UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

ANDERSON GOSMATTI

EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU E IGUALDADE EM LIVROS DIDÁTICOS DO TERCEIRO CICLO

CURITIBA
2006

ANDERSON GOSMATTI

EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU E IGUALDADE EM LIVROS DIDÁTICOS DO TERCEIRO CICLO

Monografia apresentada como requisito parcial à conclusão do Curso de Especialização para Professores de Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná - UFPR.

Orientador: **Prof. M.Sc. Adriana Luiza do Prado**

CURITIBA
2006

TERMO DE APROVAÇÃO

ANDERSON GOSMATTI

EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU E IGUALDADE
EM LIVROS DIDÁTICOS DO TERCEIRO CICLO

Monografia aprovada como requisito parcial para obtenção do título de Especialista no Curso de Especialização para Professores de Matemática, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Adriana Luiza do Prado

Orientador: Prof. M.Sc. Adriana Luiza do Prado
Departamento de Matemática, UFPR

Liliana Madalena Gramini Cumin

Prof. Dra. Liliana Madalena Gramini Cumin
Departamento de Matemática, UFPR

Curitiba, novembro de 2006.

"E pensar não é somente 'raciocinar' ou 'calcular' ou 'argumentar', como nos tem sido ensinado algumas vezes, mas é sobretudo dar sentido ao que somos e ao que nos acontece."
Jorge Larrosa

DEDICATÓRIA

A minha esposa, Fabiana, e a meus pais, Lourdes e Lauro.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, pela compreensão e abertura.

Aos professores do curso, pelas oportunidades de aprendizagem.

Aos colegas de curso, pelas manhãs e tardes de sábado que passamos juntos.

RESUMO

Esta pesquisa verifica como são relacionadas as noções de igualdade, o uso do sinal "=" e as equações do primeiro grau em três livros didáticos do terceiro ciclo, mais especificamente os destinados à sexta série do ensino fundamental. Busca-se referências no Modelo dos Campos Semânticos de Rômulo Campo Lins para analisar as propostas dos autores. Algumas concepções de educação algébrica são apresentadas na tentativa de delimitar o que se pode entender por álgebra escolar. O estudo mostrou que os PCN influenciam os autores de livros didáticos e que é possível, a partir da proposição de atividades, construir um espaço comunicativo com o aluno leitor para compartilhar significados dados às equações.

Palavras-chave: equações do primeiro grau, livro didático, campo semântico, atividade.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este estudo foi iniciado a partir da leitura de uma afirmação de Michel Otte quanto à igualdade em um capítulo de seu livro *O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à filosofia e à didática da matemática*, intitulado "Equações", no qual ele discute a questão da diferença entre "A=A" e "A=B" (OTTE, 1993).

Quanto a primeira expressão não há muito a dizer pois em geral concorda-se com o que se vê e com o que se lê na igualdade.

Na segunda expressão a equação contém, "além do igual, ao qual se refere o sinal de igualdade, também algo diferente, o que se indica pelo uso de dois sinais distintos, A e B." (OTTE, 1993, p. 56) Dela pode-se ter duas abordagens distintas: 1) partindo-se da igualdade pode-se considerar que A é substituível por B, ou que B é substituível por A, sendo que a igualdade é o próprio objeto matemático nesta perspectiva; 2) partindo-se do que é diferente, pode-se se perguntar por que dois símbolos diferentes, duas "coisas" diferentes, são iguais? Restringindo-se às propriedades destas coisas (objetos), pode-se indicar que em determinados contextos elas, apesar da diferença aparente, se tornam iguais. Mais ainda, tem-se que considerar o que quer dizer, qual o significado, ou quais os significados, do símbolo "=" dentro destes contextos (OTTE, 1993).

A partir disto uma primeira questão foi levantada para iniciar estes estudos sobre o ensino e a aprendizagem das equações: Quando duas "coisas" (objetos, pessoas, entidades, expressões lingüísticas ou matemáticas, etc.) são iguais?

O aspecto filosófico da pergunta pode suscitar dúvidas quanto a existência ou não de seu aspecto matemático. Porém, é intrigante o fato de que geralmente na escola inicia-se os estudos das equações como se os alunos já soubessem, ou melhor, como se eles já entendessem a *igualdade* (representada pelo símbolo =) da mesma forma como os professores – e matemáticos – a entendem.

OTTE, por exemplo, considera que se pode ter em mente a substitubilidade em contextos. Assim A=B – A é igual a B – em determinados sentidos, porém em outros não. Por exemplo, uma calça, como peça de vestuário, é diferente de um sapato, porém, para um produtor ou para um vendedor de roupas e calçados, uma calça pode ser igual a um sapato considerando o custo de produção e valor de mercado dos mesmos. Neste sentido, ele pode expressar que *uma calça = um sapato,* ou *uma calça = dois sapatos* (OTTE, 1993). Isso indica que pode haver mais de uma forma de entender a igualdade, dependendo da perspectiva que se toma para afirmar que um objeto é igual a outro objeto.

Pensando assim, não se pode ignorar – no sentido de não se considerar – o passado interno e externo à escola vivido por cada uma das pessoas – crianças – que estão na sala de aula ou lendo um livro didático, pretendendo-se, mesmo que inconscientemente, que a experiência própria – do professor – prevaleça. As diferentes perspectivas devem ser consideradas.

Entendendo que o caminho que se costuma adotar pode não ser o melhor, optou-se, num primeiro momento, por estudar a viabilidade de se considerar o que os alunos já sabem sobre igualdade, os possíveis significados dados às expressões "são iguais", "é igual", "é o mesmo que", que as crianças já produziram e aparecem em suas manifestações e raciocínios, antes de estudarem as equações na escola, para se planejar o ensino. Em outras palavras, pergunta-se e tenta-se responder se há influência do conceito de igualdade, já incorporados/assumidos/aprendidos pelos alunos em situações anteriores, na sua vida escolar ou fora da escola, quando da aprendizagem das equações de primeiro grau? Se existe, qual é?

Este questionamento, por sua vez, encaminhou os esforços à reflexão sobre fatores que influenciam a prática do professor em sala de aula, pois quando faz escolhas didáticas e metodológicas, ele tem referências prévias para as determinar.

Propiciar a participação e expressão do aluno sobre os conteúdos matemáticos estudados, criar um espaço para o uso e resgate do conhecimento que o aluno já construiu, depende dos pressupostos e referências assumidos pelo docente. Dentre estas referências há consenso que os livros didáticos assumem papel preponderante, principalmente sobre quais conteúdos ensinar e como os determinar, conforme indica o Guia de Livros Didáticos 2005 do MEC (2005), do Programa Nacional do Livro Didático (PNDL). Além disso, muitas das experiências que os alunos têm com igualdades e com o símbolo "=" são vivenciadas na escola na leitura de livros didáticos.

Assim, resolveu-se analisar alguns livros didáticos utilizados atualmente no Brasil quanto às abordagens às igualdades e à introdução das equações ditas "algébricas", uma vez que estes determinam, por sua grande influência no meio docente, práticas dentro da sala de aula e são instrumentos didáticos aos quais muitos estudantes têm acesso. Desta forma, neste segundo momento, decidiu-se o estudo deste trabalho: há relacionamento entre os conceitos de igualdade – o uso do sinal "=" - e equações em livros didáticos do terceiro ciclo? Se há, como ele se dá? A questão levantada inicialmente não foi abandonada, somente postergada para uma futura pesquisa.

Muitos pesquisadores em aprendizagem já mostraram a importância de se considerar elementos aprendidos anteriormente para o desenvolvimento da aprendizagem de novos elementos: David Ausubel, com sua "Teoria da Aprendizagem Significativa" (NOVAK, 1981), e Gérard Vergnaud, com a "Teoria dos Campos Conceituais" (PAIS, 2005), por exemplo.

Procura-se, aqui, pontos esclarecedores no trabalho de Rômulo Campos Lins e seu "Modelo Teórico dos Campos Semânticos", pois este considera que uma afirmação (crença-afirmação) tem sempre uma justificação, e esta é baseada naquilo que quem afirma assume como certo (verdade), o que depende de seus conhecimentos prévios (LINS, 1999). No desenvolvimento de uma atividade o professor tem que procurar identificar os motivos que levam os alunos a responder questões como respondem, tornar claro quais são as "justificações" que os autorizam a dizer o que dizem - algo que já aprenderam anteriormente.

Para o trabalho proposto, é perceptível a necessidade de situar-se quanto ao que seria Educação Algébrica atualmente. Para tanto busca-se referências nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998) e em alguns pesquisadores sobre o assunto: o próprio Rômulo de Campos Lins em conjunto com Joaquim Gimenez (LINS E GIMENEZ, 1997), Jorge Tarcísio da Rocha Falcão (FALCÃO, 2003) que faz considerações a partir do trabalho de Vergnaud, e João Pedro da Ponte (PONTE, 2006) que apresenta um estudo histórico e conceituai sobre a Álgebra. Quanto aos pressupostos educacionais com os quais se organizam as atividades de ensino e lêem-se livros didáticos, considera-se as contribuições de Maria Cecília de Oliveira Micotti (MICOTTI, 1999).

Após estes levantamentos, discorre-se sobre alguns livros didáticos escolhidos para análise quanto às suas abordagens ao conceito de equação e seu relacionamento com o conceito de igualdade e o uso do sinal "=".

2. O ENSINO DA ÁLGEBRA

A álgebra escolar têm uma configuração muito distinta da álgebra acadêmica. Muitas práticas, discussões e estudos têm sido desenvolvidos sobre o ensino e a aprendizagem da álgebra com abordagens distintas. Entende-se e utiliza-se aqui educação algébrica como o ato de ensinar e/ou aprender elementos da álgebra.

