

ROBERTO ANTONIO VOSGERAU

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO BIOMECÂNICO
DE UMA PRÓTESE PARCIAL FIXA POSTERIOR**

**CURITIBA
2002**

ROBERTO ANTONIO VOSGERAU

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO BIOMECÂNICO
DE UMA PRÓTESE PARCIAL FIXA POSTERIOR**

Dissertação apresentada como requisito parcial à
obtenção do grau de Mestre em Ciências, área de con-
centração em Programação Matemática. Curso de Pós-
Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia. Se-
tor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

Orientadora: Prof^a. Dra. Mildred Ballin Hecke

**Co-orientador: Prof^o. Dr. Roberto Dalledone
Machado**

CURITIBA

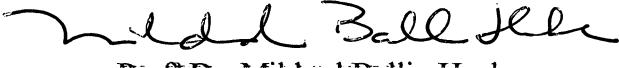
2002

Roberto Antonio Vosgerau

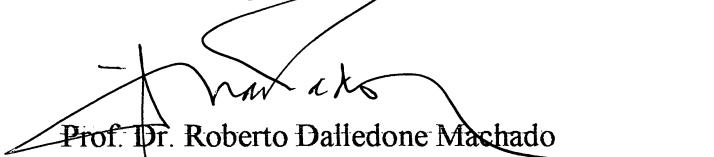
“Análise do Comportamento Biomecânico de Uma Prótese
Parcial Fixa Posterior”

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciências, M.Sc. Áreas de Concentração : Programação Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná pela comissão formada pelos professores:

Orientadora:

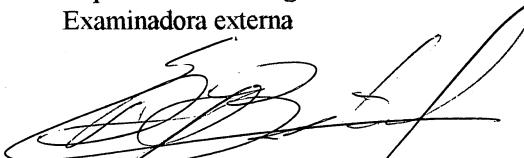

Profº Dr. Mildred Ballin Hecke
Setor de Tecnologia, UFPR

Co-Orientador


Profº Dr. Roberto Dalledone Machado
Setor de Tecnologia, UFPR


Profº Dr. Rodney Carlos Bassanezi
Departamento de Matemática Aplicada
UNICAMP-SP
Examinador externo


Profº Dra. Beatriz Luci Fernandes
Departamento de Engenharia Mecânica – PUC/PR
Examinadora externa


Profº Ederson A. G. Betiol
Departamento de Odontologia Restauradora - UFPR
Examinador externo

Curitiba, 08 de novembro de 2002
Paraná - Brasil

*Se o homem puder, com dignidade
e força, conservar o seu ideal superior
de viver honesta e honradamente,
de aprender com todos,
com humildade, de amar o próximo
sem exigência de retorno, de trabalhar
arduamente em benefício de todos,
sinceramente será feliz, muito feliz.*

Dr. Leocádio José Correia.

*A toda nossa família pelo apoio, pelas orações, em especial aos meus pais
Fredolim(†) e Iloah e meus sogros Sebastião(†) e Jany(†).*

*Aos meus irmãos, Luís(†), Roseli(†), José Carlos e Ciro, pelo companheirismo e
união.*

*Aos meus amados filhos, Rosana e Antonio Carlos, Lígia e Rogério, Flávio,
Marcos e Milene, pela paciência, apoio e afeto que nos une.*

*À minha esposa Maria Jurema que me faz feliz todos os dias, a quem aprendi
admirar muito pelo seu amor e dedicação.*

Agradecimentos

Meus agradecimentos:

aos professores orientadores, Dra. Mildred Ballin Hecke e Dr. Roberto Dalledone Machado, pela orientação, confiança depositada e pelo apoio;

aos professores do curso de pós-graduação, pela formação e estímulo;

ao prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezzi, pela amizade, orientação e estímulo;

ao prof. Dr. Wilson Costa, pela amizade e pelos esclarecimentos sobre Odontologia;

ao prof. Ederson A. G. Betiol, pelo apoio, auxílio, amizade e elucidações sobre Odontologia;

aos colegas de pós-graduação, pela amizade;

à Maristela, pela presteza, eficiente desempenho e amizade;

ao sr. Elizeu, pelo atendimento e amizade;

à Maria Fernanda, pela colaboração, apoio e amizade;

aos professores do departamento de Matemática do CEFET-PR de Ponta Grossa e Curitiba, por me proporcionarem condições de realizar este trabalho;

a todos que contribuiram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho;

a *DEUS*, a quem tudo devemos, por ter-me concedido a graça de realizar este trabalho e ter colocado em meu caminho pessoas tão especiais com as quais muito aprendi e por proporcionar-me sempre motivos para agradecer.

Resumo

Pacientes com ausência de dentes postero-inferiores são encontrados freqüentemente em clínicas odontológicas e existem várias alternativas de reabilitação para resolver este tipo de problema. Uma delas é o implante e a colocação de uma prótese fixa que une este implante a um dente natural.

O objetivo deste estudo é avaliar a distribuição de tensões no osso da mandíbula, através do Método dos Elementos Finitos, por meio de um modelo bidimensional de uma prótese parcial fixa posterior quando submetida a forças mastigatórias. O Método dos Elementos Finitos foi adotado para análise numérica com a utilização do software ANSYS® 5.7.1, versão universitária.

O conjunto constituído pelo primeiro pré-molar inferior, o implante osseointegrado (sistema Branemark) localizado na região do segundo molar inferior (situados no mesmo hemi arco) e dois pônticos localizados na região do segundo pré-molar e primeiro molar inferior, são submetidos a cargas verticais sobre os elementos desta ponte.

O modelo foi desenvolvido a partir de uma imagem radiográfica digitalizada da região posterior esquerda da mandíbula e construído utilizando uma plataforma CAD. Foram comparados os resultados obtidos (tensões sobre o osso cortical e trabecular) na região próxima ao ligamento periodontal (primeiro pré-molar) e na região próxima ao implante. A existência de um nível mais alto de tensão para

o local do implante pode resultar em perda óssea na região, podendo conduzir o tratamento a um fracasso. Para melhor comparar os resultados foram feitas simulações considerando alterações nesta prótese, acrescentando: a) um conector semi-rígido na região entre o primeiro molar e o implante (segundo molar); b) um conector semi-rígido entre o dente natural (primeiro pré-molar) e o segundo pré-molar. Para o estudo destes modelos foi utilizada a teoria do contato.

Os modelos foram analisados considerando-se o caso de estado plano de tensões. Os modelos numéricos adotados, as simplificações consideradas, as dificuldades inerentes à modelagem e os resultados obtidos com o estudo das próteses em questão (prótese parcial fixa rígida e as semi rígidas) são discutidos.

Para a prótese rígida, verificou-se a existência de maior concentração de tensões na região óssea cortical que circunda o implante (parte superior); na semi-rígida (situação b), as tensões diminuíram nesta área, aumentando na região do encaixe enquanto que na semi-rígida (situação a), as tensões aumentaram sensivelmente na região óssea cortical daquela região.

Palavras-chave: Prótese parcial fixa, pônticos, implante osseointegrado, edentado, ligamento periodontal, Método dos Elementos Finitos, teoria do contato.

Abstract

Patients lacking posterior teeth are commonly found in dentist's clinics and there are several rehabilitation alternatives to solve this kind of problem. One of them being the implant and the making of a fixed prosthesis connecting this implant to a natural tooth.

The objective of this study is to evaluate the tensions distribution in the jaw bone, through the Finite Elements Method, simulating a partial fixed prosthesis by a bidimensional model when submitted mastigatory forces. The Finite Elements Method were adopted with the use of the ANSYS 5.7.1 software, university version.

The group constituted by the first inferior premolar, the osseointegrated implant (Branemark system) and two pontics located in the second premolar area and first inferior molar, are submitted to vertical loads on this bridge elements.

The model was developed from a digital radiographic image of the jaw posterior left area and built using the CAD platform. The obtained results were compared (tensions on the cortical and trabecular bone) in the close area to the periodontal ligament (first premolar) and in the close area to the implant. The existence of a higher level of tension for the implant place may result in bone loss in the area, leading to a treatment failure. For results best comparison was made simulations considering an alteration in this prosthesis, increasing: a) a semi-rigid connector in the region between first molar and implant (second molar); b) a semi-rigid con-

nectar between natural tooth (first premolar) and second premolar. For the study of these models was used contact's theory.

The models were analyzed being considered the plain state of stress. The numeric models adopted, the considered simplifications, the inherent difficulties to the shaping and the results obtained with the study of the partial fixed prosthesis and the semi-rigid ones are discussed.

For the rigid prosthesis, was verified the existence of larger concentration of tensions in the cortical bone area that surrounds the implant (superior part); in the semi-rigid (situation b), the tensions decreased in this area, increasing in the fitting area, while in the semi-rigid (situation a), the tensions increased sensibly in the cortical bone region of that region.

Key-word: Fixed partial denture, pontics, osseointegrated implant, edentate, periodontal ligament, Finite Element Method, contact's theory.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	vii
Lista de símbolos	viii
1 Introdução	1
2 Revisão da literatura	7
2.1 Próteses, implantes, encaixes e análises clínicas	7
2.2 O uso do Método dos Elementos Finitos na Odontologia	13
3 Revisão de conceitos teóricos	26

3.1	Equações diferenciais	26
3.2	Teoria da Elasticidade	36
3.2.1	Estado plano de tensões	36
3.2.2	Cinemática	39
3.2.3	Campo de deslocamentos	40
3.2.4	Componentes de deformação	40
3.2.5	Esforços internos	45
3.2.6	Trabalho externo	46
3.2.7	Equação constitutiva	47
3.2.8	Equilíbrio	50
3.2.9	Tensões principais	50
3.2.10	Critério de escoamento	52
3.2.11	Equações que governam o problema	52
3.2.12	Equações de compatibilidade	53
3.2.13	Resumo das equações	54
3.3	Teoria do Contato	55
3.3.1	Forças de contato	63
3.3.2	Métodos de solução	65
4	Método dos Elementos Finitos	70
4.1	Breve histórico	70

4.2	Elementos finitos unidimensionais	73
4.3	Elementos finitos bidimensionais	75
4.3.1	Elemento finito triangular linear	75
4.3.2	Elemento triangular quadrático	83
4.3.3	Elemento finito isoparamétrico	89
5	Modelagem	98
5.1	Geometria das estruturas	98
5.1.1	Modelagem computacional	103
5.1.2	Modelagem dos contatos	122
5.1.3	Resultados nos modelos 2 e 3	127
6	Conclusões e sugestões de continuidade	133
Glossário		137
Referências Bibliográficas		143

Lista de Figuras

3.1	Partição do intervalo $[0,1]$ em quatro elementos finitos	32
3.2	Estado plano de tensões	37
3.3	Plano médio de uma chapa	37
3.4	Tensões normais	38
3.5	Tensões de cisalhamento	39
3.6	Retângulo infinitesimal	41
3.7	Deformação na direção do eixo OX	41
3.8	Deformação na direção do eixo OY	42
3.9	Deslocamento de um ponto P	43
3.10	Deformação angular	44
3.11	Cargas de corpo e de superfície	47
3.12	Tensões principais	51
3.13	Corpos em contato	56
3.14	Contato	57

3.15	Representação de forças em contato	59
3.16	Quantidades de contato (BATHE, 1997)	61
3.17	Elemento de contato bidimensional	63
3.18	Solução - método incremental para uma carga (COOK, 1989)	67
3.19	Newton-Raphson para uma carga P_b (COOK,1989)	68
4.1	Elemento finito triangular linear	76
4.2	Triângulo linear - coordenadas homogêneas	77
4.3	Função de forma ϕ_1	80
4.4	Função de forma ϕ_3	81
4.5	Elemento finito triangular de seis nós	84
4.6	Elemento isoparamétrico	91
5.1	Modelo inicial	99
5.2	Elemento triangular quadrático	105
5.3	Malha da prótese parcial fixa posterior	106
5.4	Malha do periodonto	107
5.5	Malha na região do implante	108
5.6	Material dos componentes da estrutura	109
5.7	Tensão Von Mises na prótese fixa	114
5.8	Tensões de Von Mises no implante da prótese fixa	115
5.9	Prótese semi rígida com encaixe na coroa da fixação (modelo 2) . .	116

5.10 Prótese semi rígida com encaixe na coroa segundo pré molar (mod 3)	117
5.11 Distribuição vetorial das tensões principais na região do implante	118
5.12 Distribuição vetorial das tensões principais na região do periodonto	119
5.13 Tensões de Von Mises no osso cortical (região do dente natural) - modelo 1	120
5.14 Tensões de Von Mises na região óssea próxima do implante (mod 1)	121
5.15 Superfícies de contato	123
5.16 Tensões de Von Mises na região óssea próxima ao dente natural (modelo 2)	128
5.17 Tensões de Von Mises na região óssea cortical próxima do implante (modelo 2)	129
5.18 Tensões de Von Mises no implante (modelo 3)	131
5.19 Tensões de Von Mises região óssea, próxima do implante (modelo 3)	131
5.20 Tensões de Von Mises na região óssea, próxima do dente natural (modelo 3)	132
5.21 Tensões de Von Mises na região óssea próxima ao implante nos modelos 1, 2 e 3 respectivamente	132
6.1 Secção de um implante osseointegrado	141
6.2 Implantes dentários	142
6.3 Implante Branemark	142

Lista de Tabelas

5.1	Dimensão média, em mm, do primeiro pré-molar inferior	100
5.2	Dimensão média, em mm, do segundo pré-molar inferior	100
5.3	Dimensão média, em mm, do primeiro e segundo molar inferior	101
5.4	Propriedades mecânicas dos materiais que compõem o modelo (Sendyk, 1998)	110
5.5	Resultados das tensões máximas e mínimas, nos modelos 1, 2 e 3	130

Lista de símbolos

x, y, z	coordenadas cartesianas
n	vetor normal unitário
u	vetor deslocamento
u_i	deslocamentos nodais
u_i	vetor de deslocamentos nodais
\dot{u}	velocidade
δu	vetor de deslocamentos virtuais
$\delta \varepsilon$	vetor de deformações virtuais
μ	coeficiente de atrito
ν	coeficiente de Poisson
E	módulo de elasticidade
f	força de corpo resultante
f^{12}	força de contato entre dois corpos
b	força de corpo
p	força de superfície

ε_x	deformação na direção X
ε_y	deformação na direção Y
γ_{xy}	deformação angular ou distorção
σ_x	tensões na direção X
σ_y	tensões na direção Y
τ_{xy}	tensões cisalhantes
Ω	domínio
Γ	contorno do domínio Ω
\mathcal{B}	corpo
W_i	trabalho interno
W_e	trabalho externo
$[B]$	matriz que relaciona deformações com deslocamentos
$[D]$	matriz de elasticidade
T_e	transformação no sistema isoparamétrico
J	matriz jacobiana de transformação
Γ^c	contorno dos corpos na região onde ocorre o contato

Γ^{12}, Γ^{21} par de superfícies de contato

σ_n vetor de tensão normal

g_n função *gap* na direção normal

g_s função *gap* na direção tangencial

f_n força nodal na direção normal

f_s força nodal na direção tangencial

FKN fator de rigidez de contato normal

FKT fator de rigidez de contato de deslizamento

FTOLN fator de tolerância absoluta

λ componente normal da força de contato

c componente tangencial da força de contato

s direção tangencial à superfície de contato

H conjunto de funções quadrado integráveis

$[\Delta u]$ vetor incremental de deslocamentos nodais

Capítulo 1

Introdução

O sucesso, a longo prazo, de um tratamento odontológico com implantes dentários, depende da boa osseointegração. Tal fato é associado ao tipo apropriado do osso com a superfície da fixação. Nas clínicas odontológicas surgem, com certa freqüência, clientes com ausência de dentes posteriores inferiores. Diz-se que estes possuem arcadas com extremos livres, classe I e II de acordo com a classificação de Kennedy (1927). Estas perdas dentárias normalmente são causadas por cáries ou problemas periodontais que estimulam uma constante busca da solução reabilitadora protética ideal a ser oferecida a cada paciente. Periodonto é um tipo de fibra que serve de ligamento entre o dente e o osso da mandíbula ou da maxila, destinado a absorver as cargas mastigatórias.

Para solucionar este problema existem algumas alternativas reabilitadoras. Uma delas é através de próteses parciais removíveis, porém nos casos de extremos

livres, as próteses possuem dois tipos de suporte: os dentes que no estado de normalidade possuem uma mobilidade aproximada de 0,1 mm e a fibromucosa que tem uma resiliência de 0,4 a 2 mm (Mensor, 1968) o que dificulta este tipo de reabilitação. Outro inconveniente é que estas próteses devolvem uma eficiência mastigatória menor e também são menos confortáveis que as próteses fixas (Akagawa et al, 1989).

Outra alternativa é através das próteses parciais fixas em cantilever (balanço) (Tylman et al., 1960) que possuem um comportamento biomecânico desfavorável e necessitam de desgaste de alguns elementos dentários, muitas vezes sadio, para servirem de retentor para essas próteses.

A prótese fixa sobre implantes osseointegrados seria a melhor opção de tratamento por devolver uma boa eficiência mastigatória como as próteses fixas dento-suportadas sem ter que desgastar dentes, por ter uma menor perda óssea na região ao longo do tempo e ser mais confortável que as próteses removíveis (Akagawa et al, 1989).

Entretanto, em alguns casos, devido à perda óssea, na posição do nervo alveolar inferior, ou a perda de implantes, é necessário construir a união de um dente com um implante que não possui ligamento periodontal e consequentemente possui mobilidade bem menor do que o dente (Hobo et al., 1989; Gyllenram, 1994; Weinberg, 1993).

É muito interessante observar como a prótese, uma vez instalada na boca do

paciente, se comporta sobre as estruturas que lhe darão suporte, já que ela é um aparelho mecânico que receberá cargas e que lhes adicionará cargas protéticas, ao mesmo tempo em que funciona num meio biológico.

Na indicação de uma prótese deve-se planejar o equilíbrio entre as cargas acrescidas e a capacidade do periodonto de sustentação em suportá-las. Portanto, a repercussão nos dentes-suportes, dependendo de um planejamento correto ou não, pode variar desde um estímulo fisiológico até o estabelecimento de uma patologia mais séria.

O objetivo principal de uma prótese dental é manter o equilíbrio entre a saúde e a função do sistema estomatognático, preservando suas estruturas, além de proporcionar estética agradável e conforto no uso (Laganá, 1996).

Alguns autores sugerem a separação dessas próteses dento-implanto suportada através de encaixes (conexão semi-rígida) e não usar uma conexão rígida (monobloco) que sobrecarregaria o implante por possuir uma mobilidade bem menor do que o dente (Cohen e Orenstein, 1999).

Outros autores sugerem que nos casos em que há necessidade de combinação entre elemento dentário e implante osseointegrados, deve-se lançar mão de uma conexão rígida (Lum et al, 1991).

Os encaixes extracoronários, em particular, são os mais indicados para atuar como retentores de próteses parciais removíveis de extremidades livres, principalmente aqueles de conexões elásticas, que funcionam de forma a minimizar as

tensões ou cargas sobre os dentes-suportes.

Os encaixes extracoronários rígidos e semi-rígidos apresentam características diferentes em relação a alguns aspectos como os de natureza mecânica, localização, rigidez, levando-os a atuar de maneiras distintas sobre as estruturas de suporte (Laganá, 1996).

O objetivo deste trabalho é simular o comportamento biomecânico e avaliar a distribuição de tensões nas estruturas de suporte de uma prótese parcial fixa de quatro elementos que possui como pilares o primeiro pré-molar e um implante do mesmo hemi-arco, localizado na região do segundo molar inferior, com conectores rígidos, submetidos a forças oclusais. No caso dessa prótese ser semi-rígida, onde os encaixes foram considerados com o mesmo material das coroas (liga áurea), as folgas previstas e até toleradas fazem com que a maior parte das vinculações entre os elementos se efetue por contato nesta região. O efeito do contato entre componentes é de difícil avaliação, pois o sistema formado entre eles é não-linear. Para tanto foi utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF), que é uma técnica de solução aproximada para modelos matemáticos que buscam representar o comportamento mecânico dos corpos, aqui representado pela estrutura protética, sujeita a condições de contorno e de carregamento, com auxílio do software ANSYS®, 5.7.1, versão universitária. A versatilidade do MEF permite dentre outras aplicações, a solução de problemas de contato entre corpos de geometria complicada, além de simular o comportamento de diversas classes de materiais.

No capítulo 2 apresenta-se uma revisão de literatura seguindo uma cronologia sobre próteses, implantes, encaixes e análises clínicas e sobre o uso do MEF na Odontologia.

Uma revisão dos conceitos teóricos abordando equações diferenciais, teoria da elasticidade e teoria do contato é descrita no capítulo 3. A teoria do contato utilizada, baseia-se no princípio dos trabalhos virtuais (Bathe, 1997), e também é descrita sua modelagem computacional. Devido a não linearidade do contato, é feita uma abordagem geral dos métodos disponíveis para a solução de sistemas algébricos não lineares, bem como dos métodos para resolver problemas de funções de restrição, impostas pelo contato (Bazaraa & Shetty, 1979).

Para avaliar a intensidade e distribuição de tensões em próteses dentárias foi usado o Método dos Elementos Finitos (MEF), descrito no capítulo 4. Ele é muito utilizado na engenharia, e também na área de saúde, principalmente em medicina e odontologia, para simular o funcionamento das estruturas do corpo humano (Selna 1975). O MEF apresenta várias vantagens com relação a outros métodos quando se trata de avaliação da distribuição de tensões durante os movimentos mastigatórios no sistema estomatognático. Porém, são ressaltadas as dificuldades em se conseguir modelos matemáticos próximos da realidade. Neste trabalho foram necessárias algumas suposições simplificadoras em decorrência da impossibilidade de se copiar fielmente as estruturas e o funcionamento do corpo humano devido à variação existente dentro da espécie. O MEF foi usado, por ser um método

numérico (computacional) que viabiliza a resolução de problemas complexos, obtendo resultados muito próximos dos reais, que seriam praticamente impossíveis de serem solucionados teoricamente ou analiticamente.

Sabe-se que, em muitos problemas, a distribuição de tensões nem sempre pode ser medida fisicamente. Porém, com o MEF, esta tarefa pode ser alcançada, pois pode-se avaliar a distribuição de tensões e deformações no elemento visualizando-se e interpretando-se as imagens através de tabela de cores em uma etapa de pós-processamento. É um método numérico para solucionar de maneira aproximada, equações diferenciais parciais oriundas da física matemática.

Uma apresentação da prótese parcial fixa posterior, objeto deste estudo com sua geometria e materiais que a compõe é descrita no capítulo 5, bem como sua modelagem computacional criada com auxílio do software ANSYS®, 5.7.1, versão universitária. Ainda foram discutidos os resultados numéricos da simulação para os três modelos de próteses: prótese parcial fixa, prótese semi rígida com encaixe na coroa da fixação e prótese semi rígida com encaixe na coroa do segundo pré molar.

O capítulo 6 traz os resultados obtidos, as conclusões e sugestões futuras com os modelos descritos no capítulo anterior.

Capítulo 2

Revisão da literatura

2.1 Próteses, implantes, encaixes e análises clínicas

Branemark et al (1969), introduziram o conceito de implantes osseointegrados.

Apresentaram estudo em cães, indicando que próteses poderiam ser suportadas

por implantes de titânio, e sugeriram seu uso em humanos. A técnica deveria ser:

1) cirurgia atraumática tanto aos tecidos moles como aos duros; 2) implantes quimicamente estáveis e puros de titânio; 3) pós cirúrgico com retalho fechado, permitindo uma cicatrização onde os implantes permanecessem isolados da cavidade oral, até restabelecimento da barreira biológica; 4) higiene oral.

Branemark et al. (1977), ao longo de dez anos, utilizando 1618 implantes osseointegrados em 235 maxilas e mandíbulas, demonstraram estabilidade de 76% das próteses colocadas em maxila e 99% das instaladas em mandíbulas. Após

nova manipulação e reimplantação, outros 18% dos pacientes na maxila e 1% na mandíbula também ficaram estáveis. Assim, em todo material colhido, alcançaram uma média de sucesso de 94% para maxila e 100% para a mandíbula.

Demonstraram, desse modo, ser possível um prognóstico a longo prazo com base em conhecimentos biológicos e experiência clínica.

Nyman & Lindhe (1979) fizeram um estudo, em que foram realizados 60 casos clínicos de próteses extensas com múltiplos pônticos em cantilever e pilares com grande perda óssea, na maioria dos casos, contrariando a lei de Ante.¹ Todas as próteses examinadas funcionaram de 8 a 11 anos sem perder o ligamento ao redor dos dentes suportes. Os autores salientam que o sucesso destas próteses se deu provavelmente devido à completa eliminação da placa e devido ao desenho oclusal correto.

Adell et al. (1981), observaram, num período de 5 a 9 anos, um grupo de 130 pacientes com próteses implanto-suportadas na região da maxila e mandíbula. Concluíram que 81% dos implantes colocados na maxila e 91% na mandíbula permaneceram estáveis. O valor médio de perda óssea marginal durante o período de osseointegração (18 meses) foi de 1,5 mm e nos anos subsequentes, 0,1 mm.

Borchers & Rechardt (1983), afirmaram que a ausência de ligamento periodontal nos implantes osseointegrados provoca a transmissão de cargas ao osso

¹Diz: "A área da superfície das raízes dos apoios, deve ser igual ou superior à dos dentes que vão ser substituídos por pônticos"

adjacente ao implante. Já, em dentição natural, o ligamento periodontal absorve parte da carga e dissipa de certa forma a restante. Assim, quando cargas são aplicadas sobre implantes osseointegrados, estes se comportam diferentemente que os elementos naturais, transmitindo a carga ao tecido ósseo com maior intensidade e alterando o fenômeno de remodelação óssea de alguma maneira. Este fato também foi relatado por Hobo et al. (1989).

Ericsson et al. (1986) fizeram um estudo clínico com dez indivíduos reabilitados por próteses fixas, suportadas ao mesmo tempo por elementos dentários e por implantes osseointegrados. Em seis deles foram utilizados conectores rígidos e nos outros quatro, semi-rígidos. Estes pacientes foram avaliados num período de seis a trinta meses, onde foram revelados bons resultados clínicos. Os autores discutem as diferenças entre a mobilidade dos implantes e dos dentes, devido a presença do ligamento periodontal. Contudo, devido ao curto tempo de acompanhamento e ao pequeno número de pacientes tratados, os autores ainda não indicam como regra para tratamento.

Richter (1989) afirmou que cargas horizontais ao implante causam maiores tensões ao osso cortical, fato este confirmado pelos estudos por elementos finitos de Borchers & Rechardt (1983). Mecanicamente isto é desfavorável porque as margens do tecido ósseo precisam reagir como um elemento de suporte do implante, surgindo assim o aparecimento de destruição óssea em forma de cratera no nível coronário do implante. O autor sugere o estreitamento da mesa oclusal, o aumento do diâmetro

do implante e o ajuste dos movimentos oclusais com liberdade, sem bruxismo, como forma de atenuar o aparecimento de cargas horizontais.

Van Rossen et al (1990) e Clelland et al (1991), estudando implantes de formas diferentes, avaliaram a dissipação de cargas para o osso suporte. Concluíram que as tensões críticas concentravam-se na crista óssea, e que as mais baixas concentravam-se na região apical do implante, na posição estudada.

Patterson et al (1992) estudaram através de análises teóricas de um modelo idealizado, a fadiga dos parafusos que compõem o conjunto dos implantes dentais osseointegrados. Os princípios de engenharia mecânica mostram a importância da pré carga (tensão) inicial existente entre os parafusos deste sistema. Quando um sistema é construído com implantes suficientes e equidistantes, a resistência à fadiga é de aproximadamente 20 anos. Este valor cai drasticamente quando as condições prescritas não são satisfeitas.

Akagawa et el. (1992), através de estudo tridimensional, analisaram a interface implante/óssea de um implante osseointegrado. Verificaram que esta poderia ser afetada conforme a intensidade da carga mastigatória. A biomecânica da interface contribui para o sucesso de um tratamento, porém uma mesma magnitude de carga pode gerar efeitos diferentes nesta interface, em função de sua direção.

Nevins & Langer (1993) publicaram estudo da aplicação de implantes osseointegrados na região posterior da mandíbula. Acompanhados por sete anos, encontraram uma média de sucesso de 95,5% para os 551 implantes posicionados na

mandíbula, e 97% para as 247 próteses instaladas em 200 pacientes. Comprovaram assim, a viabilidade técnica em questão.

Walton & MacEntee (1993) fizeram um estudo com 29 pacientes que receberam 32 próteses implanto-suportadas (12 fixas e 20 removíveis) colocadas sobre 107 implantes. Apesar do curto período de acompanhamento observaram que as próteses removíveis necessitaram de mais ajustes e reparos do que as próteses fixas. Salientaram que estas considerações deveriam ser levadas em conta durante o planejamento das próteses.

Weinberg & Kruger (1994) fizeram algumas considerações biomecânicas quando há união de um pilar dente natural e um pilar implante osseointegrado. Revelam, neste estudo, a diferença de mobilidade de um implante para um dente natural devido à presença das fibras periodontais e recomenda o uso de um encaixe semi-rígido para prevenir a sobrecarga do implante ou do parafuso de retenção.

Ogiso et al. (1994) estudaram histologicamente as consequências das cargas geradas em um implante e em dente natural. Concluíram que a longevidade de um implante está relacionada ao número de implantes, seu comprimento, seu diâmetro, tipo de prótese utilizada e à capacidade de receber cargas oclusais.

Breeding et al. (1995) comentaram a respeito da união de dentes naturais a implantes osseointegrados através de próteses parciais fixas e discutiram a diferença de mobilidade entre eles. Citaram que alguns autores defendem o uso de uma conexão rígida e outros, da semi-rígida. Este estudo "in vitro" mostra o funciona-

mento de uma prótese com conector rígido e outra com conector semi-rígido.

Richter (1995), desenvolveu um aparato capaz de quantificar as cargas oclusais sem alterar a dimensão vertical. Pela técnica, um transdutor era colocado diretamente sobre o implante ou dente natural "in vivo". Implantes isolados na região de molares e pré-molares geraram força vertical máxima de 120 a 150 N. A mastigação em oclusão cêntrica gerou uma força de aproximadamente 50 N, para ambos os pilares natural ou implante. Prematuridades menores que 200 μm na superfície oclusal não foram significantes em relação ao aumento da força vertical gerada pelos implantes. Assim, o autor concluiu que o elemento intra móvel de absorção de carga dos implantes pode não ser necessário, uma vez que a resiliência axial é menor que 100 μm .

Ingber & Jansen(1997), comentam a diferença biológica existente entre um dente natural que possui ligamento periodontal e um implante que relativamente não possui movimento no osso. Esta conexão teria como consequência a migração apical do dente natural, recomendando uma conexão rígida, acreditando que a união implante-dente deve ser evitada sempre que possível e explicam que os dentes não podem ajudar os implantes, mas podem prejudicá-los e afirmam que implantes não ajudam os dentes, mas podem tolerá-los. Salientam que com os avanços das técnicas cirúrgicas, se existe um espaço para um pôntico então existe espaço para um implante, havendo poucas áreas onde os implantes não podem ser colocados.

