UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

ALEXANDRA MARIA CARON

DA TEORIA À PRÁTICA: REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DA PROPORCIONALIDADE

Curitiba
2006

ALEXANDRA MARIA CARON

DA TEORIA À PRÁTICA: REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DA PROPORCIONALIDADE

Monografia apresentada como requisito parcial à conclusão do Curso de Especialização para Professores de Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná - UFPR.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves.

Curitiba
2006

TERMO DE APROVAÇÃO

ALEXANDRA MARIA CARON

DA TEORIA À PRÁTICA: REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DA PROPORCIONALIDADE

Monografia aprovada como requisito parcial para obtenção do título de Especialista no Curso de Especialização para Professores de Matemática, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves
Departamento de Matemática, UFPR

Prof. Dr. Alexandre Kirilov
Departamento de Matemática, UFPR

Curitiba, novembro de 2006

Matemática é o alfabeto
com o qual Deus
escreveu o Universo

Galileu Galilei

Agradecimentos

(i) A Deus

Enquanto percorria o meu caminho rumo a um crescimento maior, por vezes deparei com a angústia existencial que assolava o meu íntimo, com questionamentos sem respostas, buscas sem encontros. Foi quando elevei os olhos para o alto, recebendo de Deus a instrução para o caminho da verdadeira sabedoria.

Obrigada Senhor, pois só pelo seu amor me foi possível chegar até aqui. Você estará sempre comigo, eu sei.

(ii) A você ... meu marido

"Por amor, você aceitou meus momentos de ausência, quando a batalha me exigia dedicação.

Por amor, você compartilhou das minhas preocupações e dos meus medos, incentivando-me a seguir mesmo quando meus ideais pareciam distantes.

Por amor você sorriu e chorou comigo. Manteve-me segura quando o chão parecia fugir aos meus pés, deu-me a mão e seguiu ao meu lado.

O momento que vivo agora é mágico e só existe porque você aceitou viver comigo meu sonho.

Você faz parte da minha vitória."

(iii) Aos pais

E ainda não faz tempo que aquela criança travessa tirava-lhes o sono e o sossego.

Não faz tempo, me tomavam pelas mãos quando meus passos erravam o caminho...

Hoje quero novamente tomar suas mãos, com tantas saudades daquele tempo, olhar seus rostos e agradecer a este lugar que conquistei.

As palavras são insuficientes para traduzir a gratidão, mas o silêncio da minha emoção é a linguagem mais sublime que vocês me ensinaram: o Amor.

(iv) Ao mestre

Hoje, ao contrário do que algumas vezes lhe pedi, eu quero ficar mais um pouco ... Ficar mais alguns instantes para desfrutar de sua presença e segurança.

Ficar pela certeza de poder contar com você, amparando minha dúvidas e suscitando em mim a maturidade de um profissional.

Obrigada por cada momento que passamos juntos.

"Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naquele cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia de nossa palavra.

O professor assim não morre jamais."

Rubens Alves

(v) Aos colegas

Até aqui viajamos juntos. Não faltaram obstáculos. Juntos percorremos retas, nos apoiamos nas curvas, construimos pontes, descobrimos cidades... chegou o momento de cada um seguir viagem sozinho.

Que as experiências compartilhadas no percurso até aqui sejam a alvanca para alcançarmos a alegria de chegar ao destino por cada um de nós projetado.

Sumário

Resumo

A presente monografia tem como objetivo principal servir de fonte de pesquisa a quem tem interesse pelo assunto de Proporcionalidade. Para isso, utilizamos o método da coleta de dados, organização, análise e interpretação, mediante pesquisa bibliográfica. Almejamos, por meio desta, analisar o tratamento dado quanto a grandezas direta ou inversamente proporcionais umas às outras, abrangendo também as grandezas direta e inversamente proporcionais a várias outras. Além disso, buscamos mostrar a existência de métodos para a resolução de problemas de Regra de Três Composta. Fizemos também, um estudo sobre a abordagem que três livros didáticos de Matemática trazem sobre o assunto de Proporcionalidade, livros estes utilizados pelas escolas de Ensino Fundamental do Paraná.

Palavras-chave: proporcionalidade, grandezas direta e inversamente proporcionais e livros didáticos.

Introdução

Sempre nos perguntamos porque algumas aulas de Matemática eram tão mais interessantes e eficientes do que outras. Provavelmente, aliás, todas as pessoas que já se sentaram em um banco escolar fizeram esse mesmo questionamento. Não diremos que temos uma resposta pronta para isso mas, podemos talvez lançar algumas idéias. Por exemplo, no ensino da Proporcionalidade: Razão e Proporção. A regra de três composta vem sendo ensinada, geralmente, de modo muito mecânico e pouco cerebral. Tratada como uma regra em si mesma, ou seja, sem que sejam dadas maiores justificativas ou explicações.

Estamos certos de que isto está acontecendo porque existem vários tipos de professores. Não que esta variedade de professores seja ruim. Afinal, ele é o personagem principal desta arte, a de dar aulas.

O primeiro professor, por exemplo, é aquele que só fala sobre o que sabe. Ou, pior ainda, só fala do que gosta. Na maioria das vezes, por conhecer o assunto em questão e gostar dele, consegue um relativo sucesso com os alunos. No entanto, fica evidente que essa aula peca pela insuficiência e, o que é mais grave, trata os alunos como se não tivessem opinião.

O segundo tipo de professor é aquele que só fala sobre o que os alunos querem saber. Trata-se do professor que, por não manifestar seus pontos de vista, rende-se aos desejos dos que ouvem. Assim, deixa de convidar os alunos à reflexão e prefere apenas reiterar o que todo mundo já sabe.

Já o terceiro professor é aquele que faz com que os alunos gostem do que eles precisam saber. Eis o bom professor!

As dificuldades são imensas, porém há o conforto de não parecer nem com o primeiro nem com o segundo professor. Esse, procura desenvolver estratégias para fazer com que os alunos tenham prazer pelo conhecimento.

Os conteúdos que serão tratados nesta monografia têm por objetivo abranger todos os tópicos que envolvem o assunto de Proporcionalidade, para talvez um dia, servir de fonte de pesquisa para esses professores que desejam que seus alunos gostem do que eles precisam saber. Dentre estes tópicos, podemos citar a proporcionalidade, seja em uma ou em várias variáveis, além da análise de três livros didáticos.

Dentro do capítulo de proporcionalidade em uma variável, estaremos abordando tópicos como variáveis e grandezas direta e inversamente proporcionais. Além de algumas situações-problema contextualizadas, e da demonstração do Teorema Fundamental da Proporcionalidade para as funções crescente e decrescente.

Para a proporcionalidade em várias variáveis faremos uma abordagem algébrica e geométrica num primeiro momento. Em seguida, estaremos trazendo várias formas de resolução para o mesmo problema de regra de três composta.

Quanto a Análise de Livros Didáticos, estaremos separando-a em duas partes: a primeira análise será feita utilizando o PNLD (Plano Nacional do Livro Didático). Este plano, consiste na análise por especialistas na área, das coleções de livros (5ª a 8ª séries), que serão distribuídas gratuitamente na rede pública de ensino do Brasil inteiro. Para esta análise, o MEC utiliza critérios próprios que serão melhor expostos no capítulo 3.

A segunda análise, será feita por nós, visando principalmente os livros de 6ª série, pois é nesta série que está o assunto desta monografia. Para esta análise, utilizaremos critérios que, como professores, achamos imprescindível num livro, tais critérios são entre outros a adequação à realidade dos alunos. Num mundo com tantas coisas atraentes, é muito importante que este livro também seja.

Capítulo 1

Proporcionalidade em uma variável

Existem, na Matemática, conceitos que parecem muito simples a uma visão superficial, mas que, submetidos a uma análise mais cuidadosa, revelam aspectos verdadeiramente surpreendentes.

Espera-se com este capítulo, que se observe a variação entre grandezas, estabelecendo relações entre elas, e construindo estratégias para a resolução de situações que envolvam a proporcionalidade. Baseado no artigo de Geraldo Ávila [1], iniciamos a apresentação com as seguintes definições:

Definição 1 *Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são proporcionais-mais especificamente, diretamente proporcionais-se estiverem assim relacionadas: $y = k \cdot x$ ou $\frac{y}{x} = k$, onde k é uma constante positiva, chamada constante de proporcionalidade.*

Definição 2 *Diz-se que as variáveis x e y são inversamente proporcionais se $y = \frac{k}{x}$ ou $x \cdot y = k$, onde k é uma constante positiva (constante de proporcionalidade).*

Veremos também, com base no Artigo de Geraldo Ávila [1], como estas definições podem ser aplicadas. Por exemplo, se p é o perímero de um quadrado de lado l, então $p = 4 \cdot l$, assim temos que o perímetro e o lado são diretamente proporcionais. Por outro lado, imaginemos um retângulo de lados variáveis e área constante. Se x e y são os lados e a área é fixa $12m^2$, então $x \cdot y = 12$ ou $y = \frac{12}{x}$, assim x e y são inversamente proporcionais.