LINS e GIMENEZ (1997) indicam que as atividades algébricas dos professores de matemática têm seus fundamentos em pressupostos quanto à natureza dos objetos algébricos apresentados ou quanto às concepções de conhecimento que têm, sendo que estas determinam o que os professores entendem por educação algébrica. Os autores apresentam o que para eles seriam as três principais concepções de educação algébrica entre professores:

- Concepção *letrista*: refere-se à educação algébrica tida como algoritmo e prática – aprende-se e ensina-se a técnica e depois treina-se respondendo exercícios. Nesse ponto de vista a atividade algébrica é tida como "cálculo com letras" ou "cálculo literal". Importante notar que nesta abordagem nenhum recurso ou forma diferente de entender, estudar ou ensinar álgebra são aceitos, muito menos adotados. Há utilização exclusiva do "cálculo literal".
- Concepção *letrista-facilitadora*: refere-se à educação algébrica da mesma forma como a *letrista* com alguns novos elementos tidos como facilitadores do processo como situações concretas ou material concreto. Assim a atividade algébrica é tida como formalização de certas estruturas pela abstração realizada a partir de elementos concretos (objetos).
- *Modelagem*: segundo os autores esta concepção adota o "concreto" como ponto de partida. A partir de situações reais propõem-se a investigação do que está ocorrendo. É uma proposta que visa estreitar a distância entre a "Matemática escolar" e a "Matemática da vida". Porém a Álgebra aparece somente como um instrumento auxiliar de interpretação, não é o foco de estudo. Seu estudo vai ocorrendo conforme as atividades propostas pelo professor, isto é, dependendo de suas intenções. Há um elemento novo nesta forma de entender a educação algébrica, pois as atividades envolvem *ações* dos alunos, dos estudantes.
- *Aritmética Generalizada*: nesta concepção a atividade algébrica é vista como a expressão da generalidade. Parte-se da observação de padrões e regularidade entre figuras geométricas ou números para uma representação algébrica do que está ocorrendo. Valoriza-se assim a linguagem algébrica como forma de expressão. Torna-se importante a

organização de dados pelos alunos, o estabelecimento de relações e sua expressão (LINS e GIMENEZ, 1997).

Na prática o que é assumido em geral pelos professores do ensino fundamental é uma concepção letrista da educação algébrica, cuja atividade é o "cálculo com letras", tanto por uma abordagem *letrista* ou *letrista-facilitadora*. Também nos livros didáticos de matemática essas duas abordagens são as que geralmente aparecem.

Aqui pode-se perguntar: É possível conceituar "Álgebra"? O que é a "Álgebra", então? LINS e GIMENEZ consideram que "A Álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade." (1997, p. 137)

Esta concepção se insere no que estes autores afirmam ser a atividade algébrica: a produção de significado para a álgebra, que envolve formas de pensar e justificar procedimentos e operações em atividades que desenvolvem-se a partir de contextos. Porém aqui é necessário esclarecer que para estes autores o pensamento algébrico é apenas uma das formas de se produzir significados para a álgebra.

Para LINS e GIMENEZ pensar algebricamente "[...] é produzir significados para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades ou desigualdades), e com base nisso transformar as expressões obtidas [...]" (1997, p. 151) com base em algumas características: considerar números e operações exclusivamente com respeito às suas propriedades, sem modelações em outros objetos; e mesmo não os conhecendo operar sobre números como se fossem conhecidos (LINS e GIMENEZ, 1997).

Estes autores deixam claro que esta caracterização não trata de pormenorizar ou desprezar outras formar de produzir significados para a álgebra – balanças de dois pratos, áreas, padrões geométricos ou outros –, mas sim de considerar o pensamento algébrico – como descrito acima – em termos de atividades, no interior de atividades. Isto quer dizer que "[...] é preciso que conheçamos as propriedades dos 'números' e das 'operações aritméticas' , termos genéricos, é verdade, mas que só ganham vida 'concreta' na medida em que são especificados em sua particularidade, no interior da atividade em questão."(LINS e GIMENEZ, p. 151-152)

PONTE, por sua vez, considera que, epistemologicamente, a Álgebra é "um raciocínio que processa a um nível abstrato com recurso à simbolização e às operações com símbolos, além de que seus objetos são relações abstratas – equações, estruturas definidas por operações em conjuntos" (2006). Historicamente o mesmo considera que a álgebra passou por fases: resolução de problemas na antigüidade, resolução de equações até o século XIX, estudo de estruturas abstratas – grupos, espaços vetoriais, anéis, corpos, conjuntos ordenados – que perdura. Porém não somente isto, já que PONTE (2006) afirma que hoje a álgebra é vista também como generalização e formalização de padrões e restrições – pensamento aritmético e quantitativo generalizados, manipulação sintática formal, estudo de estruturas abstraídas de cálculos e relações, de funções, de variação conjunta, como linguagens de modelação e controle de fenômenos.

Este autor também pondera que a principal finalidade para os estudo da Álgebra na escola é o desenvolvimento do *pensamento algébrico* dos alunos. PONTE cita o que o NCTM – National Council of Teachers of Mathematics, indica sobre este assunto:

> *... o pensamento algébrico diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação:*
>
> - *Compreender padrões, relações e funções (Estudo das estruturas),*
> - *Representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos (Simbolização),*
> - *Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas (Modelação),*
> - *Analisar mudança em diversas situações (Estudo da variação).* (NCTM apud PONTE, 2006, p.7)

Disto PONTE conclui que

> *... o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com o cálculo algébrico e as funções. No entanto, inclui igualmente a capacidade de lidar com muitas outras estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios. A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas também o é o 'sentido do símbolo' (symbol sense), como diz Arcavi (1994), ou seja, a capacidade de interpretar e de usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas. Ou seja, no pensamento algébrico dá-se atenção não só*

aos objetos mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possíveis de modo geral e abstrato. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover este raciocínio é o estudo de padrões e regularidades. (2006, p. 7)

Assim pode-se dizer que para PONTE o trabalho com álgebra deve desenvolver no aluno capacidade de manipulação de símbolos, capacidade de interpretá-los dentro de determinadas situações, determinados contextos – matemáticos ou não – tal que ele pense genericamente, perceba regularidades em estruturas e expressões matemáticas, bem como estabeleça relações entre grandezas. Ou seja, este autor considera a álgebra, a atividade algébrica e o pensamento algébrico de forma bastante ampla.

FALCÃO (2003) considera um "Campo Conceituai da Álgebra", no qual esta área matemática tem função representacional e utilitária – ferramenta para resolução de problemas. Abaixo há uma reprodução de um quadro que ele apresenta sobre a atividade algébrica:

Atividades em Álgebra	
Ferramenta representacional	Ferramenta de resolução de problemas
Modelização: captura e descrição dos fenômenos do real. Generalização: passagem de descrições específicas, ligadas a um contexto, para leis gerais.	Algoritmos, regras sintáticas, prioridade de operações, princípio da equivalência entre equações.
Função: explicitação simbólica de relações elementares.	
Generalização: passagem de descrições específicas, ligadas a um contexto, para leis gerais.	
Elementos básicos do campo conceituai algébrico	
Números, medidas, incógnitas e variáveis, regras de atribuição de símbolos, gama de acepções do sinal de igual, trânsito entre formas de linguagem.	Operadores, sintaxe, prioridade de operações, princípio da equivalência, conhecimentos-em-ação vinculados a experiências extra-escolares de compensação e equilíbrio, fatos aritméticos instrumentais (ex: elemento neutro da adição).
Quadro 1: elementos básicos de caracterização do campo conceitual da Álgebra (a partir das contribuições de F.G. Bodanskii , G. Vergnaud e Da Rocha Falcão e colaboradores).	

(FALCÃO, 2003)

Desta forma pode-se considerar um campo conceitual das equações do primeiro grau em que vários conceitos estão envolvidos: o próprio conceito de equação, conceito de igualdade e do símbolo "=", unidade de medida – uso das mesmas unidades de medida dentro de determinando problema e contexto – que pode ser chamado de "critério de homogeneidade" e a operação com os sinais e símbolos independente do contexto (LINS e GIMENEZ, 1997).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) consideram, nos indicativos e orientações sobre o ensino de matemática no Ensino Fundamental, que o estudo da álgebra constitui um espaço/momento bastante propício e significativo de abstração e generalização, bem como pode possibilitar a aquisição de um instrumento/recurso para resolver problemas. Desta forma, o professor teria que possibilitar ao aluno o reconhecimento das diferentes possibilidades da álgebra: generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis e outros. Solucionar problemas utilizando equações e inequações diferenciando variáveis e incógnitas, e compreender as regras para resolução de uma equação, aquilo que alguns designam como sintaxe, também é sugerido (PCN, 1998, p.115).

Uma questão interessante a ser observada é o que o estudo da álgebra é indicado como um dos itens do bloco de conteúdos Números e Operações, sendo que não é indicada uma seqüência linear de conteúdos a serem estudados em cada um dos ciclos. Na verdade o que ocorre é que os PCN abrem espaços para várias possibilidades de estruturação dos conteúdos matemáticos para os dois últimos ciclos dos Ensino Fundamental, indicando que elas dependem mais dos conhecimentos já construídos pelos alunos do que por uma estrutura linear elaborada com base em uma seqüência lógica matemática ou com a idéia de pré-requisito (PCN, 1997).

De acordo com a linha metodológica escolhida e sugerida pelos PCN, a resolução de problemas, o principal caminho para levar os alunos a construir noções algébricas é a utilização de situações-problema que possibilitem a observação de padrões de regularidade e o estabelecimento de relações entre objetos, entes geométricos e outros. Desta forma o estudo da álgebra não se reduz a simples manipulações de expressões e algoritmos automaticamente/mecanicamente. Mesmo assim também se encontra nesse documento orientações a trabalhar a sintaxe construída pelo próprio aluno em relação às letras (generalizações, variáveis ou incógnitas) à sua maneira, propiciando-lhe conceber a álgebra como uma linguagem com regras específicas: o cálculo algébrico. O argumento é que este procedimento é significativo para que o aluno perceba que é proveitosa, em determinadas situações, a transformação de uma expressão algébrica em outra equivalente, quando da solução de algum problema.

Contudo, mesmo abordando o assunto desta maneira, os PCN não determinam o que deve ser considerado como Álgebra, mas indicam algumas possibilidades de entendimento da mesma:

- Álgebra como aritmética generalizada e generalização das relações entre grandezas;
- Álgebra como o estudo das equações e inequações com letras;
- Álgebra como cálculo algébrico (PCN, 1997).

Observe que são maneiras muito parecidas de entender Álgebra, mas cada uma com suas peculiaridades e pressupostos que mostram formas distintas de entender esta área da matemática, pelo menos quanto ao seu ensino e aprendizagem na escola – Ensino Fundamental.

Como já afirmado anteriormente, em geral são estas as formas de entender a álgebra as quais são assumidas por autores de livros didáticos e as formas de entender a educação algébrica, o que indica quanto os PCN influenciam autores na elaboração de suas propostas de trabalho.

