UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

DÉBORA CRISTINA ACCORDI

A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

CURITIBA
2006

DÉBORA CRISTINA ACCORDI

A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

Monografia apresentada ao Curso de Especialização para Professores de Matemática, Departamento de Matemática do Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Matemática

Orientador: **Prof. Dr. Alexandre Luis Trovon de Carvalho.**

CURITIBA
2006

TERMO DE APROVAÇÃO

DÉBORA CRISTINA ACCORDI

A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

Monografia aprovada para conclusão do Curso de Especialização para Professores de Matemática, Departamento de Matemática do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pelos seguintes professores:

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Luis Trovon de Carvalho
Departamento de Matemática, UFPR

Examinador: Prof. Dr. Volmir Eugênio Wilhelm
Departamento de Matemática, UFPR

Curitiba, 11 de novembro de 2006

"Por que nos torna tão pouco felizes,
esta maravilhosa ciência aplicada,
que economiza trabalho e
torna a vida mais fácil?
A resposta é simples:
Porque ainda não aprendemos
a nos servir dela com bom senso".

Einstein.

Dedico este trabalho a todos os meus familiares, de modo especial em memória de meu pai, Amilton João Accordi, com quem muito aprendi, durante o tempo que esteve comigo.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, meu companheiro, sempre presente guiando meus passos e me dando forças nos momentos difíceis. A Ele que meu a vida, a saúde e a inteligência.

A minha família, por todo apoio e compreensão.

Ao professor Alexandre Trovon, pela orientação, incentivo, disponibilidade de materiais à pesquisa, sua amizade e toda sua colaboração durante o percurso.

A todos que direta, ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 - FUNÇÃO EXPONENCIAL CRESCENTE E FUNÇÃO EXPONENCIAL DECRESCENTE 31
GRÁFICO 2 - RELAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA 32

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - NÚMEROS INTEIROS EXPRESSOS COMO POTÊNCIAS DE 10 21
TABELA 2 - TÁBUA DOS LOGARITMOS DECIMAIS COM APROXIMAÇÃO DE TRÊS CASAS DECIMAIS 21
TABELA 3 - O COMPORTAMENTO DA FÓRMULA $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ PARA VALORES CRESCENTES DE *n* 44
TABELA 4 - CÁLCULO DO CAPITAL (JUROS COMPOSTOS) 47
TABELA 5 - CÁLCULO DETALHADO DO CAPITAL NO SISTEMA DE JUROS COMPOSTOS 47
TABELA 6 - POPULAÇÃO DO MÉXICO (1980-1986) 50

RESUMO

Este trabalho apresenta a modelagem matemática como uma estratégia de ensino. Primeiramente é feito um breve comentário sobre a educação matemática e o método de ensino tradicional, o que justifica o uso da modelagem. Diversas definições são apresentadas para modelos, modelagem matemática e modelação, segundo autores da área. O tema é abordado com base nas idéias de Bassanezi, descrevendo as etapas a serem seguidas e os objetivos para seu uso. Um questionamento é feito, a respeito das vantagens e dificuldades na sua implementação, colocando os argumentos e os obstáculos apresentados por Bassanezi. Diversos temas secundários são discutidos, como por exemplo, a importância da matemática, o conceito matemático, a formação do indivíduo, o vestibular, a avaliação, entre outros. Posteriormente é apresentado o conteúdo matemático: exponenciais e logaritmos, trazendo uma breve abordagem histórica, as definições e as propriedades. Na seqüência é feito um estudo sobre a representação gráfica, algumas considerações sobre o número *e* e o logaritmo natural. Unindo a teoria sobre modelagem matemática e o conceito matemático, cabe focalizar o estudo na prática. Para isso, são apresentados exemplos de algumas situações que podem ser modeladas para o ensino de exponenciais e logaritmos, fazendo um estudo sobre cada tema e as possíveis abordagens dentro do contexto estudado. Alguns passos são sugeridos para a proposta em si, destacando a possibilidade de trabalhar todo o conteúdo envolvido, utilizando o tema crescimento populacional.

Palavras-chave: Modelagem, Modelação, Exponenciais, Logaritmos.

SUMÁRIO

LISTA DE GRÁFICOS vi
LISTA DE TABELAS vi
RESUMO vii
1 **INTRODUÇÃO** 1
2 MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA 3
2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA 3
2.2 MODELAÇÃO MATEMÁTICA 11
2.3 VANTAGENS E LIMITAÇÕES PARA SEU USO 12
3 EXPONENCIAIS E LOGARITMOS 20
3.1 UM BREVE HISTÓRICO DO ASSUNTO 20
3.2 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES 24
3.3 A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA 28
3.4 O NÚMERO *e* 33
3.5 LOGARITMO NATURAL 34
4 **EXPONENCIAL E LOGARITMO APLICADOS AOS FENÔMENOS DO MUNDO REAL** 35
4.1 USANDO A MODELAÇÃO PARA ENSINAR O CONCEITO MATEMÁTICO 35
4.2 REPRODUÇÃO DE BACTÉRIAS 35
4.3 DECAIMENTO RADIOATIVO 38
4.4 JUROS COMPOSTOS 41
4.5 CRESCIMENTO POPULACIONAL 48
4.6 ACÚSTICA 52
4.7 ESCALA RICHTER 54
4.8 *pH* DE UMA SOLUÇÃO 55
4.9 AQUECIMENTO E RESFRIAMENTO 56
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 58
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 63

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

DÉBORA CRISTINA ACCORDI

A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

CURITIBA
2006

1 INTRODUÇÃO

O objetivo geral deste trabalho é estudar um meio de ensinar exponenciais e logaritmos, destacando as situações em que os mesmos podem ser abordados.

Ao buscar um meio de ensinar conteúdos matemáticos, de uma forma que despertasse o interesse dos alunos, estimulando sua criatividade, tomei contato com a modelagem matemática e optei por utilizá-la nesse estudo.

A decisão de estudar sobre exponenciais e logaritmos, deve-se a um trabalho realizado durante o curso de especialização, no qual foi solicitada aos alunos, uma pequena análise de livros didáticos. O tema escolhido pelo grupo de estudo em que participei, foi logaritmos. Embora não tenha experiências profissionais com ensino médio, ao realizar aquele trabalho percebi através de relatos dos colegas as dificuldades enfrentadas em apresentar esse conteúdo. Na ocasião pude recordar de quando era estudante, dos meus conhecimentos e dúvidas a respeito do assunto.

Na realidade, o tratamento rigoroso de exponenciais e logaritmos leva a questões matematicamente difíceis de se tratar. Por exemplo, ao se traçar um gráfico de 2^x, em algum momento, "calcula-se" o valor de $2^{\sqrt{2}}$. Isso não é uma questão simples, já que a definição de $2^{\sqrt{2}}$ requer uso de limite de seqüências ou de supremo.

Questões matemáticas, como essa apontada, são importantes para o conhecimento do professor, porém nesta ocasião, o objetivo será concentrar-se na questão do ensino do conceito em si.

Ao analisar alguns livros didáticos, pode-se constatar que seus autores tratam de exponenciais e logaritmos sem uma adequada contextualização, pois as aplicações quando mencionadas, fazem parte de um referencial, apresentado ao final do capítulo, fazendo-se necessário consultar o material para resolver alguns exercícios propostos nas atividades de revisão. O conceito em si apresenta-se de forma tradicional.

Num desejo de ampliar meus conhecimentos em relação a exponenciais e logaritmos, familiarizando-me com um bom recurso para ensiná-los, foi que desenvolvi esse trabalho. Seu resultado ficou assim dividido:

No primeiro capítulo, é apresentada uma introdução com os objetivos, as justificativas e a estrutura geral do trabalho.

No segundo capítulo, são apresentadas as definições de modelo matemático, modelagem matemática e modelação, segundo alguns autores consultados. Também são apresentados os passos a serem percorridos com modelação, quais são os objetivos para trabalhar com essa metodologia, e ainda quais são as vantagens e limitações para seu uso em sala de aula.

No terceiro capítulo, é feito um estudo sobre exponenciais e logaritmos, em que aparece um breve histórico do assunto, as definições formais e as demonstrações das propriedades de logaritmos. Também é apresentado o estudo de alguns gráficos, um breve comentário do número *e*, e a definição de logaritmo natural.

No quarto capítulo, são estudadas algumas situações em que podemos usar a modelação para apresentar exponenciais e logaritmos aos alunos. Os casos estudados com maior ênfase foram: a reprodução de bactérias, decaimento radioativo, juros compostos e crescimento populacional. Ao apresentar a capitalização com juros compostos, é feito um estudo sobre as particularidades do número *e*, e sua definição. Na seqüência, aparecem os temas: acústica, escala Richter, *pH* de uma solução, e aquecimento e resfriamento, sendo estes apresentados de forma mais restrita.

Ao final, são apresentadas possíveis considerações a respeito da proposta trabalhada, sugerindo idéias do percurso para a construção de modelos matemáticos voltados para o ensino de exponenciais e logaritmos.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA

Você ganha força, coragem e confiança a cada experiência em que enfrenta o medo. Você tem de fazer exatamente aquilo que acha que não consegue.

Eleanor Roosevelt

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

Quando se pensa em educação matemática, surge o questionamento: Qual papel ela está exercendo na sociedade? Pesquisas revelam que a situação é preocupante, pois muitos estudantes não são capazes de utilizar a matemática no dia-a-dia, restringindo-a apenas a sala de aula.

A escola contribui na melhoria dessa situação, quando os professores utilizam problemas da vida real, para ensinar os conceitos matemáticos. Segundo ROSA e OREY (2003, p. 2-3) a educação matemática tradicional não proporciona essa relação com o mundo externo, pois sua metodologia é baseada em transmissão de conhecimentos, onde o aluno aprende técnicas para resolver problemas que são apresentados de forma artificial. Essas características interferem no grau de interesse do aluno, em seu rendimento e satisfação escolar.

Ao optar pelo ensino tradicional, impede-se o aluno de desenvolver o raciocínio, pois o mesmo não é estimulado a pensar e agir por si só. Segundo O'BRIEN (2000, p. 12) decorar conceitos, dados e fatos matemáticos não significa que os mesmos foram aprendidos. Ele compara esse procedimento ao adotado para ensinar papagaios, onde simplesmente decoram e repetem o que foi ensinado. Para ALMEIDA e DIAS (2004, p. 20) a melhoria do ensino ocorre quando os alunos têm oportunidades de experimentar, modelar e analisar situações, tornando-os sujeitos críticos, conscientes e integrados à sociedade.

Enquanto alguns professores acreditam nas mudanças significativas no ensino-aprendizagem, buscando alternativas inovadoras, outros ainda defendem o ensino tradicional. A grande maioria deles apresenta uma forte resistência a mudanças, devido as suas vivências como estudantes, pois acabam reproduzindo-as e mesmo pensando em mudar, se detêm das formas tradicionais que estão fortemente enraizadas dentro

deles. D'AMBRÓSIO, citado por BARBOSA (1999, p. 81) afirma que "a ação de professores mostra que em geral o professor ensina da maneira como lhe foi ensinado".

Nessa busca por mudanças nas metodologias de ensino da matemática, encontra-se a *Modelagem Matemática*. Mas o que é modelagem matemática? Em que ela consiste?

Pode-se dizer que a modelagem matemática já existe desde os tempos mais remotos, pois os povos antigos utilizavam-na em sua rotina diária. Porém, na educação, em especial no Brasil, um dos primeiros trabalhos de modelagem no ensino surgiu na década de 70, na PUC do Rio de Janeiro e começou a ser trabalhada na década de 80, na Unicamp de Campinas-SP, pelo professor Rodney Bassanezi (BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p. 11).

Para SILVEIRA e DIAS (2006) "ela surge da necessidade do homem em compreender os fenômenos que o cercam para interferir ou não em seu processo de construção". Segundo os autores, a modelagem matemática tem como objetivo interpretar e compreender os mais diversos fenômenos do cotidiano, permitindo usar aplicações de conceitos matemáticos.

Para a maioria dos autores, estudiosos sobre o assunto, ela é tida como uma aliada no ensino de matemática, pois através dela é possível mostrar a importância da matemática e sua extrema ligação com a realidade em que se vive.

Segundo BARBOSA (2001, p. 8) "a modelagem matemática contribui para a compreensão de pesquisa e experimentação, leva em conta o contexto sócio-cultural e, por fim, viabiliza a interdisciplinaridade e a espiralização do currículo". Para JACOBINI e WODEWOTZKI (2001, p. 47) a modelagem matemática é uma alternativa pedagógica para o ensino de matemática, tornando-o mais motivador e mais compreensível para os alunos.

Os professores enfrentam muitas dificuldades, uma delas é o desinteresse que o aluno demonstra em relação ao ensino, pois muitas vezes freqüentam a escola apenas por obrigação, ou ainda diversão. Para BASSANEZI (2002, p. 21) a modelagem aplicada ao ensino pode despertar maior interesse, ampliando o conhecimento do aluno.

Para se compreender o que é e como funciona a modelagem matemática, é preciso falar antes sobre os *modelos*.

Um modelo pode ser usado em diversas situações do mundo real, pois está presente na arte, moda, arquitetura, história, matemática, entre outras áreas. Segundo BIEMBENGUT e HEIN (2003, p. 11) o modelo é a forma encontrada para representar alguma coisa. No entanto, o modelo matemático é obtido através do processo de modelagem matemática, que por sua vez, é um ramo da matemática que tenta traduzir situações reais para uma linguagem matemática.

A seguir seguem várias definições para modelo matemático:

"Modelo Matemático é um sistema axiomático consistindo de termos indefinidos que são obtidos pela abstração e qualificação de idéias essenciais do mundo real" (MAKI e THOMPSOM, apud LEAL, 1999).

"Modelo Matemático é uma estrutura Matemática que descreve aproximadamente as características de um fenômeno em questão" (SWETZ, apud LEAL, 1999).

"O Modelo Matemático é uma imagem que se forma na mente, no momento em que o espírito racional busca compreender e expressar de forma intuitiva uma sensação, procurando relacionar com algo já conhecido, efetuando deduções" (GRANJER, apud LEAL, 1999).

"Um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduz, de alguma forma, um fenômeno em questão ou um problema de situação real, é denominado de Modelo Matemático" (BIEMBENGUT, apud LEAL, 1999).

"Um Modelo Matemático é um construto matemático abstrato, simplificado que representa uma parte da realidade com algum objetivo particular" (MCLONE, apud BASSANEZI, 2002, p. 20).

"Modelo Matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado", podendo ser: *Linear ou não*, conforme as características de suas equações; *Estático*, quando representa a forma do objeto, ou *Dinâmico*, quando simula variações de estágios do fenômeno; *Educacional*, quando é baseado em um número pequeno ou simples de suposições, ou *Aplicativo*, quando é baseado em hipóteses realísticas; e *Estocástico* ou *Determinístico*,

dependendo do uso ou não de fatores aleatórios em suas equações (BASSANEZI, 2002, p. 20).

Ainda segundo BASSANEZI (2002, p. 174) "um modelo matemático é um conjunto consistente de equações ou estruturas matemáticas, elaborado para corresponder a algum fenômeno – este pode ser físico, biológico, social, psicológico, conceitual ou até mesmo um outro modelo matemático".

Para D'AMBRÓSIO (1986) o modelo matemático é o ponto de ligação entre as informações captadas pelo indivíduo e sua ação sobre a realidade, possibilitando ao mesmo ter condições de exercer seu poder de análise da realidade.

Portanto o modelo matemático pode ser entendido como uma representação de algo real, fazendo uso de uma linguagem matemática, sendo por vezes, apenas uma aproximação da realidade, onde posteriormente é verificada sua validação. Para BIEMBENGUT e HEIN (2003, p. 12) mesmo que tais aproximações não condizam com a realidade, um modelo matemático, ainda que em uma visão simplificada, retrata aspectos da situação pesquisada.

Alguns dos objetivos para a construção de um modelo matemático, segundo DAVIS e HERSH, citados por LEAL (1999) são: "obter respostas sobre o que acontecerá no mundo físico; influenciar a experimentação ou as observações posteriores; promover o progresso e a compreensão conceituais; auxiliar a axiomatização da situação física; e incentivar a matemática e a arte de fazer modelos matemáticos".

Neste sentido, pode-se perceber as dificuldades, na obtenção do melhor modelo, para representar um determinado problema, pois muitas vezes, a solução encontrada através do modelo, não é satisfatória. Quanto a isso, BASSANEZI (2002, p. 38) afirma: "...o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas em que o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. (...) Mais importante do que os modelos matemáticos obtidos são o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sócio-cultural".

Mas o modelo é parte integrante da modelagem matemática, portanto para melhor compreender como isso acontece, serão apresentadas algumas definições encontradas para a modelagem matemática, segundo as literaturas consultadas.

"A Modelagem Matemática é um processo dinâmico de busca de modelos adequados, que sirvam de protótipos de alguma entidade" (BASSANEZI, apud LEAL, 1999).

"Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências" (BASSANEZI, 2002, p. 24).