1.1 Grandezas Proporcionais

O que é mesmo grandeza?

O Livro Dicionário Brasileiro Globo [2], atribui à palavra grandeza o seguinte significado: "Grandeza é tudo aquilo que pode ser medido ou contado."

Agora que já sabemos as relações entre as variáveis, que podem ser direta ou inversamente proporcionais, e também sabemos o significado de grandezas, podemos dar continuidade às definições. Segundo o livro Temas e Problemas Elementares [3] temos:

Definição 3 *Sejam x e y dois tipos de grandezas. Diz-se que y é diretamente proporcional a x quando:*

1. *As grandezas x e y acham-se de tal modo relacionadas que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y. Diz-se então que existe uma correspondência $x \mapsto y$ e que y é função de x.*

2. *Quanto maior for x, maior será y. Em símbolos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.*

3. *Se a um valor x_0 corresponde y_0 e c é um número qualquer, então o valor de y que corresponde a cx_0 é cy_0.*

Definição 4 *Sejam x, y dois tipos de grandezas. Diz-se que y é inversamente proporcional a x quando:*

1. *As grandezas x e y estão relacionadas de tal modo que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de de y. Escreve-se então $x \mapsto y$ e diz-se que y é função de x.*

2. *Quanto maior for x menor será y. Simbolicamente: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y' < y$. Ou ainda: se $y = f(x)$ e $y' = f(y')$, tem-se a implicação $x < x' \Rightarrow f(x') < f(x)$.*

3. *Se y_0 é o valor de y que corresponde ao valor x_0 de x e c é qualquer número então ao valor cx_0 corresponde $\frac{1}{c}y_0$. Ou seja: se $x_0 \mapsto y_0$ então $cx_0 \rightarrow \frac{1}{c}f(y_0)$.*

1.2 Aplicações

O desenvolvimento do raciocínio proporcional é muito útil na interpretação de fenômenos do mundo, pois muitas situações da vida cotidiana funcionam de acordo com as leis de proporcionalidade.

A seguir, apresentaremos uma série de exemplos, retirados do livro Matemática e Realidade [4], no qual será possível perceber essa utilidade. Usaremos para isto, situações-problema contextualizadas, com o intuito principal de relacionar as grandezas e, deixar evidente que entre elas há uma relação de dependência. Por isso, o termo "em função de"para cada item abaixo.

1.2.1 Correspondências entre grandezas

1. O instituto de Meteorologia de Porto Alegre quis fazer um estudo da variação da temperatura à sombra, e mediu-a de hora em hora. A tabela abaixo expressa o resultado das medições ao longo de certo dia.

HORA	T (°C)	HORA	T (°C)	HORA	T (°C)
0	7°	8	5°	16	20°
1	6°	9	7°	17	18°
2	5°	10	12°	18	15°
3	4°	11	15°	19	13°
4	2°	12	18°	20	11°
5	2°	13	18°	21	9°
6	2°	14	20°	22	8°
7	3°	15	20°	23	7°

Nesse exemplo são medidas duas grandezas: a hora do dia e a correspondente temperatura. A cada hora corresponde uma única temperatura. Dizemos, por isso, que a temperatura é função da hora.

2. Uma barraca na praia de Itapuã, em Salvador, vende cocos e exibe a seguinte tabela de preços:

NÚMERO DE COCOS	PREÇO (em reais)
1	1,20
2	2,40
3	3,60
4	4,80
5	6,00
6	7,20
7	8,40
8	9,60
9	10,80
10	12,00

Nesse exemplo estão sendo medidas duas grandezas: o número de cocos e o respectivo preço. A quantidade de cocos corresponde a um único preço. Dizemos, por isso, que o preço é função do número de cocos comprados.

3. Um automóvel está percorrendo uma estrada à velocidade de $120km/h$ (que equivale a $2km/min$). O passageiro que vai ao lado do motorista começa a anotar, de minuto em minuto, a distância percorrida que aparece no painel. O resultado pode ser observado na tabela a seguir:

INSTANTE (em minutos)	DISTÂNCIA (em Kilômetros)
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
etc	etc

A cada instante corresponde uma única distância precorrida. Dizemos, por isso, que a distância é função do instante.

1.2.2 Grandezas diretamente proporcionais

Ao dar seqüência ao estudo sobre as grandezas, baseada nos exemplos acima e nas definições vistas até agora, sentimos a necessidade de mencioná-las separadamente. Então as dividimos em duas partes. A primeira, ficou com grandezas diretamente proporcionais, onde as ilustramos com situações do dia-a-dia e ressaltamos a característica principal existentes nos três exemplos.

Num segundo momento, apresentamos as grandezas inversamente proporcionais, mas desta vez, utilizamos um exemplo só, também presente no dia-a-dia, e procurei interagir com o leitor, através de questionamentos, antes de mencionar-mos a sua característica principal, ou seja, o que distingue as grandezas de direta e inversamente proporcional. Para isto, usaremos o livro Tudo é Matemática [5].

1. Para percorrer $310Km$, o carro de Afonso gastou $25l$ de gasolina. Nas mesmas condições, Afonso quer saber quantos quilômetros seu carro percorrerá com $50l$.

2. Dona Maria está vendendo na feira saquinhos com 3 maçãs ao preço de 5 reais. Antônio é dono de uma confeitaria e vai precisar de 30 maçãs para fazer algumas tortas. Quanto Antônio vai gastar comprando de dona Maria as maçãs que necessita?

3. Para fazer 1200 pães pequenos, são gastos, em uma padaria, $100Kg$ de farinha. Quantos pães pequenos podem ser feitos com $50Kg$ de farinha?

Você percebeu uma característica comum em todas as situações acima?
Quando o valor de uma grandeza dobra, triplica, fica a metade, a da outra também dobra, triplica, fica a metade, e assim por diante.
Em casos como esses dizemos que as suas grandezas são diretamente proporcionais ou apenas são proporcionais.

1.2.3 Grandezas inversamente proporcionais

Imagine um percurso feito de três formas diferentes: de bicicleta, de calhambeque e de carro veloz.

De bicicleta, João fez esse percurso com uma velocidade média de $15Km/h$ e gastou 120 minutos $(2h)$

Em seu calhambeque, Maurício fez o mesmo percurso com uma velocidade média de $30Km/h$ e gastou 60 minutos $(1h)$.

Em seu carro novo, Luciana foi a uma velocidade média de $90Km/h$ e gastou 20 minutos.

Quem gastou mais tempo: o veículo de velocidade maior ou menor?

Menor, pois quanto menor a velocidade maior será o tempo para percorrer a distância.

Portanto, dobrando a velocidade, o tempo reduz-se à metade. Multiplicando a velocidade por 3, o tempo fica dividido por 3. Essa é uma situação de proporcionalidade inversa. Dizemos que velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais.

1.3 Teorema Fundamental da Proporcionalidade

A seguir, procuramos fixar nossa atenção na proporcionalidade direta, que é chamada apenas de proporcionalidade. Então vem a pergunta:

Como ter certeza de que a correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade?

A resposta a essa questão está no Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Para a função crescente, a demonstração completa está feita no livro Temas e Problemas Elementares [3]. E para a função decrescente, a demonstração é uma contribuição nossa.