É interessante notar que são as relações identificadas pelos alunos entre cada forma de entender a álgebra e suas relações com outros objetos e acontecimentos que tornam possível a construção de significados para os "conteúdos algébricos", o que proporciona a aprendizagem (PCN, 1997).

Pode-se notar que os pontos comuns nestes autores e parâmetros dizem respeito ao que LINS e GIMENEZ chamam de "coisas da álgebra": equações, funções, cálculo com letras, expressões com letras, etc. Entretanto, sobre o que seria a álgebra ou a atividade algébrica não há consenso, pois há distintos pressupostos subjacentes às concepções indicadas anteriormente (1997).

Segundo MICOTTI (1999) o processo de ensino e de aprendizagem da matemática engloba muitos elementos: concepções de professores e alunos, práticas e teorias, conceitos e procedimentos matemáticos, metodologias e métodos, interação entre aluno e professor dentro da sala de aula, objetivos da escola, entre outros.

O ensino tradicional (como se costuma denominar) é caracterizado por promover a transmissão do saber que o professor já construiu em sua história acadêmica (MICOTTI, 1999). O que afirma-se aqui é que o ensino é tomado, nesta ótica, como o processo de transmissão de informações em aulas. A aprendizagem, por sua vez, é a gravação (memorização/decoração) das informações transmitidas – o que por si não garante a compreensão. O professor é tido como um simples transmissor de dados e os alunos como seus receptores, ou seja, são entendidos, conforme afirma LINS, como pessoas que precisam "completar" seus conhecimentos ou "corrigir" suas concepções errôneas (1999). Há que se notar que pensando desta forma o professor e o livro didático são muito próximos, têm a mesma função: transmitir dados.

Atualmente, conforme MICOTTI, existem novas propostas pedagógicas que "[...] acentuam a interação do aluno com o objeto de estudo, a pesquisa, a construção dos conhecimentos para o acesso ao saber."(1999, p. 158) Para esclarecer, visto que estas propostas pedagógicas envolvem idéias sobre as incumbências da escola e do professor, sobre o que é o *saber* e o que o diferencia de uma *informação*, faz-se necessário um aparte sobre o que, neste trabalho, se entende a cerca de **educação**, **escola** e **saber**.

Entende-se a escola como uma instituição social que visa educar os indivíduos potencializando suas capacidades para a vida social, segundo parâmetros definidos pelo grupo. Não há necessidade de aqui prolongar essa discussão, o importante é que estes parâmetros são dados exteriores ao indivíduo, os quais, de alguma forma, ele tem que incorporar.

Considerando que "A informação é um dado que se encontra no mundo objetivo, exterior ao indivíduo "(MICOTTI, 1999), pode-se entrar em contato com estes dados de diversas maneiras: visualmente, através do tato, da audição, e outras. Além disso, uma mesma informação pode se apresentar por sinais diferentes dentro de uma mesmo canal. Por exemplo, uma mesma informação visual pode estar em um texto escrito ou em um gráfico. Assim a informação tem uma existência própria que não depende de um *receptor de informações*: livros, livros didáticos, filmes, gravações de áudio, sinais e arquivos digitais, etc. Mas se uma pessoa, um indivíduo, não entra em contato com a informação, o que lhe permitiria interagir com ela e interpretá-la de acordo com suas concepções, essa informação, para esse indivíduo, não proporciona conhecimento.

O conhecimento, nesta ótica, é subjetivo, próprio de cada indivíduo e de sua interação com o objeto portador da informação e com a própria informação. Esta interação ocasiona uma produção individual de significados e a construção de conceitos. “Conhecimento é o resultado de uma experiência pessoal com as informações. Ele é subjetivo, relaciona-se com as vivências e as atividades de cada pessoa...”(MICOTTI, 1997 p. 155).

O saber, além da dimensão individual, tem a dimensão social, coletiva, pois é gerado quando o conhecimento é confrontado com os saberes de outros. Assim, o saber pode ser registrado em um livro, em um computador, como uma informação, mas também é conhecimento de pessoas que o perceberam e o socializaram (MICOTTI, 1999).

Mesmo com a distinção feita acima, informação, conhecimento e saber estão sempre relacionados, uma vez que uma informação não se transforma em conhecimento sem que alguém se dê conta de sua presença. Por outro lado, como o conhecimento é experiência individual, baseada na relação direta da pessoa com o objeto de conhecimento e de sua interpretação pessoal, ele somente será aceito como saber após análise rigorosa da interpretação individual por outros do grupo. Por isso, como MICOTTI (1999) afirma, no saber prepondera o social, o coletivo, sendo essa sua principal característica.

Aqui é que entra a escola, como uma instituição social que deve propagar o saber através de suas ações e de sua organização. Pensando desta forma, a escola tem que criar espaços e momentos para a interação entre os indivíduos e as informações relacionadas aos saberes reconhecidos socialmente como pertinentes, necessários ou importantes. É nesta instituição que o professor geralmente desenvolve sua atividade docente, que sempre se dá tendo pressupostos subjacentes, como os que acima foram expostos.

2.1. INICIAR O ESTUDO DA ÁLGEBRA

Tradicionalmente o início do estudo da álgebra tem sido deixado para o terceiro ciclo ou para o quarto ciclo, quando se introduz as expressões algébricas. Nota-se facilmente este fato em livros didáticos. Porém existem algumas propostas que divergem desta forma de introduzir os alunos à álgebra.

Os PCN afirmam que “A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra.” (p. 68, 1997) Essas generalizações advém das relações funcionais entre números e da observação de padrões em seqüências numéricas por parte dos alunos. Assim, estes podem sentir necessidade de uma representação genérica de propriedades dos números que observam, uma representação algébrica. Ou seja, os PCN indicam que o estudo dos padrões aritméticos – também os geométricos – proporcionam o início do desenvolvimento do pensamento algébrico (1997).

Estes parâmetros orientam que o professor valorize os procedimentos e relações diversos construídos pelos alunos até o terceiro ciclo. A partir do quarto ciclo a formalização de registros e procedimentos deve ser adotada com base no que foi desenvolvido anteriormente pelos estudantes, e um estudo mais detalhado ganha espaço tornando o ensino de técnicas também possível (PCN, 1997).

É interessante notar que quando estão sendo abordados os conteúdos e processos referentes à aritmética vários elementos, símbolos e operações utilizadas na álgebra são abordados aritmeticamente. Uma situação citada por LINS e GIMENEZ (1997) é interessante para a reflexão sobre este aspecto: se para a conta (5+5+5)/3 uma criança, pode ser uma do segundo ciclo, disser que o resultado é cinco, ela estará pensando e agindo algebricamente? Segundo os autores é possível que sim, pois ela pode estar considerando, para resolver a questão, que se fossem quatro cincos divididos por quatro, o resultado seria também cinco, e que se fossem cem cincos divididos por cem, o resultado seria cinco, e assim por diante. Esta poderia ser uma atividade algébrica, mesmo que a criança não representasse a situação com um expressão algébrica, "com letras".

Desta forma estes autores indicam que as atividades algébricas podem ser trabalhadas desde os primeiros ciclos do Ensino. Segundo suas pesquisas os resultados são positivos e as crianças são capazes de produzir, ou melhor, atribuir significados a atividades, caracterizando que utilizam um pensamento algébrico (LINS e GIMENEZ, 1997).

2.2. EQUAÇÕES E O SINAL IGUALDADE "="

Esta seção tem por objetivo apresentar as grandes mudanças da forma de pensar e entender o sinal de igualdade "=" que ocorre durante o caminhar escolar da criança. Geralmente, talvez devido à forma como é organizado o currículo de matemática na escola e seu programa de ensino, cria-se uma dicotomia entre aritmética e álgebra apresentando-se primeiro idéias e entes aritméticos isoladamente deixando-se os elementos algébricos para uma suposta fase em que o desenvolvimento do aluno já *suporta tão complicada área da matemática* (LINS e GIMENEZ, 1997).

Este tratamento da matemática, ou melhor do ensino da matemática – áreas estanques – não propicia o estabelecimento de relações entre conhecimentos já construídos e conhecimentos novos, até mesmo desfavorece atitudes autônomas por parte dos alunos frente ao universo matemático.

No estudo da aritmética o símbolo "=" é utilizado em geral para indicar o resultado de uma operação, ou seja, o que vem após o sinal de igualdade é o resultado da operação que vem antes do sinal: 4 + 5 = 9; 125 – 70 = 55; 14 x 83 = 1.162; 714 ÷ 17 = 42 ou 714 : 17 = 42. Também é utilizado para indicar a equivalência de frações: 4/8 = 1/2. É muito raro a utilização deste símbolo em outras situações ou com significado diferente dos das situações indicadas acima. Pode-se ainda citar que em alguns casos o sinal "=" é utilizado para indicar que objetos desenhados são iguais ou representam o mesmo objeto. Uma exemplo disso é a representação gráfica do *Material Dourado* em livros didáticos mostrando que uma barra – dez unidades – é igual a dez unidades separadas.

Com a introdução da álgebra, há várias alterações de sentido dos símbolos também utilizados na aritmética. Na verdade o que ocorre é a utilização simultânea de distintos significados para os mesmos símbolos. Como afirma PONTE,

> *Sublinha-se constantemente que a Álgebra envolve uma forte simbolização. Na verdade, a simbolização começa desde logo na Aritmética:*
> *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, +, -, x, :, =,* 2^3
> *Álgebra acrescenta novos símbolos e envolve uma mudança de significado de alguns dos símbolos existentes:*
> *Novos símbolos: x, y, <, >,* $\leftrightarrow$*, {...*
> *Mudança de significado: =, + ...*
> *Símbolos para operações abstratas:* θ, σ, ω, φ, μ, η, λ.... (2006, p. 6)

É importante ressaltar que estas alterações são sutis e, por isso, razão de dificuldades para o aprendizado das equações.

Numa expressão aritmética como 9 + 2 = __, o sinal de adição no meio dos dois números indica que estes devem ser somados, porém numa expressão algébrica como 4x + 3 = 11 o sinal de adição não indica que o 4 e o 3 devem ser necessariamente somados. Desde de que seja desconhecido o valor numérico de x, o sinal de adição significa que 2x é igual a 5 subtraído de 13, ou simplesmente que tem que se subtrair 5 de 13. Isto é, numa equação símbolos operatórios podem ter significado distinto do significado aritmético – efetuar a operação que eles mesmos indicam (KIERAN, 1995).

