

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JOSÉ FERNANDO ARSIE

A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO PONTE CONCEITUAL PARA O ENSINO  
DE TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES PERIÓDICAS

CURITIBA

2025

JOSÉ FERNANDO ARSIE

A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO PONTE CONCEITUAL PARA O ENSINO  
DE TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES PERIÓDICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Pettres.

CURITIBA

2025

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Arsie, José Fernando

A modelagem matemática como ponte conceitual para o ensino de trigonometria e funções periódicas. / José Fernando Arsie. – Curitiba, 2025.  
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Pettres.

1. Trigonometria – Estudo e ensino. 2. Modelagem matemática – Teoria e aplicações. 3. Aprendizagem. 4. Ensino médio. 5. Ensino superior. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Pettres, Roberto. IV. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - 31075010001P2

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **JOSÉ FERNANDO ARSIE**, intitulada: **A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO PONTE CONCEITUAL PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES PERIÓDICAS**, sob orientação do Prof. Dr. ROBERTO PETTRES, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 11 de Dezembro de 2025.



ROBERTO PETTRES

Presidente da Banca Examinadora



SAULO POMPONET OLIVEIRA

Avaliador Externo (DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UFPR)



ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos aqueles que tornaram a realização desta dissertação possível.

A Deus, que em sua infinita bondade, me concedeu a vida, a saúde e a força para perseguir este sonho com perseverança e dedicação.

À minha amada esposa, Rafaela Zagulski, por ser a minha primeira e maior incentivadora. Seu apoio irrestrito e inabalável crença na possibilidade desta conquista foram o combustível para os momentos desafiadores. Esta conquista também é sua.

Ao meu orientador, professor doutor Roberto Pettres. Agradeço imensamente por, primeiramente, ter aceitado o desafio de me orientar, e, em seguida, por toda a dedicação, o engajamento na pesquisa, as correções quase que imediatas. Enfim, muito obrigado Mestre!

Aos alunos do Colégio Estadual Conselheiro Quielse Crisóstomo da Silva que, com sua curiosidade e entusiasmo, deram vida à atividade de Modelagem Matemática, provando que o aprendizado significativo transforma.

Aos professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Paraná (UFPR), pela excelência e rigor na formação, essenciais para a minha trajetória acadêmica e profissional.

A todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a conclusão desta etapa, o meu sincero e profundo obrigado.

A matemática, senhora que ensina o homem a ser simples e modesto, é a base de todas as ciências e de todas as artes. (Malba Tahan, 1895 – 1974).

## RESUMO

A evasão e o desinteresse nas áreas de Ciências Exatas, especialmente no Ensino Superior, estão frequentemente associados à percepção da Matemática como uma disciplina abstrata, descontextualizada e de difícil compreensão. Este trabalho tem como objetivo analisar o impacto da Modelagem Matemática no ensino de Trigonometria no Ensino Médio, investigando como essa metodologia pode aprimorar a aprendizagem e, conseqüentemente, servir como um fator mitigador da evasão e do desinteresse nas áreas de Exatas. O estudo, de abordagem quali-quantitativa, descreve a aplicação de uma intervenção didática pautada na Modelagem Matemática, utilizando a atividade prática "Medindo a Altura da Caixa d'Água da Escola", na qual os alunos construíram e utilizaram um teodolito artesanal para aplicar o conceito de tangente e as razões trigonométricas em um problema real. O desempenho dos estudantes foi avaliado por meio de pré-teste e pós-teste, utilizando uma questão de vestibular da UFPR sobre o cálculo da tangente, e a percepção de 32 participantes foi coletada via questionário. Os resultados quantitativos demonstraram uma melhora significativa no desempenho: o percentual de acertos na questão de avaliação subiu de 43,8% no pré-teste para 68,8% no pós-teste, após a vivência prática. Os dados qualitativos reforçaram o sucesso da intervenção, indicando alto engajamento e percepção de utilidade: os estudantes atribuíram média de 4,56 (em escala de 1 a 5) à afirmação de que conseguiram relacionar a matemática com o mundo real, e a média foi de 4,84 sobre o desejo de participar de mais atividades práticas. Conclui-se que a Modelagem Matemática pode vir a ser uma metodologia eficaz para promover a aprendizagem significativa e o engajamento estudantil. Ao possibilitar que o aluno "aprende Matemática fazendo Matemática", o ensino contextualizado fortalece a base conceitual e a motivação, constituindo um fator crucial para preparar o aluno com autonomia e interesse, contribuindo teoricamente para a redução das altas taxas de evasão e desinteresse nos cursos de Exatas do Ensino Superior.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática; Trigonometria; Ensino Médio; Evasão; Ensino Superior; Aprendizagem Significativa.

## ABSTRACT

Evasion and disinterest in Exact Sciences, especially in Higher Education, are often associated with the perception of Mathematics as an abstract, decontextualized, and difficult subject to understand. This work aims to analyze the impact of Mathematical Modeling on the teaching of Trigonometry in High School, investigating how this methodology can enhance learning and consequently serve as a mitigating factor for evasion and disinterest in Exact Sciences fields. The study, which uses a qualitative approach, describes the application of a didactic intervention based on Mathematical Modeling, using the practical activity "Measuring the Height of the School Water Tank," in which students constructed and used a handmade theodolite to apply the concept of tangent and trigonometric ratios to a real-world problem. Student performance was evaluated through a pre-test and post-test, using a UFPR college entrance exam question on tangent calculation, and the perception of 32 participants was collected via questionnaire. The quantitative results demonstrated a significant improvement in performance: the percentage of correct answers on the assessment question rose from 43.8% in the pre-test to 68.8% in the post-test, following the practical experience. The qualitative data reinforced the success of the intervention, indicating high engagement and perceived utility: students attributed an average of 4.56 (on a 1 to 5 scale) to the statement that they were able to relate mathematics to the real world, and the average was 4.84 regarding the desire to participate in more practical activities. It is concluded that Mathematical Modeling can be an effective methodology for promoting meaningful learning and student engagement. By allowing the student to "learn Mathematics by doing Mathematics", contextualized teaching strengthens the conceptual foundation and motivation, establishing a crucial factor in preparing the student with autonomy and interest, theoretically contributing to the reduction of the high rates of evasion and disinterest in Exact Sciences courses in Higher Education.

**Keywords:** Mathematical Modeling; Trigonometry; High School; Evasion; Higher Education; Significant Learning.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	21
FIGURA 2: TRIÂNGULO RETÂNGULO .....	22
FIGURA 3: COSSENO DE $A + B$ .....	27
FIGURA 4: SENO DE $A + B$ .....	29
FIGURA 5: TANGENTE DE $A + B$ .....	32
FIGURA 6: LEIS DO SENOS.....	35
FIGURA 7: LEIS DOS COSSENO.....	37
FIGURA 8: GRÁFICO DA FUNÇÃO.....	42
FIGURA 9: CICLO TRIGONOMÉTRICO.....	42
FIGURA 10: QUADRANTES NA CIRCUNFERÊNCIA.....	43
FIGURA 11: 1º QUADRANTE.....	43
FIGURA 12: 2º QUADRANTE.....	44
FIGURA 13: 3º QUADRANTE.....	44
FIGURA 14: 4º QUADRANTE.....	45
FIGURA 15: ARCOS E ÂNGULOS.....	46
FIGURA 16: ARCO DE MEIA VOLTA.....	46
FIGURA 17: ARCO DE UMA VOLTA.....	46
FIGURA 18: MEDIDA ANGULAR I.....	47
FIGURA 19: MEDIDA ANGULAR II.....	48
FIGURA 20: MEDIDA ANGULAR III.....	48
FIGURA 21: CIRCULOS CONCÊNTRICOS.....	50
FIGURA 22: RESOLUÇÃO DE EXEMPLO.....	51
FIGURA 23: RELÓGIO ANALÓGICO I.....	51
FIGURA 24: RELÓGIO ANALÓGICO II.....	52
FIGURA 25: CICLO TRIGONOMÉTRICO I.....	53
FIGURA 26: CICLO TRIGONOMÉTRICO II.....	53
FIGURA 27: CICLO TRIGONOMÉTRICO III.....	55
FIGURA 28: TANGENTE DE $X$ .....	56
FIGURA 29: COTANGENTE DE $X$ .....	57
FIGURA 30: SECANTE DE $X$ .....	58
FIGURA 31: COSSECANTE DE $X$ .....	59
FIGURA 32: RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA.....	60

FIGURA 33: ÂNGULOS NOTÁVEIS I.....	63
FIGURA 34: ÂNGULOS NOTÁVEIS II.....	65
FIGURA 35: SIMETRIAS I.....	66
FIGURA 36: SIMETRIAS II.....	66
FIGURA 37:SIMETRIAS III.....	67
FIGURA 38: FUNÇÃO DE EULER.....	68
FIGURA 39: GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO.....	69
FIGURA 40: GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSENO.....	70
FIGURA 41: EXERCÍCIO ENEM I.....	73
FIGURA 42: EXERCÍCIO ENEM II.....	74
FIGURA 43: PÃO DE AÇÚCAR.....	75
FIGURA 44:ESBOÇO PÃO DE AÇÚCAR.....	75
FIGURA 45: EXERCÍCIO UFPR.....	78
FIGURA 46: TEODOLITO.....	81
FIGURA 47: PRÁTICA NA ESCOLA.....	81
FIGURA 48: DESEMPENHO DOS ESTUDANTES.....	83
FIGURA 49:GRÁFICO DE OPINIÃO I.....	84
FIGURA 50: GRÁFICO DE OPINIÃO II.....	84
FIGURA 51: GRÁFICO DE OPINIÃO III.....	85
FIGURA 52: GRÁFICO DE OPINIÃO IV.....	85
FIGURA 53: GRÁFICO DE OPINIÃO V.....	86
FIGURA 54: BIG WHEEL.....	87
FIGURA 55: ESBOÇO DA BIG WHEEL.....	88
FIGURA 56: GRÁFICO GERADO PELA BIG WHEEL.....	91

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores de Seno.....	68
Tabela 2 – Valores do Cosseno.....	69

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>9</b>
1.1 GENERALIDADES .....	9
1.2 JUSTIFICATIVA .....	11
1.3 OBJETIVOS .....	12
1.3.1 OBJETIVO GERAL.....	12
1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	12
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	13
<b>2 REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>14</b>
2.1 O SENO: ORIGEM E EVOLUÇÃO HISTÓRICA .....	14
2.2 O COSSENO: A RELAÇÃO COMPLEMENTAR E SEU DESENVOLVIMENTO.....	15
2.3 A TANGENTE: DAS OBSERVAÇÕES ASTRONÔMICAS À MATEMÁTICA MODERNA.....	16
2.4 CONTEXTO HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA .....	17
2.5 O TRIÂNGULO RETÂNGULO E AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS .....	20
2.6 O TEOREMA DE PITÁGORAS E A RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA .....	21
2.7 A MODELAGEM COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM MATEMÁTICA.....	23
<b>3 IDENTIDADES FUNDAMENTAIS DA TRIGONOMETRIA.....</b>	<b>25</b>
3.1 A FÓRMULA DE EULER E A RELAÇÃO ENTRE $e, \pi$ E $i$ . .....	25
3.2 COSSENO DA SOMA E DA DIFERENÇA.....	26
3.3 SENO DA SOMA E DA DIFERENÇA.....	28
3.4 TANGENTE DA SOMA E DA DIFERENÇA .....	31
3.5 LEI DOS SENOS.....	34
3.6 LEI DOS COSSENOIS .....	36
3.7 ARCO METADE .....	38
3.8 TRANSFORMAÇÃO DA SOMA EM PRODUTO .....	39
<b>4 AS FUNÇÕES PERIÓDICAS E A CONTRIBUIÇÃO DE EULER PARA A TRIGONOMETRIA.....</b>	<b>41</b>
4.1 CICLO TRIGONOMÉTRICO .....	42
4.2 QUADRANTES NA CIRCUNFERÊNCIA.....	43
4.3 ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA.....	43

4.4 ARCOS NA CIRCUNFERÊNCIA.....	45
4.5 ARCOS E ÂNGULOS.....	45
4.6 MEDIDAS DE ARCOS .....	47
4.7 MEDIDAS DE ÂNGULOS.....	49
4.8 CICLO TRIGONOMÉTRICO .....	52
4.9 ARCOS CÔNGRUOS.....	53
4.10 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO CICLO TRIGONOMÉTRICO .....	54
4.11 TANGENTE DE X .....	55
4.12 COTANGENTE DE X .....	56
4.13 SECANTE DE X.....	57
4.14 COSSECANTE DE X .....	58
4.15 RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA .....	60
4.16 ÂNGULOS NOTÁVEIS.....	63
4.17 SIMETRIAS NA CIRCUNFERÊNCIA .....	65
4.18 FUNÇÃO DE EULER .....	67
4.19 FUNÇÃO SENO .....	68
4.20 FUNÇÃO COSSENO .....	70
<b>5 A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS E APLICAÇÕES PRÁTICAS .....</b>	<b>72</b>
5.1 DO PROBLEMA REAL AO MODELO TRIGONOMÉTRICO: A ALTURA DA CAIXA D'ÁGUA COMO TEMA GERADOR NA MODELAGEM MATEMÁTICA .....	80
<b>6 A MATEMÁTICA POR TRÁS DA RODA-GIGANTE: UMA APLICAÇÃO CONTEXTUALIZADA.....</b>	<b>87</b>
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>92</b>
<b>8 REFERÊNCIAS.....</b>	<b>94</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>96</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 GENERALIDADES

Entre os diversos conteúdos da Matemática estudados no Ensino Médio, tem-se a trigonometria, conectando tópicos de geometria, álgebra e o estudo de funções periódicas, cujas aplicações são evidenciadas em áreas do conhecimento como Física e Engenharias, por exemplo. No entanto, apesar da trigonometria ter seus fundamentos baseados em aplicações concretas no triângulo, nem sempre este conteúdo é intuitivamente aprendido em sala de aula, levando determinados estudantes a apresentarem dificuldades em compreender os conceitos fundamentais, limitando-se a decorar fórmulas e regras, o que pode resultar em um aprendizado superficial e pouco significativo sobre o tema.

Essa fragilidade na formação do estudante em nível básico de ensino, seja sobre o conteúdo de trigonometria ou outro conteúdo matemático, pode contribuir diretamente com as altas taxas de evasão observadas em cursos superiores nas áreas de Ciências Exatas, conforme citado por Garcia e Gomes (2022), em seu trabalho intitulado "Causas da evasão em cursos de Ciências Exatas: uma revisão da produção acadêmica", em que são destacadas características semelhantes quanto ao perfil de formação e aspectos curriculares que retratam as causas de evasão mais comuns, entre elas, a falta de conhecimento sobre tópicos apresentados no ensino básico, didática e metodologia insuficiente de ensino dos professores.

Garcia e Gomes (2022) realizaram uma revisão da literatura sobre a evasão em cursos de Ciências Exatas no Brasil entre os anos de 2000 e 2020, analisando 32 estudos acadêmicos sobre o tema. Os autores identificaram que as principais causas da evasão estão associadas ao processo de ensino-aprendizagem, especialmente às dificuldades de desempenho, deficiências na formação básica e metodologias de ensino desmotivadoras. Conforme os autores, "a causa de evasão mais recorrente trata das dificuldades de desempenho acadêmico e reprovações reforçando os prejuízos que este problema traz para Instituições de Ensino Superior (IES)" (GARCIA e GOMES, 2022, p. 948).

Além disso, destacam que a didática e as metodologias docentes têm papel significativo no desinteresse e na evasão dos alunos, uma vez que "tais apontamentos

podem evidenciar metodologias desmotivadoras que não vão ao encontro das necessidades dos alunos” (GARCIA e GOMES, 2022, p. 949). As deficiências na formação básica também aparecem como fator relevante, especialmente nas disciplinas de matemática e física, pois “as deficiências na formação básica podem representar uma abordagem equivocada destas disciplinas no currículo do ensino básico” (GARCIA e GOMES, 2022, p. 945).

Os autores observam ainda que fatores externos, como o tempo reduzido para estudos e as condições socioeconômicas, agravam o problema da evasão: “a falta de tempo para conciliar trabalho e estudo foi a segunda maior causa de evasão entre os trabalhos revisados” (GARCIA e GOMES, 2022, p. 949). Em síntese, os resultados indicam que “as principais causas encontradas demonstram uma congruência para problemas relacionados ao ensino-aprendizado, que por diversos motivos está ocorrendo de maneira ineficaz” (GARCIA e GOMES, 2022, p. 952).

Esses resultados corroboram a relevância de estratégias pedagógicas inovadoras, como a modelagem matemática, que favorecem a aprendizagem significativa e podem contribuir para a redução da evasão na área de Ciências Exatas.

No caso do conhecimento sobre a trigonometria e funções trigonométricas, entende-se que tal conhecimento é indispensável, principalmente quando se é pensado em disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral, presentes em cursos de Ciências Exatas.

Diante desse cenário e da necessidade de metodologias e/ou exemplos concretos para o ensino da trigonometria, diversos pesquisadores têm buscado apresentar alternativas metodológicas e tecnológicas para abordar o tema, entre eles destacam-se os trabalhos de Pedroso (2012), defendendo que o uso de *software* como o GeoGebra pode favorecer a visualização e a compreensão dos conceitos trigonométricos, tornando o processo de ensino mais atrativo. Gomes (2015), por sua vez, destaca a importância da abordagem histórica como recurso pedagógico, ao propor atividades que retomam o desenvolvimento da trigonometria ao longo do tempo. Nessa perspectiva, Oliveira e Diniz (2018) evidenciam que o uso da Modelagem Matemática se apresenta como uma ferramenta eficaz para contextualizar o ensino da trigonometria, aproximando os conceitos da realidade dos estudantes.

É nesse contexto que o presente trabalho busca apresentar de forma sintetizada, aspectos históricos e fundamentos da trigonometria, relações e

identidades trigonométricas, o uso de modelagem matemática para resolução de problemas geométricos, além do uso do *software* GeoGebra para construção de gráficos e representações visuais das soluções obtidas. Almeja-se com esse trabalho, contribuir para o ensino de trigonometria e em especial as funções trigonométricas, cujos exemplos possam servir como ferramenta alternativa e complementar para professores de Matemática, com a finalidade de tornar o ensino deste conteúdo visualmente atrativo e concreto, que a longo prazo, possam impactar positivamente no desempenho dos estudantes que optarem por cursos superiores em áreas que envolvam Ciências Exatas.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

O conhecimento sobre a trigonometria, principais relações e o uso de funções trigonométrica, é parte dos estudos desenvolvidos no ensino básico e base para disciplinas do ensino superior na área de Ciências Exatas como o Cálculo Diferencial e Integral. A falta ou superficialidade deste conhecimento, pode levar ao baixo desempenho dos estudantes em tais disciplinas, que em alguns casos, pode levar a problemas de evasão nos cursos de Ciências Exatas. Esse problema pode ter suas raízes no ensino básico, onde a falta de procedimentos metodológicos como exemplos aplicados e sequências didáticas, pode levar ao desinteresse no conteúdo.

A proposta deste trabalho está em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio, que destaca o estudo das funções trigonométricas como instrumento para a modelagem e a interpretação de fenômenos periódicos. A BNCC orienta que esses conteúdos sejam abordados de forma integrada à resolução de problemas, à análise de diferentes representações matemáticas e à construção de modelos. Nesse sentido, o uso da Modelagem Matemática contribui para uma aprendizagem mais significativa e para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes. É nesse sentido que o presente trabalho se justifica, buscando apresentar alternativas e subsidiando práticas didáticas para o professor de matemática em sala de aula, cujo estudo pode ser apresentado e reproduzido de forma contínua, versando sobre os aspectos históricos e atualidades sobre a trigonometria e seu uso.

## 1.3 OBJETIVOS

### 1.3.1 OBJETIVO GERAL

Subsidiar a partir da construção de uma proposta didática sobre trigonometria e funções trigonométricas, apresentado aspectos históricos, o uso de Modelagem Matemática e aplicações em problemas reais para o ensino de funções trigonométricas no Ensino Médio, apresenta-se como o objetivo geral deste trabalho.

### 1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para atingir o objetivo geral proposto, esta dissertação estabelece os seguintes objetivos específicos:

- I) Analisar os principais conceitos históricos e teóricos relacionados à trigonometria, destacando sua evolução e importância para o ensino de Matemática.
- II) Apresentar as identidades e relações fundamentais da trigonometria, contextualizando-as como base conceitual para o estudo das funções periódicas.
- III) Explorar a modelagem matemática como metodologia de ensino que favorece a aprendizagem significativa e a contextualização dos conteúdos trigonométricos.
- IV) Elaborar uma proposta didática que integre o uso de recursos tecnológicos (como o GeoGebra) à resolução de problemas reais envolvendo funções trigonométricas.
- V) Aplicar e analisar uma atividade prática de modelagem matemática voltada à determinação da altura de uma caixa d'água, relacionando teoria e prática.
- VI) Investigar as percepções e o desempenho dos estudantes em relação à atividade proposta, avaliando o potencial da modelagem para o ensino de trigonometria.
- VII) Refletir sobre como o uso da modelagem matemática pode contribuir para a redução da evasão e do desinteresse nas áreas de Ciências Exatas, ao promover uma aprendizagem mais significativa e motivadora.

## 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esta dissertação está organizada em sete capítulos, estruturados de forma a apresentar progressivamente os fundamentos teóricos, o desenvolvimento metodológico e as aplicações práticas da pesquisa.

O Capítulo 1 introduz o tema, apresentando as generalidades, a justificativa, os objetivos e a organização geral do trabalho.

O Capítulo 2 aborda a revisão de literatura, contemplando aspectos históricos e conceituais da trigonometria, com ênfase nas razões trigonométricas, suas origens e desenvolvimento, além da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem.