1.3.1 Para função crescente

Seja $f : \mathbb{R} \mapsto R$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

1.3.2 Para função decrescente

Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função decrescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $f(nx) = \frac{1}{n} f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = a\frac{1}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. $f(x+y) = \dfrac{f(x) \cdot f(y)}{f(x) + f(y)}$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA PARA A FUNÇÃO DECRESCENTE

Seja $f(x)$ uma função decrescente. Então tomando-se $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, temos que $g(x)$ é crescente. De fato,

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow f(y) < f(x) \\ &\Rightarrow \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{f(y)} \\ &\Leftrightarrow g(x) < g(y) \end{aligned}$$

Aplicaremos o Teorema anterior para a função $g(x)$

1. Para $1 \Rightarrow 3$

   Sendo, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, temos que se $f(nx) = \frac{1}{n} f(x)$ então

   $$g(nx) = \frac{1}{f(nx)} = \frac{n}{f(x)} = ng(x)$$

   Como base acima e no teorema anterior, vemos que :

   $$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

   $$\frac{1}{f(x+y)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}$$
   $$\frac{1}{f(x+y)} = \frac{f(y)+f(x)}{f(x) \cdot f(y)}$$
   $$f(x+y) = \frac{f(x) \cdot f(y)}{f(y)+f(x)}$$

2. Para $3 \Rightarrow 2$

   Da hipótese $f(x+y) = \frac{f(x) \cdot f(y)}{f(x)+f(y)}$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ temos:

   $$g(x+y) = \frac{1}{f(x+y)}$$
   $$g(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x) \cdot f(y)}$$
   $$g(x+y) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}$$
   $$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

   Pelo teorema para função crescente,

   $$g(x) = b \cdot x$$

   para

   $$b = g(1)$$

   e daí segue que

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(1)} \cdot x$$

$$f(x) = f(1) \cdot \frac{1}{x}$$

3. Para $2 \Rightarrow 1$

$$g(x) = \frac{\frac{1}{a}}{x}$$

$$g(x) = \frac{x}{a}$$

Mas $a = f(1)$, então

$$g(x) = \frac{x}{f(1)}$$

$$g(x) = \frac{x}{\frac{1}{g(1)}}$$

$$g(x) = xg(1)$$

Assim, temos

$$g(nx) = n \cdot g(x)$$

e portanto

$$\frac{1}{f(nx)} = n \cdot \frac{1}{f(x)}$$

ou seja,

$$\frac{f(x)}{n} = f(nx)$$

ou ainda

$$f(nx) = \frac{1}{n} f(x).$$

Capítulo 2

Grandeza proporcional a várias outras

Este capítulo, tem por finalidade introduzir a noção de que a proporcionalidade é uma idéia transversal, uma vez que está presente em problemas aritméticos, geométricos, métricos e algébricos. Com base no livro Temas e Problemas Elementares [3], podemos claramente verificar esta idéia.

Na figura abaixo, temos duas semi-retas, OA e OB. Sobre elas, nesta ordem, tomamos os segmentos OX, de comprimento x, e OY, de comprimento y, os quais determinam um paralelogramo, cuja área indicaremos por w. Assim, w é função de x e y, o que representamos assim: $w = f(x, y)$.

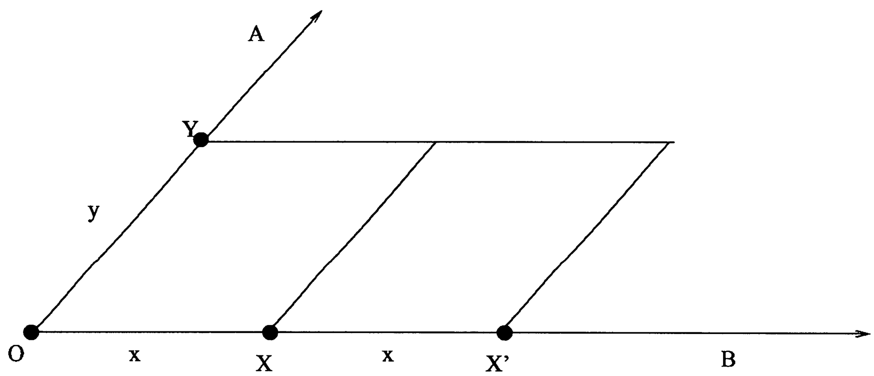

Figura 2.1: Proporcionalidade com duas variáveis

A figura indica que se mantivermos Y fixo e tomarmos OX' de comprimento

$2x$, obteremos um paralelogramo cuja área é $2w$. Ou ainda: $f(2x, y) = 2 \cdot f(x, y)$. A mesma observação mostra que se n é qualquer número natural então $f(n \cdot x, y) = n \cdot f(x, y)$. Isto significa que, mantendo y fixo, a área $w = f(x, y)$ é proporcional a x. De modo análogo se vê que $f(x, ny) = n \cdot f(x, y)$, ou seja: mantendo x fixo, a área $w = f(x, y)$ é proporcional a y.

Conforme mencionamos, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade assegura que $f(cx, y) = c \cdot f(x, y)$ e $f(x, dy) = d \cdot f(x, y)$ quaisquer que sejam os números c, d inteiros ou não. Segue-se então que $w = f(x,y) = f(x \cdot 1, y \cdot 1) = x \cdot f(1, y \cdot 1) = xy \cdot f(1, 1) = k \cdot xy$, onde $k = f(1, 1)$.

Assim, fixadas as semi-retas OA e OB e tomando sobre elas, nesta ordem, segmentos OX e OY de comprimentos x e y respectivamente, a área do paralelogramo que tem OX e OY como lados adjacentes é proporcional ao produto xy. O fator de proporcionalidade é a área do paralelogramo de lados iguais a 1 construído sobre essas semi-retas. Analogamente, se tomarmos três semi-retas não colineares OA, OB e OC (com a mesma origem) e tomarmos sobre elas, nesta ordem, os segmentos OX, OY e OZ, de comprimentos x, y e z respectivamente, eles serão as arestas de um parelelepípedo cujo volume indicaremos com $V = V(x, y, z)$ pois ele é funçao de três variáveis x, y e z.

Na figura abaixo temos, que se mantivermos y e z fixos e dobrarmos x, o volume dobra: $V(2x, y, z) = 2 \cdot V(x, y, z)$. Assim, para qualquer número natural n tem-se $V(nx, y, z) = n \cdot V(x, y, z)$. Da mesma forma se verifica que $V(x, ny, z) = n \cdot V(x, y, z)$ e $V(x, y, nz) = n \cdot V(x, y, z)$. Seque-se daí que $V(cx, y, z) = c \cdot V(x, y, z)$, $V(x, cy, z) = c \cdot V(x, y, z)$ e $V(x, y, cz) = c \cdot V(x, y, z)$ mesmo que o número c não seja inteiro.

Podemos então escrever:

$V = V(x,y,z) = V(x \cdot 1, y, z) = x \cdot V(1, y \cdot 1, z) = xy \cdot V(1, 1, z \cdot 1) = xyz \cdot V(1, 1, 1) = k \cdot xyz$, onde $k = V(1, 1, 1)$ é o volume do paralelepípedo que tem as arestas de comprimento 1, três das quais, com origem O, estão sobre as semi-retas OA, OB e OC.

Consideramos para estudo apenas três variáveis, mas é claro que tudo o que dissemos valerá para um número qualquer delas. A partir dos exemplos acima traremos a seguinte definição:

Definição 5 *Seja uma grandeza cujo valor w depende dos valores x, y, z de três outras. Escrevemos então $w = f(x, y, z)$. Diremos que w é proporcional a x, y e z quando, mantendo fixos dois quaisquer desses valores, w for proporcional à variável restante.*

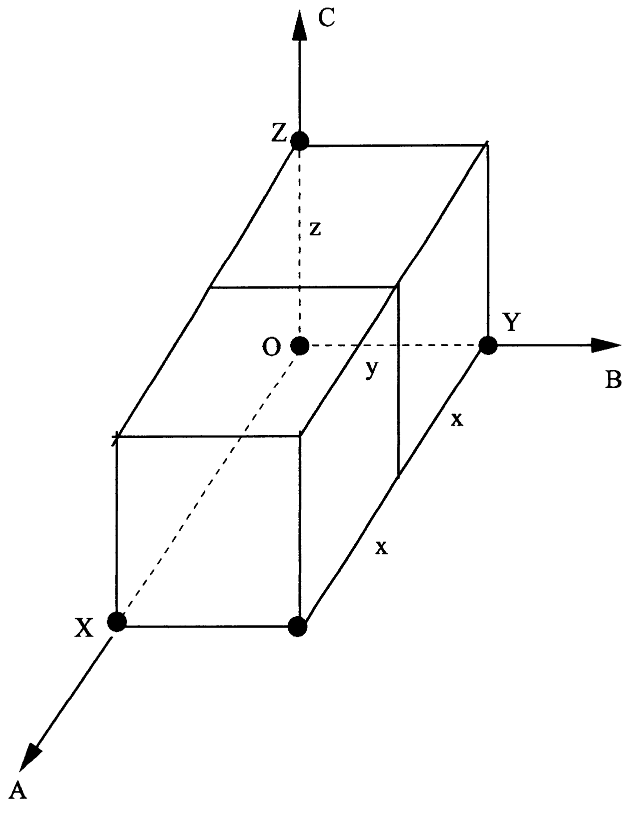

Figura 2.2: Proporcionalidade com três variáveis

Quando este é o caso, tem-se:
$w = f(x,y,z) = f(x \cdot 1,y,z) = x \cdot f(1,y,z) = xy \cdot f(1,1,z) = xyz \cdot f(1,1,1)$, portanto $w = k \cdot xyz$, onde o fator de proporcionalidade é $k = f(1,1,1)$.

2.1 Grandezas direta ou inversamente proporcional a várias outras

Nesta seção, estaremos tratando de várias grandezas envolvidas numa mesma situação. Podemos citar como exemplo, a Lei da Atração Universal, de Newton, para bem ilustrar que grandezas direta e inversamente proporcionais estão presentes nas fórmulas da Física, bem como em Geografia, Artes, etc. Nos basearemos novamente no artigo de Geraldo Ávila [1], visto que a definição abaixo é uma junção das duas definições iniciais do Capítulo 1.

