

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RICARDO AUGUSTO BORBA

DIMENSIONAMENTO E ALOCAÇÃO DE RESERVA GIRANTE VIA FLUXO DE POTÊNCIA
ÓTIMO MULTIPERÍODO E MULTICONTINGÊNCIA INTERVALAR

CURITIBA

2025

RICARDO AUGUSTO BORBA

DIMENSIONAMENTO E ALOCAÇÃO DE RESERVA GIRANTE VIA FLUXO DE POTÊNCIA
ÓTIMO MULTIPERÍODO E MULTICONTINGÊNCIA INTERVALAR

Documento apresentado ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientadora: Profa. Dra. Thelma Solange Piazza
Fernandes

CURITIBA

2025

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Borba, Ricardo Augusto

Dimensionamento e alocação de reserva girante via fluxo de potência ótimo multiperíodo e multicontingência intervalar / Ricardo Augusto Borba. – Curitiba, 2025.

1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Orientador: Thelma Solange Piazza Fernandes

1. Energia - Fontes alternativas. 2. Reserva Girante. 3. Sistemas de energia elétrica hidrotermica. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Fernandes, Thelma Solange Piazza. IV. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA ELÉTRICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **RICARDO AUGUSTO BORBA**, intitulada: **DIMENSIONAMENTO E ALOCAÇÃO DE RESERVA GIRANTE VIA FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO MULTIPERÍODO E MULTICONTINGÊNCIA INTERVALAR**, sob orientação da Profa. Dra. THELMA SOLANGE PIAZZA FERNANDES, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 26 de Novembro de 2025.

Assinatura Eletrônica

29/11/2025 19:50:31.0

THELMA SOLANGE PIAZZA FERNANDES

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

27/11/2025 14:37:51.0

PATRICIA TEIXEIRA LEITE ASANO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC)

Assinatura Eletrônica

27/11/2025 13:35:49.0

KATIA CAMPOS DE ALMEIDA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA)

Assinatura Eletrônica

27/11/2025 10:51:57.0

ELIZETE MARIA LOURENÇO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

*Diese Arbeit widme ich meinen Eltern Edvald und Sebastiana,
meinem Bruder Eduardo
und meiner Freundin Thamiris*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida e força durante todo esse trabalho

Aos meus pais Edvald e Sebastiana por terem me proporcionado educação, ensino, carinho e amor, que me guiaram até aqui. Ao meu irmão Eduardo pelo companheirismo e ajuda.

À minha namorada Thamiris Karoline pelo verdadeiro amor, amizade, confiança, companheirismo, dedicação e apoio sempre.

Ao meu padrasto Prof. Djalma Lopes de Medeiros (*in memoriam*) por ter sido uma verdadeira inspiração e amigo.

À Prof^ª. Dr^ª. Thelma pela amizade, orientação, dedicação, confiança, ajuda e conhecimento transmitido.

Aos membros da banca examinadora, Prof^ª. Dr^ª. Elizete Maria Lourenço, Prof^ª. Dr^ª. Patrícia Leite Teixeira e Prof^ª. Dr^ª. Katia Campos de Almeida pela dedicação na revisão desse trabalho.

Aos meus familiares por sempre apoiar e estarem presentes.

À família da minha namorada pelo acolhimento, amizade, confiança e ajuda.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

*“A verdadeira motivação vem de realização,
desenvolvimento pessoal,
satisfação no trabalho e reconhecimento.”
(Frederick Herzberg)*

RESUMO

Mundialmente, tem havido um crescimento expressivo de fontes renováveis (eólica e solar) devido aos seus baixos impactos ambientais e custos decrescentes. Como elas apresentam uma variabilidade e intermitência de geração e para se garantir o fornecimento de energia de uma forma segura, deve-se prever a disponibilidade de reserva girante como solução para diminuir o risco de déficit nos momentos de interrupção na geração e em situações usuais de contingências, como saída de linhas e geração. Assim, é preciso o desenvolvimento de técnicas específicas para despacho e agendamento de energia, potência e reserva, a fim de encontrar um ponto ótimo entre a penetração de energia eólica, atendimento a emergências, gargalos de transmissão e reserva girante. Neste sentido, o presente trabalho propõe o desenvolvimento de um Fluxo de Potência Ótimo linear multiperíodo e multicontingência, que além de realizar o despacho de potência de um sistema hidrotérmico (incluindo restrições elétricas e energéticas) para um horizonte de um dia a frente seja capaz também de fazer dimensionamento do montante de reserva girante necessário para suprir diferentes situações de saída de linhas, de geradores e níveis de energia renovável não suprida, assim como também realizar alocação ótima de reserva girante entre as unidades de geração. Além disto, como estratégia para se incorporar as incertezas inerentes ao problema, pretende-se utilizar a Matemática Intervalar como um problema de pós-otimização, ou seja, após a otimização determinística obtida pelo Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Multicontingência (FPOMM), acrescentam-se faixas de incertezas em alguns parâmetros da rede para que assim se possa determinar faixas ótimas de operação da rede, obtendo-se um Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Multicontingência Intervalar (FPOMMI). Os resultados são apresentados para dois sistemas de 33 barras e 291 barras que representam a rede Sul do Brasil. Foram comparados os resultados obtidos por um Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo – FPOMP (que incorpora a regra do ONS) e o FPOMM proposto. Ambos os métodos apresentaram pouca divergência entre os valores referentes aos despachos individuais de cada máquina por período. No entanto, no cômputo final, para o sistema de 291 barras, por exemplo, método proposto obteve um valor total de reserva alocada 9,8% menor que o do FPOMP e ainda reduziu o total de corte de carga diário. Na validação do FPOMMI os resultados mostraram boa precisão e uniformidade, baixa dispersão e desempenho cerca de 12 vezes mais rápido que o método de validação (FPOMM determinístico). Assim, algumas das contribuições do método proposto, como a consideração de todas as contingências nas simulações para alocação das reservas e minimização de corte de carga, é garantir disponibilidade de potência em situações de emergência em estudos de um dia a frente e que aliada à Matemática Intervalar oferece ao operador um leque de mais opções para decisões mais seguras e adaptáveis a diferentes cenários e com pouco esforço computacional.

Palavras-chave: Reserva Girante, Planejamento de Operação Hidrotérmica, Matemática Intervalar, Método de Krawczyk, Fluxo Potência Ótimo Multiperíodo e Multicontingência.

ABSTRACT

Globally, there has been a significant growth in renewable energy sources (wind and solar) due to their low environmental impacts and decreasing costs. However, because these sources exhibit variability and intermittency in generation, and to ensure a secure energy supply, it is necessary to plan for the availability of spinning reserves as a solution to mitigate the risk of deficits during generation interruptions and in typical contingency situations, such as line and generation outages. Therefore, it is necessary to develop specific techniques for dispatching and scheduling energy, power, and reserves in order to find an optimal balance between wind energy penetration, emergency response, transmission bottlenecks, and spinning reserves. In this sense, the present work proposes the development of a linear multi-period and multi-contingency Optimal Power Flow, which, in addition to performing the power dispatch of a hydro-thermal system (including electrical and energy constraints) for a one-day horizon, is also capable of sizing the amount of spinning reserve needed to supply different line and generator output situations and levels of unsupplied renewable energy, as well as performing optimal allocation of spinning reserve among generation units. Furthermore, as a strategy to incorporate the uncertainties inherent in the problem, it is intended to use Interval Mathematics as a post-optimization problem; that is, after the deterministic optimization obtained by the Multi-period and Multi-contingency Optimal Power Flow (MMOPF), uncertainty bands are added to some network parameters so that optimal network operating ranges can be determined, obtaining an Interval Multi-period and Multi-contingency Optimal Power Flow (IMMOPF). The results are presented for two systems, one with 33-bus and the other with 291-bus, representing the Southern Brazilian grid. The results obtained by a Multi-Period Optimal Power Flow – MPOPF (which incorporates the ONS rule) and the proposed MMOPF were compared. Both methods showed little divergence between the values referring to the individual dispatches of each machine per period. However, in the final calculation, for the 291-bus system, for example, the proposed method obtained a total allocated reserve value 9.8% lower than that of the MPOPF and also reduced the total daily load shedding. In the validation of the IMMOPF, the results showed good precision and uniformity, low dispersion, and performance approximately 12 times faster than the validation method (deterministic MMOPF). Thus, some of the main contributions of the proposed method—such as the consideration of all contingencies in the simulations for reserve allocation and load-shedding minimization—include ensuring power availability in emergency situations in day-ahead studies. When combined with Interval Mathematics, the method provides the system operator with a broader set of options for safer and more adaptable decision-making across different scenarios, with low computational effort.

Keywords: Spinning Reserve, Hydrothermal Operation Planning, Interval Mathematics,

Krawczyk Method, Multi-period and Multi-contingency Optimal Power Flow.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Carga - ONS	31
Figura 2 – Propriedades da matemática intervalar	54
Figura 3 – União	56
Figura 4 – Interseção	56
Figura 5 – Função $\text{sen}(x)$	59
Figura 6 – Fluxograma do FPOMMI	91
Figura 7 – Sistema 33 barras - Sul Sudeste Brasileiro	93
Figura 8 – Contingência simultânea e individual - 33 barras - Pgh_1	95
Figura 9 – Contingência simultânea e individual - 33 barras - Pgh_3	96
Figura 10 – Comparação Metas - 33 barras - Pgh_1	99
Figura 11 – Comparação Metas - 33 barras - Pgh_3	100
Figura 12 – Comparação Metas - 33 barras - Res_{E1}	100
Figura 13 – Comparação Metas - 33 barras - Res_{E3}	101
Figura 14 – Comparação Metas - 33 barras - Res_{R1}	101
Figura 15 – Comparação Metas - 33 barras - Res_{R3}	102
Figura 16 – Comparação Metas - 33 barras - Res_{R3}	102
Figura 17 – Sistema 33 - Pgh_1	103
Figura 18 – Sistema 33 - Intervalar - Pgh_3	104
Figura 19 – Sistema 33 - Intervalar - Res_{E1}	105
Figura 20 – Sistema 33 - Intervalar - Res_{E3}	105
Figura 21 – Sistema 33 - Intervalar - Res_{R1}	106
Figura 22 – Sistema 33 - Intervalar - Res_{R3}	106
Figura 23 – Compara alocação - P_{gh1}	110
Figura 24 – Compara alocação - P_{gh2}	110
Figura 25 – Compara alocação - P_{gh3}	110
Figura 26 – Compara alocação - P_{gh4}	110
Figura 27 – Compara alocação - P_{gh10}	111
Figura 28 – Compara alocação - P_{gh11}	111
Figura 29 – Compara alocação - P_{gh12}	111
Figura 30 – Compara alocação Res_{E1}	112
Figura 31 – Compara alocação Res_{E2}	112
Figura 32 – Compara alocação Res_{E3}	113
Figura 33 – Compara alocação Res_{E4}	113
Figura 34 – Compara alocação Res_{E10}	113
Figura 35 – Compara alocação Res_{E11}	113
Figura 36 – Compara alocação - Res_{E12}	113

Figura 37 – Sistema 291 - PGH_1 Intervalar	114
Figura 38 – Sistema 291 - PGH_3 Intervalar	115
Figura 39 – Sistema 291 - R_{e1} Intervalar	116
Figura 40 – Sistema 291 - R_{e3} Intervalar	116
Figura 41 – Sistema 291 - R_{r1} Intervalar	117
Figura 42 – Sistema 291 - R_{r3} Intervalar	117

Lista de tabelas

Tabela 1 – Dados Operacionais geradores	35
Tabela 2 – Principais referências	51
Tabela 3 – Exemplo 3.2 – Resumo das iterações – Krawczyk	65
Tabela 4 – Dados Gerador Hidráulicos - Sistema 33 barras	92
Tabela 5 – Valores de reserva calculados individualmente	96
Tabela 6 – Resumo	97
Tabela 7 – Meta energética hidráulica total diária	98
Tabela 8 – Análise Meta	99
Tabela 9 – Nuvem contida ao Intervalo - 33 barras	107
Tabela 10 – Índice de acomodação médio - 33 barras	107
Tabela 11 – Índice de acomodação médio Individual - 33 barras	108
Tabela 12 – Análise dos métodos de Reserva	111
Tabela 13 – Nuvem contida ao Intervalo - 291 barras	118
Tabela 14 – Índice de Acomodação individual	118
Tabela 15 – Índice de Acomodação média - 291 Barras	119
Tabela 16 – Tempo de execução	120
Tabela 17 – Margem de Inicialização Intervalar - 33 Barras	134
Tabela 18 – Pesos - 33 Barras	134
Tabela 19 – Margem de Inicialização Intervalar - 291 Barras	135
Tabela 20 – Pesos - 291 Barras	135

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AA	Aritmética Afim
AI	Aritmética Intervalar
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
BC	Banco de Capacitor
CAG	Controle Automático de Geração
DSM	Gestão do Lado da Demanda
EENS	Energia Eólica não Suprida
FP	Fluxo de Carga
FP	Fluxo de Potência
FPT	Fluxo de Potência Trifásico
FPO	Fluxo de Potência Ótimo
FPOMP	Fluxo de Potência Ótimo MultiPeríodo
FPOMPI	Fluxo de Potência Ótimo MultiPeríodo Intervalar
FPOMP	Fluxo de Potência Ótimo MultiPeríodo e MultiContigência
FPOMMI	Fluxo de Potência Ótimo MultiPeríodo e MultiContigência Intervalar
FPOT	Fluxo de Potência Ótimo Trifásico
FPOTI	Fluxo de Potência Ótimo Trifásico Intervalar
GD	Geração Distribuída
<i>IEEE</i>	<i>Institute of Electrical and Electronic Engineers</i>
LD	Linha de Distribuição
LT	Linha de Transmissão
MI	Multicontingência

MI	Matemática Intervalar
MI	Multiperíodo
MI	Método dos Pontos Interiores
MPIP	Método dos pontos Interiores Primal-Dual
ONS	Operador Nacional do Sistema Elétrico
R_1	Reserva Primária
R_2	Reserva Secundária
R_{2_e}	Reserva Secundária de elevação
R_{2_r}	Reserva Secundária de redução
R_3	Reserva Terciária
R_4	Reserva Quaternária
RG	Reserva Girante
RGA	Responsabilidade de Geração da Área
RPO	Reserva de Potência Operativa
SEP	Sistemas Elétricos de Potência
SIN	Sistemas Interligado Nacional
UC	<i>Unit Commitment</i>
VSC	<i>Voltage Source Converter</i>

Lista de símbolos

aa_{fic}	é o custo relacionado ao corte de carga
\mathbf{BB}^0	é a matriz do tipo susceptância do sistema original
\mathbf{BB}^{cont}	é a matriz do tipo susceptância do sistema com contingência (saída de linha)
\mathbf{C}	é a matriz de pré-condicionamento
$C(\mathbf{P}_{gt})$	é o custo da geração térmica
$C(\mathbf{R}_{gt})$	é o custo da reserva térmica.
C_s	é a carga total do SIN
δ_{eol}	valor da incerteza de carga adotada para o cálculo do intervalo
δ_{fic}	é a margem de inicialização do corte de carga
δ_{gcont}	é a margem de inicialização para o vetor de ajuste da reserva
δ_{inf}	limite de incerteza inferior
δ_{Pd}	valor da incerteza de carga adotada para o cálculo do intervalo
δ_{Pgh}	é o valor da margem de inicialização do intervalo de geração Hidráulica
δ_{Pgt}	é o valor da margem de inicialização do intervalo de geração térmica
δ_{Rgh}	é a margem de inicialização para a reserva girante hidráulica
δ_{Rgt}	é a margem de inicialização para a reserva girante térmica
δ_{sup}	limite de incerteza superior
δ_θ	é a margem de inicialização do ângulo
$diam(X)$	é o diâmetro de um intervalo X
F_{C_i}	são os fornecimentos contratados da área de controle i
$F_{max_l}^k$	é o limite máximo de potência ativa da linha l no período k
$g(z)$	é o valor das condições de KKT, no ponto médio

Γ_{Pt}	é a matriz de dimensão $[nb \times (nb \cdot np)]$ composta por np diagonais de valores unitários
I	é a taxa de falhas (Desligamentos/unidade de tempo)
I_d	é uma matriz identidade
\mathbf{I}	matriz identidade
$J(c)$	matriz Jacobiana no ponto médio
$K(x^{(k)}; X^{(k)})$	é o operador de <i>Krawczyk</i> Intervalar
$m(X)$	é o ponto médio de um intervalo X
$Meta_i$	é o valor da meta energética diária hidráulica na barra i
MM_k	é a maior máquina da área de controle k
MM_i	é a maior máquina da área de controle i
$\nabla_{P_{dfic}} \mathcal{L}_i$	é a derivada parcial da função Larangeana em relação ao corte de carga
$\nabla_{P_{gh}} \mathcal{L}_i$	é a derivada parcial da função Larangeana em relação à geração de potência ativa hidráulica
$\nabla_{P_{ghcont}} \mathcal{L}_i$	é a derivada parcial da função Larangeana em relação à variável de ajuste da reserva girante hidráulica
$\nabla_{P_{gt}} \mathcal{L}_i$	é a derivada parcial da função Larangeana em relação à geração de potência ativa térmica
$\nabla_{\lambda} \mathcal{L}_i$	é a derivada parcial da função Larangeana em relação ao multiplicador de Lagrange associados às restrições de igualdade
$\nabla_{\pi_{max}} \mathcal{L}_i$	é a derivada parcial da função Larangeana em relação ao multiplicador de Lagrange associados aos limites mínimos máximos
$\nabla_{\pi_{min}} \mathcal{L}_i$	é a derivada parcial da função Larangeana em relação ao multiplicador de Lagrange associados aos limites mínimos
$\nabla_{R_{gh}} \mathcal{L}_i$	é a derivada parcial da função Larangeana em relação à reserva girante hidráulica
$\nabla_{R_{gt}} \mathcal{L}_i$	é a derivada parcial da função Larangeana em relação à reserva girante térmica
$\nabla_{s_{max}} \mathcal{L}_i$	é a derivada parcial da função Larangeana em relação às variáveis de folga máximas estritamente positivas

$\nabla_{s_{min}} \mathcal{L}_i$	é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação às variáveis de folga mínimas estritamente positivas
$\nabla_{\theta} \mathcal{L}_i$	é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação aos ângulos das barras
nb	é o número de barras
$ncont$	é o número de contingências
$ncont_{linha}$	é o número de contingências referente às saídas linhas
$ncont_{eol}$	é o número de contingências referente à redução de geração eólica
$ncont_{ger}$	é o número de contingências referente à redução de geração hidráulica
nl	número de linhas da rede elétrica
$N(X_k)$	é o operador de Newton Intervalar
ngh	é o número de unidades geradoras hidroelétricas
ngt	é o número de unidades geradoras termoelétricas
$P(C_i)$	é a probabilidade da carga do sistema no ponto i da função densidade de probabilidade ocorrer
P_{D_i}	é carga ativa da área de controle i
$P_{d_i}^k$	demanda ativa na barra i no período k
$P_{d_{fic_{max}}}^k$	é o limite máximo do corte de carga na barra i no período k
$P_{d_{fic_i}}^k$	é referente ao corte de carga na barra i no período k para o sistema sem contingência
$P_{d_{ficcont_1}}^k$	é referente ao corte de carga na barra i no período k para o sistema com contingência, na contingência $cont$
φ_{eol}	é a porcentagem de corte de geração eólica a ser considerada em cada contingência referente a queda de geração eólica
$P(G \leq C_i)$	é a probabilidade da carga do sistema no ponto i da função densidade de probabilidade da carga ser igual ou superior à geração
\mathbf{P}_d	é o vetor de carga para cada barra e período,
$P_{d_i}^k$	é a demanda ativa na barra i no período k

P_d^d	é a demanda de potência ativa determinística
P_d^i	é a demanda de potência ativa intervalar
P_d^{nk}	é o vetor de carga ativa aleatório utilizado no FPOMM na simulação nk ;
$P_{d_{original}}$	é o vetor de carga ativa original do sistema utilizado
\mathbf{P}_{dfic}^0	é o vetor que representa o corte de carga do sistema sem contingência
\mathbf{P}_{dfic}^{cont}	é o vetor de corte de carga para cada contingência $cont$
$P_{dfic_{min}}^k$	é o limite mínimo do corte de carga na barra i no período k
$P_{dfic}^{0,i}$	é a variável do corte de carga intervalar para o caso base
$P_{dfic}^{0,d}$	é a variável do corte de carga determinístico para o caso base
P_{dfic}^i	é a variável do corte de carga intervalar para a contingência $cont$
P_{dfic}^d	é a variável do corte de carga determinístico para a contingência $cont$
P_g^i	representa a geração de potência ativa hidráulica Intervalar
P_g^d	representa a geração de potência ativa hidráulica determinística
$P_{ghcont}^{i,cont}$	é a variável de ajuste da reserva hidráulica para cada sistema com contingência intervalar, para cada contingência $cont$
$P_{ghcont}^{d,cont}$	é a variável de ajuste da reserva hidráulica para cada sistema com contingência determinístico, para cada contingência $cont$
P_{geol}^i	é a geração de potência ativa eólica intervalar
P_{geol}^d	é a geração de potência ativa eólica determinística
$P_{geol_i}^k$	é o valor da injeção de potência ativa do gerador eólico localizado na barra i e no período k
$\mathbf{P}_{geolcont}$	é o vetor com a nova injeção de potência ativa do gerador eólico localizado na barra i , no período k , o qual representa uma contingência $cont$ (queda de $\varphi_{eol} \%$ geração eólica)
\mathbf{P}_{gh}	é o vetor da geração ativa hidráulica
$P_{ghmin_j}^k$	é o limite mínimo de geração ativa da hidroelétrica conectada à barra j no período k

$P_{gh_{max_j}}^k$	é o limite máximo de geração ativa da hidroelétrica conectada à barra j no período k
$P_{gh_i}^k$	é a geração ativa do gerador hidroelétrico na barra i e no período k
$P_{gh_{cont_i}}^{k,cont}$	é a variável de ajuste geração ativa do gerador hidroelétrico na barra i , no período k da contingência $cont$
\mathbf{P}_{gt}	é o vetor da geração ativa térmica
$P_{gt_i}^k$	é a geração ativa do gerador térmico na barra i , no período k e é mantido constante ao longo dos np períodos
$P_{gt_{min_i}}^k$	é o limite mínimo de geração ativa da termoelétrica conectada à barra i no período k
$P_{gt_{max_i}}^k$	é o limite máximo de geração ativa da termoelétrica conectada à barra i no período k
P_{gt}^i	representa a geração de potência ativa Intervalar
P_{gt}^d	representa a geração de potência ativa determinística
P_j	é a probabilidade da unidade geradora estar fora de operação devido a falhas
P_s	é a probabilidade da unidade geradora estar em operação
R	é um vetor que contém números aleatórios, variando entre $(1 - \delta_{inf})$ e $(1 + \delta_{sup})$
R_{1_i}	é a reserva primária da área de controle i
R_2	Reserva Secundária
R_{2_e}	Reserva Secundária de elevação
R_{2_r}	Reserva Secundária de redução
R_3	Reserva Terciária
R_{3k}	é a Reserva terciária de responsabilidade da área de controle k
R_{3s}	é a Reserva terciária do SIN
R_4	Reserva Quaternária
R_c	é o Risco de não atendimento à carga no período de ponta

R_{C_i}	são os recebimentos contratados da área de controle i
RGP	é a reserva girante total probabilística
$RR^{up,k}$	é a taxa de acréscimo de tomada de carga para a termoeétrica na barra i no período k
$RR^{down,k}$	é a taxa de decréscimo de tomada de carga para a termoeétrica na barra i no período k
$R_{gh_i}^k$	é a reserva de geração ativa da unidade hidráulica conectada à barra i no período k
$R_{gt_j}^k$	é a reserva de geração ativa da unidade térmica conectada à barra j no período k
\mathbf{R}_{gh}	é o vetor da reserva das unidades hidráulicas
\mathbf{R}_{gt}	é o vetor da reserva das unidades térmicas
R_{gh}^i	é a reserva girante da hidroelétrica Intervalar
R_{gt}^i	é a reserva girante da termoeétrica Intervalar
R_{gh}^d	representa a reserva girante da hidroelétrica determinística
R_{gt}^d	representa a reserva girante da termoeétrica determinística
T	é o período de ponta considerado
θ_i^k	é o valor de ângulo na barra i , período k do caso base
$\theta_i^{k,cont}$	é o valor de ângulo na barra i , período k do e contingência $cont$ variando de 1 a $ncont$
θ^0	é o vetor de variáveis de ângulo para o sistema original
θ^{cont}	é o vetor de variáveis de ângulo para o sistema com contingência
$\theta^{0,i}$	é o ângulo para o sistema intervalar do caso base
$\theta^{0,d}$	é o ângulo para o sistema determinístico do caso base
$\theta^{cont,i}$	é o ângulo para o sistema intervalar para a contingência $cont$
$\theta^{cont,d}$	é o ângulo para o sistema determinístico para a contingência $cont$
<i>tolerância</i>	é tolerância determinada para o ponto de parada do método de Krawczyk
\mathbf{u}	é um vetor unitário

\mathbf{W}^i	é a matriz Hessiana intervalar, calculada utilizando o intervalo Z^i
w_p	é o peso referente à geração ativa hidráulica do sistema sem contingência
w_c	é o coeficiente relacionado ao custo de geração térmica
w_{cr}	é o coeficiente relacionado aos custos da reserva térmica
w_{cont}	é o peso referente à variável de ajuste da reserva hidráulica para cada um dos sistemas com contingência $cont$
w_{fic}	é o coeficiente relacionado ao corte de carga
X^h	vetor das variáveis do problema na iteração h
X^{h+1}	vetor das variáveis do problema na iteração $h + 1$
\underline{x}	valor inferior do intervalo X
\bar{x}	valor superior do intervalo X
\underline{y}	valor inferior do intervalo Y
\bar{y}	valor superior do intervalo Y
$x_{(k)}$	valor médio do intervalo $X_{(k)}$, na iteração k
$X_{(k)}$	variável intervalar do problema, na iteração k , onde $x_{(k)} \in X_{(k)}$
Z^i	é o vetor intervalar que contém as variáveis do problema
$z^h = m(Z^i)$	é o ponto médio do intervalo Z^i a cada iteração

Sumário

1	INTRODUÇÃO	26
1.1	Serviços ancilares	29
1.1.1	Calculo da Reserva ONS	30
1.1.1.1	Modelo da Carga	31
1.1.1.2	Modelo da Geração	31
1.1.1.3	Repartição da Reserva Operativa	32
1.2	Objetivos	35
1.3	Delimitações da proposta da tese	36
1.4	Publicações	39
1.5	Organização da Tese	40
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	41
2.1	Introdução	41
2.2	Despacho e alocação ótima de reserva girante	41
2.2.1	Alocação de reserva girante ao se comissionar apenas unidades térmicas (Unit Commitment)	41
2.2.2	Alocação de reserva girante ao se comissionar apenas unidades térmicas com penetração eólica	43
2.2.3	Alocação de reserva girante para sistemas hidrotérmicos com penetração eólica	44
2.2.4	MI em problemas do SEP	46
2.3	Considerações finais	50
3	MATEMÁTICA INTERVALAR	52
3.1	Termos básicos, operações intervalares e conceitos	53
3.1.1	Operações Básicas	53
3.2	Matrizes e vetores intervalares	56
3.2.1	Exemplos	57
3.2.2	Funções elementares	57
3.3	Métodos de solução para sistemas de equações intervalares	58
3.3.1	Sistemas de equações lineares	59
3.3.2	Sistema de equações não lineares	60
3.3.2.1	Método de Newton Intervalar	60
3.3.2.2	Método de <i>Krawczyk</i>	62
3.4	Revisão Bibliográfica sobre MI em problemas de otimização	65
3.5	Considerações finais	68

4	FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO MULTIPERÍODO E MULTICON-	
	TINGÊNCIA INTERVALAR	69
4.1	Introdução	69
4.2	Formulação	69
4.2.1	Dados de entrada	70
4.2.2	Dados operacionais	72
4.2.3	Variáveis de otimização	74
4.2.4	Função Objetivo	77
4.2.4.1	Custos de Geração Térmica	77
4.2.4.2	Perdas Elétricas	78
4.2.4.3	Corte de Carga	78
4.2.4.4	Custo da Reserva Girante	79
4.2.4.5	Minimização do Montante da Reserva Girante	79
4.2.5	Restrições de igualdade e desigualdade	80
4.2.5.1	Equações de Balanço de Potência Ativa	80
4.2.5.2	Restrições de Desigualdade - Metas Energéticas	80
4.2.5.3	Restrições de Desigualdade - Limites físicos e operacionais	81
4.2.5.4	Rampa de tomada de carga	82
4.3	Aplicação da Matemática Intervalar ao FPOMM	84
4.3.1	Inicialização das variáveis	84
4.3.2	Aplicação do Método de Krawczyck ao FPOMM	87
4.4	Considerações finais	90
5	RESULTADOS	92
5.1	Validação e Análise de Resultados	92
5.2	Sistema 33 Barras	95
5.2.1	Comparação entre contingências simultâneas e individual via FPOMP e FPOMM	95
5.2.2	Análise das Metas Energéticas	98
5.2.3	FPOMMI – Sistema 33 Barras	103
5.2.4	Considerações Finais – 33 Barras	108
5.3	Sistema 291 Barras	109
5.3.1	Comparação entre métodos de alocação de reserva	109
5.3.2	Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Multicontingência Intervalar	114
5.4	Considerações Finais	119
6	CONCLUSÃO E SUGESTÕES	121
	REFERÊNCIAS	124

APÊNDICES	133
APÊNDICE A – DADOS 33 BARRAS	134
APÊNDICE B – DADOS 291 BARRAS	135
APÊNDICE C – PERFIL GERAÇÃO EÓLICA - 33 BARRAS	136

1 Introdução

A matriz elétrica brasileira é reconhecida por sua diversidade, com predominância de fontes renováveis, tal como a hidráulica e crescente instalação de usinas fotovoltaicas e eólicas (MORAES et al., 2017) (MORAES et al., 2017; NAVERSEN; FARAHMAND; HELSETH, 2019; TAVARES, 2023), que apresentam baixo impacto ambiental e custos reduzidos. No entanto, a energia gerada por algumas fontes renováveis (eólica e solar, por exemplo) geralmente possuem natureza aleatória (JAMSHIDI et al., 2024), o que pode configurar intermitência na geração e comprometimento da confiabilidade.

Além disso, o sistema elétrico está sujeito a contingências, que são perturbações que ocorrem de maneira repentina na configuração do sistema, podendo gerar violações graves das restrições de operação. Tais violações podem resultar em interrupções parciais ou totais do sistema elétrico (ABUL'WAFI; EL'GARABLY; NASSER, 2019).

Portanto, o Operador Nacional do Sistema (ONS) estabelece no Brasil que todas as usinas (exceto eólica e fotovoltaica) em disponibilidade devem atender a carga quando solicitadas pelo ONS em situação de contingência ou indisponibilidade de geração renovável, sem a devida formalização de um contrato para a prestação desses serviços de imediato. Tais usinas têm apenas acordo de compensação dos custos variáveis de operação (ONS, 2025).

Desta forma, com o objetivo de se satisfazer as premissas básicas do planejamento da operação de um sistema potência, que é mantê-lo seguro sob condições normais e sob contingência, deve-se ter, dentro outros quesitos, um adequado dimensionamento e alocação da reserva girante, caso ela tenha que ser acionada.

De modo geral, os estudos de planejamento da operação da rede elétrica devem garantir que os limites operacionais das linhas e dos equipamentos se mantenham em faixas adequadas para que o sistema opere ao mínimo custo e com segurança e eficiência. Esses estudos podem ser realizados por Fluxo de Potência (FP) ou Fluxo de Potência Ótimo (FPO). Diferentemente do Fluxo de Potência, o FPO busca calcular o estado da rede dada uma configuração, calcula as variáveis do problema, a fim de otimizar uma ou mais funções objetivo desejadas e, ao mesmo tempo, respeitar um conjunto de restrições impostas pelo problema (como limite de geradores, fluxo nas linhas e magnitudes de tensão nas barras).

Além dos tradicionais FP e do FPO, existem suas extensões que também analisam e otimizam o estado da rede, como o Fluxo de Potência Ótimo Trifásico (FPOT) proposto em Bruno et al. (2011), Araujo e Penido (2013) e Junior, Fernandes e Borba (2019), e o Multiperíodo de Uturbey e Costa (2005), Andriolo et al. (2015), Moraes et al. (2017) e Blasi (2020).

Já para estudos de reserva girante, a formulação do FPO foi ampliada para realizar a alocação ótima da Reserva Girante (RG), juntamente com o despacho de potência, entre as unidades geradoras de um sistema hidrotérmico-eólico, para um horizonte de um dia a frente (ARANTES, 2017; MORAES et al., 2017). Nesses trabalhos, parte-se do pressuposto de que a quantidade total de RG já foi calculada por meios probabilísticos e precisa ser otimizada entre as fontes de geração. Por exemplo, no Brasil, o Operador Nacional do Sistema (ONS) estabelece que a reserva secundária deve ser igual a 4% (elevação) ou 2,5% (redução) da carga em cada área acrescidos de uma parcela de reserva eólica, a fim de compensar falta de geração da mesma, determinada pela região do país (ONS, 2025).

Estes trabalhos partem de pressupostos de que se conhece quanto de reserva girante tem que ser alocada e assim a aloca entre as geradoras. No entanto, se carece de uma formulação que obtenha, na operação, o quanto de reserva girante é realmente necessária para então alocá-la entre as usinas ou até mesmo verificar se os montantes previstos no planejamento hoje requeridos estão sub ou sobre dimensionados.

Muitos trabalhos que fazem o cálculo da reserva de maneira probabilística, tal como o de Wang (2015), Gu et al. (2016) e o de Yao et al. (2018). Entretanto, para o planejamento diário e determinação de montantes de reserva para um dia a frente é interessante buscar métodos mais diretos e rápidos.

O FPO já é um grande aliado para a operação do sistema elétrico, provendo despacho de potência e alocação de reserva girante (ARANTES, 2017) na operação de um dia a frente ou no planejamento de curto prazo, (MORAES et al., 2017), e ele pode ser estendido para também se dimensionar quanto de reserva girante é necessária, além de alocá-la.

Um FPO pode ser formulado contendo como função objetivo um único ou composição de vários com vários critérios de otimização, por exemplo, minimização de custos de operação, minimização de perdas elétricas, corte de carga entre outros. Ele pode ser um problema de otimização multivariável, cujas variáveis dependem dos objetivos do problema, tais como: geração de potência ativa e reativa, magnitudes de tensões nas barras, taps de reguladores de tensão, valores para bancos de capacitores e entre outros.

Outrossim, o FPO pode ser modelado de modo a representar um sistema monofásico ou trifásico, a representar de forma linear ou não linear a rede elétrica, e a realizar representação instantânea da operação (monoperíodo) ou de vários instantes (multiperíodo) ou cenários (multicontingência), possibilitando assim a otimização de um ou mais instantes simultaneamente. Por exemplo, o número de períodos pode representar horas, dias, semanas, patamares de carga ou cenários de operação.

Neste trabalho, pretende-se estender a formulação de um FPO multiperíodo para um que também seja multicontingência (ou seja, atende a rede para várias situações de

saída de linhas ou perda de geração), a fim de dimensionar e alocar potência e reserva girante.

Além do mais, todo modelo matemático que representa problemas físicos em ambientes computacionais apresentam erros, provenientes de arredondamento, truncamentos, coleta de dados advindos de medições e previsões, os quais levam à obtenção de resultados incertos (WANG; ALVARADO, 1992).

Especificamente em sistemas de potência, os erros que alteram a solução dos métodos de análises são causados por: incerteza nos dados de linhas e transformadores, previsões de demanda, dados hídricos, eólicos e solares imprecisos (WANG; ALVARADO, 1992), possíveis falhas ou indisponibilidade de geradores (PEREIRA, 2011) e incerteza das medições em tempo real. Logo, os dados do sistema, como carga e geração, por exemplo, não deveriam ser considerados apenas como valores determinísticos pontuais, mas sim por intervalos, para que as soluções dos métodos de análise também sejam fornecidas por intervalos de solução mais prováveis (WANG; ALVARADO, 1992).

Alternativamente, é possível se introduzir incertezas através da aplicação da Matemática Intervalar (MI) ao FC e FPO, tal como proposto por vários trabalhos a serem descritos no capítulo de referências bibliográficas, que permitem o cálculo de intervalos de soluções.

Assim, neste trabalho também se introduz incertezas por meio da aplicação da matemática intervalar (MI) ao FPO aqui proposto, seguindo a abordagem utilizada em diversos trabalhos descritos na seção de revisão bibliográfica, para permitir o cálculo de intervalos de solução, proporcionando flexibilidade ao operador do sistema quanto às decisões a serem tomadas tanto na fase de planejamento de um dia a frente.

Em resumo, este trabalho apresenta um FPO multiperíodo e multicontingência que despacha potência ativa de geradores, dimensiona e aloca a reserva girante e obtém intervalos ótimos para esses valores por meio da incorporação da MI e de incertezas predefinidas. Foi escolhido o modelo linear para representação das equações da rede devido a dimensionalidade do problema (multiperíodo e multicontingência). Este FPOMMI é aplicado a sistemas hidrotérmicos e eólicos que configuram o sistema elétrico brasileiro.

Para tanto, propõe-se expandir a modelagem do FPO multiperíodo para uma modelagem multicontingência, que além de alocar a reserva girante entre os geradores hidráulicas e térmicos tal como feito em Arantes (2017), também dimensiona o percentual de reserva girante (que, no Brasil, atualmente é pré-estabelecido pelo ONS (2025)) e que seja suficiente para suprir as contingências mais importantes e usuais, além de ao mesmo tempo alocá-las entre as usinas geradores.

Ao FPO multiperíodo e multicontingência a ser proposto, que calcula valores ótimos determinísticos de despacho e alocação, pretende-se agregar a Matemática Intervalar, que

fornece intervalos ótimos de despacho (BORBA; FERNANDES, 2023), de modo a se obter uma faixa ótima de operação que atenda as incertezas associadas a diversos parâmetros da rede, tais como carga e geração eólica de uma forma mais rápida para um dia a frente.

