

**Universidade Federal do Paraná  
Programa de Pós - Graduação em  
Métodos Numéricos em Engenharia**

**O MÉTODO COMPOSTO APLICADO À ANÁLISE DE  
VIBRAÇÕES LIVRES DE PLACAS ESPESSAS**

**CURITIBA  
2002**

**NEIL FRANCO DE CARVALHO**

**O MÉTODO COMPOSTO APLICADO À ANÁLISE DE VIBRAÇÕES  
LIVRES DE PLACAS ESPESSAS**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - Área Mecânica Computacional, dos Setores de Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

**Orientador: Prof. Roberto Dalledone  
Machado**

**Co-orientadora: Prof<sup>a</sup>. Mildred Ballin  
Hecke**

**CURITIBA**

**2002**

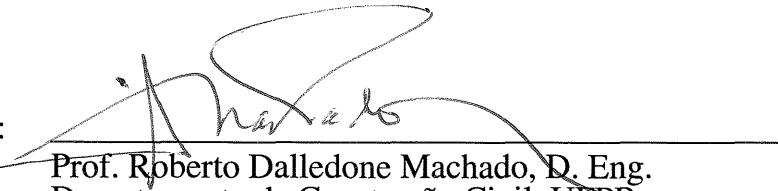
## **TERMO DE APROVAÇÃO**

**NEIL FRANCO DE CARVALHO**

### **O MÉTODO COMPOSTO APLICADO À ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES DE PLACAS ESPESSAS**

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para a obtenção do grau de mestre em Ciências, no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, na área de concentração de Mecânica Computacional, Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:

  
Prof. Roberto Dalledone Machado, D. Eng.  
Departamento de Construção Civil, UFPR

  
Prof<sup>a</sup>. Mildred Ballin Hecke, D. Sc.  
Departamento de Construção Civil, UFPR

  
Prof<sup>a</sup>. Deane de Mesquita Roehl, D. Ing.  
Departamento de Engenharia Civil, PUC/RIO

  
Prof. Jucélio Tomás Pereira, D. Eng.  
Departamento de Engenharia Mecânica, CEFET/PR

Curitiba, 11 de junho de 2002

*“Não percas tempo julgando as pessoas,  
assim não terás tempo para amá-las.”*

Madre Teresa de Calcutá.

À minha esposa, Sandra, e aos  
meus filhos, Rafael e Isabela, pela  
paciência e compreensão.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao prof. e orientador Roberto Dalledone Machado, pelo acompanhamento e revisão do trabalho, além do aconselhamento e amizade.

À prof<sup>a</sup>. Mildred Ballin Hecke, pelo incentivo ao meu trabalho e o comprometimento com o grupo de mestrado.

Aos professores e funcionários do CESEC, pela amizade e dedicação.

Aos colegas da pós-graduação, Simone dos Santos e Alberto Marcatto, pelo companheirismo e amizade.

Ao meu amigo Carlos Cziulik, com quem troquei várias idéias durante a realização deste trabalho.

Aos meus colegas do Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná (Cefet-PR), que ao longo dos anos me apoiaram para a realização da pós-graduação.

A todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>VIII</b>
<b>LISTA DE TABELAS .....</b>	<b>XI</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS.....</b>	<b>XIII</b>
<b>RESUMO .....</b>	<b>XVII</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>XVIII</b>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 TÉCNICAS EMPREGADAS PARA O ESTUDO DE VIBRAÇÕES .....	3
1.2 OBJETIVO GERAL.....	6
1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	6
1.4 ESCOPO DO TRABALHO .....	6
1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	7
<b>2 ESTUDO DE VIBRAÇÕES EM PLACAS .....</b>	<b>8</b>
2.1 INTRODUÇÃO.....	8
2.2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....	9
2.2.1 Cinemática da Deformação de Placas .....	9
2.2.2 Teoria de Vibrações Aplicada ao Problema de Placas.....	12
2.3 ABORDAGENS PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE VIBRAÇÕES EM PLACAS....	16
2.3.1 Estudos Iniciais – Aplicação às Placas Finas.....	17
2.3.2 Estudo de Placas Espessas .....	18
2.4 MÉTODO COMPOSTO .....	20
<b>3 FORMULAÇÃO DO MÉTODO COMPOSTO .....</b>	<b>21</b>
3.1 MODELO DE DESLOCAMENTOS APLICADO AO MÉTODO COMPOSTO .....	21
3.2 DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO COMPOSTO .....	23
3.2.1 Superposição das Funções do Método dos Elementos Finitos às Funções da Teoria Clássica..	23
3.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADOS À PLACAS .....	25
3.3.1 Formulação do Elemento Isoparamétrico Aplicado às Placas .....	25
3.3.2 Matriz de Rigidez.....	27
3.3.3 Matriz Massa.....	30
3.4 MÉTODO COMPOSTO APLICADO À PLACAS .....	30
3.4.1 Características das Funções de Forma MC .....	32
3.4.2 Funções de Forma da Teoria Clássica.....	33
3.4.3 Termos da Matriz de Deformação Associados ao Método Composto.....	38
3.4.4 Agrupamento dos Termos em Flexão e Cisalhamento para o Método Composto.....	39

3.4.5	Matriz Massa para o Método Composto .....	39
3.5	SUMÁRIO DO CAPÍTULO 3 .....	40
<b>4</b>	<b>FORMULAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO COMPOSTO .....</b>	<b>41</b>
4.1	IMPLEMENTAÇÃO DO ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO LINEAR DE QUATRO NÓS...	41
4.1.1	Funções de Forma para o MEF.....	41
4.1.2	Funções de Forma para a Teoria Clássica.....	42
4.1.3	Matriz de Deformação para os Termos de Flexão do Método Composto .....	45
4.1.4	Matriz de Deformação para os Termos de Cisalhamento do Método Composto .....	47
4.1.5	Matriz de Rigidez do Método Composto para o Elemento de Quatro Nós.....	47
4.1.6	Matriz Massa do Elemento de Quatro Nós do Método Composto .....	48
4.2	IMPLEMENTAÇÃO DO ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO QUADRÁTICO DE OITO NÓS	48
4.2.1	Funções de Forma para o MEF.....	49
4.2.2	Funções de Forma da Teoria Clássica para o Elemento de Oito Nós .....	50
4.2.3	Matriz de Deformação para os Termos de Flexão do Método Composto .....	50
4.2.4	Matriz de Deformação para os Termos de Cisalhamento do Método Composto .....	51
4.2.5	Matriz de Rigidez do Método Composto para o Elemento de Oito Nós.....	51
4.2.6	Matriz Massa do Método Composto para o Elemento de Oito Nós .....	51
4.3	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	52
4.3.1	Método de Jacobi Generalizado.....	54
4.3.2	Integração Numérica.....	55
4.4	SUMÁRIO DO CAPÍTULO 4 .....	57
<b>5</b>	<b>APLICAÇÕES E RESULTADOS.....</b>	<b>59</b>
5.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	59
5.2	FORMATO DA VERIFICAÇÃO .....	60
5.3	CASO 1: VIBRAÇÃO LIVRE DE PLACA QUADRADA COM OS QUATRO LADOS SIMPLESMENTE APOIADOS .....	60
5.3.1	Método dos Elementos Finitos.....	62
5.3.1.1	Elemento Quadrilateral de Quatro Nós .....	62
5.3.1.2	Elemento Quadrilateral de Oito Nós .....	64
5.3.1.3	Análise dos Resultados Obtidos para o MEF.....	65
5.3.2	Método Composto.....	66
5.3.2.1	Elemento Quadrilateral de Quatro nós .....	67
5.3.2.2	Elemento Quadrilateral de Oito Nós .....	77
5.3.2.3	Efeito da Variação da Relação Vão/Espessura .....	87
5.3.3	Comparação de Resultados do MEF e MC .....	91
5.3.3.1	Comparação de Resultados para o Elemento de Quatro Nós .....	91
5.3.3.2	Comparação de Resultados para o Elemento de Oito Nós .....	94

5.3.3.3	Análise do custo computacional .....	97
5.4	CASO 2: VIBRAÇÃO LIVRE DE PLACA QUADRADA COM CONDIÇÕES DE CONTORNO VARIÁVEIS .....	99
5.5	ANÁLISE GLOBAL DOS RESULTADOS.....	102
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE CONTINUIDADE .....</b>	<b>103</b>
6.1	CONCLUSÕES.....	103
6.1.1	Quanto ao Estudo.....	103
6.1.2	Quanto à Implementação Computacional .....	103
6.1.3	Resultados Obtidos .....	104
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	105
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>107</b>

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – DEFORMAÇÃO NA ANÁLISE DE PLACA INCLUINDO AS DEFORMAÇÕES DE CISALHAMENTO (ADAPTADO DE BATHE, 1996).....	10
FIGURA 3.1 – MAPEAMENTO DOS TERMOS DA EQUAÇÃO DA RIGIDEZ À FLEXÃO PARA O SISTEMA MATRICIAL NO MC .....	24
FIGURA 3.2 – DESLOCAMENTOS NODAIS PARA O ELEMENTO DE QUATRO NÓS .....	25
FIGURA 3.3 – MAPEAMENTO ENTRE O ELEMENTO PADRÃO E UM ELEMENTO FINITO QUALQUER .....	26
FIGURA 3.4 – CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA AS PARCELAS DA TC EM UMA PLACA33	
FIGURA 4.1 – ELEMENTO QUADRILATERAL ISOPARAMÉTRICO DE QUATRO NÓS .....	42
FIGURA 4.2 - REPRESENTAÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA PARA OS QUATRO PRIMEIROS MODOS DE VIBRAÇÃO.....	44
FIGURA 4.3 – ELEMENTO QUADRILATERAL ISOPARAMÉTRICO DE OITO NÓS .....	49
FIGURA 4.4 – DETALHES DA ESTRUTURA DE ENTRADA, PROCESSAMENTO E SAÍDA DE DADOS.....	53
FIGURA 4.5- FLUXOGRAMA MOSTRANDO OS ELEMENTOS PRINCIPAIS DO PROGRAMA	54
FIGURA 5.1 – MAPA DE LEITURA DAS ANÁLISES DO CASO 1.....	61
FIGURA 5.2 – CONDIÇÕES DE CONTORNO DA PLACA DO CASO 1.....	62
FIGURA 5.3 - ERRO RELATIVO DO MEF (ELEMENTOS DE QUATRO NÓS) PARA AS FREQUÊNCIAS ADIMENSIONAIS COMPARADOS À SOLUÇÃO ANALÍTICA	64
FIGURA 5.4 - ERRO RELATIVO DO MEF (OITO NÓS) PARA AS FREQUÊNCIAS ADIMENSIONAIS REFERENTES À SOLUÇÃO ANALÍTICA .....	66
FIGURA 5.5 - ERRO RELATIVO DO MC COM REFINAMENTO $c$ PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970).....	68
FIGURA 5.6 - ERRO RELATIVO DO MC COM REFINAMENTO $c$ PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970).....	69
FIGURA 5.7 - ERRO RELATIVO DO MC COM REFINAMENTO $c$ PARA A QUINTA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970).....	69
FIGURA 5.8 - ERRO RELATIVO DO MC (ELEMENTO DE QUATRO NÓS) COM REFINAMENTO $h$ PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970) .....	72
FIGURA 5.9 - ERRO RELATIVO DO MC (ELEMENTO DE QUATRO NÓS) COM REFINAMENTO $h$ PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970) .....	72
FIGURA 5.10 - ERRO RELATIVO DO MC (ELEMENTO DE QUATRO NÓS) COM REFINAMENTO $h$ PARA A QUINTA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970) .....	73

FIGURA 5.11 – MALHA 3X3 COM ELEMENTOS DE QUATRO NÓS DISTORCIDOS.....	74
FIGURA 5.12 – EFEITO DA DISTORÇÃO DO ELEMENTO DE QUATRO NÓS PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL – ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	75
FIGURA 5.13 – EFEITO DA DISTORÇÃO DO ELEMENTO DE QUATRO NÓS PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA NATURAL – ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	75
FIGURA 5.14 – EFEITO DA DISTORÇÃO DO ELEMENTO DE QUATRO NÓS PARA A QUINTA FREQUÊNCIA NATURAL – ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	76
FIGURA 5.15 - ERRO RELATIVO DO MC – OITO NÓS COM REFINAMENTO $c$ PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970) .....	78
FIGURA 5.16 - ERRO RELATIVO DO MC - OITO NÓS COM REFINAMENTO $c$ PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970) .....	79
FIGURA 5.17 - ERRO RELATIVO DO MC – OITO NÓS COM REFINAMENTO $c$ PARA A QUINTA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970) .....	79
FIGURA 5.18 - ERRO RELATIVO DO MC (ELEMENTO DE OITO NÓS) OITO NÓS COM REFINAMENTO $h$ PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970) .....	82
FIGURA 5.19 - ERRO RELATIVO DO MC (ELEMENTO DE OITO NÓS) COM REFINAMENTO $h$ PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970) .....	82
FIGURA 5.20 - ERRO RELATIVO DO MC (ELEMENTO DE OITO NÓS) COM REFINAMENTO $h$ PARA A QUINTA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970) .....	83
FIGURA 5.21 - MALHA 3X3 COM ELEMENTO DE OITO NÓS DISTORCIDO .....	84
FIGURA 5.22 – EFEITO DA DISTORÇÃO DO ELEMENTO DE OITO NÓS PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL – ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA .....	85
FIGURA 5.23 – EFEITO DA DISTORÇÃO DO ELEMENTO DE OITO NÓS PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA NATURAL – ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA .....	85
FIGURA 5.24 – EFEITO DA DISTORÇÃO DO ELEMENTO DE OITO NÓS PARA A QUINTA FREQUÊNCIA NATURAL – ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA .....	86
FIGURA 5.25 - EFEITO DA RELAÇÃO VÃO/ESPESSURA PARA A PRIMEIRA FREQÜÊNCIA ADIMENSIONALISADA (ELEMENTO DE QUATRO NÓS) .....	87
FIGURA 5.26 - EFEITO DA RELAÇÃO VÃO/ESPESSURA PARA A TERCEIRA FREQÜÊNCIA ADIMENSIONALISADA (ELEMENTO DE QUATRO NÓS) .....	88
FIGURA 5.27 - EFEITO DA RELAÇÃO VÃO/ESPESSURA PARA A QUINTA FREQÜÊNCIA ADIMENSIONALISADA (ELEMENTO DE QUATRO NÓS) .....	89
FIGURA 5.28 – EFEITO DA RELAÇÃO VÃO/ESPESSURA PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA (ELEMENTO DE OITO NÓS).....	89
FIGURA 5.29 - EFEITO DA RELAÇÃO VÃO/ESPESSURA PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA (ELEMENTO DE OITO NÓS).....	90

FIGURA 5.30 - EFEITO DA RELAÇÃO VÃO/ESPESSURA PARA A QUINTA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA (ELEMENTO DE OITO NÓS).....	90
FIGURA 5.31 – COMPARAÇÃO DO MEF E O MC COM REFINAMENTO $c$ PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA - ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	92
FIGURA 5.32 – COMPARAÇÃO DO MEF E O MC COM REFINAMENTO $c$ PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA - ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	92
FIGURA 5.33 – COMPARAÇÃO DO MEF E O MC COM REFINAMENTO $c$ PARA A QUINTA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA - ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	93
FIGURA 5.34 - COMPARAÇÃO DO MEF E O MC COM REFINAMENTO $c$ PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONAL – ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	94
FIGURA 5.35 - COMPARAÇÃO DO MEF E O MC COM REFINAMENTO $c$ PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONAL - ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA	95
FIGURA 5.36 - COMPARAÇÃO DO MEF E O MC COM REFINAMENTO $c$ PARA A QUINTA FREQUÊNCIA ADIMENSIONAL - ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA	95
FIGURA 5.37 – COMPARATIVO DO TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA O MC E O MEF – ELEMENTO DE QUATRO NÓS .....	97
FIGURA 5.38 - COMPARATIVO DO TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA O MC E O MEF – ELEMENTO DE OITO NÓS .....	98
FIGURA 5.39 – CONDIÇÕES DE CONTORNO DA PLACA DO CASO 2.....	99

## LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1 – RAÍZES DA EQUAÇÃO DA FREQUÊNCIA .....	37
TABELA 5.1 – RESULTADOS DA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA $\lambda$ OBTIDOS PELO MEF COM MALHA (3X3) À (6X6) E OS ERROS REFERENTES À SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	63
TABELA 5.2 – RESULTADOS DA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA $\lambda$ OBTIDOS PELO MEF COM MALHA (7X7) À (10X10) E OS ERROS REFERENTES À SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	63
TABELA 5.3 – RESULTADOS DA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA $\lambda$ OBTIDOS PELO MEF COM MALHA (3X3) À (6X6) E OS ERROS REFERENTES À SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	65
TABELA 5.4 – RESULTADOS DA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA $\lambda$ OBTIDOS PELO MEF COM MALHA (7X7) À (10X10) E OS ERROS REFERENTES À SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	65
TABELA 5.5 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM MALHA 3X3 E REFINAMENTO c..	67
TABELA 5.6 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM MALHA 4X4 E REFINAMENTO c..	68
TABELA 5.7 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM MALHA 8X8 E REFINAMENTO c..	68
TABELA 5.8 – COMPARATIVO DO PERCENTUAL DE MELHORIA DOS RESULTADOS (Δ) EM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	70
TABELA 5.9 – RESULTADOS OBTIDOS PARA MALHA (3X3), (5X5), (7X7) E (10X10) PELO MC COM UMA FUNÇÃO DA TC .....	71
TABELA 5.10 – RESULTADOS OBTIDOS PARA MALHA (3X3), (5X5), (7X7) E (10X10) PELO MC COM DUAS FUNÇÕES DA TC .....	71
TABELA 5.11 – RESULTADOS OBTIDOS PARA MALHA (3X3), (5X5), (7X7) E (10X10) PELO MC COM TRÊS FUNÇÕES DA TC .....	71
TABELA 5.12 – RESULTADOS OBTIDOS PARA MALHA (3X3), (5X5), (7X7) E (10X10) PELO MC COM QUATRO FUNÇÕES DA TC .....	71
TABELA 5.13 – COMPARATIVO DO PERCENTUAL DE MELHORIA DOS RESULTADOS (Δ) EM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	73
TABELA 5.14 – COMPARATIVO DO PERCENTUAL DE DEGRADAÇÃO DOS RESULTADOS (Π) EM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA .....	76
TABELA 5.15 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM MALHA 3X3 E REFINAMENTO c	77
TABELA 5.16 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM MALHA 4X4 E REFINAMENTO c	77
TABELA 5.17 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM MALHA 8X8 E REFINAMENTO c	78
TABELA 5.18 – COMPARATIVO DO PERCENTUAL DE MELHORIA DOS RESULTADOS (Δ) EM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	80
TABELA 5.19 – RESULTADOS OBTIDOS PARA MALHA (3X3), (5X5), (7X7) E (10X10) PELO MC COM UMA FUNÇÃO DA TC .....	80

TABELA 5.20 – RESULTADOS OBTIDOS PARA MALHA (3X3), (5X5), (7X7) E (10X10) PELO MC COM DUAS FUNÇÕES DA TC .....	81
TABELA 5.21 – RESULTADOS OBTIDOS PARA MALHA (3X3), (5X5), (7X7) E (10X10) PELO MC COM TRÊS FUNÇÕES DA TC .....	81
TABELA 5.22 – RESULTADOS OBTIDOS PARA MALHA (3X3), (5X5), (7X7) E (10X10) PELO MC COM QUATRO FUNÇÕES DA TC .....	81
TABELA 5.23 – COMPARATIVO DO PERCENTUAL DE MELHORIA DOS RESULTADOS (Δ) EM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA .....	83
TABELA 5.24 – COMPARATIVO DO PERCENTUAL DE DEGRADAÇÃO DOS RESULTADOS (II) EM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA .....	87
TABELA 5.25 – COMPARATIVO DO PERCENTUAL DE MELHORIA DOS RESULTADOS (Δ) EM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA DADA POR SRINIVAS (1970)...	94
TABELA 5.26 – COMPARATIVO DO PERCENTUAL DE MELHORIA DOS RESULTADOS (Δ) EM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA DADA POR SRINIVAS (1970)...	96
TABELA 5.27 – FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA PARA PLACAS SIMPLESMENTE APOIADA (SS-SS).....	100
TABELA 5.28 – FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA PARA PLACAS COM DOIS LADOS SIMPLESMENTE APOIADOS E OS OUTROS DOIS, ENGASTADO E SIMPLES APOIADO (SS-FS).....	100
TABELA 5.29 – FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA PARA PLACAS COM DOIS LADOS SIMPLESMENTE APOIADOS E OS OUTROS DOIS LIVRES (SS-LL) .....	100
TABELA 5.30 – FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA PARA PLACAS COM DOIS LADOS SIMPLESMENTE APOIADOS E OS OUTROS DOIS ENGASTADOS (SS-FF)..	101
TABELA 5.31 – FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA PARA PLACAS COM DOIS LADOS SIMPLESMENTE APOIADOS E OS OUTROS DOIS, ENGASTADO E LIVRE (SS-FL) .....	101

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\nabla$	operador laplaciano
[ ]	matriz
{ }	vetor
$A$	área da placa
$\Phi$	autovetor
$b$	largura da placa
$B_c$	matriz deslocamento-deformação para os termos em cisalhamento, típica do MEF
$BC_c$	matriz deslocamento-deformação para os termos em cisalhamento, associada às parcelas da TC
$BC_f$	matriz deslocamento-deformação para os termos em flexão, associada às parcelas da TC
$B_f$	matriz deslocamento-deformação para os termos em flexão, típica do MEF
$BMC_c$	matriz deslocamento-deformação do MC, para os termos em cisalhamento
$BMC_f$	matriz deslocamento-deformação do MC, para os termos em flexão
$c$	graus de liberdade $c$ ; vetor de coordenadas $c$ da TC
$\nu$	coeficiente de Poisson
$D$	rigidez à flexão
$D_c$	relação constitutiva para o cisalhamento
$\det J$	determinante jacobiano
$D_f$	relação constitutiva para a flexão
$E$	módulo de elasticidade de Young

$F, F_0, F_0^N$	forças externas
$\lambda$	freqüência adimensionalizada; raízes da equação da freqüência
$h$	espessura da placa
$H$	matriz das funções de forma típicas do MEF
$h_i(\xi, \eta)$	funções de forma típicas do MEF para coordenadas naturais
$I$	momento de inércia; matriz identidade
$i, j, m, n$	índices
$J$	matriz jacobiana
$K$	matriz de rigidez
$k$	parâmetro de Mindlin
$K_{qq}, K_{cc}, K_{qc}, K_{cq}$	submatrizes da matriz de rigidez elementar do MC
$L_c$	operador da transformação entre as deformações de cisalhamento e deslocamentos
$L_f$	operador da transformação entre as deformações de flexão e deslocamentos
$M$	matriz massa
$m$	massa por unidade de comprimento
$N$	matriz das funções de forma do MC
$nglc$	número de graus de liberdade $c$ por elemento
$ngln$	número de graus de liberdade nodais
$NTE$	número total de elementos
$ntgl$	número total de graus de liberdade
$ntglc$	número total de graus de liberdade $c$
$ntgldr$	número total de graus de liberdade restritos
$NTN$	número total de nós
$\emptyset$	funções de forma da TC
$q$	graus de liberdade nodais, carga distribuída

$t$	tempo
$T$	energia cinética; função associada à equação diferencial de placas
$U$	energia de deformação
$U(x,y)$	campo de deslocamento que percorre a superfície média da placa
$u$	campo de deslocamento que percorre todo o corpo sólido (tridimensional)
$u_0^N, u^N$	campo de deslocamento nodal
$U_{MEF}$	deslocamento descrito pelo Método dos Elementos Finitos
$U_{TC}$	deslocamento descrito pela Teoria Clássica
$u_x, u_y, u_z$	componentes do campo de deslocamentos
$W_e$	trabalho externo
$W_i$	trabalho interno
$x, y, z$	coordenadas cartesianas
$X_m(x)$	função deslocamento na direção $x$
$Y_n(y)$	função deslocamento na direção $y$
$\ddot{u}, \ddot{u}^N$	aceleração
$\Omega$	domínio de interesse
$\beta_x, \beta_y, \alpha_x, \alpha_y$	rotação da normal à superfície média indeformada da placa
$\delta u, \delta u^N$	deslocamento virtual
$\delta W_e$	variação do trabalho virtual externo
$\delta W_i$	variação do trabalho virtual interno
$\varepsilon_c$	deformação devido ao cisalhamento
$\varepsilon_f$	deformação devido à flexão
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	componentes da deformação normal
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	componentes da deformação cisalhante
$\theta_x^{ci}, \theta_y^{ci}$	giro da secção transversal nas direções $x$ e $y$ relacionadas às

	funções da TC
$\theta_x^i, \theta_y^i$	giro da secção transversal nas direções $x$ e $y$ relacionadas as funções típicas do MEF
$\rho$	massa específica
$\sigma_c$	componentes da tensão de cisalhamento
$\sigma_f$	componentes da tensão de flexão
$\omega$	freqüência natural
$\xi, \eta$	coordenadas naturais

## RESUMO

Problemas de vibração livre podem ser resolvidos usando uma nova técnica denominada de Método Composto. Este método combina a aproximação pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) com as soluções analíticas da Teoria Clássica (TC) de placas. O campo de deslocamentos é expandido, unindo-se os valores nodais do MEF ao campo de deslocamentos obtidos pelas funções da TC. As funções da TC devem satisfazer certas condições de contorno específicas, de forma a não alterar o valor do deslocamento nodal obtido pelo MEF. Estas funções também devem ser solução da equação da freqüência.

O objetivo deste trabalho é aplicar o MC para determinar as freqüências e modos de vibrar em placas espessas de Mindlin-Reissner. A solução analítica para a vibração de placas é apresentada e a equação da freqüência é determinada. As parcelas da TC (funções  $c$ ) são adicionadas às funções de forma do MEF para elementos isoparamétricos de quatro e oito nós.

No MC, para o mesmo grau de aproximação, existem dois tipos de refinamentos:  $h$  e  $c$ . O refinamento  $h$ , semelhante ao do MEF, corresponde ao aumento do número de elementos. O refinamento  $c$  corresponde ao acréscimo do número de graus de liberdade relativos à TC, denominados graus de liberdade  $c$ .

Alguns exemplos são apresentados para mostrar a eficiência e precisão do método. Os efeitos relacionados à distorção dos elementos, também são apresentados e comparados, tanto em relação ao MEF quanto ao MC.

**Palavras-chave:** Método Composto; Freqüência Natural; Método dos Elementos Finitos; Placa Espessa.

## ABSTRACT

Free vibration problems can be solved using a new technique named Composite Element Method (CEM). This method combines the Finite Element Method (FEM) approach and analytical solutions obtained from the Classical Theory (CT) applied for plates vibration. The displacement field is expanded, merging the nodal values from FEM with the analytical functions of the classical solutions. The classical solution functions must satisfy certain specific boundary conditions in such a way that they do not change the nodal values of FEM. These functions must also be the solutions for the frequency equation.

The objective of the present work is to apply the CEM on the Reissner-Mindlin's plate model. Analytical solutions of vibration plates are reviewed and frequency equations are obtained. The  $c$ -functions are added to the shape functions of isoparametric elements, with 4 and 8 nodes of the FEM.

Examples are included to show the efficiency and accuracy of the method. In the CEM, there are two types of refinements:  $h$  and  $c$ . The first one, corresponds to the increase of the number of elements in the finite element mesh. The other one, is related to the increment of the number of analytical functions on the CEM displacement field. The effects related to the elements distortion are shown and compared using both, FEM and CEM.

**Key-words:** Composite Element Method; Natural Frequency; Finite Element Method; Thick Plate

# 1 INTRODUÇÃO

A importância do estudo de vibrações reside no fato de que a maioria das estruturas, máquinas, equipamentos e também organismos vivos são afetados por este fenômeno. Muitos sistemas, devido a características construtivas, transferem suas vibrações para o ser humano, o que pode resultar em desconforto e perda de eficiência na sua operação e, em situações extremas, podem causar seqüelas e lesões irreversíveis. No caso de equipamentos, problemas de desbalanceamento, decorrentes do projeto e/ou manutenção inadequados, podem resultar em vibrações. Neste caso, é possível que determinadas partes sofram fadiga (devido ao carregamento cíclico), ou que ocorram desgastes em mancais e outros componentes móveis. As vibrações podem também provocar ruídos que, hoje em dia, devem ser limitados a níveis prescritos em normas específicas.

O estudo de vibrações relaciona-se com o movimento oscilatório dos corpos, periodicamente repetido ou não, em relação à posição de equilíbrio, e respectivas forças associadas. Fatores como a distribuição de massa e a elasticidade dos corpos os tornam susceptíveis às implicações das vibrações.

Por estas razões, o projeto de máquinas, equipamentos e estruturas deve considerar o comportamento oscilatório dos seus componentes, uma vez que os deslocamentos e/ou deformações decorrentes podem levar à falha do sistema desenvolvido.

Uma das formas características das vibrações é quando o movimento se repete em intervalos definidos de tempo. O *período* da oscilação é o tempo decorrido para que o movimento comece a se repetir. O movimento completado em um período é um *ciclo*. A *freqüência* da oscilação é o número de ciclos que ocorrem em uma determinada unidade de tempo. A freqüência é o valor inverso do período.

As vibrações podem ser caracterizadas, conforme o comportamento, em *lineares* e *não lineares*. Esta classificação, no entanto, deriva da forma de resolução do sistema de equações, que também é classificado em linear e não linear. Na análise de sistemas lineares sujeitos a carregamentos dinâmicos arbitrários, existem vários modelos matemáticos que representam o fenômeno vibratório, assim como convenientes formas de sua solução. Contudo, haja vista a tendência do surgimento de não linearidades (material e/ou geométricas) com o incremento da amplitude de oscilação, a solução passa pela análise de sistemas não lineares (CLOUGH e PENZIEN, 1975; MEIROVITCH, 1975; CRAIG, 1981; THOMSON, 1993). A não linearidade do material também influencia no comportamento da estrutura, e deve ser, se for o caso, cuidadosamente considerada na etapa de projeto.

As vibrações também podem ser classificadas em relação às forças atuantes na estrutura. Neste caso, tem-se vibrações:

- a) *Livres*: estas ocorrem sem a atuação de carregamentos externos e desconsiderando-se o efeito do amortecimento. Uma vez iniciada uma vibração livre (ou *vibração natural*) na estrutura, esta continua a oscilar com sua *freqüência natural*. O sistema em estado de vibração livre pode oscilar em um modo tal que seja excitado por uma ou mais freqüências naturais, dependendo do número de graus de liberdade.
- b) *Forçadas*: estas são produzidas e mantidas por forças excitadoras externas ao sistema. Se a freqüência de excitação coincide com uma das freqüências naturais do sistema, apesar de serem fenômenos independentes, a amplitude resultante da combinação das oscilações é afetada pelas duas freqüências e, eventualmente, pode provocar ressonância.

Outra classificação das vibrações se dá considerando as forças resistivas, que podem ser do tipo:

- a) *Amortecidas*: quando o atrito, a resistência do ar, o amortecimento viscoso e todas as outras forças, influenciam de forma significativa na

resposta dinâmica do sistema.

b) *Sem amortecimento*: ocorre quando a ação de forças resistivas é desprezável em relação à resposta dinâmica do sistema.

Em geral, a primeira etapa para o projeto de uma estrutura sujeita às vibrações mecânicas é a determinação de suas freqüências naturais.

Uma outra análise pode levar em consideração o caso de vibrações forçadas que, de maneira geral, avalia a estrutura sob carregamento cíclico ou periódico, sendo denominada de *análise harmônica*. No caso desta análise sinalizar para freqüências próximas de uma das freqüências naturais, medidas de contingência devem ser adotadas para evitar danos e funcionamento inadequado da estrutura. O caso onde a amplitude de oscilação tende a se tornar infinita, se desprezados os efeitos dos diversos amortecimentos, é conhecido como *ressonância*. Outra análise muitas vezes realizada na verificação da resposta dinâmica dos sistema é a *transiente*. É uma técnica para se determinar a resposta de uma estrutura a um carregamento arbitrário aplicado em um certo intervalo de tempo, como por exemplo, explosões, choques, terremotos, etc.

A determinação das freqüências naturais deve ser considerada para verificar a possibilidade da ocorrência do fenômeno da ressonância, que leva a grandes deformações e falhas mecânicas. Um exemplo clássico é o da ponte de Tacoma Narrows (EUA), que colapsou quando entrou em ressonância induzida pelo vento (RAO,1995).

A definição da influência dos vários parâmetros que caracterizam as vibrações é de interesse prático nas aplicações de engenharia, fazendo com que o tema, ainda hoje, seja estudado por vários pesquisadores.

## **1.1 TÉCNICAS EMPREGADAS PARA O ESTUDO DE VIBRAÇÕES**

Devido à importância e aplicabilidade da análise de vibrações, diversos métodos de determinação de freqüências naturais foram desenvolvidos. Um dos mais importantes se baseia em métodos experimentais. Outra forma de solução é a partir da

construção de um modelo matemático, sendo que, entre as mais conhecidos, destacam-se:

- a) *Teoria Clássica (TC)*: apresenta a solução para a equação diferencial que rege o problema. Em geral, a solução para esta categoria de equações é obtida através de séries. A limitação desta abordagem diz respeito a dificuldade e a complexidade de se obter solução para condições de contorno diversas, (LI, CAO e LI, 1994a e 1996; LOW, 1993, 1997 e 1998; SRINIVAS, 1970; LEISSA, 1973).
- b) *Método dos Elementos Finitos (MEF)*: técnica de solução aproximada onde, através de uma discretização do domínio em termos de nós e elementos, se pode fazer uma análise apurada do comportamento vibratório. É, hoje em dia, uma das principais ferramentas empregadas em análise estrutural (CRAIG, 1981; ZIENKIEWICZ, 1977; SINGH e SMITH, 1994; CHOPRA, 1995; BATHE, 1996; MACKERLE, 1999 e 2000).
- c) *Método das Tiras Finitas (MTF)*: constitui-se de um método “semi-analítico”, onde o domínio é dividido em um número finito de tiras e a solução é obtida pela sobreposição dos efeitos das mesmas. É um método vantajoso pela facilidade de entrada de dados e baixo custo computacional. Suas desvantagens estão associadas aos problemas de condições de contorno aos quais a placa está sujeita (SHEIKH e MUKHOPADHYAY, 1993; CHEUNG e KONG, 1995a e 1995b; HINTON, ÖZAKÇA e RAO, 1995; KONG e CHEUNG, 1995; AU e CHEUNG, 1996a e 1996b; ZHONG, CHEUNG e LI, 1998; CHEUNG, AU e ZHENG, 2000; FRIEDRICH, 2000).
- d) *Método dos Elementos de Contorno (MEC)*: técnica de solução aproximada onde, através de uma discretização do contorno em termos de nós e elementos, se pode fazer uma análise apurada de problemas estruturais estáticos e dinâmicos. Apresenta-se também, como uma alternativa para solucionar com precisão problemas que envolvem concentração de tensão ou

onde o domínio se estende para o infinito. Uma das vantagens em relação ao MEF é que a dimensão do problema diminui uma vez. Por exemplo: se o domínio é tridimensional, na análise pelo MEC o domínio do problema é dado por uma superfície. Sua desvantagem é a dificuldade na determinação da solução fundamental para certos problemas, e também em relação ao custo computacional, pois, embora as matrizes sejam menores, elas são cheias e as técnicas de manipulação e armazenamento consagrados no MEF não se aplicam (BREBBIA e NARDINI, 1983; PROVIDAKIS e BESKOS, 1986; BURCZYNSKI, KUHN, ANTES e NOWAKOWSKI, 1997; DAVÍ e MILAZZO, 1997; TANAKA, MATSUMOTO e SHIOZAKI, 1998).

e) *Análise Estocástica*: utilizada para avaliar a confiabilidade das estruturas. Este método probabilístico trata o comportamento do material, a geometria e os carregamentos como variáveis randômicas (VANMARCKE e GRIGORIU, 1983; LEI e QIU, 1998a e 1998b; LI, FANG e LIU, 1999; GRIGORIU, 2000).

f) *Outros métodos*: também utilizam-se outros métodos que empregam uma discretização mista, de domínio e de contorno, e também métodos que não utilizam malhas (“*meshless*”). O Método das Nuvens proposto por Duarte e Oden (1995) discretiza o modelo (domínio arbitrário) apenas por uma nuvem esparsa de nós. Já os métodos mistos são aqueles que combinam o MEF e o MEC, potencializando as vantagens de cada uma das abordagens. Um exemplo é o Método da Função de Green Local Modificado (MMFGL), utilizado por FILIPPIN (1992) para analisar problemas de vibrações em membranas e cavidades.

Problemas simples, onde se conhece a solução exata, podem ser resolvidos pela TC. Na maioria das vezes, onde as condições de contorno e a geometria apresentam complexidades há a necessidade de utilização de métodos aproximados.

A busca por técnicas que obtenham maior precisão do que as atuais, oferece

uma oportunidade de investigação na determinação de freqüências naturais em estruturas. No caso das placas, o desafio é obter um método eficiente que consiga resolver o problema para quaisquer geometria e condições de contorno, com o mínimo de custo computacional.

## 1.2 OBJETIVO GERAL

O objetivo da presente investigação é desenvolver uma nova abordagem para a resolução de problemas de *vibrações livres* em placas *espessas*, utilizando uma formulação *híbrida*, obtida com o emprego da *TC* e do *MEF*. Esta abordagem é baseada no Método Composto (MC), que foi proposto por ZENG (1998a, 1998b, 1998c), para análise de vibrações em estruturas.

Para a determinação dos resultados, uma implementação numérica e computacional foi realizada. Para validar a proposta e analisar os resultados obtidos, serão comparados exemplos com os apresentados na literatura.

## 1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Pode-se estabelecer como objetivos específicos:

- Determinar um maior número de modos de vibrar que os fornecidos pelo MEF, para uma mesma discretização;
- Determinar as freqüências naturais de vibração com maior precisão;
- Comparar o custo computacional;
- Desenvolver elementos finitos do MC para placas espessas.