Definição 6 *Se várias variáveis, digamos, x, y, z, w, r, s estão relacionadas por uma equação do tipo $z = k \cdot \dfrac{xyw}{rs}$, onde k é constante, então dizemos que z é diretamente proporcional a x, a y e a w; e inversamente proporcional a r e a s.*

A Lei da Atração Universal, de Newton, diz que "a matéria atrai a matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado da distância". Assim, se dois corpos com massa m_1 e m_2 acham-de situados a uma distância d um do outro então, segundo Newton, eles se atraem segundo uma força cuja intensidade f é (diretamente) proporcional a m_1 e m_2 e inversamente proporcional a d^2. Isto significa que $f = f(m_1, m_2, d) = \dfrac{k \cdot m_1 \cdot m_2}{d^2}$, onde a constante k depende do sistema de unidades utilizado.

Mais geralmente, seja $w = f(x,y,z,u,v)$ uma grandeza diretamente proporcional às grandezas x, y, z e inversamente proporcional a u e v.

Isto quer dizer que

$$f(c \cdot x, y, z, u, v) = c \cdot f(x,y,z,u,v)$$

e

$$f(x,y,z,c \cdot u, v) = \frac{1}{c} \cdot f(x,y,z,u,v)$$

o mesmo valendo y e z no lugar de x e v no lugar de u.

Como se tem

$$f(x,y,z,u,v) = f(x \cdot 1, y \cdot 1, z \cdot 1, u \cdot 1, v \cdot 1),$$

segue-se daí que

$$f(x,y,z,u,v) = xyz \cdot f(1,1,1,u \cdot 1, v \cdot 1) = \frac{xyz}{uv} \cdot f(1,1,1,1,1).$$

Logo

$f(x,y,z,u,v) = k \cdot \dfrac{xyz}{uv}$, onde $k = f(1,1,1,1,1)$ é o fator de proporcionalidade.

Resumindo, se $w = f(x,y,z,u,v)$ é diretamente proporcional a x, y, z e inversamente proporcional a u, v, então w é proporcional a $\dfrac{xyz}{uv}$.

Com isto, podemos reduzir os chamados problemas de regra de três composta a problemas de regra de três simples.

2.2 Aplicações

Na seção de Aplicações, estaremos tratando de uma mesma situação-problema e explorando as várias soluções e métodos para alcançar a resposta. Isto é importante pois abre espaço para a reflexão, levando em conta que cada indivíduo possui uma velocidade e um grau de aprendizagem próprios.

A resolução de problemas de regra de três composta é um processo lento, porque requer análise do problema, interpretação e decisão quanto aos caminhos a serem seguidos. Não nos referimos aos problemas tradicionais, que deixam evidente no enunciado os caminhos que nos permitem chegar à solução, mas aqueles que nos desafiam a buscar soluções criativas.

O Primeiro Método abaixo foi retirado do artigo de Geraldo Ávila [1].

1. Método: Se 10 máquinas, funcionando 6 horas por dia, durante 60 dias, produzem 90000 peças, em quantos dias x, 12 dessas mesmas máquinas, funcionando 8 horas por dia, produzirão 192000 peças?
   Temos aqui quatro variáveis:
   M = número de máquinas;
   H = horas de funcionamento por dia;
   D = dias de funcionamento;
   P = número de peças produzidas.
   Seja k o número peças que cada máquina produz por hora.
   Temos:

$$P = kMHD$$

$$ou$$

$$\frac{P}{MHD} = k$$

Esta equação nos diz que a variável P é diretamente proporcional a M, H e D. Substituíndo nesta equação as duas seqüências de valores dados no problema, obtemos:

$$\frac{90000}{10 \times 6 \times 60} = k = \frac{192000}{12 \times 8 \times X}.$$

Usando regra de três simples, a solução vem:

$$X = \frac{10 \times 6 \times 60 \times 192000}{90000 \times 12 \times 8} = 80 \text{ dias}$$

Neste caso, usamos a constante de proporcionalidade para estabelecer uma igualdade. Quando isto acontece, ela não é utilizada diretamente nos cálculos.

2. Método: Outra maneira de resolver este problema é estabelecer uma igualdade entre a constante de proporcionalidade e a primeira parte do problema, encontrando assim o valor da constante. É uma continuação do método anterior mas não pertence a nenhum artigo pesquisado.

   $k = \dfrac{P}{MHD} = \dfrac{90000}{10 \times 6 \times 60} = 25$

   Agora que já descobrimos o valor da constante k de proporcionalidade, que é 25, podemos estabelecer outra igualdade. Com o valor da constante e a segunda parte do problema, onde aparece uma pergunta: quantos dias X. Assim, podemos facilmente encontar a solução:

   $k = \dfrac{P}{MHD}$

   $25 = \dfrac{192000}{12 \times 8 \times X}$

   $X = \dfrac{192000}{12 \times 8 \times 25}$

   $X = \dfrac{192000}{2400} = 80 \text{ dias}$

   O próximo método, foi retirado do artigo de Luis Imenes e José Jakubovic [6] sobre a regra de três composta.

3. Método: Para resolver este problema, podemos de início considerar apenas a variação no número de máquinas, que passa de 10 para 12, e a conseqüente variação do número de dias de funcionamento dessas máquinas, que passa de 60 para y, temos o seguinte quadro:

Nº DE MÁQUINAS	HORAS POR DIA	Nº DE DIAS	QUANTIDADE DE PEÇAS
10	6	60	90 000
12	6	y	90 000

Recaímos então, num problema sobre regra de três simples. Como, para produzir a mesma quantidade de peças (no caso 90000), o número de dias de funcionamento das máquinas é inversamente proporcional ao número dessas máquinas, temos então:

$$\frac{10}{12} = \frac{y}{60}$$

Logo, $y = 50$.

Observando agora a variação do número de horas diárias de funcionamento das máquinas, que passa de 6 para 8, e a conseqüente variação do número de dias de funcionamento dessas máquinas, que passa de $y = 50$ para z, temos o seguinte quadro:

Nº DE MÁQUINAS	HORAS POR DIA	Nº DE DIAS	QUANTIDADE DE PEÇAS
12	6	$y = 50$	90 000
12	8	z	90 000

Recaímos, novamente, num problema sobre regra de três simples. Como, para produzir a mesma quantidade de peças (no caso, 90000), o número de dias de funcionamento das máquinas é inversamente proporcional ao número de horas diárias de funcionamento das máquinas, temos que:

$$\frac{6}{8} = \frac{z}{50}$$

Logo, $z = 37,5$.

Finalmente, observando a variação da quantidade de peças produzidas, que passa de 90000 para 192000, e a necessária variação no número de dias para produzí-las, que passa de $z = 37,5$ para x, temos o seguinte quadro:

Nº DE MÁQUINAS	HORAS POR DIA	Nº DE DIAS	QUANTIDADE DE PEÇAS
12	8	$z = 37,5$	90 000
12	8	x	192 000

Recaímos, mais uma vez, num problema sobre regra de três simples. Como a quantidade de peças produzidas é diretamente proporcional ao número de dias de funcionamento das máquinas, temos que:

$$\frac{37,5}{x} = \frac{90000}{192000}$$

Logo, $x = 80$.

E assim, de variação em variação, chegamos à resposta do problema.

2.2.1 As flechas da regra de três

4. Método: O problema acima também pode ser apresentado esquematicamente por meio de um quadro a seguir, onde colocamos uma flecha, orientada de cima para baixo, "que atinge x". Método este, também retirado do artigo de Luis Imenes e José Jakubovic [6].

Nº DE MÁQUINAS	HORAS POR DIA	Nº DE DIAS	QUANTIDADE DE PEÇAS
10	6	60	90 000
12	8	x	192 000

Nas demais colunas vamos colocar flechas orientadas de cima para baixo, ou de baixo para cima, conforme a variável envolvida seja direta ou inversamente proporcional ao número de dias de funcionamento das máquinas (supondo-se em cada análise que as demais variáveis estejam fixas). Assim, teremos:

Nº DE MÁQUINAS	HORAS POR DIA	Nº DE DIAS	QUANTIDADE DE PEÇAS
10 ↑	6 ↑	60 ↓	90 000 ↓
12	8	x	192 000

A "regra das flechas"que nos fornecerá o valor de x, é a seguinte: x é igual ao número que está no "início da flecha que atinge x"(no caso 60) multiplicado pelas frações correspondentes a cada coluna, com os numeradores sendo os números "atingidos pelas flechas"e com os denominadores sendo os números onde as "flechas se iniciam".