Como a questão da Reserva Girante (RG) faz parte de uns dos serviços necessários para prover geração de forma adequada e confiável, descreve-se, sucintamente na próxima seção, os principais destes serviços no Brasil, denominados de serviços ancilares.

1.1 Serviços ancilares

Para a operação e controle do sistema elétrico de potência, os serviços ancilares são indispensáveis. Através deles é feito o controle de frequência, tensão, estabilidade e continuidade no fornecimento de energia, próximos aos valores nominais.

Os serviços ancilares são atividades imprescindíveis à operação do sistema elétrico de potência e constituem-se em recursos essenciais às ações do operador do sistema, de modo a atender os requisitos de continuidade no suprimento do produto energia elétrica, mantendo a estabilidade de frequência e de tensão (SOUZA; DECKER, 2002).

A Resolução ANEEL nº 265, de 10 de junho de 2003, estabeleceu a regulamentação para a prestação dos Serviços Ancilares de Geração e de Transmissão pelos agentes do Sistema Interligado Nacional (SIN). Segundo a resolução nº 265 da ANEEL (2003) os tipos de serviços ancilares no Brasil é:

(i) Controle primário e secundário de frequência:

- controle primário de frequência, realizado por meio de reguladores automáticos de velocidade das unidades geradoras, que visa limitar a variação da frequência quando da ocorrência de desequilíbrio entre a carga e a geração;
- controle secundário de frequência, realizado pelas unidades geradoras participantes do Controle Automático de Geração - CAG, que visa restabelecer a frequência do sistema ao seu valor programado e manter e/ou restabelecer os intercâmbios de potência ativa aos valores programados;

(ii) Reserva de potência:

- Reserva de Potência para Controle Primário que provê reserva de potência ativa efetuada pelas unidades geradoras a fim de realizar o controle primário de frequência;
- Reserva de Potência para Controle Secundário que provê reserva de potência ativa efetuada pelas unidades geradoras participantes do CAG, para realizar o controle secundário de frequência e/ou de intercâmbios líquidos programados de potência ativa entre áreas de controle;

- Reserva terciária estabelece as reservas de geração que complementam as reservas primária e secundária.

(iii) Suporte de reativo:

- Suporte de Reativo é o fornecimento ou absorção de energia reativa, destinada ao controle de tensão da rede de operação, mantendo-a dentro dos limites de variação estabelecidos nos Procedimentos de Rede. São considerados serviços ancilares de suporte de reativo aqueles providos pelas seguintes fontes: Unidades geradoras fornecendo potência ativa; Unidades geradoras operando como compensadores síncronos; e Equipamentos para controle de tensão dos Concessionários de Transmissão.

(iv) Auto-restabelecimento das unidades geradoras (Black Start):

- Auto-restabelecimento é a capacidade que tem uma unidade geradora ou usina geradora de sair de uma condição de parada total para uma condição de operação, independentemente de fonte externa para alimentar seus serviços auxiliares para colocar em operação suas unidades geradoras.

(v) Sistema Especial de Proteção (SEP):

- Proteção para condições operativas extremas.

1.1.1 Cálculo da Reserva ONS

A reserva de potência operativa faz parte dos objetivos do planejamento da operação do sistema e é determinado para que se evite o desequilíbrio entre geração e carga, que podem ser ocasionados por (ONS, 2025).

- Perda ou redução da geração;
- Erro de previsão de carga
- Diferença entre o valor instantâneo e o valor integralizado da demanda

A partir de outubro de 1985, o valor da reserva no Brasil passou a ser feito através de uma metodologia probabilística, que é descrita no relatório SCEL/GTEE 002/85 - “Critérios para determinação da reserva de potência operativa por método probabilístico para as regiões sudeste e sul”, onde são calculados o risco de não atendimento a carga.

Resumidamente, este cálculo é feito para o período de ponta do sistema (2 horas) para níveis pré determinados de reserva. Então, é selecionada o valor que atende o risco tolerado, que pode ser descrito através da expressão:

$$R_C = \sum P(G \leq C_i) \times P(C_i) \quad (1.1)$$

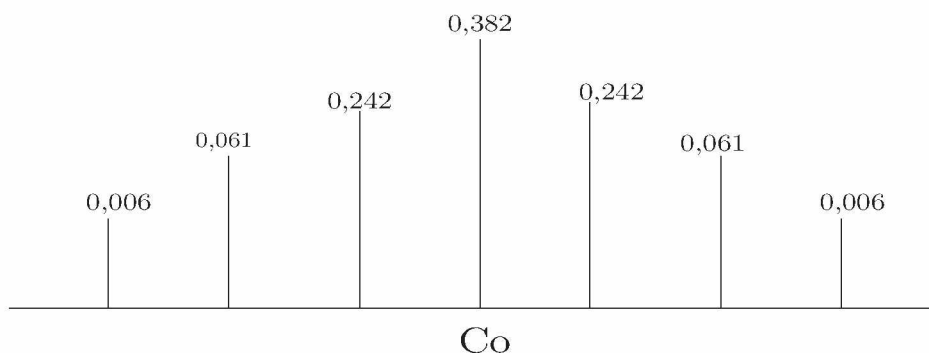
onde:

- R_c é o Risco de não atendimento à carga no período de ponta
- $P(G \leq C_i)$ é a probabilidade da carga do sistema no ponto i da função densidade de probabilidade da carga ser igual ou superior à geração.
- $P(C_i)$ é a probabilidade da carga do sistema no ponto i da função densidade de probabilidade ocorrer. Para se calcular o risco associado a determinada reserva requer-se a utilização de modelos probabilísticos da carga e da geração.

1.1.1.1 Modelo da Carga

O modelo da carga considerado para o cálculo da reserva possui distribuição normal, com desvio padrão de $1/3$ do erro de previsão de carga, com isso é configurada uma distribuição discreta equivalente, conforme a [Figura 1](#). Além disso é admitido um erro de previsão de 5%.

Figura 1 – Carga - ONS



Fonte: (ONS, 2025).

1.1.1.2 Modelo da Geração

Para a geração, consideram-se as probabilidades da unidade geradora estar fora de operação devido a falhas e dela estar operando, respectivamente:

$$P_j = I \cdot T \quad (1.2)$$

$$P_s = 1 - I \cdot T \quad (1.3)$$

onde:

- P_j é a probabilidade da unidade geradora estar fora de operação devido a falhas;
- P_s é a probabilidade da unidade geradora estar em operação;
- I é a taxa de falhas ($\text{Desligamentos}/\text{unidade de tempo}$);
- T é o período de ponta considerado.

1.1.1.3 Repartição da Reserva Operativa

A reserva operativa do sistema, calculada probabilisticamente, é repartida entre as áreas de controle do sistema e é subdivida em:

- Regulação Primária: responsável por equilibrar a relação geração-demanda, atuando o regulador de velocidade e deve ser respondida no intervalo de 10 a 20 segundos (COSTA, 2004);
- Regulação Secundária que tem o objetivo de corrigir os desvios de frequência provenientes da regulação primária. Essa operação pode ser realizada manualmente ou através do Controle Automático de Geração (CAG). Esta regulação deve atuar entre 1 e 10 minutos (COSTA, 2004);

Tanto a regulação primária quanto a secundária são fornecidas por geradores, cujas reservas de potência estão em sincronia com o sistema elétrico.

- A reserva terciária estabelece as reservas de geração, as quais auxiliam na manutenção da segurança do sistema.

Convencionalmente, a Reserva de Potência Operativa (RPO) é prevista para abranger a perda de unidades geradoras, linhas de transmissão e desvios de carga em relação ao programado. Além disto, a medida que fontes como solar e eólica aumentam sua participação, a necessidade de manter a confiabilidade (segurança no fornecimento) e a estabilidade (frequência e tensão) do sistema torna-se mais complexa, corroborando a necessidade de alocação de reserva operativa (COSTA, 2004).

O crescimento exponencial de geração eólica no mundo, e especialmente no Brasil, fez com que o cálculo da reserva fosse reavaliado em agosto de 2018 pela sua Agência Reguladora de Energia Elétrica do Brasil (ANEEL) (ANEEL, 2018). Até então, a parcela de reserva girante adotada era igual a 5% da carga total do país.

Segundo ONS (2025) a reserva operativa no Brasil é dividida em quatro tipos: Reserva primária (R_1), Reserva secundária (R_2), Reserva terciária (R_3) e Reserva quaternária (R_4).

A reserva primária atua no controle primário da frequência, por meio da atuação dos reguladores de velocidade dos geradores. Esta é distribuída entre todos os geradores, cujo regulador de velocidade a supre naturalmente. O valor adotado para R_1 é de 1% da responsabilidade de geração da área (RGA).

$$R_{1_i} = 0,01 \cdot RGA_i \quad (1.4)$$

$$RGA_i = P_{D_i} + \sum F_{C_i} - \sum R_{C_i} \quad (1.5)$$

onde:

- R_{1_i} é a reserva primária da área de controle i ;
- P_{D_i} é carga ativa da área de controle i ;
- F_{C_i} são os fornecimentos contratados da área de controle i ;
- R_{C_i} são os recebimentos contratados da área de controle i .

Já a Reserva Secundária atua de forma complementar à reserva primária. Também é responsável por recuperar a frequência do sistema, causadas por intermitência de geração eólica ou variações momentâneas de carga e é feita através das usinas pertencentes ao Controle Automático de geração (CAG). Consiste em duas parcelas, de elevação R_{2_e} e redução R_{2_r} de geração, para que se possa garantir a correta atuação do (CAG).

Para a R_{2_e} de geração, é considerado o valor de 4% da carga da área e a R_{2_r} é 2,5% da carga. Ambas são somadas à uma parcela de geração eólica, que depende da região do país. Para a Região nordeste, considera-se 6%, enquanto para o sul é 15%.

$$R_{2_{e_i}} = 0,04 \cdot C_i + R_{eol_i} \quad (1.6)$$

$$R_{2_{r_i}} = 0,025 \cdot C_i + R_{eol_i} \quad (1.7)$$

onde:

- $R_{2_{e_i}}$ é a reserva secundária de elevação da área de controle i ;
- $R_{2_{r_i}}$ é a reserva secundária de redução da área de controle i ;
- R_{eol_i} é a porcentagem da Geração eólica prevista na área de controle i ;
- C_i é a carga da área de controle i .

No Brasil, segundo a literatura, a reserva primária e secundária são sincronizadas e pertencem a usinas hidroelétricas. Pode haver outras fontes que oferecem respostas rápidas e automática, como banco de baterias, *fly wheels* (os quais não foram utilizados na formulação desta tese) e algumas usinas termoeletricas. Essas fontes podem cobrir rampas de subida ou descida de carga líquida (EPE, 2018).

A Reserva Terciária tem como objetivo complementar as reservas primária e secundária. Ela é alocada somente se a reserva operativa do sistema para elevação ($R_1 + R_{2e}$) calculada probabilisticamente ultrapassar 5% da carga do SIN.

Se a reserva de potência global do sistema, calculada probabilisticamente, for inferior ou igual a 5% da carga do sistema, a reserva terciária (R_3) será igual a zero, senão:

$$R_{3k} = \frac{MM_k \cdot RGA_k}{\sum MM_i \cdot RGA_i} \cdot R_{3s} \quad (1.8)$$

onde:

- R_{3k} é a Reserva terciária de responsabilidade da área de controle k ;
- MM_k é a maior máquina da área de controle k ;
- MM_i é a maior máquina da área de controle i ;
- R_{3s} é a Reserva terciária do SIN;

$$R_{3s} = RGP - 0,05C_s \quad (1.9)$$

- RGP é a reserva girante total probabilística;
- C_s é a carga total do SIN.

Por fim, a reserva quaternária, ou reserva de prontidão. Tem função de auxiliar na recomposição da reserva operativa do sistema, quando houver indisponibilidade dos geradores, e, também, desvios de cargas em relação à previsão.

A R_4 pode ser composta por cargas interrompíveis ou geração excedente. Outrossim, não precisa estar em sincronia com a rede, mas deve ter resposta de 30 minutos, contados a partir da solicitação e mantida por pelo menos 4 horas consecutivas.

Por fim, montante da reserva alocada é calculada conforme a Equação 1.10 (ONS, 2025).

$$RPO_i = R_{1i} + R_{2ei} + R_{3k}. \quad (1.10)$$

Um fator que também deve ser considerado otimização da reserva girante é a incorporação das limitações físicas do gerador, como a rampa de tomada de carga.

Os valores de tomada de carga dependem muito da característica da usina. Por exemplo, usinas hidroelétricas de baixa queda e com conduto forçado curto tem melhor tempo de resposta. Ao contrário de usinas de grande queda, onde a taxa de aceleração de água mais lenta, não sendo consideradas taxas de rampa de aceleração ou redução. No entanto, elas o são para usinas térmicas. Usinas hidráulicas, normalmente tem resposta consideravelmente rápida (COSTA, 2004).

Como a reserva está em função da capacidade de geração e há um prazo a ser respeitado, a taxa de tomada de carga para usinas térmicas consideradas no FPOMP modelado por Costa (2004) e Arantes (2017) estão apresentadas na Tabela 1.

O modelo proposto considera as rampas de subida e descida das usinas térmicas.

Tabela 1 – Dados Operacionais geradores

Gerador	$P_{g_{max}}$ [MW]	$P_{g_{min}}$ [MW]	RR_{acresc} [MW/min]	$RR_{decresc}$ [MW/min]
A	200	20	2,2	-2,2
B	180	10	3,0	-4,2
C	150	10	1,8	-1,8
D	135	10	4,0	-4,5
E	70	10	5,0	-8,0
F	110	12	3,0	4,0

Fonte:(COSTA, 2004).

Neste trabalho, pretende-se propor uma nova metodologia para cálculo de reserva operativa, que abrange os conceitos da reserve secundária e terciária mas, que seja prevista para um dia a frente a fim de dar suporte operativo para eventuais correções dos valores estabelecimento pelo ONS no que se refere à reserva secundária e terciária.

1.2 Objetivos

Nesta tese, foi proposto o desenvolvimento de um FPO monofásico, linear e multi-período que calcula e aloca valores ótimos de potência e reserva girante entre a unidades geradoras, de modo que possam suprir a variabilidade das usinas eólica e solar de energia e, também multicontingência, que considera as contingências usuais de saída de linhas e geradores.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Realizar estudos sobre reserva girante;

- Realizar estudos sobre análise de contingência em sistemas de potência;
- Formular um FPO multiperíodo e multicontingência linear que determine montante de reserva girante (hidráulica e térmica) necessária para um horizonte de um dia a uma semana e que, ainda, seja capaz de suprir diferentes configurações de contingência;
- Propor cenários com diversidades hidrológicas a fim analisar o comportamento da formulação proposta;
- Simular sistema de teste que agregue características encontradas no sistema elétrico brasileiro;
- Aplicar matemática intervalar nos resultados para que se possa verificar uma faixa ótima de reserva e que atenda as contingências do sistema.

1.3 Delimitações da proposta da tese

O Brasil possui um sistema elétrico de grande dimensão, grandes potenciais hidrelétricos, consolidadas fontes térmicas e uma crescente inserção de outras fontes de energia tais como eólicas e solares, que têm firmado seus potenciais no cenário nacional.

Este cenário de dimensionalidade da rede elétrica aliada à natureza predominantemente hidrelétrica já constituía um grande desafio técnico para sua operação, intensificando-se agora, devido à aleatoriedade e à variabilidade da geração eólica (fruto da aleatoriedade da velocidade dos ventos).

Neste contexto, uma operação eficiente requer a necessidade de mais reserva girante, para garantir a segurança no fornecimento de energia. Assim, à medida que a penetração de geração eólica aumenta, aumenta também a necessidade de se dispor de mais reserva girante a fim de diminuir riscos de déficit nos momentos de quedas na geração eólica, o que exige cuidado no dimensionamento e alocação de reserva girante que pode ser atendida pelas hidrelétricas e/ou termoelétricas. Salienta-se aqui a necessidade de alocação de reserva de acréscimo (défice de geração) quanto de reserva de decréscimo (quando há excesso de geração)

Assim, tendo em vista a importância desta questão de se dimensionar e alocar reserva girante, este trabalho, apresenta uma formulação matemática que realiza pré-despacho ótimo de geração de potência e simultaneamente dimensionamento e alocação de reserva girante para um sistema hidrotérmico com complementação eólica, para planejamento da operação um dia a frente e com discretização horária. Ou seja, um modelo determinístico com maior detalhamento quanto às contingências mais importantes, de modo a aprimorar o dimensionamento e alocação da **RG** entre as unidades hidráulicas e térmicas quando da iminência da operação.

Para tanto, pretende-se expandir o Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo (FPOMP) proposto em (ARANTES, 2017) (que despacha potência e aloca reserva girante segundo montante pré-estimado pelos métodos probabilísticos ao longo de 24 horas e não apenas em período de ponta) para que seja possível também calcular a quantidade de reserva girante secundária e terciária que deve ser distribuída entre as unidades geradoras visando para atender ao critério de contingência $n - 1$.

Esta expansão do FPOMP consiste em transformá-lo num Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Multicontingência (FPOMM), ou seja, se foram consideradas $ncont$ contingências, a rede é modelada mais $ncont$ vezes. Os critérios de otimização adotados são minimização de custos operativos, de reserva girante e de corte de carga.

Esta estratégia de considerar todas as contingências simultaneamente ao invés de separadamente (como os métodos probabilísticos), juntamente com os despachos ótimos de geração das unidades e alocação das reservas tende a obter valores totais de reserva e de alocação das mesmas (menores ou maiores valores totais, conforme os cenários simulados) que garantem a disponibilidade de potência em situações de emergência, além de minimizar corte de carga, quando a mesma se fizer necessária.

O acoplamento entre os blocos calculados por cada contingência é feito através da otimização de valores únicos de reserva girante, comum a cada gerador, a cada hora e a cada contingência, ao qual são realizados ajustes ótimos de elevação ou redução que se façam necessários para se fechar balanço de potência a cada contingência, hora e barra do sistema. Estes valores de reserva são limitados pelas restrições operacionais das geradores e metas energéticas pré-estabelecidas para as usinas hidráulicas.

Assim, um dos diferenciais deste trabalho está em se agregar ao problema de alocação de reserva, a simulação de múltiplas contingências sequenciais que são utilizadas para se obter um valor total ótimo de reserva girante, além de alocá-las entre os geradores, considerando um horizonte de 24 horas ao invés de apenas 2 horas, como estabelecido pelo ONS. Para tanto, este estudo pressupõe que:

- os estudos de disponibilidade energética das usinas hidráulicas já foi realizada em etapas prévias de planejamento de médio e curto prazo;
- o modelo proposto ignora as restrições hidráulicas e utiliza modelo linear da rede de transmissão, com monitoramento dos limites de carregamento das linhas de transmissão. Apesar de se perder informações sobre níveis de tensão e geração de potência reativa, inerente a um modelo não linear da rede de transmissão, as simplificações assinaladas viabilizam a resolução do grande porte matemático do problema proposto;
- a previsão de carga e disponibilidade de ventos, que fornece a respectiva probabilidade

de expectativa de energia não suprida (EENS) de geração eólica prevista para cada período do estudo, já foram realizadas através de estudos probabilísticos;

- o comissionamento ou *Unit Commitment* (UC) de unidades térmicas e hidráulicas já foi realizada. Assim, esta tese aborda o problema de pré-despacho de potência sem considerar as restrições de partidas e paradas dos geradores térmicos e hidráulicos.
- como a capacidade de tomada de carga das unidades geradoras térmicas varia muito e as reservas são definidas em função da capacidade de geração disponível dentro de um intervalo específico de tempo, torna-se necessário considerar a taxa de tomada de carga das unidades térmicas no processo de otimização da reserva girante. Assim, a tomada de carga das unidades geradoras térmicas é incorporada no processo de otimização das ofertas de reservas. Como a programação da reserva girante secundária e terciária é definida como capacidade de geração de unidades geradoras já sincronizadas, definiu-se que ela deve estar disponível em até 10 min para manter a segurança do suprimento (ARANTES, 2017).

Dessa forma, a proposta deste trabalho é propor novo método para calcular e alocar reserva secundária e terciária.

Neste trabalho, serão consideradas como contingências: saídas de linhas de transmissão de grande porte, saída de geradores e percentuais de cortes de geração eólica.

O FPOMM proposto prioriza as restrições elétricas da rede possibilitando o despacho de potência ativa de usinas hidráulicas e térmicas, inclui restrições operacionais da rede elétrica, inclui restrições energéticas referentes à parte hidráulica, prevê minimização de corte de carga para casos onde haja restrições severas quanto às metas energéticas hidráulicas e inclui restrições apropriadas para estabelecimento ótimo de reserva girante (hidráulica e térmica) para um dia à frente considerando níveis de confiabilidade de geração eólica.

Além da questão de dimensionamento e alocação da RG, e como já mencionado na introdução, existem erros que alteram a solução dos métodos, tais como: incerteza nos dados de linha e transformador, previsões de demanda, dados imprecisos de energia hidrelétrica, eólica e solar (WANG; ALVARADO, 1992) e possíveis falhas ou indisponibilidade de geradores (PEREIRA, 2011).

Tal como colocado em Wang e Alvarado (1992) os erros de carga e geração, por exemplo, não devem ser considerados apenas como valores pontuais determinísticos, mas sim por intervalos, de modo que as soluções dos métodos de análise também sejam fornecidas por intervalos de solução mais prováveis, ou seja, uma modelagem mais realista e robusta das situações.

Ao se ter intervalos mais prováveis de operação, se oferece ao operador um leque de mais opções para decisões seguras e adaptáveis a diferentes cenários, além de facilitar a análise de riscos e a identificação de soluções mais resilientes e de quais parâmetros são mais críticos para a tomada de decisão.

Para tanto, aplica-se nesta tese a Matemática Intervalar, que pode lidar com a incerteza inerente aos dados de demanda e capacidade de geração ao problema de dimensionamento e alocação de Reserva Girante, aqui em pauta. A MI traz vantagens quanto a análise de sensibilidade de parâmetros ou de cenários e ou de horários de operação mais críticos, identificando, por exemplo, horários com mais risco para a operação, podendo realizar ações preventivas, oferecer um suporte mais seguro para tomada de decisões ou ajustar planejamento ao longo do tempo.

Portanto, propõe-se também nesta tese, a introdução de incertezas por meio da aplicação da Matemática Intervalar (MI) ao FPOMM aqui proposto, o que permite o cálculo de intervalos de solução para possibilitar flexibilidade ao operador no que diz respeito às decisões a serem tomadas um dia antes da operação. Após a aplicação da MI ao modelo proposto, tem-se disponível, intervalos prováveis de geração de potência hidráulica e térmica e de reserva girante de elevação e de redução horários.

Assim, a contribuição desta tese é de propor um FPO Multiperíodo e Multicontingência que, além de despachar potência ativa de geradores hidráulicos e térmicos, dimensiona e aloca a reserva girante entre os geradores hidráulicos e térmicos além de calcular corte de carga, quando necessário. E, por meio da incorporação de MI, obtém intervalos ótimos desses valores a partir da incorporação de incertezas pré-definidas de carga e geração.

1.4 Publicações

Durante o desenvolvimento deste trabalho, foram publicados os seguintes artigos:

- BORBA, R. A.; FERNANDES, T. S. P. Interval mathematics applied to multiperiod optimal power flow. In: *2023 15th IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON)*. IEEE, 2023. p. 1131–1138.
- BORBA, R. A.; FERNANDES, T. S. P. Multi-period, Multi-contingency and Interval Optimal Power Flow for Dimensioning and Allocation of Spinning Reserve. In: *Brazilian Archives of Biology and Technology*, FapUNIFESP (SciELO), v. 68, 2025. ISSN 1516-8913.

1.5 Organização da Tese

Este documento está dividido em sete capítulos.

O Primeiro Capítulo foi responsável por introduzir o contexto e justificativa deste trabalho.

O [Capítulo 2](#) apresenta uma revisão bibliográfica sobre problemas relacionados a Sistemas Elétricos de Potência (SEP), além de apresentar os conceitos básicos sobre reserva girante.

O [Terceiro Capítulo](#) descreve conceitos básicos de operações e técnicas e revisão bibliográfica a respeito de aplicações da Matemática intervalar aplicadas a solução de problemas de sistema de equações e otimização de [FPO](#).

O [Capítulo 4](#) apresenta a modelagem determinística dos Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Multicontingência Linear e a aplicação da matemática intervalar.

O [Quinto Capítulo](#) tem o objetivo de mostrar os sistemas utilizados, as técnicas de validação e os resultados obtidos com a proposta deste trabalho.

Por fim, [Capítulo 6](#) tem o objetivo de concluir o trabalho, além de apresentar propostas futuras e discussões.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo descrever alguns trabalhos sobre despacho eólico hidrotérmico, alocação de reserva girante, análise de contingência e aplicação da matemática intervalar em problemas de SEP.

A revisão bibliográfica foi separada de acordo com o tipo de aplicação em problemas do SEP.

2.2 Despacho e alocação ótima de reserva girante

Os trabalhos envolvendo a alocação de reserva girante foram subdivididos em três classes, sendo eles:

- alocação de reserva girante ao se comissionar apenas unidades térmicas (Unit Commitment);
- alocação de reserva girante ao se comissionar apenas unidades térmicas com penetração eólica;
- alocação de reserva girante para sistemas hidrotérmicos com penetração eólica.

2.2.1 Alocação de reserva girante ao se comissionar apenas unidades térmicas (Unit Commitment)

Para trabalhos sobre alocação de reserva girante no despacho de apenas de unidades térmicas citam-se:

Gooi et al. (1999), onde foi responsável por otimizar reserva girante numa formulação de comissionamento de unidades térmicas, utilizando métodos probabilísticos.

Bouffard e Galiana (2004) e Simopoulos, Kavatza e Vournas (2006) que introduziram restrições de confiabilidade para o comissionamento de usinas térmicas, como por exemplo, probabilidade de perda de carga e expectativa não suprida. Os autores formularam o problema de otimização com variáveis inteira-mista.

Costa (2004) fez uma alocação ótima conjunta de energia e reservas operativas baseada em Fluxo de Potência Ótimo, resolvido através do método dos pontos interiores.

Wang, Wang e Wu (2005) e Ortega-Vazquez, Kirschen e Pudjianto (2006) que realizaram estudo de relações entre confiabilidade e aspectos econômicos em problemas de comissionamento.

Shayesteh, Yousefi e Parsa Moghaddam (2010) que propuseram programa de resposta à demanda como fonte de suprimento à reserva girante para planejamento de um dia a frente. Além disso, nesse modelo são utilizadas cargas pré-selecionadas como fontes virtuais de geração, garantindo maior confiabilidade e ganho sob o ponto de vista econômico.

Partovi et al. (2011) que propuseram um modelo probabilístico para providenciar reserva girante horária, através do conceito de expectativa de energia não suprida.

Na mesma linha, Sahebi e Hosseini (2014) sugeriram um modelo de resposta a demanda emergencial para um problema estocástico de comissionamento de unidade geradoras.

Foroud (2013) que sugeriu a alocação de reserva girante para um problema de comissionamento de unidade térmicas. Além disso, considera um mercado de reserva girante, onde leva em consideração lances de custo de déficit de carga para diferentes cenários. A função objetivo deste problema é a minimização da expectativa de energia não suprida e o problema de otimização inteiro-misto foi resolvido pelo software GAMS.

Na mesma linha, o estudo em Sahebi e Hosseini (2014) apresentou um modelo de resposta à demanda emergencial para um problema estocástico envolvendo o comissionamento de unidades geradoras térmicas;

Em Amirahmadi e Foroud (2013), foi considerado um mercado de RG que levou em consideração as propostas para os custos de déficit de carga em diferentes cenários. A função objetivo deste problema envolveu a minimização da expectativa de energia não suprida.

Yuan e Zhai (2017) modelaram um problema de comissionamento de unidades térmicas onde a função do gerador é contínua em relação ao tempo, a fim de uma maior precisão na modelagem das capacidades das rampas das unidades geradoras, assim considerando o acoplamento implícito entre as restrições de rampa e as reservas giratórias, que geralmente é negligenciado em outros modelos. O modelo foi testado no sistema *IEEE* de 24 barras, obtidos com eficácia.

Valarezo, Wang e Memon (2018) demonstraram uma forma de incorporar otimização de chaveamento de transmissão no problema de comissionamento de unidades térmicas, utilizando reserva probabilística. O montante de reserva é determinada através da minimização do custo total, relacionados à carga esperada não suprida, que é penalizada na função objetivo. Para redução da complexidade computacional, um conjunto de linhas comutáveis é introduzido para a categorização das linhas de transmissão e o número

máximo de chaveamentos é determinado por uma heurística.

Yang et al. (2023) propuseram um comissionamento de unidades térmicas a curto prazo (24 horas) cujo objetivo é minimização dos custos de operação total, considerando custo e tempo de entrada e saída de unidades térmicas, além da taxa de rampa. Foi feito um teste com um sistema de 30 barras e seis geradores, resolvido pelo YALMIP e Cplex no Matlab.

2.2.2 Alocação de reserva girante ao se comissionar apenas unidades térmicas com penetração eólica

Entre os trabalhos que tratam de alocação de reserva girante para sistemas térmicos com grande penetração de geração eólica citam-se:

Liu e Tomsovic (2012) modelaram um problema de otimização de alocação de reserva girante, inserindo o comissionamento de unidades térmicas e eólicas (Unit Commitment). A formulação considera uma probabilidade de incerteza na previsão de geração eólica e de carga (EENS). Além disso, possui uma função objetivo de minimização de custo da energia da reserva girante e perda de carga. O modelo de otimização inteiro-mista é resolvido através de técnicas clássicas de programação.

Chen, Chen e Lee (2014) modelaram um despacho de geração ativa, considerando mais de uma área, com forte penetração de geração eólica. O problema é otimizado através de Enxame de Partículas, além de realizar a alocação de reserva girante, considerando diferentes perfis de expectativa de perda de carga e geração. Além disso, o trabalho fez uma análise do impacto que estas perdas têm no carregamento das linhas de intercâmbio entre as áreas, prevendo a reserva mais próxima à área de atuação dos parques eólicos, a fim de evitar congestionamento nas linhas de intercâmbio em situações de indisponibilidade de geração eólica.

Reddy et al. (2013) propuseram um despacho convencional de geração ativa com alocação de reserva girante, com a inclusão de custos sobre e subestimados quanto à disponibilidade de geração eólica. O problema é otimizado através da técnica *Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy* (CMA-ES).

Em Blanco, Dvorkin e Ortega-Vazquez (2017), foi proposto um FPO probabilístico multiperíodo em dois estágios. No primeiro estágio, a co-otimização pré e pós-contingência foi aplicada para calcular a quantidade de reserva necessária, e as contingências (gerador e linha) foram incorporadas a um modelo probabilístico. No segundo estágio, as restrições foram incorporadas a um modelo FPO multiperíodo.

Em MOGO e KAMWA (2019), um FPO multiperíodo foi modelado com a alocação de RG. O problema envolveu vários cenários com a incorporação de incerteza na geração

eólica e focou na análise de custos com base no nível de penetração do vento no sistema.

Os autores de [Jung e Reddy \(2019\)](#) propuseram um método de otimização para o planejamento e coordenação de sistemas termo-eólicos, e consideraram a incerteza na carga e na geração eólica, com o objetivo de minimizar custos e riscos. Concluiu-se que, à medida que a incerteza aumentava, a quantidade total de **RG** também aumentava;

Em [Sun et al. \(2024\)](#), um **FPO** linear foi proposto para calcular e alocar a **RG**, e diversos cenários com contingências N-1 e N-2 foram considerados. Essa abordagem utilizou modelagem probabilística da geração eólica e da carga. Os autores compararam os valores da **RG** e da energia eólica não suprida em função do custo do valor de rejeição de carga.

2.2.3 Alocação de reserva girante para sistemas hidrotérmicos com penetração eólica

A seguir, são citados alguns trabalhos, nos quais são abordados o problema Alocação de Reserva Girante para Sistemas Hidrotérmicos com Penetração Eólica.

[Soder \(1993\)](#) analisou o impacto que a geração eólica tem sobre o planejamento das margens de reserva de energia em um sistema hidrotérmico com suplementação eólica. Nele, um modelo convencional de despacho eólico-hidrotérmico de 24 horas foi estendido para incluir a incerteza da carga e velocidade dos ventos a fim de obter diferentes necessidades de reserva (instantânea, rápida e lenta) que depende da saída de usinas convencionais e incertezas das cargas e geração eólica. Basicamente, o trabalho estima o aumento da necessidade de reserva que advém da introdução de energia eólica. Primeiramente, simulou-se um despacho convencional sem incluir o requisito de reserva, na sequência agregou-se a reserva instantânea, seguida da rápida e depois da lenta.

[Fan, Chen e Watson \(2012\)](#) modelaram um Fluxo de Potência Ótimo, que considera N-1-1 contingências. O método proposto consiste em analisar a perda consecutiva de dois elementos de um sistema de potência, além de considerar o tempo de intervenção para ajustes do operador. Além disso, foi utilizada programação inteira-mista para otimizar os ajustes necessários do sistema.

[Zheng et al. \(2015\)](#) propuseram um problema de comissionamento de unidades hidro, termoeletricas e reserva girante, cuja função objetivo minimiza custo das térmicas, incorpora perdas elétricas no balanço de carga (mas, sem representação da rede elétrica). As restrições englobam os limites operacionais das máquinas, restrições hidráulicas, restrições de reserva girante para cada geradora a cada período levando em consideração estudos prévios de Expectativa de Energia Não Suprida. O problema de otimização foi resolvido pela técnica GSO (Group Search Optimizer).

Yuan et al. (2015) introduziram o despacho de geração eólica em um problema hidrotérmico, cujo função multi-objetivo incluiu minimização do custo de geração térmico, emissão de poluentes e custo dos geradores eólicos.

Banshwar et al. (2017) propuseram uma modelagem de um FPO baseado em uma abordagem de compensação sequencial do mercado de energia e serviços ancilares. O artigo mostra uma estrutura desagregada para integração de produtores de energia renováveis para mercado de compensação. O FPO formulado considera os limites de geração e restrição da taxa de rampa do gerador.

Darvish, Darvishi e Hejazi (2015) propuseram uma abordagem para considerar o impacto da gestão do lado da demanda (DSM) em energia e reserva problema de agendamento de serviço considerando índice de clientes confiabilidade nos mercados de eletricidade. A liberação do mercado é realizada na presença de resposta do lado da demanda e ambos energia e reserva são despachadas de forma otimizada enquanto contabilizam diferentes níveis de carga, pontos operacionais anteriores, rampa da unidade taxas e possíveis contingências que podem ocorrer no sistema e a perda de cargas associada. Paralelamente, é responsável pelo restrições, incluindo limites de tensão e transmissão no estado estacionário do sistema e interrupções prováveis. Ao contrário da pesquisa existente, este artigo primeiro maximiza o benefício dos clientes com a otimização da carga usando o programa de demanda e então os custos totais de energia, reserva giratória e interrupção são minimizados com esta carga. Este artigo estuda o impacto do DSM em duas fases. No primeiro estágio, energia ideal e despacho de reserva são realizados com e sem consideração DSM. No segundo estágio, dois tipos diferentes de programas DSM são comparados e a diferença no ponto operacional ideal do mercado, considerando cada programa é investigado. A eficácia do método proposto é examinada por aplicação ao sistema de teste de barramento *IEEE* 24.

Arantes (2017) modelou um despacho hidrotérmico eólico diário, distribuído ao longo de 24 horas, onde se fez a alocação de reserva girante entre geradores hidráulicos e ou térmicos conforme disponibilidade, concomitantemente ao despacho de geração utilizando representação não linear da rede elétrica. O problema de otimização foi resolvido pelo Métodos dos Pontos interiores Primal-Dual. A reserva girante foi alocada de modo a suprir uma percentagem da demanda e uma percentagem de previsão de energia eólica não gerada.

Moraes et al. (2017) aprimoraram a versão de Arantes (2017) através da inserção de informações referentes aos carregamentos das linhas de transmissão que interligam os subsistemas da rede, de modo a alocar as reservas operativas de acordo com capacidades de transmissão entre os subsistemas.

Em Damodaran e Kumar (2018), um problema de programação eólica-hidrotérmica que incluía fatores de emissão econômicos foi considerado sob a perspectiva da otimização

multiobjetivo não linear complexa. Os objetivos eram minimizar o custo das usinas eólicas-térmicas e obter as menores emissões de poluentes em um período de 24 horas.

Os autores de [Naversen, Farahmand e Helseth \(2019\)](#) propuseram um FPO para a alocação de RG por meio de um modelo robusto de dois estágios para programação de energia e aquisição de reservas em um sistema predominantemente hidrelétrico, que incluía incerteza de carga;

O estudo em [Yang, Tian e Gao \(2025\)](#) concentrou-se em um problema de despacho econômico híbrido hidrelétrico-eólico-térmico e fotovoltaico que considerou os requisitos de alocação de reservas e minimizou o risco e o custo operacional. Além disso, o modelo buscou uma estratégia para redução de picos nos geradores síncronos de usinas em cascata. Os autores resolveram o problema em três etapas: primeiro, utilizaram regressão gaussiana multivariada e quantílica para criar os cenários de geração eólica e fotovoltaica e, em seguida, resolveram um problema de risco e despacho econômico de curto prazo. Por fim, foi realizado o corte de picos das usinas hidrelétricas para obter esquemas de energia.

Em síntese, os trabalhos citados realizam a alocação da reserva girante, considerando-se diferentes perfis de energia eólica não suprida e percentual pré-definida de reserva que depende de percentual de carga. Ainda como [Moraes et al. \(2017\)](#), realiza-se a alocação de reserva concomitantemente com o despacho de potência hidrotérmico com penetração eólica, representação da rede elétrica não linear e consideração de restrições de transmissão entre os subsistemas da rede elétrica.

Em complementação a este trabalho, pretende-se incorporar o também dimensionamento do montante de reserva girante necessário, que nos trabalhos revisados são pré-definidos segundo especificidades de cada país. Para tanto, almeja-se calcular o montante ótimo do total de reserva girante necessário que atenda saídas de linhas de transmissão mais importantes.

Pretende-se também obter não só valores determinísticos, mas também intervalos máximo e mínimo para o dimensionamento e alocação de reserva girante, que abarquem valores usuais de incertezas de carga e geração eólica. Através da Matemática Intervalar, cuja revisão bibliográfica é descrita, a seguir, citando-se trabalhos onde são envolvidos a aplicação da matemática intervalar em problemas do SEP.

