UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

ADRIANA FERREIRA SILVA

A LINGUAGEM UTILIZADA NA DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO PELOS LIVROS DIDÁTICOS

CURITIBA
2006

ADRIANA FERREIRA SILVA

A LINGUAGEM UTILIZADA NA DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO PELOS LIVROS DIDÁTICOS

Monografia apresentada ao Curso de Especialização para Professores de Matemática, Departamento de Matemática do Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Matemática

Orientador: **Prof. Dr. Alexandre Kirilov**

CURITIBA
2006

TERMO DE APROVAÇÃO

ADRIANA FERREIRA SILVA

A LINGUAGEM UTILIZADA NA DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO
PELOS LIVROS DIDÁTICOS

Monografia aprovada como requisito parcial para obtenção do título de Especialista no Curso de Especialização para Professores de Matemática, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Kirilov
Departamento de Matemática, UFPR

Examinador Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves
Departamento de Matemática, UFPR

Curitiba, novembro de 2006.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Alexandre Kirilov pela conduta e disponibilidade indispensáveis e aos amigos colegas e pessoas que de alguma maneira colaboraram carinhosamente à existência desse trabalho.

RESUMO

Este trabalho é fruto de uma pesquisa teórica cujo objetivo era fundamentar e justificar questionamentos sobre a abordagem do conceito e da definição de Função, principalmente com relação à sua linguagem, pelos livros didáticos no Ensino Médio. Neste percurso incluímos um breve histórico sobre a origem do conceito de função e fizemos um levantamento das conclusões de outras pesquisas teóricas e de campo sobre práticas pedagógicas do ensino deste conceito, focando principalmente a linguagem Matemática aplicada ao desenvolvimento deste conteúdo. Tivemos o cuidado de coletar algumas definições de livros didáticos de Ensino Médio e Superior e comentá-las a respeito dos contextos em que a definição é apresentada. Por fim, na conclusão, apresentamos diretrizes para a continuação deste trabalho.

Palavras chaves: Definição de função, linguagem matemática.

SUMÁRIO

RESUMO IV

1 INTRODUÇÃO 3

2 A MATEMÁTICA E SUA LINGUAGEM NA EDUCAÇÃO ATUAL 5

3 ORIGEM DA NOÇÃO DE FUNÇÃO 8

4 FUNÇÃO – DEFINIÇÃO – LINGUAGEM MATEMÁTICA 13

4.1 A Necessidade de compreender e formalizar conceitos matemáticos 13

4.2 A formalização do conceito de função 16

5 ENSINAR E APRENDER FUNÇÕES 20

6 AS DEFINIÇÕES DE FUNÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS 25

6.1 Ensino Médio 25

6.2 Ensino Superior: 29

6.2.1 Cálculo Diferencial e Integral 29

6.2.2 Análise Matemática Real 30

6.2.3 Teoria Ingênua dos Conjuntos 30

6.2.4 Álgebra Linear 31

7 O ALUNO PROFESSOR 32

8 CONCLUSÃO 34

REFERÊNCIAS 36

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo principal, destacar a dificuldade que alunos do Ensino Médio têm em compreender textos apresentados nos livros didáticos, em particular a definição de Função.

O argumento principal para a abordagem do tema, se deu a partir das minhas observações em aulas particulares a alunos do ensino médio. Foi visto que, mesmo resolvendo alguns exercícios sobre funções, os alunos não entendiam o texto da definição, pois muitas vezes não conseguiam traduzir os símbolos que a compõe, ou seja, não conseguiam contextualizar o texto, nem compreendiam a linguagem Matemática apresentada por ele. Também não faziam qualquer analogia com o conceito matemático que aquelas palavras tentavam descrever, ou ainda, fazer correta relação entre conceito, definição e resolução de problemas.

Além das justificativas apresentadas, voltando às lembranças de quando era estudante, recordei-me, de ter enfrentado as mesmas dificuldades.

A fundamentação teórica é pautada em algumas das mais importantes referências situadas na literatura educacional brasileira, como é o caso de Ubiratan D´Ambrósio e de Nilson José Machado, em artigos relacionados ao assunto tanto das Revistas Matemáticas, quanto da Internet. Também foram analisados alguns livros didáticos do Ensino Médio, Superior e outros trabalhos, além dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM).

Essa pesquisa procurará ressaltar a importância da linguagem Matemática na formação do indivíduo. Observa que a modernidade vivida atualmente também deverá agir sobre a educação e consequentemente no ensino da Matemática. Com isso, destaca a responsabilidade dos autores ao introduzirem os conteúdos nos livros didáticos. Coloca em destaque o dever do professor em ser o fio condutor de transmissão daquilo que está impresso. Faz um apanhado de pareceres sobre resultados obtidos de trabalhos em torno de como esse conhecimento efetivamente é transmitido, mas sem perder uma das bases dessa investigação, que é a linguagem Matemática diante do conceito escolhido para esse estudo.

O contexto histórico é montado, em cima da geração primitiva do conceito de função e de um quadro cronológico sobre a constituição do mesmo, com as contribuições de cientistas em diferentes épocas na elaboração das várias versões da definição de Função. O trabalho contém ainda observações em torno das definições retiradas dos livros didáticos do ensino médio e superior.

Além de tudo que foi apresentado para validar e justificar a realização deste trabalho, essa pesquisa mostra que realmente é necessário o debate sobre a responsabilidade e a importância que autores de livros didáticos têm, para que seja feita a devida assimilação de um conteúdo tão abrangente e fundamental dentro do currículo do ensino de matemática.

2 A MATEMÁTICA E SUA LINGUAGEM NA EDUCAÇÃO ATUAL

Assim como outras áreas que regem o desenvolvimento da humanidade e das suas sociedades, a educação é atualmente um dos fatores e temas mais discutido e analisado sob os mais diversos focos. A Educação Matemática, como uma ramificação do tema geral (Educação), vem se ampliando e se desenvolvendo numa velocidade que há décadas passadas não se via ou não se tem registro.

Mas é praticamente impossível falar de educação Matemática sem citar ou recorrer à ciência Matemática, que por si só já manifesta pelo menos alguma reação de repulsa ou interesse por quem quer que seja; desde o semi-analfabeto até os mais estudiosos dessa ciência milenar. Ciência cuja importância de seu legado é inquestionável e precisa ser preservado.

> (...) a Matemática faz parte dos currículos escolares, ao lado da Linguagem Natural, como uma disciplina básica. Parece haver um consenso com relação ao fato que seu ensino é indispensável e sem ele é como se a alfabetização não se tivesse completado. (MACHADO, 2001, p.8).

A atual Era da Informação, propiciada pela alta tecnologia, aprimorada dia após dia, que por sua vez tem seu desenvolvimento efetivamente respaldado pela base matemática. Base esta que é proporcionada nos institutos de ciência e tecnologia, universidades e outras instituições durante muitas gerações a serviço do desenvolvimento científico e tecnológico do presente e do futuro em todo o Mundo. Entre as conseqüências disso, tem-se uma gama de informação incalculável à disposição de grande parte (senão da maioria) das populações do planeta. Com isto a criança e o adolescente de hoje também são alvos diretos das influências do mundo globalizado e sem fronteiras.

Sendo a Matemática uma das células da concepção de sociedade das primeiras civilizações e cujos saberes foram perpetuados coletiva ou individualmente ao longo da História, é dever dos atuais detectores ou transmissores de conhecimentos dessa ciência, favorecer a disseminação dos mesmos. Conhecimentos estes que certamente de alguma forma farão parte da formação e do crescimento intelectual, profissional ou até mesmo humano daqueles que ainda não os possuem independentemente das habilidades que cada indivíduo tem com a Matemática.

> É em Matemática que os alunos entram em contato com sistemas de conceitos que permitem resolver problemas e fazer novas deduções; em que a coerência e a precisão do raciocínio conferem legitimamente às idéias e às conclusões obtidas, segundo a necessidade lógica, de premissas definidas (por outros). (MICOTTI, 2006, p.163).

Nesse contexto, se as premissas definidas anteriormente por outros são o fio da meada para novas conclusões, é dever e coerente, que este trabalho coloque em discussão a forma de como elementos da Matemática são usados para ensinar e ampliar a conquista de novos conhecimentos matemáticos, pois sabe-se, que apesar de lentamente, a Matemática sofreu transformações da acordo com as necessidades das diferentes épocas no decorrer da História da humanidade.

Como a Matemática, a linguagem é um dos fatores primordiais para a constituição e o desenvolvimento de uma sociedade. Por isso, várias formas de linguagem são usadas para ampliar a comunicação entre as pessoas dos mais diversos ramos, como por exemplo, o uso da linguagem técnica, poética de uso literário e cotidiano. Assim, de acordo com ZUCHI (2004, p.50) tem-se que: "Para que ocorra a comunicação faz-se necessário a presença de elementos considerados fundamentais para a concretização da mesma".

