

MATEUS TERUYUKI NAKAHATA

# **ESTUDO DA PRECISÃO DO MÉTODO ADI-FDTD NA SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS GUIADAS**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Telecomunicações, Curso de Pós-Graduação em Telecomunicações, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Wilson Arnaldo  
Artuzi Júnior

CURITIBA

2002



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
Programa Interdisciplinar de Pós-Graduação em Engenharia - PIPE  
Setor de Tecnologia

## RELATÓRIO DE DEFESA DE MESTRADO

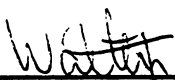
Aos vinte e nove dias do mês de abril de 2002, na Sala PK-03 Depto. Engenharia Elétrica - Centro Politécnico-UFPR, foi instalada pelo Prof. David Alexander Mitchell, coordenador do PIPE – Programa Interdisciplinar de Pós-Graduação em Engenharia, a Banca Examinadora para a trigésima Dissertação de Mestrado área de concentração: TELECOMUNICAÇÕES. Estiveram presentes no Ato, além do coordenador do Curso de Pós-Graduação, professores, alunos e visitantes.

A Banca Examinadora, atendendo determinação do Colegiado do Programa Interdisciplinar de Pós-Graduação em Engenharia, ficou constituída pelos professores doutores **Walter Pereira Carpes Junior** (UFSC), **Wilson Arnaldo Artuzi Junior** (UFPR), **Oscar da Costa Gouveia Filho** (UFPR).

Às 14:00 horas, a banca iniciou os trabalhos, convidando o(a) candidato(a) **Mateus Teruyuki Nakahata** a fazer a apresentação da dissertação intitulada “Estudo da Precisão do Método ADI-FDTD na Simulação da propagação de Ondas Guiadas”. Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de arguição pelos membros participantes.

Tendo em vista a dissertação e a arguição, a banca atribuiu as seguintes notas: Prof. Dr. Walter Pereira Carpes Junior Nota: A, Prof. Dr. Wilson Arnaldo Artuzi Junior, Nota: A. Prof. Dr. Oscar da Costa Gouveia Filho Nota: A. A média obtida: A, resulta na APROVAÇÃO do candidato, (de acordo com a determinação dos Artigos 61,62,63,64 da Resolução 38/96 de 14.06.96), e corresponde ao conceito A/B/C/D.

Curitiba, 29 de abril de 2002.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **Walter Pereira Carpes Junior**

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **Wilson Arnaldo Artuzi Junior**

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **Oscar da Costa Gouveia Filho**

## RESUMO

O tópico principal deste trabalho é o estudo da precisão do método ADI-FDTD na simulação da propagação de ondas guiadas.

Inicialmente são mostrados os conceitos do método FDTD e discutida a condição de estabilidade deste método, que são a base para o desenvolvimento do método ADI-FDTD. Em seguida é apresentado o método ADI-FDTD e a ordenação utilizada para agilizar a solução dos sistemas de equações lineares que devem ser resolvidas neste método.

É feita também uma breve descrição da linha de transmissão *stripline*, a qual foi utilizado como objeto das simulações.

Finalmente são realizadas diversas simulações com os métodos FDTD e ADI-FDTD e seus resultados são comparados com os obtidos analiticamente.

## ABSTRACT

The main topic of this work is the study of the precision of the ADI-FDTD method in the simulation of the propagation of guided waves.

Initially the concepts of the FDTD method are shown and the condition of stability of this method is considered, which are the base for the development of the ADI-FDTD method. Then the ADI-FDTD method is presented and the ordering used to speed up the solution of the system of linear equations that should be solved in this method is explained.

It is also made a brief description of the *stripline* transmission line which was used as object of the simulations.

Finally several simulations are accomplished with both FDTD and ADI-FDTD methods and the results are compared with the ones obtained analytically.



## SUMÁRIO

<b>RESUMO .....</b>	<b>ii</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>iii</b>
<b>SUMÁRIO .....</b>	<b>iv</b>
<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>vi</b>
<b>LISTA DE TABELAS .....</b>	<b>vii</b>
<b>SIMBOLOGIA .....</b>	<b>viii</b>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>01</b>
<b>2 TEORIA DO MÉTODO FDTD .....</b>	<b>04</b>
2.1 INTRODUÇÃO .....	04
2.2 O MÉTODO FDTD .....	05
2.2.1 Transitório Eletromagnético .....	05
2.2.2 Discretização Espacial .....	07
2.2.3 Constantes Estruturais .....	09
2.2.4 Equações Fundamentais .....	14
2.2.5 Discretização Temporal .....	15
2.2.6 Critério de Estabilidade .....	16
2.2.7 Dispersão Numérica .....	17
2.2.8 Condutores Perfeitos .....	17
2.2.9 Elementos de Absorção .....	18
2.2.10 Fontes de Excitação .....	19
2.3 MÉTODO ADI-FDTD .....	21
2.3.1 Discretização Temporal .....	21
2.3.2 Solução de Sistemas de Equações Tridiagonal .....	24
2.3.3 Conclusão .....	26
<b>3 OBJETO DE TESTE .....</b>	<b>27</b>
3.1 INTRODUÇÃO .....	27
3.2 LINHA DE TRANSMISSÃO STRIPLINE .....	27

<b>3.3 MODELO NUMÉRICO .....</b>	<b>29</b>
3.3.1 Definição do Espaço Computacional .....	29
3.3.2 Definição das Características Eletromagnéticas dos Volumes .....	31
3.3.3 Definição das Superfícies Metálicas .....	32
3.3.4 Definição das Superfícies de Absorção .....	32
3.3.5 Definição da Malha .....	33
3.3.6 Definição da fonte .....	37
3.3.7 Definição das Amostras de Tensão .....	38
3.3.8 Definição das Amostras de Corrente .....	39
3.3.9 Definição dos Parâmetros Gerais .....	39
<b>3.4 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DA LINHA DE TRANSMISSÃO ..</b>	<b>40</b>
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>42</b>
4.1 INTRODUÇÃO .....	42
4.2 DEPENDÊNCIA EM RELAÇÃO À FREQUÊNCIA .....	42
4.3 DEPENDÊNCIA EM RELAÇÃO AO PASSO DE TEMPO DE SIMULAÇÃO ..	46
4.4 DEPENDÊNCIA EM RELAÇÃO ÀS DIMENSÕES DAS CÉLULAS .....	48
4.5 INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS .....	56
4.6 CONCLUSÃO .....	58
<b>5 CONCLUSÃO GERAL .....</b>	<b>59</b>
<b>ANEXO 1 – ARQUIVO ADI-FDTD.BAS .....</b>	<b>61</b>
<b>ANEXO 2 – CÁLCULO DA IMPEDÂNCIA CARACTERÍSTICA E</b> <b>CONSTANTE DE FASE .....</b>	<b>71</b>
<b>ANEXO 3 - CONDIÇÃO DE ABSORÇÃO SIMPLIFICADA PARA O</b> <b>MÉTODO FDTD .....</b>	<b>73</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>79</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Célula de Yee e seu esquema de numeração .....	08
Figura 2.2 – Elementos de potencial elétrico e de potencial magnético .....	11
Figura 2.3 – Células utilizadas no cálculo da capacitância $C_{x7}$ e relutância $R_{x1}$ .....	13
Figura 2.4 – Pulso de <i>Hanning</i> .....	20
Figura 2.5 - FFT do pulso de <i>Hanning</i> .....	20
Figura 2.6 – Elementos do somatório de $\Delta V$ ao redor de $\Delta M$ da equação (2.44.a) .....	22
Figura 2.7 – Aplicação da ordenada reversa de Cuthill-McKee .....	25
Figura 3.1 – Linha de Transmissão <i>stripline</i> .....	27
Figura 3.2 – Evolução da linha de transmissão <i>stripline</i> .....	28
Figura 3.3 – Tela de entrada de dados do programa GiD .....	30
Figura 3.4 – Definição dos materiais utilizados .....	31
Figura 3.5 – Superfícies metálicas .....	32
Figura 3.6 – Alocação dos planos de absorção .....	33
Figura 3.7 – Malha com 18 divisões uniformes .....	34
Figura 3.8 – Malha com 18 divisões graduais .....	35
Figura 3.9 – Malha com 24 divisões graduais .....	35
Figura 3.10 – Malha com 24 divisões em $z$ .....	36
Figura 3.11 – Alocação dos elementos da fonte .....	37
Figura 3.12 – Alocação dos pontos de amostragem da tensão .....	38
Figura 3.13 – Alocação dos pontos de amostragem de corrente .....	39
Figura 3.14 – Janela de configuração de parâmetros do GiD .....	40
Figura 4.1 – Erro de $Z$ em função de $f_0$ para a malha da figura 3.7 .....	44
Figura 4.2 – Erro de $\beta$ em função de $f_0$ para a malha da figura 3.7 .....	44
Figura 4.3 – Erro de $Z$ em função de $\Delta t$ .....	47
Figura 4.4 – Erro de $\beta$ em função de $\Delta t$ .....	47
Figura 4.5 – Erro de $Z$ em função de $\Delta t$ para a frequência de 1GHz .....	50
Figura 4.6 – Erro de $\beta$ em função de $\Delta t$ para a frequência de 1GHz .....	50
Figura 4.7 – Erro de $Z$ em função de $\Delta t$ para a frequência de 2GHz .....	51
Figura 4.8 – Erro de $\beta$ em função de $\Delta t$ para a frequência de 2GHz .....	51
Figura 4.9 – Erro de $Z$ em função de $\Delta t$ para a frequência de 4GHz .....	52
Figura 4.10 – Erro de $\beta$ em função de $\Delta t$ para a frequência de 4GHz .....	52
Figura 4.11 – Erro de $Z$ em função de $\Delta t$ para a frequência de 8GHz .....	53
Figura 4.12 – Erro de $\beta$ em função de $\Delta t$ para a frequência de 8GHz .....	53
Figura 4.13 – Comparação dos erros de $Z$ em função da frequência .....	55
Figura 4.14 - Comparação dos erros de $\beta$ em função da frequência .....	56

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – ERRO DE $Z$ E $\beta$ EM FUNÇÃO DA TENSÃO .....	43
TABELA 2 – ERRO DE $Z$ E $\beta$ EM FUNÇÃO DA CORRENTE .....	43
TABELA 3 – TEMPO DE SIMULAÇÃO .....	45
TABELA 4 –ERRO DE $Z$ E $\beta$ EM FUNÇÃO DE $\Delta t$ .....	46
TABELA 5 –ERRO DE $Z$ E $\beta$ EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA COM MALHA DE 18 DIVISÕES GRADUAIS .....	48
TABELA 6 –ERRO DE $Z$ E $\beta$ EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA COM MALHA DE 24 DIVISÕES GRADUAIS .....	49
TABELA 7 –ERRO DE $Z$ E $\beta$ EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA COM MALHA DE 24 DIVISÕES GRADUAIS NA DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO .....	49
TABELA 8 –ERRO DE $Z$ E $\beta$ EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA COM $\Delta t = 2,5$ ps .....	54
TABELA 9 –ERRO DE $Z$ E $\beta$ EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA COM $\Delta t = 2,5$ ps .....	55

## SIMBOLOGIA

<b>E</b>	campo elétrico
<b>H</b>	campo magnético
<b>D</b>	densidade de fluxo elétrico
<b>B</b>	densidade de fluxo magnético
<b>J</b>	densidade de corrente elétrica
$\mu$	permeabilidade magnética
$\epsilon$	permissividade elétrica
$\sigma$	condutividade elétrica
$\rho$	densidade de carga
<b>E<sub>t</sub></b>	vetor campo elétrico tangencial
<b>B<sub>n</sub></b>	vetor densidade de fluxo magnético normal
<b>H<sub>n</sub></b>	vetor campo magnético normal
<b>D<sub>n</sub></b>	vetor densidade de fluxo elétrico normal
<b><math>\Delta V</math></b>	matriz coluna de potencial elétrico
<b><math>\Delta M</math></b>	matriz coluna de potencial magnético
<b>H<sub>t</sub></b>	vetor campo magnético tangencial
<b><math>\Delta V_{xi}</math></b>	elemento de potencial elétrico com origem em i e direção de x
<b><math>\Delta V_{yi}</math></b>	elemento de potencial elétrico com origem em i e direção de y
<b><math>\Delta V_{zi}</math></b>	elemento de potencial elétrico com origem em i e direção de z
<b><math>\Delta M_{xi}</math></b>	elemento de potencial magnético com origem em i' e direção de x
<b><math>\Delta M_{yi}</math></b>	elemento de potencial magnético com origem em i' e direção de y
<b><math>\Delta M_{zi}</math></b>	elemento de potencial magnético com origem em i' e direção de z
<b><math>\Delta H_{xi}</math></b>	elemento de campo magnético com origem em i' e direção de x
<b><math>\Delta H_{yi}</math></b>	elemento de campo magnético com origem em i' e direção de y
<b><math>\Delta H_{zi}</math></b>	elemento de campo magnético com origem em i' e direção de z

$\Delta x_i$	comprimento da aresta com origem em i e direção x
$\Delta y_i$	comprimento da aresta com origem em i e direção y
$\Delta z_i$	comprimento da aresta com origem em i e direção z
C	capacitância
G	condutância
R	relutância
$\Delta S$	área da face
$\Delta L$	comprimento da aresta
$C_{xi}$	capacitância da aresta com origem em i e direção x
$C_{yi}$	capacitância da aresta com origem em i e direção y
$C_{zi}$	capacitância da aresta com origem em i e direção z
$G_{xi}$	condutância da aresta com origem em i e direção x
$G_{yi}$	condutância da aresta com origem em i e direção y
$G_{zi}$	condutância da aresta com origem em i e direção z
$R_{xi}$	relutância da face na direção x
$R_{yi}$	relutância da face na direção y
$R_{zi}$	relutância da face na direção z
C	matriz das capacitâncias
R	matriz das relutâncias
G	matriz das condutâncias
$\Delta I$	elemento de corrente elétrica
$\Delta V^n$	vetor elemento de tensão no instante n. $\Delta t$
$\Delta V^{n+1}$	vetor elemento de tensão no instante (n+1). $\Delta t$
$\Delta V^{n+2}$	vetor elemento de tensão no instante (n+2). $\Delta t$
$\Delta I^{n-1}$	vetor elemento de corrente no instante (n-1). $\Delta t$
$\Delta I^n$	vetor elemento de corrente no instante n. $\Delta t$
$\Delta I^{n+1}$	vetor elemento de corrente no instante (n+1). $\Delta t$
$\Delta M^n$	vetor elemento de potencial magnético no instante n. $\Delta t$
$\Delta M^{n+1}$	vetor elemento de potencial magnético no instante (n+1). $\Delta t$

$c$	velocidade da luz no vácuo
$T$	duração do pulso
$f_0$	freqüência central
$\beta$	constante de fase
$Z$	impedância característica
$\eta$	impedância da onda no vácuo
$\epsilon_r$	permissividade elétrica relativa
$b$	distância entre os planos condutores
$w$	largura da fita central
$t$	espessura da fita central
$\mu_r$	permeabilidade magnética relativa.
$\Delta V_{xi}^n$	elemento de potencial elétrico com origem em $i$ e direção de $x$ no instante $n.\Delta t$
$\Delta V_{yi}^n$	elemento de potencial elétrico com origem em $i$ e direção de $y$ no instante $n.\Delta t$
$\Delta V_{zi}^n$	elemento de potencial elétrico com origem em $i$ e direção de $z$ no instante $n.\Delta t$
$\Delta V_{xi}^{n+1}$	elemento de potencial elétrico com origem em $i$ e direção de $x$ no instante $(n+1).\Delta t$
$\Delta V_{yi}^{n+1}$	elemento de potencial elétrico com origem em $i$ e direção de $y$ no instante $(n+1).\Delta t$
$\Delta V_{zi}^{n+1}$	elemento de potencial elétrico com origem em $i$ e direção de $z$ no instante $(n+1).\Delta t$
$\Delta M_{xi}^n$	elemento de potencial elétrico com origem em $i$ e direção de $x$ no instante $n.\Delta t$
$\Delta M_{yi}^n$	elemento de potencial elétrico com origem em $i$ e direção de $y$ no instante $n.\Delta t$
$\Delta M_{zi}^n$	elemento de potencial elétrico com origem em $i$ e direção de $z$ no instante $n.\Delta t$
$\Delta M_{xi}^{n+1}$	elemento de potencial elétrico com origem em $i$ e direção de $x$ no instante $(n+1).\Delta t$
$\Delta M_{yi}^{n+1}$	elemento de potencial elétrico com origem em $i$ e direção de $y$ no instante $(n+1).\Delta t$
$\Delta M_{zi}^{n+1}$	elemento de potencial elétrico com origem em $i$ e direção de $z$ no instante $(n+1).\Delta t$

## 1 INTRODUÇÃO

Microondas e componentes eletrônicos que trabalham com microondas vêm sendo largamente utilizados nas áreas de computação, telecomunicações e sistemas de navegação. A análise da compatibilidade eletromagnética de dispositivos trabalhando com microondas tem, portanto, despertado grande interesse dos pesquisadores. O estudo do comportamento destes dispositivos utilizando métodos analíticos se mostra difícil e muitas vezes inviável, devido à alta complexidade matemática envolvida. Contudo, o advento dos computadores digitais possibilitou que problemas eletromagnéticos complexos sejam resolvidos utilizando-se métodos numéricos [1] e conseqüentemente cada vez mais experiências práticas dão lugar a simulações de forma a reduzir custos e ampliar as possibilidades nas investigações.

Dentre os diversos métodos atualmente utilizados, o método FDTD (*Finite Difference Time Domain*) [2] tem se destacado como um método simples e preciso. Este método não apresenta grandes complexidades matemáticas, é robusto e apresenta uma modelagem adequada a vários problemas de interação eletromagnética. Computacionalmente, o esquema é dispendioso e requer computadores com grande poder de processamento, porém com a rápida evolução da capacidade de armazenamento e do tempo de processamento, problemas que há alguns anos só eram resolvidos em sofisticadas estações de trabalho, hoje podem ser resolvidos em microcomputadores pessoais de baixo custo.

Quando a dimensão da estrutura é da mesma ordem de grandeza do comprimento de onda, o método FDTD convencional é adequado, pois nesta situação é mais rápido que os demais. O método FDTD, entretanto, pode apresentar instabilidade e dispersão numérica. A condição de Courant [2] assegura a estabilidade numérica ao restringir a discretização temporal em função da discretização espacial. Desta forma, o número de iterações aumenta à medida que mais pontos são utilizados para discretizar o espaço. A dispersão numérica é mantida em níveis aceitáveis se forem garantidos pelo menos vinte pontos de discretização espacial por comprimento de onda [1].



O método MRTD (*Multiresolution Time Domain*) [3] foi criado com o objetivo de reduzir a dispersão numérica permitindo a utilização de menos pontos de discretização por comprimento de onda. Através da aplicação da expansão espacial *wavelet* [4] ortogonal para as equações de Maxwell, o método MRTD reduz a dispersão numérica, sendo capaz de fornecer resultados precisos com uma discretização próxima ao limite de amostragem de Nyquist. Portanto a mínima discretização para que o método MRTD gere resultados confiáveis é próximo de duas amostras por comprimento de onda, muito menos que os mínimos vinte necessários no método FDTD convencional.

A fim de relaxar a condição de estabilidade, foi desenvolvido o método ADI-FDTD (*Alternating Direction Implicit Finite Difference Time Domain*) [5] [6]. Neste método o passo de tempo pode ser escolhido em função de uma precisão requerida sem a preocupação em obedecer à condição de *Courant*. O objetivo deste trabalho é investigar a precisão do método ADI-FDTD em relação às discretizações temporais e espaciais.

No trabalho foram realizadas diversas simulações e os resultados obtidos foram comparados com as soluções analíticas. Foram realizadas também comparações com os resultados de simulações utilizando o método FDTD. Desta forma, foi possível comparar a precisão de ambos os métodos e determinar as características de cada um. Como objeto de teste foi utilizada uma linha de transmissão *stripline* devido à confiabilidade dos resultados obtidos analiticamente.

O Capítulo 2 apresenta o método FDTD, seu histórico, teoria e a utilização de um esquema novo: em vez de utilizar valores de campo elétrico e magnético, faz uso de valores de tensão e corrente a fim de propiciar uma interface direta com modelos de componentes eletrônicos discretos em trabalhos futuros. Em seguida o método ADI-FDTD é apresentado, com seu histórico e equações fundamentais. Como são necessárias as soluções de sistemas de equações lineares, é discutida a permutação de matrizes de forma a torná-las tridiagonais e em seguida a solução do sistema é encontrada utilizando a decomposição em matrizes com apenas duas diagonais não

nulas.

No capítulo 3 é descrita a linha de transmissão *stripline* que é utilizada nas simulações. É também descrito o programa utilizado para a definição do espaço computacional e criação da malha.

No capítulo 4 os resultados das simulações são apresentados em função da dependência em relação à frequência da fonte de excitação, passo no tempo de simulação e configuração da malha de discretização espacial. Após esta apresentação os resultados são discutidos.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões gerais do trabalho.

## 2 TEORIA DO MÉTODO FDTD

### 2.1 INTRODUÇÃO

A origem do método FDTD se deu em 1966. Neste ano, Kane S. Yee desenvolveu um trabalho que chamou de "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media" [7]. O trabalho de Yee marca o início do método FDTD. O termo FDTD foi utilizado pela primeira vez por Allen Taflove em 1980.

Apesar da sua simplicidade, o método FDTD teve uma lenta evolução por necessitar de computadores de alto desempenho, pois requer muita memória e tempo de processamento. No entanto, o alto desempenho das estações de trabalho de alguns anos atrás já está presente nos microcomputadores domésticos de hoje.

Este método tem como característica apresentar instabilidade numérica quando o passo no tempo não satisfaz a condição de estabilidade de Courant [2], que limita o passo no tempo em função da discretização espacial utilizada.

Na tentativa de eliminar a instabilidade numérica inerente ao método FDTD foi criado o método ADI-FDTD, o qual é incondicionalmente estável.

Este capítulo traz uma descrição tanto do método FDTD quanto do método ADI-FDTD, os quais foram utilizados nesta dissertação. Alternativamente aos trabalhos encontrados sobre o assunto que utilizam valores de campo elétrico e magnético, as simulações foram realizadas em relação a valores de tensão e corrente em cada ponto de discretização.

A simulação requer a solução de um sistema de equações lineares de alta ordem. Para otimizar o tempo de resolução foram utilizadas algumas funções de manipulação de matrizes, como por exemplo, a permutação de linhas e colunas a fim de se obter uma matriz tridiagonal. Matrizes tridiagonais levam a uma solução mais rápida quando são fatoradas em duas matrizes, triangular inferior e triangular

superior [8].

## 2.2 O MÉTODO FDTD

### 2.2.1 Transitório Eletromagnético

Na simulação dos campos eletromagnéticos foi utilizado o tipo de excitação denominada transitório eletromagnético e caracterizada por ter inicialmente um valor de tensão nulo, uma alta frequência e uma curta duração.

A propagação de ondas eletromagnéticas torna-se evidenciada numa estrutura física quando suas dimensões ultrapassam um décimo do comprimento da onda eletromagnética.

Para a solução de problemas envolvendo a propagação de ondas eletromagnéticas, partimos das equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  são os campo elétrico e magnético respectivamente,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$  são as densidade de fluxo elétrico e magnético,  $\rho$  é a densidade volumétrica de carga elétrica e  $\mathbf{J}$  é densidade superficial de corrente elétrica.

As equações (2.1) e (2.2) são conhecidas como leis de Faraday e Ampère, respectivamente, e as equações (2.3) e (2.4) são conhecidas como leis de Gauss.

A maioria dos materiais elétricos encontrados na prática são condutores elétricos não magnéticos e dielétricos (isolantes elétricos) que podem ser caracterizados macroscopicamente pelas constantes

- $\mu$ , que representa a permeabilidade magnética (1,257  $\mu\text{H/mm}$  para o vácuo e os materiais não magnéticos),
- $\varepsilon$ , que representa a permissividade elétrica (8,854 pF/mm para o vácuo mas varia para cada material) e
- $\sigma$ , que é a condutividade elétrica (varia para cada material e é nula para o vácuo).

As densidades de fluxo magnético, fluxo elétrico e corrente elétrica podem ser expressas em função do campo eletromagnético através das constantes elétricas dos materiais

$$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E} \quad (2.7)$$

Com estas informações é possível caracterizar o comportamento do campo no tempo em materiais lineares e isotrópicos, uma vez que as condições iniciais são conhecidas e satisfazem as equações de Maxwell. Convenientemente, o campo e a fonte são ajustados para serem zero no tempo inicial. Isso se deve ao fato de ter sido utilizado na simulação um transitório eletromagnético, que possui como característica as condições iniciais nulas. Neste caso, as duas equações divergentes são na verdade redundantes, uma vez que podem ser obtidas através das equações rotacionais nestas condições.

É possível demonstrar que apenas as equações rotacionais são necessárias e que as equações divergentes estão contidas nestas. Para tanto, calcula-se os divergentes das equações rotacionais

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \Rightarrow 0 = -\frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = \text{constante} \quad (2.8.a)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) \Rightarrow 0 = \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (2.8.b)$$

da equação da continuidade da corrente elétrica temos

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

substituindo  $\nabla \cdot \mathbf{J}$  por  $-\frac{\partial \rho}{\partial t}$  em (2.8.b) temos

$$\frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial [(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \rho]}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} - \rho = \text{constante} \quad (2.8.c)$$

Nas demonstrações acima a identidade  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$  foi utilizada. Como  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\rho$  têm valor inicial igual a zero, tem-se

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \text{constante} = 0 \quad (2.9.a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho = \text{constante} = 0 \quad (2.9.b)$$

que são as equações (2.3) e (2.4) e portanto as equações rotacionais são suficientes para os cálculos do transitório eletromagnético.