2.2.4 MI em problemas do SEP

O trabalho de [Wang e Alvarado \(1992\)](#) apresenta um dos primeiros relatos da utilização da matemática a um problema do SEP. Neste artigo é modelado um FC que incorpora erro de carga, além de combinar o método de Newton Intervalar para resolver equações não lineares e Gauss-Seidel para lineares. Os resultados são comparados com simulações via Monte Carlo de um Fluxo de Potência Probabilístico com 1000 diferentes

valores de potência dentro de uma faixa específica. Concluiu-se que o método intervalar foi eficiente.

Cita-se o trabalho de [Mori e Yuihara \(1999\)](#) como um dos primeiros a utilizar o método de Krawczyk para inserção de incerteza de carga no Fluxo de Potência, que utiliza coordenadas retangular.

[Das \(2002\)](#) desenvolveu um FP com modelagem *Backward sweep/forward* para redes de distribuição balanceadas e que considera incerteza de carga através da MI. A modelagem foi testada em dois sistemas radiais, com 30 e 68 barras, cujos resultados foram comparados com simulações determinísticas.

[Pereira \(2015\)](#) modelou fluxo de potência intervalar por injeção de corrente, forma polar que tem controle de reativo nas barras de geração e limite de tensão nas barras de carga com inclusão de ponto máximo de carregamento. A autora utiliza o método de Krawczyk para a incorporação de incertezas.

O trabalho de [Monego \(2017\)](#) foi um dos pioneiros a apresentar um FPO Intervalar a fim de se considerar incerteza de cargas. O FPO possui modelagem por injeção de potência, coordenadas retangulares e é resolvido pelo Método dos Pontos Interiores versão primal-dual em conjunto ao Método de Krawczyk, a fim de se otimizar intervalos de magnitudes tensão, geração de potência ativa e reativa ótimos. Os sistemas teste foram ode 3 barras ([MONTICELLI, 1983](#)), *IEEE* 30 barras e 70 barras ([BARAN; WU, 1989](#)). Como método de validação, os resultados do método intervalar foram comparados a inúmeras simulações aleatórias.

[Lu et al. \(2019\)](#) que, através da Aritmética Afim, modelaram um fluxo de potência direcionado a sistemas híbridos CA-CC que inclui conversores do tipo fonte de tensão (*VSC*). Uma vez que o FP convencional não é eficiente para a inclusão de incerteza, este trabalho considera intermitência de algumas fontes renováveis, como eólica e fotovoltaica, além do erro de carga e controle automático dos *VSC*s. Os resultados foram satisfatórios, o método apresentou boa eficiência e baixo tempo computacional, quando comparado ao método de Monte Carlo.

[Borba \(2020\)](#) incorporou a Matemática Intervalar no Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e no Fluxo de Potência Ótimo Trifásico (ferramentas clássicas para análise e otimização de redes ativas de distribuição), a fim de se considerar incertezas de dados de carga e geração. A Matemática intervalar é aplicada como um problema de pós-otimização, ou seja, após uma otimização determinística são acrescentados faixas de incertezas nos parâmetros da rede para que assim possa ser utilizado o método de Krawczyk para a determinação de uma faixa ótima de operação da rede. O método proposto foi comparado com resultados obtidos a partir de 200 simulações que geraram valores aleatórios de carga e geração solar, dentro de uma faixa pré-especificada.

(LIN et al., 2020) propuseram um novo método para calcular margem de estabilidade estática de tensão em sistemas com grande incorporação de usinas eólicas. A fim de se considerar a flutuação da geração destas fontes, utilizou-se técnicas de otimização intervalar. O método proposto considera dois FPO biníveis e foi testado com o sistema IEEE 39 barras e 964 barras. Além disso, o método proposto foi comparado com Monte Carlo e Fluxo de Potência continuado. O método proposto, intervalar, foi mais eficiente.

Junior, Melo e Nepomuceno (2022) modelou um FP trifásico intervalar com base no método de injeção de corrente e coordenadas retangulares. As variáveis foram modeladas como intervalos e o operador de Krawczyk foi utilizado nas equações de fluxo de potência. O método de Krawczyk mostrou ser mais rápido e eficiente do que os outros métodos.

Borba e Fernandes (2023) incorporaram um fluxo de potência ótimo multiperíodo para sistemas hidrotérmico-eólico, a fim de se incorporar incertezas de dados. Foi utilizado o método de Krawczyk para resolver o sistema de equações intervalares. Além disso, foi escolhido o sistema de 33 barras (sul-sudeste brasileiro) e comparado com resultados obtidos em simulações exaustivas tradicionais. Os resultados obtidos foram próximos aos valores da análise aleatória, com uniformidade. Os métodos intervalares foram 300 vezes mais rápidos e apresentaram maior sensibilidade dos intervalos em relação às simulações exaustivas.

Lima, Melo e Filho (2024) modelou um FP Holomórfico Intervalar. Neste trabalho, as equações de fluxo de potência são modeladas como funções complexas holomorfas, expansão em séries de Maclaurin e aproximações de Padé. O trabalho fez comparações entre o método de Krawczyk, série de Taylor, Aritmética Afim e Monte Carlo.

Não foram encontradas aplicações de MI em problemas de despacho hidrotérmico com ou sem reserva girante e qualquer aplicação sobre dimensionamento de reserva girante com considerações de contingências.

Além da matemática intervalar, existem outros métodos que tratam de incertezas em problemas relacionados ao SEP, como a otimização robusta e métodos probabilísticos:

Alvarez (2003) apresentou uma formulação que determina as necessidades da reserva operativa vista sob um ambiente competitivo, como cálculo do montante e alocação, a fim de se aumentar a confiabilidade no fornecimento e determinação dos custos correspondentes. O método proposto se baseia na integração do custo de perda de carga e custo de oferta da capacidade sem a necessidade de índices de risco fixados a priori. O método utiliza modelagem probabilística com processos de Markov e tabelas de indisponibilidade (COPT), permitindo equilibrar custos e confiabilidade de forma econômica. Aplicações em sistemas teste do IEEE e no sistema Sul-Sudeste brasileiro demonstram que a abordagem reduz arbitrariedades, melhora a eficiência econômica e contribui para a definição de mercados de reserva mais robustos e alinhados ao valor da confiabilidade.

(WANG, 2015) propuseram um planejamento de curto prazo (30 segundos a 15 minutos) para a adequação e avaliação probabilística da reserva girante. Para tanto, um método de simulação baseado na entropia cruzada foi integrada ao método de Monte Carlo via Cadeias de Markov.

Gu et al. (2016) modelaram um despacho econômico multi-objetivo baseado em simulação Quasi-Monte Carlo (QMC), cujo foco é reduzir custo de combustível e emissão simultaneamente. Diferente do método Monte Carlo Tradicional, o QMC (para incorporação de incertezas) gera sequências de baixa discrepância para expressar as velocidades do vento e cargas, que seguem estritamente a distribuição de Weibull e a distribuição Gaussiana, em vez de números puramente aleatórios, além da menor complexidade e custo computacional quando comparado ao método tradicional. O método foi testado com o sistema IEEE-30 barras modificado.

Yao et al. (2018) propuseram um método probabilístico de se otimizar reserva para um sistema interconectado. As duas principais contribuições desse trabalho incluem a introdução de uma variável binária para coordenar os requisitos de reserva, onde foi limitado e enumerado a razão entre a reserva girante entre as áreas, sendo esta razão correspondente a um número binário. A outra contribuição é a otimização da energia eólica não suprida, através da linearização da variável em cada período de interesse. Para tanto foi testando o sistema IEEE-RTS com duas áreas.

Bapin e Zarikas (2021) propõem uma metodologia probabilística para a alocação ótima de reservas girantes em sistemas elétricos com alta penetração de geração eólica e solar, considerando incertezas de carga, renováveis, resposta da demanda e interconexões entre sistemas. O trabalho se destaca pelo uso de um modelo bivariado de Farlie-Gumbel-Morgenstern para a previsão da geração eólica e por um algoritmo de ajuste de reservas baseado em Redes Bayesianas, capaz de refinar a alocação intradiária a partir da realização efetiva da demanda líquida. Aplicada ao sistema IEEE Two-Area RTS, a metodologia demonstrou melhorias na confiabilidade e redução de custos, com diminuição de 2,66% na energia esperada não suprida (EENS) e de 1,12% nos custos totais de operação.

Jiang et al. (2014) modelaram um problema de UC, com alocação de reserva para um horizonte de 24 períodos, cujo foco principal é a incorporação de incertezas da demanda e geração eólica, resolvidos através de otimização robusta, através de 2 estágios. O primeiro responsável por minimizar o custo operacional do UC e o segundo por resolver o despacho econômico, considerando o pior caso de incerteza. O algoritmo utilizado é a decomposição de Benders e foi escolhido o sistema IEEE-RTS para testes.

Zugno e Conejo (2015) Propuseram uma abordagem de otimização robusta de dois estágios para despacho e reserva de energia, monopérido (que pode ser facilmente alterado para multipérido), com a incorporação de incerteza nas fontes eólicas. O a

solução é obtida através do algoritmo de planos de corte Benders-dual e é utilizado o sistema IEEE-RTS para validação de resultados.

CEREZOLLI (2021) abordou um problema de planejamento para um horizonte de 24 horas de sistemas hidrotérmico eólico através da otimização robusta. A modelagem considerou a incorporação de incerteza da demanda, eólica e à vazão afluyente, além de alocar reserva. O problema de otimização robusta foi formulado em 3 níveis e considera um modelo linear de rede. O algoritmo de solução é o de geração de coluna e restrição e foi testado com o sistema de 33 barras (equivalente a região sul-sudeste brasileira) e IEEE 30 barras.

A matemática intervalar distingue-se da otimização robusta e dos métodos probabilísticos por tratar a incerteza exclusivamente por limites mínimo e máximo dos parâmetros, sem assumir distribuições de probabilidade nem buscar o pior caso extremo, enquanto a otimização robusta foca no cenário mais adverso possível e os métodos probabilísticos quantificam risco com base em informações estatísticas.

2.3 Considerações finais

Este capítulo teve como objetivo avaliar a literatura técnico-científica sobre despacho de potência e reserva girante para diferentes tipos de sistemas (térmico, hidrotérmicos e eólicos).

Além disso, foi feita uma revisão literária de trabalhos que incorporam a Matemática Intervalar na solução de problemas de SEP. Como forma complementar, a Tabela 2 faz um resumo das referências mais relevantes para a síntese desse trabalho e aponta o diferencial da presente tese.

Dessa forma, os trabalhos apresentados servem como base para a formulação do FPO proposto neste trabalho, multiperíodo-multicontingência intervalar (FPOMMI), que além de realizar o despacho de potência de um sistema hidrotérmico (incluindo restrições elétricas e energéticas) para um horizonte de uma semana ou um dia a frente seja capaz também de fazer dimensionamento do montante de reserva girante necessário para suprir diferentes situações de saída de linhas, geradores e níveis de energia renovável não suprida, assim como também realizar alocação ótima de reserva girante entre as unidades de geração.

Legenda:

- FP: Fluxo de Potência;
- FPO: Fluxo de Potência Ótimo;
- MP: Multiperíodo;

Tabela 2 – Principais referências

Referência	FP	FPO	MP	MC	Linear	Intervalar	MPI
Tese		✓	✓	✓	✓	✓	✓
Borba (2020)		✓	✓			✓	✓
Borba e Fernandes (2023)		✓	✓			✓	✓
Wang e Alvarado (1992)	✓					✓	
Costa (2004)	✓	✓					✓
Fan, Chen e Watson (2012)		✓		✓			
Pereira (2015)	✓					✓	
Monego (2017)		✓				✓	✓
Arantes (2017) e Moraes et al. (2017)		✓	✓				✓
Naversen, Farahmand e Helseth (2019)		✓	✓	✓			
Junior, Melo e Nepomuceno (2022)	✓					✓	
Sun et al. (2024)		✓	✓	✓	✓		
Lima, Melo e Filho (2024)	✓					✓	

Fonte: O autor (2025).

- MC: Multicontingência;
- MPI: Método dos Pontos Interiores.

Nota-se uma carência de trabalhos que abordam, simultaneamente, os temas matemática intervalar e FPO multiperíodo e/ou multicontingência. Além disso, grande maioria dos trabalhos do tema envolvem apenas unidades térmicas. Outrossim, o método de Krawczyk apresenta bastante robustez e eficiência para sistemas de potência, visto que é necessário inverter a matriz Jacobiana apenas uma vez durante todo o processo iterativo.

Dessa forma, o diferencial deste trabalho é a formulação um Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Multicontingência intervalar, que considera diversos tipos de fontes de energia (hidráulica, térmica e eólica) para todo intervalo de um dia a frente.

3 Matemática Intervalar

Este capítulo tem o objetivo de detalhar métodos e operações tradicionais da matemática intervalar, bem como fazer uma análise técnico científica de trabalhos que utilizam a [MI](#) aplicado a problemas de otimização.

Um dos primórdios da Matemática Intervalar data de 1914, quando Norbert Wiener faz relato de um estudo sobre aferição de distância ([PALMEIRA; BEDREGAL; SANTIAGO, 2011](#)). Entretanto, a Aritmética Intervalar propriamente conceituada posteriormente com os trabalhos de [Burkill \(1924\)](#) e [Young \(1931\)](#).

Os trabalhos mais notáveis que descreveram a Matemática Intervalar ([MI](#)) são os de [Warmus \(1956\)](#), [Sunaga \(1958\)](#) e, o do considerado patriarca da matemática intervalar, [Moore \(1959\)](#) por ter sido responsável por grandes contribuições, inúmeros artigos e, principalmente, o livro [Moore \(1966\)](#) onde foram apresentados vários conceitos e métodos consagrados da [MI](#), como o Newton Intervalar.

A base da [MI](#) se dá através do cálculo aritmético de intervalos numéricos, delimitados por dois limites inferior e superior. É um método que soluciona problemas envolvendo incerteza de dados, os quais podem estar contidos dentro de um intervalo numérico ([GWALTNEY et al., 2008; MONEGO, 2017](#)), além de ser uma ferramenta para trabalhar com erro de arredondamento e truncamento, bem como possíveis aproximações numéricas ([VARGAS et al., 2008](#)).

Os trabalhos de maior relevância da matemática intervalar descrevem a modelagem do método de Krawczyk ([KRAWCZYK, 1969](#)). No livro de [Moore \(1979\)](#) são demonstradas técnicas e aplicações da [MI](#) e uma obra de [Neumaier \(1990 apud MOORE, 2009\)](#) demonstra formas de resolver sistemas de equações intervalares. Por fim, as obras de [Hansen e Walster \(2003 apud MOORE, 2009\)](#) e [Neumaier \(2004 apud MOORE, 2009\)](#), tem como foco a otimização global.

Além destes trabalhos, [Comba e Stol \(1993\)](#) demonstram uma técnica de computação denominada Aritmética Afim ([AA](#)), que é baseada na matemática intervalar convencional. Apesar da similaridade com a [MI](#) a [AA](#) possui o controle automático de erro de arredondamento e truncamento para cada uma das variáveis envolvidas no algoritmo. A [AA](#) apresenta bom desempenho na solução de problemas envolvendo computação gráfica, como Traçado de Raios (*Ray Tracing*) e na construção de *Octrees*.

A fim de se familiarizar a respeito da [MI](#) e fazer a correta aplicação no [FPOMP](#) e no [FPOMM](#) este capítulo apresenta uma revisão de literatura de trabalhos envolvendo resolução de sistemas de equações e otimização através da [MI](#), bem como apresentar os

conceitos e operações básicas. Além disso, será descrito o desenvolvimento do Método de Krawczyk, que é a base para a formulação Intervalar do FPO proposto neste trabalho.

A seção seguinte apresenta as operações algébricas básicas e métodos de solução de sistemas de equações através da aplicação da MI.

3.1 Termos básicos, operações intervalares e conceitos

Utilizou-se o livro Introduction to Interval Analysis (MOORE, 2009) como referência para descrever as operações fundamentais da matemática intervalar, presente neste capítulo.

Consideram-se os intervalos $X = [\underline{x}; \bar{x}]$ e $Y = [\underline{y}; \bar{y}] \in \mathbb{R}$ onde, por convenção os elementos \underline{x} e \underline{y} são os limites inferiores, \bar{x} e \bar{y} são os limites superiores de cada um dos respectivos intervalos.

3.1.1 Operações Básicas

A seguir, apresentam-se as quatro operações básicas, aplicadas à Matemática Intervalar.

I - Adição

A adição de dois intervalos se dá através da Equação 3.1.

$$X + Y = [\underline{x} + \underline{y}; \bar{x} + \bar{y}] \quad (3.1)$$

II - Subtração

A subtração intervalar se dá através de um artifício denominado de Pseudo-inverso Aditivo, onde há a oposição de um dos intervalos, conforme a Equação 3.2.

$$-X = [-\bar{x}; -\underline{x}] \quad (3.2)$$

Aplicando a Equação 3.2 na Equação 3.1, obtém a subtração intervalar.

$$X - Y = X + (-Y) = [\underline{x} - \bar{y}; \bar{x} - \underline{y}] \quad (3.3)$$

III - Multiplicação

A multiplicação intervalar é feita através da Equação 3.4 e Equação 3.5.

$$X \cdot Y = [\min S; \max S] \quad (3.4)$$

onde:

$$S = \{ \underline{x} \cdot \underline{y}; \underline{x} \cdot \bar{y}; \bar{x} \cdot \underline{y}; \bar{x} \cdot \bar{y} \}. \quad (3.5)$$

IV - Divisão A operação de divisão intervalar se dá através da manipulação da multiplicação intervalar, ao inverter um dos intervalos, conforme mostra a [Equação 3.6](#) e [Equação 3.7](#).

$$X \div Y = \left\{ X \cdot \left(\frac{1}{Y} \right) \right\} \quad (3.6)$$

onde:

$$\frac{1}{Y} = \left\{ y : \frac{1}{y} \in Y \right\} = \left[\frac{1}{\bar{y}}; \frac{1}{\underline{y}} \right] \quad y \neq 0 \quad (3.7)$$

Em seguida são apresentadas funções e outras operações fundamentais da [MI](#):

V - Módulo: A função módulo intervalar é obtida através da [Equação 3.8](#):

$$|X| = \max \{ |\underline{x}|, |\bar{x}| \} \quad (3.8)$$

sendo que $|x| \leq |X| \forall x \in X$.

VI - Ponto Médio: O ponto médio de um intervalo X é definido por:

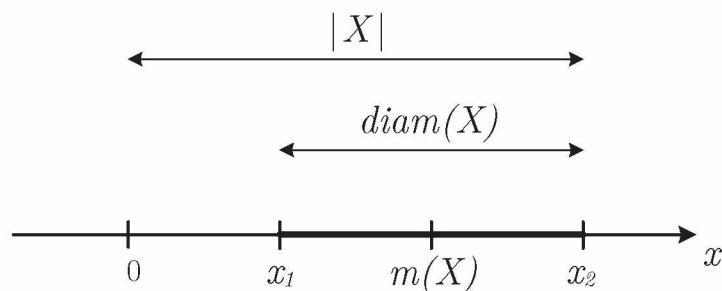
$$m(X) = \frac{1}{2} \cdot (\underline{x} + \bar{x}). \quad (3.9)$$

VII - Diâmetro: O diâmetro de um intervalo X é calculado por:

$$diam(X) = \bar{x} - \underline{x}. \quad (3.10)$$

Essas propriedades são ilustradas na [Figura 2](#).

Figura 2 – Propriedades da matemática intervalar



Fonte: (BORBA, 2020).

VIII - Função genérica: Um intervalo qualquer X pode ser definido através da Equação 3.11.

$$\begin{aligned} X &= m(X) + \left[-\frac{1}{2} \cdot \text{diam}(X); \frac{1}{2} \cdot \text{diam}(X) \right] \\ &= m(X) + \frac{1}{2} \cdot \text{diam}(X) \cdot [-1; 1]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

IX - Intervalo degenerado: Um intervalo é considerado degenerado se:

$$\underline{x} = \bar{x} \quad \underline{x} \text{ e } \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

Um intervalo degenerado contém apenas um número x real e, convencionalmente, é escrito $[x; x]$. Um exemplo de Intervalo degenerado é:

$$0 = [0; 0].$$

X - Intervalo simétrico: Um intervalo X simétrico é definido conforme a Equação 3.12.

$$X = [-\bar{x}; \bar{x}]. \quad (3.12)$$

Teorema 1.1: Todo intervalo simétrico possui a forma $[-a; a]$, com $a \geq 0$ (OLIVEIRA; CLAUDIO; DIVERIO, 2001)

Alguns exemplos de intervalo simétrico: $[-5; 5]$, $[0; 0]$, $[-\pi; \pi]$.

XII - União: A Equação 3.13 defini a função união intervalar de dois intervalos X e Y .

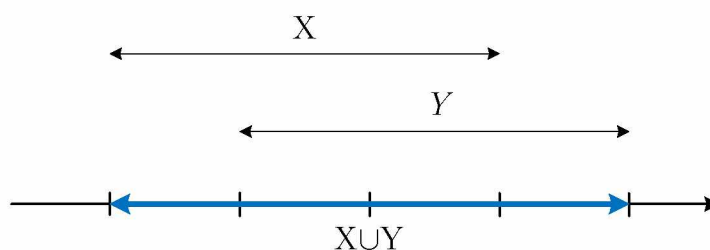
$$\begin{aligned} X \cup Y &= \{z : z \in X \text{ ou } z \in Y\} \\ &= [\max\{\underline{x}; \underline{y}\}; \min\{\bar{x}; \bar{y}\}]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A operação união é apresentada na Figura 3.

(VIII) Interseção: Denominada $X \cap Y$, a interseção de dois intervalos X e Y se dá através da Equação 3.14.

$$\begin{aligned} X \cap Y &= \{z : z \in X \text{ e } z \in Y\} \\ &= [\max\{\underline{x}; \underline{y}\}; \min\{\bar{x}; \bar{y}\}]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

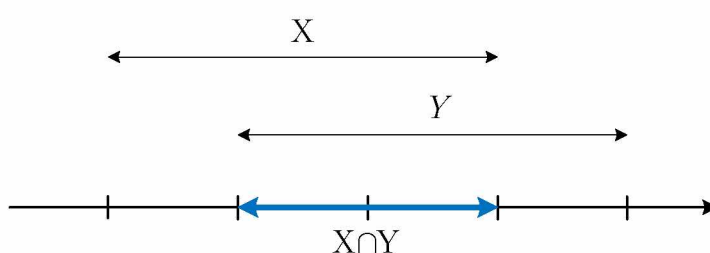
Figura 3 – União



Fonte: (BORBA, 2020).

Essa propriedade é ilustrada conforme a Figura 4.

Figura 4 – Interseção



Fonte: (BORBA, 2020).

(IX) Conjunto vazio: Considera-se conjunto vazio quando os intervalos X e Y não possuem nenhum ponto em comum. Ou seja:

$$\bar{y} < \underline{x} \text{ ou } \bar{x} < \underline{y}. \tag{3.15}$$

Neste caso, o conjunto vazio (\emptyset) é escrito como:

$$X \cap Y = \emptyset. \tag{3.16}$$

3.2 Matrizes e vetores intervalares

As operações e conceitos apresentados neste capítulo também são empregadas em vetores e matrizes intervalares.

Dado um vetor intervalar \mathcal{V} de dimensão n . Este vetor pode ser representado conforme a Equação 3.17.

$$\mathcal{V} = [X_1; X_2; \dots; X_n] = \{[\underline{x}_1; \bar{x}_1]; [\underline{x}_2; \bar{x}_2]; \dots; [\underline{x}_n; \bar{x}_n]\}. \tag{3.17}$$

Considerando uma matriz qualquer \mathcal{M} . Considera-se \mathcal{M} intervalar de dimensão $m \times n$ caso cada elemento A_{ij} for um intervalo (OLIVEIRA; CLAUDIO; DIVERIO, 2001). Por exemplo:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\underline{x}_{11}; \bar{x}_{11}] & [\underline{x}_{12}; \bar{x}_{12}] \\ [\underline{x}_{12}; \bar{x}_{12}] & [\underline{x}_{22}; \bar{x}_{22}] \end{bmatrix}.$$

Um exemplo numérico de uma matriz intervalar \mathcal{A} de dimensão 2×3 :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1; 2] & [-4; 4] & [1; 1] \\ [0; 3] & [-5; -2] & [7; 7] \end{bmatrix}.$$

As operações básicas, mostradas na [Seção 3.1](#) são válidos para operações com vetores e matrizes.

3.2.1 Exemplos

Seja função $f(x)$ qualquer, monovariável tal que $x \in \mathbb{R}$, ao se aplicar a matemática intervalar, deve respeitar a seguinte condição:

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}.$$

Quando ampliada para o caso multivariável:

$$f(X_1, \dots, X_n) = \{f(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}.$$

3.2.2 Funções elementares

A [MI](#) é relativamente simples de ser aplicada em algumas funções elementares, por exemplo:

- $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R},$

se $X = [\underline{x}; \bar{x}]$, então:

$$f(X) = \{x^2 : x \in X\}. \tag{3.18}$$

Portanto, a [Equação 3.18](#) pode ser definida de acordo com a [Equação 3.19](#).

$$f(X) = \begin{cases} [\underline{x}^2; \bar{x}^2], & 0 \leq \underline{x} \leq \bar{x} \\ [\bar{x}^2; \underline{x}^2], & \underline{x} \leq \bar{x} \leq 0 \\ [0; \max\{\underline{x}^2; \bar{x}^2\}], & \underline{x} \leq 0 \leq \bar{x}. \end{cases} \quad (3.19)$$

Vale lembrar que a Equação 3.18 e 3.19 não são equivalentes a $X \cdot X$, pois:

$$X = [-1; 1] \\ X^2 = [-1; 1] = [0; 1] \quad X \cdot X = [-1; 1] \cdot [-1; 1] = [-1; 1].$$

- $f(x) = \text{sen } x$.

Seja o intervalo $X = [\underline{x}; \bar{x}]$, logo a função seno intervalar $f(X)$ é descrita conforme a Equação 3.20

$$\text{sen}(X) = [\text{sen } \underline{x}; \text{sen } \bar{x}] \quad \text{para } X \subseteq \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \quad (3.20)$$

A Equação 3.20 somente é válida apenas para intervalos inclusos entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, visto que esses limites são respectivamente o mínimo e o máximo da função. Dessa forma, o intervalo da função assumirá valor -1 e/ou 1 , caso o intervalo X possuir algum dos limites maior ou menor que $\pm \frac{\pi}{2}$, pois a senoide é uma função cíclica.

Ou seja, caso $\underline{x} \leq \frac{\pi}{2}$ e $\bar{x} \geq \frac{\pi}{2}$, então $\text{sen}(X) = [-1; 1]$ sempre.

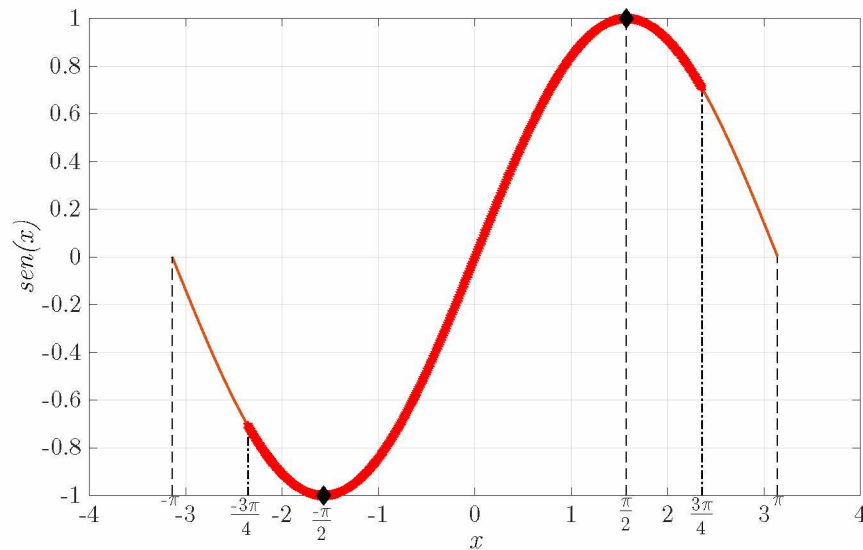
Para ilustrar esta função, determina-se um intervalo $X = \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$. A Figura 5 mostra a propriedade da função seno.

Esta aplicação também é válida para a função cosseno (MOORE, 2009).

$$\begin{aligned} \text{sen}(X) &\neq \left[\text{sen}\left(\frac{-3\pi}{4}\right); \text{sen}\left(\frac{+3\pi}{4}\right)\right] \\ &\quad \vdots \\ \text{sen}(X) &= [-1; 1] \text{ e } \left[\text{sen}\left(\frac{-3\pi}{4}\right); \text{sen}\left(\frac{+3\pi}{4}\right)\right] = [-0,7071; 0,7071] \end{aligned}$$

3.3 Métodos de solução para sistemas de equações intervalares

A seguir serão apresentados alguns métodos solucionar sistemas de equações lineares e não lineares intervalares.

Figura 5 – Função $\text{sen}(x)$ 

Fonte: (BORBA, 2020).

3.3.1 Sistemas de equações lineares

Seja um sistema de equações lineares, mostrado na Equação 3.21:

$$\mathcal{A} \cdot x - \mathbf{b} = 0 \quad (3.21)$$

onde:

- \mathcal{A} é uma matriz quadrada $n \times n$;
- \mathbf{b} é um vetor de dimensão $1 \times n$.

Existem duas formas tradicionais de resolver o sistema da Equação 3.21 (MOORE, 2009).

1. Métodos diretos, cujo resultado é exato, porém de difícil resolução. Por exemplo, eliminação de Gauss (com ou sem pivoteamento);
2. Métodos iterativos (ou indiretos), que encontram uma solução dentro de uma tolerância desejada.

Os trabalhos de Hansen e Walster (1993), Moore (2009) mostram diferentes métodos iterativos, sendo o primeiro responsável por combinar a eliminação de Gauss e a aritmética intervalar. Essa técnica tem a desvantagem de aumentar o diâmetro do intervalo devido ao arredondamento dos erros. Já o segundo autor sugere o método de Krawczyk, que será

mostrado em detalhes neste capítulo e aplicado, posteriormente, no Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e no Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo-Multicontingência.

Proposto por Moore (1966), o método de Newton Intervalar tem a sua base o método de Newton e a incorporação de um operador intervalar, denominado *Newtoniano*.

Dado o sistema Equação 3.21, intervalar, estabelece o novo conjunto de equações, através da Equação 3.22.

$$\mathcal{A}^I \cdot X - \mathbf{b}^I = 0. \quad (3.22)$$

O conjunto de soluções estabelecidos na Equação 3.22 é definido na Equação 3.23.

$$s = \{x : \mathcal{A} \cdot X = \mathbf{b}, \mathcal{A} \in \mathcal{A}^I, \mathbf{b} \in \mathbf{b}^I\} \quad (3.23)$$

onde:

- \mathcal{A}^I é uma matriz quadrada $n \times n$ intervalar;
- \mathbf{b}^I é um vetor de dimensão $1 \times n$ intervalar.

Para retardar o aumento do intervalo, acrescenta-se a matriz \mathcal{B} , que é a inversa de \mathcal{A} à Equação 3.22, nos dois lados da equação:

$$\mathcal{B} \cdot \mathcal{A}^I \cdot X = \mathcal{B} \cdot \mathbf{b}^I. \quad (3.24)$$

Embora essa operação eleve o custo computacional, por ter que inverter a matriz \mathcal{A} , a nova matriz $\mathcal{B}\mathcal{A}^I$ tem uma diagonal fortemente dominante, assim, melhorando o condicionamento numérico (HANSEN; WALSTER, 1993).

3.3.2 Sistema de equações não lineares

Através de uma série convergente de pontos, o Método de Newton obtém a solução de um sistema de equações não lineares ($f(x) = 0$). O mesmo princípio é válido para a versão intervalar do Método de Newton, entretanto se criando uma sequência de intervalos e sempre a solução de $f(x)$ estará contida em um intervalo (BORBA, 2020).

3.3.2.1 Método de Newton Intervalar

Seja $f(x) = 0$ uma função não-linear e continuamente diferenciável. Ao aplicar teorema do valor médio, tem-se:

$$f(y) = f(x) + J(c) \cdot (y - x) \quad (3.25)$$

onde:

- y é um valor incremental em relação a x ;
- c é o ponto médio do intervalo $X = [x; y]$;
- $J(c)$ é a matriz Jacobiana no ponto médio.

Assumindo que $f(y) = 0$ e que existe uma solução x que satisfaz [Equação 3.26](#).

$$J(c) \cdot (x - y) = -f(y). \quad (3.26)$$

Define-se X o vetor de variáveis de entrada, onde o intervalo $[x, y] \in X$.

Manipulando a [Equação 3.26](#), tem-se:

$$J(c) \cdot (X - x) = -f(x). \quad (3.27)$$

Define-se $N(X)$ como operador de Newton intervalar, que é equivalente a solução intervalar da [Equação 3.27](#).

Se existe um zero da função $f(y)$, com $y \in X$ para qualquer $x \in X$, então $y \in N(x; X)$. Dessa forma define-se o operador de Newton intervalar, que corresponde ao intervalo X ([HANSEN; WALSTER, 1993](#)), ([MORI; YUIHARA, 1999](#)), ([MOORE, 2009](#)):

$$\begin{aligned} N(X_k) &= m(X_k) - f(m(X_k)) \cdot (J(X_k))^{-1} \\ &= m(X_k) - \frac{f(m(X_k))}{F'(X_k)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ao determinar o operador de Newton intervalar, a [Equação 3.29](#) mostra a criação do novo vetor de variáveis, atualizado a cada iteração.

$$X_{(k+1)} = X_{(k)} \cap N(X_{(k)}) \quad (3.29)$$

onde:

- k é a iteração ($k = 1, 2, 3, \dots$).

O processo se repete até ser atingida uma determinada tolerância, calculada através da [Equação 3.30](#).

$$\frac{|diam(X_{(k+1)}) - diam(X_{(k)})|}{2} \leq \text{tolerância}. \quad (3.30)$$

3.3.2.2 Método de *Krawczyk*

Derivado do método de Newton Intervalar, o método de *Krawczyk* (KRAWCZYK, 1969), tem como uma das principais benefícios inverter a matriz Jacobiana apenas uma vez, ao contrário do Método de Newton Intervalar, a cada iteração (LIAO et al., 2017), (WU et al., 2019) e (LU et al., 2019).

O método de *Krawczyk* foi aprofundado por *Krawczyk e Neumaier* (1986), *Neumaier* (1990), *Hansen e Walster* (2003) e *Moore* (2009). Um dos objetivos deste método é a redução de erros por condicionamento numéricos, cuja causa é a inversão sucessiva da matriz Jacobiana, uma vez que ela pode apresentar problemas de singularidade (ALEFELD; MAYER, 2000).

Considera-se uma função $f(x)$ contínua no intervalo desejado, então define-se a matriz de pré-condicionamento conforme a Equação 3.31.

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\mathbf{J}(x)} = \frac{1}{\mathbf{F}'(x)}. \quad (3.31)$$

A matriz \mathbf{C} deve ser não-singular e inversível.

O desenvolvimento matemático do *Krawczyk* é resultante da adição do termo $(x - y)$ em ambos os lados da Equação 3.27.

$$(\mathbf{J}(X) - I) \cdot (y - x) = f(x) + x - y \quad (3.32)$$

$$y = f(x) + x + (I - \mathbf{J}(X)) \cdot (y - x). \quad (3.33)$$

Considerando $[x; y] \in X$, então y pode ser substituído por X .

$$K(x; X) = -f(x) + x + (I - \mathbf{J}(X)) \cdot (X - x). \quad (3.34)$$

O diferencial do método de *Krawczyk* é a utilização de uma matriz de pré-condicionamento, definida em Equação 3.31, a fim de se evitar o aumento dos intervalos durante as iterações (SETA, 2015). Dessa forma, é possível determinar o operador de *Krawczyk*, conforme a Equação 3.35:

$$K(x_{(k)}; X_{(k)}) = x_{(k)} - \mathbf{C} \cdot f(x_{(k)}) + (\mathbf{I} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{J}(X_{(k)})) \cdot (X_{(k)} - x_{(k)}) \quad (3.35)$$

onde:

- $x_{(k)}$ é o valor médio do intervalo $X_{(k)}$, na iteração k ;

- $X_{(k)}$ é a variável intervalar do problema, na iteração k , onde $x_{(k)} \in X_{(k)}$;
- \mathbf{C} é a matriz de pré-condicionamento;
- $\mathbf{J}(X_{(k)})$ é a Jacobiana intervalar do problema, na iteração k .

Semelhante ao método de Newton intervalar, uma vez definido o operador de Krawczyk, define-se o novo vetor de variáveis intervalar atualizado a cada iteração, de acordo com a [Equação 3.36](#).

$$X_{(k+1)} = X_{(k)} \cap K(x_{(k)}; X_{(k)}). \quad (3.36)$$

O método se repete até que se atinja uma determinada tolerância, a qual é calculada através da [Equação 3.37](#).

$$\frac{|diam(X_{(k+1)}) - diam(X_{(k)})|}{2} \leq \text{tolerância}. \quad (3.37)$$

A fim de exemplificar uma aplicação do Método de Krawczyk, apresenta-se o [Exemplo 3.2](#), entretanto, sem considerar incorporação de incertezas, apenas para demonstrar a convergência do método iterativo. Para que se possa incorporar incerteza, seria necessário criar uma função com parâmetros intervalares.

Exemplo 3.2: Deseja-se calcular a corrente I (mA) que flui num diodo que satisfaz a equação $1 - I - 0,0052 \cdot \ln(10^9 \cdot I) = 0$ utilizando o método de Krawczyk. Considerar $I_0^I = [0,050000; 0,950000]$ A ([MOORE, 2009](#)).

Primeiramente, determina-se $f(x)$ e $J(X)$ intervalares.

$$f(I) = 1 - m(I^I) - 0,0052 \cdot \ln(10^9 \cdot m(I^I))$$

$$J(I^I) = -\frac{13}{2500 * I^I} - 1$$

onde:

- $I = m(I^I) = \frac{I + \bar{I}}{2}$;
- I^I é o intervalo da variável do problema, corrente.