Lindh et al. (1997), sugeriram um tipo de encaixe para união dente-implante,

pois, segundo os autores, frequentemente o seio maxilar e o nervo alveolar inferior dificultam a colocação de implantes na região posterior. Porém com a confecção de próteses fixas unindo dente a implante, pode-se restaurar até a região de segundo pré-molar.

Chen et al. (1999), estudaram a partir de dois modelos tridimensionais da mandíbula, um para análise global e outro mais detalhado somente da região retro-molar, onde foi colocado um implante usado para ancoragem ortodôntica. Este trabalho enfatiza a tensão ao redor e entre as roscas do implante, para futura comparação com dados histomorfométricos existentes nos estudos clínicos.

Borges et al. (2001), descrevem a respeito da conexão dente-implante, fazendo uma revisão da literatura, abordando aspectos técnicos e biomecânicos desta união. Os autores acreditam que este tipo de tratamento é viável e defendem uma conexão rígida entre os pilares.

2.2 O uso do Método dos Elementos Finitos na Odontologia

Em 1971, Farah & Craig estudaram, através da análise fotoelástica, a distribuição de tensões sobre a superfície de uma prótese fixa de ouro com quatro elementos. A magnitude da força e o comportamento da prótese dependeram do suporte ofere-

cido pelas raízes dos dentes-suportes. Quando as raízes destes estavam muito bem adaptadas ao seu revestimento, as próteses funcionaram como uma viga engastada nas duas extremidades. Quando as raízes dos dentes eram adaptadas de forma apenas razoável ao seu revestimento, a prótese funcionou como uma viga engastada em apenas uma extremidade.

Farah et al.(1973), realizaram um trabalho comparativo entre os métodos de elemento finito bidimensional e a fotoelasticidade. Verificaram que as tensões desenvolvidas em restaurações de cavidades de classe II, mostravam-se de forma clara, visível através das franjas coloridas fotoelásticas, podendo ser avaliadas do ponto de vista qualitativo, ao passo que, pelo MEF, a avaliação é mais detalhada quanto ao completo estado de tensões que se processa no modelo pesquisado. Sugeriram, ainda de forma indelével, que a associação dos dois métodos, permite um melhor entendimento da distribuição das tensões, quando uma restauração dental é submetida à ação das cargas mastigatórias.

Thresher & Saito(1973), empregaram o MEF para verificar a distribuição das tensões geradas num incisivo central superior íntegro, homogêneo com um não homogêneo, onde foram computados os respectivos módulos de elasticidade de suas camadas internas, e verificadas suas repercussões no ligamento periodontal e osso alveolar. Observaram que quando uma carga é aplicada perpendicularmente ao longo do eixo do dente, as tensões são transferidas ao osso, ao redor da raiz, provocando tração e compressão e que, o ponto de transição entre estas duas tensões

localizou-se a meio caminho da raiz, enquanto que os maiores deslocamentos ocorreram na metade superior do dente.

Farah & Craig(1974) propuseram um estudo para determinar a distribuição de tensão num primeiro molar, utilizando três terminações marginais a saber: chanfro, ombro biselado e lâmina de faca, utilizando para tanto o MEF . Verificaram então que o chanfro apresentou menor quantidade de tensão axial, radial e de cisalhamento na margem, seguido do ombro biselado e da lâmina de faca. Comparando com o método da fotoelasticidade ou com outras medidas de força, os autores concluíram que o MEF tem a vantagem de fornecer mais detalhes na avaliação da tensão no modelo dentário.

Selna et al.(1975) utilizaram o MEF para estudar as tensões geradas em um segundo pré-molar superior submetido a forças oclusais, tanto em idealizações planas como axissimétricas. Os autores observaram que este método tem sido largamente aplicado em estudos de engenharia e mecânica estruturais e que é bem apropriado para análise de tensões em dentes e restaurações porque pode simular fielmente as geometrias, cargas e diferentes materiais utilizados.

Kitoh et al.(1977), estudaram através do MEF, o comportamento mecânico do modelo de primeiros pré-molares inferiores, com ligamento periodontal e osso mandibular. Verificaram que, sob carga oclusal, o ligamento periodontal apresenta grande capacidade de suporte para o dente. Sob carga horizontal, no sentido vestíbulo-lingual na região coronária do dente em questão, o fulcro se localiza na

região do terço apical. Concluíram que este método é muito melhor que a fotoelasticidade e que o indicador de tensões(strain gauge).

Corrêa & Matson(1977), introduziram o MEF num trabalho sobre tensões desenvolvidas num dente restaurado com amálgama de prata sob a ação de uma carga mastigatória de 240 N. Compararam a metodologia utilizada com a fotoelasticidade bi e tridimensional, reafirmando que a fotoelasticidade apresenta análise qualitativa das tensões no interior das estruturas, sendo muito difícil de se obter a quantificação das tensões.

Aydilink & Akay(1980), observaram que a distribuição de tensões a partir da aplicação de uma carga oclusal era mais uniforme quando uma camada resiliente era usada na base da prótese em relação à base de uma prótese convencional. O deslocamento vertical do rebordo foi menor quando utilizada a base resiliente comparada à base de prótese convencional. Essa pesquisa, com auxílio do método de análise bidimensional dos elementos finitos, demonstrou que a camada resiliente funcionava como um amortecedor de choque, preservando assim o osso suporte.

Williams et al.(1987), analisaram a partir de um modelo bidimensional, de uma secção vestíbulo-lingual de um molar, a distribuição das tensões através do MEF, variando a extensão da restauração. Este modelo foi submetido a uma carga de 100 N distribuída uniformemente ao longo das inclinações da superfície oclusal.

El Charkawi et al.(1990), propuseram uma modificação para os implantes osseointegrados colocados na extremidade distal que necessitavam ser unidos a

dentes naturais. Para compensar a diferença entre a movimentação do dente natural dada pelo ligamento periodontal e a deformação elástica mínima do implante osseointegrado, foi proposta a utilização de uma camada de material resiliente para envolver o intermediário do sistema de implante, a fim de imitar a movimentação natural. Para esse estudo os autores utilizaram o MEF e enfatizaram a vantagem deste método por não necessitar de experimentos em animais ou testes clínicos. No entanto, propõem que para interpretação dos resultados, não devem ser ignoradas experiências clínicas conseguidas no decorrer dos anos.

Goel et al.(1990), descreveram, observando e comparando um modelo axis-simétrico com elementos finitos bi e tridimensionais, que as tensões principais máximas são de tração e as tensões principais mínimas são de compressão. A mais importante indicação clínica consequente deste estudo é que o esmalte e a dentina, embora organicamente unidos, respondem diferentemente às cargas masticatórias. Apesar destes tecidos serem suportes entre si, podem reagir às tensões independentemente.

Holmes et al.(1992), utilizaram o MEF no sistema de implante IMZ (4.0 por 13.0 mm) restaurado com uma coroa de ouro e avaliaram a influência do polioximetileno (POM) no elemento intramóvel(IME), entre a parte fixa do implante e a prótese, com o intuito de imitar o movimento permitido pelo ligamento periodontal e complexo alveolar, quando submetido à forças verticais e oblíquas. Observaram que a concentração de tensão no osso e nos componentes do sistema de

implante foram maiores quando submetidos à cargas oblíquas (30°), que quando sujeitas a cargas verticais. A transmissão de tensão ocorreu principalmente na região da crista óssea dos implantes e esta tensão não foi reduzida com o uso do elemento intramóvel do polioximetileno comparado ao titânio e a máxima tensão ocorreu no parafuso de fixação.

Aydin & Tekkaya (1992), analisaram quantitativamente a distribuição de tensões e deflexões geradas por diferentes carregamentos sobre os elementos suportes de uma prótese parcial fixa de três elementos e com dois tipos de suporte periodontal, através do MEF, em modelos bidimensionais. Consideraram os materiais elásticos, homogêneos e isotrópicos. Analisaram quatro diferentes tipos de cargas: 1) uma força distribuída de 600 N; 2) concentrada não axial e; 3) força axial de 300 N; 4) carga vertical de 300 N concentrada no centro do pôntico. Verificaram que as tensões cresceram na prótese parcial fixa com decrescente suporte periodontal e foram notados aumentos críticos para concentrações não axiais de carga sobre o molar, e que o pré-molar exerceu maiores pressões durante carregamentos oclusais (exceto axial) no tecido ósseo alveolar, do que o molar.

Sakaguchi & Borgersen (1993), fizeram um estudo avaliando o comportamento biomecânico dos componentes de uma coroa implanto-suportada, utilizando o MEF para modelos bidimensionais e concluíram que uma análise de contato não linear dos componentes do implante é benéfica, que as análises lineares não simulam o comportamento de contato e resultam em uma elevada distribuição de

tensões em regiões onde ocorrências de falhas clínicas são relatadas. Simularam o aperto do parafuso de ouro retentor da coroa e aplicaram uma carga axial na ponta de cúspide. O carregamento na ponta de cúspide resultou na separação do contato entre: 1) parafuso de ouro retentor e o intermediário e 2) coroa e intermediário. Ciclos de carregamentos e descarregamentos repetidos resultaram numa alternância de contatos e separações entre a base da cabeça do parafuso retentor e a coroa. Relatos clínicos de perda e falhas nos parafusos provavelmente são resultados destes eventos de separações e elevadas cargas no parafuso.

Reitz(1994), sugeriu que no ato da colocação da prótese provisória ou definitiva sobre os pilares implantados, as cargas deveriam ser transmitidas no sentido axial ao longo do eixo do implante. Forças de torção lateral deveriam ser evitadas. Afirmou também que a força oclusal poderia ser a mesma apresentada pela dentição natural sem causar dano.

Lewinstein et al.(1995), mostraram um novo sistema (IL system) para suporte de extensão distal de prótese em cantilever onde usava um pequeno implante e um encaixe especial tipo bola e analisaram um modelo bidimensional através do MEF deste sistema: o osso ao redor e uma prótese no sistema convencional. Observou que o uso desse sistema de suporte para extensão distal diminuiu drasticamente a tensão no osso, na prótese cantilever e nos implantes. Sugeriram que este novo sistema seja recomendado para pacientes desdentados totais e parciais.

Sakaguchi & Borgensen (1995), através de um método de análises de con-

tatos não lineares de elementos finitos, estudaram o mecanismo de transferência de carga entre os componentes protéticos causados por uma aplicação de torque nos parafusos usados para união dos componentes.

Akpınar et al. (1996), compararam a distribuição de tensão de dois implantes osseointegrados com formatos diferentes usados como pilares posteriores de uma prótese fixa, sendo o pilar anterior um dente natural. Foi usado neste estudo, implantes ITI 1(parafuso oco) e o ITI 2(parafuso maciço). Observaram que o parafuso maciço apresentava menor concentração de esforços ao redor do implante. O autor salienta a dificuldade técnica da confecção do modelo matemático do parafuso oco, que foi composto de duas partes separadas na região do ápice, o que pode ter causado valores um pouco maiores nesta área. Estes resultados foram obtidos através do MEF com modelo bidimensional.

Kamposiora et al. (1996), usaram o MEF de análise bidimensional para avaliar a distribuição e os níveis de tensão em uma prótese parcial fixa de três elementos (do primeiro pré-molar ao primeiro molar inferior) usando diferentes materiais (liga de ouro tipo III, Dicor e In-ceram) e com diferentes espessuras de conectores (3.0 e 4.0 mm). A maior tensão ocorreu na região dos conectores e a tensão foi de 40% a 50% menor para os conectores de 0.4 mm. Os níveis de tensão dentro do modelo de in-ceram foram menores do que nos outros materiais.

Papavasiliou et al. (1996), estudaram a concentração e distribuição de tensões em quatro diferentes combinações pilar-restauração usando implantes Branemark

sob forças mastigatórias de 200 N sobre os intermediários usando duas posições diferentes do parafuso de fixação e duas posições das margens das coroas cimentadas versus parafusadas. Os modelos com parafusos sobre os pilares tiveram menor tensão e melhor distribuição de tensão que aqueles onde os parafusos se encontravam numa posição mais interna. As próteses parafusadas e com margens de coroas curtas tiveram maiores índices de tensão. Para este estudo foram utilizados modelos bidimensionais dos elementos finitos.

Laganá(1996), estudou através do MEF de análise bidimensional, o comportamento biomecânico das estruturas de suporte e da prótese parcial removível de extremidade livre, com encaixe extracoronário rígido e semi-rígido. Nesse trabalho foram utilizadas três radiografias panorâmicas, aleatórias, de pacientes da clínica odontológica da Faculdade de Odontologia da Universidade de São Paulo, para a determinação da proporção dente/altura da mandíbula e utilizado os dados da literatura para se obter as dimensões anatômicas da coroa e raiz do primeiro pré-molar inferior no que se refere a altura e largura.

Sertgöz(1997), avaliou o efeito de três materiais diferentes para superfície oclusal (resina, resina composta e porcelana) e quatro materiais diferentes para a infraestrutura (ouro, prata-paládio, cromo-cobalto e liga de titânio) e observou a distribuição de tensões numa prótese fixa inferior suportada por seis implantes e no osso ao redor dos implantes, quando o sistema recebe uma carga oclusal vertical de 172 N distribuída em todos os dentes. Conclui-se que não houve diferenças

substanciais em relação a distribuição de tensões no tecido ósseo, esponjoso e cortical ao redor do implante e que a tensão se concentrou no parafuso de retenção das próteses, aumentando o risco de falha. A melhor combinação de materiais encontrada, do ponto de vista biomecânico, foram os materiais mais rígidos: cromo-cobalto para a infraestrutura e porcelana para a superfície oclusal. Para este estudo foi utilizado o MEF de análise tridimensional.

Menicucci et al. (1998), analisaram tridimensionalmente a distribuição de tensões pelo MEF no osso ao redor de dois implantes usados para reter uma prótese total inferior sujeita a cargas mastigatórias de 35 N na região do primeiro molar, usando dois sistemas diferentes de ancoragem: bola e barra-clip (Nobel Biocare). Observaram que o sistema barra-clip apresentava maiores tensões no osso em torno do implante. Contudo, os autores salientaram que este resultado foi obtido através de modelos matemáticos que não podem representar a complexidade biológica.

Sendyk (1998), analisou a distribuição das tensões nos implantes osseointegrados variando o diâmetro do implante e o material da coroa protética, através da análise não linear pelo MEF. Observou com relação à distribuição de tensões na estrutura do tecido ósseo, que quanto maior o diâmetro do implante, menor será o valor das tensões geradas no osso cortical, e também não encontrou grande diferença com relação aos dois tipos de material restaurador (porcelana e compômero), e que em todas as situações a região próxima do pescoço dos implantes foram as mais solicitadas, diminuindo à medida que caminhamos em direção apical.

Ulbrich (1998), estudou a distribuição de tensões, através do MEF bidimensional, nos implantes restaurados com uma coroa de ouro onde era alterado o elemento intramóvel (em titânio ou polioximetileno) e um terceiro elemento denominado IMC (em titânio ou polioximetileno), foram aplicadas cargas no sentido axial e oblíquo. Concluiu-se que as tensões são sempre maiores no carregamento oblíquo do que no carregamento axial, com isto a deflexão da estrutura ocorre principalmente quando da utilização do IMC, neste caso o parafuso de fixação e o corpo do implante receberam maiores tensões. Com a utilização do IMC há uma diminuição de tensões no parafuso de fixação. Outro fato importante encontrado na pesquisa é que não houve diferença significativa nas tensões transmitidas ao osso de suporte com a utilização de qualquer um dos elementos intramóveis. Concluiu também que os maiores picos de tensão ocorreram no parafuso de fixação e no tampão em resina.

Cohen & Orenstein (1999), discutiram a combinação de implantes e dentes como pilares de prótese fixas afirmando que os dentes naturais têm aproximadamente de 100 a 200 μm de mobilidade devido a presença do ligamento periodontal, e os implantes osseointegrados devido à intima relação com o tecido ósseo tem uma mobilidade de aproximadamente $10\mu m$, desta forma durante as cargas mastigatórias sobre esta ponte fixa o implante seria sobrecarregado. Sugeriram, então, uma conexão semi-rígida em que a parte fêmea é colocada dentro da coroa do implante e o macho unido ao pôntico.

Lacerda (1999), avaliou o comportamento biomecânico das estruturas de suporte e da prótese parcial removível apoiada sobre implante na região distal com auxílio do MEF, sob aplicação de cargas verticais, variando as conexões entre dente suporte e prótese parcial removível, bem como entre implante e prótese parcial removível e observou que o encaixe rígido entre o dente suporte e a prótese parcial removível, em relação ao semi-rígido, transmite maiores tensões no dente suporte e diminui as tensões sobre a fibromucosa e sobre o implante. Observou também, que uma vinculação articulada entre implante e prótese parcial removível diminui o momento fletor transmitido ao implante e aumenta as tensões na fibromucosa e dente suporte. Para este estudo foram usados programas COSMOS/M e FELT.

Nishimura et al. (1999), observaram, através da fotoelasticidade, duas próteses fixas, tendo como pilares um dente (pré-molar inferior) e dois implantes osseointegrados situados na região do extremo livre e variando o tipo de conector, rígido e semi-rígido, entre os implantes e o dente. Submeteram estas próteses a cargas verticais, recomendando que a seleção dos desenhos dos conectores deveria ser baseada na saúde periodontal dos dentes e no suporte fornecido pelos implantes.

Yang et al. (1999), analisaram o nível de tensão nos dentes e estruturas de suporte de uma prótese parcial fixa e verificaram como a adição de pilares múltiplos na prótese fixa altera as tensões e sua deflexão. Observaram que: 1) a perda de suporte ósseo aumentou a deflexão e tensão na estrutura; 2) com a confecção de uma prótese parcial fixa houve uma redução da tensão e deflexão das estruturas

de suporte; 3) foi encontrada concentração de tensão nos conectores das próteses e na área da dentina cervical perto da região do espaço protético; 4) com os dentes esplintados diminuiu a deflexão e a tensão nas estruturas de suporte, mas foi observado um aumento de tensão na prótese; 5) aumentando o número de pilares unidos não resultou na redução de tensão proporcional no periodonto.

Cimini et al. (2000), discutiram diversas medidas encontradas na literatura de cargas atuantes nos dentes humanos, para diversas situações. Os valores encontrados foram comparados com aqueles adotados em diversos trabalhos de simulação via MEF. Os autores citaram que na literatura estudada que as cargas de mordida em humanos podem variar significativamente. Por outro lado, analistas responsáveis pela modelagem matemática de problemas envolvendo dentes teriam maior confiança nos resultados da análise caso os dados de entrada de cargas em seus modelos pudessem ser mais precisos. Com esse tipo de ferramenta disponível, profissionais poderiam embasar suas decisões clínicas de uma maneira mais realista.

Capítulo 3

Revisão de conceitos teóricos

Este capítulo apresenta uma revisão de alguns conceitos teóricos, constando de equações diferenciais, teoria da elasticidade e teoria do contato, que poderão auxiliar na leitura de alguns tópicos deste trabalho.

3.1 Equações diferenciais

O conjunto de equações diferenciais que rege os fenômenos físicos é bem vasto e muitas dessas equações, quando somente duas variáveis independentes estão presentes, são casos especiais da equação linear homogênea de segunda ordem geral, isto é,

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d \frac{\partial u}{\partial x} + 2e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0, \quad (3.1)$$

onde a, b, c, d, e, f podem ser constantes ou funções de x e y .

De momento, nota-se que a forma da equação (3.1) se parece com a de uma secção cônica geral:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0. \quad (3.2)$$

Esta equação representa uma elipse, quando tomar valores positivos ($ac - b^2 > 0$), parábola, quando tomar valores nulos ($ac - b^2 = 0$), ou hipérbole, para valores negativos (quando $ac - b^2 < 0$). Usando-se uma classificação semelhante para a equação diferencial 3.1, diz-se que ela é do tipo:

- elíptico, quando $ac - b^2 > 0$,
- parabólico, quando $ac - b^2 = 0$,
- hiperbólico, quando $ac - b^2 < 0$.

A equação de Laplace a duas variáveis:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.3)$$

pode ser obtida dea equação (3.1), fazendo-se $a = 1, b = 0, c = 1, d = e = f = 0$ e como $ac - b^2 > 0$, é do tipo elíptico.

Alguns dos problemas mais comuns da física-matemática podem ser representados por equações que são classificadas em três grandes classes, cada uma representada por um tipo de fenômeno bem particular:

1. Equações elípticas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (I)$$

2. Equações parabólicas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (II)$$

3. Equações hiperbólicas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (III)$$

As equações elípticas são representativas dos problemas de potencial que aparecem nos estudos em regime permanente na eletricidade, na mecânica (deformação de um sólido, escoamento laplaciano de um fluido) e nos problemas térmicos (distribuição de temperaturas). Este tipo de equação está associado a problemas de valor de contorno em regime estacionário, ou seja, a problemas de equilíbrio. As condições de contorno são normalmente do tipo:

- Dirichlet: $u(s) = u_o = f_o(s)$ (condições de contorno essenciais)
- Neumann: $\frac{\partial u}{\partial n} = f_o(s)$ (condição de contorno natural)
- Mista: $u(s) + \frac{\partial u}{\partial n}(s) = f_o(s)$

As equações (II) são representativas dos problemas de propagação de calor, de difusão, de probabilidades, etc. As condições de contorno associadas à equação são de dois tipos: Dirichlet, Neuman ou mista sobre a fronteira do domínio e condição inicial $t = 0$ em todo o domínio.

As equações (III) caracterizam o fenômeno da propagação das ondas, sejam elas vibratórias do tipo mecânica ou eletromagnéticas. As condições de contorno associadas são aquelas do domínio relacionadas às condições de Cauchy ao instante inicial.

Os problemas elípticos são característicos da análise de fenômenos de regime permanente, fenômenos do tipo estático (sem variação temporal) ou variável no tempo segundo uma função conhecida. Os problemas parabólicos ou hiperbólicos são ligados ao estudo de regime transitório e sua resolução permite analisar a evolução de um fenômeno físico no decorrer do tempo.

O MEF é um método aproximado de solução de equações diferenciais. Para melhor entender o método, considera-se o seguinte problema modelo (apresentado por Becker, Carey & Oden ([30]): achar uma função $u(x) \in C^2(0, 1)$ tal que

$$-u'' + u = x, \quad 0 < x < 1 \quad (3.4)$$

com $u(0) = u(1) = 0$ (forma forte)

Sua forma variacional¹ (ou fraca) consiste em achar $u(x) \in H$ tal que

$$\int_0^1 (-u''(x) + u(x) - x).v(x) dx = 0, \quad \forall v \in H \quad (3.5)$$

onde H é o conjunto das funções quadrado integráveis:

$$H = \{v = v(x) \mid \int_0^1 v^2 dx < \infty\}$$

¹Os conceitos do Cálculo variacional podem ser encontrados em Elsgoltz, 1969 ou Gelfand e Fomin, 1963

Ou equivalentemente (integrando-se por partes), deve-se achar $u(x) \in H^1$, de modo que

$$\int_0^1 (u'v' + uv - xv) dx = 0, \quad \forall v \in H_o^1 \quad (3.6)$$

onde a função integranda apresenta-se na forma simétrica.

Desse modo, na resolução do problema (3.4), considera-se a forma dada em (3.6), utiliza-se as idéias do Método de Galerkin (Zienkiewicz, 1980; Becker, Carey e Oden, 1986) propondo-se as seguintes funções aproximadoras, para $u(x)$ e $v(x)$:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x) \quad (3.7)$$

$$v(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j \phi_j(x) \quad (3.8)$$

de modo que encontrar $u(x)$ e $v(x)$ resume-se em achar os escalares α_i e β_j , onde o conjunto $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$ é linearmente independente e forma uma base para o espaço de H_o^1 , e β_i são escalares. Os α_i são conhecidos como graus de liberdade da aproximação. De (3.7) e (3.8) temos que:

$$u'(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{d}{dx} \phi_i(x) \quad (3.9)$$

$$v'(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{d}{dx} \phi_j(x) \quad (3.10)$$

Substituindo-se esses valores em (3.6), tem-se:

$$\int_0^1 \left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{d}{dx} \phi_i(x) \right) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \frac{d}{dx} \phi_j(x) \right) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \phi_i(x) \right) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \phi_j(x) \right) - x \cdot \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \phi_j(x) \right) \right] dx = 0, \quad \forall v \in H_o^1, \forall \beta_j \quad (3.11)$$

Reagrupando-se os termos, encontra-se:

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n K_{ij} \alpha_i - F_j \right) \beta_j = 0, \quad \forall \beta_j \quad (3.12)$$

onde

$$K_{ij} = \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} \phi_i(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_j(x) + \phi_i(x) \cdot \phi_j(x) \right) dx \quad (3.13)$$

$$F_j = \int_0^1 x \phi_j(x) dx \quad (3.14)$$

Portanto:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n K_{ij} \alpha_i - F_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\therefore K \cdot \alpha = F \Rightarrow \alpha = K^{-1} \cdot F \quad (3.15)$$

em que \mathbf{K} é uma matriz simétrica (conhecida como matriz de rigidez) e \mathbf{F} é conhecido como vetor de carga. Desde que as funções ϕ_i são conhecidas, os números K_{ij} e F_j podem ser calculados diretamente pelas equações (3.13) e (3.14).

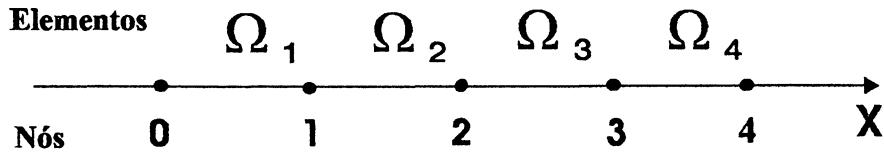
O MEF propõe uma técnica para construir as funções aproximadoras de Galerkin em problemas de valor de contorno. A idéia principal é que as funções básicas ϕ_i podem ser representadas por polinômios em intervalos limitados por nós

nas subregiões do domínio, de forma que sejam unitárias num determinado nó e nula nos demais. Especificamente se x_j é a coordenada do nó j , então:

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Para o problema modelo o domínio pode ser, por exemplo, particionado em quatro intervalos iguais, denominados de elementos e denotados por Ω_i , $i = 1, 2, 3, 4$. O comprimento de cada intervalo é representado por h , conforme figura 3.1.

Figura 3.1: Partição do intervalo $[0,1]$ em quatro elementos finitos



A coleção dos elementos e os pontos nodais sobre o domínio do problema aproximado é denominado de malha dos elementos finitos. Para construir as funções básicas, adota-se o seguinte critério fundamental:

- Elas são geradas por funções polinomiais definidas nos intervalos, elemento por elemento, sobre a malha dos elementos finitos.
- As funções básicas são elementos da classe H_o^1 .

- Devem ser escolhidas de forma tal que os parâmetros α_i definidos para a solução aproximada de $u(x)$ são os valores de $u(x)$ nos pontos nodais.

Se no problema modelo (3.4) tomar-se a função básica

$$\phi_i(x) = ax + b,$$

tem-se nos nós i e j, respectivamente:

$$\phi_i(x_i) = ax_i + b = 1$$

e

$$\phi_i(x_j) = ax_j + b = 0$$

Representado matricialmente por:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i & 1 \\ x_j & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore a = \frac{-1}{x_j - x_i}$$

e

$$b = \frac{x_j}{x_j - x_i}$$

Tem-se também que

$$\phi_j(x_i) = ax_i + b = 0$$

e

$$\phi_j(x_j) = ax_j + b = 1$$

cuja representação matricial é:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i & 1 \\ x_j & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore a = \frac{1}{x_j - x_i}$$

e

$$b = \frac{-x_i}{x_j - x_i}$$

Desse modo, $\phi_1(x) = x$ em Ω_1 , $\phi_1(x) = -x + 2$ em Ω_2 e suas derivadas, $\phi'_1(x) = 1$ em Ω_1 e $\phi'_1(x) = -1$ em Ω_2 são quadrado integráveis em $[0, 2h]$, (onde $h = \frac{1}{4}$).

De modo análogo obtém-se as outras funções básicas $\phi_2(x)$ e $\phi_3(x)$ no intervalo $[0, 1]$.

Assim, o cálculo de K_{ij} e F_i é obtido por:

$$K_{ij} = \int_0^1 (\phi'_i \phi'_j + \phi_i \phi_j) dx = \sum_{e=1}^4 \int_{\Omega_e} (\phi'_i \phi'_j + \phi_i \phi_j) dx \quad (3.16)$$

onde \int_{Ω_e} representa a integração sobre o elemento Ω_e . Analogamente,

$$F_i = \sum_{e=1}^4 F_i^e \quad (3.17)$$

onde

$$F_i^e = \int_{\Omega_e} x \phi_i dx \quad (3.18)$$

e F_i^e constitui os componentes do vetor de carga do elemento finito Ω_e .

O erro cometido na aproximação por elementos finitos é uma função e , definida como a diferença entre a solução exata e a solução aproximada;

$$e(x) = u(x) - u_h(x)$$

Como o método é aproximado, haverá sempre um resíduo que, espera-se, seja o mínimo possível. Para avaliar esses erros, (segundo Becker, Carey e Oden(1986), no MEF, é comum utilizar-se três normas para quantificá-los nas aproximações: a norma da energia: $\| e \|_E$; norma L^2 : $\| e \|_0$ e norma do máximo: $\| e \|_\infty$.

Para o problema modelo (3.4), a norma da energia é a raiz quadrada de duas vezes a energia de deformação²:

$$\| e \|_E = \left(\int_0^1 [(e'(x))^2 - (e(x))^2] dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

A norma L^2 é a raiz quadrada da média quadrada da função e é definida por:

$$\| e \|_0 = \left(\int_0^1 (e(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.20)$$

e a norma do máximo é o valor absoluto máximo da função $e(x)$:

$$\| e \|_\infty = \max_{0 < x < 1} |e(x)| \quad (3.21)$$

Se o domínio do problema é discretizado por uma malha de elementos finitos consistindo de elementos de igual comprimento h , pode-se refinar esta malha por valores decrescentes de h e consequentemente aumenta-se o número de elementos

²Dada por $U = \frac{1}{2} \int_0^1 [(u')^2 - u^2] dx$

da malha. Calculam-se limites sobre o erro, obtido numa determinada norma, e válida para h muito pequeno através da expressão:

$$\| e \| \leq Ch^p, \quad (3.22)$$

onde C é uma constante dependente dos dados do problema e p é um inteiro que depende das funções básicas escolhidas na aproximação do elemento finito. O expoente p é a taxa de convergência do método em relação à norma adotada. Se p é positivo, o erro $\| e \|$ aproxima-se de zero com h tendendo a zero, e quando isto acontece, diz-se que a aproximação converge para a solução exata com respeito à norma escolhida.

