



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ALDECIR MANUEL BALOTIN JUNIOR

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROCESSO DE AUTODEPURAÇÃO DO RIO
PEQUENO - PARANÁ

CURITIBA

2025

ALDECIR MANUEL BALOTIN JUNIOR

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROCESSO DE AUTODEPURAÇÃO DO RIO
PEQUENO - PARANÁ

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Meio Ambiente Urbano e Industrial, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná em parceria com o SENAI-PR e a Universität Stuttgart, Alemanha, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Meio Ambiente Urbano e Industrial.

Orientador: Prof. Carlos Alberto Ubirajara Gontarski
Coorientador: Prof. Eduardo Felga Gobbi

CURITIBA

2025

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Balotin Junior, Aldecir Manuel

Simulação numérica do processo de autodepuração do Rio Pequeno -
Paraná / Aldecir Manuel Balotin Junior. – Curitiba, 2025.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de
Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Meio Ambiente Urbano e
Industrial.

Orientador: Carlos Alberto Ubirajara Gontarski

Coorientador: Eduardo Felga Gobbi

1. Controle de qualidade da água. 2. Rio Pequeno (PR). 3. Água –
Depuração. 4. Métodos de simulação. I. Universidade Federal do Paraná. II.
Programa de Pós-Graduação em Meio Ambiente Urbano e Industrial. III.
Gontarski, Carlos Alberto Ubirajara. IV. Gobbi, Eduardo Felga. V. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MEIO AMBIENTE URBANO E INDUSTRIAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ALDECIR MANUEL BALOTIN JUNIOR**, intitulada: **SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROCESSO DE AUTODEPURAÇÃO DO RIO PEQUENO - PARANÁ**, sob orientação do Prof. Dr. CARLOS ALBERTO UBIRAJARA GONTARSKI, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 18 de Fevereiro de 2025.

Assinatura Eletrônica

11/03/2025 12:11:32.0

CARLOS ALBERTO UBIRAJARA GONTARSKI

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

21/02/2025 15:09:12.0

MARCELO KAMINSKI LENZI

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

21/02/2025 16:03:20.0

ARNO PAULO SCHMITZ

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

RESUMO

Esta dissertação desenvolve uma modelagem matemática para simular o processo de autodepuração do rio Pequeno (Paraná), utilizando o modelo de Streeter-Phelps modificado, calibrado sob uma abordagem bayesiana com amostragem via método de Monte Carlo (NUTS). O objetivo principal é estimar os parâmetros de desoxigenação (K_d) e reaeração (K_2), quantificando a incerteza associada às simulações de qualidade da água em um trajeto do rio Pequeno. Os valores estimados após a calibração são $K_d = 1,36 \pm 0,02 \text{ d}^{-1}$ e $K_2 = 5,50 \pm 0,82 \text{ d}^{-1}$, com intervalos de credibilidade (94% HDI) de [1,32; 1,40] para K_d e [4,05; 7,04] para K_2 . A validação do modelo frente aos dados observados demonstra elevada aderência, com estatísticas de qui-quadrado de $\chi^2 = 0,06$ para o perfil de oxigênio dissolvido (OD) e $\chi^2 = 0,89$ para o perfil de demanda bioquímica de oxigênio (DBO), ambas inferiores ao valor crítico ($\chi_c^2 = 15,51$; gl = 8; $\alpha = 0,05$). O modelo indica que, com os dados coletados, 99% dos cenários simulados de OD permanecem acima do limite legal de 5 mg/L, enquanto 71% das simulações de DBO respeitam o limite máximo permitido. Cenários de lançamento pontual revelam que o rio apresenta resiliência diante de cargas moderadas (<25 mg/L de DBO), mas há risco de não conformidade em casos de alta carga orgânica (>50 mg/L). A abordagem adotada mostra-se eficiente na representação probabilística do processo de autodepuração, oferecendo suporte técnico à tomada de decisão em gestão da qualidade da água e licenciamento ambiental.

Palavras-chave: Streeter-Phelps, K_d , K_2 , Monte Carlo, inferência bayesiana, qualidade da água, autodepuração.