Uma discussão feita por USISKIN (1995) sobre a diversidade de maneiras de se entender uma variável também indica como o sinal de "=" pode assumir diferentes significados em diferentes expressões que aparecem em diferentes contextos, ou seja, as possibilidades de sentido que este sinal pode ter:

1) $A = LW$

Indica, representa e/ou traduz uma fórmula, a saber, a área de um retângulo que no Brasil se costuma indicar por $A = b.h$ (base vezes altura). Nesta situação o sinal "=" assume o sentido de "cálculo a fazer" para saber qual a área do retângulo;

2) $20 = 5x$

É uma equação a resolver: precisa-se encontrar o valor de "x" para que a igualdade seja verdadeira;

3) $\sin x = \cos x \tan x$

Indica uma identidade, ou seja, a igualdade é sempre verdadeira independente dos valores de x;

4) $1= n(1/n)$

Indica uma propriedade dos números inteiros.

5) $y = kx$

Indica uma equação ou função de proporcionalidade direta. Não é para resolver. O sinal "=" representa a existência de uma relação entre os demais símbolos da expressão, os quais na maioria das vezes representam grandezas. (USISKIN, 1995)

A discussão feita acima é importante uma vez que possibilitar esta visão ao aluno pode torná-lo capaz de analisar as diversas situações e contextos e notar os sentidos do sinal de igualdade em cada um deles. Pode até haver outros sentidos peculiares atribuídos pelos próprios alunos. Porém o que ocorre na prática é que esta diversidade de sentidos se transforma em dificuldades, em obstáculos à aprendizagem, se um trabalho adequado não for desenvolvido pelo docente. Se o aluno não percebe esta diversidade, torna-se difícil que um sentido algébrico para o sinal de igualdade seja assumido por ele.

3. O MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS (MCS)

LINS pondera que " o aspecto central de toda aprendizagem – em verdade o aspecto central de toda cognição humana – é a produção de significados." (1999, p. 86) No intuito de considerar uma produção de significados para a álgebra, LINS (1999) propõe um caminho epistemológico baseado no Modelo dos Campos Semânticos, sua elaboração teórica.

Este modelo teórico tem bases nos seguintes elementos: conhecimento, significado, sujeitos (interlocutores), estipulações locais (que o autor chama de núcleos), objetos e atividades.

Como indicado anteriormente, de acordo com este modelo teórico, "conhecimento é uma crença-afirmação junto com uma justificação que me autoriza a produzir aquela enunciação: conhecimento é algo do domínio da enunciação [...]"(LINS, 1999, p. 88). Assim o conhecimento pertence ao domínio da fala, não a um texto não enunciado.

Da mesma forma que para Micotti, no Modelo dos Campos Semânticos "não há conhecimento em livros enquanto objetos, pois ali há apenas enunciados. É preciso a enunciação efetiva daqueles enunciados para que eles tomem parte na produção de conhecimentos"(LINS, 1999, p. 89). Essa enunciação é carregada do caráter social do conhecimento, pois é uma enunciação de alguém para alguém.

Por este modelo, como afirma LINS[1], "significado é a relação que se estabelece entre uma crença-afirmação e uma justificação para ela no momento da enunciação" (Apud LANGER, 2004, p. 42-43), em determinadas situações, em determinadas atividades. Sendo assim, o "[...] significado é o conjunto de coisa que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se *poderia* dizer, e, sim, *o que efetivamente se diz* no interior de uma atividade. Produzir significado é, então, falar a respeito de um objeto." (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 145-146) Pensando assim,

---

[1]LINS, R. C. Álgebra e Pensamento Algébrico na Sala-de-Aula. **A Educação Matemática em Revista**. São Paulo, n 2, ano II, p. 26-31, 1º Sem. 1994.(a)

produzir significados infere produzir conhecimento. Esse processo interno (pessoal) de justificação de afirmações é uma produção de significados cujos sujeitos, no âmbito educacional, são alunos e professores. Quando fala-se algo de um determinado texto e estabelece-se relação entre o que se afirma e sua justificação, está-se produzindo significado para o texto. Esta produção acontece quando conceitos são relacionados pela pessoa em um dado contexto interno ou externo ao indivíduo.

Como conhecimento é crença-afirmação com justificação para o que foi afirmado, pode-se se perguntar, como fez LINS: “Mas as justificações não precisam elas próprias ser justificadas?” (1999, p. 87) A resposta é não, pois este processo de justificação exige relacionamento de idéias, demanda legitimação por meio do que LINS (1999) denomina de *estipulações*, as quais são consideradas como verdades locais para justificar afirmações sobre a situação na própria situação. O conjunto das estipulações locais que estão sendo consideradas numa determinada atividade é denominado núcleo por Lins. “Estas estipulações locais, com relação as quais se produzem significados, são sempre constituídas como tal dentro de atividades, e como parte do processo que é esta atividade.” (LINS, 1999, p 87). É necessário reafirmar: núcleos funcionam como elementos de legitimação das afirmações dentro da atividade. Mesmo transparecendo que justificações indicam explicações para afirmações, o que prepondera nelas é empregar legitimidade ao que se afirma.

Avaliando as considerações acima, tem-se: para justificações diferentes para a mesma afirmação, tem-se diferentes significados e, por conseguinte, diferentes conhecimentos são produzidos. Desta forma, para indivíduos diferentes, diferentes conhecimentos podem estar sendo produzidos mesmo quando afirmam o mesmo (LANGER, 2004). Daí a necessidade de expor as justificações para cada uma da afirmações.

Para exemplificar o que está sendo discutido acima, pode-se pensar na utilização de balanças de dois pratos para dar significado a certas equações. Uma estipulação local nesta atividade que pode ser considerada é que acrescentando-se ou retirando-se pesos iguais de ambos os pratos da balança o equilíbrio da balança se mantém. Não se tem necessidade de provar esta afirmação, embora seja possível produzir uma justificação física para este fenômeno, pois dentro de uma atividade envolvendo procedimentos de resolução de equações a justificação descrita acima é uma verdade local que indica possibilidades de ações. O uso da balança de dois pratos como recurso didático é amplamente utilizado em livros didáticos, por isso será dedicada uma seção posterior para este assunto.

Cabe aqui ponderar sobre um pressuposto que tem que ser considerado no Modelo dos Campos Semânticos: quando uma pessoa fala, ela fala para alguém entendendo que este alguém produziria a mesma fala com as mesmas justificações que ela, que está falando, produz, ou seja, existe "um interlocutor" considerado pelo autor da fala, autor da enunciação. Da mesma forma quem ouve, lê, entra em contato de alguma forma com o enunciado, o faz considerando um alguém específico como autor da enunciação, e é sobre o que esse interlocutor diria que quem lê produz significado para a enunciação. Assim, a partir do momento em que *interlocutores* são compartilhados se tem um *espaço comunicativo* onde significados são compartilhados (LINS, 1999).

Há que se salientar que os *interlocutores*, tanto para autores quanto para leitores, não são pessoas físicas, mas sim construções imaginárias tanto de quem enuncia quanto de quem lê o enunciado. LINS (1999) frisa que um interlocutor é o um ser cognitivo que não pode ser confundido com um ser biológico, físico. É alguém constituído por outro ser cognitivo que enuncia ou lê um enunciado.

O que o Modelo dos Campos Semânticos nos indica com respeito aos livros didáticos é que estes devem, antes de qualquer coisa, tentar criar um espaço comunicativo com os leitores, principalmente com os alunos. "...o material para a sala de aula deve servir, antes de tudo a este propósito." (LINS, 1999, p. 86)

Como afirma LANGER, baseando-se na dissertação de Viviane Cristina Almada de Oliveira[1], "fica evidente que ao se depararem com textos de livros didáticos, as pessoas produzem significados que não são os do matemático, mas que as tornam capazes de falar a partir daqueles textos." (2004, p. 45)

O que foi afirmado no parágrafo anterior indica que a leitura do livro didático pode propiciar ao aluno conhecimento – na forma aqui discutida – que influenciará diretamente as atividades em sala de aula. Além disso o próprio Modelo dos Campos Semânticos indica ao professor a necessidade de ouvir mais seus alunos, de deixá-los se manifestar a respeito do que leram, ouviram, estudaram, etc.

O livro didático tem que proporcionar aos seus leitores contatos variados com um mesmo conceito matemático, com abordagens distintas, disparadoras de questionamentos e de procura de justificações para as afirmações nele existentes.

---

[1]OLIVEIRA, V. C. A. de. **Sobre a Produção de Significados para a Noção de Transformação Linear em Álgebra Linear**. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: Unesp, 2002.

Algumas formas de justificar podem ser descritas e desenvolvidas mas sem caráter de fechamento, de encerramento de questão, mas sim de possibilidade. Este é um aspecto importante para que ocorra engajamento do leitor no processo de interpretação e justificação de procedimentos, afirmações e conteúdos matemáticos.

Tendo em vista o panorama apresentado acima, é justificável inferir que se deve considerar o conhecimento que o aluno já tem sobre igualdades, manipulações e operações aritméticas, quando do ensino e aprendizagem das equações algébricas. Também, cabe um questionamento sobre como os livros didáticos abordam igualdade e equações em livros destinados especificamente o terceiro ciclo, faixa de ensino onde geralmente se inicia a educação algébrica tradicionalmente, o que será discutido a seguir.

4. IGUALDADE E EQUAÇÕES EM LIVROS DIDÁTICOS

Os livros didáticos de matemática destinados às sextas séries do Ensino Fundamental – segundo ano do terceiro ciclo – em geral introduzem o estudo das equações do primeiro grau. Atualmente estes livros, ou melhor, as coleções de livros didáticos se apresentam em duas modalidades: uma indicada aos estudantes (alunos) e outra destinada aos docentes, esta indicada por costume de "Manual do Professor". Há grandes diferenças entre as apresentações de cada modalidade – entre o livro destinado aos docentes e os destinados aos discentes.

Intenta-se aqui uma análise limitada às abordagens feitas por autores de livros didáticos quanto à álgebra, mais especificamente às equações e às igualdades, tentando entender os significados propostos pelos autores e as relações estabelecidas entre os conteúdos.