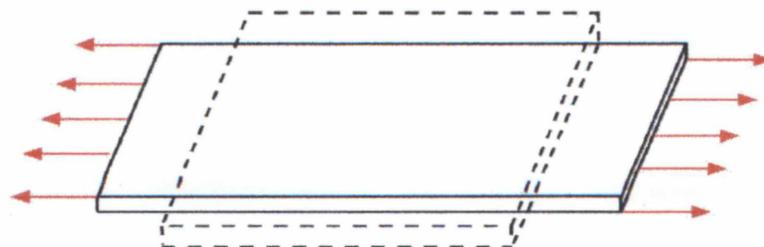
3.2 Teoria da Elasticidade

3.2.1 Estado plano de tensões

Muitos problemas práticos tridimensionais, sob certas hipóteses podem ter sua formulação simplificada resultando numa modelagem de problemas bidimensionais. Estes são os chamados problemas planos: estado plano de tensões (plane stress), estado plano de deformações (plane strain) e problemas axissimétricos.

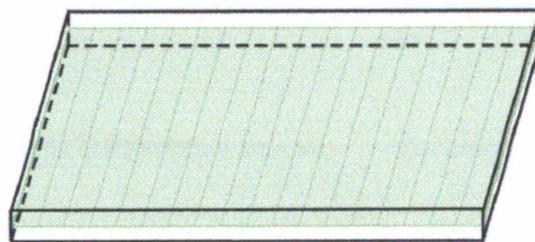
No estado plano de tensões pode-se considerar por exemplo, uma chapa fina (corpo \mathcal{B}), de espessura t , constituída de material isotrópico elástico linear, com módulo de Young E e coeficiente de Poisson ν , sob a ação de forças atuantes paralelas ao seu plano e distribuídas uniformemente ao longo de sua espessura (figura 3.2).

Figura 3.2: Estado plano de tensões



Considera-se a chapa referida a um sistema de coordenadas cartesianas ortogonal $XOYZ$, onde o plano XOY coincide com o plano médio da chapa (figura 3.3).

Figura 3.3: Plano médio de uma chapa



Neste caso, as componentes de tensões atuantes fora do plano de definição da chapa assumirão valores insignificantes quando comparados aos valores daquelas

atuantes em tal plano, e podem ser desprezadas (ou seja, o modelo matemático admitirá que as tensões $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$ e $\tau_{yz}=0$). As componentes de tensões atuantes resumir-se-ão a duas tensões normais σ_x e σ_y , e uma tensão de cisalhamento τ_{xy} todas atuando no plano XOY. As figuras 3.4 e 3.5 mostram tais componentes atuando em um paralelepípedo infinitesimal.

Figura 3.4: Tensões normais

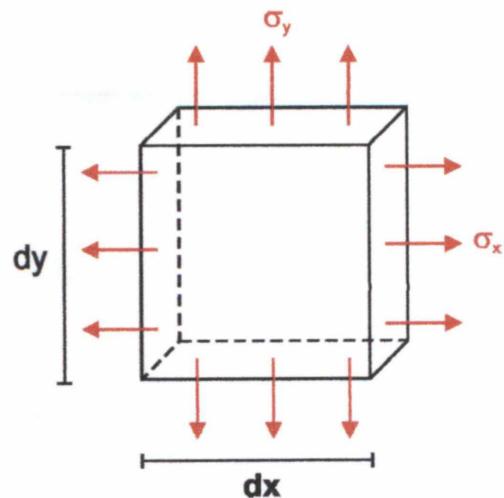
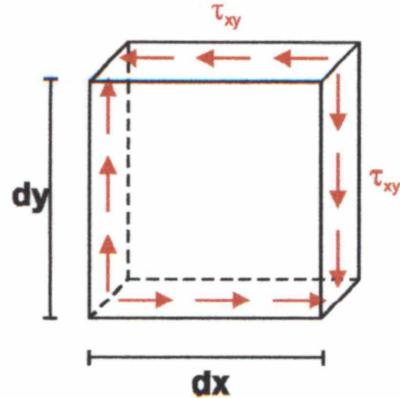


Figura 3.5: Tensões de cisalhamento



A representação da chapa fina pode ser feita por intermédio de seu plano médio Ω (figura 3.3) submetida a um carregamento atuante em sua direção, composto pelo sistema de cargas $F = \{b, p\}$ onde b é uma carga de corpo distribuída na sua superfície e calculada por unidade de comprimento normal ao plano e p , uma carga de linha, atuando num contorno lateral (denominado de Γ) da chapa e prescrição de deslocamentos homogênea do tipo bilateral $u_j = 0$ em pontos de Γ_j do contorno.

3.2.2 Cinemática

Hipóteses simplificadoras da cinemática:

1. Fibras paralelas ao plano médio ou se alongam ou se encurtam.
2. Secções planas e normais ao plano médio da chapa permanecem planas e normais a tal plano, após a deformação e paralelas às posições indeformadas.

3. Secções paralelas permanecem paralelas após a deformação.

3.2.3 Campo de deslocamentos

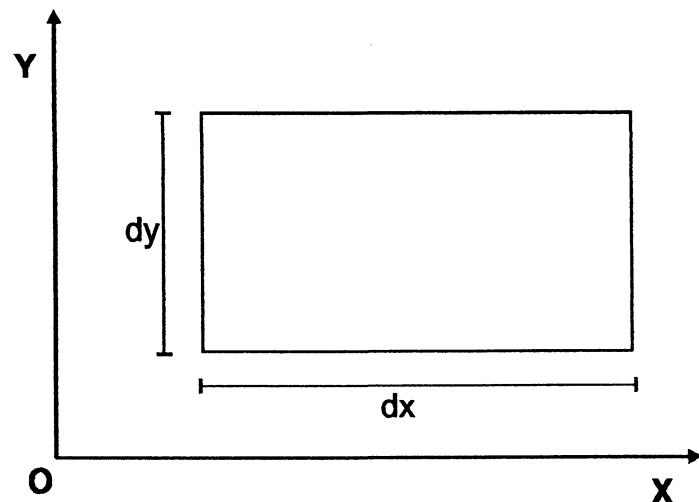
Adotadas as hipóteses do item anterior, o campo de deslocamentos possível é o que admite o ponto $P(x, y)$ distante da origem, após a transformação, posicionado em $P'(x+u, y+v)$, ou seja, as componentes u e v do vetor deslocamento d segundo os eixos OX e OY são funções dependentes apenas de x e y . Na forma vetorial, tem-se que $d = \{u(x, y) \ v(x, y)\}^T$. O conjunto U de todos os campos de deslocamentos constitui um espaço vetorial com o seguinte produto interno: $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u \cdot v \, d\Omega$. As restrições que poderão serem impostas ao campo de deslocamentos são: bilaterais (aqueles em que se o deslocamento está impedido numa direção, então estará impedido na direção oposta) e homogêneas (são as que impõe deslocamentos nulos nos pontos de impedimentos x_j).

3.2.4 Componentes de deformação

Segundo Green(1968), na teoria infinitesimal, assume-se que as componentes do vetor deslocamento ($d = \{u \ v\}^T$) e suas derivadas em relação aos eixos coordenados e em relação ao tempo t , são pequenas, de forma que pode-se negligenciar os termos não lineares se comparados com os lineares. As componentes do vetor deslocamento podem ser representadas por funções contínuas na forma $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$.

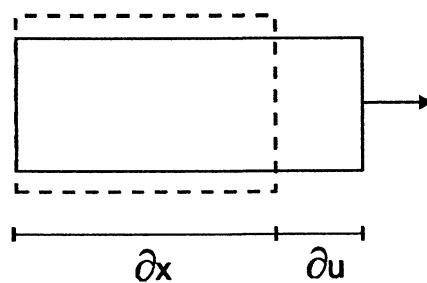
Toma-se um paralelogramo infinitesimal de lados paralelos aos eixos coordenados com comprimentos dx e dy conforme figura 3.6. Com a deformação do contínuo, ocorre variação no comprimento dos lados e nos ângulos entre eles.

Figura 3.6: Retângulo infinitesimal



Deformação na direção do eixo OX:

Figura 3.7: Deformação na direção do eixo OX



Para pequenas deformações, o alongamento unitário ou deformação linear

unitária na direção OX é a razão $\partial u / \partial x$. Assim obtemos a equação:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (3.23)$$

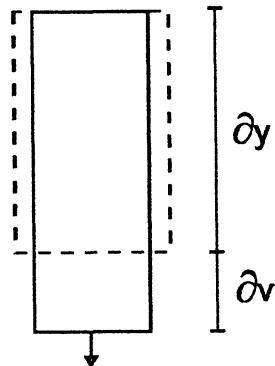
onde ε representa o alongamento unitário e γ é a deformação angular.

Deformação na direção do eixo OY:

De modo análogo, temos:

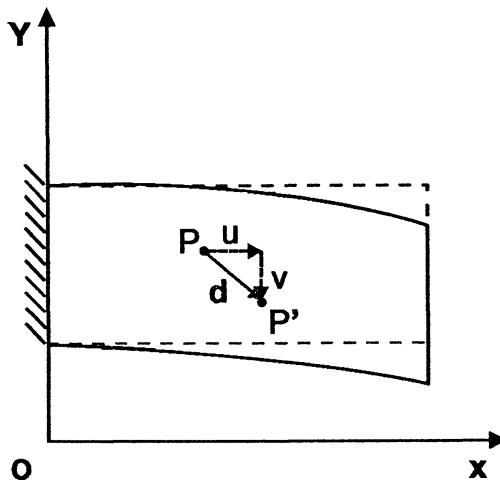
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad (3.24)$$

Figura 3.8: Deformação na direção do eixo OY



Interpretação das expressões (1.1) e (1.2): Um ponto genérico $P(x, y)$ da chapa desloca-se a $P'(x + u, y + v)$ quando o corpo se deforma. O deslocamento d pode ser representado pelos seus componentes u e v , nas direções OX e OY, respectivamente. Se forem conhecidas as funções que fornecem os deslocamentos u e v para todos os pontos da chapa, conforme figura 3.9, pode-se calcular as deformações ε_x e ε_y , por intermédio das derivadas das funções que fornecem u e v , nas expressões (3.23) e (3.24).

Figura 3.9: Deslocamento de um ponto P

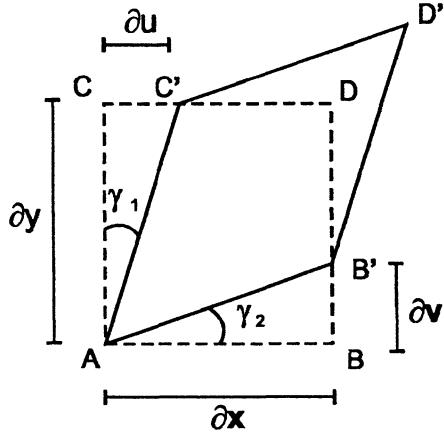


Deformação angular ou distorção

As deformações normais calculadas por (3.23) e (3.24) justificam-se pela ação das tensões normais. Por outro lado, as tensões de cisalhamento acarretam distorções, isto é, variações na forma do elemento infinitesimal (figura 3.10).

Para pequenas deformações, o deslocamento dos pontos da linha AC é pa-

Figura 3.10: Deformação angular



ralelo ao eixo OX. Nestas condições os ângulos são pequenos e a deformação angular no eixo OY será dada por:

$$\gamma_1 \simeq \frac{CC'}{AC} = \frac{\partial u}{\partial y} (\gamma_1 \simeq \tan \gamma_1).$$

Da mesma forma, a distorção angular no eixo OX será dada por:

$$\gamma_2 \simeq \frac{BB'}{AB} = \frac{\partial v}{\partial x} (\gamma_2 \simeq \tan \gamma_2).$$

Assim o elemento que era inicialmente retangular, sofreu distorção, mudando sua forma, e os lados não formam mais um ângulo reto. Esta distorção é dada por:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_{xy}.$$

Portanto,

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.25)$$

Pode-se escrever as relações deformações-deslocamentos na forma matricial:

$$\varepsilon = \partial \cdot d,$$

onde

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_{xy}\}^T$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\partial = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 2\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$d = \{u(x, y) \ v(x, y)\}^T$$

3.2.5 Esforços internos

A existência de esforços internos fica evidente quando observa-se que ao submeter-se um corpo deformável a ações de forças externas, suas partículas permanecem unidas. Portanto alguma força interna deve ser responsável por esse fenômeno. Para o problema plano de tensões, o trabalho interno, realizado pelos esforços internos W_i em consequência de um campo de deformações virtuais gerado a

partir de um campo de deslocamentos virtuais, é definido por:

$$W_i = - \int_{\mathcal{B}} \sigma \cdot \delta \varepsilon \, d\mathcal{B} \quad (3.26)$$

num corpo \mathcal{B} . Desenvolvendo esta integral, para o problema plano tem-se:

$$W_i = - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \varepsilon_x \\ \delta \varepsilon_y \\ \delta \gamma_{xy} \end{pmatrix} d\Omega \, dz \quad (3.27)$$

que resulta em:

$$W_i = -t \int_{\Omega} (\sigma_x \cdot \delta \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \cdot \delta \varepsilon_{xy}) \, dx \, dy \quad (3.28)$$

para toda deformação virtual $\delta \varepsilon_x$, $\delta \varepsilon_y$ e $\delta \gamma_{xy}$.

3.2.6 Trabalho externo

É realizado pelas forças externas $F = \{b, p\}$, em consequência de um campo de deslocamentos virtuais δu , e é definido por:

$$W_e = \int_{\Omega} b \cdot \delta u \, dx \, dy + \int_{\Gamma} p \cdot \delta u \, d\Gamma \quad (3.29)$$

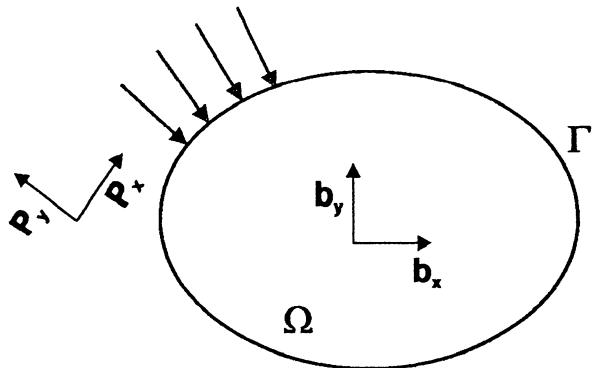
para todo deslocamento virtual δu , onde a carga de corpo (figura 3.11)

$$b = \left\{ \begin{array}{l} b_x(x, y) \\ b_y(x, y) \end{array} \right\}^T$$

está distribuída na superfície média Ω e a carga de linha p está aplicada no contorno Γ , $p = \left\{ \begin{array}{l} p_x(x, y) \\ p_y(x, y) \end{array} \right\}^T$.

O trabalho externo também pode ser definido por $W_e = \langle F, \delta u \rangle$.

Figura 3.11: Cargas de corpo e de superfície



3.2.7 Equação constitutiva

Para um material isotrópico elástico linear submetido a processos isotérmicos e adiabáticos, há uma relação linear entre tensões e deformações definida por:

$$\sigma = \mathcal{D} \cdot \varepsilon \quad (3.30)$$

onde

$$\mathcal{D} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

Esta relação é conhecida como "Lei de Hooke", (matemático inglês Robert Hooke (1635-1703)). As relações lineares entre as componentes de tensão e as componentes de deformação são conhecidas como lei de Hooke. Assim, no caso particular de um problema unidimensional, tem-se:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad (3.31)$$

para deformações no eixo OX, onde E é o módulo de elasticidade do material.

Um elemento alongado na direção OX é acompanhado por uma contração lateral, que é uma fração da deformação longitudinal. Essa fração constante é chamada de coeficiente de Poisson ν . Logo

$$\nu = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \quad (3.32)$$

ou ainda:

$$\varepsilon_y = \nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \quad (3.33)$$

Se o elemento estiver submetido simultaneamente à ação das tensões normais σ_x e σ_y uniformemente distribuídas sobre as faces, o cálculo das deformações merece atenção especial. Devido à contração lateral na direção OX, esta deve ser descontada da deformação em OX calculada por (3.31). Portanto:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} \quad (3.34)$$

Usando o mesmo raciocínio na direção OY:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \quad (3.35)$$

As tensões de cisalhamento atuantes no elemento produzem distorções, em que

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}, \quad (3.36)$$

onde

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.37)$$

é o módulo de elasticidade transversal, de rigidez ou de elasticidade ao cisalhamento. Então tem-se:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} \quad (3.38)$$

As equações (3.34), (3.35) e (3.38) podem ser representadas na forma matricial, para futura aplicação do MEF:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Ou ainda:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Portanto (forma compactada):

$$\{\sigma_{(x,y)}\} = [\mathcal{D}] \cdot \{\varepsilon_{(x,y)}\} \quad (3.41)$$

onde a expressão do primeiro membro representa a matriz de tensões num ponto P(x,y), $[\mathcal{D}]$ é a matriz de elasticidade e $\{\varepsilon_{(x,y)}\}$, a matriz das deformações no ponto P(x,y). A relação 3.41 traduz a correspondência entre tensões e deformações em qualquer ponto P(x,y) do elemento, sendo denominada de equação constitutiva para o material isotrópico elástico linear submetido a processos isotérmicos e adiabáticos.

3.2.8 Equilíbrio

Diz-se que um corpo plano encontra-se em equilíbrio com o sistema de forças $F = \{b, p\}$ se, para todo deslocamento virtual δu que satisfaça as condições cinemáticas de contorno, a distribuição de tensões σ , associada ao sistema de cargas é tal que

$$W_i + W_e = 0 \quad (3.42)$$

para todo δu (Princípio dos Trabalhos Virtuais - PTV), ou seja:

$$-t \int_{\Omega} \sigma \cdot \delta \varepsilon \, dx \, dy + \int_{\Omega} b \cdot \delta u \, dx \, dy + \int_{\Gamma} p \cdot \delta u \, d\Gamma = 0, \quad \forall \delta u \quad (3.43)$$

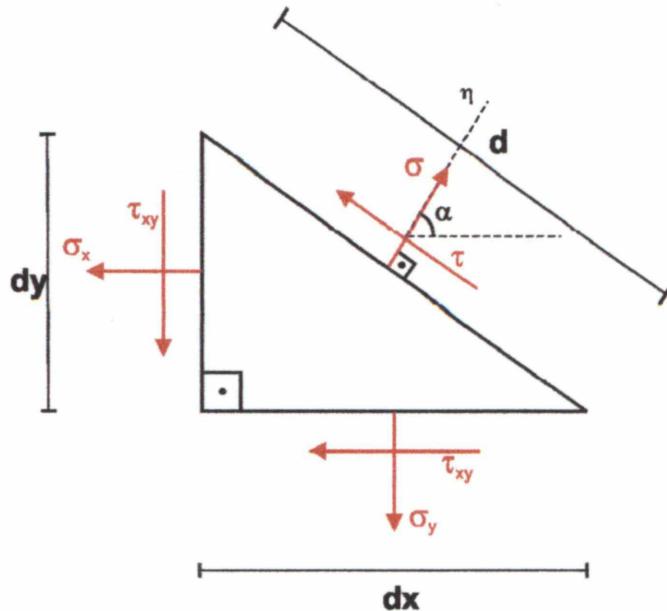
Nesta equação σ é a tensão associada à deformação ε pela equação constitutiva. Tem-se então, que o trabalho virtual dos esforços internos generalizados e das cargas aplicadas é nulo para toda ação virtual de deslocamento admissível. Usando em (3.43) as relações: $\sigma = \mathcal{D} \cdot \varepsilon$, e $\varepsilon = [\partial]u$, onde ∂ é o operador diferencial que depende da natureza do problema (se for unidimensional, $\partial = \frac{d}{dx}$), tem-se:

$$-t \int_{\Omega} ([\partial]u)^T \cdot \mathcal{D} \cdot ([\partial] \delta u) \, dx \, dy + \int_{\Omega} (\delta u)^T \cdot b \, dx \, dy + \int_{\Gamma} (\delta u)^T \cdot p \, d\Gamma = 0, \quad \forall \delta u \quad (3.44)$$

3.2.9 Tensões principais

Tensões principais são aquelas que assumem valores máximo ao longo de uma direção e mínimo ao longo da outra. Estas duas direções são ortogonais e não

Figura 3.12: Tensões principais



existem tensões cisalhantes. As tensões principais σ_1 e σ_2 são obtidas por:

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.45)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.46)$$

Por meio da cunha (figura 3.12), podem ser deduzidas as tensões principais, mas as tensões desenhadas aqui não são necessariamente as principais. Enquanto que a máxima tensão cisalhante é fornecida por:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.47)$$

3.2.10 Critério de escoamento

Existem diversos critérios que procuram avaliar a condição de escoamento dos materiais. Dentre estes, pode-se destacar o critério de Von Mises: (Richard Von Mises, especialista em Matemática Aplicada (1883-1953)). Este critério baseia-se na determinação da energia de distorção de certo material, ou seja, da energia relacionada com as mudanças na forma do material. Neste critério, interessa a tensão equivalente:

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{2}} \quad (3.48)$$

e o material é considerado no regime elástico enquanto $\sigma_{eqv} \leq \sigma_Y$, onde σ_Y é a tensão de escoamento do material, determinada num ensaio de tração.

3.2.11 Equações que governam o problema

A prótese parcial fixa posterior estudada neste trabalho é composta de diversos componentes estruturais (dente natural, pônticos, periodonto, osso cortical, osso trabecular, implante e dentina). Esses componentes ocupam domínios Ω , de contorno Γ , que estão sujeitos às cargas de corpo e superfície, b e p , respectivamente. Estas cargas causam deslocamentos u e deformações ε no sistema. O equilíbrio dos componentes estruturais da prótese parcial fixa posterior, é regido pelo PTV (forma fraca da equação de equilíbrio) representado pela equação (3.43), que se apresenta desenvolvida abaixo:

$$\begin{aligned}
& -t \int_{\Omega} (\sigma_x \cdot \delta \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \cdot \delta \varepsilon_{xy}) dx dy + t \int_{\Omega} (b_x \delta u_x + b_y \delta u_y) dx dy + \\
& \int_{\Gamma} (p_x \delta u_x + p_y \delta u_y) d\Gamma = 0 \quad \forall \delta u_x, \delta u_y \\
& (\text{variáveis: tensões } \sigma_x, \sigma_y \text{ e } \tau_{xy})
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
& -t \left[\int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + b_x \right) \delta u_x + \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + b_y \right) \delta u_y \right) dx dy \right] + \\
& \int_{\Gamma} (p_x \delta u_x + p_y \delta u_y) d\Gamma = 0 \quad \forall \delta u_x, \delta u_y
\end{aligned}$$

Aplicando-se resultados do cálculo variacional, chega-se ao sistema de equações:

$$\left\{
\begin{array}{l}
\frac{\partial}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + b_x = 0 \\
\frac{\partial}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + b_y = 0
\end{array}
\right. \quad (3.49)$$

que são as equações de equilíbrio, ponto a ponto, do modelo geométrico da prótese parcial fixa posterior, objeto deste estudo. Pode-se escrever que

$$div \sigma + b = 0 \quad (3.50)$$

3.2.12 Equações de compatibilidade

A formulação matemática da condição de compatibilidade da distribuição de tensões com a existência de funções contínuas u e v definindo a deformação, será obtida a partir das equações 3.23, 3.24 e 3.25. Estas três componentes de deformação que são expressas por duas funções u e v não podem ser tomadas de forma arbitrária, e existe uma relação entre as componentes de deformação, obtidas a partir dessas

equações. Assim, deriva-se a primeira equação duas vezes em relação a y , a segunda, duas vezes em relação a x e a terceira uma vez em relação a x e outra em relação a y , para se encontrar (no estado plano):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.51)$$

Esta equação diferencial de segunda ordem, denominada de condição de compatibilidade, precisa ser satisfeita pelas componentes de deformação para assegurar a existência de funções u e v relacionadas com as componentes de deformação representadas pelas equações 3.23, 3.24 e 3.25.

3.2.13 Resumo das equações

Sintetizando-se, tem-se as seguintes equações:

1. Deformações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \quad (\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \end{array} \right. \quad (3.52)$$

2. Constitutiva:

$$\sigma = \mathcal{D} \cdot \varepsilon, \quad \text{onde} \quad \mathcal{D} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

3. De equilíbrio:

$$\operatorname{div} \vec{\sigma} + \vec{b} = 0 \quad (3.54)$$

4. De compatibilidade:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.55)$$

5. Condições de contorno:

- Dirichlet:

$$u_{\Gamma_1} = \bar{u} \quad (3.56)$$

- Newmann:

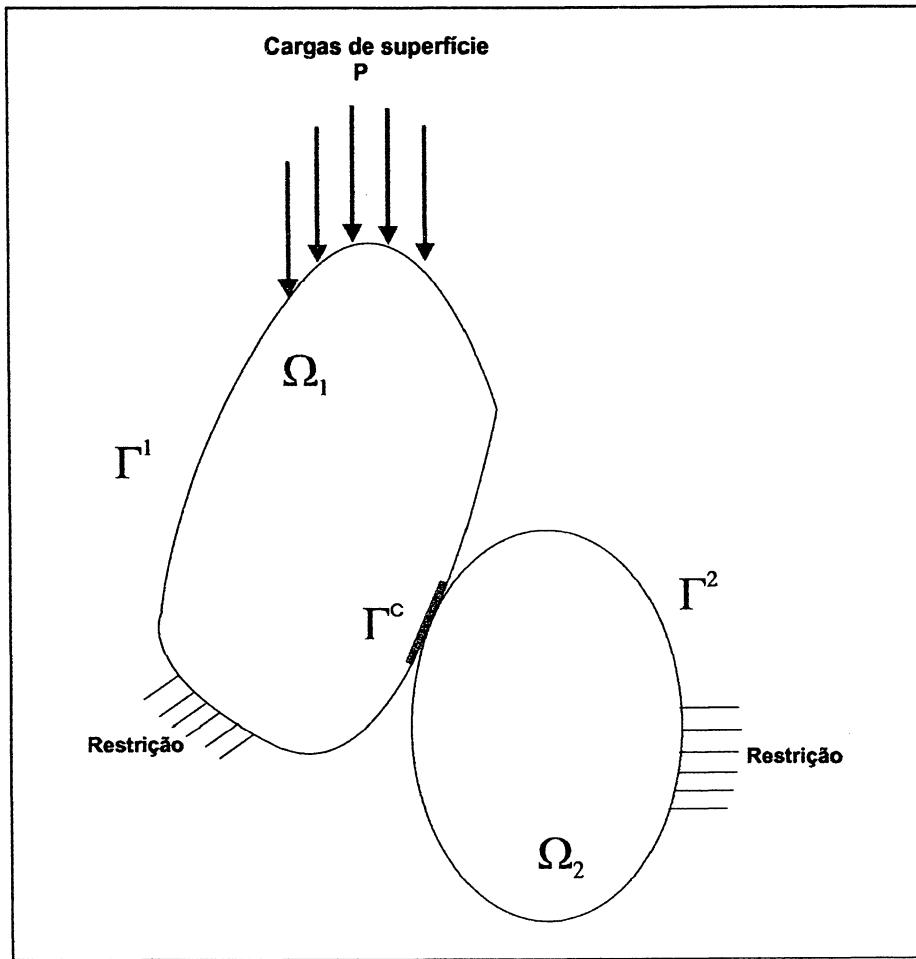
$$\sigma_{\Gamma_2} = \sigma_{\Gamma_2}^- \quad (3.57)$$

3.3 Teoria do Contato

Dois corpos em contato podem apresentar movimentos relativos de escorregamento, de rolamento e/ou de giro. Na região de contato entre dois corpos, há uma interação entre as superfícies, resultando na transmissão de cargas e momentos de uma para outra. Se o contato entre os corpos for elástico, forças de atrito poderão se manifestar desde que exista deslizamento significativo entre as duas partes. A lei de atrito de Coulomb é utilizada para representar o atrito entre superfícies em contato, se houver deslizamento relativo significativo de um corpo em relação ao outro (Bathe, 1997).

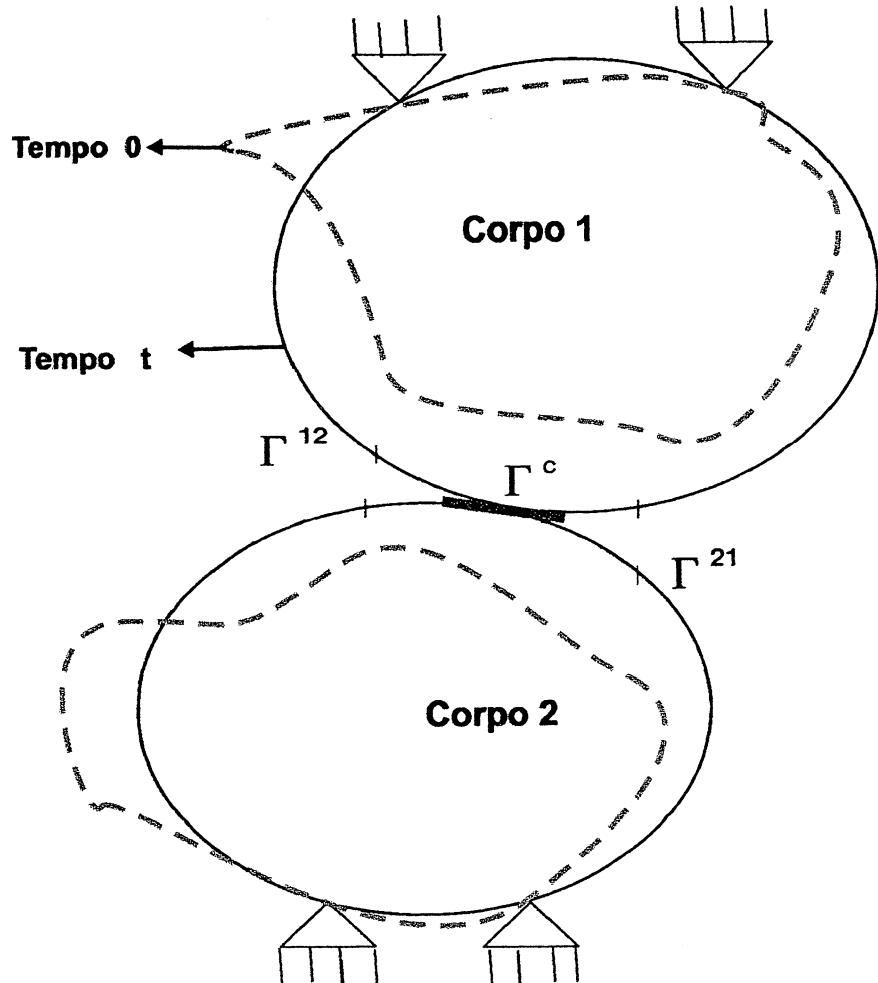
Sejam dois corpos elásticos, 1 e 2, em movimento relativo tal como ilustrado na figura 3.13, que os levará a manterem entre si um contato no tempo t . O domínio Ω é formado pelos domínios Ω_1 e Ω_2 enquanto que o contorno Γ é constituído pelos contornos Γ_1 e Γ_2 respectivamente, e a superfície de contato desconhecida *a priori* é representada por Γ_c .