O Capítulo 3 trata das identidades fundamentais da trigonometria, apresentando as principais relações entre seno, cosseno e tangente, bem como as leis dos senos e dos cossenos, o arco metade e a transformação da soma em produto.

O Capítulo 4 discute as funções periódicas e a contribuição de Euler para a trigonometria, relacionando a construção do ciclo trigonométrico, os arcos e ângulos na circunferência e as propriedades das funções trigonométricas.

O Capítulo 5 apresenta a modelagem matemática como estratégia de resolução de exercícios e aplicações práticas, destacando o uso da trigonometria na resolução de problemas contextualizados, como a determinação da altura de uma caixa d'água.

O Capítulo 6 desenvolve uma aplicação contextualizada sobre a rodagigante, demonstrando a relação entre as funções trigonométricas e fenômenos periódicos do cotidiano, com o apoio de recursos tecnológicos como o software GeoGebra.

O Capítulo 7 traz as considerações finais, nas quais são discutidos os resultados alcançados, as contribuições do estudo e as perspectivas para futuras pesquisas.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, apresenta-se a revisão literária acerca das três principais razões trigonométricas estudadas no Ensino Médio da Rede Estadual do Paraná: seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e a relação fundamental da trigonometria. Busca-se contextualizar o desenvolvimento histórico desses conceitos, desde suas origens na antiguidade até sua consolidação como ferramentas fundamentais na Matemática moderna. Além disso, são discutidas as contribuições de diversos autores e pesquisadores que abordam o ensino e a aprendizagem da trigonometria, com ênfase nas metodologias que favorecem a compreensão significativa desses conteúdos pelos estudantes. Dessa forma, este capítulo fornece um embasamento teórico necessário para sustentar as análises e discussões apresentadas nos capítulos seguintes.

### 2.1 O SENO: ORIGEM E EVOLUÇÃO HISTÓRICA

A origem da função seno remonta às civilizações antigas, que buscavam compreender as relações entre arcos e cordas em círculos. Entre os gregos, o conceito equivalente ao seno moderno era o da corda de um arco, utilizada principalmente na astronomia e na geometria (BOYER, 1996). Hiparco de Niceia (séc. II a.C.) foi um dos primeiros a compilar uma tabela de cordas, relacionando ângulos centrais e comprimentos correspondentes, o que permitia determinar posições de astros e prever eclipses (EVES, 2008).

Entretanto, o desenvolvimento mais próximo do conceito moderno de seno ocorreu na Índia antiga, com o matemático Aryabhata (476–550 d.C.). Ele introduziu o termo *ardha-jya* (“meia corda”), que designava o comprimento da metade da corda correspondente a um arco, equivalente ao seno atual. Essa ideia representou uma simplificação importante, pois dispensava o cálculo de toda a corda, permitindo o uso direto do raio como unidade de referência (BOYER, 1996).

Com o avanço da matemática árabe, o termo sânscrito *jya* foi transliterado para o árabe *jiba*, que, ao ser traduzido para o latim, tornou-se *sinus*, palavra que significa “baía” ou “dobra”. A tradução incorreta acabou consolidando o termo “seno”, que permanece até os dias atuais (EVES, 2008). No século XV, a função

seno já era amplamente utilizada nas tabelas trigonométricas da Europa, com crescente precisão e aplicação em cálculos náuticos e astronômicos.

O desenvolvimento da trigonometria moderna levou a definição analítica do seno como razão entre o cateto oposto e a hipotenusa em um triângulo retângulo, e posteriormente como função periódica do ângulo. Essa transição do geométrico para o analítico consolidou o papel do seno como uma das funções fundamentais da matemática moderna.

## 2.2 O COSSENO: A RELAÇÃO COMPLEMENTAR E SEU DESENVOLVIMENTO

A história do cosseno está intrinsecamente ligada à do seno, surgindo como uma relação complementar. O termo “cosseno” tem origem no latim *complementi sinus*, que significa “seno do complemento”. Essa relação expressa a ideia de que, em um triângulo retângulo, o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu ângulo complementar:  $\sin(90^\circ - \theta) = \cos(\theta)$ .

Embora esse conceito estivesse implicitamente nas tabelas indianas e árabes, o uso formal do cosseno aparece em textos latinos do século XII, a partir das traduções de obras de Al-Battani e Al Tusi. Esses estudiosos árabes introduziram expressões equivalentes à atual definição do cosseno, ao considerar a projeção de um arco sobre o eixo horizontal de um círculo (BOYER, 1996).

Durante o renascimento, matemáticos europeus como Regiomontanus (1436 – 1476) e Copérnico (1473 – 1543) utilizaram sistematicamente o cosseno em seus cálculos astronômicos, consolidando o seu uso como uma função independente. No século XVII, com o desenvolvimento do cálculo diferencial, as funções seno e cosseno se tornaram fundamentais para descrever fenômenos periódicos e fenômenos ondulatórios, ampliando seu alcance para a física e engenharias (EVES, 2008).

O desenvolvimento da análise matemática no século XVII marcou uma nova etapa na compreensão das funções trigonométricas. Entre os avanços mais significativos, destaca-se a formulação das Séries de Taylor, que permitiram expressar funções por meio de somas infinitas de potências. Essa ideia foi apresentada pelo matemático inglês Brook Taylor (1685 – 1731), em sua obra *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* (1715), tornando-se uma das bases do cálculo moderno (BOYER, 1996).

Embora o nome da série provenha de Taylor, os fundamentos desse método já apareciam nos trabalhos de James Gregory (1638 – 1675), que havia obtido expansões semelhantes para as funções seno e cosseno, e em estudos de Isaac Newton (1643 – 1727) sobre o cálculo de fluxões (EVES, 2008).

A função cosseno pode ser representada da seguinte forma:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$$

Essa representação possibilita calcular valores aproximados do cosseno de qualquer ângulo (em radianos) com uma boa precisão apenas somando os primeiros termos da série. Além disso, evidencia a transição do caráter geométrico para o caráter analítico da trigonometria.

O matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) ampliou ainda mais essa relação ao demonstrar a equivalência entre as funções trigonométricas e a exponencial complexa, na expressão:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta.$$

Essa fórmula conhecida como Identidade de Euler, representa uma marco na unificação entre a álgebra, geometria e a análise. A partir dela, as funções seno e cosseno passaram a ser compreendidas como manifestações de fenômenos periódicos contínuos, com aplicações que ultrapassam a geometria, alcançando áreas como a física e a engenharia (EVES, 2008).

### 2.3 A TANGENTE: DAS OBSERVAÇÕES ASTRONÔMICAS À MATEMÁTICA MODERNA

A função tangente surgiu de forma independente das funções seno e cosseno, inicialmente a partir de considerações geométricas associadas à linha tangente de um círculo. Seu nome deriva do latim *tangens*, que significa “tocar”, em referência à linha que toca a circunferência em um único ponto. A tangente expressa, geometricamente, a relação entre o raio e a linha tangente que forma um ângulo no centro do círculo (EVES, 2008).

Os matemáticos árabes foram pioneiros na sistematização dessa razão. Al-Battani (858–929) introduziu o termo *muhattah al-dhil* (“sombra tangente”), definindo uma relação equivalente à tangente moderna e elaborando tabelas com valores para ângulos de 0° a 90°. Posteriormente, Al-Tusi aperfeiçoou esses cálculos, apresentando fórmulas e relações entre tangentes e senos, o que contribuiu para a generalização das identidades trigonométricas (BOYER, 1996).

Durante o período renascentista, a tangente ganhou importância prática nas técnicas de navegação e astronomia. A capacidade de relacionar a altura de um corpo celeste ao seu ângulo de observação tornou a tangente uma ferramenta essencial para cálculos de posição e distância. Com o avanço da geometria analítica e do cálculo, a tangente passou a ser compreendida como razão entre seno e cosseno, ou seja:

$$tg\theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$$

A partir do século XVIII, a tangente assumiu papel central na análise de funções periódicas e no estudo de ângulos de inclinação, sendo amplamente aplicada em problemas de engenharia, física e topografia. Sua história revela um processo de amadurecimento conceitual, que vai da observação empírica à abstração analítica, trajetória que reflete a própria evolução da matemática (EVES, 2008).

## 2.4 CONTEXTO HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA

Os primeiros registros de práticas matemáticas relacionadas a razões geométricas e à mensuração de inclinações remontam às civilizações do Egito e da Babilônia, por volta de 2000 a.C. No caso egípcio, documentos como o Papiro Rhind evidenciam procedimentos práticos associados à construção e à medição, em especial por meio do **seqt**, uma razão utilizada para expressar a inclinação das faces das pirâmides. Tal noção, embora não corresponda ao conceito moderno de ângulo, pode ser interpretada como uma relação entre comprimentos, aproximando-se, em termos geométricos, daquilo que atualmente se associa à cotangente (van der Waerden, 1961).

Na Babilônia, o desenvolvimento matemático esteve fortemente ligado à observação astronômica. Os babilônios elaboraram tabelas numéricas para prever fenômenos celestes, como eclipses, e utilizaram relações entre comprimentos associadas a figuras geométricas, especialmente no contexto de triângulos semelhantes. No entanto, tais procedimentos não envolviam uma noção explícita de ângulo, mas sim relações proporcionais entre segmentos, como evidenciado por registros como a tábua Plimpton 322 (SMITH, 1958).

Na Grécia Antiga, essas práticas geométricas foram progressivamente sistematizadas. A tradição pitagórica, atribuída a Pitágoras (século VI a.C.) e à sua escola, consolidou resultados fundamentais relacionados às relações métricas em triângulos, incluindo o teorema que posteriormente recebeu seu nome, embora tais conhecimentos já fossem conhecidos, em alguma medida, por civilizações anteriores.

Um avanço significativo ocorreu com Eratóstenes de Cirene (276–196 a.C.), que utilizou relações geométricas para estimar a circunferência da Terra, evidenciando a aplicação prática desse conhecimento. Contudo, é com Hiparco de Niceia (180–125 a.C.) que a trigonometria assume uma forma mais sistemática, a partir da elaboração da primeira tabela de cordas associadas a arcos da circunferência, motivo pelo qual é tradicionalmente reconhecido como o “pai da trigonometria”. Essa tabela que essencialmente preenche a função do seno para diversos ângulos, serviu como base para a medição de distâncias astronômicas e terrestres. Mais tarde, Cláudio Ptolomeu (século II d.C.), em sua obra *Almagesto*, consolidou esse conhecimento, introduzindo métodos de cálculo e tabelas trigonométricas fundamentais para a astronomia (EVES, 1995; BOYER, 1974).

A Índia também desempenhou papel decisivo na evolução da trigonometria. No livro *Surya Siddhanta*, que reúne conhecimentos de astronomia, geometria e trigonometria, datado por volta do século IV, apresenta-se o conceito de *jiva* (semi-corda), correspondente ao seno moderno, o que permitiu formular relações mais diretas entre ângulos e triângulos. O termo *jiva* foi traduzido para o árabe como *jayb* (“dobra” ou “enseada”), que por sua vez foi latinizado como *sinus* (“seio”), dando origem ao termo que usamos hoje. Posteriormente, matemáticos como Aryabhata (século V) refinaram esses cálculos, utilizando já o sistema decimal, o que representou grande avanço em precisão (Boyer, 1974).

Na Idade Média, os árabes e persas preservaram, traduziram e expandiram o legado grego e hindu. Al-Battani (850–929) introduziu o círculo de raio unitário, estabelecendo que as razões trigonométricas independiam da medida da hipotenusa, além de construir tabelas de senos mais detalhadas. Outros estudiosos, como Abu'l-Wêfa e Nasir al-Din al-Tusi, contribuíram para a sistematização da trigonometria, sendo este último um dos primeiros a apresentá-la como ciência independente da astronomia (STRUJK, 1992).

Com a difusão do saber árabe na Europa, sobretudo a partir do século XII, a trigonometria floresceu novamente no Ocidente. Regiomontanus (1436–1475) é apontado como o matemático que consolidou a trigonometria como disciplina autônoma, em sua obra *De Triangulis Omnimodis*, introduzindo o uso das tangentes e sistematizando métodos de cálculo. Já no Renascimento, Viète (1540–1603) acrescentou um tratamento algébrico à trigonometria, ligando-a ao desenvolvimento da álgebra simbólica.

O século XVIII marcou a integração da trigonometria à análise matemática, sobretudo com Euler (1707–1783). Em sua *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748), ele redefiniu as funções seno e cosseno como funções de variáveis reais e complexas, ampliando seu alcance para além da geometria dos triângulos e consolidando-as como funções periódicas. A partir de Euler, a trigonometria deixou de ser apenas um instrumento auxiliar e se transformou em parte central da matemática pura e aplicada (LIMA, 1991).

Portanto, o desenvolvimento da trigonometria não ocorreu de forma linear ou isolada, mas foi resultado da contribuição de diferentes povos e matemáticos ao longo dos séculos. Cada avanço dos egípcios e babilônios até Euler, representou uma resposta a problemas concretos de sua época, configurando um rico processo histórico que culminou nas funções trigonométricas ensinadas atualmente nas escolas.

Essa evolução, que transformou a trigonometria de um instrumento geométrico para uma ferramenta analítica, é fundamental para o entendimento de seu papel atual, não apenas na física e na engenharia, mas também na modelagem de fenômenos periódicos, o cerne da sua aplicação e do seu estudo no ensino básico.

## 2.5 O TRIÂNGULO RETÂNGULO E AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

A introdução formal da Trigonometria no currículo brasileiro de acordo com a BNCC ocorre tradicionalmente no 9º ano do Ensino Fundamental, e o primeiro contato do estudante é exclusivamente com o triângulo retângulo. Nesse estágio, o foco pedagógico reside na definição das razões seno, cosseno e tangente como proporções entre os lados, limitado ao estudo dos ângulos agudos (entre 0 e 90 graus) e à aplicação em problemas de medida e geometria. Este modelo inicial é importante e pode-se listar alguns aspectos positivos sobre o aprendizado do tema, sendo:

(i) Estabelece a Fundamentação Geométrica: Conecta as razões trigonométricas diretamente ao Teorema de Pitágoras e à geometria, dando um sentido concreto ao  $\sin(\alpha)$  e ao  $\cos(\alpha)$  e:

(ii) Desenvolve Habilidades de Medição: Permite ao estudante resolver problemas práticos de altura e distância, ilustrando a utilidade imediata da Matemática.

No entanto, essa abordagem é, por natureza, incompleta para o Ensino Superior. A limitação ao triângulo retângulo e aos ângulos agudos não prepara o aluno para os conceitos listados a seguir:

(i) Ângulos Cíclicos e Negativos: Não há espaço para ângulos maiores que 90 graus ou para o conceito de arcos orientados e:

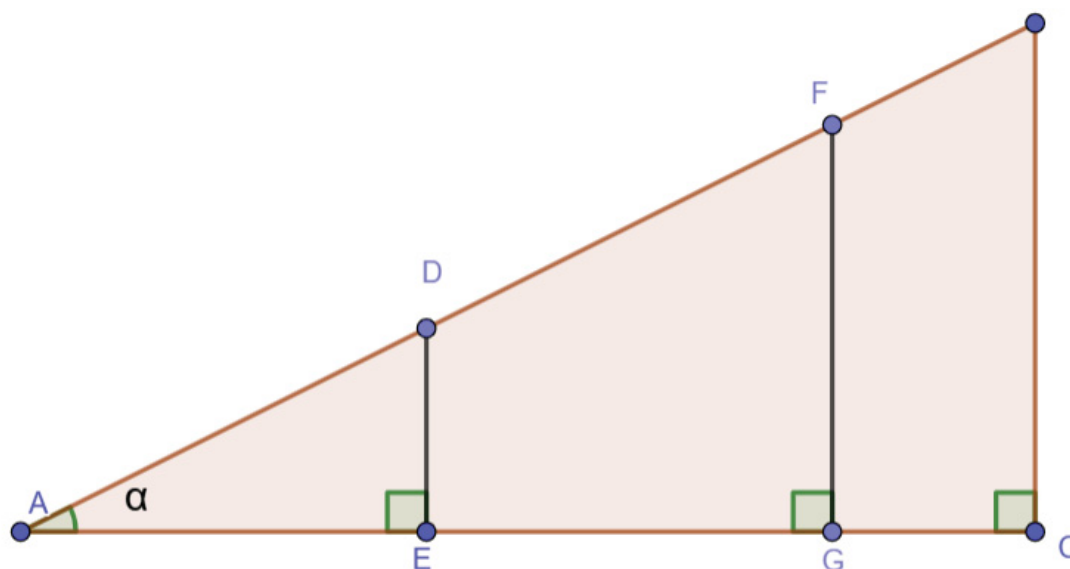
(ii) Função Periódica: A ideia de que o seno e o cosseno são funções que se repetem indefinidamente no tempo e no espaço (propriedade central na modelagem de fenômenos naturais) é completamente omitida.

Portanto, enquanto o 9º ano cumpre o papel de introdução geométrica, este trabalho visa dar o salto conceitual necessário, generalizando o  $\sin(\theta)$  e o  $\cos(\theta)$  do triângulo estático para as funções periódicas dinâmicas que são exigidas no vestibular da UFPR, no ENEM e nas disciplinas de Cálculo da graduação, por exemplo.

A definição das razões trigonométricas no triângulo retângulo reside no princípio da semelhança de triângulos, como mostra a Figura 1. Ao fixar um ângulo agudo ( $\alpha$ ), o valor da razão entre quaisquer dois lados do triângulo é invariável, independentemente do tamanho da figura geométrica. Por exemplo, a razão entre o Cateto Oposto e a Hipotenusa de um ângulo  $\alpha$  é sempre a mesma, seja o triângulo

pequeno ou grande. Essa proporção entre o cateto oposto dividido pela hipotenusa é chamada de seno de  $\alpha$ .

FIGURA 1 – RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS



Fonte: Autor (2025)

Os triângulos ADE, AFG e ABC são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo. Os lados homólogos são proporcionais, logo:

$$\frac{\text{Cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF} = \frac{BC}{AB} = k$$

$k$  é uma constante de proporcionalidade chamada de seno de  $\alpha$ .

$$\frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AF} = \frac{AC}{AB} = k'$$

$k'$  é uma constante de proporcionalidade chamada de cosseno de  $\alpha$ .

$$\frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG} = \frac{BC}{AC} = k''$$

$k''$  é uma constante de proporcionalidade chamada de tangente de  $\alpha$ .

## 2.6 O TEOREMA DE PITÁGORAS E A RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

O estudo da trigonometria está intrinsecamente ligado ao Teorema de Pitágoras, uma das relações mais significativas e antigas da Matemática. Atribuído a Pitágoras de Samos (cerca de 570 – 495 a.C.), o teorema estabelece uma relação fundamental entre os lados de qualquer triângulo retângulo.

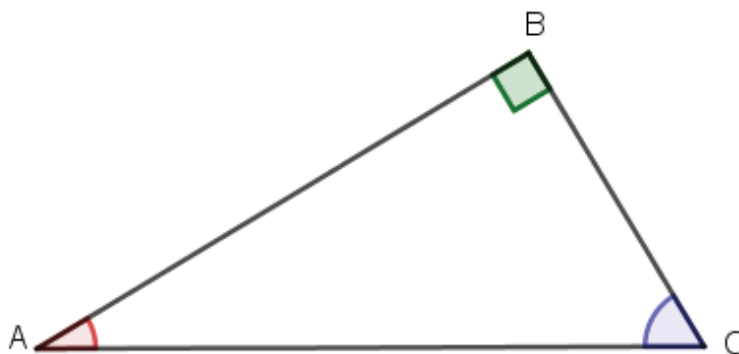
Formalmente, o teorema postula que o quadrado do comprimento da hipotenusa ( $h$ ), o lado oposto ao ângulo reto, é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos ( $a$  e  $b$ ):

$$h^2 = b^2 + c^2$$

No contexto da trigonometria, essa relação é crucial, pois é a partir dela que as funções seno, cosseno e tangente são definidas inicialmente como razões entre os lados do triângulo retângulo.

Portanto, o Teorema de Pitágoras não é apenas um conceito geométrico; ele é o ponto de partida que confere coerência e validade analítica ao estudo das funções periódicas.

FIGURA 2 – TRIÂNGULO RETÂNGULO



FONTE: Autor (2025)

Pode-se demonstrar a relação fundamental da trigonometria em um triângulo retângulo, de acordo com a Figura 2. Consideremos o triângulo retângulo ABC, retângulo em B.

Pelo Teorema de Pitágoras:  $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{BC}{AC}$$

$$\operatorname{cos} \hat{A} = \frac{AB}{AC}$$

$$(\operatorname{cos} \hat{A})^2 + (\operatorname{sen} \hat{A})^2 = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2}$$

$$\frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

$$\therefore \operatorname{cos}^2 \hat{A} + \operatorname{sen}^2 \hat{A} = 1$$

## 2.7 A MODELAGEM COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática tem se consolidado como uma estratégia eficaz para promover o aprendizado de forma concreta e significativa de conteúdos matemáticos. Segundo Bassanezi (2010), a modelagem é um processo dinâmico que envolve a tradução de situações reais para o campo da matemática, permitindo que o aluno desenvolva autonomia, senso crítico e capacidade de interpretar fenômenos do cotidiano. O autor destaca que o processo de modelagem envolve etapas como observação da realidade, a formulação do problema, a elaboração e validação do modelo, e a interpretação dos resultados. Nessa perspectiva, o professor é o mediador, orientando os estudantes na construção do conhecimento e promovendo a autonomia intelectual. Assim, para Bassanezi (2010), a modelagem matemática não é apenas uma metodologia de ensino, mas um meio de integrar a matemática ao cotidiano e desenvolver o pensamento crítico dos estudantes.