Resolveu-se analisar dois livros avaliados pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) no Programa do Livro Didático, por isso se faz interessante verificar o que foi observado a respeito de cada livro quanto à introdução da álgebra, neste documento. Como estas obras foram escritas ou revisados após os PCN entrarem em vigor, acredita-se que estes parâmetros devem os ter influenciado os autores na formatação, na escolha dos conteúdos e metodologia apresentados. Por isso, uma terceira obra cuja edição ocorreu antes da publicação dos PCN será analisada. Inclusive uma versão mais atual deste livro já existe e foi avaliada pelo Programa do Livro Didático positivamente em termos gerais. Outro motivo pelo qual ele está sendo abordado aqui é por que as autoras se formaram em matemática pela Universidade Federal do Paraná e lecionaram nas redes Municipal e Estadual de Ensino da região de Curitiba, fator que pode ter ocasionado abordagens e significados peculiares na apresentação da obra.

Também busca-se indicar quais os recursos utilizados para a explicação e introdução das equações e identificar como é feito o relacionamento entre igualdade e equações, bem como o trabalho com o sinal "=", o principal questionamento até aqui. Claro que as análises serão feitas de acordo com a discussão desenvolvida nas seções anteriores deste trabalho, tendo em vista o Modelo dos Campos Semânticos, ou seja, a produção de significados dentro de atividades. Desta forma, tentar verificar se as obras intentam formar um espaço comunicativo – no sentido considerado na terceira seção: O Modelo dos Campos Semânticos – com os leitores é um dos objetivos aqui.

4.1. Matemática na vida e na escola, de Ana Lúcia Gravato Bordeaux Rego, Cléa Rubinstein, Elizabeth Maria França Borges, Elizabeth Ogliari Marques e Gilda Maria Quitete Portela (BORGES et al, 1999)

Há duas versões deste livro, uma destinada aos professores e outra destinada aos alunos. Na primeira consta a versão para os discentes acrescida de respostas aos exercícios e dicas aos professores, além de uma seção inicial que as autoras denominam "Manual do Professor", na qual mostram sua posição quanto à Educação Matemática, citando os PCN e Constance Kamii.

As autoras indicam na "Apresentação dos conteúdos" que um dos objetivos que têm na unidade "Introdução à álgebra" – unidade 9, da página 189 à página 222 – é a construção de uma linguagem algébrica. Deixam claro que a resolução de problemas é a metodologia proposta para o estudo da álgebra a partir da observação de padrões, de regularidades e relações funcionais entre os números. (BORGES et al, 1999).

Ainda na versão destinada aos docentes, nota-se que comentários e dicas intentam incentivar o docente a desenvolver atividades dentro da sala de aula, bem como o orientam quanto às possíveis formas de abordar assuntos de importância social, temas transversais ou relacionados a outras disciplinas a partir dos conteúdos matemáticos ou da maneira inversa, partir daqueles e então abordar os conteúdos matemáticos relacionados.

Este livro, ou melhor, a coleção a qual este livro pertence, é muito elogiada no Guia do Livro Didático. Sua proposta metodológica é classificada como significativa. Quanto à álgebra, há duas afirmações: 1) Na obra a álgebra é articulada com outros campos da matemática em vários momentos e 2) "O trabalho com álgebra é também cuidadoso e realizado de forma gradual." (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA, 2005, p.132)

No geral não há mais elementos sobre álgebra, equações ou igualdades comentados no Guia. As demais observações são gerais, sem detalhes quanto a conteúdos. Apesar de restritas, as observações deste Guia são pertinentes.

Voltando à obra analisada, a unidade "Introdução à álgebra" tem seu início na página 189 e termina na página 222. Antes de afirmar qualquer coisa sobre equações ou expressões algébricas, são propostas atividades sobre seqüências de figuras geométricas, tabelas com seqüências numéricas, figuras com regularidades. Nestas atividades algumas letras são utilizadas sutilmente para representar um número qualquer ou uma posição. Aos poucos os leitores são incitados à escrever expressões que representem e descrevam uma determinada seqüência de números utilizando letras. A indicação de igualdades pela utilização do sinal "=" é implementada sem uma retomada ou discussão do sentido aritmético deste símbolo, já conhecido pelos estudantes. Com isto as primeiras equações algébricas são apresentadas.

Pelas afirmações iniciais pode-se inferir que há uma grande influência dos PCN na elaboração deste livro, tanto quanto à metodologia quanto à exploração e análise de padrões para iniciar o aluno leitor em álgebra.

As letras utilizadas tem sempre um sentido dentro da atividade, um significado direto e restrito. Por exemplo, P é utilizado numa equação para indicar o **P**reço do pão e N para indicar o **N**úmero de pães.

Vários exercícios interessantes são apresentados em quantidade adequada, sem caráter de repetição. Acrescentam aspectos à aprendizagem. Cabe aqui uma observação importante: esta não é a primeira vez que nesta obra letras são utilizadas para indicar números ou medidas. Em seções anteriores, por exemplo, algumas atividades introduzem letras com valores predeterminados pelas autoras. Porém isto não é retomado, o que indica perda de um possível significado para expressões algébricas que os leitores já podem ter produzido.

Interessante notar que até aqui não há menção à formalização. O trabalho é todo feito sobre situações intuitivas dentro de atividades com linguagem informal, diferente da matemática acadêmica. Nos termos do Modelo dos Campos Semânticos, até aqui, o significado matemático para atividades algébricas já pode estar sendo construído pelos alunos leitores, mas ainda não foi indicado pelas autoras como uma possibilidade.

As autoras propõem operações com letras a partir de cálculos de áreas de figuras planas, retângulos e quadrados, relacionando com as propriedades das operações com números. Mais uma vez as letras têm significado dentro de uma situação. Algumas instruções sobre aspectos da escrita algébrica são apresentadas. Na seqüência mais alguns exercícios são propostos, os quais novamente introduzem novos aspectos não trabalhados anteriormente, a saber, a possibilidade de entender uma letra numa expressão matemática como um variável, visto que antes elas apareceram somente como incógnitas.

A próxima seção indica que será iniciado o estudo das equações, o que é feito por meio de atividades nas quais números desconhecidos são requisitados. Um orientação quanto ao uso das operações inversas para a resolução das situações propostas é feita. Logo após as autoras definem: "***Equação*** é uma sentença matemática que representa uma igualdade que tem pelo menos um número desconhecido representado por uma letra." (BORGES et al, 1999, p. 201) Pode-se perceber que os termos matemáticos são introduzidos nessa seção com os sentidos matemáticos que têm. A própria definição de equação adotada pelas autoras indicam este fato. Essa distinção entre as formas de entender os símbolos e expressões de acordo com a atividade proposta está de acordo com a concepção de LINS e GIMENEZ (1997) que afirmam ser necessário mostrar aos aprendizes que o significado matemático é distinto e independente de outros significados produzidos para a álgebra, embora isso não exclua a possibilidade de relacionar as formas de pensar e justificar ações, procedimentos e afirmações.

Há uma preocupação das autoras em frisar que para uma sentença matemática ser uma equação é necessário que tenha "letras". Assim é apresentada uma lista do que pode ser entendido como equação e o que não pode deve ser entendido como tal. Por exemplo, $6 + 11= 17$ não é uma equação segundo o que as autoras propõem. Aqui pode-se questionar qual o sentido da igualdade acima e no que ele se difere do sentido da expressão $6 + x = 17$. Após descoberto o valor de x, esta expressão tem o mesmo sentido a anterior? Por que então dizer que uma é equação e outra não? Essas são discussões que poderiam ser abordadas pelas autoras. No mínimo os alunos leitores poderiam se questionar e relacionar o que leram e estudaram com as operações aritméticas.

Voltando a definição de equação, é possível distinguir pontos interessantes nesta abordagem: relaciona-se equações com igualdades, embora de forma restrita; tenta-se partir de situações – designadas de atividades – para se criar um conceito de equação e somente depois apresentar um sentido matemático para elas; há alterações no sentido do sinal "=" o que não é discutido, ao mesmo tempo não há explicação para a diferenciação feita entre equivalências (igualdades) expressas por números e equivalências com o uso de letras, fatores potencializadores de dificuldades de aprendizagem.

É possível que esta definição tenha sido assumida devido a intenção das autoras utilizarem – e propor que os alunos leitores também utilizem – equações para a resolução de problemas em que há algum valor, alguma quantidade, a ser determinada. Isto pode ser verificado nos exercícios propostos nas páginas 204 e 205 (BORGES et al, 1999). Nota-se também que o incentivo à justificação de respostas é feito através dos exercícios. Como estes estão quase sempre relacionados a uma situação, vários significados podem ser dados aos resultados e letras utilizadas, propiciando aos leitores justificar à sua maneira. Este é um aspecto fundamental para se estabelecer uma espaço comunicativo com os alunos leitores (LINS e GIMENEZ, 1997).

Na página 205 uma balança de dois pratos é apresentada (BORGES et al, 1999). Num texto em forma de diálogo com o leitor, o livro pergunta ao leitor se ele conhece este tipo de instrumento de medida e o instrui a conversar sobre a balança com o professor e com os demais estudantes/colegas para que possa tirar suas conclusões. Segue-se um trabalho no campo intuitivo por meio de diálogo com questionamentos das autoras para o leitor. Importante destacar que as respostas não são dadas, não são feitos fechamentos, desta forma é o leitor que dá sentido ao uso deste recurso o relacionando com as equações e operações aditivas e subtrativas, o que faz com que este seja optativo tanto para professores quanto para alunos sua adoção. Por exemplo, é proposto que o leitor explique o que significa uma balança estar equilibrada.

É levantada a possibilidade de relacionamento entre balanças e equações da seguinte maneira: da mesma forma que se forem acrescentados pesos em ambos os pratos de uma balança em equilíbrio ou se forem retirados pesos iguais de ambos pratos da balança, esta se manterá em equilíbrio, se for adicionado ou subtraído o mesmo número a/de ambos os lados de uma equação, será mantida a igualdade. Explicitamente este é um trabalho de interação entre significados não matemáticos e significados matemáticos para equações equivalentes. Explicitamente porque até os termos, palavras, utilizados são distintos em cada caso, o que conota diferença entre a natureza das ações a serem executadas.

