

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

KARIN ANDRESSA PEREIRA DA CUNHA

**ENSINO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS:
PROBLEMAS E PROPOSTAS.**

CURITIBA
2006

KARIN ANDRESSA PEREIRA DA CUNHA

**ENSINO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS:
PROBLEMAS E PROPOSTAS.**

Monografia apresentada ao Curso de Especialização para Professores de Matemática, Departamento de Matemática do Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. Marcelo Muniz
Silva Alves**

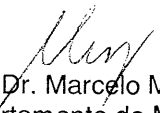
**CURITIBA
2006**

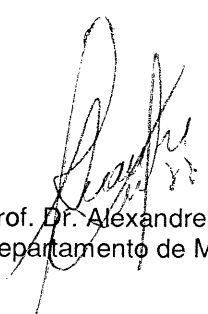
TERMO DE APROVAÇÃO

KARIN ANDRESSA PEREIRA DA CUNHA

ENSINO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS:
PROBLEMAS E PROPOSTAS.

Monografia aprovada como requisito parcial para obtenção do título de Especialista no Curso de Especialização para Professores de Matemática, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:  Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves
Departamento de Matemática, UFPR

 Prof. Dr. Alexandre Kirilov
Departamento de Matemática, UFPR

Curitiba, novembro de 2006

“ Se o professor compreender
por que o aluno erra,
poderá planejar um ensino mais eficaz”

Neuza Bertoni Pinto

DEDICATÓRIA

À minha família:

*Mauro, Solange, Kelly, Rubens,
Kamila, e Evandro pela compreensão,
amor e apoio incondicional.*

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Dr. Marcelo Muniz Silva Alves, por sua atenção e sabedoria.

Aos demais professores, pelo conhecimento transmitido.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo analisar os erros que os alunos do ensino fundamental apresentaram em resolução de exercícios OBMEP e, a partir disso, retomar os conceitos essenciais de área. Mediante critérios estipulados no PNLD propomos uma discussão sobre livros didáticos, visando selecionar exercícios/atividades que enriqueçam o raciocínio geométrico do aluno, melhorem sua compreensão do conceito e valorizem a elaboração de estratégia de resolução.

SUMÁRIO

RESUMO.....	vii
1 INTRODUÇÃO.....	9
2 EMBASAMENTO TEÓRICO.....	14
2.1. REGIÕES POLIGONAIS E ÁREA	14
2.1.1 REGIÃO POLIGONAL	14
2.1.2 ÁREAS	14
2.1.3 UNIDADE DE ÁREA	17
2.2. ÁREAS DE FIGURAS ESSENCIAIS	17
2.2.1 ÁREA DO QUADRADO	18
2.2.2 ÁREA DO RETÂNGULO	19
2.2.3 ÁREA DO PARALELOGRAMO	21
2.2.4 ÁREA DO TRIÂNGULO	21
3 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS.....	23
3.1 NOVO PRATICANDO MATEMÁTICA	26
3.2 NOVO APRENDENDO MATEMÁTICA	29
3.3 TUDO É MATEMÁTICA.....	31
4 EXERCÍCIOS.....	35
4.1 ÁREA COMO PREENCHIMENTO DE SUPERFÍCIE.....	35
4.2 ÁREA EM MALHA QUADRICULADA.....	39
4.3 ÁREA EQUIVALENTE.....	41
4.4 ESTIMATIVA.....	45
4.5 COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO.....	50
5 CONCLUSÃO.....	57
6 REFERÊNCIAS.....	58

1. INTRODUÇÃO

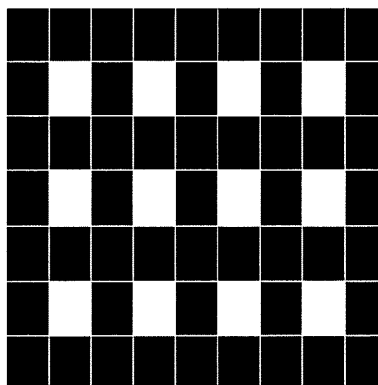
Há quatro anos trabalhando com o ensino de Matemática em escola pública com Ensino Fundamental e Médio acompanhei a aplicação da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas em 2005 e 2006. Pude desenvolver algumas atividades de preparo com os alunos que envolviam questões objetivas e os orientava como proceder nos exercícios além de auxiliar na organização e aplicação das provas.

Surpreendemo-nos com algumas soluções e resultados mostrados pelos alunos, durante a análise dos dados ali obtidos. Observamos que uma parte significativa foi incapaz de resolver exercícios simples de áreas que envolviam apenas a parte conceitual. Isso pode ser visto nos exercícios selecionados a seguir; os dados se referem a uma instituição específica nos anos de 2005 e 2006.

OBMEP 2005, nível 1, exercício 4

O piso de uma cozinha foi revestido de ladrilhos brancos e pretos, conforme a figura. Cada ladrilho branco custou R\$ 2,00 e cada ladrilho preto custou R\$3,00. Quanto foi gasto na compra dos ladrilhos?

- a) R\$ 126,00
- b) R\$ 144,00
- c) R\$ 174,00
- d) R\$ 177,00
- e) R\$ 189,00

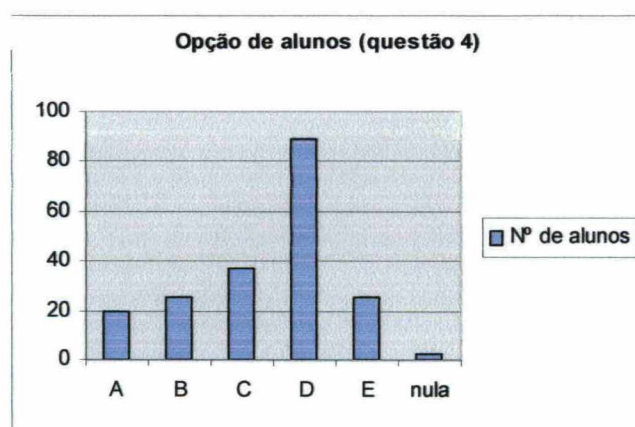


Solução da questão proposta: Neste exercício o aluno tem a opção de contar separadamente cada unidade preta: 51, e cada unidade branca: 12, e calcular o valor destas peças e em seguida o total que será gasto.

$$51 \times 3 = 153 \quad \text{e} \quad 12 \times 2 = 24 \quad \text{total: } 153 + 24 = 177$$

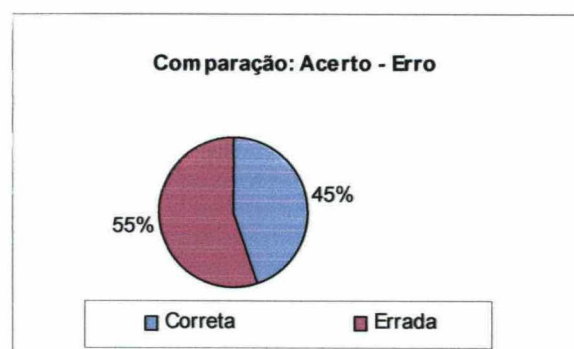
Uma segunda forma de resolver o problema recorrendo ao conceito de área, a figura é composta por unidades padrões (ladrilhos), formando um retângulo de 9 colunas e 7 linhas, 63 unidades padrões, considerando que os ladrilhos brancos que estão dispostos em 3 linhas de 4 ladrilhos cada, temos o total 12 peças brancas, os ladrilhos pretos estão dispostos ocupando a maior parte da figura, retiramos a quantidade de ladrilhos brancos do total de peças que compõe a figura e restará os pretos: $63 - 12 = 51$, e procedemos como anteriormente calculando o preço de cada categoria: brancos: $12 \times 2 = 24$ e pretos: $51 \times 3 = 153$, sendo o total $24 + 153 = 177$.

O gráfico abaixo retrata as opções marcadas pelos 198 alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental que realizaram voluntariamente a avaliação, enquadrando-se no nível 1.



De modo geral o número de alunos que marcou a opção D (correta) supera o número de alunos que marcaram uma das outras opções.

No entanto o percentual de alunos que acertaram a questão é inferior ao percentual de alunos que erraram.



Isso reflete que apesar de ser uma questão simples que envolve o conceito de unidade padrão para cálculo de área e adição de áreas, a maioria dos alunos não optou pela solução correta.

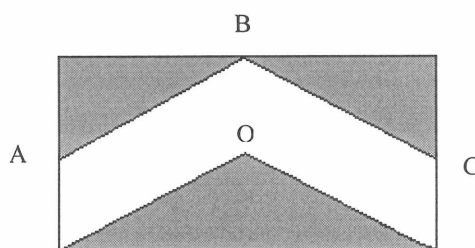
Acredita-se que o erro dos alunos deve-se ao excesso de atenção ao conhecimento formal levando-os à mecanização da matemática que aliada a aprendizagem memorística induz o aluno a sempre procurar uma fórmula, como é mencionado por Neuza Bertoni Pinto em seu livro “O Erro como Estratégia Didática”.

Houve falha na interpretação do exercício e o conceito não foi aplicado com sucesso porque há possibilidade de não ter sido compreendido totalmente pelo aluno, que tem dificuldade de associá-lo à outras situações diferentes da trivial.

Uma abordagem que se faz pertinente a esse estudo é a menção de um exercício também da OBMEP do Nível 3 aplicado em 2006 a 299 alunos que cursavam Ensino Médio na mesma escola que participou da estatística anterior (desta vez o processo utilizado para seleção dos alunos foi por amostragem, sendo que 668 participaram no total).

OBMEP 2006, Nível 3, exercício 1

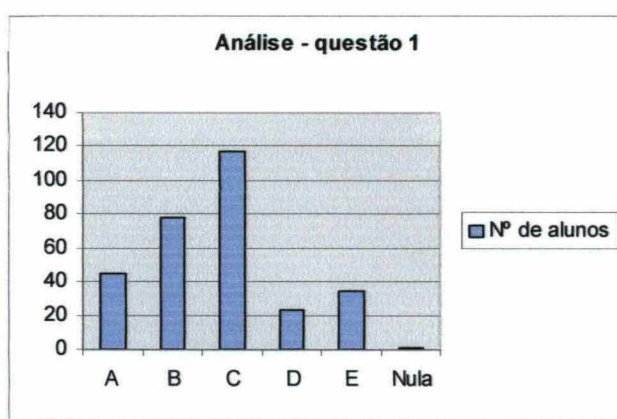
No retângulo ao lado, A, B e C são pontos médios de seus lados e O é o ponto de encontro de suas diagonais. A área da região sombreada é:



- a) $\frac{1}{4}$ da área do retângulo
- b) $\frac{1}{3}$ da área do retângulo
- c) $\frac{1}{2}$ da área do retângulo
- d) $\frac{3}{5}$ da área do retângulo
- e) $\frac{2}{3}$ da área do retângulo

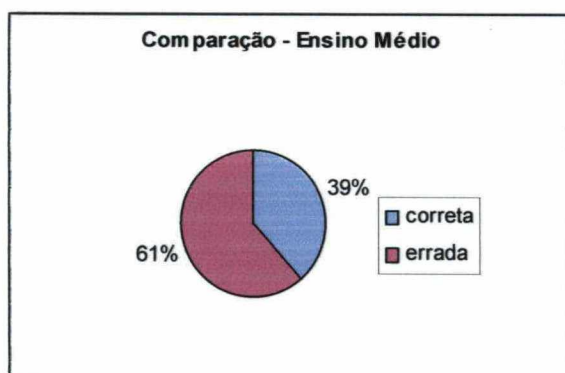
Solução da questão proposta: utilizando as informações do enunciado vê-se que os triângulos que se formaram pela extremidade superior direita e esquerda são congruentes, que ao serem deslocados por uma reta paralela à base do retângulo passando por O estará compondo uma figura que representa a metade da área do retângulo maior.

Formatando as informações por meio de gráficos:



Novamente, a questão correta acaba sendo assinalada por uma quantidade maior de alunos, se comparada com as demais.

No entanto, observe o que ocorre quando compara-se de maneira geral o percentual de alunos que acertou e que errou a questão.



Os resultados desta vez, além de serem mais evidentes, acabam tornando-se graves, pois trata-se da solução de alunos do Ensino Médio que certamente, em algum momento, já estudaram conceitos de área, e no instante que é requisitada a aplicação de tal conhecimento, surpreendem negativamente. Mas esta é a comprovação da temática deste estudo, que parte do princípio que o aluno “aceita” um conceito mas não consegue aplicá-lo em outra situação, justamente porque não obteve a aquisição do conhecimento de maneira plena, não compreendeu o conceito que envolvia o conteúdo.