Inicialmente é determinada a matriz de pré-condicionamento, que é constante durante toda a solução do problema:

$$f(I) = 1 - m(I^I) - 0,0052 \cdot \ln(10^9 \cdot m(I^I))$$

$$J(I) = -\frac{13}{2500 * I^I} - 1.$$

Sabendo que o ponto médio inicial é:

$$\begin{aligned} m(I^I) &= \frac{0,050000 + 0,950000}{2} = 0,500000 \\ &\vdots \\ \mathbf{J}(0,500000) &= -\frac{13}{2500 \cdot 0,500000} = -1,010400 \\ &\vdots \\ \mathbf{C} &= -0,989707. \end{aligned}$$

Após determinar \mathbf{C} , inicia-se o processo iterativo e é necessário calcular o operador de Krawczyk, conforme a [Equação 3.35](#) :

$$K(I_{(k)}; I_{(k)}^I) = I_{(k)} - \mathbf{C} \cdot f(I) + [\mathbf{I} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{J}(I^I)] \cdot (I^I - I)$$

onde:

$$I_{(k)} = m(I_{(k)}^I) = \frac{I_{(k)} + \bar{I}_{(k)}}{2}$$

- I^I é a variável intervalar da corrente
- \mathbf{I} é uma matriz identidade.

Iteração 0:

$$\mathbf{J}_{(0)} = ([0,050000; 0,950000]) = [-1,104000; -1,005474]$$

$$I_{(0)}^I = [0,050000; 0,950000] \text{ mA} \quad I_{(0)} = 0,5 \text{ mA} \quad C = -0,989707$$

\vdots

$$K(I_{(0)}; I_{(0)}^I) = [0,850082; 0,933455]$$

$$I_{(1)}^I = [0,850082; 0,933455] \cap [0,050000; 0,950000]$$

$$I_{(1)}^I = [0,850082; 0,933455].$$

Até que a tolerância seja atingida ([Equação 3.37](#)), o processo se repete. O valor escolhido foi de 10^{-6} .

Tabela 3 – Exemplo 3.2 – Resumo das iterações – Krawczyk

Iteração	$I^I [mA]$ - Intervalar	$I [mA]$ Determinístico
0	[0,050000; 0,950000]	0,5
1	[0,850082; 0,933455]	0,891769
2	[0,892817; 0,892840]	0,892828
3	[0,892828; 0,892828]	—

Fonte: (BORBA, 2020).

A Tabela 3 mostra os valores intervalares de corrente calculados com o método de Krawczyk a cada iteração e compara com o método de Newton clássico.

Observa-se através da Tabela 3 que em todas as iterações os valor dos dois métodos convergem ao mesmo ponto, pois para a solução da equação em análise não existe nenhum parâmetro que necessitasse a inserção de incerteza para afetar a solução final.

3.4 Revisão Bibliográfica sobre MI em problemas de otimização

Esta seção tem como objetivo resumir alguns trabalhos que utilizam a matemática intervalar para a solução de problemas de otimização.

Uma das ênfases da Matemática Intervalar à otimização é a obtenção de um intervalo ótimo, após a otimização ser efetuada por técnicas tradicionais. A solução obtida pelas técnicas convencionais é utilizada como ponto de partida para a utilização do método de Newton Intervalar ou o Método de Krawczyk (MONEGO, 2017).

Citam-se trabalhos que utilizam a Matemática Intervalar como ferramenta pós-otimização: Wang e Alvarado (1992), Mori e Yuihara (1999), Pereira (2011), Pereira e Costa (2012), Monego (2017) e Borba (2020).

Conforme escrito em alguns trabalhos publicados durante a década de 1980, uma das vantagens da MI trata incerteza de dados com uma maior eficácia (MONEGO, 2017). Estes trabalhos enaltecem os métodos tradicionais da Matemática Intervalar, como o Newton Intervalar (MOORE, 1966) e o de Krawczyk (KRAWCZYK, 1969), os quais melhoraram o tratamento de dados, que convencionalmente eram resolvidos através de exaustivas simulações, a fim de trabalhar com o máximo de casos possíveis, individualmente.

Hansen (1980) provou como a Matemática Intervalar, baseada no Método de Newton Intervalar e operador de Krawczyk, pode ser utilizada na busca do mínimo global de uma função continuamente diferenciável por duas vezes, multivariável. O objetivo deste trabalho mostrou ser possível obter um intervalo ótimo contendo o mínimo global.

O trabalho de Hansen e Greenberg (1983) apresentaram uma variante do Método de Newton Intervalar, o qual é submetido em três sub-algoritmos e soluciona sistemas de

equações não lineares. Inicia-se utilizando Gauss-Seidel a fim de determinar os limites das variáveis do problema. Utiliza-se o Método de Newton convencional (não-intervalar), em seguida. Finda-se o processo obtendo a solução de um sistema de equações linearizadas por eliminação. Em alguns casos é utilizado o operador de Krawczyk em iterações internas. Esta técnica é comparada com o Método de Hansen-Sengupta (HANSEN; SENGUPTA, 1981) e o Método de Krawczyk (KRAWCZYK, 1969).

Ratschek e Voller (1991) analisaram ferramentas e técnicas básicas da aritmética intervalar e como aplicá-la no desenvolvimento de algoritmos de otimização global determinística. Este trabalho é utilizado para otimização com ou sem restrição, bem como quando a função objetivo não é diferenciável no subconjunto do domínio, conhecida como otimização não suave.

Ratschek e Rokne (1993) demonstraram uma técnica de solucionar um circuito elétrico extremamente sensível a pequenas perturbações. Foi utilizada a matemática intervalar combinada com estratégias de subdivisões e do Método *branch-and-bound*. O autor aplica o Método de Newton Intervalar aperfeiçoado por Hansen e Greenberg (1983).

Kearfott (1992) e Kjøller et al. (2007) apresentaram a aplicação da matemática intervalar em algoritmos *branch-and-bound* para problemas de otimização global não lineares, que consideram restrições de igualdade e desigualdade.

A pesquisa de Kearfott (1992) aplicou o Método de Newton Intervalar em conjunto ao gradiente reduzido como método de otimização. Como técnica de condicionamento é aplicado o método de Gauss-Seidel intervalar.

Já Kjøller et al. (2007) empregaram uma técnica combinando uma clássica otimização global através da matemática intervalar com a técnica de propagação de restrições com o auxílio da biblioteca de diferenciação automática FADBAD (STAUNING; BENDTSEN, 2003).

O trabalho proposto por Ichida (1996) buscou o máximo global para problemas multimodais e multivariáveis, sujeito a restrições de igualdade e desigualdade. O problema exclui as sub-regiões onde a solução global não pode existir e aplica o Método de Newton Intervalar para resolver as equações derivadas de primeira ordem do Lagrangeano.

Alefeld e Mayer (2000) teceram uma análise técnico-científica sobre teoria e aplicações da matemática intervalar. Neste trabalho são apresentadas para problemas envolvendo autovalores algébricos, problemas com valores iniciais para equações diferenciais ordinárias e limites de valores para equações ordinárias parciais elípticas de segunda ordem. Além de serem discutidas técnicas de solução de equações lineares e não-lineares.

Benedetti e Perona (2000) revelaram um algoritmo para limitar largura de banda de registro de dados de um gráfico de fluxo de dados acíclico. Mediante as técnicas da aritmética intervalar, utilizou-se como base a propagação do complemento de dois intervalos

numéricos com pontos fixos. O algoritmo pode ser aplicado a gráficos de fluxo linear e não-linear invariáveis no tempo e, também, na implementação de sistemas FPGA (*Field Programmable Gate Array*). Foi concluído, por meio de uma aplicação, que o algoritmo possibilitou delimitar um gráfico de fluxos acíclicos.

Litvinov e Sobolevskii (2001) citaram um trabalho utilizando a matemática intervalar para a aplicação de estruturas idempotentes¹. Esta teoria é introduzida para a construção de intervalos de soluções exatas da equação de Bellman discreta e estacionária intervalar. De acordo com o trabalho, a idempotência intervalar é bastante eficiente na solução de problemas fortemente não-lineares e permite encontrar soluções de intervalos exatos em problemas de otimização que contém algum grau de incerteza.

Ibraev (2001), em sua tese de doutorado, demonstrou um novo método paralelo de otimização global verificada. O autor utiliza o Método de Krawczyk (KRAWCZYK, 1969) como base, além de apresentar 4 derivações deste: simplificada, normal e ambas com a possibilidade de serem utilizadas com fatoração LU. Outrossim, demonstra uma modificação do Método de Krawczyk. Ainda compara os métodos descritos com o Newton intervalar, além de mostrar a fundamentação e conceito da Matemática Intervalar.

Schichl e Neumaier (2005) realizaram otimização global, utilizando os conceitos da matemática intervalar, através de DAG (*Direct acyclic graphs*), sendo esta ferramenta mais eficiente para uma avaliação intervalar e diferenciação automática. Além disso, combinaram o método proposto com a propagação de restrições, resultando intervalos mais estreitos dos valores das derivadas e declive de funções.

O trabalho de Noblet et al. (2005) demonstrou a utilização da matemática intervalar para otimização de processamento de imagens 3-D. Os autores em busca de melhor eficiência e tempo computacional, utilizaram esta técnica para a preservação da topologia no registro de imagens deformáveis de 3 dimensões.

Michel e Zidna (2015) modelaram um método para resolução de sistemas não lineares de equações multivariáveis utilizando *B-spline*, fundamentado no Método de Krawczyk e Newton Intervalar. Os resultados mostram dois métodos intervalares tiveram desempenhos similares para sistemas com poucas variáveis. Entretanto, o Método de Krawczyk se manifestou mais rápido e eficiente para um caso com maior número de variáveis.

Hraiech et al. (2019) propuseram um novo método no qual combina algoritmo genético com o operador de Krawczyk para otimização multiobjetivo de um manipulador 3-UPU, minimizando o erro de posição e maximizando as tolerâncias. O método proposto pode ser implementado em outros tipos de robôs.

¹ idempotência é uma propriedade matemática onde se permite aplicar várias vezes uma operação de tal forma que não altera o valor final após a aplicação inicial.

Semenov e Semenova (2019) apresentaram um trabalho de minimização global através do operador de Krawczyk para funções multivariáveis, contínuas e duas vezes diferenciáveis em um determinado intervalo. O método é baseado na solução de sistemas de equações não lineares formada por derivadas parciais de uma função objetivo que utiliza o operador de Krawczyk.

3.5 Considerações finais

Este capítulo teve o objetivo de apresentar brevemente a história da matemática intervalar, explicar os fundamentos e conceitos básicos desta, assim como a sua utilização em resolução de sistemas de equações, através dos consagrados métodos de Newton Intervalar (MOORE, 1966) e Krawczyk (KRAWCZYK, 1969). Também foram apresentados resolução de dois exemplos simples utilizando estes métodos, mas que esclarece os fundamentos para problemas mais complexos, como o caso do Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e o Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo-Multicontingência. Finda-se este capítulo com a apresentação de notáveis trabalhos, em ordem cronológica, que utilizam a Matemática Intervalar para a resolução de diversos problemas de otimização, mostrando que é uma ferramenta versátil e amplamente utilizada para esse fim. Conclui-se que a Matemática intervalar é uma opção eficiente para a inclusão de incertezas de qualquer parâmetro em problemas de otimização.

4 Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Multicontingência Intervalar

4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar formulação do Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Multicontingência (FPOMM) que despacha geração de potência de um sistema hidrotérmico (incluindo restrições elétricas e energéticas) para um horizonte de um dia a frente e que dimensiona o montante de reserva girante necessário para suprir diferentes situações de saída de linhas, de geradores e níveis de energia renovável não suprida, assim a alocação ótima desta reserva girante entre as unidades de geração.

Em seguida, descreve-se a incorporação da matemática intervalar ao FPOMM proposto a fim de se obter intervalos ótimos de operação. A formulação proposta tem as seguintes características:

- Calcula o despacho ativo ótimo de unidades hidráulicas e térmicas;
- Calcula e aloca montante de reserva ótima entre geradores;
- Calcula corte de carga;
- Calcula fluxos ativos pelos ramos do sistema;
- Considera np períodos de estudos e $ncont$ cenários de contingências, simultaneamente;
- O despacho P_{gt} das usinas térmicas é considerado constante ao longo dos np períodos.

Assim, o FPOMM possui 5 critérios de otimização: minimização do despacho das usinas (o que indiretamente está relacionado às perdas elétricas), de custo das térmicas, de custo das reservas térmicas, do montante de reserva hidráulica alocada e de corte de carga.

4.2 Formulação

A formulação do FPOMM é feita através de inúmeros blocos, que são dependentes do número de contingências a serem consideradas, cujas características são:

- despachar geração de potência ativa de usinas hidráulicas conectadas nas barras i e térmicas conectadas nas barras j ($P_{gh_i}^{0,k}$, $P_{gt_j}^{0,k}$, respectivamente) para cada período k

das np horas do cenário base (sobrescrito 0, o qual considera a rede íntegra). E para $ncont$ cenários (com sobrescrito $cont$, variando de 1 a $ncont$), que contemplam $ncont$ diferentes contingências $(P_{gh_i}^{cont,k}, P_{gt_k}^{cont,k}, cont = 1, \dots, ncont)$ para cada período k das np horas de cada contingência. As contingências consideradas são retiradas de linhas, saídas de geradores e redução da geração eólica. O cenário base e as $ncont$ contingências, todas elas considerando np períodos, são analisadas simultaneamente;

- cortar carga ao longo de np períodos para todos os cenários (0 e $cont$), caso seja necessário. O corte de carga é modelado como um gerador fictício com custo alto, conectado junto a cada barra de carga k de cada cenário $(P_{dfic_i}^{0,k}, P_{dfic_i}^{cont,k}, cont = 1, \dots, ncont$ e $k = 1, \dots, np)$;
- calcular e alocar montante de reserva hidráulica e térmica que contemple todos os cenários simultaneamente para cada barra de geração $(R_{gh_i}^k, R_{gt_j}^k, k = 1, \dots, np)$;
- calcular ajustes da reserva girante, através de uma variável auxiliar, para fechar o balanço entre geração e carga para cada cenário de contingência $(P_{ghcont_i}^{cont,k}, k = 1, \dots, np$ e $cont = 1 \dots ncont)$;
- Incorporar rampas com taxas de acréscimo e decréscimo de tomada de carga das termoeletricas quando alocadas como reserva girante R_{gt} . Salienta-se que a geração térmica é mantida constante, mas a reserva térmica ao ser atuada, deixa de manter a geração térmica constante, em caso de contingência.

O valor de reserva $R_{gh_i}^k$ é o mesmo para todas as contingências a fim de obter um valor sistêmico que calcula valores de despacho de geração preventivo, ou seja, que já estejam preparados para atender às contingências a partir de pequenos ajustes $(P_{ghcont_i}^{cont,k})$ na reserva girante base $(R_{gh_i}^k)$, os quais seriam ajustes corretivos em situações de contingência.

Por exemplo, considere uma determinada contingência $cont$, onde o conjunto de equações de balanço consideram uma rede elétrica com retirada de uma determinada linha. O valor total da reserva girante Res_i^k de uma usina hidráulica conectada na barra i , no período k , é formado por:

$$Res_i^k = R_{gh_i}^k + P_{ghcont_i}^{cont,k}. \quad (4.1)$$

Ou seja, Res é composta pelas variáveis de otimização: R_{gh} , que é um valor básico considerado para todas as contingências, mais o ajuste P_{ghcont} calculado para cada contingência.

4.2.1 Dados de entrada

A seguir, serão apresentados os dados de entrada do FPOMM.

Primeiramente, é definido os vetor de carga para cada barra e período, \mathbf{P}_d , de dimensão $[np \cdot nb \times 1]$:

$$\mathbf{P}_d = [P_{d_1}^1 \cdots P_{d_{nb}}^1 \cdots P_{d_1}^{np} \cdots P_{d_{nb}}^{np}]^t \quad (4.2)$$

onde:

- $P_{d_i}^k$ - demanda ativa na barra i no período k ;
- nb é o número de barras.

O valor de P_d é considerado o mesmo para o caso base e para cada contingência.

O parâmetro *Meta* é o vetor com as metas energéticas de cada usina hidráulica, cuja dimensão é $[nb \times 1]$. A meta hidráulica quantifica a energia disponível de cada usina hidráulica durante o período de estudo. Os valores são definidos através de estudos de planejamento energéticos. Barras de carga possuem metas iguais a zero.

$$\mathbf{Meta} = [Meta_1 \cdots Meta_{nb}]^t \quad (4.3)$$

onde:

- $Meta_i$ é o valor da meta energética diária hidráulica na barra i .

O valor de *Meta* é considerado o mesmo para o caso base e para cada contingência.

Os valores de geração eólica são obtidos através de previsão de curtíssimo prazo (24 horas), sendo $P_{geol_i}^k$ a potência do gerador conectado à barra i no período k .

O vetor \mathbf{P}_{geol} representa o perfil de geração eólica por barra e por hora, com dimensão $[nb \cdot np \times 1]$:

$$\mathbf{P}_{geol} = [P_{geol_1}^1 \cdots P_{geol_{nb}}^1 \cdots P_{geol_1}^{np} \cdots P_{geol_{nb}}^{np}]^t. \quad (4.4)$$

A fim de se considerar corte na geração eólica, aplica-se a [Equação 4.5](#).

$$\mathbf{P}_{geolcont} = \mathbf{P}_{geol} \cdot (1 - \varphi_{eol}) \quad (4.5)$$

onde:

- $P_{geol_i}^k$ é o valor da injeção de potência ativa do gerador eólico localizado na barra i e no período k ;

- $\mathbf{P}_{\text{geol}cont}$ é o vetor com a nova injeção de potência ativa do gerador eólico localizado na barra i , no período k , o qual representa uma contingência $cont$ (queda de φ_{eol} % geração eólica);
- φ_{eol} é a porcentagem de corte de geração eólica a ser considerada em cada contingência referente a queda de geração eólica, cujo valor depende de estudos probabilísticos referente à região em estudo.

4.2.2 Dados operacionais

A seguir, serão apresentados outros parâmetros de entradas da formulação, como os limites operacionais de geradores e limites operacionais das linhas.

Os vetores $\mathbf{P}_{\text{gt}min}$ e $\mathbf{P}_{\text{gt}max}$ representam os vetores com os limites de geração ativa mínimos e máximos, respectivamente, das termoeletricas ao longo dos np períodos, com dimensão $[nb \cdot np \times 1]$.

$$\mathbf{P}_{\text{gt}min} = [P_{\text{gt}min_1}^1 \cdots P_{\text{gt}min_{nb}}^1 \cdots P_{\text{gt}min_1}^{np} \cdots P_{\text{gt}min_{nb}}^{np}]^t \quad (4.6)$$

$$\mathbf{P}_{\text{gt}max} = [P_{\text{gt}max_1}^1 \cdots P_{\text{gt}max_{nb}}^1 \cdots P_{\text{gt}max_1}^{np} \cdots P_{\text{gt}max_{nb}}^{np}]^t \quad (4.7)$$

onde:

- $P_{\text{gt}min_i}^k$ é o limite mínimo de geração ativa da termoeletrica conectada à barra i no período k ;
- $P_{\text{gt}max_i}^k$ é o limite máximo de geração ativa da termoeletrica conectada à barra i no período k .

Os vetores $\mathbf{P}_{\text{gh}min}^0$ e $\mathbf{P}_{\text{gh}max}^0$ representam os vetores com os limites de geração mínimos e máximos, respectivamente, das unidades hidráulicas ao longo dos np períodos, com dimensão $[nb \cdot np \times 1]$.

$$\mathbf{P}_{\text{gh}min}^k = [P_{\text{gh}min_1}^1 \cdots P_{\text{gh}min_{nb}}^1 \cdots P_{\text{gh}min_1}^{np} \cdots P_{\text{gh}min_{nb}}^{np}]^t \quad (4.8)$$

$$\mathbf{P}_{\text{gh}max}^k = [P_{\text{gh}max_1}^1 \cdots P_{\text{gh}max_{nb}}^1 \cdots P_{\text{gh}max_1}^{np} \cdots P_{\text{gh}max_{nb}}^{np}]^t \quad (4.9)$$

onde:

- $P_{\text{gh}min_j}^k$ é o limite mínimo de geração ativa da hidroeletrica conectada à barra j no período k ;

- $P_{gh_{max_j}}^k$ é o limite máximo de geração ativa da hidroelétrica conectada à barra j no período k .

Já para os vetores com os limites de fluxo de potência ativa mínimos e máximos nas linhas, têm-se, com dimensão $[nl \cdot np \times 1]$:

$$\mathbf{Fl}_{max} = [Fl_{max_1}^1 \cdots Fl_{max_{nl}}^1 \cdots Fl_{max_1}^{np} \cdots Fl_{max_{nl}}^{np}]^t \quad (4.10)$$

$$\mathbf{Fl}_{min} = -\mathbf{Fl}_{max} \quad (4.11)$$

onde:

- $Fl_{max_l}^k$ é o limite máximo de potência ativa da linha l no período k ;
- nl número de linhas da rede elétrica.

O vetor com os limites mínimos e máximos dos cortes de carga nas barras, com dimensão $[nb \cdot np \times 1]$ são, respectivamente.

$$\mathbf{Pd}_{ficmin} = [Pd_{ficmin_1}^1 \cdots Pd_{ficmin_{nb}}^1 \cdots Pd_{ficmin_1}^{np} \cdots Pd_{ficmin_{nb}}^{np}]^t \quad (4.12)$$

$$\mathbf{Pd}_{ficmax} = [Pd_{ficmax_1}^1 \cdots Pd_{ficmax_{nb}}^1 \cdots Pd_{ficmax_1}^{np} \cdots Pd_{ficmax_{nb}}^{np}]^t \quad (4.13)$$

onde:

- Pd_{ficmin}^k é o limite mínimo do corte de carga na barra i no período k ;
- Pd_{ficmax}^k é o limite máximo do corte de carga na barra i no período k .

Por fim, \mathbf{RR}^{up} e \mathbf{RR}^{down} representam os vetores, de dimensão $[nb \cdot np \times 1]$, com os valores das taxas de acréscimo e decréscimo de tomada de carga das termoelétricas.

Estas restrições são consideradas apenas para o cálculo das reservas térmicas, pois o perfil de despacho das térmicas para o sistema sem contingências é considerado constante.

$$\mathbf{RR}^{up} = [RR_1^{up,1} \cdots RR_{nb}^{up,1} \cdots RR_1^{up,np} \cdots RR_{nb}^{up,np}]^t \quad (4.14)$$

$$\mathbf{RR}^{down} = [RR_1^{down,1} \cdots RR_{nb}^{down,1} \cdots RR_1^{down,np} \cdots RR_{nb}^{down,np}]^t \quad (4.15)$$

onde:

- $RR^{up,k}$ é a taxa de acréscimo de tomada de carga para a termoelétrica na barra i no período k ;
- $RR^{down,k}$ é a taxa de decréscimo de tomada de carga para a termoelétrica na barra i no período k .

4.2.3 Variáveis de otimização

Uma das funções do FPOMM é calcular a potência ativa da geração hidráulica e térmica $(P_{gh_i}^k, P_{gt_i}^k)$, além de realizar a alocação ótima de reserva girante hidráulica e térmica $(R_{gh_i}^k, R_{gt_i}^k)$, para um horizonte de 24 períodos ($np = 24 h$) e n contingências ($ncont$).

Além disso, no FPOMM, uma das variáveis que faz parte do processo de otimização é o ângulo nas barras, para caso base, com dimensão $[nb \cdot np \times 1]$:

$$\boldsymbol{\theta}^0 = [\theta_1^1 \cdots \theta_{nb}^1 \cdots \theta_1^{np} \cdots \theta_{nb}^{np}]^t \quad (4.16)$$

O valor do ângulo também é calculado para cada uma das contingências a serem consideradas, conforme a Equação 4.17.

$$\boldsymbol{\theta}^{cont} = [\theta_1^{1,1} \cdots \theta_{nb}^{1,1} \cdots \theta_1^{np,cont} \cdots \theta_{nb}^{np,cont}]^t \quad (4.17)$$

onde:

- θ_i^k é o valor de ângulo na barra i , período k do caso base.
- $\theta_i^{k,cont}$ é o valor de ângulo na barra i , período k do e contingência $cont$ variando de 1 a $ncont$.
- $\boldsymbol{\theta}^0$ é o vetor de variáveis de ângulo para o sistema original;
- $\boldsymbol{\theta}^{cont}$ é o vetor de variáveis de ângulo para o sistema com contingência;
- $cont = 1, \dots, ncont$.

O vetor que contém a variável de otimização de potência ativa das hidroelétricas e termoelétricas são modelados como \mathbf{P}_{gh} e \mathbf{P}_{gt} , respectivamente, com dimensão $[np \cdot nb \times 1]$ e $[nb \times 1]$, para o sistema original. A ideia é de que esses vetores tenham o mesmo valor de despacho para todas as contingências e através de uma variável auxiliar seja feita a correção balanço.

$$\mathbf{P}_{gh} = [P_{gh_1}^1 \cdots P_{gh_{nb}}^1 \cdots P_{gh_1}^{np} \cdots P_{gh_{nb}}^{np}]^t \quad (4.18)$$

$$\mathbf{P}_t = [P_{t_1}^1 \cdots P_{t_1}^{np} \cdots P_{t_{nb}}^1 \cdots P_{t_{nb}}^{np}]^t \quad (4.19)$$

onde:

- $P_{gh_i}^k$ é a geração ativa do gerador hidroelétrico na barra i e no período k ;

- $P_{ghcont_i}^{k,cont}$ é a variável de ajuste geração ativa do gerador hidroelétrico na barra i , no período k da contingência $cont$.

O valor mínimo utilizado na Equação 4.22, $-\mathbf{P}_{gh_{max}}$, pode ser substituído por um fator que limitante o quanto se deseja ajustar cada usina, para se evitar grandes variações de geração hidráulica sob contingência.

Já para os valores de reserva, da Equação 4.1, têm-se \mathbf{R}_{gh} e \mathbf{R}_{gt} para reserva hidráulica e Equação 4.24 para térmica, respectivamente.

$$\mathbf{R}_{gh} = [R_{gh_1}^1 \cdots R_{gh_{nb}}^1 \cdots R_{gh_1}^{np} \cdots R_{gh_{nb}}^{np}]^t \quad (4.23)$$

$$\mathbf{R}_{gt} = [R_{gt_1}^1 \cdots R_{gt_{nb}}^1 \cdots R_{gt_1}^{np} \cdots R_{gt_{nb}}^{np}]^t \quad (4.24)$$

onde:

- $R_{gh_i}^k$ é a reserva de geração ativa da unidade hidráulica conectada à barra i no período k ;
- $R_{gt_j}^k$ é a reserva de geração ativa da unidade térmica conectada à barra j no período k .

Estes valores de reserva, \mathbf{R}_{gh} e \mathbf{R}_{gt} , são considerados os mesmos para todos os blocos sob contingências (Equação 4.38 a Equação 4.40). Ou seja, estes valores de reserva são os mesmos para qualquer contingência considerada.

O FPOMM também otimiza o corte de carga, para o sistema original e para cada uma das contingências, conforme declarado na Equação 4.25 e Equação 4.26, respectivamente. as quais possuem dimensão $[nb \cdot np]$:

$$\mathbf{P}_{dfic}^0 = [P_{dfic_1}^1 \cdots P_{dfic_{nb}}^1 \cdots P_{dfic_1}^{np} \cdots P_{dfic_{nb}}^{np}]^t \quad (4.25)$$

$$\mathbf{P}_{dfic}^{cont} = [P_{dficCont_1}^1 \cdots P_{dficCont_{nb}}^1 \cdots P_{dficCont_1}^{np} \cdots P_{dficCont_{nb}}^{np}]^t \quad cont = 1, \dots, ncont \quad (4.26)$$

onde:

- $P_{dfic_i}^k$ é referente ao corte de carga na barra i no período k para o sistema sem contingência;
- $P_{dficCont_1}^k$ é referente ao corte de carga na barra i no período k para o sistema com contingência, na contingência $cont$.

Assim, conforme a [Equação 4.27](#), determina-se soma vetorial da injeção de potência ativa nas barras do sistema, para o cenário 0 (sem contingência):

$$\mathbf{P}_G^0 = \mathbf{P}_{gh} + \mathbf{P}_{gt} + \mathbf{P}_{geol}. \quad (4.27)$$

Já a [Equação 4.28](#) é responsável pela injeção de potência ativa para cada um dos sistemas com contingência.

$$\mathbf{P}_G^{cont} = \mathbf{P}_{gh} + \mathbf{P}_{gt} + \mathbf{R}_{gh} + \mathbf{R}_{gt} + \mathbf{P}_{ghcont}^{cont} + \mathbf{P}_{geol} \cdot (1 - \varphi_{eol}^{cont}) \quad (4.28)$$

$cont = 1, \dots, ncont.$

Após o processo de otimização, realiza-se o cálculo final da reserva de elevação e redução, utilizando-se as [Equação 4.29](#) e [Equação 4.30](#), que selecionam a pior configuração de reserva, por conservadorismo.

$$\mathbf{Res}_{elev} = \max \left\{ \mathbf{R}_{gh} + \mathbf{P}_{ghcont}^{cont} + \mathbf{R}_{gt} \right\} \quad cont = 1, \dots, ncont \quad (4.29)$$

$$\mathbf{Res}_{red} = \min \left\{ \mathbf{R}_{gh} + \mathbf{P}_{ghcont}^{cont} \right\} \quad cont = 1, \dots, ncont. \quad (4.30)$$

4.2.4 Função Objetivo

O Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Multicontingência tem como função multiobjetivo os seguintes critérios:

- Minimização de custo de geração térmica (f_1);
- minimização de perdas elétricas (f_2);
- minimização do corte de carga (f_3);
- minimização do custo da reserva girante (f_4);
- minimização do montante de reserva girante (f_5);

4.2.4.1 Custos de Geração Térmica

A função referente aos custos da geração térmica foi modelada conforme a [Equação 4.31](#).

$$f_1 = w_c \cdot \mathbf{u}^t \cdot C(\mathbf{P}_{gt}) \quad (4.31)$$

onde:

- \mathbf{u} é um vetor unitário;

- \mathbf{P}_{gt} é o vetor da geração ativa térmica;
- $C(\mathbf{P}_{gt})$ é o custo da geração térmica.

4.2.4.2 Perdas Elétricas

A função que minimiza as perdas elétricas é modelada de acordo com a [Equação 4.32](#).

$$f_2 = w_p \cdot \mathbf{u}^t \cdot (\mathbf{P}_{gh} + \mathbf{P}_{gt}) + w_{pp} \cdot \mathbf{u}^t \cdot (\mathbf{R}_{gh} + \mathbf{R}_{gt}) \quad (4.32)$$

onde:

- \mathbf{P}_{gh} é o vetor da geração ativa hidráulica;
- \mathbf{P}_{gt} é o vetor da geração ativa térmica;
- \mathbf{R}_{gh} é o vetor da reserva das unidades hidráulicas;
- \mathbf{R}_{gt} é o vetor da reserva das unidades térmicas.

Uma das consequências ao se minimizar o montante da geração ativa é a redução nas perdas. O mesmo ocorre ao se minimizar o valor da reserva, no caso de serem solicitadas para complementar a geração.

4.2.4.3 Corte de Carga

Caso não seja possível garantir o atendimento completo da carga devido às restrições operativas, foi previsto corte de carga nas barras de carga, que deve ser o menor possível. Assim, a função f_3 , minimiza o valor total de corte de carga em toda a rede ao longo de todo período e considerando todas as contingências.

$$f_3 = \mathbf{u}^t \cdot aa_{fic} \cdot \mathbf{P}_{dfic}^0 + \mathbf{u}_{cont}^t \cdot aa_{fic} \cdot \mathbf{P}_{dfic}^{cont} \quad (4.33)$$

onde:

- aa_{fic} é o custo relacionado ao corte de carga;
- \mathbf{P}_{dfic}^0 é o vetor que representa o corte de carga do sistema sem contingência;
- \mathbf{P}_{dfic}^{cont} é o vetor de corte de carga para cada contingência $cont$;
- \mathbf{u}^t é o vetor unitário de dimensão $[np \cdot nb \times 1]$;
- \mathbf{u}_{cont}^t é o vetor unitário de dimensão $[np \cdot nb \cdot ncont \times 1]$.

4.2.4.4 Custo da Reserva Girante

A formulação que relaciona o custo da reserva girante é escrita segundo a [Equação 4.34](#). O custo da reserva hidráulica é zero, desta forma, a função custo é dependente apenas da parcela térmica.

$$f_4 = \mathbf{u}^t \cdot C(\mathbf{R}_{\text{gt}}) \quad (4.34)$$

onde:

- $C(\mathbf{R}_{\text{gt}})$ é o custo da reserva térmica.

4.2.4.5 Minimização do Montante da Reserva Girante

$$f_5 = \mathbf{u}^t \cdot \sum_{\text{cont}=1}^{n\text{cont}} \mathbf{P}_{\text{ghcont}}^{\text{cont}} \quad (4.35)$$

Dessa forma, combinando as equações apresentadas, determina-se a função objetivo utilizada no FPOMM, conforme a [Equação 4.36](#).

$$\begin{aligned} f.o. \quad \min \quad & w_p \cdot \mathbf{u}^t \cdot (\mathbf{P}_{\text{gh}}^0) + w_{pr} \cdot \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{R}_{\text{gh}} + w_c \cdot \mathbf{u}^t \cdot C(\mathbf{P}_{\text{gt}}) + w_{cr} \cdot \mathbf{u}^t \cdot C(\mathbf{R}_{\text{gt}}) + \\ & w_{\text{cont}} \cdot \left(\sum_{\text{cont}=1}^{n\text{cont}} \mathbf{P}_{\text{ghcont}}^{\text{cont}} \right) + w_{fic} \cdot aa_{fic} \cdot \left(\mathbf{u}^t \cdot \mathbf{P}_{\text{dfic}}^0 + \mathbf{u}_{\text{cont}}^t \cdot \mathbf{P}_{\text{dfic}}^{\text{cont}} \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde:

- w_p é o peso referente à geração ativa hidráulica do sistema sem contingência;
- w_c é o coeficiente relacionado ao custo de geração térmica;
- w_{cr} é o coeficiente relacionado aos custos da reserva térmica;
- w_{cont} é o peso referente à variável de ajuste da reserva hidráulica para cada um dos sistemas com contingência cont ;
- w_{fic} é o coeficiente relacionado ao corte de carga.

Os valores dos pesos são parametrizados a fim de se obter o melhor custo-benefício, ou seja, diferentes valores devem ser testados para se obter soluções comprometidas com os objetivos.

4.2.5 Restrições de igualdade e desigualdade

4.2.5.1 Equações de Balanço de Potência Ativa

As equações responsáveis pelo balanço de potência ativo do FPOMM para cenário base e com contingências são representadas pela [Equação 4.37](#) e [Equação 4.38](#), respectivamente.

$$\mathbf{P}_{gh} + \mathbf{P}_{gt} + \mathbf{P}_{geol} + \mathbf{P}_{dfic}^0 - \mathbf{BB}^0 \cdot \boldsymbol{\theta}^0 = \mathbf{Pd}. \quad (4.37)$$

Para cada tipo de contingência, tem-se:

Saída de Linha:

$$\mathbf{P}_{gh} + \mathbf{P}_{gt} + \mathbf{R}_{gh} + \mathbf{R}_{gt} + \mathbf{P}_{geol} + \mathbf{P}_{dfic}^{cont} + \mathbf{P}_{ghcont}^{cont} - \mathbf{BB}^{cont} \cdot \boldsymbol{\theta}^{cont} = \mathbf{Pd} \quad (4.38)$$

$$cont = 1, \dots, ncont_{linha}.$$

Redução da geração eólica:

$$\mathbf{P}_{gh} + \mathbf{P}_{gt} + \mathbf{R}_{gh} + \mathbf{R}_{gt} + \mathbf{P}_{geol} \cdot (1 - \varphi_{eol}^{cont}) + \mathbf{P}_{dfic}^{cont} + \mathbf{P}_{ghcont}^{cont} - \mathbf{BB}^0 \cdot \boldsymbol{\theta}^{cont} = \mathbf{Pd}$$

$$cont = 1, \dots, ncont_{eol}. \quad (4.39)$$

Saída de gerador hidráulico:

$$\mathbf{P}_{gh} \cdot (1 - \varphi_{P_{gh}}^{cont}) + \mathbf{P}_{gt} + \mathbf{R}_{gh} + \mathbf{R}_{gt} + \mathbf{P}_{geol} + \mathbf{P}_{dfic}^{cont} + \mathbf{P}_{ghcont}^{cont} - \mathbf{BB}^0 \cdot \boldsymbol{\theta}^{cont} = \mathbf{Pd}$$

$$cont = 1, \dots, ncont_{ger} \quad (4.40)$$

onde:

- \mathbf{BB}^0 é a matriz do tipo susceptância do sistema original;
- \mathbf{BB}^{cont} é a matriz do tipo susceptância do sistema com contingência (saída de linha).

4.2.5.2 Restrições de Desigualdade - Metas Energéticas

O despacho de cada gerador hidráulico i juntamente da sua reserva girante alocada deve satisfazer às metas energéticas diárias ($Meta_i$) tanto para a rede base quanto para os cenários de contingência. Tais valores são estabelecidos através do planejamento de médio-prazo, o qual é incorporado conforme a [Equação 4.41](#) e, para cada sistema com contingência, [Equação 4.42](#).

$$\sum_{t=1}^{np} (P_{gh_{i,t}} + R_{gh_{i,t}}) \leq Meta_i \quad i = 1, \dots, ngh \quad (4.41)$$

$$\sum_{t=1}^{np} (P_{gh_{i,t}} + R_{gh_{i,t}} + P_{gh_{cont_{i,t}}}^{cont}) \leq Meta_i \quad i = 1, \dots, ngh \text{ e } cont = 1, \dots, ncont \quad (4.42)$$

onde:

- ngh é o número de unidades geradoras hidroelétricas.

4.2.5.3 Restrições de Desigualdade - Limites físicos e operacionais

A formulação dos limites físicos e operacionais do FPOMM é representada através da Equação 4.43 à Equação 4.52.