A linguagem matemática, com suas peculiaridades e ao mesmo tempo universal é uma das maneiras mais antigas de comunicação e base do desenvolvimento do mundo atual. "A linguagem Matemática desenvolveu-se para facilitar a comunicação do conhecimento matemático entre as pessoas." ZUCHI (2004, p.51).

Nesse sentido e com a preocupação de um profissional da educação, que quando estudante passou por dificuldades na compreensão de símbolos, definições e contextualização de alguns conteúdos durante esse período, percebe-se que os mesmos problemas ainda hoje atormentam muitos alunos. Isto foi percebido a partir de observação enquanto docente, principalmente em aulas particulares a alunos do Ensino Médio e também através de relatos de colegas professores tanto do Ensino Fundamental quanto do Médio que encontraram a mesmas deficiências em seus alunos.

Então, uma das inquietações que motivaram a realização deste trabalho em relação ao ensino e aprendizagem de funções, é a dúvida se os estudantes assimilam a forma textual de como normalmente é apresentada a DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO. Seguindo o mesmo raciocínio, fica a interrogação se é possível aprender o conteúdo (função) sem compreender o texto da definição de função. Mais do que isso, será que a compreensão do conceito não fica comprometida por causa de sua formalização (ou forma de como essa formalização é exposta e explorada)? A inúmera quantidade de detalhes que formam a Matemática é perceptível por qualquer pessoa que teve o mínimo contato com a ela, mesmo com uma visão mais ou menos limitada, dependendo do seu grau de estudo.

Para MICOTTI, M. C. de (2006, p.163) determinadas características do saber matemático devem ser vistas a partir da didática, para facilitar a identificação de quais elementos precisam ser revistos para melhorar o ensino. Entre essas características há "a precisão dos conceitos e a especificidade da linguagem".

Conforme D'AMBRÓSIO (1996, p.58) pode-se dizer que, devido ao grande desenvolvimento da tecnologia e consequentemente a rápida e grande aquisição de informação através das mais diversas fontes como foi mencionada anteriormente, a Matemática está sendo transformada, mas sem que o rigor científico tenha sido diminuído ou banalizado, mas sim de outra natureza. Assim, a Matemática torna-se um estilo de pensamento atual, com a linguagem apropriada para expressar reflexões sobre as maneiras de explicação.

Portanto, é visto que é cada vez mais necessário o debate, pesquisas e trabalhos em relação ao ensino da Matemática tanto no campo global quanto nos tópicos, peculiaridades e detalhes que a compõe.

Para D'AMBRÓSIO (1996, p.58), a diversidade cultural influencia a Matemática e essa nova Matemática pode ser usada desde o ensino fundamental. Com isso os cursos de licenciatura devem ser remodelados ou adaptados, preparando profissionais capazes de acompanhar tais mudanças.

Diante dessa idéia, apesar de ser uma reflexão de aproximadamente uma década pode-se dizer que é uma opinião bastante atual. Isto mostra que não se pode ignorar o fato de que grande parte do aparato oferecido pela Nova Era está à disposição dos educandos conforme a realidade sócio-cultural em que estão inseridos. Atualmente, mesmo com limitações estruturais que uma escola possa ter, inevitavelmente ela cobrará do professor uma atuação condizente à realidade de seus alunos, mas sempre procurando trazer à sala de aula, na medida do possível tudo que for capaz de ampliar e facilitar a aquisição de conhecimentos por parte desse estudante.

Portanto, não se trata de modismo discutir como determinados conteúdos são trabalhados na escola, mas sim de uma necessidade de confrontar e excitar o real interesse do sujeito para com as informações que lhes serão oferecidas.

3 ORIGEM DA NOÇÃO DE FUNÇÃO

Na abordagem de um dicionário de Matemática, a colocação do termo estudado é a seguinte:

> Função, sinônimo de aplicação. Na prática, emprega-se de preferência a palavra função no caso em que o conjunto de chegada é o corpo dos reais ou o corpo dos números complexos. Em particular, as aplicações cujo conjunto de chegada é R são denominadas funções numéricas.
> (Reserva-se ainda o nome de função para uma aplicação definida sobre uma parte não fixada de um dado conjunto; em outras palavras para uma aplicação cujo conjunto de definição não é necessariamente igual a todo o conjunto de partida). (CHAMBADAL, 1978, p.82).

É fato que a língua portuguesa, tanto a falada como a escrita, sofre influência dia após dia conforme é possível verificar na literatura, no cinema, nos escritos é até mesmo ao comparar o linguajar de duas pessoas com certa diferença de idade. Um exemplo é a diferença significativa da fala de um adolescente com a de seus avós.

> Linguagem, s.f. Utilização dos elementos de uma língua como meio de comunicação entre os homens, de acordo com as preferências de cada um, sem se preocupação estética; qualquer meio de exprimir o que se sente ou pensa; estilo; (...). (BUENO 1985, p.661).

Inevitavelmente fazendo parte da formação intelectual humana, a linguagem matemática, também sofreu consideráveis mudanças com o passar da História e do desenvolvimento científico em geral. Mas isso não necessariamente com a mesma (ou aproximadamente) velocidade das influências sofridas pela língua e pela linguagem materna. Assim, por conseqüência, a definição e o conceito de função no contexto matemático também passaram por várias modificações através dos tempos. Nesse sentido, a História da Matemática mostra várias alterações na teorização do conceito de função.

Para CHAVES; CARVALHO (2006), o conceito fundamental de função parte da relação do homem com o meio social e cultural em que vive, pois altera a natureza e a relação dele com a mesma através do processo de produção imposto sobre ela buscando benefícios. Nesse sentido, nos dizeres dos autores se tem que:

> (...) os primeiros pensadores perceberam a dimensão da realidade plural que queriam dominar, e que seria impossível tentar de uma só vez compreendê-la em sua totalidade. Necessitaram então, recortar dessa totalidade um conjunto de elementos que fossem bastante significativos para esse estudo.

Assim como o método científico em geral; é possível dizer, que o conceito de função nasceu intuitivamente para resolver algum problema prático. Mais do que isto, para esses autores, o instinto de funcionalidade vem desde as "relações criadas para a invenção do número." Pois de acordo com a necessidade de utilizar novos elementos para contar e numerar, o homem da Antigüidade, vivenciou a necessidade de utilizar variáveis que formariam sistemas de numeração mais úteis, pois a associação dos dedos às quantidades passou a ser insuficiente.

Segundo LIONNSAIS, citado por DELACHET (1967, p. 40), função tem origem geométrica, também foi prática devido ao cálculo algébrico dos árabes e da trigonometria hindu, que redescobriu a noção no estudo das equações algébricas no período Renascentista. Mas a noção de função ficou mais evidente com Descartes no séc. XVII sob interpretação da álgebra e da geometria. Noção essa "de quantidade dependente do valor ou da grandeza de uma outra quantidade independente chamada variável".

No entanto, conforme as referências consultadas, não é possível apontar um parecer definitivo quanto a origem do conceito de função. Porém, SÁ (2006); BOTELHO (1992) e MIELKE (2006) apresentam trabalhos específicos sobre o processo evolutivo de tal conceito, com uma abordagem histórica mais detalhada, que podem oferecer maiores informações a quem deseja conhecer melhor como foi o processo de construção e evolução da formalização do conceito de função no decorre da História.

Através do quadro cronológico posteriormente apresentado e adaptado para este trabalho e que pode ser encontrado em um dos trabalhos acima mencionados, é possível ter uma idéia de como o conceito e principalmente a definição de função sofreu alterações com o passar dos tempos. Também mostra as contribuições de grandes nomes da ciência a favor do desenvolvimento desse elemento (função) num período de 372 anos.