De acordo com BASSANEZI (2002, p. 16) a modelagem matemática pode ser tomada como um método científico de pesquisa ou uma estratégia de ensino-aprendizagem. Afirma ainda, que ela consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. E quando aplicado em situações de ensino-aprendizagem, é um método para estimular alunos e professores de matemática a desenvolverem suas próprias habilidades como modeladores. Esse processo possibilita a aprendizagem de conteúdos matemáticos interligados aos de outras ciências.

"A Modelagem Matemática é o processo de escolher características que descrevem adequadamente um problema de origem não matemático, para chegar a colocá-lo numa linguagem matemática" (O'SHEA e BERRY, apud LEAL, 1999).

Para D'AMBRÓSIO (1986) a Modelagem Matemática é o processo no qual o indivíduo constrói modelos, aplicando sua experiência, conhecimento acumulado e recursos da natureza. Defende a idéia de que o indivíduo é parte integrante e ao mesmo tempo observador da realidade, onde ele recebe informações sobre determinada situação e através da reflexão, busca a representação dessa situação, desvendando seus comportamentos individual, social e cultural.

Segundo BIEMBENGUT, citada por LEAL (1999), a Modelagem Matemática é o processo envolvido na obtenção de um modelo. Ela compara esse processo, com a arte, pois o modelador necessita um pouco de intuição e criatividade para interpretar o contexto e escolher o conteúdo matemático que melhor se adapte com as variáveis envolvidas. Então, o conhecimento apurado de matemática não será o suficiente para elaborar um modelo.

"A modelagem matemática é um método da matemática aplicada, usada em grande variedade de problemas econômicos, biológicos, geográficos, de engenharia e

outros ramos. Seu objetivo é reduzir um fenômeno em termos idealizados da situação real" (ACROSS & MOSCARDINI, apud BARBOSA, 1999, p. 69).

Segundo SKOVSMOSE, citado por (ALMEIDA e DIAS, 2004, p. 24) "em um processo de modelagem matemática, ocorre uma transição entre linguagens diferentes". Ocorrem duas transições, primeiro quando uma situação da realidade é transformada em informações e depois quando estas informações são transformadas num modelo matemático, o que ele caracteriza como o poder de formatação da matemática.

O interesse será na modelagem matemática como uma alternativa que proporciona condições para a melhoria do ensino-aprendizagem. Através dela, o aluno pode ser valorizado no contexto social em que está inserido, tornando-o mais crítico e criativo, permitindo estabelecer relações entre o conteúdo a ser estudado e situações da vida.

Para as finalidades desse trabalho serão adotadas as idéias de modelagem matemática apresentadas por Bassanezi, buscando modelos para o ensino de um conteúdo matemático. Interligando-o a outras áreas de conhecimento evidencia-se a importância da modelagem matemática enquanto método científico, porém ao aplicar a modelagem no ensino de matemática, isto é, assumí-la como uma estratégia de ensino, trabalha-se com *Modelação Matemática*, isto é, modelagem em Educação, como Bassanezi a define. Essas idéias, serão abordadas de maneira mais detalhada, na próxima seção.

Ao se trabalhar com a modelagem, segue-se alguns procedimentos próprios dessa metodologia, aos quais BASSANEZI (2002, p. 26) chama de *Atividades Intelectuais da Modelagem Matemática.* Elas estão divididas em cinco etapas: *Experimentação, Abstração, Resolução, Validação* e *Modificação.*

Sintetizando as etapas pode-se dizer que a idéia principal é: escolher um tema de interesse, pensar nos problemas relacionados com o tema escolhido. Em seguida, coletar o máximo de informações a respeito do assunto, sendo estes dados (qualitativos ou numéricos) obtidos através de entrevistas, pesquisas de campo ou em materiais bibliográficos (livros e revistas), ou junto a especialistas da área. Na seqüência faz-se a formulação dos modelos matemáticos, de acordo com o problema pesquisado. E por

fim, ocorre a verificação do modelo, sua viabilidade e a possível modificação, conforme as falhas possam ser notadas.

Porém, para o ensino regular, muitas vezes, limita-se à criação dos modelos, pois se o objetivo for motivar o aprendizado de certos conteúdos matemáticos, ou o reconhecimento do valor da própria matemática, a validação dos modelos não é um critério fundamental para sua qualificação.

BASSANEZI (2002, p. 26-30) ainda trata das fases:

Na *Experimentação* é que ocorre a interação com o assunto, a coleta de dados, a familiarização com o problema a ser modelado.

Na fase da *Abstração* é que os modelos começam a ser formulados. Para isso são necessários quatro passos: a *seleção das variáveis*, onde se definem os conceitos com os quais deseja-se trabalhar; a *problematização*, sendo este o momento da formulação do problema que indique exatamente o que se pretende resolver; a *formulação de hipóteses*, onde ela se dá através de observação dos fatos, comparação com outros estudos, dedução lógica, experiência pessoal do modelador, observação de casos da própria teoria, entre outros. É quando se decidem quais os fatores a serem estudados, selecionando as informações relevantes e as não relevantes; a *simplificação*, é quando não se consegue resolver o problema proposto, então se tenta deixá-lo mais simples. Às vezes, o modelo dá origem a um problema matemático que não apresenta a mínima possibilidade de estudo devido à sua complexidade.

Na *Resolução*, é o momento em que surge o modelo matemático, quando a linguagem natural das hipóteses é substituída pela linguagem matemática, dando origem a expressões, fórmulas, equações, gráficos, ou outras representações computacionais que levem a solução ou permitam a dedução de uma solução.

BASSANEZI (2002, p. 25) afirma: "a obtenção do modelo matemático pressupõe, a existência de um dicionário que interpreta, sem ambigüidades, os símbolos e operações de uma teoria matemática em termos da linguagem utilizada na descrição do problema estudado".

A *Validação* é o processo de aceitação ou não do modelo proposto, sendo as soluções e previsões encontradas, comparadas com os valores obtidos no sistema real.

A *Modificação* se dá quando o modelo é rejeitado e não conduz a previsões corretas, podendo ser melhorado e modificado.

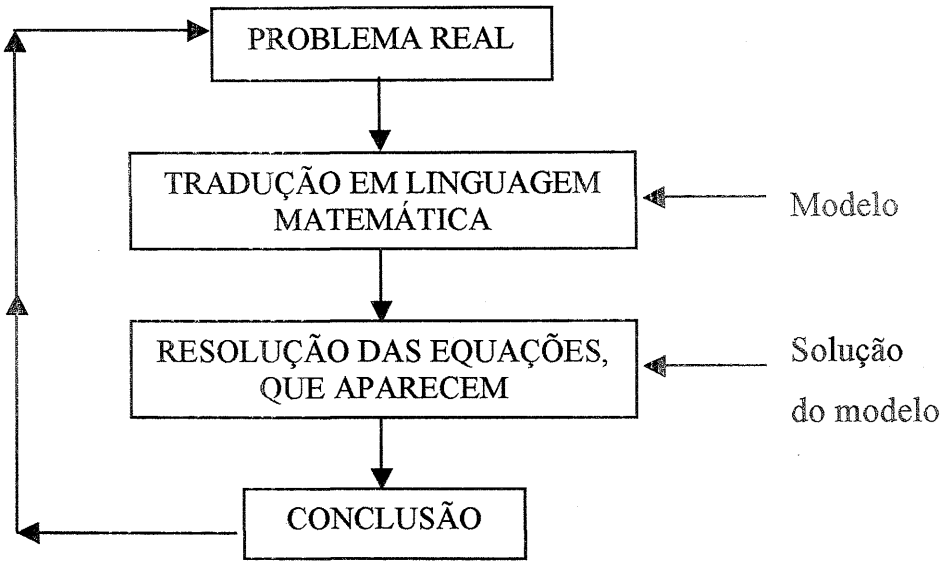
Na modelagem matemática utilizam-se os conceitos matemáticos para o entendimento de fenômenos do mundo real. Contudo, não se pode aplicá-la em qualquer situação da realidade. Deve haver um consenso, por parte dos professores, na utilização exagerada do simbolismo matemático, pois se o conteúdo e a linguagem matemática não estiverem de acordo com o tipo de problema e o objetivo a ser alcançado, o resultado pode ser destrutivo ao invés de esclarecedor. BASSANEZI (2002, p. 25) compara a situação com utilizar granadas para matar pulgas.

Ao ensinar um conteúdo matemático deve-se ter em mente quais os objetivos a serem alcançados. Para BASSANEZI (2002, p. 177) quando se puder fazer com que a matemática se torne um assunto agradável para professores e alunos, poder-se-á alcançar a melhor qualidade do ensino e de vida do nosso povo. Para ser agradável, ela deve ser elegante e funcional, formal e aplicável, bonita e útil. Tudo isso, sem se distanciar excessivamente do conteúdo programático básico existente. A princípio, pode-se pensar que isso é inatingível, impossível de ser realizado. Porém, é nessa perspectiva, que a modelagem matemática é colocada. O autor afirma: "Uma modelagem eficiente permite fazer previsão, tomar decisões, explicar e entender, enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças".

Pensando como processo matemático, na modelagem já se tem em mãos o ferramental matemático necessário tanto para a tradução em linguagem matemática quanto para a resolução das equações. Isso permite tirar conclusões sobre o problema real, o que é a finalidade da modelagem matemática.

Entretanto, pensando do lado educacional, pode-se imaginar que esse processo ocorre como uma busca: o aluno não se apropriou do ferramental matemático ainda; este vai surgindo no processo investigativo ao longo das tentativas de se traduzir, resolver e tirar conclusões sobre o problema real. Isso é o que será visto a seguir.

Sintetizando, pode-se dizer que o processo de "modelagem matemática" funciona mais ou menos como o esquema a seguir:



2.2 MODELAÇÃO MATEMÁTICA

Segundo BASSANEZI (2002, p. 38) a modelagem matemática pode ser usada como uma estratégia para o ensino e aprendizagem de matemática em cursos regulares ou não, e neste contexto recebe o nome de Modelação Matemática.

Para BIEMBENGUT e HEIN (2003, p. 18) a Modelação Matemática é um método que utiliza a essência da modelagem matemática. Logo a modelação pode ser entendida como uma prática de modelagem.

Para estes autores, os objetivos ao utilizar a modelação, são: aproximar uma outra área do conhecimento da matemática, enfatizar a importância da matemática para a formação do aluno, despertar o interesse pela matemática ante a aplicabilidade, melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos, desenvolver a habilidade para resolver problemas, e estimular a criatividade.

A modelação, no presente trabalho, será a utilização da modelagem matemática como estratégia no ensino de exponenciais e logaritmos.

O método da modelagem matemática que é usado na Iniciação Científica, é aplicado em situações de ensino-aprendizagem, com a intenção de estimular alunos e professores na arte de modelar, ou seja, a modelação utiliza o mesmo método da modelagem enquanto ciência, porém voltado para aprendizagem de matemática,

vinculada às aplicações da realidade. Nesse contexto, os conteúdos matemáticos emergem como uma necessidade do processo tanto de tradução em linguagem matemática, quanto de solução de problemas estudados.

BASSANEZI (2002, p. 25) afirma que a modelação deve ocorrer quando um problema real é escolhido e através da construção de modelos matemáticos, sistematiza-se o programa, buscando respostas para esse problema. Sendo necessários a compreensão clara dos problemas em estudo e construção dos melhores modelos que façam a transformação de problemas reais em problemas matemáticos, dentro das teorias matemáticas disponíveis.

Muitas são as situações que levam a crer que a modelação é essencial para um aprendizado produtivo. Como já dizia GARDING, citado por BASSAZENI (2002, p. 35-36), "... a aprendizagem teve início a partir do século XIX quando *Ler-Escrever-Contar* eram os 3 pilares da educação das pessoas. A matemática vinha em terceiro lugar mas seu objetivo era bem claro: ensinar algoritmos efetivos para as 4 operações e familiarizar o aluno com sistema de peso, volume, dinheiro e tempo". Portanto, a apresentação da matemática como algo pronto e acabado, fez com que o ensino de novas teorias matemáticas fosse apresentado nas escolas de forma desvinculada da realidade. Um teorema por exemplo, é ensinado seguindo o esquema: enunciado – demonstração – aplicação. Quando o que poderia ser feito, é o processo inverso, partindo da motivação que deu origem ao teorema. Com isso, faz-se a formulação das hipóteses, a validação das mesmas, novos questionamentos e só depois se apresenta o enunciado. De fato, assim se estaria modelando.

2.3 VANTAGENS E LIMITAÇÕES PARA SEU USO

Existem muitos argumentos para a inclusão da modelagem na sala de aula, ou seja, para o uso de modelação matemática. Para BASSANEZI (2002, p. 36) os principais argumentos são:

Argumento formativo – faz com que os alunos desenvolvam suas capacidades, tornando-os explorativos, criativos e habilidosos na resolução de problemas.

Argumento de competência crítica – prepara os alunos para a vida real, como cidadãos atuantes na sociedade, capazes de reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações de conceito matemático.

Argumento de utilidade – prepara os alunos para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas.

Argumento intrínseco – fornece aos alunos um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todos seus aspectos.

Argumento de aprendizagem – facilita aos alunos compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados, e valorizar a própria matemática.

Argumento de alternativa epistemológica – atua como uma metodologia alternativa mais adequada às diversas realidades sócio-culturais.

Além dos argumentos mencionados anteriormente, pode-se citar pesquisas que revelam dados importantes sobre a aprendizagem. Observe um exemplo:

Segundo uma pesquisa realizada sobre Planejamento de Ensino e Avaliação, apresentada numa palestra do Prof. N. Balzan, UNICAMP – 1998, citada por BASSANEZI (2002, p. 179) tem-se que:

Aprende-se: 1% através do gosto; 1,5% através do tato; 3,5% através do olfato; 11% através do ouvido; 83% através da visão.

Retêm-se: 10% do que se lê; 20% do que se escuta; 30% do que se vê; 50% do que se vê e se escuta; 70% do que se ouve e logo se discute; 90% do que se ouve e logo se realiza.

Logo a modelação pode ser um meio adequado para a retenção dos conteúdos matemáticos, pois a aprendizagem ocorre de forma significativa, desenvolvendo atitudes e capacidades, levando a reflexões e discussões sobre as informações colhidas e a prática de "matematizar" situações reais.

Na modelação, o professor passa de detentor e transmissor do saber, para o papel de partícipe. Ocorre uma divisão de responsabilidades, onde professor e aluno, juntos constroem o conhecimento, fazendo com que o aluno investigue a matemática. Entretanto, assumir esse papel não é fácil, pois isso significa alterar posturas didáticas do professor.

Ao apresentar os benefícios do uso da modelação no ensino de matemática, não se pode esquecer que existem obstáculos a serem vencidos em meio a esse processo. Apresentando as vantagens e limitações dessa proposta, deixa-se a critério de cada um, discernir o que é mais viável, pois embora haja estudos comprovados, que revelem resultados positivos, ainda assim, há situações que requerem um pouco de cautela.

Segundo BARBOSA (2001, p. 8), os obstáculos citados por professores, são: os programas pré-estruturados, os pais, a burocracia educacional e os próprios alunos. Esses professores fazem parte do rol dos que defendem a modelagem enquanto modelação e ao mesmo tempo, apontam as dificuldades e limitações na sua implementação.

Neste contexto, BASSANEZI (2002, p. 37) apresenta os obstáculos, classificados em três tipos:

Obstáculos instrucionais – A modelagem tem como uma de suas características, a exigência de um tempo maior do que o convencional, pois o processo é mais demorado, fazendo com que o professor não consiga cumprir o programa todo. Ainda tem-se o caso da interdisciplinaridade, onde muitos professores não conseguem fazer as relações com outras áreas, questionando se realmente essas aplicações fazem parte do ensino de matemática.

Obstáculos para os estudantes – Os alunos estão acostumados com um ritmo próprio do ensino tradicional, e trabalhar com modelagem significa fugir dos padrões, mudar a rotina das aulas, levando o aluno a participar mais ativamente na construção do conhecimento. Pela falta de costume, vai ocorrer um estranhamento e uma apatia dos alunos, pois estavam acostumados com o conteúdo já concebido e essa mudança pode significar "aprender a pensar".

Obstáculos para os professores – De um modo geral, os professores não tem uma formação adequada, que lhe dê base para um ensino diferenciado, o que gera muitas inseguranças. Eles não se sentem habilitados para desenvolver a modelagem em seus cursos. A inexperiência, a falta de conhecimento do processo, o medo e a falta de tempo para preparar as aulas e cumprir o programa, são algumas das dificuldades.

BARBOSA (1999, p. 81) diz: "...a formação acadêmica na graduação está na origem de grande parte dos obstáculos...".

Nota-se que a maior dificuldade está concentrada em transpor a barreira criada naturalmente pelo ensino tradicional, porém para os que queiram se arriscar, fica a dica de BASSANEZI (2002, p. 43), onde diz: "Da mesma forma que só se pode aprender a jogar futebol, jogando, só se aprende modelagem, modelando!"

Segundo BIEMBENGUT e HEIN (2003, p. 29) existem opiniões diversas a respeito do uso da modelação, pois há pesquisadores, que defendem a idéia, de que ela não possibilita aprender novos conceitos matemáticos, mas apenas melhora a habilidade dos alunos em aplicar matemática. No entanto, há outros que consideram a modelação como processo ideal para o ensino de matemática.