ABSTRACT

This study develops a mathematical model to simulate the self-purification process of the Pequeno River (Paraná), using a modified Streeter-Phelps model calibrated under a Bayesian framework with sampling via Monte Carlo method (NUTS). The primary objective is to estimate the deoxygenation (K_d) and reaeration (K_2) coefficients, while quantifying the uncertainty associated with water quality simulations along a section of the river. The estimated values after calibration are $K_d = 1.36 \pm 0.02 \text{ d}^{-1}$ and $K_2 = 5.50 \pm 0.82 \text{ d}^{-1}$, with 94% highest density intervals (HDI) of [1.32; 1.40] for K_d and [4.05; 7.04] for K_2 . Model validation against observed data demonstrates high agreement, with chi-square statistics of $\chi^2 = 0.06$ for the dissolved oxygen (DO) profile and $\chi^2 = 0.89$ for the biochemical oxygen demand (BOD) profile, both below the critical value ($\chi_c^2 = 15.51$; $df = 8$; $\alpha = 0.05$). The model indicates that, based on the collected data, 99% of the simulated DO scenarios remain above the legal threshold of 5 mg/L, while 71% of the simulated BOD scenarios comply with the maximum permitted limit. Simulated point-source discharge scenarios reveal that the river exhibits resilience under moderate organic loads (<25 mg/L of BOD), but presents a risk of non-compliance under high organic loads (>50 mg/L). The adopted approach proves effective in probabilistically representing the self-purification process, offering technical support for decision-making in water quality management and environmental licensing.

Keywords: Streeter-Phelps, K_d , K_2 , Monte Carlo, Bayesian inference, water quality, self-purification.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Oxigênio dissolvido na saturação na água em relação à temperatura em diferentes pressões.....	20
FIGURA 2 - Exemplo de consumo de matéria orgânica para diferentes valores de K1.....	37
FIGURA 3 - Coeficiente K2 em função da profundidade e velocidade do corpo hídrico a partir das fórmulas de O'Connor e Dobbins (1958), Churchill et al. (1962) e Owens et al. (apud Branco, 1978).....	39
FIGURA 4 - Esquema das distribuições inferenciais bayesiana e clássica, respectivamente.....	41
FIGURA 5 - Exemplo da Lei Forte dos Grandes Números.....	50
FIGURA 6 - Estado do Paraná e a localização da bacia hidrográfica do Rio Pequeno.	52
FIGURA 7 - Rio Pequeno, as 3 estações fluviométricas e o ponto de medição da Renault.....	53
FIGURA 8 - Vazão em relação ao tempo de permanência do rio Pequeno.....	55
FIGURA 9 - Histograma das velocidades medidas na estação BR-277 do rio Pequeno.....	56
FIGURA 10 - Relação entre velocidade e vazão do Rio Pequeno na estação BR-277.	56
FIGURA 11 - Histograma das velocidades medidas na estação Fazendinha do rio Pequeno.....	57
FIGURA 12 - Relação entre velocidade e vazão do Rio Pequeno na estação Fazendinha.....	58
FIGURA 13 - Histograma da temperatura (°C) do rio Pequeno na estação BR-277.	59
FIGURA 14 - Histograma da temperatura (°C) do rio Pequeno na estação Fazendinha.....	60
FIGURA 15 - Histograma da temperatura (°C) do rio Pequeno na estação Próximo a Foz.....	60
FIGURA 16 - Histograma da OD na saturação do rio Pequeno na estação BR-277.	62