Estes resultados motivaram o presente trabalho, o qual começa por uma fundamentação teórica suficiente para nossos objetivos, prossegue com uma análise de vários livros didáticos com base no PNLD e termina com uma seleção de exercícios que exemplificam, do nosso ponto de vista, atividades adequadas (e inadequadas) para estimular o raciocínio e compreensão dos alunos.

Assim, no Capítulo 2 nós abordamos os conceitos essenciais de área e apresentamos o cálculo das áreas de figuras poligonais básicas, como quadrados e triângulos.

Expomos no Capítulo 3 o ponto de vista de alguns autores de livros didáticos comumente usados na rede pública de ensino e, apoiados no PNLD, analisamos algumas atividades que contribuem para o desenvolvimento do aluno.

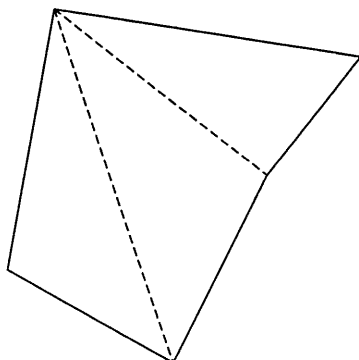
Elencamos no Capítulo 4 alguns exercícios e atividades que relacionam e exploram o conceito geométrico de área de maneira mais proveitosa para o aluno, pois incentivam a resolução de exercícios por propriedades básicas de área, desvinculando as resoluções do uso excessivo de fórmulas. Com esta seleção de atividades buscamos contribuir para a superação de dificuldades surgidas no decorrer do estudo, visando que o aluno consiga compreender o conceito e adaptá-lo às mais diversas situações.

2. EMBASAMENTO TEÓRICO

2.1 REGIÃO POLIGONAL E ÁREA

2.1.1 REGIÃO POLIGONAL

Numa abordagem feita por Moise em [MOI], define-se inicialmente uma região triangular, que trata-se de um triângulo (o contorno) e seu interior e a partir daí tem-se que uma região poligonal é uma figura plana que pode ser decomposta em um número finito de triângulos, portanto seria um conjunto finito de regiões triangulares justapostas.



Definição: Uma região poligonal é a reunião de um número finito de regiões triangulares em um plano de tal modo que, se duas se interceptam, a interseção é um ponto ou um segmento.

2.1.2 ÁREAS

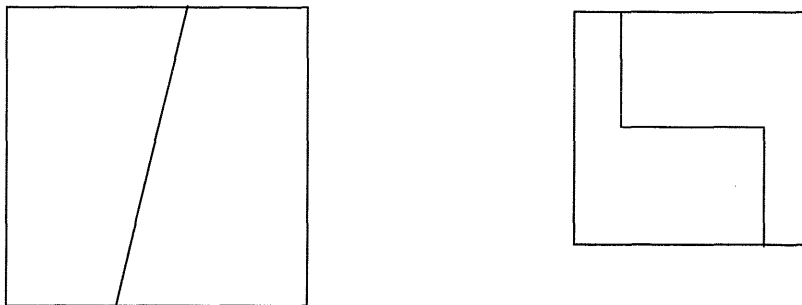
Fundamentam-se o estudo de áreas baseado nos seguintes Postulados.

Postulado da Área: A toda região poligonal corresponde um único número real positivo.

Por definição a área de uma região poligonal é o seu número correspondente. A área de uma região R é denotada aR (lê-se área de R).

A área de uma região depende somente de seu tamanho e forma e não depende do lugar onde a região está localizada, tal fato é enunciado como Postulado para o caso de regiões triangulares.

Postulado da Congruência: Se dois triângulos são congruentes, então as regiões triangulares determinadas por eles têm a mesma área.

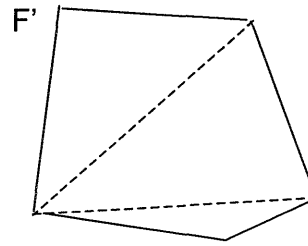
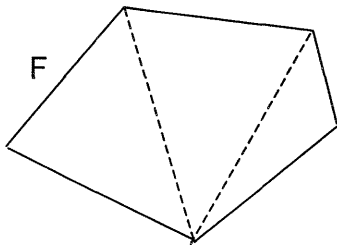


Nos exemplos acima, R é uma região poligonal composta pela reunião de regiões R_1 e R_2 , cuja interseção acontece em um número finito de pontos e segmentos. Podemos calcular aR por adição de aR_1 e aR_2 . Como vê - se a seguir:

Postulado da Adição de Áreas: Supondo que R é uma região formada pela reunião de duas regiões R_1 e R_2 e supondo que R_1 e R_2 se interceptam, no máximo, em um número finito de segmentos e pontos, então $aR = aR_1 + aR_2$.

Conseqüência: Se duas regiões poligonais são congruentes, então elas têm mesma área.

Demonstração: Seja F uma figura poligonal qualquer, de tal forma que esta figura possa ser decomposta em um número finito de triângulos e seja F' uma figura congruente a F .



Mas, as regiões triangulares que compõe F são congruentes uma a uma às regiões triangulares que compõe F', por LLL (3º caso de congruência de triângulos), e pelo Postulado da Congruência tais triângulos congruentes terão regiões triangulares de mesma área. Assim a cada triângulo de F tem-se seu correspondente triângulo congruente em F', e por sua vez F e F' são congruentes e terão o mesmo número de triângulos, cada qual com mesma área de seu correspondente e assim F e F' terão a mesma área.

A seguir, faz-se esta demonstração, mais detalhada, para o caso em que a figura é um quadrilátero.

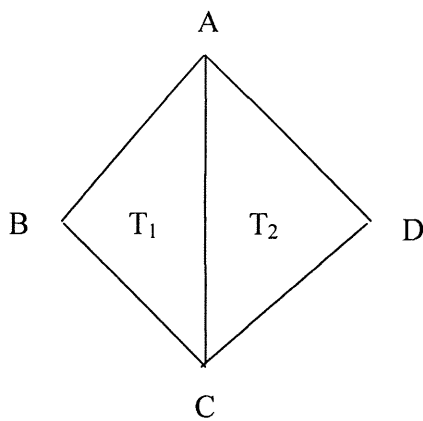


Figura F

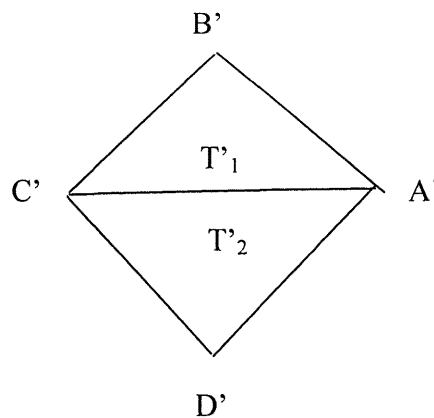


Figura F'

Seja a figura F, de pontos ABCD, rotacionada formando a figura F' de pontos A'B'C'D', portanto, congruentes.

F é uma região poligonal que por definição é decomposta em regiões triangulares T_1 ABC e T_2 ACD.

Mas como o triângulo ABC é congruente ao triângulo A'B'C', pelo 3º caso de congruência (LLL) temos: $T_1 \cong T'_1$

E também o triângulo ACD é congruente ao triângulo A'C'D', pelo 3º caso de congruência (LLL) daí: $T_2 \cong T'_2$

Então usando o Postulado de Congruência,

$$T_1 \cong T'_1 \Rightarrow aT_1 = aT'_1$$

$$T_2 \cong T'_2 \Rightarrow aT_2 = aT'_2$$

F é uma região formada pela reunião das regiões T_1 e T_2 que se interceptam em um segmento de reta, segmento AC, então pelo Postulado de Adição de Áreas temos:

$$aF = aT_1 + aT_2 \quad (\text{postulado da adição de áreas})$$

$$aF = aT'_1 + aT'_2 \quad (\text{postulado de congruência})$$

$$aF = aF' \quad (\text{postulado da adição de áreas})$$

2.1.3 UNIDADE DE ÁREA

Quando faz-se o estudo da área de uma figura procura - se compará-la com uma unidade padrão e através disso exprimir a quantidade de vezes que esta unidade pode ser representada dentro da região poligonal que compõe a figura, objetivando medir a porção do plano ocupada por esta figura plana.

Por convenção esta unidade padrão será um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento, chamado quadrado unitário.

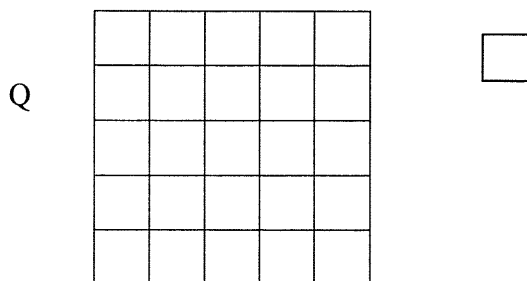
Em [LIM85], Lima apresenta como definição que qualquer quadrado que tem lado medindo 1 terá área igual a 1. Já Moise [MOI] relata o procedimento para calcular área de diversas figuras. Retomando o raciocínio de Lima, definida uma unidade padrão pode-se a partir daí proceder a outras figuras.

2.2 ÁREA DE FIGURAS ESSENCIAIS

2.2.1 ÁREA DO QUADRADO

Nesta seção, calcularemos a área de um quadrado cujos lados têm medidas um número natural ou racional.

Um quadrado Q cujo lado tem por medida o número inteiro n pode ser decomposto, por meio de paralelas aos seus lados, em n^2 quadrados justapostos e congruentes pelo Postulado da Congruência, cada um deles com lado unitário e, portanto com área 1. Segue-se pelo Postulado da Adição de Áreas que como o quadrado Q é formado pela reunião das regiões dos quadrados menores justapostos que se interceptam em um número finito de segmentos, então a área de Q será a soma das áreas (de valor unitário) dos n^2 quadradinhos que o formam. Assim a área de Q será n^2 .



Convencionamos nesta monografia que a citação do emprego dos Postulados não acontecerá de forma tão detalhada, e que isso só ocorrerá quando necessário.

Analogamente, se o quadrado Q tem por medida $1/n$, onde n é inteiro, podemos decompor o quadrado unitário em n^2 quadrados justapostos, congruentes a Q , que é equivalente a afirmar que serão estes n^2 quadrados congruentes e justapostos que formarão o quadrado unitário. Segue que a área de Q deve satisfazer a condição:

$$n^2 \times (\text{área de } Q) = 1$$

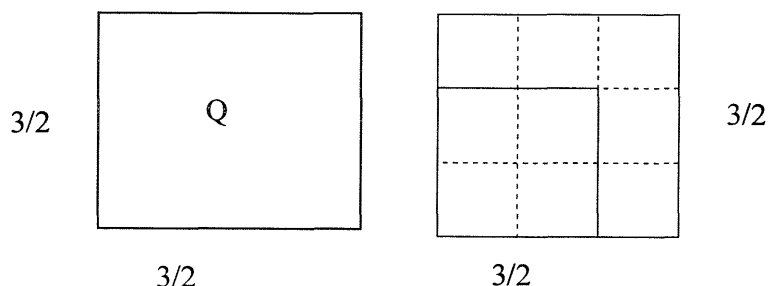
e portanto,

$$a_Q = 1/n^2.$$

De forma geral, para um quadrado que tem por medida um número racional m/n , decomparamos a figura em m segmentos cada um dos quais tem comprimento $1/n$. Traçando paralelas aos lados de Q a partir dos pontos de divisão, obtemos a decomposição de Q em m^2 quadrados, cada um dos quais com lado $1/n$. Portanto, a

área dos quadrados menores é $1/n^2$. Segue-se que a área de Q deve ser $m^2 (1/n^2) = m^2/n^2$, ou seja, $aQ = (m/n)^2$.

Exemplificando:



O quadrado Q foi decomposto em 9 quadrados cada um de lado $1/2$, ou seja 3^2 quadrados de lado $1/2$.

A área do quadrado menor é $(1/n^2) = (1/2)^2 = 1/4$

$$aQ = m^2 \cdot 1/n^2 = 3^2 \cdot (1/2)^2 = 9 \cdot 1/4 = 9/4$$

Assim, $aQ = (3/2)^2 = 9/4$

Pode - se concluir que a área de um quadrado que tem por medida um número racional $l=m/n$ é dada pela expressão:

$$aQ = l^2$$

2.2.2 ÁREA DO RETÂNGULO

Para demonstrar como obter a área de uma figura retangular comparam-se duas visões de autores conceituados.