Como é possível, o professor de matemática, não buscar respostas aos anseios e inquietações dos alunos, que muitas vezes, o colocam "contra a parede" ? Qual professor nunca ouviu a famosa pergunta: Para que serve isso? Segundo BASSANEZI (2002, p. 172) há profissionais que consideram a matemática aplicada inferior à pura, são os matemáticos intitulados puristas. Eles, por vezes, demonstram uma auto-suficiência no campo da matemática e não se preocupam com a utilização externa de seus conhecimentos.

É evidente a presença da matemática em diversas áreas, como por exemplo, na economia, química, biologia, entre outras. Nesse caso, suas teorias são modeladas por meio da linguagem matemática. O aluno que nunca ouviu falar dessas aplicações, pode fazer parte daquele grupo citado acima, que sempre questiona o professor.

Segundo BASSANEZI (2002, p. 176), deve-se privilegiar o ensino voltado para os interesses e necessidades da comunidade, tornando o aluno um ser ativo, que participe do desenvolvimento de cada conteúdo matemático. De um modo geral, a educação no país, tem adotado uma proposta bem diferente, pois as escolas, e até mesmo as universidades, utilizam um sistema educacional de auto-transmissão. O autor diz: "...as pessoas passam em exames e ensinam outras a passar em exames, mas ninguém sabe muita coisa".

A matemática é vista como uma ciência importante, porque poderá ser útil mais tarde, porém a grande justificativa para o seu ensino é a sua contribuição na formação

do indivíduo. Para BASSANEZI (2002, p. 206-208), as justificativas são: sua disponibilidade de poder ser usada como ferramenta para a vida e como instrumento para o trabalho; por ser parte integrante de nossas raízes culturais; porque ajuda a pensar com clareza e a raciocinar melhor; e ainda, por seu valor estético.

BARBOSA (1999, p. 68) coloca que o indivíduo precisa ter domínio de algumas habilidades matemáticas para exercer sua cidadania, pois devido ao grande avanço tecnológico, esse domínio torna-se um requisito para sobrevivência. Portanto, as atividades matemáticas integradas com situações da realidade, tendem a satisfazer as necessidades do indivíduo para a vida social.

D'AMBROSIO (1986) diz: "...o ponto de vista que me parece de fundamental importância e que representa o verdadeiro espírito da matemática é a capacidade de modelar situações reais, codificá-las adequadamente, de maneira a permitir a utilização das técnicas e resultados conhecidos em outro contexto, novo".

Ainda nesse sentido, CHARLOT, citado por BRITO e ALMEIDA (2005, p. 82) coloca: "...um saber só tem sentido e valor por referência às relações que supõe e produz com o mundo, consigo, e com os outros".

Em relação a esse aspecto da educação, os PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio) e DCNEM (Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio) sugerem mudanças na educação básica. Mas é preciso alguns cuidados, pois o ensino ainda está bastante resistente a novas possibilidades. A modelação é uma proposta onde os resultados são alcançados em longo prazo, cabendo ao professor pesquisar, estudar modelos e fazer um bom planejamento.

PONTE, citado por BARBOSA (1999, p. 70) aponta três meios principais em que a modelação pode aparecer no currículo: projetos extensos com duração de semanas ou meses; situações que requerem uma ou duas aulas; e atividades mais simples que podem ser concluídas em uma aula. Para ele, a modelação pode ser implementada na sala de aula, de diferentes maneiras: como motivação para introduzir novos conceitos ou aplicar conhecimentos adquiridos anteriormente; com a escolha de um tema e a formulação do problema não-matemático, sendo modelado sob a responsabilidade do professor ou do aluno; ou ainda pode estar integrada a um programa pré-definido ou se constituir numa atividade extra.

No presente trabalho, a utilização da modelação será apresentada para ensinar exponenciais e logaritmos. Escolhe-se um tema não matemático e a partir dele, se constrói o conceito matemático, explorando-o através de outras atividades conjuntas.

A organização das atividades vai depender do contexto escolar e do nível de preparo do professor. Nessa organização, "o envolvimento dos alunos nas atividades de modelagem deve se dar de forma gradativa, respeitando diferentes momentos" (ALMEIDA e DIAS, apud BRITO e ALMEIDA, 2005, p. 67).

Neste encaminhamento às atividades, ao introduzir novos conceitos, é preciso ter em mente o que significa aprender um conceito. Segundo BRITO e ALMEIDA (2005, p. 69), aprender um conceito é compreender o seu significado e compreender as relações que envolvem esse conceito. Através da modelação, isso se torna possível.

Um dos assuntos que gera dúvidas entre educadores é a questão do vestibular: será que os professores devem preparar o aluno para o vestibular ou para a vida?

Para SILVEIRA e RIBAS (2006) quando se pensa em ensinar um conteúdo simplesmente porque ele cai no vestibular, age-se de forma equivocada, pois se o objetivo das escolas é formar o aluno para ingressar na universidade, este não está sendo alcançado. Grande parte dos alunos não continuará seus estudos, pois não conseguem passar no vestibular. Portanto, o programa de ensino, oferecido atualmente, deve ser repensado, quanto ao tipo de cidadãos que se quer formar.

Para CALDEIRA, citado por SILVEIRA e RIBAS (2006): "atualmente o grande problema a ser refletido pelos educadores matemáticos está em focalizar o aluno em primeiro plano e depois verificar como a aprendizagem da matemática pode contribuir para que esse aluno possa ter uma visão mais crítica da realidade; essa contribuição não se dará apenas através do conteúdo aprendido, mas também por sua inserção numa dimensão política na forma de sua transmissão-assimilação".

A partir do momento que o professor percebe a ausência de aprendizagem, na condição de estudante, passa a questionar sua metodologia de ensino. Muitas vezes, não aceita o modo de ensinar de seus professores, logo passa a refletir sobre a sua maneira de ensinar. Quando aceita mudar sua postura, é porque já não suporta a angústia causada pela percepção da necessidade de modificar sua prática de ensino. Então assume o compromisso de enfrentar desafios e superar obstáculos, dando um

basta, na concepção de que a matemática é simplesmente um acúmulo de fatos, regras, procedimentos e teoremas.

Para PONTE, citado por HIRATSUKA (2004, p.36) a dificuldade para mudar é descrita por: "A mudança de concepção e de práticas constitui um processo difícil e penoso em relação ao qual as pessoas oferecem uma resistência natural e de certo modo saudável (...). É difícil mudar as pessoas, especialmente quando elas não estão empenhadas em efetuar tal mudança".

No entanto, mudar não significa, "ser feliz para sempre", mas apenas e tão somente aceitar viver na certeza e por vezes, na incerteza, à escuta de si e do mundo (HIRATSUKA, 2004, p. 41).

Para os que desejam aplicar a modelação matemática, diante do atual programa de ensino, BARBOSA, citado por SILVEIRA e RIBAS (2006) sugere: conhecer os limites da instituição de ensino; começar com modelos curtos e mais simples, que durem no máximo duas aulas, por exemplo; analisar o tempo, e aquilo que é possível fazer; analisar o seu saber e o saber dos alunos; a disposição e grau de interesse dos alunos, bem como a sua motivação; a disposição e apoio da direção da escola.

Neste sentido, pode-se citar também, a melhor forma para iniciar os trabalhos com modelação. Para BIEMBENGUT e HEIN (2003, p. 30) esse momento é chamado de pré – modelação, que consiste em:

Primeiro, conhecer alguns modelos clássicos por meio da literatura a respeito da história da ciência ou da ciência contemporânea, adaptando-os para a sala de aula. Depois, apresentar cada um dos conteúdos do programa a partir de modelos matemáticos de outras áreas do conhecimento (física, química, economia, biologia). Posteriormente, aplicar trabalhos ou projetos realizados por outros colegas, por tempo curto, com uma única turma e de preferência aquela cujo conteúdo se tem melhor domínio. E finalmente, propor para os alunos que busquem exemplos ou tentem criar seus próprios modelos, sempre a partir da realidade.

Mas de que maneira deve-se avaliar um trabalho de modelação matemática? BARBOSA, citado por SILVEIRA e RIBAS (2006) sugere uma avaliação por meio de relatórios, analisando o grau de desenvolvimento do aluno bem como seu processo de evolução.

Para BIEMBENGUT e HEIN (2003, p. 27-28) a avaliação ocorre durante todo o processo, pois durante as aulas, por meio da observação em relação ao empenho de cada aluno, ou as reuniões para acompanhamento e orientação, o professor já estará avaliando seus alunos. Espera-se que o aluno seja participativo, assíduo, cumpra suas tarefas e tenha espírito comunitário. Para avaliar faz-se necessário considerar os objetivos a serem alcançados com a modelação, seguindo os seguintes critérios: produção e conhecimento matemático; produção de um trabalho de modelação em grupo; extensão e aplicação do conhecimento.

É importante que os alunos conheçam antecipadamente quais serão os critérios de avaliação adotados.

Segundo SILVEIRA e RIBAS (2006), para avaliar tem-se que levar em consideração o que se quer avaliar, o que se julga ser mais importante para o aluno: cumprir o programa ou fazer com que o aluno aprenda matemática e a sua importância em sua vida? E ainda questiona: quem é que consegue cumprir rigorosamente o programa de ensino estabelecido?

Sabe-se que o atual sistema de ensino preza pelo cumprimento do programa, e muitas vezes o professor acaba sendo rigorosamente cobrado pelas instituições. A conscientização dos benefícios gerados pelo uso da modelação, poderá ser um fator contribuinte neste aspecto.

Para finalizar, pode-se dizer que ao trabalhar com modelação, se favorece a criatividade, o prazer por aprender e se traz mais alegria para a sala de aula, pois tudo é contextualizado, ou seja, o conhecimento ganha um significado diferente e especial. Ao professor, proporciona um novo papel de explorador e construtor das relações matemáticas em sala de aula. E ainda poderá sentir-se maravilhado, quando ao final do trabalho, encontrar satisfação com o resultado alcançado pelos alunos.

O aluno que antes indagava: "para que vou usar isso?" pode vir a surpreender o professor com: "agora adoro fazer matemática, antes eu não gostava porque não sabia a importância da matemática em nossa vida".

3 EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

Por trás de cada informação dada com tanta simplicidade em sala de aula, existem as lágrimas, as aventuras e a coragem dos cientistas.

Augusto Cury

3.1 UM BREVE HISTÓRICO DO ASSUNTO

A notação exponencial, na forma utilizada hoje, deve-se a René Descartes, que por volta de 1637 passou a utilizar os numerais indo-arábicos como expoentes de uma determinada base. Porém, a utilização de potências já ocorria em 1000 a.C., pois há registros da mesma em algumas tabelas babilônicas, no entanto a base era sexagesimal.

Quanto aos logaritmos, foi o escocês John Napier (1550-1617) com a ajuda do inglês Henry Briggs (1561-1631) que criaram as tábuas de logaritmos.

Em relação a esses matemáticos, MAOR (2006, p. 15) fala que John Napier foi o precursor dos logaritmos e que essa descoberta merece uma consideração especial, pois dificilmente uma idéia matemática abstrata foi recebida pela comunidade científica com tanto entusiasmo. (p. 25-27) A publicação de sua invenção ocorreu em 1614, num tratado em latim intitulado *Mirific logarithmorum canonis descriptio* (Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos). Conta ainda que Henry Briggs, era um professor de geometria em Oxford, que entusiasmado com a publicação de Napier foi à Escócia e propôs algumas mudanças em suas tabelas. Em 1624, após a morte de Napier, Briggs publica novas tabelas sob o título *Arithmetica logarithmica.*

Segundo GLENN e JOHNSON (1972, p. 257), Napier passa a usar o 10 como base para um sistema de expoentes, após suas pesquisas sobre artifícios que facilitassem os cálculos. Então qualquer número pode ser escrito como uma potência de 10, facilitando os cálculos com números grandes. Mas ao analisar a afirmação acima surge um questionamento: se $1 = 10^0$ e $10 = 10^1$, como é possível expressar um número entre 1 e 10, na forma de potência de 10, se o expoente terá valor entre 0 e 1? As tabelas de logaritmos, criadas por Napier e Briggs no início do século XVII apresentam a solução para este problema. A seguir, seguem os exemplos (uma lista parcial dos resultados):

TABELA 1 – NÚMEROS INTEIROS EXPRESSOS COMO POTÊNCIAS DE 10

Potência de 10	10^0	$10^{0,301}$	$10^{0,477}$	$10^{0,602}$	$10^{0,699}$	$10^{0,778}$	$10^{0,845}$	$10^{0,903}$	10^{0954}	10^1
Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

FONTE: GLENN, W. H.; JOHNSON, D. A. Dispositivos de cálculos. **Matemática sem problemas**, São Paulo, 1972. p. 263.

Nessa tabela os expoentes foram aproximados até a casa dos milésimos. Ela apresenta os números inteiros existentes entre 1 e 10 expressos como potências de 10. Basta fazer os cálculos, com as devidas aproximações e verificar que isso ocorre. Portanto esses expoentes de base 10 são chamados de *logaritmos decimais*, nome dado por Napier à sua descoberta.

Há ainda uma lista mais completa de logaritmos decimais, a tábua dos logaritmos decimais com aproximação de três casas, onde a primeira coluna à esquerda representa os números inteiros, enquanto a primeira linha superior representa os décimos. Os demais números do corpo da tabela são as potências de 10. As vírgulas decimais foram omitidas, portanto considere-as presentes em frente de cada número do corpo da tabela.

TABELA 2 – TÁBUA DOS LOGARITMOS DECIMAIS COM APROXIMAÇÃO DE TRÊS CASAS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	000	041	079	114	146	176	204	230	255	279
2	301	322	342	362	380	398	415	431	447	462
3	477	491	505	519	531	544	556	568	580	591
4	602	613	623	633	643	653	663	672	681	690
5	699	708	716	724	732	740	748	756	763	771
6	778	785	792	799	806	813	820	826	833	839
7	845	851	857	863	869	875	881	886	982	989
8	903	908	914	919	924	929	934	939	944	949
9	954	959	964	968	973	978	982	987	949	996

FONTE: GLENN, W. H.; JOHNSON, D. A. Dispositivos de cálculos. **Matemática sem problemas**, São Paulo, 1972. p. 264.

A tabela é usada para encontrar a potência de 10 de qualquer número entre 1,0 e 9,9. Por exemplo, para encontrar o logaritmo de 5,8 percorra a primeira coluna dos números inteiros e procure o 5 e depois percorra a linha superior dos décimos e procure o 8. O encontro dessa linha e dessa coluna é dado pelo número 763. Logo $\log 5{,}8 = 0{,}763$ ou $5{,}8 = 10^{0{,}763}$.

Portanto o que hoje é possível calcular com o auxílio das calculadoras científicas, fazendo uso da tecla *log* para encontrar qualquer logaritmo na base 10, é mérito de Napier e Briggs, dois grandes matemáticos que inventaram os logaritmos.

BARRETO FILHO e XAVIER (1998, p. 168) colocam que a descoberta dos logaritmos simplificou o trabalho de cálculo, pois é mais fácil somar e subtrair do que multiplicar e dividir. Por exemplo, para adicionar dois números de quatro algarismos efetuamos uma operação e para multiplicar os mesmos números efetuamos cinco operações.

Os cálculos com logaritmos remetem aos estudos de Napier, onde MAOR (2006, p. 18-19) descreve o pensamento de Napier sobre as regras de potências. O matemático Michael Stifel (1487-1567), formulou um exemplo da progressão geométrica, afirmando que se multiplicarmos quaisquer dois termos da progressão $1, q, q^2, \ldots$ o resultado será o mesmo que se somarmos os expoentes correspondentes. E ainda, se dividirmos um termo da progressão geométrica por outro, isso seria equivalente a subtrair seus expoentes. O resultado dessas afirmações é a seguinte regra: $q^m \cdot q^n = q^{m+n}$ e $q^m / q^n = q^{m-n}$. Mas enquanto Stifel pensava apenas em expoentes inteiros, Napier desejava fazê-lo para outros valores. Seu pensamento era: se for possível escrever qualquer número positivo como uma potência de algum número fixo, então a multiplicação e a divisão de números seria o equivalente à adição ou à subtração de seus expoentes. Ao elevar um número a enésima potência seria equivalente a somar o expoente n vezes a ele próprio. E encontrar a enésima raiz de um número seria equivalente a n subtrações repetidas.

Segundo GLENN e JOHNSON (1972, p. 267) as invenções de Napier garantem que as regras dos expoentes possam ser usadas para os logaritmos decimais, pois quando se deseja multiplicar dois números pode-se somar os logaritmos, quando se deseja dividir um número por outro, podemos subtrair o logaritmo do divisor do

logaritmo do dividendo, quando se deseja elevar um número a uma potência, pode-se multiplicar o logaritmo do número pela potência, e quando se deseja extrair a raiz de um número, pode-se dividir o logaritmo do número pelo índice da raiz.

A respeito das regras mencionadas acima, os livros didáticos geralmente apresentam-nas como propriedades operatórias, por exemplo: $\log (x \cdot y) = \log x + \log y$ e $\log \left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$ e $\log x^y = y \cdot \log x$, $\log \sqrt[y]{x} = \log \frac{x}{y}$, onde as multiplicações e divisões são reduzidas a adições e subtrações, as potenciações e radiciações a multiplicações e divisões.