TABELA 1 – DADOS HISTÓRICOS NA FORMAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

continua

AUTOR	ANO	CONTRIBUIÇÃO
René Descartes (1596-1650)	_	Chegou a definir função como qualquer potência de x, como $x^2, x^3, \ldots$
Isaac Newton (1643-1727)	_	Introduziu o termo "variável independente".
James Gregory	1667	Na obra *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura*, conceituou função sem utilizar a palavra propriamente dita: "Nós chamamos uma quantidade x composta de outras quantidades a, b,... se x resulta de a, b ,... pelas quatro operações elementares, por extração de raízes ou por qualquer outra operação imaginável."
Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)	1694	Empregou a palavra *função* para designar quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva. E na obra História usou a palavra "função" para representar quantidades que dependem de uma variável.
Jakob Bernoulli (1654-1705)	1694	Empregou a palavra função como sendo: quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva.
Johann Bernoulli	1718	Definiu da seguinte maneira: "função de uma magnitude variável à quantidade composta de alguma forma por esta magnitude variável e por constantes"
Leonhard Euler (1707-1783)	_	Introduziu o símbolo f(x)
D'Alembert (1717-1783)	_	equação da onda: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$
Daniel Bernoulli (1700-1782)	1753	Tentativa de resposta para o problema da corda vibrante: $y(x,t) - \sum_{N=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{N\pi x}{l}\cos\frac{N\pi x}{l}$
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)	1797	Na obra Théorie des Functions Analytiques, definiu: "Chama-se função de uma ou de várias quantidades a toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entrem de alguma maneira, combinadas ou não com outras quantidades cujos os valores são dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções são consideradas apenas as quantidades assumidas como variáveis e não as constantes que aparecem combinadas a elas"

TABELA 1 – DADOS HISTÓRICOS NA FORMAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Continuação

AUTOR	ANO	CONTRIBUIÇÃO
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)	1806	Lecons sur le calcul des fuctions: "Funções representavam diferentes operações que deviam ser realizadas em quantidades conhecidas para obterem-se valores de quantidades desconhecidas, e estas quantidades desconhecidas eram, propriamente, o último resultado do cálculo."
Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)	1822	Afirmou em La théorie analytique de la chaleur que qualquer função poderia ser expressa por uma série trigonométrica da seguinte forma: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{N=1}^{\infty}\left[a_N \cos\frac{N\pi x}{l} + b_N \text{sen}\frac{N\pi x}{l}\right]$
Augustin Louis Cauchy (1789-1857)	1821	Em Cours d'analyse definiu função: "Quando quantidades variáveis estão ligadas entre si de tal forma que, o valor de uma delas sendo dado, pode-se determinar o valor das demais, diz-se usualmente que estas quantidades são expressas por meio de uma delas, que toma o nome de variável independente; e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de funções dessa variável." Definiu continuidade através de infinitésimos.
Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805-1859)	_	Demonstrou que nem todas as funções podem ser descritas pela série de Fourier.
Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805-1859)	1837	Definiu função como: "Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x."
Nikolái Lobatchesvsky (1792-1856)	_	Definiu função : "A concepção geral exige que uma função de x seja chamada de um número que é dado para cada x e que muda gradualmente com x. o valor da função pode ser dado ou por uma expressão analítica, ou por uma condição que ofereça um meio para testar todos os números e selecionar um deles; ou finalmente, a dependência pode existir mas permanecer desconhecida".

TABELA 1 – DADOS HISTÓRICOS NA FORMAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Conclusão

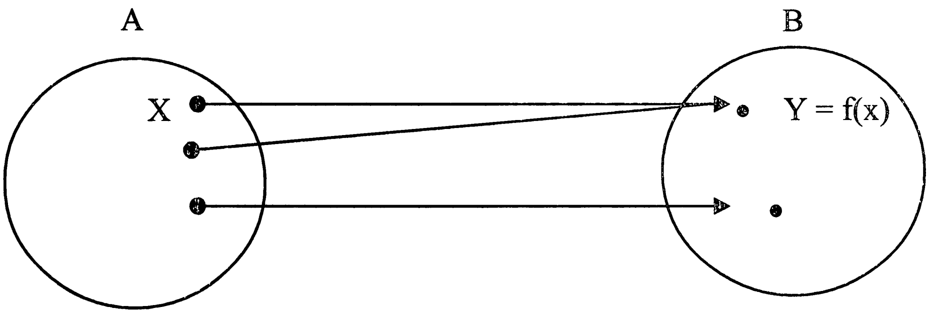
AUTOR	ANO	CONTRIBUIÇÃO
Bernhard Riemann (1826-1866)	_	Esclareceu os critérios de integrabilidade, e deu origem ao conceito de "integral de Riemann"
Philipp Cantor (1845-1918)	_	Desenvolveu a teoria dos conjuntos
Karl Weierstrass (1815-1897)	_	Definiu função como uma série de potência juntamente com todas as que podem ser obtidas dela por prolongamento analítico.
Giuseppe Peano (1858-1932)	_	Definiu três conceitos primitivos que o zero, o conceito de número (inteiro não-negativo) e a relação de ser sucessor de, os quais, junto com seus cinco postulados, forneceram uma construção rigorosa do conjunto dos números naturais.
Nicolas Bourbaki	1968	Em Théorie des Ensembles conceitou função de duas maneiras: "Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se qualquer que seja x Є E, existe um e somente um elemento y Є F que esteja associados a x na relação considerada. Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo o elemento x Є E o elemento y Є F que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função." E: "Um certo subconjunto do produto cartesiano AxB".

FONTE: SÁ, P. F. 2006.

Portanto, conforme este quadro e as colocações anteriormente expostas, é possível grifar ainda mais, a grandeza de tal tópico pesquisado, dentro da construção, desenvolvimento e do estudo da Matemática.

4 FUNÇÃO – DEFINIÇÃO – LINGUAGEM MATEMÁTICA

O terceiro capítulo procura justificar através da literatura pesquisada, a importância de se estudar FUNÇÃO na escola e o próprio valor que esse elemento tem dentro da ciência. Destaca também, a obrigação de se levar em consideração a linguagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem de Matemática e consequentemente, de Funções. Adaptado a esse trabalho o conceito de função pode ser representado da seguinte forma:

> Dados dois conjuntos A e B, não vazios, chama-se função à lei que associa a cada elemento x de A um único elemento y de B.
> Para denotar que y está em função de x, mediante uma lei f, escrevemos: y = f(x).
> Lê-se: y é imagem de x segundo uma lei f.
> O conjunto A é chamado DOMÍNIO DA FUNÇÃO e o conjunto B, CONTRADOMÍNIO.
> O conjunto formado pelos elementos y, tal que: y = f(x) é chamado conjunto IMAGEM da função.
> Diz-se que, quando y = f(x), x é variável independente e y variável dependente.
> Através do diagrama, temos:
>
> 
>
>
> Notação:
> $f : A \to B; x \in B \to y = f(x)$
> Lê-se uma lei f definida de A em B que associa cada elemento x pertencente a A um único elemento y pertencente a B.
> (MATEMÁTICA PARA ESCOLAS TÉQUINICAS INDUSTRIAIS E CENTROS DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA, p. 30, 1993).

4.1 A Necessidade de compreender e formalizar conceitos matemáticos

Entre os objetivos a serem atingidos pela Matemática ensinada no ensino médio, como indica os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), o aluno deve: "ler e interpretar textos de interesse científico e tecnológico". Por outro lado, também destaca que: "as modalidades exclusivamente pré-universitárias e exclusivamente profissionalizantes do Ensino Médio precisam ser superadas", além disso, deve fazer com que o aluno seja capaz "de ter uma compreensão mínima das técnicas e dos princípios científicos em que se baseiam".

Citado por BICUDO, M. A. V. (1999 p.163), MICOTTI, M. C. de diz que: "o método dedutivo, as demonstrações, as relações conceituais logicamente definidas e as especificidades das representações simbólicas com seus significados precisos, diferenciam o saber matemático dos demais saberes". Mas é preciso que o acesso a esses saberes seja possível a todos os seres humanos, para que o ensino seja capaz de resolver problemas usando a Matemática.

Neste sentido, sendo a Matemática um dos pilares da evolução e do desenvolvimento científico e tecnológico, é notório que o estudo e o aprendizado dela inevitavelmente seja afetado caso certos conteúdos não sejam aprendidos, como é o caso do estudo de funções. Este subtítulo tentará expor alguns dados e conclusões de trabalhos e pesquisas realizados em torno da prática pedagógica no ensino de função.

Para COURANT (2000) "a parte principal da Matemática moderna gira em torno dos conceitos de função e de limite". Neste contexto o autor diz que "uma função Matemática é simplesmente uma lei que rege a interdependência de quantidades variáveis". Ainda segundo ele, apesar de que o sentido desta palavra função seja muitas vezes utilizado como causa e efeito na relação entre variáveis. Além disso, as interpretações filosóficas devem ser evitadas.

Numa citação de COURANT (2000, p.332) tem-se que:

> Para LEIBNIZ o primeiro a utilizar a palavra "função", e para os matemáticos do século XVIII, a idéia de uma relação funcional estava mais ou menos identificada com a existência de uma fórmula Matemática simples expressando a natureza exata da relação. Este conceito provou ser demasiadamente estreito para as exigências da Física matemática, e da idéia de função, juntamente com a noção relacionada de limite, foi submetido a um longo processo de generalização e esclarecimento, (....).

O conceito de função é um dos conteúdos fundamentais que formam o currículo de Matemática no Ensino Fundamental e Médio, mas é no Ensino Médio que seu ensino fica explícito e mais teorizado, fazendo a maior relação da teoria com a Matemática aplicada de uma forma mais real e significativa aos estudantes.