Inicialmente trataremos a abordagem que Lima faz sobre o tema tecendo um raciocínio semelhante ao que foi feito para o quadrado.

Se temos um retângulo R cujas medidas são números inteiros m e n, então podemos decompô-lo usando paralelas, em mn quadrados unitários, de tal maneira que $aR=m.n$

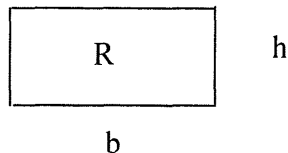
E segue a demonstração provando que se os lados m e n forem números racionais ou irracionais, a relação:

$$aR = m.n$$

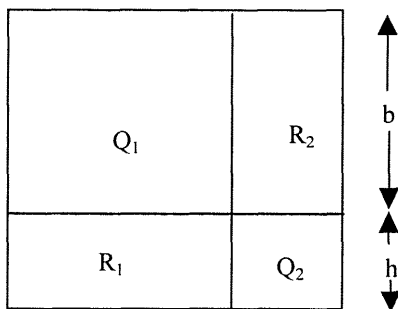
ainda será válida.

Paralelo a isso Moise [MOI], partindo de um retângulo, utiliza composição de figuras para retornar ao caso do quadrado e deduzir da área deste a fórmula da área do retângulo.

Demonstração: Suponha o retângulo R de lados b e h.



Agora considere o quadrado Q de lado b+h.



Quadrado Q

Traçadas paralelas dentro do quadrado Q, de modo a obter a figura acima.

$$aQ = aQ_1 + aQ_2 + aR_1 + aR_2$$

Pelo postulado da adição (já que Q é decomposto em Q₁, Q₂, R₁ e R₂ e cuja interseção acontece num segmento de reta).

Mas, R₁, R₂ e R são retângulos congruentes, pois possuem as mesmas dimensões b e h e pelo postulado da congruência terão mesma área:

$$aR_1 = aR_2 = aR \quad \text{e poderão ser somadas}$$

$$aQ = aQ_1 + 2aR + aQ_2 \quad \text{e como já visto, } aQ = l^2. \text{ Portanto,}$$

$$aQ = b^2 + 2aR + h^2$$

e ainda,

$$aQ = (b+h)^2 \quad \text{por manipulação algébrica temos,}$$

$$aQ = b^2 + 2bh + h^2$$

e daí, igualando as duas expressões para aQ

$$aQ = aQ$$

$$b^2 + 2aR + h^2 = b^2 + 2bh + h^2$$

lados

$$2aR = 2bh$$

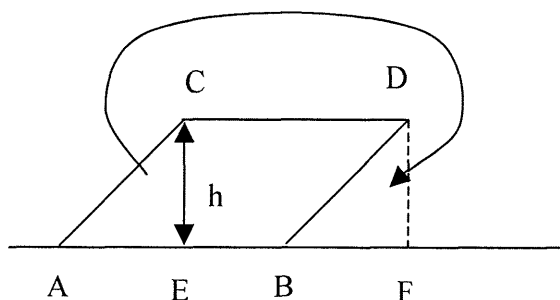
$$aR = bh$$

soma-se $(-b^2)$ e $(-h^2)$ a ambos os lados

multiplica-se $(\frac{1}{2})$ a ambos os lados

2.2.3 ÁREA DO PARALELOGRAMO

Quando toma-se um lado do paralelogramo P como base, chama-se altura do paralelogramo a um segmento da perpendicular que liga a base ao lado oposto. Dado o paralelogramo $ABCD$, seja b o comprimento da base AB e h o comprimento da altura. Fazemos a remoção do triângulo obtido por AEC para a localização de BFD , e assim temos que a área do paralelogramo $ABCD$ será a mesma área do retângulo $EFCD$.



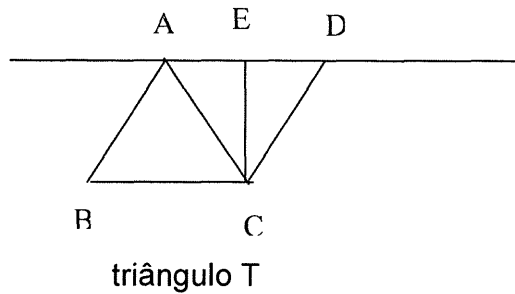
Logo, $aP = b \cdot h$

2.2.4 ÁREA DO TRIÂNGULO

Seja T um triângulo ABC . Para calcular a área desta figura traçamos pelo ponto A uma reta paralela ao lado BC e por C uma reta paralela ao lado AB , e obtemos um paralelogramo $ABCD$. Como BC é a base do triângulo e também a base do paralelogramo $ABCD$, a altura será CE .

Se $BC = b$ e $CE = h$, e $ABCD$ é paralelogramo, então $a_P = b \cdot h$.

Além disso, percebe-se que pelo 2º caso de congruência, os triângulos ABC e ACD são congruentes e possuem a mesma área, e pelo Postulado da Congruência de Áreas,



$$a_P = 2 a_T$$

$$b \cdot h = 2 a_T$$

$$a_T = \frac{(b \cdot h)}{2}$$

Isso se exprime dizendo que a área de um triângulo é a metade do produto de uma base pela altura correspondente.

3. ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Escolhemos três coleções de Livros Didáticos comumente usados em Escolas Públicas. Procuramos estabelecer relações entre eles e o Manual de Análise encaminhado às escolas do Plano Nacional do Livro Didático selecionando exercícios e/ou problemas que retratassem trechos da análise que se referem à Geometria, especificamente área e volume, e assim caracterizar a visão que estes autores têm de tais conteúdos.

Entre os critérios de avaliação dos livros didáticos visto no Guia PNLD destacam-se critérios eliminatórios que excluem o livro didático de comentários do Guia, pois ferem fundamentos importantes que fazem parte de um livro didático, cujos objetivos são transmissão, consolidação e avaliação de conceitos, além de ser um apoio para o professor e uma fonte de conhecimento e referência para o aluno. São eles:

- Erros conceituais.
- Indução ao erro (através de exemplo infeliz que pode levar o aluno a generalizar uma particularidade do conceito).
- Metodologia desarticulada dos objetivos e que não contemple o desenvolvimento de competências cognitivas básicas defendidas pelo Parâmetros Curriculares Nacional.
- Exposição ou referência de alguma marca ou produto que possa influenciar a decisão de compra dos consumidores. Apologia ao uso de drogas (lícitas ou ilícitas), incentivo ou indução ao preconceito ou qualquer menção que possa ferir o Estatuto da Criança e do Adolescente.

Assim, os livros que constituem o Guia não apresentam essas condições.

Considerando os livros “pré-aprovados”, o Guia visa destacar alguns aspectos gerais que podem contribuir para um material didático de qualidade e eficiência. Estes aspectos são critérios que influenciam o professor na escolha do livro didático:

- Escolha de conteúdos: seleção que o autor faz, adequando o conteúdo à série (etapa) a ser estudada.

- Articulação entre as áreas da Matemática. Quando há possibilidade de integração de um conceito a mais de uma área da Matemática, são elas: Aritmética, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística, Probabilidade e Combinatória.
- Uso da intuição. O autor deve valorizar o raciocínio que o aluno tem, a experiência obtida em seu dia-a-dia, o manejo de materiais instrucionais, e a partir daí utilizar a matemática abstrata.
- Fazer conexão entre os conteúdos estudados e o contexto sociocultural contemporâneo, citando suas aplicações, destacando suas vantagens e utilidades.
- Manual do Professor: deverá constituir um material de apoio ao docente com sugestões bibliográficas e de consulta, propostas metodológicas e estratégias avaliativas.

Relacionando o que de forma abrangente o Guia do PNLD faz com as coleções, nós analisamos, de modo mais específico, o tratamento dado ao conteúdo de áreas e verificamos se este estava recebendo uma abordagem que cumprisse condições destacadas no estudo. Tais como:

- Malha quadriculada: atividades como essa carregam consigo o significado do conceito de áreas, sendo o preenchimento de uma superfície, comparando com uma unidade padrão, com isso o aluno consegue a compreensão da medida da região do plano ocupada pela figura.
- Composição e Decomposição de figuras: este processo emprega diretamente o Postulado de adição de áreas, que muitas vezes não é estimulado no aluno, ou ele o faz sem a consciência de se trata de uma “propriedade”.
- Uso dos Postulados: não defendemos o ensinamento dos Postulados vistos até aqui, no nível de ensino abordado, mas a sua menção intuitiva, com o objetivo de levar o aluno a refletir sobre estas propriedades básicas, a saber que cada figura ocupará uma porção do plano e que isso possui medida única, que figuras congruentes terão a mesma medida, que podemos unir (ou separar) figuras de modo que tais operações serão “repassadas” para as respectivas áreas.
- Uso de fórmulas: verificada a necessidade e após algumas constatações dos próprios alunos, inserir a fórmula, como meio mais rápido/prático de cálculo de áreas.

Acreditamos que dessa maneira os alunos adquirem não só a facilidade de manuseio com fórmulas, mas também, a conceituação que existe por trás disso. Caso contrário corre-se o risco de ocorrer uma mecanização do processo de resolução e, quando se modifica o estilo do exercício ou o contexto, o aluno não conseguirá solucionar, pois haverá necessidade de empregar um conceito que não foi bem estabelecido. Esta concepção se destaca em estudos anteriores como o de Ana Chiummo (PUC-SP), no qual se afirma que alguns autores de livros (3ª série) aplicam fórmulas para o cálculo de áreas, e se utilizam do ladrilhamento para explicar o metro quadrado, e não o conceito de área “Dessa forma podemos perceber que da maneira que foram abordados os conceitos de área (...) podem vir a causar um obstáculo didático”. E outros livros não trabalhavam composição nem decomposição de figuras. “Dificultando a compreensão dos enunciados no momento em que os professores apresentam um problema que fuja dos usuais”.

Uma estratégia utilizada por alguns professores, que é o uso da fórmula, inicialmente pode parecer para os alunos até fácil de aplicar, mas o conceito não sendo formulado, torna sua aplicação mecânica e faz com que uma situação nova colocada para o aluno seja difícil de compreender, e isso pode vir a causar para o aluno um obstáculo didático¹.

Assim, sendo, se os conceitos de área forem bem explorados, segundo Ana Chiummo, “envolvendo pontilhados, o quadriculado, a composição e decomposição e finalmente a dedução de fórmulas, os alunos conseguirão passar com muita facilidade do quadro geométrico para o quadro numérico”.

1. Obstáculo Didático: Barreiras didáticas impostas por exemplos mal elaborados que induz o aluno a conclusões erradas, ou falta de entendimento completo, ou por conceito mal formulado, ou uso de definição errada, podem trazer ao aluno prejuízos na aquisição do conhecimento, ou fixação de um conceito de forma inadequada, levando o aluno a conjecturas equivocadas, ou incompletas.

3.1 NOVO PRATICANDO MATEMÁTICA

O primeiro volume traz (entre outros tópicos de geometria) Polígonos e Medidas, este contendo medidas lineares, transformações, e medidas de superfícies, já iniciando com áreas de retângulos, e passando logo em seguida a volumes. Tais conteúdos são usualmente ensinados nessa fase escolar mas, no entanto, tópicos de números e álgebra recebem “atenção excessiva (...) em relação aos demais”, segundo o Manual PNLD.

No que diz respeito a articulação entre várias áreas da matemática o Manual PNLD destaca que “a maioria dos tópicos é abordada de forma concentrada (...) caracteriza uma concepção de currículo linear, que dificulta a articulação entre os conteúdos matemáticos”.

Alguns tópicos são tratados de maneira específica e exaustiva, descrita como “problemas padronizados, muitos de formulação artificial, pode desmotivar o aluno” pelo Manual PNLD, o que revela que a insistência em querer relacionar todos os conteúdos estudados com o contexto sociocultural pode acontecer de forma inadequada.

Foi constatada a existência de obstáculo didático, como o fato do conceito ser apresentado com a fórmula pronta para o cálculo, sem que nenhum processo favorecesse a descoberta dessa fórmula. Verificamos que o autor não aborda a parte histórica de área.

Além disso, a existência de vários exercícios parecidos que requerem aplicação de fórmulas, inibem a exposição do conceito por parte do aluno, impedindo dessa maneira que os alunos desenvolvam a sua criatividade, apesar de aparecer algum exercício que expressa o uso de malha quadriculada.