FIGURA 17 - Histograma da OD na saturação do rio Pequeno na estação Fazendinha.....	62
FIGURA 18 - Histograma da OD na saturação do rio Pequeno na estação Próximo a Foz.....	63
FIGURA 19 - Histograma das medições de OD (mg/L) do rio Pequeno na estação BR-277.....	64
FIGURA 20 - Histograma das medições de OD (mg/L) do rio Pequeno na estação Fazendinha.....	65
FIGURA 21 - Histograma das medições de OD (mg/L) do rio Pequeno na Renault.	65
FIGURA 22 - Histograma das medições de OD (mg/L) do rio Pequeno na estação Próximo a Foz.....	66
FIGURA 23 - Histograma das medições de DBO (mg/L) do rio Pequeno na estação BR-277.....	67
FIGURA 24 - Histograma das medições de DBO (mg/L) do rio Pequeno na estação Fazendinha.....	68
FIGURA 25 - Histograma das medições de DBO (mg/L) do rio Pequeno na estação Fazendinha.....	68
FIGURA 26 - Histograma das medições de DBO (mg/L) do rio Pequeno na estação Próximo a Foz.....	69
FIGURA 27 - Histograma dos valores calculados de K2 na estação Fazendinha.....	71
FIGURA 28 - Histograma dos valores calculados de K2 na estação Fazendinha.....	72
FIGURA 29 - Histograma de todas as medições de OD no rio Pequeno em relação ao limite legal.....	74
FIGURA 30 - Histograma de todas as medições de DBO no rio Pequeno em relação ao limite legal.....	75
FIGURA 31 - Representação do método de Monte Carlo e parâmetros Kd e K2 calibrados para os dados do rio Pequeno.....	77
FIGURA 32 - Comparação entre as distribuições a priori e a posteriori dos parâmetros Kd e K2.....	77
FIGURA 33 - Comparação entre o perfil de OD na estação Fazendinha observado e modelado.....	79

FIGURA 34 - Comparação entre o perfil de DBO na estação Fazendinha observado e modelado.....	79
FIGURA 35 - Perfil de OD modelado entre o ponto de medição Renault e a estação Fazendinha e seu intervalo de credibilidade de 99%.....	81
FIGURA 36 - Perfil de DBO modelado entre o ponto de medição Renault e a estação Fazendinha e seu intervalo de credibilidade de 71%.....	81
FIGURA 37 - Perfil de OD modelado entre o ponto de medição Renault e a estação Fazendinha.....	83
FIGURA 38 - Perfil de DBO modelado entre o ponto de medição Renault e a estação Fazendinha.....	83

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – Possíveis usos de acordo com a classe estabelecida pela Resolução CONAMA n° 357/2005.....	27
QUADRO 2 – Valores dos parâmetros estipulados pela Resolução CONAMA n° 357/2005 para Águas Doces de Classe 1.....	27
QUADRO 3 – Valores dos parâmetros estipulados pela Resolução CONAMA n° 357/2005 para Águas Doces de Classe 2.....	28
QUADRO 4 – Valores dos parâmetros estipulados pela Resolução CONAMA n° 357/2005 para Águas Doces de Classe 3.....	28
QUADRO 5 – Valores dos parâmetros estipulados pela Resolução CONAMA n° 357/2005 para Águas Doces de Classe 4.....	28
QUADRO 6 - Principais modelos de qualidade da água e suas características.....	32
QUADRO 7 - Valores típicos do coeficiente K1 e Kd em dia-1 (base e, 20°C).....	36
QUADRO 8 - Coeficiente K2 (dia-1) segundo dados hidráulicos do curso d'água (base e, 20°C).....	38
QUADRO 9 - Resumo dos dados das estações fluviométricas do rio Pequeno.....	54

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Estatísticas das medições de velocidade do rio Pequeno.....	58
TABELA 2 - Estatísticas das medições de temperatura do rio Pequeno.....	61
TABELA 3 - Estatísticas dos cálculos de OD na saturação do rio Pequeno.....	63
TABELA 4 - Estatísticas das medições de OD do rio Pequeno.....	67
TABELA 5 - Estatísticas das medições de DBO do rio Pequeno.....	69
TABELA 6 - Estatísticas dos parâmetros Kd e K2 calibrados.....	78
TABELA 7 - Estatística qui-quadrado dos perfis de OD e DBO simulados e observados e valores qui-quadrado críticos.....	80

LISTA DE SIGLAS

$[H^+]$	molaridade de íons positivos de hidrogênio (mol/L)
α	Coeficiente de temperatura
θ	Espaço-parâmetro
θ	Parâmetro de interesse com valor desconhecido
θ_0	termo relacionado com a equação do virial do oxigênio
Ω	Espaço fundamental não-vazio que encontra-se os eventos de interesse
CNRH	Conselho Nacional de Recursos Hídricos
A_i	Variável de interesse
D	Déficit de oxigênio dissolvido (mg/L)
D_0	Déficit de oxigênio dissolvido no tempo $t=0$ (mg/L)
D_t	Déficit de oxigênio dissolvido em um instante t (mg/L)
DBO	Demanda Bioquímica de Oxigênio
DBO_5^{20}	Método de medição de DBO após um período de 5 dias a 20 °C
$\frac{dD}{dt}$	Variação total do déficit de oxigênio dissolvido
$\frac{dD_1}{dt}$	Taxa de desoxigenação
$\frac{dD_2}{dt}$	Taxa de reaeração
dL	Variação da DBO remanescente (mg/L)
dt	Infinitésimo de tempo
F_p	Fator de correção de pressão
f.d.p.	Função de densidade de probabilidade
gl	Graus de liberdade
HMC	Método de Monte Carlo Hamiltoniano
$h(\theta)$	Função de probabilidade <i>a priori</i> de θ