Usando esta regra no problema em questão, temos:

$x = 60 \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{192000}{90000} = 80$

Capítulo 3

Análise de Livros Didáticos

O livro didático é o principal instrumento utilizado pelo professor de Matemática na elaboração de suas aulas. Assim, exerce grande influência sobre o processo de ensino-aprendizagem, à medida que é a partir dele, que o professor seleciona os conteúdos que serão ministrados e a maneira como serão abordados. Dessa forma, é de fundamental importância que este livro seja analisado utilizando alguns critérios como: conteúdos selecionados, articulação entre os campos da Matemática, abordagem dos conteúdos, contextualização entre os conteúdos estudados e a vida cotidiana e o manual do Professor. Para isso utilizamos o PNLD (Plano Nacional do Livro Didático), como referência. Neste capítulo faremos a análise de três coleções de livros didáticos aprovados pelo MEC. Primeiro colocaremos um resumo da análise do PNLD [7], e depois faremos uma análise específica do tratamento do tema desta monografia nos livros de 6ª série. Este livros são, na ordem: Matemática e Realidade [4], Tudo é Matemática [5] e A Conquista da Matemática: a + nova [8]

3.1 Coleção Matemática e Realidade

Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antônio Machado

Os conteúdos propostos neste livro seguem a seqüência que normalmente é adotada para esta série, e que se orienta pelos PCNs. Segundo o PNLD, (Programa Nacional do Livro Didático) "os conteúdos selecionados nos campos temáticos (...) são os contidos usualmente nas propostas curriculares para essa fase do Ensino Fundamental". Há preocupação em relacionar os conteúdos já estudados com o que está sendo estudado no momento ou com o que ainda será visto em séries seguintes. De acordo com o PNLD, "a articulação entre os campos da Matemática ocorre de forma apropriada, a exemplo do que ocorre (...) e no estudo da proporcionalidade vista como uma função". No entanto, o envolvimento da Matemática com outras ciências ocorre exclusivamente através de textos e relatos históricos da Matemática. Como podemos observar no PNLD, essa articulação "(...) é limitada e em geral, feita na seção Matemática em notícia".

A abordagem dos conteúdos num primeiro momento não favorece o interesse dos alunos pela leitura e pela compreensão dos conceitos, visto que, a apresentação assume um caráter muito técnico, com definições e propriedades muitas vezes sem aplicabilidade pela dificuldade de adaptação aos termos usados. Com o decorrer do conteúdo, começam a aparecer problemas que recorrem a situações cotidianas, o que é positivo para que o aluno perceba a aplicação dos termos técnicos, das definições e propriedades na resolução de exercícios.

No que se refere à diversidade de enfoques dos conteúdos abordados, o livro apresenta deficiência quanto a esse critério pois não traz formas de interpretação do mesmo assunto, o que se pode encontrar no PNLD - "a diversidade de enfoques não é valorizada na obra". Um dos poucos exemplos na diversidade está presente no estudo dos sistemas de equações, em que aparecem as interpretações algébricas e geométricas.

Quanto ao método de ensino-aprendizagem adotado, podemos destacar que se resume a definição, exemplo, exercícios e exercícios de reforço, em que o aluno é estimulado a aplicar as definições e a seguir os exemplos. Segundo o PNLD, na metodologia de ensino-aprendizagem, "(...) ao aluno cabe principalmente entender as explanações e explicações dadas pelo professor; e resolver os problemas propostos, quase todos de fixação ou de aplicação dos conceitos e procedimentos ensinados". No entanto, há por toda esta obra a seção Desafio, em que é oferecido aos alunos exercícios, nos quais devem utilizar todos os conceitos aprendidos até o momento. Ainda conforme o PNLD, a seção Desafio "(...) oferece atividades variadas e de diferentes níveis de dificuldade".

A conexão entre a Matemática e a vida cotidiana ocorre em tópicos específicos do livro, como por exemplo, na seção Matemática em notícia, ou em conteúdos que envolvem Estatística. Por outro lado, no capítulo de Proporcionalidade, é muito explorado o uso de problemas com situações cotidianas, o que favorece o uso dos conceitos e definições estudadas. Verifica-se também no PNLD que "(...) as conexões entre a Matemática e as práticas sociais atuais estão presentes nas seções Matemática em notícia e nos capítulos de Estatística, Probabilidade e Aritmética Aplicada".

Observa-se que a linguagem adotada no livro é acessível a essa fase escolar, pois a leitura é agradável e de fácil compreensão, principalmente na seção em que é abordada a história da Matemática. Além disso, favorece a escrita explorando o texto com perguntas. Visto pelo PNLD, "a leitura e a escrita são valorizadas na seção Matemática no tempo, na qual o aluno pode ler o texto e responder as perguntas por escrito ou oralmente".

O Manual do Professor apresenta os objetivos gerais de maneira específica, além de trazer sugestões de atividades, resolução dos exercícios do aluno, resolução das seções Desafio, Matemética em notícia e Matemática no tempo, também recomenda leituras complementares ao Professor, como por exemplo, o processo de avaliação, os objetivos e conteúdos gerais adequados a cada série. Como observamos no PNLD, o Manual do Professor "(...) reproduz o livro do aluno, com resposta aos exercícios, e é acrescido de um suplemento pedagógico".

3.1.1 Análise do livro da 6ª série

Esta obra traz um número reduzido de explicações, pois prioriza a reflexão e a resolução de exercícios através de definições e propriedades. Estas, são um ponto forte do livro e tratados de maneira muito formal, levando, muitas vezes o aluno a não entender sua aplicação no exercício. Além disso, o formato que o texto adota não favorece o interesse do aluno pelo que está lendo, pois possui muitos termos técnicos e não é nada ilustrado. No entanto, o uso de definições estimula o aluno a pensar e a relacionar idéias, ao invés de simplesmente imitar ou repetir.

Alguns exemplos deste formalismo estão nas definições e na propriedade de proporção abaixo:

Definição 7 *(Matemática e Realidade, página 215) Os números da sucessão a, b, c, d, e, ... são diretamente proporcionais aos números da sucessão a', b', c', d', e',... quando*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} = ...$$

O valor desses quocientes é chamado fator de proporcionalidade.

Os números da sucessão a, b, c, d, e, ... são inversamente proporcionais aos números da sucessão a', b', c', d', e', ... quando

$$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = d \cdot d' = e \cdot e' = ...$$

O valor desses produtos é chamado de fator de proporcionalidade.

Isso equivale a afirmar que as razões (quocientes) de cada termo da primeira sucessão pelo inverso do termo correspondente da segunda sucessão são todas iguais:

$$\frac{a}{\frac{1}{a'}} = \frac{b}{\frac{1}{b'}} = \frac{c}{\frac{1}{c'}} = \frac{d}{\frac{1}{d'}} = ...$$

PROPRIEDADE DA PROPORÇÃO (Matemática e Realidade, página 215)

Quando dois números a e b (nessa ordem) são diretamente proporcionais a outros dois números a' e b' (nessa ordem), temos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

Essa última igualdade é chamada proporção. Ela pode ser lida assim: a está para a' assim como b está para b'.

Um modo simples de verificar se a proporção $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ é verdadeira é fazer as multiplicações cruzadas: $a.b'$ e $a'.b$ e verificar se

$$a \cdot b' = a' \cdot b$$

chamada propriedade fundamental da proporção.

Quanto aos conteúdos que constituem o capítulo de Proporcionalidade, basicamente, estão dispostos em EXEMPLO, DEFINIÇÃO E EXERCÍCIOS. Estes exercícios vão gradativamente aumentando de dificuldade, evidenciando que nem sempre é válido seguir o modelo.

A seqüência dos tópicos a serem estudados são exatamente os que espera-se deste assunto, ou seja, inicia-se com as razões; lembrando que, este livro prima pela aplicação de situações do dia-a-dia, para efetiva ligação entre a Matemática e a vida social; passando para a proporção (definição e propriedade das proporções), números direta e inversamente proporcionais, correspondência entre grandezas (noção de função), grandezas direta e inversamente proporcionais, regra de três simples, grandezas proporcionais a outras e finalmente, a regra de três composta.

Esta última é trabalhada exclusivamente com três grandezas e o método utilizado é a fixação de um delas e a variação das outras duas. Método este, descrito no Capítulo 2 desta monografia.

Os dois exemplos abaixo, forma retirados deste livro para enfatizar a metodologia adotado por ele, sobre o assunto de REGRA DE TRÊS SIMPLES.

1. Tatiana comprou 8m de um tecido por 480 reais. Quanto vai pagar por 10m do mesmo tecido?

   Para escrever esse problema, devemos:

   (a) Identificar as grandezas envolvidas: o número de metros de tecido e o preço pago pelo tecido.

(b) Verificar como se comportam as grandezas.