Essa metodologia aproxima o aluno da realidade, tornando o ensino mais contextualizado e atrativo. D'Ambrosio (1996) defende que o conhecimento matemático deve ser compreendido como uma construção cultural, no qual o estudante é o sujeito ativo do processo de ensino aprendizagem. Assim, ao trabalhar problemas práticos, o professor possibilita que o estudante atribua

significado aos conceitos aprendidos. Portanto, essa abordagem apresentada corrobora com o proposto pela BNCC para o ensino médio.

### 3 IDENTIDADES FUNDAMENTAIS DA TRIGONOMETRIA

Neste capítulo, foram abordadas as identidades fundamentais da trigonometria, que constituem a base para o estudo das funções trigonométricas e suas aplicações. Iniciou-se com o seno, cosseno e tangente da soma e da diferença de dois arcos, destacando-se como essas relações permitem a dedução de diversas fórmulas e simplificações em problemas geométricos e analíticos. Em seguida, foram apresentadas as leis dos senos e dos cossenos, essenciais para a resolução de triângulos e amplamente utilizadas em contextos práticos, como a modelagem de situações reais. Também foram estudadas as fórmulas do arco metade e transformação de soma em produto, que ampliam as possibilidades de transformação e simplificação de expressões trigonométricas.

Essas identidades não apenas fortalecem a compreensão das relações entre os elementos de um triângulo, mas também servem como ferramentas fundamentais para o desenvolvimento da modelagem matemática. A partir delas, o aluno passa a reconhecer conexões entre a teoria e a prática, favorecendo uma aprendizagem mais significativa e aplicável ao cotidiano, o que vai ao encontro do propósito central deste trabalho.

#### 3.1 A FÓRMULA DE EULER E A RELAÇÃO ENTRE $e$ , $\pi$ E $i$ .

Euler foi o primeiro a obter a relação

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

em que  $i = \sqrt{-1}$  denota a unidade imaginária em  $\mathbb{C}$ . Ela é uma consequência de um fato mais geral: A fórmula de Euler.

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

Existem várias maneiras de demonstrar essa fórmula. Talvez a mais conhecida e propagada seja a que faz o uso de séries de potências, usando em que  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ . Entretanto, apresentaremos a demonstração recorrendo ao limite fundamental

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Pela segunda fórmula de De Moivre, tem-se:

$$(\cos \alpha + i \cdot \text{sen } \alpha)^n = \cos (n\alpha) + i \cdot \text{sen}(n\alpha)$$

Seja  $\alpha = \frac{x}{n}$ , obtém-se

$$\left(\cos \frac{x}{n} + i \cdot \text{sen } \frac{x}{n}\right)^n = \cos x + i \cdot \text{sen } x$$

Uma vez que do lado direito da igualdade não depende de  $n$ , pode-se tomar o limite quando  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{n} + i \cdot \text{sen } \frac{x}{n}\right)^n = \cos x + i \cdot \text{sen } x$$

Observe que:  $\text{sen } \frac{x}{n} = \frac{x}{n} \frac{\text{sen } \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ , tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sen } \frac{x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \frac{\text{sen } \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n}$$

Além disso, vale que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{n} = 1$ . Dessa forma,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{n} + i \cdot \text{sen } \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{n} + i \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{\text{sen } \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n = e^{ix}$$

Substituindo em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{n} + i \cdot \text{sen } \frac{x}{n}\right)^n = \cos x + i \cdot \text{sen } x$$

Obtemos finalmente que

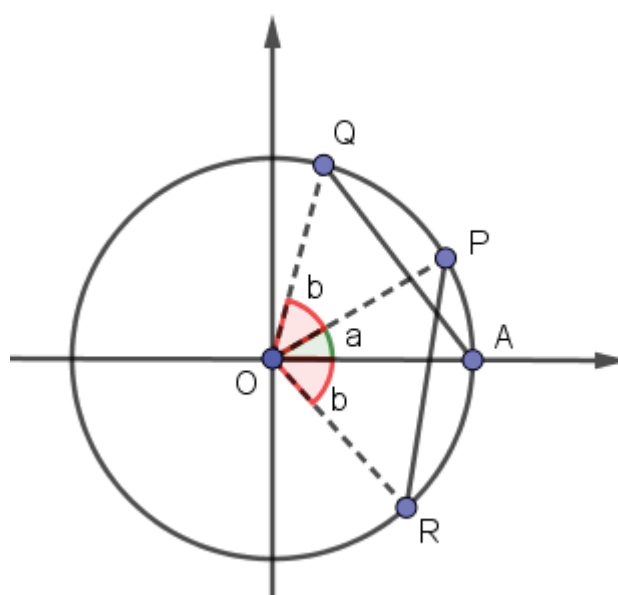
$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \text{sen } x$$

### 3.2 COSSENO DA SOMA E DA DIFERENÇA

As fórmulas do cosseno da soma e da diferença de arcos representam um marco na evolução da trigonometria. Suas origens remontam ao Teorema de Ptolomeu (séc. II d.C.), utilizado para relacionar lados e diagonais de quadriláteros inscritos em uma circunferência. A partir desse teorema, os gregos puderam deduzir relações equivalentes às atuais fórmulas de  $\cos (a + b)$  e  $\cos (a - b)$ . Durante o período islâmico, matemáticos como Al Battani e Al Tusi aperfeiçoaram

essas relações ao substituir o conceito de corda pelas funções de seno e cosseno, estabelecendo as bases da trigonometria moderna. No renascimento, Regiomontanus consolidou essas ideias em sua obra *De Triangulis Omnimodis* (1464), formalizando o uso das identidades trigonométricas. Mais tarde, Leonhard Euler (século XVIII) demonstrou que as fórmulas do cosseno da soma e da diferença derivam da identidade  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta$  unificando a trigonometria com a análise matemática. Assim, a história dessas fórmulas revela o processo de transformação da trigonometria de uma ferramenta geométrica para um ramo essencial da matemática analítica.

FIGURA 3 – COSSENO DE A + B



FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

Considere a circunferência unitária da Figura 3 e nela os pontos P, Q e R com as suas respectivas coordenadas  $(\cos(a), \text{sen}(a))$ ,  $(\cos(a+b), \text{sen}(a+b))$ ,  $(\cos(b), -\text{sen}(b))$ . Vamos supor que as distâncias entre QA e PR são iguais. Aplicando a fórmula da distância entre QA e PR, tem-se:

$$d_{QA} = \sqrt{(\cos(a+b) - 1)^2 + (\text{sen}(a+b) - 0)^2}$$

$$d_{PR} = \sqrt{(\cos(a) - \cos(b))^2 + (\text{sen}(a) - (-\text{sen}(b)))^2}$$

Como as distâncias são as mesmas, podemos igualar os radicais:

$$\sqrt{(\cos(a + b) - 1)^2 + (\text{sen}(a + b) - 0)^2}$$

$$= \sqrt{(\cos(a) - \cos(b))^2 + (\text{sen}(a) - (-\text{sen}(b)))^2}$$

$$= \cos^2(a+b) - 2\cos(a+b) + 1 + \text{sen}^2(a+b) = \cos^2(a) - 2\cos(a)\cos(b) + \cos^2(b) + \text{sen}^2(a) + 2\text{sen}(a)\text{sen}(b) + \text{sen}^2(b)$$

Como  $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ , tem-se que:

$$-2\cos(a + b) + 1 + 1 = 2 - 2\cos(a).\cos(b) + 2\text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

$$-2\cos(a+b) = -2\cos(a).\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b) \quad (\div -2)$$

$$\therefore \cos(a + b) = \cos(a).\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

Como  $\cos(-x) = \cos(x)$  e  $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$

$$\cos(a + (-b)) = \cos(a).\cos(-b) + \text{sen}(a).\text{sen}(-b)$$

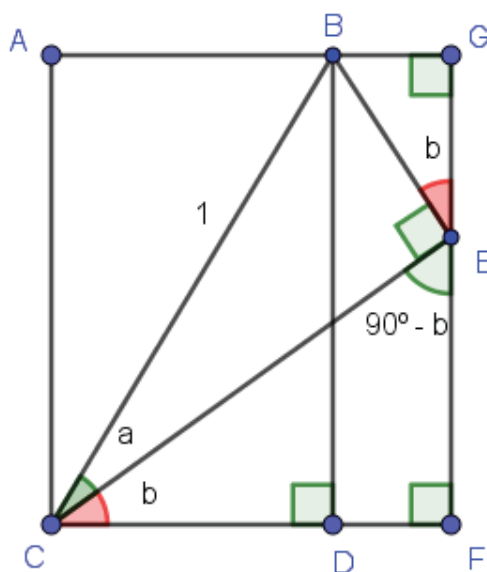
$$\therefore \cos(a - b) = \cos(a).\cos(b) - \text{sen}(a).\text{sen}(b)$$

### 3.3 SENO DA SOMA E DA DIFERENÇA

As fórmulas do seno da soma e da diferença de arcos surgiram a partir dos estudos de Hiparco de Niceia e Ptolomeu, na Antiguidade, que utilizaram o Teorema de Ptolomeu para relacionar medidas de cordas em círculos. Embora ainda não existisse o conceito moderno de seno, essas relações já correspondiam às fórmulas conhecidas hoje. Durante o período islâmico, estudiosos como Al-Battani e Al-Tusi reformularam essas ideias utilizando as funções seno e cosseno, substituindo as antigas cordas gregas. No Renascimento, Regiomontanus reuniu e sistematizou essas relações em sua obra *De Triangulis Omnimodis* (1464), consolidando a trigonometria como disciplina independente. Séculos depois, Leonhard Euler demonstrou que as mesmas relações derivam da Identidade de Euler. Assim, a evolução histórica das fórmulas do seno da soma e da diferença reflete a transição da trigonometria geométrica para a trigonometria analítica.

Considere a Figura 4, em que o seguimento BC equivale a 1.

FIGURA 4 – SENO DE A + B



FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

No triângulo CBE, tem-se que:

$$\text{sen}(a) = \frac{BE}{1} \rightarrow BE = \text{sen}(a)$$

$$\cos(a) = \frac{CE}{1} \rightarrow CE = \cos(a)$$

No triângulo CEF, tem-se que:

$$\sin(b) = \frac{EF}{CE} \rightarrow EF = CE \cdot \sin(b) = \cos(a) \cdot \sin(b)$$

$$\cos(b) = \frac{CF}{CE} \rightarrow CF = CE \cdot \cos(b) = \cos(a) \cdot \cos(b)$$

No triângulo BEG, tem-se que:

$$\sin(b) = \frac{BG}{BE} \rightarrow BG = BE \cdot \sin(b) = \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$\cos(b) = \frac{GE}{BE} \rightarrow GE = BE \cdot \cos(b) = \sin(a) \cdot \cos(b)$$

No triângulo ABD, tem-se que:

$$\sin(a+b) = \frac{BD}{1} = BD = GE + EF$$

$$\therefore \sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$$

Como  $\cos(-x) = \cos(x)$  e  $\sin(-x) = -\sin(x)$

$$\sin(a+(-b)) = \sin(a) \cdot \cos(-b) + \sin(-b) \cdot \cos(a)$$

$$\therefore \sin(a-b) = \sin(a) \cdot \cos(b) - \sin(b) \cdot \cos(a)$$

Pode ser obtido as fórmulas de  $\cos(a+b)$  e  $\sin(a+b)$  através da fórmula de Euler.

Seja  $x = a + b$ , logo:

$$e^{i(a+b)} = \cos(a + b) + i \cdot \text{sen}(a + b)$$

$$e^{ia+ib} = \cos(a + b) + i \cdot \text{sen}(a + b)$$

$$e^{ia+ib} = e^{ia} \cdot e^{ib} \text{ ((Propriedades de potência))}$$

$$e^{ia} \cdot e^{ib} = \cos(a + b) + i \cdot \text{sen}(a + b)$$

Aplicando a fórmula individualmente

$$e^{ia} \cdot e^{ib} = (\cos a + i \cdot \text{sen} a) \cdot (\cos b + i \cdot \text{sen} b)$$

$$e^{ia} \cdot e^{ib} = \cos a \cdot \cos b + \cos a \cdot i \cdot \text{sen} b + i \cdot \text{sen} a \cdot \cos b + i^2 \cdot \text{sen} a \cdot \text{sen} b$$

$$e^{ia} \cdot e^{ib} = \cos a \cdot \cos b - \text{sen} a \cdot \text{sen} b + i \cdot (\cos a \cdot \text{sen} b + \text{sen} a \cdot \cos b)$$

Como  $e^{ia} \cdot e^{ib} = \cos(a + b) + i \cdot \text{sen}(a + b)$ , logo:

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen} a \cdot \text{sen} b \text{ (Parte real)}$$

$$i \cdot \text{sen}(a + b) = i \cdot (\cos a \cdot \text{sen} b + \text{sen} a \cdot \cos b) \text{ (Parte imaginária)}$$

### 3.4 TANGENTE DA SOMA E DA DIFERENÇA

As fórmulas da tangente da soma e da diferença representam um avanço importante na consolidação da trigonometria analítica. Elas surgiram como consequência natural das relações já conhecidas para o seno e para o cosseno, mas seu desenvolvimento histórico está profundamente ligado à astronomia e aos estudos dos matemáticos árabes medievais.

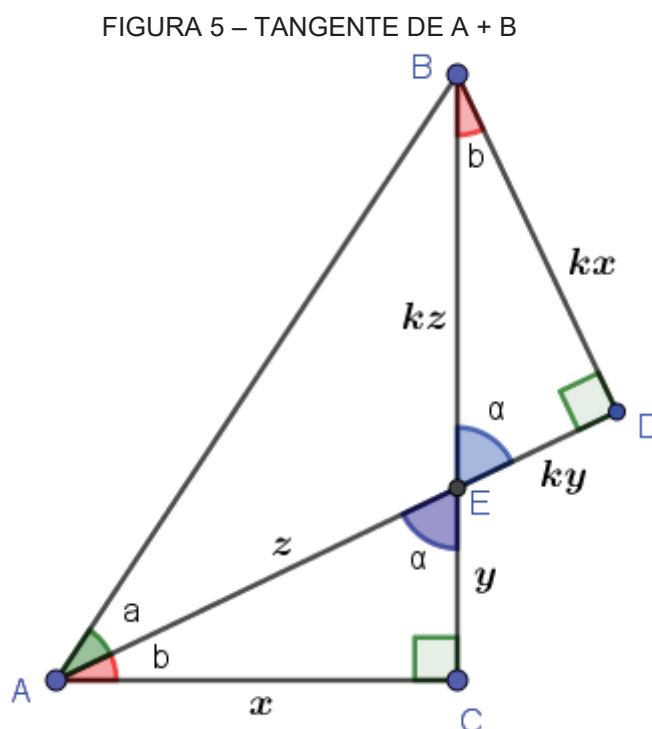
Conforme mencionado na Seção 2.4, que aborda a função tangente, a concepção inicial foi posteriormente aperfeiçoada por Al-Tusi (1201–1274), que desenvolveu tabelas e relações análogas às fórmulas modernas da soma e da diferença, ampliando as aplicações da trigonometria para a resolução de triângulos

esféricos usados na astronomia (EVES, 2008). Na obra *De Triangulis Omnimodis*, o matemático europeu Regiomontanus sistematizou as funções trigonométricas e apresentou as expressões, que embora escrita na forma geométrica, corresponde as fórmulas atuais da tangente da soma e da diferença:

$$tg(a + b) = \frac{tg(a) + tg(b)}{1 - tg(a).tg(b)}$$

$$tg(a - b) = \frac{tg(a) - tg(b)}{1 + tg(a).tg(b)}$$

Para demonstrar os resultados da tangente da soma e da diferença entre dois arcos, considere a Figura 5.



FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

Os triângulos AEC e BED são semelhantes pelo caso AA (ângulo, ângulo), logo os lados homólogos aos ângulos são proporcionais. Seja  $k > 0$ , então os lados proporcionais foram multiplicados por  $k$ .

No triângulo retângulo ABD, tem-se que:

$$\operatorname{tg}(a) = \frac{kx}{z + ky}$$

No triângulo AEC tem-se que:

$$\operatorname{tg}(b) = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b) = \frac{kx}{z + ky} + \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b) = \frac{kx \cdot x}{(z + ky) \cdot x} + \frac{y \cdot (z + ky)}{(z + ky) \cdot x}$$

$$\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b) = \frac{kx^2 + zy + ky^2}{(z + ky) \cdot x}$$

$$\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b) = \frac{k \cdot (x^2 + y^2) + zy}{(z + ky) \cdot x}$$

Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo AEC, tem-se que  $z^2 = x^2 + y^2$

$$\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b) = \frac{kz^2 + zy}{(z + ky) \cdot x}$$

$$\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b) = \frac{z \cdot (kz + y)}{(z + ky) \cdot x}$$

$$\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b) = \frac{(kz + y)}{x} \cdot \frac{z}{(z + ky)}$$

No triângulo ABC, tem-se que:  $\operatorname{tg}(a + b) = \frac{(kz + y)}{x}$

$$\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b) = \operatorname{tg}(a + b) \cdot \frac{z}{(z + ky)}$$

Se fizermos  $1 - \text{tg}(a) \cdot \text{tg}(b)$ , tem-se que:

$$1 - \frac{kx}{z + ky} \cdot \frac{y}{x}$$

$$1 - \frac{k}{z + ky} \cdot \frac{y}{1}$$

$$\frac{z + ky - ky}{z + ky}$$

$$\frac{z}{z + ky}$$

$$\text{tg}(a) + \text{tg}(b) = \text{tg}(a + b) \cdot (1 - \text{tg}(a) \cdot \text{tg}(b))$$

$$\therefore \text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg}(a) + \text{tg}(b)}{1 - \text{tg}(a) \cdot \text{tg}(b)} =$$

Como  $\text{tg}(-a) = -\text{tg}(a)$ , tem-se que:

$$\text{tg}(a + (-b)) = \frac{\text{tg}(a) + \text{tg}(-b)}{1 - \text{tg}(a) \cdot \text{tg}(-b)}$$

$$\therefore \text{tg}(a - b) = \frac{\text{tg}(a) - \text{tg}(b)}{1 + \text{tg}(a) \cdot \text{tg}(b)}$$

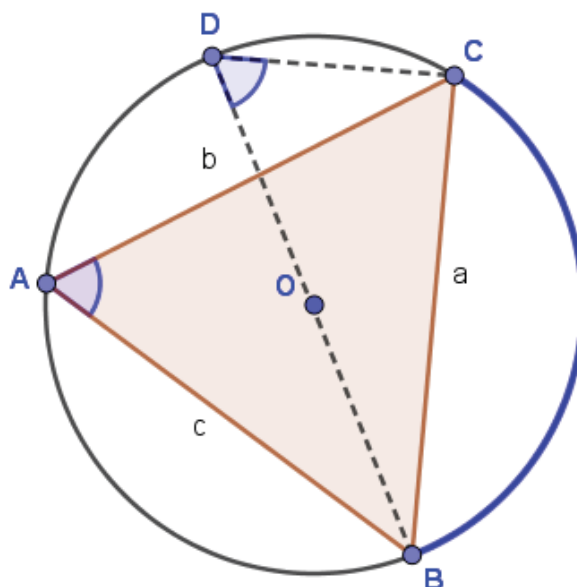
### 3.5 LEI DOS SENOS

A Lei dos Senos tem origem na Antiguidade, quando astrônomos e matemáticos buscavam relacionar ângulos e lados dos triângulos para medir distâncias inacessíveis. O conceito surgiu entre os gregos, com Hiparco (século II a.C.) considerado o pai da trigonometria, que criou a primeira tabela de cordas, precursora do seno. Posteriormente, matemáticos indianos e árabes, como Al-Battani (século IX), desenvolveram as ideias com o uso direto do seno moderno. A formulação da Lei dos Senos, na forma que conhecemos hoje, foi consolidada no

Renascimento, com a expansão da trigonometria esférica e plana para a navegação e a astronomia.

Seja a circunferência da Figura 6.