No que se refere a área de retângulo, consta do 2º livro dessa coleção um exercício cujo desenvolvimento utiliza a idéia da demonstração que fizemos anteriormente para este polígono, aplicando conceitos de congruência de áreas, decomposição de figuras e área do quadrado. No entanto, tal relação deverá ser destacada pelo professor, pois o autor não o fez. Apesar de ser um exercício completo, não foi explorado em sua potencialidade pelo autor.

(Novo Praticando Matemática, 6ª série, página 121, exercício 7)

Observando a figura abaixo notamos que a área de um dos quadrados é de 25 m^2 e a área do outro é de 64 m^2 .

- a) Qual é a área do retângulo A?
- b) Qual é a área do retângulo B?
- c) Qual é a área total da figura?

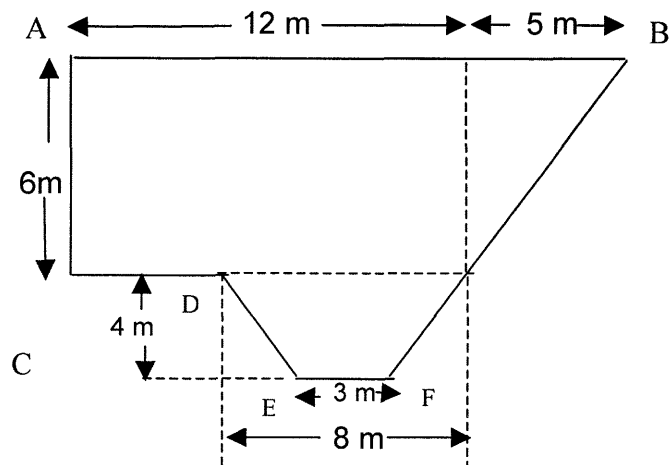
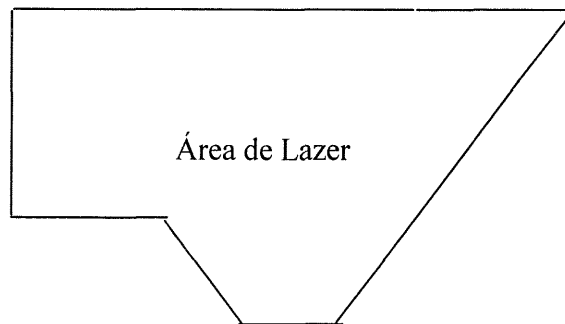
25 m^2	A
B	64 m^2

Da forma que foi colocada o aluno tende a seguir alguns passos para calcular a área total, já indicados pelos itens que foram solicitados pelo enunciado. Assim o aluno tendo a área de 25 m^2 e área de 64 m^2 , poderá determinar o lado, e em seguida calcular a área dos retângulos A e B e constatará que são iguais, (cabe ao professor destacar que esse fato não ocorreu por acaso, pois o autor não menciona nada a respeito) então tendo as áreas das quatro figuras que compõe o quadrado maior o aluno fará a somatória determinando a área total: 169 m^2 , entretanto, dificilmente perceberá que a área do quadrado maior cujo lado é $5+8$, poderia ser obtida fazendo $(5+8)^2 = 13^2 = 169 \text{ m}^2$.

Um exercício que necessita da intervenção do professor para destacar fatos importantes do ponto de vista de áreas de quadrado e retângulo, composição (quando soma-se $5+8$ para determinar a área do quadrado maior) e decomposição de figuras (quando calcula-se as áreas de cada uma separadamente para serem somadas depois). Poderia ser melhor aproveitado se o autor dirigisse essa análise propondo que o aluno tirasse algumas conclusões, e orientando o professor claramente dos objetivos desse exercício.

(Novo Praticando Matemática, 6ª série, página 116, exercício 17)

Colégio Pedro II – RJ) Deseja-se construir uma área de lazer conforme o esboço de planta mostrado a seguir:



Determine a área do terreno acima, usando as medidas indicadas na figura:

Por ser um exercício criado para outra finalidade, o autor poderia utilizá-lo fazendo algumas adaptações, como por exemplo, encontrar outra forma de indicar as medidas do terreno, e não dividindo-o em partes que facilmente o aluno identificaria, por que aí o trabalho que cabe ao aluno é o de aplicar a fórmula correspondente a cada figura encontrar o valor da área e ao final somar. A mecanização deste exercício impede que o aluno use sua criatividade ou desenvolva estratégias de resolução, uma vez que o método de solucionar o exercício já foi imposto.

Problemas aparecem como desafios e, segundo o Manual PNLD, “a metodologia adotada não estimula a participação do aluno na construção mais autônoma de seu conhecimento”.

Ao fim do livro consta alguns moldes e malhas triangulares e quadriculares que junto ao manual do professor sugerem atividades concretas.

3.2 NOVO APRENDENDO MATEMÁTICA

Fazendo um perfil desta coleção mencionando o sumário, citamos no primeiro livro formas, polígonos, figuras e circunferência, sendo pertinente ressaltar a construção geométrica desta e uso do compasso. No segundo livro além de ângulos tem-se triângulos e quadriláteros, analisados por sua classificação.


Sobre os conteúdos o Manual PNLD destaca que há “boa articulação entre os diferentes campos da matemática, especialmente geometria, álgebra, estatística e matemática financeira”.

A contextualização acontece em muitas atividades observadas pelo Manual PNLD “abordam questões de interesse social, o que pode contribuir para a construção da cidadania e tornam os conteúdos matemáticos mais significativos”.

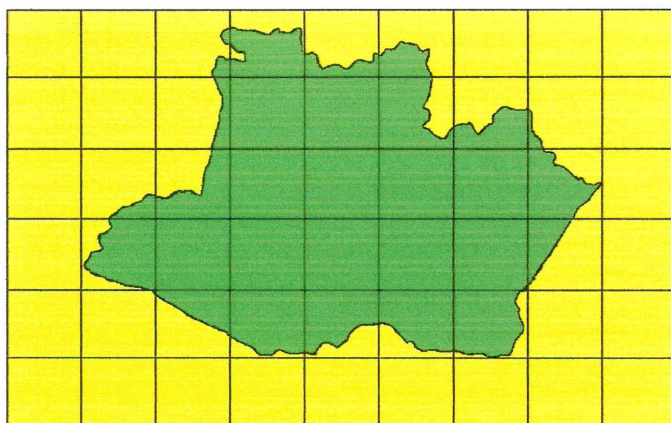
No que diz respeito a área, este autor consegue introduzir de maneira que o conceito apareça relacionado com malhas quadriculares e preenchimento de superfície, e mais tarde, é percebida a necessidade de formalizar, através de fórmula.

Apresenta exercícios que relaciona área equivalente, uso de estimativa, e composição e decomposição de figuras, que estimulam o aluno a aplicar o conceito com uso de sua criatividade.

(Aprendendo Matemática, 5ª série, página 259, exercício 5)

Na figura vemos o mapa do Amazonas. Nesse mapa, cada  equivale a uma área de 80.000 km².

Faça uma estimativa, isto é, calcule, aproximadamente, a área do estado do Amazonas. Depois, consulte uma enciclopédia e verifique a área exata desse estado. Compare o resultado que você encontrou com os dados da enciclopédia. Compare também o seu resultado com o de outros colegas de sua turma. Quem conseguiu a melhor aproximação do resultado exato?



Este exercício foi escolhido por uma razão especial, pois destaca vários aspectos do ponto de vista de enriquecimento do estudo, de como é possível estabelecer relações que possam beneficiar o aluno em seu conhecimento.

Inicialmente, o enunciado supõe a relação da Matemática com outra disciplina, pois o aluno através de um recurso de Áreas (estimativas) poderá calcular a superfície ocupada por um estado brasileiro, e em seguida comprovará a veracidade de seu resultado, além de permitir a discussão com os colegas que fará com que todos percebam a existência de resultados diferentes, mas próximos do real, e investiguem a estratégia que um deles, aquele que obteve a melhor aproximação, usou para resolver.

A questão central na qual o exercício está inserido se refere à definição de área como porção do plano ocupada por uma figura, e para medir essa região superficial, é preciso estipular uma unidade padrão e compará-la com o todo, buscando identificar, quantas vezes essa unidade caberia dentro da figura estudada. Como se trata de um estado e não possui seu contorno definido por meio de segmentos de reta, algumas unidades padrão não serão completadas, gerando assim a necessidade de aproximar. O aluno tem a opção de determinar sua estratégia de resolução: pode tanto atribuir um valor para região que ocupou parte da unidade padrão, ou buscar com outra parte do

estado que não atingiu toda a unidade um preenchimento, unindo duas pequenas regiões do estado visando completar uma unidade.

Além da conceituação de área o aluno utilizará o postulado de áreas congruentes, pois cada unidade que compõe a malha quadriculada é congruente à unidade padrão dada no enunciado, de tal maneira que terão a mesma medida de área.

E finalmente a composição do estado do Amazonas que é feita nesse caso por vários quadrinhos, permite que o aluno possa contar as unidades e obter a quantidade total de unidades que compõe a figura, de tal forma que estará exercitando composição e decomposição de figuras.

Em geometria há sugestão de uso de materiais como régua, compasso, pois estimula o desenho geométrico, entre outros materiais como malha triangular e quadrangular, a exemplo da conceituação de volume que possibilita o emprego do Material Dourado que é feita de maneira sucinta, mas contextualizada.

3.3 TUDO É MATEMÁTICA

No início de cada tópico a ser estudado é proposto um problema através do qual passa-se a discutir e conhecer o novo item, reconhecido pelo Manual PNL D como “metodologia de ensino-aprendizagem adotada é a base para construção do novo conhecimento”.

O uso da intuição é valorizada no campo da geometria, já que no primeiro e segundo volumes acontece a “validação empírica e visualização” descrita no Manual PNL D, e mais tarde no terceiro e quarto livros “há uma crescente formalização da experiência matemática, com apresentação de demonstrações”.

Fica evidente a articulação entre as áreas da matemática, e também uso de fatos do dia-a-dia junto com uma contextualização, e quando é possível recorre a materiais concretos.

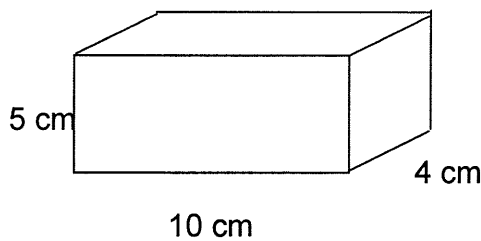
O exemplo permite que vejamos um problema bem colocado que sugere a interação entre os alunos e os estimula a buscar diferentes maneiras de solucionar.

(Tudo é Matemática, 6ª série, página 270, exercício 27)

Mateus montou um paralelepípedo com cartolina e fita crepe.

Aproximadamente:

- Quantos centímetros quadrados de cartolina Mateus gastou?
- Quantos centímetros de fita crepe ele gastou?



Com uma abordagem de resolução de problemas o autor propõe uma situação, fornece algumas informações e dá liberdade ao aluno de resolver, que além de se motivar em busca da solução, começa a refletir e optar por várias estratégias, podendo até discutir com os colegas, argumentar em defesa ou criticar as formas de desenvolver a atividade.

O exercício deixa de ser uma simples aplicação de fórmulas quando exige do aluno algum raciocínio que não envolva a fórmula somente, e (nesse caso) isto está representado na planificação do paralelepípedo.

De nada adianta alguém querer aplicar fórmulas, se não levar em conta que esta figura não está totalmente representada por apenas três faces, mas é composta de seis faces, algumas ocultas que através de uma visualização (noção de poliedros ou figuras espaciais) podem ser extraídas as medidas e nisso está implícito que o aluno faça a decomposição do paralelepípedo em retângulos que observados dois a dois, que estiverem em faces opostas, serão congruentes, e pelo Postulado da Congruência terão mesma área.

Usando então o Postulado de Adição de áreas, a superfície do paralelepípedo, será a soma das áreas dos retângulos que o compõe.

Solução item a)

$$\text{Área total} = 10 \times 5 + 10 \times 5 + 4 \times 5 + 4 \times 5 + 10 \times 4 + 10 \times 4$$

$$\text{Área total} = 2 \cdot (10 \times 5) + 2 \cdot (4 \times 5) + 2 \cdot (10 \times 4)$$

$$\text{Área total} = 2.50 + 2.20 + 2.40$$

$$\text{Área total} = 100 + 40 + 80$$

$$\text{Área total} = 220 \text{ cm}^2$$

No próximo item o exercício propõe o uso de perímetro, e para tanto se faz indispensável a análise das arestas que compõem o paralelepípedo. Nesse estudo o aluno poderá utilizar, por exemplo, o fato de que as arestas paralelas têm mesma medida.