$h(\theta x)$	Função de probabilidade <i>a posteriori</i> de θ dado x
IQA	Índice de Qualidade da Água
K_1	Coeficiente de desoxigenação (dia^{-1})
K_2	Coeficiente de reaeração (dia^{-1})
K_d	Coeficiente de remoção de DBO efetiva (dia^{-1})
K_{temp}	Coeficiente K qualquer ajustado pela temperatura
L	DBO remanescente (mg/L)
L_0	DBO inicial (mg/L)
Matplotlib	Biblioteca Python para geração de gráficos personalizados
NUTS	No-U-Turn Sampler
NumPy	Biblioteca Python para manipulação de arrays e cálculos numéricos
OD_0	Concentração de oxigênio dissolvido inicial (mg/L)
OD_5	Concentração de oxigênio dissolvido após 5 dias (mg/L)
OD_s	Concentração de oxigênio dissolvido na saturação (mg/L)
OD_t	Concentração de oxigênio dissolvido no instante t (mg/L)
P	pressão (atm)
$P(A)$	Probabilidade de ocorrer o evento A
$P(A B)$	Probabilidade <i>a posteriori</i> de ocorrer A dado B
PyMC	Biblioteca Python para modelagem estatísticas bayesiana
pH	Potencial hidrogeniônico
RMC	Região Metropolitana de Curitiba
SINGREH	Sistema Nacional de Gerenciamento de Recursos Hídricos
SNIRH	Sistema Nacional de Informações sobre Recursos Hídricos
SciPy	Biblioteca Python para ajuste de distribuições e testes estatísticos
Temp	Temperatura (K)
t	tempo (dia)
temp	temperatura ($^{\circ}\text{C}$)

u	pressão de vapor da água (atm)
x	Amostra(s) observada(s)
χ^2	Estatística qui-quadrado
χ_c^2	Estatística qui-quadrado crítico

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	14
1.1	OBJETIVO GERAL.....	15
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	16
2	REVISÃO DA LITERATURA.....	17
2.1	QUALIDADE DA ÁGUA.....	17
2.1.1	Oxigênio Dissolvido.....	18
2.1.2	Coliformes termotolerantes.....	21
2.1.3	Potencial Hidrogeniônico - pH.....	21
2.1.4	Demanda Bioquímica de Oxigênio – DBO.....	22
2.1.5	Temperatura.....	23
2.1.6	Nitrogênio total.....	23
2.1.7	Fósforo total.....	23
2.1.8	Turbidez.....	24
2.1.9	Resíduo total.....	24
2.2	BASE LEGAL.....	24
2.3	MODELAGEM DA QUALIDADE DA ÁGUA.....	29
2.3.1	O primeiro estágio (1925 – 1965).....	30
2.3.2	O estágio de desenvolvimento (1965 - 1995).....	31
2.3.3	O estágio de aprofundamento (após 1995).....	31
2.3.4	Contexto Geral.....	32
2.3.5	Escolha do modelo matemático.....	33
2.3.6	Modelo de Streeter e Phelps.....	33
2.3.6.1	Coeficiente de desoxigenação – K1 e coeficiente de remoção de DBO efetiva no rio – Kd.....	35
2.3.6.2	Coeficiente de reaeração - K2.....	37
2.3.6.3	Correção dos coeficientes pela temperatura.....	39
2.3.6.4	Modelo de Streeter-Phelps modificado.....	40
2.3.7	Considerações sobre a aplicação de modelos matemáticos.....	40