FIGURA 6 – LEI DOS SENOS



FONTE: Adaptada lezzi (2004)

Seja o lado BD a corda que passa pelo centro da circunferência, ou seja, o diâmetro e seja o triângulo BDC, retângulo em  $\hat{C}$ , pois o ângulo  $\hat{C}$  é inscrito na circunferência e equivale a metade do arco correspondente ao arco de  $180^\circ$  ( $\widehat{BD}$ ). O ângulo  $\hat{D}$  corresponde ao arco CB, o mesmo arco que o ângulo  $\hat{A}$  corresponde, logo  $\hat{A} = \hat{D}$ . Aplicando as razões trigonométricas no triângulo BDC, temos que:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{2R}$$

$$2R = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}}$$

Analogamente para os ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , conclui-se que:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$$

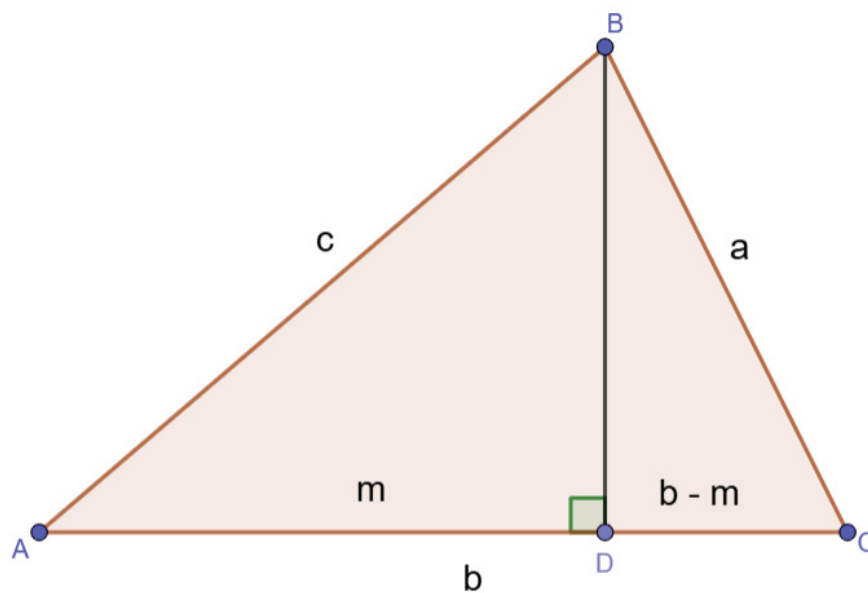
### 3.6 LEI DOS COSSENOS

A Lei do Cossenos tem origem na Grécia Antiga, sendo atribuída a Euclides (século III a.C.), que já apresentava um caso particular no Livro II dos Elementos, conhecido como Teorema de Euclides. Essa relação entre os lados e ângulos dos triângulos foi, mais tarde, generalizada pelos matemáticos árabes durante a Idade Média, especialmente por Al-Kashi, no século XV, que formulou a lei de modo muito próximo ao atual. Jamshid ibn Mas ud Al-Kashi, conhecido como Al-Kashi, foi um importante matemático, astrônomo e engenheiro persa, nascido por volta de 1380 em Kashan (atual Irã) e falecido em 1429. Ele trabalhou na famosa Escola de Astronomia de Samarcanda, onde contribuiu com avanços notáveis na trigonometria, aritmética e astronomia. Durante o Renascimento (século XIV e XV), a Lei dos Cossenos foi incorporada à trigonometria moderna, tornando-se essencial para cálculos de navegação, astronomia e engenharia.

A Lei dos Cossenos é fundamental na Trigonometria por ser uma generalização do Teorema de Pitágoras para triângulos arbitrários. Diferentemente do Teorema, que se restringe a triângulos retângulos, a lei dos cossenos permite o cálculo de medidas em qualquer triângulo, tornando-se indispensável na modelagem de situações reais que envolvem triangulação. O domínio dessa ferramenta, que conecta geometria e álgebra, é crucial para o desenvolvimento do raciocínio analítico exigido nas disciplinas iniciais do Ensino Superior.

Considere o triângulo ABC, da Figura 7.

FIGURA 7 – LEI DOS COSSENOS



FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD:

$$c^2 = BD^2 + m^2$$

$$BD^2 = c^2 - m^2 \quad (i)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CBD:

$$a^2 = BD^2 + (b - m)^2$$

$$a^2 = BD^2 + b^2 - 2bm + m^2$$

$$BD^2 = a^2 - b^2 + 2bm - m^2 \quad (ii)$$

Substituindo i em ii:

$$c^2 - m^2 = a^2 - b^2 + 2bm - m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

A pergunta que o estudante faz nessa “hora”, quanto vale m? Se aplicarmos a definição de cosseno no triângulo ABD no ângulo  $\hat{A}$ , temos que:

$$\cos(\hat{A}) = \frac{m}{c}$$

Isolando  $m$ , tem-se que  $m = c \cdot \cos(\hat{A})$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\hat{A})$$

### 3.7 ARCO METADE

Como foi visto em seções anteriores, foram demonstradas as identidades  $\sin(a + b)$  e  $\cos(a + b)$ . Assim, é possível determinar as identidades  $\sin(2a)$  e  $\cos(2a)$ .

$$\sin(a + a) = \sin a \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos a$$

$$\sin(2a) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

Pela relação fundamental:  $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$$

$$\cos(2a) = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos(2a) = -2 \cdot \sin^2 a + 1$$

Ou

$$\cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$$

$$\cos(2a) = 2 \cdot \cos^2 a - 1$$

Dessas identidades acima, podemos calcular  $\sin \frac{x}{2}$  ou  $\cos \frac{x}{2}$ .

Seja  $a = \frac{x}{2} \rightarrow x = 2a$

$$\cos x = \cos 2a$$

$$\cos x = 2 \cdot \cos^2 a - 1$$

$$\cos x = 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$1 + \cos x = 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{2}$$

### 3.8 TRANSFORMAÇÃO DA SOMA EM PRODUTO

Mais uma identidade trigonométrica importante que não aparece no planejamento da Rede Estadual do Paraná é a transformação de soma em produto. Como já foi visto:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$$

Seja

$$a + b = p \text{ (i)}$$

$$a - b = q \text{ (ii)}$$

Somando (i) + (ii), tem-se que:

$$2a = p + q$$

$$a = \frac{p + q}{2}$$

Subtraindo (i) – (ii), temos que:

$$2b = p - q$$

$$b = \frac{p - q}{2}$$

Somando as equações a seguir,

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$$

$$\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b) = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos b$$

$$\text{sen } p + \cos q = 2 \cdot \text{sen} \frac{p + q}{2} \cdot \cos \frac{p - q}{2}$$

#### 4 AS FUNÇÕES PERIÓDICAS E A CONTRIBUIÇÃO DE EULER PARA A TRIGONOMETRIA

Dado um número real  $x$ , sempre existem dois números inteiros consecutivos  $n$  e  $n + 1$  tais que  $n \leq x < n + 1$ . Considere a função  $f$  que associa a cada real  $x$  o real  $x - n$ , em que  $n$  é o maior inteiro que não supera  $x$ . Temos, por exemplo:

$$f(1) = 1 - 1 = 0$$

$$f(3) = 3 - 3 = 0$$

$$f(1,1) = 1,1 - 1 = 0,1$$

$$f(2,1) = 2,1 - 2 = 0,1$$

$$f(1,2) = 1,2 - 1 = 0,2$$

$$f(2,2) = 2,2 - 2 = 0,2$$

$$f(1,3) = 1,3 - 1,0 = 0,3$$

$$f(2,3) = 2,3 - 2 = 0,3$$

$$f(1,4) = 1,4 - 1 = 0,4$$

$$f(2,4) = 2,4 - 2 = 0,4$$

$$f(0,9) = 0,9 - 0 = 0,9$$

$$f(1,9) = 1,9 - 1 = 0,9$$

Generalizando, tem-se que:

$$0 \leq x < 1 \rightarrow f(x) = x - 0 = x$$

$$1 \leq x < 2 \rightarrow f(x) = x - 1$$

$$2 \leq x < 3 \rightarrow f(x) = x - 2$$

Caso o valor de  $x$  assumira valores negativos, tem-se:

$$f(-0,1) = -0,1 - (-1) = -0,1 + 1 = 0,9$$

$$f(-1,1) = -1,1 - (-1) = -1,1 + 2 = 0,9$$

$$f(-0,2) = -0,2 - (-1) = -0,2 + 1 = 0,8$$

$$f(-1,2) = -1,2 - (-2) = -1,2 + 2 = 0,8$$

$$f(-0,9) = -0,9 - (-1) = -0,9 + 1 = 0,1$$

$$f(-2,9) = -2,9 - (-3) = -2,9 + 3 = 0,1$$

$$f(-1) = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

Generalizando o caso acima, tem-se:

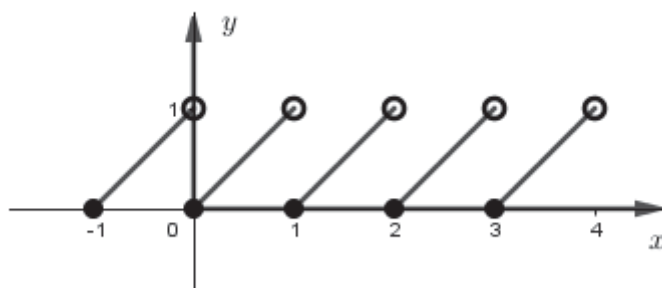
$$-1 \leq x < 0 \rightarrow f(x) = x - (-1) = x + 1$$

$$-2 \leq x < -1 \rightarrow f(x) = x - (-2) = x + 2$$

$$-3 \leq x < -2 \rightarrow f(x) = x - (-3) = x + 3$$

A Figura 8 a seguir determina o gráfico da função periódica.

FIGURA 8 – GRAFICO DA FUNÇÃO



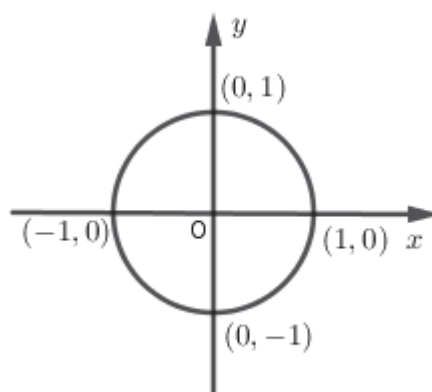
FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

Segue do gráfico acima que o período da função equivale a 1 unidade e que  $f(x) = f(x+1) = f(x+2) \dots = f(x+k)$  para todo  $x$  real e  $k$  inteiro.

#### 4.1 CICLO TRIGONOMÉTRICO

Considere sobre os eixos do plano cartesiano uma circunferência de raio

FIGURA 9 – CICLO TRIGONOMÉTRICO



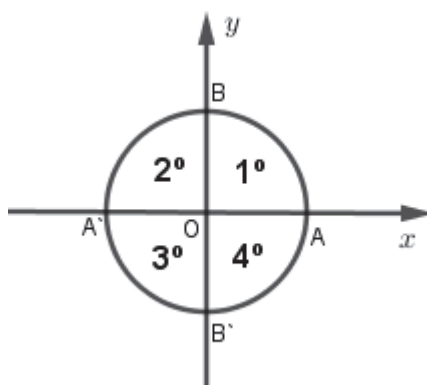
FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

Note que o comprimento da circunferência equivale a  $2\pi$ , pois o raio é igual a 1. Chamamos os pontos  $(1, 0)$  de A,  $(0, -1)$  de B,  $(-1, 0)$  de A' e  $(0, 1)$  de B', tem-se que a origem da circunferência trigonométrica é o ponto A  $(1, 0)$ .

#### 4.2 QUADRANTES NA CIRCUNFERÊNCIA

A partir do ponto A, considere os quadrantes da circunferência no sentido anti-horário. Observe a Figura 10 a disposição dos quadrantes.

FIGURA 10 – QUADRANTES NA CIRCUNFERÊNCIA

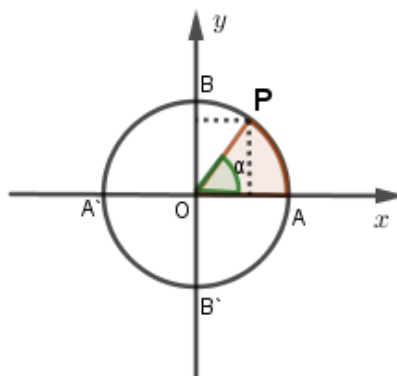


FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

#### 4.3 ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Seja um ponto P associado a algum ângulo  $\alpha$  da circunferência, se P pertence ao primeiro quadrante, então P tem coordenadas positivas tanto para x quanto para y, de acordo com a Figura 11.

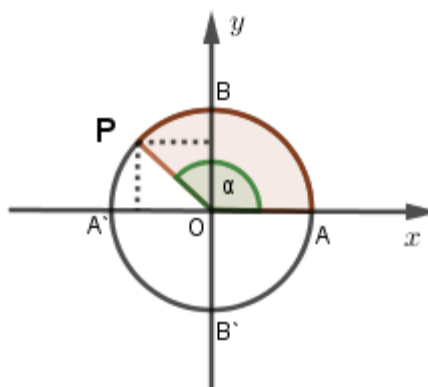
FIGURA 11 – 1º QUADRANTE



FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

Seja um ponto  $P$  associado a um ângulo  $\alpha$  da circunferência, se  $P$  pertence ao segundo quadrante, então  $P$  tem coordenadas negativa para  $x$  e positiva para  $y$ , de acordo com a Figura 12.

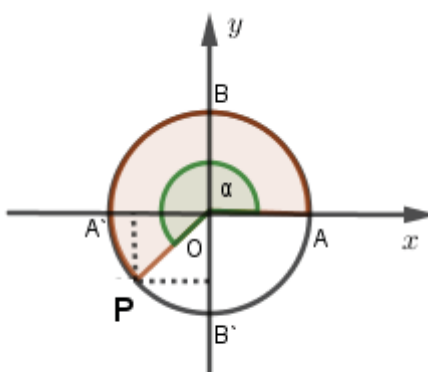
FIGURA 12 – 2º QUADRANTE



FONTE: Adaptada lezzi (2004)

Seja um ponto  $P$  associado a um ângulo  $\alpha$  da circunferência, se  $P$  pertence ao terceiro quadrante, então  $P$  tem coordenadas negativas tanto pra  $x$  quanto para  $y$ , de acordo com a Figura 13.

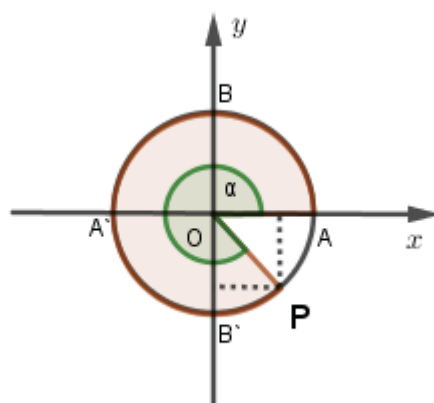
FIGURA 13 – 3º QUADRANTE



FONTE: Adaptada lezzi (2004)

Seja um ponto  $P$  associado a um ângulo da circunferência, se  $P$  pertence ao quarto quadrante, então  $P$  tem coordenadas positiva para  $x$  e negativa para  $y$ , de acordo com a Figura 14.

FIGURA 14 – 4º QUADRANTE



FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

#### 4.4 ARCOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Na Geometria, um arco de circunferência é a porção da circunferência compreendida entre dois de seus pontos. A cada arco associa-se um ângulo central, cujo vértice coincide com o centro da circunferência e cujos lados interceptam os extremos do arco considerado.

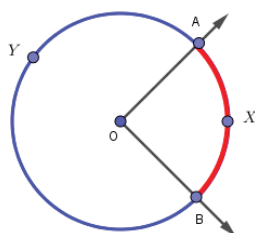
No contexto do ciclo trigonométrico, os arcos permitem interpretar ângulos não apenas como aberturas geométricas, mas também como comprimentos orientados sobre a circunferência. Essa interpretação possibilita a extensão das funções trigonométricas para ângulos maiores que  $2\pi$  e para ângulos negativos, ampliando significativamente o seu domínio de definição.

#### 4.5 ARCOS E ÂNGULOS

O objetivo desta seção é introduzir, de forma geométrica e intuitiva, os conceitos de arco de circunferência e ângulo central, que servirão de base para o desenvolvimento das funções trigonométricas no contexto da circunferência.

Considere uma circunferência de centro  $O$  e um ângulo central  $A\hat{O}B$ , de acordo com a Figura 15.

FIGURA 15 – ARCOS E ÂNGULOS

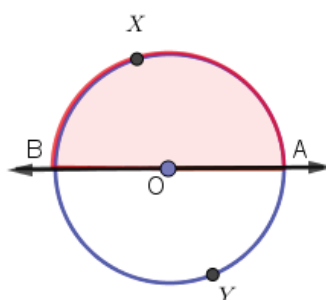


FONTE: Adaptada lezzi (2004)

A circunferência é dividida em duas partes, sendo cada uma delas denominada arco de circunferência, a saber, os arcos  $A\hat{X}B$  e  $A\hat{Y}B$ .

Se os pontos A e B são extremidades do diâmetro da circunferência, logo cada arco equivale a  $180^\circ$ , de acordo com a Figura 16.

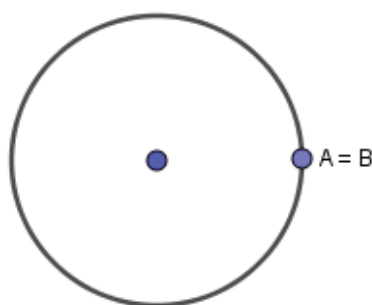
FIGURA 16 – ARCO DE MEIA VOLTA



FONTE: Adaptada lezzi (2004)

Se os pontos A e B coincidem, eles determinam dois arcos: arco nulo e arco de uma volta, de acordo com a Figura 17.

FIGURA 17 - ARCO DE UMA VOLTA



FONTE: Adaptada lezzi (2004)

Essas divisões permitem associar a cada arco uma medida angular correspondente, estabelecendo a relação entre ângulo central e arco de circunferência.

#### 4.6 MEDIDAS DE ARCOS

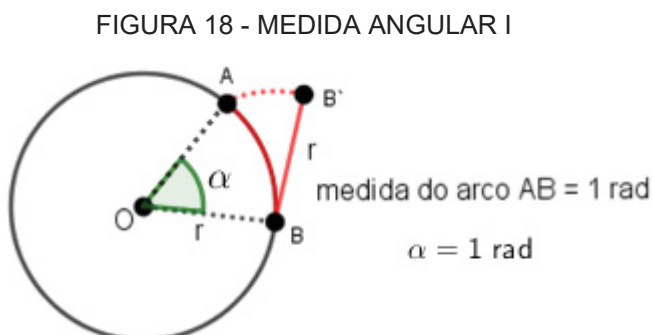
Para comparar comprimentos de dois arcos na circunferência, é preciso estabelecer unidades de medida entre arcos. As unidades de medidas são duas: o grau e o radiano.

Grau

O Grau (símbolo  $^\circ$ ) é um arco unitário cuja sua medida equivale a  $\frac{1}{360}$  da circunferência que contém o arco a ser medido.

Radiano

Radiano (símbolo rad) é o arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém, de acordo com a Figura 18. Como o arco AB forma um ângulo  $\alpha$  com o centro da circunferência, logo  $\alpha$  equivale a 1 radiano.

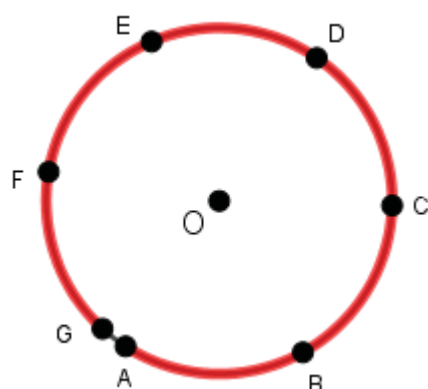


FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

Como um radiano equivale ao raio da circunferência, pode-se determinar quantos radianos mede a circunferência.

O comprimento da circunferência equivale a  $2\pi r$ , logo em radianos fica  $2\pi$  rad, como mostra a figura a seguir, sabendo que  $AB = BC = CD = DE = DF = FG$  são arcos que equivalem a um radiano, de acordo com a Figura 19.

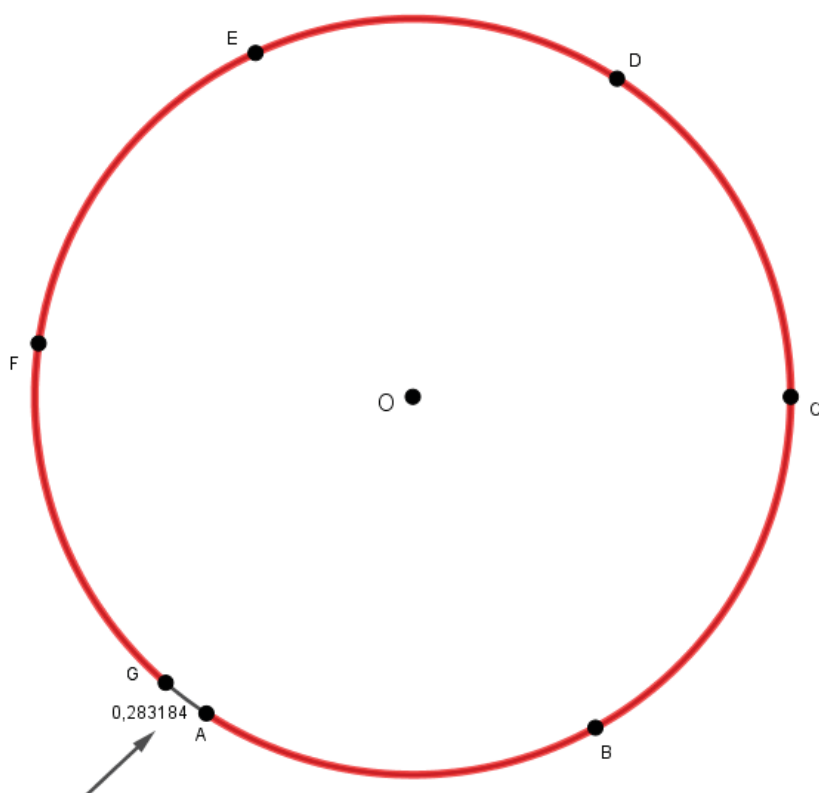
FIGURA 19 – MEDIDA ANGULAR II



FONTE: Adaptada lezzi (2004)

Ampliando a imagem, observamos que “cabem 6 vezes radiano na circunferência e sobra 0,283184”..., em que, o comprimento da circunferência equivale a  $6,283184\dots = 2\pi$ , ilustrando que o comprimento da circunferência  $2\pi$  rad, de acordo com a Figura 20.