Solução do item b)

$$\text{Soma das arestas} = 10 + 10 + 10 + 10 + 5 + 5 + 5 + 5 + 4 + 4 + 4 + 4$$

$$\text{Soma das arestas} = 4 \cdot 10 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 4$$

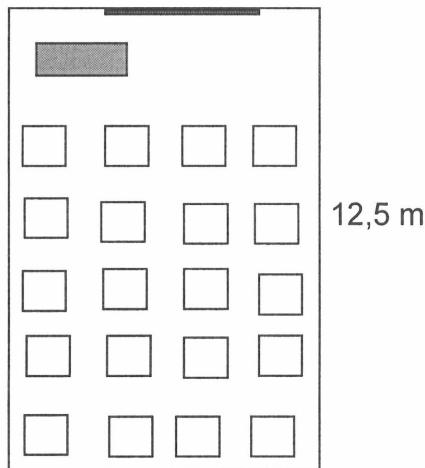
$$\text{Soma das arestas} = 40 + 20 + 16$$

$$\text{Soma das arestas} = 76 \text{ cm}$$

(Tudo é Matemática, 6ª série, página 270, exercício 30)

A área de sua sala de aula é maior, igual ou menor do que a área indicada na figura ao lado? Faça as medidas e os cálculos necessários para responder.

7,5 m



Trabalhando por meio de comparação de duas figuras parecidas, uma sala de aula proposta e outra, a sala de aula real, o autor tenta modificar o ambiente de aplicação da fórmula. Dessa vez, não é suficiente que o aluno calcule diretamente uma área, mas, além disso, é necessário que ele faça medições, e novamente faça o cálculo para poder tirar conclusões.

Os procedimentos que estão envolvidos nessa questão são a partir da medida do lado, calcular a área (aplicação da fórmula) nas duas situações, a sala proposta e a real, e compará-las, não utilizando somente as medidas laterais mas suas medidas superficiais. E, deste modo discutir o conceito de área, procurando dentre elas a que possui maior porção do plano ocupada.

A vantagem mais óbvia da estratégia didática através da resolução de problemas utilizada frequentemente pelo autor é que o aluno se torna capaz de relacionar uma idéia matemática com um grande número de contextos, e também relacionar um problema com vários conceitos matemáticos, e assim construir relações entre estes conceitos.

As atividades são as mais diversificadas possíveis. Notamos uma preocupação em trabalhar situações-problema, que têm por objetivo levar o aluno a construir o próprio conhecimento.

Existem diversos exercícios sobre composição de figuras, que utilizam os postulados (e conceitos iniciais formalizados), área como preenchimento de superfície e estimativa de área.

A utilização da coleção pressupõe a organização de aulas dinâmicas e participativas, nas quais o professor é o orientador das atividades.

4. EXERCÍCIOS

Com base nos critérios determinados pelo Manual do PNLD, e considerando que alguns modelos de exercícios colocados na etapa certa de um estudo contribuem mais na conceituação e aprendizado de áreas do que outros, selecionamos exercícios que, na nossa opinião, ajudam nesse processo. Esses exercícios foram coletados nos livros anteriormente analisados:

- Novo Praticando Matemática (5ª e 6ª séries)
- Aprendendo Matemática (5ª e 6ª séries)
- Tudo é Matemática (5ª e 6ª séries)

Para comentar qual conceito e/ou postulado que cada atividade aborda, separamo-las nas seguintes categorias:

- Área como preenchimento de superfície
- Área em malha quadriculada
- Área equivalente
- Estimativa
- Composição e decomposição

4.1 ÁREA COMO PREENCHIMENTO DE SUPERFÍCIE

Estipulada uma unidade padrão, pode-se escolher uma região poligonal qualquer e analisar quantas unidades serão necessárias para fazer o preenchimento superficial, e deste modo, calcular a área ocupada por esta região.

(Tudo é Matemática, 5ª série, página 243, exercício 32)

Uma caixa tem 13 peças de piso, totalizando $1,5 \text{ m}^2$. Quantas peças serão necessárias para revestir o chão de um salão de 6 m por 10 m?

Neste problema a questão central se refere ao conceito de área como revestimento de uma superfície, neste caso um retângulo. O aluno logo perceberá que deve inicialmente calcular a medida da região a ser revestida. Para tanto pode-se utilizar diretamente a fórmula ou utilizar a definição e calcular quantas unidades quadradas de 1 m^2 cabem no chão a ser preenchido de peças.

Assim, a área do chão será: $A = 6 \cdot 10 = 60 \text{ m}^2$

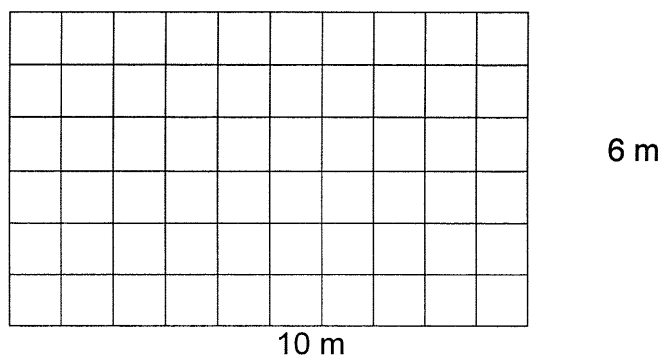
Agora poderá proceder calculando quantas caixas serão necessárias para cobrir a superfície. Sabendo que cada caixa preenche $1,5 \text{ m}^2$ e a região total possui 60 m^2 , temos:

$$60 : 1,5 = 40 \text{ caixas}$$

Logo, para cobrir 60 m^2 é preciso 40 caixas de peças de piso, sendo que cada caixa cobre $1,5 \text{ m}^2$. No entanto cada caixa possui 13 peças totalizando:

$$13 \cdot 40 = 520 \text{ peças.}$$

Tendo uma visão mais geométrica o aluno pode imaginar a situação dessa forma:



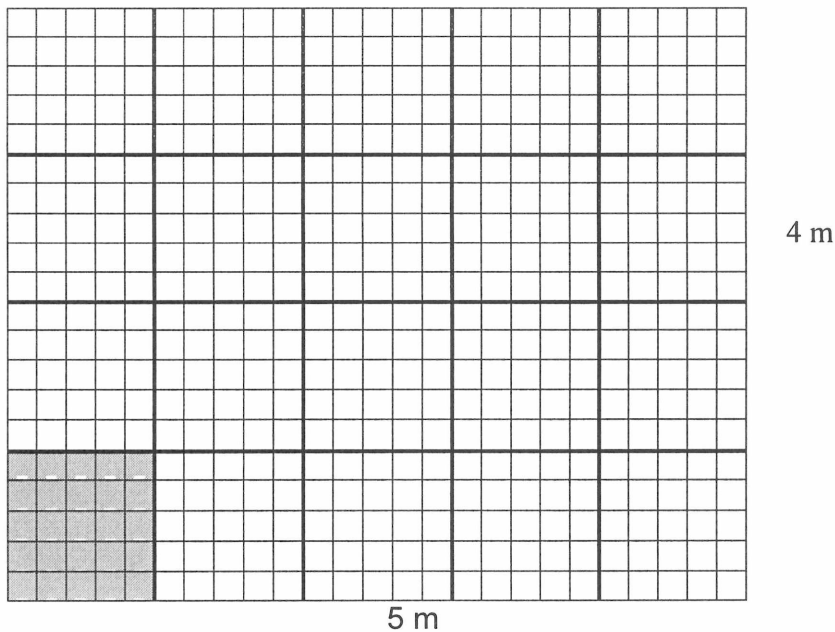
Toda a região a ser preenchida é dividida em unidades de 1 m^2 , totalizando 60 unidades de 1 m^2 . E aí está implícito a aplicação da fórmula. Segue com o restante do raciocínio anterior, pois já não utilizará o conceito de área diretamente.

(Novo Praticando Matemática, 5ª série, página 246, exercício 11)

Quantos ladrilhos de 20 cm de lado são necessários para ladrilhar o chão de uma cozinha retangular de 5 m de comprimento e 4 m de largura?

Temos a lajota quadrada de 20 cm de lado como unidade padrão a ser colocada um número finito de vezes sobre o chão da cozinha de medidas 4 m e 5 m

Usando o conceito de área deve-se preencher a superfície assim:



- unidade padrão de 20 cm de lado (peça de ladrilho)

A região sombreada tem 1 m² de lado.

Se usamos um quadrado de 1 m² como unidade-padrão, cabem 20 unidades no chão da cozinha. Em cada unidade cabem 25 peças. Assim:

$$5 \cdot 4 = 20 \text{ m}^2 \text{ e em cada m}^2 \text{ 25 peças}$$

$$20 \cdot 25 = 500 \text{ peças de ladrilho}$$

Na solução acima temos o conceito de área como preenchimento de superfície mediante uma unidade padrão aplicada duas vezes, escolhendo como unidade padrão primeiro a lajota, e depois o metro quadrado.

Outra solução onde a aplicação da fórmula se dá de forma direta, temos:

$$\text{Área do ladrilho} = 20 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 400 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área da cozinha} = 5 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 500 \text{ cm} \cdot 400 \text{ cm} = 200000 \text{ cm}^2$$

E, finalmente após converter as medidas em centímetros tem-se:

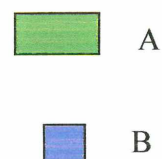
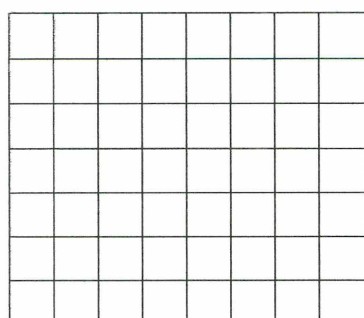
$$200000 : 400 = 500 \text{ ladrilhos}$$

Dividindo a área total da cozinha pela área ocupada por cada ladrilho, tem-se que será preciso 500 peças para efetuar este preenchimento.

As duas soluções se diferenciam no emprego do conceito: na primeira o conceito é usado de forma mais rigorosa, e na segunda, de maneira implícita, valorizando o emprego da fórmula.

(Tudo é Matemática, 5ª série, página 235, exercício 11)

Igor quer revestir esta parede de seu quarto. Para isso ele tem dois tipos de placas:



Responda em seu caderno:

- Usando só a placa A, de quantas placas ele precisará?
- Se considerarmos a placa B como unidade padrão, qual será a área da parede?
- Por que os números encontrados nos itens anteriores são diferentes?

Este exercício é extremamente significativo do ponto de vista da conceituação de área como preenchimento de superfície, pois apresenta para o aluno que a área a ser preenchida não muda (de tamanho) mas o resultado a ser obtido, a sua medida superficial, varia conforme a unidade padrão adotada.

No primeiro caso a unidade adotada é capaz de preencher dois quadradinhos de uma vez, assim precisaremos de 28 unidades da placa A, pois a região da parede tem 56 quadradinhos preenchidos de dois em dois:

$$56 : 2 = 28 \text{ placas}$$

Na solução do item b) a unidade é capaz de preencher um dos quadrados apenas, assim sendo serão necessárias 56 unidades.

A discussão proposta no item c) é justificada pelo tamanho diferente das placas. Uma é o dobro da outra. Assim, o número que expressa a área mediante a unidade A, é a metade do número que expressa a área na outra unidade B.

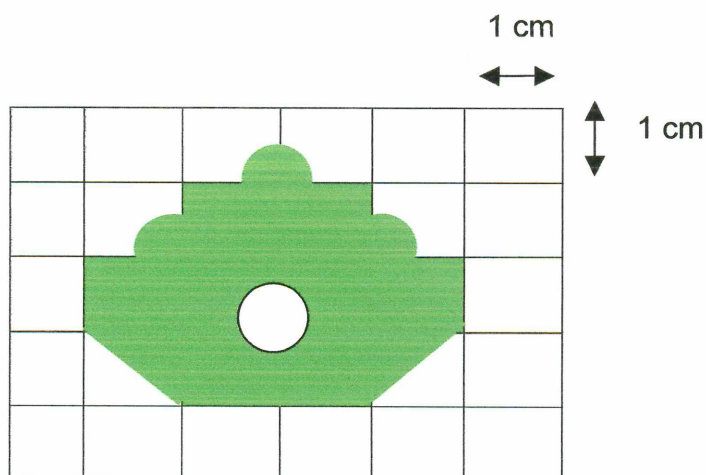
E esta atividade também mostra para o aluno que a unidade padrão não precisa necessariamente ser um quadrado, muitas vezes apresentado pelos exercícios.

