6 + 4 + 4 =$	$5 + 5 + 2 =$	$8 + 2 + 3 =$
$6 + 4 + 2 =$	$5 + 5 + 4 =$	$8 + 2 + 5 =$

FONTE: Büchler (1943, p. 76).

Com o campo numérico do aluno mais eficaz e maior, o autor traz novas atividades. Na atividade anterior, ele elucida as questões primeiramente envolvendo o número 10. Nas atividades da Figura 22, gradativamente o autor vai aumentando a grandeza dos números, como podemos observar, trazendo expressões com números maiores do que 10 e menores que 50. Essa sequência segue o mesmo engajamento da imagem anterior e, em seguida, somam-se as duas parcelas para encontrar uma dezena completa ($18+2$ e o resultado soma com 5; $38+2$ e o resultado soma com 5; $28+2$ e o resultado soma com 5), ou seja, 20, 30 ou 40.

FIGURA 22 – Atividades 5 rede de relações numéricas do 10

4) $18 + 2 + 5 =$	5) $14 + 6 + 2 =$	6) $19 + 1 + 8 =$
$38 + 2 + 5 =$	$34 + 6 + 3 =$	$39 + 1 + 6 =$
$28 + 2 + 5 =$	$24 + 6 + 1 =$	$29 + 1 + 4 =$
$36 + 4 + 3 =$	$35 + 5 + 4 =$	$37 + 3 + 6 =$
$26 + 4 + 7 =$	$25 + 5 + 3 =$	$17 + 3 + 4 =$
$16 + 4 + 1 =$	$15 + 5 + 1 =$	$27 + 3 + 5 =$

FONTE: Büchler (1943, p. 87, grifo do autor).

Vale ressaltar que o autor segue uma graduação no ensino desses conhecimentos. Então, antes de trazer $18+2+5$ (p. 87), trouxe a expressão $8+2+5$ (p. 76). No ensino do cálculo mental, essa graduação é fundamental, pois não é possível ensinar que $18+2 = 20$, sem antes ter ensinado que $8+2 = 10$. A graduação segue para números maiores, $18+2$, $28+2$, $38+2$, conforme ilustrado na Figura 22.

As atividades de RRN10 seguem na Figura 23. Outra estratégia de cálculo mental (Berticelli; Zancan, 2024) envolvendo os conhecimentos básicos de decomposição e RRN10, é a compensação. Nessa estratégia acionam-se esses conhecimentos para realizar a adição. Para

resolver $9+9$, por exemplo, deve-se pensar que $9=10-1$. Assim, a soma pode ser reorganizada da seguinte forma: $9 + 9 = 9 + 10 - 1 = 19 - 1 = 18$. Essa estratégia é muito útil para resolver qualquer operação em que um dos fatores termina em 9, como podemos observar em $54+9=54+10-1=64-1=63$, pois ao substituir uma operação/atividade aparentemente mais completa, por um número de referência conhecido (ou seja, pelo 10), a atividade se torna mais simples.

FIGURA 23 – Atividades 6 rede de relações numéricas do 10

1×9 até 10×9 109

$6. \quad 9 = \underbrace{10 - 1}_9 = 9$	$45 + 9 = \underbrace{45 + (10 - 1)}_{55} - 1 = 54$
$9 + 9 = \underbrace{9 + (10 - 1)}_{19} - 1 = 18$	$54 + 9 = \underbrace{54 + (10 - 1)}_{64} - 1 = 63$
$18 + 9 = \underbrace{18 + (10 - 1)}_{28} - 1 = 27$	$63 + 9 = \underbrace{63 + (10 - 1)}_{73} - 1 = 72$
$27 + 9 = \underbrace{27 + (10 - 1)}_{37} - 1 = 36$	$72 + 9 = \underbrace{72 + (10 - 1)}_{82} - 1 = 81$
$36 + 9 = \underbrace{36 + (10 - 1)}_{46} - 1 = 45$	$81 + 9 = \underbrace{81 + (10 - 1)}_{91} - 1 = 90$

FONTE: Büchler (1943, p. 109).

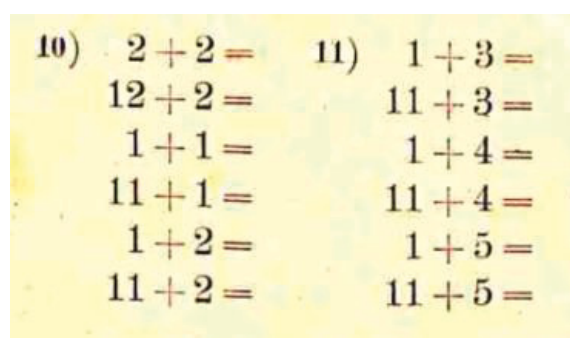
As atividades que exploram a RRN10 se articulam de forma consistente ao reverberar os conhecimentos até agora elucidados com os conhecimentos do cálculo mental e do pensamento algébrico presentes neste capítulo.