Conforme os direcionamentos apontados nos PCNEM, a Matemática no Ensino Médio deve produzir um conhecimento efetivo, de significado próprio, com uma visão ampla, formando um cidadão completo, ou seja, não deve ter um formato propedêutico nem somente profissionalizante. Nesse contexto, percebe-se a importância do ensino de função, pois é um conteúdo de uma ampla abrangência e que contempla todos esses quesitos estabelecidos. Além disso, os PCNEM (2001, p.39) enfocam que:"(...) é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornem uma linguagem de comunicação de idéias que permite modelar a realidade e interpretá-la." O documento indica também que, entre os objetivos a serem atingidos pela Matemática ensinada no ensino médio, é que o aluno precisa também se tornar apto a "ler e interpretar textos de interesse científico e tecnológico".

Em seu trabalho sobre linguagem matemática, LIMA, R. R. N (2005, p.10) coloca que:

> A linguagem, sua forma de comunicação, talvez seja um dos elementos mais importantes na tentativa de expressar o resultado correto, pois é isso que no campo prático, o "fazer" Matemática busca a todo momento. A linguagem Matemática mais do que escrita e oralidade, interfere nas preensões formais e leva a vinculação entre forma e conteúdo cuja gramática é definida pela lógica.
>
> Com o pouco uso da língua portuguesa tanto na leitura quanto na expressão (escrita) do conhecimento, dificultou-se ainda mais o entendimento de problemas, o saber ler e interpretar a matemática.

Ao se deparar no Ensino Médio com números consideráveis de alunos que não conseguem, por exemplo, fazer as operações fundamentais de divisão e multiplicação, se não for através da calculadora, pode-se considerar que a dificuldade em interpretar uma definição com uma linguagem formal passa ser muito maior.

Visto que num mundo globalizado e imediatista como se vive atualmente, com uma quantidade e variedade expressiva de informações recebidas constantemente, pode-se dizer que um texto muito formal e teórico, fora do linguajar real dos adolescentes, passa a ser um convite à desistência desse aluno em entender um determinado conteúdo ou até mesmo criarem uma postura negativa diante de algumas disciplinas e por fim, o abandono da escola, devido à falta de motivação despertada por ela.

É preciso que a teoria seja um componente de construção e não de desestímulo a quem esteja estudando qualquer que seja o assunto. Essa construção deve ser feita com a ligação correta entre os sujeitos (professor, material didático, aluno) envolvidos nesta ação.

Portanto, conforme os PCNEM, "se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as idéias isoladas e desconectadas umas das outras". Então além de rever a metodologia de ensino, é preciso que o conhecimento matemático deixe de ser algo fixo, baseado e reescrito somente a partir da "informação, com as definições, exemplos e exercícios de fixação."

> A Matemática é uma linguagem adaptada especialmente à expressão e à comunicação de tipos particulares de informação. Como outras linguagens, é capaz de crescimento orgânico, um crescimento que é estimulado pela descoberta de novas conexões e relações e a necessidade de novos símbolos. (...)"(DIENES 1971, p.131).

4.2 A formalização do conceito de função

Quando se discute a linguagem de utilizada para expressar determinados saberes, é preciso traduzir a escrita daquilo que se pretende ensinar.

Ao apresentar a definição de função, vários autores, como FERNANDEZ; YOUSSEF costumam usar a seguinte afirmação:

"Dados dois conjuntos A e B, chamamos **função** a relação f: A→B na qual, para todo elemento de A, existe um único correspondente em B".

Esta forma apresentada pode ser vista também como um obstáculo didático, já que nem sempre os alunos compreendem o significado dos símbolos f: $A \rightarrow B$ ou f: $R \rightarrow R$, mesmo porque há uma larga abrangência do conceito de função na Matemática escolar.

De acordo com PAIS (2002), pode-se dizer que função é um saber científico, pois é um conceito acadêmico (em desenvolvimento e estudo). A idéia de função pode ser expressa, já com limitações, como uma relação entre elementos de dois conjuntos de forma que a cada elemento do primeiro conjunto existe um único elemento segundo conjunto associado, segundo uma determinada regra. Mas, é fato, de que os professores têm os livros didáticos como base para o desenvolvimento do estudo das funções na escola. Assim tem-se que esse fato é um dado que precisa ser considerado com forte relevância, principalmente em relação à responsabilidade dos autores sobre a transposição didática desse conteúdo, apesar de se saber que na realidade, o professor é o principal condutor na transmissão e facilitador na aquisição desse saber.

Portanto, o professor é o maior responsável pela transposição didática, por isso, cabe a ele procurar traduzir de maneira mais clara possível a composição dos textos matemáticos que são apresentados nos livros didáticos, pois Vergnaud citado por PAIS (2002, p.56), coloca que:

> A valorização da aprendizagem de conceitos não é uma prática facilmente encontrada na educação escolar (...) é preciso ressaltar a diferença entre o sentido essencial do conceito e sua formalização através de uma definição. Aprender o significado de um conceito não é permanecer na exterioridade de uma definição, pois sua complexidade não pode ser reduzida ao estrito espaço de uma mensagem lingüística. Definir é necessário, mas é muito menos do que conceituar, porque o texto formal de uma definição só pode apresentar alguns traços exteriores ao conceito. (...) Para tratar do fenômeno da aprendizagem torna-se necessário diferenciar esses dois níveis cognitivos: trabalhar com o desafio da elaboração conceitual e com seu registro através de um texto formal. (...) Contudo, tanto na dimensão prática como na teórica é preciso considerar o uso da linguagem e, em particular dos símbolos que representam os conceitos estudados.

Dienes (1971) coloca um parecer interessante, que é a quebra existente entre a aprendizagem da Matemática e da língua materna. Com isso, gerando sérias conseqüências no ensino do simbolismo matemático. O rigor simbólico pode afetar e ou impedir a compreensão. Um exemplo é o caso de abordar $y = x^2$ e $f(x) = x^2$ podendo ser substituídas por $x \alpha\ x^2$ pois, há uma correspondência visual entre x e x^2, com a indicação direta (através da flecha) da direção desta correspondência.

Partindo do raciocínio do exemplo apresentado, é possível ver que há possibilidades de mudanças na exploração do conteúdo sem que sua base teórica seja perdida, transformando o mesmo num tópico superficial sem algum sentido para o aluno.

Ainda ao tratar do "Poder do Simbolismo Matemático", (DIENES, 1964, p.138) diz que:

> Algumas vezes uma amplitude de abstração e de grau de generalidade é permitida para agir em diferentes casos. Se uma generalização ou série de generalizações é feita (...) sem uma adequada amplitude de abstração, pode-se bem encontrar uma resistência à simbolização.

Nesse sentido, se vê necessidade da discussão e exposição de idéias em torno de um grande problema do Ensino Fundamental e Médio, que é a dificuldade que os alunos têm em interpretar e transformar certas situações em linguagem Matemática de acordo com a teoria que fundamenta os conceitos matemáticos.

Conforme BICUDO; GARNICA (2002, p.43), a ligação das expressões com seus significados é dificultada caso o aluno não tenha conhecimentos prévio da simbologia e das regras utilizadas nas ações abstratas. Nesse contexto, a compreensão (leitura) da definição de função e a ligação com seu conceito podem ser prejudicadas ou simplesmente bloqueadas, pois expressões e símbolos muitas vezes são completamente desconhecidos pelos alunos do Ensino Médio.

A partir desse parecer, pode-se dizer que provavelmente muitos estudantes se tornam incapazes de ler e compreender uma escrita Matemática como, por exemplo:

$$f : A \to B \text{ ou } f : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR} \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists! y \in B \mid (x, y) \in f$$

Sobre o discurso científico, BICUDO; GARNICA (2002, p.43-52), ressaltam a questão de a linguagem Matemática ser um dos fatores que fazem da Matemática pouco acessível à maioria das pessoas, pois ela fica presa à comunidade científica. Apesar disso, novas perspectivas vem sendo apontadas através da prática científica e da Educação Matemática.

Além disso, colocam que apesar das diferenças entre esses ramos da Matemática, há uma conexão entre eles possibilitando a chegada do saber científico até à sala de aula de forma mais apropriada e significativa à classe estudantil.

Mas no decorrer deste trabalho, é possível observar que há dificuldades tanto por parte do aluno em compreender a formalização do conceito de Função, quanto do professor em transmitir de maneira clara correta, utilizando a linguagem oral, escrita e científica.

5 ENSINAR E APRENDER FUNÇÕES

Este capítulo expõe pesquisas e pareceres de seus pesquisadores sobre os resultados obtidos com os trabalhos em torno da prática pedagógica e aprendizado de função no Ensino Médio e Superior. Também enfoca os resultados de análises de livros didáticos do Ensino Médio, relacionadas à abordagem de funções.