### 2.2.2 Discretização Espacial

Yee montou um esquema para permitir a aplicação das Leis de Faraday e Ampère no sistema de coordenadas cartesianas de forma a minimizar os cálculos necessários ao assumir uma discretização do espaço tridimensional.

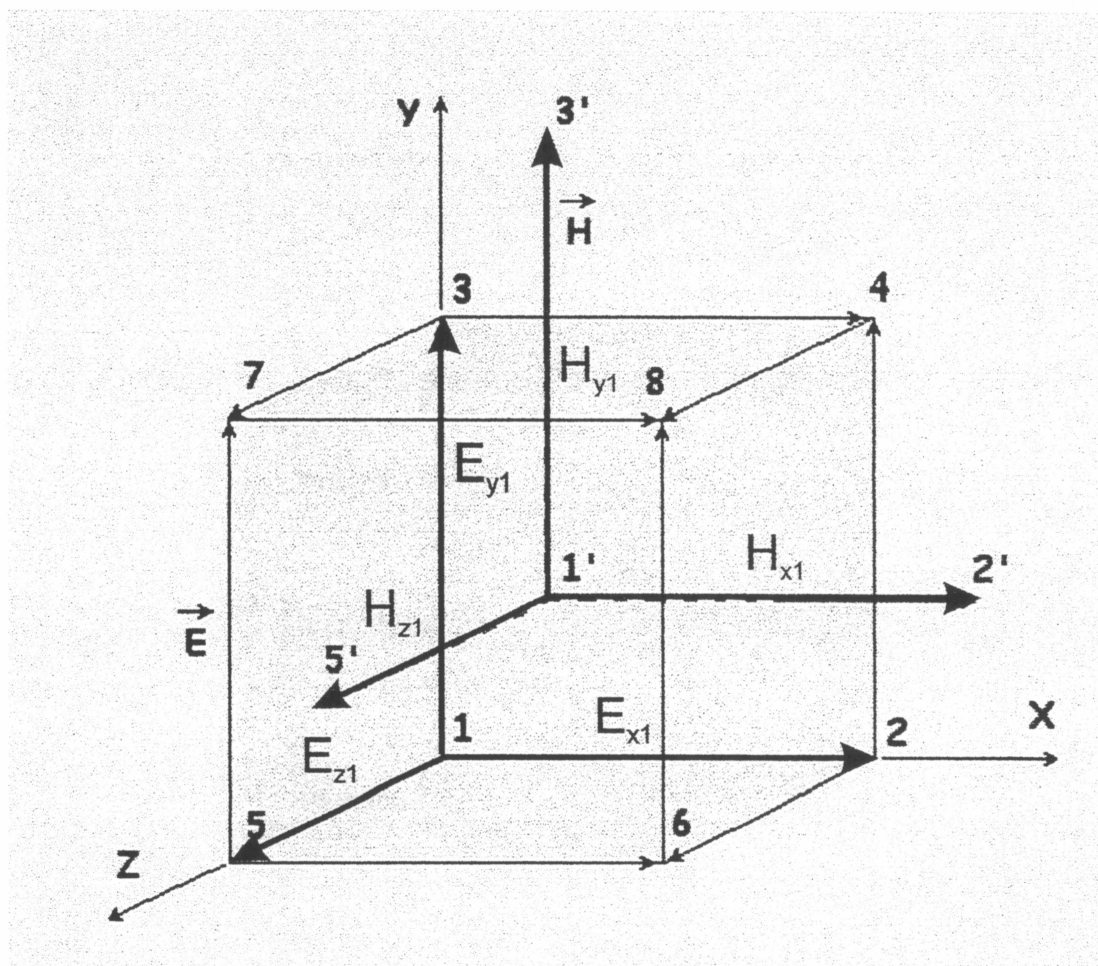


Figura 2.1 – Célula de Yee e seu esquema de numeração

O espaço é dividido em células básicas como as da figura 2.1, as quais apresentam vetores de campo elétrico tangenciais às arestas e vetores de campo magnético normais às faces das células. Desta forma os componentes de campo elétrico e magnético são arranjados no espaço tridimensional de tal forma que cada vetor  $\mathbf{H}$  é envolvido por quatro vetores  $\mathbf{E}$  e vice-versa.

Para realizar a simulação é necessário enumerar todos os elementos do espaço computacional para identificar cada um deles de forma inequívoca. Sendo assim, foram enumerados todos os vetores, células e nós de acordo com o esquema descrito a seguir.

Na figura 2.1, está representada a primeira célula localizada na origem dos eixos coordenados. Nesta figura tem-se a numeração dos nós dentro de uma única célula. Ao enumerar os nós de toda a malha, iniciamos pela coordenada  $x$ , em seguida

utilizamos a coordenada y e finalmente a coordenada z. Partindo da origem dos eixos, enumeram-se os nós da direção de x crescente. Ao chegar ao último nó nesta direção, retorna-se ao início e incrementa-se y de uma unidade e novamente enumeram-se os nós na direção de x. Quando chegar ao último nó em x e y máximos, retorna-se à origem dos eixos e incrementa-se z de uma unidade e o processo se inicia novamente, até enumerar todo o espaço computacional. Cada célula possui oito nós, e as células são representadas com a mesma numeração do seu nó de menor índice. Na figura 2.1 está representada a célula de número um. Os vetores de campo elétrico são tangenciais às arestas da célula e têm a origem no nó de menor índice da respectiva aresta. Os vetores de campo magnético são normais às faces da célula e têm origem no nó n', que se localiza no centro da célula. Na simulação consideraram-se constantes as características do material ( $\sigma, \mu, \epsilon$ ) dentro da célula.

### 2.2.3 Constantes Estruturais

Utilizando a lei de Faraday na forma integral, tem-se

$$\oint_L \mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B}_n \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_L \mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mu \mathbf{H}_n \cdot d\mathbf{S} \quad (2.10)$$

onde os índices "t" e "n" são utilizados para representar os componentes vetoriais tangencial ao contorno e normal à superfície.

Já da lei de Ampère, obtém-se

$$\oint_L \mathbf{H}_t \cdot d\mathbf{L} = \int_S \mathbf{J}_n \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D}_n \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_L \mathbf{H}_t \cdot d\mathbf{L} = \int_S \sigma \cdot \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \epsilon \cdot \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{S} \quad (2.11)$$

Na formulação, são considerados constantes os componentes vetoriais de campo ao longo de uma aresta e sobre uma face nas células de Yee. Sendo assim, utilizou-se o



que se denominou elemento de tensão da seguinte forma

$$\Delta V = -\int \mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{L} = -\mathbf{E}_t \cdot \Delta \mathbf{L} \quad (2.12)$$

Onde  $\mathbf{E}_t$  é o campo elétrico tangencial a uma aresta e  $\Delta \mathbf{L}$  é o comprimento da respectiva aresta.

Como exemplo, observando a figura 2.2, tem-se

$$\Delta V_{x1} = -E_{x1} \cdot \Delta_{x1} \quad (2.13.a)$$

$$\Delta V_{y1} = -E_{y1} \cdot \Delta_{y1} \quad (2.13.b)$$

$$\Delta V_{z1} = -E_{z1} \cdot \Delta_{z1} \quad (2.13.c)$$

Analogamente definiu-se o elemento de potencial magnético  $\Delta \mathbf{M}$ , que é o produto do campo magnético tangencial a uma aresta  $\mathbf{H}_t$  pelo comprimento da respectiva aresta,  $\Delta \mathbf{L}$

$$\Delta M = \int \mathbf{H}_t \cdot d\mathbf{L} = \mathbf{H}_t \cdot \Delta \mathbf{L} \quad (2.14)$$

Como exemplo, observando a figura 2.2, tem-se a representação dos elementos

$$\Delta M_{x1} = H_{x1} \left( \frac{\Delta_{x1}}{2} + \frac{\Delta_{x2}}{2} \right) \quad (2.15.a)$$

$$\Delta M_{y1} = H_{y1} \left( \frac{\Delta_{y1}}{2} + \frac{\Delta_{y3}}{2} \right) \quad (2.15.b)$$

$$\Delta M_{z1} = H_{z1} \left( \frac{\Delta_{z1}}{2} + \frac{\Delta_{z5}}{2} \right) \quad (2.15.c)$$

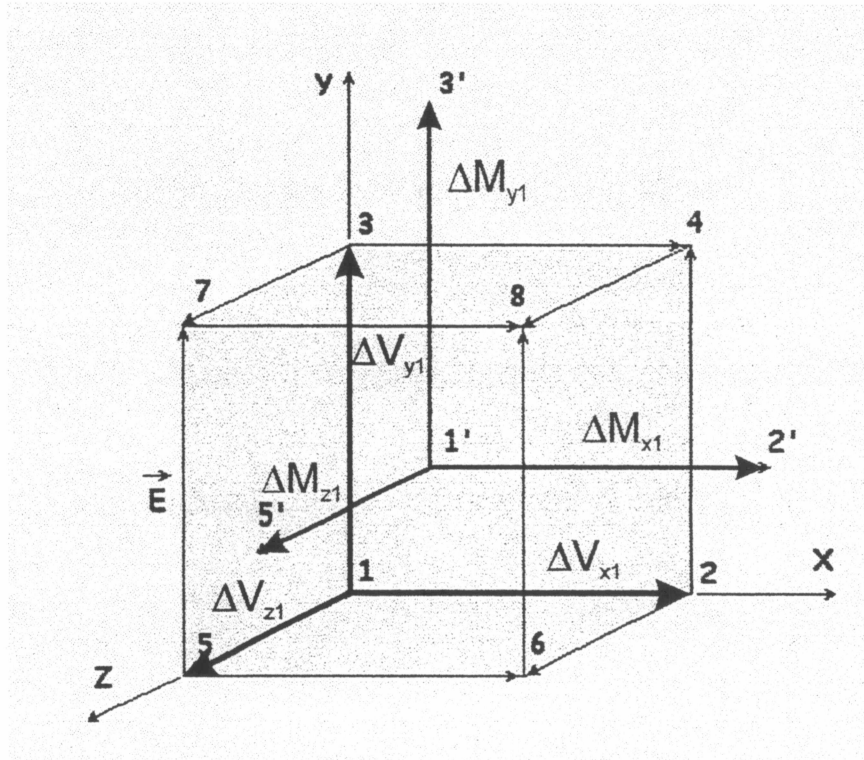


Figura 2.2 – Elementos de potencial elétrico e de potencial magnético

Neste caso, ao se calcular o comprimento  $\Delta L$ , considera-se a distância do nó  $n'$  no centro da célula até o centro da célula vizinha na direção do vetor do campo magnético utilizado.

Estes elementos são arranjados como vetores coluna na forma

$$\Delta \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta M_z \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Em consequência às aproximações utilizadas para o campo eletromagnético é possível determinar as capacitâncias e as condutâncias das arestas e as relutâncias das faces das células de Yee através de

$$C = \epsilon \frac{\Delta S}{\Delta L} \quad (2.17)$$

$$G = \sigma \frac{\Delta S}{\Delta L} \quad (2.18)$$

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta L}{\Delta S} \quad (2.19)$$

onde  $\Delta S$  é a área da face e  $\Delta L$ , o comprimento da aresta. As equações acima são resultantes da aplicação das fórmulas do capacitor de placas paralelas, do resistor uniforme e do solenóide [9]. Estas constantes estabelecem as características físicas e geométricas do espaço discretizado através das células de Yee, sendo denominadas nesta dissertação de constantes estruturais. Como células vizinhas podem apresentar características físicas e geométricas diferentes, tornou-se necessário realizar a média aritmética das constantes envolvidas uma vez que cada aresta é comum a quatro células e cada face é comum a duas células.

Desta forma, as constantes estruturais são dadas por

$$C_{x7} = \frac{\varepsilon_1 \Delta_{y1} \Delta_{z1} + \varepsilon_3 \Delta_{y3} \Delta_{z3} + \varepsilon_5 \Delta_{y5} \Delta_{z5} + \varepsilon_7 \Delta_{y7} \Delta_{z7}}{4\Delta x_7} \quad (2.20.a)$$

$$C_{y6} = \frac{\varepsilon_1 \Delta_{x1} \Delta_{z1} + \varepsilon_2 \Delta_{x2} \Delta_{z2} + \varepsilon_5 \Delta_{x5} \Delta_{z5} + \varepsilon_6 \Delta_{x6} \Delta_{z6}}{4\Delta y_6} \quad (2.20.b)$$

$$C_{z4} = \frac{\varepsilon_1 \Delta_{x1} \Delta_{y1} + \varepsilon_2 \Delta_{x2} \Delta_{y2} + \varepsilon_3 \Delta_{x3} \Delta_{y3} + \varepsilon_4 \Delta_{x4} \Delta_{y4}}{4\Delta z_4} \quad (2.20.c)$$

$$G_{x7} = \frac{\sigma_1 \Delta_{y1} \Delta_{z1} + \sigma_3 \Delta_{y3} \Delta_{z3} + \sigma_5 \Delta_{y5} \Delta_{z5} + \sigma_7 \Delta_{y7} \Delta_{z7}}{4\Delta x_7} \quad (2.21.a)$$

$$G_{y6} = \frac{\sigma_1 \Delta_{x1} \Delta_{z1} + \sigma_2 \Delta_{x2} \Delta_{z2} + \sigma_5 \Delta_{x5} \Delta_{z5} + \sigma_6 \Delta_{x6} \Delta_{z6}}{4\Delta y_6} \quad (2.21.b)$$

$$G_{z4} = \frac{\sigma_1 \Delta_{x1} \Delta_{y1} + \sigma_2 \Delta_{x2} \Delta_{y2} + \sigma_3 \Delta_{x3} \Delta_{y3} + \sigma_4 \Delta_{x4} \Delta_{y4}}{4\Delta z_4} \quad (2.21.c)$$

$$\mathfrak{R}_{x1} = \frac{\frac{\Delta_{x1}}{\mu_1} + \frac{\Delta_{x2}}{\mu_2}}{2\Delta_{y1}\Delta_{z1}} \quad (2.22.a)$$

$$\mathfrak{R}_{y1} = \frac{\frac{\Delta_{y1}}{\mu_1} + \frac{\Delta_{y3}}{\mu_3}}{2\Delta_{x1}\Delta_{z1}} \quad (2.22.b)$$

$$\mathfrak{R}_{z1} = \frac{\frac{\Delta_{z1}}{\mu_1} + \frac{\Delta_{z5}}{\mu_5}}{2\Delta_{x1}\Delta_{y1}} \quad (2.22.c)$$

Na figura 2.3 têm-se representadas as células utilizadas no cálculo da capacitância  $C_{x7}$  e a relutância  $\mathfrak{R}_{x1}$ .

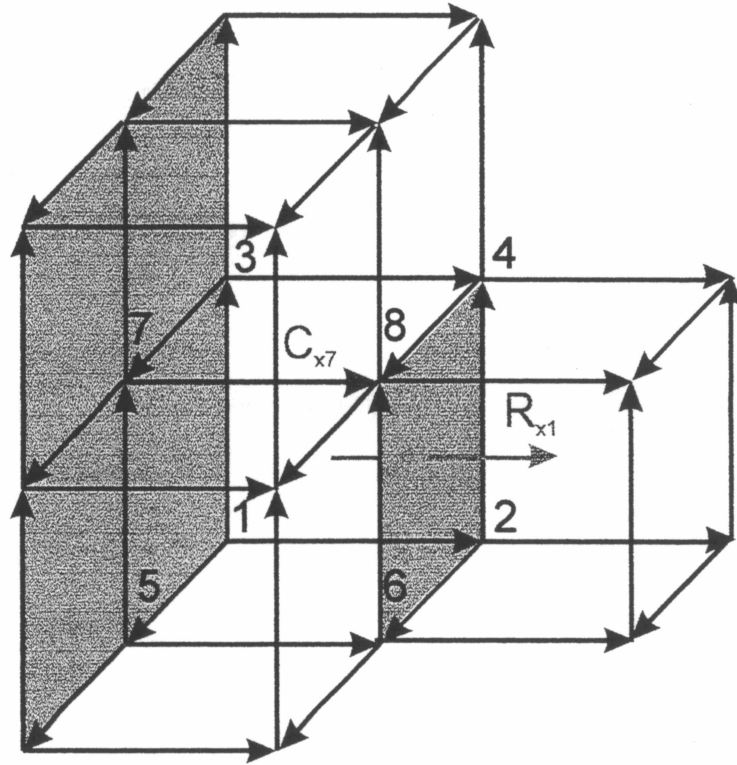


Figura 2.3 – Células utilizadas no cálculo da capacitância  $C_{x7}$  e relutância  $\mathfrak{R}_{x1}$

Na formulação matricial estas constantes tomam a forma de matrizes diagonais de acordo com

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_x & 0 & 0 \\ 0 & C_y & 0 \\ 0 & 0 & C_z \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{R}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{R}_z \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_x & 0 & 0 \\ 0 & G_y & 0 \\ 0 & 0 & G_z \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

### 2.2.4 Equações Fundamentais

Aproximando-se as integrais de linha das leis de Faraday e Ampère como somatórios discretos e substituindo-se as definições anteriores tem-se

$$\Delta V_{y2} + \Delta V_{z4} - \Delta V_{y6} - \Delta V_{z2} = \frac{1}{\mathfrak{R}_{x1}} \cdot \frac{d\Delta M_{x1}}{dt} \quad (2.26.a)$$

$$\Delta V_{z3} + \Delta V_{x7} - \Delta V_{z4} - \Delta V_{x3} = \frac{1}{\mathfrak{R}_{y1}} \cdot \frac{d\Delta M_{y1}}{dt} \quad (2.26.b)$$

$$\Delta V_{x5} + \Delta V_{y6} - \Delta V_{x7} - \Delta V_{y5} = \frac{1}{\mathfrak{R}_{z1}} \cdot \frac{d\Delta M_{z1}}{dt} \quad (2.26.c)$$

$$\Delta M_{y1} + \Delta M_{z3} - \Delta M_{y5} - \Delta M_{z1} = -G_{x7} \cdot \Delta V_{x7} - C_{x7} \cdot \frac{d\Delta V_{x7}}{dt} \quad (2.27.a)$$

$$\Delta M_{z1} + \Delta M_{x5} - \Delta M_{z2} - \Delta M_{x1} = -G_{y6} \cdot \Delta V_{y6} - C_{y6} \cdot \frac{d\Delta V_{y6}}{dt} \quad (2.27.b)$$

$$\Delta M_{x1} + \Delta M_{y2} - \Delta M_{x3} - \Delta M_{y1} = -G_{z4} \cdot \Delta V_{z4} - C_{z4} \cdot \frac{d\Delta V_{z4}}{dt} \quad (2.27.c)$$

Estas equações podem ser reescritas na forma matricial como

$$\sum_{\mathbf{v}} \Delta \mathbf{V} = \mathbf{R}^{-1} \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{M} \quad (2.28)$$

$$\sum_{\mathbf{M}} \Delta \mathbf{M} = -\mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{V} - \mathbf{C} \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{V} \quad (2.29)$$

onde  $\sum_{\mathbf{v}}$  e  $\sum_{\mathbf{M}}$  são matrizes esparsas com quatro elementos não nulos em cada linha, sendo dois elementos de valor +1 e dois de valor -1, cujo objetivo é realizar o somatório através do produto matricial.

A formulação matricial permite a introdução do elemento de corrente elétrica  $\Delta \mathbf{I}$  para substituir o elemento de corrente magnética  $\Delta \mathbf{M}$ , de acordo com a lei de Ampère

$$\mathbf{I} = \oint \mathbf{H}_t d\mathbf{L}$$

Para uma célula obtém-se

$$\Delta \mathbf{I} = \sum_M \mathbf{H}_t \cdot \Delta \mathbf{L} = \sum_M \Delta \mathbf{M} \quad (2.30)$$

Assim sendo, obtém-se as equações fundamentais do método FDTD em termos de elementos de tensão e corrente elétricas

$$\sum_M \sum_V \Delta \mathbf{V} = \mathbf{R}^{-1} \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{I}, \quad (2.31)$$

$$\Delta \mathbf{I} = -\mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{V} - \mathbf{C} \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{V}. \quad (2.32)$$

### 2.2.5 Discretização Temporal

A derivada em relação ao tempo das equações de Faraday e Ampère pode ser aproximada pela sua respectiva diferença finita centrada conforme

$$\sum_M \sum_V \Delta \mathbf{V}_i(t) = \mathbf{R}^{-1} \cdot \frac{\Delta \mathbf{I}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - \Delta \mathbf{I}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} \quad (2.33)$$

$$\Delta \mathbf{I}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = -\mathbf{G} \cdot \frac{\Delta \mathbf{V}(t + \Delta t) + \Delta \mathbf{V}(t)}{2} - \mathbf{C} \cdot \frac{\Delta \mathbf{V}(t + \Delta t) - \Delta \mathbf{V}(t)}{\Delta t} \quad (2.34)$$

ou abreviadamente

$$\sum_M \sum_V \Delta \mathbf{V}^n = \mathbf{R}^{-1} \frac{\Delta \mathbf{I}^{n+1} - \Delta \mathbf{I}^{n-1}}{\Delta t} \quad (2.35)$$

$$\Delta \mathbf{I}^{n+1} = -\mathbf{G} \frac{\Delta \mathbf{V}^{n+2} + \Delta \mathbf{V}^n}{2} - \mathbf{C} \frac{\Delta \mathbf{V}^{n+2} - \Delta \mathbf{V}^n}{\Delta t} \quad (2.36)$$

onde  $\Delta t$  é o passo que define a discretização temporal e “ $n$ ” indica a iteração realizada.

Isolando-se  $I^{n+1}$  e  $V^{n+2}$  nas equações (2.35) e (2.36) obtêm-se as equações recursivas do método FDTD

$$\Delta I^{n+1} = \Delta I^{n-1} + \Delta t \cdot \mathbf{R} \cdot \sum_{\mathbf{M}} \sum_{\mathbf{V}} \Delta \mathbf{V}^n \quad (2.37)$$

$$\Delta \mathbf{V}^{n+2} = \left( \frac{2\mathbf{C} - \Delta t \mathbf{G}}{2\mathbf{C} + \Delta t \mathbf{G}} \right) \cdot \Delta \mathbf{V}^n - \frac{2\Delta t}{2\mathbf{C} + \Delta t \mathbf{G}} \cdot \Delta \mathbf{I}^{n+1} \quad (2.38)$$

Nota-se que ao iniciar as iterações com  $n=1$ , os elementos de corrente apresentarão somente os índices pares e os elementos de tensão, os ímpares. Isto mostra que há um deslocamento temporal de  $\Delta t/2$  entre os valores de corrente e tensão, entretanto isto não causa erro nos resultados.

#### 2.2.6 Critério de Estabilidade

O passo temporal  $\Delta t$  precisa ser pequeno o suficiente para satisfazer a condição de estabilidade de Courant. Esta condição é obtida levando em consideração que o maior passo de tempo permitido deve ser limitado de tal forma que onda ou pulso não se propague por mais de uma célula no intervalo de tempo  $\Delta t$ , garantindo assim que a simulação seja estável. Em três dimensões a condição de estabilidade de Courant requer

$$\Delta t \leq \frac{1}{v \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad (2.39)$$

onde  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  são as menores arestas das células utilizadas na discretização espacial e  $v$  é a velocidade da luz no meio considerado.

### 2.2.7 Dispersão Numérica

A onda ou pulso que se propaga na região computacional tem uma velocidade de fase variável (que não é a velocidade de fase física ) dependente do comprimento de onda, da direção de propagação e da discretização espacial. Esta velocidade de fase, como a velocidade de fase física, causa o espalhamento dos pulsos, e é referida como dispersão numérica.

A consequência mais visível da dispersão numérica é que a onda ou pulso que se propaga no espaço discretizado tem uma velocidade de fase menor que a velocidade da luz. O efeito é mínimo para uma propagação oblíqua e máximo para uma onda propagando-se ao longo de  $x$ ,  $y$  ou  $z$ . Além disso, a dispersão numérica determina o comprimento de onda mínimo permitido que se propaga na região computacional. Comprimentos de onda menores que o mínimo não se propagam de forma alguma. Em outras palavras, as malhas FDTD e ADI-FDTD agem como filtros passa baixas com uma frequência de corte em torno de  $f_{\max} = c/2\min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  . Na prática, no entanto, os efeitos deste filtro passa - baixas são percebidos a partir de  $\lambda_{\min} = 20 \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ , ou seja, este é o menor comprimento de onda que é simulado de forma confiável.

### 2.2.8 Condutores perfeitos

Na natureza não encontramos condutores elétricos perfeitos, mas condutores elétricos como cobre e alumínio podem ser aproximados por condutores perfeitos devido à alta condutividade elétrica.

O campo elétrico tangencial aos condutores elétricos perfeitos é nulo, logo o elemento de tensão tangencial  $\Delta V$  também deve ser, e isto equivale a alocar um valor infinito de capacitância na equação fundamental do método FDTD .

Já condutores magnéticos perfeitos não existem fisicamente, mas podem ser utilizados como artifício em alguns problemas com simetria, nos quais algumas superfícies são modeladas por condutores magnéticos perfeitos.

Como o condutor magnético perfeito é o dual do condutor elétrico perfeito, o



elemento de potencial magnético  $\Delta M$  deve ser nulo, e isto equivale a alocar um valor nulo de relutância na equação fundamental do método FDTD.

### 2.2.9 Elementos de absorção

Em muitas simulações, as estruturas em estudo são abertas, como por exemplo antenas e linhas de transmissão do tipo *microstrip*. Para a simulação destas estruturas seria necessária a simulação até o infinito. Como nenhum computador pode armazenar uma quantidade infinita de dados, é necessário utilizar algum tipo de artifício para limitar o espaço da simulação. Mesmo em estruturas fechadas tem-se que limitar o tamanho da estrutura na direção de propagação. Isso é feito através da utilização da condição de contorno de absorção, na qual toda onda eletromagnética incidente deve ser absorvida de forma a eliminar qualquer reflexão.