Essas propriedades operatórias serviram de base para o surgimento das réguas de cálculo, instrumento construído para calcular com logaritmos. Segundo MAOR (2006, p. 29), elas foram inventadas em 1622, por William Oughtred (1574-1660), um matemático inglês, que utilizou escalas logarítmicas para construí-las. Ao descrever como funcionavam essas réguas, coloca que, eram usadas duas escalas logarítmicas que se moviam uma em relação à outra, permitindo operar com multiplicações e divisões. Se desejar, poderá encontrar exemplos numéricos da utilização das réguas de cálculo em GLENN e JOHNSON (1972, p. 270-274), pois as mesmas não serão mencionadas aqui, devido à complexidade dos detalhes.

Ainda em MAOR (2006, p. 31), o autor conta sobre a importância da criação dessas réguas, pois foram utilizadas por cientistas e engenheiros durante 350 anos. Somente em 1970, foram fabricadas as primeiras calculadoras eletrônicas manuais, fazendo com que em 1980 as réguas fossem substituídas pelas calculadoras. O autor menciona o surgimento do primeiro computador eletrônico operacional em 1945.

Segundo Barreto Filho e Xavier (1998, p. 166-167), alguns dos motivos que levaram aos estudos e descobertas sobre logaritmos, fazem parte dos séculos XV e XVI, período marcado pela expansão comercial e a necessidade de aprimorar técnicas de navegação, onde para descobrir novas terras e rotas, os navegadores enfrentavam naufrágios, fome, doenças, ataques piratas e encalhes. Diante destes aspectos sociais, era grande a necessidade da utilização de métodos práticos e rápidos que facilitassem os cálculos.

Sobre essas considerações, GLENN e JOHNSON (1972, p. 268-269) dizem que após a grande descoberta do logaritmo, o seu uso tornou-se freqüente por astrônomos para cartografar estrelas, por marujos para determinar sua posição nos mares e por engenheiros, na construção de cidades, rodovias e represas.

Portanto, ao pensar em exponencial e logaritmo, é inegável a sabedoria usada em sua criação e os benefícios gerados pela mesma. Muitos alunos não conhecem a história da matemática, porém os professores devem conhecê-la um pouco mais e partilhá-la com eles.

3.2 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

Exponencial lembra expoente, onde o expoente é usado para representar uma multiplicação repetida. Por exemplo: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$. Neste caso, o número a é a base, e o número n é o expoente. A expressão a^n é uma *potência.*

Portanto define-se potências por: seja a um número real positivo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência a^n, de base a e expoente n é definida como produto de n fatores iguais a a. Para $n = 1$, como não há produto de um só fator, temos por definição que $a^1 = a$.

Para o produto de potências, observa-se o exemplo:

$$a^4 \cdot a^3 = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{4\ fatores} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3\ fatores} = a^{4+3} = a^7 .$$

Logo na multiplicação de potências de uma base a, o resultado é obtido conservando-se a base e somando os expoentes.

Generalizando tem-se $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Para potência de potência, observa-se o exemplo:

$$(a^5)^2 = (a^5) \cdot (a^5) = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5\ fatores} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5\ fatores} = a^{5+5} = a^{5 \cdot 2} .$$

Logo no cálculo da potência de uma potência de base a, o resultado é obtido conservando-se a base e multiplicando os expoentes.

Generalizando tem-se $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$

Para o quociente de potências, observa-se o exemplo:

$$\frac{a^7}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^4 = a^{7-3}.$$

Logo na divisão de potências de uma base $a \neq 0$, o resultado é obtido conservando-se a base e subtraindo-se os expoentes.

Generalizando, tem-se $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Mas o que acontece com a^n quando o expoente $n \in Z$, ou seja, for negativo ou zero.

Mantendo a regra fundamental $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, para a^0 tem-se que: $a^0 \cdot a^1 = a^{0+1} \Rightarrow a^0 \cdot a = a$, logo a única definição possível é $a^0 = 1$.

E ainda, dado $n \in N$, tem-se $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, logo $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

E o que ocorre com a^r, quando $r = \frac{m}{n}$ é um número racional, com $m \in Z$ e $n \in N$. Mantendo a regra fundamental tem-se: $(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r = a^{r+r+\ldots+r} = a^{rn} = a^m$.

Portanto a^r é o número real cuja n-ésima potência é igual a a^m. Por definição de raiz, este número é $\sqrt[n]{a^m}$. Logo $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

E o que falar sobre a potência com expoente irracional? Por exemplo: como obter $2^{\sqrt{2}}$? Fazendo as aproximações racionais do número irracional $\sqrt{2}$, que são: 1; 1,4; 1,41; 1,414; ... obtêm-se as potências 2^1; $2^{1,4}$; $2^{1,41}$; $2^{1,414}$; ...

Logo à medida que 1; 1,4; 1,41; 1,414; ... se aproximam de $\sqrt{2}$

2^1; $2^{1,4}$; $2^{1,41}$; $2^{1,414}$; ... se aproximam de $2^{\sqrt{2}}$.

Percebe-se que é possível encontrar a potência a^x, com x irracional e a real positivo, através de aproximações por defeito, isto é, o número irracional fica determinado através dos números menores do que ele[1].

---

[1] Para sermos mais precisos matematicamente, dado um irracional x, tomamos uma seqüência (r_n) de racionais com $\lim r_n = x$. Colocamos então $a^x = \lim a^{r_n}$, já que se pode mostrar que (a^{r_n}) converge. As propriedades dos expoentes continuam válidas com essa definição.

É chamada de *função exponencial* de base a, a toda função f de R em R^+, do tipo $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, onde a mesma obedece as propriedades de potências citadas acima. Nas aplicações da função exponencial, ela raramente aparece da forma apresentada, pois assim como uma progressão geométrica nem sempre tem primeiro termo igual a 1, na maioria das aplicações, as funções exponenciais são do tipo: $f(x) = b \cdot a^x$.

Quando se fala em logaritmos, refere-se a um número, que é o expoente em uma determinada potência. A *função logaritmo* é a função inversa da exponencial, isto é, a função f de R^+ em R, onde por definição de inversa temos: $\log_a c = x \Leftrightarrow a^x = c$, com $c > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Logo, x é o logaritmo de c na base a.

As funções logarítmicas mais usadas são aquelas de base $a > 1$, especialmente as de base 10, chamadas de logaritmos decimais; as de base 2, chamadas de logaritmos binários; e as de base e, chamadas de logaritmos naturais ou neperianos.

As conseqüências de logaritmos são: $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $\log_a a^n = n$, $a^{\log_a b} = b$ e $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

Quanto às propriedades operatórias de logaritmos elas são deduzidas a partir das propriedades de potências e da definição de logaritmo, ou seja, não se trata de propriedades totalmente novas, mas de uma outra forma de escrever as propriedades de potências já conhecidas. Daí a importância do elo entre ambas às funções: exponencial e logarítmica. Uma é a inversa da outra, porém ainda há quem as trate de forma singular.

A seguir seguem as demonstrações das propriedades.

Logaritmo de um produto:

Supondo x e y os logaritmos de m e n na base a, com $a > 0$, $a \neq 1$, $m > 0$ e $n > 0$, têm-se:

$x = \log_a m \Rightarrow m = a^x$ (I)

$y = \log_a n \Rightarrow n = a^y$ (II)

Agora, multiplicando I e II:

$m \cdot n = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

Por definição de logaritmo, se obtêm:

$\log_a (m \cdot n) = x + y = \log_a m + \log_a n$, ou seja, $\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$.

Numa mesma base, o logaritmo do produto de dois números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números.

Logaritmo de um quociente:

Supondo x e y os logaritmos de m e n na base a, com $a > 0$, $a \neq 1$, $m > 0$ e $n > 0$, têm-se:

$x = \log_a m \Rightarrow m = a^x$ (I)

$y = \log_a n \Rightarrow n = a^y$ (II)

Agora, dividindo I e II:

$$\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow \frac{m}{n} = a^{x-y}$$

Por definição, obtêm-se:

$\log_a \frac{m}{n} = x - y = \log_a m - \log_a n$, ou seja, $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$.

Numa mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à diferença entre os logaritmos desses números.

Logaritmo de uma potência:

Supondo x o logaritmo de n^k na base a e y o logaritmo de n na base a, com $a > 0$, $a \neq 1$, $n > 0$ e $k \in \mathrm{R}$, têm-se:

$x = \log_a n^k \Rightarrow a^x = n^k$ (I)

$y = \log_a n \Rightarrow a^y = n$ (II)

Substituindo II em I:

$a^x = (a^y)^k = a^{y \cdot k}$, donde:

$x = y \cdot k$ ou $\log_a n^k = k \cdot \log_a n$.

Numa mesma base, o logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

Pode-se aplicar essa propriedade no logaritmo de uma raiz, por exemplo:

$$\log_a \sqrt[N]{M} = \log_a M^{1/N} = \frac{1}{N} \cdot \log_a M.$$

Mudança de base:

Quando $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $b \neq 1$ e $c \neq 1$, pode-se supor:

$x = \log_b a \Rightarrow b^x = a$ (I)

$y = \log_c b \Rightarrow c^y = b$ (II)

Substituindo II em I:

$(c^y)^x = a \Rightarrow c^{x.y} = a$

Por definição, obtêm-se: $\log_c a = x \cdot y$, ou seja, $\log_c a = \log_b a \cdot \log_c b$.

Isolando $\log_b a$ na relação acima tem-se: $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$, com $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$; $b \neq 0$ e $a \neq 0$, onde esta é a fórmula da *mudança de base.*

Para escrever o $\log_b a$ usando logaritmos na base c, realizamos a mudança de base: $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$.

3.3 A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Quanto à representação gráfica da função exponencial e logarítmica, tem-se:

A função exponencial de base a, dada por $f(x) = a^x$, deve ser crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, sendo o gráfico representado por uma curva exponencial que jamais toca o eixo x, pois $a^x > 0$, para todo $x \in R$, e não pode assumir valores negativos, logo ocupa o primeiro e segundo quadrantes. A curva passa por (0,1), pois $a^0 = 1$. Equivalentemente, a função logarítmica $\log_a x$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, porém sabe-se que $\log_a 1 = 0$, então para $a > 1$, os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo e os maiores do que 1 têm logaritmo positivo. E quando $0 < a < 1$, tem-se o contrário, isto é, o logaritmo é positivo para os números entre 0 e 1, e negativo para os maiores do que 1.

Para o estudo gráfico da função exponencial têm-se dois casos: quando a base é um número real maior que 1, ou seja, quando $a > 1$ e quando a base é um número real, maior que 0 e menor que 1, isto é, $0 < a < 1$.

Por exemplo, para a função exponencial de base 3, tem-se $y = 3^x$. Atribuindo valores para x, se obtem seu respectivo gráfico.

Mas o que significa 3^x? A seguir observe um pequeno estudo a respeito.

Sabe-se que $3^1 = 3$, $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ e $3^0 = 1$. Sabe-se também que a raiz quadrada de 3, é escrita como $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ e o quadrado desse número é 3. Similarmente, para qualquer inteiro positivo *n*, a raiz enésima de 3 é denotada por $\sqrt[n]{3} = 3^{\frac{1}{n}}$, cujo número elevado a *n* é 3. Sabe-se também que $3^{\frac{2}{3}} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(3^2\right)^{\frac{1}{3}}$. Mas para algum número racional positivo, tem-se $r = \frac{m}{n}$, com *m* e *n* sendo números inteiros, donde $3^r = 3^{\frac{m}{n}} = \left(3^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(3^m\right)^{\frac{1}{n}}$. E se *r* é um número racional negativo, então $-r$ é positivo e 3^r é definido por $\frac{1}{3^{-r}}$. Por exemplo, $3^{\frac{-5}{4}} = \frac{1}{3^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^5} = \frac{1}{\left(3^5\right)^{\frac{1}{4}}}$. E quando *x* é irracional, por exemplo, $x = \sqrt{2}$, o que deve ser feito para $3^{\sqrt{2}}$? Pode-se começar fazendo a expansão decimal deste número irracional, ou seja, $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ e observar que esta expansão gera uma seqüência de números racionais:

1

1,4 = 14/10

1,41 = 141/100

1,414 = 1414/1000

1,4142 = 14142/10000

141,421 = 141421/100000 ... que acaba em $\sqrt{2}$.

E três elevado a cada um destes termos da seqüência acima, gera uma nova seqüência:

$3^1 = 3$

$3^{1,4} = 4{,}655537$

$3^{1,41} = 4{,}706965$

$3^{1,414} = 4{,}727695$

$3^{1,4142} = 4{,}728734$

$3^{1,41421} = 4{,}728786$

$3^{1,414213} = 4,728801$

$3^{1,4142135} = 4,78804 ...$

Intuitivamente, pode-se dizer que a seqüência acaba em torno de um número que tem uma expansão decimal da forma 4,72880..., ou seja, a seqüência converge para 4,72880... ou tem limite 4,72880.... Portanto, $3^{\sqrt{2}}$ é definido como o limite dessa seqüência com uma exatidão de nove casas decimais, sendo $3^{\sqrt{2}} = 4,728804388$.

Desta maneira, tem-se que o número 3^x pode ser definido para todo número real x. Logo, pensando-se em traçar o gráfico de 3^x, pode-se dizer que em algum momento se estaria "calculando" o valor de $3^{\sqrt{2}}$, por exemplo.

No exemplo a seguir, os valores atribuídos para x serão: $\sqrt{2}$, $\frac{5}{6}$, 0, $-\frac{5}{6}$, $-\sqrt{2}$. Portanto:

Para $x = \sqrt{2}$, tem-se $y \cong 4,7$

Para $x = \frac{5}{6}$, tem-se $y \cong 2,5$

Para $x = 0$, tem-se $y = 1$

Para $x = -\frac{5}{6}$, tem-se $y \cong 0,4$

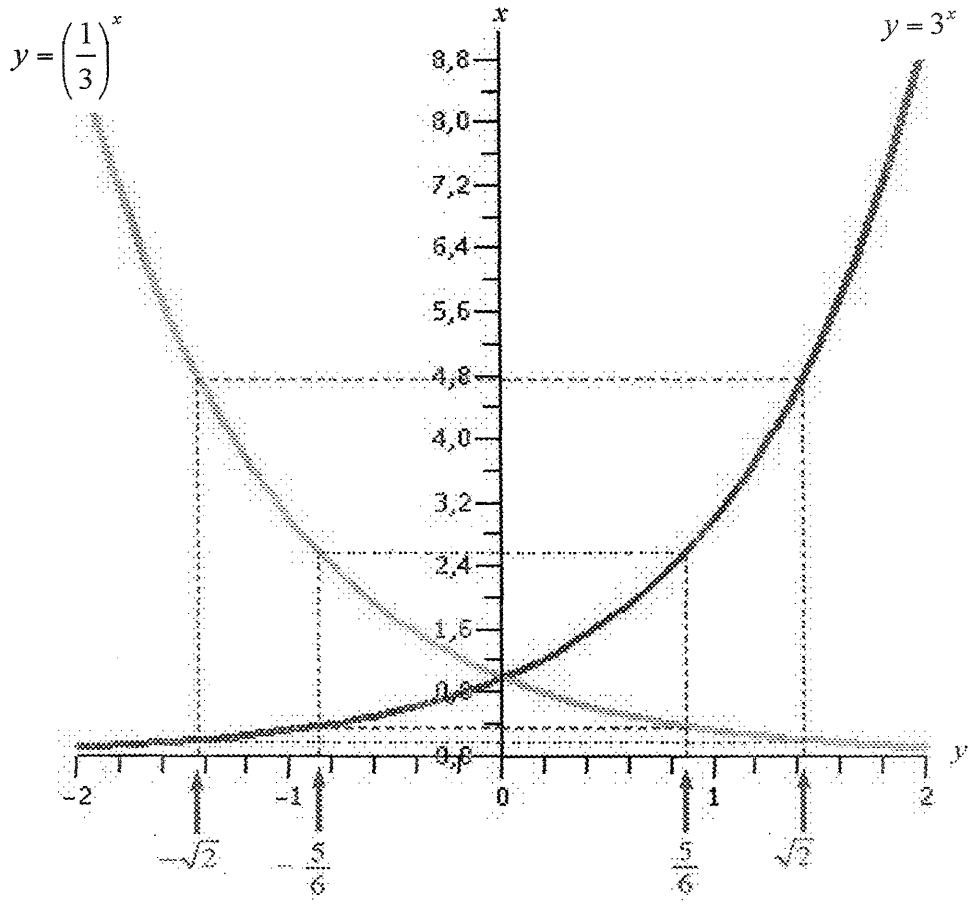
Para $x = -\sqrt{2}$, tem-se $y \cong 0,2$.

Perceba que se faz uma aproximação das expansões decimais, para os resultados obtidos, ou seja, o gráfico será construído baseado em aproximações.