Figura 3.13: Corpos em contato



Considera-se que o contato entre os dois corpos elásticos ocorrerá ao longo de uma certa área de contato Γ_c^{12} , em 1, e Γ_c^{21} , em 2, como é mostrado na figura 3.14.

Figura 3.14: Contato



O equilíbrio na configuração deformada poderá ser determinado pelo PTV.

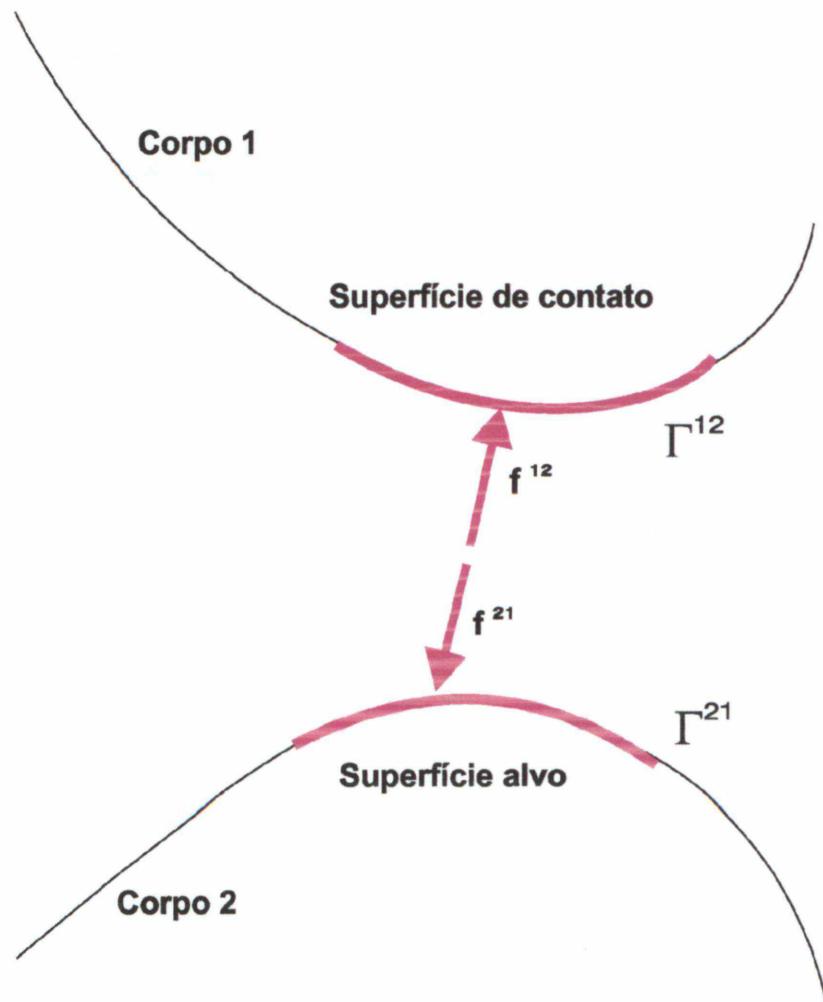
A consideração do contato entre dois corpos leva à adição de parcelas de cargas ao sistema, além das forças de corpo b e de superfície p . Tais forças atuarão como contribuição às cargas de superfície.

Assim as forças de contato $[f_c]$ são adicionadas à equação (3.43):

$$\sum_{L=1}^2 \int_{\Omega} \sigma \cdot \delta \varepsilon \, d\Omega = \sum_{L=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} b \cdot \delta u \, d\Omega + \int_{\Gamma} p \cdot \delta u \, d\Gamma \right\} + \sum_{L=1}^2 \left\{ \int_{\Gamma_c} \delta u_c \cdot f_c \, d\Gamma_c \right\} \quad (3.58)$$

A equação (3.58) é válida para todo deslocamento virtual compatível imposto na estrutura. O contorno Γ de cada corpo pode ser considerado em duas partes: Γ_f onde são prescritas as trações, e Γ_c , região onde atuam as forças de contato. A região de contato não é conhecida *a priori*, sendo sua determinação uma etapa necessária da análise. Considerando f^{12} como o vetor de forças na superfície de contato no corpo 1 devido ao contato com o corpo 2 e f^{21} o vetor de forças de superfície no corpo 2 devido ao contato com o corpo 1, tem-se que $f^{12} = -f^{21}$, como na figura 3.15.

Figura 3.15: Representação de forças em contato



As superfícies Γ^{12} e Γ^{21} são denominadas de par de superfícies de contato, Γ^{12} é convencionalmente chamada de superfície de contato (contact surface) e Γ^{21} , de superfície alvo (target surface). Estas superfícies podem não ter necessariamente o mesmo tamanho. Decompondo as forças de contato f^{12} que agem na superfície Γ^{12} , em componentes normais e tangenciais sobre os vetores unitários n e s na superfície Γ^{21} , tem-se:

$$f^{12} = \lambda n + cs$$

onde λ e c são as componentes das forças de contato normal e tangencial. Portanto pode-se escrever que:

$$\lambda = (f^{12})^T \cdot n;$$

$$c = (f^{12})^T \cdot s$$

Para definir os valores das componentes nas direções de n e s , considera-se um ponto genérico x no tempo t na superfície Γ^{12} e toma-se um ponto $y^*(x, t)$ de Γ^{21} (figura 3.16) que satisfaça

$$\|x - y^*(x, t)\|_2 = \min_{y \in \Gamma^{21}} \{\|x - y\|_2\}$$

Assim, a distância do ponto x até Γ^{21} é dada por:

$$g_n(x, t) = (x - y^*)^T \cdot n$$

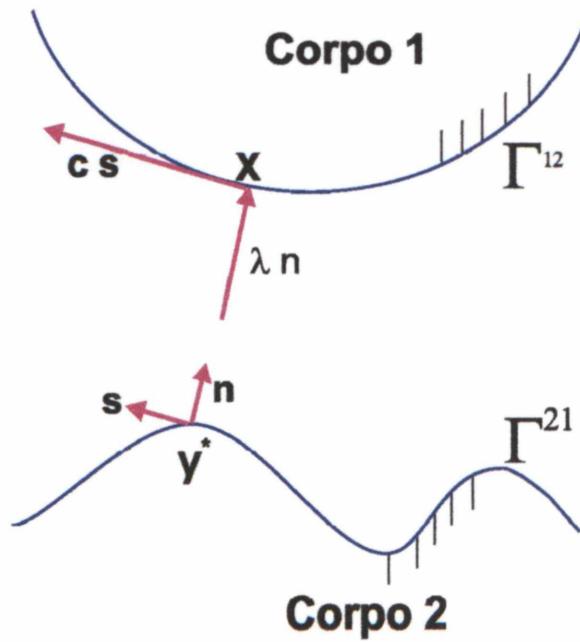
onde n é o vetor unitário utilizado em $y^*(x, t)$.

A função g_n é a função *gap*, na direção normal, para o par de contatos.

Assume-se que, quando $g_n > 0$, não há contato entre os corpos, havendo contato quando $g_n = 0$ e penetração quando $g_n < 0$. Esta última situação não é permitida e deve ser eliminada. Desse modo, as condições de contato normal são:

$$g_n \geq 0; \quad \lambda \geq 0; \quad g_n \cdot \lambda = 0 \quad (3.59)$$

Figura 3.16: Quantidades de contato (BATHE, 1997)



Considerando-se que δu^1 e δu^2 são as componentes dos deslocamentos virtuais nas superfícies de contato dos corpos 1 e 2, respectivamente, a parcela correspondente ao contato na equação (3.58) pode ser subdividida como:

$$\int_{\Gamma^{12}} \delta u^1 f^{12} d\Gamma^{12} + \int_{\Gamma^{21}} \delta u^2 f^{21} d\Gamma^{21} = \int_{\Gamma^{12}} \delta u^{12} f^{12} d\Gamma^{12} \quad (3.60)$$

onde $\delta u^{12} = \delta u^1 - \delta u^2$.

As condições de atrito, descritas pela lei de Coulomb, serão incluídas no contato entre duas superfícies pelo coeficiente de atrito μ e define-se a grandeza adimensional τ :

$$\tau = \frac{c}{\mu \cdot \lambda}$$

(com $\lambda > 0$)

onde $\mu \cdot \lambda$ é a resistência do atrito. A amplitude da velocidade tangencial relativa é dada por:

$$\dot{u}(x, t) = ((\dot{u}^2)_{|_{y^*(x, t)}} - (\dot{u}^1)_{|_{(x, t)}})^T \cdot s$$

correspondente ao vetor tangencial s em $y^*(x, t)$, onde $\dot{u}(x, t) \cdot s$ é a velocidade tangencial no tempo t do ponto material em y^* relativa ao ponto material em x .

Com estas definições, a lei de atrito de Coulomb fica:

$$|\tau| \leq 1 \quad (3.61)$$

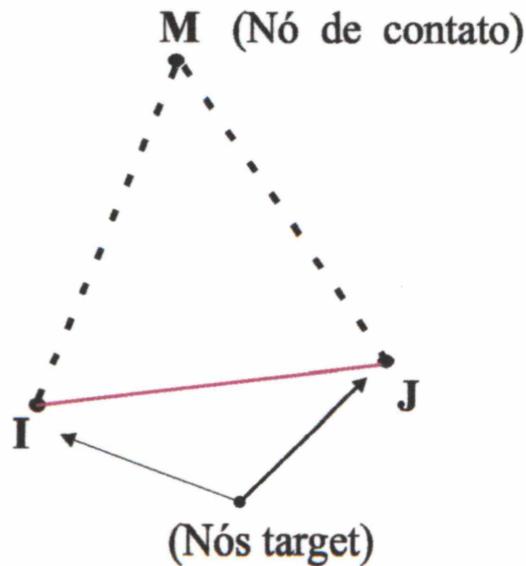
onde :

$$|\tau| < 1 \Rightarrow \dot{u} = 0 \quad e, \quad |\tau| = 1 \Rightarrow \text{sign}(\dot{u}) = \text{sign}(\tau) \quad (3.62)$$

A solução do problema de contato é a solução do PTV da equação (3.58) sujeito às condições das equações de compatibilidade (equação (3.59)) e levando em conta as leis de atrito (equação (3.61) e (3.62)).

3.3.1 Forças de contato

Figura 3.17: Elemento de contato bidimensional



Haverá supostamente penetração quando o nó de contato M ultrapassa a superfície definida pelos nós alvo I e J (figura 3.17). Esta penetração é representada pela grandeza g e é uma violação de compatibilidade. Para satisfazer a compatibilidade de contato, são desenvolvidas, nos nós alvos, forças na direção da normal n que tendem a reduzir a penetração a valores numéricos aceitáveis. Além das forças de compatibilidade, forças de fricção são desenvolvidas nas direções que são tangentes ao plano alvo. As forças normais e tangenciais são referenciadas em relação ao sistema de coordenadas local XY. Duas das abordagens existentes para satisfazer a compatibilidade de contato (forças normais) serão descritas a seguir: o método da penalidade e a combinação da penalidade com os multiplicadores de

Lagrange. O método da penalidade impõe a compatibilidade através da rigidez de contato (parâmetro de penalização). A combinação desta com multiplicadores de Lagrange satisfaz a compatibilidade com uma precisão definida pelo usuário pela adição de forças de contato de Lagrange. Para o método das penalidades, o valor da força nodal que ocorre na interface do contato na direção normal é dado por:

$$f_n = \begin{cases} k_n \cdot g_n & \text{se } g_n \leq 0 \\ 0 & \text{se } g_n > 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

onde k_n é a rigidez normal de contato.

As forças aplicadas ao nó de contato M são equilibradas por forças aplicadas aos nós da superfície alvo I e J . Desse modo: $f_{n,M} = f_{n,I} + f_{n,J} = f_n$. Se o atrito não for considerado, a força tangencial nodal é nula. Com a consideração do atrito elástico de Coulomb, a força nodal na direção tangencial na interface do contato é:

$$f_s = \begin{cases} k_s \cdot u_s^e < F \cdot \bar{f}_s & \text{se de adesão} \\ \bar{f}_s & \text{se de deslizamento} \end{cases} \quad (3.64)$$

onde F é o fator de relação entre o atrito estático e o dinâmico, u_s^e é a deformação tangencial elástica. A variável \bar{f}_s é a força limite de adesão do modelo do atrito de Coulomb, cujo valor é dado por: $\bar{f}_s = -\mu \cdot f_n$.

Para a direção tangencial, o balanceamento de forças nodais é similar ao das forças

normais:

$$f_{s,M} = f_{s,I} + f_{s,J} = f_s$$

3.3.2 Métodos de solução

1. Método dos multiplicadores de Lagrange

O método dos multiplicadores de Lagrange é mais confiável por não utilizar parâmetros, como no método das penalidades, que podem provocar mau condicionamento da matriz obtida na aplicação da discretização (Bathe,1996).

Os multiplicadores de Lagrange são coeficientes das equações de restrição e após a multiplicação das mesmas são adicionados ao sistemas de equações.

A formulação variacional considerada para um problema de contato de um modelo estrutural discreto, com a utilização dos multiplicadores de Lagrange possui a seguinte forma:

$$\Pi_L = \frac{1}{2}u^T Ku - u^T F + \lambda^T (N^T u - \psi) \quad (3.65)$$

onde λ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange , N é uma matriz que contém as condições cinemáticas de contato e ψ é o vetor das restrições.

Calculando a primeira variação desta forma (em relação a u e λ) (3.65), encontra-se:

$$\delta \Pi = Ku - F + N\lambda + N^T u - \psi \quad (3.66)$$

Fazendo $\delta\Pi_L = 0$, chega-se ao sistema:

$$\begin{pmatrix} K & N \\ N^T & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ \psi \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

Nesta equação, fica evidente o aumento da dimensão do problema pelo acréscimo da parcela de força de contato, devido aos multiplicadores de Lagrange nas equações envolvidas. Os multiplicadores de Lagrange podem ser combinados com o método das penalidades com algumas vantagens. Para o método combinado, a componente de força do multiplicador de Lagrange é calculada localmente para cada elemento iterativamente como:

$$f_n = \min(0, k_n \cdot g_n + \lambda_{i+1})$$

onde λ_{i+1} é a força dos multiplicadores de Lagrange na iteração $i+1$. O valor desta força é determinado por:

$$\lambda_{i+1} = \begin{cases} \lambda_i + \alpha \cdot k_n \cdot g_n & \text{se } |g_n| \geq \epsilon \\ \lambda_i & \text{se } |g_n| < \epsilon \end{cases} \quad (3.68)$$

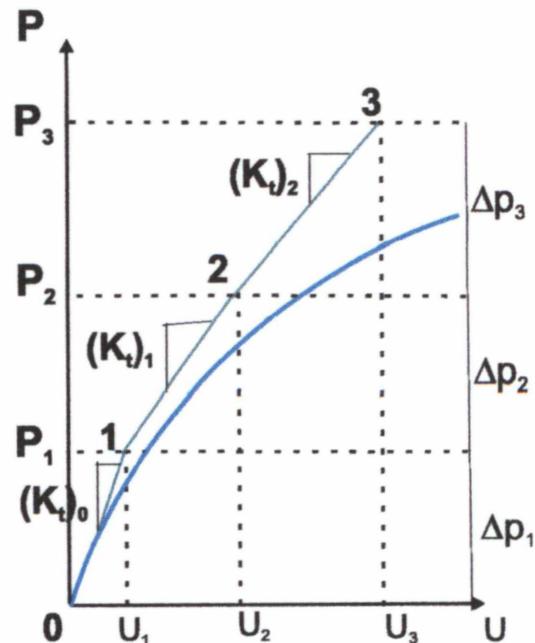
sendo α um fator computado internamente, $\alpha < 1$; e ϵ a tolerância de compatibilidade, definida pelo usuário (constante FTOLN, no ANSYS 5.7).

2. Métodos de solução de sistemas não-lineares

O sistema de equações algébricas para o contato, independentemente do método utilizado para imposição das restrições, é não-linear. Os métodos

desenvolvidos para resolver sistemas não-lineares podem ser explícitos (sem a montagem de matriz) ou implícitos (com a montagem de matriz), incrementais, iterativos ou mistos (Cook, 1989). Os métodos incrementais aproximam o problema não-linear por uma série de problemas lineares. A carga total aplicada é subdividida em pequenos incrementos, que podem ter ou não o mesmo tamanho. Cada incremento é resolvido como se fosse linear, por métodos convencionais. O processo é repetido até completar a carga total aplicada e a solução é dada pela soma de todos os deslocamentos incrementais encontrados. A matriz de rigidez é obtida como tangente à curva força-deslocamento nos pontos desejados, como se observa na figura 3.18.

Figura 3.18: Solução - método incremental para uma carga (COOK, 1989)

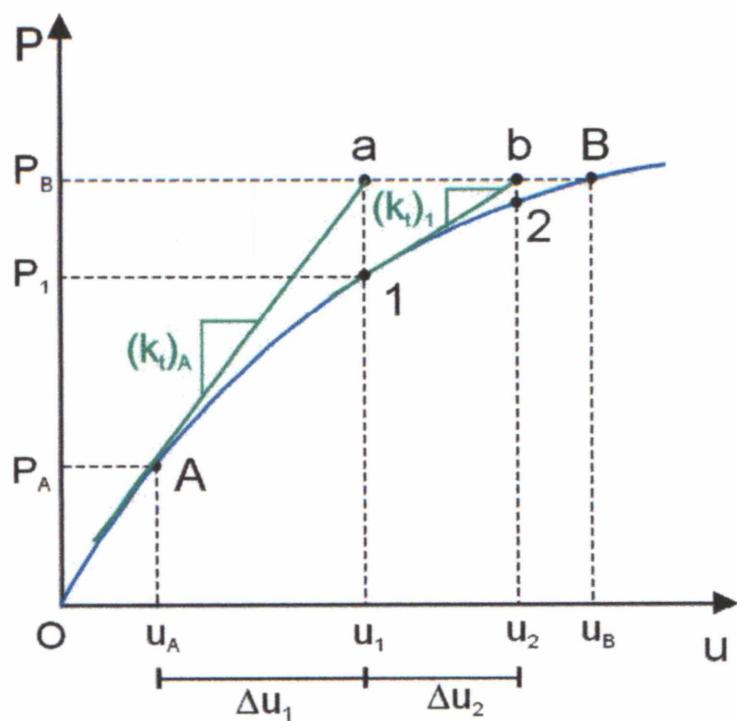


Este método produz uma solução que não se aproxima adequadamente da solução exata, devido aos erros acumulados nos incrementos. Os métodos iterativos aplicam sucessivas iterações na solução até que o equilíbrio seja alcançado para o carregamento total aplicado.

3. Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson como pode-se observar na figura 3.19 (Cook, 1989) é também iterativo.

Figura 3.19: Newton-Raphson para uma carga P_b (COOK,1989)



Neste método, a matriz de rigidez tangente é inicialmente considerada constante, e o deslocamento encontrado, em geral não satisfaz as condições de

equilíbrio. Em cada iteração, calcula-se uma parcela de carga desbalanceada que será utilizada para computar um incremento adicional aos deslocamentos. Na iteração seguinte, a matriz tangente será atualizada e uma parcela da carga desbalanceada será encontrada novamente, repetindo-se o processo até que os valores de desbalanceamento ou os deslocamentos adicionais, se aproximem de tolerâncias que permitam a satisfação das condições de equilíbrio (ou até que se obtenha a convergência).

O método de Newton-Raphson modificado ou da Rigidez Inicial segue o mesmo procedimento, diferindo apenas no fato de não atualizar a matriz de rigidez ou atualizá-la raramente, isto implicaria na necessidade de mais iterações em cada passo de carga, Δt , e por este motivo, tal alternativa não foi empregada. Os métodos Quasi-Newton utilizam a matriz rigidez se-
cante para as iterações, ao invés da matriz rigidez tangente, com vantagens computacionais e de estabilidade nos passos da iteração. Os métodos mistos associam os métodos incrementais e os métodos iterativos. Neste trabalho foi utilizado o procedimento de Newton-Raphson incremental com a atualização da matriz de rigidez em cada iteração.

Capítulo 4

Método dos Elementos Finitos

4.1 Breve histórico

Conforme Assan (1999), há mais de dois mil anos, filósofos gregos já haviam elaborado teorias nas quais supunham que todas as coisas eram formadas por inúmeras partículas. Assim, Leucipo e Demócrito estabeleceram que tudo era constituído por um número infinitamente grande de partículas denominadas de átomos. Eudóxio, criador do método da exaustão, que consiste em inscrever e circunscrever figuras retilíneas em figuras curvilíneas, já pensava dessa forma, em discretizar a figura contínua para facilitar certos cálculos.

Esse método permitiu que fossem calculadas áreas de figuras curvas e volumes de sólidos como esferas e cones. Ele é equivalente à passagem ao limite do cálculo diferencial e integral. Na década de 1930, McHenry e Hrennikoff substituíram um

elemento estrutural contínuo como, por exemplo, uma placa, por uma estrutura formada por barras seguindo a geometria original, mantendo as mesmas condições de vinculação e cargas. Esses métodos, que originaram a análise matricial, embora considerem o meio contínuo discretizado por elementos de rigidez e elasticidade conhecidas, não apresentam o aspecto conceitual implícito no MEF. Este consiste não apenas em transformar o sólido contínuo em uma associação de elementos discretos e escrever as equações de compatibilidade e equilíbrio entre eles, mas admitir funções contínuas que representam o campo de deslocamentos no domínio de um elemento e, a partir daí, obter o estado de deformações correspondente que, associado às relações constitutivas do material, permitem definir o estado de tensões em todo o elemento. Este estado de tensões é transformado em esforços internos que estão em equilíbrio com as ações externas. Essa formulação provém do método de Rayleigh-Ritz que se baseia na minimização da energia potencial total do sistema, escrita em função de um campo predefinido de deslocamentos.

Em 1943, Courant, matemático de renome, aplicou esse procedimento no estudo da torção de Saint-Venant de secções vazadas. Esses trabalhos eram pouco valorizados naquela época, pois não haviam computadores capazes de generalizar e resolver grandes conjuntos de equações algébricas simultâneas. Assim, não é acidentalmente que o desenvolvimento do MEF coincide com maior avanço dos computadores digitais e linguagens de programação.

Em 1953, engenheiros já haviam escrito equações de rigidez em forma ma-

tricial, resolvendo-as em computadores. A maior parte deste trabalho foi utilizada na indústria aeroespacial (na época um problema grande tinha cem graus de liberdade). Ainda neste ano, na companhia de aviação Boeing, Turner sugeriu que elementos planos triangulares fossem usados para modelar a fuselagem de aeronaves. Quase que simultaneamente um trabalho similar foi publicado por Argyris e Kelsey na Inglaterra.

O MEF teve sua formulação estabelecida na forma como é hoje conhecida com a publicação do trabalho de Turner, Clough, Martin e Topp, em 1956. Clough, autor do nome (Método dos Elementos Finitos, em contraposição aos elementos infinitesimais do cálculo diferencial e integral), descreve em detalhes sua participação no desenvolvimento deste método em artigo publicado em 1980.

Um grande número de programas de elementos finitos em computadores emergiu no final das décadas de 1960 e 1970, onde destacaram-se o ANSYS, ASKA, STRUDL, ADYNA e NASTRAN, que são munidos de pré-processadores (para os dados de entrada) e pós-processadores (para avaliação dos resultados). Esses processadores tornam mais fácil, rápida e barata a análise pelo método dos elementos finitos. Atualmente, existem muitos programas computacionais comerciais de uso corrente em diversas áreas do conhecimento que utilizam esse método para análises linear e não-linear.

O MEF, inicialmente concebido como um artifício matemático para cálculo de estruturas, tornou-se poderosa ferramenta para resolução de equações diferen-

ciais parciais, tão comuns na física dos meios contínuos. Seja na mecânica dos sólidos ou dos fluidos, na termofísica, no eletromagnetismo dos campos estáticos ou de propagação, o MEF representa uma ferramenta quase universal para a pré-determinação do comportamento físico dos objetos em estudo.

Nas próximas subseções, serão descritos, sumariamente, as aproximações comumente empregadas em programas de elementos finitos.

4.2 Elementos finitos unidimensionais

Trata-se, neste tópico, do aspecto numérico, envolvido nas técnicas de aproximação que visam, a partir de uma discretização, determinar as soluções de sistemas contínuos. Cada segmento desta discretização passa a ser chamado de elemento e definido por funções de forma que descrevem seu comportamento entre sua origem e extremidade. Os pontos que limitam os elementos finitos são chamados de nós.

Adota-se para o problema, inicialmente, a aproximação do tipo nodal de um domínio Ω , para em seguida aplicar este tipo de aproximação em seus subdomínios. A aproximação nodal em subdomínios é chamada de aproximação dos Elementos Finitos.

O uso do conceito de subdomínios ou elementos é estudado num espaço de referência, o que introduz os conceitos de transformações geométricas de um elemento do espaço real para o espaço de referência e a construção da matriz jacobiana da

transformação.

Para os problemas dependentes de uma única variável x , propõe-se a interpolação da forma:

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^N u_i \cdot \phi_i(x)$$

onde os u_i são os graus de liberdade, valores nodais de $u(x)$ do elemento e ϕ_i são as funções de forma. Por exemplo, uma função interpoladora de um elemento finito "e", linear, unidimensional, representado por deslocamentos nodais u_i é dada por:

$$u_e(x) = u_1 \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + u_2 \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

sendo as funções de forma:

$$\phi_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

e

$$\phi_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Assim temos que: $u_e(x) = u_1\phi_1(x) + u_2\phi_2(x)$, u_1 e u_2 são os deslocamentos nodais. Observa-se que:

$$\phi_1(x_1) = 1 \quad \phi_1(x_2) = 0$$

$$\phi_2(x_1) = 0 \quad \phi_2(x_2) = 1$$

Matricialmente: $[u] = [\phi_1 \ \phi_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$

Neste exemplo, as funções são facilmente construídas, mas, para um problema

com n funções de forma, pode-se utilizar a fórmula de interpolação de Lagrange:

$$\phi_i(x) = \frac{\prod_{j=1(j \neq i)}^n (x - x_j)}{\prod_{j=1(j \neq i)}^n (x_i - x_j)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Observa-se que

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i \\ 1 & \text{se } j = i \end{cases}$$

As funções de forma assim construídas empregam o próprio sistema de coordenadas global (x,y).

4.3 Elementos finitos bidimensionais

Embora o MEF seja geral e possa ser aplicado a qualquer problema de valor de contorno, neste item ele será apresentado de maneira particularizada, considerando as variáveis nodais como sendo de deslocamento.

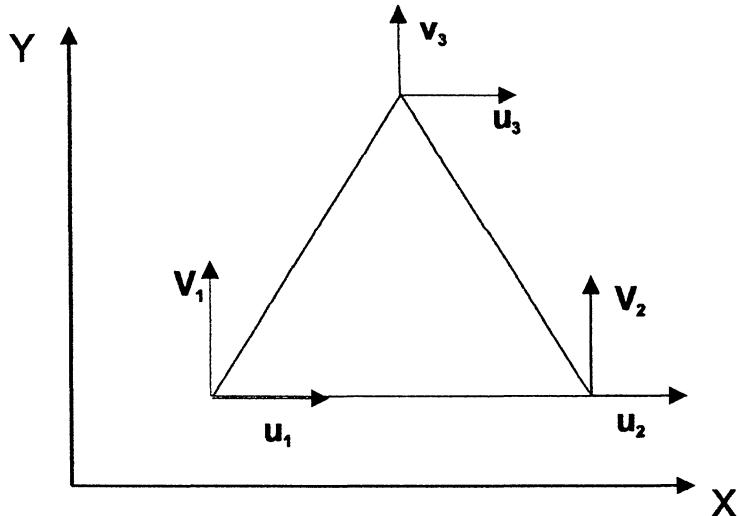
4.3.1 Elemento finito triangular linear

Este elemento tem como funções interpoladoras para os deslocamentos u e v , polinômios do primeiro grau:

$$u(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y \quad (4.1)$$

$$v(x, y) = c_4 + c_5x + c_6y \quad (4.2)$$

Figura 4.1: Elemento finito triangular linear

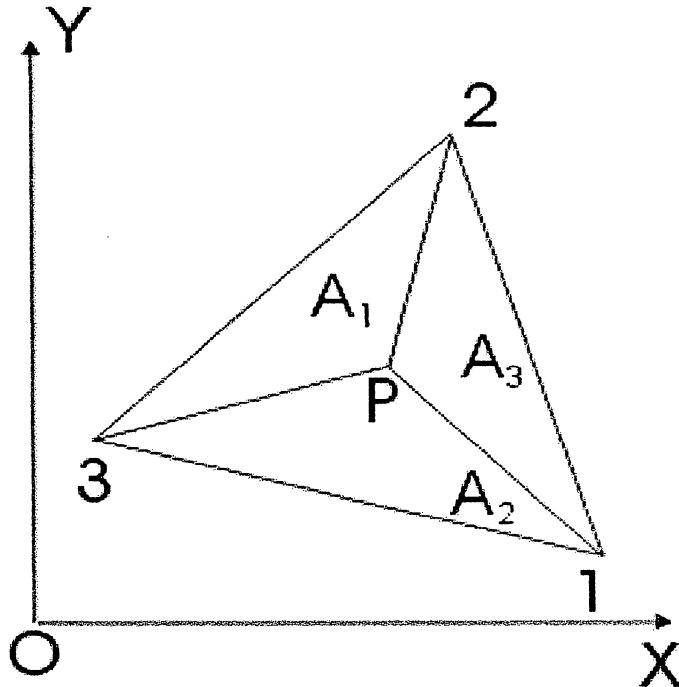


conforme a figura 4.1.

Tratando-se de elemento triangular, é comum encontrar sua formulação através de outro tipo de coordenadas, denominadas de coordenadas triangulares ou homogêneas, em lugar das coordenadas cartesianas. O elemento é numerado seguindo o sentido antihorário e seus lados têm nome ou índice do nó oposto. Para se obter as relações entre as coordenadas cartesianas e homogêneas, proceder-se-á como em Brebbia ([27]). Para isto, considera-se um ponto $P(x,y)$, interno ao triângulo. As coordenadas homogêneas podem ser interpretadas como relações entre as áreas dos triângulos definidos pelos nós 1, 2, 3 e o ponto P , conforme a figura 4.2. A área A_2 do triângulo $1P3$ é dada por:

$$A_2 = \frac{1}{2}l_2(\phi_2 h_2),$$

Figura 4.2: Triângulo linear - coordenadas homogêneas



onde a altura desse triângulo mede $\phi_2 h_2$. Como se observa pela figura, se o ponto P coincidisse com o nó 3 ou com o nó 1, o produto $\phi_2 h_2$ seria nulo, uma vez que nesses nós, $\phi_2 = 0$. Porém, se o ponto P coincidisse com o nó 2, o produto $\phi_2 h_2$ seria igual a h_2 , já que nesse nó, tem-se $\phi_2 = 1$.