A absorção é realizada através da extremidade de cada guia de onda, onde valores ótimos de condutividade elétrica [10] são alocados aos dielétricos que formam o guia de onda para fazer o casamento de impedâncias e assim evitar reflexões.

Um elemento de absorção é formado pela última camada de células de Yee na extremidade do guia de onda constituído por

- um condutor magnético perfeito (plano de corte da célula de Yee) e
- dielétricos com condutividade elétrica ótima.

Para a simulação de uma onda TEM (Transversal Eletromagnética), a condutividade é dada por

$$\sigma = \frac{2}{\Delta L} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \quad (2.40)$$

onde  $\Delta L$  é a aresta da célula na direção de propagação,  $\epsilon$  é a permissividade elétrica e  $\mu$  a permeabilidade magnética da região adjacente.

### 2.2.10 Fontes de Excitação

Para iniciar a simulação, deve-se inserir um transitório eletromagnético que se propague pela estrutura. Sempre que possível, deve-se procurar alocar os elementos de tensão ou corrente da fonte na seção transversal de forma semelhante à distribuição encontrada no modo de onda que se deseja simular.

A variação temporal dos elementos de tensão da fonte depende da largura da faixa de frequências a serem analisadas, sendo que a variação mais utilizada corresponde a um pulso de *Hanning* [11] modulado em amplitude. Quanto maior for a duração do pulso, mais estreita será a faixa de frequências excitadas. A equação do pulso é dada por

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \leq 0 \\ \frac{1 - \cos(\frac{2\pi t}{T})}{2} \cdot \cos(2\pi f_0 t), & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{para } t \geq T \end{cases} \quad (2.41)$$

onde  $T$  é a duração do pulso e  $f_0$  é frequência central. A faixa de frequências excitadas vai de  $f_0 - 2/T$  até  $f_0 + 2/T$ .

Na figura 2.4 tem-se a representação do pulso no domínio do tempo para um valor de  $T$  de 1ns e  $f_0$  igual a 10 GHz, e na figura 2.5 tem-se a sua representação no domínio da frequência, cujos valores são obtidos através do cálculo da FFT (*Fast Fourier Transform*).

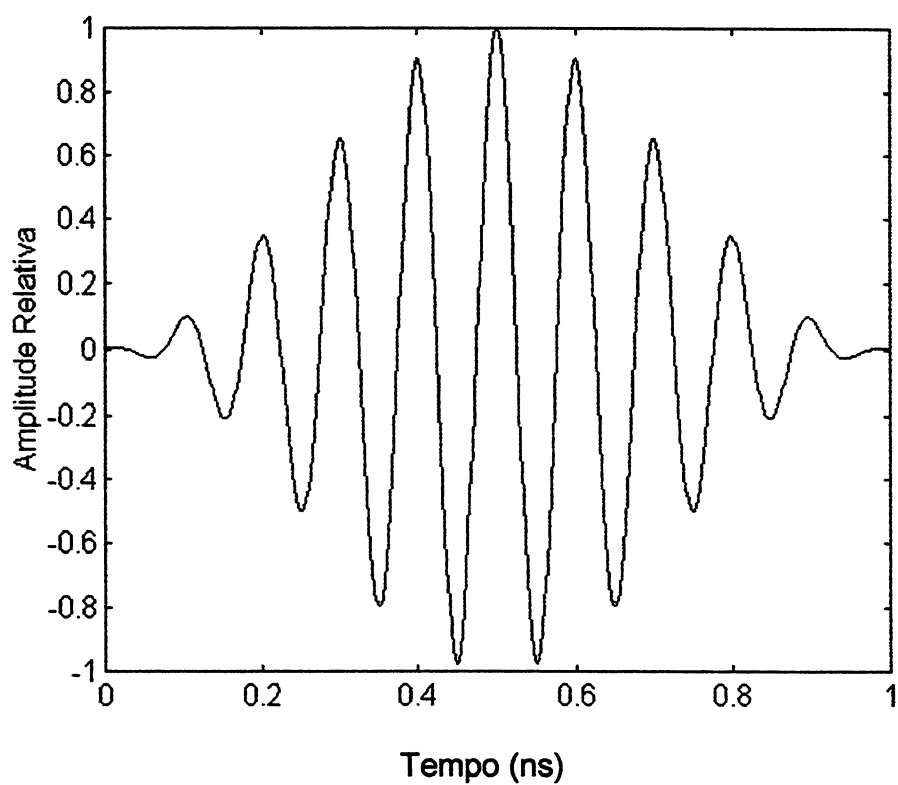


Figura 2.4 – Pulso de *Hanning*

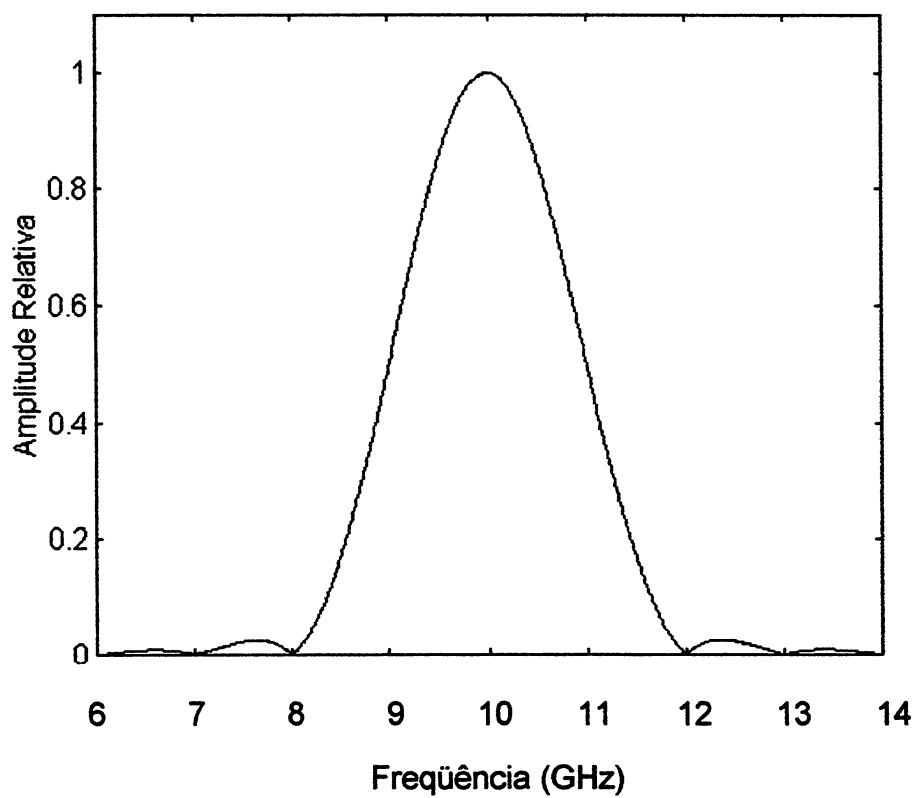


Figura 2.5 – FFT do pulso de *Hanning*

## 2.3 MÉTODO ADI-FDTD

O método FDTD é largamente utilizado para resolver problemas relacionados com o eletromagnetismo, porém a condição de estabilidade de Courant precisa ser satisfeita. Portanto, o passo máximo no tempo é limitado pelo tamanho mínimo da célula no domínio computacional, significando que se o objeto em análise apresentar dimensões muito menores que o comprimento de onda, o passo no tempo será muito menor que o período da onda, o que aumentará em muito o tempo de processamento.

A fim de remover a condição de estabilidade, foi desenvolvido o método ADI-FDTD [6] [8]. Com este método, o tamanho do passo no tempo não depende mais da condição de estabilidade de Courant, sendo escolhido em função dos erros numéricos decorrentes das discretizações.

### 2.3.1 Discretização Temporal

Uma possibilidade de tornar o método FDTD incondicionalmente estável seria através da aplicação da regra trapezoidal para a solução da equação diferencial [12]. Neste caso, as equações (2.28) e (2.29) seriam aproximadas por

$$\frac{\sum_V \Delta \mathbf{V}^{n+1} + \sum_V \Delta \mathbf{V}^n}{2} = \mathbf{R}^{-1} \frac{\Delta \mathbf{M}^{n+1} - \Delta \mathbf{M}^n}{\Delta t} \quad (2.42)$$

$$\frac{\sum_M \Delta \mathbf{M}^{n+1} + \sum_M \Delta \mathbf{M}^n}{2} = -G \cdot \frac{\Delta \mathbf{V}^{n+1} + \Delta \mathbf{V}^n}{2} - C \cdot \frac{\Delta \mathbf{V}^{n+1} - \Delta \mathbf{V}^n}{\Delta t} \quad (2.43)$$

No entanto, a determinação de  $\Delta \mathbf{V}^{n+1}$  em função de  $\Delta \mathbf{V}^n$  e  $\Delta \mathbf{I}^n$  é implícita e recai na obtenção da solução de um sistema de equações lineares de alta ordem a um custo computacional elevado, e que portanto, não é vantajosa em relação ao método FDTD condicionalmente estável.

A técnica ADI segue o mesmo princípio da regra trapezoidal, mas no lugar da média dos somatórios, o próprio somatório em si é dividido em duas parcelas cada

qual com os elementos de mesma orientação

$$\Delta V_{y2}^{n+1} - \Delta V_{y6}^{n+1} + \Delta V_{z4}^n - \Delta V_{z2}^n = R_{x1}^{-1} \frac{\Delta M_{x1}^{n+1} - \Delta M_{x1}^n}{\Delta t} \quad (2.44.a)$$

$$\Delta V_{z3}^{n+1} - \Delta V_{z4}^{n+1} + \Delta V_{x7}^n - \Delta V_{x3}^n = R_{y1}^{-1} \frac{\Delta M_{y1}^{n+1} - \Delta M_{y1}^n}{\Delta t} \quad (2.44.b)$$

$$\Delta V_{x5}^{n+1} - \Delta V_{x7}^{n+1} + \Delta V_{y6}^n - \Delta V_{y5}^n = R_{z1}^{-1} \frac{\Delta M_{z1}^{n+1} - \Delta M_{z1}^n}{\Delta t} \quad (2.44.c)$$

$$\Delta M_{z3}^{n+1} - \Delta M_{z1}^{n+1} + \Delta M_{y1}^n - \Delta M_{y5}^n = -G \frac{\Delta V_{x7}^{n+1} + \Delta V_{x7}^n}{2} - C \frac{\Delta V_{x7}^{n+1} - \Delta V_{x7}^n}{\Delta t} \quad (2.45.a)$$

$$\Delta M_{x5}^{n+1} - \Delta M_{x1}^{n+1} + \Delta M_{z1}^n - \Delta M_{z2}^n = -G \frac{\Delta V_{y6}^{n+1} + \Delta V_{y6}^n}{2} - C \frac{\Delta V_{y6}^{n+1} - \Delta V_{y6}^n}{\Delta t} \quad (2.45.b)$$

$$\Delta M_{y2}^{n+1} - \Delta M_{y1}^{n+1} + \Delta M_{x1}^n - \Delta M_{x3}^n = -G \frac{\Delta V_{z4}^{n+1} + \Delta V_{z4}^n}{2} - C \frac{\Delta V_{z4}^{n+1} - \Delta V_{z4}^n}{\Delta t} \quad (2.45.c)$$

Na figura 2.6 tem-se representados os elementos da equação (2.44.a)

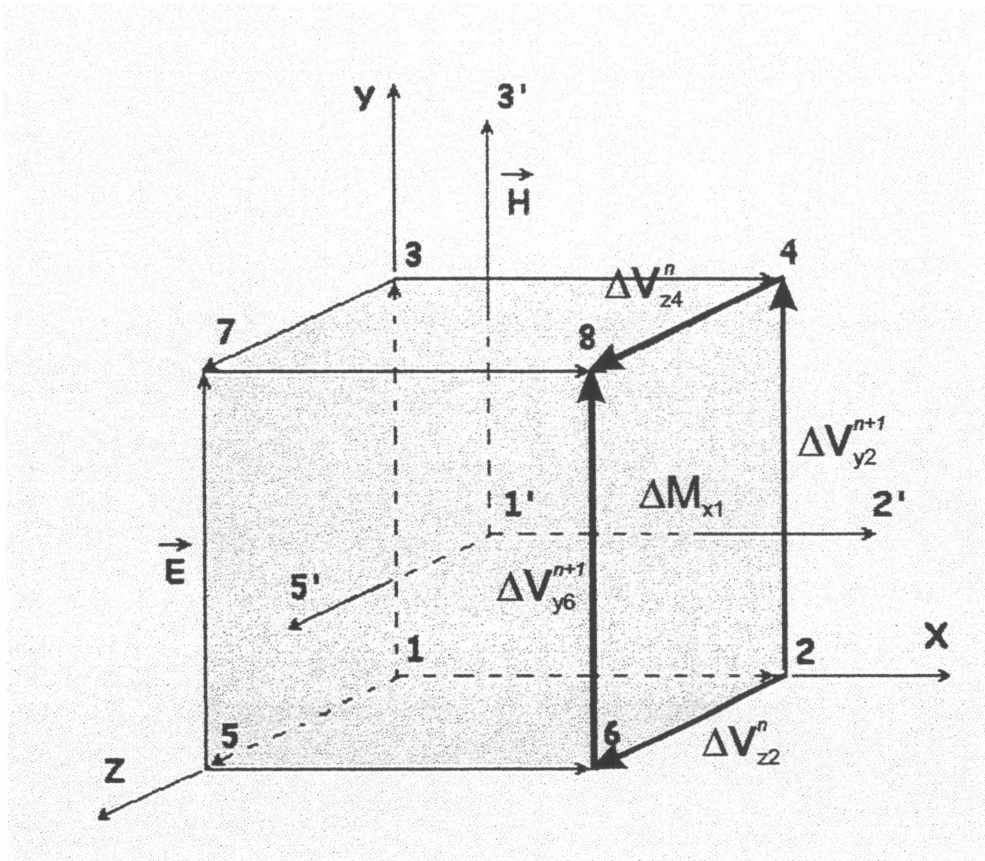


Figura 2.6 – Elementos do somatório de  $\Delta V$  ao redor de  $\Delta M$  da equação (2.44.a)

Na forma matricial

$$\sum_{VA} \Delta V^{n+1} + \sum_{VB} \Delta V^n = \mathbf{R}^{-1} \cdot \frac{\Delta \mathbf{M}^{n+1} - \Delta \mathbf{M}^n}{\Delta t} \quad (2.46)$$

$$\sum_{MA} \Delta \mathbf{M}^{n+1} + \sum_{MB} \Delta \mathbf{M}^n = -\mathbf{G} \frac{\Delta V^{n+1} + \Delta V^n}{2} - \mathbf{C} \frac{\Delta V^{n+1} + \Delta V^n}{\Delta t} \quad (2.47)$$

onde  $\sum_{VA}$ ,  $\sum_{VB}$ ,  $\sum_{MA}$ ,  $\sum_{MB}$  são matrizes esparsas que possuem dois elementos não nulos por linha, um com valor  $-1$  e outro com valor  $+1$ , e cujo objetivo é realizar o somatório através do produto matricial.

Utilizando a relação

$$\Delta \mathbf{I} = (\sum_{MA} + \sum_{MB}) \cdot \Delta \mathbf{M} = \sum_M \Delta \mathbf{M} \quad (2.48)$$

obtem-se equações recursivas para  $\Delta \mathbf{V}$  e  $\Delta \mathbf{I}$  na forma implícita.

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G} \mathbf{C}^{-1} + \Delta t \mathbf{C}^{-1} \sum_{MA} \Delta t \mathbf{R} \sum_{VA} \right] \Delta \mathbf{V}^{n+1} = \\ & \left[ 1 - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G} \mathbf{C}^{-1} - \Delta t \mathbf{C}^{-1} \sum_{MA} \Delta t \mathbf{R} \sum_{VB} \right] \Delta \mathbf{V}^n - \Delta t \mathbf{C}^{-1} \Delta \mathbf{I}^n \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\Delta \mathbf{I}^{n+1} = \Delta \mathbf{I}^n + \sum_M \Delta t \mathbf{R} \sum_{VA} \Delta \mathbf{V}^{n+1} + \sum_M \Delta t \mathbf{R} \sum_{VB} \Delta \mathbf{V}^n \quad (2.50)$$

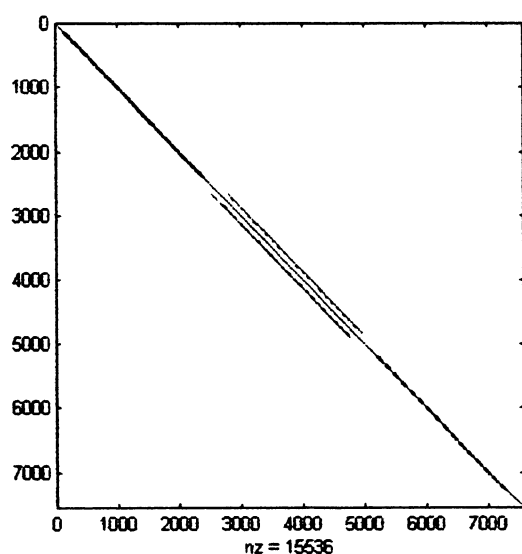
Neste caso, a determinação de  $\Delta \mathbf{V}^{n+1}$  em função de  $\Delta \mathbf{V}^n$  e  $\Delta \mathbf{I}^n$  recai na obtenção da solução de um sistema de equações lineares tridiagonal, cuja resolução numérica segue um algoritmo próprio a um baixo custo computacional.

A fim de garantir a estabilidade numérica faz-se necessária a inversão dos índices  $n$  e  $n+1$  no primeiro membro das equações (2.44) e (2.45) a cada iteração, daí a origem da sigla ADI. Isto equivale à inversão dos índices A e B nas equações (2.49) e (2.50). Percebe-se neste caso que  $\Delta \mathbf{V}^n$  e  $\Delta \mathbf{I}^n$  referem-se ao mesmo instante de tempo.

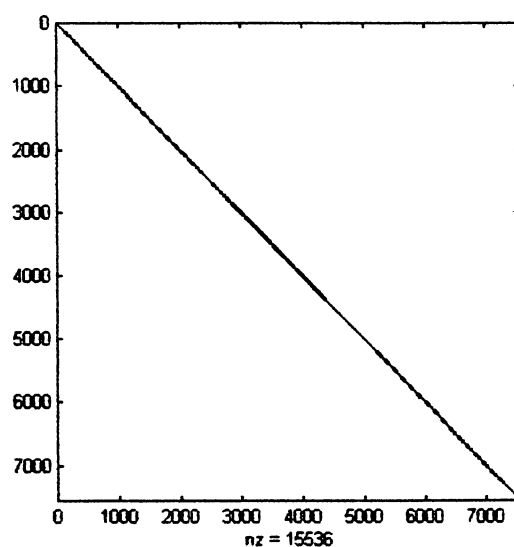
### 2.3.2 Solução de Sistemas de Equações Tridiagonal

A regra utilizada para a enumeração dos nós gera um sistema de equações lineares com apenas três coeficientes não nulos em cada equação de (2.49), sendo que a matriz de coeficientes é esparsa, mas não apresenta necessariamente a forma tridiagonal. É possível utilizar a ordenação reversa de Cuthill-McKee [13], que realiza diversas permutações entre linhas e colunas de forma a ter os elementos não nulos próximos da diagonal. Esta é a ordenação ótima quando se utiliza o método LU de resolução de equações lineares [9].

Na figura 2.7 tem-se uma demonstração da ordenação. São apresentados os gráficos antes e depois da ordenação. Estes gráficos representam matrizes esparsas onde os pontos são os elementos não nulos.



a)



b)

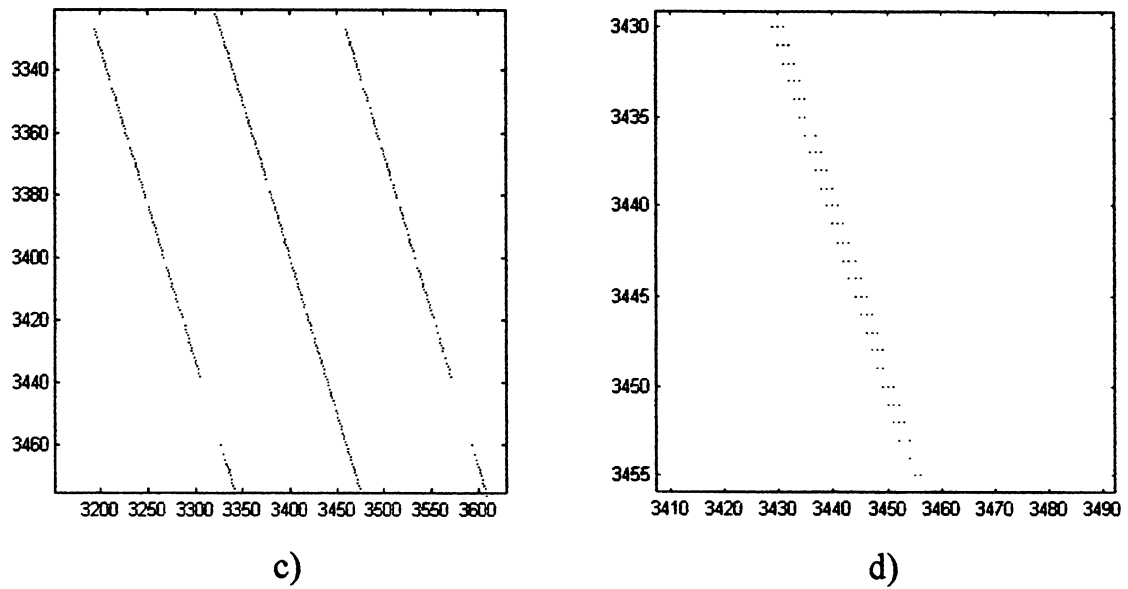


Figura 2.7 – Aplicação da ordenação reversa de Cuthill-McKee. a) Antes da ordenação.

b) Após a ordenação. c) Antes da ordenação ampliado. d) após a ordenação ampliado.

Após a ordenação, obtém-se um sistema de equações tridiagonal do tipo

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \vdots & & \\ 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Pode-se decompor a matriz de coeficientes  $A$  em duas matrizes  $L$  e  $U$ , sendo que cada uma delas apresenta apenas duas diagonais não nulas, tal que

$$A = LU = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ a_{2,1} & d_2 & \\ \ddots & \ddots & \\ 0 & a_{n,n-1} & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (d_1^{-1} \cdot a_{1,2}) & 0 \\ & 1 & d_2^{-1} \cdot a_{2,3} \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Os elementos da diagonal podem ser determinados por

$$d_i = a_{i,i} - a_{i,i} - d_{i-1}^{-1} \cdot a_{i-1,i}, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad \text{onde } d_1 = a_{1,1} \quad (2.53)$$



O sistema  $\mathbf{AX} = \mathbf{LUX} = \mathbf{B}$  é resolvido em duas etapas:

$$\mathbf{LY} = \mathbf{B}, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{UX} = \mathbf{Y} \quad (2.55)$$

onde os valores de  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{X}$  são obtidos através

$$y_1 = \frac{b_1}{d_1}, y_i = \frac{(b_i - a_{i,i-1} \cdot y_{i-1})}{d_i}, i = 2, \dots, n, \quad (2.56)$$

$$x_n = y_n, x_i = y_i - a_{i,i+1} \cdot x_{i+1} / d_i, i = n-1, \dots, 1. \quad (2.57)$$

### 2.3.3 Conclusão

Através da discretização espacial utilizando-se as células de Yee, o método FDTD mostra ser um método simples e capaz de simular problemas com as mais diversas geometrias e com vários tipos de materiais.

O método FDTD para ser estável necessita satisfazer a condição de estabilidade de Courant, que em situações onde as dimensões da estrutura são muito pequenas em comparação com o comprimento de onda, faz com que este método utilize muita memória e tempo de processamento.

Na tentativa de eliminar a necessidade de satisfazer esta condição de estabilidade foi desenvolvido o método ADI-FDTD. Utilizando-se as equações dos métodos FDTD e ADI-FDTD apresentados neste capítulo foram realizadas diversas simulações que são apresentadas nos capítulos seguintes.

### 3 OBJETO DE TESTE

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é feita uma descrição das principais características da linha de transmissão *stripline*, que foi a estrutura utilizada nas simulações. Tal escolha se deve ao fato do mesmo possuir uma solução analítica de fácil obtenção para comparação com os resultados numéricos obtidos.

Em seguida é descrito o programa utilizado para realizar a discretização do espaço computacional. É feita uma demonstração da forma como são alocados todos os parâmetros necessários para a simulação, como materiais utilizados, fonte de excitação, pontos de amostragem, superfícies de absorção e superfícies metálicas.

#### 3.2 LINHA DE TRANSMISSÃO STRIPLINE

A tecnologia de circuitos impressos para microondas avançou consideravelmente com a introdução das linhas de transmissão do tipo stripline. Este tipo de linha é mostrado na figura 3.1.

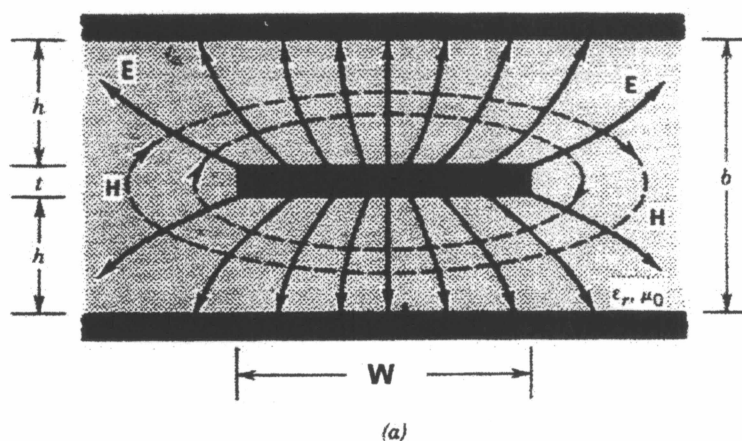


Figura 3.1 – Linha de transmissão *stripline*

A *stripline* consiste de um condutor central envolto por um material

dielétrico que por sua vez está contido entre duas placas metálicas. Esta linha é uma variante das dos cabos coaxiais, como mostrado na figura 3.2.