Algumas atividades são apresentadas na tentativa de proporcionar ao leitor a produção de justificações para as operações feitas, para a seqüência escolhida para resolver um problema e para outros. Interessante notar que em algumas resoluções a incógnita é deixada do lado direito do sinal de igualdade, indicando que isto é possível e que também indica resposta para um problema, para uma equação.

Em seguida novos exercícios são propostos apresentando situações muito distintas: balanças de dois pratos, situações de transposição da escrita em linguagem corrente para a escrita algébrica, cálculo de áreas com alguma dimensão não conhecida, resolução de quadrados mágicos e um tipo de exercício com um esquema triangular que com certeza causará muitas dúvidas no aluno até que o mesmo descubra algo que tenha sentido a partir dos dados. Como desafio é interessante visto que as autoras tentam trabalhar com a diversidade de abordagem e sem predeterminação de resultados e ações.

As autoras discutem rapidamente inequações simples e apresentam uma lista de exercícios complementares muito interessantes, com situações novas com elementos novos. Para respondê-los é necessário em geral mais de uma leitura, interpretação dos dados, uso de calculadora, análise de gráficos cartesianos e outros. Os últimos exercícios são mais restritos e desvinculados de contextos, indicando a necessidade de um tratamento algébrico para sua resolução, uma vez que o objetivo é que o aluno partilhe do sentido algébrico, ou seja, que ele atribua um significado algébrico para as equações.

Não há trabalho com o sinal "=" em momento algum da "Introdução à Álgebra" desta obra. A opção das autoras em apresentar pequenos textos ao fim de cada seção buscando registrar o que foi discutido nas atividades anteriores facilitaria a discussão da relação entre os significados aritméticos e algébricos de igualdades.

O Guia do Livro didático afirma que um dos destaques desta coleção é a articulação entre os conteúdos, decorrente do estabelecimento de ligações entre conhecimentos novos e conhecimentos já adquiridos – por abordagens da mesma obra (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DA CULTURA, 2005). Algumas seqüências de números foram apresentadas em capítulos anteriores, tabelas com padrões e relações entre números também, porém em muitas situações o sinal de igualdade foi utilizado sendo relacionado a diversos contextos e operações, contudo não foi abordado na introdução às equações. Desta forma parece que aos alunos leitores um suporte importante para o estudo da álgebra não foi oportunizado, sobretudo quando o livro afirma que igualdades que tenham somente números e sinais de operações não são equações e não explicam os motivos desta distinção.

Contudo, esta foi uma opção das autoras que tomaram um caminho diferente e muito original. O incentivo à interação entre alunos e alunos e alunos e professores, é alcançada de forma muito positiva. A escrita dialógica intencional propicia a manifestação da opinião do leitor, a busca por explicações próprias dentro das situações propostas. Este é um ponto básico para a criação de um espaço comunicativo. Neste sentido é importante comentar que a participação do professor é sempre solicitada pelas autoras – na versão destinada aos docentes – para a efetivação e legitimação dos significados propostos e para as discussões com os alunos.

4.2. Aprendendo Matemática, de José Ruy Giovanni e Eduardo Parente (GIOVANNI e PARENTE, 1999)

Da mesma forma como na obra anterior, há duas versões deste livro, uma destinada a alunos e outra a professores. Esta última contém todos os elementos da outra versão, mais respostas aos exercícios e dicas ao docente. Ao final está incluso o "Manual do Professor" com orientações quanto à introdução e trabalho dos conteúdos, sugestões de leitura e indicativos das referências teóricas adotadas pelos autores.

Os autores deixam bem claro que a metodologia que adotam é a resolução de problemas, porém indicam outras metodologias citando um artigo de Beatriz S. D'Ambrósio que indica a necessidade de se trabalhar com diversas propostas metodológicas para que a matemática seja mais rica para todos os alunos de uma turma (GIOVANNI e PARENTE, 1999).

Comentários sobre o ensino da álgebra neste Manual são restritos. Pode-se notar um destaque a álgebra na proposição de que é necessário relacionar, estabelecer conexões entre as áreas e conceitos matemáticos distintos para uma aprendizagem mais sólida – os autores citam que relacionam cálculo algébrico com cálculo de áreas de figuras planas durante o estudo da álgebra em seu livro, o que denominam de tratamento geométrico dos cálculos algébricos. Os demais comentários são gerais e muito bons (GIOVANNI e PARENTE, 1999).

A unidade cinco do livro é dedicada ao estudo das equações e sistemas lineares. Seu título é "Equações e Sistemas do 1º Grau". Estende-se da página 125 a 169. Há seis seções: 15 – Letras no lugar de números, 16 – Equações, 17 – Equações do primeiro grau com uma incógnita, 18 – Resolvendo problemas, 19 – Equações do primeiro grau com duas incógnitas e 20 – Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. Os autores iniciam cada uma delas com a apresentação de uma situação a qual é analisada e sobre a qual alguns questionamentos são levantados para que as noções e conceitos sejam desenvolvidos.

A seção 15 é muito interessante, pois introduz a notação algébrica convencional, porém o faz apresentando letra como variável, não como incógnita como de costume. A primeira variável é *t* utilizada para indicar a grandeza tempo de trabalho de um encanador. Tradicionalmente costuma-se utilizar como variáveis as letras *x*, *y*, e z. Outro aspecto diferente é que o sinal de igualdade não é utilizado nestas primeiras observações dos autores com expressões algébricas.

Da mesma forma como na obra analisada anteriormente, em situações anteriores desta obra, letras foram utilizada para explicitação de propriedade dos números inteiros, representação de medidas e outros, porém não há retomada destas situações para o estudo das equações algébricas.

Também é feito um relacionamento entre a linguagem corrente e a expressão algébrica correspondente e aqui já são utilizadas as letras "convencionais" para indicar variáveis. Tabelas são montadas para relacionar dados mostrando variações e relações entre grandezas e quantidades, após o que é solicitado que os leitores encontrem uma expressão algébrica que possa representar as relações e operações observadas.

É introduzido um pequeno comentário histórico sobre as contribuições de François Viète ao início da notação algébrica – o uso de letras na escrita matemática – que não acrescenta muito, nem como curiosidade.

Na seqüência os autores se prendem um pouco à nomeclatura de entes algébricos: temo algébrico, termo, coeficiente, parte literal e outros. Logo após duas regras sobre como adicionar termos semelhantes e multiplicar termos algébricos são introduzidas com o auxílio de figuras planas, mais especificamente com a utilização de quadrados de áreas iguais e de lado de medida *x*, organizados de forma que podem ser justificadas expressões como $1x^2 + 3x^2 + 4x^2 = 8x^2$, sem muitas explicações. Este é o primeiro momento que o sinal "=" é utilizado em expressões algébricas. Vários exercícios são propostos em seguida. Não introduzem novos elementos para aprendizagem, somente solicitam que sejam feitas simplificações em expressões algébricas, cálculo de áreas e perímetros de figuras planas. Assim se encerra a seção 15 que não discute igualdades nem o sinal "igual".

A seção 16, "Equações", inicia uma discussão sobre o que é uma equação a partir de dois exemplos em que os autores fazem um paralelo entre a linguagem corrente e a linguagem algébrica. Assim os autores definem equação: "*Equação* é toda sentença matemática expressa por uma igualdade, onde os números desconhecidos são representados por letras. Cada letra que representa um número desconhecido chama-se *incógnita*." (GIOVANNI e PARENTE, 1999, p. 133)

Essa definição limita bastante os significados das letras nas equações. Como o primeiro uso da letras em expressões matemáticas as propunha como variáveis, pode haver confusão por parte do aluno leitor quanto aos conceitos de variável e incógnita. Para exemplificar, há uma equação proposta pelos autores como exemplo na página 133 em que claramente as duas letras que fazem parte delas são variáveis, porém são ditas somente incógnitas, a saber, "3x – 4y = 10" (GIOVANNI e PARENTE, 1999, p. 133).

Mais exercícios são propostos: os primeiros são no estilo siga o modelo, apesar de utilizarem alguns aspectos gráficos; outros exercícios são formulados a partir do uso de balanças de dois pratos e balanças digitais, porém não são feitos comentários ou questionamentos aos leitores sobre como funcionam estes instrumentos, sobre que significados podem ser produzidos. Na verdade não há uma situação, um contexto para o qual o leitor possa criar significados para equações e para igualdades. Os demais exercícios não acrescentam fatores novos.

Os autores dedicam mais algumas páginas para nomear e definir alguns entes matemáticos que aparecerem nas equações relacionadas as idéias de conjuntos – conjunto solução de uma equação, por exemplo. Mais alguns exercícios são propostos, talvez com o intuito de habituar os alunos com os novos elementos definidos anteriormente. Os autores adotam a abordagem por conjuntos para o estudo das equações deste ponto para frente.

Algo novo somente é apresentado quando os autores iniciam a discussão a respeito de equações equivalentes. Diferente do livro didático anteriormente analisado, aqui equações equivalentes são definidas nestes termos: "Duas ou mais equações que tenham o mesmo conjunto solução, relativo ao mesmo conjunto universo, são chamadas de equações equivalentes." (GIOVANNI e PARENTE, 1999, p. 137) Pode-se considerar que não há necessidade desta formalização no início do estudo das equações. De acordo com os PCN esta forma de abordagem pode ser adotada no quarto ciclo do ensino fundamental.

O que deve ser mais valorizado é o estabelecimento de critérios de equivalência entre equações. Isso somente é feito na página seguinte utilizando o recurso da balança de dois pratos, numa tentativa de estabelecer um diálogo com o leitor – na verdade não é dado muito espaço para as produções e reflexões dos alunos leitores – mostrando alguns possíveis significados. Assim dois princípios de equivalência são concluídos após uma simples discussão, a saber: "Princípio aditivo das equações: Adicionando-se ou subtraindo-se um mesmo número aos dois membros de uma equação, obteremos uma nova equação, equivalente à equação dada." (GIOVANNI e PARENTE, 1999, p. 139); e o "Princípio multiplicativo das equações: Multiplicando ou dividindo os dois membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, obteremos uma nova equação equivalente à equação dada." (GIOVANNI e PARENTE, 1999, p. 139)

Note que os autores não se referem à igualdade, ou melhor, à manutenção da igualdade em momento algum nestas descrições dos princípios. Utilizam a palavra equivalente explicar seu sentido ou relacioná-la com igualdade. Este é um reflexo da forma como eles desenvolvem o estudo das equações. É uma opção. Fazem um abordagem por conjuntos bastante formal para esta faixa etária escolar – terceiro ciclo.