## 1.4 ESCOPO DO TRABALHO

A proposta refere-se à solução do problema de vibrações livres, aplicada às placas espessas pela Teoria de Mindlin/Reissner, utilizando o Método Composto (MC).

Para possibilitar o uso do MC, são implementados dois elementos quadrilaterais isoparamétricos, um de quatro nós e outro de oito nós. A validação é feita com exemplos da TC e MEF.

## 1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

No Capítulo 2 é apresentada uma descrição detalhada do problema, mostrando a teoria de flexão e de vibrações em placas. Em seguida, são analisados os trabalhos mais relevantes desenvolvidos para o problema de vibrações em placas. São também discutidas algumas vantagens e desvantagens das formas atuais de solução do problema.

A descrição do Método Composto (MC) e o desenvolvimento dos elementos de placa de quatro e oito nós são apresentados no Capítulo 3, incluindo a descrição da potencialidade do método.

O Capítulo 4 contém o modelo proposto para emprego do MC como meio de resolução de problemas de vibrações livres em placas espessas. Os procedimentos de implementação numérica e computacional são apresentados, assim como suas características.

Uma descrição detalhada das aplicações e resultados obtidos é feita no Capítulo 5. A análise de resultados, em termos globais e específicos, se dá através de técnicas comparativas com outros métodos de solução.

As conclusões sobre a utilização do MC na análise dinâmica de placas são descritas no Capítulo 6. Também, apresentam-se sugestões para continuidade do trabalho e aprimoramentos do método estudado.

## 2 ESTUDO DE VIBRAÇÕES EM PLACAS

Neste capítulo é apresentada uma revisão teórica sobre os métodos de solução para vibrações livres em placas espessas, os problemas mais freqüentes e a forma de solução para sua implementação. Apresenta-se também uma descrição dos trabalhos mais relevantes para a análise de vibrações livres em placas.

### 2.1 INTRODUÇÃO

A obtenção da solução para o problema de vibrações de placas espessas passa pelo conhecimento de como ocorrem as deformações e as tensões decorrentes da aplicação dos carregamentos e condições de contorno envolvidas.

As placas podem ter contornos livres, simplesmente apoiados e fixos, ou ainda, em alguns casos, apresentar pontos de apoio. Em muitos casos, estas condições de contorno são mistas, o que dificulta ou impossibilita a obtenção da solução analítica (solução matemática fechada) para o problema. Os carregamentos estáticos e dinâmicos em placas são predominantemente perpendiculares à superfície da placa.

Pela teoria da elasticidade, quando um corpo sólido está submetido à forças externas, ele se deforma, produzindo tensões internas. A deformação é influenciada pela configuração geométrica do corpo e pelas propriedades mecânicas do material.

Assume-se a relação tensão-deformação como sendo linear e as propriedades do material isotrópicas.

Nas próximas seções as equações relacionadas à cinemática de deformação das placas e as relacionadas ao fenômeno vibratório são apresentadas.

## 2.2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.2.1 Cinemática da Deformação de Placas

Uma placa é um corpo sólido, limitado por duas superfícies planas paralelas, cujas dimensões laterais (largura e comprimento para placa retangular ou diâmetro em uma placa circular) são muito maiores que a distância entre as duas superfícies paralelas (espessura da placa) e, normalmente, as cargas atuantes são perpendiculares à superfície média, REDDY (1984).

O domínio de interesse  $\Omega$  é denotado por (HUGHES, 1987)

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \left[ -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right], (x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (2.1)$$

onde  $h$  é a espessura da placa e  $A$  é a área da placa.

As duas teorias mais difundidas e aplicadas para a análise de flexão em placas conforme COOK (1988), são:

#### a) Teoria de Kirchhoff-Love

Esta adota as seguintes hipóteses, REDDY (1984):

- A existência de um plano neutro, onde a placa não sofre alongamentos nem encurtamentos;
- Fibras normais a superfície média são inextensíveis;
- Seções planas e perpendiculares à superfície média, se mantém planas e perpendiculares à superfície média, após a flexão;
- Os deslocamentos da superfície média são pequenos quando comparados à espessura da placa;

#### b) Teoria de Mindlin-Reissner

Aqui são introduzidas as deformações cisalhantes transversais quando do carregamento da placa. Desta forma, pode-se aplicar as hipóteses simplificadoras de Kirchhoff-Love, mas com a seguinte diferença:

- As normais à superfície de referência indeformada da placa permanecem retas, mas não necessariamente normais à superfície de referência.

No regime linear, as relações deformações-deslocamentos podem ser escritas como

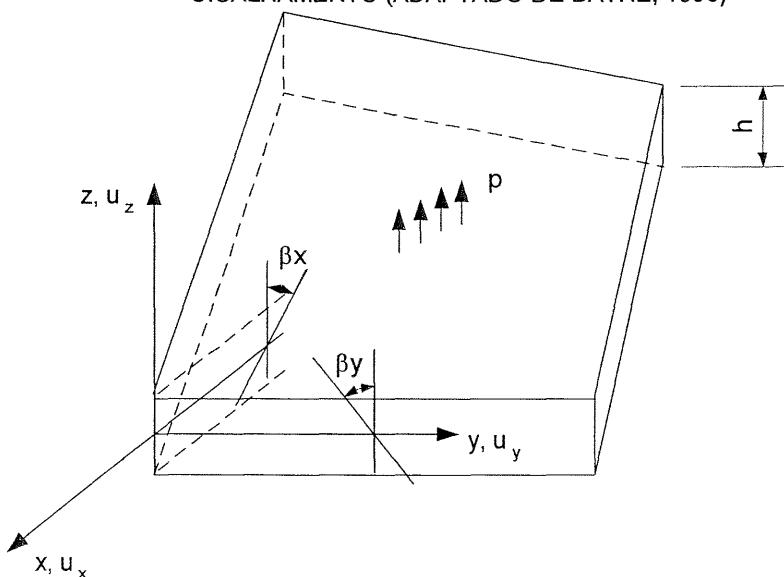
$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} .\end{aligned}\quad (2.2)$$

Uma vez que  $\partial u_z / \partial z = 0$ , têm-se que  $u_z = u_z(x, y)$ .

Para o giro das seções utilizam-se  $\beta_x$  e  $\beta_y$ , conforme pode ser observado na Figura 2.1. Cabe salientar que nesta notação a rotação  $\beta_x$  positiva tem um vetor axial no sentido contrário ao do eixo  $y$ . Para a rotação  $\beta_y$  o mesmo não ocorre sendo, portanto, a direção do vetor axial coincidente com a direção do eixo  $x$ .

Na Figura 2.1 pode-se observar as variáveis adotadas para a análise de placas quando sujeitas à deformações de cisalhamento.

FIGURA 2.1 – DEFORMAÇÃO NA ANÁLISE DE PLACA INCLUINDO AS DEFORMAÇÕES DE CISALHAMENTO (ADAPTADO DE BATHE, 1996)



As componentes do deslocamento de um ponto de coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  são dadas por

$$\{u(x, y, z)\} = \begin{Bmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\beta_x(x, y) \\ -z\beta_y(x, y) \\ u_z(x, y) \end{Bmatrix}, \quad (2.3)$$

onde  $\{u\}$  é o vetor deslocamento,  $\beta_x$  e  $\beta_y$  são as rotações da normal à superfície média da placa indeformada e  $u_z$  é o deslocamento transversal.

Utilizando a representação matricial e considerando que as deformações de flexão da placa variam linearmente ao longo de sua espessura, pode-se calcular o valor das deformações em qualquer ponto da placa, para uma dada curvatura, através de

$$\{\varepsilon_f\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (2.4)$$

Assumindo que as deformações de cisalhamento são constantes ao longo da espessura da placa, tem-se que

$$\{\varepsilon_c\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial x} - \beta_x \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} - \beta_y \end{Bmatrix}. \quad (2.5)$$

Para um material isotrópico, a relação constitutiva elástica é dada por

$$\{\sigma_f\} = [D_f] \{\varepsilon_f\} \quad (2.6)$$

$$\{\sigma_f\} = [D_f]\{\varepsilon_f\}, \quad (2.7)$$

onde  $\{\sigma_f\}$  são as componentes do tensor de tensões devidas à flexão,  $\{\sigma_c\}$  são as componentes do tensor de tensões devidas ao cisalhamento,  $[D_f]$  é a matriz constitutiva em relação à flexão,  $[D_c]$  é a matriz constitutiva em relação ao cisalhamento,  $\{\varepsilon_f\}$  são as componentes da deformação devidas à flexão e  $\{\varepsilon_c\}$  são as componentes da deformação devidas ao cisalhamento. Assim, tem-se que

$$[D_f] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$[D_c] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Na próxima seção, discute-se a aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais para a determinação da equação de movimento da placas, possibilitando assim, a obtenção de autovalores e autovetores que, no problema físico, representam respectivamente, as freqüências e os modos de vibrar.

### 2.2.2 Teoria de Vibrações Aplicada ao Problema de Placas

Admita uma estrutura sujeita a ação de forças externas e sob equilíbrio dinâmico. Assim

$$W_i = W_e, \quad (2.10)$$

onde  $W_i$  é o trabalho interno e  $W_e$  é o trabalho externo.

O trabalho externo é produzido pelas forças externas e o trabalho interno pela energia de deformação acrescido da energia cinética. Pode-se escrever o trabalho interno como sendo

$$W_i = U + T , \quad (2.11)$$

onde  $W_i$  é trabalho interno,  $U$  é a energia de deformação e  $T$  é a energia cinética.

A energia potencial é dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon_f\}^T [D_f] \{\varepsilon_f\} dV + \frac{1}{2} \int_V \{\sigma_c\}^T \{\varepsilon_c\} dV . \quad (2.12)$$

A energia cinética é dada por

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(\dot{u})^2 dV , \quad (2.13)$$

onde  $\dot{u}$  é a velocidade associada ao campo de deslocamentos e  $\rho$  é a densidade de massa por volume.

Considere-se agora, nesta mesma estrutura, um campo de deslocamentos virtuais a partir da configuração de equilíbrio. Então, durante o processo de deformação virtual, cada elemento infinitesimal da estrutura se deforma, e os esforços internos e externos que agem diretamente sobre ela realizam um trabalho virtual. Assim, pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, o trabalho realizado pelas forças externas, quando se dá a uma estrutura deformável em equilíbrio um deslocamento virtual, é igual ao realizado pelas forças internas, isto é

$$\delta W_i = \delta W_e \quad \forall \delta u , \quad (2.14)$$

onde  $\delta W_i$  é a variação trabalho virtual interno,  $\delta W_e$  é a variação trabalho virtual externo e  $\delta u$  é o deslocamento virtual.

O trabalho virtual externo é obtido a partir do produto das forças externas

pelos deslocamentos virtuais.

O trabalho virtual interno é obtido a partir das tensões e deformações que ocorrem nos elementos sujeitos ao deslocamento virtual.

Reescrevendo as equações em função do deslocamento virtual e substituindo convenientemente nas integrais as simplificações utilizadas para o problema de vibrações em placas, tem-se

$$\begin{aligned} & \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_f\}^T \{\delta\varepsilon_f\} dz dA + k \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_c\}^T \{\delta\varepsilon_c\} dz dA + \\ & + \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\}^T \{\delta u\} dz dA = \int_A \{F\}^T \{\delta u\} dA , \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde  $\sigma$  e  $\varepsilon$  são as tensões e deformações, respectivamente,  $u$  é o vetor deslocamento,  $\delta u$  é uma pequena variação no vetor  $u$ ,  $t$  é o tempo,  $F$  é o vetor de forças externas e  $k$  é a constante de Mindlin (melhor detalhada no próximo capítulo).

Considerando a Equação (2.15), onde o deslocamento virtual é arbitrário e desconhecido, tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \{u\}^T [L_f]^T [D_f] [L_f] \{\delta u\} dz dA + k \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \{u\}^T [L_c]^T [D_c] [L_c] \{\delta u\} dz dA \\ & + \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\}^T \{\delta u\} dz dA = \int_A \{F\}^T \{\delta u\} dA , \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde  $[D_f]$  e  $[D_c]$  são as matrizes das relações constitutivas,  $[L_f]$  é o operador da transformação entre as deformações de flexão e deslocamentos e  $[L_c]$  é o operador da transformação entre as deformações de cisalhamento e deslocamentos.

Os dois primeiros termos da Equação (2.15) são associados à rigidez da placa e o terceiro termo à sua massa.

A Equação (2.16) vale para o problema contínuo. Neste trabalho, a forma de

solução é aproximada através de funções de interpolação e apresentada em termos de solução nodal. Assim, pretende-se substituir o campo de deslocamentos contínuo por um campo de deslocamentos discreto. Para tanto, propõe-se a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned}\{u\} &\cong [H] \{u^N\} \\ \{\delta u\} &\cong [H] \{\delta u^N\} \\ \{\ddot{u}\} &\cong [H] \{\ddot{u}^N\} ,\end{aligned}\tag{2.17}$$

onde  $u^N$  é o vetor de deslocamentos nodal,  $\delta u^N$  é vetor de deslocamentos virtuais nodais e  $\ddot{u}^N$  o vetor de acelerações nodais.

Levando a Equação (2.17) em (2.16) e destacando as matrizes de massa e rigidez anteriormente mencionadas, tem-se

$$\{u^N\}^T [K] \{\delta u^N\} + \{\ddot{u}^N\}^T [M] \{\delta u^N\} = \{F^N\}^T \{\delta u^N\},\tag{2.18}$$

onde  $F^N$  é o vetor de forças nodais aplicadas.

Como a Equação (2.18) deve ser satisfeita para qualquer que seja o deslocamento virtual cinematicamente admissível, esta pode ser reescrever após a transposição de todos os termos, como

$$[K] \{u^N\} + [M] \{\ddot{u}^N\} = \{F^N\}.\tag{2.19}$$

Nota-se que isso foi possível porque  $K$  e  $M$  são simétricas.

A Equação (2.19) representa a forma discreta da equação diferencial de equilíbrio dinâmico de estrutura sob carregamento  $F$ .

Se este termo é nulo ( $F=0$ ), conforme BOYCE e DIPRIMA (1997), tem-se uma equação diferencial homogênea cuja solução é de forma periódica de freqüência  $\omega$ , a ser determinada. Assim, pode-se escrever a solução da mesma como

$$\{u^N\} = \{u_0^N\} e^{j\omega t} \quad \text{onde, } j = \sqrt{-1}.\tag{2.20}$$

Neste caso, diferenciando-se duas vezes tem-se

$$\{ \ddot{u}^N \} = -\omega^2 \{ u_0^N \} e^{j\omega t}. \quad (2.21)$$

Substituindo-se as Equações (2.20) e (2.21) na Equação (2.19) e, considerando  $F=0$ , tem-se

$$[K] \{ u_0^N \} e^{j\omega t} - \omega^2 [M] \{ u_0^N \} e^{j\omega t} = 0 \quad (2.22)$$

Simplificando convenientemente a Equação (2.22) e lembrando que  $e^{j\omega t}$  é sempre positivo, tem-se

$$([K] - \omega^2 [M]) \{ u_0^N \} = 0. \quad (2.23)$$

Assim, o problema a ser resolvido, envolve a obtenção dos autovalores e autovetores que representam, respectivamente, a freqüência natural de vibração e os modos de vibrar da placa. Logo, a solução da Equação (2.23), pode ser obtida através do problema padrão de autovalores e autovetores.

$$K\Phi = \lambda M\Phi \quad (2.24)$$

Onde  $M$  e  $K$  são, respectivamente, as matrizes de massa e de rigidez,  $\lambda$  representa os autovalores e  $\Phi$  os autovetores.

## 2.3 ABORDAGENS PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE VIBRAÇÕES EM PLACAS

Nas próximas seções apresentam-se algumas das abordagens mais utilizadas para a solução do problema de vibrações em placas.

### 2.3.1 Estudos Iniciais – Aplicação às Placas Finas

Segundo SZILARD (1974), o primeiro matemático a estudar o problema de vibrações livres em placas foi Euler em 1766, e Lagrange foi o primeiro a obter sua correta equação diferencial. Navier foi o primeiro a obter corretamente a equação diferencial de placas retangulares com rigidez flexural. Para certos problemas de valores de contorno ele introduziu um método *exato*, o qual transforma a equação diferencial em um sistema algébrico. O Método de Navier é baseado na solução forte da equação diferencial, utilizando as funções das séries trigonométricas de Fourier. O Método de Levy também se utiliza de séries de Fourier, mas com sua utilização restrita ao caso onde dois lados opostos da placa são simplesmente apoiados.

Ainda conforme Szilard, Kirchhoff foi o responsável pela descoberta da equação da freqüência das placas e introduziu o Método do Deslocamento Virtual na solução dos problemas vibrações em placas.

Conforme LIEW (1995), em 1877 Rayleigh apresentou um método genérico para a solução de vibrações livres de estruturas. Ritz apresentou em 1909 uma nova abordagem do método de Rayleigh, que ficou conhecida como Método de Rayleigh-Ritz, cujo procedimento consiste em introduzir na solução um certo grupo de funções linearmente independentes conhecidas, e assim, obter a solução através da determinação dos seus coeficientes. A versatilidade desta ferramenta (procedimento) fez com que se transformasse em uma das mais utilizadas atualmente.

Um dos problemas para a obtenção da solução analítica relacionados com vibrações em placas, diz respeito às condições de contorno a que elas estão sujeitas. Também, neste sentido, a maior parte das investigações apresenta solução para placas finas, onde os efeitos das deformações de cisalhamento são negligenciados, destacando-se o trabalho de LEISSA (1973).

### 2.3.2 Estudo de Placas Espessas

Atualmente, os problemas de placas espessas são preferencialmente tratados pela teoria de Mindlin-Reissner, conforme HUGHES (1987), permitindo assim a consideração das deformações cisalhantes transversais. Em placas espessas o cisalhamento tem efeito significativo nos resultados das análises estruturais estáticas e dinâmicas.

Os estudos mais relevantes sobre o efeito do cisalhamento são os trabalhos de Timoshenko e Mindlin. O primeiro apresentou a teoria de vibração de vigas espessas com efeito da inércia rotacional e da deformação de cisalhamento. Já Mindlin formulou teoria similar à de Timoshenko para vibração de placas espessas.

Na abordagem dada pelo modelo de placas de Mindlin-Reissner, SRINIVAS (1970) utilizou uma teoria exata aplicada ao caso de placas tri-dimensionais para estudar a vibração em placas retangulares, espessas, homogêneas e laminadas. Os valores obtidos no trabalho de SRINIVAS (1970) têm sido utilizados por vários pesquisadores como referência para o estudo de vibrações livres.

As primeiras tentativas de simular o comportamento de placas espessas, através do MEF, foram realizadas utilizando formulação baseada nas hipóteses de Kirchhoff-Love. No entanto, pelas limitações da formulação utilizada, desenvolveu-se um elemento finito degenerado, baseado na teoria de Mindlin-Reissner, no qual as equações são expressas em termos de variáveis nodais na superfície média da placa. Os resultados deste elemento obtidos com integração completa não foram satisfatórios quando aplicados a modelos de placas finas, pois o modelo resultante era excessivamente rígido em termos de deformações, originando o problema de travamento (*locking*) (HUANG e HINTON, 1986).

O método utilizado para resolver o problema de travamento nestes elementos é a subintegração, que consiste em utilizar a regra da integração de Gauss uma ordem abaixo da necessária para integrar exatamente as matrizes de rigidez elementares, conforme ZIENKIEWICZ (1971). Contudo, esta solução ainda não resolve todos os

problemas, pois a subintegração de todas as matrizes resulta no surgimento de “modos espúrios”. Assim, desenvolveu-se o Método da Subintegração Seletiva (ZIENKIEWICZ, 1971), que consiste em subintegrar apenas a parcela da matriz de rigidez correspondente aos termos de cisalhamento.

Para a solução do problema do cisalhamento, outras teorias têm sido propostas, como por exemplo, a Teoria de Ordem Superior de REDDY (1984). Na teoria de ordem superior o campo de deslocamentos é expandido para a coordenada da espessura. Conforme LIEW (1995), na análise de vibrações de placas moderadamente espessas, a Teoria de Mindlin-Reissner produz bons resultados. Deve-se observar que, mais recentemente, quando se trabalha com análise de tensões, placas ortotrópicas ou compostas, o uso de teorias de ordem superior oferece melhores resultados do que aqueles produzidos com a Teoria de Mindlin-Reissner.

ROCK e HINTON (1976), utilizando a Teoria de Mindlin-Reissner, introduziu o elemento quadrilateral isoparamétrico para análise de vibrações livres de placas espessas e finas.

Outros métodos de solução para vibrações livres em placas que consideram condições de contorno variadas, foram obtidos. Como por exemplo, MIKAMI (1984) estudou a aplicação do Método da Colocação para determinar a vibração de placas retangulares de Mindlin.

DAWE (1978), também estudando placas de Mindlin com condições de contorno variadas, aplicou o Método das Tiras Finitas. MIZUSAWA (1993) aplicou o Método das Tiras com *Splines* para estudar a vibração livre de placas. CHEN e YANG (1988) aplicou o MEF produzindo também resultados para a análise de vibrações livres em placas laminadas e considerando deformações cisalhantes.

Na próxima seção, apresenta-se a idealização de uma nova proposta para a solução do problema de vibrações livres em placas.

## 2.4 MÉTODO COMPOSTO

O Método Composto (MC) é uma nova variação do Método dos Elementos Finitos (MEF), proposta por ZENG (1998a, 1998b e 1998c) para análise de vibrações em estruturas. Este método combina o MEF convencional com a TC, e apresenta dois tipos de refinamentos :

- a) Refinamento  $h$  : é semelhante a abordagem de análise no MEF, onde utiliza-se uma seqüência de malhas com o mesmo tipo de elemento e o tamanho deste diminui uniformemente.
- b) Refinamento  $c$ : corresponde ao aumento do número de funções de interpolação, através da inclusão de novos termos da série correspondentes à solução da TC.

Nesta linha de investigação foram desenvolvidos elementos de barra (ZENG, 1998a) e de viga (ZENG, 1998b). Segundo ARNDT (2001), os resultados de exemplos numéricos mostraram que o MC é mais preciso que o MEF, com o mesmo número de graus de liberdade, na análise de vibrações livres.

SHI e ZENG (2000) desenvolveram o elemento composto para vibração de placa fina elástica.

Outros métodos com concepções semelhantes para a solução do problema de vibrações também foram propostos. O Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH) foi aplicado por BARDELL (1991) para vibrações em placas. HOUWAT (1997) desenvolveu uma variante do MEFH para vibrações em placas na qual funções de formas trigonométricas hierárquica são compostas com funções de forma polinomiais, sendo que, os exemplos numéricos testados, apresentaram resultados de superconvergência com o aumento do números de funções hierárquicas.

Recentemente outros pesquisadores têm trabalhado nesta abordagem dos métodos hierárquicos, como por exemplo, CÔTÉ (2001), que apresenta uma discussão sobre a seleção de funções de forma para a versão- $p$  utilizadas no MEF para a solução do problema de vibrações em placas.

### **3 FORMULAÇÃO DO MÉTODO COMPOSTO**

Neste capítulo é apresentada a introdução teórica que associa o MEF às funções da TC, dando assim origem ao Método Composto. Faz-se uma análise do modelo de deslocamentos aplicado ao MC. Apresenta-se, também, a base da formulação do MC e, sendo o MEF intrínseco ao MC, sua formulação também é descrita. Na parte final do capítulo, discute-se sobre a solução da equação diferencial aplicada à vibrações e define-se quais são as funções da teoria clássica aplicáveis ao desenvolvimento do MC para placas espessas.

#### **3.1 MODELO DE DESLOCAMENTOS APLICADO AO MÉTODO COMPOSTO**

O Método Composto (MC) é uma nova variação do Método dos Elementos Finitos (MEF), proposta por ZENG (1998a, 1998b, 1998c), para análise de vibrações em estruturas.

O MC se comporta, sob vários aspectos, de modo semelhante ao MEF, como por exemplo no processo de solução, na precisão, eficiência, entre outros. O MC incorpora parte da solução obtida da teoria clássica, objetivando atingir alta precisão e convergência para problemas com geometria e condições de contorno complexas. Cabe ressaltar que a utilização de um sistema de coordenadas apropriado é a base para a descrição adequada do campo de deslocamentos em cada um dos elementos (SHI e ZENG, 2000).

Para se obter a implementação da formulação do MC, utiliza-se o procedimento que envolve as seguintes etapas:

- Superpor as soluções da TC à técnica convencional do MEF, possibilitando o uso de parte da série da solução analítica para enriquecer a solução do

MEF;

- Definir dois sistemas de coordenadas para descrever o campo de deslocamentos, sendo um com os graus de liberdade nodais utilizado no MEF, e outro, local, com os graus de liberdade utilizado pela parcela da TC;
- Utilizar funções da TC que atendam determinadas condições de contorno para serem superpostas ao MEF, possibilitando assim transferir os resultados obtidos pela parcela da TC para valores nodais sem afetar a solução proveniente do MEF.

Para descrever o campo de deslocamentos será utilizada uma combinação linear das funções de interpolação do MEF, com as funções que fazem parte da série da solução analítica da TC. Portanto, o campo de deslocamentos no MC é descrito por

$$U(x, y) = U_{MEF}(x, y) + U_{TC}(x, y), \quad (3.1)$$

onde  $U_{MEF}$  é o campo de deslocamentos usual do MEF e  $U_{TC}$  é o campo de deslocamentos interno ao elemento (associado à TC), baseado no sistema de coordenadas nodais;  $(x, y)$  é a coordenada local do elemento que percorre a superfície média do elemento.

O sistema de coordenadas nodais do MEF descreve o campo de deslocamentos  $U_{MEF}$ , através dos deslocamentos dos nós do elemento, ou seja

$$U_{MEF}(x, y) = H^T(x, y)q, \quad (3.2)$$

onde  $H$  é a matriz das funções de forma e  $q$  é o vetor de deslocamentos nodais (ou graus de liberdade nodais).

O campo de deslocamentos  $U_{TC}$  é descrito através de coeficientes da série de funções obtidas pela TC, sendo dado por

$$U_{TC}(x, y) = \emptyset^T(x, y)c, \quad (3.3)$$

onde  $\emptyset$  é a matriz com a série de funções analíticas da TC e  $c$  é o vetor de coeficientes

que definem os graus de liberdade  $c$  (coordenadas  $c$ ).

Na próxima seção mostra-se o desenvolvimento do MC para placas apresentando-se a forma de superposição do MEF às parcelas da TC.

## 3.2 DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO COMPOSTO

### 3.2.1 Superposição das Funções do Método dos Elementos Finitos às Funções da Teoria Clássica

Com base nas seções anteriores e considerações feitas, o campo de deslocamentos, dado na Equação (3.1), pode ser descrito por

$$\{U\} = [H]^T \{q\} + [\phi]^T \{c\}, \quad (3.4)$$

onde  $[H]$  é a matriz com as funções de interpolação para os graus de liberdade  $q$  e  $[\phi]$  é a matriz com as funções de interpolação da TC para os graus de liberdade  $c$ .

Neste caso, o primeiro termo é avaliado de maneira semelhante ao MEF, utilizando os mesmos valores para as matrizes de rigidez e de massa. Cabe agora examinar os termos que contribuem para a parcela associada aos graus de liberdade  $c$ .

Para entendimento da superposição proposta pelo MC (parcelas semelhantes ao MEF enriquecidas de parcelas da TC), considera-se a primeira integral da Equação (3.5) relativa ao caso dos termos à flexão da matriz de rigidez, mostrado na Equação (2.16) e que aqui será repetida para facilidade de compreensão:

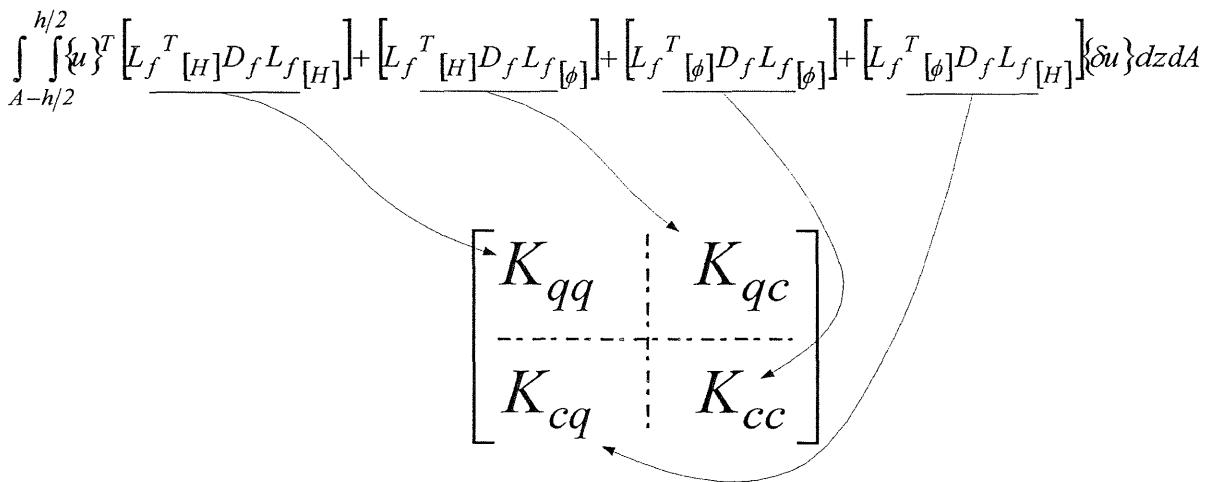
$$\begin{aligned} & \int_{A-h/2}^{h/2} \int \{u\}^T [L_f]^T [D_f] [L_f] \{\delta u\} dz dA + k \int_{A-h/2}^{h/2} \int \{u\}^T [L_c]^T [D_c] [L_c] \{\delta u\} dz dA \\ & + \int_{A-h/2}^{h/2} \int \rho \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\}^T \{\delta u\} dz dA = \int_A \{F\}^T \{\delta u\} dA \end{aligned} \quad (3.5)$$

O campo de deslocamentos, dado pela Equação (3.4), é substituído no primeiro termo da Equação (3.5), permitindo o cálculo da matriz de rigidez associada aos termos em flexão da placa. Nota-se que existem termos relacionados apenas aos termos semelhantes ao MEF, dados pelo conjunto  $K_{qq}$ , termos relacionados apenas as parcelas da TC, dados por  $K_{cc}$ , e termos da superposição das duas abordagens dados pelos conjuntos  $K_{qc}$  e  $K_{cq}$ . O índice  $q$  está associado aos graus de liberdade nodais e o índice  $c$  aos graus de liberdade  $c$ .

Então, substituindo-se o campo de deslocamento na parcela da matriz de rigidez associada aos termos em flexão, tem-se

$$\begin{aligned}
 & \int_{A-h/2}^{h/2} \{U\}^T [L_f]^T [D_f] [L_f] \{\delta U\} dz dA = \int_{A-h/2}^{h/2} \{U\}^T [L_f([H] \cup [\phi])]^T [D_f] [L_f([H] \cup [\phi])] \{\delta U\} dz dA = \\
 &= \int_{A-h/2}^{h/2} \{U\}^T [L_f([H] \cup [\phi])]^T ([D_f L_f[H]] + [D_f L_f[\phi]]) \{\delta U\} dz dA \\
 &= \int_{A-h/2}^{h/2} \{U\}^T [L_f^T[H] D_f L_f[H]] + [L_f^T[H] D_f L_f[\phi]] + [L_f^T[\phi] D_f L_f[\phi]] + [L_f^T[\phi] D_f L_f[H]] \{\delta U\} dz dA
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

FIGURA 3.1 – MAPEAMENTO DOS TERMOS DA EQUAÇÃO DA RIGIDEZ À FLEXÃO PARA O SISTEMA MATEMATICO NO MC



$K_{qq}$  = Matriz de rigidez dos termos associados à flexão semelhantes ao MEF

$K_{cc}$  = Matriz de rigidez dos termos associados à flexão da TC

$K_{qc}$  = Matriz com termos cruzados

$K_{cq}$  = Matriz  $K_{qc}$  transposta

$L_f$  = Operador da transf. Deformação de flexão x Deslocamentos

$D_f$  = Matriz das relações constitutivas para os termos em flexão

A Figura 3.1 ilustra como a montagem da matriz de rigidez para os termos associados à flexão é mapeado para o sistema matricial.

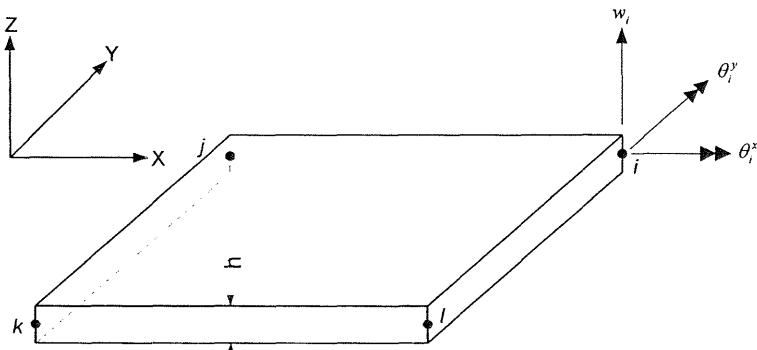
Na próxima seção apresenta-se a abordagem tradicional para o MEF onde, definem-se o processo de interpolação e a constituição da matriz de rigidez e matriz massa.

### 3.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADOS À PLACAS

Sendo a formulação do MC baseada no MEF e enriquecida com funções da TC, a discretização do MC baseia-se em elementos finitos conhecidos. Por esta razão, neste trabalho, apresenta-se a formulação que abrange dois elementos para a implementação computacional, o elemento isoparamétrico quadrilateral de quatro nós e o elemento isoparamétrico quadrilateral de oito nós.

A Figura 3.2 contém a representação dos valores nodais de deslocamento de um elemento de placa de quatro nós, considerando o plano médio da placa e a espessura constante.

FIGURA 3.2 – DESLOCAMENTOS NODAIS PARA O ELEMENTO DE QUATRO NÓS



#### 3.3.1 Formulação do Elemento Isoparamétrico Aplicado às Placas

Um sistema de coordenadas naturais colocado no centro do elemento, estabelece uma correspondência direta entre os elementos das matrizes e os graus de

liberdade que representam o campo de deslocamentos, consistindo na idéia central desta formulação. Isto possibilita, para o caso do elemento retangular aplicado às placas, utilizar funções lineares na direção de cada uma das coordenadas. Desse modo, o sistema de coordenadas a ser criado deve ser tal que permita mapear os elementos do sistema de coordenadas genérico para o sistema de coordenadas naturais e vice-versa. Este mapeamento pode ser visto na Figura 3.3.

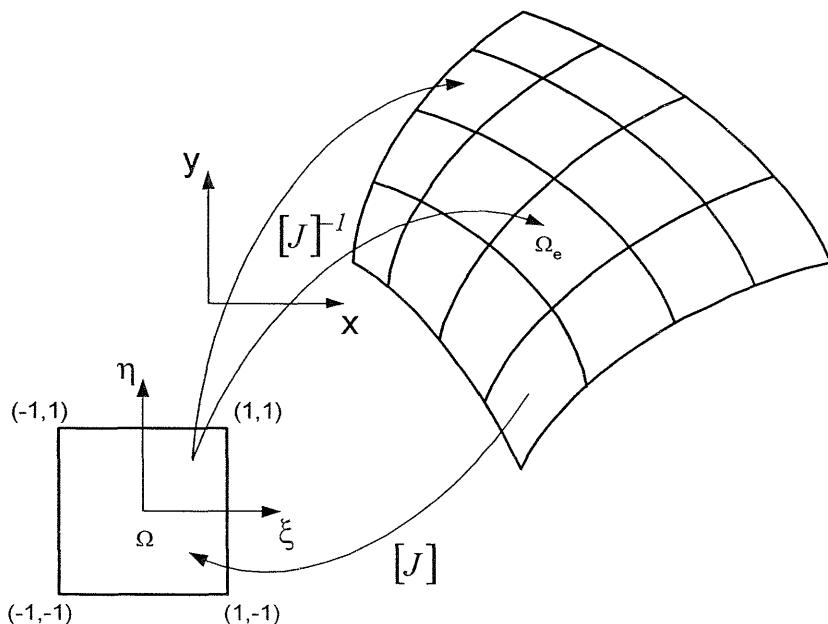
As coordenadas genéricas podem ser interpoladas da seguinte forma

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n x_i h_i(\xi, \eta) \\ y &= \sum_{i=1}^n y_i h_i(\xi, \eta) \end{aligned} \right\}, \quad (3.7)$$

onde  $h_i$  são as funções de forma dadas por BATHE (1996), ODEN (1981), e sendo  $\xi$  e  $\eta$  as coordenadas locais do elemento, ambas variando de  $-1$  a  $+1$ .

O número de funções de forma  $n$  é igual ao número de nós utilizado no elemento isoparamétrico que se está formulando.

FIGURA 3.3 – MAPEAMENTO ENTRE O ELEMENTO PADRÃO E UM ELEMENTO FINITO QUALQUER



Assim como foi definida a relação entre os sistemas de coordenadas (global e específico) é necessário estabelecer uma vinculação entre os operadores diferenciais. Esta pode ser dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

A matriz  $[J]$  ( $2 \times 2$ ) das derivadas parciais é chamada de matriz Jacobiana da transformação. Para efetivar as relações entre os sistemas de coordenadas é necessário que exista a matriz inversa da transformação Jacobiana ( $[J]^{-1}$ ).

Da mesma forma

$$\begin{aligned} dA &= dx \, dy \quad , \\ dA &= (\det J) \, d\xi \, d\eta \quad , \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde o  $(\det J)$  é o determinante da matriz Jacobiana da transformação.

Na próxima seção apresenta-se a matriz de rigidez de um elemento isoparamétrico pelo MEF.

### 3.3.2 Matriz de Rigidez

As matrizes de rigidez da placa consideram as relações entre os sistemas de coordenadas, local e global. As relações a seguir estão descritas em termos de coordenadas globais, as quais devem ser avaliadas utilizando-se a formulação para elementos isoparamétricos no sistema local e aplicando-se a transformação jacobiana.