4.2 ÁREA EM MALHA QUADRICULADA

Sendo a malha composta por quadrados congruentes que servem como unidade padrão comparamos sua superfície poligonal, visando determinar o preenchimento da figura. Analisando quantas unidades da malha são ocupadas pela figura.

(Novo Praticando Matemática, 5ª série, página 248, exercício 3)

Qual a área da figura?



Tendo como unidade padrão um quadrado de 1 cm^2 precisaremos determinar quantas unidades da malha a figura ocupa. Observamos que aqui há regiões circulares, que não abordamos na teoria do Capítulo 2. No entanto, não é necessário saber a área de um círculo: basta utilizar os postulados.

De fato, se estimular o aluno em composição de figuras nem será necessário considerar a área do círculo, pois as regiões circulares são congruentes, visto que tem mesmo raio, e pelo Postulado de Congruência elas terão mesma medida de área. Entretanto, algumas regiões circulares fazem parte da figura como aquelas situadas na parte superior, cada uma equivalendo $\frac{1}{4}$ de circunferência e como são quatro partes, compõe uma circunferência completa, que integra a figura. Por sua vez, a circunferência que está no centro da figura também é congruente às demais, e pelo Postulado comentado têm mesma área, mas esta deverá ser “descontada” pois, não faz parte da região sombreada. Desta forma, a circunferência a ser considerada é cancelada com a outra que é congruente e não integra a figura.


Seguindo a resolução somam-se as unidades padrões que constituem a figura e estão inteiras, totalizando 8 unidades de 1 cm^2 , mas falta considerar a região ocupada por dois triângulos. Por meio de composição de figuras, eles são congruentes; pelo Postulado têm mesma área, e ocupam metade da unidade padrão. Logo, unindo os dois triângulos teremos duas metades de área da unidade padrão, ou seja, uma unidade inteira. Adicionando isto aos 8 cm^2 anteriormente calculados, temos:

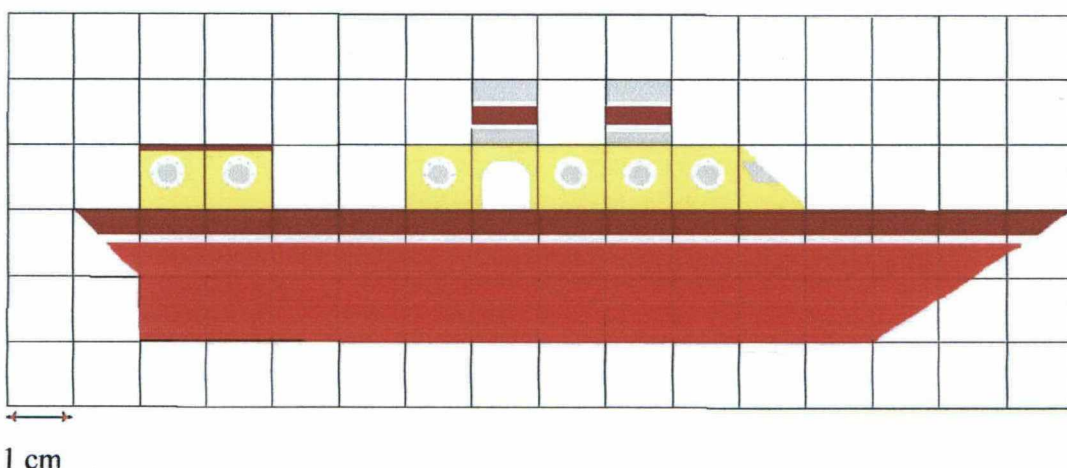
$$\begin{array}{r} 8 \text{ cm}^2 \text{ (unidades inteiras)} \\ + 1 \text{ cm}^2 \text{ (composição de 2 triângulos)} \\ \hline 9 \text{ cm}^2 \end{array}$$

Logo, a área total da figura é 9 cm^2 .

O aluno se beneficia neste exercício pois utiliza um conceito que não está em fórmulas, como a definição de área, composição de figuras e se utiliza implicitamente dos Postulados que regem este conteúdo.

(Aprendendo Matemática, 5ª série, página 257, exercício 1)

Este desenho foi feito em papel quadriculado onde cada  tem 1 cm de lado. Qual a área da região ocupada pelo desenho?



Trata-se de uma atividade atrativa pois, ao invés de usar polígonos ou figuras abstratas, traz uma ilustração, e pode incentivar o aluno a construir seus próprios desenhos e determinar a área ocupada por eles.

O princípio de resolução é semelhante aos demais, usando o conceito de área, e tendo a unidade padrão calcula-se inicialmente a área da região ocupada pelo preenchimento de unidades inteiras 31 unidades, sendo 31 cm^2 , desconsiderando aí a proa do barco, pois contém um detalhe que será mencionado mais tarde.

Analisando as regiões que compõe o barco, mas ocupam metade da unidade padrão constituindo assim regiões triangulares congruentes (localizadas na cabine e na popa) somadas duas a duas temos o preenchimento de 1 cm^2 .

E finalmente, a proa do barco contém uma região triangular que não representa exatamente a metade de uma unidade padrão. Neste caso buscaremos o retângulo cuja diagonal e lados vão compor a proa, determinando esta região.

Os lados do retângulo serão 3 cm e 2 cm, portanto sua área terá medida 6 cm^2 , mas como a região relevante é a metade do retângulo, a área da região será 3 cm^2 .

$$\text{Área do barco} = 31 \text{ cm}^2 + 1 \text{ cm}^2 + 3 \text{ cm}^2 = 35 \text{ cm}^2.$$

4.3 ÁREA EQUIVALENTE

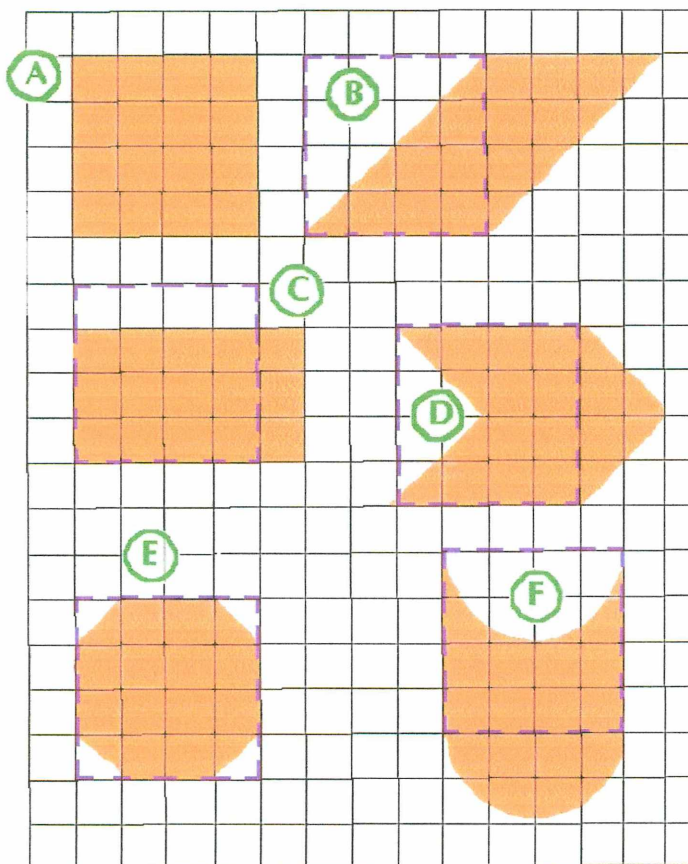
Além de trabalhar o conceito de área, mostra que a consequência do Postulado de Congruência de enunciado: Se duas regiões são congruentes, então têm mesma

medida de área, sua recíproca NÃO é válida, ou seja, podemos encontrar regiões diferentes (não congruentes), mas que possuam mesma medida de área. O objetivo desses exercícios é representar algumas situações que envolvam ocorrências do fato mencionado.

(Novo Praticando Matemática, 6ª série, página 106, exercício 2)

Veja as figuras:

- Indique as figuras que têm área igual à da figura A
- Desenhe em papel quadriculado figuras com área igual à da figura C.
- Desenhe em papel quadriculado retângulos com área igual à da figura A



Na solução do primeiro item, o aluno é incentivado a determinar a área de cada uma das figuras e compará-las com a região A, ou ainda perceber que a figura A poderia ser representada dentro de outras de formato diferente. Como a região pontilhada indica

uma composição objetivando montar com a região dada a figura A, o aluno pratica composição e decomposição de figuras.

Na figura B, vê-se que a região excedente à limitação pontilhada poderia ser composta internamente e formaria um quadrado congruente ao A e, pelo Postulado da congruência, teria mesma medida de área. Já para a figura C, este processo mostra que faltaria uma unidade para o preenchimento de um quadrado congruente ao A. No item D novamente, pela congruência de triângulos, haverá o preenchimento da região pontilhada originando uma figura de área igual ao de A. Analisando a figura E, facilmente percebe-se que a região sombreada ocupa uma menor porção do plano que a região A (representada pelo quadrado pontilhado), e finalmente a figura F é congruente ao quadrado A e terá mesma área, pois a semi-circunferência que excede a região pontilhada pode ser representada por composição de figuras dentro dela.

A criatividade e compreensão do aluno estará associada ao item b) do exercício onde o aluno pode criar outras figuras, de formatos diferentes mas que cumpram uma condição de equivalência de área com a figura C, tantos outros retângulos, e aí poderá observar também que outras figuras obtidas por composição ou decomposição surgirão.

A solução da atividade (c) envolve apenas construção de retângulos, e o aluno poderá observar que estes apresentam diferentes medidas de perímetro, o que pode facilitar a diferenciação destes dois conceitos que freqüentemente os alunos confundem.

(Novo Praticando Matemática, 6ª série, página 126, exercício 15)

(UEL-PR) As peças de um jogo de encaixe foram construídas a partir de quadrados de lado igual a 4 cm. Nestes lados foram acrescentados e/ou retirados semicírculos com 0,5 cm de raio, de acordo com o modelo abaixo:

Com base nesse modelo, é correto afirmar:

- a) Todas as peças têm a mesma área.
- b) A área da peça 1 é maior que a área da peça 6.
- c) A soma das áreas das peças 6, 7, 10 e 11 é igual à metade da área total das peças.
- d) A soma das áreas das peças 1, 5, 9 e 13 é igual à soma das áreas das peças 2, 6, 10 e 14.

1	} 2	} 3	} 4
5	} 6	} 7	} 8
9	} 10	} 11	} 12
13	} 14	} 15	} 16

Os semicírculos que estão acoplados nos quadrados numerados se apresentam de maneiras diferentes, alguns crescem a área do quadrado, outros diminuem a região da figura. Apesar do enunciado fornecer algumas informações que permitam calcular área do quadrado e dos semicírculos, este cálculo poderá ser dispensado se o aluno recorrer a conceitos que envolvem composição (para o caso do quadrado acrescido de semicírculo), decomposição (quando a área do quadrado sofre o desconto da área do semicírculo) e área equivalente (ao trabalhar com figuras diferentes, mas que possuem mesma medida de área).

A primeira afirmação é falsa pois, como foi destacado anteriormente alguns sofrem acréscimos outros sofrem descontos de semicírculos, como a figura 13 que é composta por um quadrado e teve o desconto de um semicírculo e a figura 16 é composta por um quadrado congruente (ao da figura 13) e há um acréscimo de semicírculo. O que resulta no fato das peças 13 e 16 possuírem áreas diferentes.

A afirmativa da letra b) também é falsa porque a figura 1 é composta de um quadrado e um semicírculo, e a figura 6 é composta de um quadrado congruente ao de 1 e dois semicírculos, e isso torna a região ocupada pela figura 6 maior do que a da figura 1.

O item c) facilmente é resolvido usando um raciocínio direto: pensando nas figuras completas e desprezando os semicírculos, vê-se que a área das figuras 6, 7, 10 e 11 é a soma das áreas de quatro quadrados, ao passo que a área total da figura será

de 16 quadrados, (salvo acréscimos e descontos de semicírculos), e 4 não é a metade de 16.

Por eliminação já constatamos que d) é a afirmação correta, mesmo assim se faz necessário a justificativa.

Determinando a área de cada uma das figuras:

Figura 1: é composta por um quadrado e acréscimo de um semicírculo

Figura 5: é composta por um quadrado e desconto de um semicírculo

Figura 9: é composta por um quadrado e acréscimo de um semicírculo

Figura 13: é composta por um quadrado e desconto de um semicírculo

Fazendo a compensação de acréscimos e descontos temos a área total como medida da região ocupada por quatro quadrados.