A recorrência da decomposição do 10, da variação da pergunta, da relação inversa entre adição e subtração e da progressão do campo numérico mostra uma intencionalidade voltada à construção de estratégias de cálculo mental, como a ponte pelo 10 e a compensação, ora no campo do cálculo mental, ou no campo do pensamento algébrico.

4.7 ATIVIDADES QUE EXPLORAM PADRÕES NUMÉRICOS

Os padrões numéricos também são explorados no ensino de cálculo mental (Berticelli; Zancan, 2024) e no desenvolvimento do pensamento algébrico (Thorndike, 1922). Nas atividades da obra, é possível observar o estímulo a esses padrões. Na Figura 24, o autor leva os alunos a perceberem que, se $2+2=4$, então $12+2=14$; se $1+1=2$, então $11+1=12$; se $1+2=3$, então $11+2=13$; se $1+3=4$, então $11+3=14$; se $1+4=5$, então $11+4=15$; se $1+5=6$, então $11+5=16$.

FIGURA 24 – Atividades 1 padrões numéricos



10) $2 + 2 =$	11) $1 + 3 =$
$12 + 2 =$	$11 + 3 =$
$1 + 1 =$	$1 + 4 =$
$11 + 1 =$	$11 + 4 =$
$1 + 2 =$	$1 + 5 =$
$11 + 2 =$	$11 + 5 =$

FONTE: Büchler (1943, p. 70).

Logo na sequência, aborda esses padrões numéricos com números maiores, ou seja, há uma ampliação no campo numérico. Utiliza-se também dos mais variados conhecimentos do cálculo mental como do pensamento algébrico para resolução da atividade proposta.

FIGURA 25 – Atividades 2 padrões numéricos

84

Problemas

III

1) $1 + 1 =$

$21 + 1 =$

$41 + 1 =$

$11 + 1 =$

$31 + 1 =$

2) $2 + 2 =$

$32 + 2 =$

$42 + 2 =$

$12 + 2 =$

$22 + 2 =$

3) $3 + 3 =$

$43 + 3 =$

$13 + 3 =$

$23 + 3 =$

$33 + 3 =$

4) $4 + 4 =$

$24 + 4 =$

$44 + 4 =$

$34 + 4 =$

$14 + 4 =$

5) $5 + 1 =$

$25 + 1 =$

$45 + 1 =$

$35 + 1 =$

$15 + 1 =$

6) $5 + 4 =$

$35 + 4 =$

$15 + 4 =$

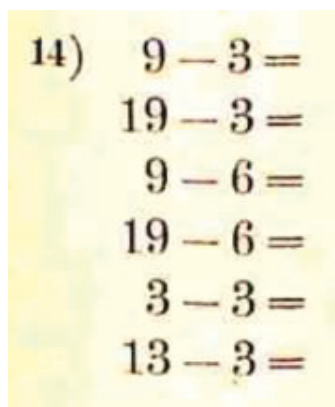
$25 + 4 =$

$45 + 4 =$

FONTE: Büchler (1943, p. 84).

Uma vez aprendida a operação (adição) dos padrões, o autor introduz a operação inversa, explorando as regularidades numéricas, conforme mostra a Figura 26. Deste modo, o aluno é levado a perceber que, $9-3=6$, então $19-3=16$; se $9-6=3$, então $19-6=13$; se $3-3=0$, então $13-3=10$. Essa relação reforça a compreensão da subtração como inversa da adição e mostra que os padrões numéricos podem ser aplicados nas mais diferentes operações, consolidando os conhecimentos tanto do cálculo mental como do pensamento algébrico.

FIGURA 26 – Atividades 3 padrões numéricos



14) $9 - 3 =$
 $19 - 3 =$
 $9 - 6 =$
 $19 - 6 =$
 $3 - 3 =$
 $13 - 3 =$

FONTE: Büchler (1943, p. 75).

As atividades apresentadas são recortes que mostram a grandeza da obra e sua amplitude nos campos do cálculo mental e do pensamento algébrico. Esses conhecimentos, de ambos os campos, estão contidos nas mais diversas atividades da obra que reverberam a partir do método intuitivo de Pestalozzi.

4.8 CONHECIMENTOS DE CÁLCULO MENTAL QUE FAVORECEM O PENSAMENTO ALGÉBRICO

No Quadro 19 apresentamos uma síntese do que foi encontrado na obra de Büchler, destacando o tipo de atividade e classificando o conhecimento mobilizado por ela, seja de cálculo mental ou algébrico, conforme as categorias que foram elencadas. É possível observar que, uma mesma atividade, envolve conhecimentos dos dois campos, de cálculo mental ou algébrico.