No capítulo 2, definiu-se o campo de deslocamentos baseado em variáveis independentes dadas pelo deslocamento transversal ( $u_z$ ) e pelas rotações das secções ( $\beta_x$  e  $\beta_y$ ). Assim, na discretização de elementos finitos necessita-se somente da continuidade entre elementos associados em  $w$ ,  $\beta_x$  e  $\beta_y$  e não necessitando portanto, associá-los à suas derivadas. Desta forma, pode-se relacionar os deslocamentos nodais

utilizando as mesmas funções de interpolação. Para as interpolações utilizam-se

$$u_z = \sum_{i=1}^n h_i u_z^i, \quad \beta_x = -\sum_{i=1}^n h_i \theta_y^i, \quad \beta_y = \sum_{i=1}^n h_i \theta_x^i, \quad (3.10)$$

onde  $\theta_x^i$  e  $\theta_y^i$  são os graus de liberdade relacionados à rotação e calculados para cada nó do elemento isoparamétrico implementado.

Na forma matricial, tem-se

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & \dots & h_n & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & \dots & 0 & h_n & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & \dots & 0 & 0 & h_n \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$U^T = \{u_z^1 \quad \theta_x^1 \quad \theta_y^1 \quad u_z^2 \quad \theta_x^2 \quad \theta_y^2 \quad \dots \quad u_z^n \quad \theta_x^n \quad \theta_y^n\}. \quad (3.12)$$

As derivadas  $\partial w/\partial x$  e  $\partial w/\partial y$ , considerando o deslocamento transversal  $w$ , são determinadas por

$$\left\{ \frac{\partial u_z}{\partial x} \right\}_{\substack{\text{em } \xi=i \\ \eta=j}} = [J_{ij}]_{2x2}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} & \frac{\partial h_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h_1}{\partial \eta} & \frac{\partial h_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{2xn} \begin{bmatrix} u_z^1 \\ u_z^2 \\ \vdots \\ u_z^n \end{bmatrix}_{nx1}. \quad (3.13)$$

De modo similar, a interpolação das rotações, ocorre nas formas

$$\left\{ \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right\}_{\substack{\text{em } \xi=i \\ \eta=j}} = -[J_{ij}]_{2x2}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} & \frac{\partial h_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h_1}{\partial \eta} & \frac{\partial h_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{2xn} \begin{bmatrix} \theta_y^1 \\ \theta_y^2 \\ \vdots \\ \theta_y^n \end{bmatrix}_{nx1} \quad (3.14)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \end{Bmatrix}_{\substack{\xi=i \\ \eta=j}} = [J_{ij}]^{-1}_{2x2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} & \frac{\partial h_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h_1}{\partial \eta} & \frac{\partial h_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial \eta} \end{Bmatrix}_{2xn} \begin{Bmatrix} \theta_x^1 \\ \theta_x^2 \\ \vdots \\ \theta_x^n \end{Bmatrix}_{nx1}. \quad (3.15)$$

Para completar a formulação da matriz de rigidez de elementos finitos, define-se o operador da transformação entre as deformações e deslocamentos para os termos em flexão  $L_f$  como sendo  $B_f$  (que podem ser extraídas das Equações (3.14) e (3.15)), e o operador da transformação entre as deformações e deslocamentos para os termos em cisalhamento transversal  $L_c$ , como sendo  $B_c$  (que podem ser obtidas com as funções de interpolação dadas pela Equação (3.10) e pela Equação (3.13)). Logo, tem-se que

$$[B]_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial h_1}{\partial \xi} & 0 & 0 & -\frac{\partial h_2}{\partial \xi} & \dots & 0 & 0 & -\frac{\partial h_n}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial \eta} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial h_n}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial \xi} & -\frac{\partial h_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial \xi} & -\frac{\partial h_2}{\partial \eta} & \dots & 0 & \frac{\partial h_n}{\partial \xi} & -\frac{\partial h_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$[B]_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} & 0 & h_1 & \frac{\partial h_2}{\partial \xi} & 0 & h_2 & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial \xi} & 0 & h_n \\ \frac{\partial h_1}{\partial \eta} & -h_1 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial \eta} & -h_2 & 0 & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial \eta} & -h_n & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Portanto, a matriz de rigidez pode ser escrita da seguinte forma

$$[K] = \int_{A-h/2}^{h/2} [B_f]^T [D_f] [B_f] dz dA + k \int_{A-h/2}^{h/2} [B_c]^T [D_c] [B_c] dz dA, \quad (3.18)$$

onde  $[D_f]$  é dado pela Equação (2.8),  $[D_c]$  é dado pela Equação (2.9) e  $k$  é o parâmetro associado ao fato da tensão de cisalhamento não ser constante na secção da placa. Para

placas o valor de  $k$  proposto originalmente por Mindlin é  $\pi^2/12$ .

A matriz massa do MEF é descrita na próxima seção.

### 3.3.3 Matriz Massa

A matriz massa do sistema a ser avaliada conforme o sistema discreto proposto na Equação (2.23) para uma placa com espessura constante, conforme PETYT (1990), é dada por

$$[M] = \int_A \rho [H]^T \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} [H] dA , \quad (3.19)$$

onde  $[M]$  é a matriz massa.

O detalhamento do MC, mostrando como as funções da TC são empregadas na interpolação das deformações e deslocamentos, será discutido a seguir.

## 3.4 MÉTODO COMPOSTO APLICADO À PLACAS

Para o MC, as parcelas das deformações associadas à TC, são obtidas de forma semelhante àquela ilustrada nas Equações (2.4) e (2.5). Assim, tem-se

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \end{bmatrix} , \quad (3.20)$$

e as deformações de cisalhamento transversal da placa para a parcela do MC são

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} - \alpha_x \\ \frac{\partial c}{\partial y} - \alpha_y \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

onde para as parcelas da TC tem-se que  $\alpha_x$  e  $\alpha_y$  são as rotações das secções e  $c$  o deslocamento transversal, associados ao grau de liberdade  $c$ .

Considerando apenas a matriz com as funções de forma que representam a solução para o problema de vibração livre de placas, obtém-se a matriz associada aos graus de liberdade  $c$ . Esta é dada por

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \cdots & \phi_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \cdots & 0 & \phi_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \cdots & 0 & 0 & \phi_m \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

O número de zeros que precedem as funções de forma  $\phi$  do MC é igual ao número de graus de liberdade do elemento finito que está sendo avaliado. O índice  $m$ , associado às funções de forma  $\phi$ , define o número de funções utilizadas da série da TC.

Para os graus de liberdade associados à TC tem-se o deslocamento transversal  $c$  e o giro das secções  $\alpha_x$  e  $\alpha_y$  como sendo variáveis independentes. Estas variáveis, na estratégia utilizada aqui, são relacionadas pelas funções de interpolação. O vetor dos graus de liberdade  $c$  é dado por

$$\{c\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad c_1 \quad \theta_x^{c1} \quad \theta_y^{c1} \quad c_2 \quad \theta_x^{c2} \quad \theta_y^{c2} \quad \cdots \quad c_m \quad \theta_x^{cm} \quad \theta_y^{cm}\}, \quad (3.23)$$

e o campo de deslocamentos é dado por

$$c = \sum_{i=1}^n \phi_i c_i, \quad \alpha_x = - \sum_{i=1}^n \phi_i \theta_y^{ci}, \quad \alpha_y = \sum_{i=1}^n \phi_i \theta_x^{ci}. \quad (3.24)$$

O índice  $c$  associado ao parâmetro  $\theta$ , relaciona a derivada primeira (giro da

seção transversal) às funções da TC.

Da mesma forma que para o MEF, pode-se calcular as derivadas  $\partial c/\partial x$  e  $\partial c/\partial y$ , considerando o deslocamento transversal  $c$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial c}{\partial y} \end{Bmatrix}_{em \xi=i \atop \eta=j} = [J_{ij}]^{-1}_{2x2} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial \phi_m}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial \phi_m}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{2xm} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{Bmatrix}_{mx1} . \quad (3.25)$$

Definem-se as rotações associadas ao MC por

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \end{Bmatrix}_{em \xi=i \atop \eta=j} = -[J_{ij}]^{-1}_{2x2} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial \phi_m}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial \phi_m}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{2xm} \begin{Bmatrix} \theta_y^{c1} \\ \theta_y^{c2} \\ \vdots \\ \theta_y^{cm} \end{Bmatrix}_{mx1} \quad (3.26)$$

e,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \end{Bmatrix}_{em \xi=i \atop \eta=j} = -[J_{ij}]^{-1}_{2x2} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial \phi_m}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial \phi_m}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{2xm} \begin{Bmatrix} \theta_x^{c1} \\ \theta_x^{c2} \\ \vdots \\ \theta_x^{cm} \end{Bmatrix}_{mx1} . \quad (3.27)$$

Na próxima seção realiza-se a busca das funções da TC que podem ser empregadas no MC. Discutem, também, as características de compatibilidade e as condições de contorno que devem ser satisfeitas para superpor o MEF às funções da TC.

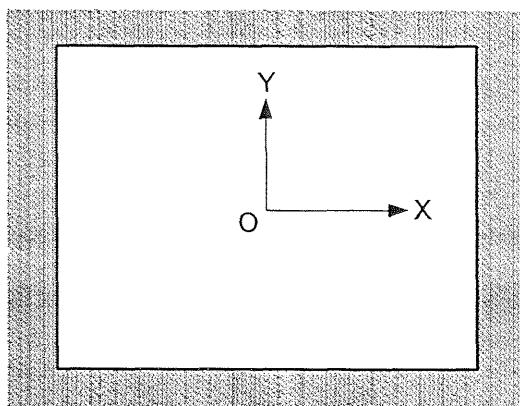
### 3.4.1 Características das Funções de Forma MC

Para a implementação do MC é necessário que as funções de forma atendam

as seguintes características:

- Pertencer ao espaço solução, isto é, ser solução possível para a Equação diferencial associada ao problema de vibrações livres de placas.
- No contorno do elemento, o deslocamento deve ser nulo, para que não altere a parcela do MEF.

FIGURA 3.4 – CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA AS PARCELAS DA TC EM UMA PLACA



No contorno:

$$u_z = 0$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = 0$$

- No contorno do elemento, o giro da seção transversal (derivada primeira da função) deve ser igual a zero. Com isto, apenas a parcela associada ao MEF será responsável por esta determinação.

Pode-se observar que estas características representam as condições de contorno para uma placa engastada nos bordos. Portanto, conclui-se que o MC acrescenta graus de liberdade associados ao domínio. A Figura 3.4 ilustra as condições de contorno de compatibilidade para as funções de forma das parcelas da TC.

### 3.4.2 Funções de Forma da Teoria Clássica

A solução da equação diferencial para o problema de vibrações livres com as imposições das condições de contorno para placa engastada é a forma pela qual se obtém as funções utilizadas para interpolação da parcela associada à TC.

A equação diferencial do movimento é dada por

$$D \nabla^4 u + \rho h \ddot{u} = q , \quad (3.28)$$

onde  $q$  é a carga distribuída na superfície da placa,  $D$  é a rigidez à flexão e  $\rho$  a densidade de massa.

O estudo de vibrações livres é baseado apenas na rigidez, geometria e distribuição de massa sobre o corpo (no caso, considera-se esta distribuição ocorrendo no plano médio). Para a vibração livre de uma placa, onde se assume uma carga distribuída nula, a equação diferencial pode ser escrita como

$$D \nabla^4 u + \rho h \ddot{u} = 0 . \quad (3.29)$$

Como pode-se observar, a equação diferencial do movimento tem como variável dependente também o tempo. Conforme BOYCE e DIPRIMA (1997), pode-se proceder a seguinte separação de variáveis:

$$u(x, y, t) = U(x, y)T(t) . \quad (3.30)$$

Fazendo

$$\beta^2 = \frac{D}{\rho h} , \quad (3.31)$$

tem-se

$$\beta^2 T \nabla^4 U + U \ddot{T} = 0 . \quad (3.32)$$

Assim, a separação de variáveis pode ser obtida por

$$\beta^2 T \nabla^4 U = -U \ddot{T} = \omega^2 , \quad (3.33)$$

onde, conclui-se que

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{T}}{T} &= -\omega^2, \quad e \\ \frac{D}{\rho h} \frac{\nabla^4 U}{U} &= \omega^2. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Assim, conclui-se que  $\omega^2$  é a razão de separação de variáveis. Por outro lado,  $\omega$ , em relação ao problema físico, é conhecido como a freqüência natural.

Uma forma de obter a solução do conjunto de Equações (3.34) é através da aproximação por séries infinitas, conforme SZILARD (1974):

$$U(x, y) = \sum_m \sum_n u_{mn} \phi_{mn}(x, y) \tag{3.35}$$

Da Equação (3.35), pode-se reescrever  $\phi(x, y)$  como o produto de duas funções, onde cada uma delas depende apenas de um argumento. Então

$$\phi_{mn} = X_m(x) Y_n(y). \tag{3.36}$$

As funções linearmente independentes, separadas em dois grupos,  $X_m(x)$  e  $Y_n(y)$ , permite encontrar a solução que satisfaz todas as condições de contorno. Para estas funções, podem-se utilizar as mesmas funções de vibrações de vigas, com condições de contorno similares às da placa. Assim, analisa-se a solução para o problema de vibração livre para vigas, que é dada por

$$\frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x^4} = -\frac{m}{EI} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2}, \tag{3.37}$$

onde  $m$  é a massa por unidade de comprimento,  $E$  o módulo de elasticidade do material e  $I$  o momento de inércia da viga.

Assumindo-se a solução harmônica para a Equação (3.37), e particularizando para a direção  $X$ , tem-se

$$\frac{d^4 X_m(x)}{dx^4} = \frac{m\omega^2}{EI} X_m(x), \quad (3.38)$$

sendo possível identificar a constante

$$\frac{\lambda_m^4}{l^4} = \frac{m\omega^2}{EI}, \quad (3.39)$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro de forma e  $l$  é o comprimento do vão.

Substituindo a Equação (3.39) na Equação (3.38), tem-se

$$\frac{d^4 X_m(x)}{dx^4} = \frac{\lambda^4}{l^4} X_m(x). \quad (3.40)$$

Assim, a solução geral da Equação (3.40) é dada por

$$X_m(x) = C_1 \operatorname{sen} \frac{\lambda_m x}{l} + C_2 \operatorname{cos} \frac{\lambda_m x}{l} + C_3 \operatorname{senh} \frac{\lambda_m x}{l} + C_4 \operatorname{cosh} \frac{\lambda_m x}{l}. \quad (3.41)$$

As constantes  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  são obtidas a partir das condições de contorno, e o parâmetro  $\lambda_m$  é a raíz da equação característica da freqüência. Para o elemento de viga de comprimento  $l$ , as condições de contorno de compatibilidade são:

$$\begin{aligned} X_m(0) &= X_m(l) = 0 \\ \left. \frac{dX_m}{dx} \right|_{x=0} &= \left. \frac{dX_m}{dx} \right|_{x=l} = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Substituindo as condições de contorno da Equação (3.42) na Equação (3.41), obtém-se um sistema de equações homogêneas, cuja forma matricial é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\lambda_m) & \sin(\lambda_m) & \cosh(\lambda_m) & \sinh(\lambda_m) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\sin(\lambda_m) & \cos(\lambda_m) & \sinh(\lambda_m) & \cosh(\lambda_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

A equação da freqüência é obtida fazendo-se o determinante do sistema igual a zero. Logo

$$f = \cos \lambda_m \cdot \cosh \lambda_m - 1 = 0. \quad (3.44)$$

As raízes da equação característica,  $\lambda_m$ , são os autovalores do problema. Os modos de vibração (autovetores) são obtidos das Equações (3.43) e (3.44)

$$X_m(x) = a_2 \left\{ \sin\left(\frac{\lambda_m x}{l}\right) - \sinh\left(\frac{\lambda_m x}{l}\right) - \frac{\sin \lambda_m - \sinh \lambda_m}{\cos \lambda_m - \cosh \lambda_m} \left[ \cos\left(\frac{\lambda_m x}{l}\right) - \cosh\left(\frac{\lambda_m x}{l}\right) \right] \right\}. \quad (3.45)$$

Utilizando-se a mesma abordagem, pode-se concluir que para uma placa retangular, na direção perpendicular, tem-se

$$Y(y) = b_2 \left\{ \sin\left(\frac{\lambda_n y}{l}\right) - \sinh\left(\frac{\lambda_n y}{l}\right) - \frac{\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n}{\cos \lambda_n - \cosh \lambda_n} \left[ \cos\left(\frac{\lambda_n y}{l}\right) - \cosh\left(\frac{\lambda_n y}{l}\right) \right] \right\}, \quad (3.46)$$

onde os índices  $m$  e  $n$  estão relacionados com a direção em questão (x ou y) e o comprimento  $l$  é o tamanho do vão da placa.

TABELA 3.1 – RAÍZES DA EQUAÇÃO DA FREQUÊNCIA

$\lambda_m, \lambda_n$	VALOR
$\lambda_1$	4,7300
$\lambda_2$	7,8532
$\lambda_3$	10,9956
$\lambda_4$	14,1372
$\lambda_5$	17,2788
$\lambda_6$	20,4204
$\lambda_7$	23,5619
$\lambda_8$	26,7035
$\lambda_9$	29,8451

Na Tabela 3.1 pode-se encontrar até o valor de  $\lambda_9$ , e os valores  $\lambda$ , cujos índices sejam maiores que nove, podem ser obtidos por:

$$\lambda_j = (2j+1)\pi/2 \quad \text{para } j = m \text{ ou } j = n \quad (3.47)$$

Na próxima seção é feito o detalhamento das matrizes que calculam as deformações e como são somadas as parcelas do MEF às parcelas da TC.

### 3.4.3 Termos da Matriz de Deformação Associados ao Método Composto

Para a formulação da matriz de rigidez dos termos associados à TC, define-se o operador da transformação entre as deformações e deslocamentos para os termos em flexão  $L_f$  como sendo  $BC_f$  e o operador da transformação entre as deformações e deslocamentos para os termos em cisalhamento transversal  $L_c$  como sendo  $BC_c$ , através de interpolação semelhante à do MEF

$$[BC]_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & : & 0 & 0 & -\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & 0 & 0 & -\frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & \dots & 0 & 0 & -\frac{\partial \phi_m}{\partial \xi} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & : & 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \phi_m}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & : & 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & -\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & -\frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & \dots & 0 & \frac{\partial \phi_m}{\partial \xi} & -\frac{\partial \phi_m}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$[BC]_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & : & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & 0 & \phi_1 & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & 0 & \phi_2 & \dots & \frac{\partial \phi_m}{\partial \xi} & 0 & \phi_m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & : & \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & -\phi_1 & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & -\phi_2 & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_m}{\partial \eta} & -\phi_m & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

O número de zeros que precedem as funções que relacionam as deformações para a TC é igual ao número de graus de liberdade do elemento finito que esta sendo avaliado. O índice  $m$  associado às funções  $\phi$  indica o número de funções utilizados na série da TC.

A partir das seções anteriores é possível agrupar as matrizes que relacionam os termos em flexão e cisalhamento, sendo estas matrizes substituídas nas Equações

(3.50) e (3.51).

### 3.4.4 Agrupamento dos Termos em Flexão e Cisalhamento para o Método Composto

O operador da transformação, para os termos em flexão  $L_{(H+\phi)}$ , é dada por

$$[BMC]_f = [L_{([H]+[\phi])}]_f = [B]_f + [BC]_f . \quad (3.50)$$

E para o operador da transformação, para os termos em cisalhamento  $L_{(H+\phi)}$ , tem-se

$$[BMC]_c = [L_{([H]+[\phi])}]_c = [B]_c + [BC]_c . \quad (3.51)$$

Assim, a matriz de rigidez elementar é determinada por

$$[K] = \int_{A-h/2}^{h/2} [BMC]_f^T [D_f] [BMC]_f dz dA + k \int_{A-h/2}^{h/2} [BMC]_c^T [D_c] [BMC]_c dz dA . \quad (3.52)$$

### 3.4.5 Matriz Massa para o Método Composto

Para avaliar a matriz massa necessita-se conhecer a matriz resultante do somatório das funções de forma, assim

$$[N] = [H] + [\phi] . \quad (3.53)$$

A matriz massa do MC é dada por

$$[M] = \int_A \rho [N]^T \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} [N] dA , \quad (3.54)$$

onde  $[N]$  é a matriz com as funções de forma do MC.

### 3.5 SUMÁRIO DO CAPÍTULO 3

Neste capítulo apresentaram-se os princípios do MC e definiram-se as características das funções da TC para o método. Concluiu-se que as funções da TC para um domínio retangular devem atender às condições de contorno de uma placa com os quatro bordos engastados. Conforme SZILARD (1974), a solução da equação diferencial para as condições de contorno em questão podem ser obtidas de forma aproximada por funções que resolvem o problema de viga com condições de contorno semelhantes.

Discutiu-se, também, que a solução do problema de vibrações livres de placas resume-se na determinação dos autovalores e autovetores a partir da definição da matriz de rigidez e matriz massa do sistema. A técnica proposta para o MC é uma variante do MEF, que busca o enriquecimento da solução acrescentando termos da TC às matrizes do problema em questão. A superposição das duas abordagens foi apresentada nas últimas seções do capítulo.

## 4 FORMULAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO COMPOSTO

Neste capítulo, são apresentadas as implementações de dois elementos com as seguintes características: elemento composto isoparamétrico de quatro nós e elemento composto isoparamétrico de oito nós. Discute-se, também, o método de solução utilizado para resolver o problema de autovalores e autovetores e o método de integração numérica. Finalmente, as implementações computacionais necessárias são brevemente descritas.

Outros elementos finitos mais eficientes poderiam ser implementados, porém, o objetivo é verificar a eficiência do MC. Neste sentido, trabalhar com elementos mais simples, além da facilidade na implementação, evidencia melhor as características do MC.

### 4.1 IMPLEMENTAÇÃO DO ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO LINEAR DE QUATRO NÓS

A implementação deste elemento utilizando o MC começa pela definição das funções utilizadas para as interpolações, tanto da parcela associada ao MEF quanto das parcelas da TC. Após esta definição, há a necessidade de se avaliarem as matrizes que relacionam as deformações de flexão e cisalhamento, possibilitando assim, calcular a matriz de rigidez da placa. O passo seguinte é determinar a matriz massa do sistema, utilizando as mesmas funções de interpolação já definidas.

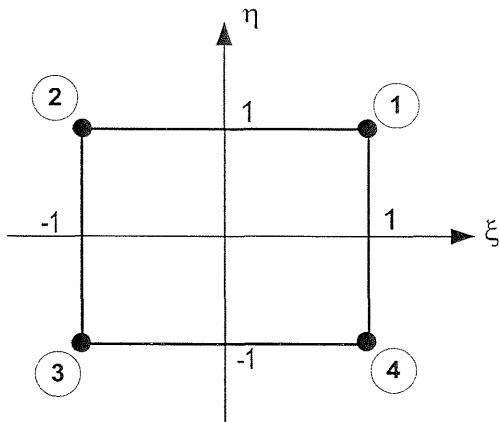
#### 4.1.1 Funções de Forma para o MEF

As funções de forma são dadas por, BATHE (1996), ODEN (1981)

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), & h_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), \\
 h_3 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), & h_4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

A Figura 4.1 apresenta o elemento quadrilateral e as posições dos nós associadas as funções de forma da Equação (4.1).

FIGURA 4.1 – ELEMENTO QUADRILATERAL ISOPARAMÉTRICO DE QUATRO NÓS



As funções de forma da parcela da TC para o MC, serão discutidas com mais detalhes na seção seguinte.

#### 4.1.2 Funções de Forma para a Teoria Clássica

As funções de forma da TC, usadas para a implementação do MC, a partir da equação da freqüência de vigas nas direções  $x$  e  $y$ , são dadas por

$$X_m(x) = \sin\left(\frac{\lambda_m x}{l}\right) - \operatorname{senh}\left(\frac{\lambda_m x}{l}\right) - \frac{\sin \lambda_m - \operatorname{senh} \lambda_m}{\cos \lambda_m - \cosh \lambda_m} \left[ \cos\left(\frac{\lambda_m x}{l}\right) - \cosh\left(\frac{\lambda_m x}{l}\right) \right], \tag{4.2}$$

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{\lambda_n y}{l}\right) - \operatorname{senh}\left(\frac{\lambda_n y}{l}\right) - \frac{\sin \lambda_n - \operatorname{senh} \lambda_n}{\cos \lambda_n - \cosh \lambda_n} \left[ \cos\left(\frac{\lambda_n y}{l}\right) - \cosh\left(\frac{\lambda_n y}{l}\right) \right]. \tag{4.3}$$

Considerando o elemento quadrilateral isoparamétrico, tem-se que a distância  $l$  é igual a 2 (variação da coordenada natural). As Equações (4.2) e (4.3)

consideram as coordenadas globais do vértice do elemento. Todavia, para o elemento isoparamétrico deve-se considerar o sistema de coordenadas posicionado no centro do mesmo. Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} X_m(\xi) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_m(\xi+1)}{2}\right) - \operatorname{senh}\left(\frac{\lambda_m(\xi+1)}{2}\right) \\ &\quad - \frac{\operatorname{sen}\lambda_m - \operatorname{senh}\lambda_m}{\cos\lambda_m - \cosh\lambda_m} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\lambda_m(\xi+1)}{2}\right) - \cosh\left(\frac{\lambda_m(\xi+1)}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} Y_n(\eta) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_n(\eta+1)}{l}\right) - \operatorname{senh}\left(\frac{\lambda_n(\eta+1)}{l}\right) \\ &\quad - \frac{\operatorname{sen}\lambda_n - \operatorname{senh}\lambda_n}{\cos\lambda_n - \cosh\lambda_n} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\lambda_n(\eta+1)}{l}\right) - \cosh\left(\frac{\lambda_n(\eta+1)}{l}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

O produto das Equações (4.4) e (4.5) representam as funções de forma para placas. Avaliando-se o parâmetro de forma  $\lambda$ , conforme os valores da Tabela 3.1, pode-se reescrever para  $\lambda_1=4,7300$  e  $\lambda_2=7,8532$ , as seguintes equações:

$$\begin{aligned} X_1(\xi)_{\lambda=4,73} &= \operatorname{sen}(2.365\xi + 2.365) - \operatorname{senh}(2.365\xi + 2.365) \\ &\quad - 1.01780941 \cos(2.365\xi + 2.365) + 1.01780941 \cosh(2.365\xi + 2.365) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} Y_1(\eta)_{\lambda=4,73} &= \operatorname{sen}(2.365\eta + 2.365) - \operatorname{senh}(2.365\eta + 2.365) \\ &\quad - 1.01780941 \cos(2.365\eta + 2.365) + 1.01780941 \cosh(2.365\eta + 2.365) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} X_2(\xi)_{\lambda=7,8532} &= \operatorname{sen}(3.92660\xi + 3.92660) - \operatorname{senh}(3.92660\xi + 3.92660) \\ &\quad - .999223291 \cos(3.92660\xi + 3.92660) + .999223291 \cosh(3.92660\xi + 3.92660) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} Y_2(\eta)_{\lambda=7,8532} &= \operatorname{sen}(3.92660\eta + 3.92660) - \operatorname{senh}(3.92660\eta + 3.92660) \\ &\quad - .999223291 \cos(3.92660\eta + 3.92660) + .999223291 \cosh(3.92660\eta + 3.92660) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Assim, com as Equações (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9) pode-se construir as quatro primeiras funções que representam os quatro primeiros modos de vibrar das placas,

que atendem as condições de contorno do elemento MC:

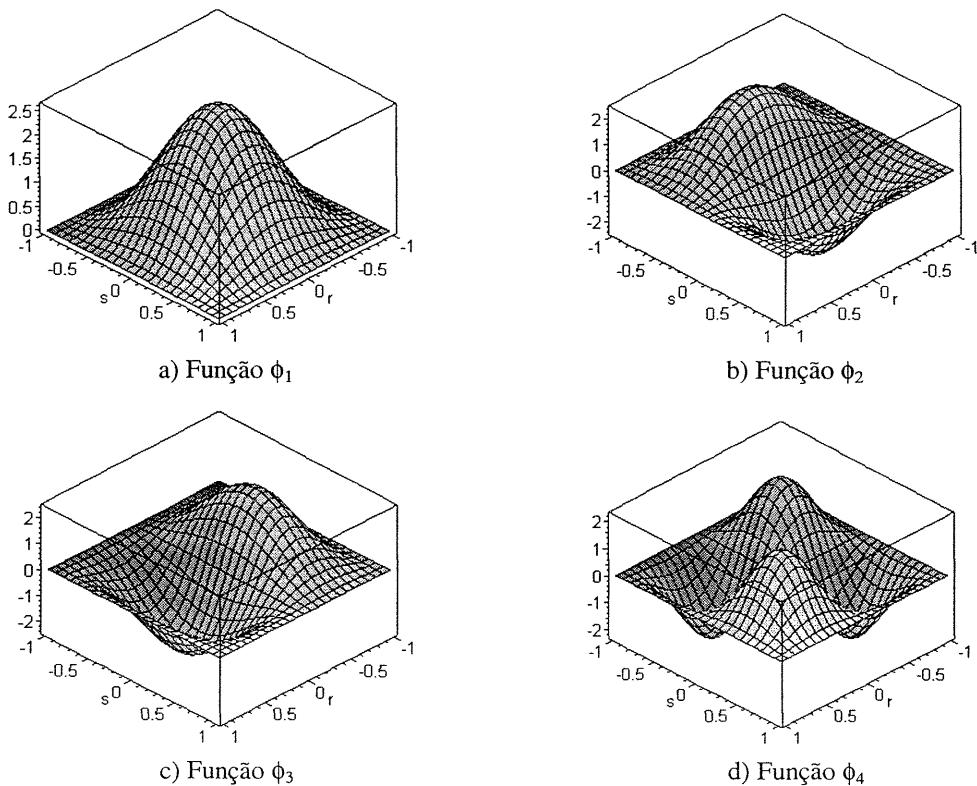
$$\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= X_1(\xi) Y_1(\eta), \\ \phi_2(\xi, \eta) &= X_2(\xi) Y_1(\eta), \\ \phi_3(\xi, \eta) &= X_1(\xi) Y_2(\eta), \\ \phi_4(\xi, \eta) &= X_2(\xi) Y_2(\eta).\end{aligned}\tag{4.10}$$

A Figura 4.2 ilustra graficamente, os quatro primeiros modos de vibrar da placa, obtidos a partir das funções  $\phi_s$  contidas na Equação (4.10).

Mais funções de forma da TC podem ser acrescentadas ao MC. É objetivo deste trabalho verificar a necessidade e as consequências relacionadas ao incremento do número de funções da TC. Estes aspectos são discutidos no Capítulo 5.

Para se utilizar na formulação do MC mais funções  $\phi_s$ , basta avaliar as Equações (4.4) e (4.5) com os valores respectivos de  $\lambda$  que constam da Tabela 3.1.

FIGURA 4.2 - REPRESENTAÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA PARA OS QUATRO PRIMEIROS MODOS DE VIBRAÇÃO



#### 4.1.3 Matriz de Deformação para os Termos de Flexão do Método Composto

A matriz de deformação para os termos de flexão do MC é o somatório das matrizes dada pela Equação (3.50)

$$[BMC]_f = [L_{([H] + [\phi])}]_f , \quad (4.11)$$

$$[BMC]_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{(I+\eta)}{4} & 0 & 0 & \frac{(I+\eta)}{4} & 0 & 0 & \frac{(I-\eta)}{4} & 0 & 0 & -\frac{(I-\eta)}{4} \\ 0 & \frac{(I+\xi)}{4} & 0 & 0 & \frac{(I-\xi)}{4} & 0 & 0 & -\frac{(I-\xi)}{4} & 0 & 0 & -\frac{(I+\xi)}{4} & 0 \\ 0 & \frac{(I+\eta)}{4} & \frac{(I+\xi)}{4} & 0 & -\frac{(I+\eta)}{4} & -\frac{(I-\xi)}{4} & 0 & -\frac{(I-\eta)}{4} & \frac{(I-\xi)}{4} & 0 & \frac{(I-\eta)}{4} & \frac{(I+\xi)}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & 0 & 0 & -\frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & 0 & 0 & -\frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} & 0 & 0 & -\frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & -\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & -\frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} & -\frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} & -\frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

As 12 primeiras colunas estão associadas ao MEF e as restantes, são referentes às parcelas da TC, onde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} &= (2.365 \cos(2.365\xi + 2.365) - 2.365 \cosh(2.365\xi + 2.365) \\ &\quad 2.407 \sin(2.365\xi + 2.365) + 2.407 \sinh(2.365\xi + 2.365))(\sin(2.365\eta + 2.365) \\ &\quad - \sinh(2.365\eta + 2.365) - 1.018 \cos(2.365\eta + 2.365) + 1.018 \cosh(2.365\eta + 2.365)), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} &= (\sin(2.365\xi + 2.365) - \sinh(2.365\xi + 2.365) - 1.018 \cos(2.365\xi + 2.365) \\ &\quad + 1.018 \cosh(2.365\xi + 2.365))(2.365 \cos(2.365\eta + 2.365) - 2.365 \cosh(2.365\eta + 2.365) \\ &\quad + 2.407 \sin(2.365\eta + 2.365) + 2.407 \sinh(2.365\eta + 2.365)), \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} = & (3.927 \cos(3.927\xi + 3.927) - 3.927 \cosh(3.927\xi + 3.927) \\
& + 3.924 \operatorname{sen}(3.927\xi + 3.927) + 3.924 \operatorname{senh}(3.927\xi + 3.927))(\operatorname{sen}(2.365\eta + 2.365) \\
& - \operatorname{senh}(2.365\eta + 2.365) - 1.018 \cos(2.365\eta + 2.365) + 1.018 \cosh(2.365\eta + 2.365)), 
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} = & (\operatorname{sen}(3.927\xi + 3.927) - \operatorname{senh}(3.927\xi + 3.927) - .9992 \cos(3.927\xi + 3.927) \\
& + .9992 \cosh(3.927\xi + 3.927))(2.365 \cos(2.365\eta + 2.365) - 2.365 \cosh(2.365\eta + 2.365) \\
& + 2.408 \operatorname{sen}(2.365\eta + 2.365) + 2.408 \operatorname{senh}(2.365\eta + 2.365)),
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} = & (2.365 \cos(2.365\xi + 2.365) - 2.365 \cosh(2.365\xi + 2.365) \\
& + 2.408 \operatorname{sen}(2.365\xi + 2.365) + 2.408 \operatorname{senh}(2.365\xi + 2.365))(\operatorname{sen}(3.927\eta + 3.927) \\
& - \operatorname{senh}(3.927\eta + 3.927) - .9992 \cos(3.927\eta + 3.927) + .9992 \cosh(3.927\eta + 3.927)),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} = & (\operatorname{sen}(2.365\xi + 2.365) - \operatorname{senh}(2.365\xi + 2.365) - 1.018 \cos(2.365\xi + 2.365) \\
& + 1.018 \cosh(2.365\xi + 2.365))(3.927 \cos(3.927\eta + 3.927) - 3.927 \cosh(3.927\eta + 3.927) \\
& + 3.924 \operatorname{sen}(3.927\eta + 3.927) + 3.924 \operatorname{senh}(3.927\eta + 3.927)),
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} = & (3.927 \cos(3.927\xi + 3.927) - 3.927 \cosh(3.927\xi + 3.927) \\
& + 3.924 \operatorname{sen}(3.927\xi + 3.927) + 3.924 \operatorname{senh}(3.927\xi + 3.927))(\operatorname{sen}(3.927\eta + 3.927) \\
& - \operatorname{senh}(3.927\eta + 3.927) - .9992 \cos(3.927\eta + 3.927) + .9992 \cosh(3.927\eta + 3.927), e
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} = & (\operatorname{sen}(3.927\xi + 3.927) - \operatorname{senh}(3.927\xi + 3.927) - .9992 \cos(3.927\xi + 3.927) \\
& + .9992 \cosh(3.927\xi + 3.927))(3.927 \cos(3.927\eta + 3.927) - 3.927 \cosh(3.927\eta + 3.927) \\
& + 3.924 \operatorname{sen}(3.927\eta + 3.927) + 3.924 \operatorname{senh}(3.927\eta + 3.927)).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

#### 4.1.4 Matriz de Deformação para os Termos de Cisalhamento do Método Composto

A matriz de deformação para os termos relativos ao cisalhamento do MC é o somatório das matrizes dadas pela Equação (3.51):

$$[BMC]_c = [L_{([H]+[\phi])}]_c , \quad (4.21)$$

$$[BMC]_c = \begin{bmatrix} \frac{(I+\eta)}{4} & 0 & \frac{(I+\xi)(I+\eta)}{4} & -\frac{(I+\eta)}{4} & 0 & \frac{(I-\xi)(I+\eta)}{4} \\ \frac{(I+\xi)}{4} & -\frac{(I+\xi)(I+\eta)}{4} & 0 & \frac{(I-\xi)}{4} & -\frac{(I-\xi)(I+\eta)}{4} & 0 \\ -\frac{(I-\eta)}{4} & 0 & \frac{(I-\xi)(I-\eta)}{4} & \frac{(I-\eta)}{4} & 0 & \frac{(I+\xi)(I-\eta)}{4} \\ -\frac{(I-\xi)}{4} & -\frac{(I-\xi)(I-\eta)}{4} & 0 & -\frac{(I+\xi)}{4} & -\frac{(I+\xi)(I-\eta)}{4} & 0 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & 0 & \phi_1 & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & 0 & \phi_2 & \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} & 0 & \phi_3 & \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} & 0 & \phi_4 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & -\phi_1 & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & -\phi_2 & 0 & \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} & -\phi_3 & 0 & \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} & -\phi_4 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Avaliando-se as derivadas das funções de forma do MEF e das parcelas da TC, respectivamente dadas pelas Equações (4.13) a (4.20), pode-se obter a matriz referente aos termos em cisalhamento para o MC. O método permite acrescentar individualmente as funções da parcela da TC. Uma vez definido o número de parcelas da TC, estas devem ser avaliadas tanto para os termos em flexão quanto para os termos em cisalhamento.