De modo análogo, tem-se para a área A_1 do triângulo 2P3:

$$A_1 = \frac{1}{2} l_1 (\phi_1 h_1).$$

Da área A do triângulo 123 tem-se que:

$$A = \frac{1}{2} l_2 h_2 = \frac{1}{2} l_1 h_1$$

onde obtem-se as relações A_1/A e A_2/A , que fornecem:

$$\phi_1 = \frac{A_1}{A}$$

e

$$\phi_2 = \frac{A_2}{A}$$

Mas as áreas devem obedecer a condição:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\Rightarrow 1 = \phi_1 + \phi_2 + \frac{A_3}{A}$$

$$\Rightarrow 1 = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

Assim as relações entre as coordenadas cartesianas e homogêneas são dadas por:

$$x = \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 \quad (4.3)$$

$$y = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3 \quad (4.4)$$

Substituindo estas equações (4.3 e 4.4) em (4.1) e (4.2) e particularizando os valores de ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 para cada nó do elemento triangular, obtém-se:

$$u_i = c_1 + c_2 x_i + c_3 y_i$$

$$v_i = c_4 + c_5 x_i + c_6 y_i$$

com $i = 1, 2, 3$.

Eliminando-se os seis coeficientes $c_j (j = 1, 2, \dots, 6)$ das seis igualdades implícitas às igualdades (4.3) e (4.4) e recordando que as áreas A, A_1, A_2 e A_3 são obtidas de:

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix};$$

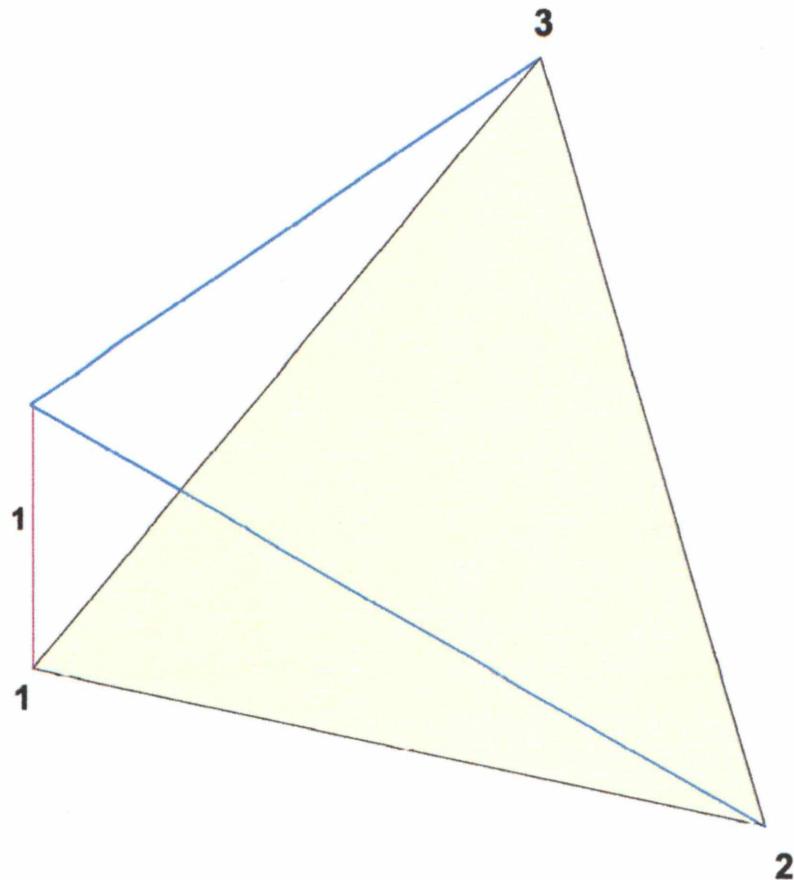
$$A_2 = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{pmatrix}$$

Logo tem-se que:

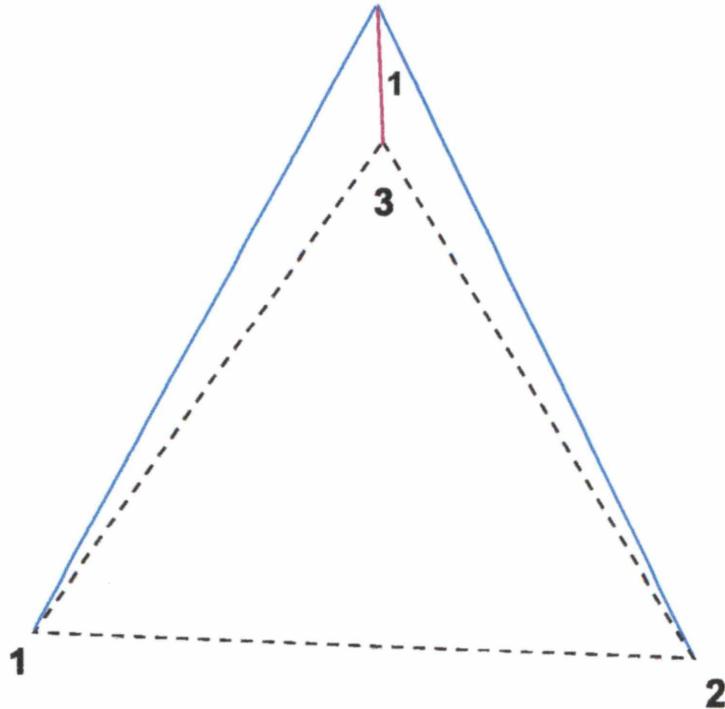
$$u = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \phi_3 u_3 = \sum_{i=1}^3 \phi_i u_i \quad (4.5)$$

$$v = \phi_1 v_1 + \phi_2 v_2 + \phi_3 v_3 = \sum_{i=1}^3 \phi_i v_i \quad (4.6)$$

Nas equações (4.5) e (4.6), os coeficientes ϕ_i são as funções de forma que interpolam os resultados nodais no elemento finito. Assim, para $\phi_1 = 1$, tem-se $\phi_2 = \phi_3 = 0$ e os deslocamentos u têm a variação mostrada na figura 4.3.

Figura 4.3: Função de forma ϕ_1 

Da mesma forma, para $\phi_2 = 1$, tem-se $\phi_1 = \phi_3 = 0$ e para $\phi_3 = 1$ tem-se $\phi_1 = \phi_2 = 0$ (figura 4.4).

Figura 4.4: Função de forma ϕ_3 

Matricialmente, as equações (4.5) e (4.6) podem ser representadas por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

ou

$$u = \phi V \quad (4.7)$$

onde

$$V = \left\{ \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \right\}^T$$

As deformações são obtidas com a derivação de (4.7):

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\}$$

ou (na forma compactada):

$$\{\varepsilon\} = [\partial].\{u\} \quad (4.8)$$

Substituindo nesta igualdade o vetor u dado em (4.7), tem-se as deformações em função dos deslocamentos nodais:

$$\{\varepsilon\} = [\partial].\{\phi.V\} = B.V \quad (4.9)$$

em que a matriz B , que relaciona as deformações com deslocamentos, tem a forma:

$$B = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right) \left[\begin{array}{cccccc} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{array} \right] \quad (4.10)$$

de modo que aparecem derivadas das coordenadas homogêneas em relação às coordenadas cartesianas.

4.3.2 Elemento triangular quadrático

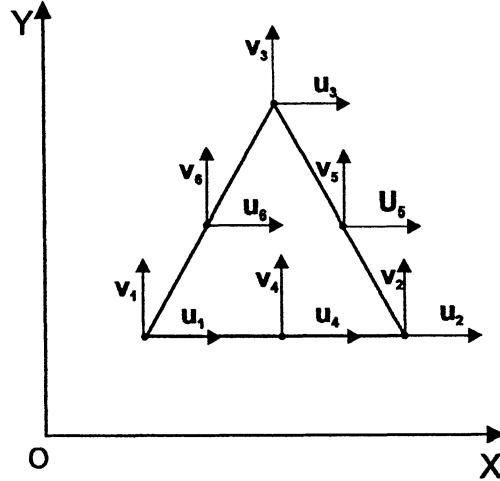
Uma melhor representação do campo de deformações dentro do elemento só é possível se a função que exprime os deslocamentos tivesse grau maior que o de uma função linear, de sorte que suas derivadas também melhor representassem o campo de deformações. Porém, uma função de grau maior requer um número maior de coeficientes desconhecidos e o número destes está intimamente relacionado ao número de graus de liberdade do elemento. O número de graus de liberdade depende do tipo do problema, por exemplo, na Teoria da Elasticidade e em problemas de estado plano de tensões, são dois. O elemento triangular quadrático possui seis nós, sendo três situados nos pontos médios dos lados, com dois graus de liberdade (u, v) por nó, que são as translações nas direções de X e Y, como mostra a figura 4.5. No ANSYS® 5.7.1, este elemento é representado pelo elemento PLANE 2 que é utilizado para modelagem de sólidos no estado plano de tensões, estado plano de deformações e modelos axissimétricos.

Portanto, o elemento triangular de seis nós terá doze graus de liberdade, sendo que a matriz coluna das forças nodais e dos deslocamentos nodais terão dimensões 12×1 e a matriz de rigidez, 12×12 , isto é:

$$\begin{bmatrix} f \end{bmatrix}_{12 \times 1} = \begin{bmatrix} k \end{bmatrix}_{12 \times 12}^e \cdot \begin{pmatrix} \delta \end{pmatrix}_{12 \times 1}$$

Tendo em vista que cada elemento tem seis nós, com dois graus de liberdade por nó, os deslocamentos u e v são aproximados por polinômios completos do

Figura 4.5: Elemento finito triangular de seis nós



segundo grau em x e y. Então, propõe-se para interpolação dos deslocamentos as seguintes expressões:

$$u = u_1 \phi_1^e + u_2 \phi_2^e + u_3 \phi_3^e + u_4 \phi_4^e + u_5 \phi_5^e + u_6 \phi_6^e$$

$$v = v_1 \phi_1^e + v_2 \phi_2^e + v_3 \phi_3^e + v_4 \phi_4^e + v_5 \phi_5^e + v_6 \phi_6^e$$

onde os coeficientes u_i e v_i são escalares arbitrários que representam os deslocamentos nodais. Matricialmente

$$\{u\} = \{\mathbf{u}^e\}(\phi^e)$$

onde

$$\{u\} = \{u_x \ u_y\}^T$$

$$\{\mathbf{u}^e\} = \left\{ \begin{array}{cccccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & u_5 & v_5 & u_6 & v_6 \end{array} \right\}$$

$$(\phi^e) = \begin{pmatrix} \phi_1^e & 0 & \phi_2^e & 0 & \phi_3^e & 0 & \phi_4^e & 0 & \phi_5^e & 0 & \phi_6^e & 0 \\ 0 & \phi_1^e & 0 & \phi_2^e & 0 & \phi_3^e & 0 & \phi_4^e & 0 & \phi_5^e & 0 & \phi_6^e \end{pmatrix}^T$$

e

$$\phi_1^e = c_{11} + c_{21}x + c_{31}y + c_{41}xy + c_{51}x^2 + c_{61}y^2$$

$$\phi_2^e = c_{12} + c_{22}x + c_{32}y + c_{42}xy + c_{52}x^2 + c_{62}y^2$$

$$\phi_3^e = c_{13} + c_{23}x + c_{33}y + c_{43}xy + c_{53}x^2 + c_{63}y^2$$

$$\vdots = \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\vdots = \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\phi_6^e = c_{16} + c_{26}x + c_{36}y + c_{46}xy + c_{56}x^2 + c_{66}y^2$$

Como as deformações podem ser calculadas pelas expressões (4.8 e 4.9), tem-

se que

$$\{\varepsilon\} = [\partial].(\phi^e).[u^e] = [B].[u^e]$$

onde

$$[B] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(c_{21} + c_{41}y + 2c_{51}x)x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2(c_{31} + c_{41}x + 2c_{61}y) & \cdots & 0 & 2(c_{36} + c_{46}x + 2c_{66}y) \\ c_{31} + c_{41}x + 2c_{61}y & c_{21} + c_{41}y + 2c_{51}x & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}_{3 \times 12} \quad (4.11)$$

As deformações assim calculadas, variam linearmente com x e y, ponto a ponto no interior do triângulo bem como as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} que decorrem imediatamente do cálculo das deformações através das equações (3.40).

A variação de σ_x com x deve-se, neste caso, à ação direta da variação de ε_x ao longo de X, bem como devido à ação da contração lateral provocada por ε_y . Assim numa região em que ocorra acentuada variação da tensão σ_x , o elemento triangular quadrático do estado plano de tensões pode representar essa variação, dependendo do refino da malha.

Obviamente, em função do gradiente de tensões presente, o estudo do tamanho adequado do elemento sempre merecerá cuidados ao se definir a malha em elementos finitos, pois os deslocamentos variam quadraticamente e as deformações ($\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ por exemplo), variam linearmente. Como $\{\sigma\} = E \cdot \{\varepsilon\}$, então, a aproximação de tensões no interior do elemento também é linear. A partir dos deslocamentos nodais $[u^e]$ pode-se calcular as deformações no interior do elemento por intermédio da matriz $[B]$. Pela equação constitutiva tem-se que

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \cdot \{\varepsilon(x, y)\}$$

logo,

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \cdot [B] \cdot \{u^e\} \quad (4.12)$$

Desse modo, as tensões são determinadas a partir dos deslocamentos nodais. As forças externas realizam um trabalho na medida em que acontece a deformação

do corpo. No regime elástico, essa deformação é associada a uma "energia de deformação", que, após a remoção do carregamento, pode ser recuperada. O trabalho externo é obtido por intermédio das forças nodais e dos correspondentes deslocamentos, e é armazenado no elemento como energia de deformação. Então admite-se uma condição externa arbitrária imposta ao elemento, representada por um conjunto de deslocamentos nodais e correspondentes forças nodais atuantes. Esses deslocamentos impostos arbitrariamente, são os *deslocamentos virtuais* utilizados na aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)(Bathe, 1997).

O trabalho externo W_e realizado pelas forças externas

$$F = \{b, p\}$$

em consequência de um campo de deslocamentos virtuais δu é definido por:

$$W_e = \langle F, \delta u \rangle \quad (4.13)$$

Ou seja,

$$W_e = \int_{\Omega} b \cdot \delta u \, dx \, dy + \int_{\Gamma} p \cdot \delta u \, d\Gamma \quad (4.14)$$

para todo deslocamento virtual δu , onde a carga de corpo $b = (b_x, b_y)$ está distribuída na superfície Ω e a carga de linha $p = (p_x, p_y)$ está aplicada no contorno Γ do corpo. Da mesma forma que existem deslocamentos virtuais impostos aos nós do elemento, a esta situação corresponde uma condição deformada virtual interna do elemento. Considerando o trabalho interno verificado anteriormente sobre um

corpo \mathcal{B} de espessura t , tensão $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$, deformação $\delta\varepsilon = \{\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_{xy}\}$,

onde $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$, obtém-se as equações que governam este problema.

O equilíbrio dos componentes estruturais é regido pelo PTV (forma fraca da equação de equilíbrio) representado pela equação abaixo:

$$\int_{\Omega} \delta\varepsilon^T \sigma \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b \, d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u^T p \, d\Gamma = 0, \quad \forall \delta u \quad (4.15)$$

Nesta equação, δu é o vetor de deslocamentos virtuais. As deformações virtuais $\delta\varepsilon$ são aquelas correspondentes aos deslocamentos virtuais impostos ao sistema.

Pelo PTV, para um problema no estado plano de tensões, estado plano de deformações ou axissimétrico, tem-se que:

$$t \int_{\Omega} (\delta u)^T \mathcal{D} (\partial \delta u) \, dx \, dy - \int_{\Omega} (\delta u)^T \cdot b \, dx \, dy - \int_{\Gamma} (\delta u)^T \cdot p \, d\Gamma = 0 \quad \forall \delta u \quad (4.16)$$

Portanto, o primeiro termo de 4.16 toma a seguinte forma:

$$\sum_i t \int_{\Omega} [B]^T \mathcal{D} [B] \, dx \, dy \cdot (u^e) \quad (4.17)$$

onde B é dada pela expressão (4.9).

A parcela

$$k^e = t \int_{\Omega} [B]^T \mathcal{D} [B] \, dx \, dy \quad (4.18)$$

é designada por matriz de rigidez do elemento e , onde \mathcal{D} é a matriz de constantes elásticas do material e depende do tipo da análise em questão.

Para determinar o vetor de cargas, na ausência de forças do corpo, calcula-se a

integral:

$$[f_p^e] = \int_{\Gamma} (\delta u)^T [p] \, d\Gamma = \int_{\Gamma} [\delta u^e \phi^e]^T [p] \, d\Gamma = \int_{\Gamma} [p]^T \phi^e \, d\Gamma (\delta u^e),$$

onde chega-se a

$$[k^e] \cdot [u^e] = [f_b^e] + [f_p^e] = [f^e] \quad (4.19)$$

Estas matrizes elementares são utilizadas para a montagem da matriz de rigidez global de toda a estrutura, num processo de agrupamento das contribuições elementares, mas as condições de contorno, resultando no seguinte sistema linear de equações algébricas:

$$KU = F_V + F_N = F \quad (4.20)$$

onde F_V é o termo fonte devido à força de volume b , e F_N , termo fonte devido às condições de contorno naturais de Neumann ou forças de superfície. A matriz quadrada K é definida positiva e simétrica em virtude da matriz \mathcal{D} das constantes elásticas também ser positiva definida. Portanto, existe uma inversa K^{-1} e os deslocamentos nodais da solução aproximada são dados por

$$U = K^{-1}F \quad (4.21)$$

4.3.3 Elemento finito isoparamétrico

Da mesma forma que é feita a aproximação das variáveis do problema pode-se estabelecer aproximações para a geometria que são definidas a partir das coordenadas

dos nós. Neste caso, pode-se usar um sistema de coordenadas local denominado por isoparamétrico, baseado num *elemento padrão de referência*. A formulação dos elementos isoparamétricos, publicada por Irons em 1966, permite gerar elementos com lados curvos que modelam mais adequadamente os contornos irregulares do modelo que se pretende discretizar. As funções de transformação geométrica são idênticas às funções de interpolação.

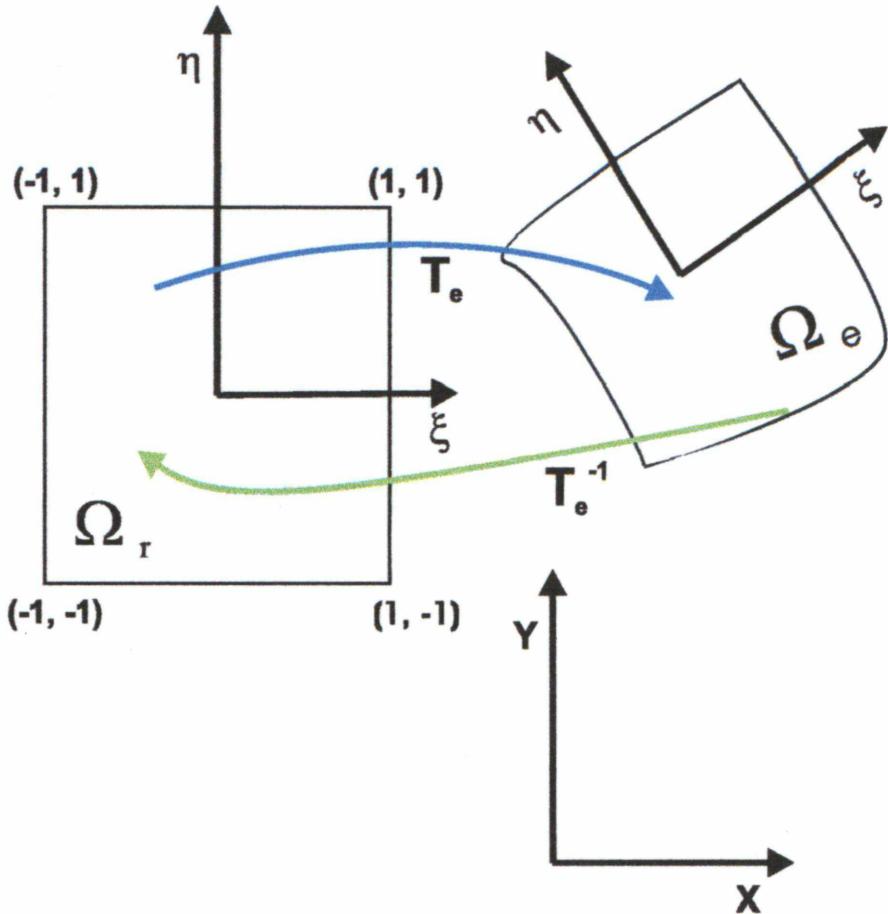
Para simplificar a expressão analítica para elementos de forma complexa, um elemento de referência é introduzido. Seja então, o elemento definido num espaço não dimensional abstrato com uma forma geométrica muito simples. A geometria do elemento de referência é mapeada a partir da geometria do elemento real, usando expressões de transformações geométricas.

Um elemento finito Ω_e em XY é obtido como imagem sob T_e do correspondente elemento padrão Ω_r do plano $\xi \eta$. A função inversa T_e^{-1} de Ω_e para Ω_r é também definida. A figura (figura 4.6) mostra um elemento finito quadrangular e o respectivo elemento isoparamétrico.

Obter um elemento isoparamétrico a partir de um elemento quadrangular, como o da figura 4.6 corresponde a criar um elemento de bordas curvas com seus pontos obtidos por um mapeamento ponto a ponto a partir do elemento inicial utilizando as funções de forma como funções mapeadoras.

A coordenada adimensional ξ , também chamada de coordenada natural ou homogênea, é fixada no elemento e assim permanece, independentemente da

Figura 4.6: Elemento isoparamétrico



orientação que o elemento venha a ter em relação ao sistema XY de coordenadas globais.

$$T_e : \Omega_r \rightarrow \Omega_e$$

definida por

$$T_e(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \quad (4.22)$$

e sua inversa é obtida por:

$$T_e^{-1}(x, y) = (\xi, \eta)$$

onde Ω_r é representado por um quadrado com coordenadas locais ξ e η , satisfazendo:

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

e

$$-1 \leq \eta \leq 1$$

Assim o ponto $(1, \eta) \in \Omega_r$ é transformado no ponto $(x = x(1, \eta), y = y(1, \eta))$ no plano XY. Porém os pontos $(x(1, \eta), y(1, \eta))$ definem parametricamente uma curva no plano XY, onde η aparece como um parâmetro real.

Diz-se que esta curva define a linha curvilínea $\xi = 1$ no plano XY. De maneira análoga, temos para a linha $\eta = 1$, onde o elemento de referência é mapeado para a curva $\eta = 1$ no plano XY.

A transformação T_e define a coordenada de cada ponto do elemento real X em termos de coordenadas abstratas ξ do ponto correspondente do elemento de referência e depende da forma e localização do elemento real. Desse modo, existe uma transformação T_e diferente para cada elemento real.

A idéia básica de introduzir o elemento de referência pode agora ser estabelecida: a geração de uma malha completa de elementos finitos contendo N elementos é vista como uma sequência de transformações $T_1, T_2, T_3, \dots, T_N$ dadas na forma

(4.22), em que cada elemento Ω_e é imagem de um elemento de referência fixado de Ω_r sob o mapeamento coordenado T_e .

Cada transformação T_e é escolhida para ter as seguintes propriedades:

- O mapeamento deve ser feito um a um, ou seja, para qualquer ponto do elemento de referência, há um e somente um ponto do elemento real.
- Os nós geométricos do elemento de referência correspondem aos nós geométricos do elemento real.
- Qualquer porção do contorno do elemento de referência, definido pelos nós geométricos deste contorno, correspondem a uma porção do contorno do elemento real definido pelos nós correspondentes.
- Para cada elemento, as funções ξ e η precisam ser inversíveis e continuamente diferenciáveis.

Supondo-se que as funções x e y sejam continuamente diferenciáveis em relação a ξ e η , então os diferenciais $d\xi$ e $d\eta$ se transformam em dx e dy .

Logo:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta$$

e

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

que pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

A matriz 2×2 das derivadas parciais de (4.23) é denominada de matriz jacobiana da transformação definida em (4.22) e representada por \mathbf{J} . A equação (4.23) pode ser vista como uma transformação linear de segmentos $d\xi$ e $d\eta$ do plano Ω_r em segmentos dx e dy no plano XY.

Se, para o ponto $(\xi, \eta) \in \Omega_r$, é possível resolver a equação 4.23 para $d\xi$ e $d\eta$ em termos de dx e dy , então um mapeamento inverso T_e^{-1} do sistema de coordenadas XY para o sistema $\xi \eta$ pode ser construído neste ponto. Obviamente, a condição necessária e suficiente para que a matriz jacobiana de (4.23) seja inversível é que o seu determinante $|J|$ seja diferente de zero em $(\xi, \eta) \in \Omega_r$.

A função $|J|$ é chamada de jacobiano da transformação (4.22). Portanto:

$$|J| = \det J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

Sempre que $|J| \neq 0$, pode-se escrever que:

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Tem-se, pela T_e^{-1} , que

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$$

Nota-se que, como em (4.23),

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Igualando os termos das equações 4.24 e (4.25) encontra-se:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \xi}$$

O jacobiano pode ser entendido como um operador que transforma coordenadas do sistema local $\xi \eta$ para o sistema global XY.

Observa-se que se o número de nós do elemento real for maior que o número de nós aplicados por T_e , então T_e é denominado de mapeamento superparamétrico; se o número de nós do elemento real for igual ao número de nós aplicado por T_e , tem-se um mapeamento isoparamétrico e, quando o número de nós do elemento for menor que o número de nós aplicados por T_e , tem-se um mapeamento subparamétrico.

Os elementos isoparamétricos com nós apenas no contorno são denominados de *serendipity*. A adição de um nó interno na posição $\xi = 0$ e $\eta = 0$ torna

o elemento mais preciso e os elementos com nós internos são denominados de *lagrangeanos* porque utilizam as funções de Lagrange.

Os elementos isoparamétricos têm como válida a condição de compatibilidade de deslocamentos entre elementos, podendo representar corretamente os movimentos de corpo rígido e as condições de deformações constantes. Devido à complexidade das funções que devem ser integradas para obter a matriz de rigidez, utiliza-se a integração numérica (Assan, 1999).

Os elementos finitos são objetos de geometria sempre convexa e suas formulações tendem a privilegiar as formas mais regulares. Ou seja, elementos finitos triangulares são em geral melhores quanto mais se aproximam de triângulos equiláteros. Quadrados são usualmente melhores que retângulos e estes melhores que paralelogramos, e assim por diante. A exigência da convexidade é oriunda da necessidade da inversão do Jacobiano da função que mapeia um domínio elementar do tipo $[-1, 1] \times [-1, 1]$ no domínio do elemento, conforme ilustrado na figura 4.6.

A qualidade da malha depende de dois critérios (Sabonnadière e Coulomb ([100])):

- Forma: os elementos não devem se afastar das formas ideais (triângulos equiláteros, quadrados, tetraedros equiláteros, cubos,...), sob pena de degradar a solução.
- Tamanho: o erro do método introduzido pela discretização depende da

dimensão dos elementos, que devem ser mais concentrados onde a solução é muito perturbada.

Assim sempre que necessário deve-se otimizar a malha por redução do tamanho dos elementos ou por aumento da precisão sobre o elemento (ordem da função de interpolação). Observa-se nos objetos de formas irregulares e complexas que as malhas geradas automaticamente por programas de computadores, algumas vezes não têm boa qualidade, podendo apresentar resultados diferentes do real, devendo por isso serem refinadas.

Capítulo 5

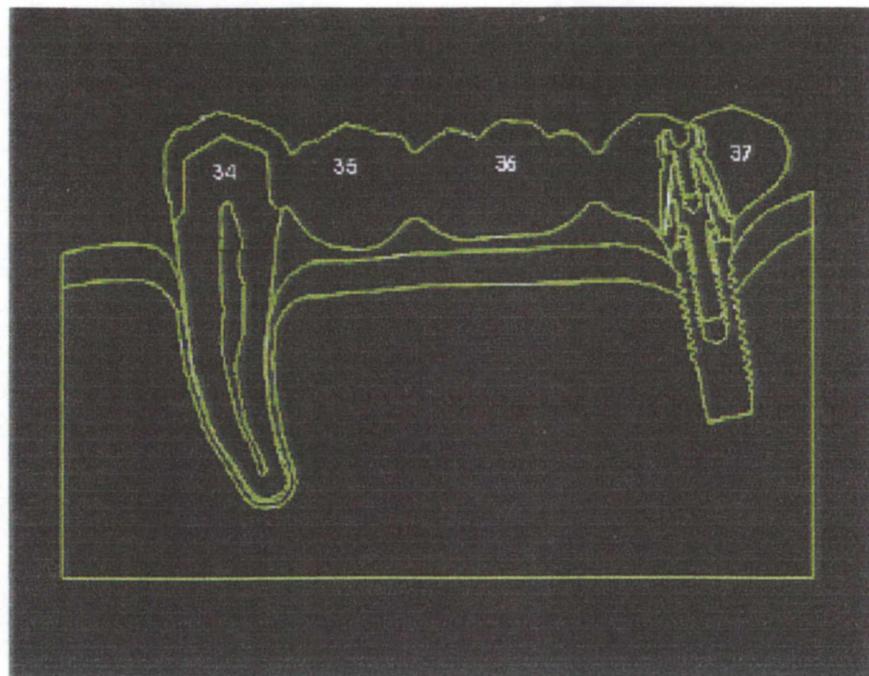
Modelagem

5.1 Geometria das estruturas

O modelo em estudo corresponde ao segmento da mandíbula, partindo da região do segundo molar até a região do primeiro pré-molar, estando presente os suportes dentais e fibromucoso, criando-se, assim, um espaço protético de extremidades no primeiro pré-molar (dente sadio) até um implante osseointegrado situado na região do segundo molar, conforme figura 5.1.

As diversas estruturas componentes do modelo matemático, foram projetadas a partir de duas radiografias periapicais na região posterior da mandíbula com os dentes e estruturas de suportes sadios, as quais foram digitalizadas com auxílio de um scanner. Através destas imagens e com auxílio do programa AUTOCAD (autodeskinc, USA), foram delineadas as seguintes estruturas (Betiol, 2002):

Figura 5.1: Modelo inicial



1. Dentes

Primeiro pré-molar (34), segundo pré-molar (35), primeiro molar (36) e segundo molar (37)*. Para as dimensões dos dentes usou-se a média aritmética da altura e largura, obtidas de dois autores: Blak e Marcellier citados por Vellini & Serra (1976), constantes das tabelas 5.1, 5.2 e 5.3.