QUADRO 19 – Conhecimentos de cálculo mental que favorecem o pensamento algébrico

Tipo de atividade	Conhecimento de cálculo mental	Conhecimento algébrico
$5+3=$ ____ $4+4=$ ____ $2+6=$ ____	Fato básico Senso Numérico	Senso numérico
$7=1+6$ $7=2+5$ $7=3+4$	Decomposição	Família do número
$3+ \text{ } =5$ $\text{ } +2=5$ $5= \text{ } +3$ $5=3+ \text{ }$	Variação da pergunta	Número faltante Relações numéricas
$3+4=7$ $13+4=17$ $23+4=27$	Padrões numéricos	Padrões numéricos
$5+3=8$ $8-3=5$	Fato básico	Relação inversa
$3+2=2+3$	Fato básico	Comutatividade
$10+3=$ ____ $4+6=$ ____	Rede de relações Numéricas do 10	Operações que envolvem o 10

FONTE: Elaborado pelo autor (2026).

As categorias analisadas ao longo deste capítulo mostram que Büchler mobilizou um amplo repertório de conhecimentos matemáticos. As atividades exploraram os fatos básicos da adição e da subtração, a composição e decomposição dos números, a variação da pergunta e o número faltante, o senso numérico, a Rede de Relações Numéricas do 10 (RRN10) e os padrões numéricos, conhecimentos articulados de cálculo mental e do pensamento algébrico. Todos com o propósito de desenvolver no aluno flexibilidade de pensamento, capacidade de estabelecer relações e autonomia na resolução de problemas.

Outra observação é a forma que um novo conhecimento é apresentado, levando em conta conhecimentos já apreendidos, ampliando o campo numérico de forma gradativa, e caminhando do simples para o complexo, do intuitivo para o abstrato.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao finalizar este percurso investigativo, retorno à pergunta que sustentou todas as etapas desta pesquisa: Quais elementos do pensamento algébrico estão presentes em atividades que envolvem cálculo mental propostas na obra *Arithmetica Elementar* - Livro I (1919), de Georg August Büchler? São várias respostas!

A pesquisa corrobora que, no contexto das diretrizes educacionais do Paraná no início do século XX, a aritmética passa a assumir função formativa, incorporando o cálculo mental, ao mesmo tempo em que a álgebra começa a ser introduzida precocemente. Nesse cenário, a obra *Arithmetica Elementar* - Livro I (1919), de Georg August Büchler, reverbera que o pensamento algébrico já se fazia presente em atividades aritméticas antes da formalização com símbolos, mobilizando relações numéricas, padrões e decomposições. A análise, fundamentada na História Cultural, compreende o livro didático como artefato da cultura escolar, articulando práticas sociais e representações simbólicas, na medida que as atividades propostas por Büchler, mobilizam diferentes conhecimentos de cálculo mental, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico, orientada pelo método intuitivo de inspiração pestalozziana.

O cálculo mental se constitui, como mostrado na pesquisa, um campo de conhecimentos e estratégias que favorecem o desenvolvimento do pensamento matemático, tal como mostram as pesquisas Berticelli (2017) e Berticelli e Zancan (2024), procedimentos flexíveis ao realizar atividades básicas de matemáticas. A álgebra, por sua vez, entendida como processo de generalização de relações e de estudo de padrões, não se restringe à manipulação de letras, mas pode ser construída a partir da própria aritmética, em consonância com orientações curriculares (Brasil, 2017) e com as reflexões de autores como Kaput (1998; 1999; 2008), Kieran *et al.* (2016), Ponte, Branco e Matos (2009), Canavarro (2007), Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2018). As atividades com “números faltantes”, variação da posição da incógnita e exploração de padrões numéricos, discutidas por Thorndike (1922), Boaler (2018) e Usiskin (1988), exemplificam que, por meio de atividades que envolvem cálculo mental, é possível preparar o aluno para a álgebra.

O estudo mostrou que muitos dos conhecimentos do cálculo mental como fatos básicos, decomposição, dobros, relações numéricas do 10, variação da pergunta e padrões encontram correspondência em elementos do pensamento algébrico discutidos por Canavarro (2007), Thorndike (1922), Boaler (2018) e por Ponte, Matos e Branco (2009). Embora nomeados de forma diferente na aritmética e na álgebra, trata-se de operações semelhantes:

decompor números, reconhecer equivalências, observar padrões, relacionar resultados e mobilizar estratégias flexíveis.

A partir de atividades que trabalhem com os números faltantes, explorar equivalências e compensações (Boaler, 2018) ou construir “famílias” numéricas mostram que pensamento algébrico pode ocorrer a partir de atividades de aritmética, propostas por Büchler em sua *Arithmetica Elementar* - Livro I (1919).