Ao comentar o ensino superior, um fato apontado por BICUDO; GARNICA (2002, p.41), são os problemas com a Matemática formalizada, demonstrações e o novo jeito de ver e estudar a Matemática, que um aluno tem ao ingressar num curso superior de matemática, seja ele Bacharelado ou Licenciatura. Baseado nesse raciocínio, a linguagem é um fator importante na compreensão geral dos componentes formadores da matemática, pois permite que o futuro professor - mediador faça a união desses elementos com a sua prática em sala de aula.

Nesse contexto, este trabalho mostrará também conclusões de outros trabalhos ao pesquisarem a prática pedagógica de professores do Ensino Médio e seu preparo (ou despreparo) em relação ao ensino de função.

ZUFFI; PACCA (2000) apresentam resultados da análise do trabalho em sala de aula de três professores de Matemática e a partir de uma de um questionário respondido pelos mesmos professores e por mais quatro colegas. Nessa pesquisa, as perguntas eram relacionadas ao estudo de função. Entre as questões, foi pedido aos professores que escrevessem duas definições de função, sendo uma formal e outra informal.

O Trabalho é fundamentado pela proposta de ANGHILERI (1995), com o tratamento da linguagem Matemática como sendo um sistema de signos manipulados através de regras, para resolver problemas matemáticos. Porém, para as autoras, o conhecimento não é transmitido por comunicação, nem se deve culpar o mau uso da linguagem por todos os fracassos da aprendizagem. Elas reforçam que não acreditam na garantia da aprendizagem de conteúdos devido à elaboração da forma de apresentar esses mesmos conteúdos.

O objetivo dessa pesquisa foi "verificar como professores do Ensino médio fazem uso da linguagem Matemática (...)". Então, através desse estudo e entre os resultados obtidos, algumas conclusões apontadas pelas autoras podem ser destacadas tais como, a que os professores sujeitos da pesquisa valorizam mais o prático em relação ao teórico. Para eles, "a definição formal é apenas um "acessório" que o livro traz e que se apresenta, quase por uma tradição, mas que os alunos não lêem e não compreendem." ZUFFI; PACCA (2000). Além disso, as autoras colocam que apesar das definições formais serem usadas em sala de aula, não há conscientização do professor do quanto essas definições auxiliam na formação do conceito tanto para o próprio professor quanto para o aluno.

Outra observação importante é o fato de que a linguagem Matemática escrita que é usada para expressar as idéias levantadas pelos professores sobre o conceito de função não traduziam exatamente aquilo que é exposto oralmente.

Após a análise dos resultados, uma questão importante levantada pelas autoras, é sobre a eficiência dos cursos de licenciatura na formação de professores em relação à linguagem matemática. Pois foi constatado que apesar do teor formal avançado ofertado pelas disciplinas dos cursos universitários, os professores não estão preparados em relação aos conceitos que ensinam nas escolas. Segundo as pesquisadoras, as definições formais de função têm representatividade secundária. Mais do que isso, a linguagem Matemática usada em sala de aula está baseada na prática pedagógica, sendo o livro didático uma ferramenta fundamental dessa prática e não a teoria recebida da Universidade.

Ao observar essas e outras verificações dessa pesquisa, pode-se voltar à questão inicial sobre a dificuldade de se entender a definição de função, no trabalho geral aqui desenvolvido. Então a partir dessas observações, a questão central levantada neste trabalho recai em muitas outras perguntas, como por exemplo:

Será que realmente é necessário que os alunos compreendam ou memorizem a definição formal de função?

Também, mesmo que o educando não saiba a definição, mas tenha compreendido o conceito (se é que isto é possível), a definição passa ser apenas uma ferramenta para resolver problemas, ou para verificar se uma relação é ou não uma função? Mas contrapondo esses questionamentos, seria justo ou correto privar aquele aluno, mesmo que seja um único numa turma de quarenta ou mais, que se interesse o mínimo, pela ciência ou por qualquer área que se utilize matemática? E o compromisso da escola e do professor para com a ciência e tecnologia em prol do desenvolvimento do país?

Nesse sentido, o capítulo procurará expor resultados (além dos já colocados), conclusões de trabalhos, pareceres de estudiosos que possam contribuir para que as indagações colocadas senão respondidas, pelo menos sejam repensadas. Mesmo porque não se tem a pretensão de apontar uma solução ou ditar qualquer regra a se aplicar à prática pedagógica do ensino de função. Mas a partir disso, espera-se contribuir de alguma forma a favor do ensino da matemática, em especial, no ensino de Função por quem quer que seja que venha ler este trabalho.

Conforme ZUFFI; PACCA (2000), "(...) dentro da realidade escolar, não se pode desprezar a forte influência de elementos mediadores entre o aluno e o objeto de conhecimento, que passam pela linguagem do professor e do livro didático". Dentro desse contexto MIGUEL (2001), enfoca que a clareza do educador é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio do aluno, pois essa postura reflete sobre a realidade desse educando, uma vez que este, utiliza-se das informações disponíveis em relação ao meio em que está inserido.

Mas é fato de que professores e autores de livros didáticos precisam rever suas responsabilidades diante do aprendizado do aluno, pois são pontes entre a apresentação gráfica, transmissão oral e a aquisição de conhecimento por parte deste educando. Por isso, é necessário que os professores se conscientizem da importância da renovação e aprimoramento de seus próprios conhecimentos.

Ao enfatizar a importância do estudo de funções, SOUZA (2006a), aponta que a forma como elementos da Matemática ensinada na escola, também são responsáveis pelo fracasso do ensino e aprendizagem da matemática. Sendo funções um desses tópicos, conseqüências são evidenciadas, principalmente dificultando a aprendizagem de disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral dos cursos superiores.

Para REGO, (2000, p.29) citado por (SOUZA, 2006a), sua pesquisa em relação ao alto índice de reprovação de alunos da Universidade Federal da Paraíba em Cálculo Diferencial e Integral, de vários cursos, verifica que a deficiência no entendimento do conceito de função é um dos responsáveis pelo problema citado.

Além desse fato, outra pesquisa feita por SOUZA (2006b), ao analisar a grade curricular de cinco cursos universitários da Universidade Federal do Espírito Santo, explicita a necessidade de se entender função.

Segundo CARNEIRO (1993, p.107), antes de realizar um trabalho com calouros do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS sobre a reconstrução de conceitos básicos, pediu que 66 alunos dissessem de forma informal "O que é função?". Um único aluno respondeu corretamente e a maioria do restante disse não lembrar. Outros apenas relacionaram a simbologia do que lembravam sobre o assunto, mas sem compreensão nem ligação com o conceito de função.

Diante desses dados, nota-se a necessidade de um ensino eficaz desse saber que é em geral de responsabilidade inicial do Ensino Médio, apesar de não constar como um conteúdo obrigatório, segundo os PCNEM, mas apenas sugerido. Apesar disso, faz parte dos descritores de Matemática da terceira série do ensino médio das Matrizes Curriculares Referenciais do SAEB (2001, p.29).

De acordo com SOUZA (2006b) que ressalta a continuidade do estudo de funções no Ensino Médio:

> As propostas contidas dos PCNEM são incompatíveis com um ensino voltado para treinamentos e memorizações, características do ensino tradicional, pois (...). Isso nos direciona a olhar para a continuidade de sua formação, agora mais específica-mercado de trabalho/ universidade.

Além disso, destaca a importância das pesquisas em torno dos livros didáticos segundo sua composição, pois eles são os principais apoios do professor na sua prática pedagógica.

Outra colocação interessante sobre os livros didáticos, é que segundo BALDINO et al (1995) citado por SOUZA (2006b), os autores dos mesmos idealizam um aluno perfeito, e assim escrevem para eles e não para o aluno real.

Nesse sentido, é sabido que a maioria da comunidade estudantil brasileira está dentro da escola pública, onde recebe todo "tipo" de aluno, ou seja, das mais diversas classes sociais. Isso já seria um dos motivos para não se nivelar todos os alunos no mesmo patamar de aprendizado, pois as literaturas da Psicologia, Pedagogia e da Educação em geral, apontam teorias sobre o fator determinante que o meio rege sobre o desenvolvimento intelectual de um indivíduo.

Citado por SOUZA (2006c), CASTRO não compreendeu quase nada na sua análise de um livro didático, que foi formulado de acordo com as novas diretrizes curriculares.

Ao pesquisar dois livros, SOUZA (2006c), (pesquisa baseada nas teorias de Foucat, Bruner, Vygotstk e Bankhtin), procurou verificar a eficiência e influência do discurso dos autores diante do aprendizado de função. Chegou à conclusão de haver uma baixa compreensão desse conteúdo pelos alunos, devido à inconsistência de tal discurso.