A Equação 4.43 e Equação 4.44 são referentes aos limites de geração hidráulica para o sistema sem e com contingência, respectivamente.

$$\mathbf{P}_{gh_{min}} \leq (\mathbf{P}_{gh} + \mathbf{R}_{gh}) \leq \mathbf{P}_{gh_{max}} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{P}_{gh_{min}} \leq (\mathbf{P}_{gh} + \mathbf{R}_{gh} + \mathbf{P}_{gh_{cont}}^{cont}) \leq \mathbf{P}_{gh_{max}}. \quad (4.44)$$

Já a Equação 4.45 representa o limite dos geradores térmicos.

$$\mathbf{P}_{gt_{min}} \leq (\mathbf{P}_{gt} + \mathbf{R}_{gt}) \leq \mathbf{P}_{gt_{max}}. \quad (4.45)$$

A Equação 4.46 representa o limite da variável auxiliar do cálculo da reserva final.

$$-\mathbf{P}_{gh_{max}} \leq \mathbf{P}_{gh_{cont}}^{cont} \leq 0 \quad (4.46)$$

$$\mathbf{P}_{dfic_{min}} \leq \mathbf{P}_{dfic}^0 \leq \mathbf{P}_{dfic_{max}} \quad (4.47)$$

$$\mathbf{P}_{dfic_{min}} \leq \mathbf{P}_{dfic}^{cont} \leq \mathbf{P}_{dfic_{max}} \quad cont = 1, \dots, ncont \quad (4.48)$$

$$\mathbf{Fl}_{min} \leq \mathbf{fl}(\theta^0) \leq \mathbf{Fl}_{max} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{Fl}_{min} \leq \mathbf{fl}(\theta^{cont}) \leq \mathbf{Fl}_{max} \quad (4.50)$$

$$0 \leq \mathbf{R}_{gh} \quad (4.51)$$

$$0 \leq \mathbf{R}_{gt} \quad (4.52)$$

A composição da geração (P_{gh}) com a reserva (R_{gh}) para o caso base e sob contingências (4.43 e 4.44), devem satisfazer os limites operacionais de cada máquina hidráulica. Do mesmo modo que a composição de P_{gt} e R_{gt} também devem satisfazer os limites operacionais das usinas térmicas (Equação 4.45). Salienta-se aqui que os valores de geração térmica e reserva térmica se mantêm constantes para as contingências. Ou seja, não se realizam ajustes das reservas das térmicas a cada contingência pela complexidade em se lidar com as rampas de acréscimo e decréscimo para cada uma delas. As reservas térmicas

são calculadas de modo a atender igualmente todas as contingências simultaneamente. Os ajustes finos são feitos pelas hidráulicas.

De acordo com a Equação 4.46, os valores de ajuste P_{ghcont}^{cont} devem ser negativos para serem subtraídos dos valores de reserva global (R_{gh}), tal como indicado na Equação 4.38, Equação 4.39 e Equação 4.40. E, eles devem ser limitados ao negativo do limite máximo das máquinas, a fim de garantir que a injeção na barra não seja ajustada com valor que ultrapasse a capacidade da máquina. Ressalta-se que os valores de R_{gh} e R_{gt} devem ser sempre positivos (Equação 4.51 e Equação 4.52), por serem valores de geração a virem a atuar durante as contingências.

A Equação 4.47 e Equação 4.48 se referem aos limites máximos ou mínimos dos cortes de carga que não devem ser superiores, por exemplo, ao valor da própria carga ou percentuais da mesma, ou serem inferiores aos valores delimitados por questões de segurança das mesmas.

A Equação 4.49 e Equação 4.50 se referem aos limites de carregamento dos ramos do sistema base e com contingências, respectivamente.

4.2.5.4 Rampa de tomada de carga

O FPOMM também apresenta rampa de tomada de carga em unidades térmicas, conforme a Equação 4.53 e Equação 4.54:

$$\mathbf{R}_{gt_i}^k - \mathbf{R}_{gt_i}^{k-1} \leq \tau_{op} \cdot \mathbf{RR}_i^{up} \quad i \in \Phi \text{ e } k = 2, \dots, np \quad (4.53)$$

$$\mathbf{R}_{gt_i}^k - \mathbf{R}_{gt_i}^{k-1} \leq \tau_{op} \cdot \mathbf{RR}_i^{down} \quad i \in \Phi \text{ e } k = 2, \dots, np \quad (4.54)$$

onde:

- tempo de tomada de carga das usinas térmicas entre um período e outro.

A Equação 4.53 e Equação 4.54 garantem que os valores das reservas girantes térmicas conseguem entrar em operação dentro do intervalo τ_{op} .

Resumidamente, a formulação do FPOMM se dá através da Equação 4.55 a Equação 4.73.

$$\begin{aligned} f.o. \quad \min \quad & w_p \cdot \mathbf{u}^t \cdot (\mathbf{P}_{gh} + \mathbf{R}_{gh}) + w_c \cdot \mathbf{u}^t \cdot C(\mathbf{P}_{gt}) + w_{cr} \cdot \mathbf{u}^t \cdot C(\mathbf{R}_{gt}) + \\ & w_{cont} \cdot \left(\sum_{cont=1}^{ncont} \mathbf{P}_{ghcont}^{cont} \right) + w_{fic} \cdot aa_{fic} \cdot \mathbf{P}_{dfic} + \\ & w_{fic} \cdot aa_{fic} \cdot \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{P}_{dfic}^{cont} \end{aligned} \quad (4.55)$$

sujeito a:

$$\mathbf{P}_{gh} + \mathbf{P}_{gt} + \mathbf{P}_{geol} + \mathbf{P}_{dfic} - \mathbf{Pd} = \mathbf{BB}^0 \cdot \boldsymbol{\theta}^0 \quad (4.56)$$

$$\sum_{t=1}^{np} (P_{gh_{i,t}} + R_{gh_{i,t}}) \leq Meta_i \quad i = 1, \dots, ngh \quad (4.57)$$

$$\mathbf{P}_{gh} + \mathbf{R}_{gh} + \mathbf{P}_{gt} + \mathbf{R}_{gt} + \mathbf{P}_{geol} + \mathbf{P}_{ghcont}^{cont} + \mathbf{P}_{dfic}^{cont} - \mathbf{Pd} = \mathbf{BB}^{cont} \cdot \boldsymbol{\theta}^{cont} \quad (4.58)$$

$cont = 1, \dots, ncont_{linha}$

$$\mathbf{P}_{gh} + \mathbf{R}_{gh} + \mathbf{P}_{gt} + \mathbf{R}_{gt} + \mathbf{P}_{geol} \cdot (1 - \varphi_{eol}^{cont}) + \mathbf{P}_{ghcont}^{cont} + \mathbf{P}_{dfic}^{cont} - \mathbf{Pd} = \mathbf{BB}^0 \cdot \boldsymbol{\theta}^{cont}$$

$cont = 1, \dots, ncont_{eol}$

(4.59)

$$\mathbf{P}_{gh} \cdot (1 - \varphi_{P_{gh}}^{cont}) + \mathbf{R}_{gh} + \mathbf{P}_{gt} + \mathbf{R}_{gt} + \mathbf{P}_{geol} + \mathbf{P}_{ghcont}^{cont} + \mathbf{P}_{dfic}^{cont} - \mathbf{Pd} = \mathbf{BB}^0 \cdot \boldsymbol{\theta}^{cont}$$

$cont = 1, \dots, ncont_{ger}$

(4.60)

$$\sum_{t=1}^{np} (P_{gh_{i,t}} + R_{gh_{i,t}} + P_{ghcont_{i,t}}^{cont}) \leq Meta_i \quad i = 1, \dots, ngh \text{ e } cont = 1, \dots, ncont \quad (4.61)$$

$$ncont = ncont_{linha} + ncont_{ger} + ncont_{eol}$$

$$\mathbf{P}_{gh_{min}} \leq (\mathbf{P}_{gh} + \mathbf{R}_{gh}) \leq \mathbf{P}_{gh_{max}} \quad (4.62)$$

$$\mathbf{P}_{gh_{min}} \leq (\mathbf{P}_{gh} + \mathbf{R}_{gh} + \mathbf{P}_{ghcont}^{cont}) \leq \mathbf{P}_{gh_{max}} \quad cont = 1, \dots, ncont \quad (4.63)$$

$$\mathbf{P}_{gt_{min}} \leq (\mathbf{P}_{gt} + \mathbf{R}_{gt}) \leq \mathbf{P}_{gt_{max}} \quad cont = 1, \dots, ncont \quad (4.64)$$

$$-\mathbf{P}_{gh_{max}} \leq \mathbf{P}_{ghcont}^{cont} \leq 0 \quad cont = 1, \dots, ncont \quad (4.65)$$

$$\mathbf{P}_{dfic_{min}} \leq \mathbf{P}_{dfic}^0 \leq \mathbf{P}_{dfic_{max}} \quad (4.66)$$

$$\mathbf{P}_{dfic_{min}} \leq \mathbf{P}_{dfic}^{cont} \leq \mathbf{P}_{dfic_{max}} \quad cont = 1, \dots, ncont \quad (4.67)$$

$$\mathbf{Fl}_{min} \leq \mathbf{Fl}(\theta^0) \leq \mathbf{Fl}_{max} \quad (4.68)$$

$$\mathbf{Fl}_{min} \leq \mathbf{Fl}(\theta^{cont}) \leq \mathbf{Fl}_{max} \quad cont = 1, \dots, ncont \quad (4.69)$$

$$0 \leq \mathbf{R}_{gh} \quad (4.70)$$

$$0 \leq \mathbf{R}_{gt} \quad (4.71)$$

$$\mathbf{R}_{gt_i}^k - \mathbf{R}_{gt_i}^{k-1} \leq \tau_{op} \cdot \mathbf{RR}_i^{up} \quad i \in \Phi \text{ e } k = 2, \dots, np \quad (4.72)$$

$$\mathbf{R}_{gt_i}^k - \mathbf{R}_{gt_i}^{k-1} \leq \tau_{op} \cdot \mathbf{RR}_i^{down} \quad i \in \Phi \text{ e } k = 2, \dots, np \quad (4.73)$$

onde:

O FPOMM é resolvido através da *toolbox linprog* do MatLab, utilizando o Método dos Pontos Interiores. Após a otimização do sistema, considerando $ncont$ contingências,

é calculada o valor final da reserva de elevação e redução através da [Equação 4.74](#) e [Equação 4.75](#), respectivamente. As equações consideram os piores cenários ao longo dos períodos para se determinar o valor da reserva.

$$Res_{elev} = \max \{ R_{gh} + P_{gh_{cont}}^{cont} + R_{gt} \} \quad (4.74)$$

$$Res_{red} = \min \{ R_{gh} + P_{gh_{cont}}^{cont} \} \quad (4.75)$$

Após esses passos, deseja-se aplicar a Matemática Intervalar ao [FPOMM](#) posteriormente.

4.3 Aplicação da Matemática Intervalar ao [FPOMM](#)

4.3.1 Inicialização das variáveis

Primeiramente, acrescentam-se incertezas em todos os dados de entrada do sistema elétrico, neste caso, a carga e geração eólica, a fim de se formar um intervalo.

Conforme a [Equação 4.76](#), é acrescentado uma incerteza nos dados de carga do sistema, assim, criando um intervalo.

$$P_d^i = \left[\left(P_d^d \cdot (1 - \delta_{Pd}) \right); \left(P_d^d \cdot (1 + \delta_{Pd}) \right) \right] \quad (4.76)$$

onde:

- P_d^i é a demanda de potência ativa intervalar;
- P_d^d é a demanda de potência ativa determinística;
- δ_{Pd} valor da incerteza de carga adotada para o cálculo do intervalo.

Para os dados de geração eólica, repete-se a operação realizada com o perfil de demanda, conforme a [Equação 4.77](#).

$$P_{geol}^i = \left[\left(P_{geol}^d \cdot (1 - \delta_{eol}) \right); \left(P_{geol}^d \cdot (1 + \delta_{eol}) \right) \right] \quad (4.77)$$

onde:

- P_{geol}^i é a geração de potência ativa eólica intervalar;
- P_{geol}^d é a geração de potência ativa eólica determinística;
- δ_{eol} valor da incerteza de carga adotada para o cálculo do intervalo para todos os períodos.

Após a criação dos intervalos dos dados do sistema elétrico a ser estudado, é necessário criar intervalos das variáveis de otimização do problema, para que se crie um ponto de partida.

Dessa forma, é acrescentado uma margem aos valores determinísticos ótimos, obtidos na etapa anterior.

Diferente do FP, tal como proposto por Pereira (2011), onde é necessário apenas criar um intervalo de inicialização para a tensão, o FPOMP, por ser um problema multivariável, requer a mesma operação para todas as variáveis de estudo.

A geração ativa hidráulica e térmica intervalar inicial é descrita através da, Equação 4.78 E Equação 4.79, respectivamente.

$$P_{gh}^i = \left[\left(P_{gh}^d - \delta_{P_{gh}} \right); \left(P_{gh}^d + \delta_{P_{gh}} \right) \right] \quad (4.78)$$

$$P_{gt}^i = \left[\left(P_{gt}^d - \delta_{P_{gt}} \right); \left(P_{gt}^d + \delta_{P_{gt}} \right) \right] \quad (4.79)$$

onde:

- P_g^i representa a geração de potência ativa hidráulica Intervalar;
- P_g^d representa a geração de potência ativa hidráulica determinística;
- $\delta_{P_{gh}}$ é o valor da margem de inicialização do intervalo de geração hidráulica.
- P_{gt}^i representa a geração térmica de potência ativa Intervalar;
- P_{gt}^d representa a geração térmica de potência ativa determinística;
- $\delta_{P_{gt}}$ é o valor da margem de inicialização do intervalo de geração térmica.

Para os valores de reserva girante, também é aplicado uma margem de inicialização, de acordo com a Equação 4.80 e Equação 4.81, para usinas hidroelétricas e termoelétricas, respectivamente.

$$R_{gh}^i = \left[\left(R_{gh}^d - \delta_{R_{gh}} \right); \left(R_{gh}^d + \delta_{R_{gh}} \right) \right] \quad (4.80)$$

$$R_{gt}^i = \left[\left(R_{gt}^d - \delta_{R_{gt}} \right); \left(R_{gt}^d + \delta_{R_{gt}} \right) \right] \quad (4.81)$$

- R_{gh}^i é a reserva girante da hidroelétrica Intervalar;
- R_{gt}^i é a reserva girante da termoelétrica Intervalar;

- R_{gh}^d representa a reserva girante da hidroelétrica determinística;
- R_{gt}^d representa a reserva girante da termoelétrica determinística;
- δ_{Rgh} é a margem de inicialização para a reserva girante hidráulica;
- δ_{Rgt} é o valor da margem de inicialização para a reserva girante térmica.

A Equação 4.82 é responsável por criar o intervalo referente à variável de ajuste da reserva para cada sistema com contingência;

$$P_{ghcont}^{i,cont} = \left[\left(P_{gcont}^{d,cont} \cdot (1 - \delta_{gcont}) \right); \left(P_{ghcont}^{d,cont} \cdot (1 + \delta_{gcont}) \right) \right] \quad (4.82)$$

onde:

- $P_{ghcont}^{i,cont}$ é a variável de ajuste da reserva hidráulica para cada sistema com contingência intervalar, para cada contingência $cont$;
- $P_{ghcont}^{d,cont}$ é a variável de ajuste da reserva hidráulica para cada sistema com contingência determinístico, para cada contingência $cont$;
- δ_{gcont} é a margem de inicialização para o vetor de ajuste da reserva.

Já a Equação 4.83 é responsável por criar o intervalo referente à variável do ângulo de cada barra do caso base.

$$\theta^{0,i} = \left[\left(\theta^{0,d} \cdot (1 - \delta_\theta) \right); \left(\theta^{0,d} \cdot (1 + \delta_\theta) \right) \right] \quad (4.83)$$

onde:

- $\theta^{0,i}$ é o ângulo para o sistema intervalar do caso base;
- $\theta^{0,d}$ é o ângulo para o sistema determinístico do caso base;
- δ_θ é a margem de inicialização do ângulo.

Para os sistemas com contingências a Equação 4.84 é responsável por criar o intervalo referente à variável do ângulo.

$$\theta^{cont,i} = \left[\left(\theta^{cont,d} \cdot (1 - \delta_\theta) \right); \left(\theta^{cont,d} \cdot (1 + \delta_\theta) \right) \right] \quad cont = 1, \dots, ncont \quad (4.84)$$

onde:

- $\theta^{cont,i}$ é o ângulo para o sistema intervalar para a contingência $cont$;

- $\theta^{cont,d}$ é o ângulo para o sistema determinístico para a contingência $cont$;
- δ_θ é a margem de inicialização do ângulo.

Por fim, a Equação 4.85 e Equação 4.86 apresentam a criação do intervalo da variável referente ao corte de carga para o caso base e para os sistemas com contingência, respectivamente.

$$P_{dfic}^{0,i} = \left[\left(P_{dfic}^{0,d} \cdot (1 - \delta_{fic}) \right); \left(P_{dfic}^{0,d} \cdot (1 + \delta_{fic}) \right) \right] \quad (4.85)$$

- $P_{dfic}^{0,i}$ é a variável do corte de carga intervalar para o caso base;
- $P_{dfic}^{0,d}$ é a variável do corte de carga determinístico para o caso base;
- δ_{fic} é a margem de inicialização do corte de carga.

$$P_{dfic}^{cont,i} = \left[\left(P_{dfic}^{cont,d} \cdot (1 - \delta_{fic}) \right); \left(P_{dfic}^{cont,d} \cdot (1 + \delta_{fic}) \right) \right] \quad cont = 1, \dots, ncont \quad (4.86)$$

- P_{dfic}^i é a variável do corte de carga intervalar para a contingência $cont$;
- P_{dfic}^d é a variável do corte de carga determinístico para a contingência $cont$;
- δ_{fic} é a margem de inicialização do corte de carga.

Todos os valores iniciais de intervalares (limites superior e inferior), devem ser estabelecidos antes do processo de otimização, cuja ordem de grandeza pode ser previamente ajustada conforme os valores de incerteza das carga e geração eólica.

4.3.2 Aplicação do Método de Krawczyck ao FPOMM

Ao aplicar a matemática intervalar na formulação de um FP resolve-se um sistema de equações ($f(x) = 0$), referentes aos resíduos de potência ativa e reativa (PEREIRA, 2011). Já no FPO o sistema de equações a ser resolvido são relacionadas às condições de otimalidade (condições de KKT – *Karush Kuhn–Tucker*). Dessa forma, Equação 4.87 representa as equações a serem resolvidas do FPOMPI (BORBA, 2020; BORBA; FERNANDES, 2023).

$$g(x)^i = \begin{bmatrix} \nabla_{P_{gh}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{P_{gt}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{R_{gh}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{R_{gt}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{P_{ghcont}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{\theta} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{P_{dfic}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{\lambda_g} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{\pi_{max}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{\pi_{min}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{s_{max}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{s_{min}} \mathcal{L}_i \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

onde:

- $\nabla_{P_{gh}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação à geração de potência ativa hidráulica;
- $\nabla_{P_{gt}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação à geração de potência ativa térmica;
- $\nabla_{R_{gh}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação à reserva girante hidráulica;
- $\nabla_{R_{gt}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação à reserva girante térmica;
- $\nabla_{P_{ghcont}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação à variável de ajuste da reserva girante hidráulica;
- $\nabla_{\theta} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação aos ângulos das barras;
- $\nabla_{P_{dfic}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação ao corte de carga;
- $\nabla_{\lambda} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação ao multiplicador de Lagrange associados às restrições de igualdade;
- $\nabla_{\pi_{max}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação ao multiplicador de Lagrange associados aos limites mínimos máximos;
- $\nabla_{\pi_{min}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação ao multiplicador de Lagrange associados aos limites mínimos;
- $\nabla_{s_{max}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação às variáveis de folga máximas estritamente positivas;

- $\nabla_{s_{min}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação às variáveis de folga mínimas estritamente positivas;

Em sequência à inicialização e tratamento intervalar das variáveis de otimização do FPOMMI, é necessário calcular a matriz de pré-condicionamento \mathbf{C} , que se mantém constante durante todo o processo. Essa matriz é equivalente à derivada de segunda ordem da Função Lagrangeana, ou seja, a Hessiana \mathbf{W}^* , ou seja, no ponto determinístico ótimo (MONEGO, 2017; BORBA, 2020).

$$\mathbf{C} = (\mathbf{W}^*)^{-1}. \quad (4.88)$$

Após calcular a matriz de pré-condicionamento, inicializa-se o processo iterativo e é necessário calcular o operador de Krawczyk, conforme a Equação 4.89.

$$K^k(Z^i) = z^h - \mathbf{C} \cdot g(z) + [I_d - \mathbf{C} \cdot \mathbf{W}(Z^i)] \cdot (Z^i - z^h) \quad (4.89)$$

onde:

- Z^i é o vetor intervalar que contém as variáveis do problema;
- $z^h = m(Z^i)$ é o ponto médio do intervalo Z^i a cada iteração;
- $g(z)$ é o valor das condições de KKT (Equação 4.87), no ponto médio;
- I_d é uma matriz identidade;
- \mathbf{C} é a matriz de pré-condicionamento;
- \mathbf{W}^i é a matriz Hessiana intervalar, calculada utilizando o intervalo Z^i .

Determinado o operador $K^k(Z^i)$, atualiza-se o vetor intervalar das variáveis de otimização, de acordo com a Equação 4.90.

$$Z^{k+1} = [Z^k \cap K^k]. \quad (4.90)$$

Após determinar o novo vetor intervalar de variáveis, verifica-se a tolerância, calculada através da Equação 4.91. Caso não seja atingida, calcula-se um novamente operador K e um novo vetor K . Do contrário, o processo é encerrado.

$$conv = \left| \frac{diam(Z^{k+1}) - diam(Z^k)}{2} \right| \leq tolerância. \quad (4.91)$$

Encerrado o processo iterativo, o vetor Z^i passar a conter os intervalos ótimos para cada uma das variáveis em análise. Além disso, a solução ótima determinística deverá estar contida no intervalo (MOORE, 2009). Após obter a solução convencional (determinístico) do FPOMP, utiliza-se a solução como ponto de inicial para o método de Krawczyk.

Para obter a solução intervalar do sistema mostrado na Equação 4.87, constrói-se uma sequência convergente de intervalos, onde o limite é a solução da de $g(x)$ que está contida em um intervalo.

O algoritmo básico que se propõe é (BORBA, 2020):

1. Calcula-se o Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Multicontingência determinístico e obter despacho de geração e reserva pontuais do sistema, via linprog;
2. Definir variações percentuais de demanda e geração eólica;
3. Inicializar as variáveis intervalares, onde o ponto médio do intervalo é a solução pontual obtida pelo FPO determinístico, através da incorporação de uma margem arbitrária;
4. Calcular a matriz Hessiana \mathbf{W}^i
5. Calcular resíduos das condições de KKT em análise;
6. Aplicar o operador Krawczyk;
7. Obter o novo perfil das variáveis intervalares;
8. Testar convergência: se sim: Pare, se não ir ao passo 5.

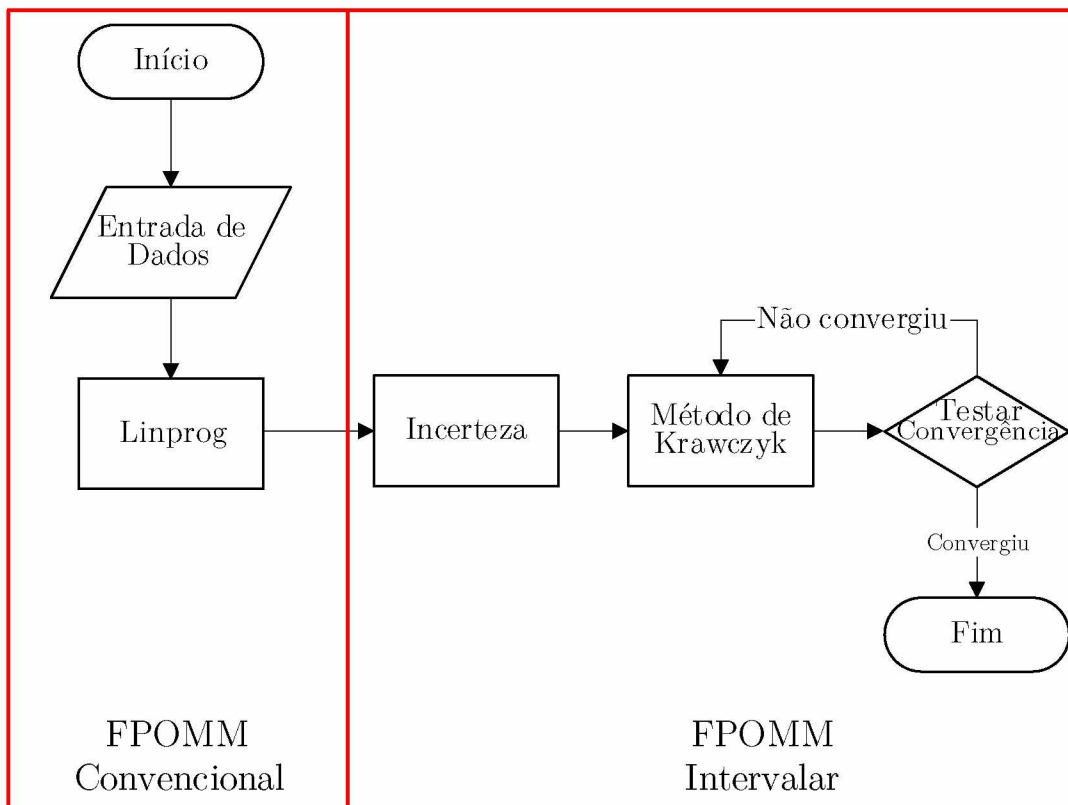
A Figura 6 mostra o fluxograma sintetiza as etapas realizadas do FPOMMI de forma resumida.

4.4 Considerações finais

Este Capítulo teve o objetivo de apresentar a formulação proposta nesta tese, que é a do Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Multicontingência, o qual realiza a otimização do montante da RG, da alocação individual da RG por gerador e despacho para um horizonte de np períodos e $ncont$ contingências.

Além disso foi apresentada a aplicação da Matemática Intervalar na proposta, a fim de se obter uma solução intervalar.

Figura 6 – Fluxograma do FPOMMI



Fonte: O autor (2025).

5 Resultados

Este capítulo tem como objetivo apresentar os resultados da formulação proposta, o Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Multicontingência Intervalar.

Como sistema teste, foram selecionados os sistemas de 33 Barras (ALVES, 2007), equivalente a região Sul-Sudeste do Brasil, bem como o sistema 291 Barras equivalente do sistema do Paraná no sul do Brasil (MIKILITA, 2005). O sistema de 33 barras está apresentado no diagrama unifilar da Figura 7.

Além disso, a Tabela 4 mostra as barras onde são conectados os geradores hidráulicos e qual número é correspondente nos resultados das simulações.

O sistema de 33 barras possui 7 hidroelétricas, 1 termoelétrica, 71 linhas e uma usina eólica, totalizando uma carga total de 8136,0 MW no horário de pico (19h) e 153770,4 MWh de energia total consumida ao longo do dia.

O sistema de 291 barras possui 404 ramos, 28 usinas hidroelétricas e 6 usinas termoelétricas e é um equivalente ao estado do Paraná, que contém toda a rede de 525 kV, 230 kV, 138 kV e 69 kV, além das barras de fronteiras com outros estados. A carga total, no horário de pico, é de 7273,26 MW e 137,46 GWh de energia total consumida ao longo do dia.

Para a análise das contingências ($N - 1$), foram consideradas uma sequência de saída de 70 linhas (das 71 existentes) e redução de geração eólica para o sistema de 33 barras. Enquanto para o 291 barras, consideraram-se a saída das linhas de 525 kV uma sequência de saída dos 7 maiores geradores, também representados na Tabela 4.

Tabela 4 – Dados Gerador Hidráulicos - Sistema 33 barras

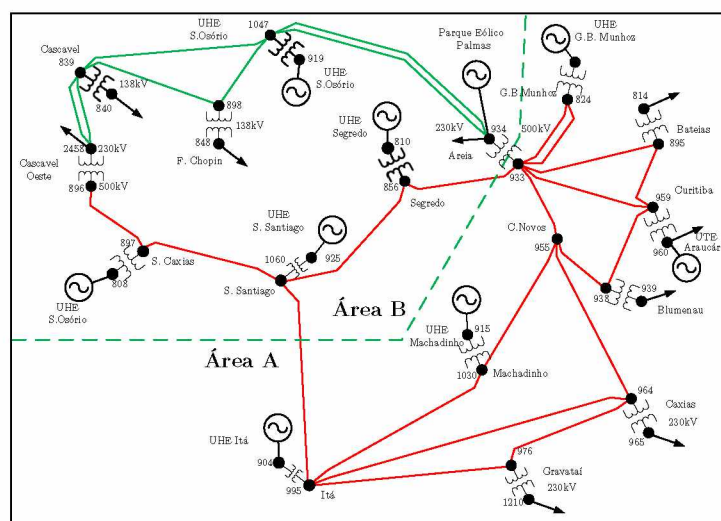
Gerador Nº	Barra Correspondente	nome	Potência Ativa
1	800	G.B. Munhoz	1674 MW
2	808	Salto Caxias	1240 MW
3	810	Salto Segredo	1260 MW
4	904	Itá	1450 MW
5	915	Machadinho	1140 MW
6	919	Salto Osório	728 MW
7	925	Salto Santiago	1420 MW

Fonte: (ALVES, 2007).

5.1 Validação e Análise de Resultados

A validação da formulação proposta se deu através de quatro frentes:

Figura 7 – Sistema 33 barras - Sul Sudeste Brasileiro



Fonte: Adaptado de Alves (2007).

- avaliação do impacto que ocorreu nas alocações de reserva girante simulando as contingências individualmente e depois simultaneamente (como proposta na tese). Para tanto, foi utilizado o sistema de 33 barras.
- avaliação do impacto que ocorreu nas alocações de reserva girante frente a diferentes cenários hidrológicos. Para tanto, foi utilizado o sistema de 33 barras;
- comparação dos resultados obtidos pelo **FPOMP**¹ que aloca de 5% de reserva tal como proposto em Arantes (2017) com o obtido pelo **FPOMM** proposto neste, mas sem considerar contingências, pois o **FPOMP** utilizado não considera contingências em sua formulação. O objetivo é analisar o diferencial de o montante de reserva que alocado pelo **FPOMM** que integra contingências. Para tanto, foi utilizado o sistema de 291 barras (analisando-se os 7 maiores geradores hidráulicos).
- avaliação dos intervalos ótimos obtidos pelo **FPOMMI** e via simulações exaustivas. Foram utilizados os sistemas de 33 barras e 291 barras. Para tanto, gerou-se uma nuvem de valores aleatórios, através de 200 simulações utilizando o **FPOMM**, onde cada elemento do vetor de carga foi incrementado com uma margem de distribuição de probabilidade uniforme igual variando entre $\pm 2\%$ da carga considerada no banco de dados do sistema. Para o sistema de 33 Barras utilizou-se uma margem de $\pm 15\%$ para a geração eólica, conforme os procedimentos da ONS (ONS, 2025). O sistema de 291 barras não possui geração eólica.

A Equação 5.1 mostra a equação utilizada para introduzir vetor de carga aleatória

¹ O **FPOMP** é um problema de despacho de geração hidraulica e termico, multiperíodo que aloca reserva girante num percentual pré-especificado (por exemplo, 5% da carga total)

no FPOMM, com o objetivo de se gerar uma nuvem de resultados aleatórios.

$$P_d^{nk} = P_{d_{original}} \cdot R(\delta_{inf}; \delta_{sup}) \quad (5.1)$$

onde:

- P_d^{nk} é o vetor de carga ativa aleatório utilizado no FPOMM na simulação nk ;
- $P_{d_{original}}$ é o vetor de carga ativa original do sistema utilizado;
- R é um vetor que contém números aleatórios, variando entre $(1 - \delta_{inf})$ e $(1 + \delta_{sup})$;
- δ_{inf} limite de incerteza inferior;
- δ_{sup} limite de incerteza superior.

Uma das formas de se comparar os resultados do FPOMMI com a nuvem aleatória é através do índice de acomodação. Esse índice avalia quanto o método intervalar se aproxima à envoltória criada pela nuvem aleatória. Quanto mais próximo esse valor estiver de 100%, melhor será o resultado, com 100% indicando uma sobreposição perfeita entre os intervalos dos métodos propostos. Índices acima de 30% são considerados satisfatórios, conforme Junior, Melo e Nepomuceno (2022) Leng et al. (2020).

$$A = \frac{|x_k^{nuvem,sup} - x_k^{nuvem,inf}|}{|x_k^{intervalar,sup} - x_k^{intervalar,inf}|} \cdot 100\% \quad (5.2)$$

onde:

- $x_k^{nuvem,sup}$ é o maior valor gerado pela nuvem, no período k ;
- $x_k^{nuvem,inf}$ é o menor valor gerado pela nuvem, no período k ;
- $x_k^{intervalar,sup}$ é o limite superior gerado pelo método intervalar, no período k ;
- $x_k^{intervalar,inf}$ é o limite inferior gerado pelo método intervalar, no período k ;

Os dados de inicialização utilizados para aplicação da matemática intervalar e os pesos do FPOMM estão localizados nos Apêndices A e B, para os sistemas de 33 e 291 barras, respectivamente. Já perfil da eólica está apresentado no Apêndice C.

Os dados de inicialização das variáveis intervalares foram escolhidos de acordo com a ordem de grandeza próximas a incerteza introduzida no problema e, então ajustadas posteriormente através de análise de sensibilidade.

Todos os valores em pu utilizam a base de 100 MVA.

Após a convergência do **FPOMM**, os resultados da variável $P_{gh_{cont}}$, R_{gh} e R_{gt} estão embutidos nos valores finais da reserva.

$$Res_{elev} = \max \{ R_{gh} + P_{gh_{cont}}^{cont} + R_{gt} \} \quad (5.3)$$

$$Res_{red} = \min \{ R_{gh} + P_{gh_{cont}}^{cont} \}. \quad (5.4)$$

5.2 Sistema 33 Barras

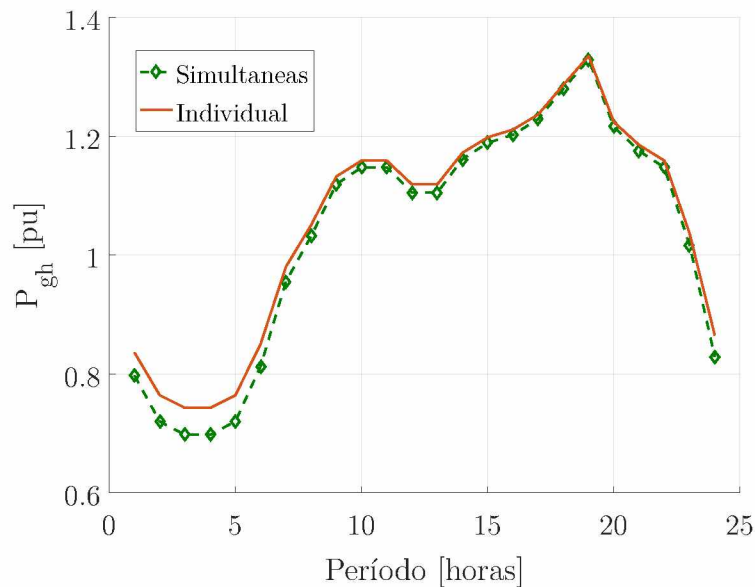
Primeiramente, foi escolhido o sistema de 33 barras para comparar o cálculo da reserva considerando várias contingências simultaneamente e individualmente, bem como o efeito causado por diversidade hidrológicas e, por fim, a incorporação da matemática intervalar.

O valor do coeficiente linear de custo da termica é 1,6271 e os valores dos pesos w_p , w_{pr} , w_{ct} , w_{cr} , w_{cont} e w_{fic} estão apresentados na [Tabela 18](#) do Apêndice A.

5.2.1 Comparação entre contingências simultâneas e individual via **FPOMP** e **FPOMM**

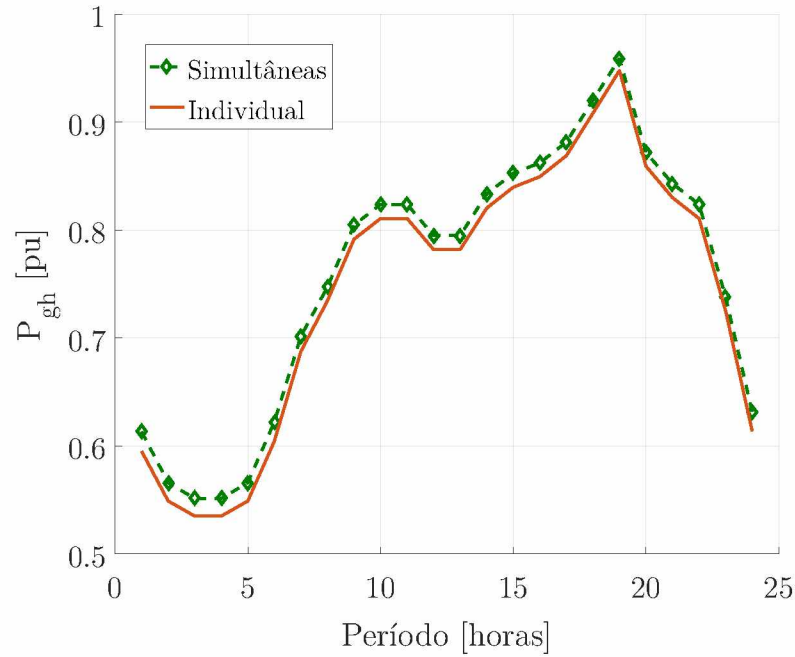
Os gráficos da [Figura 8](#) e [Figura 9](#) apresentam o despacho dos geradores hidráulicos 1 e 3, respectivamente, durante 24 horas para cada uma das 72 contingências individuais e simultânea. Estes resultados correspondem ao bloco de equações de sobrescrito 0 da formulação matemática, ou seja do sistema original, que foi despachado de modo a prever as contingências $n - 1$.