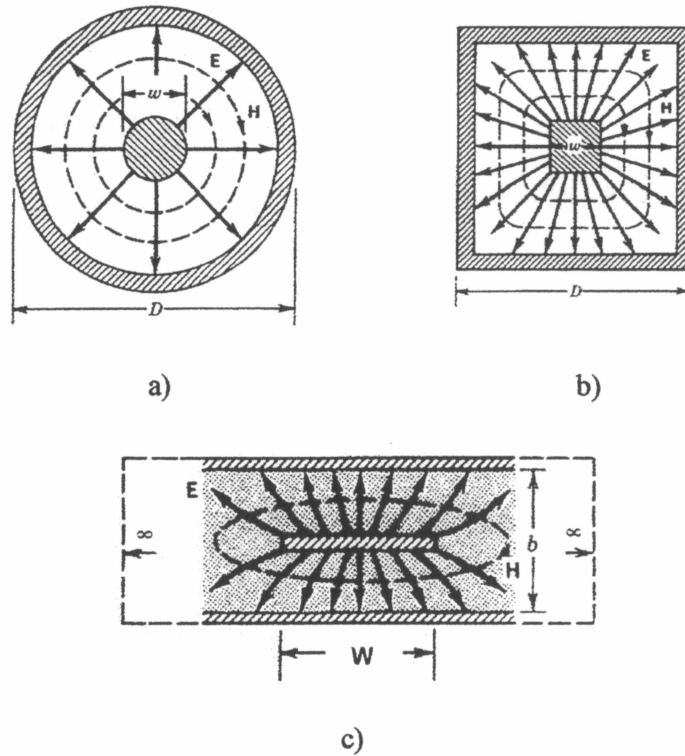


Figura 3.2 – Evolução da linha de transmissão *stripline*

Em geral a *stripline* é leve, pequeno, fácil de fabricar com as técnicas de circuito impresso e de custo acessível. O modo de propagação dominante é o TEM, apesar de que em altas frequências aparecem modos de ordem superior.

Dois importantes parâmetros de qualquer linha de transmissão são a impedância característica  $Z$  e a constante de fase  $\beta$ . Como o modo de operação é o TEM, estes parâmetros podem ser calculados [14] por

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (3.1)$$

$$Z = \frac{\eta}{4\pi\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} \frac{b-t}{W} \left[ \frac{8}{\pi} \frac{b-t}{W} + \sqrt{\left( \frac{8}{\pi} \frac{b-t}{W} \right)^2 + 6,27} \right] \right\} \quad (3.2)$$

onde  $\omega$  é frequência angular,  $\eta = 377\Omega$  é a impedância de onda no vácuo,  $\epsilon_r$  é a

permissividade elétrica relativa do material dielétrico,  $b$  é a distância entre os planos condutores e  $W$  e  $t$  são a largura e a espessura da fita central, respectivamente.

A fórmula utilizada para o cálculo de  $Z$  possui um erro menor que 0,5%, quando  $W/(b-t) < 10$ .

Na solução analítica utilizou-se esta fórmula que leva em consideração a espessura  $t$  porque os métodos FDTD e ADI-FDTD têm como característica considerar que os planos elétricos e magnéticos possuem uma espessura [2], mesmo quando esta é especificada com valor nulo.

### 3.3 MODELO NUMÉRICO

Para esta simulação foi escolhida uma estrutura do tipo *stripline*, como a da figura 3.1, onde  $W = 5,4\text{mm}$ ,  $b = 5,4\text{mm}$ ,  $h = b/2$  e  $t = 0$ . O material dielétrico utilizado foi o teflon, que possui permissividade elétrica relativa  $\epsilon_r = 2,1$ . A permeabilidade magnética relativa  $\mu_r$  é igual a 1.

As dimensões foram escolhidas de tal forma que para uma frequência de 10 GHz o número de células por comprimento de onda seja próximo de vinte, conforme a seção 2.2.7.

#### 3.3.1 Definição do Espaço Computacional

Para a entrada dos dados utilizou-se o programa GID (Geometry & Data) [15], com o qual se faz de forma gráfica a entrada dos dados do programa, similar aos programas de CAD existentes no mercado. Neste programa são definidas as dimensões da estrutura, as dimensões das células de Yee( $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ), o número de iterações, as condições de contorno, material utilizado, localização dos planos metálicos e magnéticos, pontos de amostragem e localização da fonte de excitação.

Na figura 3.3 tem-se o espaço computacional com a linha de transmissão *stripline* representada no programa GID.

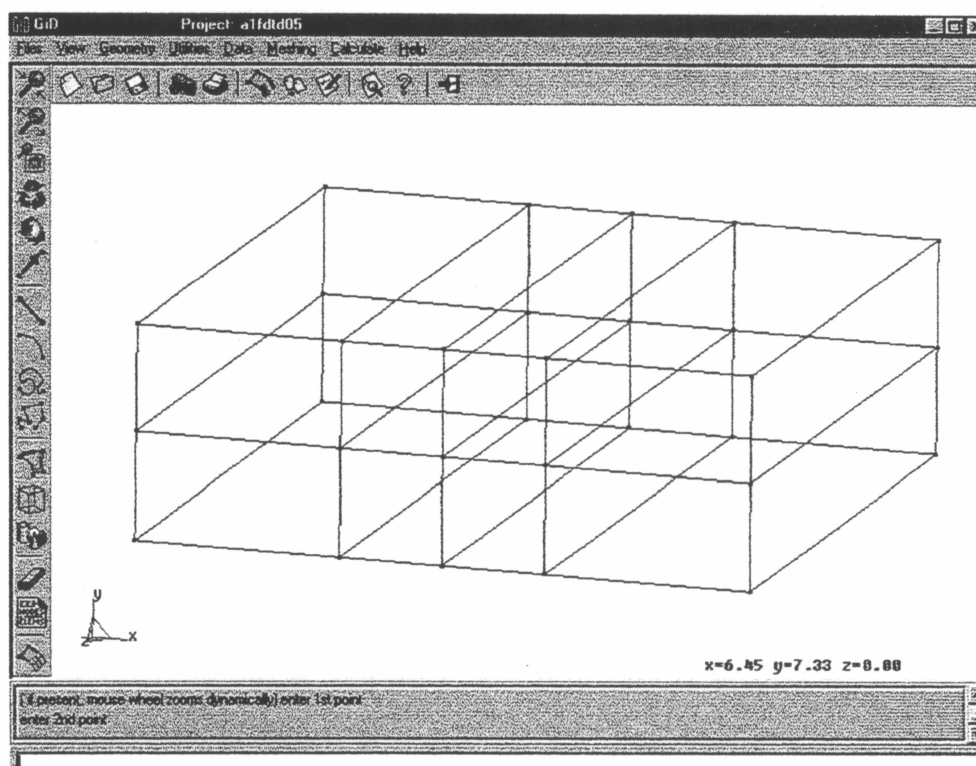


Figura 3.3 – Tela de entrada de dados do programa GiD

Na definição do espaço computacional, deve-se definir os pontos, as retas, as superfícies e finalmente os volumes, nesta sequência. Cada um destes elementos geométricos é definido em função do anterior. Desta forma, uma reta é definida por dois pontos, uma superfície por quatro retas e um volume por seis superfícies.

Pode-se selecionar individualmente cada um destes elementos geométricos e configurar as suas características.

Os pontos são definidos em uma janela de coordenadas onde são inseridas as coordenadas cartesianas do ponto. Definidos pelo menos dois pontos, pode-se definir uma reta entre eles, bastando selecionar o ponto inicial e o final da reta. Definidas as retas, o programa é capaz de gerar automaticamente uma superfície para cada quatro retas que formem um contorno fechado. O volume também é criado de

forma automática, sendo formado por seis superfícies que formem um volume fechado. Na figura 3.3, o espaço computacional foi dividido em oito volumes e 38 superfícies.

### 3.3.2 Definição das Características Eletromagnéticas dos Volumes

Definido o espaço computacional, deve-se em seguida definir quais os materiais utilizados e onde estão presentes. As características dos materiais utilizados (  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$  e  $\sigma$  ) são pré-definidas em um arquivo de configurações que é carregado quando especifica-se o tipo de problema a ser utilizado.

No modelo utilizado o único material presente é o teflon, portanto foram selecionados todos os volumes e definidos como sendo constituídos deste material, como mostrado na figura 3.4

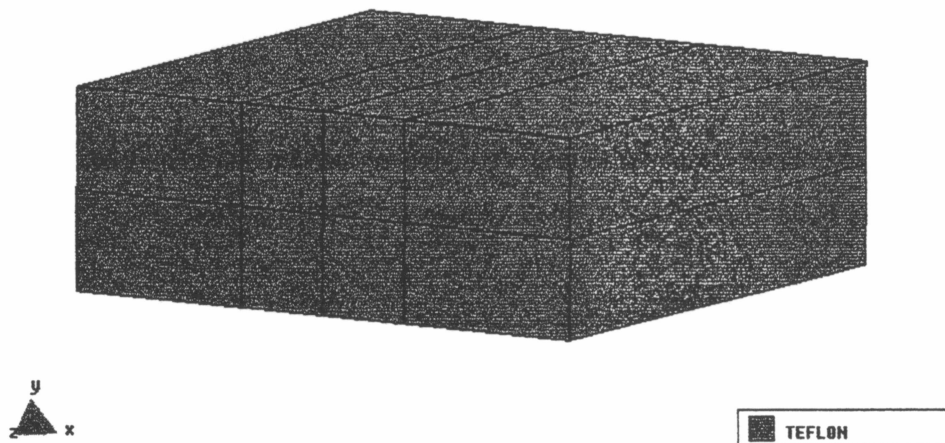


Figura 3.4 – Definição dos materiais utilizados.

As características eletromagnéticas dos materiais serão utilizadas para o cálculo das constantes estruturais, conforme descrito na seção 2.2.3.

### 3.3.3 Definição das Superfícies Metálicas

Foram selecionadas as superfícies superiores, inferiores e centrais, como mostrado na figura 3.5, e estas superfícies foram definidas como sendo superfícies metálicas. Os elementos de tensão  $\Delta V$  tangenciais a estas superfícies são anulados através da alteração dos valores das respectivas capacitâncias, configurando-as com valores infinitos, conforme explicado na seção 2.2.8.

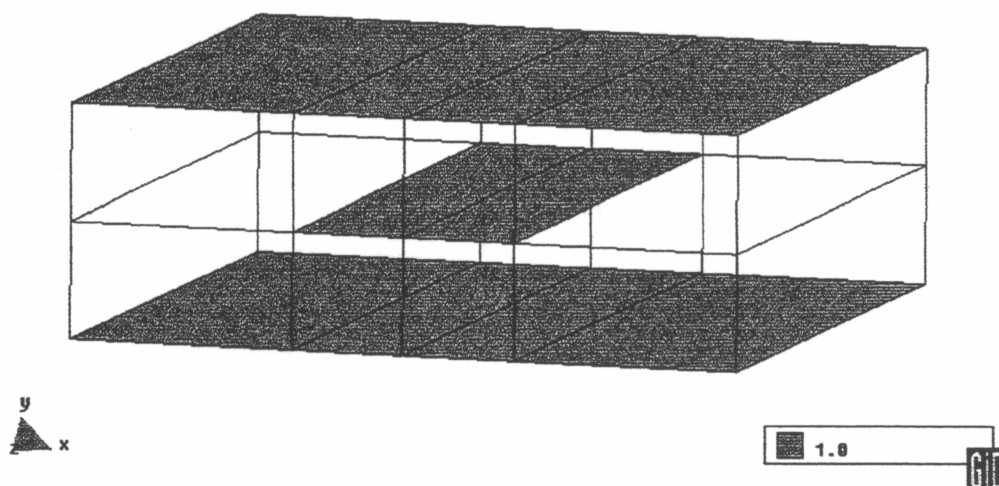


Figura 3.5 – Superfícies metálicas

### 3.3.4 Definição das Superfícies de Absorção

As superfícies de absorção foram alocadas de forma a circundar todo o perímetro da estrutura, como mostrado na figura 3.6. Antes de definir onde serão alocadas as superfícies de absorção, é necessário configurar a condutividade elétrica  $\sigma$  destas superfícies, uma vez que o valor de  $\sigma$  varia com as dimensões das células de Yee utilizadas na simulação, conforme (2.40). Os elementos de potencial magnético  $\Delta M$  tangenciais a estas superfícies são anulados através da alteração dos valores das respectivas relutâncias para valores nulos, conforme explicado na seção 2.2.8.

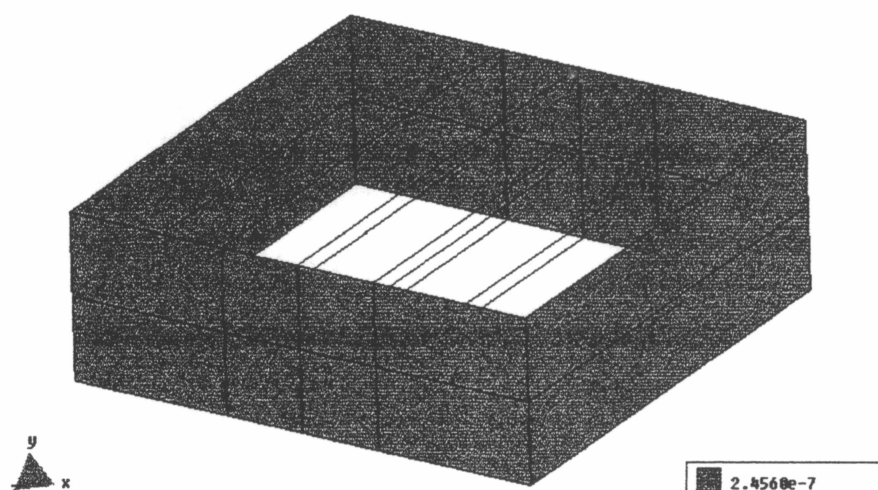


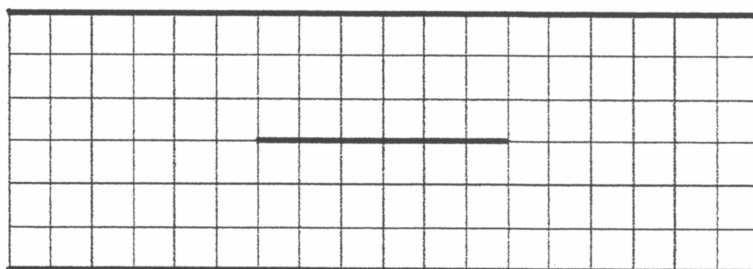
Figura 3.6 – Alocação dos planos de absorção

### 3.3.5 Definição da Malha

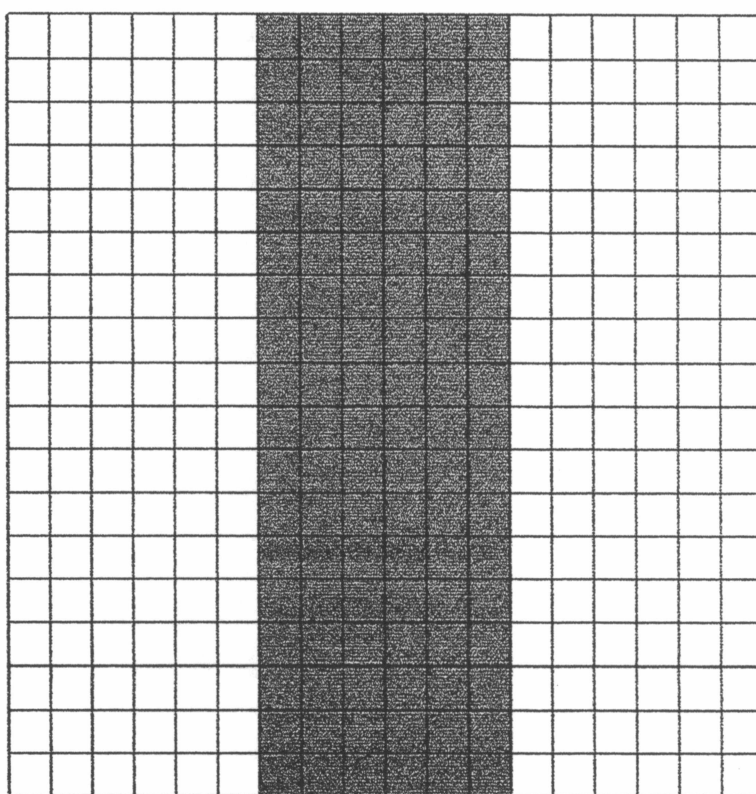
Para definir a malha a ser utilizada, deve-se selecionar cada segmento de reta e inserir o número de divisões que este deve ter. Segmentos de reta paralelos ao selecionado terão o mesmo número de divisões automaticamente.

Utilizaram-se quatro tipos de malhas nas simulações. O primeiro tipo é mostrado na figura 3.7. Nesta malha têm-se dezoito divisões na direção de propagação  $z$ , seis na direção de  $y$  e dezoito na direção de  $x$ .





a)



b)

Figura 3.7 – Malha com 18 divisões uniformes a) Vista em corte . b) Vista superior

Para analisarmos com maior precisão os pontos próximos às bordas da fita central, foram realizadas simulações utilizando a malha da figura 3.8. Nela foi utilizada uma divisão gradual do tamanho das células na direção de  $x$ , sendo que as menores células se encontram próximas às bordas da fita central.

Nesta malha o número de divisões permanece o mesmo, variando apenas o tamanho das células na direção de x.

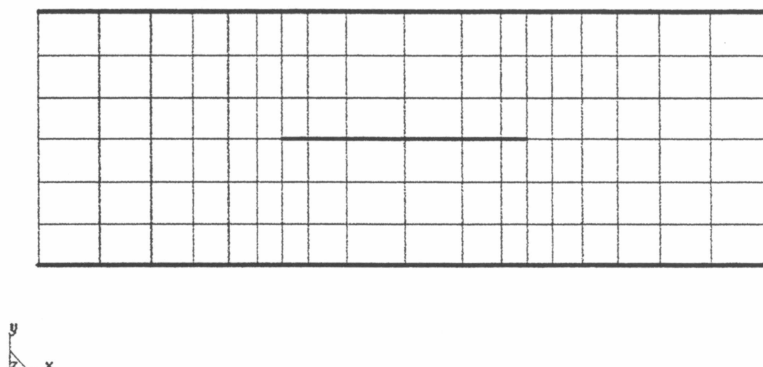


Figura 3.8 – Malha com 18 divisões graduais.

Uma terceira malha foi criada com um maior número de divisões, para verificar se os resultados obtidos com uma maior discretização seriam mais precisos. Esta malha apresenta uma divisão gradual no tamanho das células com vinte e quatro divisões na direção x, conforme a figura 3.9 .

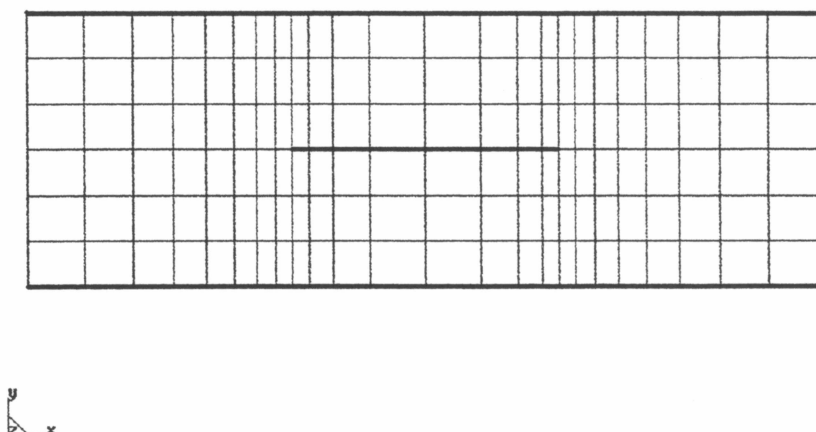
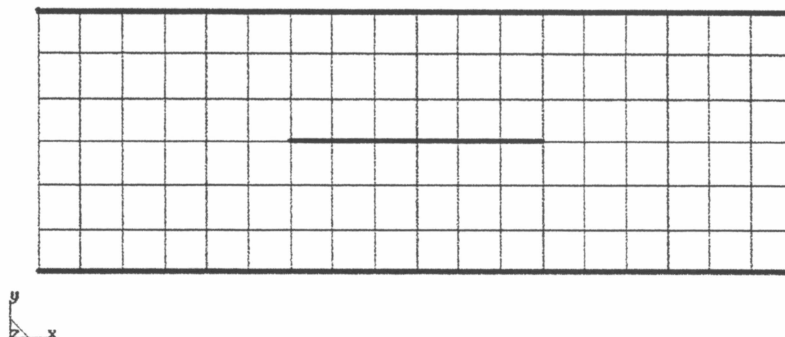
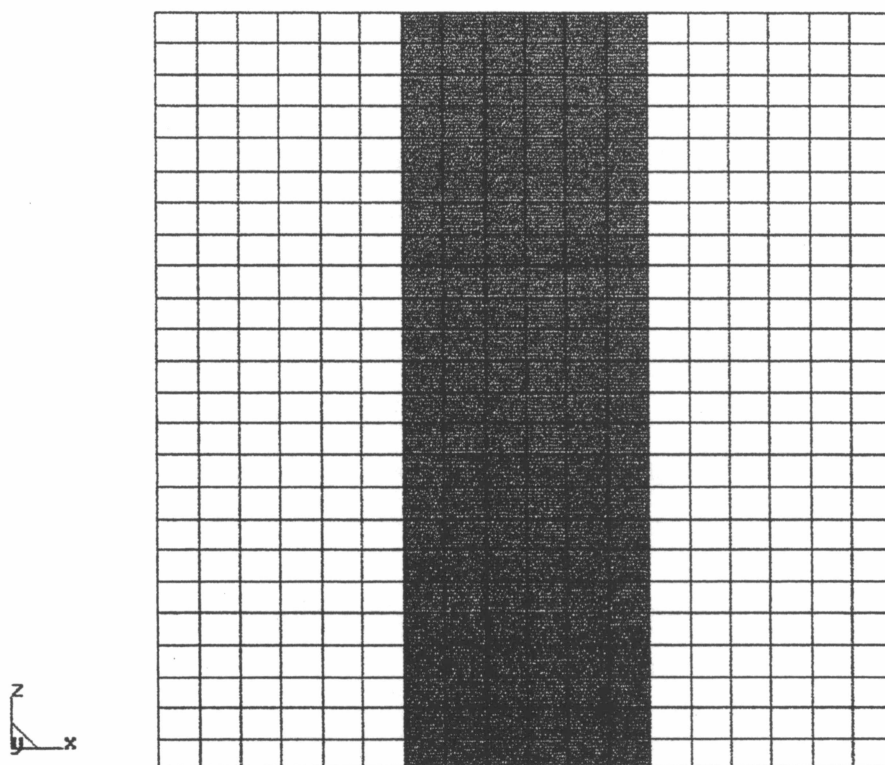


Figura 3.9 – Malha com 24 divisões graduais.

Para verificar a dependência da precisão em função do tamanho das células na direção de propagação, utilizamos uma malha com dezoito divisões iguais na direção de  $x$ , seis na direção de  $y$  e vinte e quatro na direção de  $z$ , conforme a figura 3.10.



a)



b)

Figura 3.10 – a) Vista frontal da malha uniforme de 18 divisões em  $x$ . b) Vista superior da malha com 24 divisões em  $z$ .

### 3.3.6 Definição da Fonte

A fonte foi alocada em série com a fita metálica central, como mostrado na figura 3.11, de acordo com a equação (2.41).

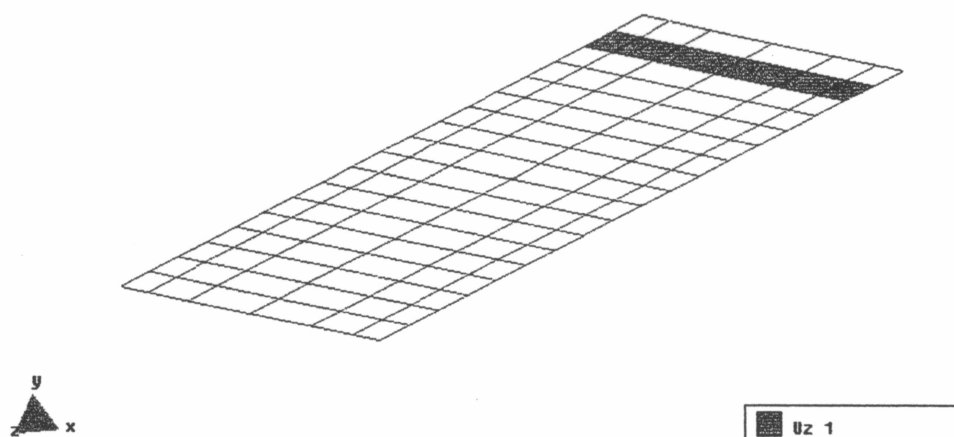


Figura 3.11 – Alocação dos elementos da fonte

Foi alocada uma fonte de tensão na direção de propagação  $z$  em cada uma das células do conjunto, de modo a todas estarem em paralelo.

Para representar os elementos da fonte é criada uma matriz esparsa com elementos unitários não nulos. As colunas representam os índices dos conjuntos das fontes, e os elementos não nulos são alocados nas linhas correspondentes aos nós definidos através da malha.