#### 4.1.5 Matriz de Rígidez do Método Composto para o Elemento de Quatro Nós

A matriz de rígidez é dada por

$$[K] = \int_{A-h/2}^{h/2} \int_{A-h/2}^{h/2} [BMC]_f^T [D_f] [BMC]_f dz dA + k \int_{A-h/2}^{h/2} \int_{A-h/2}^{h/2} [BMC]_c^T [D_c] [BMC]_c dz dA . \quad (4.23)$$

#### 4.1.6 Matriz Massa do Elemento de Quatro Nós do Método Composto

A matriz com as funções de forma  $[N]$  para o MC, é dada por

$$[N] = [H] + [\phi], \quad (4.24)$$

onde  $[H]$  está associada às funções de forma típicas do MEF e  $[\phi]$  está associada as parcelas da TC.

Assim, a matriz com os termos das funções de forma é dada por

$$[N] = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

A matriz massa do MC é dada por

$$[M] = \int_A \rho [N]^T \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} [N] dA. \quad (4.26)$$

Na próxima seção apresenta-se a implementação MC para o elemento isoparamétrico de oito nós. Nesta implementação são utilizadas quatro funções da parcela da TC, de maneira similar à empregada para o elemento de quatro nós. Desta forma permite-se comparar os resultados obtidos entre estes dois elementos e avaliar a influência do MC quando comparado ao MEF.

## 4.2 IMPLEMENTAÇÃO DO ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO QUADRÁTICO DE OITO NÓS

A concepção do elemento isoparamétrico quadrilateral de oito nós é feita da mesma forma que a do elemento de quatro nós. A diferença reside nas parcelas do

MEF, já que, para este tipo de elemento, as funções de forma utilizadas são quadráticas.

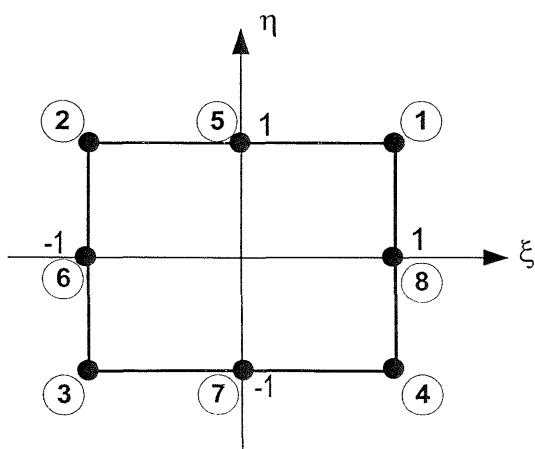
#### 4.2.1 Funções de Forma para o MEF

As funções de forma são dadas por, BATHE (1996), ODEN (1981):

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \frac{I}{4} [(1+\xi)(1+\eta) - (1-\xi^2)(1+\eta) - (1-\eta^2)(1+\xi)], \\
 h_2 &= \frac{I}{4} [(1-\xi)(1+\eta) - (1-\xi^2)(1+\eta) - (1-\eta^2)(1-\xi)], \\
 h_3 &= \frac{I}{4} [(1-\xi)(1-\eta) - (1-\eta^2)(1-\xi) - (1-\xi^2)(1-\eta)], \\
 h_4 &= \frac{I}{4} [(1+\xi)(1-\eta) - (1-\xi^2)(1-\eta) - (1-\eta^2)(1+\xi)], \\
 h_5 &= \frac{I}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \\
 h_6 &= \frac{I}{2}(1-\eta^2)(1-\xi), \\
 h_7 &= \frac{I}{2}(1-\xi^2)(1-\eta), \text{ e} \\
 h_8 &= \frac{I}{2}(1-\eta^2)(1+\xi).
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

A Figura 4.3 apresenta o elemento quadrilateral e as posições dos nós associadas as funções de forma da Equação (4.27).

FIGURA 4.3 – ELEMENTO QUADRILATERAL ISOPARAMÉTRICO DE OITO NÓS



#### 4.2.2 Funções de Forma da Teoria Clássica para o Elemento de Oito Nós

As funções de forma utilizadas para a parcela da TC são as mesmas funções que as empregadas para o elemento quadrilateral de quatro nós. A diferença é que a quantidade de nós altera o número de graus de liberdade apenas para a parcela associada ao MEF.

#### 4.2.3 Matriz de Deformação para os Termos de Flexão do Método Composto

A matriz de deformação, para os termos de flexão do MC, é obtida da mesma forma que para o elemento quadrilateral de quatro nós

$$[BMC]_f = [L_{([H]+[\phi])}]_f, \quad (4.28)$$

$$[BMC]_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial h_1}{\partial \xi} & 0 & 0 & -\frac{\partial h_2}{\partial \xi} & 0 & 0 & -\frac{\partial h_3}{\partial \xi} & 0 & 0 & -\frac{\partial h_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial \xi} & -\frac{\partial h_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial \xi} & -\frac{\partial h_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial \xi} & -\frac{\partial h_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial \xi} & -\frac{\partial h_4}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial h_5}{\partial \xi} & 0 & 0 & -\frac{\partial h_6}{\partial \xi} & 0 & 0 & -\frac{\partial h_7}{\partial \xi} & 0 & 0 & -\frac{\partial h_8}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial h_5}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial h_6}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial h_7}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial h_8}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_5}{\partial \xi} & -\frac{\partial h_5}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial h_6}{\partial \xi} & -\frac{\partial h_6}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial h_7}{\partial \xi} & -\frac{\partial h_7}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial h_8}{\partial \xi} & -\frac{\partial h_8}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & 0 & 0 & -\frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & 0 & 0 & -\frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} & 0 & 0 & -\frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & -\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & -\frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} & -\frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} & -\frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Aqui, as 24 primeiras colunas estão associadas ao MEF e as demais à TC. As derivadas das funções de forma do MEF são obtidas de maneira direta e as derivadas das funções de forma da parcela da TC, estão descritas nas Equações (4.13) à (4.20).

#### 4.2.4 Matriz de Deformação para os Termos de Cisalhamento do Método Composto

A matriz de deformação, para os termos de cisalhamento do MC, também é obtida da mesma forma que para o elemento quadrilateral de quatro nós

$$[BMC]_c = [L_{([H]+[\phi])}]_c, \quad (4.30)$$

$$[BMC]_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} & 0 & h_1 & \frac{\partial h_2}{\partial \xi} & 0 & h_2 & \frac{\partial h_3}{\partial \xi} & 0 & h_3 & \frac{\partial h_4}{\partial \xi} & 0 & h_4 \\ \frac{\partial h_1}{\partial \eta} & -h_1 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial \eta} & -h_2 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial \eta} & -h_3 & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial \eta} & -h_4 & 0 \\ \frac{\partial h_5}{\partial \xi} & 0 & h_5 & \frac{\partial h_6}{\partial \xi} & 0 & h_6 & \frac{\partial h_7}{\partial \xi} & 0 & h_7 & \frac{\partial h_8}{\partial \xi} & 0 & h_8 \\ \frac{\partial h_5}{\partial \eta} & -h_5 & 0 & \frac{\partial h_6}{\partial \eta} & -h_6 & 0 & \frac{\partial h_7}{\partial \eta} & -h_7 & 0 & \frac{\partial h_8}{\partial \eta} & -h_8 & 0 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & 0 & \phi_1 & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & 0 & \phi_2 & \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} & 0 & \phi_3 & \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} & 0 & \phi_4 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & -\phi_1 & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & -\phi_2 & 0 & \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} & -\phi_3 & 0 & \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} & -\phi_4 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Como ocorre na matriz de deformações de flexão, as 24 primeiras colunas estão associadas ao MEF e as colunas restantes são referentes ao MC. As derivadas das funções de forma do MEF são obtidas de maneira direta e as derivadas das funções de forma do MC estão descritas nas Equações (4.13) à (4.20).

#### 4.2.5 Matriz de Rigidez do Método Composto para o Elemento de Oito Nós

Uma vez definidas as matrizes de deformação, a matriz de rigidez para o elemento de oito nós é calculada pela Equação (4.23).

#### 4.2.6 Matriz Massa do Método Composto para o Elemento de Oito Nós

Para calcular a matriz massa do elemento de oito nós do MC é necessário

conhecer a matriz com as funções de forma  $[N]$ , que é dada por

$$[N] = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_4 \\ & & h_5 & 0 & 0 & h_6 & 0 & 0 & h_7 & 0 & 0 & h_8 & 0 & 0 \\ & & 0 & h_5 & 0 & 0 & h_6 & 0 & 0 & h_7 & 0 & 0 & h_8 & 0 \\ & & 0 & 0 & h_5 & 0 & 0 & h_6 & 0 & 0 & h_7 & 0 & 0 & h_8 & 0 \\ & & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 & 0 & 0 \\ & & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 & 0 \\ & & 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

A matriz massa do MC é calculada pela Equação (4.26), utilizando-se a matriz com as funções de forma dada pela Equação (4.32).

Na próxima seção apresenta-se a implementação computacional do MC para os dois elementos propostos nas seções anteriores. Discutem-se detalhes específicos relacionados com o MC e também algumas características da implementação computacional.

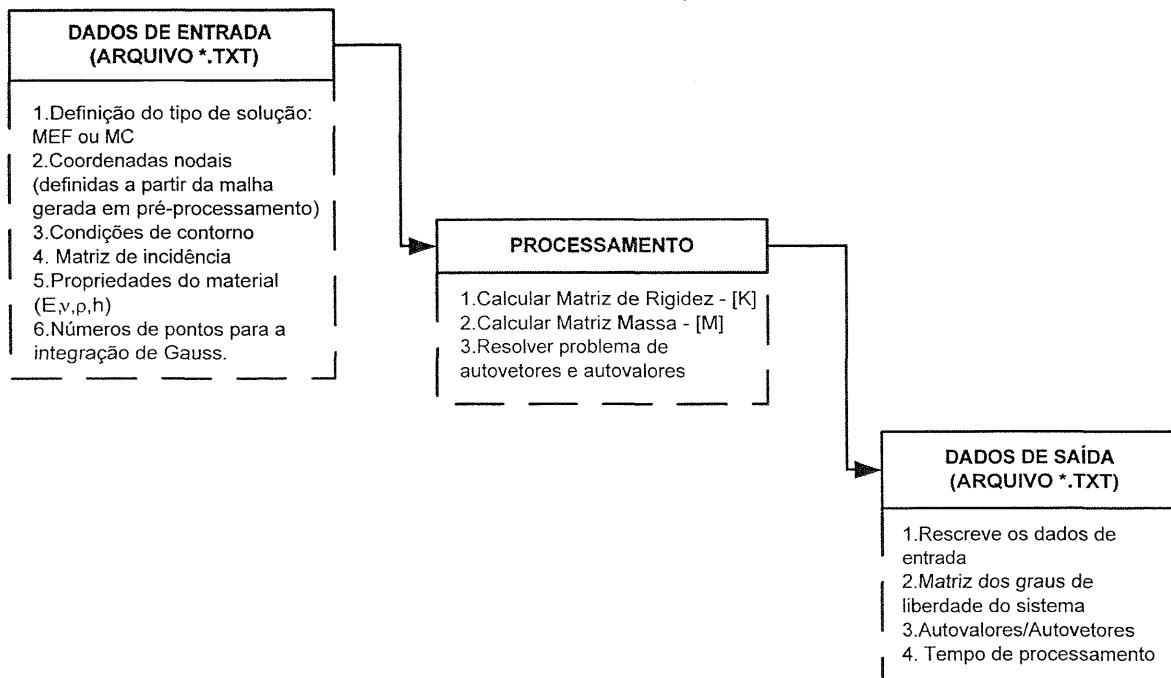
### 4.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A partir da formulação, foi desenvolvido um código computacional escrito em linguagem Fortran. O programa produz resultados, a partir de condições de contorno definidas, para o problema de vibrações livres em placas, tanto para o MEF quanto para o MC. Foram implementados os dois elementos propostos nas seções anteriores.

A determinação computacional dos *autovalores* e *autovetores* é realizada pelo *Método de Jacobi Generalizado*, utilizando subrotina extraída de BATHE (1996).

A Figura 4.4 ilustra detalhes dos arquivos de entrada e saída de dados, relacionando-os com a etapa de processamento.

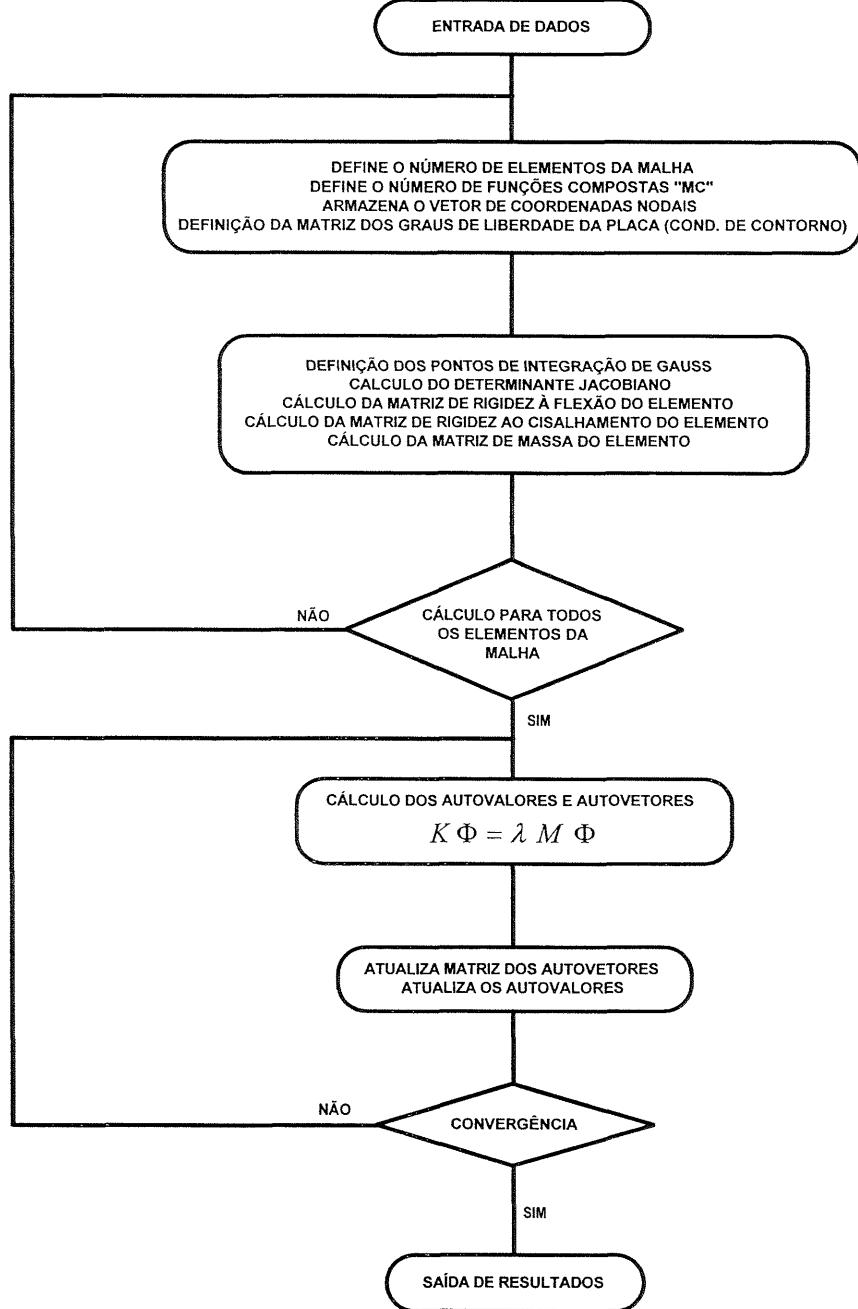
FIGURA 4.4 – DETALHES DA ESTRUTURA DE ENTRADA, PROCESSAMENTO E SAÍDA DE DADOS



A Figura 4.5 apresenta os elementos principais do fluxograma do código computacional implementado.

No código existem mecanismos de detecção de erros, onde se verifica se as matrizes de rigidez e massa são positivas definidas. No caso de existirem problemas o programa é interrompido, e a informação é escrita no arquivo de saída de dados.

FIGURA 4.5- FLUXOGRAMA MOSTRANDO OS ELEMENTOS PRINCIPAIS DO PROGRAMA



#### 4.3.1 Método de Jacobi Generalizado

O Método de Jacobi Generalizado é um dos muitos métodos de extração de autovalores existentes. A escolha do método de extração de autovalores depende da ordem da matriz e de suas características (por exemplo se é matriz esparsa), número de

autovalores que se deseja extrair, entre outros. Outra questão, é relativa a localização dos autovalores de interesse em relação ao espectro de autovalores. Sendo assim, a utilização do Método de Jacobi Generalizado produz bons resultados quando se quer todos os autovalores e este número de autovalores é de aproximadamente 200, conforme COOK (1989).

O problema de autovalores a ser resolvido é dado por

$$K\Phi = \lambda M\Phi , \quad (4.33)$$

onde  $K$  é a matriz de rigidez,  $M$  é a matriz massa e  $M \neq I$ ,  $\lambda$  é o autovalor e  $\Phi$  é o autovetor.

O Método de Jacobi Generalizado resolve o problema operando simultaneamente  $K$  e  $M$ , obtendo assim, todos os autovalores e autovetores correspondentes.

#### 4.3.2 Integração Numérica

O cálculo da integral para obter a matriz de rigidez e matriz massa do elemento finito apresenta grandes dificuldades sob o ponto de vista algébrico. A implementação do código computacional em questão necessita de uma estratégia específica para efetuar os cálculos das integrais, sendo então utilizado o procedimento numérico.

O procedimento numérico substitui a integral em todo o domínio pelo somatório do valor da função multiplicado por um fator peso em alguns pontos escolhidos do domínio. De maneira genérica e utilizando a matriz de rigidez como exemplo, tem-se

$$\left[ k^e \right] = \int_{\text{Área}} [B]^T [D] [B] \det J d\xi d\eta . \quad (4.34)$$

Assim, a matriz de rigidez para o elemento isoparamétrico é definida no sistema natural de coordenadas (intervalo de  $-1$  a  $+1$ ). O determinante do operador Jacobiano é utilizado para relacionar a área do elemento isoparamétrico à área do elemento real que está sendo mapeado. Como a análise leva em consideração apenas o plano médio da placa, a integral fica definida apenas na área. Então pode-se escrever

$$[k^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det J d\xi d\eta . \quad (4.35)$$

Coloca-se a expressão da integral obtida por procedimento numérico aproximado como sendo

$$\int F(\zeta) d\zeta = a_1 \cdot F(\zeta_1) + a_2 \cdot F(\zeta_2) + \cdots + a_n \cdot F(\zeta_n) = \sum_i a_i \cdot F(\zeta_i) + R_n . \quad (4.36)$$

onde os valores de  $F(\zeta)$  são determinados em alguns pontos escolhidos,  $a$  é o peso de cada um dos valores no somatório e  $R_n$  é o resíduo correspondente ao erro associado ao processo de integração numérica.

Para maior precisão no processo de integração, o número de pontos de integração deve ser ampliado.

Utilizou-se na implementação computacional o método de Quadratura de Gauss, onde a posição dos pontos de integração e os respectivos pesos são otimizados. O código computacional implementado permite ajustar a Ordem de Integração, viabilizando o tratamento do fenômeno de travamento, mencionado no Capítulo 2, e controle da precisão da integração. Pode-se representar a integração numérica da matriz de rigidez da placa por

$$[k^e] = \sum_{i,j} a_{ij} [F]_{ij} . \quad (4.37)$$

Nos casos relativos às verificações do Capítulo 5 utilizou-se ordem de

integração 2x2 para os termos associados às funções do MEF e ordem de integração 4x4 para os termos associados à TC.

#### **4.4 SUMÁRIO DO CAPÍTULO 4**

Neste capítulo apresentou-se a formulação numérica do MC. Para o presente trabalho optou-se pela implementação do elemento composto isoparamétrico quadrilateral de quatro nós e elemento composto isoparamétrico quadrilateral de oito nós. Para tanto, as funções de forma para interpolação utilizada pelo MEF foram definidas conforme BATHE (1996) e ODEN (1981). As funções de forma da parcela da TC utilizadas foram apresentadas considerando-se a inclusão de apenas quatro funções em cada um dos elementos a ser implementado. Entretanto, o número de funções pode ser qualquer e sua implementação pode ser feita de modo similar. Para facilitar o entendimento da formulação numérica, as derivadas das funções de forma também foram apresentadas.

Após a definição das funções de forma e suas derivadas procede-se a obtenção das matrizes associadas à rigidez da placa, matriz de flexão e cisalhamento, e também, a obtenção da matriz massa.

Com a formulação numérica definida, apresentou-se a estrutura do código computacional, que é capaz de resolver o problema de autovalores e autovetores. Características importantes do código computacional são permitir a escolha do número de parcelas da TC que se quer incluir na solução, monitorar a ocorrência do determinante do jacobiano negativo para algum elemento da malha e também verifica a ocorrência da matriz massa ou matriz de rigidez que não seja positiva definida. O código computacional também controla o tempo de processamento, sendo este um dos parâmetros para se determinar a eficiência do MC.

Durante o processo de cálculo computacional foi necessária a implementação de subrotina de integração numérica, sendo 6x6 a máxima ordem possível para a quadratura de Gauss. Com este procedimento foi possível determinar qual a ordem de

integração que atende aos requisitos de precisão para o MC, concluindo-se que a ordem de integração para os termos associados às parcelas da TC deve ser 4x4.

A determinação computacional dos *autovalores* e *autovetores* é realizada pelo *Método de Jacobi Generalizado*, utilizando subrotina extraída de BATHE (1996).

## 5 APLICAÇÕES E RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados resultados da implementação computacional realizada pelo MC. Faz-se uma comparação da sua solução com aquelas obtidas pelo MEF e por valores extraídos da teoria de placas. O efeito da variação do número de elementos (refinamento  $h$ ) e do número de coordenadas  $c$  ou graus de liberdade  $c$  (refinamento  $c$ ) sobre as soluções é também apresentado. Exemplos representativos de problemas são propostos para investigar: o efeito da distorção dos elementos da malha, a convergência dos resultados e, finalmente, os erros das diversas soluções comparando com os valores obtidos pelo MEF.

### 5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Para a obtenção de resultados com base na implementação proposta, apresentam-se casos relevantes nas seções seguintes, através das quais pretende-se validar e consolidar o método. Assim, são verificadas:

- A influência das parcelas da TC quando associadas ao elemento finito quadrilateral de quatro e oito nós.
- O efeito do refinamento  $h$  sobre o resultado das freqüências naturais.
- O efeito do refinamento  $c$ , comparando-o com o refinamento  $h$ , e sua influência sobre as freqüências naturais.
- O comportamento do método implementado quando sujeito à distorção do elemento.
- A comparação dos resultados obtidos com a implementação em relação ao MEF.
- A definição de parâmetros suficientes para aplicar o método em placas com diferentes condições de contornos e, fazer comparações com outros

métodos utilizados na resolução do problema.

- O efeito do *locking* ao qual está sujeito o elemento de quatro e oito nós do MC, ora implementado.

## 5.2 FORMATO DA VERIFICAÇÃO

Para a verificação numérica, propõe-se a abordagem baseada em casos representativos. Assim, tem-se:

- a) **Caso 1:** define-se uma placa com características dimensionais e condições de contorno onde se conhece a solução analítica, sendo esta, a referência para comparação. Para este caso, todas as informações são extraídas como, por exemplo, aspectos relacionados à convergência e métodos de refinamento. A Figura 5.1, apresenta a seqüência de análises realizadas para o Caso 1.
- b) **Caso 2:** são selecionadas placas com diversas condições de contorno cujos resultados produzidos são comparados com outros métodos disponíveis na literatura.

## 5.3 CASO 1: VIBRAÇÃO LIVRE DE PLACA QUADRADA COM OS QUATRO LADOS SIMPLESMENTE APOIADOS

Neste exemplo, considera-se a vibração livre de uma placa quadrada semi-espessa, onde o contorno apresenta-se simplesmente apoiado, e a relação entre o vão e a espessura ( $b/h$ ) é igual a 10. A Figura 5.2 apresenta a placa com as condições de contorno e características do material.

A placa é representada inicialmente por uma malha (3x3). Este processo se repete para malhas (4x4), (5x5), (6x6), (7x7), (8x8), (9x9) e (10x10). Sendo a placa simplesmente apoiada, o deslocamento transversal em todos os nós do contorno é igual a zero.

FIGURA 5.1 – MAPA DE LEITURA DAS ANÁLISES DO CASO 1

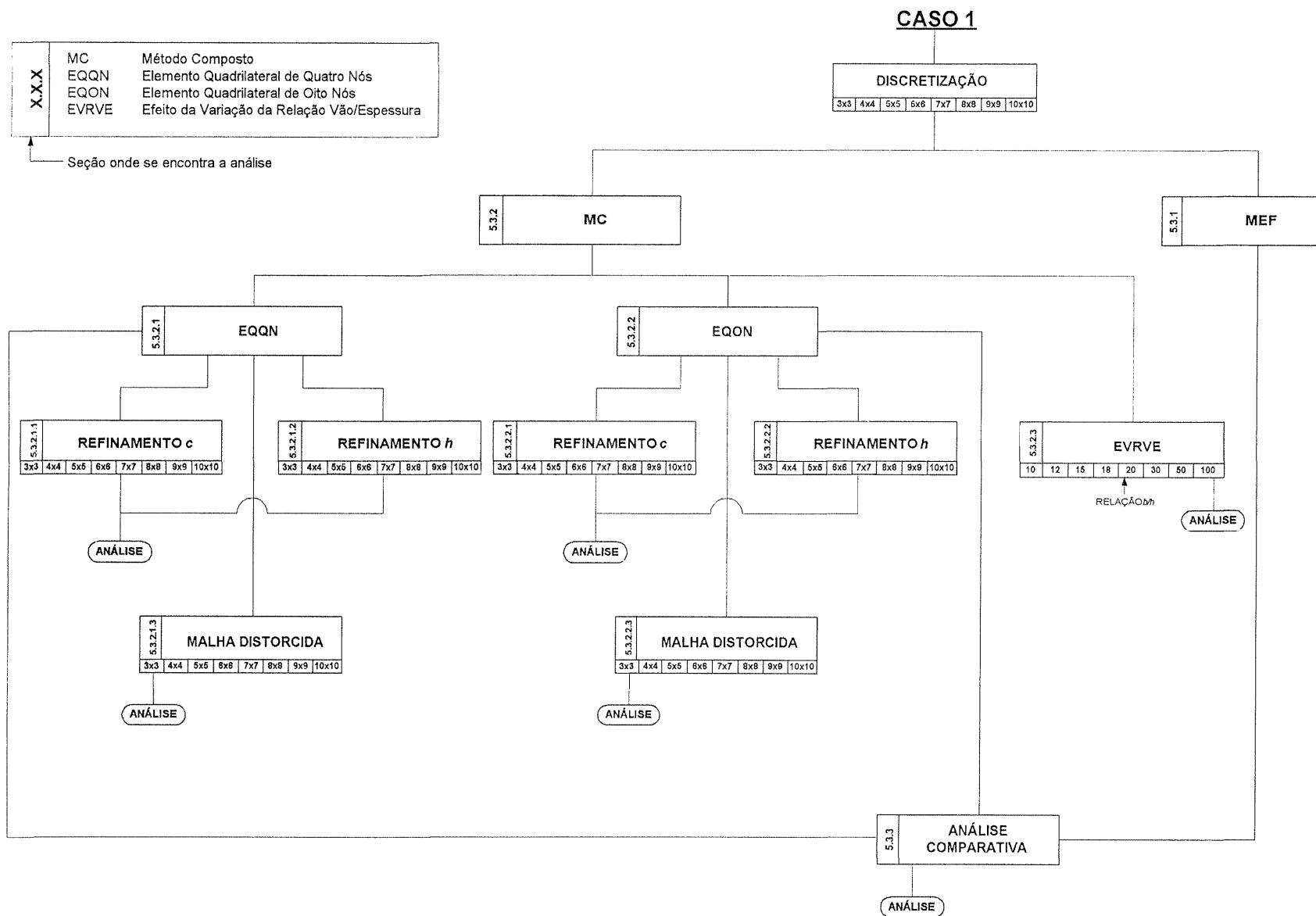
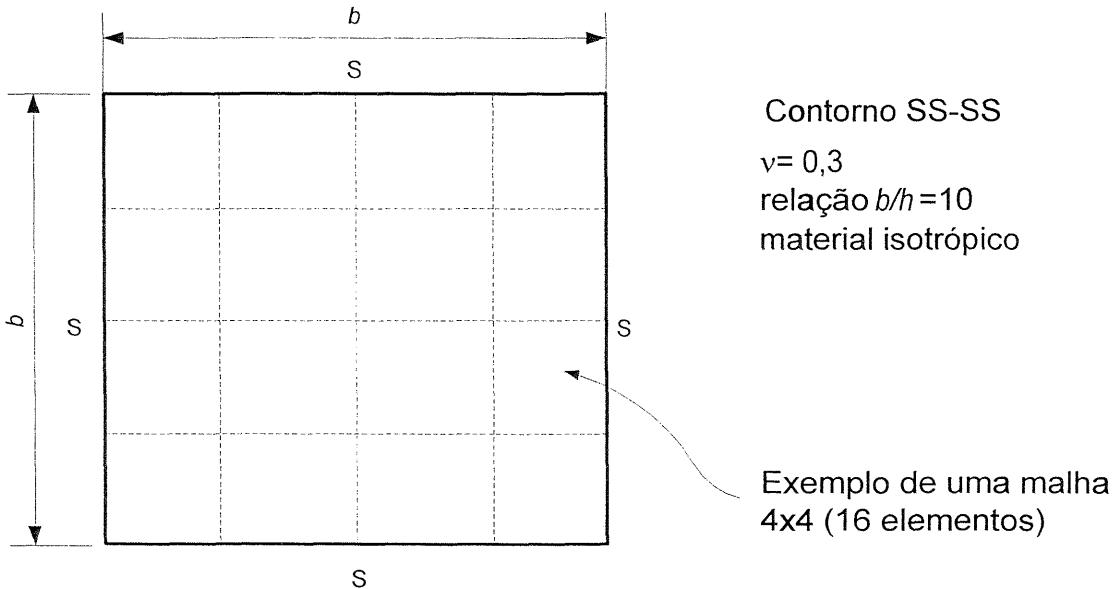


FIGURA 5.2 – CONDIÇÕES DE CONTORNO DA PLACA DO CASO 1



Para a apresentação dos resultados optou-se pela freqüência adimensionalizada  $\lambda$ , que é dada por

$$\lambda = \omega \left( \frac{\rho h b^4}{D} \right)^{1/2}, \quad (5.1)$$

onde  $\omega$  é a freqüência,  $h$  é a espessura da placa,  $b$  é o vão livre da placa e  $D$  é a rigidez à flexão da placa. A rigidez à flexão da placa é calculada por

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (5.2)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Tomando-se o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) igual a 0,3, a solução analítica para a freqüência adimensionalizada é obtida conforme proposto por SRINIVAS (1970).

### 5.3.1 Método dos Elementos Finitos

#### 5.3.1.1 Elemento Quadrilateral de Quatro Nós

As Tabelas 5.1 e 5.2 apresentam os valores das freqüências adimensionais, obtidas através do MEF com 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100 elementos quadrilaterais de quatro nós, e os respectivos erros em relação à solução exata. Neste caso, o número de graus de liberdade do MEF corresponde ao número de nós multiplicado por três (desconsiderando as condições de contorno). O aumento do número de graus de liberdade decorrente do aumento do número de elementos corresponde ao refinamento  $h$  do MEF.

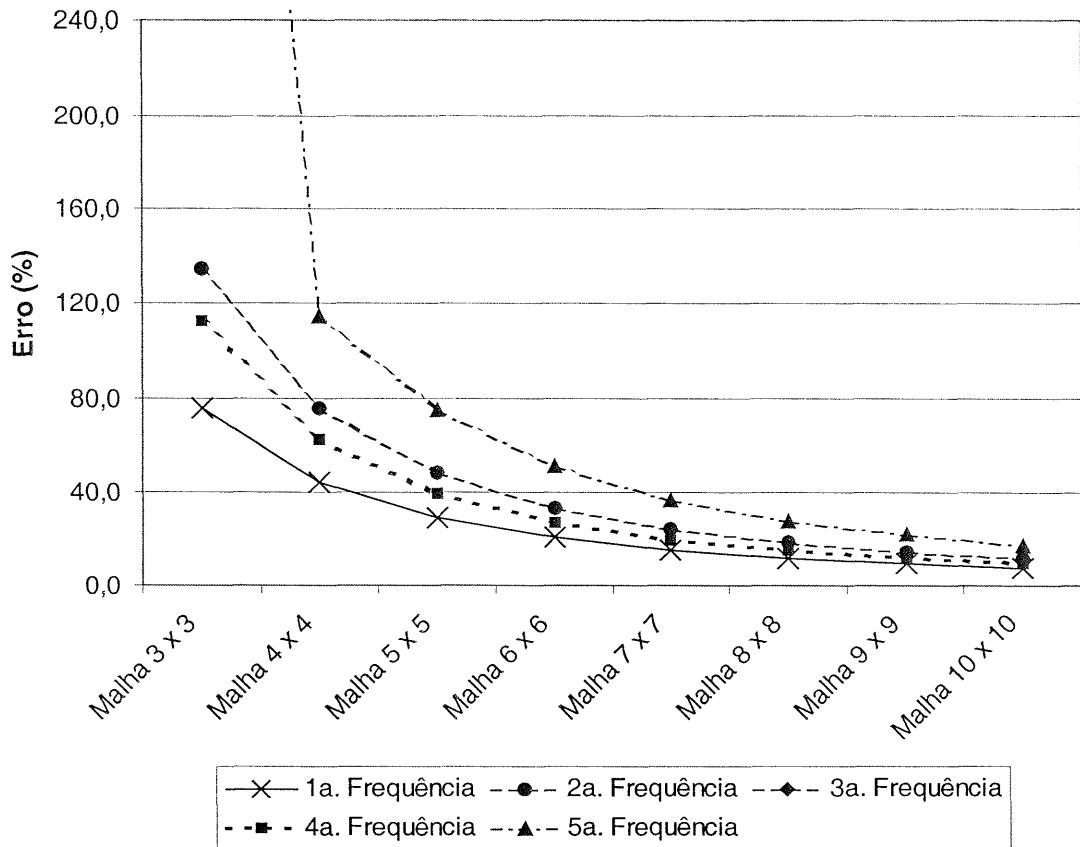
TABELA 5.1– RESULTADOS DA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA  $\lambda$  OBTIDOS PELO MEF COM MALHA (3X3) À (6X6) E OS ERROS REFERENTES À SOLUÇÃO ANALÍTICA

Modo	-Analítico-SRINIVAS (1970)	-MEF-		-MEF-		-MEF-		-MEF-	
		Malha 3x3	Malha 4x4	Malha 5x5	Malha 6x6	Malha 3x3	Malha 4x4	Malha 5x5	Malha 6x6
	$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)
1	19,089	33,513	75,56	27,588	44,52	24,688	29,33	23,048	20,74
2	45,620	106,927	134,39	80,236	75,88	67,676	48,35	60,900	33,49
3	45,620	106,927	134,39	80,236	75,88	67,676	48,35	60,900	33,49
4	70,089	148,745	112,22	113,857	62,45	97,690	39,38	89,056	27,06
5	85,488	651,564	662,17	183,096	114,18	149,447	74,82	129,274	51,22

TABELA 5.2– RESULTADOS DA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA  $\lambda$  OBTIDOS PELO MEF COM MALHA (7X7) À (10X10) E OS ERROS REFERENTES À SOLUÇÃO ANALÍTICA

Modo	-Analítico-SRINIVAS (1970)	-MEF-		-MEF-		-MEF-		-MEF-	
		Malha 7x7	Malha 8x8	Malha 9x9	Malha 10x10	Malha 7x7	Malha 8x8	Malha 9x9	Malha 10x10
	$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)
1	19,089	22,031	15,41	21,357	11,88	20,888	9,42	20,549	7,65
2	45,620	56,827	24,57	54,180	18,76	52,364	14,78	51,063	11,93
3	45,620	56,827	24,57	54,180	18,76	52,364	14,78	51,063	11,93
4	70,089	83,906	19,71	80,578	14,97	78,306	11,72	76,685	9,41
5	85,488	117,168	37,06	109,430	28,01	104,199	21,89	100,484	17,54

FIGURA 5.3 - ERRO RELATIVO DO MEF (ELEMENTOS DE QUATRO NÓS) PARA AS FREQUÊNCIAS ADIMENSIONAIS COMPARADOS À SOLUÇÃO ANALÍTICA



Nota:

- O gráfico da segunda e terceira freqüências são coincidentes
- O erro relativo da malha (3x3) para a quinta freqüência não consta do gráfico, sendo seu valor igual a 662,2% de erro relativo.

### 5.3.1.2 Elemento Quadrilateral de Oito Nós

Considerando agora o caso dos elementos quadrilaterais de oito nós, as Tabelas 5.3 e 5.4 apresentam os valores das freqüências adimensionais, obtidas através do MEF com malhas 3x3, 4x4, 5x5, 6x6, 7x7, 8x8, 9x9 e, finalmente, 10x10, e os respectivos erros em relação à solução exata. Esta primeira análise apresenta os resultados do refinamento  $h$  do MEF. Já, a Figura 5.4 contém a representação gráfica das cinco primeiras freqüências adimensionais em função do erro em relação à solução exata proposta por SRINIVAS (1970).