A análise das atividades da *Arithmetica Elementar* - Livro I (1919) mostra que Büchler mobiliza conhecimentos de cálculo mental que constituem bases importantes para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Ainda que de forma não intencional, as atividades mostram essas relações: a igualdade é materializada por imagens do cotidiano do aluno; os fatos básicos aparecem articulando adição e subtração; a composição e decomposição dos números (como a “família de um número”) é trabalhada tanto por meio de expressões; e diferentes posições do número faltante aproximam o aluno da lógica das equações simples, apontada por Thorndike (1922) como etapa importante para compreender a forma da equação. Também observamos o desenvolvimento do senso numérico (como as múltiplas composições do 10) e a exploração da Rede de Relações Numéricas do 10 (RRN10), que sustenta estratégias como “passar pelo 10” e “compensar”, ambas no âmbito do cálculo mental e diretamente conectadas ao raciocínio algébrico. Padrões numéricos, relações inversas e equivalências (por exemplo, “se $2+2=4$, então $12+2=14$ ”; “se $9-3=6$, então $19-3=16$ ”) mostram que as atividades favorecem ao aluno para que ele perceba regularidades, elemento presente no pensamento algébrico.

Este estudo apontou alguns elementos essenciais na construção do pensamento algébrico, que são: comutatividade, senso numérico, número faltante, padrões numéricos, família de um número e relação inversa da adição e subtração. As análises das atividades da obra de Büchler (1919) indicam que esses elementos são mobilizados no ensino de atividades aritméticas, e compõem o rol de conhecimentos de cálculo mental. Ao trabalhar com “fatos básicos”, o autor mobiliza conhecimentos como relação inversa entre adição e subtração, explora a família de um número, a comutatividade e a posição do número faltante, introduzindo os conteúdos de forma intuitiva, caminhando para o abstrato, respeitando uma graduação dos números. Ao trabalhar a “composição/decomposição” de um número, o autor explora a família do número, a relação inversa entre adição e subtração, posição do número faltante. A “variação da pergunta” permite mobilizar conhecimentos algébricos como o número faltante e relacionar a adição e subtração como inversas. A rede de “relações numéricas do 10 (RRN10)” trabalha conhecimentos algébricos como relação da adição e subtração como operações inversas,

posição da pergunta, a composição e decomposição, a comutatividade e os padrões numéricos. Os conhecimentos não são trabalhados de forma linear ou individual, ao contrário, o autor é criativo, de modo que explora esses conhecimentos de forma integrada, valorizando o método intuitivo para chegar no abstrato.

Dessa análise decorre que o desenvolvimento do pensamento algébrico não se inicia exclusivamente no momento em que o aluno passa a operar formalmente com letras e símbolos. Ao contrário, ele pode ser antecipado e construído através do cálculo mental por meio da realização de atividades de aritmética que favorecem a identificação de regularidades, a generalização de relações numéricas e o raciocínio sobre propriedades das operações, ambos conhecimentos do pensamento algébrico.

Como desdobramento desta investigação, evidenciam-se algumas lacunas que podem orientar pesquisas futuras, especialmente no que se refere à ampliação do corpus analisado. Considerando que esta pesquisa se concentrou exclusivamente nas atividades do Livro I da coleção *Arithmetica Elementar*, torna-se pertinente investigar os Livros II e III, a fim de compreender como os elementos do pensamento algébrico se desenvolvem nas atividades da coleção de Büchler.

Por fim, esta dissertação não encerra o tema, (ela o inaugura). Os caminhos aqui abertos e percorridos convidam a novas leituras e novas fontes de pesquisa. Que outros pesquisadores possam, a partir deste trabalho, olhar para o passado no campo da Educação Matemática com a mesma exigência colocada por Neuza Bertoni Pinto: a de formular perguntas sinceras, que não busquem comprovar crenças, mas produzir conhecimento. Que esse olhar continue atento, crítico e sensível, como exige o trabalho histórico. E que, tal como as atividades de cálculo mental presentes na obra de Büchler, a pesquisa nunca deixe de nos provocar a pensar além do que está visível.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, André Francisco de. **Apropriação de tabuadas no ensino de aritmética da escola primária paranaense: 1903-1932**. 2016. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação-PPGE da Escola de Educação e Humanidades) - Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2016. Disponível em: <https://archivum.grupomarista.org.br/pergamumweb/vinculos/00005c/00005ce4.pdf>. Acesso em: 5 mar. 2025.
- BARBARESCO, Cleber Schaefer; COSTA, David Antonio da. Os métodos de ensino das escolas de aprendizes artífices: vestígios da constituição saberes para ensinar a partir da mobilização dos saberes aritméticos. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, Cruzeiro do Sul, v. 12, p. 1-17, 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/234468>. Acesso em: 5 mar. 2025.
- BARROS, José D'Assunção. A História Cultural e a contribuição de Roger Chartier. **Diálogos - Revista do Departamento de História e do Programa de Pós-Graduação em História**, [s. l.], v. 9, n. 1, 2005, p. 125-141. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/307801395_Cultural_history_and_Roger_Chartier's_contribution_A_historia_cultural_e_a_contribuicao_de_Roger_Chartier>. Acesso em: 5 mar. 2025.
- BERTICELLI, Danilene Gullich Donin. **Cálculo mental no ensino primário (1950-1970) – um olhar particular para o Paraná**. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/180391>. Acesso em: 5 mar. 2025.
- BERTICELLI, Danilene Gullich Donin; ZANCAN, Sabrina. Conhecimentos e atividades para potencializar o cálculo mental. **Acta Scientiarum. Education**, Maringá, v. 46, n. 1, p. e62862, 17 out. 2024. Acesso em: 18 fev. 2025.
- BERTINI, Luciane de Fátima; VALENTE, Wagner Rodrigues. Problemas aritméticos como elementos da matemática do ensino. **Cadernos CEDES**, [s. l.], v. 41, n. 115, p. 230-238, set./dez. 2021. DOI: 10.1590/CC245623.
- BLANTON, Maria L.; KAPUT, James J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, [s. l.], v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/30034944>. Acesso em: 15 mar. 2025.
- BOALER, Jo. **Mentalidades matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradas e do ensino inovador**. Porto Alegre: Penso, 2018.
- BOOTH, Wayne C.; COLOMB, Gregory G.; WILLIAMS, Joseph M. **A arte da pesquisa**. São Paulo: Martins Fontes, 2008. p. 1-38. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219588>. Acesso em: 24 mar. 2025.