Figura 8 – Contingência simultânea e individual - 33 barras - P_{gh_1}



Fonte: O autor (2025).

Figura 9 – Contingência simultânea e individual - 33 barras - P_{gh_3}



Fonte: O autor (2025).

Através dos gráficos, constata-se que não houve diferença significativa no despacho entre as contingências individuais, visto que as 72 linhas ficaram sobrepostas umas às outras. Além disso, o máximo desvio padrão entre todas as gerações foi de 0,0018 pu. Já ao se considerar as contingências simultaneamente, houve uma ligeira mudança no despacho.

A Tabela 5 apresenta os valores totais da reserva de elevação e redução calculados e alocados para cada uma das contingências consideradas individualmente, sendo que de 1 a 71 representam saída das linhas, a 72 é contingência eólica.

Tabela 5 – Valores de reserva calculados individualmente

(Continua)								
Contingência	1	2	3	4	5	6	7	8
Res_{elev} [pu]	1,2648	1,2648	1,2687	1,2681	1,2667	1,2667	1,2715	1,2689
Res_{redu} [pu]	1,2648	1,2648	1,2687	1,2681	1,2667	1,2667	1,2715	1,2689
Contingência	9	10	11	12	13	14	15	16
Res_{elev} [pu]	1,2660	1,2653	1,2656	1,2639	1,2656	1,2700	1,2701	1,2666
Res_{redu} [pu]	1,2660	1,2653	1,2656	1,2639	1,2656	1,2701	1,2701	1,2666
Contingência	17	18	19	20	21	22	23	24
Res_{elev} [pu]	1,2665	1,2654	1,2664	1,2660	1,2662	1,2662	1,2663	1,2644
Res_{redu} [pu]	1,2665	1,2654	1,2664	1,2660	1,2662	1,2663	1,2663	1,2644
Contingência	25	26	27	28	29	30	31	32
Res_{elev} [pu]	1,2673	1,2795	1,2663	1,2663	1,2651	1,2651	1,2651	1,2651
Res_{redu} [pu]	1,2673	1,2796	1,2663	1,2663	1,2651	1,2651	1,2651	1,2651

Fonte: O autor (2025).

Tabela 5 – Valores de reserva calculados individualmente

(Conclusão)								
Contingência	33	34	35	36	37	38	39	40
Res_{elev} [pu]	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663
Res_{redu} [pu]	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663
Contingência	41	42	43	44	45	46	47	48
Res_{elev} [pu]	1,2663	1,2663	0,1236	1,2723	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663
Res_{redu} [pu]	1,2663	1,2663	2,8452	1,2723	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663
Contingência	49	50	51	52	53	54	55	56
Res_{elev} [pu]	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663
Res_{redu} [pu]	1,2663	1,2663	1,2663	1,2664	1,2664	1,2664	1,2664	1,2664
Contingência	57	58	59	60	61	62	63	64
Res_{elev} [pu]	1,2664	1,2664	1,2664	1,2667	1,2667	1,2667	1,2667	1,2663
Res_{redu} [pu]	1,2665	1,2665	1,2665	1,2667	1,2667	1,2667	1,2667	1,2663
Contingência	65	66	67	68	69	70	71	72
Res_{elev} [pu]	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2664	4,2217
Res_{redu} [pu]	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2663	1,2664	0,3661

Fonte: O autor (2025).

Já a [Tabela 6](#) apresenta o valor máximo e mínimo dos valores de reservas obtidos através das contingências individuais que é comparado com os resultados obtidos pelo [FPOMM](#). Pode-se afirmar que o método proposto calculou valores intermediários em comparação aos obtidos através das simulações individuais, onde a reserva de elevação representa uma redução de custo equivalente a 8,5%. Já para a reserva de redução, o resultado obtido pelo [FPOMM](#) está muito abaixo do máximo e médio obtido pela simulação das contingências individuais. Sendo assim o método proposto consegue calcular valores mais conservadores em relação a média e aos valores máximos, o que evita um sobre ou sub-dimensionamento para se atender o sistema com todas as contingências consideradas para o período de 1 dia a frente.

Tabela 6 – Resumo

Reserva	Individual [puh]			Simultâneo [puh]
	Máximo	Mínimo	Res. Individual	FPOMM
Res_E	4,2217	0,1236	4,2217	3,8583 (-8,5%)
Res_R	2,8452	0,3661	0,3661	0,8101

Fonte: O autor (2025).

Segundo a [Tabela 5](#), nota-se que as reservas referentes às saídas de uma única linha apresentam valores similares entre si. Já ao se reduzir a eólica, esse padrão muda completamente.

Em contrapartida, conforme a [Tabela 6](#), o valor obtido através do [FPOMM](#) que considera todas as contingências simultaneamente, foi de $Res_{redução} = 0,8101pu$

e $Res_{elevação} = 3,8583pu$. Não houve corte de carga nem despacho térmico em ambos os testes.

Em síntese, o resultado do FPOMM alocou valores menores de reserva girante de elevação e redução (o que em um mercado de reserva implicaria em menores custos), pois apesar do despacho do sistema original ser pouco diferente do obtido pelas FPOMP individuais, o modelo proposto encontrou um despacho do sistema original que minimizou a reserva total quando sob efeito de todas as contingência consideradas.

Dessa forma, vale ressaltar a importância do cálculo feito através do método proposto, uma vez que as contingências relacionadas às saídas de linha apresentaram valor muito inferiores à contingência da saída da eólica. Este resultado é esperado, pois a geração eólica deve ter fonte para substituí-la, uma vez que se trata de uma fonte intermitente e já no caso da linha, se a mesma sair de operação pode não haver alternativa de transmissão. Enquanto isso, o FPOMM apresentou resultado intermediário e que conseguiu atender às mesmas contingências, consideradas simultaneamente.

5.2.2 Análise das Metas Energéticas

Um dos objetivos deste item consiste em analisar o sistema com diversidades hidrológicas a fim avaliar o comportamento da formulação proposta, quanto ao impacto do cálculo da reserva e assim validar os resultados do modelo para diferentes estações do ano. Para tanto foi escolhido o sistema de 33 barras simulado para dois cenários de metas energéticas, conforme a Tabela 7. A meta 1 representa a meta diária prevista para um cenário chuvoso, enquanto a meta 2 para um cenário de seca.

Tabela 7 – Meta energética hidráulica total diária

Cenário	Meta 1 (Chuvoso)	Meta 2 (Seco)
Meta	705,00 <i>puh</i>	120 <i>puh</i>

Fonte: O autor (2025).

A Tabela 8 apresenta um panorama geral dos resultados obtidos para cada um dos casos considerando diferentes valores de metas energéticas. Nela é apresentado o somatório dos resultados da geração e reserva das usinas hidráulicas e térmicas, bem como o corte de carga, durante os 24 períodos analisados.

Através da Tabela 8, nota-se um aumento significativo na geração térmica para o cenário seco, o que era esperado, ou seja, num período de pouca disponibilidade hidráulica, as térmicas tiveram que ser acionadas para se atender a carga visto que o sistema está operando apenas com 17% das metas energéticas das usinas hidráulicas. Enquanto isso, não houve mudanças significativas no montante da reserva, devido às 72 contingências

Tabela 8 – Análise Meta

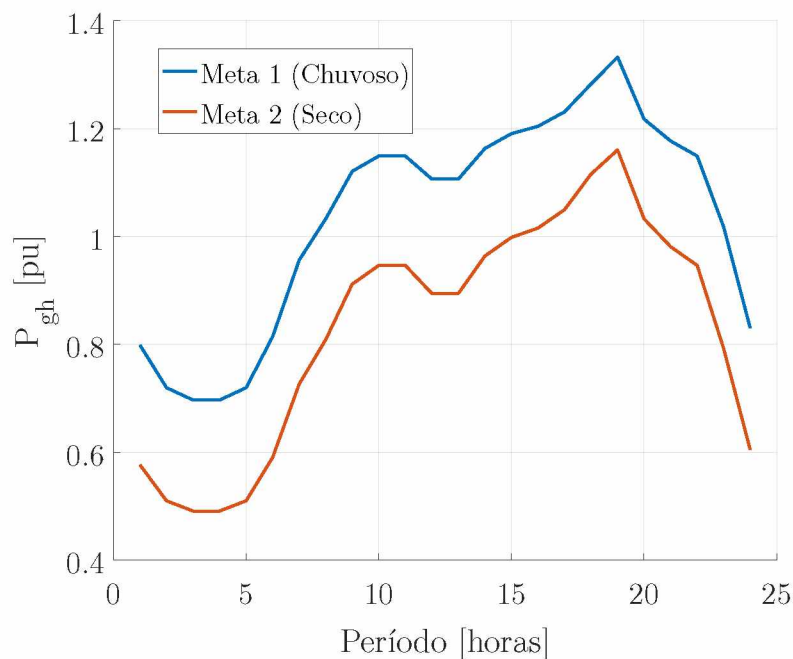
Cenário	Meta 1 (Chuvoso)	Meta 2 (Seco)
Res_{elev}	3,88 <i>puh</i>	3,86 <i>puh</i>
Res_{redu}	0,35 <i>puh</i>	0,22 <i>puh</i>
P_{gt}	0 <i>puh</i>	11,71 <i>puh</i>
P_{gh}	128,07 <i>puh</i>	116,35 <i>puh</i>
Corte de Carga	0	0

Fonte: O autor (2025).

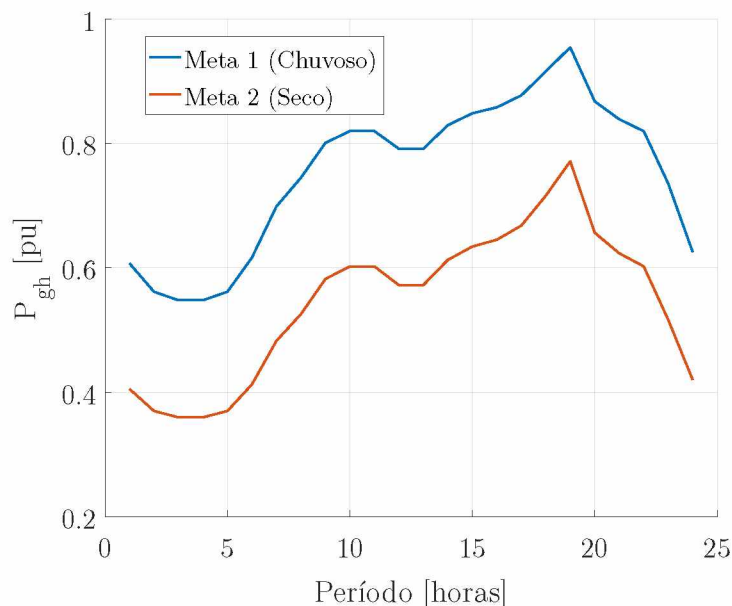
consideradas. Além disso, no segundo caso, a usina térmica despachou 0,4880 *pu*, constante, para cada período.

Os geradores 1 (800 - G.B. Munhoz) e 3 (810 - Salto Segredo) foram escolhidos para apresentar os gráficos da geração, reserva de elevação e redução, por serem as maiores máquinas que alocaram reserva, os demais geradores apresentaram resultados similares ao do gerador 1.

A Figura 10 e a Figura 11 apresentam o gráficos do despacho dos geradores 1 e 3 respectivamente. Assim como mostrado na Tabela 8, a potência gerada para o cenário com as metas reduzidas (seco) apresentou uma redução uniforme na geração, para ambas as máquinas, praticamente mantendo o mesmo perfil gráfico em relação ao caso chuvoso.

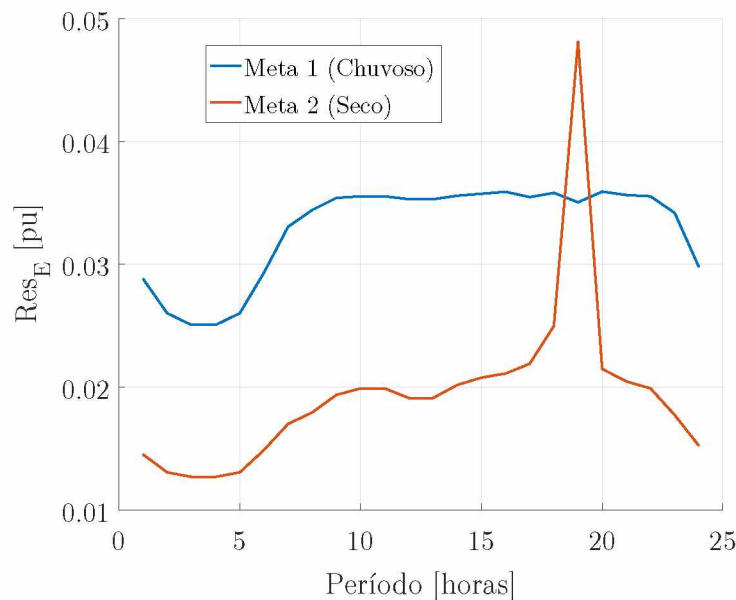
Figura 10 – Comparação Metas - 33 barras - P_{gh_1} 

Fonte: O autor (2025).

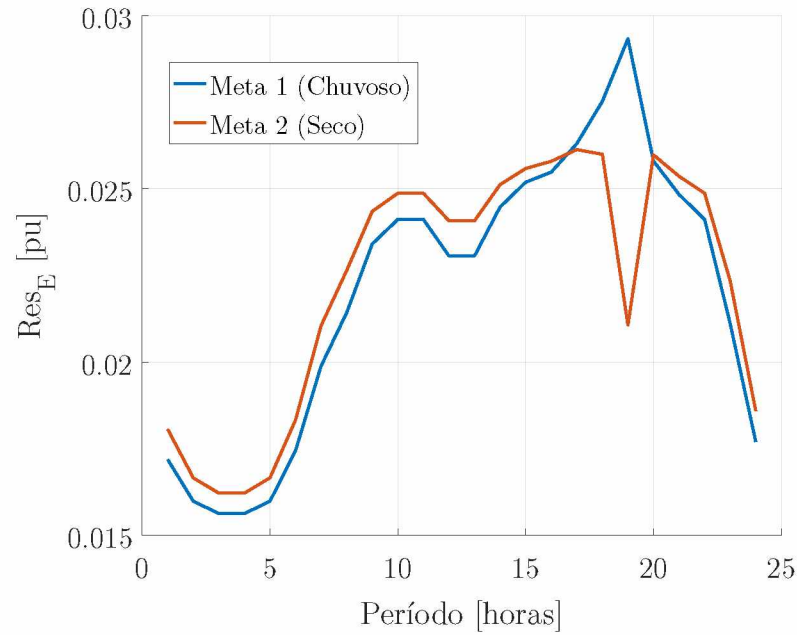
Figura 11 – Comparação Metas - 33 barras - P_{gh_3} 

Fonte: O autor (2025).

Já a Figura 12 e a Figura 13 apresentam a reserva de elevação para as máquinas 1 e 3, respectivamente. Nota-se uma mudança no perfil das reservas obtidos para que se pudesse atender o sistema. Enquanto para o cenário chuvoso ambas as metas não apresentam picos elevados ao longo do período, ao reduzir as metas, o gerador 1 alocou um valor superior ao caso base às 19 horas, enquanto o gerador 3 reduziu a reserva, a fim de se compensar o aumento do gerador 1, uma vez que a energia da reserva de elevação possuem valores próximos para os 2 cenários analisados.

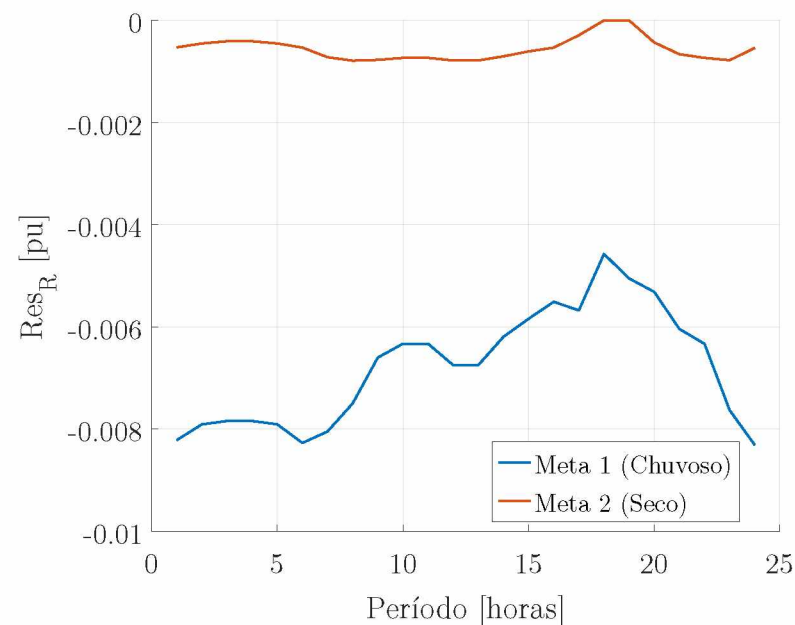
Figura 12 – Comparação Metas - 33 barras - Res_{E1} 

Fonte: O autor (2025).

Figura 13 – Comparação Metas - 33 barras - Res_{E3} 

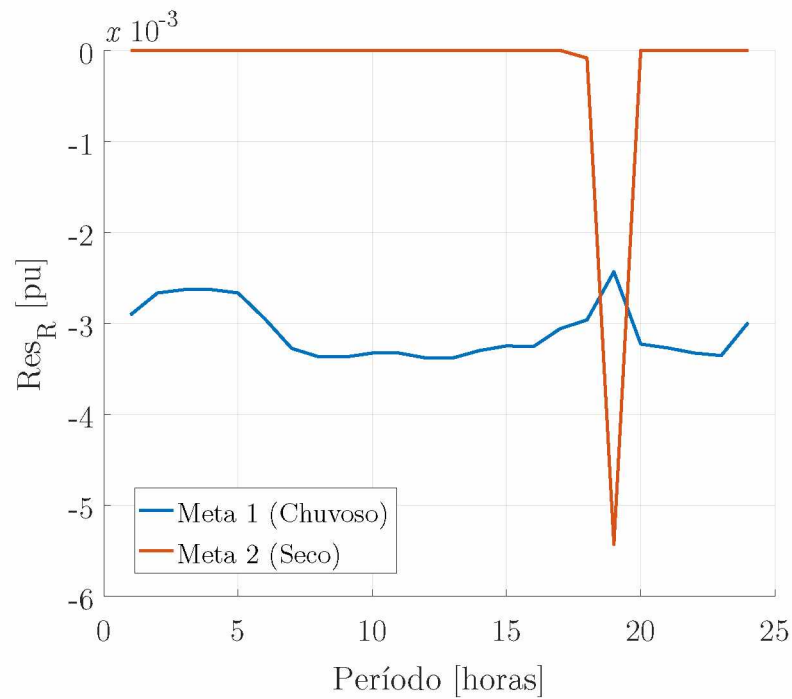
Fonte: O autor (2025).

Por fim, a Figura 14 e a Figura 15 expõem os gráficos da reserva de redução dos geradores 1 e 3, respectivamente. Novamente, no caso chuvoso o perfil apresenta baixa variabilidade durante os 24 períodos. Dessa vez o gerador 1 praticamente não alocou reserva de redução, enquanto isso, o gerador 3 apenas alocou reserva durante o período de carga pesada.

Figura 14 – Comparação Metas - 33 barras - Res_{R1} 

Fonte: O autor (2025).

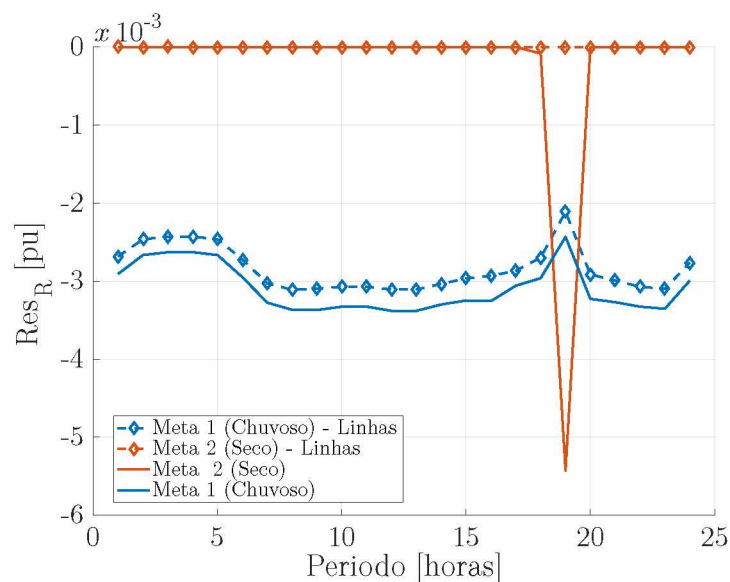
Figura 15 – Comparação Metas - 33 barras - Res_{R3}



Fonte: O autor (2025).

Observando a [Figura 12](#), [Figura 13](#), [Figura 14](#) e [Figura 15](#) e os resultados referentes à Meta 2 (seco), observam-se grandes variações ascendentes se descendentes de reserva no período de carga pesada. Para analisar este resultado, foi realizada uma simulação sem o contingência eólica e mantendo todas as saídas de linhas, cujo resultado está apresentado na [Figura 16](#).

Figura 16 – Comparação Metas - 33 barras - Res_{R3}



Fonte: O autor (2025).

Nesta [Figura 16](#), que apresenta a reserva de redução do gerador 3 para o sistema com todas as contingências e para o mesmo sistema considerando apenas a saída das linhas, observa-se que as variações abruptas se dão para suprir a contingência de geração eólica, cujo deficit exige maior redistribuição da geração das usinas de modo a acomodá-la.

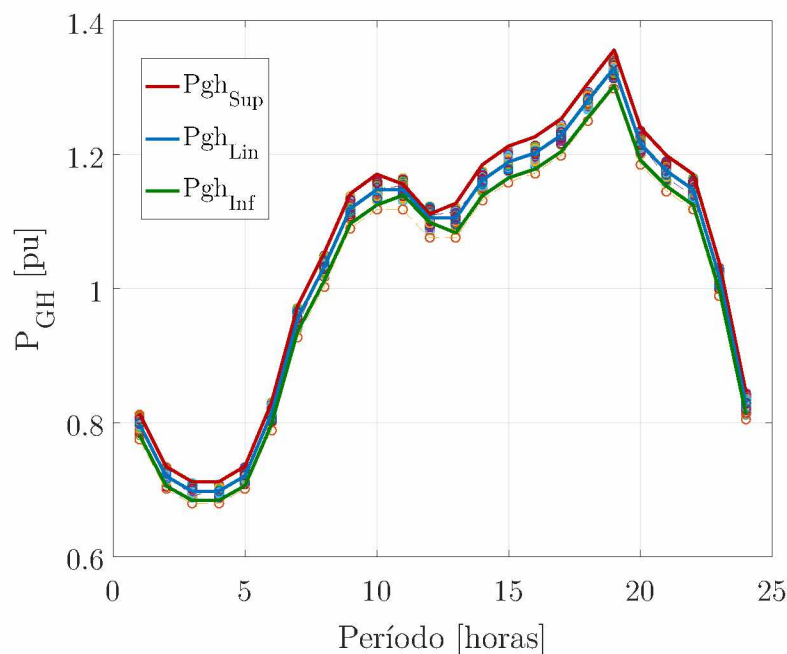
Pode-se concluir que o método proposto conseguiu garantir que o sistema, mesmo operando em um cenário crítico, atendesse a demanda do sistema sem a necessidade de corte de carga. Embora a energia total proveniente das usinas hidráulicas tenha reduzido, a energia resultante das reservas manteve-se praticamente inalterada, para que se pudesse atender as contingências sem que houvesse corte de carga e reserva da unidade térmica, embora que alocadas diferentemente ao longo das horas.

A seguir, serão apresentados os resultados obtidos através da incorporação da matemática intervalar.

5.2.3 FPOMMI – Sistema 33 Barras

A [Figura 17](#) apresenta o gráfico da geração da unidade hidráulica 1 do sistema de 33 barras, durante 24 horas, com discretização horária.

Figura 17 – Sistema 33 - P_{gh_1}



Fonte: O autor (2025).

Esta figura, assim como as demais que apresentam valores intervalares, do despacho do sistema original (valor médio), valores superiores e inferiores do intervalos calculados, e a nuvem dos valores aleatórios gerados com variação de $\pm 2\%$ da carga.

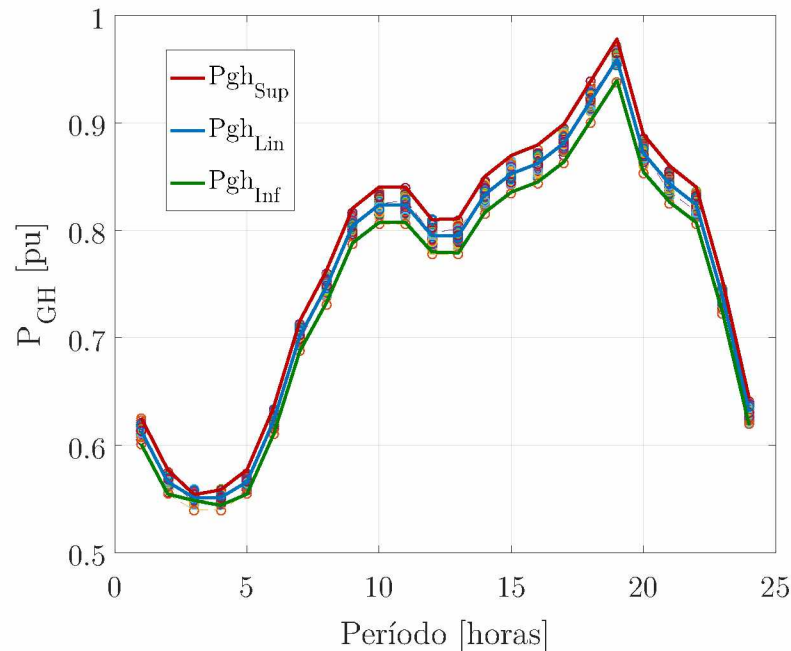
O valor de geração despachada é obtida pelo FPOMM ($P_{gh_{lin}}$), citado agora como

determinístico e os valores intervalares são obtidos pelo FPOMMI, sendo que Pgh_{sup} e Pgh_{inf} são os valores superiores e inferiores horários fornecidos pela técnica intervalar. Nesta Figura 17 também estão apresentados a nuvem formada pelos 200 círculos que representam os resultados de cada uma das 200 simulações com variação em $\pm 2\%$ nas carga. Este padrão de representação se repete para as outras figuras.

Nota-se que ao longo dos períodos, o método proposto praticamente envolve todos os valores obtidos através das simulações aleatórias (representados pelos círculos no gráfico). Além disso, o valor obtido através do método determinístico está sempre dentro do intervalo, formado pelas simulações exaustivas, o que valida os resultados obtidos pela matemática intervalar.

Para o gerador 3, a geração ao longo dos 24 períodos é mostrada no gráfico da Figura 18. Análogo ao gerador 1, os limites obtidos pelo método intervalar englobam a nuvem no interior, além do resultado determinístico, o que é esperado ao se utilizar a matemática intervalar. Os demais geradores apresentaram resultados semelhantes.

Figura 18 – Sistema 33 - Intervalar - Pgh_3

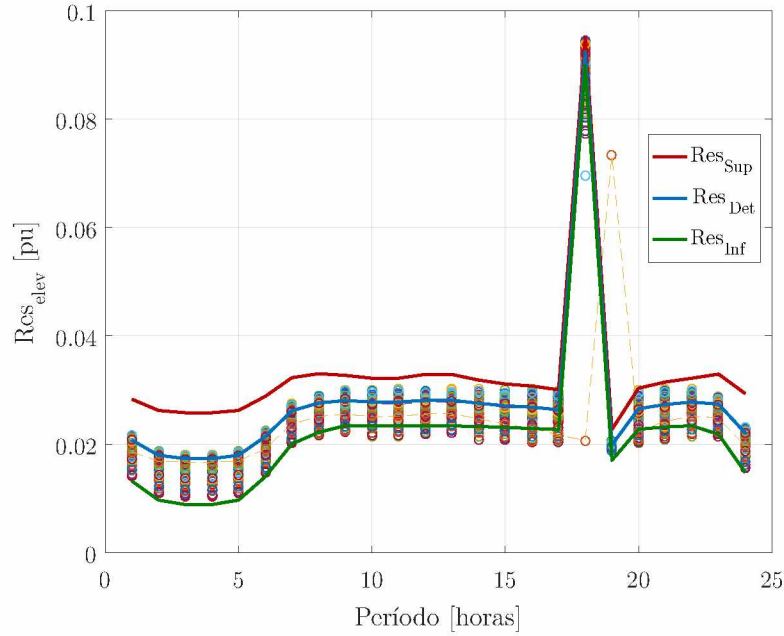


Fonte: O autor (2025).

Já a Figura 19 e Figura 20 apresentam os gráficos da reserva de elevação do gerador 1 e 3 respectivamente, durante os 24 períodos. Existe uma linha tracejada amarela nestes gráficos das Figura 19 e Figura 20 que se referem a um ponto de operação que extrapolou o intervalo ótimo contido entre as linhas vermelha e verde.

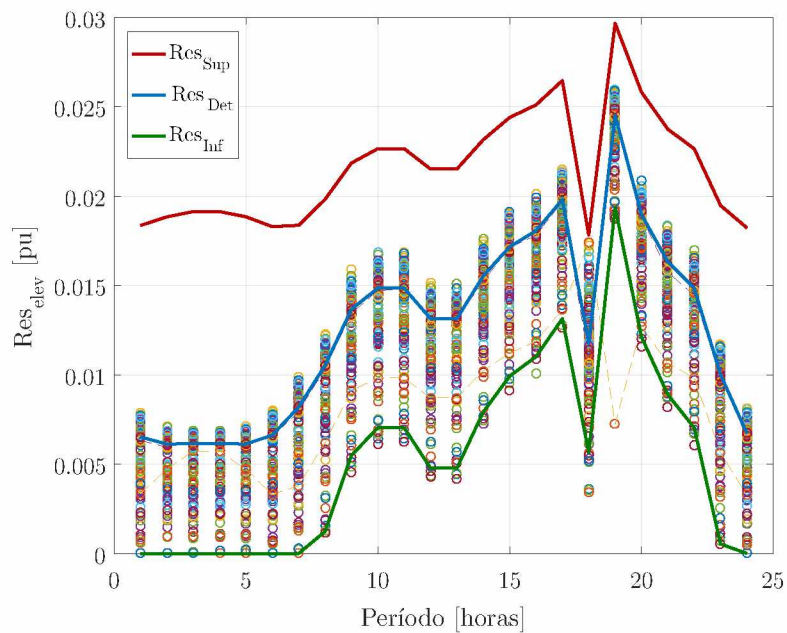
Pode-se observar que, apesar de uma concentração de resultados da nuvem estarem mais próximos do limite inferior, esta nuvem é englobada majoritariamente pelos intervalos ótimos calculados.

Figura 19 – Sistema 33 - Intervalar - Res_{E1}



Fonte: O autor (2025).

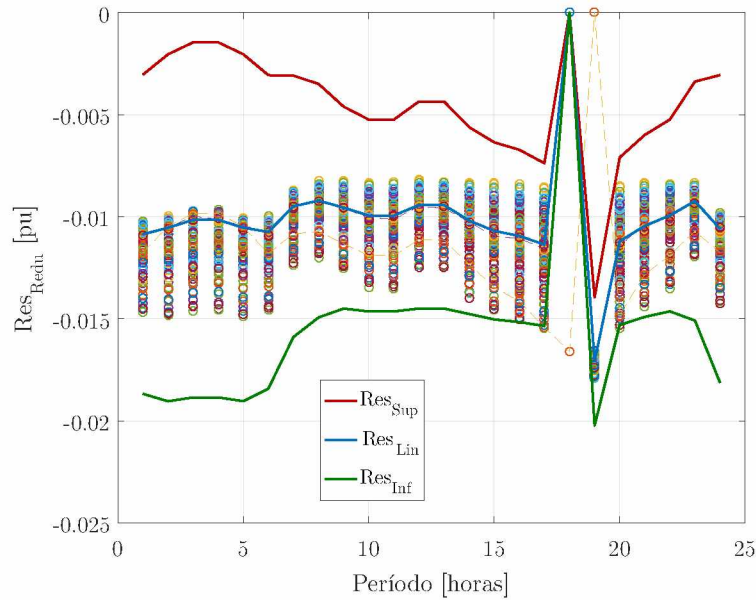
Figura 20 – Sistema 33 - Intervalar - Res_{E3}



Fonte: O autor (2025).

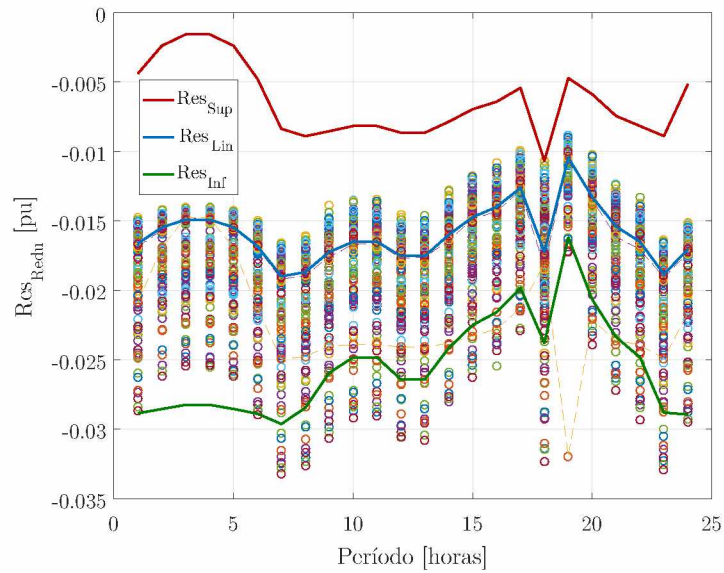
Por fim, a [Figura 21](#) e [Figura 22](#) mostram os gráficos referentes à reserva de redução dos geradores 1 e 3, respectivamente, ao longo de 24 períodos. Novamente é observado o mesmo padrão do despacho de potência ativa. O intervalo resultante do método intervalar novamente está ao incluindo majoritariamente a nuvem, com o padrão se mantendo uniforme ao longo dos 24 períodos.

Figura 21 – Sistema 33 - Intervalar - Res_{R1}



Fonte: O autor (2025).

Figura 22 – Sistema 33 - Intervalar - Res_{R3}



Fonte: O autor (2025).

Os resultados intervalares podem fornecer informações valiosas quanto às fragilidades da operação, fornecendo uma visão mais ampla para um dia a frente das condições horárias operativas. Como o intervalo ótimo é maior que o da nuvem, assinala-se neste caso um resultado intervalar mais conservador.

Por exemplo, segundo [Figura 17](#) e [Figura 18](#), observa-se que as faixas operativas disponíveis estão dentro do esperado para operação normal.

No entanto, para os valores de reserva de elevação da [Figura 19](#), referente ao gerador

1, observa-se que sob contingência no horário de pico, este gerador não tem margem de manobra para restabelecer o sistema.

Pela Figura 20, observa-se que o gerador 3 pode responder satisfatoriamente para todas as contingências a cada hora.

Quanto à reserva de redução, observa-se pela Figura 21 que o gerador 1 também não tem margem para redução de geração na hora de pico. E pela Figura 22, o gerador 3 pode responder às contingência dentro do intervalo esperado.

A fim de se complementar a análise gráfica, a Tabela 9 apresenta a porcentagem média, em relação aos períodos, dos valores aleatórios englobados pelo intervalo calculado através do FPOMMI. Nota-se que para as 3 variáveis todos os valores estão acima de 95%, indicando boa parte da nuvem está contida dentro do intervalo gerado pelo método proposto.

Tabela 9 – Nuvem contida ao Intervalo - 33 barras

Variável	Ger. 1	Ger. 2	Ger. 3	Ger. 4	Ger. 5	Ger. 6	Ger. 7
<i>Pgh</i>	96,92%	99,48%	97,85 %	96,85 %	99,40 %	98,85%	98,69%
<i>Res_{elev}</i>	95,85 %	98,35 %	98,79%	93,10%	99,92%	99,96%	99,21%
<i>Res_{redu}</i>	99,87 %	88,87 %	96,27%	98,87%	99,85%	99,58 %	99,42%

Fonte: O autor (2025).

A Tabela 10 apresenta a média do índice de acomodação da geração e reserva entre todas as máquinas, a cada período. Dessa vez, todos os valores estão acima dos 30%, outrossim 50 dos 72 índices estão acima de 50%.

Tabela 10 – Índice de acomodação médio - 33 barras

Período	Pgh	ResE	ResR	Período	Pgh	ResE	ResR
1	77,58%	34,86%	53,08%	13	72,27%	45,71%	59,61%
2	76,13%	32,56%	49,23%	14	66,41%	50,24%	63,02%
3	92,03%	32,43%	47,78%	15	66,08%	52,63%	66,03%
4	67,25%	31,67%	47,74%	16	64,65%	55,09%	68,50%
5	71,35%	33,29%	48,95%	17	64,71%	56,82%	69,32%
6	76,20%	35,77%	54,42%	18	62,05%	76,45%	86,21%
7	65,15%	38,89%	55,70%	19	68,45%	39,25%	44,60%
8	70,87%	41,27%	58,21%	20	72,56%	57,61%	67,97%
9	74,68%	45,94%	61,36%	21	66,00%	51,12%	64,90%
10	66,96%	47,30%	59,87%	22	76,38%	48,88%	63,07%
11	83,87%	48,73%	62,11%	23	67,82%	40,55%	56,89%
12	83,35%	45,11%	60,24%	24	75,63%	36,27%	54,14%

Fonte: O autor (2025).

Já a Tabela 11 mostra os índices de acomodação médios da geração, reserva de elevação e redução dos geradores 1 e 3 para os 24 períodos. Nota-se que apenas 8 dos 144

índices estão ligeiramente abaixo do valor satisfatório de 30%, sendo todos eles no valor de reserva de elevação do gerador 3. Em contrapartida, 97,2% dos índices são maiores que 50%, o que indica que o método proposto apresenta uma excelente aproximação do método de validação.