Na região correspondente a coroa do dente 34 foi feita a simulação de um preparo para a coroa total metálica com término em chanfrado (Farah e Craig, 1974) e com um desgaste de aproximadamente 1,2 mm. Foi mantida a

*Os números entre parênteses são indicações usuais adotadas pela Odontologia

Tabela 5.1: Dimensão média, em mm, do primeiro pré-molar inferior

Autores	Comp. total	comp. raiz	Alt. coroa	Dim. MD coroa	Dim. MD colo
Blak	21.6	14.0	7.8	6.9	4.7
Marc.	23.0	15.0	8.0	6.9	5.0
Média	22.3	14.5	7.9	6.9	4.8

Tabela 5.2: Dimensão média, em mm, do segundo pré-molar inferior

Autores	Altura da coroa	Dimensões MD coroa	Dimensões MD colo
Blak	7.9	7.1	4.8
Marc.	8.1	7.2	4.8
Média	8.0	7.15	4.8

forma original da porção coronária representando um retentor do tipo coroa total metálica. De acordo com a radiografia, copiou-se o tecido pulpar, que pode levar a alterações no resultado final do trabalho (Las Casas et al, 1999).

Acompanhando ainda a imagem radiográfica, foi copiado o ligamento periodontal, para o qual foi adotada a espessura média de 0,25 mm (Coolidge, 1937).

Ainda com auxílio do programa AUTOCAD foram eliminadas as raízes dos dentes 35 e 36 (tabela 5.3) dando à forma de pôntico (côncavo em relação ao

tecido gengival) para as coroas correspondentes.

Tabela 5.3: Dimensão média, em mm, do primeiro e segundo molar inferior

Autores	Altura da coroa		Dimensões MD coroa		Dimensões MD colo	
	1ºmolar inf.	2ºmolar inf.	1ºmolar inf.	2ºmolar inf.	1ºmolar inf.	2ºmolar inf.
Blak	7.7	6.9	11.2	10.7	8.5	8.1
Marc.	7.7	6.9	11.2	10.7	8.5	8.3
Média	7.7	6.9	11.2	10.7	8.5	8.2

2. Implante osseointegrado

Na região do dente 37, foi apagada a porção radicular que foi substituída pela imagem de uma fixação Branemark, fabricada pela Nobel Biocare †, com a medida de 3,75 mm de diâmetro por 10,00 mm de comprimento. Este implante foi usado por ser amplamente pesquisado e citado na literatura por vários autores, sendo um rosqueado de hexágono externo e confeccionado em titânio puro. A imagem deste implante foi obtida incluindo-se o conjunto fixação/pilar/coroa em um material composto de resina ortofilática T-208, monômero de estireno e catalisador Luperox DD-M, fabricados pela

†Nobel Biocare, Gotemburgo, Suécia

Redefibra®, São Paulo. Posteriormente o conjunto foi cortado pelo disco de diamante XL-12235 de 0,3 mm de espessura, em serra da Labcut 1010, Exel Technologies Inc., Enfield, Connecticut, USA. Este corte foi interpretado e através do auxílio de um perfilômetro marca Mitutoyo, modelo PJ 300, com precisão de 50 μm . Esta imagem foi a mesma usada no trabalho de Sendyk(1998).

3. Ossos

Acompanhando a imagem radiográfica na região que circunda a raiz do primeiro pré-molar foi copiada a cortical óssea com a espessura de 0,5 mm. Próxima da região cervical o osso cortical aumenta gradativamente chegando a 2,0 mm na região do espaço protético, correspondente aos dentes 35 e 36. O restante da estrutura óssea foi considerado como osso medular.

4. Prótese parcial fixa

Foi dada a forma dos dentes acompanhando a radiografia e as medidas médias dos autores conforme tabelas 5.1, 5.2 e 5.3.

No primeiro pré-molar representou-se o retentor com término em chanfrado feito apenas em um material, com a espessura de aproximadamente 1,2 mm. Aos pônticos, com a forma coronária dos dentes da radiografia e com as dimensões médias (tabelas 5.2 e 5.3) e próximo ao tecido gengival, foi dada a forma convexa. Estes elementos ficaram representados pelo mesmo

material.

O retentor sobre o implante teve a forma coronária da radiografia em apenas um material, com as dimensões médias (tabelas 5.2 e 5.3). Seguindo a indicação do sistema Branemark (Nobel Biocare), foi usado um pilar cônico de 1,0 mm de altura (Sendik, 1998), como conexão para unir a coroa à fixação (figura 5.1). Apesar da estrutura em estudo ser tridimensional, optou-se neste trabalho por modelá-la como bidimensional, pois este modelo, apesar de aparentemente simplificado, apresenta as informações relevantes suficientes a respeito do estado de tensões a que o corpo está submetido. Optou-se por utilizar o modelo plano de tensões pois os dentes envolvidos nesta análise estão situados no mesmo hemi-arco, fazendo parte do polígono de Roy (1936). Segundo Roy, os dentes posteriores de uma arcada se movimentam no mesmo sentido e estão dispostos no mesmo plano. Os posteriores, do outro lado, estão dispostos em outro plano, enquanto que os incisivos estão num terceiro plano e os caninos formam o quarto e quinto plano, originando uma figura geométrica denominada de "Polígono de Roy".

5.1.1 Modelagem computacional

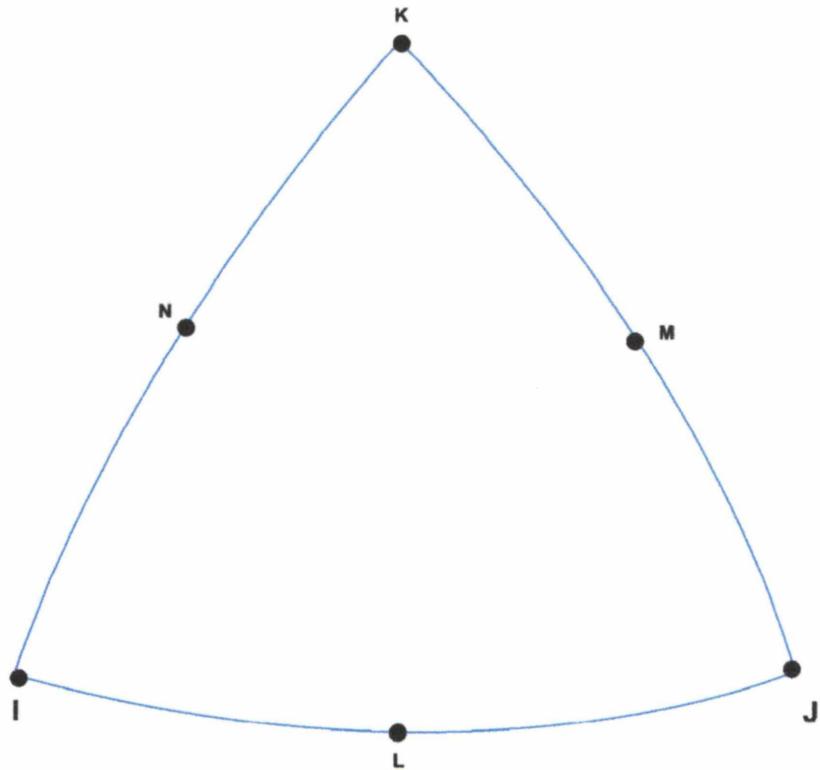
O programa escolhido para a análise do modelo pelo Método dos Elementos Finitos foi o ANSYS® 5.7.1, versão universitária, desenvolvido pela Swanson Analysis

Inc., com auxílio de um computador Pentium III de 800 MHz, com 512 MB de memória, e 30 GB de Hard Disk, de propriedade do CESEC (Centro de Estudos de Engenharia Civil Inaldo Ayres Vieira) da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

Para a modelagem dos elementos sólidos do problema, o ANSYS® versão 5.7.1 disponibiliza o elemento PLANE 2 que utiliza-se de elementos quadráticos, que são mais precisos, embora apresente maior dispêndio computacional, devido às restrições impostas pelos elementos de contato. O elemento utilizado é mostrado na figura 5.2 e definido por seis nós, com dois graus de liberdade em cada nó, que são translações nas direções X e Y.

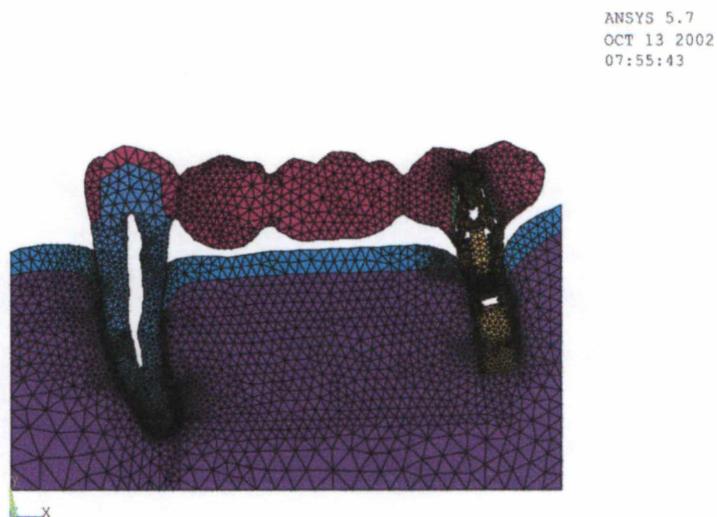
O PLANE 2 pode ser utilizado na modelagem de sólidos no estado plano de tensões, estado plano de deformações ou ainda em sólidos axissimétricos. Considerou-se para a prótese parcial fixa posterior, o estado plano de tensões, devido à sua geometria.

Figura 5.2: Elemento triangular quadrático



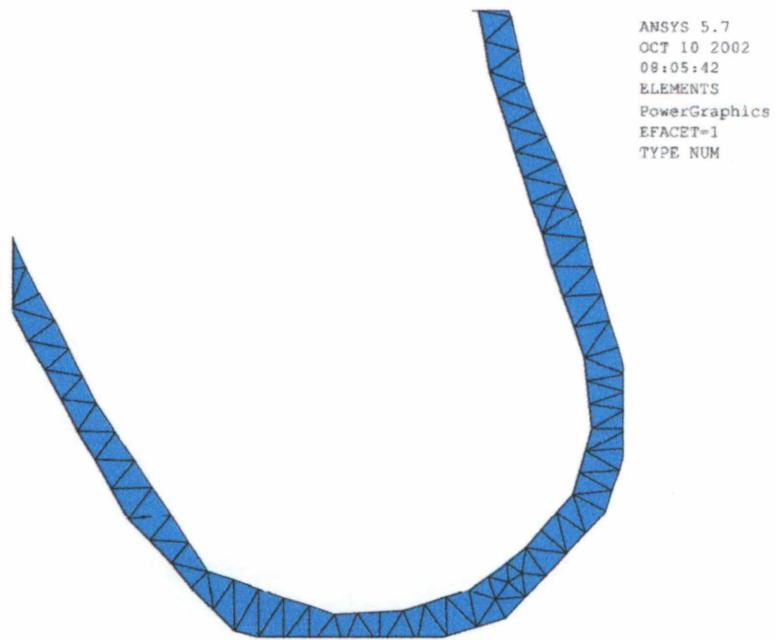
O modelo adotado neste trabalho foi transferido do programa AUTOCAD para o ANSYS, onde foi criada (manualmente), região por região do modelo, uma malha composta por 24.852 pontos nodais e 12.169 elementos (figura 5.3).

Figura 5.3: Malha da prótese parcial fixa posterior



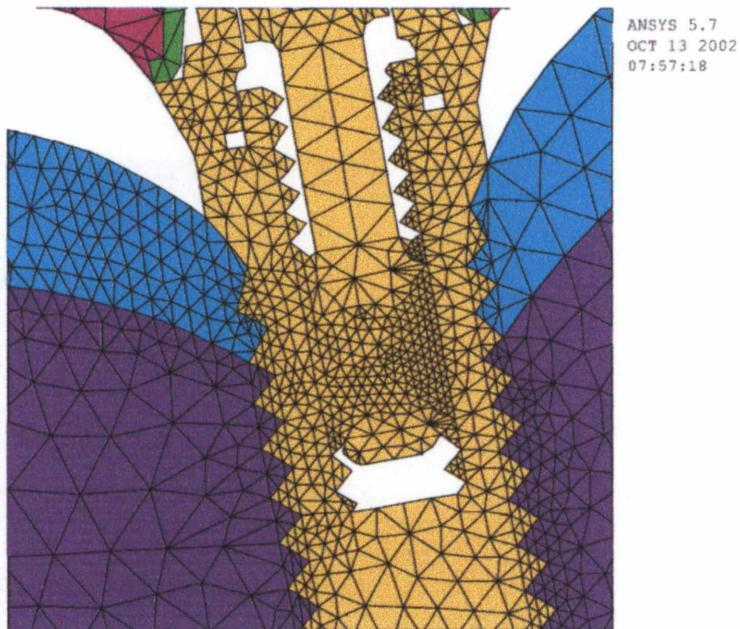
Na região entre o dente e osso, correspondente ao ligamento periodontal (figura 5.4) e na região entre o implante e osso, onde estão as espiras da fixação, a malha foi mais discretizada (figura 5.5), para permitir uma avaliação mais precisa da distribuição de tensões nestas áreas, já que um dos grandes objetivos deste trabalho é a avaliação da distribuição de tensões na prótese parcial fixa e nas estruturas de suporte.

Figura 5.4: Malha do periodonto



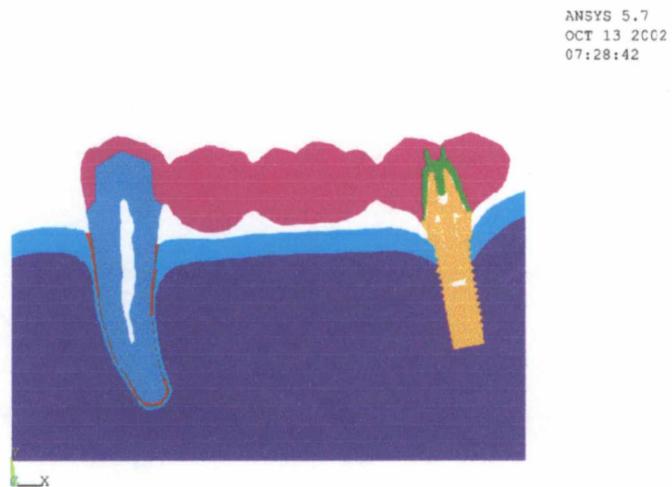
Neste trabalho foi considerado um íntimo contato entre toda a superfície do implante e a estrutura óssea correspondente, situação esta que segundo Holmes, et al (1992), não ocorre na realidade.

Figura 5.5: Malha na região do implante



Para representar as diversas estruturas que compõem o modelo matemático, cada elemento bidimensional recebeu determinados valores inerentes às propriedades físicas intrínsecas dos materiais representados na figura 5.6, onde, a cor vermelha representa a liga áurea (retentor, pônticos e retentor da fixação); a cor verde, o ouro 24 K (parafuso da fixação); a cor amarela, o titânio (implante); a cor azul mais claro, o osso cortical; a cor azul mais escuro, a dentina; a cor vermelha, ao redor do dente natural, representando o periodonto e a cor lilás, o osso trabecular.

Figura 5.6: Material dos componentes da estrutura



De acordo com a tabela 5.4 que obedece a literatura relativa a este assunto, os materiais estão numerados de acordo com suas representações introduzidas no ANSYS® 5.7.1. O modelo considera que as estruturas são homogêneas, lineares, elásticas e isotrópicas.

Tabela 5.4: Propriedades mecânicas dos materiais que compõem o modelo (Sendyk, 1998)

<i>MATERIAL</i>	<i>MÓDULO DE ELASTICIDADE</i> (GPa) [†]	<i>COEFICIENTE DE POISSON</i> (ν)
1. Osso cortical	13,7	0.30
2. Osso trabecular	1.37	0.30
3. Ligam. periodontal	0.003	0.45
4. Dentina	18.6	0.31
5. Liga de ouro	90.0	0.30
6. Parafuso ouro	99.3	0.28
7. Titânio	110.0	0.28

As cargas de oclusão podem variar significativamente segundo a literatura.

Essa dispersão verificada nas cargas medidas pode ser atribuída a vários motivos, entre eles o uso de diferentes métodos de medida, a estrutura e geometria dentária do paciente, a estrutura muscular orofacial, a idade, o sexo, etc (Cimini et al, 2000). Estudos prévios (Holmes, 1992) informam que a força oclusal comum com próteses de implante-apoio variam de 110 a 200 N na região dos incisivos, podendo chegar a 500 N na região molar.

[†]GPa = $10^9 N/m^2$

Para este trabalho, foi aplicada uma carga vertical de 168 N, distribuída nas superfícies oclusais dos dentes envolvidos, por ser considerada fisiológica e suficiente para obtenção de resultado (Betiol, 2002). Foram adotadas cargas direcionadas para o longo eixo dos dentes, pois considera-se uma oclusão normal. Segundo Okenson (1992), para uma oclusão ideal, durante os movimentos mastigatórios, quando a mandíbula se eleva e os dentes se contatam, as forças são direcionadas para o longo eixo dos dentes posteriores e, a partir deste ponto, quando a mandíbula se move nos movimentos de lateralidade e protrusiva, os dentes anteriores se tocam e desocluem os posteriores impedindo que estes recebam cargas laterais. Isto é chamado de oclusão mutuamente protegida.

Neste trabalho foi usado o critério de Von Mises, criado por Richard Von Mises (1883 - 1953) para se avaliarem os estados de tensão atuantes no corpo. O programa de computador pode determinar, na fase de pós processamento, as zonas de solicitação segundo uma escala de cores correspondentes aos diversos níveis de tensão.

Foram selecionadas três áreas para interpretar a distribuição de tensões de Von Mises na aplicação das cargas oclusais, a saber:

1. Região óssea que circunda a raiz do elemento dentário natural, primeiro pré-molar inferior esquerdo.
2. Região óssea que circunda a fixação localizada na região do segundo molar

inferior esquerdo.

3. Regiões internas dos pilares e da prótese parcial fixa.

Foram feitas avaliações qualitativa e quantitativa dos resultados:

- Avaliação qualitativa: observando-se as diferentes cores apresentadas pelo programa ANSYS® 5.7.1, que representam níveis de tensões diferentes.
- Avaliação quantitativa (numérica): o gradiente de cores que acompanha o modelo matemático gráfico do elemento finito, fornece o valor máximo e o valor mínimo para cada região.

Neste trabalho foi feita uma simulação, através do MEF, de uma ponte fixa com conectores rígidos e duas próteses fixas com conectores semi rígidos, tendo como pilares, um dente e um implante osseointegrado, para se observar a distribuição das tensões na estrutura desta prótese, nos seus pilares e no tecido ósseo correspondente.

As malhas foram construídas utilizando-se elementos triangulares quadráticos (seis nós) e mais refinadas na região correspondente ao ligamento periodontal tal como mostrado na figura 5.4, entre a raiz do primeiro pré-molar e o tecido ósseo correspondente, na área onde ocorre a osseointegração entre as espiras da fixação (localizada na região do segundo molar inferior) e o tecido ósseo circundante.

Na região correspondente à estrutura dentária, bem como na região interna

da fixação e dos componentes protéticos (figura 5.3), também teve-se cuidado específico na criação da malha pois, dependendo da deformação sofrida nesta área, pode-se ter diferentes distribuições de tensões na região dos pilares com relação ao tecido ósseo correspondente. O motivo desta preocupação prende-se ao fato de existir diferença de mobilidade entre um dente saudável e um implante osseointegrado. A diferença de mobilidade entre um dente com periodonto normal e um implante osseointegrado é comentada por vários autores pesquisados durante a revisão de literatura. Weinberg (1993) e Weinberg & Kruger (1994) salientam esta diferença de mobilidade, sendo em torno de 100 a 500 μm para um dente com periodonto considerado normal enquanto o implante poderia chegar no máximo a 100 μm . Segundo Cohen & Orenstein (1994) e Hobo (1997), os dentes naturais têm uma mobilidade em torno de 100 a 200 μm e os implantes osseointegrados, uma mobilidade de até 10 μm ; enquanto que para Lill et al (1988), os dentes têm uma mobilidade dez vezes maior que os implantes.

Estas variações ocorrem devido à forma do implante pesquisado, do tamanho e diâmetro da fixação, dos tipos de conexões e do tipo de osso, porém é fato que existe esta diferença de mobilidade. Desta forma os pônticos mais o retentor do primeiro pré-molar inferior têm uma tendência de se movimentar no sentido oclusogengival e o implante praticamente não tem mobilidade, gerando assim um efeito de alavanca com o fulcro nesta região (cervical do implante), onde se encontram tensões máximas de 31,32 MPa (figura 5.7), na cor cinza, na prótese parcial fixa.

Pode-se observar na figura o local da tensão máxima (representado por MX) e o da tensão mínima (MN).

Figura 5.7: Tensão Von Mises na prótese fixa

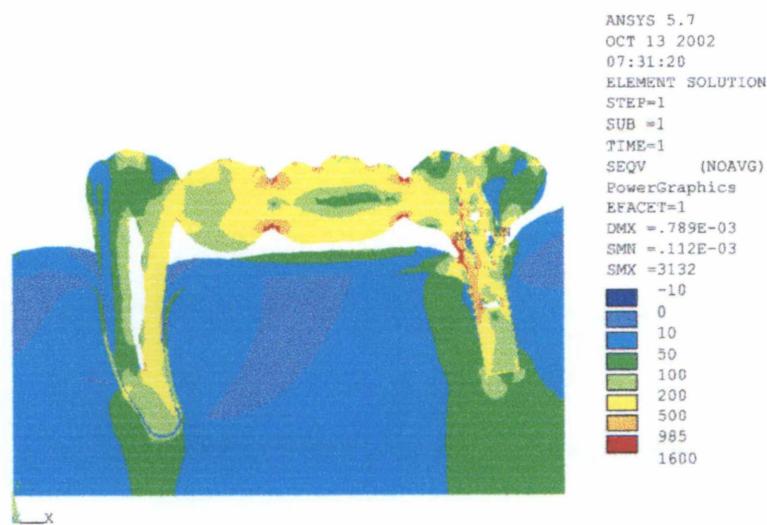
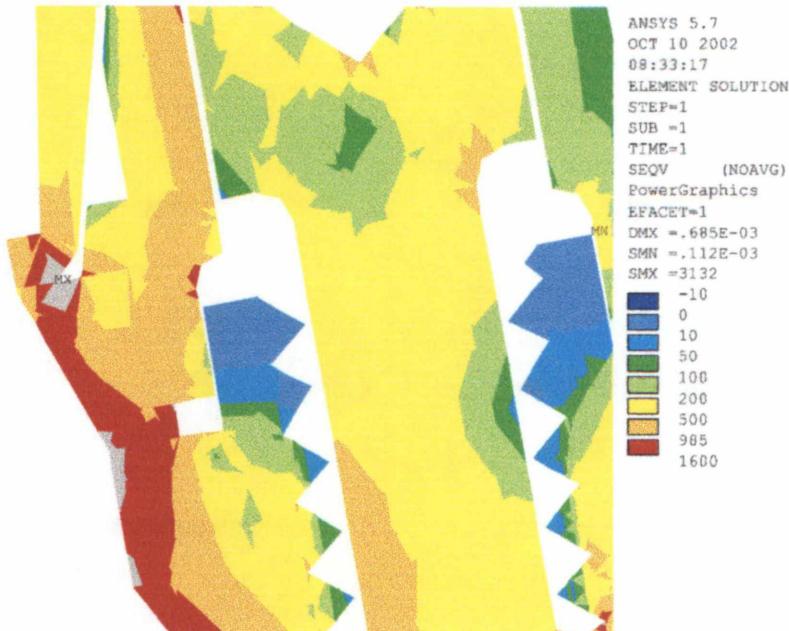


Figura 5.8: Tensões de Von Mises no implante da prótese fixa



Neste modelo, a tensão máxima ocorre no espelho do implante, conforme figura 5.8, na cor cinza que não aparece na escala de cores, por ser uma tensão de nível acima da máxima representada na cor vermelha. Isto pode acontecer também nos casos unitários quando se usa uma fixação com implante de plataforma pequena ou regular para uma coroa de superfície oclusal extensa (Piattelli et al ,1998).

Uma ponte fixa com conectores rígidos ou semi rígidos que possui pilares com diferentes mobilidades leva certamente a uma distribuição de tensões desiguais ao tecido ósseo da região correspondente, quando esta prótese recebe uma força oclusal no sentido do longo eixo dos dentes.

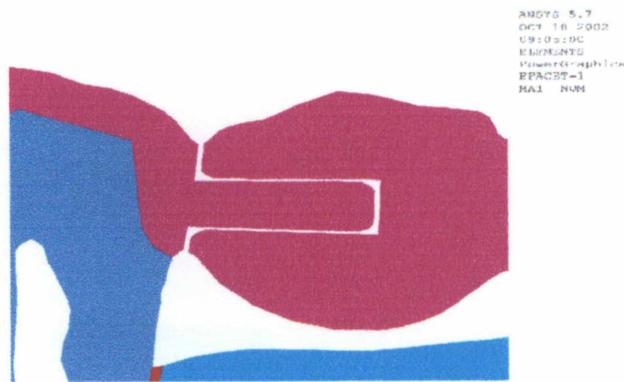
Para uma melhor estratégia comparativa, este problema também foi simulado com uma prótese fixa semi rígida com encaixe (conector) na coroa do implante e outra, semi rígida com encaixe na coroa do segundo pré molar. Desse modo foram estudadas três situações diferentes para estes modelos, adotando-se cargas verticais (168 N) distribuídas sobre a superfície oclusal dos três modelos:

1. Prótese parcial fixa (já descrita anteriormente);
2. Prótese semi rígida com encaixe na coroa da fixação (figura 5.9);
3. Prótese semi rígida com encaixe na coroa do segundo pré molar (figura 5.10).

Figura 5.9: Prótese semi rígida com encaixe na coroa da fixação (modelo 2)

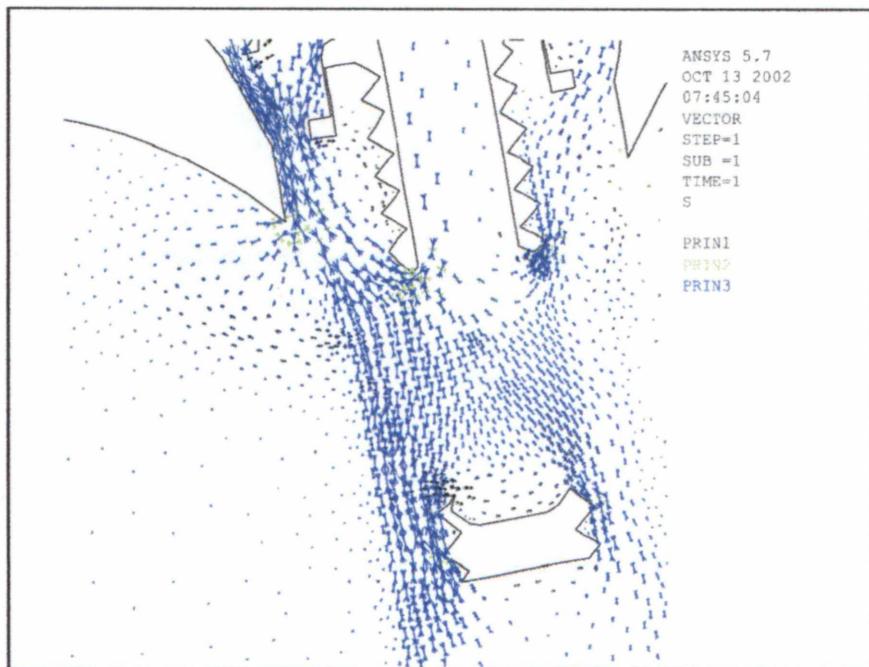


Figura 5.10: Prótese semi rígida com encaixe na coroa segundo pré molar (mod 3)



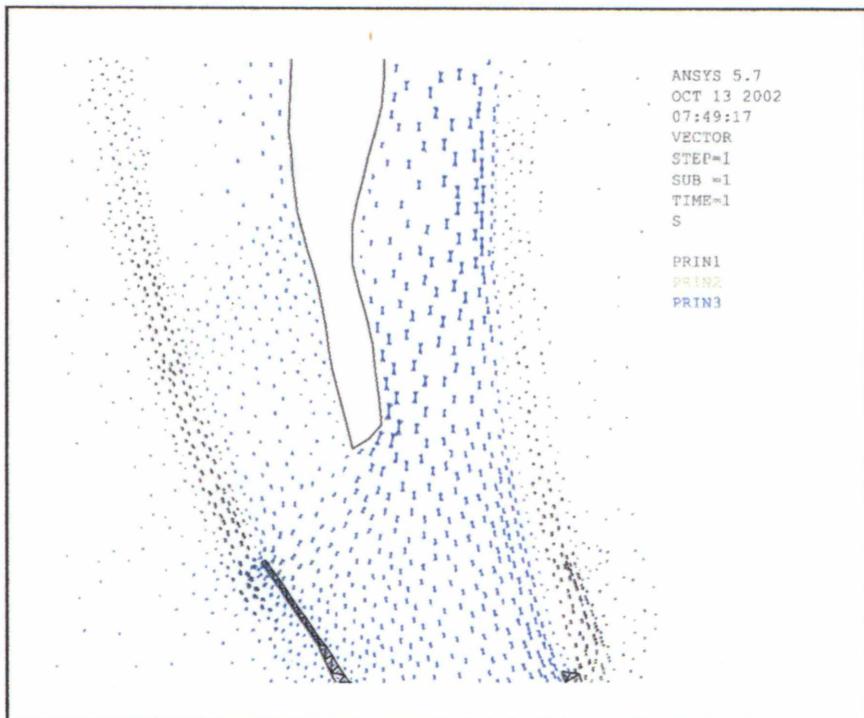
A prótese de quatro elementos recebe esta força mastigatória que se distribui ao longo das superfícies oclusais dos elementos dentários envolvidos, onde é interessante notar que as direções principais de tensões (figura 5.11 e figura 5.12), se distribuem de maneira bem mais homogênea através da estrutura dentária do que no implante osseointegrado.