FIGURA 20 - MEDIDA ANGULAR III



FONTE: Adaptada lezzi (2004)

Pode-se fazer a conversão de grau para radiano, como  $360^{\circ}$  é igual a  $2\pi$  rad, dividindo por dois, temos que  $180^{\circ}$  é igual a  $\pi$ . Um radiano equivale aproximadamente a  $57,296^{\circ}$ .

$$\frac{\pi \text{ rad}}{\pi} = \frac{180^{\circ}}{\pi}$$

$$\text{rad} \cong 57,296^{\circ}$$

#### 4.7 MEDIDAS DE ÂNGULOS

Considere duas circunferências concêntricas  $C_1$  e  $C_2$  (mesmo centro), de raio  $r_1$  e  $r_2$  e o ângulo central de  $45^{\circ}$ . Considere também que  $l_1$  e  $l_2$  são comprimentos dos arcos das circunferências  $r_1$  e  $r_2$  respectivamente., pretende-se calcular o comprimento dos arcos  $l_1$  e  $l_2$ .

$$\frac{360^{\circ}}{45^{\circ}} = \frac{2\pi r_1}{l_1}$$

$$l_1 360^{\circ} = 45^{\circ} 2\pi r_1$$

$$l_1 = \frac{45^{\circ} 2\pi r_1}{360^{\circ}}$$

$$l_1 = \frac{\pi r_1}{4}$$

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{360^{\circ}}{45^{\circ}} = \frac{2\pi r_2}{l_2}$$

$$l_2 360^{\circ} = 45^{\circ} 2\pi r_2$$

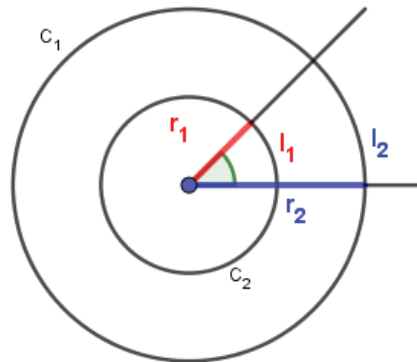
$$l_2 = \frac{45^\circ 2\pi r_2}{360^\circ}$$

$$l_2 = \frac{\pi r_2}{4}$$

$$\frac{l_1}{r_2} = \frac{\pi}{4}$$

A medida em radianos do ângulo de  $45^\circ$  é igual a  $\frac{\pi}{4}$  e concluímos que o ângulo em radianos é igual a divisão do comprimento do arco correspondente pelo raio, ou seja,  $\alpha = \frac{l}{r}$ , de acordo com a Figura 21 (círculos que possuem o mesmo centro mas com raios diferentes).

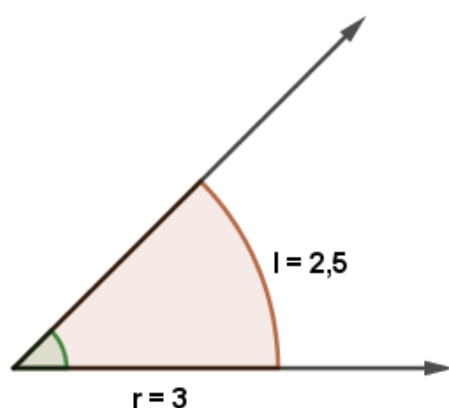
FIGURA 21 – CÍRCULOS CONCÊNTRICOS



FONTE: Adaptada lezzi (2004)

Exemplo 1: Determine o ângulo, em graus, da figura 22.

FIGURA 22 – RESOLUÇÃO DE EXEMPLO



FONTE: Adaptada (2025)

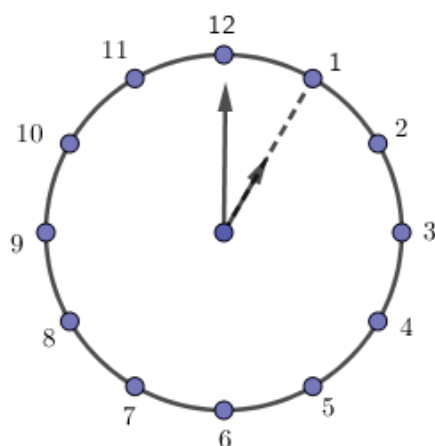
$$\alpha = \frac{l}{r} \rightarrow \alpha = \frac{2,5}{3} \text{ rad}$$

$$\frac{\pi \text{ rad}}{\frac{2,5 \text{ rad}}{3}} = \frac{180^\circ}{x} \rightarrow x = \frac{2,5}{3} \cdot 180^\circ \rightarrow x \cong 47,7^\circ$$

Exemplo 2: Calcule o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que marca 2h40 min.

Para a resolução do exercício, devemos notar que a cada volta completa,  $360^\circ$  do ponteiro dos minutos (maior ponteiro) o ponteiro da hora (menor ponteiro) percorre  $30^\circ$ . Vale lembrar que os números do relógio estão dispostos em 12 partes iguais que dividem a circunferência, de acordo com a Figura 23.

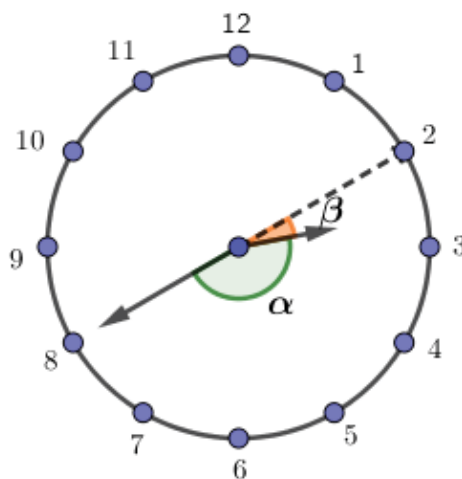
FIGURA 23 – RELÓGIO ANALÓGICO I



FONTE: Autor (2025)

Para resolver o problema, é preciso calcular o ângulo  $\beta$  suplementar do ângulo  $\alpha$ , de acordo com a Figura 24.

FIGURA 24 - RELÓGIO ANALÓGICO II



FONTE: Autor (2025)

Tem-se que:

$$\frac{360^{\circ}}{30^{\circ}} = \frac{240^{\circ}}{\beta}$$

$$\beta = \frac{240^{\circ} \cdot 30^{\circ}}{360^{\circ}}$$

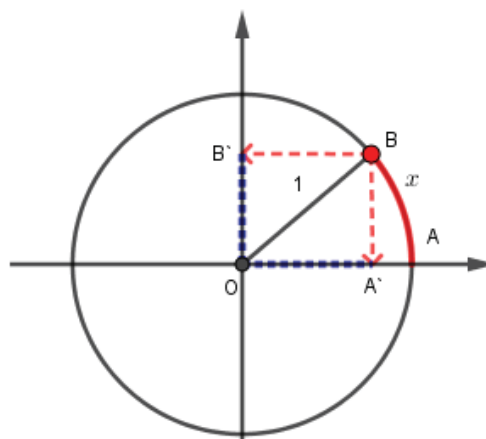
$$\beta = 20^{\circ}$$

Como  $\alpha + \beta = 180^{\circ}$ , logo  $\alpha = 160^{\circ}$

#### 4.8 CICLO TRIGONOMÉTRICO

Consideremos uma circunferência trigonométrica de centro O e origem em A, de acordo com a Figura 25.

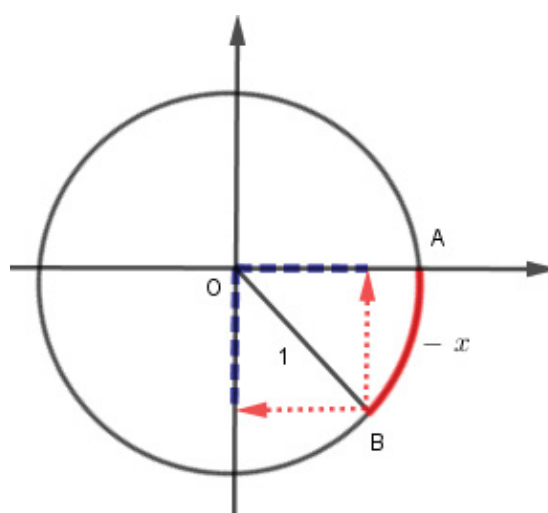
FIGURA 25 – CICLO TRIGONOMÉTRICO I



FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

A circunferência trigonométrica de centro  $O$  e origem em  $A$ . O arco de medida  $x$  será “medido” em  $A$  até a extremidade de  $x$  no sentido anti-horário. O arco de medida  $-x$  será “medido” em  $A$  até a extremidade de  $-x$  no sentido horário, de acordo com a Figura 26.

FIGURA 26 – CICLO TRIGONOMÉTRICO II



FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

#### 4.9 ARCOS CÔNGRUOS

Arcos côngruos são arcos que possuem a mesma extremidade. Exemplo: Seja  $\alpha = 30^\circ$ , logo o arco  $\widehat{AB}$  também vale  $30^\circ$ . O ângulo  $30^\circ + 360^\circ$  é côngruo ao arco de  $30^\circ$ . A partir daí podemos criar uma “família” de arcos côngruos a  $30^\circ$ .

$$30^\circ + 0.360^\circ$$

$$30^\circ + 1.360^\circ$$

$$30^{\circ} + 2.360^{\circ}$$

$$30^{\circ} + 3.360^{\circ}$$

.

.

.

Na k-ésima volta, temos que:

$$30^{\circ} + k.360^{\circ}, \text{ para todo } k \text{ inteiro.}$$

Generalizando para um arco de medida  $\alpha$ , temos que  $\alpha + k.360^{\circ}$  ou  $\alpha + k.2\pi$ , para todo  $k$  inteiro.

#### 4.10 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Nesta secção serão apresentadas na circunferência trigonométrica as funções trigonométricas, neste caso considere as funções definidas por:.

$$\text{sen } x;$$

$$\text{cos } x;$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x};$$

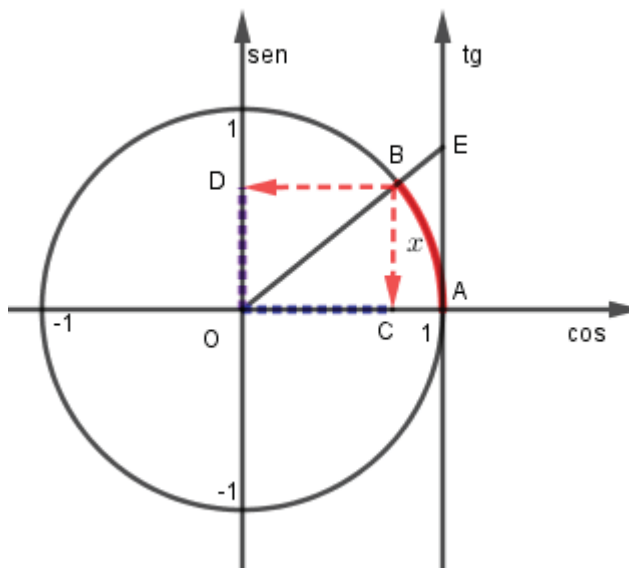
$$\text{cotg } x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x};$$

$$\text{sec } x = \frac{1}{\text{cos } x};$$

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x};$$

Considere que  $\text{sen } x \neq 0$  e  $\text{cos } x \neq 0$  em todas as funções apresentadas, e observe o ciclo trigonométrico representado na Figura 27.

FIGURA 27 – CICLO TRIGONOMÉTRICO III



FONTE: Adaptada lezzi (2004)

A figura 27 representa o ciclo trigonométrico de raio unitário, centrado na origem  $O = (0, 0)$  do plano cartesiano. Sobre esse ciclo, considera-se um ângulo  $x$ , medido a partir do eixo das abscissas positivas, no sentido anti-horário. O ponto  $B$  representa a extremidade do arco  $x$  com a circunferência de raio 1. Assim, as coordenadas de  $B$  são dadas por:  $B(\cos x, \sin x)$ .

O ponto  $C$  é a projeção ortogonal de  $B$  sobre o eixo das abscissas, enquanto o ponto  $D$  é a projeção ortogonal de  $B$  sobre o eixo das ordenadas. Dessa forma, os segmentos  $OC$  e  $OD$  representam, respectivamente, os valores de  $\cos x$  e  $\sin x$ .

A reta vertical tangente à circunferência no ponto  $A=(1,0)$  representa o eixo associado à função tangente. A interseção do prolongamento do lado terminal do ângulo  $x$  com essa reta define o ponto  $E$ , cujo segmento  $AE$  possui comprimento igual a  $\tan x$ , desde que  $\cos x \neq 0$ .

#### 4.11 TANGENTE DE X

Traça-se a reta tangente à circunferência no ponto  $A$ , com o objetivo de determinar o valor de  $\tan x$ . Considere-se os triângulos  $OBC$  e  $OEA$ , pelo critério de semelhança ângulo, ângulo ( $AA$ ), uma vez que possuem o ângulo  $C\hat{O}B$  comum aos

dois triângulos e os ângulos  $O\hat{B}C$  e  $O\hat{E}A$  correspondentes. De acordo com a Figura 28, tem-se que:

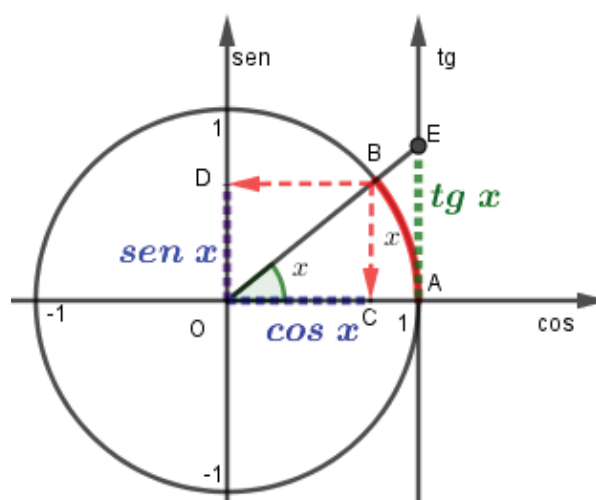
$$\frac{BC}{CO} = \frac{EA}{AO}$$

$$\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = \frac{\text{tg } x}{1}$$

∴

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

FIGURA 28 – TANGENTE DE X



FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

#### 4.12 COTANGENTE DE X

Considere os triângulos  $O\hat{B}C$  e o triângulo  $O\hat{F}G$ , pelo caso de semelhança ângulo, ângulo (AA) os triângulos são semelhantes. Ângulo  $C\hat{O}B$  comum aos dois triângulos e ângulos  $O\hat{B}C$  e  $O\hat{F}G$  correspondentes. De acordo com a Figura 29, tem-se que:

$$\frac{AO}{DO} = \frac{GO}{FG}$$

$$\frac{AO}{DO} = \frac{GO}{1}$$

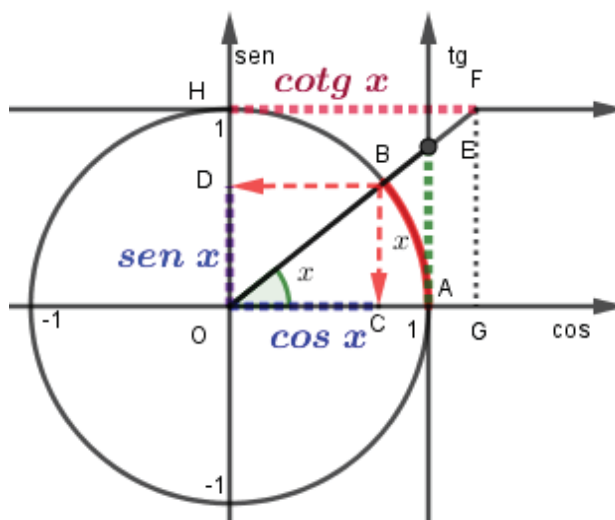
$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{FH}{1}$$

∴

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \cot g x$$

De acordo com a figura 29, verifica-se que  $\cot g x = \frac{\cos x}{\sin x}$ .

FIGURA 29 – COTANGENTE DE X

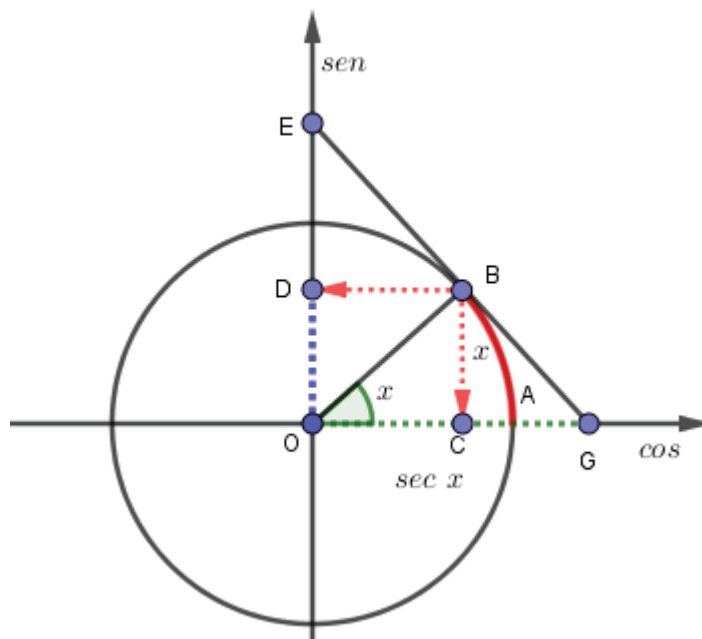


FONTE: Adaptada lezzi (2004)

#### 4.13 SECANTE DE X

Consideramos o segmento de reta FE tangente a circunferência no ponto B. A intersecção do segmento de reta FE com o eixo x e y são os pontos F e E respectivamente, de acordo com a Figura 30.

FIGURA 30 – SECANTE DE X



FONTE: Adaptada lezzi (2004)

Os triângulos OBC e OBG são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo (AA).  
 Ângulo x comum aos dois triângulos e ângulo reto em C e B.

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OB}{OG}$$

$$\frac{\cos x}{1} = \frac{1}{OG}$$

$$\frac{OG}{1} = \frac{1}{\cos x}$$

∴

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

#### 4.14 COSSECANTE DE X

Será determinada a semelhança entre os triângulos OBG e OBE. A soma dos ângulos  $\hat{x} + \widehat{OBC} = 90^\circ$ .

$$\hat{x} + O\hat{B}C = 90^\circ$$

$$O\hat{B}C = 90^\circ - \hat{x}$$

Pelo caso de semelhança entre os triângulos OBC e OBG conclui-se que  $O\hat{G}B = 90^\circ - \hat{x}$ . No triângulo OEG a medida de  $\hat{E} = \hat{x}$ , concluímos que os triângulos OBE e OBC são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo (AA). Temos que:

$$\frac{OE}{OB} = \frac{OB}{BC}$$

$$\frac{OE}{1} = \frac{1}{\text{sen } x}$$

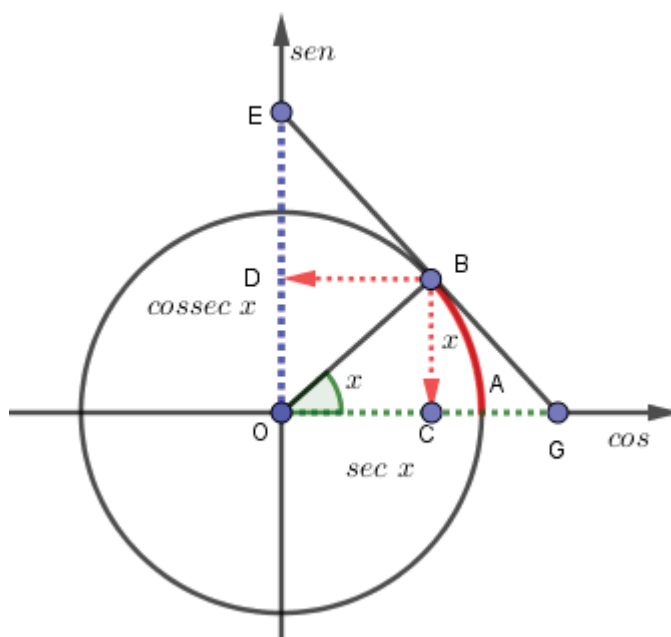
$$OE = \frac{1}{\text{sen } x}$$

∴

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

Conforme ilustrado na Figura 31, observa-se que  $\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$ .

FIGURA 31 – COSSECANTE DE X

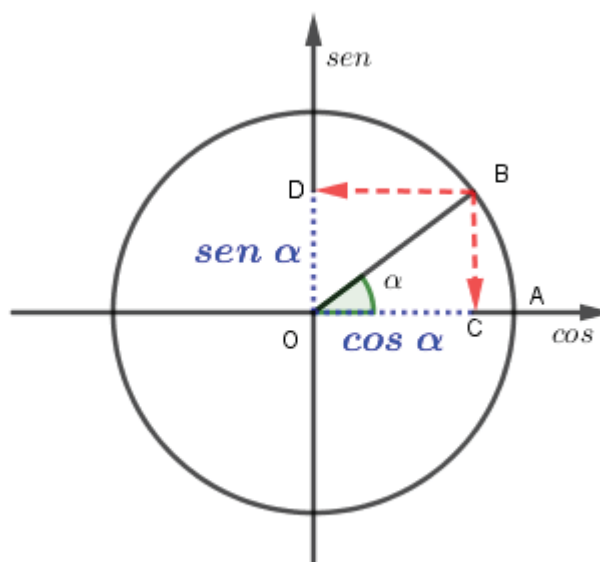


FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

## 4.15 RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

Considere a circunferência trigonométrica da Figura 32.

FIGURA 32 – RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA



FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo OBC, temos que:

$$1^2 = BC^2 + OC^2$$

$$1^2 = \text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha)$$

$$\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1$$

Pela Relação Fundamental da Trigonometria, pode-se determinar qualquer valor das funções trigonométricas sabendo apenas o valor de uma das funções trigonométricas e o quadrante onde se encontra o ângulo. Por exemplo: Dado que  $\text{tg } x = k$ , para  $0^\circ < x < 90^\circ$ , determine as demais funções trigonométricas.