BRASIL. **Ministério da Educação e Saúde**. Programa de Ensino Primário. Rio de Janeiro: MEC, 1951.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/CNE, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 15 mar. 2025.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

BÜCHLER, Georg August. **Aritmética elementar**. v. 1. 1. ed. São Paulo: Melhoramentos, 1919.

BÜCHLER, Georg August. **Aritmética elementar**. v. 1. 4. ed. São Paulo: Melhoramentos, 1943.

CANAVARRO, Ana Paula. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, [s. l.], v. 16, n. 2, p. 81-118, 2007. DOI: 10.48489/quadrante.22816. Disponível em: <https://quadrante.apm.pt/article/view/22816>. Acesso em: 15 mar. 2025.

CHARTIER, Roger. **A história cultural: entre práticas e representações**. Tradução de Maria Manuela Galhardo. Lisboa: Difusão Editora, 1988. 244 p.

CHARTIER, Roger. **A história cultural: entre práticas e representações**. Tradução de Maria Manuela Galhardo. Lisboa: Difel, 1990.

CHARTIER, Roger. **Os desafios da escrita**. Tradução de Fulvia M. L. Moretto. São Paulo: UNESP, 2002.

CHOPPIN, Alain. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, dez. 2004. DOI: 10.1590/S1517-97022004000300012.

CONCEIÇÃO, Antonio Robert Chagas. **O cálculo mental para ensinar: uma análise dos trabalhos elaborados por Maria do Carmo Santos Domite, 1980–1995**. 2020. Dissertação (Mestrado em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência) - Escola de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Paulo, São Paulo, 2020.

CORRÊA, Rosa Lydia Teixeira; EISSLER, Roberto João; SCHENA, Denilson Roberto. A ideia de pátria nos livros didáticos Aritmética Elementar - Livro 1 e Nossa Pátria. **História & Ensino**, [s. l.], v. 24, n. 2, p. 261-285, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.5433/2238-3018.2018v24n2p261>. Acesso em: 5 mar. 2025.

CORREIO PAULISTANO. **Aritmética Elementar, pelo Sr. G. A. Büchler** - São Paulo, 1919. São Paulo, n. 20.302, p. 1, 9 jan. 1920. Disponível em: https://memoria.bn.gov.br/docreader/DocReader.aspx?bib=090972_07&pagfis=79. Acesso em: 10 ago. 2025.

COSME, Ruth Edite. **Estratégias de cálculo mental com números racionais: um olhar sobre a expertise profissional de Cecilia Parra**. 2024. Dissertação (Mestrado em Educação

em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas) - Universidade Federal do Paraná, Setor Palotina, Palotina, 2024. Disponível em:
<https://acervodigital.ufpr.br/xmlui/handle/1884/93392> .

COSTA, David Antonio da. **A Aritmética Escolar no Ensino Primário Brasileiro: 1890-1946**. 2010. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em:
<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1792>. Acesso em: 5 mar. 2025.

COSTA, Heribaldo. O ensino da matemática nas escolas primárias. **Revista Nacional**, São Paulo, ano II, n. 10, p. 657-664, out. 1923.

D'ESQUIVEL, Márcio Oliveira. **O ensino de Desenho e Geometria para a escola primária na Bahia (1835-1925)**. 2015. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Formação de Professores) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Jequié, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/135021>. Acesso em: 5 mar. 2025.

DUARTE, Aparecida Rodrigues Silva. Sessão 2: Metodologias para o Ensino de Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2012, Vitória da Conquista. **Anais [...]**. Vitória da Conquista: SBEM, 2012. p. 1-13. Disponível em:
<https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/view/15026/10274>. Acesso em: 5 mar. 2025.

DYNNIKOV, Circe Mary Silva da Silva. Representações de aritmética no livro de Georg Büchler. **Revista de História da Educação Matemática**, [s. l.], v. 2, n. 1, p. 96-116, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/177617>. Acesso em: 5 mar. 2025.