Figura 5.11: Distribuição vetorial das tensões principais na região do implante



Esta diferença se deve também à presença do ligamento periodontal presente somente no elemento dentário, funcionando como um amortecedor. Estas fibras periodontais responsáveis por este amortecimento não estão presentes na interface entre implante e osso onde ocorre a osseointegração. Este pode ser o motivo do afrouxamento dos parafusos e até da fratura dos componentes protéticos ou do próprio implante. Autores como Borchers & Reichart (1983), Babbush (1987), Kay (1989), Chapman & Kirsch (1990), El Charkawi et al. (1990), Cavicchia e Bravi (1994), El Charkawi et al. (1994), Papavasiliou et al. (1996) mostram a tentativa de alguns fabricantes, Interpor International, por exemplo, de produzirem componentes protéticos intermediários (IME em polioximetileno) ligando as fixações aos

Figura 5.12: Distribuição vetorial das tensões principais na região do periodonto

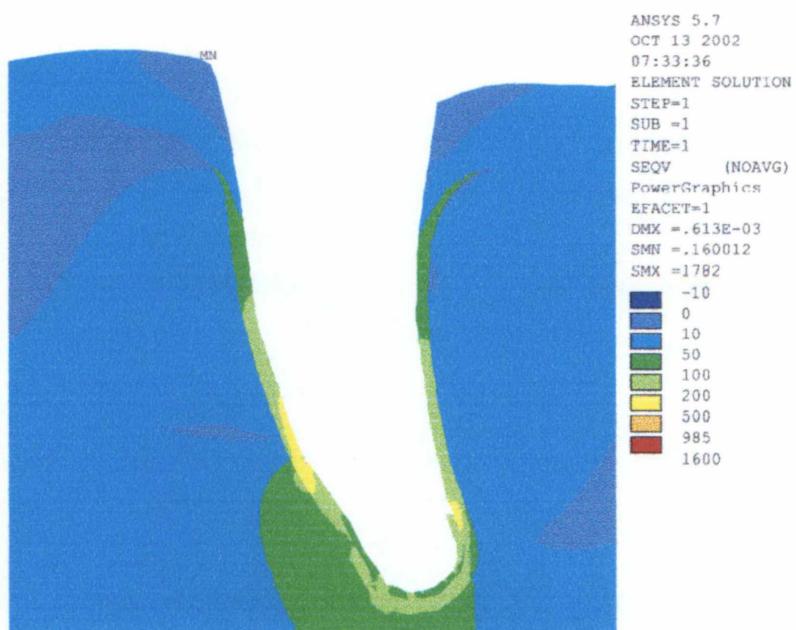


retentores que permitiriam uma simulação do ligamento periodontal. Estas tentativas foram frustradas, já que com relação à distribuição de tensões ao tecido ósseo, estes intermediários não levam a mudanças significativas com relação aos intermediários (IME) de titânio. Autores como Holmes et al. (1992) e Ulbrich (1998) mostram em suas pesquisas, que a distribuição de tensões para o tecido ósseo que circunda as fixações seria similar quando se usa um pilar intermediário em titânio ou em polioximetileno.

Com relação ao tecido ósseo, pode-se observar nas figuras 5.13 e 5.14, a concentração de tensões (Von Mises) na região óssea cortical do dente natural

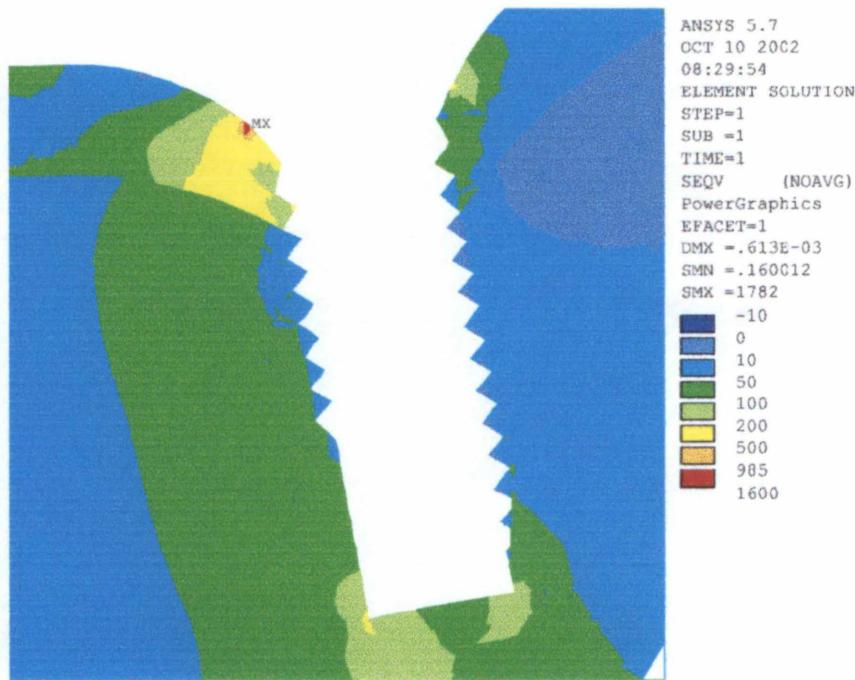
(região cérvico mesial), onde foi registrada a tensão mínima de $0.0016 MPa$ e na região óssea cortical, próxima da cervical mesial do implante, com a tensão máxima de $17,82 MPa$ representadas pelas cores azul e vermelha, respectivamente, nestas figuras.

Figura 5.13: Tensões de Von Mises no osso cortical (região do dente natural) - modelo 1



Observa-se na escala ao lado da figura 5.14, os valores das tensões Von Mises, e à medida que percorre-se da região do implante para as estruturas de suporte observa-se uma diminuição gradativa de tensões chegando a uma tensão mínima na região correspondente ao osso medular, entre os dois pilares (figura 5.7), representado pela cor azul mais escuro, ou seja, 99,7% menores. Este fato já era es-

Figura 5.14: Tensões de Von Mises na região óssea próxima do implante (mod 1)



perado, pois a função do tecido ósseo é dissipar as cargas mastigatórias (Sakagushi & Borgensen, 1995).

Este fato pode ser explicado pelo braço de alavanca causado pela prótese fixa, já que se consideram pilares com diferentes mobilidades, o elemento dentário tem uma tendência de sofrer intrusão devido à presença do ligamento periodontal, e o implante sofre uma menor intrusão, pois está unido diretamente ao osso. Portanto, como não se sabe o valor exato que leva a reabsorção óssea em volta do implante, as tensões nesta área podem ser responsáveis pela perda óssea encontrada clinicamente com freqüência nesta região. Por este motivo, a exemplo dos autores Kitoh et al (1988), Hobo et al (1989), Clelland et al (1993), Sendyk (1998),

no presente trabalho dá-se maior importância aos valores qualitativos das tensões e não quantitativos.

É fato também que em condições consideradas normais os implantes osseointegrados após o primeiro ano em função perdem cerca de 1.0 mm de osso na região da crista óssea (Branemark et al.(1977), Adell et al (1981), Kitoh et al (1988), Albrektsson et al (1988), Rangert et al (1989)). Talvez isto pode ser explicado pela concentração de tensões nesta região quando a prótese está sujeita a cargas oclusais.

Os autores Ismail et al. (1991), Cohen e Orenstein (1994), sugerem o uso de conexões semi-rígidas, pois, desta forma, haveria uma melhor distribuição de forças entre implante, dente e tecidos de suporte, evitando assim uma sobrecarga do implante e tecido ósseo correspondente. Para Weinberg (1993), nas próteses que possuem pilares com diferentes mobilidades, os implantes sempre são sobrecarregados, recomendando para estes casos novos desenhos de próteses para diminuir as tensões próximas ao implante.

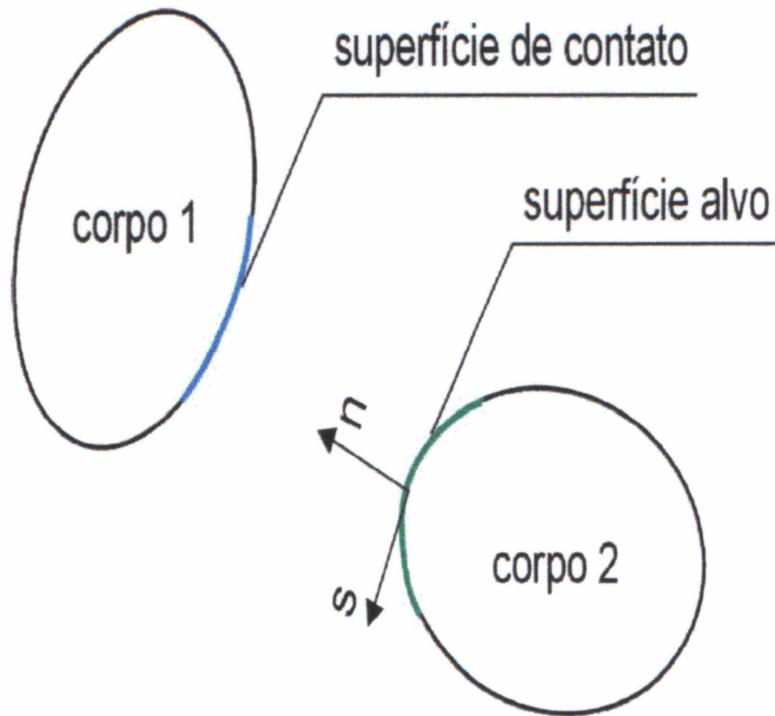
5.1.2 Modelagem dos contatos

Para representar a aproximação e o possível contato entre as superfícies da conexão da prótese semi-rígida, o ANSYS® 5.7.1 disponibiliza os elementos de contato. Para o problema em questão, é necessário a consideração do contato entre duas

superfícies elásticas, inicialmente separadas ou em contato. A modelagem do contato entre estas superfícies foi construída por elementos de contato denominados de CONTA 172.

O elemento CONTA 172 relaciona uma superfície denominada de *target surface* ou superfície alvo, com a superfície de contato denominada de *contact surface*, formando o par de contato como na figura 5.15.

Figura 5.15: Superfícies de contato



Os elementos da superfície 2-D da superfície *target* associados aos elementos de contato são representados pelo elemento TARGE 169. A superfície *target* é discretizada por um conjunto de segmentos *target* (TARGE 169) e forma par com

a superfície de contato através do mesmo conjunto constante real. Pode-se impor forças e momentos sobre os elementos *target*. A superfície *target* é modelada por um conjunto de segmentos *target* e vários segmentos *target* formam uma superfície *target*, que pode ser rígida ou deformável.

No caso de duas superfícies elásticas a consideração de superfícies *target* ou *contact* para uma ou outra superfície é arbitrário e irrelevante. Para o caso de contato entre superfícies rígidas e elásticas, a superfície rígida é sempre considerada como *target*.

O valor exato da região onde ocorre o contato não precisa ser conhecido previamente para a geração dos elementos. Usualmente são tomados mais elementos do que realmente é necessário, pela associação do nó de contato com diversas linhas *target* vizinhas. A geração de contato considerando ambas as áreas como *target* e como *contact* foi adotada na modelagem para garantir a simetria do modelo.

O elemento CONTA172 permite a inclusão do atrito de Coulomb entre as superfícies de contato, sendo que o coeficiente μ é fornecido nas propriedades do material fictício dos elementos de contato.

O contato é estabelecido quando o nó de contato, penetra na linha *target* com a magnitude denominada *gap*, na direção normal e representada por g_n . Isto é uma violação física da compatibilidade de deslocamentos, pois superfícies sólidas não podem se interpenetrar. Desse modo, para reduzir a interpenetração a níveis aceitáveis são desenvolvidas forças normais à superfície *target* na região de contato.

Inicialmente as forças tangenciais são consideradas nulas para se determinar as forças de contato e o valor de g_n . Nos passos posteriores são incluídas as forças tangenciais, caracterizando a existência de adesão ou deslizamento em cada nó. Tem-se, assim, o perfil do contorno onde acontece o contato.

Para resolver o problema do contato, que é não-linear com restrições, o ANSYS® utiliza o Método das Penalidades que pode ser associado aos multiplicadores de Lagrange. As constantes utilizadas para a solução do problema são:

1. Fator de rigidez de contato - FKN

O ANSYS® 5.7.1 sugere um valor inicial calculado por

$$FKN \approx f_c E h$$

onde f_c é o fator que controla a compatibilidade do contato, variando de 0.01 a 100, com valor padrão inicial de 1.0; E é o menor módulo de elasticidade dos materiais envolvidos; h é um comprimento de contato característico, dependente da geometria do problema. Esta aproximação para FKN é apenas uma alternativa inicial, com uma margem alta de valores possíveis. O valor real de FKN é encontrado por tentativas. Valores altos de FKN restringem a interpenetração e valores baixos permitem grande interpenetração das superfícies. O Método das Penalidades exige valores altos de FKN , ao passo que se tivermos valores baixos de FKN deve-se utilizar o Método das Penalidades associado aos multiplicadores de Lagrange.

2. Fator de rigidez de contato de deslizamento - FKT

O fator de rigidez FKT é usado se existe o atrito elástico de Coulomb. O parâmetro impõe a componente de deslizamento e corresponde a uma rigidez tangencial à linha *target*. No ANSYS®, o valor padrão é de 1.0. Pode-se definir um valor arbitrário para FKT , do mesmo modo que para FKN .

3. Fator de tolerância - $FTOLN$

É uma constante real para definir o fator de tolerância para ser aplicado na direção da normal da superfície, destinada a determinar se a compatibilidade de penetração é satisfeita, quando se usa o método das funções de penalidades mais os multiplicadores de Lagrange (KEYOPT(2)=0). No ANSYS®, o valor do $FTOLN$ deve ser positivo (usualmente menor que 0.2) e seu valor padrão é de 0.1.

Nos modelos 2 e 3, isto é, das prótese semi rígidas, ocorre o contato entre o conector e as coroas do implante e do segundo pré molar, respectivamente, após a aplicação das cargas verticais. Devido a não linearidade dos elementos de contato, o método de solução adotado para os modelos foi o método de Newton-Raphson incremental (figura 3.18). Como o contato exige a aplicação de um método de funções de restrição, o método escolhido no ANSYS® foi o método das penalidades com os multiplicadores de Lagrange. A utilização deste método foi adotada pela maior rapidez de convergência da solução.

A análise considerando pequenas deformações foi adotada para todos os modelos deste trabalho. A aplicação do carregamento nos modelos foi realizada de acordo com a literatura, para os deslocamentos que estejam dentro de limites de utilização.

Todos os materiais que compõem o modelo foram considerados elásticos, lineares e isotrópicos para o carregamento aplicado.

O contato existente nos encaixes das próteses semi rígidas foi modelado considerando a possível existência do atrito de Coulomb. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico são considerados iguais na análise de todos os modelos.

Os elementos de contato CONTA 172 e TARGET 169, utilizados para fazer a ligação entre os conectores da prótese semi rígida, convergiram com os seguintes valores dos parâmetros de contato: $FKN = 10$, $FTOLN = 0.1$, para o modelo 2 e $FKN = 1$, $FTOLN = 0.1$, para o modelo 3.

5.1.3 Resultados nos modelos 2 e 3

No modelo 2, a tensão máxima foi de 41,65 MPa (no conector) e a mínima foi de $3,567 \cdot 10^{-5}$ MPa (no implante), enquanto que no osso cortical, região cérvico mesial do dente natural (figura 5.16), ocorreu a tensão mínima de $6,04 \cdot 10^{-3}$ MPa e a tensão máxima foi de 14,02 MPa, nas proximidades da região cervical mesial do implante (figura 5.17); no implante, 30,75 MPa; na dentina, 12,00 MPa e no

periodonto, 0,14983 MPa.

Figura 5.16: Tensões de Von Mises na região óssea próxima ao dente natural (modelo 2)

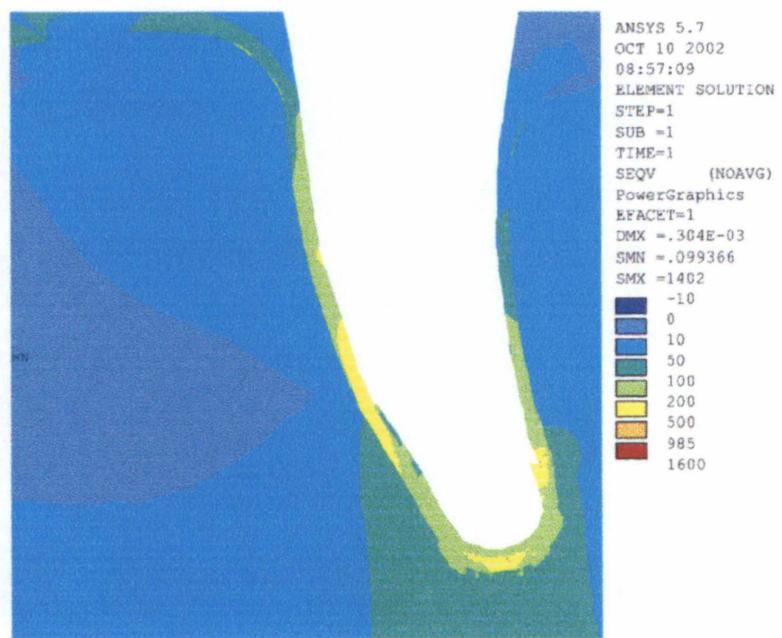
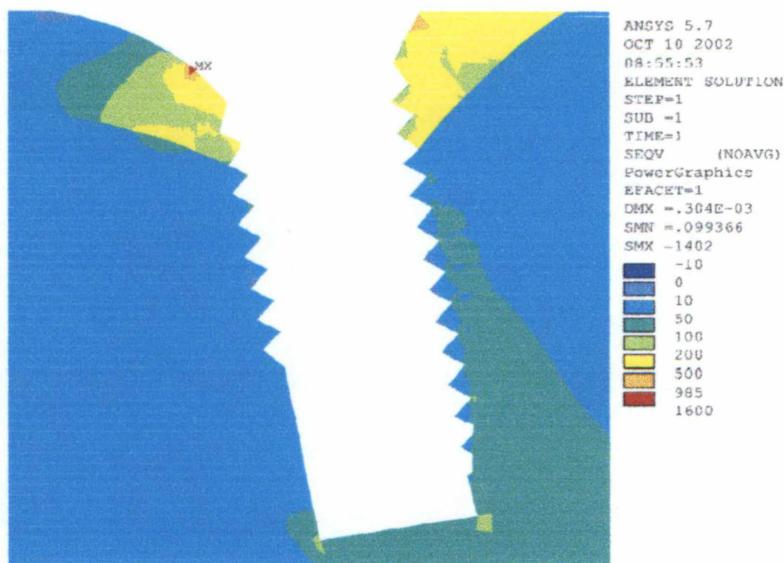


Figura 5.17: Tensões de Von Mises na região óssea cortical próxima do implante (modelo 2)



No modelo 3, a tensão máxima ocorreu no implante com 202,11 MPa (figura 5.18) e a mínima, nos pônticos com $3,76 \cdot 10^{-8}$ MPa; no osso cortical, nas proximidades da região cervical mesial do implante, a máxima foi de 69,87 MPa (figura 5.19) e a mínima, de $1,52 \cdot 10^{-3}$ MPa na área da cervical mesial do elemento dentário (figura 5.20); nos pônticos, 76,87 MPa ; no dente natural, 4,10856 MPa e no periodonto, $1,196 \cdot 10^{-2}$ MPa. Os resultados das tensões máximas e mínimas dos modelos 1, 2 e 3 estão dispostos na tabela 5.5.

Tabela 5.5: Resultados das tensões máximas e mínimas, nos modelos 1, 2 e 3

	Tensão máxima (MPa)	Tensão mínima (MPa)
Modelo 1 (PPFP)	31,32 (espelho implante)	$1,12 \cdot 10^{-4}$ (implante)
Modelo 2 (PSRLD)	41,65 (pônticos)	$3,567 \cdot 10^{-3}$ (implante)
Modelo 3 (PSRLE)	202,11 (implante)	$3,76 \cdot 10^{-8}$ (pônticos)

A figura 5.21 apresenta a distribuição de tensão nos três modelos, na região óssea próxima do implante, após a aplicação da força oclusal de 168 N.

Figura 5.18: Tensões de Von Mises no implante (modelo 3)

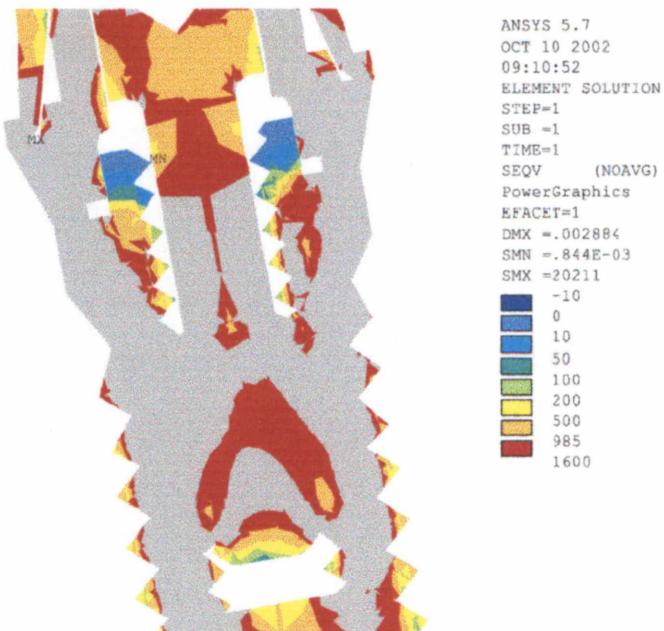


Figura 5.19: Tensões de Von Mises região óssea, próxima do implante (modelo 3)

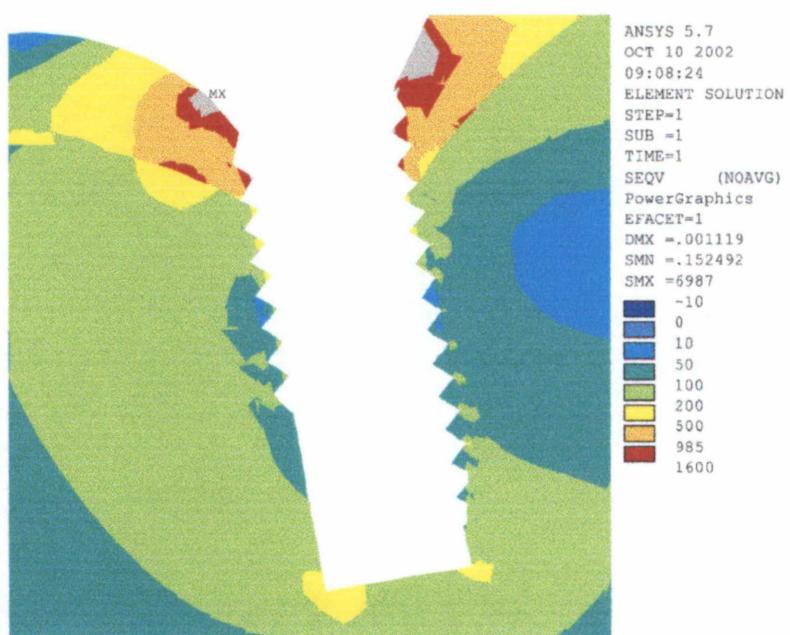


Figura 5.20: Tensões de Von Mises na região óssea, próxima do dente natural (modelo 3)

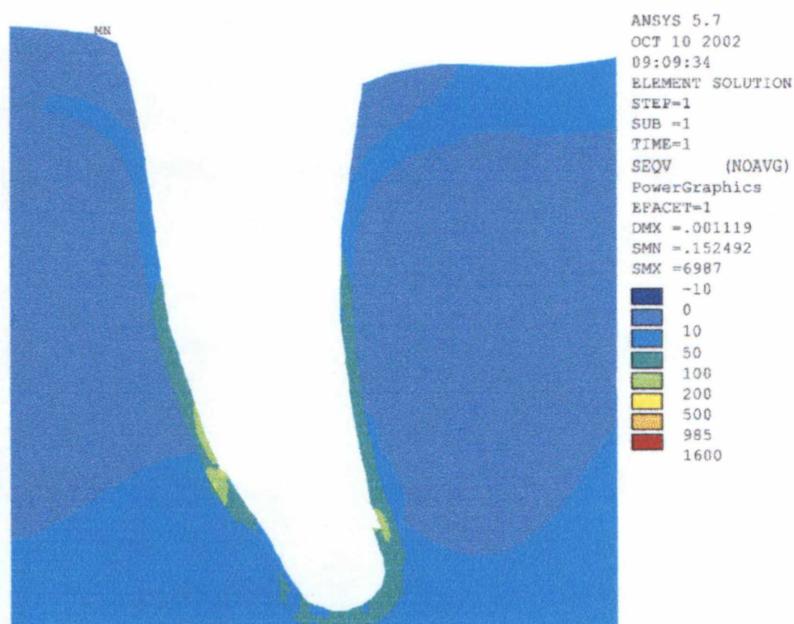
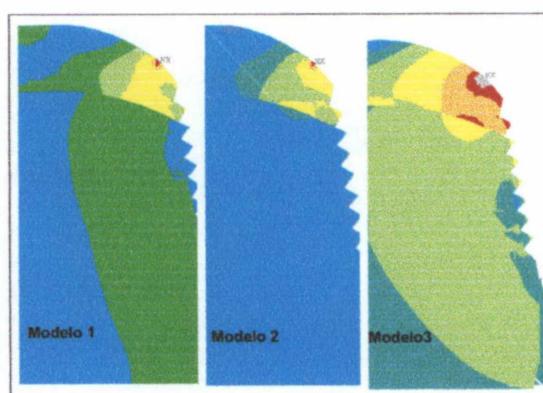


Figura 5.21: Tensões de Von Mises na região óssea próxima ao implante nos modelos 1, 2 e 3 respectivamente



Capítulo 6

Conclusões e sugestões de continuidade

Atualmente, a Bioengenharia é um campo em ascensão e, dentro dele, as modelagens computacionais podem ser extremamente úteis. Muitas são as possíveis aplicações (acústica, escoamento de sangue, ortopedia, odontologia, ecologia, química, etc).

A modelagem numérica de próteses parciais fixas rígidas e semi rígidas mostrou-se viável e gerou resultados satisfatórios, levando-se em consideração as simplificações adotadas nos modelos bidimensionais. Desse modo, pode-se garantir a confiabilidade dos modelos e prosseguir com as considerações e análises para se atingir o objetivo maior que é a atenuação de tensões provocadas pelas cargas oclusais.

O Método dos Elementos Finitos dentre tantos métodos aproximados, mostrou-se muito eficiente, inclusive na Bioengenharia. Quando empregado em problemas de contato, o MEF mostrou-se bastante apropriado para modelar a estrutura da prótese semi rígida posterior, estudada neste trabalho. Tem-se exatamente a situação de restrição à penetração de um componente estrutural no outro, mas com liberdade de escorregar quando em contato.

Tendo em vista a complexidade da estrutura do modelo (prótese parcial fixa ligando um dente natural com uma fixação), tanto geométrica quanto dos materiais que a compõem, a maior dificuldade de um trabalho desta natureza reside na determinação das constantes características do problema de contato. O emprego de elementos de contato na análise implicou na introdução de não linearidades decorrentes do próprio elemento.

Os parâmetros necessários para a solução do contato são fornecidos de acordo com a escolha do método de solução das equações de restrição. Neste sentido pode-se concluir que o Método das Penalidades com multiplicadores de Lagrange foi eficiente na solução do problema e forneceu resultados numéricos compatíveis.

A convergência dos resultados depende dos valores dos parâmetros de contato. Encontrar valores que tornam a solução convergente é uma das maiores dificuldades do problema. Embora o manual de usuário ANSYS® 5.7.1, sugira um conjunto de valores possíveis para os coeficientes de contato, na prática, a determinação destes valores é obtida por tentativas.

O comportamento biomecânico da prótese na região de interesse (osso trabecular e cortical), nas proximidades da interface do implante e na raiz do dente natural, apresentou melhores resultados no modelo 2 (prótese semi rígida com encaixe na coroa da fixação), onde as tensões máximas no osso cortical (região próxima do implante) ficaram reduzidas ($0,79 = 14,02 \text{ MPa}(\text{modelo2}) \div 17,82 \text{ MPa}(\text{modelo1})$) e no implante (0,98), ao passo que, aumentaram as tensões nos pônticos (1,96), no periodonto (2,97) e na dentina (1,13) em relação aos valores encontrados na prótese fixa (modelo 1).

As tensões verificadas no modelo 3 (prótese semi rígida com encaixe na coroa do segundo pré molar), tiveram os seguintes acréscimos em relação aos modelos 1 e 2, respectivamente: no osso cortical (3,92 e 4,98), no implante (6,45 e 6,57), no periodonto (0,24 e 0,0798), na dentina (0,39 e 0,34) e nos pônticos (3,63 e 1,85).

No modelo 3, houve grande aumento de tensão no osso cortical, implante e pônticos, cabendo ao profissional da área de Odontologia, a decisão de contraindicar (ou não) a sua adoção para um tratamento odontológico utilizando este modelo.

Na prótese fixa (modelo 1), os maiores esforços provocados pela força de oclusão penalizam a região de interface do implante com o osso trabecular e cortical, onde poderá ocorrer uma reabsorção óssea no local e, consequentemente, comprometer o tratamento no decorrer de certo período de tempo.

Existe uma diminuição gradativa da intensidade das tensões de Von Mises à

medida em que se desloca em direção ao tecido ósseo apical, em todos os modelos estudados.

Num implante apoiado em tecido ósseo cortical, as tensões são muito maiores neste tecido do que no tecido ósseo medular.

Nas várias simulações executadas, as porções do osso cortical que envolve o pescoço dos implantes, foram as mais solicitadas. Os resultados obtidos representam qualitativamente bem, o comportamento das próteses representadas nos modelos 1, 2 e 3.

Neste trabalho as maiores dificuldades foram encontradas na modelagem das próteses semi rígidas (modelos 2 e 3) onde foi necessário, inclusive, refinamento maior das malhas nas regiões de contato, para se obter a convergência dos resultados.

Como continuação deste trabalho, poderia ser feito, em 3D, um estudo dos modelos analisados, para melhor se avaliar o comportamento biomecânico das próteses, com formatos diferentes de implantes e outros tipos de encaixe.

Poderiam, também, serem avaliadas outras próteses, permutando-se os pilares, ou considerando-se como pilares, dois implantes ou, dependendo da região edéntula, considerar-se uma prótese com três pilares e em outros problemas similares apresentados pela Implantodontia. Nos vários casos, pode-se aplicar diversos tipos de cargas, seguindo a literatura existente, inclusive com cargas inclinadas (oclusão não ideal).

Glossário

AMÁLGAMA: material restaurador composto de mercúrio e outros minerais, originário da mistura do mercúrio com limalha de prata e outros metais.

ÁPICE: ponta da raiz dos dentes.

ARCADA: é o conjunto formado pelos dentes e seu respectivo osso de sustentação. Existem duas arcadas: a superior e a inferior.

BIOMATERIAIS: são substâncias bioaceitáveis usadas em enxertos e implantes.

CEMENTO: nome dado à superfície externa da raiz dos dentes.

CISALHAMENTO: ocorre quando o corpo tende a resistir à ação de duas forças agindo próxima e paralelamente, mas em sentidos contrários.

CONECTORES: são ligações entre os pônticos e os retentores. Podem ser rígidos (junta conexão) ou semi rígidos (encaixe).

COROA: é a porção visível dos dentes acima da gengiva, recoberta por esmalte. Também é o nome que se dá a uma prótese que visa substituir a coroa de um dente natural que foi prejudicada em sua estrutura.

DENTINA: porção do dente situada abaixo do esmalte. Quando está exposta gera dor como resposta a estímulo de frio ou ao calor.

ELASTICIDADE: é a propriedade pela qual um material tende a retornar a sua forma primitiva, quando as cargas deixam de atuar.

IMPLANTES DENTÁRIOS: são raízes metálicas artificiais fabricadas com o

metal Titânio (figuras 6.1 e 6.2). Têm a forma aproximada de uma raiz dentária, sendo colocados dentro dos ossos maxilares. Após algumas semanas, o osso da pessoa se une ao implante, formando uma estrutura única, sendo por isto chamado implante osseointegrado. Após esta integração, a nova raiz já tem condições de suportar um dente, (uma coroa artificial) ou servir de base para uma ponte fixa .