Uma curiosa constatação, é que um único livro (Dante, 1999, pg.53) apresenta um parecer favorável em relação à abordagem do conceito de função dentre 12 autores analisados pelo trabalho que examinou textos de livros para o Ensino médio. O parecer diz que:

> Este capítulo contém uma das melhores apresentações do importante e fundamental conceito de função para os alunos do Ensino Médio (...), a definição de função é dada de modo correto, em duas linhas, sem o entulhos dos formalismos tolos e irrelevantes usados pela maioria dos livros congêneres, que definem função como um subconjunto do produto cartesiano, após uma longa e estéril discussão sobre relações binárias(...)." (LIMA, E. L. 2001, p.270).

Ao falar sobre os materiais feitos para professores, PARRA; SAIZ (1996, p.6) diz que esses materiais devem conter itens como:

> "Fundamentação teórica necessária para que o professor conheça o significado de suas opções e se comprometa com elas, tanto na teoria como na prática; conheça as dimensões epistemológicas do que está formulando (...) mais conhecimento de matemática, que permitam ao professor explicitar sua relação com o saber e interpretar, em termos mais específicos, o que acontece na aula."

Sem considerar os critérios de avaliação, nem tomar partido favorável às considerações levantadas pelos avaliadores e pesquisadores, é notório que diante dos trabalhos e resultados até agora apresentados, cada vez mais há necessidade da discussão em torno da linguagem dos livros didáticos, em especial quando se trata de um tópico tão expressivo dentro da Matemática, como é o caso de Função.

6 AS DEFINIÇÕES DE FUNÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS

Este último capítulo mostrará como a definição de função é redigida em alguns livros didáticos dos Ensinos Médio e Superior, apesar dos distintos enfoques a que se destinam os exemplos do Ensino Superior em relação ao Médio.

6.1 Ensino Médio

A tabela abaixo apresenta onze definições para Função, além disso, faz uma comparação entre as abordagens pelos diversos autores em décadas distintas nos livros do Ensino Médio.

Apesar da comparação sobre as definições apresentadas, é interessante ressaltar que esta avaliação não se refere à CORRETA ou ERRADA abordagem, apesar do comentário em relação à escrita e a construção do conceito de Função colocada no livro de Adilson Longen. Mesmo porque, foi mencionado anteriormente, a existência de outros trabalhos destinados à avaliações criteriosas (como é o caso do **Exame de Textos:** análise de livros de Matemática para o Ensino Médio), de várias publicações que servem os alunos do Ensino Médio.

Pretende colocar sim, um olhar referente aos avanços (modificações) da maneira que linguagem Matemática é usada nas definições de Função pelos livros didáticos do Ensino Médio, pois como foi dito no transcorrer deste trabalho, a sociedade e os meios que fazem parte da composição dessa linguagem sofreram influências de maneiras significativas com o passar dos tempos. Por isso, este texto busca verificar nesse contexto, se a INDÚSTRIA de autoria e editoração da Matemática escolar no Brasil também andou nos mesmos passos da modernidade, procurando beneficiar o entendimento do teor escrito dentro dos livros ou ficou na inércia comodista, visando a comercialização de um simples produto (material) a ser consumido por uma população que não é capacita para escolher aquilo que é melhor para si.

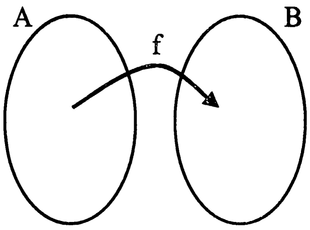
TABELA 2 – DEFINIÇÕES DE FUNÇÃO ENCONTRADAS NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

continua

AUTORES	DEFINIÇÃO
GIOVANNI (1994, p.33).	Sendo A e B dois conjuntos não vazios e uma relação f de A em B, essa relação f é uma função de A em B quando a cada elemento x do conjunto A está associado um e um só elemento y do conjunto B.
BIANCHINI (1998,p.35)	Dados os conjuntos A e B, não-vazios, e uma relação R de A em B, dizemos que R é uma função de A em B se para cada x de A existir em correspondência um único y de B.
SCHOR (1975, p.46).	Sejam A e B dois conjuntos não-vazios. A lei f que associa a todo elemento de A um único elemento de B é uma aplicação de A em B ou uma função definida com imagens em B.
PIERRO NETO; ROCHA; BARBOSA (1967, p. 53).	Sejam A e B dois conjuntos não-vazios. Se uma lei f associa a cada elemento de A um e um só elemento de B, dizemos que f é uma aplicação de A em B.
NERI; ROTTA (1983, p.48).	Consideremos uma relação de um conjunto A em um conjunto B. Esta relação será chamada de função ou aplicação quando associar a todo elemento de A um único elemento de B.
SOHOR (1975, p.46)	Sejam A e B dois conjuntos não-vazios. A lei f que associa a todo elemento de A um único elemento de B é uma aplicação de A em B ou uma função definida com imagens em B.
FERNANDES; YOUSSEF (1995, p.33).	Dados dois conjuntos A e B, chamamos função a toda relação $f : A \rightarrow B$ na qual, para todo elemento de A, existe um único correspondente em B.

TABELA 2 – DEFINIÇÕES DE FUNÇÃO ENCONTRADAS NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

conclusão

AUTORES	DEFINIÇÃO
GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JR. (1988, p.27).	Sendo A e B dois conjuntos não-vazios e uma relação f de A em B, essa relação f é uma função de A em B quando a cada elemento x do conjunto A está associado um e um só elemento y do conjunto B. Pode-se escrever: $f: A \rightarrow B$ (Lê-se: f é uma função de A em B.).
DANTE, L. R. (1999, p. 56)	Dados dois conjuntos não-vazios A e B, uma função de A em B (cuja notação é $f: A \rightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$) é uma regra que diz como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.
SANTOS; GENTIL; GRECO, (2001, p.36)	Dados dois conjuntos, A e B, não-vazios, dizemos que a relação f de A em B é função se, e somente se, para qualquer x pertencente ao conjunto A existe, em correspondência, um único ($\exists!$) y pertencente a B tal que o par ordenado (x,y) pertença a f: f é função de A em B $\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists! y \in B \mid (x,y) \in f$.
LONGEN (2004, p. 75)	Dados dois conjuntos, A e B, não vazios, uma função de A em B é uma regra que explicita como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.  • O conjunto A chama-se domínio da função: D(f) • O conjunto B chama-se contradomínio da função; CD(f). • y é imagem de x pela função f: y = f(x)

Além das análises sobre definições e conceitos de Função já realizadas em trabalhos e artigos anteriormente citados, pode-se observar que as definições aqui expostas não apresentam expressivas modificações entre os diferentes autores, nem de distintas edições.

Aliás, constata-se que em um livro da década de 60 e em outros dos anos 2.000, as definições são abordadas de maneiras quase idênticas, com raras exceções como é caso de SANTOS; GENTIL; GRECO, que utilizam uma linguagem mais formal do que as demais ao introduzirem um pouco mais de símbolos matemáticos. Em algumas publicações, após cada definição, seus respectivos livros colocam uma explicação das mesmas a partir de diagramas. Essas explicações são similares nos diferentes autores, com exemplos e exercícios de aplicação da definição.

Apesar de muito parecida com as definições anteriores, a definição apresentada por LONGEN traz uma linguagem ainda mais simplificada, principalmente se comparada com aquela apresentada pelos autores SANTOS, GENTIL E GRECO, mesmo com o diagrama para facilitar a compreensão do conteúdo estudado. Além disso, antes de apresentar sua definição, LONGEN tem o cuidado de construir, em seu livro, o conceito do tópico pesquisado de uma forma bem clara e significativa para o aluno. Resta saber se a ausência dos símbolos que formalizam esse texto não limitará os estudantes que por ventura futuramente possam ir para cursos nas áreas de ciência exatas e tecnologia, pois certamente tal formalização estará nos livros científicos.

Após rever e comparar as diferentes publicações da definição de Função pode-se chegar a uma simples pergunta:

Por que não é possível que haja modificações nos livros didáticos, sem que se perca o valor teórico necessário para a assimilação desse conteúdo tão explorado?

Além disso, será que todas essas formas de apresentação da definição são as melhores e as últimas possíveis?

É sabido que culturalmente a população brasileira tem pouco hábito de leitura desde sua infância, assim conseqüentemente a torna limitada à interpretação de textos que venham ter algo mais elaborado do que o de costume. Além disso, essa uniformidade de abordagens de conteúdos limita as opções de material a servir tanto de apoio ao professor quanto de base para o aluno. Ainda, sem considerar que pessoas diferentes nem sempre conseguem compreender algo que seja dito da mesma maneira.

Durante a procura de material para fundamentação teórica deste trabalho, percebeu a efervescência de publicações relativa à melhoria da prática pedagógica da Matemática. Nesse contexto, é questionável acreditar que não haja um único meio eficiente para que ocorram algumas mudanças, já que estando numa época em que a qualquer questionamento ou pareceres sobre os diferentes assuntos ligados à educação, será passivo de uma mínima indagação.