EISSLER, Roberto João; SILVA, Priscila Juliana da. Diálogos entre Arithmetica Elementar de Georg August Büchler e o método intuitivo de Pestalozzi. **Vidya**, Santa Maria, v. 39, n. 2, p. 509-526, 2019. Disponível em:
<https://periodicos.ufrn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/2845>. Acesso em: 5 mar. 2025.

FERREIRA, Miriam Criez; RIBEIRO, Alessandro Jacques; RIBEIRO, Miguel. Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: investigando a compreensão de professores acerca do pensamento algébrico. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 11, n. 25, 5 jul. 2018.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78-91, 2016. Disponível em:
<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644384> . Acesso em: 15 mar. 2025.

FRANA, Andreia Pastore. **O cálculo mental da adição e subtração na obra Lógica do Cálculo 2: fundamentos e estratégias**. 2023. Dissertação (Mestrado em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas) - Universidade Federal do Paraná, Setor

Palotina, Palotina. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/83198>. Acesso em: 2 abr. 2025.

FRANÇA, Denise Medina; RAMIRES NEVES, Kesia Caroline; COSTA DOS SANTOS, Edilene Simões. Saberes profissionais da docência: como introduzir as frações em tempos da pedagogia intuitiva. In: SEMINÁRIO TEMÁTICO INTERNACIONAL: A PESQUISA SOBRE O SABER PROFISSIONAL DO PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA: HISTÓRIA E PERSPECTIVAS ATUAIS, 19., 2021, Florianópolis. **Anais [...]**. Florianópolis: UFSC, 2021. Disponível em: ghemat-brasil.com.br. Acesso em: 5 mar. 2025.

FRANÇA, Denise Medina; RAMIRES, Késia; SANTOS, Edilene Simões Costa dos. Büchler (1921, 1923): saberes de referência para ensinar frações. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, Cruzeiro do Sul, v. 12, n. 5, p. 1-21, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.26843/rencima.v12n5a11>. Acesso em: 5 mar. 2025.

GAERTNER, Rosinéte. A educação e a matemática escolar no município de Blumenau (SC) no período entre 1889 e 1968. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais [...]**. Recife: SBEM, 2004. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/05/CC41807910997.pdf>. Acesso em: 5 mar. 2025.

GAERTNER, Rosinéte. A formação dos professores nas Escolas Teuto-Brasileiras da região de Blumenau (SC). In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2016, Vitória da Conquista. **Anais [...]**. Vitória da Conquista: SBEM, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/download/6129/4495/>. Acesso em: 5 mar. 2025.

GAERTNER, Rosinéte. **A Matemática Escolar em Blumenau (SC) no período de 1889 a 1968**: da Neue Deutsche Schule à Fundação Universidade Regional de Blumenau. 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2004. Disponível em: https://www2.fc.unesp.br/ghoem/trabalhos/10_7_Gaertner_Tese.pdf. Acesso em: 5 mar. 2025.

JULIA, Dominique. A cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação**, Campinas, n. 1, p. 9-43, 2001.

KAPUT, James J. Teaching and learning a new algebra with understanding. In: FENNEMA, Elizabeth; ROMBERG, Thomas (Org.). **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah: Erlbaum, 1999. p. 133-155.

KAPUT, James J. Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum. In: FENNELL, Susan (Ed.). **The nature and role of algebra in the K-14 curriculum**: proceedings of a national symposium. Washington, DC: National Research Council, National Academy Press, 1998. p. 25-26.

KAPUT, James J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, James J.; CARRAHER, David W.; BLANTON, Maria L. (org.). **Algebra in the early grades**. New York: Lawrence Erlbaum; Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2008. p. 5-17.

KIERAN, Carolyn; PANG, Jeongyee; SCHIFTER, Deborah; NG, Ko-Ping Sarah. **Early algebra**: research into its nature, its learning, its teaching. Hamburg: Springer Open, 2016. Disponível em: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-32258-2>. Acesso em: 5 mar. 2025.

KLUG, João. **Consciência germânica e luteranismo na comunidade alemã de Florianópolis (1868-1938)**. 1991. Dissertação (Mestrado em História) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1991. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/75799>. Acesso em: 5 mar. 2025.

KUZU, Taha Ertuğrul. Mental calculation strategies as a ‘missing link’ between arithmetic and algebra - insights into the ‘auxiliary task’ and its role in the ‘cognitive gap’. **Turkish Journal of Mathematics Education**, Trabzon, v. 4, n. 1, p. 1-23, 2023. Disponível em: <https://dergipark.org.tr/en/pub/tujme/issue/78659/1226716>. Acesso em: 20 jun. 2025.

LEME DA SILVA, Maria Célia. O ensino de número na escola primária: transformações lidas em manuais didáticos (1888-1965). **Revista Exitus**, Santarém, v. 9, p. 51-75, 2019. ISSN 2237-9460. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/204890>. Acesso em: 5 mar. 2025.