Figura 2: é composta por um quadrado e desconto de dois semicírculos

Figura 6: é composta por um quadrado e acréscimo de dois semicírculos

Figura 10: é composta por um quadrado e desconto de dois semicírculos

Figura 14: é composta por um quadrado e acréscimo de dois semicírculos

Como acontece acréscimos e descontos de dois semicírculos, estes compõem um círculo completo, e a compensação fornecerá como área total a área de quatro quadrados.

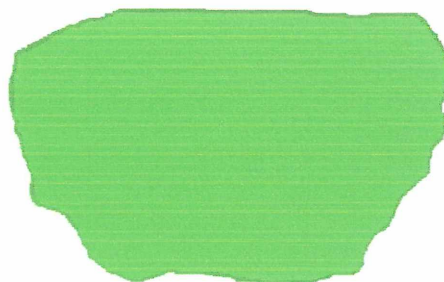
Logo, a primeira e a segunda região terão áreas equivalentes.


4.4 ESTIMATIVA

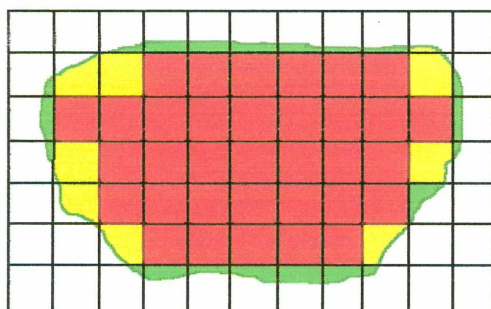
Este tema não é mencionado em todos os livros didáticos. Esta análise é baseada nas coleções Aprendendo Matemática e Tudo é Matemática, onde os autores expõe métodos de resolução diferentes para o problema de estimar a área ocupada por uma figura não-poligonal. Pretendemos comparar as duas abordagens, ressaltando as vantagens e as possíveis dificuldades de cada uma.

(Aprendendo Matemática, 5ª série, página 258, Estimando áreas)

Qual a área dessa figura?



0,5 cm 
0,5 cm



Uma maneira de estimar a área da figura é dividi-la em formas menores, como por exemplo, pequenos quadrados de 0,5 cm de lado cuja área é $0,5 \text{ cm} \times 0,5 \text{ cm} = 0,25 \text{ cm}^2$.


Começam por contar apenas os quadrados inteiros (coloridos de vermelho).

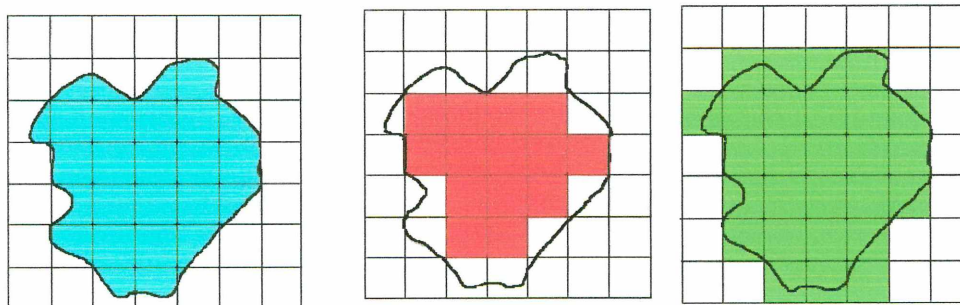
Das partes que sobraram, algumas são aproximadamente a metade ou mais do que a metade (coloridas de amarelo). Para uma melhor aproximação do resultado exato, vamos considerar estas partes como se fossem um quadrado inteiro.

Em compensação, vamos desprezar aquelas que são menores do que a metade (pintadas de verde). Chegamos assim a uma estimativa para esta área: $44 \times 0,25 = 11$, isto é, 11 cm^2 .

Este método compara a região com uma unidade padrão, procurando estabelecer quantas unidades completas e depois quantas maiores que a metade cabem na região, a partir daí, calcula-se aproximadamente a área da região.

(Tudo é Matemática, 5ª série, página 234, exercício 7)

Observe esta região pintada e faça uma estimativa de sua área, considerando como unidade 



Agora veja como Carlinhos e Eliana fizeram para calcular essa mesma área, aproximadamente:

Carlinhos: - Calculei a área dessa região vermelha e obtive 14 unidades, que representam menos que a área real. Depois calculei a área dessa região verde e obtive 27 unidades, que representam mais do que a área real.

A conclusão de Eliana:

Eliana: - A área da região azul fica entre 14 e 27 unidades. Se eu fizer uma média de 14 e 27, chegarei a uma boa aproximação para essa área.


Escolhida uma região externa que contenha a figura e uma região interna contida na figura e pela soma de unidades padrões obtemos pelo Axioma A5 descrito por Euclides, a região maior contém a menor, bem como a menor está contida na maior, dois valores e podemos escrever que a área procurada está contida na maior, e que por sua vez contém a região menor.

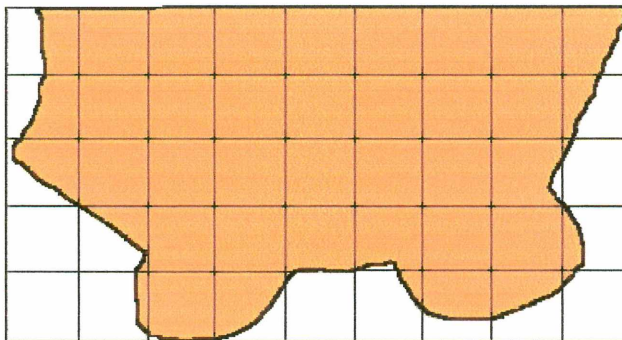
$$M < \text{área procurada} < m$$

Assim certamente o valor procurado estará entre os extremos. Qualquer valor que obedeça este critério é uma estimativa, no entanto, o autor sugere que se faça uma média, pois os alunos têm a necessidade de um procedimento.

Mas fazer a média entre os valores de aproximação por excesso ou falta, não garante a proximidade do resultado exato.

(Tudo é Matemática, 5ª série, página 235, exercício 9)

Considere  como unidade. Decalque a figura ao lado em papel quadriculado e calcule sua área aproximada.



Percebe-se que a figura não é composta exclusivamente de segmentos de reta, o que exige uma estimativa da medida de sua área.

Se utilizar o primeiro processo, contando os quadrados inteiros que compõe a figura tem-se:

Quadrados inteiros: 26 unidades

Quadrados “quase inteiros” que podem ser considerados como unidade: 5 unidades

Quadrados que representam metade da unidade: 6 partes: 3 unidades

Ainda assim existem 5 trechos da figura que ocupam quadrados diferentes mas que representam uma porção menor que a metade da unidade padrão, e por este método, podem ser desprezadas. Assim, a área aproximada da figura será de 34 unidades. Nesta solução alunos podem ter dúvida em quais partes da figura considerar unidade inteira, ou quando somar a outra, ou até mesmo quando desprezá-la. Tais critérios devem estar bem definidos junto aos alunos, caso contrário haverá divergência (maior que a esperada) nos resultados.

Aplicando o processo de região contida e região que contém a figura temos:

Área da região (poligonal) maior que contém a figura: 40 unidades

Área da região (poligonal) menor que está contida na figura: 28 unidades

Então certamente a medida da área da figura estará entre 28 e 40 unidades:

$$28 < \text{área da Figura} < 40$$

Qualquer valor dentro deste critério é aceito, no entanto, faremos a média para obter de forma coerente este resultado.

Fazendo a média destas medidas: $(28 + 40) : 2 = 68 : 2 = 34$ unidades.

Na aplicação deste método o aluno consegue definir com exatidão a região poligonal que contém a figura e a medida de sua área, aplicando o conceito contando as unidades. Da mesma maneira procederá para a região poligonal contida na figura, em seguida terá condições de calcular a média entre os resultados obtidos, definindo a solução. Reduzindo a possibilidade de divergência, que possa causar confusão ao comparar resultados com os colegas.

(Tudo é Matemática, 5ª série, página 235, exercício 10)

Em uma folha de papel quadriculado, desenhe dois contornos de sua mão, um com os dedos juntos e outros com dedos separados. Depois calcule o valor aproximado da área determinada em cada desenho.

Tal atividade dá liberdade ao aluno de concretizar o conhecimento que acabou de formalizar, além de poder comparar áreas do mesmo objeto (mão) em diferentes posições.

As respostas serão pessoais, pois o tamanho de cada mão é diferente, e para cada aluno, uma medida de área da mão.

Mas, o que vai gerar discussão é o fato de algum aluno achar que no momento em que sua mão estará aberta ocupará maior porção do plano e terá maior área, do que se estivesse fechada, pois esquece que os dedos (finos) não vão compor uma figura, serão considerados individualmente cada qual com sua área que será uma pequena porção do plano, e os espaços entre eles, não farão parte da mão.

Ou seja, sua mão terá aproximadamente a mesma medida de área, tanto aberta quanto fechada, embora apresente formatos diferentes, ilustrando assim novamente a falsidade da recíproca do Postulado de Congruência.

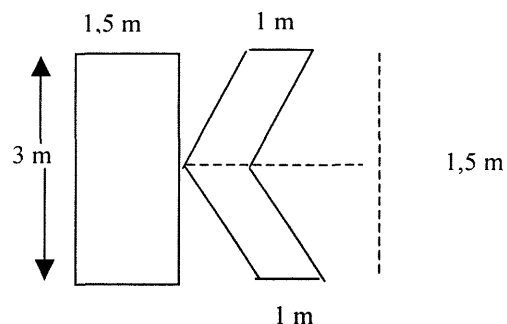
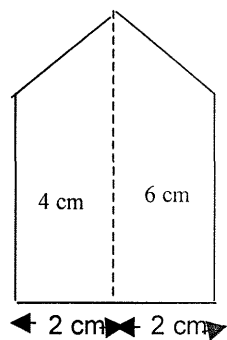
É um exercício pleno, pois abrange desde o conceito de área, postulado da congruência, estimativa e comparação de áreas.

4.5 COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO

Em composição de figuras aplica-se diretamente o Postulado de Adição de áreas, em decomposição utiliza-se a definição de região poligonal que pode ser decomposta em um número finito de regiões triangulares, de tal maneira que podemos decompor qualquer figura nestas regiões e simultaneamente agrupá-las de forma a obter outras figuras como quadrados, retângulos, e desta maneira decompor uma figura em outras. Mas, a decomposição também pode ser interpretada como uma busca de uma unidade padrão que cumpra uma condição imposta. Tal unidade representa uma figura que, associada a outras, vai compor a figura inicial. Desta forma, os conceitos de composição e decomposição de figuras devem estar associados.

(Praticando Matemática, 6ª série, página 120, exercício 4)

Calcule a área das figuras:



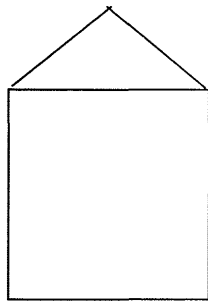
A atividade através da disposição das medidas já induz o aluno a decompor a primeira figura em dois trapézios, no entanto pode ser separada em um triângulo e um quadrado, sem danos para a resolução.

Na primeira sugestão que é a proposição que consta do Manual do Professor temos dois trapézios congruentes (T_1),

$$aT_1 = ((4 + 6) \times 2) / 2 = 10 \times 2 / 2 = 20/2 = 10 \text{ cm}^2$$

Como se trata de dois trapézios congruentes, $a_{\text{Total}} = 2 \times 10 = 20 \text{ cm}^2$

Neste estudo, levanta-se a hipótese da figura ser decomposta em um triângulo T e um quadrado Q.



$$aT = 4 \times 2 / 2 = 8/2 = 4 \text{ cm}^2$$

$$aQ = 4 \times 4 = 4^2 = 16 \text{ cm}^2$$

Sendo a área total da figura $4 \text{ cm}^2 + 16 \text{ cm}^2 = 20 \text{ cm}^2$

Isto foi obtido aplicando o Postulado de Adição de Áreas, pois se uma figura for decomposta em outras figuras, então a área da figura maior será a soma das medidas das áreas das figuras que a compõe.