Novamente os exercícios desta seção não introduzem algo novo, somente exigem a utilização dos elementos aprendidos nas páginas anteriores, entretanto aqui a lista já é bem menor.

As demais seções não incluem nenhuma discussão ou relacionamento entre igualdades e equações. Os conteúdos já discorridos nas seções anteriores são requeridos na seção de 18 para a resolução de problemas referentes a algumas situações. Na seção seguinte as equações com duas letras são finalmente retomadas. Estas continuam sendo designadas de incógnitas. Os autores nunca utilizam a palavra variável, preferem dizer que equações do primeiro grau com duas incógnitas tem infinitas soluções do tipo (a,b) – par ordenado (GIOVANNI e PARENTE, 1999) – próprio da abordagem por conjuntos.

Tem que se observar que muitos elementos indicados pelos PCN são adotados nesta obra, como a metodologia da resolução de problemas e os temas transversais. A introdução de expressões algébricas e das equações se dá de forma diferente da proposta nos PCN. Os autores não abordam a observação de padrões e regularidades entre números, figuras geométricas ou outros. Esta limitação de abordagens também limita as possibilidades de construção de espaços de interação com o aluno leitor. Desta forma menos leitores podem ser alcançados. Este tende a aceitar e decorar o que está sendo proposto pelo livro e não refletir, pensar sobre os conceitos propostos. Exercícios que não apresentam aspectos novos acabam por confirmar esta tendência.

4.3. Matemática: 6ª série, de Clélia Maria Martins Isolani, Diair Terezinha Lima Miranda, Vera Lúcia Andrade Anzzolin e Walderez Soares Melão (ISOLANI, 1996).

Como já explicitado anteriormente, o objetivo de analisar esta obra é ter contato com um livro didático anterior aos PCN, sem influência do mesmo. Além disso, as autoras lecionaram na região de Curitiba, o que pode as ter influenciado quanto a exemplos, recursos e abordagens mais próximas da realidade – dos aspectos sociais – que se encontra o autor deste estudo.

Na apresentação do livro as autoras deixam claro que pretendem incluir aspectos do cotidiano e incentivar a discussão sobre os conceitos e assunto abordados. Por isso muitos problemas têm várias soluções que, após debatidos, proporcionam a construção de regras e definições matemáticas, algo muito próximo da proposta de Lins e Gimenez para o estudo da aritmética e da álgebra.

A unidade três é dedicada ao estudo das equações, inequações e geometria, por isso é bastante extensa, da página 96 à página 134. É interesse deste trabalho a introdução de “letras” em expressões matemáticas e as relações de igualdade, o que corresponde às primeiras páginas desta unidade.

As autoras iniciam a unidade apresentando vários símbolos e propondo aos leitores que se lembrem dos seus significados. Após apresentam vários símbolos *matemáticos*, quase todos já conhecidos por alunos do terceiro ciclo, e sugerem que os leitores discutam com os colegas e com o professor os significados e funções de cada um deles, inclusive do sinal “=”. Sugerem que seja pensado no uso da calculadora e nos significados dos símbolos nela contidos. Elas têm preocupação em manter uma abordagem aberta incentivando a participação dos alunos e em deixar claro que é possível que símbolos tenham sentidos distintos em atividades distintas.

Esse procedimento é feito por meio de atividades numeradas. Não é apresentado um conteúdo teórico sobre equações e posteriormente exercícios para fixação. Primeiro uma discussão é feita dentro das atividades e aos poucos há uma formalização, ou melhor, uma abordagem matemática para o que foi conversado anteriormente.

Relaciona-se o uso das letras à representação de objetos ou medidas: para objetos ou medidas iguais, letras iguais são utilizadas. Assim, em operações, necessárias em algumas atividades, o sinal de igual ainda permanece com o sentido aritmético de indicar uma resposta., e, neste primeiro momento, temos que 2g é indicado como reposta de uma operação, a saber, 3g – 1g. Desta maneira é resgatado o que já foi trabalhado em aritmética com operações. Claro que as autoras propõem exercícios, porém estes são simples e resgatam o que foi desenvolvido até aquele momento.

Na seqüência as autoras explicam como funcionam balanças de dois pratos relacionando-as às equações e inequações, ponto bem distinto das outras obras que primeiramente desenvolveram todo o trabalho com equações para depois trabalharem as inequações. Nesta atividade um novo sentido para o sinal "=" é introduzido pois agora temos expressões como 2x = 6, em que não mais é necessário operar com as letras. Não é explicitado que o sentido mudou, porém dentro da atividade o próprio aluno pode perceber esta mudança, pois pela proposta desta obra, é necessário que vários aspectos sejam discutidos em sala de aula com colegas e professor, por isso o livro não fecha todas as discussões.

Algo positivo é que após o trabalho com as atividades anteriores, as autoras propõem uma síntese curta sobre o que foi discutido até então.

É solicitado aos alunos uma interessante questão: "O termo eqüi, de origem latina, significa 'igual'. Que outras palavras além de: equivalente, equação, eqüilátero, você conhece que têm este termo indicando igualdade?" (ISOLANI et al, 1996, p.102) Aqui é aberto e dirigido um espaço para a reflexão sobre os possíveis significados das igualdades. Ao analisar palavras que indicam equivalência, igualdade, os alunos leitores podem colocar em jogo os sentidos já produzidos por eles à situações que podem interferir no processo de compreensão das equações. Os contextos em que esta relação é utilizada são determinantes para a produção de significados. Quando se abre espaço para estes significados, aumenta-se as possibilidades de entendimento das equações. O sentido matemático pode ser produzido e coexistir com dos demais sentidos (LINS e GIMENEZ, 1997).

Outra questão importante levantada pelas autoras diz respeito aos sinais “=” e “<” ou “>”: “Qual a diferença entre procurar soluções para a equação e para a inequação?” (ISOLANI et al, 1996, p.102) Esse questionamento recai sobre os significados do que se faz quando se resolve equações e inequações, inferindo uma reflexão sobre os sinais de igualdade e desigualdade. Conforme LINS e GIMENEZ (1997), quando se trabalha a partir de um núcleo, como os princípios de equivalência por uma balança de dois pratos, este estabelece ligações entre afirmações, neste caso a respeito tanto de igualdades quanto a desigualdades. Os significados produzidos interferem diretamente em ambas as situações, equações ou inequações. Isto justifica a escolha de abordar este conceitos matemáticos conjuntamente.

Algumas outras situações são apresentadas envolvendo medidas, figuras geométricas, compras (uso de dinheiro), dentre outras. A nomeação de letras numa equação como incógnita só é feita depois de muito ter sido trabalhado. Para equação as autoras assumem que uma letra é uma incógnita e para uma inequação a letra representa uma variável. Assim, somente equações com uma variável são trabalhadas, o que limita um tanto quanto a gama de significados trabalhados para o sinal “=” e em geral para as igualdades. Porém há um exercício que retoma esta discussão: “Considere **b = c** e a equação **a = b + c**. Neste caso, os valores de “a” serão sempre: 1) a metade do valor de b? 2) o dobro do valor de b? 3) igual ao valor de b?” (ISOLANI et al, 1996, p.119) Contudo, agora o aluno necessita discutir com professores e colegas para entender as mudanças de sentido, pois aqui temos variáveis, numa situação distinta da de quando elas eram apenas incógnitas (valores a serem descobertos através de princípios de equivalência).

Ainda há duas questões importantes a serem comentadas a respeito desta obra. A primeira é que a apresentação inicial das variáveis não indica que valores – números – que podem variar dentro de conjuntos, mas sim objetos e medidas. A segunda é que em seções anteriores as letras já haviam sido utilizadas para representar regras de operações aritméticas, como a propriedade distributiva, associativa e comutativa da multiplicação de números inteiros, e no estudo das potências. Nestes casos as letras eram entendidas como variáveis pelas autoras, porém isso não foi discutido na obra, simplesmente foi afirmado que elas eram números inteiros ou que eram números racionais. Essa seria uma oportunidade para iniciar os trabalhos tanto com incógnitas e variáveis quanto com novos sentidos para as igualdades e o sinal “=”.

Este livro tem uma proposta bastante interessante. Busca manter espaços comunicativos com os alunos leitores e deste entre si e com o professor. É uma abordagem diferente das demais analisadas aqui. A expectativa quanto à abordagem regional não foi correspondida, não que isso seja negativo. Também aqui não é dado muita atenção às igualdades e seu relacionamento com as equações, mas um ponto muito positivo é que as questões são levantadas de maneira rápida em alguns momentos para que os leitores possam refletir sobre conceitos.

4.4. BREVES CONSIDERAÇÕES SOBRE AS ANÁLISES

Há que se inicialmente salientar que esta análise não visou indicar que uma obra é boa e outra não. O que se intentou foi verificar, de maneira descritiva e analítica, de que forma equações e igualdades foram abordadas pelos autores deste livros, tendo como referencial o que foi discutido nas seções anteriores sobre a construção de significados através do Modelo dos Campos Semânticos.

Percebeu-se que há várias formas de abordar equações e formalizar matematicamente por notação e definições os conceitos abordados. Muitos recursos didáticos são utilizados para tanto, o que propicia a configuração de um espaço comunicativo entre autores e alunos leitores.

Se faz necessário frisar que cada um dos livros apresenta no mínimo um aspectos positivo que não consta nos demais, o que indica que nenhum deles pode ser descartado no mínimo para consulta pelos docentes e pelos discentes.

Muitos itens foram comuns às obras aqui analisadas. Como foi interessante observar os recursos didáticos propostos pelos autores, abordaremos a seguir o recurso que mais amplamente utilizados por eles.

4.5. A BALANÇA DE DOIS PRATOS

Um recurso utilizado nos três livros analisados, e em muitos outros não citados aqui, é a balança de dois pratos. Por isso nesta seção busca-se identificar qual a contribuição dela ao ensino e à aprendizagem das equações, considerando-se o que já foi discutido.

A idéia de equilíbrio é o que está sendo colocado em questão com o uso deste recurso para a introdução ou desenvolvimento do estudo das equações. Este instrumento propicia a produção de significados e conhecimentos a partir da estipulação local baseada no equilíbrio: se ambos os pratos da balança estão vazios eles ficam no mesmo nível; o mesmo ocorre quando se colocam objetos de mesma massa em ambos pratos. Logo quando se acrescenta (se coloca) objetos de mesma massa em ambos os pratos da balança em equilíbrio ou se retira dos pratos objetos com a mesma massa, o equilíbrio se mantém.