2.4	MÉTODOS ESTATÍSTICOS.....	41
2.4.1	Estatística Bayesiana.....	43
2.4.2	Intervalos de credibilidade.....	44
2.4.3	Estrutura bayesiana para o modelo Streeter-Phelps.....	45
2.4.4	Distribuições estatísticas.....	46
2.4.4.1	Conceitos Gerais Sobre Distribuições de Probabilidade.....	46
2.4.4.2	Distribuição Uniforme.....	46
2.4.4.3	Distribuição Normal (Gaussiana).....	47
2.4.4.4	Distribuição Lognormal.....	47
2.4.4.5	Distribuição Gama.....	48
2.4.5	Testes estatísticos.....	48
2.4.6	Métodos de Monte Carlo.....	49
2.4.6.1	Algoritmo NUTS (No-U-Turn Sampler).....	50
3	MATERIAIS E MÉTODOS.....	52
3.1	ÁREA DE ESTUDO.....	52
3.1.1	Enquadramento.....	54
3.1.2	Vazão e vazão específica.....	54
3.1.3	Velocidade do Rio Pequeno.....	55
3.1.4	Temperatura do rio Pequeno.....	59
3.1.5	OD na saturação (ODs).....	61
3.1.6	OD do rio Pequeno.....	64
3.1.7	DBO do rio Pequeno.....	67
3.2	METODOLOGIA PARA MODELAGEM MATEMÁTICA.....	70
3.2.1	Escolha dos pontos para calibração do modelo.....	70
3.2.2	Distribuição a priori $h(\theta)$	70
3.3	FERRAMENTAS PARA PROGRAMAÇÃO E MODELAGEM.....	72
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	74
4.1	ANÁLISE DA QUALIDADE DO RIO PEQUENO.....	74
4.2	DADOS DE ENTRADA.....	75

4.3	CALIBRAÇÃO DOS PARÂMETROS K_d e K_2	76
4.4	COMPARAÇÃO ENTRE MODELO E DADOS OBSERVADOS.....	78
4.5	SIMULAÇÃO DOS PERFIS DE OD E DBO AO LONGO DO RIO.....	80
4.6	SIMULAÇÃO DE LANÇAMENTO PONTUAL NO RIO PEQUENO.....	82
4.7	ANÁLISE CRÍTICA DOS RESULTADOS.....	84
5	CONCLUSÃO.....	86
	REFERÊNCIAS.....	87
	ANEXO 1.....	90
	ANEXO 2.....	91

1 INTRODUÇÃO

A qualidade da água é uma característica crucial para a sustentabilidade ambiental e saúde pública, a qual desempenha um papel fundamental tanto na manutenção do equilíbrio dos ecossistemas aquáticos, bem como no fornecimento seguro de água potável (HASSAN, 2011). No contexto da Região Metropolitana de Curitiba (RMC), o Rio Pequeno, localizado em São José dos Pinhais, assoma como um recurso hídrico de significativa importância, com influência direta na qualidade da água disponível para parte da população da RMC (SANEPAR, 2013).

A bacia hidrográfica do Rio Pequeno possui uma área de drenagem de aproximadamente 133 km², cujo rio é afluente da margem esquerda da bacia do Altíssimo Iguaçu, que é responsável por parte do abastecimento público de água tratada de Curitiba e região.

A definição normativa de “boa qualidade da água” tem seu fundamento na Constituição Federal de 1988, que considera a água um recurso natural limitado, de domínio público e dotado de valor econômico. Esses princípios são reforçados pela Política Nacional de Recursos Hídricos, viabilizada pela Lei Federal nº 9.433/1997, que estabelece a gestão descentralizada dos recursos hídricos com a participação do Poder Público, dos usuários e das comunidades, bem como o uso múltiplo das águas. Complementarmente, as resoluções CONAMA nº 357/2005 e CONAMA nº 430/2011 definem padrões de qualidade dos corpos d’água e estabelecem as condições de lançamento de efluentes. Apesar destas normativas, a elevação constante na demanda por água, associada aos usos múltiplos (indústria, agricultura e consumo humano), pode provocar crises de escassez e gerar conflitos em bacias hidrográficas.

Para uma gestão eficaz dos corpos d’água é necessário entender quais são os fenômenos que neles existem, como por exemplo a variação da vazão, alteração de percurso, acúmulo de sedimentos, decomposição de matéria orgânica dissolvida, eutrofização, entre outros. A compreensão desses fenômenos é de suma importância, visto que servem de base para apoiar a gestão e o controle dos recursos hídricos.