6.2 Ensino Superior:

Ao pesquisar como os livros científicos apresentam a definição de função, observa-se que os autores desse material, colocam esse assunto de acordo com o conhecimento do qual tratam. Por exemplo, os livros de cálculo diferencial e integral e de análise Matemática real e complexa, há definições com conjuntos de números reais ou complexos, não se introduz o conceito de função, mas sim se define nos livros didáticos, função de acordo com os objetivos do autor.

Em álgebra há uma maior generalização, pois se define função a partir da relação de conjuntos que podem ser de números ou outros tipos de elementos, porém ainda limita-se o conceito a uma definição. Em nenhuma fonte consultada a idéia de funcionalidade foi abordada de forma abrangente de modo que facilitasse o entendimento das definições pelo leitor.

Na literatura existente sobre o assunto, são encontrados livros científicos de Matemática dentre os quais se pode destacar exemplos renomados como é o caso de:

6.2.1 Cálculo Diferencial e Integral

O livro de GUIDORIZZI (2000, p. 26), que é um dos principais livros-textos a servir de base da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral do Curso de Matemática (Licenciatura e Bacharelado) da UFPR e de outras instituições. Também é adotado em outros cursos, que têm essa mesma disciplina dentro da grade curricular. O autor apresenta o conceito e a definição de função da seguinte forma:

> Entendemos por uma função f uma terna (A, B, $a \to b$) onde A e B são dois conjuntos e $a \to b$, uma regra que nos permite associar a cada elemento a de A um único b de B. O conjunto A é o domínio de f e indica-se por D, assim $A = D_f$. O conjunto B é o contradomínio de f. O único b de B associado ao elemento a de A é indicado por f(a) (leia: f de a); diremos que f(a) é o valor que f assume em a ou que f(a) é o valor que f associa a a.
> Uma função f de domínio A e contradomínio B é usualmente indicado por f: $A \to B$ (leia: f de A em B).
> Uma função de uma variável real a valores reais é uma f: $A \to B$, onde A e B são subconjuntos de R. Até menção em contrário, só trataremos com funções de uma variável real a valores reais.
> Seja f: $A \to B$ uma função. O conjunto $G_f = \{(x,f(x)) \mid x \in A\}$ denomina-se gráfico de f; assim, o gráfico de f é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados (x,y) de números reais. Munindo-se o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode então se pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto (x, f(x)) quando x percorre o domínio de f.

6.2.2 Análise Matemática Real

Como o livro de cálculo, este também faz parte da ementa do curso de Matemática da UFPR. Sendo um dos guias mais utilizados nos cursos de Matemática na disciplina de Análise Matemática em todo o Brasil, LIMA, E. L. (1976, p. 10-11), inicia este conteúdo assim:

> Uma função f: A→B consta de três partes: um conjunto A, chamado de domínio da função (ou o conjunto onde a função é definida), um conjunto B, chamado o contradomínio da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem determinado a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que a função assume em x (ou no ponto x).
> Usa-se a notação $x \to f(x)$ para indicar que f faz corresponder a x o valor f(x).
> Muitas vezes se diz a "função f" em vez de "a função f: A→B". Neste caso, ficam subentendidos o conjunto A, domínio de f, e o conjunto de b, contradomínio de f.
> Não se deve confundir f com f(x): f é a função, enquanto f(x) é o valor que a função assume num ponto x do seu domínio.
> A natureza da regra que ensina como obter o valor $f(x) \in B$ quando é dado $x \in A$ é inteiramente arbitrário, sendo sujeito apenas a duas condições:
> 1ª Não deve haver exceção: a fim de que f tenha o conjunto A como domínio, a regra deve fornecer f(x) para todo $x \in A$;
> 2ª Não deve haver ambigüidades: a cada $x \in A$, a regra deve fazer corresponder um único f(x) em B.
> Vemos que não existe função "plurívocas". Pela 2ª condição, acima, se x=y em A, então f(x)=f(y) em B.
> Segue-se das considerações acima que duas funções f: A→B e g: A'→B' são iguais se, e somente se, A=A', B=B' e f(x)=g(x) para todo $x \in A$. Ou seja, duas funções são iguais quando têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma regra de correspondência.

6.2.3 Teoria Ingênua dos Conjuntos

Para HALMOS (2001, p. 49) a definição do mesmo conceito é expressa da seguinte forma:

> Se X e Y são conjuntos, uma FUNÇÃO de (ou em) X para (ou sobre) Y é uma relação f tal que dom f = X e tal que para cada x em X existe um único elemento y em Y com $(x,y) \in f$. A condição de unicidade pode ser formulada explicitamente como segue: se $(x,y) \in f$, e $(x,z) \in f$, então y = z. Para cada x em X, o único y em Y tal que $(x,y) \in f$ é denotado por f(x). Para funções esta notação e suas variantes menores substituem as outras usadas para relações mais gerais; daqui em diante, se f é uma função, escrevemos f(x) = y em vez de $(x,y) \in f$ ou x f y. O elemento y é denominado VALOR que a função f assume (ou toma) no ARGUMENTO x; de modo equivalente podemos dizer f LEVA OU PROJETA OU TRANSFORMA x em y. APLICAÇÃO OU

> MAPPING (original inglês), TRANSFORMAÇÃO, CORRESPONDÊNCIA E OPERADOR são algumas entre muitas palavras, algumas vezes usadas como sinônimas para FUNÇÃO. O símbolo:
>
> $$f: X \rightarrow Y$$
>
> é as vezes usado como abreviação para "f é uma função de X para Y". O conjunto de todas as funções de X para Y é um subconjunto do conjunto potência $\wp$ (X,Y), será denotado por Y^X.

6.2.4 Álgebra Linear

O livro de álgebra linear aqui citado, também é muito utilizado em outros cursos da UFPR além do de Matemática, como é o caso de algumas engenharias. Para BOLDRINI (1980, 141), o estudo de funções é introduzido e definido da seguinte maneira:

> Introdução: Funções lineares descrevem o tipo mais simples de dependência entre variáveis. Muitos problemas podem se representados por tais funções. Por exemplo: De um quilograma de soja, são extraídos 0,2 litros de óleo, de uma produção de xKg de soja, seriam extraídos 0,2x litros de óleo. Escrevendo na forma de função, teremos Q(s)=0,2s, onde Q = quantidade em litros de óleo de soja e s = quantidade em Kg de soja ....(análise e sistematização do problema).
>
> Def: Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de V em W, $F: V \rightarrow W$, que satisfazem as seguintes condições:
>
> i) Quaisquer que sejam u e v em V,
> $F(u+v) = F(u) + F(v)$
> ii) Quaisquer que sejam $k \in R$ e $v \in V$,
> $F(kv) = kF(v)$.

Como foi comentado anteriormente, o conceito de função não é mencionado nos livros (pesquisados) do Ensino Superior, pois é suposto que o aluno universitário já adquiriu todo o conhecimento básico referente ao assunto durante sua permanência nos Ensinos Fundamental e principalmente no Médio. Assim, cabe ao aluno procurar se adaptar à nova realidade durante sua estadia num Curso Superior, pois os livros textos adotados em disciplinas que contêm Funções na ementa trarão o conteúdo numa linguagem bem diferente da que o estudante esteja acostumado.

7 O ALUNO PROFESSOR

Apesar de este trabalho ter a linguagem de Função no Ensino Médio como objeto principal do estudo, acreditamos que este conceito também precisa ser melhor discutido no Ensino Superior, especificamente nos cursos de formação de professores de Matemática.

Ao falar sobre o tratamento que a Matemática tem recebido atualmente, MACHADO (1991, 8), diz que: "...a falta de clareza com relação ao papel que a Matemática deve desempenhar no corpo de conhecimentos sistematizados pode ser o principal responsável pelas dificuldades crônicas de que padece seu ensino". Além disso, segundo CHAVES; CARVALHO (2006), os alunos de Licenciatura em Matemática reclamam sistematicamente, da distância entre o que eles precisam para lecionar e o conteúdo que é apresentado aos futuros professores enquanto são alunos.

Esse relato pode ser vivenciado por esta autora em determinados momentos na Licenciatura em Matemática, nos quais vários colegas tinham a sensação de estar num curso totalmente desconectado da realidade que um futuro profissional da área de educação provavelmente encontrará na prática da sala de aula.

Nesse sentido, uma das frases muitas vezes ouvidas é: "se um estudante entra no curso de Matemática sem dominar a Matemática anterior ao Ensino Superior, se este universitário não for procurar sanar suas deficiências fora da Universidade, inevitavelmente se formará e continuará com as mesmas carências".

Diante disso e dos resultados apresentados anteriormente pelas pesquisas citadas e pelas referências consultadas para a elaboração desse trabalho, verifica-se um ciclo vicioso, em que alunos muitas vezes entram na universidade sem saber os conteúdos que poderão influenciar e comprometer seu desempenho durante sua permanência no Ensino Superior .