TABELA 5.3 – RESULTADOS DA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA  $\lambda$  OBTIDOS PELO MEF COM MALHA (3X3) À (6X6) E OS ERROS REFERENTES À SOLUÇÃO ANALÍTICA

Modo	-Analítico-SRINIVAS (1970)	-MEF-			-MEF-			-MEF-			
		Malha 3x3			Malha 4x4			Malha 5x5			
	$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)
1	19,089	19,303	1,12	19,144	0,29	19,089	0,00	19,082	-0,04		
2	45,620	48,603	6,54	46,532	2,00	45,928	0,68	45,717	0,21		
3	45,620	48,603	6,54	46,532	2,00	45,928	0,68	45,717	0,21		
4	70,089	81,018	15,59	72,030	2,77	70,533	0,63	70,143	0,08		
5	85,488	93,116	8,92	91,024	6,48	87,706	2,59	86,438	1,11		

TABELA 5.4 – RESULTADOS DA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA  $\lambda$  OBTIDOS PELO MEF COM MALHA (7X7) À (10X10) E OS ERROS REFERENTES À SOLUÇÃO ANALÍTICA

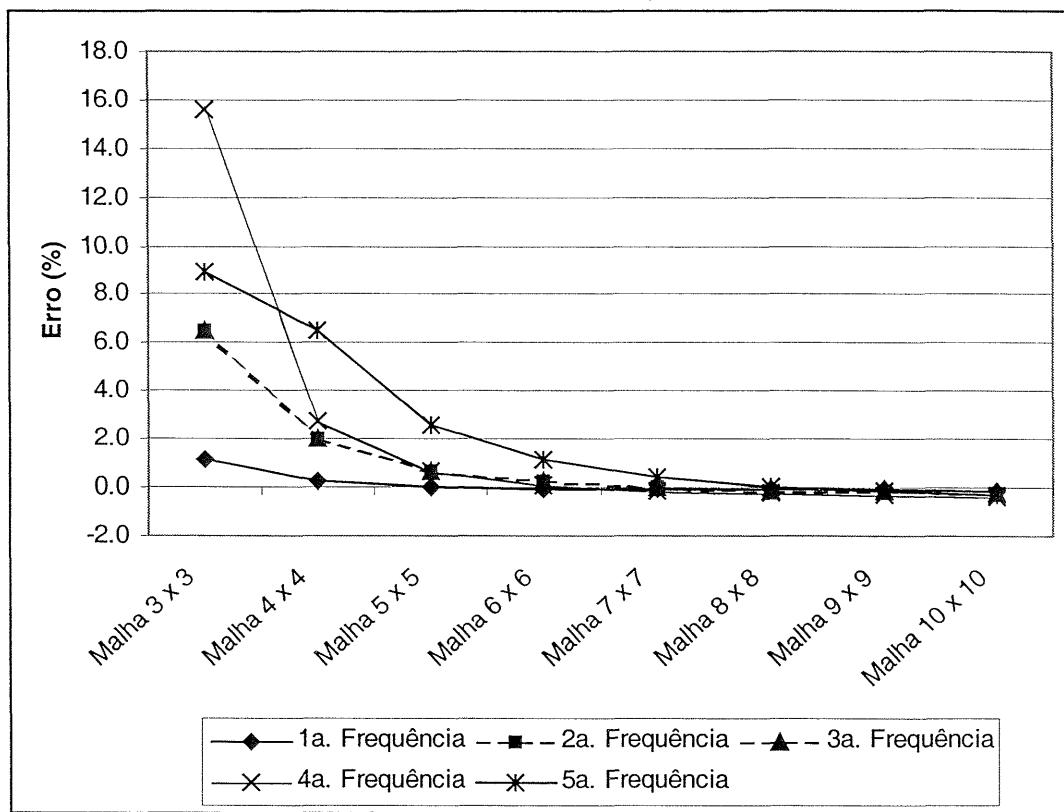
Modo	-Analítico-SRINIVAS (1970)	-MEF-			-MEF-			-MEF-			
		Malha 7x7			Malha 8x8			Malha 9x9			
	$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)
1	19,089	19,074	-0,08	19,071	-0,10	19,068	-0,11	19,067	-0,11		
2	45,620	45,614	-0,01	45,561	-0,13	45,533	-0,19	45,516	-0,23		
3	45,620	45,614	-0,01	45,561	-0,13	45,533	-0,19	45,516	-0,23		
4	70,089	69,679	-0,16	69,902	-0,27	69,862	-0,32	69,839	-0,36		
5	85,488	85,829	0,40	86,617	0,03	85,342	-0,17	85,242	-0,29		

### 5.3.1.3 Análise dos Resultados Obtidos para o MEF

Pode-se observar nas Figuras 5.3 e 5.4, que os resultados obtidos com o elemento quadrilateral de oito nós são melhores do que os de quatro nós, em função do enriquecimento do espaço de solução com o aumento do grau do polinômio de interpolação. Esta vantagem apresenta-se na forma de erro relativo menor para todas as freqüências, considerando a solução analítica.

O fato de existirem diferenças sensíveis em relação aos resultados destes elementos é que torna a implementação do elemento quadrilateral de quatro e oito nós no MC interessante, já que parte das funções utilizadas no MC são as mesmas do MEF. Assim, poderá ser observado o efeito do acréscimo das parcelas da TC na formulação.

FIGURA 5.4 - ERRO RELATIVO DO MEF (OITO NÓS) PARA AS FREQUÊNCIAS ADIMENSIONAIS REFERENTES À SOLUÇÃO ANALÍTICA



Nota:

- a) O gráfico da segunda e terceira freqüências são coincidentes

### 5.3.2 Método Composto

De forma a observar os resultados obtidos com a implementação do MC, consideram-se diversas variações no número de elementos (graus de liberdade nodais) e no número de graus de liberdade  $c$ .

O número total de graus de liberdade  $ntgl$  para placas utilizando o MC, pode ser obtido através da equação

$$ntgl = NTN \times ngl_n + NTE \times ngl_n \times ngl_c - ntgl_r \quad (5.3)$$

onde  $NTN$  é o número total de nós,  $NTE$  é o número total de elementos,  $ngl_n$  é o

número de graus de liberdade nodais,  $nglc$  é o número de graus de liberdade  $c$  por elemento e  $ntglr$  é o número total de graus de liberdade restritos.

O  $nglc$  é dado pelo número de funções ( $1,2,3...m$ ) que se está utilizando multiplicado pelo  $ngln$  (está se utilizando três graus de liberdade por nó). O  $nglc$  utilizado nesta pesquisa varia de um até quatro, uma vez que se utilizam até quatro parcelas da TC, para demonstrar a superposição com as funções de forma típicas do MEF.

### 5.3.2.1 Elemento Quadrilateral de Quatro nós

Para este elemento apresentam-se as análises propostas na Figura 5.1 e as condições de contorno da placa do Caso 1 dadas pela Figura 5.2.

#### 5.3.2.1.1 Refinamento $c$

Para comparar resultados relativos ao refinamento  $c$  utilizou-se malhas (3x3), (4x4) e (8x8). O uso desta discretização se justifica por permitir observar a evolução dos efeitos do acréscimo do número de funções da TC na solução.

Os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 5.5 à 5.7, sendo estes, comparados com a solução analítica.

TABELA 5.5 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM MALHA 3X3 E REFINAMENTO  $c$

Modo	SRINIVAS (1970)	Malha 3x3-1c		Malha 3x3-2c		Malha 3x3-3c		Malha 3x3-4c	
		$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$
1	19,089	30,740	61,03	29,970	57,00	28,918	51,49	28,457	49,08
2	45,620	98,466	115,84	88,188	93,31	85,210	86,78	83,957	84,04
3	45,620	98,466	115,84	88,188	93,31	85,210	86,78	83,957	84,04
4	70,089	132,911	89,63	123,977	76,88	123,617	76,37	122,815	75,23
5	85,488	238,529	179,02	223,141	161,02	194,575	127,60	186,032	117,61

TABELA 5.6 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM MALHA 4X4 E REFINAMENTO  $c$ 

Modo	SRINIVAS (1970)	Malha 4x4-1c		Malha 4x4-2c		Malha 4x4-3c		Malha 4x4-4c	
		$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$
1	19,089	24,872	30,29	24,545	28,58	24,135	26,44	23,970	25,57
2	45,620	75,184	64,81	73,339	60,76	71,204	56,08	69,523	52,40
3	45,620	75,184	64,81	73,339	60,76	71,204	56,08	69,523	52,40
4	70,089	103,865	48,19	100,157	42,90	97,198	38,68	94,571	34,93
5	85,488	163,648	91,43	148,204	73,36	138,630	62,16	124,873	46,07

TABELA 5.7 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM MALHA 8X8 E REFINAMENTO  $c$ 

Modo	SRINIVAS (1970)	Malha 8x8-1c		Malha 8x8-2c		Malha 8x8-3c		Malha 8x8-4c	
		$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$
1	19,089	20,770	8,81	20,731	8,60	20,629	8,07	20,603	7,93
2	45,620	52,793	15,72	52,369	14,79	52,066	14,13	51,903	13,77
3	45,620	52,793	15,72	52,369	14,79	52,066	14,13	51,903	13,77
4	70,089	76,958	9,80	76,004	8,44	75,311	7,45	74,876	6,83
5	85,488	105,481	23,39	103,653	21,25	102,715	20,15	101,337	18,54

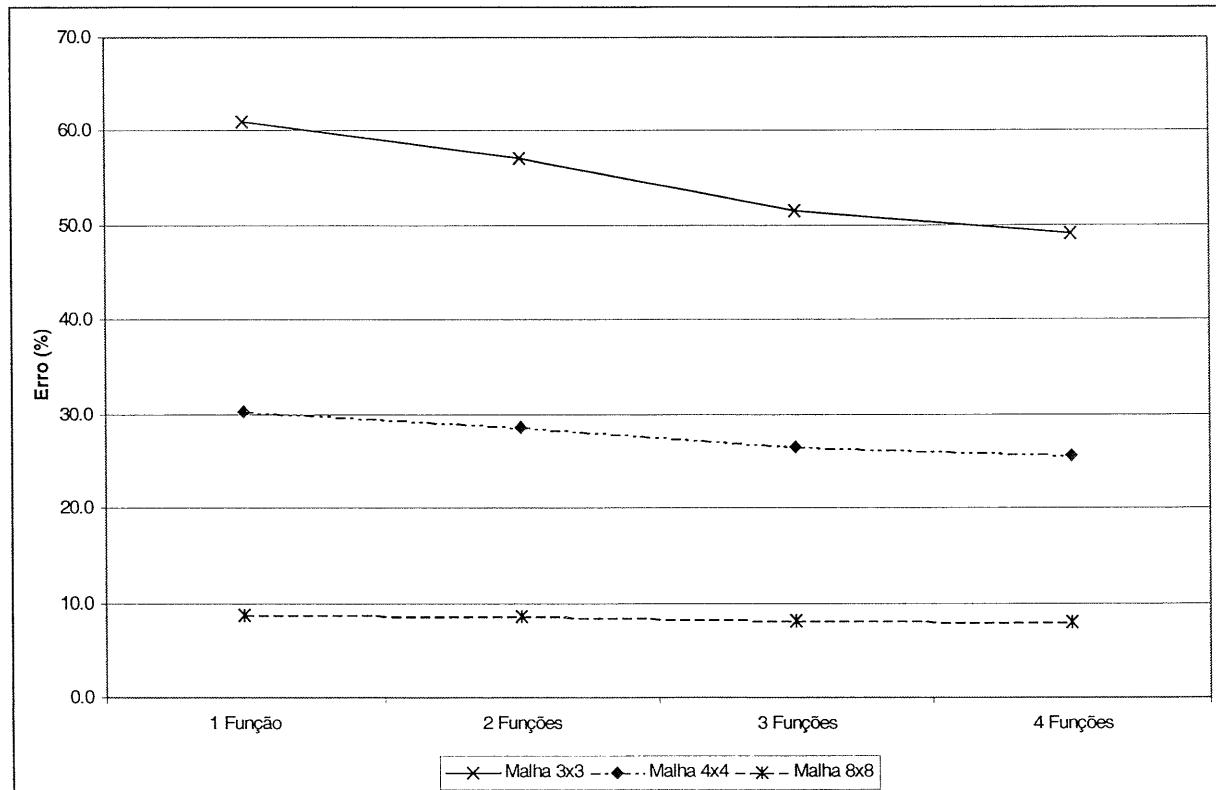
FIGURA 5.5 - ERRO RELATIVO DO MC COM REFINAMENTO  $c$  PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970)

FIGURA 5.6 - ERRO RELATIVO DO MC COM REFINAMENTO  $c$  PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970)

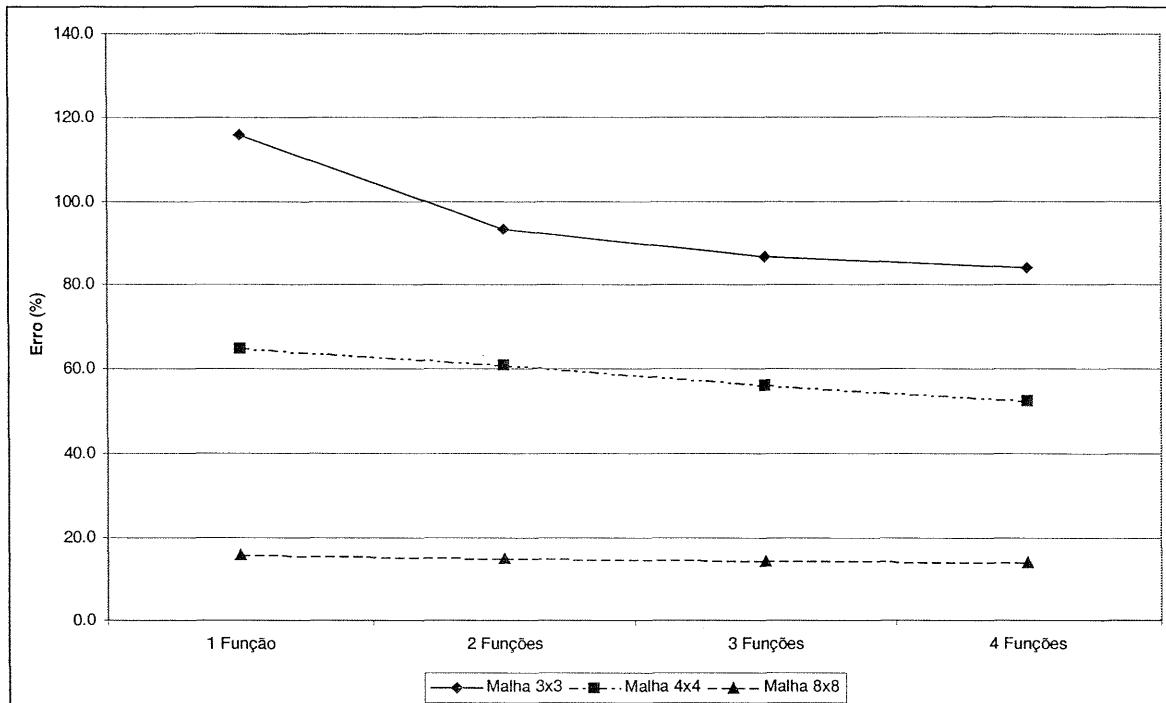
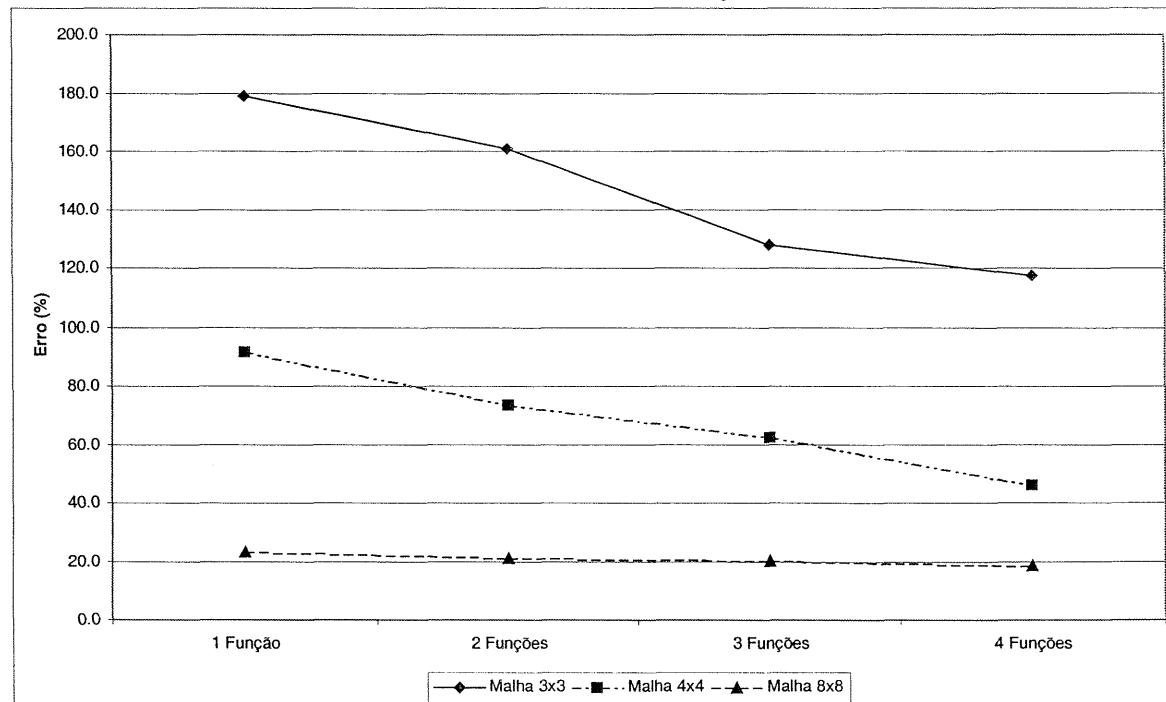


FIGURA 5.7 - ERRO RELATIVO DO MC COM REFINAMENTO  $c$  PARA A QUINTA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970)



### Análise dos resultados:

A Tabela 5.8 apresenta o comportamento dos resultados, avaliando-se a relação do uso de quatro e uma parcela da TC, para o refinamento  $c$  do MC.

TABELA 5.8 – COMPARATIVO DO PERCENTUAL DE MELHORIA DOS RESULTADOS ( $\Delta$ ) EM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA.

Modo	Malha 3x3 – 4c / 1c	Malha 4x4 – 4c / 1c	Malha 8x8 – 4c / 1c
1	19,6%	15,6%	10%
3	27,4%	19,1%	12,4%
5	34,3%	49,6%	20,7%

$$\Delta = \left[ \left( 1 - \frac{|(Erro relativo malha 4c)|}{|(Erro relativo malha 1c)|} \right) * 100 \right] [\%]$$

onde:  $\Delta$  representa o percentual de melhoria do resultado em relação à solução analítica.

Dos resultados obtidos pelo refinamento  $c$  do MC, apresentados nas Figuras 5.5 à 5.7, e com base na Tabela 5.8, as seguintes observações podem ser feitas:

- refinamento  $c$  melhora a precisão dos resultados para as freqüências mais altas (observar colunas da Tabela 5.8).
- Malhas mais grosseiras têm seus resultados melhorados sensivelmente com o refinamento  $c$  (observar linhas da Tabela 5.8).

#### 5.3.2.1.2 Refinamento $h$

Para comparar resultados relativos ao refinamento  $h$  foram utilizadas malhas (3x3, (5x5), (7x7), e (10x10), e até quatro funções da teoria clássica. A escolha destas discretizações permite observar o comportamento em relação à convergência com o aumento do número de elementos na malha.

Os valores produzidos podem ser encontrados nas Tabelas 5.9 à 5.12.

TABELA 5.9 – RESULTADOS OBTIDOS PARA MALHA (3X3), (5X5), (7X7) E (10X10) PELO MC COM UMA FUNÇÃO DA TC

Modo	SRINIVAS (1970)	Malha 3x3-1c			Malha 5x5-1c			Malha 7x7-1c		Malha 10x10-1c	
		$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$
1	19,089	30,740	61,03	22,883	19,88	21,368	11,94	20,264	6,16		
2	45,620	98,466	115,84	62,804	37,67	55,042	20,65	50,306	10,27		
3	45,620	98,466	115,84	62,804	37,67	55,042	20,65	50,306	10,27		
4	70,089	132,911	89,63	89,162	27,21	79,278	13,11	74,580	6,41		
5	85,488	238,529	179,02	135,894	58,96	111,628	30,58	98,266	14,95		

TABELA 5.10 – RESULTADOS OBTIDOS PARA MALHA (3X3), (5X5), (7X7) E (10X10) PELO MC COM DUAS FUNÇÕES DA TC

Modo	SRINIVAS (1970)	Malha 3x3-2c			Malha 5x5-2c			Malha 7x7-2c		Malha 10x10-2c	
		$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$
1	19,089	29,970	57,00	22,773	19,30	21,301	11,59	20,217	5,91		
2	45,620	88,188	93,31	61,453	34,71	54,635	19,76	49,995	9,59		
3	45,620	88,188	93,31	61,453	34,71	54,635	19,76	49,995	9,59		
4	70,089	123,977	76,88	87,227	24,45	78,207	11,58	73,625	5,04		
5	85,488	223,141	161,02	126,576	48,06	108,778	27,24	97,180	13,68		

TABELA 5.11 – RESULTADOS OBTIDOS PARA MALHA (3X3), (5X5), (7X7) E (10X10) PELO MC COM TRÊS FUNÇÕES DA TC

Modo	SRINIVAS (1970)	Malha 3x3-3c			Malha 5x5-3c			Malha 7x7-3c		Malha 10x10-3c	
		$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$
1	19,089	28,918	51,49	22,534	18,05	21,179	10,95	20,141	5,51		
2	45,620	85,210	86,78	60,364	32,32	54,179	18,76	49,769	9,10		
3	45,620	85,210	86,78	60,364	32,32	54,179	18,76	49,769	9,10		
4	70,089	123,617	76,37	85,588	22,11	77,312	10,31	73,082	4,27		
5	85,488	194,575	127,60	121,833	42,51	107,385	25,61	96,225	12,56		

TABELA 5.12 – RESULTADOS OBTIDOS PARA MALHA (3X3), (5X5), (7X7) E (10X10) PELO MC COM QUATRO FUNÇÕES DA TC

Modo	SRINIVAS (1970)	Malha 3x3-4c			Malha 5x5-4c			Malha 7x7-4c		Malha 10x10-4c	
		$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$
1	19,089	28,457	49,08	22,430	17,50	21,144	10,77	20,127	5,44		
2	45,620	83,957	84,04	59,658	30,77	53,902	18,15	49,672	8,88		
3	45,620	83,957	84,04	59,658	30,77	53,902	18,15	49,672	8,88		
4	70,089	122,815	75,23	83,919	19,73	76,682	9,41	72,828	3,91		
5	85,488	186,032	117,61	111,132	30,00	104,970	22,79	95,950	12,24		

FIGURA 5.8 - ERRO RELATIVO DO MC (ELEMENTO DE QUATRO NÓS) COM REFINAMENTO  $h$  PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA ADMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970)

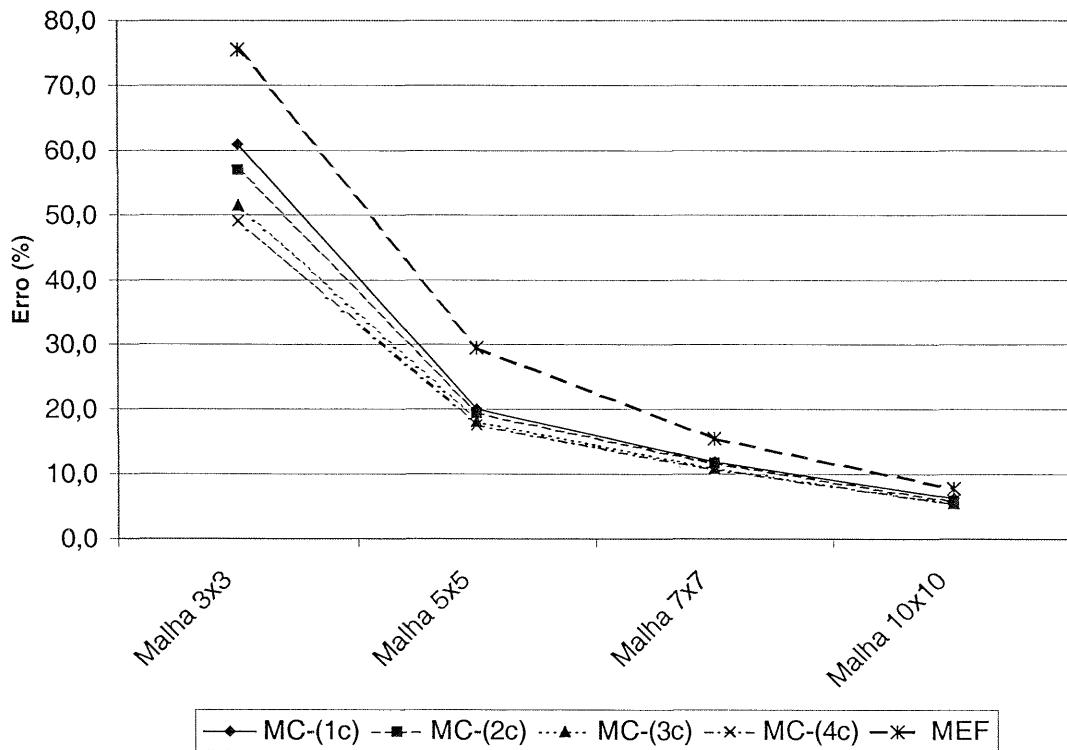


FIGURA 5.9 - ERRO RELATIVO DO MC (ELEMENTO DE QUATRO NÓS) COM REFINAMENTO  $h$  PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA ADMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970)

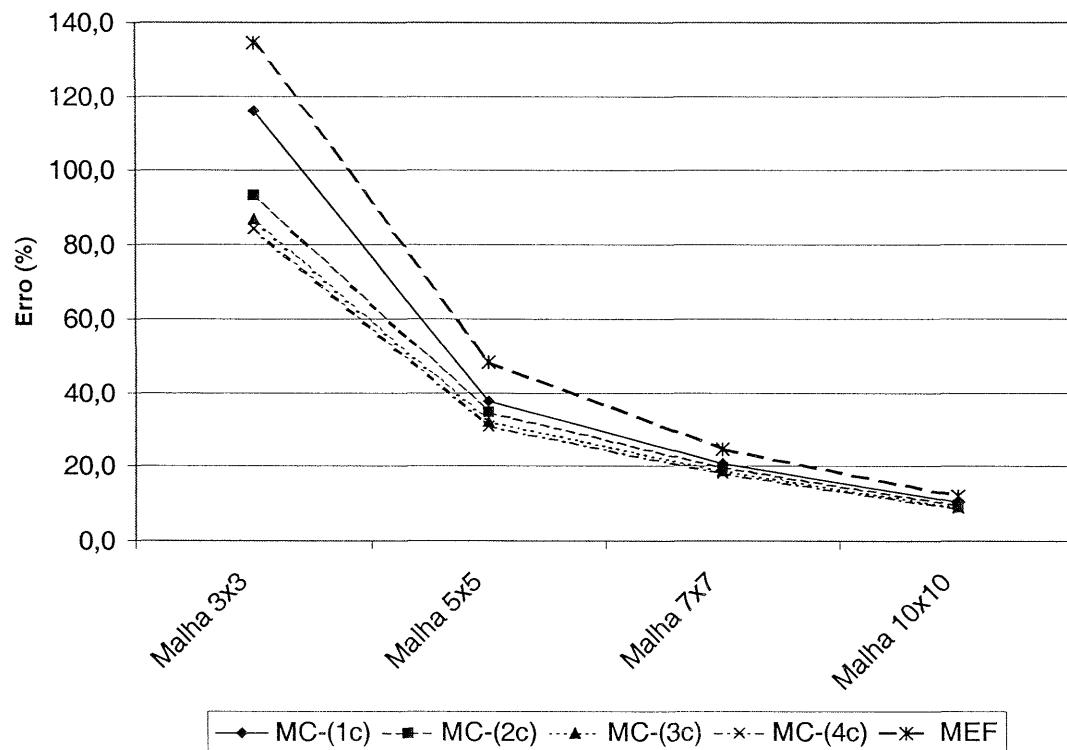
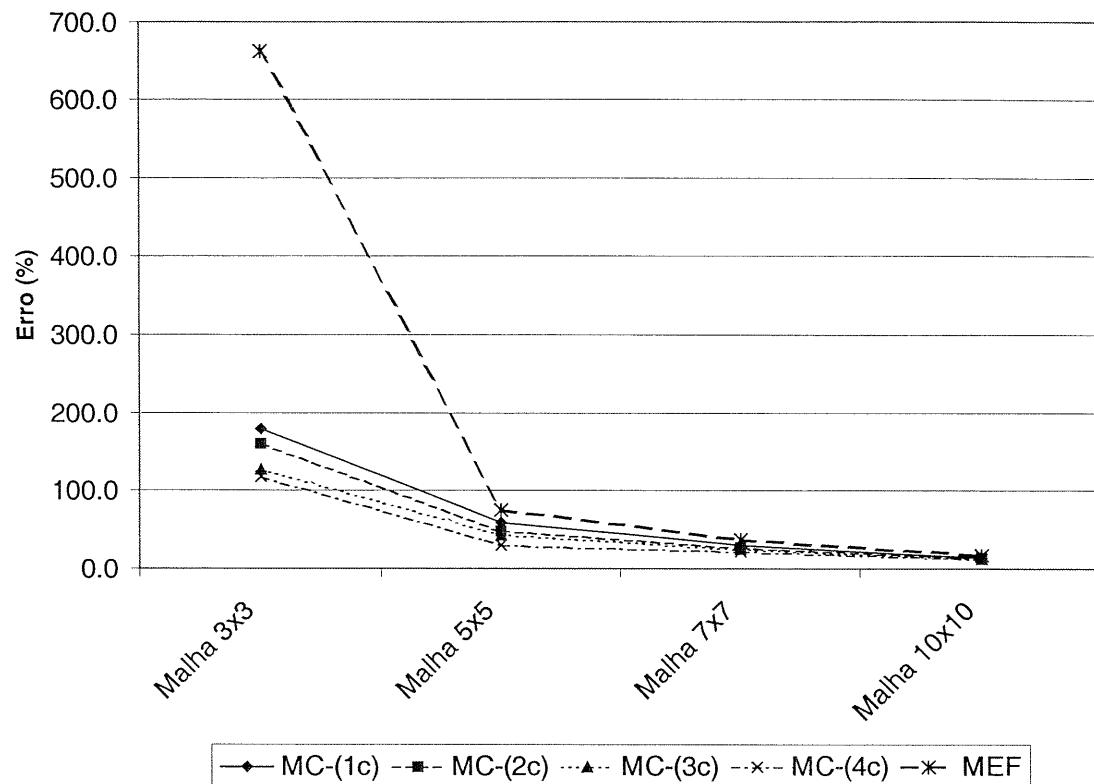


FIGURA 5.10 - ERRO RELATIVO DO MC (ELEMENTO DE QUATRO NÓS) COM REFINAMENTO  $h$  PARA A QUINTA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970)



#### Análise dos resultados:

Na Tabela 5.13 apresentam-se os resultados comparativos para os valores obtidos com o refinamento  $h$  do MC para o elemento de quatro nós.

TABELA 5.13 – COMPARATIVO DO PERCENTUAL DE MELHORIA DOS RESULTADOS ( $\Delta$ ) EM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA.

Modo	Malha 10x10 / Malha 3x3 - 1c	Malha 10x10 / Malha 3x3 - 2c	Malha 10x10 / Malha 3x3 - 3c	Malha 10x10 / Malha 3x3 - 4c
1	89,9%	89,6%	89,3%	88,9%
3	91,1%	89,7%	89,5%	89,4%
5	91,6%	91,5%	90,2%	89,6%

$$\Delta = \left[ \left( 1 - \frac{|(Erro relativo malha (10x10) - refino c)|}{|(Erro relativo malha (3x3) - refino c)|} \right) * 100 \right] [\%]$$

onde:  $\Delta$  representa o percentual de melhoria do resultado em relação à solução analítica.

Dos resultados obtidos pelo refinamento  $h$  do MC, apresentados nas Figuras 5.8 à 5.10, as seguintes observações podem ser feitas:

- refinamento  $h$  obtêm convergência para todas as freqüências, como pode

ser observado pela tendência das curvas nas figuras.

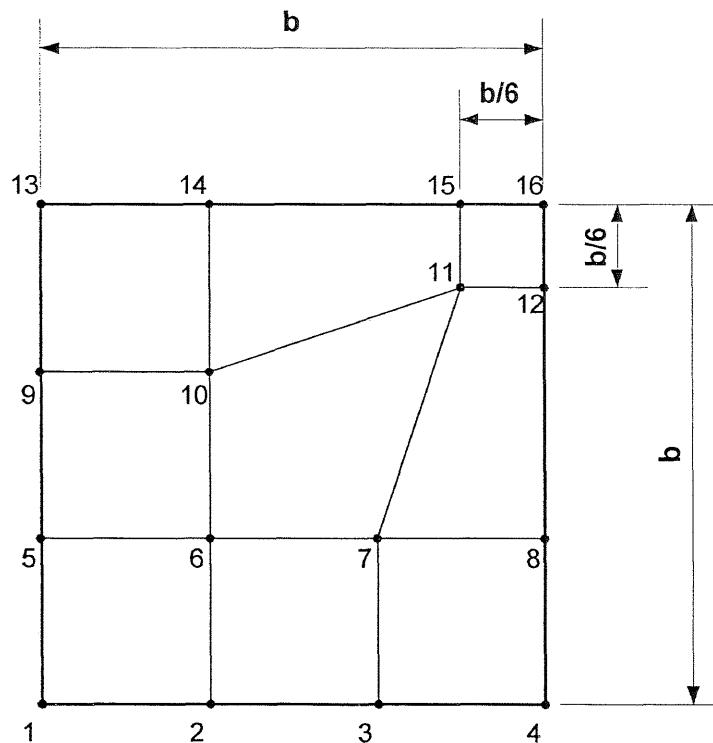
- o padrão de convergência não se altera com o aumento do número de funções da TC. Isto pode ser observado na Tabela 5.13.
- o resultado relativo à solução pelo MEF, para a quinta freqüência adimensionalizada e malha 3x3, não faz sentido porque esta malha é muito grosseira para capturar este modo de vibração.

#### 5.3.2.1.3 Distorção de malha – quatro nós

Nesta seção faz-se a análise dos efeitos da distorção do elemento quadrilateral de quatro nós do MC, nos resultados das freqüências calculadas.

A malha utilizada para analisar a distorção é apresentada na Figura 5.11.

FIGURA 5.11 – MALHA 3X3 COM ELEMENTOS DE QUATRO NÓS DISTORCIDOS



Os resultados obtidos com o MC, para até quatro funções da TC, são apresentados em termos de erro relativo à solução analítica, para a primeira, terceira e quinta freqüências naturais. Como condições de contorno, a placa apresenta os quatro

bordos simplesmente apoiados (SS-SS), com relação vão/espessura ( $b/h$ ) igual a 10 e coeficiente de Poisson igual a 0,3.