Esse é um exemplo de função exponencial crescente, pois à medida que o valor de x aumenta, a função y cresce. Caso contrário, ela seria uma função decrescente, ou seja, à medida que x aumenta, y diminui. Lembrando que neste último caso, se teria $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Expressando-se de outra forma, pode-se dizer que a função $f(x) = 3^x$ é crescente, pois seu gráfico levanta-se lentamente com x negativo e rapidamente com x positivo.

A seguir segue o exemplo:

GRÁFICO 1 – FUNÇÃO EXPONENCIAL CRESCENTE E FUNÇÃO EXPONENCIAL DECRESCENTE

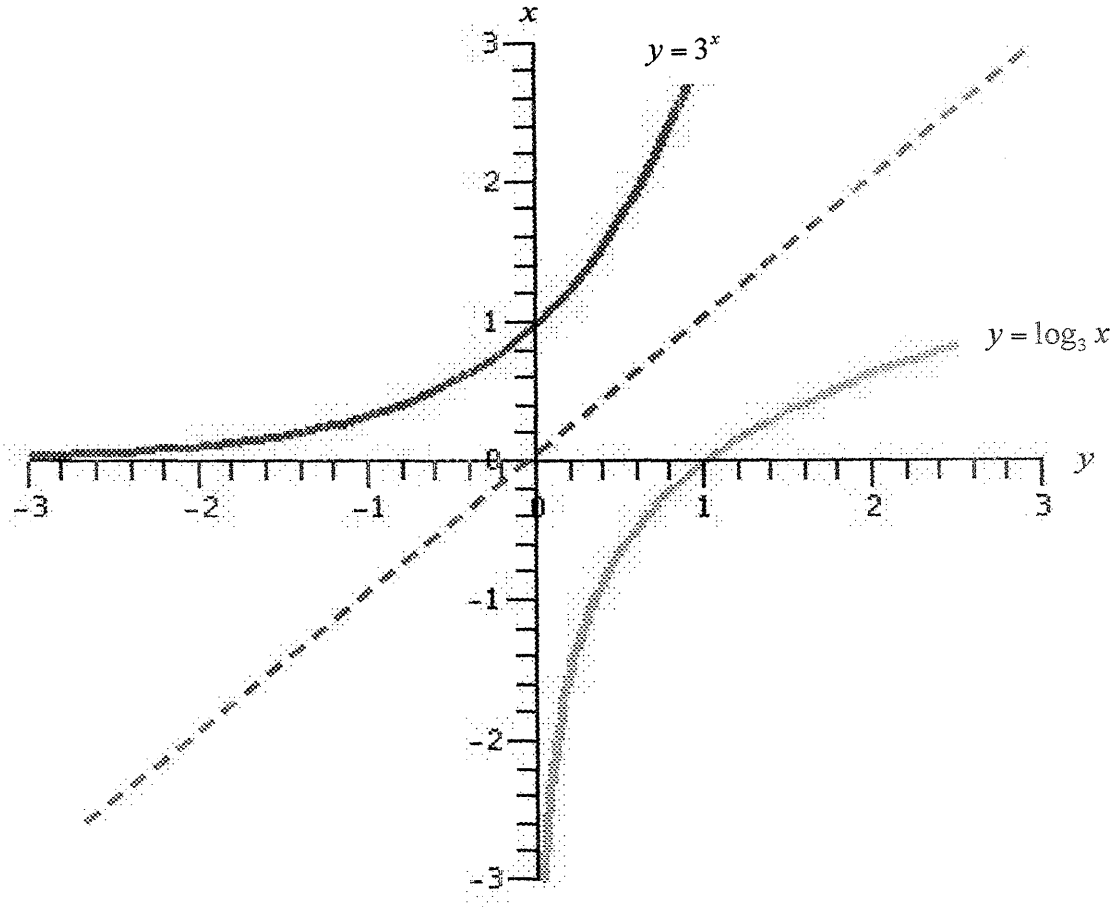


Quanto à função logarítmica, ela pode ser representada com apoio no que já se fez com a função exponencial, pois sendo funções inversas, seus gráficos são simétricos em relação à diagonal que corta o 1° e 3° quadrantes de R^2. Pode-se dizer que o par ordenado (x, y) que satisfaz $y = 3^x$ ou $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, torna-se (y, x) para satisfazer $y = \log_3 x$ ou $y = \log_{1/3} x$.

Será apresentado o gráfico de apenas um dos casos, quando $y = 3^x$ é comparado com $y = \log_3 x$.

Portanto, generalizando tem-se que o gráfico de $y = a^x$ intercepta o eixo y no ponto (0, 1), enquanto o gráfico de $y = \log_a x$ intercepta o eixo x no ponto (1, 0).

GRÁFICO 2 – RELAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA



Uma característica importante que sintetiza a idéia de inversa é: enquanto ocorre um rápido crescimento da exponencial, ocorre um lento crescimento do logaritmo, ou enquanto ocorre um rápido decrescimento da exponencial, ocorre um lento decrescimento do logaritmo.

Não foram apresentadas as tabelas com os valores para a função exponencial decrescente, nem para as funções logarítmicas, pois ao se compreender a vasta ligação entre elas, basta usar os dados da função exponencial crescente e relacioná-los para os demais casos[2].

[2] O uso de softwares como o winplot, pode ser de extrema importância para se estudar o comportamento dos exponenciais e logaritmos.

2.4 O NÚMERO *e*

O número irracional *e*, cujo valor é 2,7182818284... é utilizado em funções que envolvem a exponencial e^x, em aplicações da matemática e na descrição de fenômenos naturais. Mas como definir o número *e*? O que representa a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, com $n \in \{1, 2, 3, ...\}$?

Se observarmos o que acontece com a expressão acima, fatos intrigantes irão surgir, num primeiro instante nos sentiremos confusos, equivocados. Considerando a expressão dentro do parênteses, $1 + \frac{1}{n}$, pode-se dizer que à medida que *n* aumenta, $\frac{1}{n}$ se aproxima de 0 e assim $1+\frac{1}{n}$ se aproxima de 1, embora seja sempre maior do que 1. Acaba-se concluindo que se *n* for realmente muito grande, $1 + \frac{1}{n}$ poderá ser "substituído" por 1. Então 1 elevado a qualquer potência é sempre igual a 1. Portanto, a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para valores grandes de *n* deve se aproximar de 1.

Sob outro ponto de vista, sabe-se que quando um número maior que 1 é elevado a potências crescentes, o resultado se torna cada vez maior. E como $1 + \frac{1}{n}$ é sempre maior do que 1, pode-se dizer que a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ vai crescer sem limites, para valores de *n* cada vez maiores.

Portanto chega-se a dois resultados diferentes, no primeiro caso a expressão é igual a 1 e no segundo tende a infinito. Porém ambos estão errados.

Que algo estava errado, isso parece fácil perceber, pois matematicamente, o resultado de qualquer operação numérica *válida*, independente dos meios utilizados, deve ser sempre o mesmo. Mas onde está o erro? Está na maneira como lida-se com a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, pois no primeiro caso, aplica-se o conceito de *limite* de forma errada. Perceba que dizer, que uma seqüência de números se aproxima de um limite, neste caso 0, por mais que se aproxime o quanto quiser, nunca vai chegar até ele

realmente, ou seja, não se pode dizer que $\frac{1}{n}$ será igual a 0, mesmo com n extremamente grande. E no segundo caso, o resultado final obtido afirma que a expressão tenderá ao infinito, mas o infinito não é um número real. Porém, atribuindo valores cada vez maiores a n, têm-se resultados reais que tendem a um número, sendo este o famoso e.

Na prática, o número e surge em problemas de capitalização com juros compostos, como será visto mais adiante. Detalhes da solução correta para a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ serão apresentados na aplicação de juros compostos.

3.5 LOGARITMO NATURAL

Quando se conhece o número a e deseja-se calcular o número correspondente b, tal que $a = e^b$, o número procurado é o *logaritmo natural*, representado por $\ln a$.

Portanto, a cada número positivo a corresponde um único expoente b tal que $a = e^b$, onde o expoente b é o *logaritmo natural* de a, ou seja, os logaritmos naturais são os logaritmos na base e. Logo, $b = \ln a \Leftrightarrow a = e^b$

Todas as propriedades usuais de potências, mencionadas anteriormente, continuam válidas para a base e. É importante ressaltar também a relação entre e^x e $\ln x$, onde são funções inversas entre si.

Os logaritmos naturais são importantes, pois a função exponencial e^x aparece com freqüência em aplicações práticas. Em geral, uma função exponencial da forma $P_0 \cdot a^t$, pode ser escrita na forma $P_0 \cdot e^{kt}$, onde as duas expressões possuem o mesmo gráfico e representam a mesma função. Para isso, basta fazer $e^k = a$, ou seja, $k = \ln a$.

Para algumas situações práticas, pode-se utilizar a função exponencial usando a base e, ou qualquer outra base a ($a \neq 1$ e $a > 0$), porém serão utilizadas as bases 10 (decimal) e e (natural), pois a maioria das calculadoras só calculam os logaritmos nestas bases.

4 EXPONENCIAL E LOGARITMO APLICADOS AOS FENÔMENOS DO MUNDO REAL

A questão primordial não é o que sabemos, mas como o sabemos.

Aristóteles

4.1 USANDO A MODELAÇÃO PARA ENSINAR O CONCEITO MATEMÁTICO

Em geral a apresentação da função exponencial de base a, é dada por $f(x) = a^x$, com x real, $a > 0$ e $a \neq 1$, com explicações às restrições da base ser positiva e diferente de 1. E a função logarítmica é dada pela função inversa da exponencial, ou seja, indicada por $f(x) = \log_a x$. A definição tradicional de logaritmo diz que o logaritmo de um número positivo x num sistema de base $a > 0$ é o expoente y ao qual se deve elevar a base a de modo que se tenha $a^y = x$. LIMA (2004, p. 96) apresenta outra forma de definir o logaritmo, fazendo uso de uma abordagem geométrica, onde o logaritmo fica definido por uma área, representada graficamente abaixo da curva de $y = \frac{1}{x}$, com $x > 0$. Porém essa definição não será usada, pois o objetivo aqui era apenas mostrar que há outras formas de apresentar o mesmo conteúdo.

Existem inúmeras possibilidades de aplicações das funções exponenciais e logarítmicas que podem ser facilitadores do processo ensino-aprendizagem, onde algumas delas são: a reprodução de bactérias, decaimento radioativo, juros compostos, crescimento populacional, acústica, escala Richter, *pH* de uma solução, aquecimento e resfriamento. Essas situações estão exemplificadas do ponto de vista da modelação, para que ao se trabalhar o conteúdo matemático, possa-se apresentar uma abordagem diferente da convencional (em que o aluno recebe a definição e suas fórmulas prontas e não sabe porque elas existem ou qual é a sua importância).

4.2 A REPRODUÇÃO DE BACTÉRIAS

A reprodução de bactérias é um fenômeno biológico, onde a representação matemática pode ser feita por uma lei exponencial. Por exemplo: um experimento apresenta no instante inicial $t = 0$, o número n de bactérias em reprodução. Se,

hipoteticamente, o número de bactérias existentes no recipiente for proporcional ao nascimento de outras bactérias, podemos determinar o número de bactérias num determinado instante $t > 0$.

O aluno pode fazer pesquisas na área de biologia, estudar a ocorrência do crescimento de determinadas bactérias, como é o caso da bactéria chamada de *Escherichia coli*, encontrada com freqüência na bexiga humana. VALENÇO (2002, p. 18) em uma das resoluções dos exercícios, faz menção a sua importância, falando sobre seu uso em estudos, que ajudam no tratamento de doenças como a hemofilia, problemas de crescimento, entre outros, pois a bactéria é usada por biólogos, no recebimento de enxertos de DNA, responsáveis pela produção de hormônios, como a insulina e a somatrofina e pelo fator VIII de coagulação. Cita também sua utilização, juntamente com outras bactérias semelhantes, como indicador de poluição das águas.

Exemplos contendo a quantidade de bactérias em um determinado instante, permite calcular quantas bactérias existirão após um determinado tempo. Por exemplo, sobre a bactéria *Escherichia coli*, onde supondo que em $t = 0$ minuto, existem 3000 bactérias presentes na bexiga humana e após 20 minutos temos 6000 bactérias. Logo, é possível verificar quantas haverá após 30 minutos, 40 minutos ou até mesmo 1 hora.

HOFFMANN (1990, p. 278) apresenta um exercício em que admite o crescimento exponencial do número de bactérias. Coloca uma pequena tabela, estabelecida por estudantes de Medicina durante os 10 minutos iniciais de uma experiência acerca do crescimento do número de uma determinada bactéria. Questiona quantas bactérias estarão presentes após 30 minutos.

N° de minutos	0	10
N° de bactérias	5000	8000

Dividindo 8000 por 5000, verifica-se que o número de bactérias aumenta segundo um fator 1,6. Usando t = 0, 1, 2, 3... para representar o tempo de 10 em 10 minutos, obtemos:

Para $t = 0$, tem-se $5000 \cdot (1{,}6)^0 = 5000$

Para $t = 1$, tem-se $5000 \cdot (1{,}6) = 8000$

Para $t = 2$, tem-se $8000 \cdot (1,6) = 5000 \cdot (1,6) \cdot (1,6) = 5000 \cdot (1,6)^2 = 12800$

Para $t = 3$, tem-se $12800 \cdot (1,6) = 5000 \cdot (1,6)^2 \cdot (1,6) = 5000 \cdot (1,6)^3 = 20480$.

Portanto, após 30 minutos estarão presentes 20480 bactérias.

Logo percebe-se que a reprodução desta bactéria ocorre de acordo com a seguinte função exponencial: $N(t) = 5000 \cdot (1,6)^t$, onde t é dado em períodos de 10 minutos. Generalizando, pode-se concluir $N(t) = N_0 \cdot k^t$.

DANTE (1999, p. 199), também apresenta um exercício sobre a reprodução de bactérias. Neste, tem-se o caso de uma cultura onde há 1000 bactérias num determinado instante e após 10 minutos, existem 4000. Questiona quantas bactérias existirão em 1 hora. Coloca que elas aumentam através de $P = P_0 \cdot e^{kt}$, onde P é o número de bactérias, t é o tempo em horas e k é a taxa de crescimento.

VALENÇO (2002, p. 17) apresenta o seguinte exercício: Numa cultura da bactéria *Escherichia coli* há 1000 bactérias num determinado instante. Sabendo que após uma hora, de cada célula já existem 8 células e após 2 horas, 64. Quantas bactérias existirão em 24 horas?

O interessante deste exemplo, é a forma como o enunciado é colocado, pois não apresenta fórmula matemática, diferentemente do que acontece com a maioria dos livros didáticos. Na resolução do exercício é que a fórmula aparece, o que sugere uma pequena pesquisa a respeito do assunto. Ainda sobre essa fórmula, pode-se perceber diferenças significativas na sua apresentação, pois enquanto o exercício anterior utiliza a base e, ela coloca a seguinte função exponencial: $Q(t) = Q_0 \cdot a^t$, onde Q_0 é a quantidade inicial e a é o fator pelo qual Q varia quando t cresce. Portanto, a base da função exponencial não apresenta o número irracional e, fazendo com que a resolução torne-se mais simples. Sugere ainda associar o exemplo a uma P.G. de razão 8.

Já em HOFFMANN (1990, p. 327) tem-se o seguinte exercício: O número de bactérias de uma certa cultura cresce exponencialmente. Se existiam 5000 bactérias inicialmente e 8000 após 10 minutos, quanto tempo levará para que o número de bactérias duplique[3]?

---

[3] Mais adiante falaremos de "tempo de duplicação", onde os logaritmos aparecerão naturalmente nos cálculos.

Os exemplos citados anteriormente, são uma parcela reduzida do que representaria o trabalho com os alunos. Novos questionamentos importantes podem surgir, levando professor e aluno a uma busca mais profunda sobre o assunto, principalmente em relação aos benefícios das descobertas matemáticas para a ciência biológica. Porém, o interesse está em apresentar a função exponencial através de uma realidade e não simplesmente um joguete de fórmulas.

Concluindo, nos exemplos, que quanto mais tempo se passar, maior será a quantidade de bactérias, caracterizando uma função exponencial.

4.3 DECAIMENTO RADIOATIVO

O decaimento radioativo trata do cálculo de massas de substâncias radioativas, como por exemplo, o Urânio e o Carbono 14, que se desintegram perdendo diariamente uma porcentagem fixa de sua massa. O tempo necessário para que uma substância seja reduzida à metade é o que chamamos de *meia-vida.*

SMOLE e KIYUKAWA (1998, p. 162) trazem em seu livro, ao final do capítulo sobre função exponencial, um texto intitulado por: O elo Matemática – Química, onde ao comentar sobre decaimento radioativo, diz que uma amostra com y_0 átomos radioativos iniciais, depois de determinado período, fica com 50% de átomos não desintegrados. Portanto, a cada período, metade dos átomos se desintegra.

Em HUGHES-HALLETT et al. (1997, p. 20) tem-se que no decaimento radioativo, duas meia-vidas não compõem uma "vida inteira", pois ao longo de duas meia-vidas, a substância decairá para $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ da sua massa original.