### 3.3.7 Definição das Amostras de Tensão.

As tensões foram amostradas em três conjuntos de células no plano vertical central, conforme a figura 3.12.

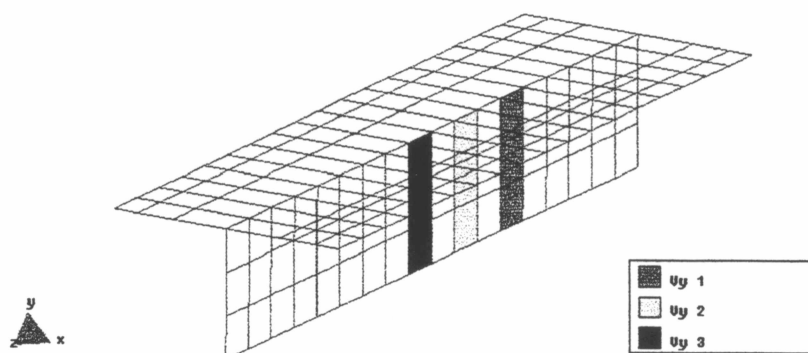


Figura 3.12 – Alocação dos pontos de amostragem da tensão

As tensões em cada conjunto de células são somadas, de modo a obter a tensão entre o plano inferior e a fita central no caminho formado pelas células de cada conjunto. Como em cada célula existem dois elementos de tensão, deve-se dividir o resultado da soma por dois.

Para representar os elementos das amostras de tensão é criada uma matriz esparsa com elementos unitários não nulos. As colunas representam os índices dos conjuntos das amostras, e os elementos não nulos são alocados nas linhas correspondentes aos nós definidos através da malha.

### 3.3.8 Definição das amostras de Corrente

As correntes foram amostradas em três conjuntos de pontos da fita metálica central, e cada conjunto possui a mesma coordenada  $z$  que o conjunto de amostras de tensão com índice correspondente, conforme a figura 3.13.

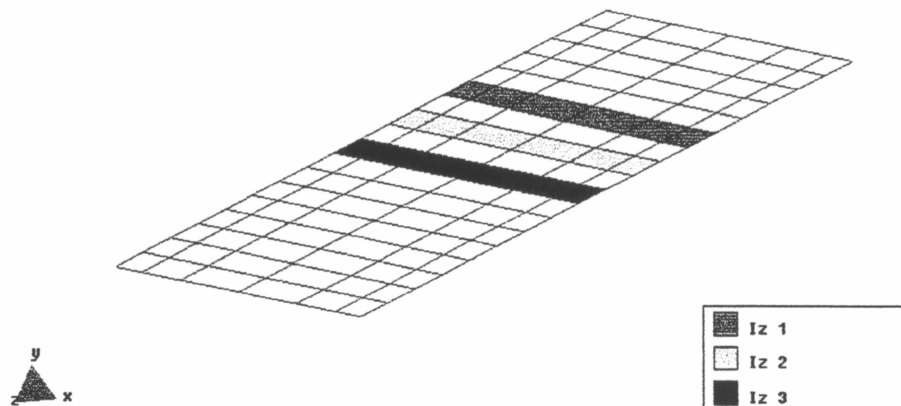


Figura 3.13 – Alocação dos pontos de amostragem de corrente

As correntes na direção de propagação  $z$  das células de cada conjunto são somadas, de forma a se obter a corrente total na seção transversal que contém as células amostradas.

De forma semelhante às amostras de tensão, as amostras de corrente são representadas por uma matriz esparsa com elementos não nulos unitários, com as colunas representando o índice do conjunto e as linhas correspondem aos nós definidos através da malha.

### 3.3.9 Definição dos Parâmetros Gerais

Os dados iniciais da simulação como permeabilidade magnética do vácuo, permissividade elétrica do vácuo, dados da fonte e número de iterações foram

configurados conforme a figura 3.14.

Problem Data	
NOME DO PROBLEMA	STRIPLINE
PERMISSIVIDADE ELÉTRICA (nF/mm)	8.854e-6
PERMEABILIDADE MAGNÉTICA (nH/mm)	1.257
CONDUTIVIDADE ELÉTRICA (S/mm)	5.8e4
DURAÇÃO DA FONTE (ns)	1
FREQUÊNCIA DA FONTE (GHz)	10
PASSO (ns)	2.5e-3
NÚMERO DE ITERAÇÕES	450

Accept data Close

Figura 3.14 – Janela de configuração de parâmetros do GiD

Deve-se observar que o programa GiD é utilizado para a definição da geometria, materiais, condições do espaço computacional e também para a geração e numeração da malha, porém a maneira como estes dados serão utilizados é especificada pelo usuário através da anexação de um arquivo \*.bas, no qual foi implementado o método FDTD ou ADI-FDTD (anexo I), dependendo do método que se deseja simular.

Após a entrada de todos os dados da simulação, o programa GiD interpreta os comandos do arquivo \*.bas e gera um arquivo \*.m compatível com o programa de simulação numérica Matlab. O conteúdo deste arquivo é executado utilizando o programa Matlab e desta forma obtêm-se os resultados da simulação, ou seja, os valores de tensão e corrente nos pontos de amostragem em função do tempo.

### 3.4 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DO GUIA DE ONDA

Feita a simulação, obtêm-se as tensões e as correntes em três pontos distintos da estrutura, através do somatório das tensões e correntes dos conjuntos de células escolhidas anteriormente. É então calculada a FFT (Fast Fourier Transform) das

tensões e correntes obtidas para calcular a constante de fase  $\beta$  e a impedância característica  $Z$  em função da frequência.

A constante de fase  $\beta$  pode ser obtida por

$$\gamma = \frac{1}{d} \arccos h \left( \frac{V_3 - V_1}{V_2} \right) = \frac{1}{d} \arccos h \left( \frac{I_3 - I_1}{I_2} \right) \quad (3.3)$$

Como estamos utilizando uma estrutura sem perdas, pode-se utilizar a aproximação  $|\beta| = |\gamma|$ .

Com  $\beta$  calculado, pode-se calcular a impedância característica por

$$Z = \frac{V_1 \cdot e^{\gamma d} - V_3 \cdot e^{-\gamma d}}{I_1 \cdot e^{\gamma d} - I_3 \cdot e^{-\gamma d}} \quad (3.4)$$

onde  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são as transformadas de Fourier das amostras de tensão e de corrente obtidas dos conjuntos 1, 2 e 3 respectivamente, e  $d$  é a distância entre os conjuntos na direção de propagação.



## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é analisada a eficiência e precisão do método ADI-FDTD, aplicado ao estudo de problemas tridimensionais. Para tanto foi implementado um programa computacional tendo como plataforma o Matlab e foram realizadas diversas simulações com uma linha de transmissão *stripline*. Os resultados obtidos são comparados com as soluções analíticas e também com simulações realizadas utilizando o método FDTD.

### 4.2 DEPENDÊNCIA EM RELAÇÃO À FREQUÊNCIA

Para avaliar a precisão do método ADI-FDTD, procurou-se realizar uma comparação com o método FDTD convencional. Para tanto foram feitas diversas simulações com a frequência central de excitação,  $f_0$  em (2.41), variando de 500MHz até 20GHz, para ambos os métodos.

Em cada simulação foram calculados os valores de  $\beta$  e  $Z$  que foram comparados com os valores teóricos e depois foram traçadas as curvas de erro de acordo com a definição

$$e = \left| \frac{(\text{valor}_{\text{simulado}} - \text{valor}_{\text{teórico}})}{\text{valor}_{\text{teórico}}} \right| \quad (4.1)$$

O tamanho da estrutura foi escolhido de tal forma que na frequência de 10GHz o número de células por comprimento de onda seja próximo de vinte. O passo no tempo foi de 2,5ps, que é o máximo valor obtido através da condição de *Courant*.

A espessura da fita central para o cálculo dos valores teóricos foi proporcional ao tamanho da célula utilizada, sendo que o valor utilizado foi 0,135 da dimensão da célula  $\Delta y$  que possui a mesma direção que a espessura  $t$  [15]. A largura  $W$  utilizada

teve o seu valor acrescido de 0,27 vezes  $\Delta x$ . Já a distância entre os planos condutores b teve o seu valor diminuído de 0,27 vezes  $\Delta y$ .

Primeiramente calcularam-se os valores de  $\beta$  e Z em função dos pontos de amostragem de tensão, e obteve-se a tabela 1. Em seguida foram calculadas  $\beta$  e Z novamente, porém desta vez calculando os valores em função das amostras de corrente.

Ambos utilizaram a discretização espacial mostrada na figura 3.7.

TABELA 1 – ERRO DE Z E  $\beta$  EM FUNÇÃO DA TENSÃO

CÁLCULO COM BASE NA TENSÃO										
	ADI-FDTD				FDTD				TEÓRICO	
Freq(GHz)	Z	Erro(%)	Beta	Erro(%)	Z	Erro(%)	Beta	Erro(%)	Z	Beta
0,5	40,87	0,24	0,0155	2,07	74,64	83,07	0,0014	90,78	40,77	0,0152
1	40,87	0,24	0,0306	0,75	68,02	66,83	0,0034	88,81	40,77	0,0304
2	40,87	0,24	0,0617	1,58	47,03	15,35	0,0330	45,67	40,77	0,0607
4	40,85	0,19	0,1238	1,91	41,64	2,13	0,1128	7,15	40,77	0,1215
6	40,78	0,02	0,1864	2,29	41,74	2,37	0,1810	0,67	40,77	0,1822
8	40,66	0,28	0,2495	2,69	41,83	2,59	0,2458	1,16	40,77	0,2430
10	40,43	0,84	0,3133	3,16	41,31	1,32	0,3123	2,83	40,77	0,3037
12	40,25	1,28	0,3781	3,74	40,63	0,35	0,3760	3,17	40,77	0,3645
14	39,94	2,04	0,4441	4,45	40,42	0,87	0,4350	2,31	40,77	0,4252
16	39,53	3,05	0,5114	5,24	39,99	1,92	0,4996	2,81	40,77	0,4859
18	39,03	4,27	0,5802	6,13	39,35	3,49	0,5672	3,75	40,77	0,5467
20	38,57	5,40	0,6494	6,91	37,05	9,13	0,6389	5,18	40,77	0,6074

TABELA 2 – ERRO DE Z E  $\beta$  EM FUNÇÃO DA CORRENTE

CÁLCULO COM BASE NA CORRENTE										
	ADI-FDTD				FDTD				TEÓRICO	
Freq(GHz)	Z	Erro(%)	Beta	Erro(%)	Z	Erro(%)	Beta	Erro(%)	Z	Beta
0,5	40,87	0,24	0,0166	9,31	42,10	3,25	0,0153	0,75	40,77	0,0152
1	40,87	0,24	0,0318	4,70	42,02	3,06	0,0308	1,41	40,77	0,0304
2	40,86	0,21	0,0633	4,21	42,07	3,18	0,0620	2,07	40,77	0,0607
4	40,83	0,14	0,1269	4,46	41,24	1,15	0,1243	2,32	40,77	0,1215
6	40,79	0,04	0,1909	4,76	42,19	3,48	0,1860	2,07	40,77	0,1822
8	40,71	0,15	0,2552	5,03	41,82	2,57	0,2462	1,33	40,77	0,2430
10	40,53	0,60	0,3199	5,33	41,41	1,56	0,3076	1,28	40,77	0,3037
12	40,23	1,33	0,3851	5,66	40,03	1,82	0,3682	1,03	40,77	0,3645
14	39,86	2,24	0,4510	6,07	40,60	0,42	0,4295	1,01	40,77	0,4252
16	39,50	3,12	0,5182	6,64	39,82	2,34	0,4896	0,75	40,77	0,4859
18	39,12	4,05	0,5866	7,30	38,65	5,21	0,5538	1,30	40,77	0,5467
20	38,75	4,96	0,6580	8,33	36,40	10,73	0,6190	1,91	40,77	0,6074

Os valores de erro obtidos para Z e  $\beta$  são mostrados graficamente nas figuras 4.1 e 4.2, respectivamente.

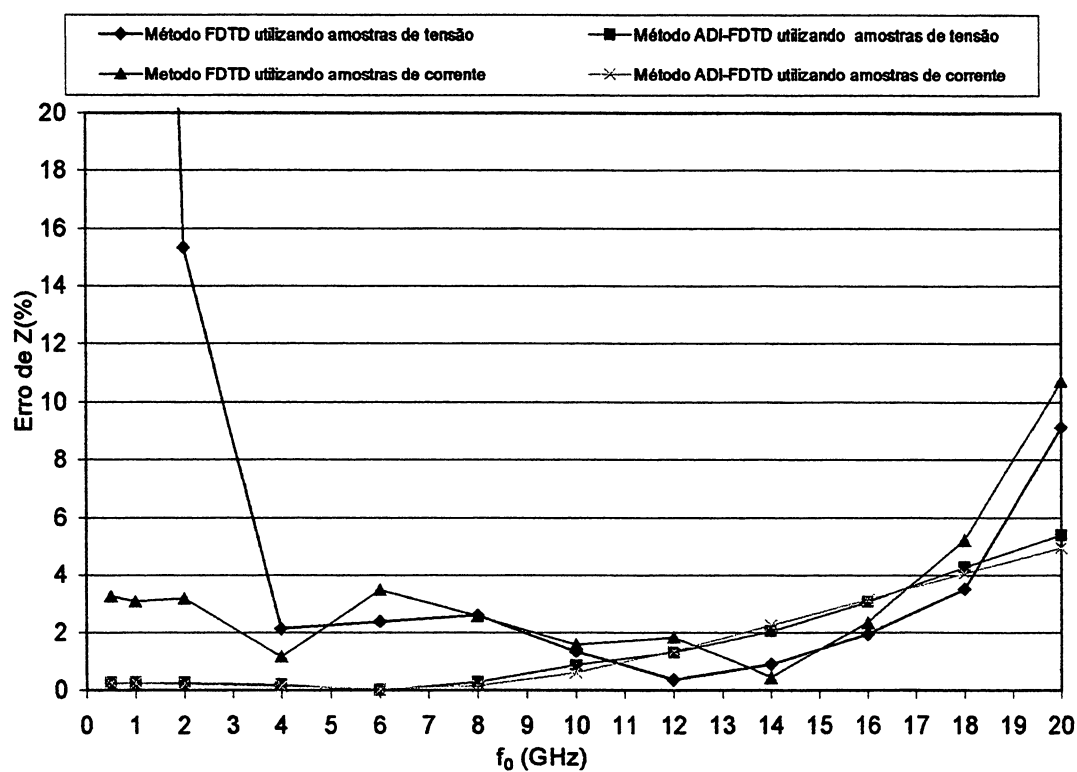


Figura 4.1 – Erro de Z em função de  $f_0$  para malha da figura 3.7

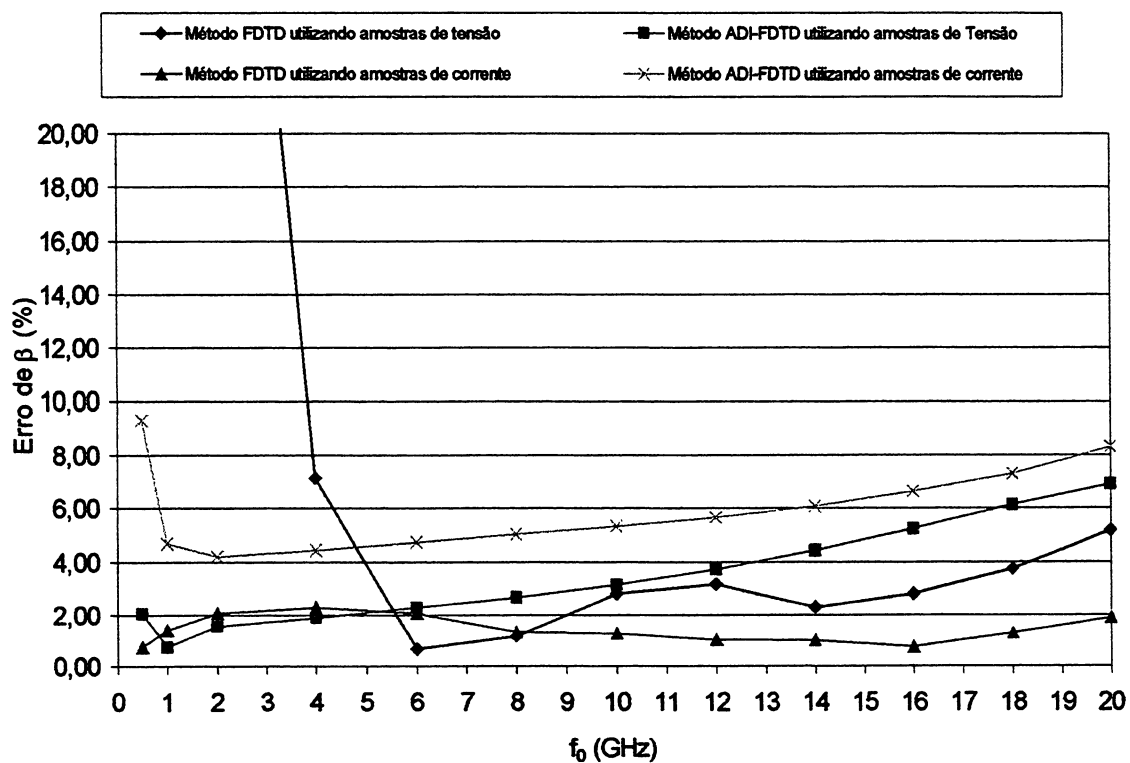


Figura 4.2 – Erro de  $\beta$  em função de  $f_0$  para malha da figura 3.7

Observa-se que o método ADI-FDTD apresenta um melhor resultado em baixas frequências, e também uma taxa de variação mais suave, sem mudanças abruptas. Uma possível causa para este comportamento é o fato do método FDTD estar com o passo no tempo no limite da estabilidade, sendo que nestas condições uma pequena imprecisão nos cálculos pode causar uma grande erro nos resultados. O método FDTD apresentou uma faixa estreita de utilização, com valores de erro aumentando rapidamente para frequências abaixo de 4GHz e acima de 18GHz.

Para a constante de fase o método FDTD apresentou melhores resultados, apesar de que quando calculado através da tensão os erros se tornaram maiores para as baixas frequências. Para verificar se o motivo destes erros não são modos evanescentes que se propagam na estrutura, fez-se uma simulação com a estrutura sem a fita central. Nestas condições não se deveria verificar nenhum modo se propagando, e foi o que se observou, descartando-se assim a hipótese dos modos evanescentes.

Percebe-se ainda que o método ADI-FDTD apresenta melhor precisão nos resultados de  $Z$  do que nos de  $\beta$ .

Para comparar a desempenho computacional de ambos os métodos, anotou-se na tabela 3 o tempo gasto em cada simulação. As simulações foram realizadas utilizando um microcomputador com CPU AMD K6-2 operando à 475MHz.

TABELA 3 – TEMPO DE SIMULAÇÃO COM  $\Delta t = 2,5$  ps

Freq.(GHz)	ITERAÇÕES	ADI-FDTD(s)	FDTD(s)	ADI-FDTD/FDTD
0,5	8000	704,97	276,01	2,55
1	4000	328,07	130,00	2,52
2	2000	167,48	65,48	2,56
4	1000	88,27	35,87	2,46
6	700	65,09	27,68	2,35
8	550	54,93	23,34	2,35
10	450	47,00	20,54	2,29
12	450	47,08	20,27	2,32
14	450	47,36	20,60	2,30
16	450	46,87	20,60	2,28
18	450	47,56	20,61	2,31
20	450	47,36	20,64	2,29

Nas simulações com frequência abaixo de 10GHz o número de iterações e a duração da excitação da fonte foram ajustados de forma que as simulações tivessem o mesmo número de períodos que na simulação com 10GHz. Já nas frequências acima de 10GHz estas se mantiveram constantes para evitar que a faixa de frequências excitadas fosse muito larga, pois quanto menor a duração do pulso de excitação da fonte, maior a largura da faixa de frequências.

Os valores obtidos no cálculo do tempo podem variar um pouco pois a simulação foi realizada utilizando-se o sistema operacional Windows 98, e como o mesmo é multitarefa, em alguns instantes algumas linhas de execução podem concorrer pelos recursos da CPU, acarretando em um maior tempo de simulação. Porém este erro geralmente é pequeno, não comprometendo os resultados obtidos.

Observando os resultados obtidos percebe-se que o método ADI-FDTD é cerca de 2,38 vezes mais lento em comparação com o método FDTD para o problema estudado.

Com relação à memória, o método ADI-FDTD utilizou cerca de 2,61 vezes mais que o método FDTD.

#### 4.4 DEPENDÊNCIA EM RELAÇÃO AO PASSO DE TEMPO DE SIMULAÇÃO

Como para o método ADI-FDTD não há a necessidade de que o passo no tempo respeite a condição de *Courant*, foram realizadas diversas simulações alterando o passo no tempo. Essas simulações foram feitas com frequências entre 1GHz até 8GHz, sempre dobrando a frequência, e os resultados obtidos foram salvos na tabela 4 e os gráficos de Z para as frequências de 1, 2, 4 e 8 GHz são mostrados na figura 4.3. Procedimento similar foi realizado para  $\beta$ , e as curvas para 1, 2, 4 e 8GHz são mostradas na figura 4.4.

TABELA 4 – ERRO DE Z E  $\beta$  EM FUNÇÃO DE  $\Delta t$

Passo no Tempo(ps)	1GHz		2GHz		4GHz		8GHz	
	Z(%)	Beta(%)	Z(%)	Beta(%)	Z(%)	Beta(%)	Z(%)	Beta(%)
2,5	0,24	2,07	0,24	2,07	0,19	2,89	0,15	2,84
5	1,92	6,68	1,97	6,84	2,19	7,85	3,93	9,88
7,5	4,96	12,61	5,01	12,94	5,35	14,88	9,35	21,89
10	8,44	18,86	8,64	19,85	7,41	26,45	35,06	69,14
12,5	12,49	25,78	11,85	27,09	12,86	31,49	0,11	39,26

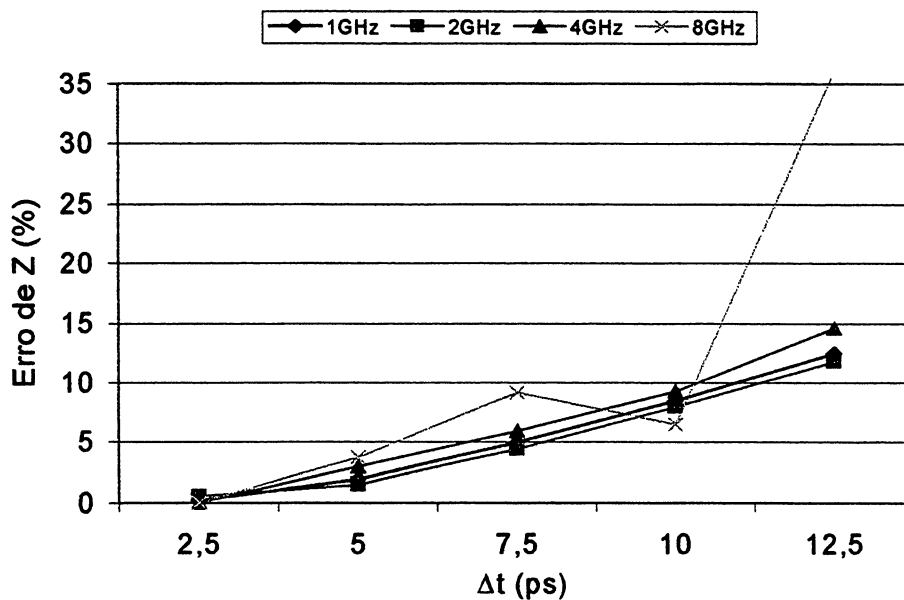


Figura 4.3 – Erro de Z em função de  $\Delta t$

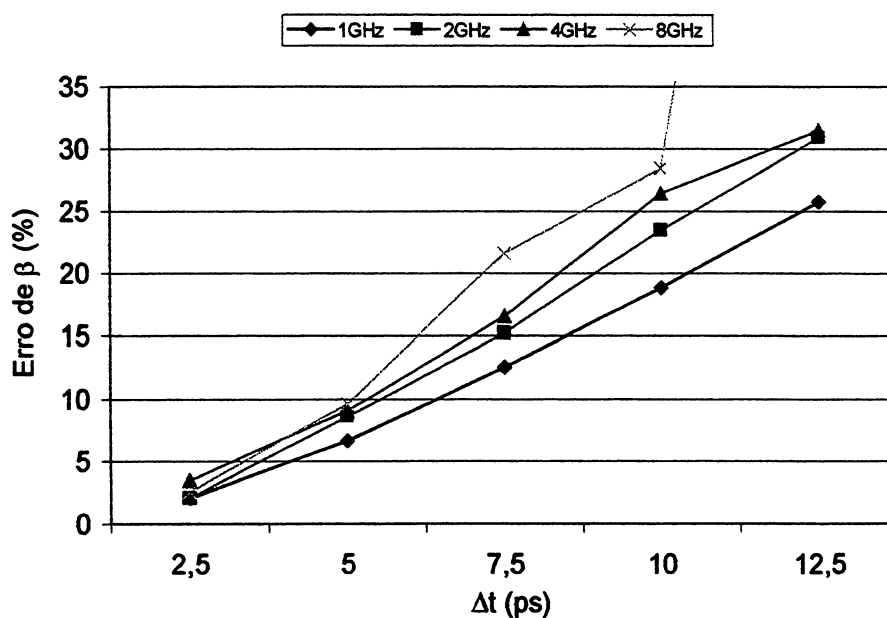


Figura 4.4 – Erro de  $\beta$  em função de  $\Delta t$

O passo no tempo se inicia no valor de 2,5ps, que é o maior passo permitido se fosse utilizado o método FDTD pois este é o valor obtido da condição de Courant. É possível verificar que quanto maior é a frequência, maior o erro em módulo. Verifica-se também que para a frequência de 8GHz os erros se tornam muito altos para um passo no tempo maior que 10ps.