Esta é uma verdade local, não há necessidade dela ser demonstrada ou provada, porém pode ser constatada através de teste se alguém achar necessário. Neste ponto se torna necessário trabalhar uma forma de representar o que está acontecendo com as balanças tal que a linguagem algébrica seja introduzida. O relacionamento entre as incógnitas e variáveis (letras) e os objetos e a medida de suas massas é por si a produção de significados dentro de um espaço comunicativo desde que os sentidos produzidos seja considerados, ou seja, que as afirmações sejam justificadas.

Também, a respeito deste mesmo núcleo, pode-se trabalhar com desigualdades algébricas. A diferença entre as massas dos objetos em pratos distintos da balança causa desequilíbrio, um prato fica mais alto que o outro. Neste caso o desequilíbrio se mantém ao acrescentar-se objetos de mesma massa em ambos pratos ou se retirar objetos de mesma massa de ambos os lados.

Apesar da grande contribuição, o uso de balanças para representar uma equação pode ser visto como artificial pelos alunos. Segundo LANGER (2004), em sua, pesquisa para dissertação de mestrado, as entrevistas que fez com alunos escolares indicaram que a maior parte deles não conhecia a tal "balança de dois pratos", mas sim outros modelos, digitais em geral. Além disso há outro fator a ser considerado: por que a balança de dois pratos torna duas "quantidades" iguais? Por que colocando objetos com massas *"iguais"*, simultaneamente em ambos os pratos, mantemos o equilíbrio do sistema?

Há necessidade se pensar sobre as possíveis respostas a estas perguntas: um físico utilizaria a terra como referencial e diria que com esta ação o sistema de forças e torques teria resultantes nulas, por isso a quantidade de massa em ambos os pratos seria igual. Mas qual a explicação que um aluno de sexta série formularia para este evento? A explicação física parece complicada, além de ser originada da própria idéia de igualdade e manutenção do equilíbrio. Isto pode indicar que o artifício da balança pode não clarear a aprendizagem do novo conceito ou que é necessário discutir com os alunos sobre este assuntos, como foi feito nas primeira e na terceira obra didática analisadas nas seções anteriores.

Pode-se entender que o que se busca ao introduzir o estudo das equações desta forma é utilizar um conceito já incorporado à estrutura cognitiva dos alunos para a aprendizagem de novos conceitos ou é utilizar uma metáfora com elementos mais intuitivos do que os das expressões da forma ***primeiro termo = segundo termo***. Como visto anteriormente, a primeira opção raramente ocorre com a utilização da representação de balanças de dois pratos no desenvolvimento do conceito de equação. Resta-nos a segunda opção. Mas essa metáfora pode ser vislumbrada pelos alunos desde que o processo explicativo seja completo, uma vez que não têm, em geral, conhecimento prévio do funcionamento deste tipo de balança, o que nos remete ao problema da primeira opção.

LINS e GIMENEZ (1997) ainda lembram que equações como $3x + 100 = 10$ não têm representação possível por uma balança de dois pratos, sendo necessário outro recurso, outra atividade para que se possa estabelecer núcleos pelos quais representações e significados possam ser produzidos para estas equações. Isso não quer dizer que o uso deste recurso seja negativo, o que está em questão é que ele é muito significativo em algumas situações, porém tem suas limitações em outras. GIOVANNI e PARENTE (1999) utilizam a representação de balões como saída para a situação da equação $3x + 100 = 10$. Eles informam aos leitores que balões de gás (mais leve que o ar) diminuem o peso sobre o prato quando amarrados a ele. Assim, numa situação em que haja 5g de determinado produto no primeiro prato e 10g no segundo, os autores introduzem dois balões denominados por x amarrados no segundo prato. Desta forma a balança fica em equilíbrio. Algebricamente a situação é representada pela equação $5 = 10 – 2x$. Esta é uma possibilidade, porém não é nenhum pouco comum podendo causar algumas dificuldades extras.

De qualquer forma o professor tem que estar atento para o fato de que significados estão sendo produzidos pelos alunos quando estão lendo o livro didático ou participando de uma atividade didática. Há de se compartilhar estes significados, considerá-los pois são legítimos e podem coexistir com os significados matemáticos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O simples estudo desenvolvido aqui proporcionou alguns indicativos sobre os questionamentos iniciais. Em geral os livros didáticos não se dedicam muito a discussões ou explanações sobre igualdades e os possíveis sentidos do sinal "=". Em princípio pode-se considerar que isso é negativo, porém se faz necessário um estudo com alunos para comprovação.

O início do estudo da álgebra se dá com a apresentação das equações do primeiro grau em todos os livros analisados. As letras são assumidas como incógnitas, um valor numérico a ser descoberto. Isso limita as possibilidades de entendimento do sinal de igualdade numa equação. Aliás, nas três obras didáticas consultadas percebeu-se que as letras foram utilizadas em seções anteriores às que introduziam a álgebra e o estudos das equações. Isto não foi retomado por nenhum dos autores quando do início do estudo das equações. Por exemplo, ao utilizar as letras a e b para afirmar que as propriedades comutativas da adição e da multiplicação são válidas para todos os números inteiros, um dos livros apontou que estas duas letras deveriam ser consideradas números inteiros quaisquer. Qual a diferença entre $a + b = b + a$ e $x +3 = 3 + x$ ou $x + y = 3 + x$?

Geralmente se introduz equações do primeiro grau na sexta série do ensino fundamental, no terceiro ciclo. Nesta etapa os alunos já estão acostumados a utilizar o sinal de igual, talvez sem uma atenção maior quanto ao seu significado, pois já o empregaram nos estudos de aritmética, expressões numéricas, cálculo de áreas, e em outros, para indicar resultados ou simplificações. Também já utilizam em seu cotidiano expressões como "é igual", "é o mesmo que", "é diferente", referindo-se a objetos semelhantes em determinados contextos, como no caso das balanças de dois pratos.

Assim, quando escutam ou lêem que "x é igual 3x + 5", produzem algum significado, pensam sobre a expressão com base em seus conhecimentos anteriores. É muito provável que o façam não de uma forma clara ou matematicamente "correta". O importante é que existe um posicionamento do estudante que deve ser considerado pelo professor.

Percebe-se que o caminho adotado para o estudo da álgebra nos livros didáticos analisados neste trabalho é partir de situações específicas, da matemática escolar ou extra escolar, para introduzir a notação generalizadora da própria da álgebra.

Os autores de livros didáticos têm propostas distintas para a abordagem das equações. Alguns, seguindo as orientações dos PCN optam pela exploração inicial da observação de padrões numéricos ou geométricos. Outros partem das balanças de dois pratos, cálculo de áreas de figuras planas, custo de obras e orçamentos, etc. O importante é que eles buscam relacionar conhecimentos que os alunos possivelmente já possuem com os novos conceitos propostos.

Somente uma das obras apresenta uma atividade com respeito à noção de igualdade. Também não é feito relacionamento entre igualdades e equações explicitamente. Os novos significados do sinal "=" ficam implícitos, o que cria mais uma dificuldade aos alunos leitores. Mesmo assim há que se frisar que os livros analisados mostram caminhos mais interessantes que os tradicionais. A abertura à manifestação dos leitores sobre os assuntos abordados é uma estratégia importante que foi procurada pelos autores. A influência dos PCN é bastante notável nas duas obras publicadas em 1999, o resultados foram positivos apesar de restritos no caso do ***Aprendendo Matemática***. A terceira obra analisada, apesar de ter sido publicada anteriormente aos PCN, traz muitos aspectos inovadores e próximos às orientações dos parâmetros. Mesmo assim, sua proposta quanto ao estudo das equações e abordagens a igualdades é muito distinta das demais obras.

A produção de significados dentro de atividades é um caminho possível em sala de aula conforme LINS e GIMENEZ (1997) afirmam. Os livros didáticos, por sua vez, podem propor atividades tais que possibilitem aos leitores refletir sobre o que ocorre ou pode ocorrer dentro delas. Portanto, deste estudo é possível postular que criar um espaço comunicativo entre alunos leitores, livro e professor, proporciona fatores positivos ao processo de ensino e aprendizagem das equações.

REFERÊNCIAS

BORGES, E. M. F. et al. **Matemática na vida e na escola. 6ª série.** São Paulo: Editora do Brasil, 1999.

GIOVANNI, J. R; PARENTE, E. **Aprendendo Matemática.** V. 2. São Paulo: FDT, 1999.

FALCÃO, J. T. R. **Alfabetização algébrica nas séries inicias – como começar?** Disponível em: <http://www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2003/eda/tetxt1.html> acessado em agosto de 2006.

ISOLANI, C. M. et al. **Matemática: 6ª série.** Curitiba: Módulo, 1996.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 104-126.

LANGER, E. S.. **Equações do Primeiro Grau: Trajetória de uma Análise de Significados.** Curitiba, 2004. 155 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal do Parará.

LINS, R. L. Por Que Discutir Teoria do Conhecimentos é Relevante Para a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999, p. 75-94.

LINS, R. L.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra Para o Século XXI**. São Paulo: Papirus, 1997.

MICOTTI, M. C. de O. O Ensino e as Propostas Pedagógicas. In: BICUDO, M. A. V. (org). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.** São Paulo: UNESP, 1999, p. 153-167.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO / SECRETARIA DO ENSINO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática**. 1998.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DA CULTURA. Programa Nacional do Livro Didático: **Guia do Livro Didático 2005 – Matemática de 5º a 8º séries do Ensino Fundamental.** Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/home/livro_didatico/pnld2005_matematica.pdf> Acesso em 10 set. 2006.

NOVAK, J. D. **Uma Teoria de Educação**. São Paulo: Pioneira, 1981.

OTTE, M. **O formal, o social e o subjetivo: uma introdução a filosofia e à didática da matemática.** Tradução de Raul Fernando Neto. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista, 1993, pág. 13-69.

PAIS, L. C.. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2ª edição, 2005.

PONTE, J. da P. **Números e álgebra no currículo escolar.** Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/05-Ponte(Caminha).rtf> Acesso em 02 ago. 2006.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.