Tabela 11 – Índice de acomodação médio Individual - 33 barras

Período	P_{gh1}	P_{gh3}	Res_{E1}	Res_{E3}	Res_{R1}	Res_{R3}
1	93,95%	88,33%	50,19%	39,62%	28,22%	56,95%
2	81,89%	89,17%	47,12%	33,05%	28,41%	46,11%
3	78,82%	98,94%	45,37%	35,33%	28,30%	42,96%
4	71,35%	94,50%	45,35%	35,78%	28,14%	43,13%
5	84,41%	70,42%	47,56%	37,07%	28,15%	45,72%
6	81,06%	91,64%	52,35%	40,50%	29,97%	56,80%
7	76,89%	68,54%	58,98%	52,49%	28,78%	57,75%
8	79,11%	71,19%	61,31%	59,12%	32,70%	62,61%
9	78,36%	69,65%	67,94%	61,97%	43,33%	68,94%
10	66,38%	70,49%	75,81%	60,25%	54,79%	64,20%
11	97,12%	84,05%	74,38%	61,54%	55,40%	65,78%
12	97,10%	89,82%	64,37%	61,45%	42,19%	66,09%
13	75,16%	81,82%	70,81%	60,03%	41,21%	66,18%
14	67,39%	69,92%	79,77%	62,45%	61,51%	68,00%
15	66,76%	65,52%	87,58%	62,09%	71,61%	68,24%
16	62,74%	74,93%	91,75%	63,30%	78,89%	70,84%
17	61,03%	71,18%	94,46%	58,74%	84,11%	67,19%
18	52,72%	76,28%	83,80%	92,62%	100,00%	99,06%
19	60,15%	46,90%	32,93%	60,99%	21,42%	57,45%
20	70,62%	73,72%	95,55%	63,08%	82,85%	68,55%
21	67,92%	70,87%	83,74%	63,25%	67,78%	67,17%
22	77,34%	71,86%	77,23%	63,18%	54,43%	67,79%
23	78,05%	65,93%	60,22%	58,78%	30,91%	62,19%
24	89,31%	84,07%	52,45%	42,11%	29,33%	57,36%

Fonte: O autor (2025).

Por fim, o tempo de execução das 200 simulações aleatórias foi de 4 horas e 34 minutos, enquanto o FPOMMI levou 4,5 minutos. Ou seja, o FPOMMI teve como resultado, com apenas uma simulação, uma faixa de resultados muito próxima da obtida através de várias que dispenderam 60 vezes mais tempo.

5.2.4 Considerações Finais – 33 Barras

Quanto à primeira validação, conclui-se que os valores de reserva girante obtidos pelo FPOMM são menores do que a média obtida pela simulação das contingências separadamente. Este resultado é devido ao fato que, como as contingências são executadas simultaneamente no FPOMM, os despachos da rede original obtida pelo FPOMM é afetado de modo a acomodar de maneira ótima todas as contingências simultaneamente, o que não ocorre quando as mesmas são simuladas separadamente.

Quanto à segunda validação, observou-se que ao se simular um cenário hidrológico mais severo, houve realocação de potência e de reserva hidráulica para térmica a fim de assegurar balanço de potência e de energia.

Já para a análise intervalar, o FPOMMI apresentou resultados uniformes entre as máquinas, ou seja, o resultado intervalar conseguiu criar, com apenas uma simulação, uma envoltória ao redor dos diversos resultados obtidos através das simulações aleatórias. Os índices de avaliação também se mostraram bastante satisfatórios para o método empregado. Outrossim, o método proposto conseguiu obter resultados similares com o método de validação 60 vezes mais rápido.

5.3 Sistema 291 Barras

O sistema de 291 barras foi selecionado para se avaliar o cálculo da reserva através da comparação com o FPOMP que apenas aloca reserva, além de testes com diferentes configurações de contingência do FPOMM.

Os valores da rede do sistema 291 estão apresentados em Mikilita (2005).

Por fim, o mesmo sistema foi aplicado ao FPOMMI, utilizando uma margem de $\pm 2\%$ para a carga.

Os coeficientes lineares do custo das usinas térmicas 2,3,4,5,18, e 19 (MIKILITA, 2005) são, respectivamente: 2; 1,5; 2,1; 1,7; 2,5 e 2,2.

Os valores dos pesos w_p , w_{pr} , w_{ct} , w_{cr} , w_{cont} e w_{fic} estão apresentados na Tabela 20 do Apêndice B

5.3.1 Comparação entre métodos de alocação de reserva

Esta seção apresenta a análise do comportamento do FPOMM através da alteração do número de contingências, a fim de avaliar o impacto que elas tem na alocação e dimensionamento da reserva. Além disso, os resultados foram comparados com o FPOMP (ARANTES, 2017).

Para tanto, foram simulados três cenários de contingência com o FPOMM e 3 níveis de alocação de reserva para o FPOMP (ARANTES, 2017):

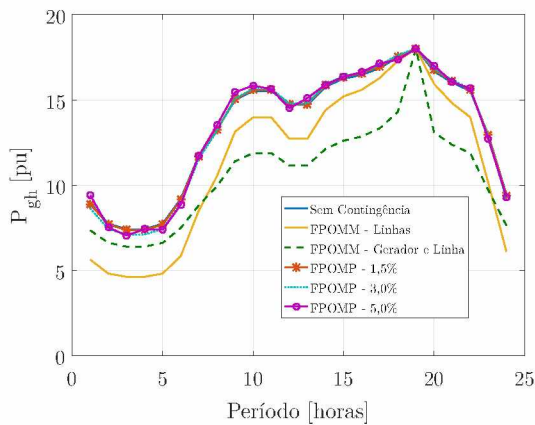
- Caso 1: Sem contingências;
- Caso 2: Apenas saídas das linhas de 525 kV, 31 ao total;
- Caso 3: Saída das linhas e dos 7 maiores geradores hidráulicos;
- Caso 4: FPOMP com percentual de 1,5%, 3% e 5% da carga para a reserva.

A seguir serão apresentados os gráficos dos 7 maiores geradores contendo o despacho do bloco base para os cenários citados anteriormente e para o FPOMP, ao longo de 24 horas. A Figura 23, Figura 24, Figura 25, Figura 26, Figura 27, Figura 28, Figura 29 são referentes aos geradores 1, 2, 3, 4, 10, 11 e 12, respectivamente.

Através dos gráficos, nota-se que o FPOMM sem considerar contingências e o FPOMP (três cenários de 1,5%, 3% e 5% de reserva alocada) possuem pouca diferença no perfil do despacho para cada uma das máquinas. Já ao se considerar a apenas saída de linhas, ainda observa-se que o perfil obtido é muito semelhante aos outros dois métodos.

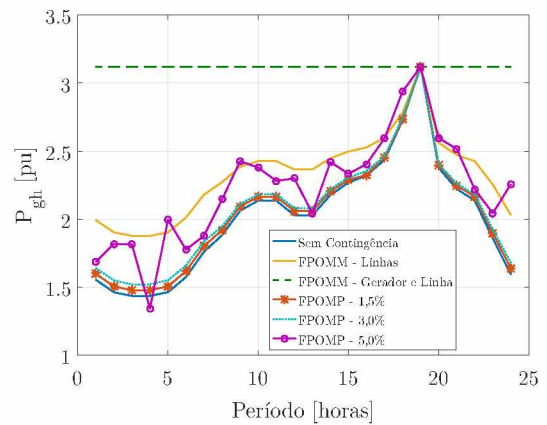
A maior diferença é observada ao se acrescentar as contingências referentes à saída de geradores. Houve uma tendência das máquinas menores operarem com o despacho máximo ao longo dos 24 períodos e as 3 maiores máquinas (1, 3 e 12) operarem com folga, atingindo o pico de geração apenas às 19 horas (horário de ponta). Pode-se concluir que estas máquinas maiores operam com folga para qualquer eventual contingência.

Figura 23 – Compara alocação - P_{gh1}



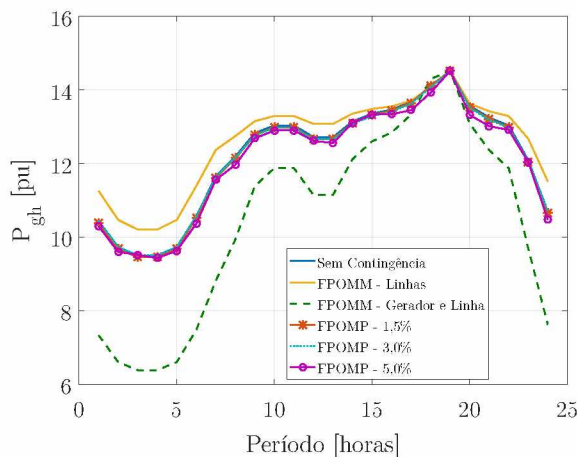
Fonte: O autor (2025).

Figura 24 – Compara alocação - P_{gh2}



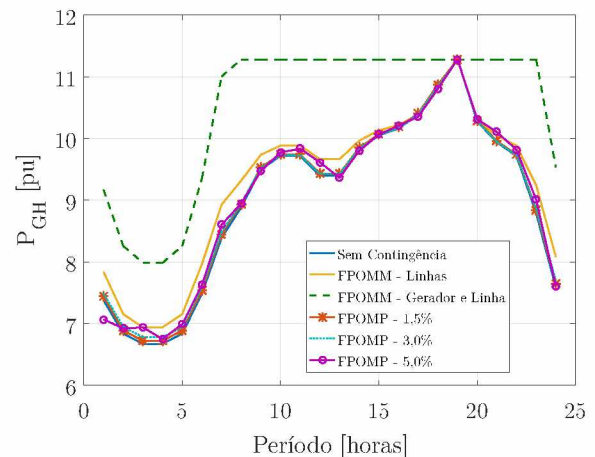
Fonte: O autor (2025).

Figura 25 – Compara alocação - P_{gh3}



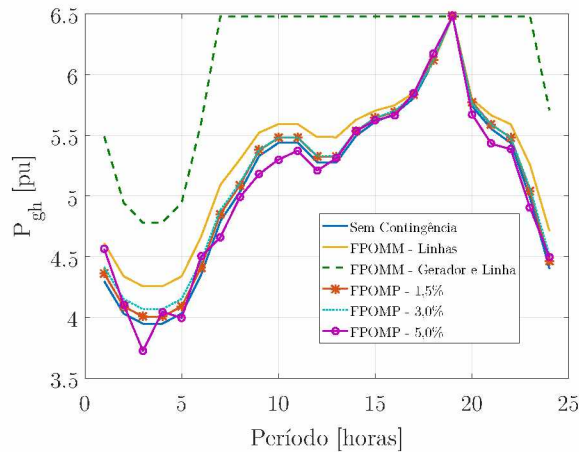
Fonte: O autor (2025).

Figura 26 – Compara alocação - P_{gh4}



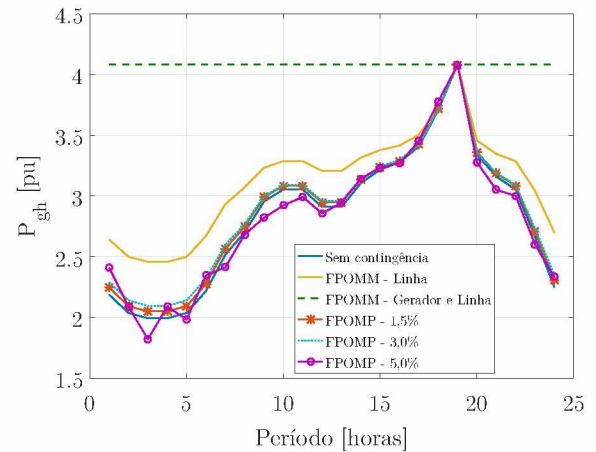
Fonte: O autor (2025).

Figura 27 – Compara alocação - $P_{gh}10$



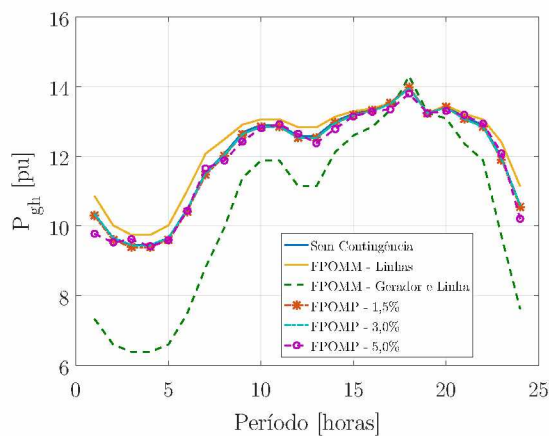
Fonte: O autor (2025).

Figura 28 – Compara alocação - $P_{gh}11$



Fonte: O autor (2025).

Figura 29 – Compara alocação - $P_{gh}12$



Fonte: O autor (2025).

Além disso, os resultados podem ser complementados através da Tabela 12, onde são mostrados a energia referente ao corte de carga, reservas de elevação, de redução e térmica para cada caso. O FPOMP apenas aloca reserva elevação.

Tabela 12 – Análise dos métodos de Reserva

Caso	Res_E	Res_R	Corte de Carga	R_{gt}
Sem Contingência	0	0	0,047 <i>puh</i>	0,00 <i>puh</i>
FPOMM Linhas	0,06 <i>puh</i>	3,04 <i>puh</i>	0,047 <i>puh</i>	0,00 <i>puh</i>
FPOMM Linha e Gerador	33,98 <i>puh</i>	51,58 <i>puh</i>	0,047 <i>puh</i>	0,00 <i>puh</i>
FPOMP - 1,5%	20,62 <i>puh</i>	—	0,047 <i>puh</i>	0,00 <i>puh</i>
FPOMP - 3,0%	40,22 <i>puh</i>	—	0,047 <i>puh</i>	1,03 <i>puh</i>
FPOMP - 5,0%	66,25 <i>puh</i>	—	0,047 <i>puh</i>	2,47 <i>puh</i>

Fonte: O autor (2025).

Segundo a Tabela 12 e valores de despachos de geração representados da Figura 23 a Figura 29, observa-se que : (i) os valores de reserva de elevação e redução aumentaram ao

se aumentar o número de contingências, o que era de se esperar; (ii) conseguiu-se manter o mesmo valor de corte de carga original da rede utilizando despacho de geração convencional (0,0034% da energia consumida ao longo das 24 horas) (Caso 1) , ou seja, sem reserva e sem contingências (o sistema já está operando na base com um pequeno corte de carga); (iii) os despachos de geração horários de cada caso são diferentes, salientando que para os casos 2 e 3, realizaram-se despachos preventivos de geração de modo a minimizar o montantes de reservas e alocadas pelo método proposto.

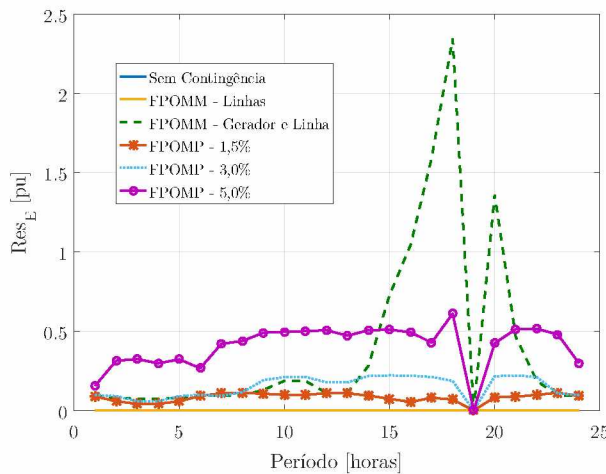
Além disso, pode-se notar que ao aumentar o nível de reserva do FPOMP também houve aumento da reserva térmica. Uma das razões é que para se poder alocar a reserva desejada nos geradores hidráulicos sem que houvesse corte de carga, houve a necessidade do acionamento das usinas térmicas.

Outrossim, com o FPOMM, a medida em que se aumentou o número de contingências, também aumentou o valor da reserva hidráulica (como era de se esperar). Mesmo considerando saída de linhas e geradores, o FPOMM apresentou valores de reserva abaixo dos 5%, comumente utilizado no FPOMP, sem o auxílio das usinas térmicas e sem corte de carga.

Dessa forma, salienta-se a importância da formulação proposta que não somente realiza alocação de reserva mas também a dimensiona, como apresentado na formulação matemática descrita no Capítulo 4.

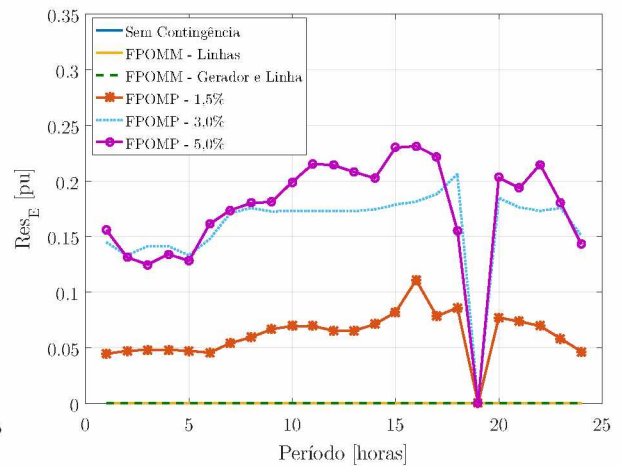
A seguir, a Figura 30, Figura 31, Figura 32, Figura 33, Figura 34, Figura 35, Figura 36 apresentam os gráficos da reserva de elevação dos geradores 1, 2, 3, 4, 10, 11 e 12, respectivamente, ao longo de 24 horas.

Figura 30 – Compara alocação Res_{E1}



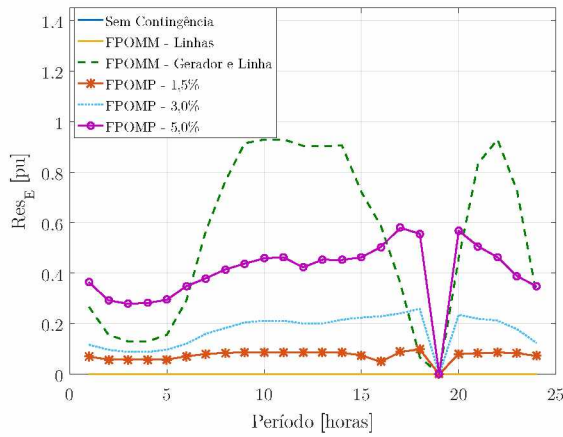
Fonte: O autor (2025).

Figura 31 – Compara alocação Res_{E2}



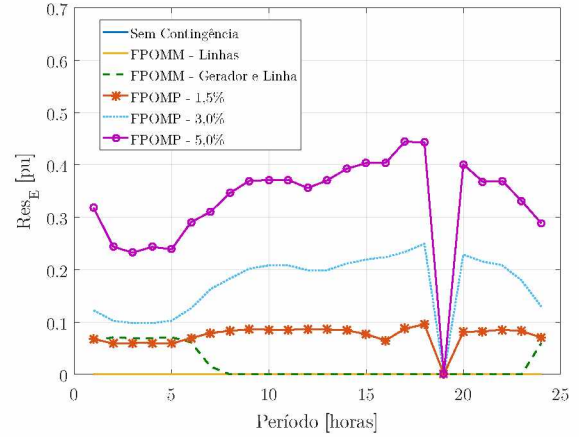
Fonte: O autor (2025).

Figura 32 – Compara alocação
 Res_{E3}



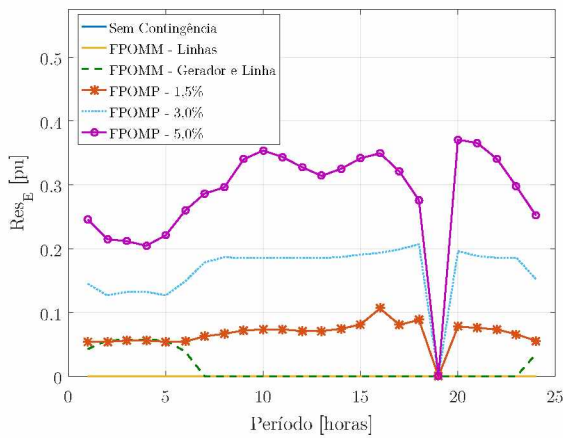
Fonte: O autor (2025).

Figura 33 – Compara alocação
 Res_{E4}



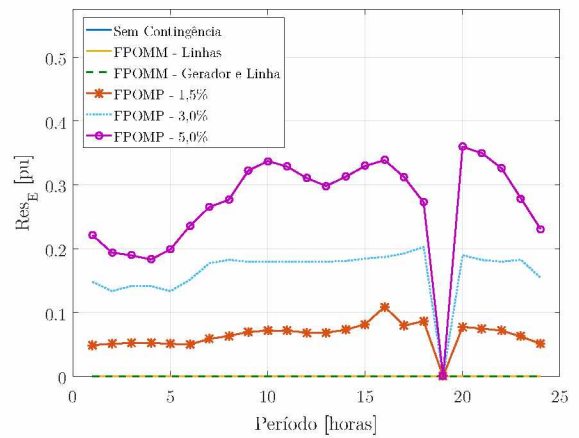
Fonte: O autor (2025).

Figura 34 – Compara alocação
 Res_{E10}



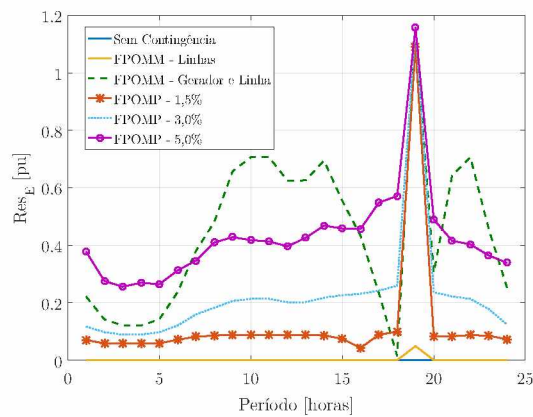
Fonte: O autor (2025).

Figura 35 – Compara alocação
 Res_{E11}



Fonte: O autor (2025).

Figura 36 – Compara alocação – Res_{E12}



Fonte: O autor (2025).

Observa-se que embora os valores de reserva embora tenham perfil diferente para a maior parte dos períodos, todos apresentam exatamente o mesmo comportamento no período de carga pesada. Por exemplo, para o gerador 12 (exceto para os dois casos onde a alocação de reserva foi muito pequena), em todos os casos houve um pico máximo de reserva às 19 horas. Já para os demais geradores, às 19 horas, não houve alocação da reserva.

Além disso, nota-se a flexibilidade de alocação de reserva **FPOMM** visto que a formulação do **FPOMP** força um valor de alocação de reserva pre-especificada e não realmente necessário como evidenciado pelo **FPOMM**, sendo este um dos grandes diferenciais deste trabalho.

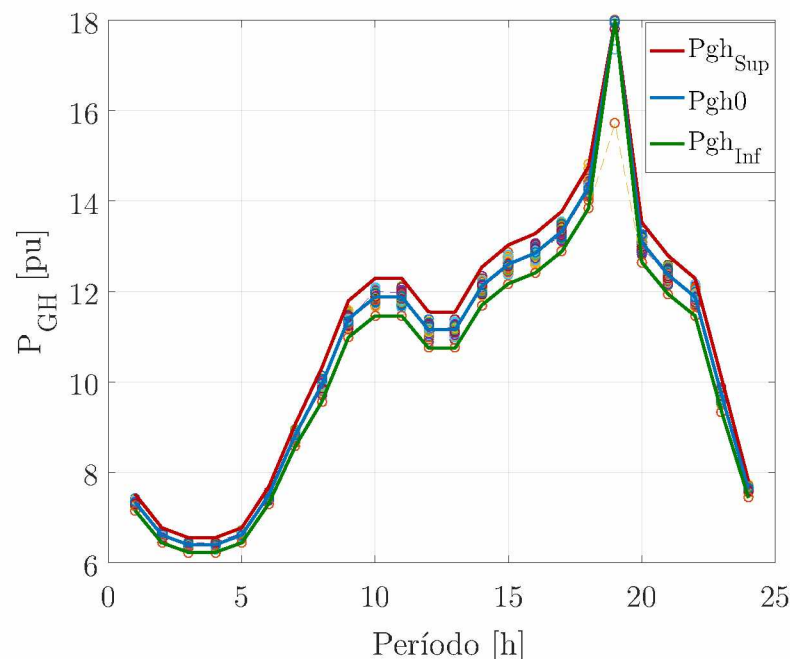
Conclui-se que o **FPOMM** conseguiu otimizar o despacho e a reserva em comparação ao método utilizado no **FPOMP** que otimiza um valor de total de reserva girante pre-estabelecido. Não houve a necessidade de alocação reserva térmica em nenhum dos cenários de contingência. Além disso, ao se retirar apenas as linhas, o **FPOMM** obteve valores de reserva quase nulos, ficando muito próximo ao sistema original.

A seguir serão mostrados os resultados obtidos através do **FPOMMI**.

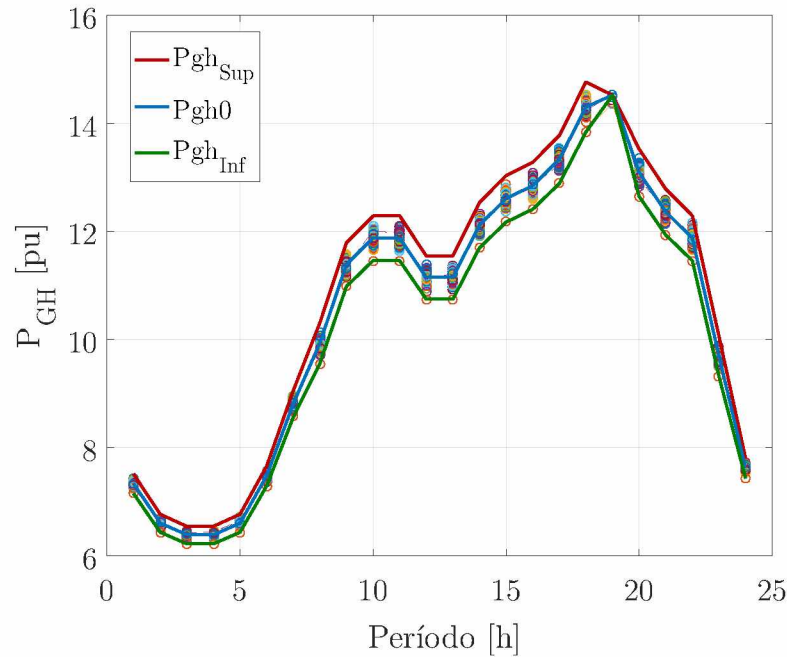
5.3.2 Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Multicontingência Intervalar

A [Figura 37](#) e [Figura 38](#) mostram os valores da injeção de potência do gerador 1 e 3, respectivamente, ao longo de 24 horas do **FPOMM**, **FPOMMI** e simulações exaustivas.

Figura 37 – Sistema 291 - PGH_1 Intervalar



Fonte: O autor (2025).

Figura 38 – Sistema 291 - PGH_3 Intervalar

Fonte: O autor (2025).

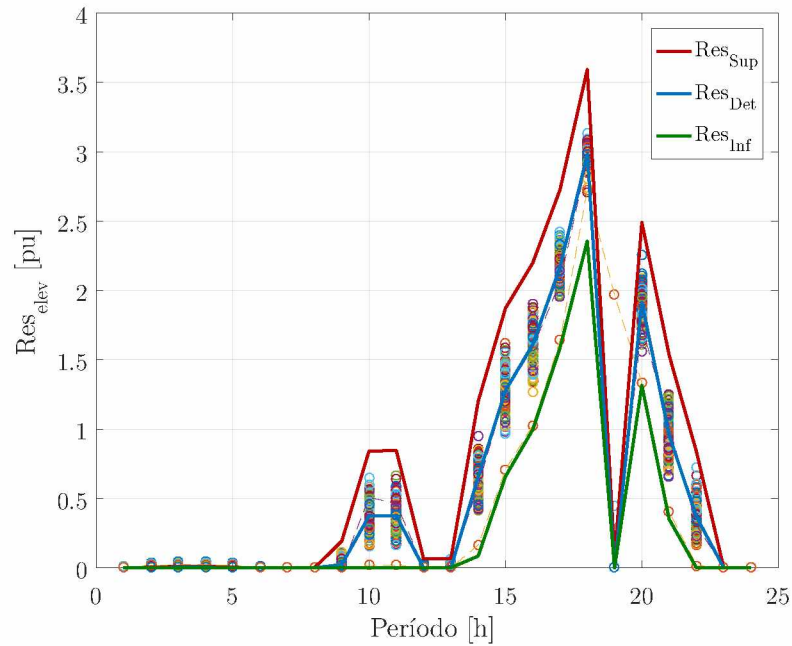
Observa-se que os intervalos calculados pelo método intervalar ($P_{gh_{inf}}$ e $P_{gh_{sup}}$) incluem a nuvem aleatória da mesma forma que observado no sistema de 33 barras. Ou seja, ao longo dos 24 períodos, a geração intervalar limita os valores gerados através das simulações aleatórias.

A reserva de elevação dos geradores 1 e 3 são apresentadas nos gráficos da [Figura 39](#) e [Figura 40](#), respectivamente. Através deles, observa-se uma semelhança com o despacho ativo e com os resultados referentes ao sistema de 33 barras. O método intervalar, novamente, criou uma faixa ao redor dos resultados aleatórios durante os 24 períodos.

Por fim, a reserva de redução dos geradores 1 e 3 são apresentadas através dos gráficos da [Figura 41](#) e [Figura 42](#). Desta vez, o gerador 1 apresentou uma diminuição do diâmetro intervalar nos 9 períodos iniciais, entretanto, nos demais períodos apresentou o mesmo padrão dos casos anteriores, servindo como envoltória para o método aleatório. Já o gerador 3, apresentou o resultado uniforme e esperado para todos os períodos.

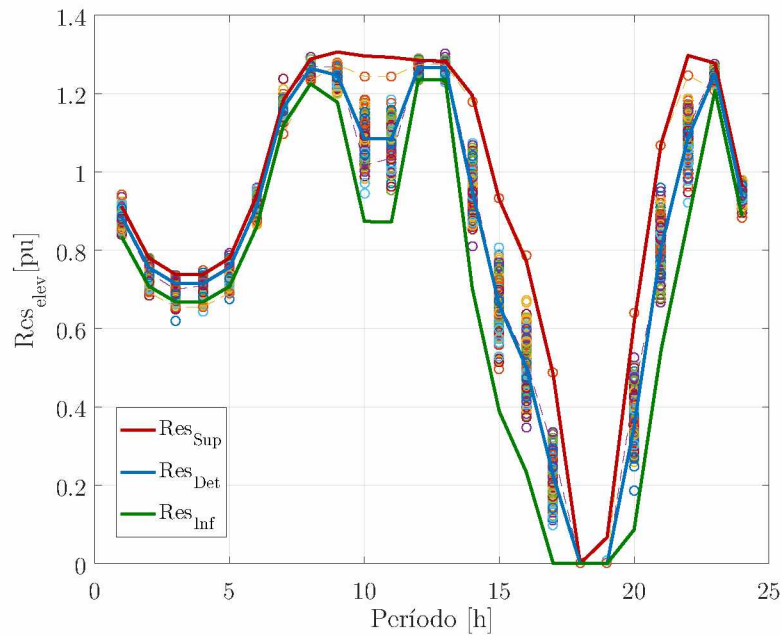
O estreitamento ocorrido nos período 1 a 9 da [Figura 39](#) pode ser um alerta quanto à capacidade de recuperação da rede quando da ocorrência de contingências. Segundo a [Figura 39](#), observa-se que o gerador 1 não tem margem de manobra para aumento de geração a fim de suprir uma situação de contingência. E, segundo a [Figura 42](#), observa-se que o gerador 3 não tem margem de manobra para redução de geração a fim de suprir uma situação de emergência. O comportamento dos intervalos obtidos pelo FPOMMI pode ser utilizado como um orientativo pelos operadores da rede no sentido de detectarem áreas ou geradores mais aptos a suprir situações de saída de linhas e geradores.

Figura 39 – Sistema 291 - R_{e1} Intervalar



Fonte: O autor (2025).

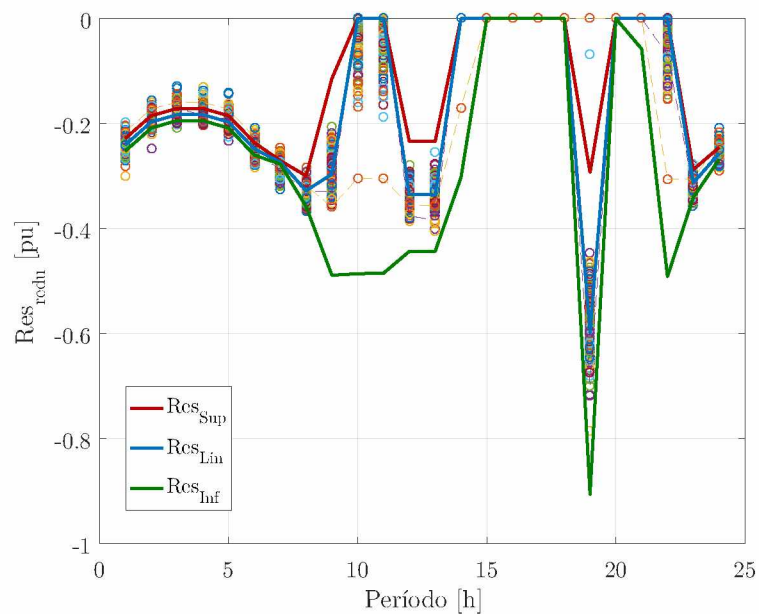
Figura 40 – Sistema 291 - R_{e3} Intervalar



Fonte: O autor (2025).

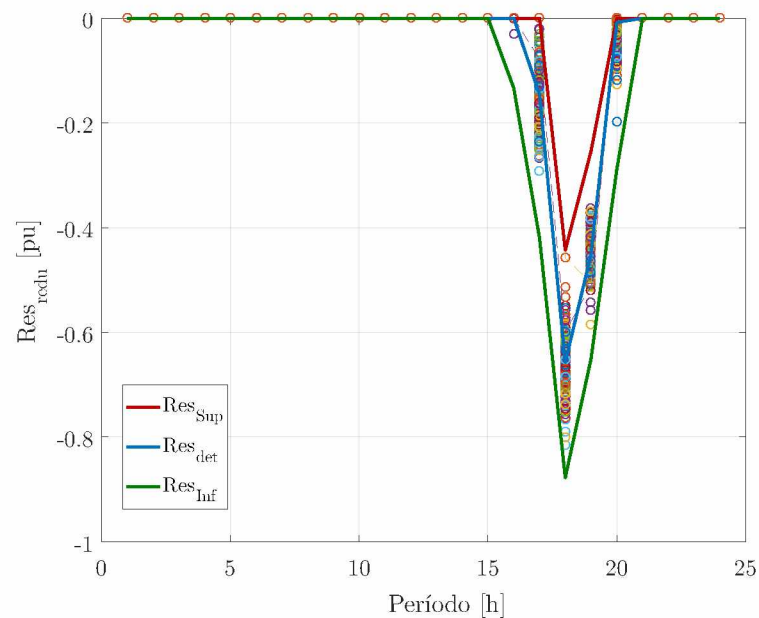
Em complemento aos gráficos, a [Tabela 13](#) apresenta a concentração da nuvem de valores aleatórios no interior do intervalo calculado através do FPOMMI. Através da tabela, nota-se que a nuvem está majoritariamente incluída nos limites calculados pelo método intervalar para todas as variáveis de análise. Apesar da reserva de redução do gerador 1 apresentar uma redução no diâmetro intervalar durante os primeiros períodos, a

Figura 41 – Sistema 291 - R_{r1} Intervalar



Fonte: O autor (2025).

Figura 42 – Sistema 291 - R_{r3} Intervalar



Fonte: O autor (2025).

nuvem ainda se manteve concentrada no interior do resultado intervalar.

Da mesma maneira que analisado no sistema de 33 barras, foi gerada a tabela com o índice de acomodação individual de todos os geradores e uma tabela com a média dos geradores 1 e 3 e do sistema, apresentadas através da [Tabela 14](#) e [Tabela 15](#), respectivamente.

Por fim, através da [Tabela 14](#), observa-se que 93,75% dos valores estão acima do

Tabela 13 – Nuvem contida ao Intervalo - 291 barras

Variável	Gerador 1	Gerador 3
P_{gh}	99,48%	95,90%
Res_{elev}	93,23%	100,00%
Res_{redu}	84,25%	97,33%

Fonte: O autor (2025).

índice de 50%, sendo que apenas 1 dos 144 ficou abaixo do valor de referência de 30%. Ou seja, o método intervalar conseguiu uma excelente aproximação do método de validação de resultados. O índice de acomodação avaliado mostra que o método proposto criou uma envoltória que se aproxima do contorno gerado pela nuvem, tudo isso levando 7 vezes menos tempo. Enquanto que as 200 simulações levaram 123 horas e 2 minutos, o FPOMMI obteve os resultados em 17 horas e 22 minutos

Tabela 14 – Índice de Acomodação individual

Período	P_{gh1}	P_{gh3}	R_{e1}	R_{e3}	R_{r1}	R_{r3}
1	76,78%	76,43%	100%	94,39%	95,18%	100%
2	78,80%	78,82%	92,04%	95,81%	96,89%	100%
3	76,97%	77,29%	97,84%	97,78%	94,74%	100%
4	75,81%	75,90%	92,38%	94,95%	99,52%	100%
5	82,58%	82,24%	88,99%	98,30%	96,78%	100%
6	77,81%	78,37%	100%	90,95%	96,31%	100%
7	76,41%	75,91%	100%	91,98%	98,15%	100%
8	74,77%	53,93%	100%	85,05%	96,23%	100%
9	73,42%	52,50%	59,00%	60,19%	40,79%	100%
10	51,69%	76,81%	74,79%	71,04%	62,34%	100%
11	77,83%	77,63%	76,14%	69,03%	62,78%	100%
12	80,30%	62,90%	60,27%	95,69%	51,05%	100%
13	78,52%	54,86%	74,88%	98,06%	72,13%	100%
14	49,01%	75,12%	70,82%	74,73%	30,52%	100%
15	82,11%	81,97%	75,37%	57,82%	100%	100%
16	55,55%	55,64%	73,19%	60,11%	100%	20,98%
17	48,07%	48,06%	68,29%	48,99%	100%	65,05%
18	75,77%	53,26%	34,40%	100%	100%	82,48%
19	96,74%	70,54%	100%	35,76%	55,03%	56,17%
20	59,89%	59,90%	78,60%	64,14%	100%	68,13%
21	52,87%	52,72%	71,53%	76,12%	100%	100%
22	59,61%	59,69%	84,88%	77,41%	62,37%	100%
23	75,72%	75,60%	100%	95,53%	96,53%	100%
24	75,74%	75,51%	100%	88,64%	99,64%	100%

Fonte: O autor (2025).