FIGURA 5.12 – EFEITO DA DISTORÇÃO DO ELEMENTO DE QUATRO NÓS PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL – ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA

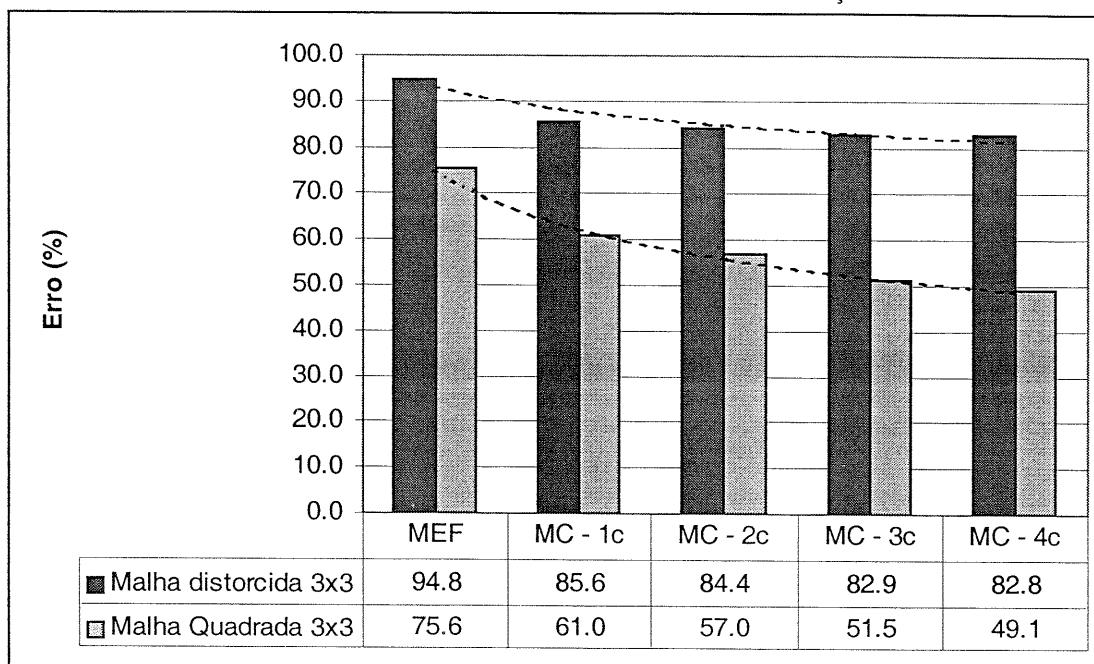


FIGURA 5.13 – EFEITO DA DISTORÇÃO DO ELEMENTO DE QUATRO NÓS PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA NATURAL – ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA

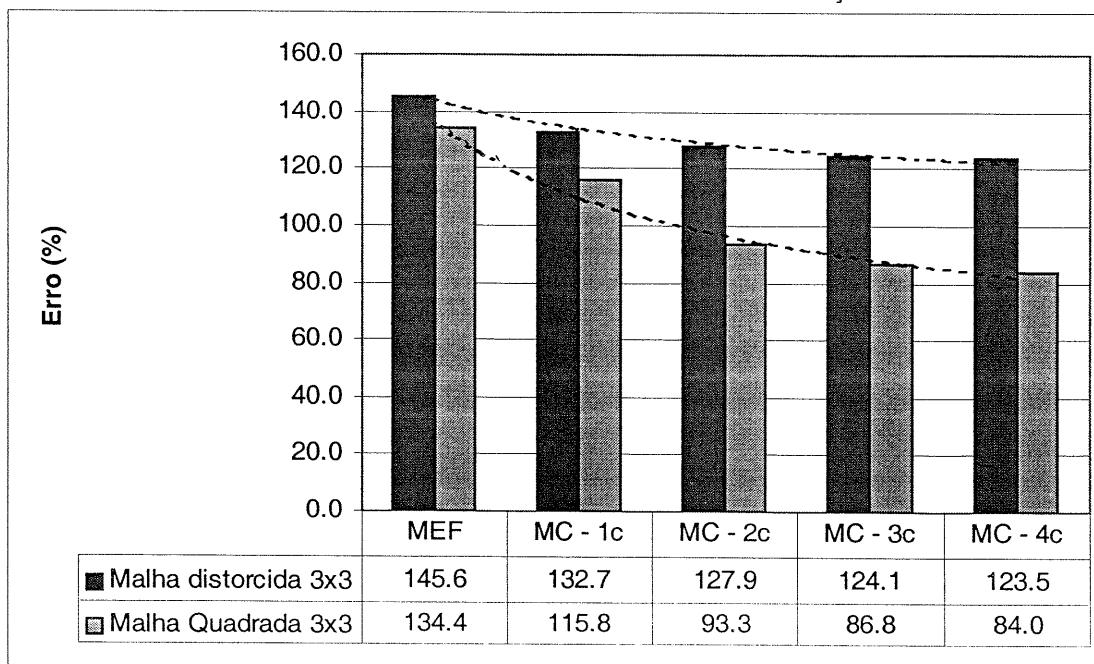
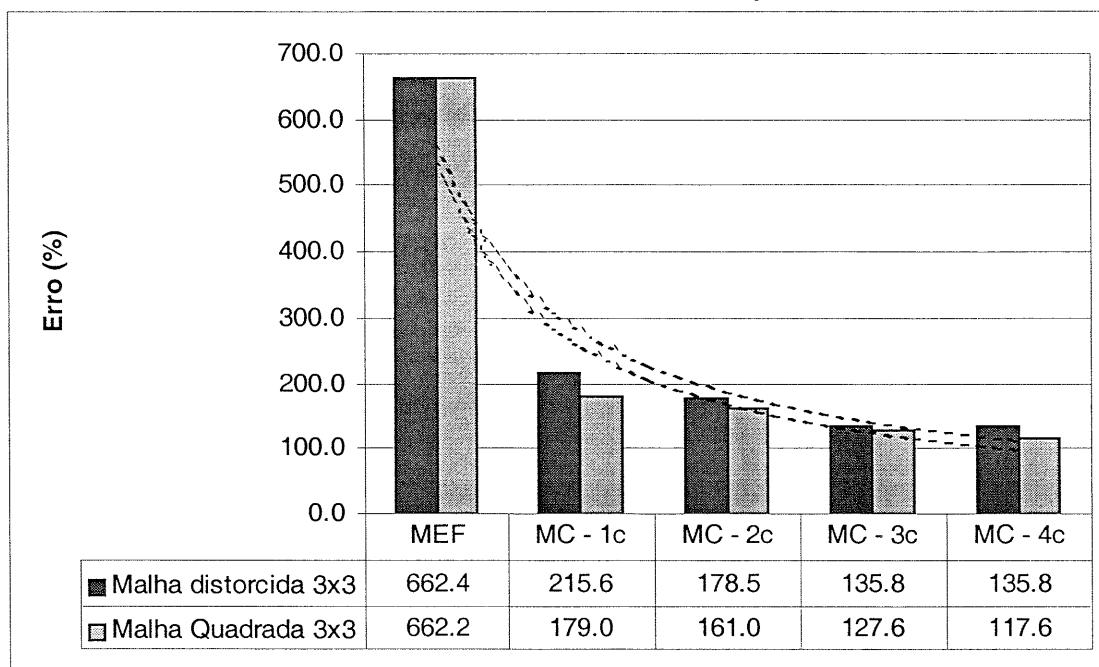


FIGURA 5.14 – EFEITO DA DISTORÇÃO DO ELEMENTO DE QUATRO NÓS PARA A QUINTA FREQUÊNCIA NATURAL – ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA



Análise dos resultados:

A Tabela 5.14 apresenta os resultados obtidos a partir da distorção aplicada. Estes resultados estão colocados em forma de percentual de degradação, levando-se em conta o resultado analítico proposto por SRINIVAS (1970).

TABELA 5.14 – COMPARATIVO DO PERCENTUAL DE DEGRADAÇÃO DOS RESULTADOS (II) EM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA

Modo	1 Função	2 Funções	3 Funções	4 Funções
1	40,0%	48,0%	61,0%	68,6%
3	14,6%	37,0%	43,0%	47,0%
5	20,4%	10,9%	6,4%	15,5%

$$\Pi = \left[ \left( \frac{\left| (Erro relativo malha distorcida refino c) \right|}{\left| (Erro relativo malha retangular refino c) \right|} - 1 \right) * 100 \right] [\%]$$

onde:  $\Pi$  representa o percentual de degradação dos resultados da malha distorcida em relação à malha regular.

Pode-se observar das Figuras 5.12 à 5.14 e com base na Tabela 5.14, que:

- A distorção da malha é representativa no resultado das freqüências.
- Aparentemente o acréscimo de funções da TC minimiza, mas não resolve o problema da degradação dos resultados produzidos com a malha distorcida.
- As conclusões obtidas devem ser apenas em relação ao comportamento

do MC com a utilização deste elemento de quatro nós, já que este elemento, pela própria formulação não apresenta resultados precisos.

### 5.3.2.2 Elemento Quadrilateral de Oito Nós

Da mesma maneira que o procedimento empregado para o elemento quadrilateral de quatro nós, as análises seguem a seqüência proposta na Figura 5.1.

#### 5.3.2.2.1 Refinamento $c$

Para comparar resultados relativos ao refinamento  $c$  foram utilizadas malhas (3x3), (4x4) e (8x8). Este padrão de discretização é aplicado novamente para poder se comparar os resultados com aqueles obtidos para o elemento quadrilateral de quatro nós.

As Tabelas 5.15 à 5.17, apresentam os resultados do refinamento  $c$ , sendo que estes são comparados à solução analítica.

TABELA 5.15 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM MALHA 3X3 E REFINAMENTO  $c$

Modo	SRINIVAS (1970)	Malha 3x3-1c			Malha 3x3-2c			Malha 3x3-3c			Malha 3x3-4c		
		$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	
1	19,089	19,301	1,11	19,297	1,09	19,286	1,03	19,276	0,98				
2	45,620	48,542	6,40	48,454	6,21	48,390	6,07	48,312	5,90				
3	45,620	48,542	6,40	48,454	6,21	48,390	6,07	48,312	5,90				
4	70,089	78,552	12,07	77,966	11,24	77,535	10,62	77,235	10,19				
5	85,488	92,614	8,34	92,157	7,80	91,613	7,16	91,572	7,12				

TABELA 5.16 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM MALHA 4X4 E REFINAMENTO  $c$

Modo	SRINIVAS (1970)	Malha 4x4-1c			Malha 4x4-2c			Malha 4x4-3c			Malha 4x4-4c		
		$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	
1	19,089	19,143	0,28	19,140	0,27	19,136	0,25	19,133	0,23				
2	45,620	46,526	1,99	46,519	1,97	46,466	1,86	46,421	1,76				
3	45,620	46,526	1,99	46,519	1,97	46,466	1,86	46,421	1,76				
4	70,089	71,844	2,50	71,772	2,40	71,697	2,29	71,618	2,18				
5	85,488	90,951	6,39	90,665	6,06	90,554	5,93	90,279	5,60				

TABELA 5.17 – RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM MALHA 8X8 E REFINAMENTO  $c$ 

Modo	SRINIVAS (1970)	Malha 8x8-1c		Malha 8x8-2c		Malha 8x8-3c		Malha 8x8-4c	
		$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$
1	19,089	19,071	-0,10	19,070	-0,10	19,070	-0,10	19,070	-0,10
2	45,620	45,561	-0,13	45,561	-0,13	45,554	-0,14	45,553	-0,15
3	45,620	45,561	-0,13	45,561	-0,13	45,554	-0,14	45,553	-0,15
4	70,089	69,901	-0,27	69,893	-0,28	69,887	-0,29	69,885	-0,29
5	85,488	85,516	0,03	85,479	-0,01	85,445	-0,05	85,441	-0,06

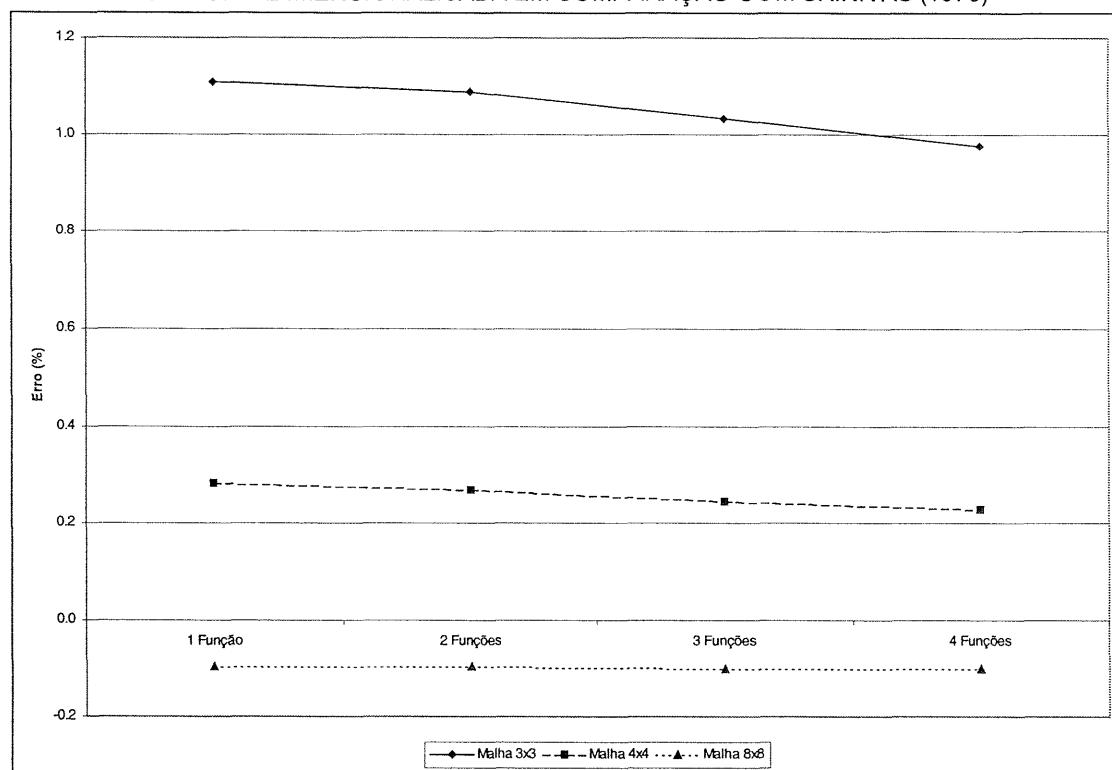
FIGURA 5.15 - ERRO RELATIVO DO MC – OITO NÓS COM REFINAMENTO  $c$  PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970)

FIGURA 5.16 - ERRO RELATIVO DO MC - OITO NÓS COM REFINAMENTO  $c$  PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970)

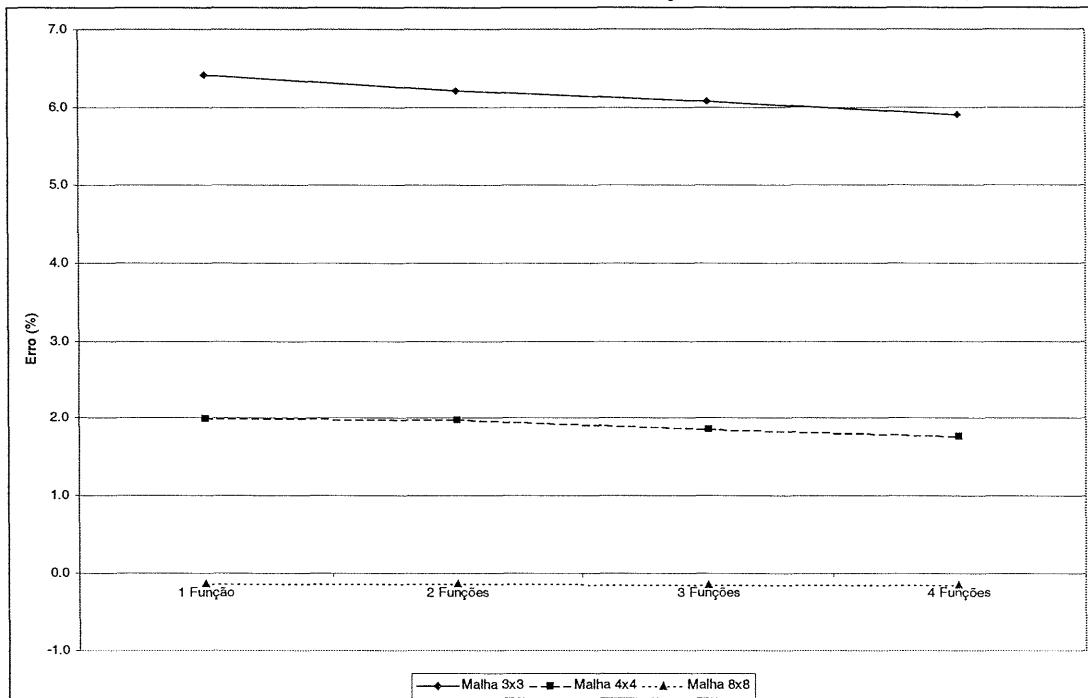
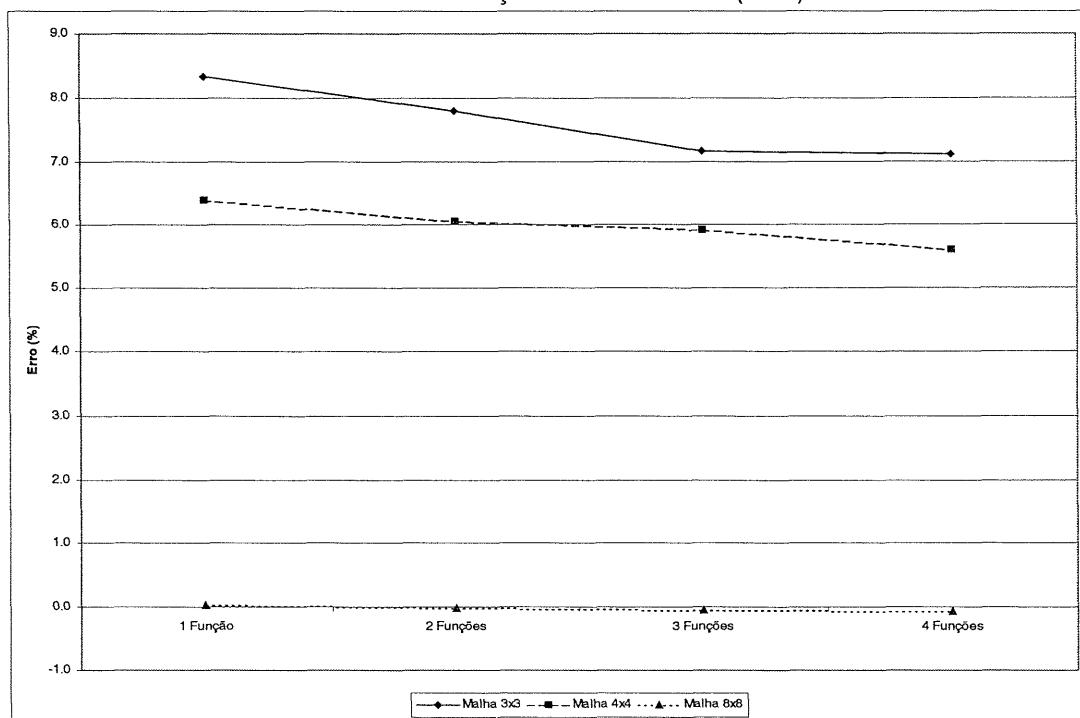


FIGURA 5.17 - ERRO RELATIVO DO MC – OITO NÓS COM REFINAMENTO  $c$  PARA A QUINTA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970)



### Análise dos resultados:

A Tabela 5.18 apresenta o comportamento dos resultados, para o refinamento  $c$  do MC, para a relação entre o uso de quatro e uma parcela da TC.

TABELA 5.18 – COMPARATIVO DO PERCENTUAL DE MELHORIA DOS RESULTADOS ( $\Delta$ ) EM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA.

Modo	Malha 3x3 – 4c / 1c	Malha 4x4 – 4c / 1c	Malha 8x8 – 4c / 1c
1	11,7%	17,8%	0,0%
3	7,8%	11,6%	15,4%
5	14,6%	12,4%	100,0%

$$\Delta = \left( 1 - \frac{\left| (Erro relativo malha 4c) \right|}{\left| (Erro relativo malha 1c) \right|} \right) * 100 [\%]$$

onde:  $\Delta$  representa o percentual de melhoria do resultado em relação à solução analítica.

Dos resultados obtidos pelo refinamento  $c$  do MC, apresentados nas Figuras 5.15 à 5.17, as seguintes observações podem ser feitas:

- Para as malhas mais grosseiras o refinamento  $c$  mantém o padrão de melhoria da solução entre às freqüências pesquisadas.
- No caso da malha 8x8, pode-se observar grande variação relativa à melhoria da solução. Porém, em valores absolutos a diferença é pequena, conforme pode ser visto na Figura 5.17.

#### 5.3.2.2.2 Refinamento $h$

Para comparar resultados relativos ao refinamento  $h$  utilizou-se as malhas (3x3), (5x5), (7x7), e (10x10), com até quatro funções para a parcela da TC. As Tabelas 5.19 à 5.22, contém os valores computados com a implementação proposta.

TABELA 5.19 – RESULTADOS OBTIDOS PARA MALHA (3X3), (5X5), (7X7) E (10X10) PELO MC COM UMA FUNÇÃO DA TC

Modo	SRINIVAS (1970)	Malha 3x3-1c		Malha 5x5-1c		Malha 7x7-1c		Malha 10x10-1c	
		$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)
1	19,089	19,301	1,11	19,089	0,00	19,074	-0,08	19,067	-0,11
2	45,620	48,542	6,40	45,929	0,68	45,613	-0,01	45,516	-0,23
3	45,620	48,542	6,40	45,929	0,68	45,613	-0,01	45,516	-0,23
4	70,089	78,552	12,07	70,494	0,58	69,976	-0,16	69,838	-0,36
5	85,488	92,614	8,34	87,693	2,58	85,828	0,40	85,242	-0,29

TABELA 5.20 – RESULTADOS OBTIDOS PARA MALHA (3X3), (5X5), (7X7) E (10X10) PELO MC COM DUAS FUNÇÕES DA TC

Modo	SRINIVAS (1970)	Malha 3x3-2c			Malha 5x5-2c			Malha 7x7-2c			Malha 10x10-2c	
		$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)
1	19,089	19,297	1,09	19,089	0,00	19,074	-0,08	19,067	-0,11			
2	45,620	48,454	6,21	45,925	0,67	45,613	-0,02	45,516	-0,23			
3	45,620	48,454	6,21	45,925	0,67	45,613	-0,02	45,516	-0,23			
4	70,089	77,966	11,24	70,459	0,53	69,965	-0,18	69,834	-0,36			
5	85,488	92,157	7,80	87,546	2,41	85,770	0,33	85,225	-0,31			

TABELA 5.21 – RESULTADOS OBTIDOS PARA MALHA (3X3), (5X5), (7X7) E (10X10) PELO MC COM TRÊS FUNÇÕES DA TC

Modo	SRINIVAS (1970)	Malha 3x3-3c			Malha 5x5-3c			Malha 7x7-3c			Malha 10x10-3c	
		$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)
1	19,089	19,286	1,03	19,086	-0,02	19,073	-0,08	19,067	-0,12			
2	45,620	48,390	6,07	45,894	0,60	45,603	-0,04	45,513	-0,24			
3	45,620	48,390	6,07	45,894	0,60	45,603	-0,04	45,513	-0,24			
4	70,089	77,535	10,62	70,431	0,49	69,955	-0,19	69,832	-0,37			
5	85,488	91,613	7,16	87,328	2,15	85,740	0,30	85,215	-0,32			

TABELA 5.22 – RESULTADOS OBTIDOS PARA MALHA (3X3), (5X5), (7X7) E (10X10) PELO MC COM QUATRO FUNÇÕES DA TC

Modo	SRINIVAS (1970)	Malha 3x3-4c			Malha 5x5-4c			Malha 7x7-4c			Malha 10x10-4c	
		$\lambda_i$	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)	$\lambda_i$	erro(%)
1	19,089	19,276	0,98	19,085	-0,02	19,073	-0,08	19,067	-0,12			
2	45,620	48,312	5,90	45,885	0,58	45,601	-0,04	45,513	-0,24			
3	45,620	48,312	5,90	45,885	0,58	45,601	-0,04	45,513	-0,24			
4	70,089	77,235	10,19	70,406	0,45	69,951	-0,20	69,831	-0,37			
5	85,488	91,572	7,12	87,267	2,08	85,733	0,29	85,214	-0,32			

FIGURA 5.18 - ERRO RELATIVO DO MC (ELEMENTO DE OITO NÓS) OITO NÓS COM REFINAMENTO  $h$  PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970)

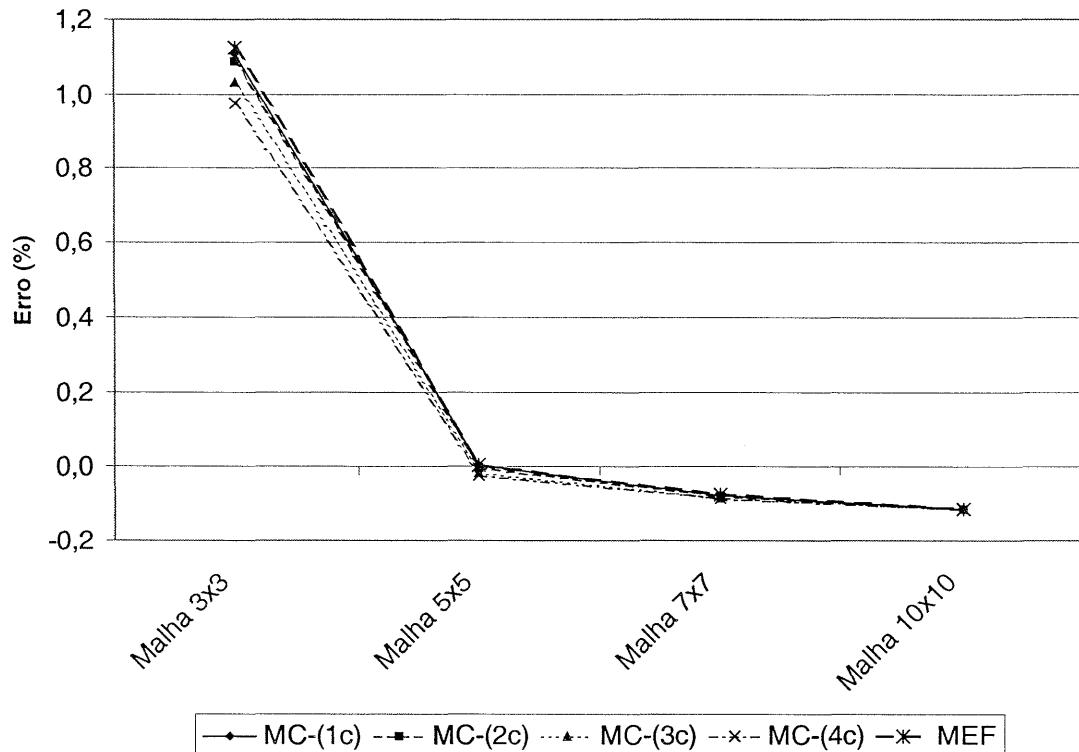


FIGURA 5.19 - ERRO RELATIVO DO MC (ELEMENTO DE OITO NÓS) COM REFINAMENTO  $h$  PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970)

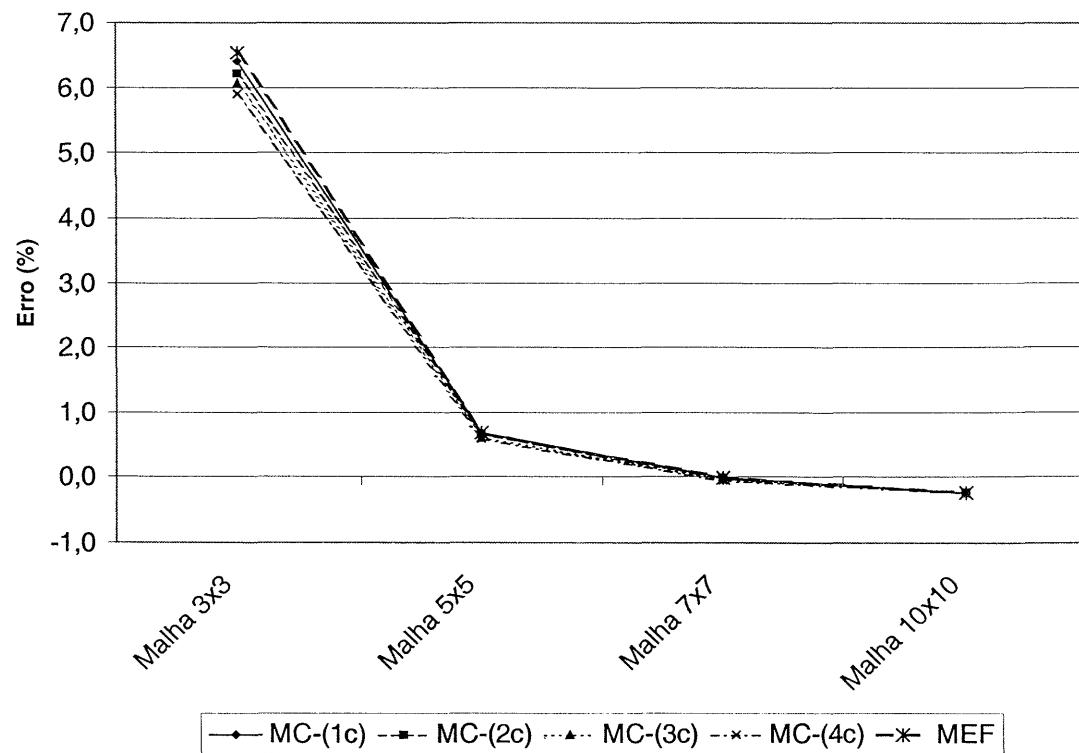
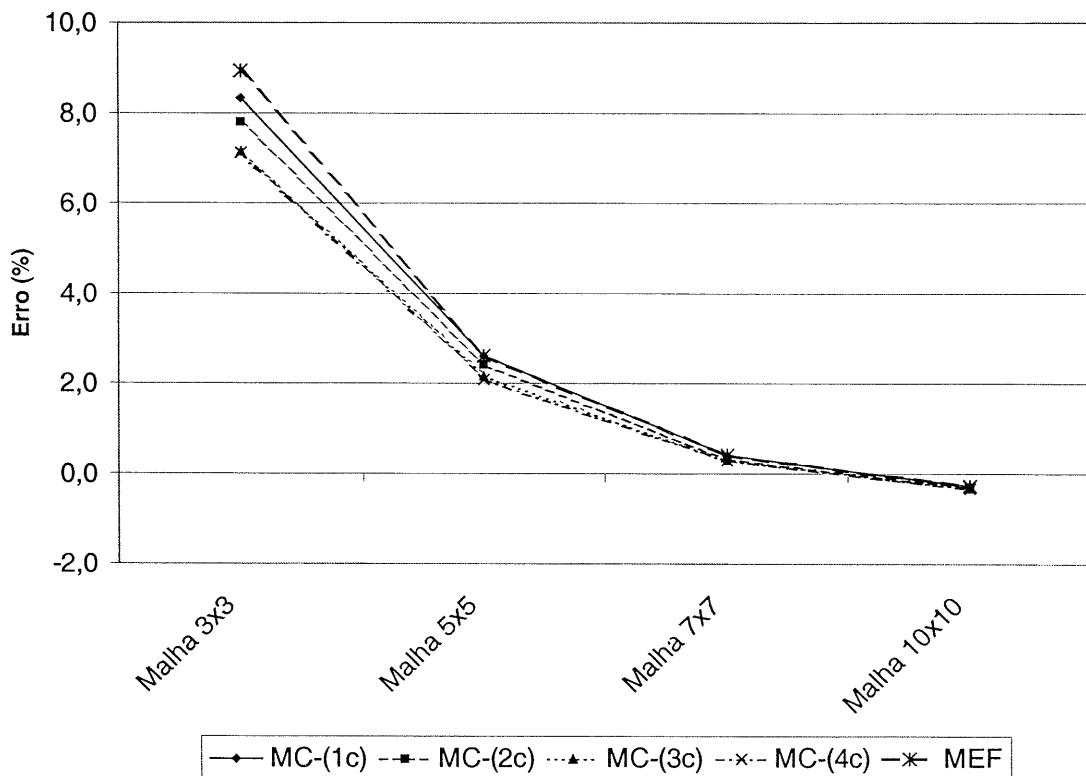


FIGURA 5.20 - ERRO RELATIVO DO MC (ELEMENTO DE OITO NÓS) COM REFINAMENTO  $h$  PARA A QUINTA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA EM COMPARAÇÃO COM SRINIVAS (1970)



#### Análise dos resultados:

Na Tabela 5.23 apresentam-se os resultados comparativos para os valores obtidos com o refinamento  $h$  do MC para o elemento de quatro nós.

TABELA 5.23 – COMPARATIVO DO PERCENTUAL DE MELHORIA DOS RESULTADOS ( $\Delta$ ) EM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA.

Modo	Malha 10x10 / Malha 3x3 - 1c	Malha 10x10 / Malha 3x3 - 2c	Malha 10x10 / Malha 3x3 - 3c	Malha 10x10 / Malha 3x3 - 4c
1	90,1%	89,9%	88,3%	87,7%
3	96,4%	96,3%	96,0%	95,9%
5	96,5%	96,0%	95,5%	95,5%

$$\Delta = \left( 1 - \frac{\left| (Erro relativo malha (10x10) - refino c) \right|}{\left| (Erro relativo malha (3x3) - refino c) \right|} \right) * 100 [\%]$$

onde:  $\Delta$  representa o percentual de melhoria do resultado em relação à solução analítica.

Dos resultados obtidos pelo refinamento  $h$  do MC, apresentados nas Figuras 5.18 à 5.20, as seguintes observações podem ser feitas:

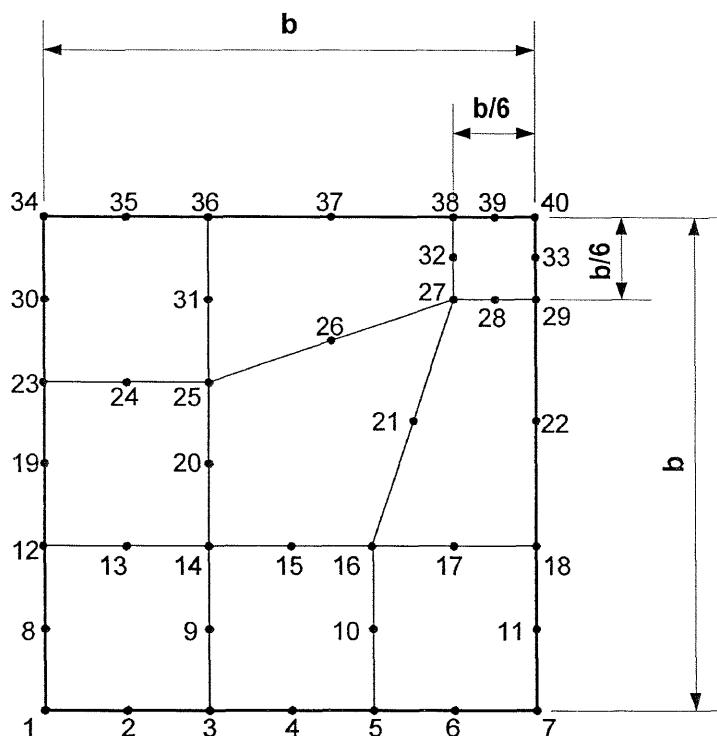
- refinamento  $h$  obtêm convergência para as todas as freqüências.

- o padrão de convergência se mantém compatível com o aumento do número de funções da TC.

### 5.3.2.2.3 Distorção de malha – oito nós

A malha distorcida de oito nós encontra-se ilustrada na Figura 5.21.

FIGURA 5.21 - MALHA 3X3 COM ELEMENTO DE OITO NÓS DISTORCIDO



As características da placa são as consideradas para o Caso 1, sendo analisados os efeitos do elemento distorcido para a primeira, terceira e quinta freqüências naturais, referenciadas à solução analítica.

FIGURA 5.22 – EFEITO DA DISTORÇÃO DO ELEMENTO DE OITO NÓS PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL – ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA

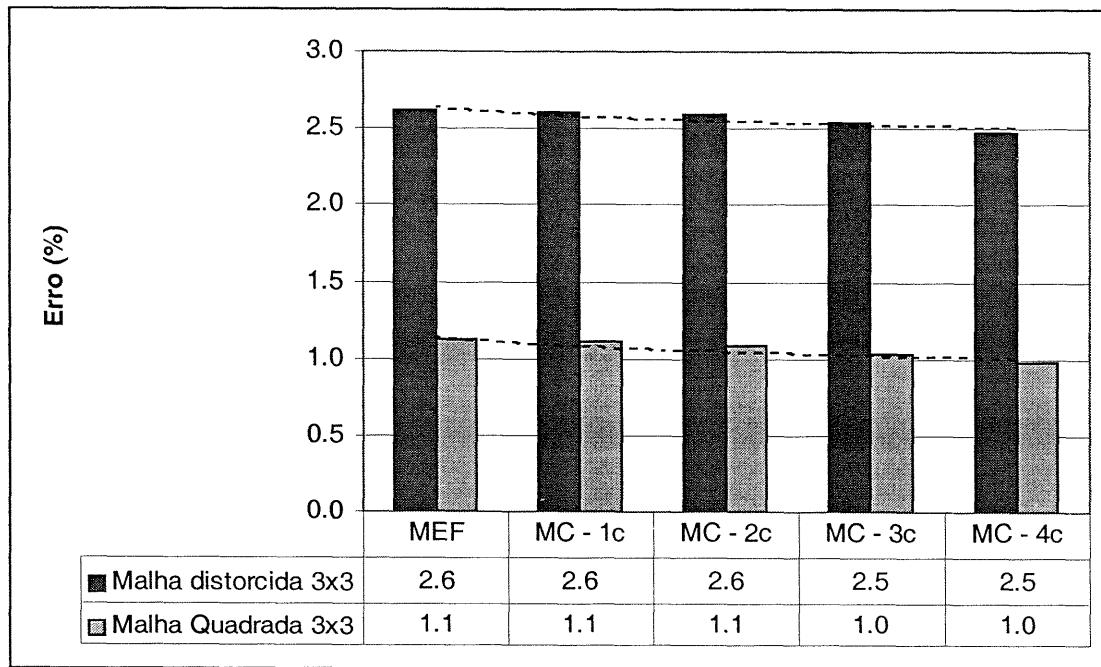


FIGURA 5.23 – EFEITO DA DISTORÇÃO DO ELEMENTO DE OITO NÓS PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA NATURAL – ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA

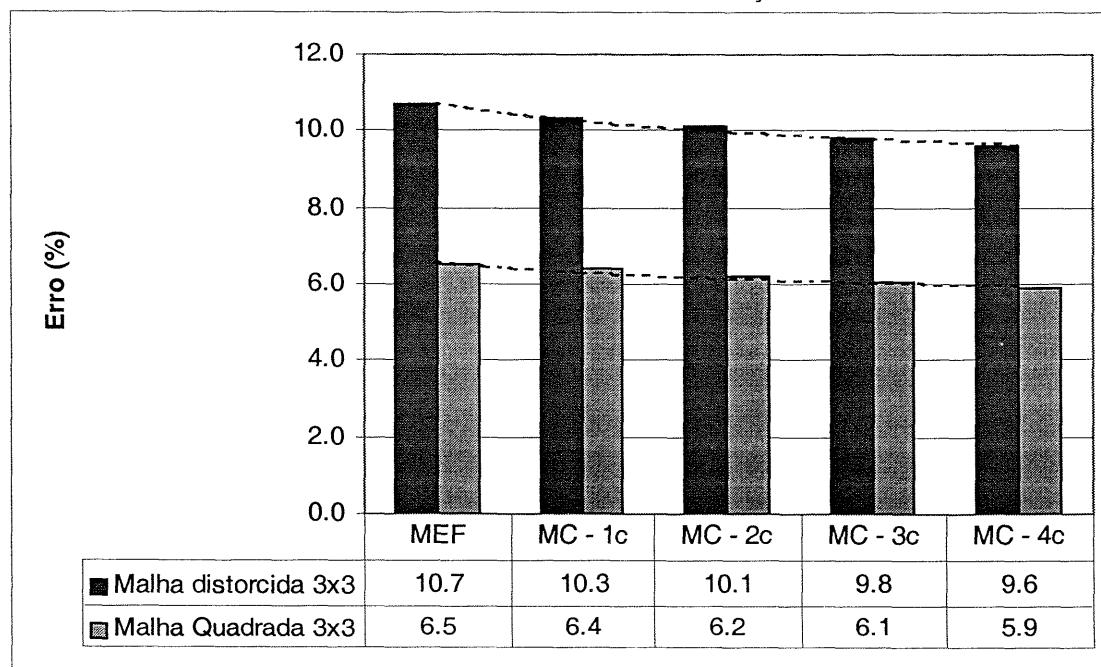
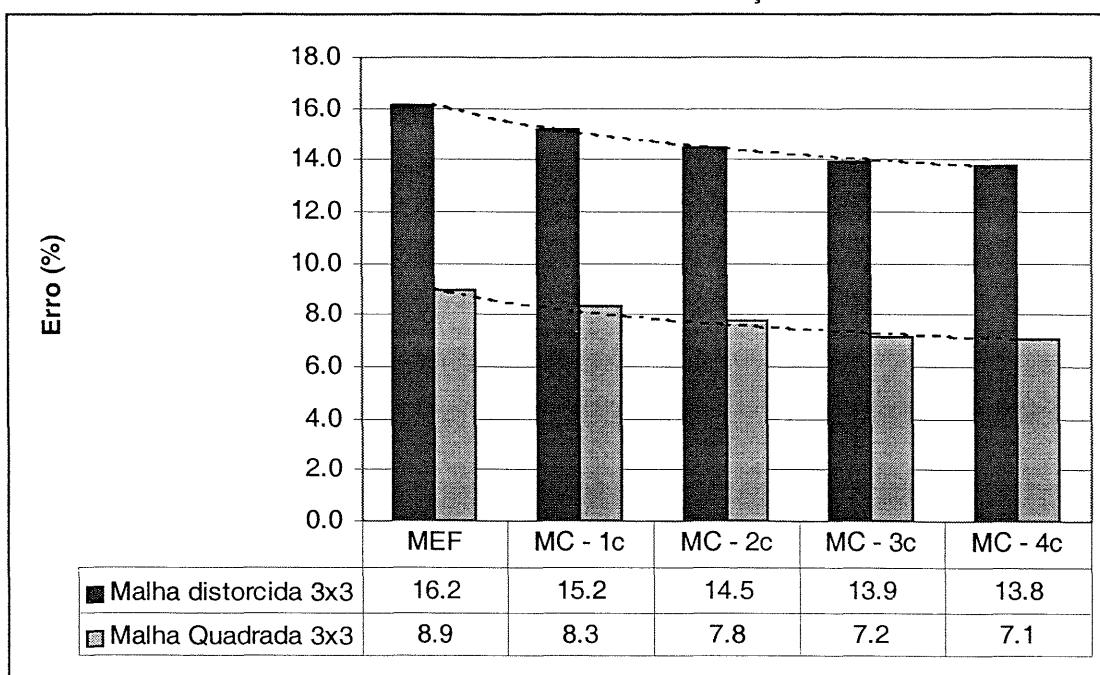


FIGURA 5.24 – EFEITO DA DISTORÇÃO DO ELEMENTO DE OITO NÓS PARA A QUINTA FREQUÊNCIA NATURAL – ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA



Análise dos resultados:

Pode-se observar das Figuras 5.22 à 5.24, e com base na Tabela 5.24, que:

- A distorção do elemento de placa é representativa no resultado das freqüências.
- Aparentemente, o acréscimo de funções da TC não resolve o problema da degradação dos resultados produzidos com o elemento distorcido, uma vez que mantêm-se o padrão de deterioração dos mesmos.
- Nota-se que a degradação dos resultados obtidos com o MC é menor para as freqüências mais altas como pode ser observado da Tabela 5.24.