#### 4.4 DEPENDÊNCIA EM RELAÇÃO ÀS DIMENSÕES DAS CÉLULAS

Em uma linha de transmissão do tipo *stripline*, as linhas do campo elétrico e magnético se concentram nas proximidades da fita central, e são mais espaçadas nas proximidades dos planos externos como pode ser observado na figura 3.2.c. As duas extremidades da fita central são pontos que, devido à espessura, dificultam o cálculo dos campos elétricos e magnéticos. Para tentar melhorar a precisão dos valores da simulação, o tamanho da célula foi feito gradual na direção de x, com células menores próximas às bordas da fita central, como mostrado na figura 3.8.

Com esta nova malha com 18 divisões graduais, simulou-se novamente utilizando o método ADI-FDTD, variando o passo no tempo. Cabe observar que se fosse utilizado o método FDTD, ao se diminuir o tamanho das células, mesmo que somente nas extremidades da fita central, o passo no tempo teria que ser diminuído.

Os valores obtidos foram salvos na tabela 5.

TABELA 5 – ERRO DE Z E  $\beta$  EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA COM MALHA DE 18 DIVISÕES GRADUAIS

Passo no Tempo(ps)	1GHz		2GHz		4GHz		8GHz	
	Z(%)	Beta(%)	Z(%)	Beta(%)	Z(%)	Beta(%)	Z(%)	Beta(%)
2,5	0,47	2,07	0,54	2,07	0,18	3,31	2,73	3,29
5	1,40	8,65	1,54	8,65	2,12	9,09	4,16	11,11
7,5	4,06	15,24	4,43	15,24	5,13	16,53	10,29	24,69
10	7,31	21,83	7,94	23,47	8,48	26,45	35,80	69,14
12,5	10,95	29,40	11,80	30,88	13,86	31,49	1,25	39,26

Foram também realizadas simulações com uma malha gradual com um maior número de células na seção transversal a fita central, no caso 24 células. Procurou-se com isso verificar se com as malhas concentradas nas bordas da fita central e um maior número de divisões tem-se uma melhor precisão. A malha utilizada é mostrada na figura 3.9 e os resultados obtidos são mostrados na tabela 6.

TABELA 6 – ERRO DE Z E  $\beta$  EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA COM MALHA DE 24 DIVISÕES GRADUAIS

Passo no Tempo(ps)	1GHz		2GHz		4GHz		8GHz	
	Z(%)	Beta(%)	Z(%)	Beta(%)	Z(%)	Beta(%)	Z(%)	Beta(%)
2,5	0,47	3,72	0,51	3,22	0,06	3,47	0,28	3,50
5	2,23	8,65	2,37	8,65	2,95	9,09	4,97	11,11
7,5	4,87	15,24	5,23	15,24	5,93	16,53	11,05	24,69
10	8,09	21,83	8,72	23,47	9,25	26,45	36,34	69,14
12,5	11,70	29,40	12,54	30,88	14,58	31,49	2,08	39,26

Para verificar a dependência da precisão em função do tamanho das células na direção de propagação, criou-se uma nova malha com dezoito divisões iguais na direção de x, seis na direção de y e vinte e quatro na direção de z, conforme a figura 3.10 e os resultados obtidos foram salvos na tabela 7.

TABELA 7 – ERRO DE Z E  $\beta$  EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA COM MALHA DE 24 DIVISÕES GRADUAIS NA DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO

Passo no Tempo (ns)	1 GHz		2 GHz		4GHz		8GHz	
	Z(%)	Beta(%)	Z(%)	Beta(%)	Z(%)	Beta(%)	Z(%)	Beta(%)
2,50	0,78	0,75	0,80	1,41	0,75	2,31	0,04	2,59
5,00	0,99	6,02	1,01	6,51	1,31	7,69	3,74	9,67
7,50	3,56	11,95	3,56	12,61	4,08	14,63	9,16	21,60
10,00	6,73	18,53	6,53	19,52	7,34	23,39	6,48	28,48
12,50	10,23	25,45	9,47	26,93	8,86	23,22	35,94	101,19

Para realizar uma melhor comparação entre os resultados obtidos com os tipos de malhas utilizados, foram feitos os gráficos dos erros em função do passo no tempo para as frequências de 1, 2, 4 e 8 GHz. Na figura 4.5 tem-se o erro da impedância característica em função do passo no tempo para a frequência de 1GHz. Na figura 4.6 tem-se o erro para a constante de fase para a mesma frequência.



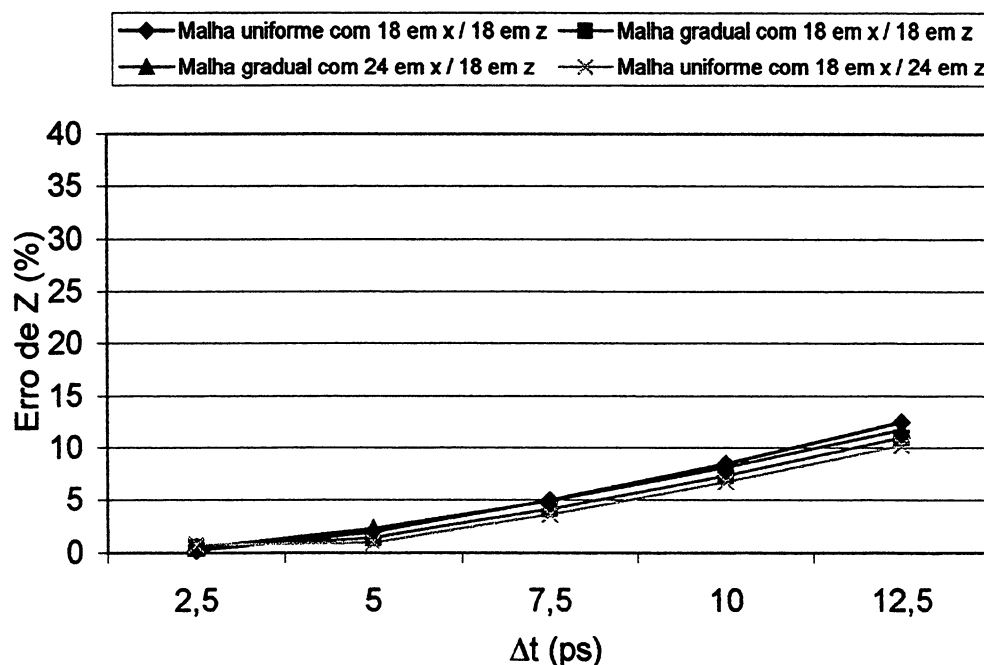


Figura 4.5 – Z em função de  $\Delta t$  para a frequência de 1GHz.

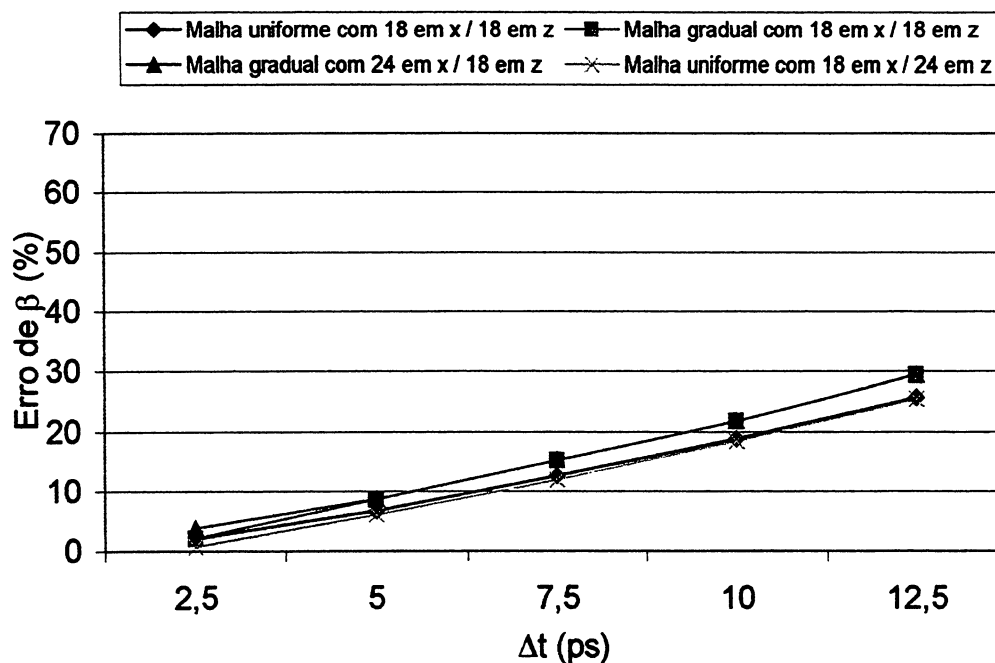


Figura 4.6  $\beta$  em função  $\Delta t$  para a frequência de 1GHz.

Observa-se que a malha uniforme com 18 divisões em x e 24 divisões em z foi a que obteve os melhores resultados, embora a diferença seja muito pequena. As malhas graduais, quando comparadas com a malha homogênea com 18 divisões em x e z, trouxeram uma pequena melhoria nos valores de Z, porém os valores obtidos para  $\beta$

foram piores. É interessante observar que a malha gradual com 18 divisões foi mais precisa do que a gradual de 24 divisões. Comportamento semelhante ao observado na frequência de 1GHz ocorreu para a frequência de 2GHz, como observamos nas figuras 4.7 e 4.8

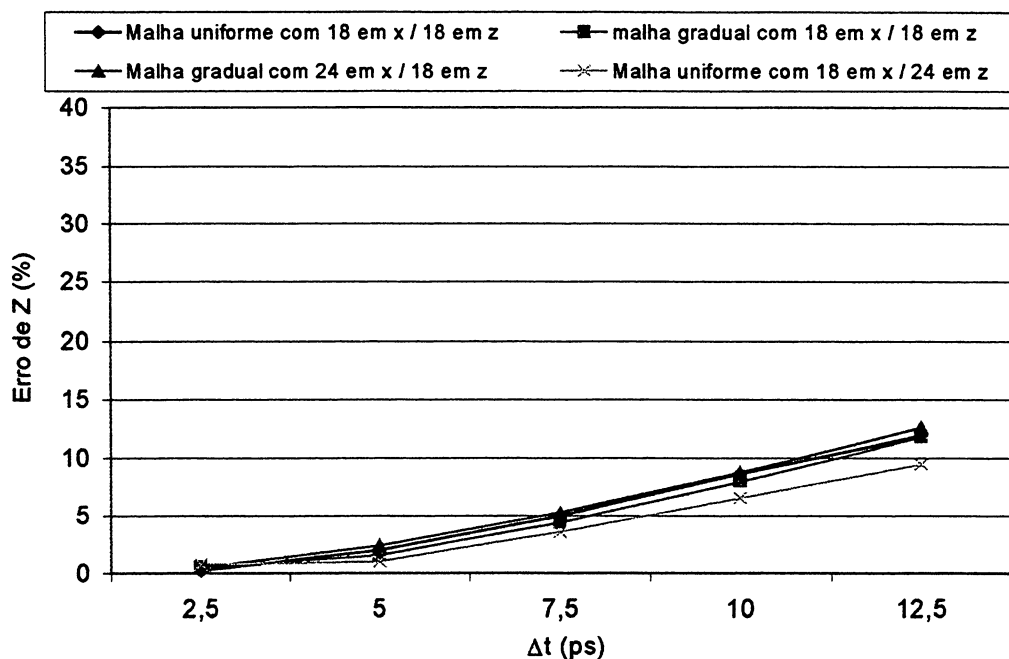


Figura 4.7 – Z em função de  $\Delta t$  para a frequência de 2GHz.

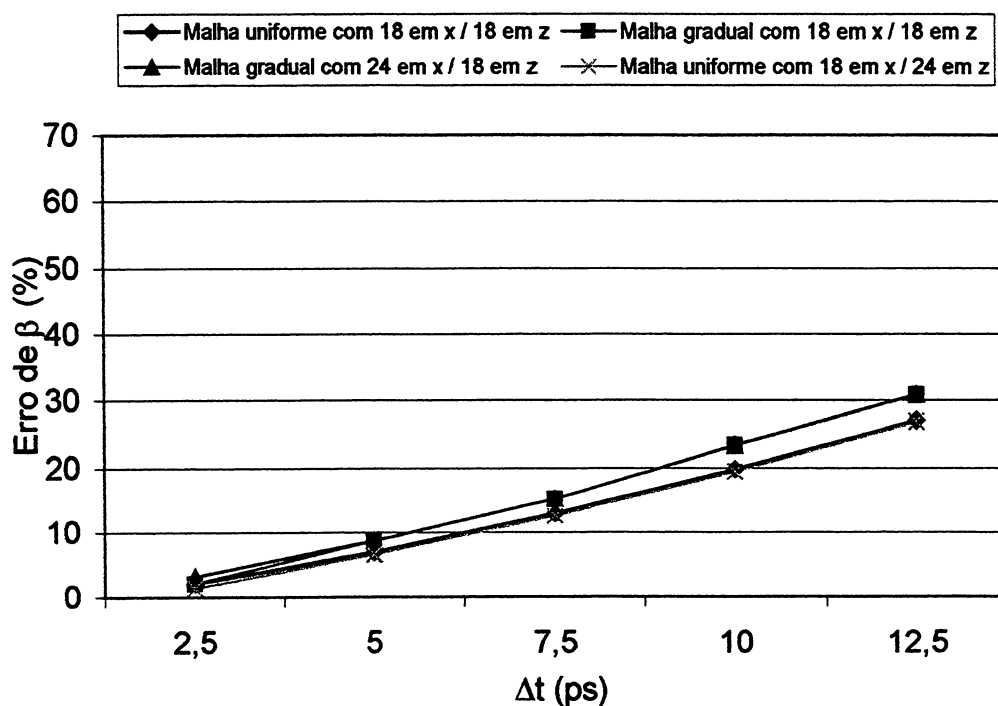


Figura 4.8  $\beta$  em função  $\Delta t$  para a frequência de 2GHz.

A partir de 4GHz observa-se que as malhas graduais passam a ter os maiores erros, tanto para Z quando para  $\beta$ , como observa-se nas figuras 4.9 e 4.10

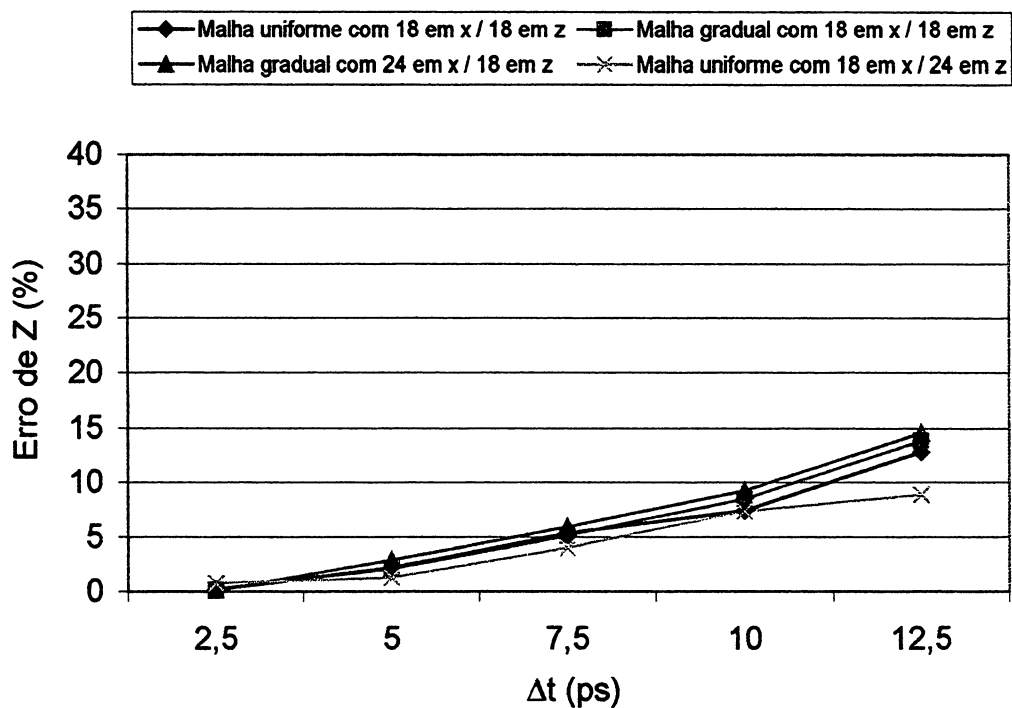


Figura 4.9 – Z em função de  $\Delta t$  para a frequência de 4GHz.

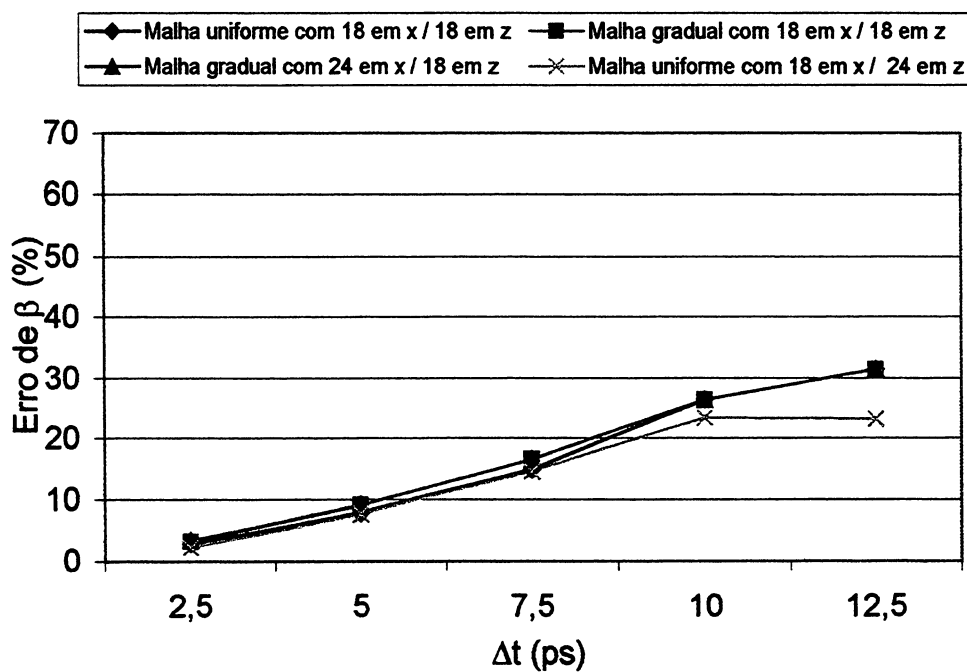


Figura 4.10  $\beta$  em função  $\Delta t$  para a frequência de 4GHz.

Para a frequência de 8 GHz, os erros aumentam muito quando o passo no tempo é maior que 7,5 ps, independente da malha utilizada, como observa-se na figura 4.11 e 4.12.

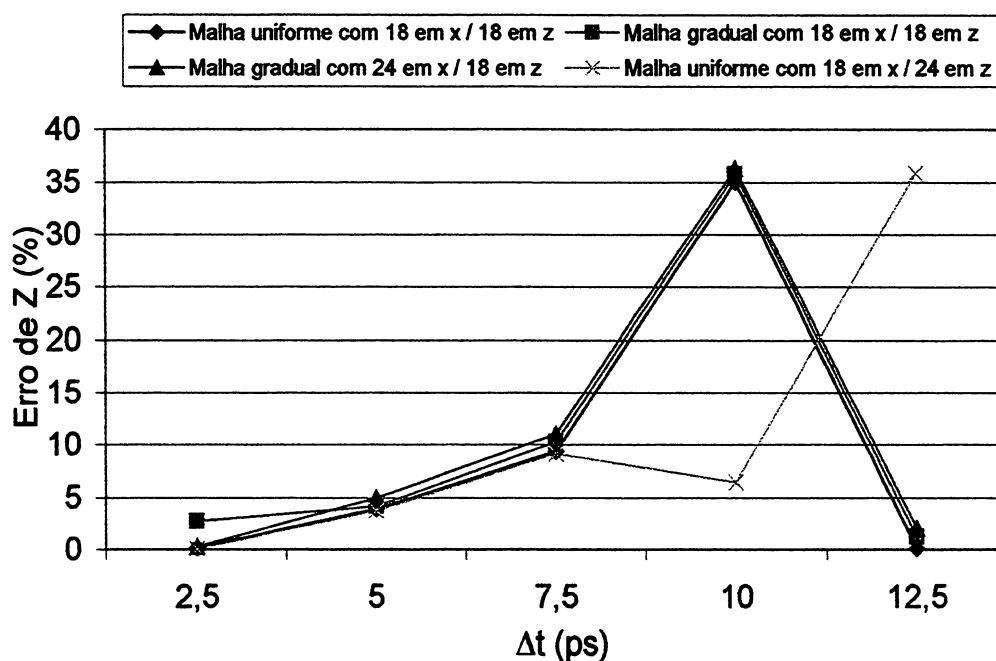


Figura 4.11 – Z em função de  $\Delta t$  para a frequência de 8GHz.

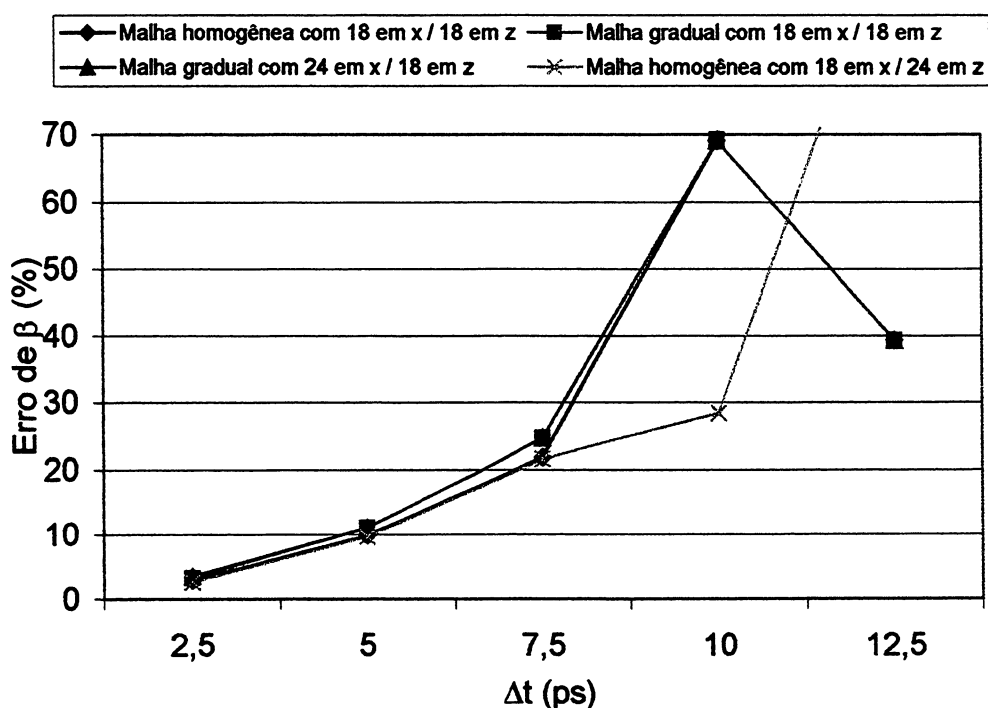


Figura 4.12  $\beta$  em função  $\Delta t$  para a frequência de 8GHz.