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

$$\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = k$$

$$\text{sen } x = k \cdot \cos x$$

Pela Relação fundamental, tem-se que:

$$\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1$$

$$(k \cdot \cos)^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1$$

$$(k^2 \cdot \text{cos}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1$$

$$\text{cos}^2(x) \cdot [k^2 + 1] = 1$$

$$\text{cos}^2(x) = \frac{1}{k^2 + 1}$$

$$\text{cos}(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{k^2 + 1}}$$

Como cosseno do primeiro quadrante é positivo, tem-se que:

$$\text{cos}(x) = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

∴

$$\text{cos}(x) = \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k^2 + 1}$$

Calculando a  $\sec(x)$ .

$$\sec(x) = \frac{1}{\text{cos}(x)}$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k^2 + 1}}$$

$$\sec(x) = 1 \cdot \frac{k^2 + 1}{\sqrt{k^2 + 1}} \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$\sec(x) = \frac{k^2 + 1\sqrt{k^2 + 1}}{k^2 + 1}$$

∴

$$\sec(x) = \sqrt{k^2 + 1}$$

Calculando  $\operatorname{sen}(x)$ .

$$\operatorname{sen}(x) = k \cdot \cos(x)$$

$$\operatorname{sen}(x) = k \cdot \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k^2 + 1}$$

Calculando  $\operatorname{cosec}(x)$ .

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\frac{k \cdot \sqrt{k^2 + 1}}{k^2 + 1}}$$

$$\operatorname{cosec}(x) = 1 \cdot \frac{k^2 + 1}{k \sqrt{k^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{(k^2 + 1)\sqrt{k^2 + 1}}{k(k^2 + 1)}$$

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k}$$

Calculando a  $\operatorname{cotg}(x)$ .

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$$

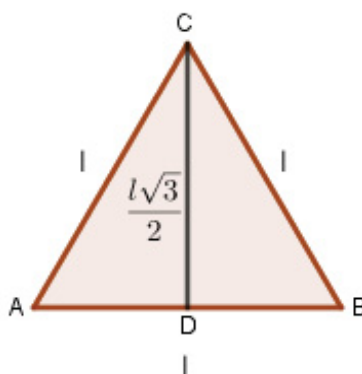
∴

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{k}$$

## 4.16 ÂNGULOS NOTÁVEIS

Os ângulos notáveis são os ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ . Consideremos um triângulo equilátero de lado  $l$ , em seguida traçamos uma bissetriz a partir do vértice  $C$ , como mostra a Figura 33.

FIGURA 33 – ÂNGULOS NOTÁVEIS I



FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

A partir do triângulo ABC com ângulo reto em D e ângulos DBC de  $60^\circ$  e BCD de  $30^\circ$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CDB para determinar a altura em função de  $l$  podemos aplicar as relações trigonométricas.

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{l}{2}$$

$\therefore$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l}$$

$\therefore$

$$\operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l}$$

$\therefore$

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^{\circ} = \frac{l}{2l}$$

∴

$$\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{\operatorname{sen} 30^{\circ}}{\cos 30^{\circ}}$$

$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

∴

$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^{\circ} = \frac{\operatorname{sen} 60^{\circ}}{\cos 60^{\circ}}$$

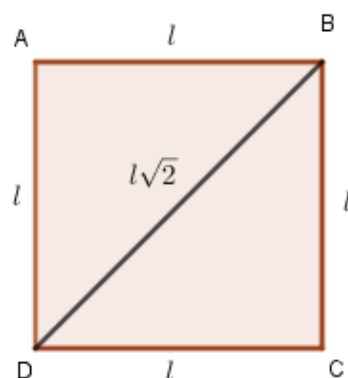
$$\operatorname{tg} 60^{\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

∴

$$\operatorname{tg} 60^{\circ} = \sqrt{3}$$

Considere-se um quadrado de lado  $l$ , conforme a Figura 34. Traçando uma diagonal para determinar as razões trigonométricas de  $45^{\circ}$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BCD conclui-se que  $DB = l\sqrt{2}$ , logo aplicando as relações trigonométricas.

FIGURA 34 – ÂNGULOS NOTÁVEIS II



FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

No triângulo DBC, tem-se que:

$$\operatorname{sen} 45^{\circ} = \frac{l}{l\sqrt{2}}$$

∴

$$\operatorname{sen} 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 45^{\circ} = \frac{l}{l\sqrt{2}}$$

∴

$$\operatorname{cos} 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{l}{l}$$

∴

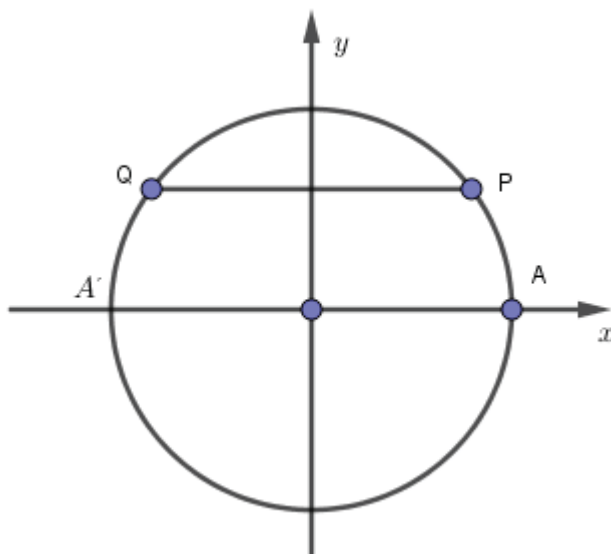
$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = 1$$

#### 4.17 SIMETRIAS NA CIRCUNFERÊNCIA

Considere a circunferência trigonométrica da Figura 35 para reduzir ângulos ao primeiro quadrante.

Do 2º Quadrante para o 1º Quadrante:

FIGURA 35 – SIMETRIAS I



FONTE: Adaptada lezzi (2004)

Considere o Ponto Q simétrico ao P em relação ao eixo y, logo  $\widehat{AQ} + \widehat{QA'} = \pi$ .  $\therefore \widehat{QA'} = \pi - \widehat{AQ}$ . Por exemplo: Reduza o ângulo de  $170^\circ$  para o 1º quadrante.

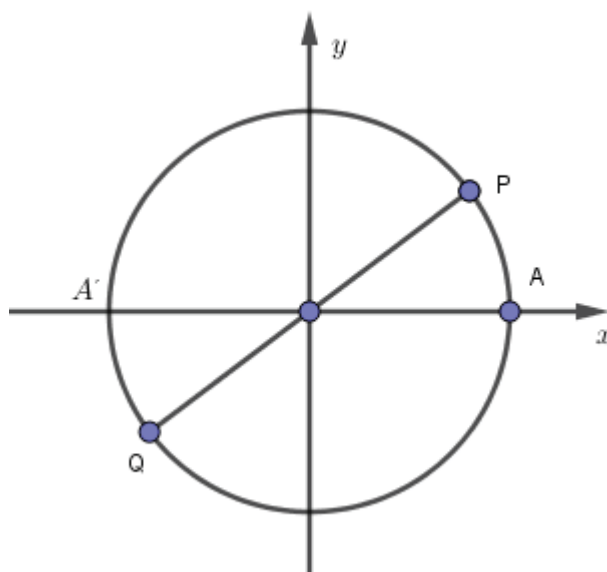
$$x = 180^\circ - 170^\circ$$

$$\therefore$$

$$x = 10^\circ.$$

Do 3º Quadrante para o 1º Quadrante, de acordo com a Figura 36.

FIGURA 36 – SIMETRIAS II



FONTE: Adaptada lezzi (2004)

Seja Q o ponto simétrico a P ao centro, temos que o arco  $\widehat{AQ} - \widehat{QA} = \pi$ . Logo  $\widehat{AP} = \widehat{AQ} - \pi$ . Por exemplo. Reduza ao primeiro quadrante o ângulo de  $230^\circ$ .

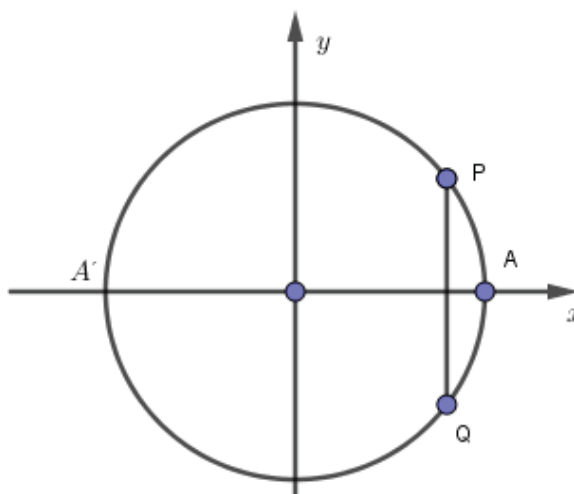
$$x = 230^\circ - 180^\circ$$

$\therefore$

$$x = 50^\circ.$$

Do 4º Quadrante para o 1º Quadrante, conforme a Figura 37.

FIGURA 37 – SIMETRIAS III



FONTE: Adaptada Iezzi (2004)

Seja Q o ponto simétrico a P em relação ao eixo x, logo  $\widehat{AQ} + \widehat{AP} = 2\pi \therefore \widehat{AQ} = 2\pi - \widehat{AP}$ . Por exemplo: Reduza o ângulo de  $340^\circ$  para o 1º Quadrante.

$$x = 2\pi - 340^\circ$$

$$x = 360^\circ - 340^\circ$$

$\therefore$

$$x = 20^\circ$$

#### 4.18 FUNÇÃO DE EULER

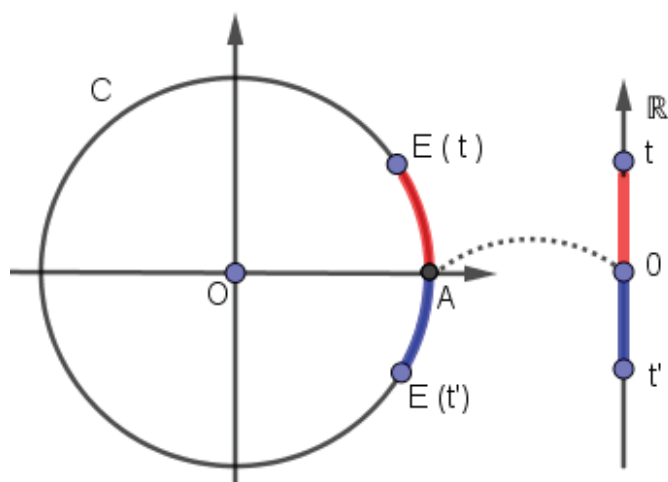
Para definir funções trigonométricas, faz-se necessário recorrer à função de Euler. Seja a função  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ( $C: x^2 + y^2 = 1$ ) que faz correspondência que a cada número real  $t$  o ponto  $E(t) = (x, y)$  da circunferência unitária obtido do seguinte modo:

$$E(0) = (1, 0)$$

Se  $t > 0$ , percorremos sobre a circunferência  $C$ , a partir do ponto  $A(1, 0)$ , um caminho de comprimento  $t$ , no sentido “positivo”, ou seja, sentido anti-horário.

Se  $t < 0$ , percorremos sobre a circunferência  $C$ , a partir do ponto  $A(1, 0)$  um caminho de comprimento  $|t|$ , no sentido “negativo”, ou seja, no sentido horário, de acordo com a Figura 38.

FIGURA 38: FUNÇÃO DE EULER



FONTE: Adaptada Lima (2010)

Cada vez que o ponto  $t$  percorre na reta um intervalo de comprimento  $l$ , sua imagem  $E(t)$  percorre sobre a circunferência  $C$  um arco de comprimento igual a  $l$ . Como a circunferência tem raio igual a um, seu comprimento equivale a  $2\pi$ , quando  $t$  percorre um intervalo de  $2\pi$  na reta,  $E(t)$  dá uma volta completa sobre  $C$ , retornando ao ponto de partida  $A$ . Portanto, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , tem-se  $E(t + 2\pi) = E(t)$ , generalizando  $E(t + 2k\pi) = E(t)$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  e para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

#### 4.19 FUNÇÃO SENO

Dado um número real  $x$ , chama-se função seno:  $f(x) = \text{sen } x$  cada número real  $x$  que associa ao  $\text{sen } x$ .

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

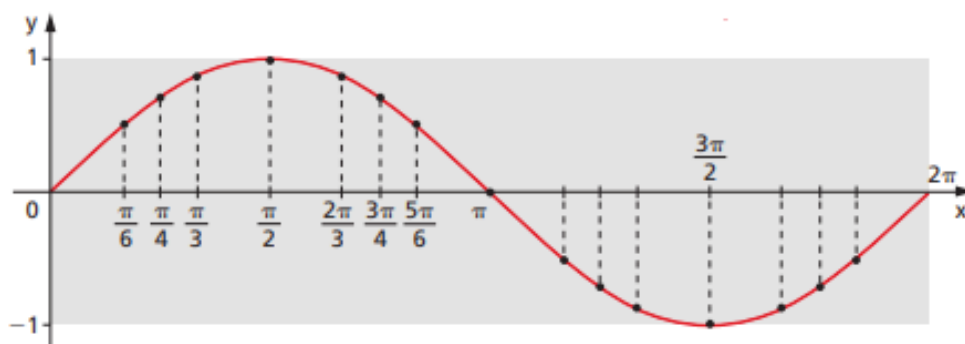
$$x \rightarrow \text{sen } x$$

Podemos construir o gráfico da função seno calculando valores notáveis e encontrando as respectivas imagens.

TABELA 1 – VALORES DE SENO

$x$	$y = \text{sen } x$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\pi$	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$2\pi$	0

FIGURA 39 – Gráfico da função seno



FONTE: Iezzi, Gelson et al. Fundamentos da Matemática Elementar, v. 3, São Paulo: Atual, 2004

Observando o gráfico da função seno da Figura 39, fica evidente que:  $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ , logo a imagem da função seno é o intervalo  $[-1, 1]$ . Além disso, temos para a função seno:

Domínio =  $\mathbb{R}$

Período (tamanho do intervalo no eixo  $x$  para completar um ciclo) =  $2\pi$

Paridade:  $\text{sen } (-x) = -\text{sen } x$

$\therefore$  função seno é uma função ímpar.

## 4.20 FUNÇÃO COSSENO

Dado um número real  $x$ , chama-se função cosseno:  $f(x) = \cos x$  cada número real  $x$  que associa ao  $\cos x$ .

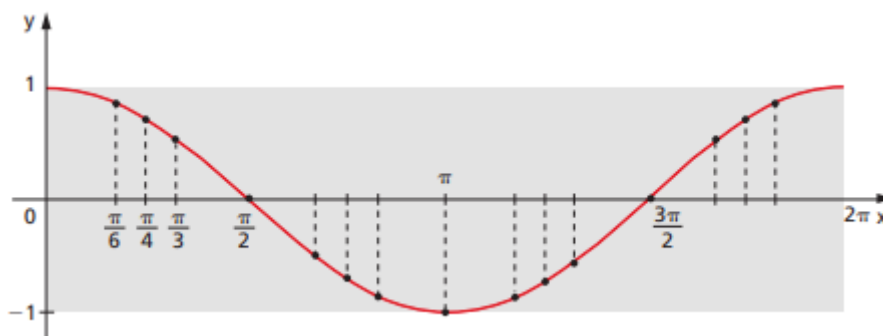
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \cos x$$

TABELA 2 – VALORES DO COSSENO

$x$	$y = \cos x$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\pi$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
$2\pi$	1

FIGURA 40 - Gráfico da função cosseno



Observando o gráfico da função cosseno, da Figura 40, fica evidente que:  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , logo a imagem da função seno é o intervalo  $[-1, 1]$ . Além disso, temos para a função cosseno:

$$\text{Domínio} = \mathbb{R}$$

$$\text{Período (tamanho do intervalo no eixo } x \text{ para completar um ciclo)} = 2\pi$$

$$\text{Paridade: } \cos(-x) = \cos x$$

$\therefore$  função cosseno é uma função par.

Exemplo: Sendo  $a, b, c$  e  $d$  números reais e positivos, determine a imagem e período da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$

Seja  $cx + d = t$ . Quando  $x$  percorre  $\mathbb{R}$ ,  $t$  percorre  $\mathbb{R}$  (pois a função afim  $t = cx + d$  é sobrejetora). Como  $\text{sen } t$  percorre o intervalo  $[-1, 1]$ ,  $b \cdot \text{sen } t$  percorre o intervalo  $[-b, b]$  e  $y = a + b \cdot \text{sen } t$  percorre o intervalo  $[a-b, a+b]$ , que é a imagem da função  $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx+d)$ .

Para que  $f$  complete um período completo é necessário que  $t$  varie de  $0$  a  $2\pi$ , então:

$$t = 0 \Leftrightarrow cx + d = 0 \Leftrightarrow cx = -d \Leftrightarrow x = -d/c$$

$$t = 2\pi \Leftrightarrow cx + d = 2\pi \Leftrightarrow cx = 2\pi - d \Leftrightarrow x = (2\pi - d)/c$$

Portanto:

$$p = ((2\pi - d)/c) - (-d/c) \Leftrightarrow ((2\pi - d)/c) + d/c \Leftrightarrow 2\pi/c$$

## 5 A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS E APLICAÇÕES PRÁTICAS

Neste capítulo é apresentada aplicações da modelagem matemática voltadas à resolução de exercícios de trigonometria extraídos do ENEM e do vestibular da Universidade Federal do Paraná (UFPR). O objetivo é evidenciar como a modelagem pode auxiliar na compreensão dos conceitos trigonométricos, promovendo uma aprendizagem mais significativa e contextualizada. A escolha dessas avaliações deve-se à sua relevância no cenário educacional brasileiro, uma vez que ambas valorizam o raciocínio lógico e a interpretação de situações reais. Por meio da modelagem, pretende-se transformar problemas puramente algébricos em situações concretas, permitindo o estudante visualizar a aplicação prática da trigonometria. Além disso, busca-se verificar se essa metodologia contribui para a redução das dificuldades de aprendizagem e para o desenvolvimento do pensamento crítico, habilidades essenciais para a permanência e desenvolvimento no ensino superior.

A análise do Currículo da Rede Estadual do Paraná evidencia uma abordagem da trigonometria que, embora necessária, é frequentemente sucinta e fragmentada. Essa lacuna, geralmente focada na memorização e na manipulação algébrica básica, resulta em uma defasagem de conhecimento fundamental para o estudante que almeja o sucesso em cursos superiores das áreas de Exatas. A falta de uma compreensão profunda e contextualizada do tema é um fator contribuinte para o alto índice de insucesso e evasão em disciplinas introdutórias como Cálculo e Física.

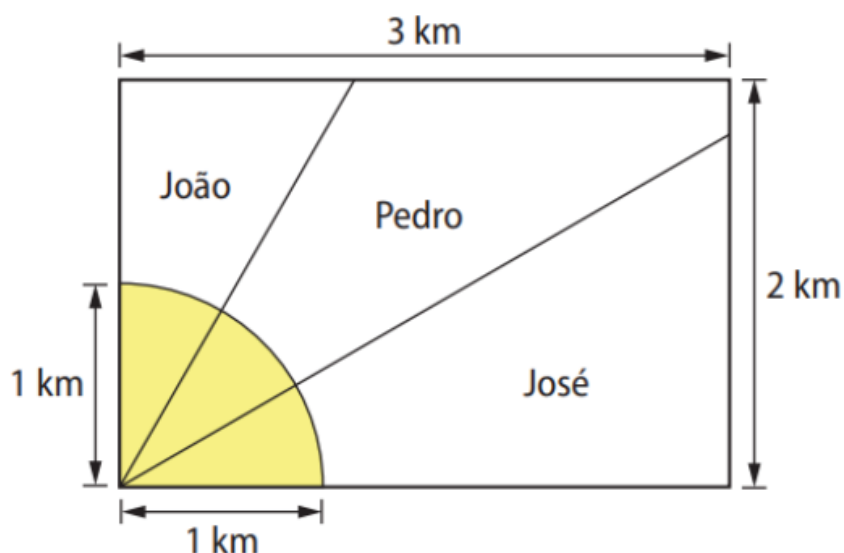
Deste modo, para garantir que o estudante consiga acompanhar e aprimorar sua aprendizagem na universidade, faz-se necessário transcender a superficialidade programática. O domínio da trigonometria exige mais do que a simples memorização da Relação Fundamental ( $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ). É importante que o aluno compreenda e saiba aplicar diversas identidades trigonométricas essenciais (como as fórmulas de adição e as Leis dos Senos e Cossenos), portanto, serão abordados alguns exercícios que foram aplicados no vestibular da UFPR (primeira e segunda fase), do livro Temas e Problemas (Elon de Lima) e do ENEM.

A seguir, segue o primeiro exercício sobre razões trigonométricas no triângulo retângulo, essa questão é do ENEM de 2009.

Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada

por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura 41.

FIGURA 41 – EXERCÍCIO ENEM I



FONTE: Adaptada (2025)

Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a:

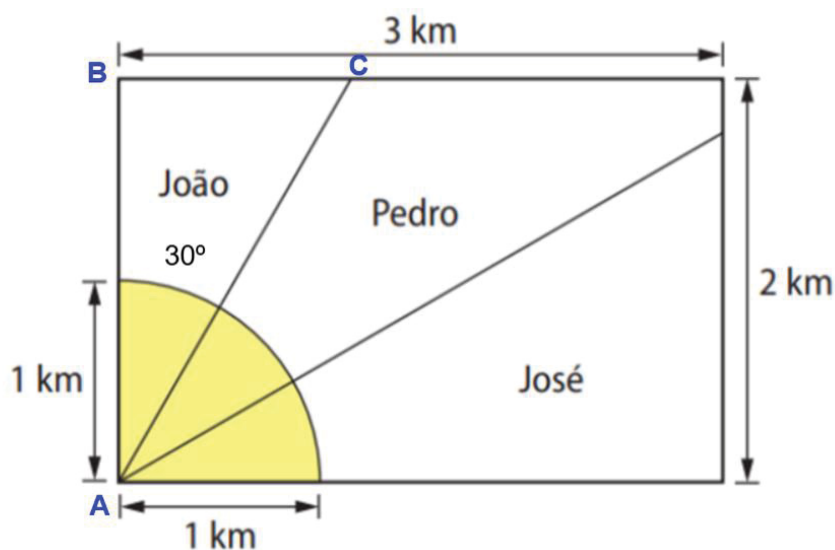
(considere  $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,58$ ).