Então, no exemplo acima, SMOLE e KIYUKAWA (1998, p. 162) concluem dizendo que em x períodos, restam y átomos radioativos da amostra de y_0 átomos radioativos iniciais. Portanto, tem-se a seguinte relação matemática para descrever esta situação: $y = y_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Na amostra inicial, tem-se y_0 átomos e após um período (p), tem-se $\frac{y_0}{2}$ átomos, após mais um período, isto é ($2p$), tem-se $\frac{y_0}{4}$ átomos e assim sucessivamente.

Finalizam com a afirmação de que a quantidade de átomos não desintegrados diminui de acordo com uma função exponencial, isto é, a grandeza *decai exponencial*.

Ao apresentar as funções exponenciais utilizando como modelo o estudo de alguns elementos químicos radioativos é necessário que o aluno faça pesquisas sobre o assunto, junto a outras áreas de conhecimento, reforçando a importância da interdisciplinaridade.

Após os estudos, o aluno irá concluir que os fenômenos ocorrem com grande parte da natureza. Cada elemento químico leva uma quantidade diferente de anos para a desintegração. Por exemplo, as plantas e os animais acumulam naturalmente, ao longo de suas vidas o Carbono 14 e ao morrerem deixam de recebê-lo, então esse elemento químico vai diminuindo pela desintegração natural. Para que uma amostra seja reduzida à metade, são necessários 5730 anos, ou seja, se hoje há uma amostra de 1 kg de Carbono 14, após 5730 anos ela terá $\frac{1}{2}$ kg.

Supondo-se hoje, uma amostra com uma quantidade Q_0 de Carbono 14, depois de 5730 anos, a quantidade será reduzida a $\frac{Q_0}{2}$, após outro período igual, será reduzida a $\frac{Q_0}{4}$, o que é equivalente a $\frac{Q_0}{2^2}$, e assim sucessivamente.

Pode-se concluir que após x períodos de 5730 anos, a quantidade de Carbono 14 que restará, pode ser expressa por $\frac{Q_0}{2^x}$.

Diante das conclusões acima citadas, surge um questionamento: quanto restará de uma quantidade inicial Q_0 de Carbono 14 após um período de n anos? Para responder a pergunta é preciso descobrir quantos x períodos de 5730 anos, correspondem a n anos. Logo n pode ser expresso por $n = x \cdot 5730$ ou $x = \frac{n}{5730}$.

Portanto $\frac{Q_0}{2^x} = \frac{Q_0}{2^{\frac{n}{5730}}}$ ou reescrevendo, $Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{5730}}}\right)^n$. Então para determinar a quantidade de Carbono 14 que restará após o tempo de n anos usa-se: $Q(n) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{5730}}}\right)^n$.

A função $Q(n)$ é uma das possibilidades para definir a função exponencial, pois a situação mostra que a quantidade procurada varia de acordo com o tempo n, ou seja, a variação ocorre no expoente, por isso chama-se função exponencial.

HUGHES-HALLETT et al. (1997, p. 25) apresentam o exemplo de outro elemento químico, apresentando o seguinte problema: Durante o início dos anos 60, a substância radioativa Estrôncio 90 foi liberada durante testes de armas nucleares na atmosfera, e esta substância se acumulou nos ossos de pessoas vivas naquela época. Se a meia vida do Estrôncio 90 é de 29 anos, que fração dessa substância absorvida em 1960 permanece nos ossos dessas pessoas em 2002?

Perceba que este exemplo traz a meia vida do Estrôncio, dada por 29 anos. E o tempo que se passou, pode ser encontrado fazendo 2002 - 1960 = 42 anos, então $Q(42) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{42}{29}}$ será a expressão usada.

HOFFMANN (1990, p. 292) apresenta o seguinte exercício: O rádio decai exponencialmente. Sua meia-vida é de 1690 anos. Quanto tempo levará para uma amostra de 50 g de rádio se reduzir a 5 g?

Também em HOFFMANN (1990, p. 279) tem-se: Uma substância radioativa decai exponencialmente. Se, inicialmente, havia 500 gramas da substância e, após 50 anos, 400 gramas, quantos gramas estarão presentes, após 200 anos?

Esses exercícios de aplicação, podem vir a complementar o ensino, após a construção do modelo matemático já apresentado.

Há outros questionamentos interessantes, que podem ser trabalhados com os alunos. Por exemplo, sobre o teste em obras de arte, sendo possível verificar sua autenticidade, pois fazendo uso da quantidade de Carbono 14 presente na obra e

conhecendo a data de sua pintura, podemos dizer se a obra é verdadeira ou falsa, usando o cálculo de uma função exponencial.

HUGHES-HALLETT et al. (1997, p. 52) apresentam o exemplo de um quadro de Vermeer (1623-1675). As informações a respeito do mesmo, revelam que ainda contém 99,5% do seu Carbono 14. A partir dessa informação é possível determinar se o quadro é ou não falsificado. Ao utilizar a função exponencial e fazer os cálculos, encontra-se que a obra tem 41 anos, justificando a falsidade da mesma, pois Vermeer morreu há 326 anos.

Os possíveis obstáculos, a serem encontrados, ao se trabalhar com esse modelo, são a motivação para estudar o assunto e ainda a complexidade do mesmo. Ao utilizar o exemplo do Carbono 14 na forma apresentado, a definição encontrada requer uma atenção especial, pois se a apresentação para a função exponencial for muito complexa, pode-se perder o interesse do aluno.

4.4 JUROS COMPOSTOS

Capitalizar significa: converter em capital, adicionar ao capital, acumular, ajuntar dinheiro. Isso ocorre quando se faz aplicações do dinheiro, por exemplo, em poupanças, ou ainda, realiza-se empréstimos a outros, sendo o rendimento do mesmo chamado de juros.

Segundo alguns autores de livros didáticos, juros compostos são aqueles em que são calculados periodicamente, com uma taxa fixa incidindo sobre o montante do período anterior.

Para explicar como isso acontece, MAOR (2002, p. 42-43) coloca um exemplo, em que supõe um investimento de \$100 (principal), em uma conta que paga 5% de juros compostos anualmente. Ao final de um ano, o saldo será de $100 \cdot 1{,}05 = \$105$, então o banco considerará esta nova soma como um novo principal que será investido à mesma taxa. Logo, ao final do segundo ano, o saldo será de $105 \cdot 1{,}05 = \$110{,}25$ e ao final do terceiro ano $110{,}25 \cdot 1{,}05 = \$115{,}76$ e assim sucessivamente. Daí a justificativa para a expressão "juros compostos", pois não é apenas a soma original que recebe juros anuais, mas ocorrem também juros sobre o principal. Pode-se concluir que o

saldo cresce numa progressão geométrica, com taxa comum de 1,05. No entanto, se a modalidade usada nesse investimento fosse juros simples, de 5% ao ano, se teria a taxa anual aplicada sobre a soma original, sendo a mesma a cada ano. O saldo aumentaria \$5 por ano, caracterizando uma progressão aritmética 100, 105, 110 e assim por diante. Portanto se deseja um bom investimento, faça-o a juros compostos, pois seu dinheiro vai crescer mais rápido do que se for investido a juros simples, independentemente da taxa.

Logo, generalizando tem-se que ao investir um principal de P reais em uma conta que paga r% de taxa de juros compostos anualmente, obtem-se no final do primeiro ano, o saldo de $P = (1 + r)$, e no final do segundo ano $P\ (1 + r)^2$, e assim por diante. Então após t anos chega-se a seguinte soma: $S = P\ (1 + r)^t$, sendo esta fórmula, utilizada para todos os cálculos financeiros, em contas bancárias, empréstimos, hipotecas e anuidades.

A taxa anual pode ser calculada por mais de uma vez ao ano. É o que acontece quando alguns bancos calculam o juro acumulado, semestralmente, por exemplo. O banco usará a metade da taxa de juros anual, pois trata -se de meio ano. Tomando o exemplo anterior, tem-se que \$100, investidos a uma taxa de 5% composta semestralmente, o principal de \$100 será composto duas vezes, logo cada vez será aplicada uma taxa de 2,5% e assim ao final de um ano se teria $100 \cdot 1{,}025^2 = \$105{,}0625$, o que significa seis centavos a mais do que no caso anterior, quando composto anualmente a 5%. Pode-se também, encontrar outros tipos de composição de juros, como trimestral, semanal, ou diário.

Portanto, se a composição é feita n vezes ao ano, para cada período de conversão, o banco usa a taxa de juros anual dividida por n, ou seja, $\frac{r}{n}$. Em t anos, existem (nt) períodos de conversão. Logo, após t anos, um principal P renderá: $S = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

O modelo de capitalização com juros compostos, como apresentado acima, remete a descoberta do número e. Observe como isso ocorre: considere, por exemplo, a situação em que se possui uma quantidade de dinheiro e faz-se comparações, para

verificar quanto irá render depois de um ano, com a mesma taxa de juros anual, o dinheiro aplicado para diferentes períodos de conversão.

Imagine um exemplo, onde o valor investido é de $R\$100$ durante um ano a uma taxa anual de juros de 5% em diferentes períodos de conversão.

Portanto, quando o período de conversão for anual $(n=1)$, tem-se $S = 100 \cdot (1 + 0{,}05/1)^1 = R\$105{,}00$; quando semestral $(n=2)$, tem-se $S = 100 \cdot (1 + 0{,}05/2)^2 = R\$105{,}06$; quando trimestral $(n=4)$, tem-se $S = 100 \cdot (1 + 0{,}05/4)^4 = R\$105{,}09$; quando mensal $(n=12)$, tem-se $S = 100 \cdot (1 + 0{,}05/12)^{12} = R\$105{,}12$; quando semanal $(n=52)$, tem-se $S = 100 \cdot (1 + 0{,}05/52)^{52} = R\$105{,}12$; e quando for diário $(n=365)$, tem-se $S = 100 \cdot (1 + 0{,}05/365)^{365} = R\$105{,}13$.

A diferença de valores é mínima, pois quando se faz um investimento de $R\$100{,}00$ composto diariamente, rende apenas 13 centavos a mais do que composto anualmente, tornando insignificante o modo com que se aplica o dinheiro. Porém, o resultado vai sempre depender do valor investido e da taxa de juros oferecida.

Supondo-se que hipoteticamente o banco oferecesse uma taxa anual de juros de 100%, e o valor aplicado fosse de $R\$1{,}00$, durante 1 ano, onde tem-se $r = 1$, $P = 1$ e $t = 1$. Logo, a equação acima passa a ser escrita da seguinte forma: $S = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Investigando o que acontece com esta fórmula para valores crescentes de n, obtem-se:

TABELA 3 – O COMPORTAMENTO DA FÓRMULA $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ PARA VALORES CRESCENTES DE *n*.

N	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
50	2,69159
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827
1.000.000	2,71828
10.000.000	2,71828

FONTE: MAOR, E. **e: a história de um número**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2006.

Percebe-se que a equação $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tende para um número irracional, ou seja, qualquer aumento que seja feito em *n*, quase não afetará o resultado, pois as mudanças se tornarão cada vez menos significativas. Logo, quando *n* aumenta indefinidamente, a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ irá estacionar em algum ponto, em torno de 2,71828.

Esse comportamento peculiar da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, mostra que ela converge muito lentamente para o número *e*, e quão grande deve ser *n* para que se tenham 5 algarismos decimais exatos. À medida que *n* tende ao infinito, ela se aproxima de um valor fixo 2,71828, caracterizando o aparecimento do número *e*, como foi chamado. Ocorreu por volta da época em que Napier inventou os logaritmos, sendo um período marcado pelo comércio internacional e grandes transações financeiras, exigindo uma forte atenção à lei dos juros compostos. Portanto o número *e* foi reconhecido, pela primeira vez, neste contexto.

Nesta ocasião é interessante, se falar em juros capitalizados continuamente. O que acontecerá ao saldo final de t anos, quando a freqüência com que os juros forem capitalizados aumentar indefinidamente? Ou seja, se os juros não forem capitalizados semestralmente, mensalmente ou diariamente, mas continuamente? Aí se encontra uma das utilizações do número e.

Por exemplo, com o auxílio de uma calculadora, verifica-se que $e^{0,07} = 1{,}0725082$, sendo este valor, o mesmo encontrado quando são capitalizados 7% a um grande número de vezes. Portanto, tem-se que: $\left(1+\frac{0,07}{n}\right)^n \approx e^{0,07}$. Logo, à medida que n aumenta, o valor da expressão fica cada vez mais próximo de $e^{0,07}$. Assim percebe-se que o e está intimamente ligado à capitalização contínua. Se P reais são depositados a uma taxa anual de 7% capitalizados continuamente, o saldo será:

Após 1 ano, tem-se $S = P\,(1{,}0725082) = P \cdot e^{0,07}$

Após 2 anos, tem-se $S = P\,(1{,}0725082)^2 = P \cdot (e^{0,07})^2 = P \cdot e^{(0,07)2}$

Após t anos, tem-se $S = P\,(1{,}0725082)^t = P \cdot (e^{0,07})^t = P \cdot e^{0,07t}$

Portanto, se P reais forem capitalizados a uma taxa de juros anual r e os juros forem capitalizados continuamente, tem-se o saldo $S = Pe^{rt}$.

Nos livros didáticos encontram-se juros compostos definidos através de montante, porém os exercícios não mencionam as situações de capitalização em diferentes períodos.

DANTE (1998, p. 199), apresenta um exercício, definindo montante como a quantia que uma pessoa deve receber após aplicar um capital C, a uma taxa i durante um tempo t. Portanto, a quantia que irá receber, decorrido o tempo da aplicação é chamado de *montante*. Apresenta seu cálculo efetuado através de: $M = C\,(1 + i)^t$.

SMOLE e KIYUKAWA (1998, p. 186) trazem o seguinte exercício: Um cliente de banco fez uma aplicação financeira com um capital de R$ 10.000,00. Sabendo que o banco aplica juros compostos a uma taxa de 6% ao ano, calculados anualmente, qual é o montante que o cliente terá a receber após 3 anos? Na resolução do exercício, apresentam $C = 10000 \cdot (1{,}06)^3$ e sugerem o uso de logaritmos para a realização dos cálculos. Colocam a possibilidade de consultar a tábua dos logaritmos, procurando a mantissa mais próxima dos valores encontrados.

Apresentam as tabelas que contém as mantissas, algo importante para o conhecimento da história da matemática, porém elas não precisam ser usadas na resolução dos exercícios, pois em nossos dias é muito mais simples fazer uso da calculadora. BASSANEZI (2002, p. 206) defende o uso da calculadora, dizendo: "Ignorar a presença de computadores e calculadoras na educação matemática é condenar os estudantes menos favorecidos a uma subordinação total a subempregos".

HUGHES-HALLET et al. (1997, p. 26) apresentam o seguinte exercício: Entre dezembro de 1988 e dezembro de 1989, a taxa de inflação do Brasil estava em 1290% ao ano. Quanto custaria, em 1989, um bem cujo custo em 1988 fosse de 1000 cruzados? Qual a taxa mensal de inflação para o Brasil nesse período? Resolvendo-o encontra-se um custo de Cz$13.900,00 após um ano. E a taxa era de 24,52% ao mês.

HOFFMANN (1990, p. 270) traz o seguinte exercício: Qual a quantia que deverá ser investida hoje, a uma taxa anual de juros de 6%, capitalizados continuamente, para daqui a 10 anos obter-se $10.000,00? Logo, utilizando $S = Pe^{rt}$ encontra-se que a quantia deve ser de aproximadamente $5.488,12.

Portanto, nos exemplos acima, pode-se concluir que à medida que o período passa, o valor aplicado aumenta, isso ocorre, devido à variação do expoente. Logo se define um crescimento exponencial.

Ao introduzir o conteúdo, utilizando juros compostos, o aluno poderá buscar situações do seu cotidiano. Segundo LEAL (1999) ao trabalhar função exponencial, fazendo uso de um modelo, alguns alunos ficam extremamente satisfeitos com o resultado, pois compreendem de onde vem as fórmulas matemáticas e outros valorizam as informações a respeito da economia, dando grande importância ao raciocínio matemático que está por trás da fórmula.

LEAL (1999) apresenta o seguinte modelo: Uma pessoa aplica um capital de $R\$\,2000{,}00$, no sistema de juros compostos, a uma taxa de 1% ao mês. Quanto tempo levará para obter um capital de $R\$\,2800{,}00$?

Na seqüência, observe as tabelas com os resultados, elaboradas junto com os alunos.

TABELA 4 - CÁLCULO DO CAPITAL (JUROS COMPOSTOS)

TEMPO (MESES)	CAPITAL
0	2000
1	2020
2	2040,2
3	2060,6

FONTE: LEAL, S. **Modelação matemática: uma proposta metodológica para o ensino de economia**, 1999. (com correções)

TABELA 5 – CÁLCULO DETALHADO DO CAPITAL NO SISTEMA DE JUROS COMPOSTOS

TEMPO (MESES)	CAPITAL
0	2000
1	$2000 + 2000 \cdot 0{,}01 = 2000\,(1 + 0{,}01) = 2020$
2	$2020 + 2020 \cdot 0{,}01 = 2020\,(1 + 0{,}01) =$ $= 2000\,(1 + 0{,}01)\,(1 + 0{,}01) = 2000\,(1 + 0{,}01)^2 = 2040{,}2$
3	$2040{,}2 + 2040{,}2 \cdot 0{,}01 = 2040{,}2\,(1 + 0{,}01) =$ $= 2000\,(1 + 0{,}01)^2\,(1 + 0{,}01) = 2000\,(1 + 0{,}01)^3 = 2060{,}6$

FONTE: LEAL, S. **Modelação matemática: uma proposta metodológica para o ensino de economia**, 1999. (com correções)

Após a construção das tabelas, conclui com os alunos que o capital em função do tempo de aplicação, é dado por: $C = 2000\ (1 + 0{,}01)^n$, onde n é o tempo de aplicação em meses.