IMPLANTE SISTEMA BRANEMARK: são cilindros rosqueáveis feitos de óxido de titânio (figura 6.3), biocompatíveis que se osseointegram ao osso humano. Esta técnica é realizada em duas etapas. Na primeira a implantação do cilindro é feita no osso da mandíbula ou da maxila e fecha-se a gengiva imbutindo o cilindro. Seis meses depois, em média, expõe-se a "cabeça" do implante que tem uma superfície de engate com rosca interna onde parafusa-se um sistema de conexão e então será cimentado ou parafusado o dente em porcelana procurando restabelecer as funções do dente natural perdido: estética, mastigação, fonação e postura facial. O grande feito, de extraordinária importância, foi apresentado pelo Prof. Dr. Per-Indgar-BRANEMARK, da Suécia e colaboradores, que apresentaram, em 1982, na Faculty of Dentistry na University of Toronto (Canadá), os implantes cilíndricos rosqueáveis de óxido de titânio. Estes estudos tiveram início em 1952 e implantados em seres humanos em 1965. A não ser por pequenas modificações esta técnica continua sem alterações, com 36 anos, e seu sucesso medida em 96% dos casos. A partir desta conferência de Toronto, as inúmeras Universidades de todo o mundo passaram a introduzir em seus programas esta ciência e esta técnica:

Sistema Branemark de Implantes.

IMPLANTODONTIA: é o estudo da arte e da ciência relacionadas com a inserção de materiais e dispositivos com a finalidade de restaurar protéticamente a função e a estética do paciente desdentado total e parcial.

LIGAMENTO PERIODONTAL: é o tecido conjuntivo que circunda as raízes dentárias ligando-as ao osso alveolar.

MÓDULO DE ELASTICIDADE OU MÓDULO DE YOUNG: fornece o grau de elasticidade de um material.

OSSO ALVEOLAR: osso com a finalidade de prender o dente à mandíbula e maxila.

OSSO CORTICAL: é uma camada periférica de tecido ósseo compacto. A média de espessura do osso cortical é de dois milímetros.

OSSO TRABECULAR: é um tecido ósseo esponjoso localizado na medula do osso, diferente do córtex que é compacto. Este osso é composto de uma rede de trabéculas contendo tecido intersticial.

PERIODONTO: (peri = em redor de, odontos = ente) compreende os seguintes tecidos: a gengiva, o ligamento periodontal, o cimento radicular e o osso alveolar.

PILAR: é o dente ou um implante que serve de suporte a uma prótese.

POLPA: tecido mais interno do dente, onde encontram-se os vasos, nervos e tecido conjuntivo fibroso.

PÔNTICO: é o dente artificial suspenso entre os dentes suporte.

PRÓTESE DENTÁRIA: a prótese dentária visa substituir um ou mais dentes e/ou tecido de proteção e sustentação ausentes, objetivando o restabelecimento do equilíbrio neuromuscular do sistema estomatognático, possibilitando o desempenho e manutenção de suas funções, restabelecendo o bem estar físico, mental e social. Os aparelhos protéticos podem ser classificados, visando os aspectos de fixação (próteses fixas e próteses removíveis (total e parcial) e de transmissão dos esforços mastigatórios (dento-suportada: prótese fixa; dento-muco-suportada: parcial e removível; muco-suportada: dentadura completa).

PRÓTESE PARCIAL REMOVÍVEL (PPR): é um aparelho protético que substitui os dentes naturais perdidos, em arcadas nas quais ainda permanecem alguns dentes naturais, portanto, com perda parcial de dentes. É chamada de removível porque pode ser retirada pelo portador no momento que este desejar. Toda PPR convencional necessita de grampos.

PRÓTESE PARCIAL FIXA (PPF): é um aparelho que substitui um ou vários dentes ausentes, permanentemente unido aos dentes remanescentes e/ou implantes.

REABSORÇÃO ÓSSEA: é a perda de substância óssea por um processo patológico ou fisiológico que pode estar associada ao envelhecimento, a distúrbios metabólicos ou trauma.

REGIÃO PERIAPICAL: região situada envolta ao ápice radicular.

RESISTÊNCIA: é a capacidade de um corpo de resistir à forças.

RESILIÊNCIA: é a capacidade de um corpo de resistir ao trabalho.

RETENTORES: são restaurações que são cimentadas aos pilares.

RIGIDEZ: é a capacidade de um corpo de resistir à deformação.

Figura 6.1: Secção de um implante osseointegrado



Figura 6.2: Implantes dentários

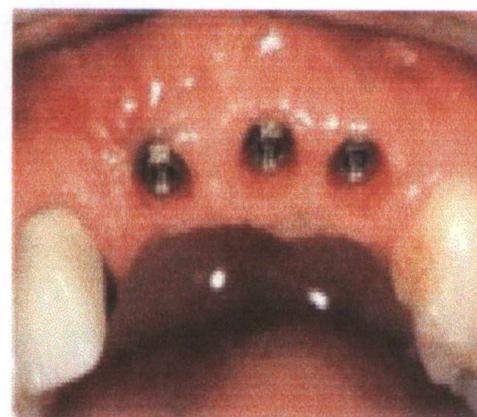
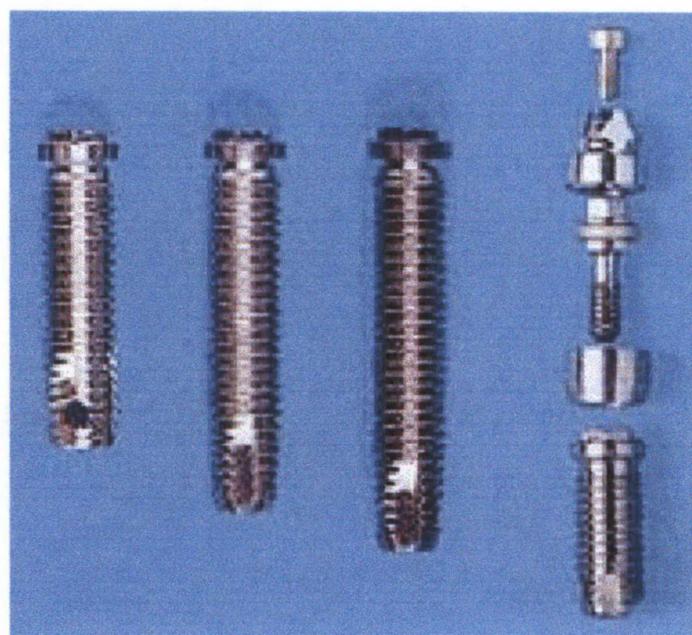


Figura 6.3: Implante Branemark



Referências Bibliográficas

[1] ADELL, R.; LEKHOLM, U.; ROCKELER, B.; BRANEMARK, P.I.. *A 15-years study of osseointegrated implants in the treatment of the edentulous jaw.* Int. J. OralSurg, v.10, n.6, p. 387-416, 1981.

[2] AKAGAWA,Y.; OKANE,H.; KONDO,N.; TSUGA,K.; TSURU, H. *Comparative evaluation of chewing function with removable partial dentures and fixed prostheses supported by the sigle-crystal sapphire implant in the Kennedy class II partially edentulous mandible.* Int. J. Oral Maxillofac Implants, v.4, n.3, p.205-210, 1989.

[3] AKAGAWA,Y.; WADAMOTO,M.; SATO,Y.; TSURU,H.. *The three-dimensional bone interface of an osseointegrated implant: a method for study.* J Prosthet Dent, v.68,n.5, p.813-816, 1992.

[4] AKPINAR,I.; DEMIREL,F.; PARNAAS, L.; SAHIN,S.. *A comparison of stress and strain distribution characteristics of two different rigid implant de-*

signs for distal-extension fixed prostheses. Quintessence Int, v.27,n.1,p.11-17, 1996.

- [5] ALBREKTSSON, T. et all. *Osseointegrated oral implants: a swedish multicenter study of 8139 consecutively inserted Nobelpharma implants. J Periodontol, v.59, n.5, p.287-296, 1988.*
- [6] ALVES FILHO,A.. *Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE.* Ed. Érica Ltda, São Paulo, 2000.
- [7] ANSYS, *User's Manual for revision 5.7.* Swanson Analysis Systems, 2000.
- [8] ARGYRIS,J.H.; KELSEY,S.. *Energy Theorems and Structural Analysis.* Aircraft Engineering, 1954-55.
- [9] ASSAN,A.E.. *Método dos Elementos Finitos.* Ed. Unicamp, São Paulo, 1999.
- [10] AYDILINK,E.; AKAY,H.U.. *Effect of a resilient layer in a removable partial denture base on stress distribution to mandible. J Prosthet Dent, v.44, n.1, p.17-20, 1980.*
- [11] AYDIN,A.K.; TEKKAYA,A.E.. *Stresses induced by different loadings around weak abutments. J Prosthet Dent , v.68, n.6, p.879-884, 1992.*
- [12] BABBUSH,C.U. et al. *Intra mobile cylinder (IMZ) two-stage osteointegrated implant system with the intra mobile element (IME): part I. Its rationale and*

procedure for use. Int J Oral Maxillofac Implants, Lombard, v.2, n.4, p.203-216, 1987.

[13] BARBOSA,H.J.C.; BORGES,C.C.H.. *Um método lagrangeano aumentado para problemas de contato em elasticidade.* XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Brasília, 1993.

[14] BARTH,E.; JOHANSSON,C.; ALBREKTSSON,T.. *Histologic Comparison of ceramic and titanium implants in cats.* Int J Oral Maxillofac Implants, v.5,n.3, p.227-231, 1990.

[15] BASSANEZI,R.C.; FERREIRA,W.C.. *Equações diferenciais com aplicações.* Ed. Harbra Ltda, São Paulo, 1988.

[16] BATHE,K.J. Finite Element Procedure. New Jersey, Prentice-Hall, Inc.,1996.

[17] BATHE,K.J.; BOUZINOV,P.A.. *On the constraint function method for contact problems.* Computers & Structures, v.64, n.5/6, p.1069-1085, 1997.

[18] BAZARAA,M.S.; SHETTY,C.M.. *Non linear programming-theory and algorithms.* Canadá: John Wiley & Sons, 1979.

[19] BECKER,E.B.; CAREY,G.F.; ODEN,J.T.. *Finite elements an introduction,* vol 1, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1986.

[20] BELTZER,A.I.. *Engineering Analysis with Maple/Mathematica*. Ed. Academic Press, Inc, San Diego, 1995.

[21] BETIOL,E.A.G.. *Comportamento biomecânico de uma prótese parcial fixa posterior, usando como pilares um dente natural e um implante osseointegrado*. São Paulo, 2002, 67f. Tese (Mestrado), Faculdade de Odontologia, Universidade de São Paulo.

[22] BORCHERS,L.; RECHARDT,P.. *Three-dimnesional stress distribution around a dental implant at different stages of interface development*. J Dent. Res., v.62, n.2, p.155-159, 1983.

[23] BORGES,M.; COELHO,A.B.; MENDES,W.B.. *Conexão dente-implante: uma opção viável*. Innovations Journal, v.5, n.1, p.6-11, 2001.

[24] BOYCE,W.E.; PRIMA,R.C.. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Ed. Guanabara Dois S/A., 6^a ed., Rio de Janeiro, 1998.

[25] BRANEMARK,P.I. et al.. *Intra-osseous implants for dental prostheses: experimental studies*. Scand J Plast Reconst Surg, v.3, n.2, p.81-100, 1969.

[26] BRANEMARK,P.I. et al.. *Osseointegrated implants in the treatment of the edentulous jaw: experience from a 10-year period*. Scand J Plast Reconst Surg, v.16, p.7-127, suplemento, 1977.

[27] BREBBIA,C.A.. *Variational Techniques, in the Finite Element Technique: An Introduction for Engineers*. Editora UFRGS, Rio Grande do Sul, 1975.

[28] BREEDING,L.C.; DIXON,D.L.; SADLER,J.P.; MCKAY,L.. *Mechanical considerations the implant tooth-supported fixed partial denture*. J Prosthet Dent, v.74,n.5, p.487-492, 1995.

[29] BUCHANAN,G.R.. *Finite element analysis*. New York, The McGraw-Hill Companies, Inc., 1995.

[30] CAREY,G.F.; ODEN,J.T.. *Finite Elements: A Second Course*.Prentice Haall, Inc, Englewood Clifs, New Jersey, 1983.

[31] CAVICCHIA,F.; BRAVI,F.. *Free standing vs tooth-connected implant supported fixed partial restorations, a comparative retrospective clinical study of the prosthetic results*. Int J Oral Maxillofac Implants, v.9, p.711-718, 1994.

[32] CHAPMAN,R.J.; KIRSCH,A.. *Variations in occlusal forces with a resilient internal implant shock absorber*. Int J Oral Maxillofac Implants, Lombard, v.5, n.4, p.369-374, 1990.

[33] CHEN,J.; ESTERLE,M.; ROBERTS,W.E.. *Mechanical response to functional loading around the threads of retromolar endosseous implants utilized for orthodontic anchorage: coordinated histomorphometric and finite element analysis*. Int J Maxillofac Implants, v.14, n.2, p.282-285, 1999.

[34] CIMINI et al. *Revisão crítica das medidas e modelos de cargas atuantes em dentes*. 21st. Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Rio de Janeiro, december 2000.

[35] CLELLAND,N.L.; GILAT,A.; MCGLUMPHY,E.A.; BRANTLEY,W.A.. *A photoelastic and strain gauge analysis of angled abutments for an implant system*. Int J Oral maxillofac Implants, v.13, n.6, p.541-540, 1993.

[36] CODDINGTON,C.A.; LEVINSON,N.. *Theory of Ordinary Differential Equations*. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, New York, 1972.

[37] COHEN,S.P.; ORENSTEIN,J.H.. *The use of attachments in combination implant and tooth fixed partial denture: A technical report*. Int J Oral Maxillofac Implants, v.9, n.2, p.230-234, 1999.

[38] COOK,R.D.; MALKUS,D.S.; PLESHA,M.E.. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, Inc.,3rd ed., New York, 1989.

[39] COOLIDGE,E.D.. *The tickness of the human periodontal membrane*. Jour A.D.A. & D. Cos, v.24, p.1260-1262, 1937.

[40] CORRÊA,A.A.; MATSON,E.. *Avaliação quantitativa e qualitativa dos esforços que ocorrem numa restauração com amálgama de prata, pelo método dos elementos finitos*. Rev Fac Odontol São Paulo, v.15, n.1, p.19-26, 1977.

[41] COURANT,R.. *Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration*. Bulletin of the American Mathematical Society, v.49, 1943.

[42] DÉRAND,T.. *Marginal failure of amalgam class II restoration*. J Dent Res, v.56, n.5, p.481-485, 1977.

[43] DJABELLA,H.; ARNELL,R.D.. *Finite element analysis of the contact stress in elastic coating/substrate under normal and tangential load*. Thin Solid Films, v.223, p.87-97, 1993.

[44] EL CHARKAWI,H.G.; EL WAKAD,M.T.; NASER,M.E.. *Modification of osseointegrated implants for distal-extension prostheses*. J Prosth Dent, v.64, n.4, p.469-472, 1990.

[45] EL CHARKAWI,H.G.; ZEKRY,K.A.; EL WAKAD,M.T.. *Stress analysis of different osseointegrated implants supporting a distal extension prosthesis*. J Prost Dent, v.72, n.6, p.614-622, 1994.

[46] ELSGOLTZ,L.. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*. Editorial Mir, Moscou, 1969.

[47] ERICSSON,I. et al. *A clinical evalution of fixed-bridge restorations supported by the combination of teeth and osseointegrated titanium implants*. J Clin Periodontol, v.13, n.4, p.859-866, 1986.

[48] FARAH,J.W.; CRAIG,R.G.. *Reflection of photoelastic stress analysis of a dental bridge.* J Dent Res, v.50, n.5, p.1253-1259, 1971.

[49] FARAH,J.W.; CRAIG,R.G.; SIKARSKIE,D.L.. *Photoelastic and finite elements stress analysis of a restored axisymmetric first molar.* J Biomech, v.6, n.5, p.511-520, 1973.

[50] FARAH,J.W.; CRAIG,R.G.. *Finite element stress analysis of a restored axisymmetric first molar.* J Dent Res, v.53, n.4, p.859-866, 1974.

[51] GATTASS,M.; CELLES,W.F.; FONSECA,G.L.. *Computação gráfica Aplicada ao método dos elementos finitos.* XIV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Rio de Janeiro, 1991.

[52] GELFAND,I.M. & FOMIN, S.V.. *Calculus of Variations.* New Jersey, 1rded., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1963.

[53] GLICKMAN,I.; ROEBER,F.W.; BRION,M.; PAMEIJER,J.H.N.. *Photoelastic analysis of internal stress in the periodontium created by occlusal forces.* J Periodontol, v.41, n.1, p.30-35, 1970.

[54] GOEL,V.K.; KHERA,S.C.; SINGH,K.. *Clinical implications of the response of enamel and dentin to masticatory loads.* J Prosthet Dent, v.64, n.4, p.446-454, 1990.

[55] GREEN, A. E.; ZERNA, W.. *Theoretical elasticity*. Oxford, 2nd ed, at the Clarendon Press, 1968.

[56] GYLLENRAM,F.. *Optimal clinical fit is a multi-dimensional tissue*. Nobelpharma News, v.8, n.2, p.4, 1994.

[57] HECKE,M.B. *Cálculo Variacional*. Notas de aula, p.1-6. Disponível em: <<http://www.cesec.ufpr.br/tc703/EF102.html>> Acesso em 13.06.1999.

[58] HECKE,M.B.; MACHADO,R.D.; CAMARGO,P.C.; SIQUEIRA,C.J.M.; SILVA,C.F.. *Análise não-linear de um suporte de fixação de cabos ópticos, envolvendo materiais hiperelásticos e contato com fricção, via método dos elementos finitos e modelos experimentais*. 21º CILAMCE, Rio de Janeiro, 2000.

[59] HOBO,S.; ICHIDA,E.; GARCIA,L.T.. *Osseointegrated and occlusal implants rehabilitation*. Tokio: Quintessence, p.259, 1989.

[60] HOBO,S.; ICHIDA,E.; GARCIA,L.T.. *Osseointegração e reabilitação oclusal*. Quintessence, São Paulo, p.278-279, 1997.

[61] HOLMES,D.C.; GRIGSBY,W.R.; GOEL,V.K.; KELLER,J.C.. *Comparison of stress transmission in the IMZ implant system with polyoxymethylene or titanium intramobile element: A finite element stress analysis*. Int J Oral Maxillofac Implants, v.7, n.4, p.450-458, 1992.

[62] HRENNIKOFF,A.. *Solution of problems in Elasticity by the Framework Method.* J Appl Mech, v.8, n.A, p.169-175, 1941.

[63] INGBER,A.; JANSEN,C.A.. *Should natural teeth and osseointegrates implants be used in combination to support a fixed prosthesis?* Int J Oral Maxillofac Implants, v.12, n.6, p.855-859, 1997.

[64] ISMAIL,Y.H. et al. *Stress analysis of a natural tooth connected to an osseointegrated implant in a fixed prosthesis.* J Dent Res, v.70, n.3, p.460, 1991.

[65] JOHNSON,K.L.. Contact mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

[66] KAMPOSIORA,P.;PAPAVASILIOU,G.;BAYNE,S.C.; FELTON,D.A.. *Stress concentration in all-ceramic posterior fixed partial dentures.* Quintessence Int, v.27, n.10, p.701-706, 1996.

[67] KAY,H.B.. *Osseointegration beyond tooth replacement: the intra mobile cylinder (IMZ) a stabilizing abutment in periodontal prosthesis.* Int J Period Res Dent, v.9, n.6, p.395-415, 1989.

[68] KENNEDY, E.. *Partial Denture construction.* Dent Items Interest, v.49, p.42-59, 1927.

[69] KITOH,M.; SUETSUGU,T.; MURAKAMI,Y.. *Mechanical behavior of tooth periodontal membrane and mandibular bone by the finite element method*. Bull Tokyo Med Univ, v.24, n.1, p.81-87, 1977.

[70] KWON,Y.W.; BANG,H.. *The Finite Element Method using MATLAB*. CRC Press LLC, Boca Raton , Florida, USA, 1997.

[71] LACERDA,T.S.P.. *Comportamento biomecânico das estruturas de suporte e da prótese parcial removível apoiada sobre implante na região distal*. São Paulo, 1999, 152f. Tese(Mestrado em Prótese Dental), Universidade de São Paulo.

[72] LAGANÁ,D.C.. *Comportamento biomecânico das estruturas de suporte e da prótese parcial removível de extremidade livre, com encaixe extracoronário rígido e semi-rígido*. São Paulo, 1996, 177f. Tese(Livre Docente em Prótese Parcial Removível), Faculdade de Odontologia, Universidade de São Paulo.

[73] LAS CASAS,E.; CIMINI,C.Jr.; CARVALHO,R.; HALLACK,P.; CORNACHIA,T.; LANZA,M.. *Computational modeling of dentistry problems*. Computational Methods in Engineering'99, 1999.

[74] LEWINSTEIN,I.; BANKS-SILLS,L.; ELIASI,R.. *Finite element analysis of a new system (IL) for supporting an implant-retained cantilever prosthesis*. Int J Oral Maxillofac Implants, v.10, n.3, p.355-366, 1995.

[75] LILL,W. et al. *The ability of currently available stress-braking elements for osseointegrated implants to imitate natural tooth mobility.* Int J Oral Maxillofac Implants, v.3, n.4, p.281-286, 1988.

[76] LINDH,T.; GUNNE,J.; DANIELSSON,S.. *Rigid connections between natural teeth and implants: A technical note.* Int J Oral Maxillofac Implants, v.12, n.5, p.674-678, 1997.

[77] LUM,L.B.. *A biomechanical rationale for the use of short implants.* J Oral Implantol, v.17, n.2, p.126-131, 1991.

[78] MACHADO,K.D.. *Equações Diferenciais Aplicadas à Física.* Ed. UEPG, Ponta Grossa, Paraná, 1999.

[79] MENICUCCI,G.; LORENZETTI,M.; PERA,P.; PRETI,G.. *Mandibular implant-retained overdenture: finite element analysis of two anchorage systems.* Int J Oral Maxillofac Implants, v.13, n.3, p.369-376, 1998.

[80] MENSOR,M.C.. *The rationale of resilient hinge-action stressbreakers.* J Prosthet Dent, v.20, n.3, p.204-215, 1968.

[81] MERRIMAN, E.. *Resistência dos Materiais.* Trad. por E. K. Hankin, 2. ed., São Paulo, Brasil, LEP, 1964.

[82] MORI,M.. *Contribuição para o estudo da distribuição das tensões internas em um dente natural e em um dente restaurado com coroa metalo-cerâmica e*

retentor intraradicular fundido, sob carga axial-método do elemento finito. São Paulo, 1994, 60f. Tese (Mestrado), Faculdade de Odontologia, Universidade de São Paulo.

[83] NAKANISHI, T. et al.. *Comparison with two kinds of intramobile component in IMZ implant.* J Dent Res, Chicago, v.72, p.89-92, 1993.

[84] NEVINS,M.; LANGER,B.. *The successful application of osseointegrated implants to the posterior jaw: a long-term retrospective study.* Int J Oral Maxillofac Implants, v.8, n.2, p.428-432, 1993.

[85] NISHIMURA,R.D.; OCHIAI,K.T.; CAPUTO,A.A.; JEONG,C.M.. *Photoelastic stress analysis of load transfer to implants and natural teeth comparing rigid and semirigid connectors.* J Prosthet Dent, v.81, n.6, p.696-703, 1999.

[86] NYMAN,S.; LINDHE,J.. *A longitudinal study fo combined periodontal and prosthetic treatment of patients with advanced periodontal disease.* J Periodontol, v.50, n.4, p.163-169, 1979.

[87] OGISO,M.; TABATA,T.; KUO,P.T.; BORGESE,D.. *A histologic comparison of the functional loading capacity of an occluded dense apatite implant and the natural dentition.* J Prosthet Dent, v.71, n.6, p.581-591, 1994.

[88] OH,H.S.; LIM,J.K.. *A simple error estimator for size and distortion of 2D isoparametric finite elements.* Computers & Structures, v.59, p.989-999, 1996.

[89] OKENSON,J.P.. *Fundamentos de oclusão e desordem temporo-mandibulares*, 2^a ed., São Paulo, Artes Médicas, 1992.

[90] PAPAVASILIOU,G. et al. *Finite element analysis of ceramic abutment-restoration combinations for osseointegrated implants*. Int J Prosthodont, v.9, n.3, p.254-260, 1996.

[91] PATTERSON,E.A.; JOHNS,R.B.. *Theoretical analysis of the fatigue life of fixture screws in osseointegrated dental implants*. In J Oral Maxillofac Implants, v.7, n.2, p.26-34, 1992.

[92] PIATTELLI,A.; SCARANO,A.; PAOLANTONIO,M.. *Clinical and histologic features of a nonaxial load on the osseointegration of a posterior mandibular implant: report of a case*. Int J Oral maxillofac Implants, v.13, n.2, p.273-275, 1998

[93] RANGERT,B.; JEMT,T.; JUNES,L.. *Forces e moments on Branemark implants*. Int J Oral Maxillofac Implants, v.4, n.3, p.241-247, 1989.

[94] RANGERT,B.;GUNNE,J; SULLIVAN,D.Y.. *Mechanical aspects of a Branemark implant connected to a natural tooth: an in vitro study*. Int J Oral Maxillofac Implants, v.6, n.2, p.177-186, 1991.

[95] RANGERT,B.;GUNNE,J; GLANTZ,P.; SVENSSON,A.. *Vertical load distribution on a three-unit prosthesis supported by a natural tooth and a single Branemark implant.* Clin Oral Impl Res, v.6, p.40-46, 1995.

[96] REITZ,J.V.. *Lingualized occlusion in implant dentistry.* Quintessence Int, v.25, n.3, 1994.

[97] RICHTER,E.J.. *Basic biomechanics of dental implants in prosthetic dentistry.* J Prosthet Dent, v.61, n.2, p.602-609, 1989.

[98] RICHTER,E.J.. *In vivo vertical forces on implants.* Int J Oral Maxillofac Implants, v.10, n.1, p.99-108, 1995.

[99] ROY,M.. *Quelques considerations sur les bridges d'immobilisations dans la pyorrhée alveolaires.* Odontologie, v.74, n.3, p.129-149, 1936.

[100] SABONNADIÈRE,J.C.; COULOMB,J.L.. *Elementos Finitos e CAE: Aplicações em Engenharia Elétrica.* Aleph Pub., Morumbi, São Paulo, 1993.

[101] SAKAGUCHI,R.L.; BORGENSEN,S.E.. *Nonlinear contact analysis of preload in dental implants screws.* Int J Oral maxillofac Implants, v.10, n.3, p.295-302, 1995.

[102] SANTOS,V.M.A.. *Representação física-geométrico do incisivo central inferior, análise das curvas de tensões, deformações e deslocamentos resultantes*

de carregamentos distribuídos axialmente, e discussão teórica da metodologia empregada pelo método dos elementos finitos em modelos tridimensionais.
Ribeirão Preto(SP), 1995, 112f. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Odontologia, Universidade de São Paulo.

[103] SELNA,L.G.; SHILLINGBURG JR,H.T.; KERR,P.A.. *Finite element analysis of dental structures-axisymmetric and plane stress idealizations.* J Biomed Mater Res, v.9, n.2, p.237-252, 1975.

[104] SENDYK,C.L.. *Distribuição de tensões nos implantes osseointegrados - análise não linear em função do diâmetro do implante e do material da coroa protética.* São Paulo, 1998, 127f. Tese (Doutorado em Dentística), Faculdade de Odontologia, Universidade de São Paulo.

[105] SERTGÖZ,A.. *Finite element analysis study of the effect of superstructure material on the stress distribution in an implant supported fixed prosthesis.* Int J Prosthodont, v.10, n.1, p.19-27, 1997.

[106] STEPHENSON, G.. *Uma introdução às equações diferenciais parciais.* Editora Edgard Blucher Ltda. São Paulo, 1975.

[107] THRESHER,R.W.; SAITO,G.E.. *The stress analysis of human teeth.* J Biomech, v.6, n.5, p.443-449, 1973.

[108] TIMOSHENKO,S.; GOODIER,J.N.. *Theory of elasticity*. New York, 3rd ed, McGraw-Hill, 1951.

[109] TORMENA,F.V.; HECKE,M.B.; MACHADO,R.D.. *Contribuição à modelagem computacional de cabos ópticos, utilizando o método dos elementos finitos*. Anais do CILAMCE, São Paulo, 1999.

[110] TURNER,M.J.; CLOUGH,R.W.; MARTIN,H.C.; TOPP,J.L.. *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*. J Aeron Sci, v.23, n.9, p.805-823, 1956.

[111] TYLMAN,S.D.; TYLMAN,S.G.. *Theory and practice of crown and bridge prosthodontics*. 4rd ed., Saint Louis: Mosby, 1960.

[112] ULRICH,N.L.. *Estudo da distribuição das tensões no sistema de implantes IMZ, variando-se os elementos intramóveis, as cargas e suas direções, aplicadas pelo método dos elementos finitos*. São Paulo, 1998, 97f. Tese(Mestrado em Prótese Dentária), Faculdade de Odontologia, Universidade Camilo Castelo Branco.

[113] VAN ROSSEN,I.P.; BRAAK,L.H.; PUTER,C.; GROOT,K.. *Stress-absorbing elements in dental implants*. J Prosthet Dent, v.64, n.2, p.198-205, 1990.

[114] VELLINI,F.F.; SERRA,D.D. *Anatomia Dental*, 2^a ed., São Paulo, Artes Médicas, 1976.

[115] WALTON,J.N.; MACENTEE,M.I.. *A retrospective study on the maintenance and repair of implant-supported prostheses.* Int J Prosthodont, v.6, n.5, p.451-455, 1993.

[116] WEINBERG,L.A.. *The biomechanics of force distribution in implant-supported prostheses.* Int J oral Maxillofac Implants, v.8, n.1, p.19-31, 1993.

[117] WEINBERG,L.A.; KRUGER,B.. *Biomechanical considerations when combining tooth-supported and implant-supported prostheses.* Oral Surg Oral Med Oral Pathol, v.78, n.1, p.22-27, 1994.

[118] WILLIAMS,K.R.; EDMUNDSON,J.T.; REES,J.S.. *Finite element stress analysis os restored teeth.* Dent Mater, v.3, n.4, p.200-206, 1987.

[119] YANG,H.; LANG,L.A.; FELTON,D.A.. *A finite element stress analysis on the effect of splinting in fixed partial dentures.* J Prosthet Dent, v.81, n.6, p.721-728, 1999.

[120] ZIENKIEWICZ,O.C.. *El método de los elementos finitos.* Barcelona (Espanha), 3rd ed., Editorial Reverté S.A., 1980.