- a) 50%
- b) 43%
- c) 37%
- d) 33%
- e) 19%

Resolução:

Como a extração do ouro foi repartida em 3 partes iguais, cada repartição tem um ângulo de  $30^\circ$ , pois o arco total forma um ângulo reto (90 graus).

FIGURA 42 – EXERCÍCIO ENEM II



FONTE: Adaptada (2025)

Para calcular a área que coube a João, da Figura 42, é preciso determinar o valor de BC, visto que se trata de um triângulo retângulo. O triângulo ABC é reto em B,  $AB = 2$  e  $\widehat{CAB} = 30^\circ$ , CB é oposto ao ângulo  $\widehat{CAB}$  e AB adjacente ao ângulo  $\widehat{CAB}$ , logo:

$$\operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{BC}{2}$$

$$BC = 2 \cdot \operatorname{tg}(30^\circ)$$

$$BC = 2 \cdot 0,58$$

$$BC = 1,16 \text{ km}$$

Tem-se base = 1,16, altura = 2, logo:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{2 \cdot 1,16}{2}$$

$$\text{Área} = 1,16 \text{ km}^2$$

Área total da herança:  $2 \times 3 = 6 \text{ km}^2$

Percentual de João:  $\frac{1,16}{6} = 0,193 = 19\%$

**A segunda questão** é do livro **Temas e Problemas**, dos autores Elon Lajes de Lima, Paulo Cezar, Eduardo Vagner e Augusto Morgado, conforme a Figura 43.

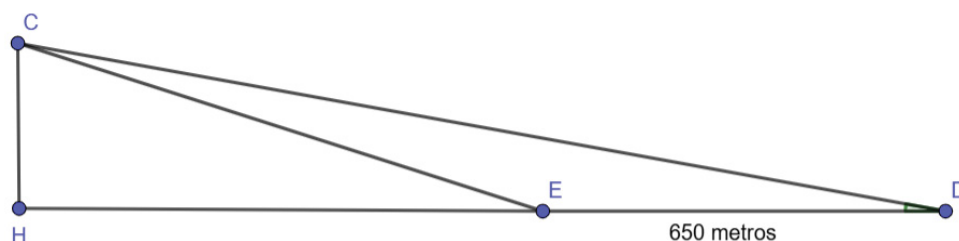
Um observador está no ponto A do aterro do Flamengo e vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de  $10^\circ$  com o plano horizontal (medido com o teodolito). Ele anda em direção ao seu objetivo até um ponto B distante 650 metros de A e agora vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de  $14^\circ$ . Qual é a altura do Pão de Açúcar em relação ao plano de observação?

FIGURA 43 – PÃO DE AÇÚCAR



FONTE: Adaptada Lima (2010)

FIGURA 44 – ESBOÇO PÃO DE AÇÚCAR



FONTE: Adaptada Lima (2010)

Identificando os ângulos da Figura 44.

$$CDE = 10^\circ$$

$$CEH = 14^\circ, \text{ logo } DEC = 166^\circ$$

$$ECD = 4^\circ$$

Pela lei dos senos, pode-se determinar a distância entre os pontos CE.

$$\frac{650}{\text{sen } 4^{\circ}} = \frac{CE}{\text{sen } 10^{\circ}}$$

$$CE = \frac{650 \cdot \text{sen } 10^{\circ}}{\text{sen } 4^{\circ}}$$

$$\text{sen } 10^{\circ} = 0,174$$

$$\text{sen } 4^{\circ} = 0,070$$

$$CE = \frac{650 \cdot 0,174}{0,070}$$

$$CE = 1615,714$$

Aplicando a definição de seno no triângulo EHC, tem-se que:

$$\text{sen } 14^{\circ} = \frac{CH}{CE}$$

$$CH = CE \cdot \text{sen } 14^{\circ}$$

$$\text{Como } \text{sen } 14^{\circ} = 0,242, \quad CH = 1615,714 \cdot 0,242$$

$$CH = 391,002$$

De acordo com informações obtidas em fontes da internet, a altura do Pão de Açúcar é de aproximadamente 396 metros. Assim, o valor encontrado de 391 metros pode ser considerado uma boa aproximação, uma vez que as medidas dos ângulos de  $10^{\circ}$ ,  $4^{\circ}$  e  $14^{\circ}$  não são exatas.

**A terceira questão** como aprofundamento e aplicabilidade em trigonometria, refere-se ao vestibular da UFPR do ano de 2024.

Sabendo que  $\text{sen}(2x) = 3/5$ , assinale a alternativa que corresponde ao valor de  $(\text{sen } x + \text{cos } x)^2$ .

$$\operatorname{sen}(x + x) = \operatorname{sen}(2x)$$

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

Desenvolvendo  $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x$ .

Como  $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$  e  $2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 3/5$

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + 3/5$$

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 8/5$$

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1,6$$

**A quarta questão** é da segunda fase do vestibular da **UFPR** (prova de matemática) do ano de 2016.

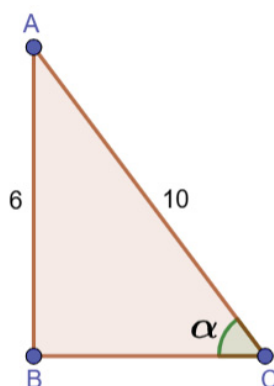
Faça o que de pede.

a) Seja  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , sabendo que  $\operatorname{sen} \alpha = 0,6$ , calcule  $\cos \alpha$  e o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Como  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , e  $\operatorname{sen} \alpha = 6/10$ , pode-se aplicar em um triângulo retângulo a definição de seno no triângulo da figura 45.

FIGURA 45 – EXERCÍCIO UFPR



FONTE: Autor (2025)

Para determinar o valor do  $\cos \alpha$ , basta aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC.

$$10^2 = 6^2 + BC^2$$

$$BC^2 = 100 - 36$$

$$BC = \sqrt{64}$$

$$BC = 8$$

O leitor pode estar se perguntando:  $BC^2$  não seria  $\pm\sqrt{64}$ ? Nesse caso não, pois estamos calculando o valor de BC no triângulo, ou seja, a distância entre BC, logo  $BC = \sqrt{64} = 8$ . O valor de  $\cos \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Substituindo  $\cos \alpha$  na matriz, tem-se que:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \frac{4}{5} \cdot 3 - 4 \cdot 1$$

$$\det A = \frac{12}{5} - 4$$

$$\det A = \frac{12}{5} - \frac{20}{5}$$

$$\det A = -\frac{8}{5}$$

b) Encontre todos os valores de  $\theta \in \mathbb{R}$  para os quais a matriz

$$B = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ 1 & \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ tem determinante } \det(B) = 1$$

$$\det(B) = \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta + 0 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 - (0 \cdot \cos \theta \cdot 1 + \operatorname{sen} \theta \cdot 1 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \theta)$$

$$\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta - (\operatorname{sen} \theta + \sqrt{2} \cdot \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \theta) = 1$$

$$1 - \operatorname{sen} \theta - \sqrt{2} \cdot \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \theta$$

$$1 - \operatorname{sen} \theta - \sqrt{2} \cdot \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \theta = 1$$

$$-\operatorname{sen} \theta - \sqrt{2} \cdot \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (\text{multiplicando por } -1 \text{ ambos os lados})$$

$$\operatorname{sen} \theta + \sqrt{2} \cdot \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (\operatorname{sen} \theta \text{ em evidência})$$

$$\operatorname{sen} \theta \cdot (1 + \sqrt{2} \cdot \cos \theta) = 0$$

Se  $a \cdot b = 0$ , tem -se que  $a = 0$  ou  $b = 0$

Se  $\operatorname{sen} \theta = 0$

$$\theta = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, k\pi, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } 1 + \sqrt{2} \cdot \cos \theta = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos \theta = -1$$

$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Nesse caso,  $\theta$  pode assumir dois valores no ciclo trigonométrico, em grau  $135^\circ$  e  $225^\circ$ , em radianos:

$$\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Logo } \theta = k\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

## 5.1 DO PROBLEMA REAL AO MODELO TRIGONOMÉTRICO: A ALTURA DA CAIXA D'ÁGUA COMO TEMA GERADOR NA MODELAGEM MATEMÁTICA

Com o intuito de tornar o ensino da Trigonometria mais significativo e contextualizado, foi proposta aos alunos de uma escola estadual localizada no município de Bocaiúva do Sul (PR) uma atividade prática com estudantes do 3º ano do Ensino Médio, cujo objetivo foi determinar a altura da caixa d'água da instituição utilizando um teodolito manual construído com materiais de baixo custo. A proposta buscou aproximar os conteúdos teóricos da realidade dos estudantes, evidenciando como a Matemática pode ser empregada na interpretação e resolução de problemas concretos do cotidiano.

A Figura 46 apresenta o teodolito manual construído pelos próprios estudantes, utilizado durante a atividade prática. A Figura 47 mostra a aplicação da proposta na escola, com os alunos colocando em prática os conhecimentos trigonométricos em uma situação real. Por fim, a Figura 48 exhibe os resultados do desempenho dos estudantes em uma questão do vestibular da UFPR, comparando os índices de acertos obtidos antes e após a realização da atividade.

FIGURA 46 – TEODOLITO



FONTE: Autor (2025)

FIGURA 47 – PRÁTICA NA ESCOLA

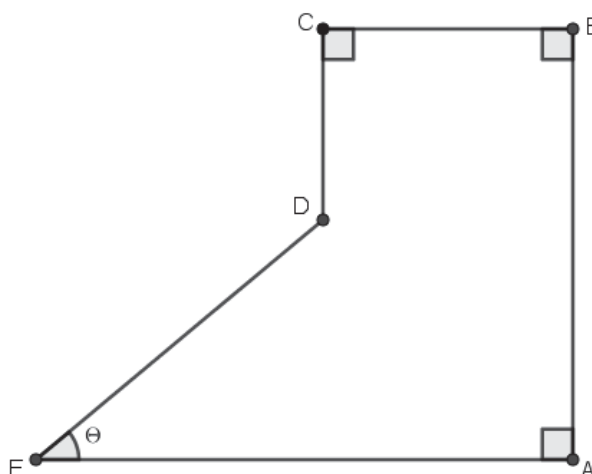


Fonte: Autor (2025)

Durante a execução da atividade, observou-se o engajamento dos alunos, que participaram ativamente da construção do teodolito, das medições e das discussões sobre os resultados. Essa experiência ilustra o que defende Burak (2004), ao afirmar que a modelagem matemática possibilita ao estudante ‘aprender

Matemática fazendo Matemática', uma vez que ele participa de todo o processo investigativo. Além disso, a prática proporcionou o desenvolvimento de habilidades investigativas e colaborativas, reforçando o potencial da modelagem como metodologia capaz de reduzir a evasão e o desinteresse pelas disciplinas da área de exatas.

Com o objetivo de mensurar o ganho de aprendizagem e o desenvolvimento da compreensão trigonométrica dos estudantes, a questão do vestibular **da UFPR de 2025** foi utilizada como instrumento de avaliação de desempenho (aplicada nos momentos de pré-teste e pós-teste). A questão apresenta o seguinte enunciado: O pentágono da figura ao lado tem ângulos retos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ . Conhecendo as medidas dos lados  $AE = 15$ ,  $AB = 12$ ,  $BC = 7$  e  $CD = 5$ . Assinale a alternativa que corresponde ao valor da tangente do ângulo  $\Theta = \hat{E}$ .

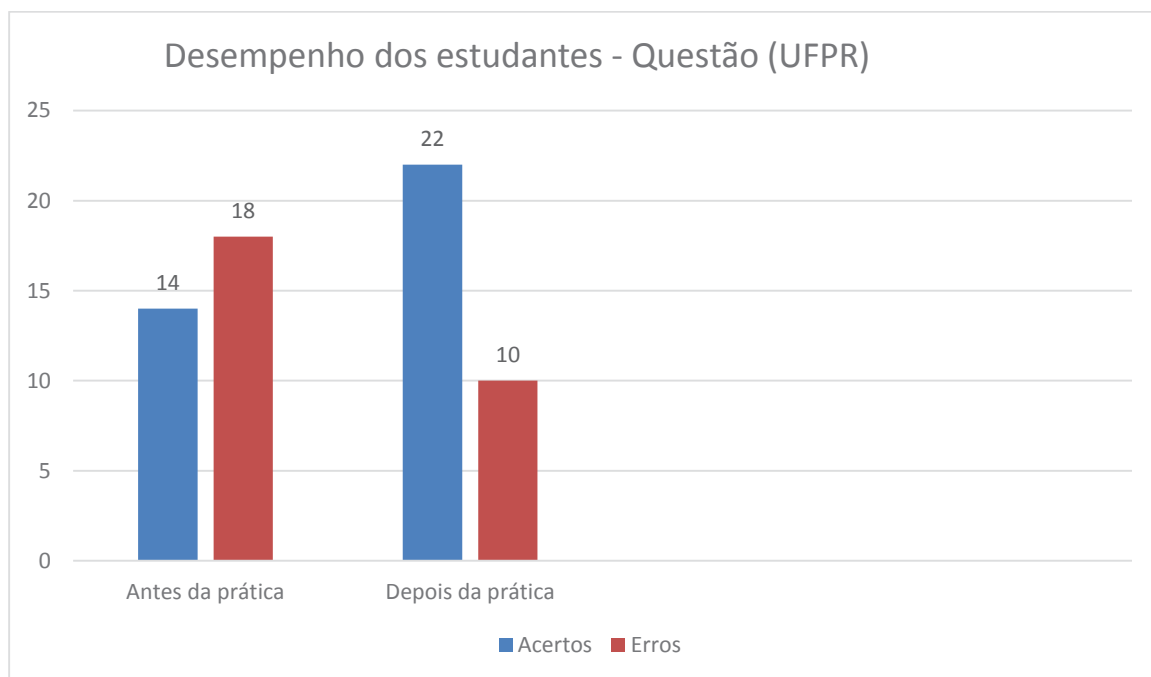


- a) 4/5
- b) 5/4
- c) 5/8
- d) 8/7
- e) 7/8

O gráfico da Figura 3 evidencia uma melhora significativa no desempenho dos estudantes após a realização da atividade prática de modelagem. Antes da proposta, apenas 43,8% dos alunos acertaram a questão aplicada, enquanto após a prática o percentual de acertos subiu para 68,8%, representando um aumento relativo de aproximadamente 57%. Esse resultado revela o potencial da Modelagem Matemática como estratégia de ensino, possibilitando uma forma

alternativa para abordagem do problema, que, de certa forma, promoveu uma melhor compreensão acerca dos conceitos trigonométricos envolvidos.

FIGURA 48 – DESEMPENHO DOS ESTUDANTES



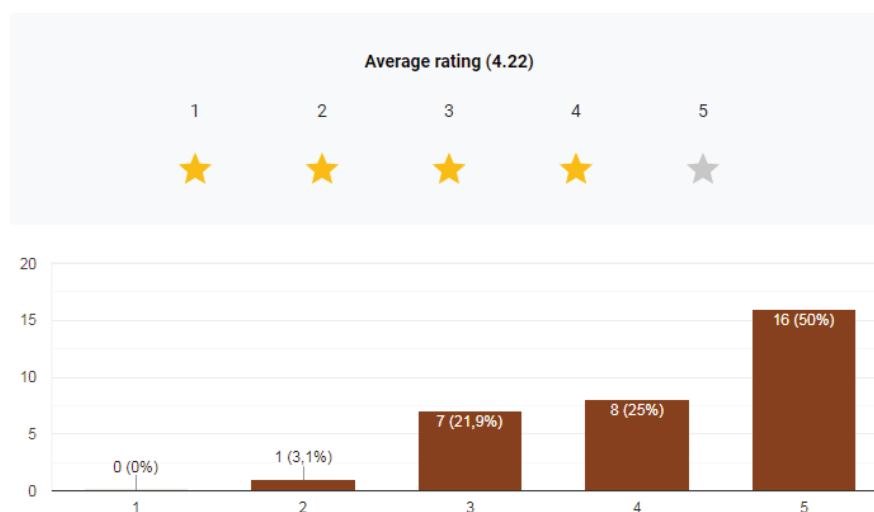
Fonte: Autor (2025)

Além da avaliação quantitativa do desempenho, foi aplicada uma pesquisa de opinião por meio de um formulário do Google Forms, com o objetivo de identificar a percepção dos alunos em relação à atividade prática. Dos 32 participantes, 50% atribuíram nota máxima (5) à afirmação “*A atividade me ajudou a compreender melhor o conteúdo*”, e a média geral das respostas foi 4,22, em uma escala de 1 a 5, de acordo com a Figura 49.

FIGURA 49 – GRÁFICO DE OPINIÃO I

A atividade me ajudou a compreender melhor o conteúdo.

32 respostas



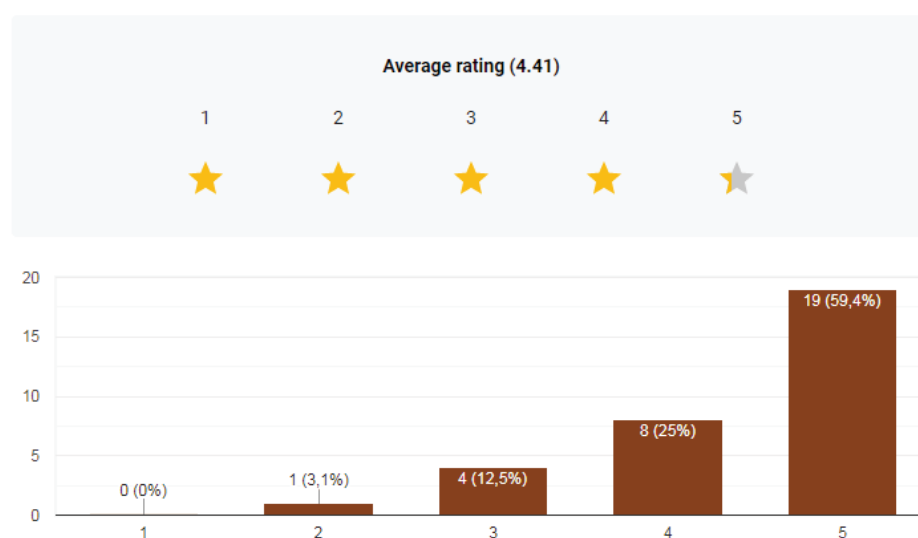
FONTE: Autor (2025)

Dos 32 participantes, 59,4% atribuíram nota máxima (5) à afirmação “o uso da modelagem facilitou a aprendizagem”, e a média geral das respostas foi 4,41, em uma escala de 1 a 5, de acordo com a Figura 50.

FIGURA 50 – GRÁFICO DE OPINIÃO II

O uso da modelagem matemática facilitou a aprendizagem.

32 respostas



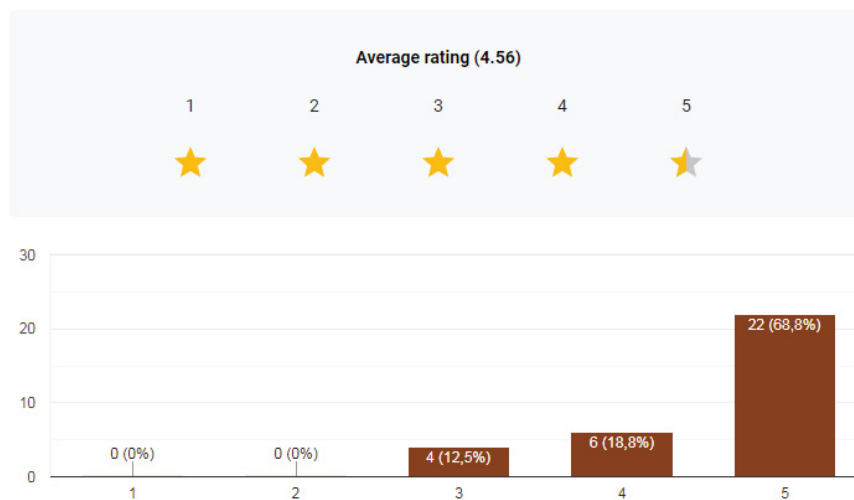
FONTE: Autor (2025)

Dos 32 participantes, 68,8% atribuíram nota máxima (5) à afirmação “consegui relacionar a matemática com o mundo real”, e a média geral das respostas foi 4,56, em uma escala de 1 a 5, de acordo com a Figura 51.

FIGURA 51 – GRÁFICO DE OPINIÃO III

Consegui relacionar a matemática com o mundo real.