Utilizando a fórmula acima e aplicando logaritmos, o resultado obtido para n foi de 33,81. Com isso, conclui que levaria aproximadamente 34 meses para a pessoa obter um capital de $R\$ 2800{,}00$. A autora, comenta ainda, o uso da calculadora nas resoluções e também a construção do gráfico correspondente. Faz também questionamentos sobre os décimos desconsiderados no resultado, pois o arredondamento feito não gera grandes conseqüências, por causa da situação

econômica brasileira da época. Porém, se a inflação fosse elevada, com certeza, teríamos que calcular quantos dias representa 0,81 meses.

Nesse exemplo, onde o aluno participa da construção da fórmula do capital, ele acaba interagindo muito mais, do que se estivesse simplesmente aplicando a fórmula. Conseqüentemente o trabalho é mais produtivo e a assimilação do conteúdo é melhor, o que justifica o uso da modelação.

Alguns problemas de aplicação podem ser trabalhados em conjunto com a modelação apresentada. Abaixo seguem algumas sugestões retiradas de HOFFMANN (1990).

Em quanto tempo uma quantia duplicará de valor se investida a uma taxa de juros anual de 6%, capitalizados continuamente?

Uma quantia depositada em certo banco duplica de valor a cada 13 anos. Os juros são capitalizados continuamente. Qual é a taxa de juros anual que o banco oferece?

Qual é o melhor investimento: 8,25% ao ano, com juros capitalizados trimestralmente, ou 8,20% ao ano, com juros capitalizados continuamente?

Todos os exemplos são, no mínimo provocativos, pois se tratando de estudar qual a melhor forma de fazer "render dinheiro", já é um motivo interessante aos alunos.

4.5 CRESCIMENTO POPULACIONAL

Ao analisar os dados estatísticos, em tabelas populacionais, é possível perceber o crescimento da população em determinados períodos. Esse crescimento obedece a algumas particularidades, as quais definem a função exponencial. Segundo HUGHES-HALLET et al. (1997, p. 16) se em uma determinada região, a taxa de crescimento da população considera os fatores imigração e emigração e se os mesmos não ocorrem, então a taxa varia de acordo com o número de nascimentos, onde quanto maior é a população, mais ela cresce, pois há mais pessoas para terem bebês.

Ainda em HUGHES-HALLET et al. (1997, p. 16) tem-se que, ao comparar a população de uma região, ano após ano, chega-se a uma PG, pois ao se dividir o

número de habitantes de um determinado ano pelo anterior e assim sucessivamente com os outros, determina-se um fator comum, que é a razão dessa PG. Esse é o fator de crescimento constante a cada ano, o que define um crescimento exponencial. Após o desenvolvimento do exemplo utilizado como modelo matemático, chega-se que a população é dada pela função: $P = P_0 \cdot c^t$, sendo P_0 a população inicial, P a população procurada, c o fator de crescimento anual e t o número de anos.

P, assim definida é chamada de função exponencial porque a variável está no expoente, isto é, a população cresce à medida que o tempo passa. É claro que seria um tanto absurdo pensar que a população estará sempre crescendo exponencialmente com o mesmo fator do crescimento inicial, pois poderia ocorrer algum avanço médico ou alguma epidemia, o que estaria modificando esse fator. Mas é possível fazer uma estimativa do futuro, representando um valor aproximado da realidade.

Ao se considerar uma população sujeita a um crescimento exponencial, isso indica que o crescimento populacional é proporcional ao número de indivíduos em cada instante t, e desta forma, a população deveria crescer sem nenhuma inibição (BASSANEZI, 2002, p. 327).

Uma proposta de pesquisa sobre o assunto pode ser feita junto a órgãos como o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), por exemplo, que fornece dados estatísticos sobre o crescimento populacional em determinado país, estado ou cidade. Estudar sobre a própria região é mais motivador, logo se pode optar pelo bairro em que o aluno mora.

Diversos fatores são analisados em conjunto com o crescimento populacional, como a economia, a saúde, a ciência, a política. Por exemplo, o aluno pode pesquisar sobre as condições de vida do ser humano numa pequena região, onde a população é de baixa renda e posteriormente comparar resultados com outras regiões mais desenvolvidas. A falta de saneamento básico, as precárias condições de higiene e falta de recursos, faz aumentar as chances da difusão de uma doença infecciosa, por exemplo, ou outra de grande risco, aumentando os índices de mortalidade. A falta de educação sexual torna a taxa de natalidade maior, principalmente entre adolescentes. Todos esses dados interferem de alguma forma no crescimento populacional, pois

geralmente em regiões com melhor situação econômica, os resultados podem ser diferentes.

BASSANEZI (2002, p. 329) coloca: "O crescimento populacional nem sempre vem acompanhado de mecanismos que sustentam uma produção compatível com o bem estar social. A violência e a miséria tem sido características marcantes, relacionadas com o crescimento populacional dos países subdesenvolvidos".

HUGHES-HALLET et al. (1997, p. 16) consideram, por exemplo, os dados para a população do México, no período de 1980 a 1986.

TABELA 6 – POPULAÇÃO DO MÉXICO (1980 – 1986)

ANO	POPULAÇÃO (MILHÕES)	VARIAÇÃO DA POPULAÇÃO (MILHÕES)
1980	67,38	1,75
1981	69,13	1,80
1982	70,93	1,84
1983	72,77	1,89
1984	74,66	1,94
1985	76,60	1,99
1986	78,59	

FONTE: HUGHES-HALLETT, D. et al. **Cálculo**, v.1. Rio de Janeiro: LTC, 1997.

Ao se dividir a população de cada ano pela anterior, por exemplo, a população de 1981 pela de 1980, obtem-se o seguinte: 69,13 / 67,38 = 1,026. De forma equivalente ocorre com os demais anos. Isso garante que a população do México nesse período cresceu aproximadamente 2,6% a cada ano. O fator de crescimento é constante e esses dados obedecem a um crescimento exponencial.

Se t é usado para representar o número de anos, então:

Quando $t = 0$, a população é $67{,}38 = 67{,}38 \cdot (1{,}026)^0$

Quando $t = 1$, a população é $69{,}13 = 67{,}38 \cdot (1{,}026)^1$

Quando $t = 2$, a população é $70{,}93 = 69{,}13 \cdot (1{,}026) = 67{,}38 \cdot (1{,}026)^2$

Quando $t = 3$, a população é $72{,}77 = 70{,}93 \cdot (1{,}026) = 67{,}38 \cdot (1{,}026)^3$.

Portanto a população é dada por $P = 67{,}38 \cdot (1{,}026)^t$. Logo se identifica uma função exponencial de base 1,026.

Mas o que vai ocorrer com a população do México quando $t = 27$, ou seja, qual a previsão para 2007? Esses são dados importantes que podem ser encontrados com o uso da função definida acima. Pode-se prever (valor estimado) quantos habitantes terá o México daqui a 50 anos, por exemplo, ou em que ano a população chegará a atingir um número x de habitantes. Essas são algumas perguntas que podem ser respondidas para qualquer tabela semelhante.

Quanto ao México, em 2007 terá por volta de 134,76 milhões de habitantes, pois $P = 67{,}38 \cdot (1{,}026)^{27} = 134{,}76$, onde esse valor é o dobro da população de 1980. Então a cada 27 anos, a população será duplicada, o que é chamado de *período de duplicação.*

Ao tratar da população mundial, HUGHES-HALLET et al. (1997, p. 16) verificam que ela cresce exponencialmente, por isso também apresenta período de duplicação. Portanto, pode-se sugerir ao aluno que responda: supondo que você viva até os 76 anos de idade, o que você pode concluir sobre o crescimento da população mundial? O aluno irá concluir que o período de duplicação é de 38 anos, logo aos 76 anos acompanhará a população quadruplicar ao longo de sua vida.

A maneira como a população mundial vem crescendo é preocupante, pois alguns elementos fundamentais à sobrevivência podem vir a faltar. Por exemplo, a quantidade de água doce disponível para o consumo humano é pequena. O desperdício de água e a falta de consciência são grandes. Será que daqui vários anos teremos água suficiente para suprir as necessidades da população?

E quanto à alimentação, será que teremos alimento o suficiente para a população, se continuar crescendo exponencialmente?

Segundo BASSANEZI (2002, p. 328), a previsão da Fnuap é de que a população mundial em 2050 será de 8.9 bilhões. "A previsão do crescimento populacional de um país é fundamental para avaliar sua capacidade de desenvolvimento e estabelecer mecanismos que sustentem uma produção compatível com o bem estar social...".

Segundo dados apresentados por J. Cohen, diretor do Laboratório da Universidade Rochefeller, se não houver grandes mudanças no comportamento de consumo, a Terra pode suportar uma população de 10 bilhões de pessoas. Já se houver

uma mudança nos hábitos de consumo, acreditam os demógrafos que nosso planeta pode suportar até 20 bilhões (BASSANEZI, 2002, p. 356).

Portanto, a apresentação desses problemas instiga o jovem a participar de situações da sociedade, tornando-o um ser crítico, sendo estas algumas das características presentes no uso da modelação.

O crescimento populacional pode ser um dos assuntos mais adequados para iniciar o trabalho com as funções exponencial e logarítmica, devido a sua simplicidade em comparação aos demais temas abordados.

4.6 ACÚSTICA

A acústica é um ramo da física, dentre outras coisas, que estuda a propagação do som em um local. DANTE (1998, p. 224) apresenta ao final do capítulo sobre logaritmos uma leitura complementar: A matemática do som. Diz que a energia envolvida em certos sons é representada por potências de 10, como por exemplo, o rumorejar das folhas é dado por 10^1, uma conversa em voz alta é algo em torno de $10^{6,5}$ e um martelo sobre uma lâmina de aço chega a 10^{11}. Em todos os exemplos acima, pode-se perceber a variação do expoente em relação a uma base dez, portanto usa-se o logaritmo decimal para expressar tal variação.

Reescrevendo os exemplos, tem-se que o rumorejar das folhas é de 1 bel, o som de um martelo sobre uma lâmina é de 11 bels, logo a escala logarítmica empregada para descrever níveis de som é a escala BEL, onde 1 BEL = log 10 = 10 dB.

A unidade usada para medir a intensidade de um som é o decibel (dB), nome dado em homenagem ao físico escocês Alexander Graham Bell (1847-1922).

Portanto a grandeza nível sonoro obedece a uma escala logarítmica, sendo notórios os benefícios de seu uso, pois as indústrias são privilegiadas por um método capaz de medir os ruídos produzidos durante o trabalho de seus funcionários, possibilitando garantir a saúde e produtividade dos mesmos. A portaria Brasileira do Ministério do Trabalho nº 3214/78 fixa o máximo permitido de 85 dB para 8 horas de jornada de trabalho em ambientes industriais onde existe ruído de máquinas e processos ruidosos. Esses dados são baseados nos limites da audição humana, que não

suporta ficar exposta por muito tempo a níveis sonoros acima de 8 bels, podendo causar danos e lesões irreversíveis.

Em BARRETO FILHO e XAVIER (1998, p. 204) o nível sonoro é definido por: $N = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, onde N é o nível sonoro, I é a intensidade acústica em W / m^2 e I_0 é a intensidade de referência, que é a intensidade mínima que o tímpano humano necessita para perceber a onda sonora, sendo $I_0 = 10^{-12}\ W / cm^2$ (potência da onda sonora por unidade de área).

Alguns exemplos de nível sonoro são: Murmúrio: 20 dB; música suave: 40 dB; conversa comum: 65 dB; rua barulhenta: 90 dB; avião próximo: 100 dB.

Um exercício citado em Acústica (2006): A intensidade do som, em W / m^2, em um jardim sossegado, é da ordem de 10^{-4}. Em um restaurante, é de 10^{-1}. O limiar da audição se dá a 10^{-6} nas mesmas unidades. Calcular a sonoridade, em dB, no jardim e no restaurante. Para resolver fazemos $N = 10 \log\left(\frac{10^{-4}}{10^{-6}}\right)$, o que nos dá $N = 20$ dB, no jardim. E no restaurante, temos $N = 10 \log\left(\frac{10^{-1}}{10^{-6}}\right)$, resultando em 50 dB.

Outro exercício sugerido em Acústica (2006) é: Um equipamento mede o nível de ruído de uma rua em dB. Às 16 horas mediu-se 20 dB. Às 18 horas o aparelho acusou 80 dB. Calcular quantas vezes aumentou a intensidade da onda sonora. Para resolver, fazemos $N - N_0 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, então $80 - 20 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, logo temos $I = 10^{-6} \cdot I_0$.

Os problemas a serem investigados em relação à acústica podem ser favoráveis aos alunos, pois os adolescentes adoram "curtir um som ensurdecedor", como por exemplo, nos shows que freqüentam. Com certeza, muitas histórias irão aparecer, incluindo aquelas, onde um desprecavido, acabou ficando surdo por causa disso.

4.7 ESCALA RICHTER

Em AGUSTIN (1998), tem-se que a escala Richter é usada para quantificar a magnitude sísmica de um terremoto, ou seja, medir a gravidade do sismo, que é o movimento no interior da Terra. Essa escala foi desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Francis Richter e Beno Gutenberg, ambos membros de um instituto de tecnologia da Califórnia, onde estudavam os sismos no Sul da região. A escala Richter foi graduada de 1 a 9, pois pareciam impossíveis terremotos mais fortes na Califórnia. Atualmente, não existe um limite teórico para esta medida em outras regiões do mundo, por isso podemos classificar como "escala aberta" de Richter.

O princípio utilizado é uma escala logarítmica de base 10, onde a magnitude de Richter corresponde ao logaritmo da medida da amplitude das ondas sísmicas (ondas causadas por vibrações do solo) a 100 km do epicentro (ponto da superfície do globo mais próximo do centro de abalo de um terremoto), ou seja, é calculada pela equação: $M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$, onde A representa a amplitude medida num terremoto por um instrumento chamado sismógrafo e A_0 é uma amplitude de referência.

Por ser uma escala logarítmica de base 10, à medida que a magnitude aumenta, temos uma amplitude 10 vezes maior. Por exemplo, um terremoto com magnitude 6, tem uma amplitude 10 vezes maior que um terremoto de magnitude 5.

A energia liberada por um terremoto de magnitude zero é de aproximadamente $1{,}8 \cdot 10^{-2}$ kW/h, sendo esta a amplitude de referência, já citada anteriormente.

O maior terremoto conhecido ocorreu no Chile, em 22 de maio de 1960. Os terremotos com magnitude acima de 8 podem provocar grandes danos, pois com uma magnitude 9 haveria a destruição total das construções de uma grande cidade, localizada a várias centenas de quilômetros do epicentro.

Um exemplo: Se a energia liberada num terremoto é de $7 \cdot 10^9$ kW/h, descobrir qual a magnitude do mesmo, na escala Richter. Para isso, faz-se: $M = \log\left(\frac{7 \cdot 10^9}{1{,}8 \cdot 10^{-2}}\right)$.

Agora, aplicando as propriedades de logaritmos, tem-se: $M = \log(7 \cdot 10^9) - \log(1{,}8 \cdot 10^{-2}) \Rightarrow M = (\log 7 + \log 10^9) - (\log 1{,}8 + \log 10^{-2})$.

Fazendo os cálculos, concluí-se que a magnitude desse terremoto é 11,59.

Num primeiro momento, o aluno poderá levantar os seguintes problemas: o que é um terremoto; quando ele ocorre; quais os danos que pode causar à população; quando ocorreu o último terremoto; quais as informações obtidas dessa ocorrência; o que significa magnitude; quais os meios utilizados para encontrar a magnitude de um terremoto? Posteriormente, junto com o aluno, é construído o conceito de função logarítmica, baseado na conclusão de que a magnitude dos tremores é medida e calculada com base em uma escala logarítmica.

Logo se percebe a importância da escala Richter, pois funciona como um facilitador de todo o processo.

4.8 *pH* DE UMA SOLUÇÃO

Em PERUZZO e CANTO (2000), tem-se que: "*p*" vem do alemão potenz, que significa poder de concentração e o "*H*" significa o íon de hidrogênio, ou seja, o *pH* é o potencial de hidrogênio iônico. É usado para indicar a acidez, a neutralidade ou a alcalinidade de uma substância. Seu valor varia entre 0 e 14, então quando o *pH* de uma solução é menor que 7, ela é ácida, quando é igual a 7, é neutra e maior que 7 é alcalina. Pode ser determinado por um medidor de *pH* chamado milivoltímetro ou por um indicador de *pH*, onde sua cor varia de acordo com o *pH* da substância. Por exemplo, no caso das flores *Hydrangea macrophylla*, elas são rosas ou azuis dependendo do *pH* do solo, quando em solos ácidos as flores são azuis, enquanto em solos alcalinos são rosas.