LUNA, José Marcelo Freitas de. A Escola Nova Alemã de Blumenau e o seu Programa de Português. **Revista on-Line de Política e Gestão Educacional**, Araraquara, n. 7, p. 72-87, 2009. DOI: <https://doi.org/10.22633/rpge.v0i7.9257>. Disponível em: <https://periodicos.fclar.unesp.br/rpge/article/view/9257>. Acesso em: 5 mar. 2025.

LUNA, José Marcelo Freitas. Pelos 100 anos de um marco para o ensino de português como língua segunda/estrangeira. **Atos de Pesquisa em Educação**, Blumenau, v. 11, n. 3, p. 779-794, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.22633/rpge.v0i7.9257>. Acesso em: 5 mar. 2025.

MAILER, Valéria Contrucci de Oliveira; RODRIGUES, Cintia Régia. Instruções aos professores e o ensino de português nas escolas étnicas no Vale do Itajaí no jornal Mitteilungen des Deutschen Schulvereins für Santa Catharina (Südbrasilien) (1906-1917). **Revista Brasileira de História da Educação**, Maringá, v. 22, p. e192, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.4025/rbhe.v22.2022.e192>. Acesso em: 5 mar. 2025.

OLIVEIRA, Marcus Aldenison de. **A Aritmética Escolar e o Método Intuitivo**: um novo saber para o curso primário (1870-1920). 2017. Tese (Doutorado em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência) – Universidade Federal de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/178956>. Acesso em: 5 mar. 2025.

OLIVEIRA, Maria Aparecida; VALDEMARIN, Vera Teresinha. No Instituto Pestalozzi e na escola paulista: uma álgebra intuitiva para o ensino primário? (1800-1920). **Revista de História da Educação Matemática (HISTEMAT)**, São Paulo, v. 8, p. 1-28, 2022.

PARANÁ (Estado). **Código do Ensino do Estado do Paraná**: Decreto n. 17, de 9 de janeiro de 1917. Curitiba: Imprensa Oficial, 1917.

PARANÁ (Estado). Diretoria Geral da Instrução Pública. **Programas do Ensino Primário**. Curitiba: Typ. d'A República, 1932.

PAVARIN, Karina Cristina dos Santos. **Problemas de aritmética em tempos de Aritmética Intuitiva: uma análise em livros didáticos (1890-1930)**. 2020. Dissertação (Mestrado em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência) – Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/222267>. Acesso em: 5 mar. 2025.

PAVARIN, Karina. Os problemas de aritmética nos livros didáticos: finalidades de uso (1890-1920). **Revista de História da Educação Matemática (HISTEMAT)**, São Paulo, v. 8, p. 1-15, 2022. Disponível em: <https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/502>. Acesso em: 5 mar. 2025.

PINTO, Neuza Bertoni. Saberes para ensinar cálculo mental na escola primária em programas de ensino e manuais pedagógicos. In: PINTO, Neuza Bertoni; NOVAES, Barbara Winiarski Diesel (org.). **Circulação e apropriação de saberes elementares matemáticos no ensino primário no Estado do Paraná (1903-1971)**. Curitiba: LF Editorial, 2017. p. 197-223.

PINTO, Neuza Bertoni; ALMEIDA, André Francisco. A presença das tabuadas em programas de ensino e em livros didáticos de Aritmética da Escola Primária - início do séc. XX. **Revista de História da Educação Matemática (HISTEMAT)**, São Paulo, v. 3, p. 107-123, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/186637>. Acesso em: 5 mar. 2025.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: Universidade de Lisboa, set. 2009. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/267842645_ALGEBRA_NO_ENSINO_BASIC. Acesso em: 15 mar. 2025.

PROST, Antoine. **Doze lições sobre a História**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

RODRIGUES, Cintia Regia; MAILER, Valéria Contrucci de Oliveira. “Die Kinder Sollen Erzogen Werden Zu Tüchtigen, Praktischen Menschen”: as escolas comunitárias teuto-brasileiras. **Educação em Foco**, [s. l.], v. 29, n. Dossiê Temático, p. e29056, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.34019/2447-5246.2024.v29.45077>. Acesso em: 5 mar. 2025.

SALLA, Juliana Martendal. **A matemática do ensino de cálculo mental: transformações e permanências em atividades das coleções GRUEMA (1974/75) e Ápis Mais (2021)**. 2025. Dissertação (Mestrado em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas) – Universidade Federal do Paraná, Palotina. Disponível em:

SALVADOR, Heloisa Hernandez de Fontes. **A condução do ensino das operações aritméticas nas séries iniciais: do tradicional ao intuitivo (entre a segunda metade do século XIX até a terceira década do século XX)**. 2017. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/193332>. Acesso em: 5 mar. 2025.