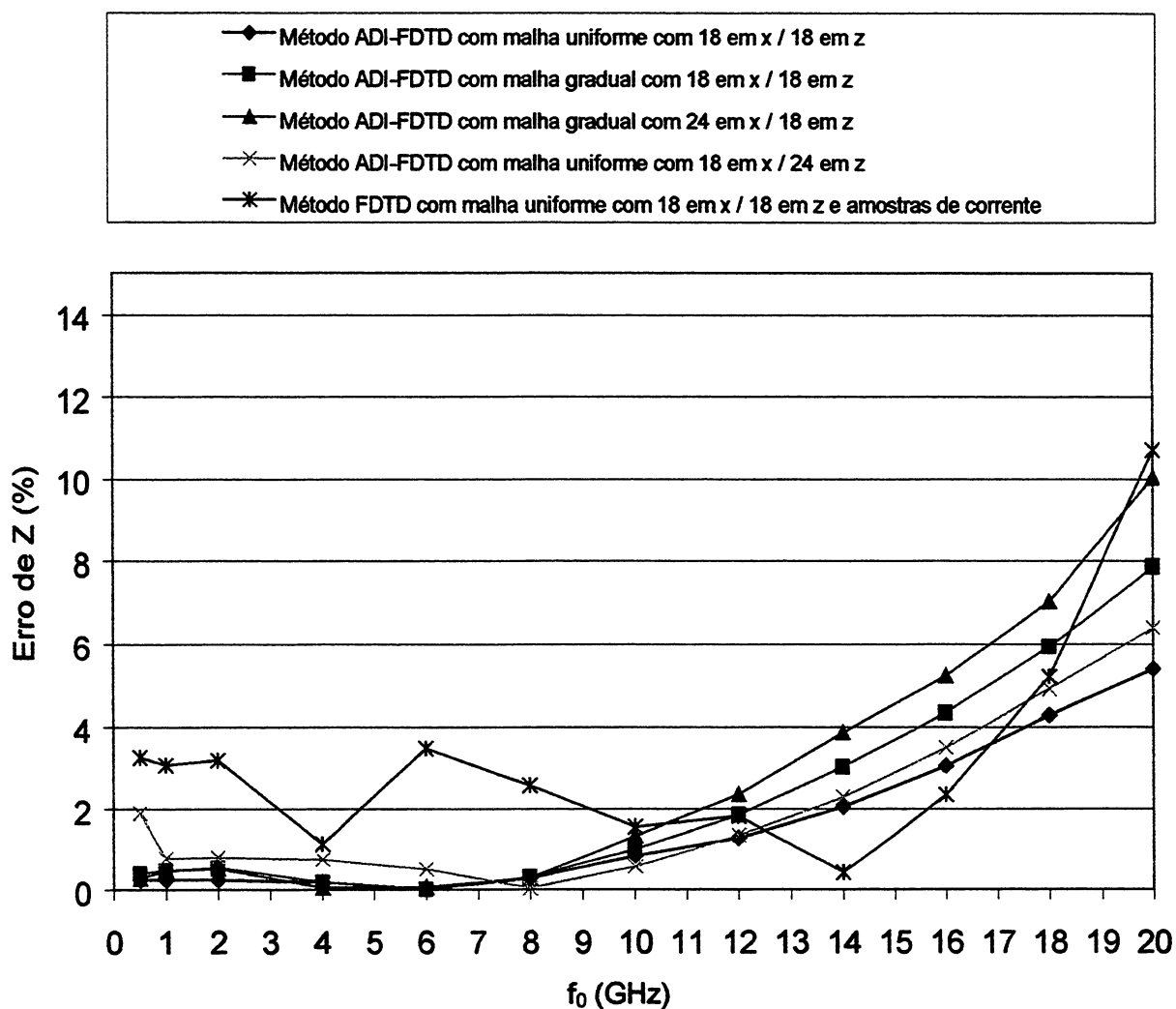
Na tabela 8 tem-se o  $\Delta t$  fixo em 2,5ps, e as simulações foram feitas utilizando o método ADI-FDTD para as malhas graduais de 24 e 18 células na direção de x, e as frequências variando de 500MHz até 20GHz. Os valores obtidos para Z e  $\beta$  foram traçados nas figuras 4.13 e 4.14, respectivamente. Nestas figuras têm-se a curva representando o método ADI-DTD aplicado para a malha homogênea com 18 divisões em x e 18 em z, a curva representando o mesmo método aplicado à malha com 18 divisões concentradas nas bordas da fita central, também a curva com o método ADI-FDTD aplicado à malha gradual concentrada nas bordos da fita central, porém com 24 divisões, a curva com o método ADI-FDTD aplicado a malha com 18 divisões em x e 24 divisões na direção de z (cujos resultados são mostrados na tabela 9) e a curva que representa o método FDTD convencional com malha homogênea e amostras de corrente .

TABELA 8 – ERRO DOS VALORES DE Z E  $\beta$  EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA COM  $\Delta t=2,5ps$

Freq(GHz)	ADI-FDTD COM 24 DIVISÕES				ADI-FDTD COM 18 DIVISÕES				TEÓRICO		
	Z	%	Beta	%	Z	%	Beta	%	Z PARA 24	Z PARA 18	Beta
0,5	41,71	0,27	0,0154	1,41	41,41	0,40	0,0156	2,73	41,596	41,246	0,0152
1	41,79	0,47	0,0311	2,40	41,44	0,47	0,0310	2,07	41,596	41,246	0,0304
2	41,81	0,51	0,0622	1,97	41,47	0,54	0,0620	1,64	41,596	41,246	0,0610
4	41,62	0,06	0,1248	1,46	41,32	0,18	0,1250	1,63	41,596	41,246	0,1230
6	41,57	0,06	0,1881	3,35	41,25	0,01	0,1880	3,30	41,596	41,246	0,1820
8	41,48	0,28	0,2511	3,33	41,12	0,31	0,2510	3,29	41,596	41,246	0,2430
10	41,04	1,34	0,3161	4,08	40,83	1,01	0,3150	3,72	41,596	41,246	0,3037
12	40,62	2,35	0,3808	4,48	40,48	1,86	0,3800	4,26	41,596	41,246	0,3645
14	39,99	3,86	0,4479	5,34	40,00	3,02	0,4462	4,94	41,596	41,246	0,4252
16	39,42	5,23	0,5161	6,21	39,46	4,33	0,5140	5,77	41,596	41,246	0,4859
18	38,67	7,03	0,5860	7,19	38,80	5,93	0,5833	6,70	41,596	41,246	0,5467
20	37,42	10,04	0,6564	8,06	38,00	7,87	0,6530	7,50	41,596	41,246	0,6074

TABELA 9 – ERRO DOS VALORES DE  $Z$  E  $\beta$  EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA COM  $\Delta t=2,5ps$ 

FREQUÊNCIA	HOMOGÊNEA 24 DIVISÕES EM Z				TEÓRICO	
	Z	Z(%)	BETA	BETA(%)	Z	BETA
0,5	40,00	-1,90	0,0150	-1,22	40,773	0,0151857
1	41,09	0,78	0,0306	0,75	40,773	0,0303714
2	41,10	0,80	0,0616	1,41	40,773	0,0607427
4	41,08	0,75	0,1238	1,91	40,773	0,1214854
6	40,98	0,51	0,1863	2,23	40,773	0,1822282
8	40,79	0,04	0,2493	2,60	40,773	0,2429709
10	40,54	0,57	0,3130	3,06	40,773	0,3037136
12	40,22	1,36	0,3774	3,55	40,773	0,3644563
14	39,84	2,29	0,4428	4,14	40,773	0,425199
16	39,35	3,49	0,5094	4,83	40,773	0,4859418
18	38,77	4,91	0,5772	5,58	40,773	0,5466845
20	38,16	6,41	0,6452	6,22	40,773	0,6074272

Figura 4.13 – Comparação dos erros de  $Z$  em função de  $f_0$

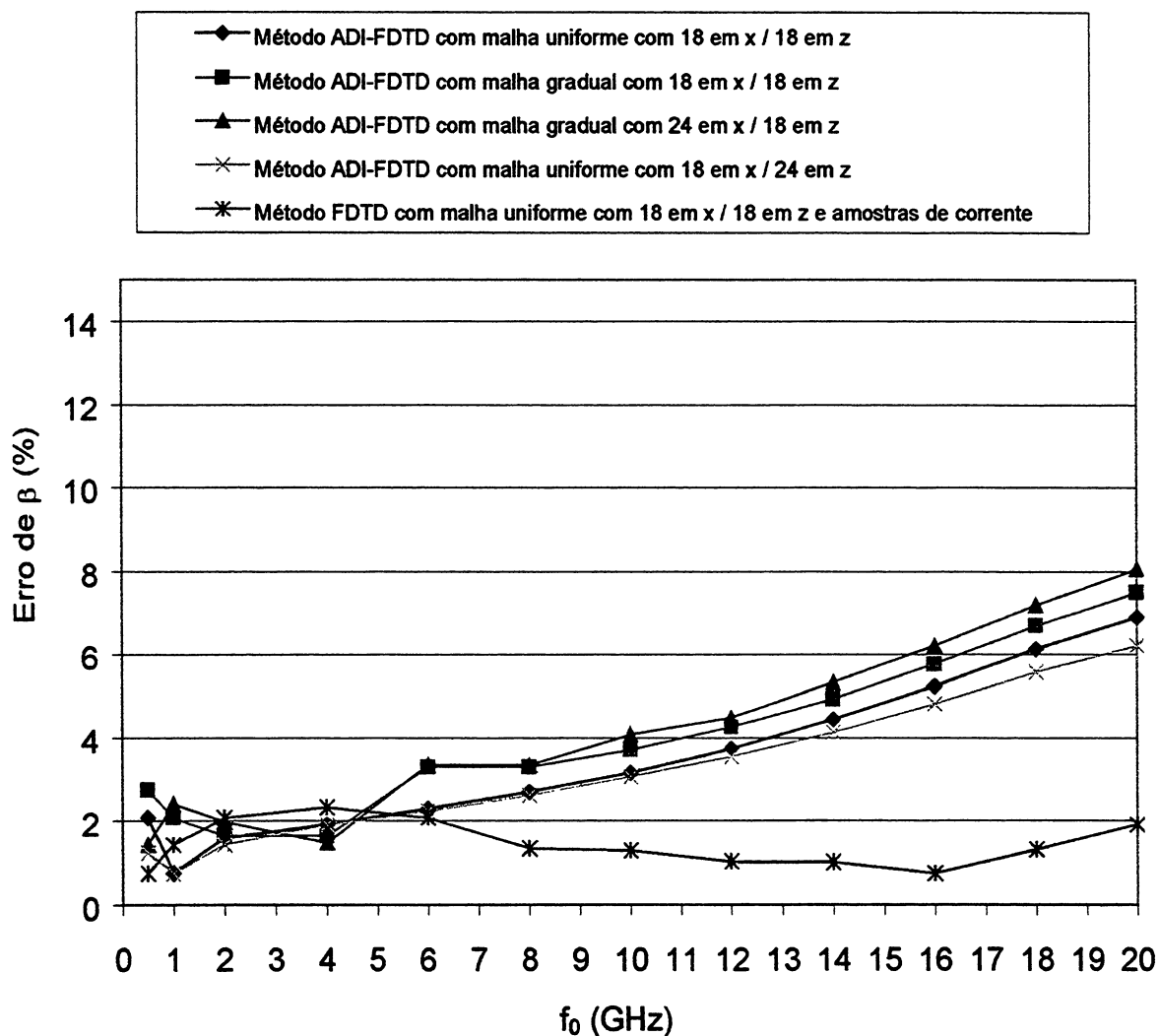


Figura 4.14 – Comparação do erro de  $\beta$  em função de  $f_0$

#### 4.5 INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Para o valor de  $Z$ , o método ADI-FDTD apresentou valores mais precisos até frequências próximas de 10GHz, a partir de onde o método FDTD se torna melhor até

cerca de 17GHz. O método FDTD apresenta uma curva de erro com variação abrupta, tendo vários pontos de máximo e mínimo.

Para os valores de  $\beta$  a partir de 6GHz o método FDTD convencional com amostras de corrente apresenta melhores resultados, porém quando calculado através das amostras de tensão o erro aumenta drasticamente para valores inferiores a 4GHz.

Observa-se que para baixas frequências no método FDTD existe uma grande diferença entre os valores obtidos com base na tensão e os obtidos com base na corrente, sendo que os melhores resultados são obtidos com a corrente, tanto para  $Z$  quanto para  $\beta$ .

No método ADI-FDTD os valores de  $Z$  obtidos através dos valores de  $\beta$  calculados com amostras de tensão e os obtidos com amostras de corrente são muito próximos, ao passo que para  $\beta$  os melhores valores são obtidos com base na tensão.

Computacionalmente, o método ADI-FDTD é mais dispendioso que o método FDTD convencional, necessitando de cerca de 2,5 vezes mais tempo de processamento para o mesmo número de iterações. Porém como o algoritmo do método ADI-FDTD é incondicionalmente estável, observou-se que para frequência abaixo de 4GHz, é possível manter o erro no cálculo de  $Z$  abaixo de 5% com um passo no tempo de simulação de até três vezes o máximo valor determinado pela condição de Courant.

Quando se reduz a dimensão das células ao longo do eixo  $x$ , conforme as figuras 3.8 e 3.9, não é obtida nenhuma melhora significativa em baixas frequências, sendo que os erros aumentam em alta frequência, conforme os gráficos 4.13 e 4.14. Já quando se altera o passo no tempo de simulação, este tipo de malha apresenta uma pequena variação no erro tanto de  $Z$  quanto de  $\beta$ , sendo para menos em baixas frequências e para mais em altas frequências.

Quando a dimensão das células ao longo do eixo  $z$  é alterada, em relação a frequência ocorre um pequeno aumento no erro de  $Z$ , e uma diminuição no erro de  $\beta$  o que é esperado já que a onda propaga-se nesta direção.



## 4.6 CONCLUSÃO

De acordo com os resultados apresentados neste capítulo, conclui-se se que o método ADI-FDTD apresenta bons resultados, com valores obtidos muito próximos dos calculados analiticamente, sendo que para frequências onde as dimensões das células são menores que  $1/20$  do comprimento de onda o método ADI-FDTD foi melhor que o método FDTD.

Em contrapartida, o método ADI-FDTD é menos eficiente computacionalmente, necessitando de cerca de duas vezes e meia o tempo gasto pelo método FDTD para realizar o mesmo tipo de simulação.

O método ADI-FDTD apresenta melhor precisão nos resultados de  $Z$  do que nos de  $\beta$ .

Um aumento do número de células é mais eficiente na direção de propagação da onda, principalmente em relação ao passo no tempo, diminuindo tanto os erros de  $Z$  quanto os de  $\beta$ .

## 5 CONCLUSÃO GERAL

Neste trabalho desenvolveu-se um estudo da precisão do método ADI-FDTD através da sua aplicação na simulação em um guia de onda do tipo *stripline*. Foram feitas comparações com os resultados obtidos analiticamente e através do método FDTD. As simulações foram realizadas utilizando-se elementos de tensão e corrente, em vez de campo elétrico e magnético, como é normalmente encontrado nos trabalhos sobre o assunto. Através da simulação de um transitório eletromagnético foram calculados os erros em função da variação da frequência da fonte de excitação, da variação do passo no tempo e da variação da discretização espacial.

Em relação à frequência o método ADI-FDTD se mostrou preciso e em frequências onde as dimensões das células são menores que  $1/20$  do comprimento de onda os resultados obtidos foram melhores do que com o método FDTD.

Através dos resultados obtidos verificou-se que o método ADI-FDTD é cerca de 2,38 vezes mais lento e requer 2,61 vezes mais memória que o método FDTD para o problema analisado.

Na estrutura simulada ao se calcular o valor de  $Z$  para frequências abaixo de 4GHz obteve-se um erro menor que 5% com um passo de 7,5ps, muito próximo dos 3% obtido com o método FDTD com o passo máximo de 2,5ps. Nestas frequências o erro no cálculo do valor de  $\beta$  aumenta linearmente com o passo no tempo para o método ADI-FDTD, sendo que, com um passo no tempo de 7,5ps, temos um erro de cerca de 12%.

A utilização do método ADI-FDTD é vantajosa quando as dimensões das células são muito menores que  $1/20$  do comprimento de onda que se propaga na estrutura, pois nestas condições o erro de  $Z$  é menor do que quando se utiliza o método FDTD convencional, e os valores obtidos para  $\beta$  em ambos os métodos são muito próximos. Como o método ADI-FDTD é incondicionalmente estável,

se o interesse for apenas no cálculo de  $Z$ , pode-se ainda aumentar o passo no tempo até cerca de três vezes o valor imposto pela condição de *Courant*, assim o método ADI-FDTD se torna mais rápido que o método FDTD convencional.

Como sugestões de temas para trabalhos futuros, tem-se a investigação das causas do grande erro encontrado para os valores de  $Z$  e  $\beta$  em baixas frequências quando se utiliza o método FDTD convencional com amostras de tensão. Pode-se também realizar o estudo da utilização do método ADI-FDTD em outros tipos de linhas de transmissão. Como neste trabalho foram utilizados valores de tensão e corrente, uma continuidade seria a implementação de uma interface direta com modelos de componentes eletrônicos discretos.

## ANEXO I

### ARQUIVO ADI\_FDTD.BAS

Arquivo ADI\_FDTD.bas no qual foi implementado o método ADI-FDTD. Este arquivo é utilizado pelo programa GiD para gerar o arquivo ADI\_FDTD.m que é executado no programa Matlab versão 4.2c.1. Os comandos do programa GiD são precedidos do símbolo \*, e o símbolo para a multiplicação é \*\*. O restante da sintaxe segue a estrutura adotada pelo programa Matlab.

```
%PROJETO: *GenData(1)

clear all
tic

epo = *GenData(2);
muo = *GenData(3);
sgc = *GenData(4);
T = *GenData(5);
F = *GenData(6);
dt = *GenData(7);
N = *GenData(8);
elems = [
  *set elems(Hexahedra)
  *loop elems
    *ElemsConec *ElemsMat;
  *end
];
mats = [
  *loop materials
    *MatProp(1) *MatProp(2) *MatProp(3) *MatNum;
  *end
];

nodes = [
  *loop nodes
    *NodesCoord *NodesNum;
  *end
];
```

```

pec = [
*set elems(Quadrilateral)
*set cond PEC
*loop elems OnlyinCond
*ElemsConec *cond(1);
*end
];

anypec = pec~=[];

pmc = [
*set elems(Hexahedra)
*set cond PMC
*loop elems OnlyinCond
*GlobalNodes *cond(1) *ElemsNum;
*end
];

anypmc = pmc~=[];

source = [
*set elems(Quadrilateral)
*set cond FONTE
*loop elems OnlyinCond
*ElemsConec *\
*if(strcmp(cond(1),"Ux")==0)
1 *\
*endif
*if(strcmp(cond(1),"Uy")==0)
2 *\
*endif
*if(strcmp(cond(1),"Uz")==0)
3 *\
*endif
*cond(2);
*end
];

anysource = source~=[];

voltage = [
*set cond TENSÃO
*loop elems OnlyinCond
*ElemsConec *\
*if(strcmp(cond(1),"Vx")==0)
1 *\
*endif
*if(strcmp(cond(1),"Vy")==0)
2 *\

```

```

*endif
*if(strcmp(cond(1),"Vz")==0)
3 *\
*endif
*cond(2);
*end
];

```

```
anyvoltage = voltage~=[];
```

```

current = [
*set cond CORRENTE
*loop elems OnlyinCond
*ElemsConec *\
*if(strcmp(cond(1),"Ix")==0)
1 *\
*endif
*if(strcmp(cond(1),"Iy")==0)
2 *\
*endif
*if(strcmp(cond(1),"Iz")==0)
3 *\
*endif
*cond(2);
*end
];

```

```
anycurrent = current~=[];
```

```
x = 0; y = length(nodes); z = 2**y; w = 3**y; % VERSORES
```

```

source(:,5) = (source(:,5)-1)**y;
voltage(:,5) = (voltage(:,5)-1)**y;
current(:,5) = (current(:,5)-1)**y;

```

**% RENUMERAÇÃO DOS NÓS DE ACORDO COM COORDENADAS CRESCENTES (X,Y,Z)**

```
maxnodes = max(nodes);
```

```

magnitude = nodes(:,1)**1e2+...
             nodes(:,2)**1e4+...
             nodes(:,3)**1e6;

```

```
[magnitude order] = sort(magnitude);
```

```
nodes = nodes(order,:);
```

```

[order reorder]=sort(order);

elems(:,1:8) = sort(reshape(reorder(elems(:,1:8)),size(elems(:,1:8))))';
if(anypec)
    pec(:,1:4) = sort(reshape(reorder(pec(:,1:4)),size(pec(:,1:4))))';
end
if(anypmc)
    pmc(:,1:4) = sort(reshape(reorder(pmc(:,1:4)),size(pmc(:,1:4))))';
end
if(anysource)
    source(:,1:4) = sort(reshape(reorder(source(:,1:4)),size(source(:,1:4))))';
end
if(anyvoltage)
    voltage(:,1:4) = sort(reshape(reorder(voltage(:,1:4)),size(voltage(:,1:4))))';
end
if(anycurrent)
    current(:,1:4) = sort(reshape(reorder(current(:,1:4)),size(current(:,1:4))))';
end

```

```
clear maxnodes magnitude order reorder
```

#### % MATRIZES CONSTITUTIVAS

```

ep = Inf*ones(y,1);
mu = Inf*ones(y,1);
sg = zeros(y,1);

ep(elems(:,1)) = epo**mats(elems(:,9),1);
mu(elems(:,1)) = muo**mats(elems(:,9),2);
sg(elems(:,1)) = sgc**mats(elems(:,9),3);
if(anypmc)
    sg(elems(pmc(:,6),1)) = sgc**pmc(:,5);
end

```

```
clear mats
```

#### % MATRIZES DE ARESTAS

```

dx = ones(y,1);
dy = ones(y,1);
dz = ones(y,1);

dx(elems(:,1)) = nodes(elems(:,8),1)-nodes(elems(:,1),1);
dy(elems(:,1)) = nodes(elems(:,8),2)-nodes(elems(:,1),2);
dz(elems(:,1)) = nodes(elems(:,8),3)-nodes(elems(:,1),3);

```

#### % VERSORES TANGENCIAIS

```
ax = [0 0 0;  
      1 0 1;  
      1 0 1];
```

```
ay = [1 0 1;  
      0 0 0;  
      1 1 0];
```

```
az = [1 1 0;  
      1 1 0;  
      0 0 0];
```

```
% VERSORES
```

```
bx = [1 1 1 1;  
      1 0 1 0;  
      1 0 1 0];
```

```
by = [1 0 1 0;  
      1 1 1 1;  
      1 1 0 0];
```

```
bz = [1 1 0 0;  
      1 1 0 0;  
      1 1 1 1];
```

```
if(anypec) % DETERMINAÇÃO DO PLANO DO CONDUTOR ELÉTRICO  
(X=1,Y=2,Z=3)
```

```
plane = ((nodes(pec(:,4),1:3)-nodes(pec(:,1),1:3))==0)**[1 2 3]';
```

```
% DETERMINAÇÃO DOS NÓS DO PLANO A SEREM CONSIDERADOS (1)
```

```
pec = spones(sparse(pec(:,1:3)+x,1,ax(plane(:),:),w,1)+...  
      sparse(pec(:,1:3)+y,1,ay(plane(:),:),w,1)+...  
      sparse(pec(:,1:3)+z,1,az(plane(:),:),w,1));
```

```
else pec = sparse(3**nnodes,1); end
```

```
if(anypmc) % DETERMINAÇÃO DO PLANO DO CONDUTOR MAGNÉTICO  
(X=1,Y=2,Z=3)
```

```
plane = ((nodes(pmc(:,4),1:3)-nodes(pmc(:,1),1:3))==0)**[1 2 3]';
```

```
% DETERMINAÇÃO DOS NÓS DO PLANO A SEREM CONSIDERADOS (1)
```

```
pmc = spones(sparse(elms(pmc(:,6),1:3)+x,1,ax(plane(:),:),w,1)+...  
      sparse(elms(pmc(:,6),1:3)+y,1,ay(plane(:),:),w,1)+...  
      sparse(elms(pmc(:,6),1:3)+z,1,az(plane(:),:),w,1));
```



```
else pmc = sparse(w,1); end
```

```
if(anysource) % DETERMINAÇÃO DO PLANO DA FONTE (X=1,Y=2,Z=3)
```

```
plane = ((nodes(source(:,4),1:3)-nodes(source(:,1),1:3))==0)**[1 2 3]';
```

```
% DETERMINAÇÃO DOS NÓS DA FONTE A SEREM CONSIDERADOS  
(VALOR)
```

```
m = max(source(:,6));
```

```
n = diag(source(:,6))**ones(length(source(:,6)),4);
```

```
source = spones(...
```

```
sparse(source(:,1:4)+x,n,diag(x==source(:,5))**bx(plane(:,1:4),w,m)+...
```

```
sparse(source(:,1:4)+y,n,diag(y==source(:,5))**by(plane(:,1:4),w,m)+...
```

```
sparse(source(:,1:4)+z,n,diag(z==source(:,5))**bz(plane(:,1:4),w,m)));
```

```
source = [source sparse(length(source),1)];
```

```
else source = sparse(w,1); end
```

```
if(anyvoltage) % DETERMINAÇÃO DO PLANO DE TENSÃO (X=1,Y=2,Z=3)
```

```
plane = ((nodes(voltage(:,4),1:3)-nodes(voltage(:,1),1:3))==0)**[1 2 3]';
```

```
% DETERMINAÇÃO DOS NÓS DE TENSÃO A SEREM CONSIDERADOS (1)
```

```
m = max(voltage(:,6));
```

```
n = diag(voltage(:,6))**ones(length(voltage(:,6)),4);
```

```
voltage = spones(...
```

```
sparse(voltage(:,1:4)+x,n,diag(x==voltage(:,5))**bx(plane(:,1:4),w,m)+...
```

```
sparse(voltage(:,1:4)+y,n,diag(y==voltage(:,5))**by(plane(:,1:4),w,m)+...
```

```
sparse(voltage(:,1:4)+z,n,diag(z==voltage(:,5))**bz(plane(:,1:4),w,m)));
```

```
else voltage = sparse(w,1); end
```

```
if(anycurrent) % DETERMINAÇÃO DO PLANO DE CORRENTE  
(X=1,Y=2,Z=3)
```

```
plane = ((nodes(current(:,4),1:3)-nodes(current(:,1),1:3))==0)**[1 2 3]';
```

```
% DETERMINAÇÃO DOS NÓS DE CORRENTE A SEREM CONSIDERADOS  
(1)
```

```

m = max(current(:,6));
n = diag(current(:,6))**ones(length(current(:,6)),4);

current = spones(...
    sparse(current(:,1:4)+x,n,diag(x==current(:,5))**bx(plane(:,1:4),w,m)+...
    sparse(current(:,1:4)+y,n,diag(y==current(:,5))**by(plane(:,1:4),w,m)+...
    sparse(current(:,1:4)+z,n,diag(z==current(:,5))**bz(plane(:,1:4),w,m)));

else current = sparse(w,1); end

clear ax ay az bx by bz plane m n nodes

pack

toc
tic

% conectividades

n1 = elems(:,1);
n2 = elems(:,2);
n3 = elems(:,3);
n4 = elems(:,4);
n5 = elems(:,5);
n6 = elems(:,6);
n7 = elems(:,7);

% inverso das capacitâncias das células de Yee

invC = zeros(w,1);

invC(x+n7) = 4**dx(n7)./(ep(n1).**dy(n1).**dz(n1)+...
    ep(n3).**dy(n3).**dz(n3)+...
    ep(n5).**dy(n5).**dz(n5)+...
    ep(n7).**dy(n7).**dz(n7));

invC(y+n6) = 4**dy(n6)./(ep(n1).**dx(n1).**dz(n1)+...
    ep(n2).**dx(n2).**dz(n2)+...
    ep(n5).**dx(n5).**dz(n5)+...
    ep(n6).**dx(n6).**dz(n6));

invC(z+n4) = 4**dz(n4)./(ep(n1).**dx(n1).**dy(n1)+...
    ep(n2).**dx(n2).**dy(n2)+...
    ep(n3).**dx(n3).**dy(n3)+...
    ep(n4).**dx(n4).**dy(n4));

invC = invC.**(1-pec); % condutor elétrico perfeito