Observe: se o número de metros aumenta, a despesa de Tatiana também aumenta; se o número de metros dobra, o preço também dobra; se o número de metros triplica, o preço triplica, etc. As grandezas número de metros e preço a pagar são diretamente proporcionais.

Chamando de X o preço de 10m de tecido, temos:

METROS	PREÇO
8	10
480	x

Sendo diretamente proporcionais:

$$\frac{8}{480} = \frac{10}{X}$$

$$X = \frac{480 \cdot 10}{8} = 600$$

2. Um avião, à velocidade de 800Km por hora, leva 42 minutos para ir de São Paulo a Belo Horizonte. Se a velocidade do avião fosse 600Km por hora, em quanto tempo iria fazer a mesma viagem?

   As duas grandezas são: a velocidade do avião e o tempo de vôo.

   Observe: se a velocidade do avião aumenta, o tempo de vôo diminui; se a velocidade dobra, o tempo cai pela metade; se a velocidade triplica, o tempo de vôo se reduz para um terço, etc.

   A velocidade e o tempo são grandezas inversamente proporcionais.

   Chamando de X o tempo necessário para voar de São Paulo a Belo Horizonte a 600Km/h, temos:

VELOCIDADE	TEMPO DE VÔO
800	600
42	X

Sendo inversamente proporcionais:

$$800 \cdot 42 = 600 \cdot X$$

$$X = \frac{800 \cdot 42}{600} = 56$$

A seguir, o enfoque do livro sobre a REGRA DE TRÊS COMPOSTA:

Inicialmente, definindo o método usado para resolver estes tipos de problemas. Em seguida, aplicação deste método.

Definição 8 *De um modo geral, suponhamos que uma grandeza A dependa de duas outras grandezas, B e C. Se, fixando C, A é diretamente proporcional a b, e se, fixando B, A é diretamente proporcional a C, então A é proporcional ao produto B . C*

Para alimentar 12 porcos durante 20 dias são necessários 400Kg de farelo. Quantos porcos podem ser alimentados com 600Kg de farelo durante 24 dias?

NÚMERO DE PORCOS	QUANTIDADE DE FARELO	NÚMERO DE DE DIAS
12	400	20
X	600	24

Vamos calcular a grandeza A, que depende das grandezas B e C.

Fixando C, A é diretamente proporcional a B.

Fixando B, A é inversamente proporcional a C. Nesse caso, A é diretamente proporcional ao inverso de C.

Então, devemos modificar a tabela de dados, tomando os inversos dos valores de C:

A	B	$1/C$
12	400	1/20
X	600	1/24

Então, A é diretamente proporcional ao produto B . $\frac{1}{C}$:

$$\frac{12}{400 \cdot \frac{1}{20}} = \frac{X}{600 \cdot \frac{1}{24}}$$

$$\frac{12}{20} = \frac{X}{25}$$

$$X = \frac{12 \cdot 25}{20} = 15$$

3.2 Tudo é Matemática

Luiz Roberto Dante

Os conteúdos selecionados no livro, exclusivamente o da 6ª série, são os conteúdos explicitados nos PCNs para esta idade escolar. Apresenta-se de forma dosada e inclui os tópicos relativos a números, álgebra, grandezas e medidas, geometria e tratamento da informação. Prova disto está no PNLD, que afirma que a coleção "(...) contempla de forma equilibrada os tópicos normalmente estudados nessa fase do ensino".

Quanto à articulação entre os campos da Matemática, este tópico é um ponto marcante da obra, pois tem como função dar significado ao desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos, contribuindo para a compreensão dos conteúdos explorados. Para os examinadores e autores do PNLD, "em toda a coleção há conexões bem feitas entre o campo das grandezas e medidas, e os demais conteúdos, além de álgebra, geometria e números. Também é freqüente a associação entre os conhecimentos novos e os já estudados (...)".

Na abordagem dos conteúdos, idéias e procedimentos são geralmente desenvolvidos por meio de diálogos entre personagens, que refletem e discutem sobre as definições e formas de resolução de problemas, o que é muito positivo para desenvolver o raciocínio matemático e transformá-lo numa dinâmica entre livro-aluno-professor. Podemos perceber esta relação no PNLD, em que para os autores e examinadores, essa abordagem "(...) contribui para a construção progressiva do conhecimento". Além disso, nota-se uma preocupação em desenvolver um mesmo conteúdo com diversidade de enfoques, explorando diferentes significados e abordagens. Seqüenciando o PNLD, "na 6ª série, a proporcionalidade é trabalhada algébrica e geometricamente, e aplicada em diferentes situações", o que torna um ponto positivo para a obra e que poucas conseguem explorar com tal clareza.

A apresentação e o desenvolvimento dos conteúdos são geralmente realizados por meio de explanações, diálogos e atividades, e cabe ao aluno fazer as deduções e confrontar suas conclusões com seus colegas, o que contribui para explorar, estabelecer relações e argumentar seus procedimentos. O que se verifica pelo PNLD, "a introdução dos conceitos é sempre realizada por meio de problemas que, de acordo com a metodologia de ensino-aprendizagem adotada, é a base para a construção do novo conhecimento".

Há em bom número, situações-problema que envolve a Matemática com situações sociais atuais, o que favorece a aplicação dos conceitos e procedimentos matemáticos as práticas cotidianas. Além disso, apresenta textos (muitas vezes sobre a história da Matemática), na seção Para ler, pensar e divertir-se, e também possui seções: Trocando idéias e Você sabia que...? Tudo isto contribui para que a relação entre a Matemática e a sua formação no convívio social seja construída de forma ampla e permanente. Podemos verificar esse acontecimento no PNLD, "grande parte das atividades são apresentadas de maneira contextualizada, a partir de situações ambientadas no meio urbano".

Em relação à linguagem, é clara e o vocabulário acessível ao aluno. Nos diálogos em quadrinhos, presentes por todo o livro, embora seja usada a linguagem coloquial, observa-se certo rigor, mas nada que torne a leitura e a interpretação difíceis. Prova disso, está no PNLD, "a linguagem é adequada e recorre-se, de maneira apropriada a textos de diversos tipos e os que envolvem seqüência de símbolos matemáticos, até gráficos, (...)".

O Manual do Professor, é composto por duas partes; a primeira é o livro do aluno reproduzido com as respostas das atividades e algumas sugestões para os professores, e a segunda parte é um suplemento denominado Manual Pedagógico, com orientações ao professor sobre recursos didáticos, resolução de problemas e critérios de avaliação, por exemplo. Segundo o PNLD, "reproduz o livro do aluno e é acrescido de alguns comentários e sugestões, além de respostas às atividades propostas (...)". Ainda no PNLD, "na parte do manual pedagógico (...) apresenta observações, sugestões e outras atividades para cada capítulo". Também contém tópicos como: Avaliação e Avaliação em Matemática, sugestões de leituras complementares e recursos didáticos auxiliares.

3.2.1 Análise do livro da 6ª série

O texto da obra procura levar o aluno a compreender as definições mais importantes e as propriedades centrais da Matemática em nível elementar. Utiliza para isto, personagens com histórias em quadrinhos, fazendo com que o leitor interaja com o livro.

Os conceitos são introduzidos a partir de exemplos concretos, sempre questionando e dialogando com o aluno até encontrar a solução, como se ele estivesse na prática, dentro do problema tentando resolvê-lo. Também, as propriedades são deduzidas em linguagem coloquial, evitando-se definições formais ou receitas prontas.

Vejamos como o livro faz a ligação entre razão, proporção e a propriedade da proporção:

Lídia é aluna da 6ª série A. Nessa classe há 15 meninos e 20 meninas.

Uma das formas de comparar esses números é calcular a razão entre eles, estando atento à ordem considerada:

Razão entre o número de meninos e o número de meninas:

$$15 : 20 = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Veja o significado da razão , expresso de várias formas:

1. *A razão entre o número de meninos e o número de meninas, na 6ª série, é de* $\frac{3}{4}$.

2. *Na 6ª A, para cada 3 meninos há 4 meninas.*

3. *Na 6ª A, o número de meninos corresponde a* $\frac{3}{4}$ *do número de meninas.*

4. *A razão entre o número de meninos e o número de meninas, na 6ª A, é de 3 para 4.*

Segue-se então a definição:

Definição 9 *A razão entre os números a e b, com* $b \neq 0$, *é o quociente de a:b, que pode ser indicado por* $\frac{a}{b}$ *ou qualquer outra forma equivalente.*

É dada seqüência ao assunto com a mesma situação. Desta vez, abordando o conceito de proporção:

Na classe de Lídia, a razão entre o número de meninos (15) e o número de meninas (20) é igual a $\frac{3}{4}$, *ou seja, para cada 3 meninos há 4 meninas.*

A classe da 6ª C, tem 12 meninos e 16 meninas. calculando a razão, pelo mesmo processo mencionado acima, tem-se que é igual ao valor da razão da 6ª A.