SANTOS, Edilene Simões Costa dos; FRANÇA, Denise Medina; RAMIRES, Késia. Saberes de referência para a docência mobilizados com um dispositivo didático para o ensino de fração. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 40, n. 2, p. 1-22, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.5007/2175-795X.2022.e84083>. Acesso em: 5 mar. 2025.

SÃO PAULO (Estado). Diretoria da Instrução Pública. **Programmas do Ensino Primário**. São Paulo: Typ. Vanorden, 1894.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. **Guia Curricular de Matemática - 1º grau**. São Paulo: SEE/SP, 1975.

SILVA, Circe Mary Silva da. Aritmômetros e seus usos no Brasil nos séculos XIX e XX. **RIDPHE_R Revista Iberoamericana do Patrimônio Histórico-Educativo**, Campinas, v. 5, p. e019020, 2019. Disponível em: https://doi.org/10.20888/ridphe_r.v5i0.9857. Acesso em: 5 mar. 2025.

SILVA, Circe Mary Silva da. Georg August Büchler: um adepto do ensino intuitivo no Brasil. In: SEMINÁRIO TEMÁTICO, 14., 2016, Natal. **Anais [...]**. Natal: IFRN, 2016 Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/340935499_GEORG_AUGUST_BUCHLER_um_a_depto_do_ensino_intuitivo_no_Brasil. Acesso em: 5 mar. 2025.

SILVA, Circe Mary Silva da. **Germanidade e matemática escolar no sul do Brasil**. Formiga: Union, 2024. 328 p. DOI: <https://doi.org/10.29327/5437912>.

SILVA, Circe Mary Silva da. Imagens nos livros didáticos de matemática: Georg Augusto Büchler e Karl Sölter. **Acta Scientiarum. Education**, Maringá, v. 39, n. 1, p. 55-65, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.4025/actascieduc.v39i1.28468>. Acesso em: 5 mar. 2025.

TELO, Ricardo Motta. **As comissões avaliadoras de livros didáticos entre 1938 e 1971 no Brasil**. 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

THORNDIKE, Edward L. **The psychology of arithmetic**. New York: The Macmillan Company, 1922.

TRINDADE, Deoclecia de Andrade. **As artes de medir: saberes matemáticos no ensino primário de São Paulo, 1890-1950**. 2018. Tese (Doutorado em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência) - Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/192879>. Acesso em: 5 mar. 2025.

UNIVESP. Universidade Virtual do Estado de São Paulo. **Estruturas da Educação Básica**. [s.l.], [s.n.], 2018. Disponível em: <https://apps.univesp.br/estruturas-da-educacao-basica/assets/EstruturasdaEducacaoBasica.pdf>. Acesso em: 02 out. 2025.

USISKIN, Zalman. Conceptions of school algebra and uses of variables. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Eds.). **The ideas of algebra, K-12**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 8-19. Disponível em: <https://legacy.slmath.org/attachments/workshops/454/Usiskin-Conceptions%20of%20School%20Algebra.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2025.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da Educação Matemática: considerações sobre suas potencialidades na formação do professor de matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 23, n. 35, p. 123-136, 2010. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/160381>. Acesso em: 10 ago. 2025.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Diálogos pertinentes da História da Educação Matemática: os diálogos trans, inter e intra da História da Educação Matemática. In: VALENTE, W. R. (Org.). **História da educação matemática no Brasil**. São Paulo: Livraria da Física, 2014. v. 1, p. 97-116.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. **REVEMAT: Revista de Ensino de Matemática**, Florianópolis, v. 2, n. 1, p. 15-28, 2006. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/12990/12091/40051>. Acesso em: 23 mar. 2025.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da educação matemática: sua importância na formação de professores. **TANGRAM - Revista de Educação Matemática**, Dourados, v. 4, n. 3, p. 151-161, 2021. DOI: 10.30612/tangram.v4i3.13912. Disponível em: <https://ojs.ufgd.edu.br/tangram/article/view/13912>. Acesso em: 24 mar. 2025.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Zetetiké**, Campinas, v. 16, n. 2, p. 139-162, 2008. DOI: 10.20396/zet.v16i30.8646894. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646894>. Acesso em: 29 mar. 2025.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Programas de Ensino e Manuais Escolares como Fontes para Estudo da Constituição da Matemática para Ensinar. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 12, n. 2, p. 51-63, nov. 2019. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5007/1982-5153.2019vy12n2p51>. Acesso em: 4 abr. 2025.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Uma história da graduação dos saberes: elementos para análise da matemática do ensino. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemática**, Manaus, v. 19, n. 43, p. 22-33, 2023. DOI: 10.18542/amazrecm.v19i43.15271.

ZANCAN, Sabrina; BERTICELLI, Danilene Gullich Donin. Sense Líquen: uma proposta para trabalhar com números e quantidades. **Educação: Teoria e Prática**, Rio Claro, v. 33, n. 66, p. e37, 2023. DOI: 10.18675/1981-8106.v33.n.66.s17082. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/educacao/article/view/17082>. Acesso em: 10 fev. 2026.