Portanto, se a frase ouvida durante a graduação se confirmar, principalmente por se tratar de um curso de formação de professores, certamente a prática pedagógica será comprometida e por conseqüência o aluno do ensino Fundamental e Médio também será prejudicado.

Convém destacar aqui uma atitude adotada no curso de Licenciatura em Matemática da UFPR, que pode influenciar uma mudança neste ponto vista negativo dos alunos em relação ao seu curso. Esta Universidade decidiu alterar o processo seletivo para o ingresso no curso de Matemática, incluindo uma terceira fase, na qual os alunos, antes de serem efetivados no curso, devem cursar e serem aprovados em duas disciplinas: Funções e Geometria Analítica. Assim, o estudante poderá ter uma idéia melhor do que é um curso superior em Matemática, além de receber uma base teórica mais consistente de dois assuntos que estão no currículo do Ensino Médio e que são fundamentais para ele ter um bom desempenho no curso universitário na área de Ciências Exatas.

Acredita-se que essa nova geração de matemáticos (professores de Matemática) possam, a partir desse contato mais profundo com o conteúdo de Funções, ter um melhor rendimento em outras disciplinas que deverão cursar durante o curso, facilitando a permanência na graduação e evitando a reprovação em disciplinas tais como Cálculo Diferencial e Integral e consequentemente diminuindo a evasão.

Além disso, melhorar a formação desses futuros profissionais do ensino de matemática, fazendo com que a frase anteriormente dita seja cada vez menos repetida, pelo menos em relação ao ensino de Função, pois, como foi verificado em um dos textos pesquisados, ver CARNEIRO(1993, p.107), os calouros não sabiam escrever formal nem informalmente a definição de Função.

Desse modo, cabe aos cursos de Licenciatura em Matemática se estruturarem de forma a serem capazes de formar profissionais atualizados e com base teórica suficiente para desenvolver suas atividades como professores de Matemática. Mesmo porque esse é um dos motivos fundamentais pelos quais esses cursos foram concebidos e são ofertados à população. Além disso, é essencial que mantenham a pesquisa, já que ela é a base do desenvolvimento da Ciência Matemática.

8 CONCLUSÃO

Conforme a fundamentação teórica, é possível dizer que a pergunta inicial deste trabalho referente a linguagem da definição de Função aplicada no Ensino Médio segundo os livros didáticos, é legitimada no transcorrer dos capítulos.

Por isso se vê a necessidade de que algo seja efetivamente feito para melhorar o ensino desse conteúdo, cuja importância já foi ressaltada na composição do trabalho e também nos trabalhos, artigos e textos referenciados.

Melhora essa, seja através da formação dos professores, pois como foi verificado, há casos de profissionais (que se dizem Professores de Matemática) que não apresentam conhecimento suficiente nem didática adequada para ensinar Funções. Consequentemente, é preciso que haja modificações nos cursos de Licenciatura em Matemática, que são os provedores de profissionais para a sala de aula.

Outro fator importante para que alguma melhoria ocorra, é a necessidade da evolução da linguagem usada pelos livros didáticos ao abordarem Funções. Com isto, algumas questões poderão ser levantadas:

- Por que há tanta semelhança entre livros didáticos do Ensino Médio na apresentação da definição de Função? Não existem outras opções ou abordagens que possam ser adotadas pelo professor?
- Será que não há pessoas competentes, envolvidas com a Ciência Matemática e principalmente com a Educação Matemática, que possam encontrar meios para resolver os problemas expostos?

Uma das idéias para validar o trabalho, era utilizar-se de uma pesquisa de campo. Neste trabalho de campo algumas perguntas em relação à definição de Função seriam feitas a alunos do Ensino Médio que já tivessem recebido aulas do conteúdo. As perguntas abordariam desde os símbolos matemáticos usados na composição das definições apresentadas, até procurar de alguma forma verificar o que os estudantes realmente compreendem principalmente a partir de textos mais formais.

Apesar de não ter sido possível aplicar essa idéia, acreditamos que o objetivo de mostrar que há problemas de transmissão e compreensão do conceito e da definição de Função, principalmente segundo a linguagem, foi atingido.

Fiquei impressionada com a quantidade de textos existentes sobre o ensino de Função sob os mais diversos aspectos. Portanto acredito que algo possa ser feito pelos autores e editores para melhor auxiliar os professores, principalmente do Ensino Médio, ajudando-os na transmissão da linguagem utilizada pelos livros didáticos.

REFERÊNCIAS

MICOTTI, M. C. O Ensino e as Propostas pedagógicas *in* BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999

BOLDRINI, J. L., **Álgebra Linear**. 3.ed. São Paulo: Harbra, 1980. v.3.

BOTELHO, G. M. de A. A Evolução do conceito de função estudo. **Ciência e Engenharia**, Campinas, SP, n.1, p. 101-123, mar. 1995. CEMPEM.

CARNEIRO, V. C. Reconstrução de conceitos: o uso de disparadores no estudo de funções. **Zetetiké**, Campinas, SP, ano 3, n.3, p. 105-112, mar. 1995. obs editora CEMPEM.

CHAMBADAL, L. **Diccionario da Matemática Moderna**. São Paulo: Nacional, 1978.

CHAVES, M. I. de A.; CARVALHO, H. C. de. **Formalização do Conceito de Função no Ensino Médio**: uma seqüência de ensino aprendizagem. Disponível em: <http://www.ufpa.br/npadc/gemm/documentos/docs/Formalizacao%20Conceito%20Funcao%20Ensino%20Medio.pdf>. Acesso em 23/07/2006 às 21:39.

COURANT, R. ; ROBBINS, H. **O que é Matemática**? Rio de Janeiro: Moderna, 2000.

D'ABROSIO, H. **Educação Matemática:** da teoria á prática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

DELACHET, André. **A Análise Matemática**. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1967.

DIENES, Z. P. **O Poder da Matemática**. São Paulo: E.P.U. – Editora Pedagógica e Universitária Ltda, 1975.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI Jr. **Matemática Fundamental**. São Paulo: FDT,1994.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**, 4.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000. v.1.

LIMA, E. L. (Ed.). **Exame de Textos**: análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: VITAE ; IMPA; SBM, 2001.

LIMA, R. R. N. de. **Vencendo Barreiras da Linguagem Matemática na Resolução de Problemas.** Curitiba, 2005.

Lista do SAEB. Governo Federal. Site do INEP – www.inep.gov.br.

MACHADO, N.J. **Matemática e Realidade**. 3.ed.São Paulo: Cortez, 1991.

MIELKE, F. C. **A Evolução do Conceito de Função (Resumo).** Disponível em: http://www.mat.ufpr.br/historia.html. Acesso em 23/07/2006 às 22:37.

NERY, C.; TROTTA, F. **Matemática:** curso completo. 1ed. São Paulo: Moderna, 1983.

PAIS, C. P. **Didática da Matemática:** Uma análise da Influência Francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). **Didática da Matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PIERRO NETO, S. Di; ROCHA, L.M.; BARBOSA, R. M., **Matemática:** curso colegial moderno. São Paulo: IBEP, 1967. v.1

SÁ, P. F. de. **Construção do Conceito de Função**: alguns dados históricos. Disponível em: <http://www.nead.unama.br/bibliotecavirtual/revista/tracos/pdf/rtracos611a10.pdf>. Acesso em 15 jul. 2006 às 19:30.

SANTOS, C. M. dos; GENTIL, N.; GRECO, S. E. **Matemática: série novo ensino médio.** São Paulo: Ática, 2001.

SCHOR, D.; TIZZIOTTI, J. G. **Matemática:** 2º grau. São Paulo: Ática, 1975.

SOUZA, M. A. V. F. de (a). **A linguagem nos Livros Didáticos de Matemática nos Períodos tradicional, Moderno e Atual, no Estudo de Função.** Disponível em: www.alice.mat.br. Acesso em 12 jul. 2006 às 17:30.

SOUZA, M. A. V. F. de (b). **Funções e sua Abordagem nos Livros Didáticos Contemporâneos.** Disponível em: www.alice.mat.br. Acesso em 12 jul. 2006 às 17:30.

SOUZA, M. A. V. F. de (c). **Os Discursos de Textos Matemáticos no Ensino/Aprendizagem de Funções:** um estudo de suas influências. Disponível em: www.alice.mat.br. Acesso em 12 jul. 2006 às 17:30.

ZUCHI, I. A importância da linguagem no ensino de matemática. **Educação Matemática em Revista**, ano.11, n.16, p. 49-55, mai. 2004.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. Sobre funções e a linguagem matemática de professores do ensino médio. **Zetetiké**, Campinas, SP, v.8, n.13/14, p. 7-26, jan. a jun./jul. a dez. 2000.