Para o segundo caso é evidente o aparecimento da letra K formada pela justaposição de figuras como um retângulo e dois paralelogramos congruentes.

$$aR = b \times h = 1,5 \times 3 = 4,5 \text{ cm}^2$$

$$aP = b \times h = 1 \times 1,5 = 1,5 \text{ cm}^2$$

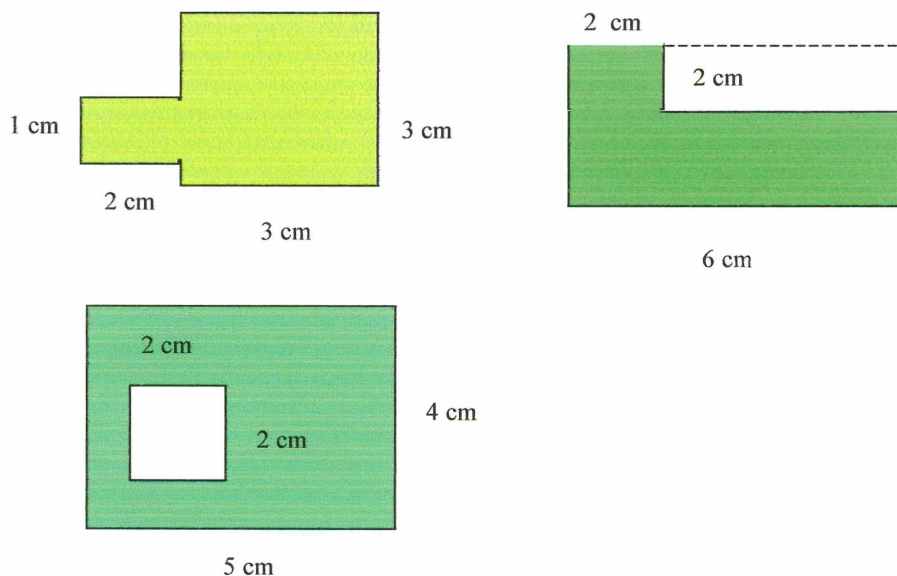
Mas, como são dois paralelogramos congruentes, então $2 \times 1,5 = 3 \text{ cm}^2$

E temos a área total da figura como a soma: $4,5 + 3 = 7,5 \text{ cm}^2$

No primeiro caso que foram citadas duas resoluções, novamente o autor deixa a desejar quando induz o aluno a decompor a figura. Este exercício poderia apresentar as medidas sem deixar explícito a separação, dando liberdade para que o aluno o fizesse.

(Tudo é Matemática, 5ª série, página 239, exercício 21)

(Atividade em dupla) Converse com o colega e depois calculem as áreas das regiões pintadas.



O exercício abordará a composição de figuras por meio de outras figuras e, também trata a decomposição que seria “desmontar” a figura em outras.

No primeiro exemplo a solução seria através da composição das áreas do retângulo R de lados 1 cm e 2 cm e do quadrado Q de lado 3 cm:

$$aR = b \times h = 2 \times 1 = 2 \text{ cm}^2$$

$$aQ = l^2 = 3^2 = 9 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total} = aR + aQ = 2 + 9 = 11 \text{ cm}^2$$

No segundo exercício os dois conceitos (composição/decomposição) podem ser trabalhados.

Por composição:

$$aR_1 = 6 \times 2 = 12 \text{ cm}^2$$

$$aQ_1 = 2^2 = 4 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total} = aR_1 + aQ_1 = 12 + 4 = 16 \text{ cm}^2$$

Por decomposição, imagina - se um retângulo que contenha as duas figuras e tenha medidas 6 cm de comprimento por 4 cm de largura, e descontará desta figura um retângulo superior de medidas 4 cm e 2 cm que estaria representado pela linha pontilhada (que não consta no livro didático)

$$aR_2 = 6 \times 4 = 24 \text{ cm}^2$$

$$aR_3 = 2 \times 4 = 8 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total} = aR_2 - aR_3 = 24 - 8 = 16 \text{ cm}^2$$

E por fim a última figura, usando o recurso que nos permite descontar uma região que não faz parte da figura que foi considerada, têm-se:

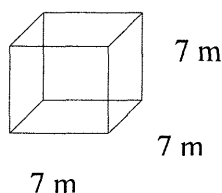
$$aR_4 = 5 \times 4 = 20 \text{ cm}^2$$

$$aQ_2 = 2^2 = 4 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total} = aR_4 - aQ_2 = 20 - 4 = 16 \text{ cm}^2$$

(Tudo é Matemática, 5ª série, página 244, exercício 38)

Qual é a área total da superfície deste cubo?



Recorrendo à planificação de figuras, o aluno é estimulado a imaginar a figura aberta, ou lembrar que um cubo é composto de seis faces quadradas congruentes, e que a área de uma dessas faces é:

$$aQ = l^2 = 7^2 = 49 \text{ m}^2$$

Mas como temos seis dessas figuras compondo a superfície do cubo, a área total será: $6 \times 49 = 294 \text{ m}^2$

Nesta atividade, além de planificação e do próprio conceito de área como revestimento superficial do cubo, é abordado também a decomposição de figuras, no momento em que o aluno “desmonta” o cubo em seis quadrados que compõe suas faces.

(OBMEP 2005, nível 1, exercício 12)

Uma folha quadrada foi cortada em quadrados menores da seguinte maneira: um quadrado de área 16 cm^2 , cinco quadrados de área 4 cm^2 cada um e treze quadrados de área 1 cm^2 . Qual era a medida do lado da folha, antes de ela ser cortada?

- (A) 3 cm
- (B) 4 cm
- (C) 5 cm
- (D) 7 cm
- (E) 8cm

Tendo a área de cada quadrado é possível determinar a medida de seu lado, por meio da composição de figuras faremos a reconstituição da folha inicial.

$$aF = aQ_1 + aQ_2 + aQ_3$$

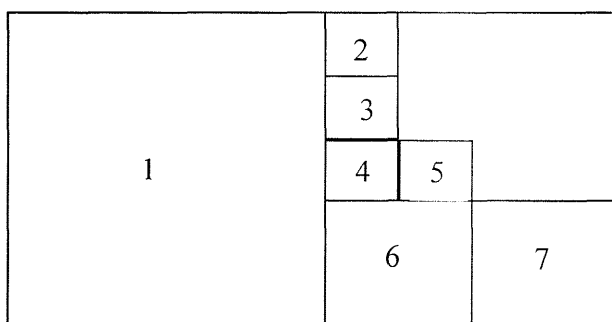
Onde aQ_1 representa a área ocupada pelo quadrado de 16 cm^2 , e aQ_2 representa a área ocupada pelos cinco quadrados de área 4 cm^2 cada um, sendo um total de 20 cm^2 , e aQ_3 é a medida da área ocupada por treze quadrados de área 1 cm^2 cada, somando 13 cm^2 . Assim, $aF = 16 + 20 + 13 = 49 \text{ cm}^2$, então a figura tem área de 49 cm^2 e a medida de seu lado, sendo ela um quadrado é 7 cm , opção D.

Cabe a qui um comentário: por ser um exercício simples de resolver, os alunos demonstraram estarem mais preocupados em reconstituir a figura através de desenhos encaixando todos os quadrados, que alguns não perceberam que a composição também se dá pela medida da área da figura.

(OBMEP manual 2005, página 43, exercício 18)

O desenho abaixo é a planta de uma casa, cujo piso é retangular e no qual estão desenhados 7 quadrados – numerados de 1 a 7 na figura. Se a área do menor desses quadrados é 1 m^2 , a área total do piso, em metros quadrados, é igual a:

- a) 42
- b)44
- c)45
- d)48
- e)49



Admitido o quadrado unitário como unidade padrão fazemos um revestimento usando o conceito inicial de área, de toda a figura, verificamos quantos quadrados menores como o número 2, 3, 4, ou 5 cabem em toda a região que forma a casa.

Na figura 6 e 7 cabem 4 unidades, ou seja 4 m^2 cada figura, portanto, $4 \times 2 = 8 \text{ m}^2$.

Ao lado dos quadrados 2 e 3 cabem mais 2 unidades e em seguida forma-se um retângulo de lados 4m e 3m, tendo como área $4 \times 3 = 12 \text{ m}^2$.

No quadrado maior, cabem 5 unidades em cada lado, tendo como área 25 m^2 .

Assim, a planta da casa terá como área a composição (soma) das áreas das regiões que a formam, ou seja: $8 + 12 + 25 = 45 \text{ m}^2$, opção C.

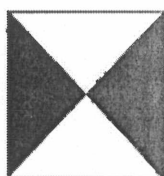
Esta atividade torna-se interessante desde que o aluno compreenda os conceitos abordados: área como preenchimento de superfície, composição de figuras, postulado da soma de áreas. Nesta etapa ele poderá, além de resolver com facilidade, encontrar diversas maneiras de resolução, variando a composição da figura e método utilizado como, por exemplo, encarar a figura como um retângulo único e verificar quantas unidades padrões são necessárias para seu preenchimento.

(OBMEP 2006, nível 1, exercício 3)

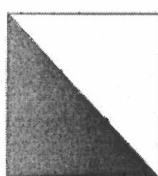
Os quadrados abaixo têm todos o mesmo tamanho.

Em qual deles a região sombreada tem a maior área?

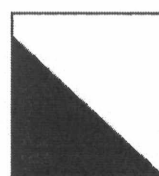
- a) I b) II c) III d) IV e) V



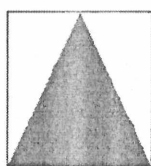
I



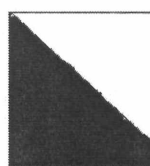
II



III



IV



V

Embora a região do triângulo sombreada seja interna a um quadrado em todos os casos congruentes, esta região nem sempre terá mesma medida de área. No primeiro caso a área está representada por dois triângulos congruentes e cada uma terá um quarto da área do quadrado, e a composição deles resultará na metade da área do quadrado.

Na figura II, está bem visível que se trata da metade da área do quadrado.

Na figura III a região delimitada está um pouco abaixo da linha da diagonal do quadrado, o que indica que a área será um pouco menor que a área da metade do quadrado, portanto menor que os itens anteriores.

No caso IV, o triângulo tem mesma base e mesma altura do quadrado, e sua área será representada pela metade do produto dessas medidas, que é a metade da área do quadrado.

No quadrado V, a linha que delimita o triângulo sombreado está um pouco acima da linha da diagonal de quadrado, o que indica que a área deste triângulo será maior que a metade da área do quadrado.

Assim organizando as informações: a_{III} é menor que $a_I = a_{II} = a_{IV}$ que por sua vez é menor que a_V , sendo esta a região que apresenta MAIOR área.

Um conceito especial é abordado nesse exercício, a comparação de áreas, que pode ocorrer através da conferência de regiões dentre as quais ocupa maior porção do plano, ou checagem da área (medida numérica) qual é representada pelo maior valor.

5.CONCLUSÃO

Buscando a origem dos erros nas questões que envolvem área, procuramos observar se os livros didáticos, que orientam o estudo do professor e do aluno, expõem o assunto de maneira adequada.

A ocorrência do erro se dá pela mecanização de um conceito, o uso excessivo de fórmulas condiciona o aluno a aplicá-la em casos que a conceituação bastaria. Por diversas vezes o aluno aceita um conteúdo, o reproduz sem que haja a compreensão do conceito, e isso transparece quando lhe é requisitado que relacione diversos conceitos.

Em nosso estudo vimos que as inserções de atividades/exercícios selecionadas podem contribuir para uma aprendizagem mais satisfatória de modo que o aluno consiga elaborar estratégia para resolução de problemas e relacionar o conceito com outros conteúdos.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRINI, A; VASCONCELLOS, M. J. Novo Praticando Matemática. Volumes 5 e 6. 1ª edição. São Paulo. Editora do Brasil. 2002.

CHIUMMO, Ana. O conceito de áreas de figuras planas: capacitação para professores do ensino fundamental. 1998. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). PUC – SP, São Paulo.

DANTE, Luiz R. Tudo é Matemática. Volumes 5 e 6. 1ª edição. São Paulo. Editora Ática. 2003.

FETISSOV, A I. A Demonstração em Geometria. São Paulo. Editora Atual. 1994. Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando.

IMPA, SBM. 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

GIOVANNI, José R.; PARENTE, Eduardo. Aprendendo Matemática–Novo. Volumes 5 e 6. 1ª edição. São Paulo. Editora FTD. 2002.

LIMA, Elon L. Áreas e Volumes. Rio de Janeiro. Editora SBM. 1985.

MEC, et al. PNLD, Plano nacional do livro didático. Volume 3. Manual análise de livros didáticos, 2005

MOISE, Edwin E.; DOWNS, Floyd L. JR. Geometria Moderna. Parte I. São Paulo. Editora Edgard Blucher.

PINTO, Neuza B. O Erro como estratégia didática. Campinas, SP. Editora Papyrus. 2000. Série Prática Pedagógica.