```

**% inverso das indutâncias das células de Yee**

**invL = zeros(w,1);**

**invL(x+n1) = (dx(n1)./mu(n1)+dx(n2)./mu(n2))./dy(n1)./dz(n1)/2;**

**invL(y+n1) = (dy(n1)./mu(n1)+dy(n3)./mu(n3))./dx(n1)./dz(n1)/2;**

**invL(z+n1) = (dz(n1)./mu(n1)+dz(n5)./mu(n5))./dx(n1)./dy(n1)/2;**

**invL = invL.\*\*(1-pmc); % condutor magnético perfeito**

**% condutâncias das células de Yee**

**G = zeros(w,1);**

**G(x+n7) = (sg(n1).\*\*dy(n1).\*\*dz(n1)+...  
sg(n3).\*\*dy(n3).\*\*dz(n3)+...  
sg(n5).\*\*dy(n5).\*\*dz(n5)+...  
sg(n7).\*\*dy(n7).\*\*dz(n7))/4./dx(n7);**

**G(y+n6) = (sg(n1).\*\*dx(n1).\*\*dz(n1)+...  
sg(n2).\*\*dx(n2).\*\*dz(n2)+...  
sg(n5).\*\*dx(n5).\*\*dz(n5)+...  
sg(n6).\*\*dx(n6).\*\*dz(n6))/4./dy(n6);**

**G(z+n4) = (sg(n1).\*\*dx(n1).\*\*dy(n1)+...  
sg(n2).\*\*dx(n2).\*\*dy(n2)+...  
sg(n3).\*\*dx(n3).\*\*dy(n3)+...  
sg(n4).\*\*dx(n4).\*\*dy(n4))/4./dz(n4);**

**c = length(elems);**

**% operador integral sobre o campo elétrico na célula de Yee**

**sigmaEa = [x+n1 y+n2 +ones(c,1);  
x+n1 y+n6 -ones(c,1);  
y+n1 z+n3 +ones(c,1);  
y+n1 z+n4 -ones(c,1);  
z+n1 x+n5 +ones(c,1);  
z+n1 x+n7 -ones(c,1)];**

**sigmaEb = [x+n1 z+n4 +ones(c,1);**

**x+n1 z+n2 -ones(c,1);  
y+n1 x+n7 +ones(c,1);  
y+n1 x+n3 -ones(c,1);  
z+n1 y+n6 +ones(c,1);  
z+n1 y+n5 -ones(c,1)];**

**% operador integral sobre o campo magnético na célula de Yee**

```

sigmaHa = [x+n7 z+n3 +ones(c,1);
           x+n7 z+n1 -ones(c,1);
           x+n5 z+n1 +ones(c,1);
           y+n6 x+n5 +ones(c,1);
           y+n6 x+n1 -ones(c,1);
           y+n2 x+n1 +ones(c,1);
           z+n4 y+n2 +ones(c,1);
           z+n4 y+n1 -ones(c,1);
           z+n3 y+n1 +ones(c,1)];

```

```

sigmaHb = [x+n7 y+n1 +ones(c,1);
           x+n7 y+n5 -ones(c,1);
           x+n3 y+n1 -ones(c,1);
           y+n6 z+n1 +ones(c,1);
           y+n6 z+n2 -ones(c,1);
           y+n5 z+n1 -ones(c,1);
           z+n4 x+n1 +ones(c,1);
           z+n4 x+n3 -ones(c,1);
           z+n2 x+n1 -ones(c,1)];

```

```

sigmaEa = sparse(sigmaEa(:,1),sigmaEa(:,2),sigmaEa(:,3),w,w);
sigmaEb = sparse(sigmaEb(:,1),sigmaEb(:,2),sigmaEb(:,3),w,w);
sigmaHa = sign(sparse(sigmaHa(:,1),sigmaHa(:,2),sigmaHa(:,3),w,w));
sigmaHb = sign(sparse(sigmaHb(:,1),sigmaHb(:,2),sigmaHb(:,3),w,w));

```

```

Pa = spdiags(1+G.**invC**dt/2,0,w,w) + ...
     spdiags(dt**invC,0,w,w)**sigmaHa**spdiags(dt**invL,0,w,w)**sigmaEa;

```

```

Qa = spdiags(1-G.**invC**dt/2,0,w,w) - ...
     spdiags(dt**invC,0,w,w)**sigmaHa**spdiags(dt**invL,0,w,w)**sigmaEb;

```

```

Pb = spdiags(1+G.**invC**dt/2,0,w,w) + ...
     spdiags(dt**invC,0,w,w)**sigmaHb**spdiags(dt**invL,0,w,w)**sigmaEb;

```

```

Qb = spdiags(1-G.**invC**dt/2,0,w,w) - ...
     spdiags(dt**invC,0,w,w)**sigmaHb**spdiags(dt**invL,0,w,w)**sigmaEa;

```

```

Ya = (sigmaHa+sigmaHb)**spdiags(dt**invL,0,w,w)**sigmaEa;

```

```

Yb = (sigmaHa+sigmaHb)**spdiags(dt**invL,0,w,w)**sigmaEb;

```

```

Z = dt**invC;

```

```

clear ep mu sg elems pec pmc invC invL G sigmaEa sigmaEb sigmaHa sigmaHb
n1 n2 n3 n4 n5 n6 n7

```

```

pack
toc

```

```

dI = zeros(w,1);
dV = zeros(w,1);
dVo = zeros(w,1);
v = zeros(N,size(voltage,2));
i = zeros(N,size(current,2));

% CONEXÃO DOS ELEMENTOS DE CIRCUITO

connection = find(sum(source'));

% FATORAÇÃO

[La,Ua] = lu(Pa);
[Lb,Ub] = lu(Pb);

u = circuit(0,dt,i,F,T);

% ITERAÇÕES
tic
for n=2:2:N

    dV = Ua\La\Qa**dVo-Z.**dI);
    dI = dI + Ya**dV + Yb**dVo;
    v(n-1,:) = dV**voltage;
    i(n-1,:) = dI**current;
    u = sum(circuit(n-1,dt,i,F,T)**source');
    dVo = dV;
    dVo(connection) = u(connection);

    dV = Ub\Lb\Qb**dVo-Z.**dI);
    dI = dI + Yb**dV + Ya**dVo;
    v(n,:) = dV**voltage;
    i(n,:) = dI**current;
    u = sum(circuit(n,dt,i,F,T)**source');
    dVo = dV;
    dVo(connection) = u(connection);

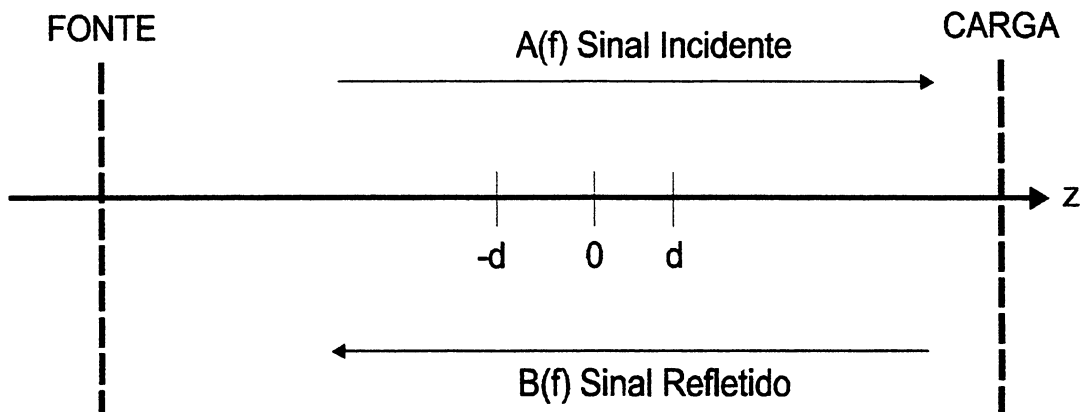
end
toc
% GRÁFICOS
close all
set(gca,'ColorOrder',[0 1 0;1 1 0;0 0 1;1 0 1;0 1 1;1 1 1])
hold on
plot(v)
figure
set(gca,'ColorOrder',[0 1 0;1 1 0;0 0 1;1 0 1;0 1 1;1 1 1])
hold on
plot(i)
% FIM DO PROGRAMA

```

## ANEXO 2

### CÁLCULO DA IMPEDÂNCIA CARACTERÍSTICA E DA CONSTANTE DE PROPAGAÇÃO

Para o cálculo da constante de propagação, considera-se uma linha de transmissão qualquer com uma fonte alocada em uma de suas extremidades e uma carga na outra extremidade. A direção de propagação é  $z$ . Considera-se a origem da coordenada  $z$  como sendo um ponto próximo ao centro da linha de transmissão, como mostrado na figura 1.



A fonte gera um sinal incidente  $A(f)$  e conseqüentemente um sinal refletido  $B(f)$ . As tensões  $V$  amostradas na origem, em um ponto a uma distância  $-d$  e em um ponto a uma distância  $d$  são dadas por

$$V(-d) = \sqrt{Z_c} A e^{-\gamma d} + \sqrt{Z_c} B e^{\gamma d}, \quad (1)$$

$$V(0) = \sqrt{Z_c} A + \sqrt{Z_c} B, \quad (2)$$

$$V(d) = \sqrt{Z_c} A e^{\gamma d} + \sqrt{Z_c} B e^{-\gamma d} \quad (3)$$

onde  $Z_c$  é a impedância característica,  $A$  e  $B$  são a amplitude da onda incidente e da onda refletida no ponto zero respectivamente e  $\gamma$  é a constante de propagação.

Se os valores de tensão nos pontos considerados forem obtidos pela simulação,

podemos resolver o sistema de equações acima, de forma que a constante de propagação é dada por

$$\gamma = \frac{1}{d} \ln \left[ \frac{V(d) + V(-d)}{2V(0)} \pm \sqrt{\left( \frac{V(d) + V(-d)}{2V(0)} \right) - 1} \right] \quad (4)$$

$$\gamma = \frac{1}{d} \operatorname{arccosh} \left[ \frac{V(d) + V(-d)}{2V(0)} \right] \quad (5)$$

Se forem utilizadas amostras de corrente  $I$  ao invés de tensão, teremos como resultado

$$\gamma = \frac{1}{d} \ln \left[ \frac{I(d) + I(-d)}{2I(0)} \pm \sqrt{\left( \frac{I(d) + I(-d)}{2I(0)} \right) - 1} \right] \quad (6)$$

$$\gamma = \frac{1}{d} \operatorname{arccosh} \left[ \frac{I(d) + I(-d)}{2I(0)} \right] \quad (7)$$

Já a impedância característica é obtida por

$$Z_c = \frac{V(-d)e^{\lambda d} - V(d)e^{-\lambda d}}{I(-d)e^{\lambda d} - I(d)e^{-\lambda d}} \quad (8)$$

## **ANEXO 3**

### **CONDIÇÃO DE ABSORÇÃO SIMPLIFICADA PARA O MÉTODO FDTD**

Wilson Arnaldo Artuzi Junior

Centro de Instrumentação Eletrônica - Universidade Federal do Paraná Departamento de Eletricidade  
CP 19011 81531-990 Curitiba - PR - BRAZIL FAX: 041-26e-022-12 - E-mail: [artuzi@eletr.ufpr.br](mailto:artuzi@eletr.ufpr.br)

#### **Resumo**

A condição de contorno de absorção é implementada de forma simplificada sem a necessidade de algoritmos complexos. A absorção é satisfatória numa faixa de frequências limitada. O que é útil para a simulação de alguns dispositivos de uso em altas frequências. A formulação teórica e alguns resultados numéricos para os modos TEM, TE e híbrido são apresentados.

#### **1. Introdução**

O método das diferenças finitas no domínio do (FDTD) [7] vem sendo amplamente utilizado na simulação de circuitos digitais de alta velocidade e de dispositivos de microondas e optoeletrônicos para sua simplicidade na formulação matemática e fácil implementação como programa de computador.

O cálculo direto da matriz de espalhamento que caracteriza tais Dispositivos requer a utilização de guias de onda Infinitos ou perfeitamente casados na simulação [17]. Para tal, o artifício numérico usado é a condição de contorno de absorção, na qual toda onda eletromagnética incidente é absorvida de forma a eliminar qualquer reflexão [18]. De maneira geral, para a implementação desta condição são usados algoritmos próprios sendo que o grau de complexidade destes aumenta conforme a perfeição exigida na absorção [19]. Em termos práticos, isto requer um aumento da



capacidade de memória do computador e diminui a velocidade de processamento da simulação .

Uma alternativa que permite a aplicação do método em computadores de pequeno porte é a simplificação da condição de absorção, fazendo uso do mesmo algoritmo empregado no método FDTD. Em contrapartida, a simplificação não permite a absorção total da onda incidente e o cálculo direto da matriz de espalhamento torna-se errôneo. Felizmente existem métodos indiretos de cálculo que compensam a reflexão da condição de absorção, mas ainda assim deve-se enfatizar que quanto maior for a absorção, mais rápida será a convergência do cálculo [20].

Este trabalho apresenta a formulação teórica para a condição de absorção simplificada.

## 2. Formulação Teórica

No método FDTD o espaço computacional é discretizado com base na célula de Yee [1], na qual um ponto do espaço é expandido num paralelepípedo de arestas  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  e as componentes do campo eletromagnético são alocadas nos vértices conforme mostra a Figura 1. A Figura 2 mostra um guia de onda com secção transversal arbitrária. Neste, a condição de absorção proposta é formada somente pelos três primeiros planos de discretização do guia, designados na figura por 1, 2 e 3, que correspondem às faces lateral esquerda, lateral direita e lateral esquerda da célula de Yee, respectivamente. O plano 1 é implementado como uma parede magnética, ou circuito aberto, onde todas as componentes de campo nele existentes são sempre nulas. A região não metálica do plano 2 é dotada de condutividade elétrica  $\sigma$  não nula e finita para absorver a onda eletromagnética incidente. A espessura da região de absorção é  $d = d_{12} + d_{23}$  onde  $d_{12}$  e  $d_{23}$  são as separações entre os planos 1 e 2 e entre os planos 2 e 3, respectivamente. Um algoritmo para o método FDTD que incorpora a condutividade elétrica é apresentado em [21].

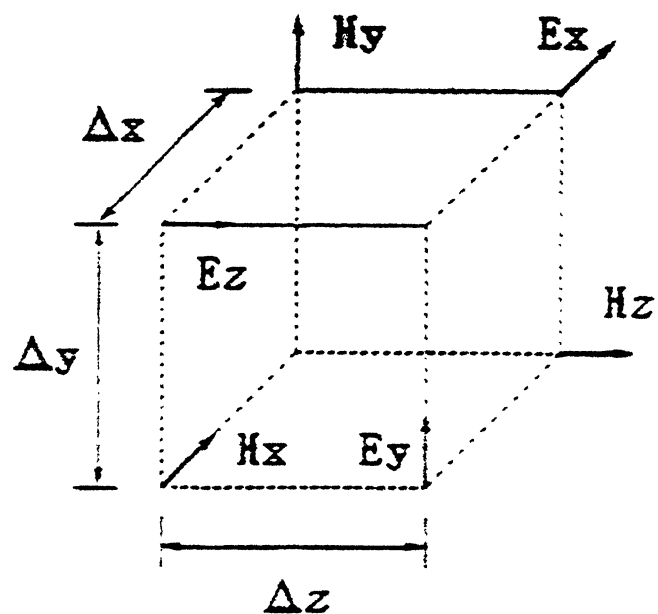


Figura 1 – Célula de Yee

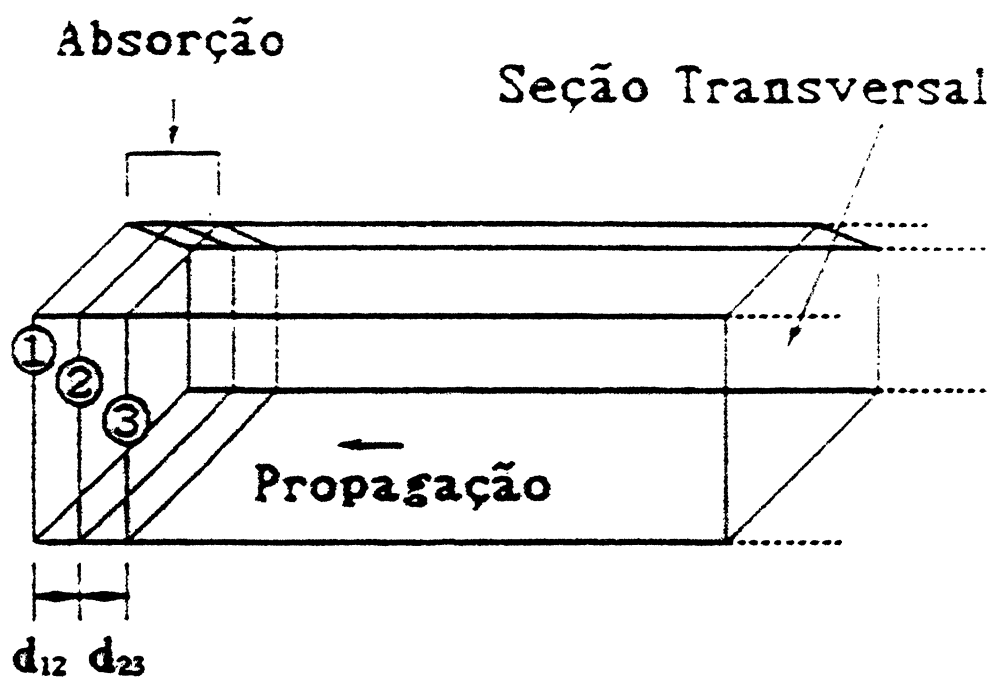


Figura 2 – Implementação da condição de absorção num guia de onda genérico

A estrutura equivalente em termos de parâmetros distribuídos de linha de transmissão aparece na figura 3. O circuito aberto corresponde ao plano 1, a indutância  $L$  representa a região entre os planos 1 e 2, a capacitância  $C$  e a condutância  $G$  representam a região entre os planos 1 e 3 e o guia de onda possui admitância característica  $Y_c$ .

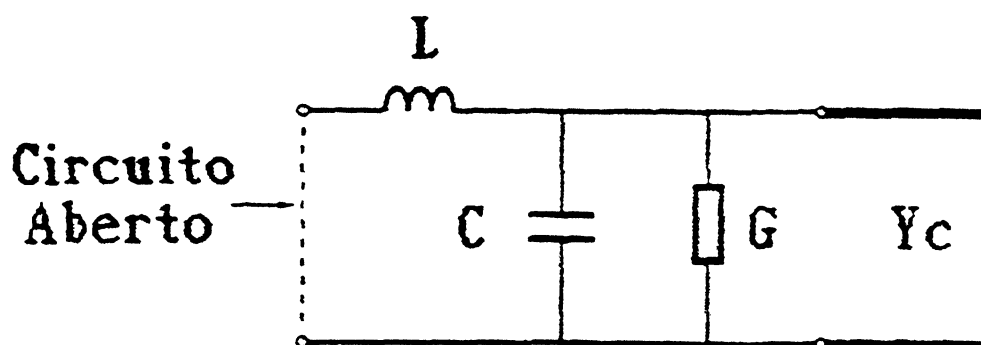


Figura 3 – Circuito equivalente com parâmetros distribuídos

Sendo  $\omega$  a frequência angular da onda eletromagnética, a admitância total da região entre os planos 1 e 3, vista do guia de onda é

$$Y = Gd + i\omega Cd \quad (1)$$

e o coeficiente de reflexão pode ser calculado por

$$\Gamma = \frac{1 - \frac{Y}{Y_c}}{1 + \frac{Y}{Y_c}} \quad (2)$$

Da teoria das linhas de transmissão com perdas pequenas [17] sabe-se que

$$G/Y_c = 2\alpha \quad \text{e} \quad (3)$$

$$\omega C/Y_c = \beta \quad (4)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são as constantes de atenuação e de fase do guia, respectivamente.

Substituindo-se (3) e (4) em (1) e calculando-se o módulo  $\rho$  do coeficiente de reflexão em (2) obtém-se

$$\rho = |\Gamma| = \sqrt{\frac{(2\alpha d - 1)^2 + (\beta d)^2}{((2\alpha d + 1))^2 + (\beta d)^2}} \quad (5)$$

Para que a absorção seja perfeita deve-se ter  $\rho = 0$ , o que só é possível com  $2\alpha d = 1$  e  $\beta d = 0$ , simultaneamente. Como  $\beta = 0$  não é uma condição útil na prática, a função é apenas minimizada com  $2\alpha d = 1$ .

O valor de  $\alpha$  depende da condutividade elétrica  $\sigma$  atribuída ao plano 2 e do modo de onda eletromagnética que se propaga no guia. Assim, o valor ótimo de  $\sigma$  pode ser determinado através de (6) e da relação entre  $\alpha$  e  $\sigma$  para o modo de propagação em questão.

Em guias de onda homogêneos preenchidos com dielétricos imperfeitos, a constante de atenuação é

$$\alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad (6)$$

se as perdas no dielétrico forem pequenas [22]. Logo, o valor ótimo encontrado para a condutividade elétrica da condição de absorção é

$$\sigma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad (7)$$

onde  $f_c$  é a frequência de corte do modo e  $f$  é a frequência na qual se deseja a minimização do coeficiente de reflexão, e  $\mu$  e  $\epsilon$  são a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do meio, respectivamente. A equação (8) com  $f_c = 0$  aplica-se a modos TEM.

Em meios não homogêneos, dificilmente há uma relação simples entre  $\alpha$  e  $\sigma$ . Entretanto pode-se adotar (8) para determinar um valor de condutividade para cada meio que compõe a estrutura como uma fórmula aproximada, porém de simples utilização.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] IDA, N.: **Numerical Modeling for Electromagnetic Non-Destructive Evaluation**. London: Chapman & Hall, 1995.
- [2] KUNZ, K.S.; LUEBBERS, R.: **Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics**. Florida: CRC Press ,1993.
- [3] KRUMPHOLZ, M.; KATEHL, L.P.B. **MRTD: New Time-Domain Schemes Based on Multiresolution Analysis**. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol.44, n° 4, pp 555 – 571, April/1996 .
- [4] MALLAT, S.: **A Wavelet Tour of Signal Processing**. San Diego: Academic Press, 1998.
- [5] NAMIKI, T.: **A New FDTD Algorithm Based on Alternating Direction Implicit Method**. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol.47, n° 10, pp 2003-2007, October 1999.
- [6] ZHENG, FENGHUA; CHEN, ZHIZHANG; ZHANG, JIAZONG: **A Finite Difference Time Domain Method without the Courant Stability Conditions**. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, vol. 9, n° 11, November 1999.
- [7] Yee, K. S.: **Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media**. IEEE Trans. Antennas Propagat, vol. AP-14, pp. 302 – 307, May 1966.
- [8] AXELSSON,O: **Iterative Solution Methods**. New York: Cambridge University Press, 1996.

- [9] PLONUS, M.A: **Applied Electromagnetics**. New York: McGraw-Hill,1978.
- [10] ARTUZI JUNIOR, W.A.: **Condição de Absorção Simplificada para o Método FDTD**. VII Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica – XIV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações. Curitiba: 22 a 25 de junho de 1996.
- [11] ARTUZZI JUNIOR, W.A: **Processamento Digital de Sinais: Introdução ao Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo**. Curitiba: [s.n] , 1999.
- [12] BARROSO, L. C. *et al*: **Cálculo Numérico (Com Aplicações)**. São Paulo: Harbra Ltda , 1987.
- [13] The MathWorks, Inc: **MATLAB Help Desk**. Massachusetts:[s.n], 1998.
- [14] BAHL, I. J.; BHARTIA, P: **Microwave Solid State Circuit Design** . New York: Wiley, 1988.
- [15] RIBÓ , R. ; PASENAU, M. A. R.; ESCOLANO, E. : **GiD Reference Manual**. [S.I]: [s.n],2000.
- [16] WATANABE, S: **An Improved FDTD Model for the Feeding Gap of a Thin-Wire Antenna**. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, vol.8, nº4, April 1998.
- [17] COLLINS, R. E.: **Foundations for Microwave Engineering**. McGraw-Hill, 1966.
- [18] MROZOWSKI, M. ; NIEDZWIECKI, M. ; SUCHOMSKI, P. : **A Fast Recursive Highly Dispersive Absorbing Boundary Condition Using Time Domain Diakoptics and Laguerre Polynomials**. Microwave and Guided Wave Lett, vol. 5, pp. 183-185, 1995.

- [19] KATZ, D. S. ; THIELE, E. T. ; TAFLOVE, A. : **Validation and Extension to three dimensions of the Berenger PML Absorbing Boundary Condition for FDTD Meshes**. IEEE Microwave and Guided Wave Lett, vol. 4, pp. 268-270, 1994.
- [20] ARTUZI, JR. W. A. : **Cálculo da Matriz de Impedâncias pelo método FDTD**. Anais do XVI Congresso Ibero Latinoamericano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia, vol. 2, pp. 954-962, Curitiba , 1995.
- [21] SHIBATA, T. ; SANO, E. : **Characterization of MIS Structure coplanar transmission Lines for Investigation of Signal Propagation in Integrated Circuits**. IEEE Trans. Microwave Theory and Tech, vol. 38, pp.881-890, 1990.
- [22] RAMOS, S. ; WHINNERY, J. R. ; VAN DUZER, T. : **Fields and Waves in Communication Eletronics**. John Wiley and Sons, 1965.