Atualmente, diversos modelos matemáticos fundamentam-se em fenômenos hidrológicos e hidrodinâmicos para simular e antecipar diferentes cenários relacionados aos recursos hídricos. Esses modelos, conforme sua finalidade, podem

abranjer desde cenários de disponibilidade hídrica até a projeção da qualidade da água. Em específico, os modelos matemáticos voltados à qualidade da água são úteis para compreender a realidade dos corpos d'água e apoiar a gestão dos usuários da bacia hidrográfica. Esses modelos variam desde abordagens mais simples, como o modelo de Streeter-Phelps, que se baseia na decomposição de matéria orgânica dissolvida, até modelos mais complexos, como o SWAT, que levam em consideração a ocupação do solo nas bacias hidrográficas. Cada um desses modelos oferece uma perspectiva única, contribuindo para uma gestão mais informada e sustentável dos recursos hídricos.

Um dos maiores usos dos modelos matemáticos hídricos é o estudo de capacidade de suporte de um recurso hídrico, que visa compreender a capacidade que um corpo d'água possui para sustentar as demandas ambientais e sociais sem comprometer sua integridade ecológica. No âmbito jurídico, a CONAMA nº 430/2011, no seu Art. 7º, decreta a possibilidade da apresentação de estudo de capacidade de suporte do corpo receptor de lançamento de efluentes para melhor avaliar a situação durante o processo de licenciamento ou renovação ambiental do empreendimento.

Essa abordagem está diretamente alinhada aos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável da ONU, em especial o ODS 6, que visa assegurar a disponibilidade e a gestão sustentável da água e do saneamento, e o ODS 15, que trata da proteção e uso sustentável dos ecossistemas terrestres e de água doce. Ao utilizar modelos matemáticos como ferramenta de apoio à gestão da qualidade da água, esta pesquisa contribui para o monitoramento de corpos hídricos e para a tomada de decisões que garantam a integridade ambiental e o uso racional dos recursos naturais.

Diante do exposto, essa dissertação visa proporcionar uma compreensão mais aprofundada sobre as potenciais aplicações dos modelos matemáticos na análise da qualidade da água do Rio Pequeno.

1.1 OBJETIVO GERAL

Obter e testar modelo matemático da qualidade da água do rio Pequeno em São José dos Pinhais-PR.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para atender o objetivo acima, traça-se como objetivos intermediários:

- Aplicar o modelo de Streeter-Phelps com abordagem bayesiana para simulação da qualidade d'água do rio Pequeno;
- Calibrar o modelo matemático para a simulação da qualidade d'água;
- Comparar cenários simulados e limites legais.

2 REVISÃO DA LITERATURA

O estudo se baseia em quatro pilares de conhecimento que serão aprofundados neste capítulo:

- Qualidade da água;
- Base legal;
- Modelos matemáticos para simulação da qualidade da água;
- Métodos estatísticos.

2.1 QUALIDADE DA ÁGUA

A qualidade da água de rios e lagos resulta de dois componentes principais: os fenômenos naturais e a atividade humana. De maneira geral, como afirma Von Sperling (2014) “a qualidade de uma determinada água é função das condições naturais e do uso e da ocupação do solo na bacia hidrográfica”.

As condições naturais se referem à variação da qualidade da água por fatores como a infiltração da água no solo, escoamento superficial e a cobertura e composição do solo. O resultado da combinação desses fatores implica em diferentes níveis de qualidade da água para diferentes regiões mesmo sem a intervenção humana (VON SPERLING, 2014).

A interferência humana é associada à poluição causada por suas atividades, que pode ocorrer de forma concentrada (como pelo despejo de efluentes domésticos e industriais) ou de forma dispersa (como pela aplicação de agrotóxicos no solo que são carregados para os corpos de água). Dessa forma, a atuação humana influencia diretamente a qualidade da água (VON SPERLING, 2014).

As condições naturais e humanas ao entorno do corpo hídrico são grandes responsáveis pela qualidade da água, uma vez que suas influências alteram o equilíbrio de nutrientes e condições da água, ocasionando impacto em todo o ecossistema presente. Para se discutir a qualidade da água, em termos objetivos, pode-se retratá-la a partir de suas características físicas, químicas e biológicas.