TABELA 5.24 – COMPARATIVO DO PERCENTUAL DE DEGRADAÇÃO DOS RESULTADOS (II) EM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA.

Modo	1 Função	2 Funções	3 Funções	4 Funções
1	136,4%	136,4%	150,0%	150,0%
3	61,1%	62,6%	61,3%	62,5%
5	83,1%	85,9%	93,0%	94,4%

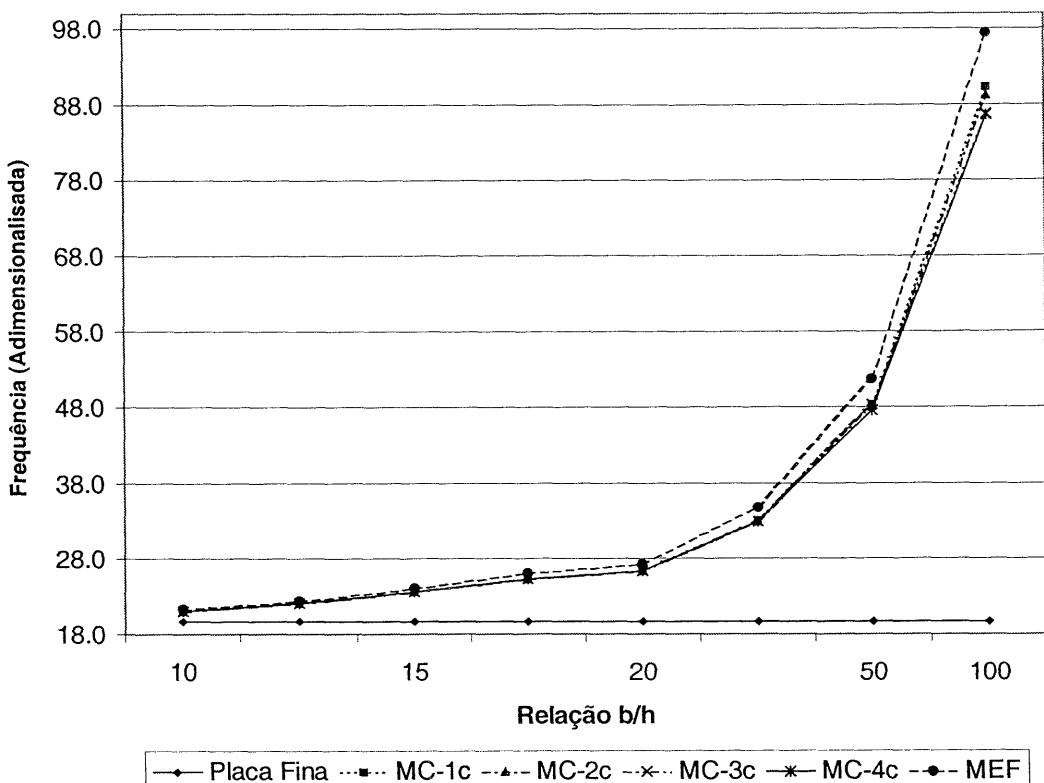
$$\Pi = \left[ \left( \frac{(\text{Erro relativo malha distorcida refino } c)}{(\text{Erro relativo malha retangular refino } c)} - 1 \right) * 100 \right] [\%]$$

onde:  $\Pi$  representa o percentual de degradação dos resultados da malha distorcida em relação à malha retangular.

### 5.3.2.3 Efeito da Variação da Relação Vão/Espessura

Efetuou-se a investigação do efeito da mudança da relação vão/espessura ( $b/h$ ) na precisão dos resultados para a primeira, terceira e quinta freqüências adimensionalisadas, para as condições de contorno do Caso 1. As freqüências escolhidas dão uma idéia de como o efeito da relação vão/espessura atuam sobre os elementos de placa do MC implementados.

FIGURA 5.25 - EFEITO DA RELAÇÃO VÃO/ESPESSURA PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA (ELEMENTO DE QUATRO NÓS)



A freqüência adimensionalizada utilizada como comparação é para placa fina (obtidos da Teoria Clássica de Placas – Kirchhoff-Love). A malha utilizada para comparar os resultados é composta por 64 elementos (malha 8x8). As relações vão/espessura experimentadas foram de 10, 12, 15, 18, 20, 30, 50 e 100. Assim, quanto maior a relação  $b/h$  mais fina é a placa. As freqüências são adimensionalizadas conforme a Equação (5.1). Os testes foram realizados para o elemento quadrilateral de quatro e oito nós.

Os valores das freqüências adimensionalizadas para placas finas foram obtidos de LEISSA (1973), sendo:

- 19,739 para o primeiro modo de vibrar;
- 49,348 para o segundo modo de vibrar;
- 98,696 para o terceiro modo de vibrar.

FIGURA 5.26 - EFEITO DA RELAÇÃO VÃO/ESPESSURA PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA (ELEMENTO DE QUATRO NÓS)

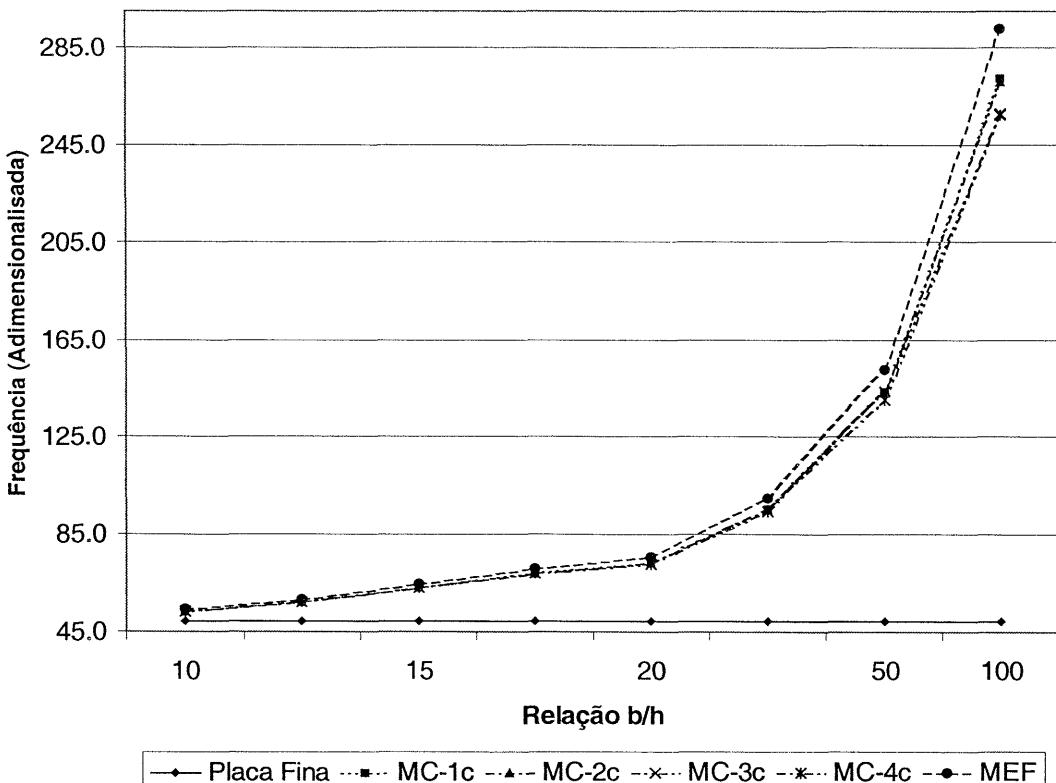


FIGURA 5.27 - EFEITO DA RELAÇÃO VÃO/ESPESSURA PARA A QUINTA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA (ELEMENTO DE QUATRO NÓS)

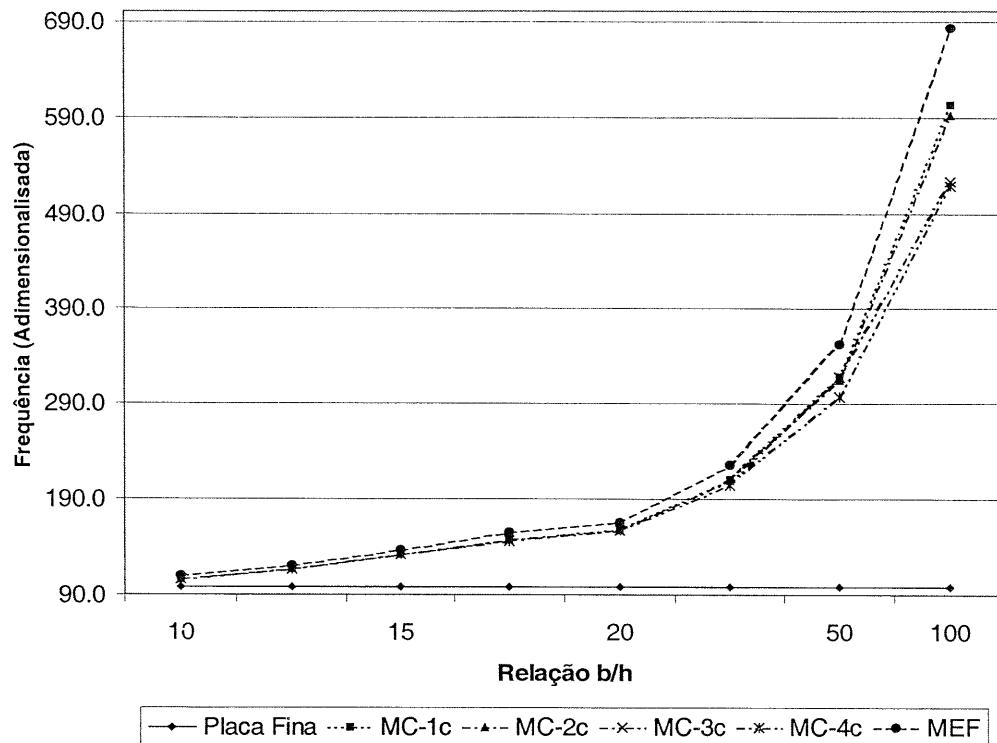


FIGURA 5.28 – EFEITO DA RELAÇÃO VÃO/ESPESSURA PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA (ELEMENTO DE OITO NÓS)

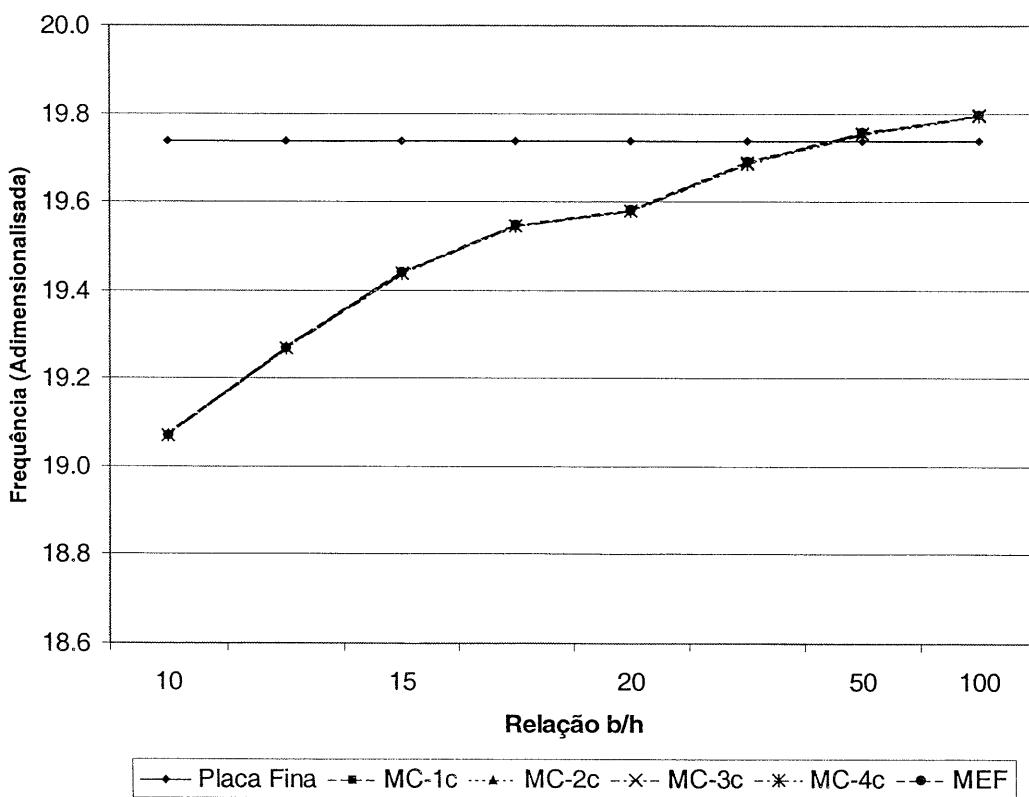


FIGURA 5.29 - EFEITO DA RELAÇÃO VÃO/ESPESSURA PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA (ELEMENTO DE OITO NÓS)

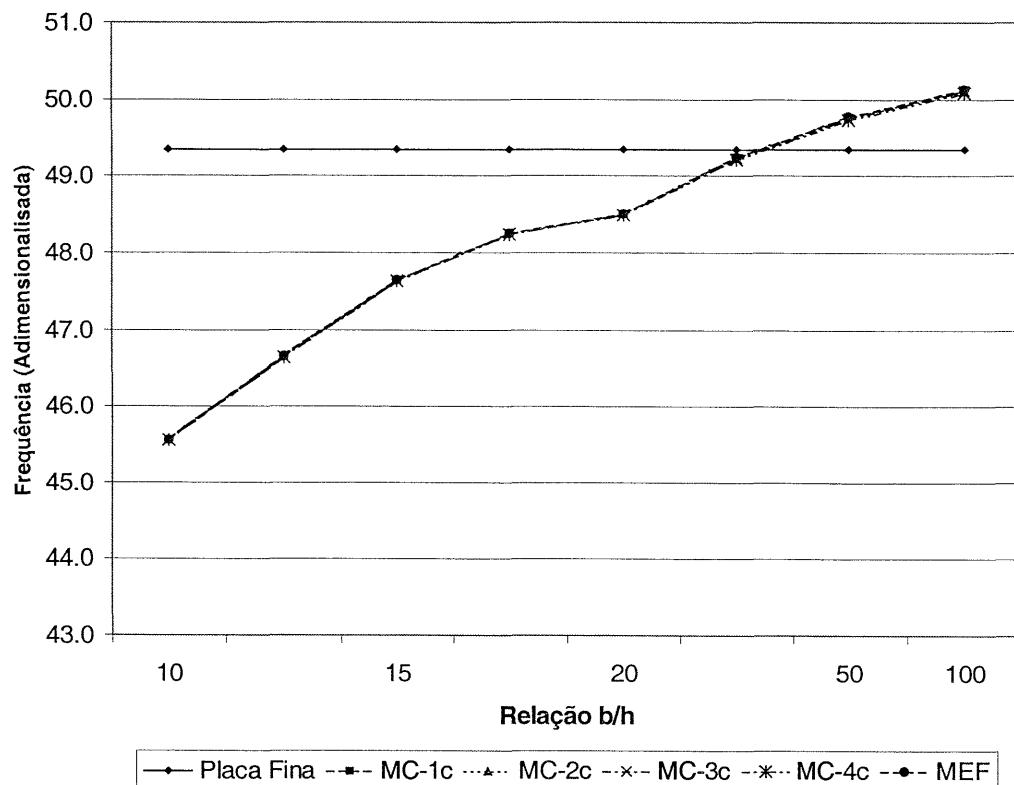
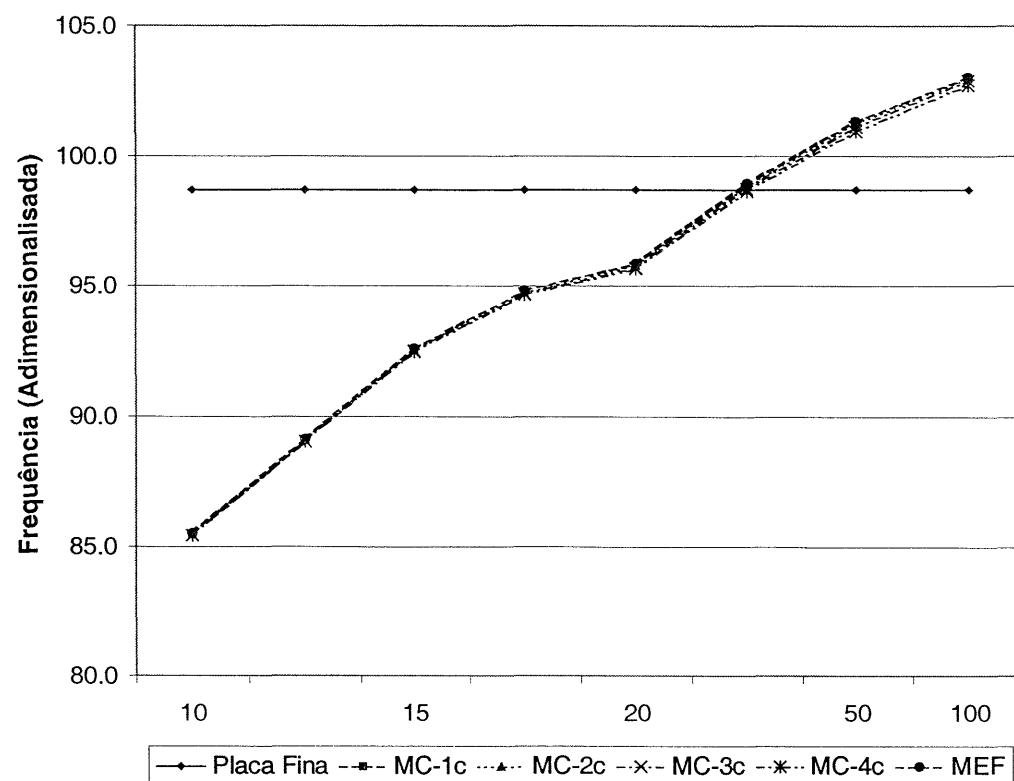


FIGURA 5.30 - EFEITO DA RELAÇÃO VÃO/ESPESSURA PARA A QUINTA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA (ELEMENTO DE OITO NÓS)



### Análise dos resultados:

Observando-se das Figuras 5.25 à 5.30, nota-se que quando a relação  $b/h$  aumenta, o elemento de placa do MC melhora os resultados para placas finas, se comparado ao MEF. Apesar disto, esta melhora ainda não é suficiente para resolver o problema. Isto fica evidente para uma relação  $b/h$  igual a 100, onde a diferença entre as curvas do MC e do MEF, são comparadas com a solução analítica de placas finas. Verificam-se os efeitos do *locking* para os dois elementos implementados, sendo que para o elemento de quatro nós este efeito, pela própria formulação do elemento, é potencializado.

Conforme pode-se observar nas Figuras 5.28 à 5.30, o elemento de oito nós é mais eficiente na análise de placas finas.

A solução para placas finas é dependente das funções típicas do MEF, portanto a solução que produz bons resultados depende da implementação de elementos finitos capazes de capturar a variação  $b/h$ .

### **5.3.3 Comparação de Resultados do MEF e MC**

Para comparar resultados relativos ao emprego do MEF e MC utilizou-se as malhas (3x3), (4x4), (5x5), (6x6), (7x7), (8x8), (9x9) e (10x10), com variação de até quatro funções da TC.

Apresentam-se os dados para a primeira, terceira e quinta freqüências mais baixas, onde pode-se observar a convergência e a precisão do MC e do MEF.

#### **5.3.3.1 Comparação de Resultados para o Elemento de Quatro Nós**

Nas Figuras 5.31 à 5.33, são apresentados os resultados em termos de erro relativo à solução analítica, dada por SRINIVAS (1970).

FIGURA 5.31 – COMPARAÇÃO DO MEF E O MC COM REFINAMENTO  $c$  PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA - ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA

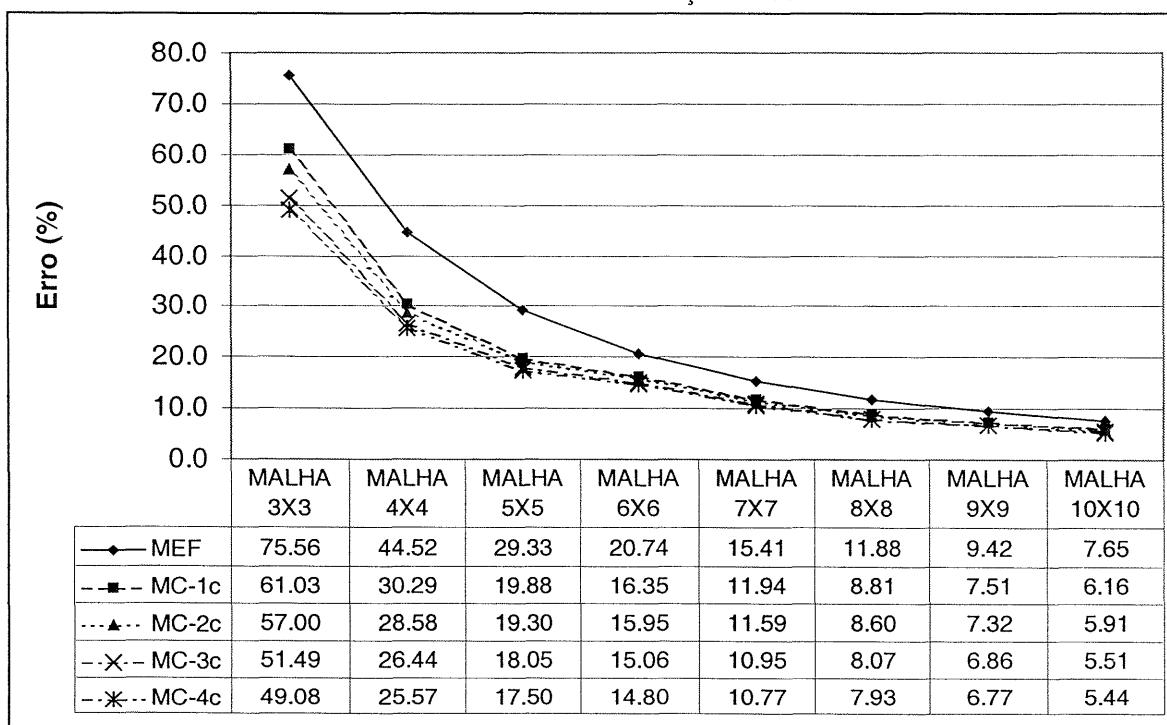


FIGURA 5.32 – COMPARAÇÃO DO MEF E O MC COM REFINAMENTO  $c$  PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA - ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA

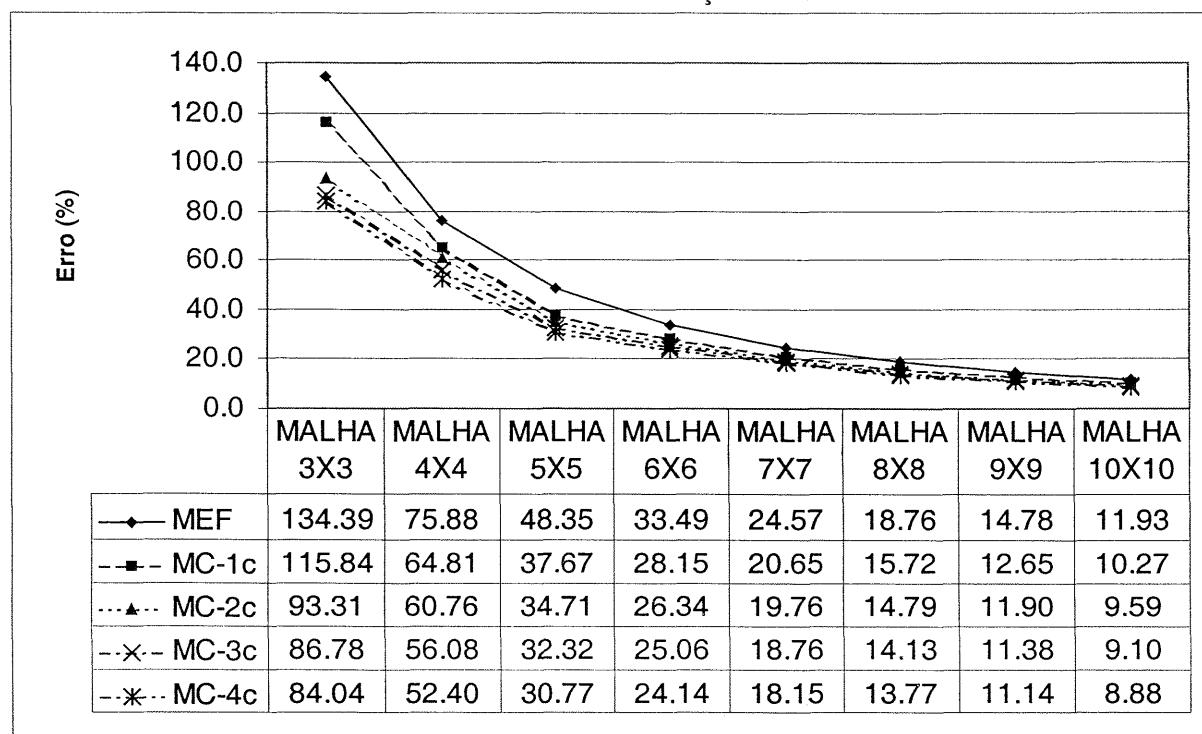
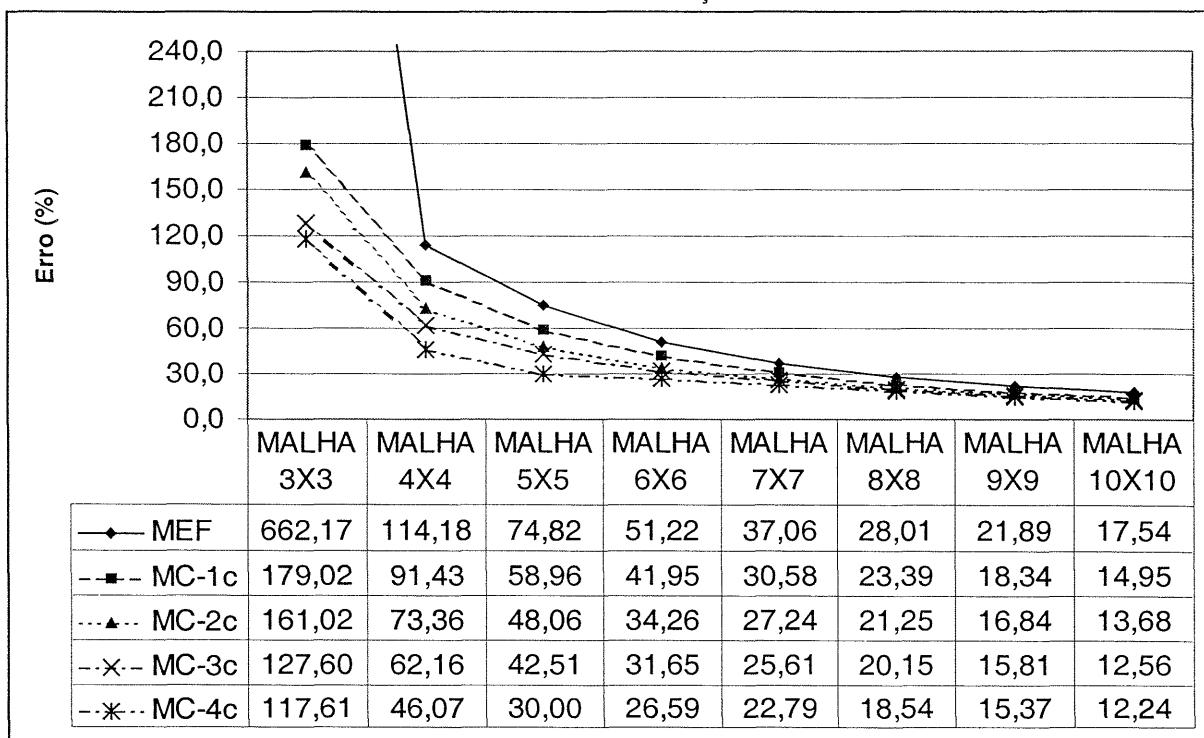


FIGURA 5.33 – COMPARAÇÃO DO MEF E O MC COM REFINAMENTO  $c$  PARA A QUINTA FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA - ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA



Nota:

- a) O erro relativo da malha (3x3) para a quinta freqüência não consta do gráfico, sendo seu valor igual a 662,2% de erro relativo.

#### Análise dos resultados:

Dos resultados obtidos pelo MEF e do MC com refinamento de 4 parcelas da TC, as seguintes observações podem ser feitas:

- O MC apresenta uma melhoria de resultados da ordem de 30% (aproximadamente) para todas as malhas pesquisadas.
- Para freqüências mais altas e malhas grosseiras o MC apresenta grande melhoria nos resultados, conforme pode-se observar na Tabela 5.25.

TABELA 5.25 – COMPARATIVO DO PERCENTUAL DE MELHORIA DOS RESULTADOS ( $\Delta$ ) EM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA DADA POR SRINIVAS (1970).

Modo	Malha 3x3-4c / Malha 3x3 – MEF	Malha 4x4-4c / Malha 4x4 – MEF	Malha 5x5-4c / Malha 5x5 – MEF	Malha 6x6-4c / Malha 6x6 – MEF	Malha 7x7-4c / Malha 7x7 – MEF	Malha 8x8-4c / Malha 8x8 – MEF	Malha 9x9-4c / Malha 9x9 – MEF	Malha 10x10- 4c / Malha 10x10 – MEF
1	35,0%	42,6%	40,3%	28,6%	30,1%	33,2%	28,1%	28,9%
3	37,5%	30,9%	36,3%	27,9%	26,1%	26,7%	24,6%	25,6%
5		59,6%	59,9%	48,1%	38,5%	33,8%	29,8%	30,2%

$$\Delta = \left[ \left( 1 - \frac{|(\text{Erro relativo malha} - \text{refino } 4c)|}{(\text{Erro relativo malha} - \text{MEF})} \right) * 100 \right] [\%]$$

onde:  $\Delta$  representa o percentual de melhoria do resultado obtido pelo MC em relação ao MEF quando comprados à solução analítica.

### 5.3.3.2 Comparação de Resultados para o Elemento de Oito Nós

A representação gráfica apresentada nas Figuras 5.34 à 5.36, traz o elemento quadrilateral de oito nós, comparado em termos de erro relativo à solução analítica dada por SRINIVAS (1970).

FIGURA 5.34 - COMPARAÇÃO DO MEF E O MC COM REFINAMENTO c PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONAL – ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA

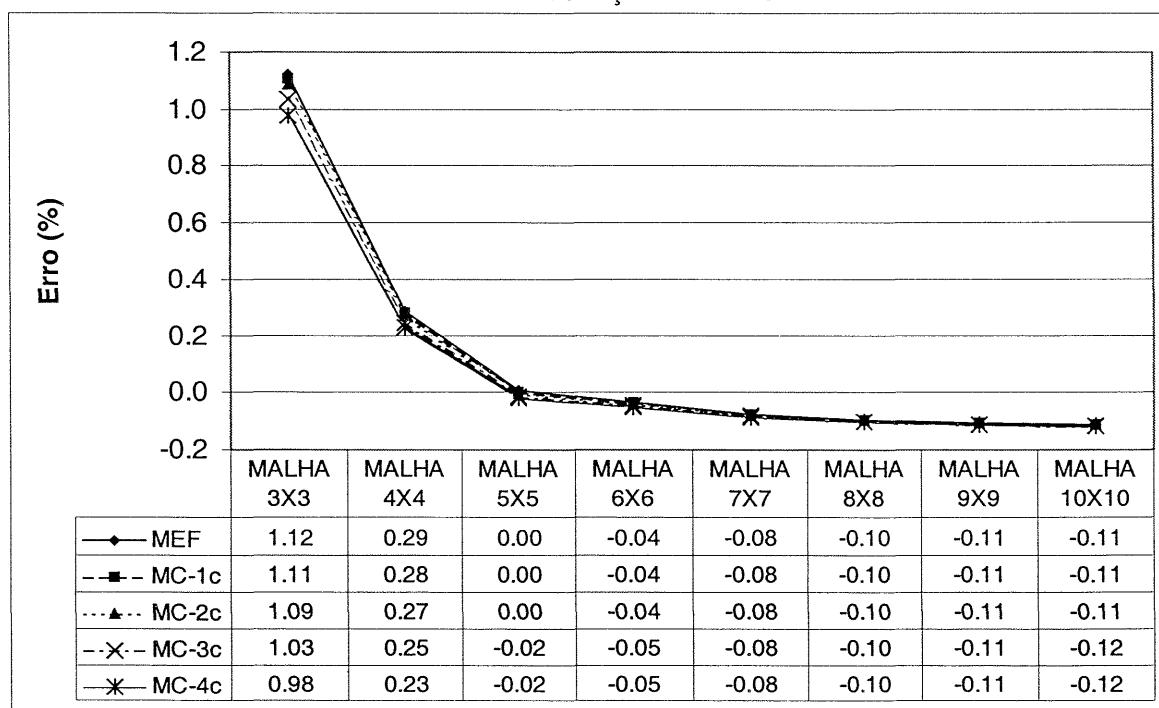


FIGURA 5.35 - COMPARAÇÃO DO MEF E O MC COM REFINAMENTO  $c$  PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA ADIMENSIONAL - ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA

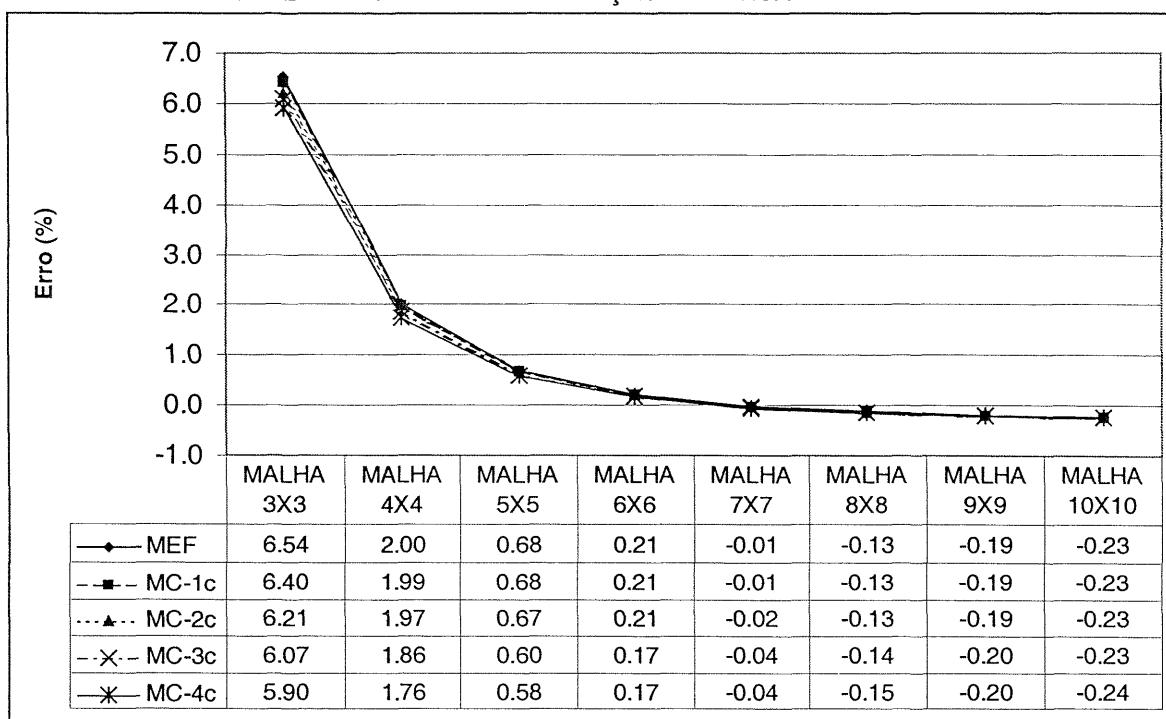
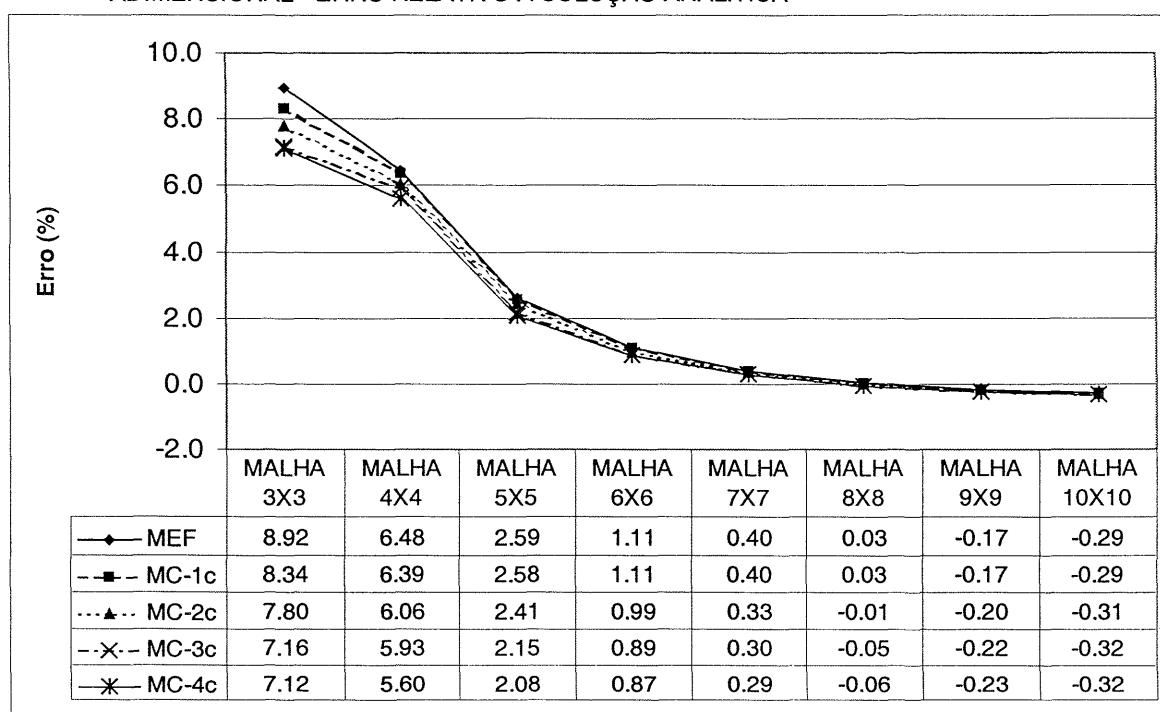


FIGURA 5.36 - COMPARAÇÃO DO MEF E O MC COM REFINAMENTO  $c$  PARA A QUINTA FREQUÊNCIA ADIMENSIONAL - ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO ANALÍTICA



### Análise dos resultados:

Dos resultados obtidos pelo MEF e do MC com refinamento de até 4 parcelas da TC, as seguintes observações podem ser feitas:

- O MC apresenta uma melhoria pequena de resultados quando comparados aos apresentados pelo MEF, conforme pode ser observado na Tabela 5.26.
- Para malhas mais grosseiras o MC apresenta consideráveis melhorias em termos absolutos.