A Tabela 15 apresentou todos os resultados acima da referência de 30% e 70 dos 72 índices ficaram acima dos 50%. Logo, o FPOMMI apresentou resultados excelentes em comparação às simulações exaustivas.

Tabela 15 – Índice de Acomodação média - 291 Barras

Período	P_{gh}	Res_e	Res_r	Período	P_{gh}	Res_e	Res_r
1	66,22%	94,09%	78,80%	13	70,22%	84,39%	80,24%
2	68,99 %	91,63%	81,58%	14	65,94%	73,52 %	76,85%
3	71,19 %	97,80 %	83,93%	15	64,49%	63,73%	77,24%
4	69,52 %	95,86%	85,38%	16	62,37%	63,90 %	77,27%
5	70,39%	88,34%	85,03%	17	61,15%	58,20%	74,15%
6	65,30 %	94,58%	80,91%	18	69,30%	34,40%	73,53%
7	79,86 %	87,44 %	86,62%	19	80,43%	43,30 %	68,42%
8	70,40%	72,38%	84,96%	20	61,68%	71,67%	77,90%
9	70,05%	71,12%	79,29%	21	65,07%	67,09%	78,94%
10	64,23%	71,55 %	78,64%	22	65,45%	79,50 %	79,85%
11	66,38%	71,14 %	79,50%	23	72,42%	77,05%	85,08%
12	70,47%	80,03 %	78,67%	24	62,98%	91,64%	80,69%

Fonte: O autor (2025).

Conclui-se que o **FPOMMI** obteve resultados uniformes ao longo dos períodos e entre as máquinas, que se aproximam de uma envoltória criada pelos vários resultados no sentido de que as simulações exaustivas a um tempo muito menor de simulação.

5.4 Considerações Finais

Este capítulo teve como objetivo apresentar os resultados obtidos pelo método proposto através de 2 sistemas, o de 33 e 291 barras. Para tanto foram criados diferentes cenários e os resultados comparados com diversas técnicas tradicionais.

O sistema de 33 barras foi selecionado para se avaliar o impacto na alocação da reserva calculadas considerando contingências individualmente e simultaneamente. Também foi analisado o impacto no cálculo da reserva utilizando dois cenários hidrológicos (seco e úmido).

Já o sistema de 291 barras foi utilizado para se avaliar o cálculo da reserva sob diferentes configurações de contingências e comparado com a tradicional alocação de reserva através do **FPOMP** de [Arantes \(2017\)](#).

Por fim, ambos sistemas foram utilizados para se analisar a incorporação da matemática intervalar na formulação proposta. Para tanto, foi gerada uma nuvem de valores aleatórios através de 200 simulações utilizando o **FPOMM** determinístico, onde a carga de cada simulação possui variação de $\pm 2\%$ com distribuição de probabilidade uniforme.

O **FPOMM** apresentou resultados satisfatórios e dentro do esperado para todos os cenários analisados. O método proposto mostrou que a reserva necessária é maior que

a calculada individualmente através das saídas de linhas, entretanto não há necessidade de ser tão mais elevada quanto a reserva apresentada ao se reduzir a geração eólica, conforme a [Tabela 5](#), visto que o **FPOMM** otimiza o valor a fim de se acomodar todas as contingências simultaneamente. Portanto, provando que há diferença em simular vários cenários individuais e selecionar o pior dos resultados.

Já para os diferentes cenários hidrológicos, o **FPOMM** conseguiu otimizar o sistema, através da realocação do despacho hidráulico e térmico, sem cortar a carga, mesmo com o sistema operando com 17% das metas do cenário chuvoso.

Para a comparação entre os diferentes métodos de reserva, através do sistema de 291 barras, o **FPOMM** apresentou satisfatórios, mostrando uma das vantagens de se calcular a reserva e não apenas otimizar, cujos resultados não apresentaram dependência de usinas térmicas nem corte de carga, independente do cenário. Diferente do **FPOMP** que precisou alocar reserva térmica a fim de se atender a alocação das usinas hidráulicas.

Por fim, a formulação do **FPOMMI** também apresentou resultados dentro do esperado, através da simulação dos dois sistemas, considerando diversas contingências. Os resultados intervalares apresentados criaram uma envoltória ao redor da nuvem de valores geradas através de simulações aleatórias. Além disso, foram avaliados os índices de acomodação, que também apresentaram resultados muito além do valor considerado satisfatório. A matemática intervalar também permite uma visão mais ampla para o planejamento de um dia a frente, quanto a uma possível margem de manobra ser ou não factível para um determinado período. Por fim, a [Tabela 16](#) compara o tempo de execução das simulações exaustivas e do **FPOMMI**. O método proposto conseguiu entregar uma faixa de resultados muito próxima da nuvem de validação com uma grande economia de tempo, dessa forma, sendo altamente eficiente.

Tabela 16 – Tempo de execução

Sistema	Nuvem	FPOMMI
33 Barras	4h34min	4min46s
291 Barras	123h2min	17h22min

Fonte: O autor (2025).

6 Conclusão e sugestões

A matriz elétrica brasileira é bastante diversificada, com predominância de fontes renováveis (hidráulicas, fotovoltaicas e eólicas). Estas fontes possuem natureza aleatória, o que configura variabilidade de geração e comprometimento da confiabilidade. Além disto, o sistema elétrico está sujeito a contingências e perturbações imprevistas, de maneira que podem gerar violações das restrições de operação que podem resultar em interrupções parciais ou totais do sistema elétrico.

Neste contexto, é importante dimensionar e alocar reserva girante, por isso esta tese propôs formulação matemática de um Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Multicontingência Intervalar que, além de despachar potência ativa de geradores hidráulicos e térmicos, dimensiona e aloca a reserva girante entre os mesmos, calcula corte de carga que se faça necessário, ao longo de np períodos de modo a satisfazer a um conjunto de contingências pré-estabelecidas (saída de linhas e geradores).

Por meio da incorporação de **MI**, obtém-se também intervalos ótimos de operação a partir da incorporação de incertezas pré-definidas de carga e geração.

A estratégia de considerar todas as contingências simultaneamente, sequencialmente numa mesma simulação, ao invés de separadamente (como os métodos probabilísticos), juntamente com os despachos ótimos de geração das unidades e alocação das reservas obteve valores totais de reserva e de alocação das mesmas de modo mais eficientes (menores ou maiores valores totais, conforme os cenários simulados) pois garantem a disponibilidade de potência em situações de emergência, além de minimizar corte de carga, quando a mesma se fizer necessária.

A vantagem de se ter intervalos mais prováveis de operação, foi a de oferecer ao operador um leque de mais opções para decisões mais seguras e adaptáveis a diferentes cenários, além de facilitar a análise de riscos e a identificação de soluções mais resilientes e de quais parâmetros são mais críticos para a tomada de decisão. Para os sistema de 33 barras obtiveram-se as seguintes conclusões:

- Através da comparação entre as simulações das contingências individualmente e simultâneas, constatam-se a validade do cálculo da reserva, no sentido de que os resultados obtidos pelo método proposto previu uma maior alocação de reserva quando comparado apenas com o cenário de saída de uma linha, bem como alocou menos reserva ao se retirar uma parcela da geração eólica. O método proposto mostra que não basta simular vários cenários e selecionar o pior deles, pois foi obtido um ponto ótimo de operação com valores intermediários, capazes de suprir o sistema

mesmo com as contingências consideradas simultaneamente. Em síntese, o FPOMM conseguiu reduzir o montante de reserva para o pior cenário (o que implica em menores custos em um mercado de reserva) e mostrou que os valores muito baixos de reserva podem não ser capazes de atender o sistema em alguma das contingências, o que resultaria em corte de carga.

- Já para a análise sob dois cenários hidrológicos, o FPOMM conseguiu realocar a reserva a fim de se operar o sistema sem corte de carga, porém com um leve aumento da geração térmica, o que era esperado. Mesmo assim, manteve-se os níveis de reserva adequado para conseguir atingir as contingências consideradas no cenário crítico.
- Ao se avaliar o FPOMMI os resultados obtidos apresentaram bons índices de acomodação, além dos resultados gráficos serem uniformes entre si e durante os períodos analisados, com a tendência de se criar uma envoltória ao redor da nuvem de valores geradas aleatoriamente. Além do mais, o método proposto foi 60 vezes mais rápido que as várias simulações. Sendo um método altamente eficiente do ponto de vista computacional, visto que os resultados foram similares ao do método de validação.

Para o sistema de 291 barras obtiveram-se as seguintes conclusões:

- Ao se analisar diferentes métodos de reserva, o FPOMM mostrou vantagem em calcular a reserva ao invés de somente alocar, tornando a análise do sistema flexível, para um dia a frente. Além disso, o método proposto foi capaz de manter os níveis de reserva em valores condizentes com os estabelecidos pelo ONS, sem a necessidade de corte de carga, mesmo com os diferentes cenários de contingência.
- Por fim, o FPOMMI também foi eficiente e apresentou resultados dentro da expectativa para o sistema de 291 barras. Análogo ao sistema de 33 barras, a faixa intervalar incluiu a nuvem de valores ao interior, como esperado. Também foi obtidos bons valores de índice de acomodação, além de ser 7 vezes mais rápido que as simulações aleatórias que levaram 5 dias para serem simuladas. O que, para uma análise de um dia a frente fica inviável.

Salienta-se aqui que os valores obtidos pelo ONS são obtidos por métodos não lineares, com saída dupla de linhas e com análises não só em regime permanente, mas também executando estudos dinâmicos, o que os tornam mais confiáveis. Este trabalho, com suas simplificações, tem por objetivo fornecer uma alternativa rápida para alocação de reserva para um dia a frente, fornecendo com intervalos ótimos que possam também orientar o operador da rede em situações contingenciais.

Trabalhos Futuros:

- Introduzir corte de geração eólica ao invés de manter a previsão de geração eólica fixa, a fim de prever e flexibilizar ajustes de geração e demanda;
- Utilizar dispositivos armazenadores de energia (baterias, usinas reversíveis e outros) como fontes de reserva girante, tendo em vista que a perspectiva de aumento de instalação destes dispositivos no futuro ou, construir mais usinas hidrelétricas;
- introduzir incerteza no cálculo dos fluxos pelas linhas de transmissão e corte de carga, via MI;
- avaliações dos impactos no dimensionamento e alocação de reserva girante frente a diferentes níveis de penetração de geração eólica, cenários hidrológicos e eólicos;
- avaliações dos impactos no dimensionamento e alocação de reserva girante frente a diferentes níveis de incerteza da carga e geração;
- estabelecer estratégias de planejamento em situações onde os intervalos ótimos calculados sejam muito pequeno, tornando a operação diária sem margens de manobra frente a contingências mais severas;
- A fim de evitar picos de alocação de reserva girante obtidos em alguns casos analisados, pode-se alterar os limites mínimos dos ajustes de reserva girante.

Referências

ABUL'WAFI, A. R.; EL'GARABLY, A.; NASSER, S. Power system security assessment under n-1 and n-1-1 contingency conditions. In: . [S.l.: s.n.], 2019. Citado na página 26.

ALEFELD, G.; MAYER, G. Interval analysis: theory and applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier BV, v. 121, n. 1-2, p. 421–464, set. 2000. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 66.

ALVAREZ, G. P. *Dimensionamento e Valoração da Capacidade de Reserva Operativa em Ambientes Competitivos, Utilizando Técnicas Probabilísticas*. 200 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Itajubá, Instituto de Engenharia Elétrica, Itajubá, MG, 2003. Citado na página 48.

ALVES, W. F. *PROPOSIÇÃO DE SISTEMAS-TESTE PARA ANÁLISE COMPUTACIONAL DE SISTEMAS DE POTÊNCIA*. 332 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense, Ago 2007. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 93.

AMIRAHMADI, M.; FOROUD, A. A. Stochastic multi-objective programming for simultaneous clearing of energy and spinning reserve markets considering reliability preferences of customers. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier BV, v. 53, p. 691–703, dez. 2013. ISSN 0142-0615. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijepes.2013.05.042>>. Citado na página 42.

ANDRIOLO, R. et al. Electric and energy coupling for long-term operation considering transmission restrictions. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, v. 26, 08 2015. Citado na página 26.

ANEEL. Agência nacional de energia elétrica - *Resolução Normativa No 825*. Ago. 2018. Disponível em: <<http://www.aneel.gov.br/>>. Citado na página 32.

ARANTES, A. G. B. *Alocação de reserva girante em sistemas hidro-térmicos com penetração de geração eólica*. 91 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Curitiba, 2017. Citado 10 vezes nas páginas 27, 28, 35, 37, 38, 45, 51, 93, 109 e 119.

ARAUJO, L. R.; PENIDO, D. R. R. A methodology for optimization of unbalanced distribution systems. *IEEE Latin America Transactions*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 11, n. 5, p. 1182–1189, sep 2013. Citado na página 26.

BANSHWAR, A. et al. Market based procurement of energy and ancillary services from renewable energy sources in deregulated environment. *Renewable Energy*, v. 101, p. 1390–1400, 2017. ISSN 0960-1481. Citado na página 45.

BAPIN, Y.; ZARIKAS, V. Probabilistic estimation of spinning reserves in smart grids with bayesian-driven reserve allocation adjustment algorithm. *International Journal of Energy Sector Management*, Emerald, v. 15, n. 3, p. 433–455, jan. 2021. ISSN 1750-6220. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1108/IJESM-12-2019-0012>>. Citado na página 49.

BARAN, M.; WU, F. Optimal capacitor placement on radial distribution systems. *IEEE Transactions on Power Delivery*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 4, n. 1, p. 725–734, 1989. Citado na página 47.

BENEDETTI, A.; PERONA, P. Bit-width optimization for configurable dsp's by multi-interval analysis. In: IEEE. *Conference Record of the Thirty-Fourth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers (Cat. No. 00CH37154)*. [S.l.], 2000. v. 1, p. 355–359. Citado na página 66.

BLANCO, R. F.; DVORKIN, Y.; ORTEGA-VAZQUEZ, M. Probabilistic security-constrained unit commitment with generation and transmission contingencies. In: *2017 IEEE Power & Energy Society General Meeting*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 1–1. Citado na página 43.

BLASI, T. M. *Planning of Active Distribution Systems Operation with Batteries and Renewable Energy Sources*. 158 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Curitiba, 2020. Citado na página 26.

BORBA, R. A. *Matemática Intervalar Aplicada a Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Trifásico*. 132 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Curitiba, Julho 2020. Citado 10 vezes nas páginas 47, 51, 54, 56, 59, 60, 65, 87, 89 e 90.

BORBA, R. A.; FERNANDES, T. S. P. Interval mathematics applied to multiperiod optimal power flow. In: *2023 15th IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON)*. [S.l.]: IEEE, 2023. p. 1131–1138. Citado 4 vezes nas páginas 29, 48, 51 e 87.

BOUFFARD, F.; GALIANA, F. An electricity market with a probabilistic spinning reserve criterion. *IEEE Transactions on Power Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 19, n. 1, p. 300–307, fev. 2004. Citado na página 41.

BRUNO, S. et al. Unbalanced three-phase optimal power flow for smart grids. *IEEE Transactions on Industrial Electronics - IEEE TRANS IND ELECTRON*, v. 58, p. 4504–4513, 10 2011. Citado na página 26.

BURKILL, J. C. Functions of intervals. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Wiley, s2-22, n. 1, p. 275–310, 1924. Citado na página 52.

CEREZOLLI, P. *Planejamento da Operação de Sistemas Hidro-Termo-eólicos sob Incertezas Utilizando Otimização Robusta*. 132 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Curitiba, Janeiro 2021. Citado na página 50.

CHEN, C.-L.; CHEN, Z.-Y.; LEE, T.-Y. Multi-area economic generation and reserve dispatch considering large-scale integration of wind power. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier BV, v. 55, p. 171–178, fev. 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2013.08.031>>. Citado na página 43.

COMBA, J. L. D.; STOL, J. A ne arithmetic and its applications to computer graphics. In: CITESEER. *Proceedings of VI SIBGRAPI (Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing)*. [S.l.], 1993. p. 9–18. Citado na página 52.

- COSTA, A. L. *Alocação ótima conjunta de energia e reservas operativas baseada em fluxo de potência ótimo dinâmico*. 150 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 32, 35, 41 e 51.
- DAMODARAN, S.; KUMAR, T. S. Hydro-thermal-wind generation scheduling considering economic and environmental factors using heuristic algorithms. *Energies*, MDPI AG, v. 11, n. 2, p. 353, fev. 2018. ISSN 1996-1073. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3390/en11020353>>. Citado na página 45.
- Darvish, H.; Darvishi, A.; Hejazi, H. Integration of demand side management in security constrained energy and reserve market. In: *2015 IEEE Power Energy Society Innovative Smart Grid Technologies Conference (ISGT)*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 1–5. Citado na página 45.
- DAS, B. Radial distribution system power flow using interval arithmetic. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier BV, v. 24, n. 10, p. 827–836, dez. 2002. Citado na página 47.
- EPE. *Flexibilidade e Capacidade: Conceitos para a incorporação de atributos ao planejamento*. [S.l.], 2018. Citado na página 34.
- Fan, N.; Chen, R.; Watson, J. N-1-1 contingency-constrained optimal power flow by interdiction methods. In: *2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1–6. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 51.
- FOROUD, A. A. Stochastic multi-objective programming for simultaneous clearing of energy and spinning reserve markets considering reliability preferences of customers. *International Journal of Power and Energy Systems*, v. 53, 05 2013. Citado na página 42.
- GOOI, H. et al. Optimal scheduling of spinning reserve. *IEEE Transactions on Power Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 14, n. 4, p. 1485–1492, 1999. Citado na página 41.
- GU, B. C. et al. Quasi-monte carlo simulation based economic dispatch with wind power integrated. In: *2016 IEEE Innovative Smart Grid Technologies - Asia (ISGT-Asia)*. [S.l.]: IEEE, 2016. p. 264–269. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 49.
- GWALTNEY, C. R. et al. Interval methods for nonlinear equation solving applications. In: _____. [S.l.: s.n.], 2008. p. 81–96. Citado na página 52.
- HANSEN, E. Global optimization using interval analysis ? the multi-dimensional case. *Numerische Mathematik*, Springer Science and Business Media LLC, v. 34, n. 3, p. 247–270, set. 1980. Citado na página 65.
- HANSEN, E.; GREENBERG, R. An interval newton method. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier BV, v. 12, n. 2-3, p. 89–98, maio 1983. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 66.
- HANSEN, E.; SENGUPTA, S. Bounding solutions of systems of equations using interval analysis. *BIT*, Springer Science and Business Media LLC, v. 21, n. 2, p. 203–211, jun. 1981. Citado na página 66.

- HANSEN, E.; WALSTER, G. Nonlinear equations and optimization. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier BV, v. 25, n. 10-11, p. 125–145, maio 1993. Citado 3 vezes nas páginas 59, 60 e 61.
- HANSEN, E.; WALSTER, G. W. *Global optimization using interval analysis: revised and expanded*. [S.l.]: CRC Press, 2003. v. 264. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 62.
- HRAIECH, S. E. et al. Genetic algorithm coupled with the krawczyk method for multi-objective design parameters optimization of the 3-upu manipulator. *Robotica*, Cambridge University Press (CUP), v. 38, n. 6, p. 1138–1154, ago. 2019. ISSN 1469-8668. Citado na página 67.
- IBRAEV, S. *A new parallel method for verified global optimization*. 145 p. Tese (Doutorado) — Bergischen Universität Gesamthochschule Wuppertal, Wuppertal, 2001. Citado na página 67.
- ICHIDA, K. Constrained optimization using interval analysis. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier BV, v. 31, n. 3-4, p. 933–937, dez. 1996. Citado na página 66.
- JAMSHIDI, S. et al. Impact of spinning reserve on frequency control in a hybrid power plant including renewable energy. *Journal of Green Energy Research and Innovation*, Apex Publishing, v. 1, n. 3, p. 16–29, set. 2024. ISSN 3041-9018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.61186/jgeri.1.3.16>>. Citado na página 26.
- JIANG, R. et al. Two-stage network constrained robust unit commitment problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier BV, v. 234, n. 3, p. 751–762, maio 2014. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2013.09.028>>. Citado na página 49.
- JUNG, C.-M.; REDDY, S. S. Optimal wind-thermal coordination scheduling considering reserve requirement. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*, International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences plus Mangey Ram, v. 5, n. 1, p. 108–119, nov. 2019. ISSN 2455-7749. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.33889/IJMEMS.2020.5.1.010>>. Citado na página 44.
- JUNIOR, A. R. B.; FERNANDES, T. S. P.; BORBA, R. A. Voltage regulation planning for distribution networks using multi-scenario three-phase optimal power flow. *Energies*, MDPI AG, v. 13, n. 1, p. 159, dez. 2019. Citado na página 26.
- JUNIOR, H. M. R.; MELO, I. D.; NEPOMUCENO, E. G. An interval power flow for unbalanced distribution systems based on the three-phase current injection method. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier BV, v. 139, p. 107921, jul. 2022. ISSN 0142-0615. Citado 3 vezes nas páginas 48, 51 e 94.
- KEARFOTT, R. An interval branch and bound algorithm for bound constrained optimization problems. *Journal of Global Optimization*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2, n. 3, 1992. Citado na página 66.
- KJØLLER, S. et al. Non-linear global optimization using interval arithmetic and constraint propagation. In: _____. [S.l.: s.n.], 2007. v. 4, p. 45–58. Citado na página 66.
- KRAWCZYK, R. Newton-algorithmen zur bestimmung von nullstellen mit fehlerschranken. *Computing*, Springer Science and Business Media LLC, v. 4, n. 3, p. 187–201, set. 1969. Citado 6 vezes nas páginas 52, 62, 65, 66, 67 e 68.

KRAWCZYK, R.; NEUMAIER, A. An improved interval newton operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier BV, v. 118, n. 1, p. 194–207, ago. 1986. Citado na página 62.

LENG, S. et al. An affine arithmetic-based model of interval power flow with the correlated uncertainties in distribution system. *IEEE Access*, v. 8, p. 60293–60304, 2020. Citado na página 94.

LIAO, X. et al. Interval method for uncertain power flow analysis based on taylor inclusion function. *IET Generation, Transmission & Distribution*, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 11, n. 5, p. 1270–1278, mar. 2017. Citado na página 62.

LIMA, G. R.; MELO, I. D. de; FILHO, J. A. P. Interval holomorphic embedding load flow method: A novel approach for interval analysis considering load and generation uncertainties. *Electric Power Systems Research*, Elsevier BV, v. 226, p. 109921, jan. 2024. ISSN 0378-7796. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 51.

LIN, S. et al. Static voltage stability margin calculation of power systems with high wind power penetration based on the interval optimisation method. *IET Renewable Power Generation*, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 14, n. 10, p. 1728–1737, jun. 2020. ISSN 1752-1424. Citado na página 48.

LITVINOV, G. L.; SOBOLEVSKIĪ, A. N. Idempotent interval analysis and optimization problems. *Reliable Computing*, Springer, v. 7, n. 5, p. 353–377, 2001. Citado na página 67.

LIU, G.; TOMSOVIC, K. L. Quantifying spinning reserve in systems with significant wind power penetration. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 27, p. 2385–2393, 2012. Citado na página 43.

LU, F. et al. Affine arithmetic-based power flow algorithm considering uncertainty for hybrid AC/DC grids incorporating VSCs. *IET Generation, Transmission & Distribution*, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 13, n. 10, p. 1856–1864, maio 2019. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 62.

MICHEL, D.; ZIDNA, A. Interval-krawczyk approach for solving nonlinear equations systems in b-spline form. In: *Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences*. [S.l.]: Springer, 2015. p. 455–465. Citado na página 67.

MIKILITA, M. A. S. *Um Modelo de Fluxo de Potência Ótimo para Minimização do Corte de Carga*. 132 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Curitiba, Julho 2005. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 109.

MOGO, J. B.; KAMWA, I. Improved deterministic reserve allocation method for multi-area unit scheduling and dispatch under wind uncertainty. *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy*, Springer Science and Business Media LLC, v. 7, n. 5, p. 1142–1154, mar. 2019. ISSN 2196-5420. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s40565-019-0499-4>>. Citado na página 43.

MONEGO, A. C. D. *Fluxo de potência ótimo utilizando a matemática intervalar*. 117 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia,

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Curitiba, Dezembro 2017. Citado 5 vezes nas páginas 47, 51, 52, 65 e 89.

MONTICELLI, A. J. *Fluxo de carga em redes de energia elétrica*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 1983. v. 1. Citado na página 47.

MOORE, R. *Interval analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1966. (Prentice-Hall series in automatic computation). Citado 4 vezes nas páginas 52, 60, 65 e 68.

MOORE, R. *Methods and Applications of Interval Analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1979. (Studies in Applied and Numerical Mathematics). ISBN 9780898711615. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=0IJrpBIIdXe4C>>. Citado na página 52.

MOORE, R. E. *Automatic error analysis in digital computation*. Sunnyvale, California: Lockheed Missiles and Space Division, 1959. (Technical Report LMSD-4842). Citado na página 52.

MOORE, R. E. *Introduction to Interval Analysis*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. ISBN 0898716691. Citado 8 vezes nas páginas 52, 53, 58, 59, 61, 62, 63 e 90.

MORAES, R. A. de et al. Short-term scheduling of integrated power and spinning reserve of a wind-hydrothermal generation system with AC network security constraints. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Springer Science and Business Media LLC, v. 29, n. 1, p. 1–14, dez. 2017. Citado 5 vezes nas páginas 26, 27, 45, 46 e 51.

MORI, H.; YUIHARA, A. Calculation of multiple power flow solutions with the krawczyk method. In: *ISCAS'99. Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Circuits and Systems VLSI (Cat. No.99CH36349)*. [S.l.]: IEEE, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 47, 61 e 65.

NAVERSEN, C. Øyn; FARAHMAND, H.; HELSETH, A. *Procurement of Spinning Reserve Capacity in aHydropower Dominated System Through MixedStochastic-Robust Optimization*. 2019. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1903.04805>>. Citado 3 vezes nas páginas 26, 46 e 51.

NEUMAIER, A. *Interval methods for systems of equations*. [S.l.]: Cambridge university press, 1990. v. 37. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 62.

NEUMAIER, A. Complete search in continuous global optimization and constraint satisfaction. *Acta numerica*, Cambridge University Press, v. 13, p. 271–369, 2004. Citado na página 52.

NOBLET, V. et al. 3-d deformable image registration: a topology preservation scheme based on hierarchical deformation models and interval analysis optimization. *IEEE Transactions on image processing*, IEEE, v. 14, n. 5, p. 553–566, 2005. Citado na página 67.

OLIVEIRA, P. W.; CLAUDIO, D. M.; DIVERIO, T. A. *Fundamentos de matemática intervalar*. 2ª. ed. Porto Alegre, Brasil: Editora Sagra Luzzato, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 57.

ONS. Manual de procedimentos da operação. In: . [S.l.]: ONS, 2025. Citado 7 vezes nas páginas 26, 27, 28, 30, 31, 32 e 34.

- ORTEGA-VAZQUEZ, M.; KIRSCHEN, D.; PUDJANTO, D. Optimising the scheduling of spinning reserve considering the cost of interruptions. *IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 153, n. 5, p. 570, 2006. Citado na página 42.
- PALMEIRA, E.; BEDREGAL, B.; SANTIAGO, R. Homotopia intervalar. v. 12, 01 2011. Citado na página 52.
- PARTOVI, F. et al. A stochastic security approach to energy and spinning reserve scheduling considering demand response program. *Energy*, v. 36, n. 5, p. 3130–3137, 2011. Citado na página 42.
- PEREIRA, L. E. de S. *Metodologia intervalar para tratamento de incertezas em problemas de fluxo de potência*. Juiz de Fora, MG: [s.n.], 2011. 137 p. Citado 5 vezes nas páginas 28, 38, 65, 85 e 87.
- PEREIRA, L. E. de S. *Metodologias generalizadas de solução do fluxo de potência intervalar considerando dados incertos*. 137 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Juiz de Fora, MG, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 51.
- PEREIRA, L. E. S.; COSTA, V. M. Análise de incertezas em sistemas elétricos via fluxo de potência intervalar. *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, p. 4147–4179, mar 2012. Citado na página 65.
- RATSCHEK, H.; ROKNE, J. Experiments using interval analysis for solving a circuit design problem. *Journal of Global Optimization*, Springer Science and Business Media LLC, v. 3, n. 4, p. 501–518, 1993. Citado na página 66.
- RATSCHEK, H.; VOLLER, R. L. What can interval analysis do for global optimization? *Journal of Global Optimization*, Springer, v. 1, n. 2, p. 111–130, 1991. Citado na página 66.
- REDDY, S. S. et al. Energy and spinning reserve scheduling for a wind-thermal power system using CMA-ES with mean learning technique. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier BV, v. 53, p. 113–122, dez. 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2013.03.032>>. Citado na página 43.
- SAHEBI, M. M. R.; HOSSEINI, S. H. Stochastic security constrained unit commitment incorporating demand side reserve. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier BV, v. 56, p. 175–184, mar. 2014. Citado na página 42.
- SCHICHL, H.; NEUMAIER, A. Interval analysis on directed acyclic graphs for global optimization. *Journal of Global Optimization*, Springer Science and Business Media LLC, v. 33, n. 4, p. 541–562, dez. 2005. Citado na página 67.
- SEMENOV, V. Y.; SEMENOVA, Y. V. A method for global minimization of functions using the krawczyk operator. *Cybernetics and Systems Analysis*, Springer Science and Business Media LLC, v. 55, n. 6, p. 1052–1058, nov. 2019. ISSN 1573-8337. Citado na página 68.
- SETA, F. da S. *Reconfiguração de sistemas de distribuição considerando incertezas através de fluxo de potência intervalar e sistemas imunológicos artificiais*. Juiz de Fora, MG: [s.n.], 2015. 127 f. Citado na página 62.

- SHAYESTEH, E.; YOUSEFI, A.; Parsa Moghaddam, M. A probabilistic risk-based approach for spinning reserve provision using day-ahead demand response program. *Energy*, v. 35, n. 5, p. 1908–1915, 2010. ISSN 0360-5442. Citado na página 42.
- SIMOPOULOS, D.; KAVATZA, S.; VOURNAS, C. Reliability constrained unit commitment using simulated annealing. *IEEE Transactions on Power Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 21, n. 4, p. 1699–1706, nov. 2006. Citado na página 41.
- SODER, L. Reserve margin planning in a wind-hydro-thermal power system. *IEEE Transactions on Power Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 8, n. 2, p. 564–571, maio 1993. Citado na página 44.
- SOUZA, A. de; DECKER, I. C. Serviços ancilares no mercado de energia elétrica brasileiro. *Congresso Brasileiro de Automática*, Congresso Brasileiro de Automática, (14: Set. 2-5, 2002, p. 132, Nov 2002. Citado na página 29.
- STAUNING, O.; BENDTSEN, C. *Flexible automatic differentiation using templates and operator overloading in ANSI C++*. Technical University of Denmark, 2003. Citado na página 66.
- SUN, B. et al. An effective spinning reserve allocation method considering operational reliability with multi-uncertainties. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 39, n. 1, p. 1568–1581, 2024. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 51.
- SUNAGA, T. Theory of interval algebra and its application to numerical analysis. *RAAG memoirs*, Gakujutsu Bunken Fukyu-kai, v. 2, n. 29-46, p. 209, 1958. Citado na página 52.
- TAVARES, L. A. Matriz elétrica brasileira e as tendências futuras. *RECIMA21 - Revista Científica Multidisciplinar - ISSN 2675-6218*, RECIMA21 - Revista Científica Multidisciplinar, v. 4, n. 5, p. e453135, maio 2023. ISSN 2675-6218. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.47820/recima21.v4i5.3135>>. Citado na página 26.
- UTURBEY, W.; COSTA, A. S. Short term hydrothermal coordination in the presence of price-responsive loads. In: *2005 IEEE Russia Power Tech*. [S.l.]: IEEE, 2005. Citado na página 26.
- VALAREZO, O. M.; WANG, M.; MEMON, R. A. Incorporating optimal transmission switching in unit commitment with a probabilistic spinning reserve criterion. In: *2018 2nd IEEE Conference on Energy Internet and Energy System Integration (EI2)*. [S.l.]: IEEE, 2018. p. 1–6. Citado na página 42.
- VARGAS, R. de et al. Incerteza de dados em fluxo de potência: uma abordagem com a matemática intervalar do c-xsc. *TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 9, n. 3, p. 491–502, 2008. ISSN 2179-8451. Citado na página 52.
- WANG, J.; WANG, X.; WU, Y. Operating reserve model in the power market. *IEEE Transactions on Power Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 20, n. 1, p. 223–229, fev. 2005. Citado na página 42.
- WANG, Y. Probabilistic spinning reserve adequacy evaluation for generating systems using an markov chain monte carlo-integrated cross-entropy method. *IET Generation, Transmission & Distribution*, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 9, n. 8, p. 719–726, maio 2015. ISSN 1751-8695. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 49.

- WANG, Z.; ALVARADO, F. Interval arithmetic in power flow analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 7, n. 3, p. 1341–1349, 1992. Citado 5 vezes nas páginas 28, 38, 46, 51 e 65.
- WARMUS, M. Calculus of approximations. *Série des Sciences Mathématiques*, Bulletin de L'Académie Polonaise des Sciences, IV, n. 5, p. 253–259, 1956. Citado na página 52.
- WU, H. et al. A mixed uncertainty power flow algorithm-based centralized photovoltaic (PV) cluster. *Energies*, MDPI AG, v. 12, n. 20, p. 4008, out. 2019. Citado na página 62.
- YANG, C.; TIAN, K.; GAO, X. Supply chain resilience: Measure, risk assessment and strategies. *Fundamental Research*, Elsevier BV, v. 5, n. 2, p. 433–436, mar. 2025. ISSN 2667-3258. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.fmre.2023.03.011>>. Citado na página 46.
- YANG, Z. et al. Unit commitment optimization scheduling for thermal power plants. In: *2023 3rd International Signal Processing, Communications and Engineering Management Conference (ISPCEM)*. [S.l.]: IEEE, 2023. p. 80–84. Citado na página 43.
- YAO, L. et al. Optimizing the probabilistic spinning reserve for the interconnected system: Approximate expected energy not supplied using a piecewise linearization method. In: *2018 IEEE Power & Energy Society General Meeting (PESGM)*. [S.l.]: IEEE, 2018. p. 1–5. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 49.
- YOUNG, R. The algebra of many-valued quantities. *Mathematische Annalen*, v. 104, p. 260–290, 1931. Citado na página 52.
- YUAN, W.; ZHAI, Q. Power-based transmission constrained unit commitment formulation with energy-based reserve. *IET Generation, Transmission & Distribution*, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 11, n. 2, p. 409–418, jan. 2017. ISSN 1751-8695. Citado na página 42.
- YUAN, X. et al. An extended NSGA-III for solution multi-objective hydro-thermal-wind scheduling considering wind power cost. *Energy Conversion and Management*, Elsevier BV, v. 96, p. 568–578, maio 2015. Citado na página 45.
- ZHENG, J. et al. Reliability constrained unit commitment with combined hydro and thermal generation embedded using self-learning group search optimizer. *Energy*, v. 81, 01 2015. Citado na página 44.
- ZUGNO, M.; CONEJO, A. J. A robust optimization approach to energy and reserve dispatch in electricity markets. *European Journal of Operational Research*, Elsevier BV, v. 247, n. 2, p. 659–671, dez. 2015. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2015.05.081>>. Citado na página 49.

Apêndices

APÊNDICE A – Dados 33 Barras

Tabela 17 – Margem de Inicialização Intervalar - 33 Barras

Gerador	1	2	3	4	5	6	7
δ_{gcont}	0,0083	0,0022	0,0167	0,0080	0,0167	0,0233	0,0033
δ_{Pgh}	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
δ_{Rgh}	0,00055	0,000095	0,0018	0,008	0,0025	0,001	0,0005
δ_{Rgh}				0,10			
δ_{Pgt}				0,02			
δ_{Rgt}				0,005			
δ_{teta}				0,001			
δ_{Pd}				0,02			
δ_{eol}				0,15			
δ_{fic}				0,02			

Tabela 18 – Pesos - 33 Barras

w_p	w_{pr}	w_{ct}	w_{cr}	w_{fic}	w_{cont}
10	50	7000	7000	2000	100

APÊNDICE B – Dados 291 Barras

Tabela 19 – Margem de Inicialização Intervalar - 291 Barras

Gerador	1	2	3	4	10	11	12
δ_{gcont}	0,07	0,5	0,5	0,5	0,5	1	2
δ_{Pgh}	0,5	1,5	3,5	0,5	0,75	0,95	0,075
δ_{Pgh}					0,95		
δ_{Rgh}					0,10		
δ_{Pgt}					0,10		
δ_{Rgt}					0,005		
δ_{teta}					0,002		
δ_{Pd}					0,02		
δ_{eol}					0,00		
δ_{fic}					0,005		

Tabela 20 – Pesos - 291 Barras

w_p	w_{pr}	w_{ct}	w_{cr}	w_{fic}	w_{cont}
10	500	7000	7000	2000	5

APÊNDICE C – Perfil Geração Eólica - 33 Barras

Perfil da geração eólica - 33 Barras

Período	Perfil Eólica [%]
1	0,6300
2	0,5800
3	0,5650
4	0,5650
5	0,5800
6	0,6400
7	0,7300
8	0,7800
9	0,8400
10	0,8600
11	0,8600
12	0,8300
13	0,8300
14	0,8700
15	0,8900
16	0,9000
17	0,9200
18	0,9600
19	1,0000
20	0,9100
21	0,8800
22	0,8600
23	0,7700
24	0,6500