Em casos como este, as duas razões formam uma proporção.

O livro destaca como DEFINIÇÃO DE PROPORÇÃO:

Definição 10 *Se a razão entre os números a e b é igual a razão entre os números c e d, dizemos que* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *é uma proporção.*

Percebe-se com base no que foi descrito que, de uma situação simples, o livro consegue abordar dois assuntos e envolvê-los. O que foi feito acima é feito em todos os capítulos da mesma forma.

Os exercícios procuram conduzir o aluno à assimilação de conceitos e propriedades, sem contudo descuidar-se do desenvolvimento das técnicas de cálculo. Estas, a medida que surgem, vão sendo aplicadas a problemas ligados ao cotidiano do aluno. Procura-se abordar os capítulos ou unidades como se fossem complementos uns dos outros.

A seqüência da abordagem dos conteúdos é adequada, pois além de partir de idéias, estabelece coesão entre os tópicos, seguindo uma linha de raciocínio estimulante e desafiadora. Particularmente, no estudo da Proporcionalidade, as idéias vão surgindo no desenvolvimento do assunto e já são feitas conexões com situações do dia-a-dia, além de trabalhar com outras ciências. Também, aborda de forma equilibrada todos os seguintes tópicos: razão proporção, grandezas direta e inversamente proporcionais, situações de não-proporcionalidade, grandezas proporcionais, regra de três simples e regra de três composta.

Abaixo, teremos dois exemplos da REGRA DE TRÊS SIMPLES, retirados deste livro, que servirão para enfatizar a metodologia adotada por ele. Neste caso, não foi formalizada nenhuma definição e veremos como o livro comenta esse procedimento.

1. Uma barra de cano com 6 m de comprimento tem massa de 10Kg. Qual é a massa de uma barra de 9 m de comprimento desse mesmo tipo de cano?

   Esta é uma situação de proporcionalidade direta (diretamente proporcionais): dobrando o comprimento da barra a massa dobra, triplicando o comprimento a massa triplica, e assim por diante.

Elaboramos uma tabela e a partir dela uma proporção que permite o cálculo do valor procurado.

COMPRIMENTO	MASSA
6	10
9	X

Grandezas diretamente proporcionais:

$$\frac{6}{10} = \frac{9}{X}$$

ou

$$\frac{6}{9} = \frac{10}{X}$$

e daí

$$6 \cdot X = 9 \cdot 10$$

$$6X = 90$$

$$X = \frac{90}{6}$$

$$X = 15$$

2. Com 4 pedreiros trabalhando, um muro é construído em 15 dias. Em quantos dias, 6 pedreiros construiriam o mesmo muro trabalhando no mesmo ritmo?

   "Esta é uma situação de proporcionalidade inversa (inversamente proporcionais): dobrando o número de pedreiros o tempo cai pela metade, triplicando o número de pedreiros o tempo é reduzido à terça parte, e assim por diante."

PEDREIROS	TEMPO
4	15
6	X

Grandezas inversamente proporcionais:

$$4 \cdot 15 = 6 \cdot X$$

ou

$$\frac{6}{4} = \frac{15}{X}$$

e daí

$$6X = 60$$

$$X = \frac{60}{6}$$

$$X = 10$$

Depois de resolvidas as duas situações, o livro faz um comentário bem interessante. Usa para isso, personagens em quadrinhos:

"Note que conhecidos três números foi obtido o quarto. Este é chamado de QUARTA PROPORCIONAL. O procedimento usado na resolução desses problemas é conhecido por regra de três simples."

A seguir o enfoque do livro sobre a REGRA DE TRÊS COMPOSTA.

"Os problemas de regra de três composta envolvem mais de duas grandezas dos mais variados tipos, desde que tomadas duas a duas sejam proporcionais (diretamente ou inversamente)."

1. Com 600 Kg de ração é possível alimentar 20 vacas durante 30 dias. Com 800 Kg de ração é possível alimentar 25 vacas durante quantos dias?

RAÇÃO	VACAS	DIAS
600	20	30
800	25	X

"Quantidade de ração e número de dias são diretamente proporcionais (considerando o mesmo número de vacas)"

"Número de vacas e número de dias são inversamente proporcionais (considerando a mesma quantidade de ração)"

Analise como é montada a proporção:

$$\frac{30}{X} = \frac{600}{800} \cdot \frac{25}{20}$$

$$\frac{30}{X} = \frac{15000}{16000}$$

$$15000X = 480000$$

$$X = 32$$

O método que é adotado para a resolução é a REGRA DAS FLECHAS, mencionada no Cap. 2.

O livro ainda propõe problemas, cujas soluções os alunos devem encontrar sozinhos. O grau de dificuldade vai aumentando conforme vão amadurecendo as idéias sobre o assunto. Também o objetivo destas tarefas, principalmente para casa, é possibilitar que o aluno revise o que foi feito em classe, habitue-se a uma disciplina de estudo, vivencie situações novas sem a ajuda do professor e ainda estimule a leitura.

3.3 A conquista da Matemática: a + Nova

Giovanni, Gastrucci, Giovanni Jr.

A seleção dos conteúdos abrange números, geometria, álgebra, grandezas e medidas, e tratamento da informação de forma satisfatória, pois se adequam aos parâmetros curriculares do Ensino Fundamental. No entanto, alguns tópicos são trabalhados de maneira muito técnica, como por exemplo, o cálculo com radicais. Outros, nem são mencionados como, noções de probabilidade e combinatória. Essas situações se descrevem no PNLD, que afirma que a coleção "(...) enfatiza tópicos muito técnicos e não são incluídas noções de probabilidade e combinatória".

Nas atividades, observa-se um esforço contínuo para retomada de tópicos já estudados, o que permite a boa articulação entre o conhecimento novo e o já adquirido. Porém, no que se refere à articulação entre os diferentes campos da Matemática, o livro pouco se esforça para tal, visto que as situações aparecem quase exclusivamente nas grandezas geométricas, o que é um ponto negativo da obra. Destacamos isto analisando o PNLD, "a ordenação linear dos conteúdos não favorece as articulações entre os diferentes campos da Matemática. (...) restringem-se àquelas intrínsecas aos conteúdos, como por exemplo nas grandezas geométricas". Ainda pelo PNLD, "a relação entre o conhecimento novo e o já adquirido é respeitada na seqüência linear de apresentação dos conteúdos, embora nem sempre haja menção explícita a esse fato".

Quanto à abordagem dos conteúdos, observa-se que o método dedutivo é muito explorado e também é dada muita ênfase em geometria, especificamente na plana, com rigor nas definições e na nomenclatura. Com isso, procura-se estimular nos alunos a compreensão do papel da Matemática no desenvolvimento de suas capacidades e sua interação no meio social em que vive. Podemos verificar isto no PNLD, essa compreensão e interação têm papel importante no desenvolvimento de competências complexas para explorar, estabelecer relações, generalizar, provar, expressar e registar idéias e procedimentos, além de servirem para induzir a associação entre conceitos.

Na obra, nota-se a diversidade de enfoques de um mesmo conteúdo, além do que, conceitos e procedimentos são representados de várias formas, favorecendo a aprendizagem. É exatamente isto que encontramos no PNLD, "a coleção apresenta diversidade de enfoque dos temas".

Em relação à metodologia de ensino-aprendizagem, verifica-se que, em geral, os conteúdos são introduzidos através de explanações iniciais em que os conceitos e procedimentos são apresentados e exemplificados, seguido de exercícios com questões predominantemente de aplicação do conhecimento ensinado. De acordo com o PNLD, "as noções e procedimentos são explorados, exemplificados e sistematizados, para serem utilizados, em seguida, em exercícios de aplicação e fixação".

Em geral, os capítulos do livro trazem notícias que envolvem o cotidiano e a realidade dos alunos através de textos ou fatos históricos, o que é positivo para a aprendizagem. No entanto, quando isso ocorre, torna as páginas do livro muito carregadas e mal distribuídas, despertando pouco interesse a quem lê. Também, não encontramos relações entre os conhecimentos novos e os já adquiridos, nem entre as outras ciências. Prova disto é a análise do PNLD que para os autores e examinadores, "(...) nota-se uma preocupação em mostrar a utilidade ou aplicação da Matemática em situações do cotidiano". Além disso, "não é feita conexão entre os conceitos e procedimentos matemáticos estudados". Também, "as conexões da Matemática com outros campos do saber são praticamente inexistentes".

O livro se apresenta de forma dinâmica, sua leitura é agradável e de fácil assimilação. No entanto, em alguns tópicos, o livro trata de maneira muito técnica, tornando-o instável para quem lê. Segundo o PNLD, "em alguns momentos, percebe-se o uso exagerado da linguagem simbólica da Matemática ou de nomenclatura muito técnica".