TABELA 5.26 – COMPARATIVO DO PERCENTUAL DE MELHORIA DOS RESULTADOS ( $\Delta$ ) EM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA DADA POR SRINIVAS (1970).

Modo	Malha 3x3-4c / Malha 3x3 – MEF	Malha 4x4-4c / Malha 4x4 – MEF	Malha 5x5-4c / Malha 5x5 – MEF	Malha 6x6-4c / Malha 6x6 – MEF	Malha 7x7-4c / Malha 7x7 – MEF	Malha 8x8-4c / Malha 8x8 – MEF	Malha 9x9-4c / Malha 9x9 – MEF	Malha 10x10-4c / Malha 10x10 – MEF
1	14,3%	26,0%	20,0%	20,0%	0,0%	0,0%	0,0%	8,3%
3	10,8%	13,6%	17,2%	23,5%	75,0%	13,3%	5,0%	4,2%
5	25,3%	15,7%	24,5%	27,6%	37,9%	150%	26,1%	9,4%

$$\Delta = \left[ \left( 1 - \frac{|(Erro relativo malha - refino 4c)|}{(Erro relativo malha - MEF)} \right) * 100 \right] [\%]$$

onde:  $\Delta$  representa o percentual de melhoria do resultado em relação à solução analítica.

#### 5.3.3.2.1 Análise Comparativa dos Resultados entre o MC e o MEF

Como pode-se observar nas seções anteriores, para as freqüências pesquisadas, o MC apresentou melhoria no valor da freqüência. Também, pode-se notar que o processo de convergência do MC é similar ao do MEF.

As parcelas da TC têm mais influência no elemento quadrilateral de quatro nós do que no elemento de oito nós implementado do MC.

O MC apresenta melhores resultados para as malhas mais grosseiras.

### 5.3.3.3 Análise do custo computacional

Conforme pode-se observar das Figuras 5.57 e 5.38, o custo computacional aumenta com o incremento das parcelas da TC. A análise foi realizada com o código computacional implementado, e utilizando-se um processador Intel – Pentium III® de 600 MHz de velocidade e 512Mb de memória RAM.

A Figura 5.37 apresenta o gráfico do tempo de processamento expresso em segundos. Apesar dos valores estarem representados de forma absoluta é possível avaliar o comportamento relativo, tanto para o refinamento  $h$  quanto para o refinamento  $c$ .

FIGURA 5.37 – COMPARATIVO DO TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA O MC E O MEF – ELEMENTO DE QUATRO NÓS

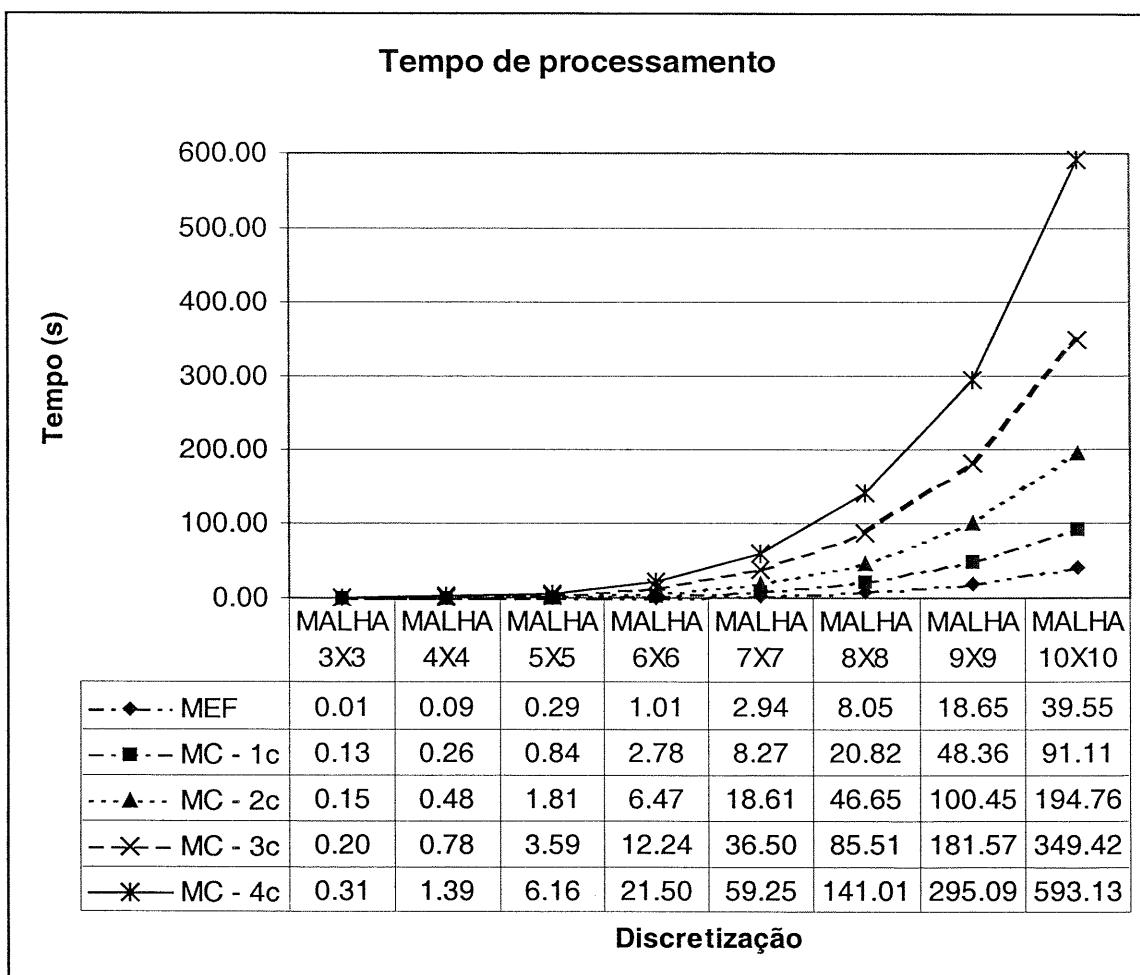
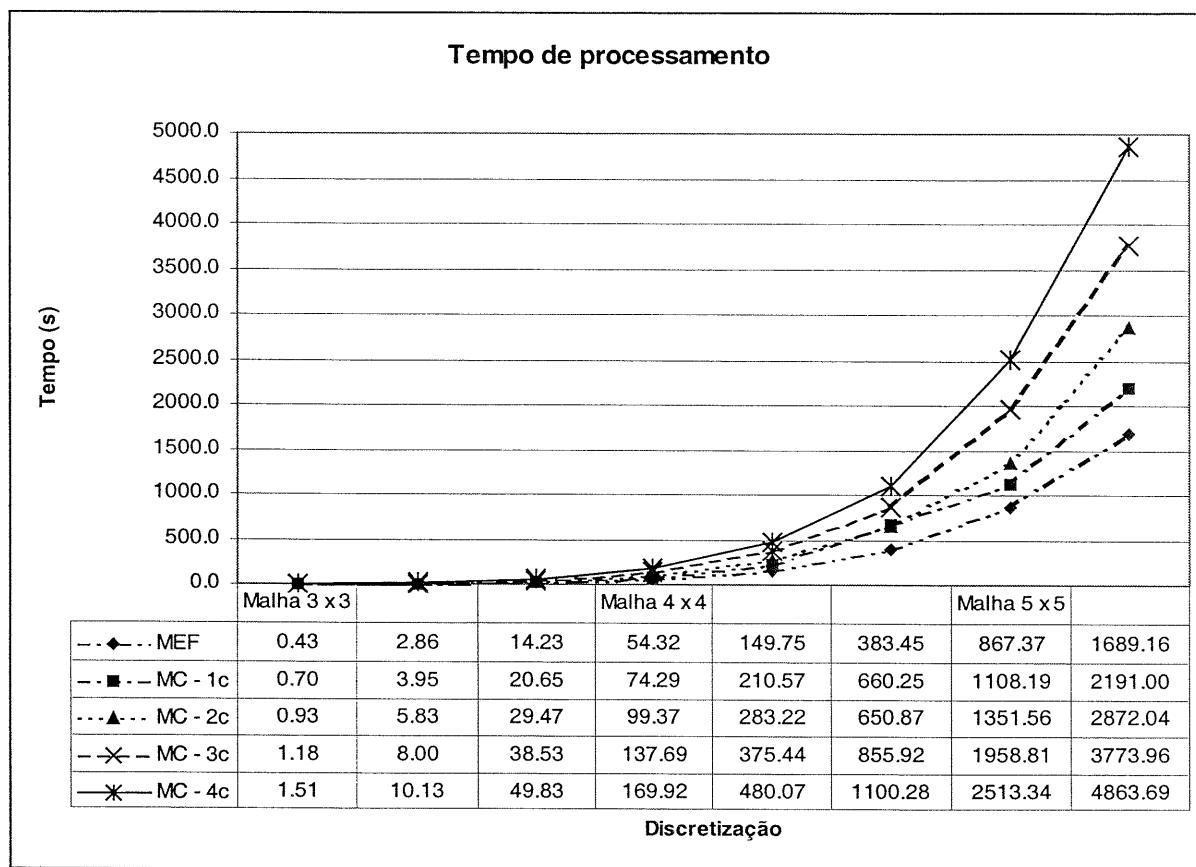


FIGURA 5.38 - COMPARATIVO DO TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA O MC E O MEF – ELEMENTO DE OITO NÓS



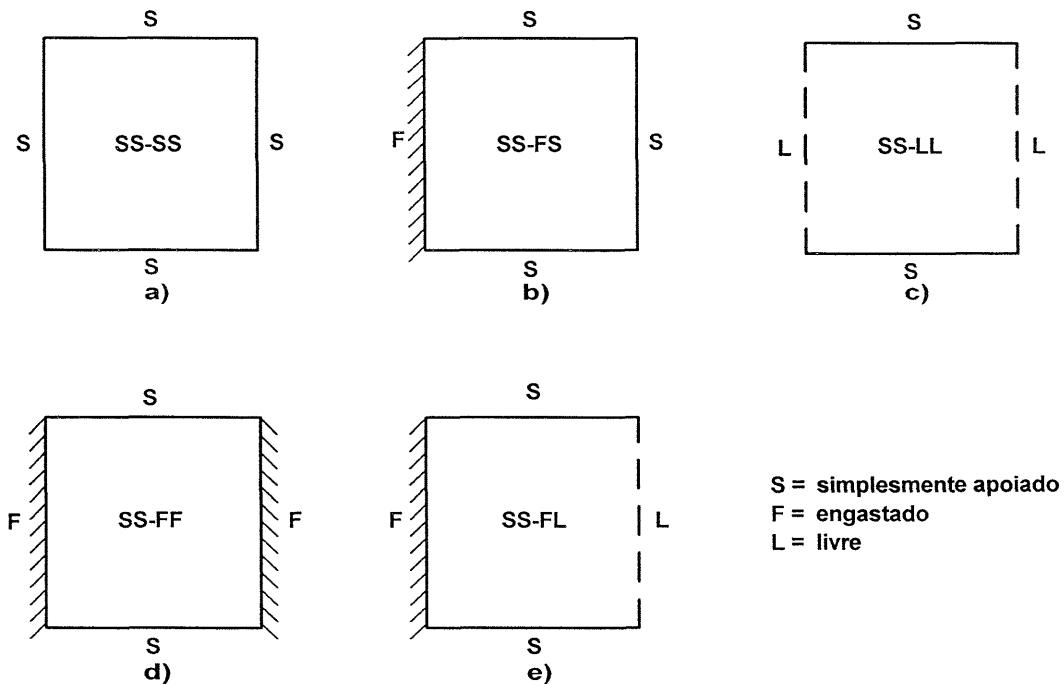
A Figura 5.38 apresenta o gráfico com os tempos comparativos de processamento para o MC e o MEF utilizando-se o elemento quadrilateral de oito nós. Pode-se observar que o custo computacional aumenta significativamente com a inclusão de novas parcelas da TC.

## 5.4 CASO 2: VIBRAÇÃO LIVRE DE PLACA QUADRADA COM CONDIÇÕES DE CONTORNO VARIÁVEIS

A Figura 5.39 apresenta cinco placas semi espessas com condições de contorno variáveis. A relação vão/espessura ( $b/h$ ) igual a 10, coeficiente de Poisson 0,3, módulo de elasticidade 2,1E11 Mpa, massa específica 7800 kg/m<sup>3</sup>.

Os resultados foram obtidos considerando uma malha 10x10 elementos, sendo utilizado o MC com quatro parcelas da TC (Malha 10x10 – 4c). Diversas condições de contorno, conforme as apresentadas na Figura 5.39, são aplicadas para

FIGURA 5.39 – CONDIÇÕES DE CONTORNO DA PLACA DO CASO 2



ilustrar a convergência e a precisão do método implementado.

Na Tabela 5.27 apresenta-se o resultado para uma placa com o contorno simplesmente apoiado, conforme *caso a)* da Figura 5.39, (SS-SS), e as comparações feitas a partir da solução analítica para placas espessas dada por SRINIVAS (1970), comparação com o Método da Colocação dado por MIKAMI (1984), o Método das Tiras com *Splines* dado por MIZUSAWA (1993), MEF dado por CHEN (1988) e

ainda, comparação com a teoria de placas finas dada por LEISSA (1973).

TABELA 5.27 – FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA PARA PLACAS SIMPLESMENTE APOIADA (SS-SS)

Método	Modos					
	1	2	3	4	5	6
MC – 4c	19,067	45,512	45,512	69,831	85,214	85,214
MIZUSAWA (1993)	19,058	45,448	45,448	69,717	84,926	84,926
MIKAMI (1984)	19,06	45,45	45,45	69,72	84,93	
SRINIVAS (1970)	19,089	45,620	45,620	70,089	85,488	
CHEN (1988)	19,065	45,489	45,489	69,816	85,147	85,147
Teoria de placas Finas	19,739	49,348	49,348	78,957	98,696	98,696

Na Tabela 5.28 apresentam-se os resultados para uma placa conforme *caso b*) da Figura 5.39, (SS-FS), e as comparações feitas a partir do Método da Colocação dado por MIKAMI (1984), o Método das Tiras com *Splines* dado por MIZUSAWA (1993) e a comparação com a teoria de placas finas dada por LEISSA (1973).

TABELA 5.28 – FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA PARA PLACAS COM DOIS LADOS SIMPLESMENTE APOIADOS E OS OUTROS DOIS, ENGASTADO E SIMPLES APOIADO (SS-FS)

Método	Modos					
	1	2	3	4	5	6
MC – 4c	22,396	47,137	52,213	74,167	86,055	93,501
MIZUSAWA (1993)	22,376	47,063	52,090	74,004	85,759	93,064
MIKAMI (1984)	22,38	47,05	52,10	74,00	85,75	
Teoria de placas Finas	23,646	51,674	58,646	86,135	100,27	113,23

Na Tabela 5.29 apresenta-se o resultado para uma placa conforme *caso c*) da Figura 5.39, (SS-LL), e as comparações feitas a partir do Método da Colocação dado por MIKAMI (1984), o Método das Tiras com *Splines* dado por MIZUSAWA (1993) e a comparação com a teoria de placas finas dada por LEISSA (1973).

TABELA 5.29 – FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA PARA PLACAS COM DOIS LADOS SIMPLESMENTE APOIADOS E OS OUTROS DOIS LIVRES (SS-LL)

Método	Modos					
	1	2	3	4	5	6
MC – 4c	9,444	15,402	33,894	36,399	42,849	62,235
MIZUSAWA (1993)	9,4388	15,384	33,841	36,334	42,760	62,084
MIKAMI (1984)	9,4395	15,383	33,835	36,336	42,750	62,076
Teoria de placas Finas	9,6314	16,135	36,726	38,945	46,738	70,740

Conforme *caso d)* da Figura 5.39, (SS-FF), têm-se o resultado na Tabela 5.30, e as comparações feitas a partir do Método da Colocação dado por MIKAMI (1984), o Método das Tiras com *Splines* dado por MIZUSAWA (1993) e ainda, a comparação com a teoria de placas finas dada por LEISSA (1973).

TABELA 5.30 – FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA PARA PLACAS COM DOIS LADOS SIMPLESMENTE APOIADOS E OS OUTROS DOIS ENGASTADOS (SS-FF)

Método	Modos					
	1	2	3	4	5	6
MC – 4c	26,682	49,141	59,308	78,876	87,013	101,737
MIZUSAWA (1993)	26,645	49,063	59,118	78,683	86,720	101,15
MIKAMI (1984)	26,64	49,06	59,10	78,68	86,71	
Teoria de placas Finas	28,951	54,743	69,327	94,585	102,10	129,1

Na Tabela 5.31 apresenta-se o resultado para uma placa conforme *caso e)* da Figura 5.39, (SS-FL), e as comparações feitas a partir do Método da Colocação dado por MIKAMI (1984), o Método das Tiras com *Splines* dado por MIZUSAWA (1993), comparação com o Método das Tiras Finitas dado por DAWE (1978), e ainda, comparação com a teoria de placas finas dada por LEISSA (1973).

TABELA 5.31 – FREQUÊNCIA ADIMENSIONALISADA PARA PLACAS COM DOIS LADOS SIMPLESMENTE APOIADOS E OS OUTROS DOIS, ENGASTADO E LIVRE (SS-FL)

Método	Modos					
	1	2	3	4	5	6
MC – 4c	12,255	30,436	38,679	55,865	62,834	78,743
MIZUSAWA (1993)	12,245	30,386	38,607	55,743	62,649	78,429
MIKAMI (1984)	12,3	30,39	38,61	55,74	62,65	
DAWE (1978)	12,3	30,39	38,61	55,74	62,65	
Teoria de placas Finas	12,687	33,065	41,702	63,015	72,398	90,611

## 5.5 ANÁLISE GLOBAL DOS RESULTADOS

O MC implementado para o elemento de placa foi utilizado para obter as freqüências naturais de vibração para placas de Mindlin. Foram feitos testes para uma relação vão/espessura igual a 10, sendo apresentados resultados satisfatórios quando comparados aos métodos de solução tradicionais, como pode ser observado no estudo do Caso 2 da seção anterior.

A convergência do MC é boa, sendo melhorada com o aumento do número de parcelas da TC.

O refinamento *c* demonstra ser eficiente para as malhas mais grosseiras e a implementação de mais parcelas da TC ( neste trabalho implemento-se até quatro parcelas) pode indicar qual a tendência e efeitos para os resultados da freqüência (em termos de eficiência).

Para malhas muito refinadas o custo computacional aumenta muito para cada nova parcela da TC implementada.

Observou-se a convergência para todas as freqüências pesquisadas com o MC implementado.

Na verificação dos efeitos da distorção do elemento de placa do MC observou-se o efeito negativo sobre os resultados da freqüência. Em comparação com o MEF o efeito da distorção é minimizado no MC.

A variação na relação vão/espessura é influenciada no MC implementado pelas funções típicas do MEF que são superpostas. Assim, o elemento de oito nós apresenta melhores resultados que o elemento de quatro nós. Como as parcelas típicas de MEF são predominantes no resultado, a implementação de elementos com características que também resolvam placas finas podem ser implementados.

Em comparação com o MEF, o MC implementado apresentou resultados mais precisos para todas as freqüências pesquisadas, em compensação o custo computacional é afetado.

## 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE CONTINUIDADE

### 6.1 CONCLUSÕES

#### 6.1.1 Quanto ao Estudo

O elemento de placa espessa (teoria de Mindlin-Reissner) proposto neste trabalho e inspirado no MC, proposto por ZENG (1998a, 1998b, 1998c, 2000), permite a solução para o problema de vibrações livres, considerando a forma de discretização proposta.

No MC implementado são superpostas funções de forma, típicas do MEF e parcelas da série da solução analítica da TC para a equação da freqüência, a partir de condições de contorno de compatibilidade, conforme descrito no Capítulo 3.

As funções de forma da TC são introduzidas no MC através dos chamados graus de liberdade  $c$ , associados ao domínio. A possibilidade de aumentar o número de funções da TC faz com que não se necessite criar outra malha de elementos finitos (nova discretização) para obter mais modos de vibrar e freqüências. Esta característica representa uma das maiores versatilidades do método.

#### 6.1.2 Quanto à Implementação Computacional

Pode-se reconhecer no modelo da matriz de rigidez e matriz massa do MC, o grupo de elementos pertencentes às funções típicas do MEF (submatriz MEF), possibilitando assim, um processo hierárquico na montagem das mesmas matrizes quando se acrescentar a parcela da TC. Esta característica é fundamental para a eficiência computacional do método.

No Capítulo 5, foram apresentados resultados para os dois tipos de refinamentos do MC implementado: (i) refinamento  $c$  e o (ii) refinamento  $h$ . Cada um destes refinamentos é mais eficiente dependendo da aplicação:

- (i). O refinamento  $c$  é mais eficiente quando se quer encontrar freqüências naturais (em número maior do que pelo MEF), sem aumentar a discretização, o que representa economia de tempo no pré processamento.
- (ii). O refinamento  $h$  é eficiente quando se quer precisão de resultados, sendo que deve ser levado em conta o custo computacional.

Detalhes que merecem maior atenção na implementação computacional dizem respeito à integração numérica e sua influência na solução do problema, principalmente se a opção para a solução do problema de *locking* for baseada na subintegração.

O processo de solução dos autovalores e autovetores também deve ser apreciado para obter maior precisão nos resultados. Neste trabalho, optou-se pelo Método de Jacobi Generalizado, sendo todos os resultados apresentados baseados neste método.

### 6.1.3 Resultados Obtidos

Pode-se observar que o MC proposto segue o padrão de convergência do MEF. A precisão dos resultados, conforme pode-se observar no Capítulo 5, é melhor do que a apresentada pelo MEF (comparando elementos com o mesmo número de nós).

Os resultados numéricos obtidos com o elemento de oito nós do MC-4c (Método Composto com quatro parcelas da TC), apresentaram-se compatíveis quando comparados, por exemplo ao MEF, ao Método das Tiras Finitas e ao Método da Colocação, conforme pode ser observado na seção 5.4.

Os testes realizados para avaliar a questão da distorção da malha mostraram que cada freqüência é influenciada negativamente e de forma diferente pela mesma.

Conforme as seções 5.3.2.1.3 e 5.3.2.2.3, os valores apresentados para a malha distorcida do MC, quando comparados aos fornecidos pelo MEF, são um pouco melhores e, os resultados obtidos com o elemento quadrilateral de quatro nós é pouco representativo em termos quantitativos.

Com base nos exemplos propostos e resultados produzidos, pode-se observar que o MC é eficiente quanto à precisão. Considerando a discretização, pode-se poupar tempo por não necessitar tanto refino de malha, que inclui também a atribuição das condições de contorno, para a obtenção de um mesmo número de freqüências naturais, comparando-se com o MEF.

A utilização do MC é mais eficiente (precisão de resultados produzidos x custo computacional) para malha mais grosseiras e para as freqüências mais baixas. A otimização do código computacional pode melhorar a eficiência do método. Análise mais detalhada deve ser realizada na busca por modos espúrios.

A comparação com os resultados de aplicações propostas pela literatura mostrou-se satisfatória, verificando assim, o potencial de uso desta técnica para a solução dos problemas de vibrações livres em placas espessas.

## **6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Neste estudo, focou-se em alguns dos aspectos referentes à superposição das funções de forma, utilizadas no MEF, com as funções da parcela da TC aplicada à vibrações livres de placas. Para completar a investigação sobre o elemento de placa proposto, deve-se avaliar ainda:

- O comportamento, para o caso de se implementar números maiores de parcelas da TC;
- Técnicas de obtenção da matriz massa mais eficientes;
- Técnicas de solução de autovalores e autovetores, comparando a eficiência de cada uma destas técnicas com o método proposto;
- verificar se as técnicas atualmente empregadas para resolver o efeito do

*locking* a que estão sujeitos os elementos de placas também são efetivas para o MC;

- A análise dos modos espúrios para as freqüências naturais;
- Comparar o MC com outros tipos de elementos finitos adaptativos.

Na análise estrutural ainda pode-se pesquisar outros elementos utilizando a mesma abordagem, possibilitando assim, encontrar soluções mais precisas para o problema de vibrações livres para várias aplicações, como por exemplo:

- Estudo de placas com espessuras variáveis;
- Estudo de placas com nervuras de reforço;
- Estudo de placas para materiais ortotrópicos;
- Estudo de placas para materiais laminados;
- Estudo de cascas;

O uso desta mesma abordagem na solução de vibrações forçadas pode ser testado. Outro problema semelhante ao de vibrações, que é o estudo da instabilidade estrutural (flambagem), pode ser implementado baseando-se na proposta do MC, já que este problema recai na solução de autovalores e autovetores, e apresenta solução analítica obtida pela TC.

O aspecto matemático e computacional também deve ser levado em consideração para a implementação do MC, de forma a melhorar seu desempenho.

## REFERÊNCIAS

- ARNDT, M. O método do elemento composto aplicado à análise de vibrações. **Dissertação de mestrado.** UFPR, 2001.
- AU, F. T. K.; CHEUNG, Y. K. Free vibration and stability analysis of shells by the isoparametric spline finite strip method. **Thin-Walled Structures**, v. 24, p. 53-82, 1996(b).
- AU, F. T. K.; CHEUNG, Y. K. Static and free vibration analysis of variable-depth bridges of arbitrary alignments using the isoparametric spline finite strip method. **Thin-Walled Structures**, v. 24, p. 19-51, 1996(a).
- BARDELL, N.S. Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method. **Journal of Sound and Vibration**, v. 151, n. 2, p. 263-289, 1991.
- BATHE, K. **Finite element procedures.** New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** 6. ed., Rio de Janeiro: LTC, 1998.
- BREBBIA, C. A.; NARDINI, D. Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v. 2, n. 4, p. 228-233, 1983.
- BURCZYNSKI, T. et al. Boundary element formulation of shape sensitivity analysis for defect identification in free vibration problem. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 19, p. 167-175, 1997.
- CHEN, A. T.; YANG, T. Y. A 36 DOF symmetrically laminated triangular element with shear deformation and rotary inertia. **Journal of Composite Materials**, v. 22, p. 341-359, 1988.
- CHEUNG, Y. K.; AU, F. T. K.; ZHENG, D. Y. Finite strip method for the free vibration and buckling analysis of plates with abrupt changes in thickness and complex support conditions. **Thin-Walled Structures**, v. 36, p. 89-110, 2000.
- CHEUNG, Y. K.; KONG, J. The application of a new finite strip to the free vibration of rectangular plates of varying complexity. **Journal of Sound and Vibration**, v. 181, n. 2, p. 341-353, 1995(a).
- CHEUNG, Y. K.; KONG, J. Vibration and buckling of thin-walled structures by a new finite strip. **Thin-Walled Structures**, v. 21, p. 327-343, 1995(b).
- CHOPRA, A. K. **Dynamics of structures:** theory and applications to earthquake engineering. New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures.** New York: McGraw-Hill, 1975.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and applications of finite element analysis.** 3. ed., New York: John Wiley, 1989.
- CÔTE, A.; CHARRON, F. On the selection of p-version shape functions for plate vibration problems. **Computers & Structures**, v. 79, p. 119-130, 2001.

CRAIG, R. R. **Structural dynamics**: an introduction to computer methods. New York: John Wiley, 1981.

DAVÍ, G.; MILAZZO, A. A new symmetric and positive definite boundary element formulation for lateral vibrations of plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 206, n. 4, p. 507-521, 1997.

DAWE, D.J. Finite strip models for vibration of Mindlin plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 59, p. 441-452, 1978.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. *Hp* Clouds – A Meshless Method to solve boundary value problems. **Ticam Report**, 95-05, The University of Texas at Austin, 1995.

FILLIPIN, C. G. Desenvolvimento e aplicação do Método da Função de Green Local Modificado à equação de Helmholtz. **Dissertação de mestrado**. UFSC, 1992.

FRIEDRICH, R. Finite strip method : 30 years: a bibliography (1968-1998). **Engineering Computations**, v. 17, n. 1, p. 92-111, 2000.

GRIGORIU, M. Stochastic mechanics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, p. 197-214, 2000.

HINTON, E.; ÖZAKÇA, M.; RAO, N. V. R. Free vibration analysis and shape optimization of variable thickness plates, prismatic folded plates and curved shells, part 1: finite strip formulation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 181, n. 4, p. 553-566, 1995.

HOUMAT, A. An alternative hierarchical finite element formulation applied to plate vibrations. **Journal of Sound and Vibration**, v. 206, n. 2, p. 201-215, 1997.

HUANG, C. H.; HINTON, E. A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 22, p. 73-92, 1986.

HUGHES, T. J. R. **The finite element method**: linear static and dynamic finite element analysis. New Jersey: Prentice Hall, 1987.

KONG, J.; CHEUNG, Y. K. Vibration of shear-deformable plates with intermediate line supports: a finite layer approach. **Journal of Sound and Vibration**, v. 184, n. 4, p. 639-649, 1995.

LEI, Z.; QIU, C. A dynamic stochastic finite element method based on dynamic constraint mode. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 161, p. 245-255, 1998(b).

LEI, Z.; QIU, C. The stochastic method of weighted residuals for predicting dynamic response of random structure under stochastic excitation. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 14, p. 419-427, 1998(a).

LEISSA, A.W. The free vibration of rectangular plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 31, p. 257-293, 1973.

LI, Q. S.; CAO, H.; LI, G. Analysis of free vibration of tall buildings. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 120, n. 9, p. 1861-1876, set. 1994(a).

LI, Q. S.; CAO, H.; LI, G. Stability analysis of a bar with multi-segments of varying cross-section. **Computers & Structures**, v. 53, n. 5, p. 1085-1089, 1994(b).

- LI, Q. S.; CAO, H.; LI, G. Static and dynamic analysis of straight bars with variable cross-section. **Computers & Structures**, v. 59, n. 6, p. 1185-1191, 1996.
- LI, Q.S.; FANG, J.Q.; LIU, D. K. Evaluation of structural dynamic responses by stochastic finite element method. **Structural Engineering and Mechanics**, v. 8, n. 5, p. 477-490, 1999.
- LIEW, K.M. Research on thick plate vibration: a literature survey. **Journal of Sound and Vibration**, v. 180, n. 1, p. 163-176, 1995.
- LOW, K. H. A reliable algorithm for solving frequency equations involving transcendental functions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 161, n. 2, p. 369-377, 1993.
- LOW, K. H. An analytical-experimental comparative study of vibration analysis for loaded beams with variable boundary conditions. **Computers & Structures**, v. 65, n. 1, p. 97-107, 1997.
- LOW, K. H. On the eigenfrequencies for mass loaded beams under classical boundary conditions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 215, n. 2, p. 381-389, 1998.
- MACKERLE, J. Finite element vibration analysis of beams, plates and shells: a bibliography (1994-1998). **Shock and Vibration**, v. 6, p. 97-109, 1999.
- MACKERLE, J. Finite element vibration and dynamic response analysis of engineering structures: a bibliography (1994-1998). **Shock and Vibration**, v. 7, p. 39-56, 2000.
- MEIROVITCH, L. **Elements of vibration analysis**. International Student Edition. Tokio: McGraw-Hill, 1975.
- MIKAMI, T.; YOSHIMURA, J. Application of the collocation method to vibration analysis of rectangular Mindlin plates. **Computers & Structures**, v. 18, p. 425-431, 1984.
- MIZUSAWA, T. Vibration of rectangular Mindlin plates by the spline strip method. **Journal of Sound and Vibration**, v. 163, n. 2, p. 193-205, 1993.
- ODEN, J. T.; CAREY, G. F.; BECKER, E. B. **Finite elements: an introduction**, v.1. New Jersey: Prentice-Hall, 1981.
- PETYT, M. **Introduction to finite element vibration analysis**. New York: Cambridge University Press, 1990.
- PROVIDAKIS, C. P.; BESKOS, D. E. Dynamic analysis of beams by the boundary element method. **Computers & Structures**, v. 22, n. 6, p. 957-964, 1986.
- RAO, S. S. **Mechanical vibrations**. 3. ed. Reading: Addison-Wesley, 1995.
- REDDY, J. N. **Energy and variational methods in applied mechanics: with an introduction to the finite element method**. New York: John Wiley, 1984.
- ROCK, T.A.; HINTON, E. A finite element method for the free vibration of plates allowing for transverse shear deformation. **Computers & Structures**, v. 6, p. 37-44, 1976.
- SHEIKH, A. H.; MUKHOPADHYAY, M. Free vibration analysis of stiffened plates with arbitrary planform by the general spline finite strip method. **Journal of Sound and Vibration**, v. 162, n. 1, p. 147-164, 1993.
- SHI, Y. P.; ZENG, P. Element modeling for vibration analysis of plate. **Key Engineering Materials**, v. 183-187, p. 397-402, 2000.

SINGH, R. K.; SMITH, H. A. Comparison of computational effectiveness of the finite element formulations in free vibration analyses. **Computers & Structures**, v. 51, n. 4, p. 381-391, 1994.

SRINIVAS, S.; JOGA RAO, C. V.; RAO, A. K. An exact analysis for vibration of simply supported homogeneous and laminated thick rectangular plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 12, p. 187-199, 1970.

SZILARD, R. **Theory and analysis of plates**. New Jersey: Prentice Hall, 1974.

TANAKA, M.; MATSUMOTO, T.; SHIOZAKI, A. Application of boundary-domain element method to the free vibration problem of plate structures. **Computers & Structures**, v. 66, n. 6, p. 725-735, 1998.

THOMSON, W. T. **Theory of vibration with applications**. 4. ed., New Jersey: Prentice Hall, 1993.

VANMARCKE, E.; GRIGORIU, M. Stochastic finite element analysis of simple beams. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 109, n. 5, p. 1203-1214, out. 1983.

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structures, part I: principle and  $C^0$  element (bar). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, n. 4, p. 619-658, 1998(a).

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structures, part II:  $C^1$  element (beam). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, n. 4, p. 659-696, 1998(b).

ZENG, P. Introduction to composite element method for structural analysis in engineering. **Key Engineering Materials**, v. 145-149, p. 185-190, 1998(c).

ZHONG, W. X.; CHEUNG, Y. K.; LI, Y. The precise finite strip method. **Computers and Structures**, v. 69, p. 773-783, 1998.

ZIENKIEWICZ, O. C. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 3, p. 275-290, 1971.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method**, v.2, 3. ed. London: McGraw-Hill, 1977.