Alguns valores comuns do *pH* de substâncias conhecidas são: suco de limão $pH = 2{,}4$, refrigerante $pH = 2{,}5$, cerveja $pH = 4{,}5$, café $pH = 5{,}5$, ou seja, são substâncias ácidas; água pura $pH = 7{,}0$ é uma substância neutra; água do mar $pH = 8{,}0$, sangue $pH = 7{,}34$ a $7{,}45$; cloro $pH = 12{,}5$, caracteriza substâncias alcalinas. Esses dados são baseados na escala de *pH* criada pelo bioquímico Soren Peter L. Sorensen (1968-1939).

O *pH* de uma solução é definido como o logaritmo decimal do inverso da concentração de íons de hidrogênio, ou seja, $pH = \log_{10}\left(\frac{1}{H^+}\right) = -\log_{10}(H^+)$, sendo (H^+) a concentração molar de hidrogênio na solução, sabendo que 1 mol de $H^+ = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ íons (número de Avogadro).

Exemplos de cálculos de *pH* podem ser usados em soluções aquosas, onde para determinar o *pH* é preciso saber a concentração de íons H^+. O ácido clorídrico é um ácido forte e sua solução aquosa tem $H^+ = 0{,}1\ M$, onde o *M* é a moralidade, ou seja, a relação entre a quantidade de matéria em mols e o volume da solução em litros, então $pH = -\log(0{,}1) = 1$.

Segundo DANTE (1998, p. 216), pode-se apresentar o conteúdo, estudando sobre o cérebro humano, que contém um líquido cuja concentração de íons de hidrogênio é de $4{,}8 \cdot 10^{-8}$ mol/l e determinar qual é o *pH* desse líquido.

O resultado obtido será:

$$pH = \log\left(\frac{1}{4{,}8 \cdot 10^{-8}}\right) = \log 1 - \log(4{,}8 \cdot 10^{-8}) = \log 1 - (\log 4{,}8 + \log 10^{-8}) = 8 - \log 4{,}8.$$

Perceba que nesse momento o aluno usa as propriedades da divisão e multiplicação de logaritmos. Agora com o auxílio de uma calculadora encontra $pH = 8 - 0{,}681241 = 7{,}3$. Portanto conclui que é uma substância alcalina.

As pesquisas com *pH* requerem alguns conhecimentos na área de química, fazendo com que a compreensão dos assuntos envolvidos, possa vir a prolongar demasiadamente os estudos, tornando-se um obstáculo.

4.9 AQUECIMENTO E RESFRIAMENTO

Segundo HUGHES-HALLETT et al. (1997, p. 499), a lei do aquecimento e resfriamento de Newton diz: "A taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do meio ambiente".

Um exemplo para ilustrar essa lei é o caso de uma xícara de café quente, deixado para esfriar. Os possíveis questionamentos são: ao deixar a mesma descansar sobre a mesa esperando que o café esfrie, o que ocorre com a mudança de temperatura

e qual a relação entre a temperatura do café e do ar que o cerca? A lei de Newton garante que à medida que o café esfria, a taxa na qual ele esfria diminui, pois a diferença de temperatura entre o café e o ar diminui.

A expressão matemática que descreve a Lei de Newton é: $T(t) = T_0 + ba^t$, onde T é a temperatura do corpo, T_0 é a temperatura do ambiente e t é o tempo. Por exemplo: É cometido um assassinato e o corpo da vítima que originalmente estava a 37°, após duas horas sua temperatura é de 35°. Sendo a temperatura no ambiente constante e igual a 20°. Com esses dados é possível descobrir em que horas o assassinato foi cometido.

VALENÇO (2002, p. 21) traz um exemplo, extraído de LIMA (2001): O corpo de uma vítima foi descoberto às 23 horas. O médico da polícia chegou às 23h30min e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 34,8°. Uma hora mais tarde, ele tomou a temperatura novamente e encontrou 34,1°. A temperatura do quarto era mantida constante a 20°. Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a hora em que se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é de 36,5°. Neste exemplo, percebe-se a grande importância das leis físicas e matemáticas.

É interessante apresentar o uso de exponencial e logaritmo para resolver essa situação, pois diante de tantas criminalidades que ocorrem em nosso país, colocar o aluno diante de uma possibilidade de calcular soluções que geram uma pequena contribuição nas investigações, mostra a relevância dessas descobertas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conhecimento pronto estanca o saber e a dúvida provoca a inteligência.

Vigotsky

Ao utilizar a modelação no ensino de exponenciais e logaritmos, é interessante seguir alguns passos fundamentais para o bom desempenho do trabalho. Num primeiro momento, pode-se fazer uma análise do perfil dos alunos. Pois ao escolher um tema a ser abordado para a construção do modelo matemático, este deve estar o mais próximo possível do contexto sócio-cultural do aluno.

Definido o tema, direcionar os grupos de estudos, onde serão apresentados os possíveis questionamentos e feito o levantamento dos dados, das hipóteses. Em meio ao processo, vários conceitos matemáticos podem surgir. Um deles poderá ser as progressões geométricas. Outros exemplos também poderão ser apresentados. Ao final do trabalho, o aluno irá chegar à fórmula da função exponencial e (ou) logarítmica "sozinho". Com o resultado dos estudos realizados junto a professores, colegas, instituições, entre outros, construirão a fórmula matemática.

Nos exemplos contextualizados e modelados no presente trabalho, algumas opções foram tratadas de forma mais detalhada, enquanto outras ficaram um pouco restritas, pois em alguns casos, explicitar toda a construção do modelo, tornaria o trabalho demasiadamente demorado, por isso deixamos para outra ocasião.

Ao optar por trabalhar com o crescimento populacional, por exemplo, tem-se que: as funções exponenciais e logarítmicas serão modeladas através do estudo do crescimento populacional, sendo possível apresentar a ligação entre ambas às funções. O aluno poderá ser questionado, sobre situações em que se quer determinar, quantos habitantes tem-se após um determinado número de anos. Em contrapartida pode-se determinar em que ano tem-se essa mesma quantidade de habitantes. Após as investigações, pode-se concluir que a população cresce segundo características que definem um crescimento exponencial e inversamente encontra-se o ano que determina esse crescimento, utilizando uma função logarítmica. Ou seja, primeiro calcula-se a população em função do tempo e depois o tempo em função da população. Na

seqüência seria interessante a construção dos gráficos a partir dos dados coletados, pois viriam a esclarecer ainda mais esta ligação.

Após obter o modelo matemático, que neste caso seria a fórmula matemática que descreve o conceito da exponencial e do logaritmo, pode-se verificar sua validação. Por exemplo, no caso do crescimento populacional, comparara-se os resultados obtidos através do modelo, com dados reais presentes em tabelas estatísticas e tiram-se as possíveis conclusões. Na seqüência, pode-se utilizar outros exemplos em que o mesmo modelo pode ser aplicado.

As propriedades de cálculos com exponenciais e logaritmos também podem ser "modeladas", desde que já tenham sido trabalhados os conceitos através da modelação.

Por exemplo, se o modelo obtido, foi da população crescendo segundo a função $P = 67{,}38\ (1{,}026)^t$, e deseja-se saber qual será a população em 2007, quando $t = 27$. Logo $P = 134{,}76$ milhões de habitantes. Caso se deseje encontrar o ano em que a população irá atingir 134,76 milhões de habitantes, faz-se $134{,}76 = 67{,}38\ (1{,}026)^t$ e obtem-se $2 = 1{,}026^t$. Para ao resolução desta equação, pode-se pensar em tentativas e erros, por exemplo, quando tenta-se com $t = 15, 20, \ldots, 27, 28$, conseqüentemente encontra-se que o t está entre 27 e 28, ou melhor, que a população chegará a 134,76 habitantes durante o ano de 2007, portanto $t = 27$. Porém, a função logaritmo pode vir a proporcionar a resposta desejada, sem precisar recorrer as tentativas. Ao aplicar *log* em ambos os membros da igualdade, tem-se $\log 2 = \log 1{,}026^t$ e aplicando a propriedade de logaritmo de uma potência, tem-se $\log 2 = t \cdot \log 1{,}026$, o que resulta em $t = 27$. Nesta situação evidencia-se a importância da utilização de logaritmos, pois se encontra o resultado mais rapidamente.

Para mostrar o passo que se realizou acima, pode-se utilizar a seguinte demonstração:

I. Se $\log 1{,}026^t = \log 2 \Rightarrow 10^{\log 2} = 1{,}026^t$, pela definição de logaritmo.

II. Se $\log 1{,}026 = 0{,}0115 \Rightarrow 10^{0{,}0115} = 1{,}026$, pela definição de logaritmo.

Agora substituindo II em I, tem-se $10^{\log 2} = 10^{0{,}0115t}$, donde as bases são iguais e logo se conclui que $\log 2 = 0{,}0115\ t$, mas $0{,}0115 = \log 1{,}026$. Portanto, $\log 2 = t \cdot \log 1{,}026$.

Um exemplo, em que se pode utilizar as propriedades é quando se expressa t em função de P, possibilitando encontrar qualquer ano que se deseje. Para isso, deve-se encontrar a inversa da função $P = 67{,}38\ (1{,}026)^t$. Aplicando logaritmos, tem-se:

$\log P = \log [67{,}38\ (1{,}026)^t]$

Aplicando a propriedade do logaritmo de um produto, obtem-se:

$\log P = \log 67{,}38 + \log [(1{,}026)^t]$

E aplicando a propriedade do logaritmo de uma potência, tem-se:

$\log P = \log 67{,}38 + t \cdot \log 1{,}026$

Agora fazendo os cálculos, encontra-se a inversa:

$t = 89{,}7 \log P - 164{,}0$

Voltando ao exemplo anterior, faz-se:

$t = 89{,}7 \log 134{,}76 - 164{,}0$, o que nos dá $t = 27$, conferindo o resultado.

Não é necessário preocupar-se tanto com as dificuldades em relação às propriedades, pois se a aprendizagem ocorrer de forma significativa com os conceitos apresentados através da modelação, então as propriedades virão em conseqüência do que foi aprendido.

Já para definir o número e, acredita-se que o ideal seria modelar utilizando o tema juros compostos, pois aí o aluno poderá compreender o surgimento do mesmo. Os livros didáticos, em geral, deixam muito a desejar em relação a esse acontecimento.

Após trabalhar o logaritmo natural, seria interessante mostrar ao aluno que qualquer modelo construído com uso da base decimal, pode ser substituído por um similar de base e.

Em um segundo momento, quando os alunos já estiverem familiarizados com a modelação, pode-se sugerir a construção de um novo modelo, baseado em temas escolhidos por eles.

Os modelos criados para exponencial e logaritmos que são conhecidos (e reconhecidos), são aqueles que surgem da utilização da modelagem como método científico, porém professores e alunos, também podem tornar-se pequenos descobridores, quando se propõem a criar seus próprios modelos, ou seja, utilizando aplicações diferenciadas.

Podem surgir infinitas possibilidades, como um exemplo, em que o aluno cria um modelo para a função exponencial a partir da freqüência com que os grãos de pipoca estouram. O aluno faz a investigação de como funciona a programação do tempo, nos fornos de microondas. Qualquer questionamento neste sentido, leva a crer que o trabalho deve ter sido muito interessante e divertido, pois se comenta que no momento das investigações, ele marca o tempo que cada grão leva para estourar. Ao pensar que os grãos estouram muito rapidamente, encontra-se uma característica do crescimento exponencial. Neste caso, o aluno criou seu modelo para encontrar o tempo que os grãos levam para estourar, em função da quantidade de grãos que se tem.

O uso da calculadora é indispensável durante todo o trabalho, pois ao modelar para ensinar exponenciais e logaritmos, percebe-se que são facilmente calculados com uma calculadora científica. Portanto, o professor deve estar atento ao planejamento de suas aulas, providenciando as calculadoras com antecedência e certificando-se de que os alunos saibam utilizá-las, pois sem o acesso a elas, o trabalho será deficiente.

A seguir, seguem-se algumas sugestões de itens que podem auxiliar na construção de uma proposta de ensino. Estas seriam as idéias fundamentais, ao desenvolver a proposta de modelação para ensinar exponenciais e logaritmos:

1. Os passos a serem percorridos, partindo de uma situação "prática".
2. Definindo como a exponencial e o logaritmo aparecerão no processo investigativo.
3. Investigando as propriedades na situação abordada.
4. Função exponencial e função logarítmica: qual a relação entre ambas?
5. Em que momentos, e como, a calculadora será usada.

O desenvolvimento dos cinco itens, deve acontecer de acordo com um tema escolhido, ou seja, todo o percurso para a aprendizagem deverá ser modelado de acordo com um assunto pré-definido. O tempo para sua realização é imprevisível, pois será necessário planejar as atividades e definir os objetivos a serem alcançados.

Espera-se que ao final de um trabalho com modelação, o aluno consiga não só identificar nas mais diversas situações a aplicação do conceito matemático, como também estar de posse de um método matemático para solução de problemas: a modelagem.

Não existe a melhor estratégia de ensino a ser aplicada, mas diante da atual situação educacional, torna-se urgente que, professores se questionem a respeito das possibilidades e vantagens de se utilizar a modelação.

O uso da modelação poderá levar o aluno a pesquisar outras áreas de conhecimento, valorizar a matemática e ainda "aprender a pensar", possibilitando com isso, formar indivíduos mais críticos e preparados para a vida. Ao professor poderá acrescentar a experiência da troca, pois o mesmo será partícipe na construção do conhecimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acústica. Disponível em <http://www.fisica-potierj.pro.br/poligrafos/Acustica.htm> Acesso em 31 jul. 2006.

AGUSTIN, U. **Fundamentos de Geofísica.** Alianza, 1998.

ALMEIDA, L.; DIAS, M. **Um Estudo sobre o Uso da Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem**. Bolema, Rio Claro, SP, Ano 17, n. 22, p. 19-35, 2004.

BARBOSA, J. C. **O que pensam os professores sobre a Modelagem Matemática?** Zetetiké, Campinas, SP, v. 7, n. 11, p. 67-85, jan./jun. 1999.

_____. **Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação**. Bolema, Rio Claro, SP, Ano 14, n. 15, p. 5-23, 2001.

BARRETO FILHO, B.; XAVIER, C. **Matemática aula por aula**, v.1. São Paulo: FTD, 1998.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 3ª ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BRITO, D.; ALMEIDA, L. **O conceito de função em situações de modelagem matemática.** Zetetiké, Campinas, SP, v. 13, n. 23, p. 62-86, jan./jun. 2005.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**, v.1. São Paulo: Ática, 1999.

D'AMBRÓSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática.** 5ª ed. São Paulo: Summus, 1986.

GLENN, W. H.; JOHNSON, D. A. **Matemática sem problemas**. Dispositivos de Cálculos, v. 4. Editora José Olympio, Edições Melhoramentos, RJ, 1972.

HIRATSUKA, P. I. **A mudança na prática de ensino do professor de matemática: uma visão fenomenológica**. Bolema, Rio Claro, SP, Ano 17, n. 21, p. 21-43, 2004.

HOFFMANN, L. D. **Cálculo: um curso moderno e suas aplicações**, v. 1. Rio de Janeiro: LTC, 1990. Cap. 4.

HUGHES-HALLETT, D. et al. **Cálculo**, v.1. Rio de Janeiro: LTC, 1997.

JACOBINI, O.; WODEWOTZKI, M. **A Modelagem Matemática Aplicada no Ensino de Estatística em Cursos de Graduação**. Bolema, Rio Claro, SP, Ano 14, n. 15, p. 47-68, 2001.

LEAL, S. **Modelação Matemática: uma proposta metodológica para o curso de economia**. Florianópolis, 1999. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino**. Gradativa, Temas de matemática, 2004. Cap. 11.

MAOR, E. ***e*: a história de um número**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2006.

O'BRIEN, T. **Abaixo a matemática do papagaio.** Nova Escola, São Paulo, SP, Ano XV, n. 134, p. 12-14, ago. 2000.

PERUZZO, F.; CANTO, L. **Química na abordagem do cotidiano**, vol 2. São Paulo: Moderna, 2000.

ROSA, M.; OREY, D. **Vinho e Queijo: Etnomatemática e Modelagem**. Bolema, Rio Claro, SP, Ano 16, n. 20, p. 2-3, 2003.

SILVEIRA, J. C.; RIBAS, J. L. **Discussões sobre Modelagem Matemática e o ensino-aprendizagem**. Encontro Paranaense de Modelagem no Ensino da

Matemática, Universidade Estadual de Londrina, 2004. Disponível em <http://www.somatematica.com.br/artigos/a8/p2.php> Acesso em 11 abr. 2006.

SMOLE, K. C. S.; KIYUKAWA, R. **Matemática Ensino Médio**, v.1. São Paulo: Saraiva, 1998.

VALENÇO, I. R. P. **Exponenciais e Logaritmos: uma abordagem contextualizada.** Curitiba, 2002. Monografia (Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Tuiuti do Paraná.