No que se refere ao manual do Professor, reproduz o livro do aluno, mas é acrescido de um suplemento pedagógico em que se apresentam informações gerais sobre a coleção, sumário e três unidades que expõem os objetivos específicos e as orientações metodológicas relativas aos conteúdos desenvolvidos em cada volume. Também traz bibliografia complementar para o auxílio do professor as suas aulas. Prova disto encontramos no PNLD, "o Manual do Professor inclui (...), resolução de problemas e avaliação, indicação de paradidáticos como leitura complementar para o aluno, sugestões de livros, revistas e outras publicações para o enriquecimento da prática pedagógica e apoio ao trabalho do professor".

3.3.1 Análise do livro da 6ª série

No caso especial deste livro, haverá muitas considerações a fazer, visto que este é o livro mais adotado pelas escolas estaduais.

Nesta obra, a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemát e não a definição. No processo de ensino-aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos são abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-los.

Com base nestas estratégias é que surgem as definições dos assuntos em questão. Isto faz com que a definição seja, para o leitor, parte do problema e não algo deslocado dele. A partir de então, surgem exemplos exclusivamente para a aplicação da definição. É assim que ocorre em todos os capítulos e não poderia ser diferente no capítulo de proporcionalidade.

Quanto aos exercícios, cabe ao aluno a aplicação do texto inicial. É claro, que os problemas não são exercícios em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou processo operatório. Ele é levado a interpretar e estabelecer seus próprios métodos, recaindo muitas vezes na definição. Também, o nível de dificuldade vai crescendo à medida que o aluno se torna confiante do que aprendeu.

Veremos a seguir a seqüência dos tópicos que o livro adota.

Primeiramente, trata de números diretamente proporcionais. Para isto, expõe uma situação.

Uma torneira é aberta para encher um reservatório. De tempos em tempos, é medida a altura da água no reservatório, e o resultado dessa medição encontra-se na seguinte tabela:

TEMPO	ALTURA DA ÁGUA
10	12
15	18
20	24
25	30
30	36

A seguir estabelece razões entre entre as duas colunas da tabela:

$$\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

E assim por diante.

Se todas as razões forem iguais, dizemos que os números da 1ª coluna são diretamente proporcionais aos números da 2ª coluna. Isto ocorre neste caso:

$$\frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \frac{25}{30} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

Então vem a definição:

Definição 11 *Os dois números racionais x, y e z são diretamente proporcionais aos números racionais a, b e c quando se tem $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.*

Depois que a definição é tratada no problema, são lançados mais alguns exemplos para a sua aplicação.

Os conceitos de números inversamente proporcionais e grandezas direta e inversamente proporcionais são abordados da mesma forma. Logo após, é colocada uma série de exercícios.

O enfoque dado à REGRA DE TRÊS SIMPLES também é feito através de situações-problema, como veremos abaixo:

Na extremidade de uma mola é colocado um corpo com massa 10 Kg, verificando-se, então, que o comprimento da mola é de 42 cm. Se colocarmos uma massa de 15 Kg na extremidade dessa mola, qual passará a ser o comprimento dela?

Vamos representar pela letra X o comprimento pedido.

Queremos determinar um desses quatro valores, conhecidos os outros três. Para isso, vamos organizar os dados numa tabela.

MASSA	COMPRIMENTO
10	42
15	X

Se duplicarmos a massa inicial do corpo, o comprimento da mola também duplicará. Logo, as grandezas são diretamente proporcionais. Assim, os números 10 e 15 são diretamente proporcionais aos números 42 e X.

Daí temos:

$$\frac{10}{15} = \frac{42}{X}$$

$$10X = 42 \cdot 15$$

$$10X = 630$$

$$X = \frac{630}{10}$$

$$X = 63$$

O tratamento dado para a regra de três simples com as grandezas inversamente proporcionais, ocorre de modo análogo. Isto é, trabalha-se com a aplicação da regra de três simples sem dar maiores explicações sobre o procedimento.

Quanto à REGRA DE TRÊS COMPOSTA, o método utilizado é a fixação de uma das grandezas e a análise do que ocorre com a duas outras. Ressaltamos que se trabalha somente com três grandezas.

Consideremos as situações descritas no livro:

1. Trabalhando durante 6 dias, 5 operários produzem 400 peças. Quantas peças desse mesmo tipo serão produzidas por 7 operários trabalhando durante 9 dias?

OPERÁRIOS	DIAS	PEÇAS
5	6	400
7	9	X
A	B	C

(a) Fixando a grandeza A, vamos relacionar as grandezas B e C.

Se dobrarmos o número de dias, o número de peças também dobrará. Logo, as grandezas B e C são diretamente proporcionais.

(b) Fixando a grandeza B, vamos relacionar as grandezas A e C.

Se dobrarmos o número de operários, o número de peças também dobrará. Logo, as grandezas A e C são diretamente proporcionais.

Então, a grandeza C é diretamente proporcional às grandezas A e B. Logo, seus valores serão diretamente proporcionais aos produtos dos valores das grandezas A e B, ou seja:

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{9}=\frac{400}{X}$$

$$\frac{30}{63}=\frac{400}{X}$$

$$30X=25200$$

$$X=\frac{25200}{30}$$

$$X=840$$

2. Um ciclista percorre em média 200Km em 2 dias, se pedalar durante 4 horas por dia. Em quantos dias esse ciclista percorrerá 500 Km, se pedalar 5 horas por dia?

QUILÔMETROS	HORAS/DIA	DIAS
200	4	2
500	5	X
A	B	C

(a) Fixando a grandeza A, vamos relacionar as grandezas B e C.

Dobrando-se o número de horas que ele roda por dia, o número de dias cairá para a metade. Logo, as grandezas B e C são inversamente proporcionais.

(b) Fixando a grandeza B, vamos relacionar as grandezas A e C.

Dobrando-se o número de quilômetros percorridos, o número de dias também dobrará. Logo, as grandezs A e C são diretamente proporcionais.

Então a grandeza C é diretamente proporcional à grandeza A e inversamente proporcional à grandeza B. Isso nos leva a escrever a razão inversa dos valores que representam a grandeza B.

Daí temos:

$$\frac{200}{500} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2}{X}$$

$$\frac{1000}{2000} = \frac{2}{X}$$

$$1000X = 4000$$

$$X = \frac{4000}{1000}$$

$$X = 4$$

Além disso, o livro é constituído de uma linguagem bem adequada a que se destina, tornando uma leitura agradável e estimulante. No entanto, percebemos que, algumas páginas vêm muito carregadas de informações, muitas vezes passadas despercebidas pelos alunos pois estão deslocadas do contexto: são as seções "Tratando a informação"e "Troque idéias com os colegas"

Considerações finais

De acordo com as discussões anteriores, pudemos observar o quanto a proporcionalidade é importante. As informações levantadas são suficientes para, ao menos refletirmos sobre o ensino desse assunto.

Entendemos ser oportuno, o professor de matemática refletir também sobre as dificuldades que os alunos apresentam em compreender os tópicos dentro deste conteúdo: o conceito de proporção e as regras de três simples e composta no âmbito das grandezas direta e inversamente proporcionais por exemplo.

Os livros didáticos analisados nos mostraram que alguns tópicos explorados são abandonados apressadamente, ou nem mencionados, como se quisessem somente mostrar a existência, sem contudo, abrangê-los: situações de não-proporcionalidade, por exemplo.

O que foi desenvolvido neste trabalho coloca o aluno frente a frente com os fenômenos cotidianos, ou seja, as variáveis envolvidas estão diretamente ligadas com situações do seu dia-a-dia. Essa possibilidade, torna o ensino significativo, cujo conhecimento é construído através da relação entre o aluno e a situação problema.

Referências Bibliográficas

[1] Geraldo Ávila. Razões, proporções e regra de três; Revista do Professor de Matemática, nº 8, 1º sementre 1986.

[2] Francisco Fernandes, Celso Pedro Luft, F. Marques Guimarães; Dicionário Brasileiro Globo, 39ª Edição, 1995.

[3] Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado. Temas e Problemas Elementares, 2005

[4] Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antônio Machado; Matemática e Realidade, 6ª série, 4ª Edição, 2000

[5] Luiz Roberto Dante. Tudo é Matemática, 6ª série, 2ª Edição, 2005

[6] Luis Marcio P. Imenes, José Jakubovic. Considerações sobre o ensino da regra de três composta; Revista do Professor de Matemática, nº 2, 1º semestre 1983.

[7] João Bosco Pitombeira F. de Carvalho. PNLD Plano Nacional do Livro Didático; Guia de Livros Didáticos 2005, vol. 3.

[8] Giovanni, Castrucci, Giovanni Jr.; A Conquista da Matemática: a nova, 6ª série, 2002.