32 respostas



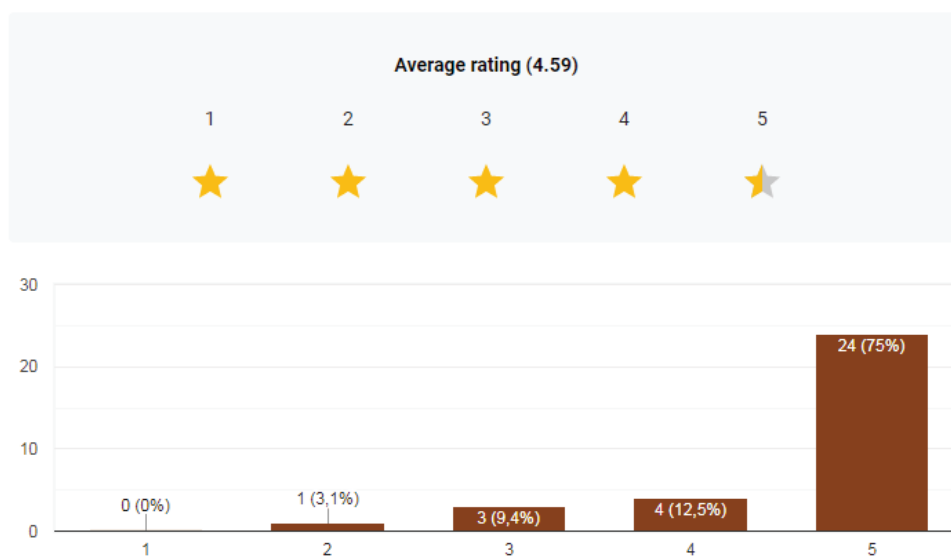
FONTE: Autor (2025)

Dos 32 participantes, 75% atribuíram nota máxima (5) à afirmação “o trabalho em grupo foi importante para resolver o problema”, e a média geral das respostas foi 4,59, em uma escala de 1 a 5, de acordo com a Figura 52.

FIGURA 52 – GRÁFICO DE OPINIÃO IV

O trabalho em grupo foi importante para resolver o problema.

32 respostas



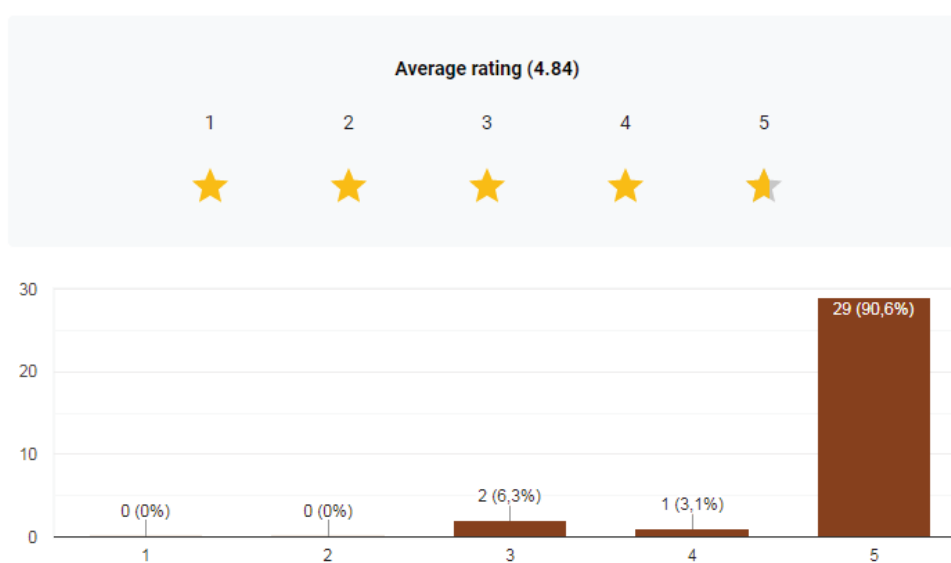
FONTE: Autor (2025)

Dos 32 participantes, 90,6% atribuíram nota máxima (5) à afirmação “gostaria de participar de mais atividades práticas como esta”, e a média geral das respostas foi 4,84, em uma escala de 1 a 5, de acordo com a Figura 53.

FIGURA 53 – GRÁFICO DE OPINIÃO V

Gostaria de participar de mais atividades práticas como esta.

32 respostas



FONTE: Autor (2025)

Esses dados evidenciam que a maior parte dos estudantes reconheceu a relevância da modelagem matemática para a compreensão dos conceitos trigonométricos, confirmando que a aprendizagem se torna mais efetiva quando o conteúdo é contextualizado e relacionado a situações reais (MOREIRA, 2011). A percepção positiva reforça que a experiência contribuiu não apenas para o aprendizado cognitivo, mas também para o engajamento e a motivação dos alunos, aspectos essenciais para o desenvolvimento da autonomia intelectual e do raciocínio crítico, que no futuro podem ajudar na redução da evasão nas áreas de exatas.

## 6 A MATEMÁTICA POR TRÁS DA RODA-GIGANTE: UMA APLICAÇÃO CONTEXTUALIZADA

Neste capítulo é apresentada a aplicação das funções trigonométricas no contexto do movimento de uma roda-gigante, localizada no município de Balneário Camboriú, em Santa Catarina. A partir de uma situação-problema concreta, é possível construir, de forma visual e contextualizada, o entendimento das funções trigonométricas, evidenciando conceitos como a mudança de escala vertical, relacionada à altura máxima e mínima da cabine, e a mudança de escala horizontal, associada ao período do movimento, isto é, ao tempo necessário para a realização de uma volta completa da roda. Dessa forma, a modelagem permite explorar, de maneira integrada, os parâmetros das funções seno e cosseno e seus efeitos no comportamento gráfico. A Big Wheel, como é conhecida a roda gigante, é um símbolo turístico com dinâmica de movimento periódico, que permite representar matematicamente através das funções seno e cosseno a altura de uma cabine em relação ao tempo. Essa abordagem, busca não apenas facilitar a compreensão dos conceitos, mas também contribuir para a formação de base sólida que prepara os alunos para os desafios do ensino superior nas áreas de exatas.

Com uma altura de 82 metros e tempo aproximado de uma volta completa de 20 minutos. A atração tem capacidade de levar 216 pessoas, como ilustra a Figura 54.

FIGURA 54: BIG WHEEL



FONTE: [www.fgbigwheel.com.br](http://www.fgbigwheel.com.br)\_acesso em 23/09/2025

No site ([www.fgbigwheel.com.br](http://www.fgbigwheel.com.br)), pode-se obter informações como o preço do ingresso, quantidade de pessoas por cabine, tempo de duração e altura máxima de uma cabine.

Modelando a situação, de acordo com a Figura 55.

Diâmetro: A Big Wheel tem 65 metros de diâmetro.

Altura: A Big Wheel tem 82 metros de altura.

Velocidade de viagem: aproximadamente 11 metros por segundo.

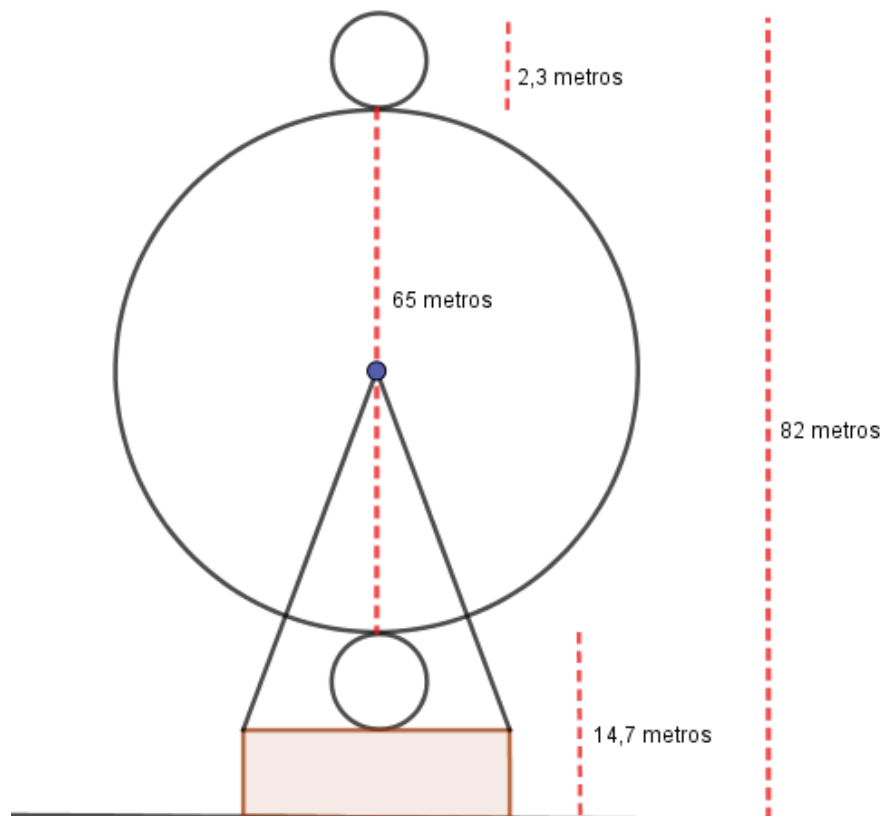
Rotação: Cada rotação dura cerca de 20 minutos.

Visão: Durante o percurso da Big Wheel, pode-se observar a praia central, a orla principal, os prédios famosos da cidade e a mata atlântica.

Diante de todas as informações obtidas, é possível fazer um esboço da roda gigante.

De acordo com os valores obtidos, segue o esboço da Figura 55.

FIGURA 55 – ESBOÇO DA BIG WHEEL



FONTE: Autor (2025)

Seja  $h(t)$  a altura da cabine em função do tempo  $t$ .

As variáveis utilizadas nos cálculos são:

- $t$ : tempo: medido em minutos;
- $h(t)$ : altura da cabine, medido em metros;
- $B$ : amplitude da função, dada por:  

$$B = \frac{\text{valor máximo} - \text{valor mínimo}}{2};$$
- $A$ : eixo de simetria da função, dado por:  

$$A = \frac{\text{valor máximo} + \text{valor mínimo}}{2}$$
- $P$ : período da função, isto é, tempo necessário para completar uma volta;
- Os valores observados são:
  - Altura máxima da cabine:  $h_{\text{máx}} = 82$  metros;
  - Altura mínima da cabine:  $h_{\text{mín}} = 12,4$  metros;
  - Duração de uma volta completa:  $P = 20$  minutos;
  - Velocidade de viagem: 0,19 metros por segundo ou 0,612 quilômetros por hora.
- Período: Uma volta completa dura cerca de 20 minutos.

Para generalizar a função que esboce o movimento cíclico da roda gigante, tem-se que:  $h(t) = A \pm B \cdot \text{sen}(c \cdot t \pm d)$ , em que os parâmetros  $c$  equivale a frequência angular (quantidade de oscilações em um determinado tempo), e  $d$  equivale ao deslocamento no gráfico. Os parâmetros  $A$  e  $B$  já foram citados no texto.

O período de uma função trigonométrica é dado por:

$$P = \frac{2\pi}{|c|}$$

$$20 = \frac{2\pi}{|c|}$$

$$20 \cdot |c| = 2\pi$$

$$|c| = \frac{2\pi}{20}$$

$$\therefore c = \frac{\pi}{10}$$

Sabe-se que no instante inicial e no instante final do funcionamento da roda gigante a altura da cabine é mínima.

$$\text{Logo: } h(0) = 12,4 \text{ metros e } h(20) = 12,4 \text{ metros.}$$

Como a velocidade é constante, pode-se concluir que na metade do tempo de duração a altura é máxima.

$$h(10) = 82 \text{ metros.}$$

$$B: \text{ amplitude da função} = \frac{82 - 12,4}{2} = 34,8$$

$$A: \text{ eixo de simetria da função: } \frac{82 + 12,4}{2} = 47,2$$

$$h(t) = 47,2 + 34,8 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{10}x + d\right)$$

Como  $h(0) = 12,4$ , tem-se que:

$$12,4 = 47,2 + 34,8 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{10} \cdot 0 + d\right)$$

$$12,4 - 47,2 = 34,8 \cdot \text{sen}(d)$$

$$-34,8 = 34,8 \text{ sen}(d)$$

$$\frac{-34,8}{34,8} = \text{sen}(d)$$

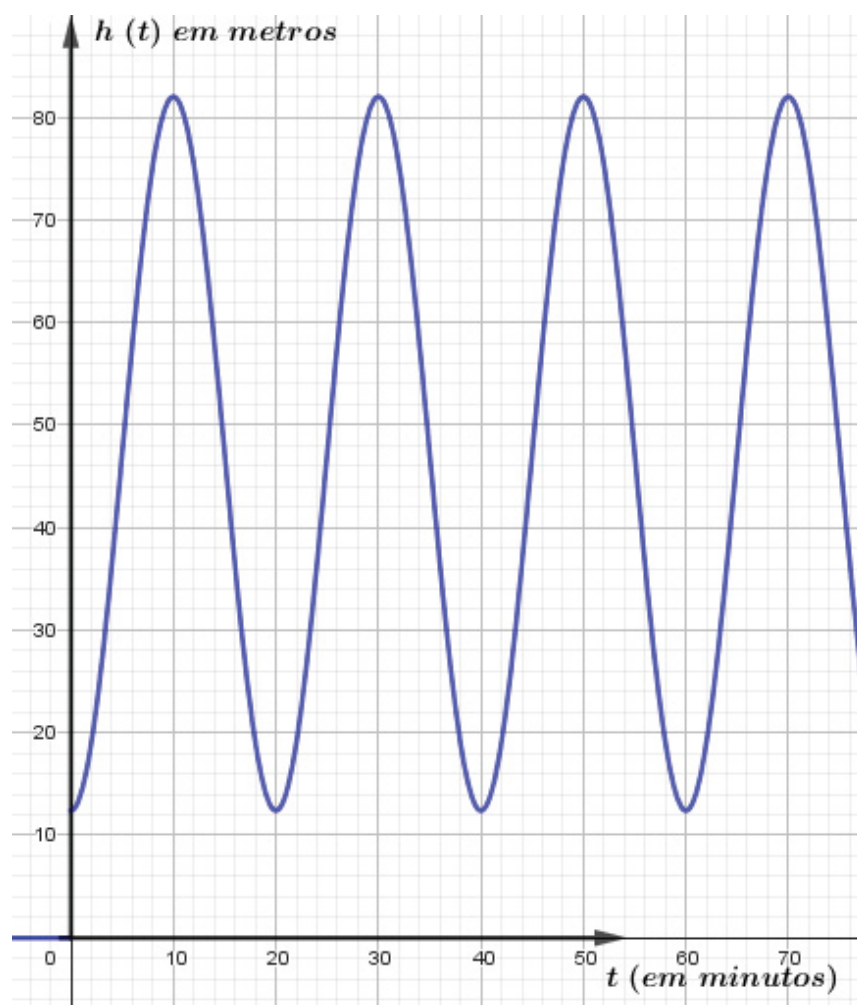
$$-1 = \text{sen}(d)$$

$$\therefore d = \frac{3\pi}{2}$$

$$h(t) = 47,2 + 34,8 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{10}t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

A Figura 56 ilustra da gráfico da função obtida.

FIGURA 56 - GRÁFICO GERADO PELA BIG WHEEL



FONTE: Autor (2025)

Com o objetivo de favorecer a visualização e a compreensão do fenômeno estudado, foi desenvolvido um applet interativo no software GeoGebra que modela o movimento da Big Wheel por meio de funções trigonométricas. Nesse ambiente, o leitor pode manipular o parâmetro  $t$  (tempo) e observar, de forma simultânea, o movimento circular uniforme de um ponto sobre a circunferência e o correspondente gráfico da função seno que descreve a altura da cadeira ao longo do tempo. O applet encontra-se disponível para acesso no link a seguir: <https://www.geogebra.org/classic/g2n6vv8v>

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A história da Trigonometria remonta às antigas civilizações egípcia e babilônica, que já utilizavam relações entre ângulos e medidas para resolver problemas práticos de astronomia e construção. Posteriormente, com Hiparco de Niceia e, mais tarde, com os matemáticos árabes e indianos, a trigonometria passou a assumir uma forma mais sistematizada, culminando nas formulações de Ptolomeu e nas contribuições de Euler, que consolidaram o campo tal como o conhecemos hoje. Essa trajetória histórica evidencia que a Trigonometria nasceu de necessidades concretas e foi desenvolvida em diálogo com o mundo real uma característica que, em parte, se perdeu no ensino contemporâneo, frequentemente marcado pela abstração excessiva e pelo distanciamento das aplicações práticas.

Essa perspectiva histórica serviu de ponto de partida para a reflexão desenvolvida nesta dissertação, cujo objetivo foi investigar de que forma a modelagem matemática pode contribuir para uma aprendizagem mais significativa da trigonometria e, ao mesmo tempo, atuar como elemento de enfrentamento à evasão nas áreas de exatas. Para alcançar esse propósito, foi elaborada e aplicada uma proposta didática baseada em situações-problema contextualizadas, com destaque para as atividades “Medindo a Altura da Caixa d’Água” e “Modelando a Função da Roda-Gigante”, que possibilitaram aos alunos explorar, de maneira prática, os conceitos fundamentais da trigonometria.

A fundamentação teórica apoiou-se em autores como Bassanezi (2002), Burak (2004) e Moreira (2011), que defendem a modelagem matemática como uma metodologia capaz de articular teoria e prática, favorecendo a construção do conhecimento a partir de situações reais. Nessa perspectiva, a atividade prática de modelagem foi desenvolvida com estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola estadual em Bocaiuva do Sul (PR), com o objetivo de determinar a altura da caixa d’água da instituição utilizando um teodolito confeccionado com materiais de baixo custo.

Os resultados demonstraram avanços significativos na compreensão dos conceitos trigonométricos, evidenciados pelo aumento do desempenho dos alunos na questão avaliativa de 43,8% para 68,8% de acertos e pelas respostas positivas ao questionário aplicado após a atividade. A análise qualitativa apontou que os estudantes passaram a reconhecer a utilidade da matemática na resolução de

problemas do cotidiano, reforçando a importância da contextualização e da aprendizagem significativa no processo de ensino.

A análise do Currículo da Rede Estadual do Paraná revelou uma abordagem concisa e, por vezes, fragmentada da Trigonometria, o que se mostra insuficiente para o rigor e a profundidade exigidos no Ensino Superior, especialmente nos cursos da área de Exatas. Essa lacuna curricular contribui diretamente para as dificuldades enfrentadas pelos alunos e, conseqüentemente, para as altas taxas de evasão nas disciplinas introdutórias de Cálculo e Física.

Considera-se que a modelagem matemática constitui uma estratégia pedagógica eficaz para o ensino da trigonometria, pois permite ao aluno aprender fazendo, investigando e relacionando conceitos a situações concretas. Além de favorecer o desenvolvimento do raciocínio lógico e da autonomia intelectual, essa abordagem contribui para reduzir o desinteresse e a evasão escolar nas disciplinas da área de Ciências Exatas.

Por fim, destaca-se que este estudo pode servir de referência para outros professores, incentivando a adoção de práticas que integrem teoria e realidade. Recomenda-se, como continuidade desta pesquisa, o aprofundamento de estudos que explorem a modelagem em outros tópicos da Matemática, de modo a fortalecer o papel dessa metodologia na formação crítica, autônoma e significativa dos estudantes.

## 8 REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **Educational Psychology: A Cognitive View**. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2010.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

**BRASIL**. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018.

BURAK, Dionísio. **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. 2. ed. Londrina: EDUEL, 2004.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

EVES, Howard, **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2008.

GARCIA, A. L.; GOMES, J. F. **Causas da evasão em cursos de Ciências Exatas: uma revisão da produção acadêmica**. Revista Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 48, p. 944–953, 2022.

**GEOGEBRA**. *GeoGebra Classic*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 17 dez. 2025

GOMES, Severino Carlos. **Ensino de trigonometria numa abordagem histórica: um produto educacional**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, Natal, 2015. Disponível em: <https://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/683>. Acesso em: 1 set. 2025.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar – Volume 3: Trigonometria**. 8ª ed. São Paulo: Editora Atual, 2004.

LIMA, Elon Lages et al. **Temas e problemas**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LOBO DA COSTA, Nielce Meneguelo. **Funções seno e cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do “mundo experimental” e do computador**. 1997. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

LOBO DA COSTA, Osvaldo. **História da matemática**. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1997.

MOREIRA, Marco Antônio. **Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. São Paulo: Centauro, 2011.

OLIVEIRA, Adriana T. E.; DINIZ, Geraldo L. **Ensino de funções trigonométricas com modelagem matemática**. Proceedings of the International Conference on Mathematics Education. São Carlos: SBMAC, 2018. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/3792>. Acesso em: 1 set. 2025.

PEDROSO, Leonor Wierzynski. **Uma proposta de ensino da trigonometria com uso do software GeoGebra**. 2012. 162 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/49284>. Acesso em: 1 set. 2025.

POSSANI, Claudio. **Um pouco das funções trigonométricas**. YouTube, 22/01/2023. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=vBua7N9GN5A&t=620s>. Acesso em 18/08/2025.

MARCELL, Cristiano. **Essa demonstração não está nos livros! Tangente da soma!** YouTube, [S.l.], 26 ago. 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=lxYAIZ8nyUI>. Acesso em: 5 out. 2025.

SMITH, Davi Eugene. **History of Mathematics: Volume I e II**. New York: Dover Publications, 1958.

STRUIK, Dirk J. **A concise history of mathematics**. 4. rev. ed. New York: Dover Publications, 1992.

VAN DER WAERDEN, Bartel Leendert. **Science Awakening**. Tradução de Arnold Dresden. New York: Oxford University Press, 1961.

## **ANEXOS**

### Anexo A - Produções Acadêmicas

Como produto desta dissertação, foi elaborado um vídeo didático relacionado à atividade de modelagem matemática desenvolvida neste trabalho, bem como submetido um artigo científico para publicação.

Vídeo didático:

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=RcfSKC2pLWA&t=1s>

Artigo submetido para publicação:

Arise, J. F.; Pettres, R. TRIGONOMETRIA NA ALTURA DA TORRE DA CAIXA D' ÁGUA E NA RODA-GIGANTE, Revista do Professor de Matemática, RPM, 2026.