Nos estudos acerca da qualidade da água encontram-se muitos parâmetros que traduzem suas características como temperatura, cor, gosto, odor, sólidos totais, condutividade elétrica, pH, acidez, alcalinidade, concentração de cloro, concentração de sulfatos, dureza, entre outros (OMER, 2019).

Como forma de padronizar e elencar as principais características da água, em 1970, criou-se a metodologia do Índice de Qualidade da Água (IQA). Este índice foi desenvolvido pela *National Sanitation Foundation* (Estados Unidos) através do consenso de diversos especialistas a respeito das características mais relevantes da água. Foram elencados 9 parâmetros principais para a água (ANA, 2025):

- Oxigênio dissolvido;
- Coliformes termotolerantes;
- Potencial hidrogeniônico – pH;
- Demanda Bioquímica de Oxigênio – DBO;
- Temperatura;
- Nitrogênio total;
- Fósforo total;
- Turbidez;
- Resíduo total.

A metodologia de cálculo do IQA ainda distribui pesos para os componentes e realiza algumas operações matemáticas para indicar um número de 0 a 100 que representa a qualidade do recurso hídrico em questão.

2.1.1 Oxigênio Dissolvido

O oxigênio dissolvido é considerado como um dos principais parâmetros na qualidade da água, uma vez que é essencial para a manutenção e respiração da vida aquática. De maneira geral, águas poluídas apresentam baixas concentrações de oxigênio dissolvido (colocando em risco o ecossistema aquático) e águas de boa qualidade apresentam concentrações elevadas de oxigênio dissolvido (ANA, 2025).

Analisando os fenômenos comumente relacionados à poluição de indústrias e esgotos sanitários, temos nas palavras de Von Sperling (2014, p. 295):

A introdução de matéria orgânica em um corpo d'água resulta, indiretamente, no consumo de oxigênio dissolvido.

O decréscimo da concentração de oxigênio dissolvido tem diversas implicações do ponto de vista ambiental, constituindo-se, como já dito, em um dos principais problemas de poluição das águas em nosso meio.

Um dos problemas do decréscimo da concentração de oxigênio dissolvido está ligado diretamente aos ecossistemas aquáticos, pois essa baixa concentração

limita a vida de muitas espécies que se encontram nesse habitat. Importante ressaltar que o oxigênio dissolvido é levemente solúvel em água e varia a partir da pressão e temperatura do ambiente. Por exemplo, a concentração de saturação do oxigênio a 1 atm e 20 °C é de aproximadamente 9 mg/L enquanto a 1 atm e 0 °C é de 14,6 mg/L (OMER, 2019).

A partir dos princípios da termodinâmica, Benson e Krause (1980) derivaram uma equação que correlaciona a concentração de saturação do oxigênio na água com a temperatura. Neste primeiro trabalho, os autores consideraram água pura e pressão de 1 atm. Como as equações teóricas são complexas para tal cálculo, eles realizaram uma regressão para os dados, como pode ser vista na equação (1):

$$ODs = \exp\left(-139,34411 + \frac{1,575701 \times 10^5}{Temp} - \frac{6,642308 \times 10^7}{Temp^2} + \frac{1,243800 \times 10^{10}}{Temp^3} - \frac{8,621949 \times 10^{11}}{Temp^4}\right) \quad (1)$$

em que ODs é a concentração de oxigênio dissolvido na saturação em mg/L e $Temp$ é a temperatura da água em Kelvin.

Mais tarde, Benson e Krause (1984) incluíram fatores de correção de sua equação. Esses fatores levam em conta salinidade e pressão. O fator de correção de pressão (F_p) se encontra na equação (2):

$$F_p = \frac{(P-u)(1-\theta_0 P)}{(1-u)(1-\theta_0)} \quad (2)$$

em que P é a pressão barométrica em atmosfera desejada, u é a pressão de vapor da água em atmosfera e θ_0 está relacionado com a equação do virial do oxigênio, como mostrado na equação (3):

$$\theta_0 = 0,000975 - 1,426 \times 10^{-5} temp + 6,436 \times 10^{-8} temp^2 \quad (3)$$

em que $temp$ é a temperatura da água em graus Celsius.

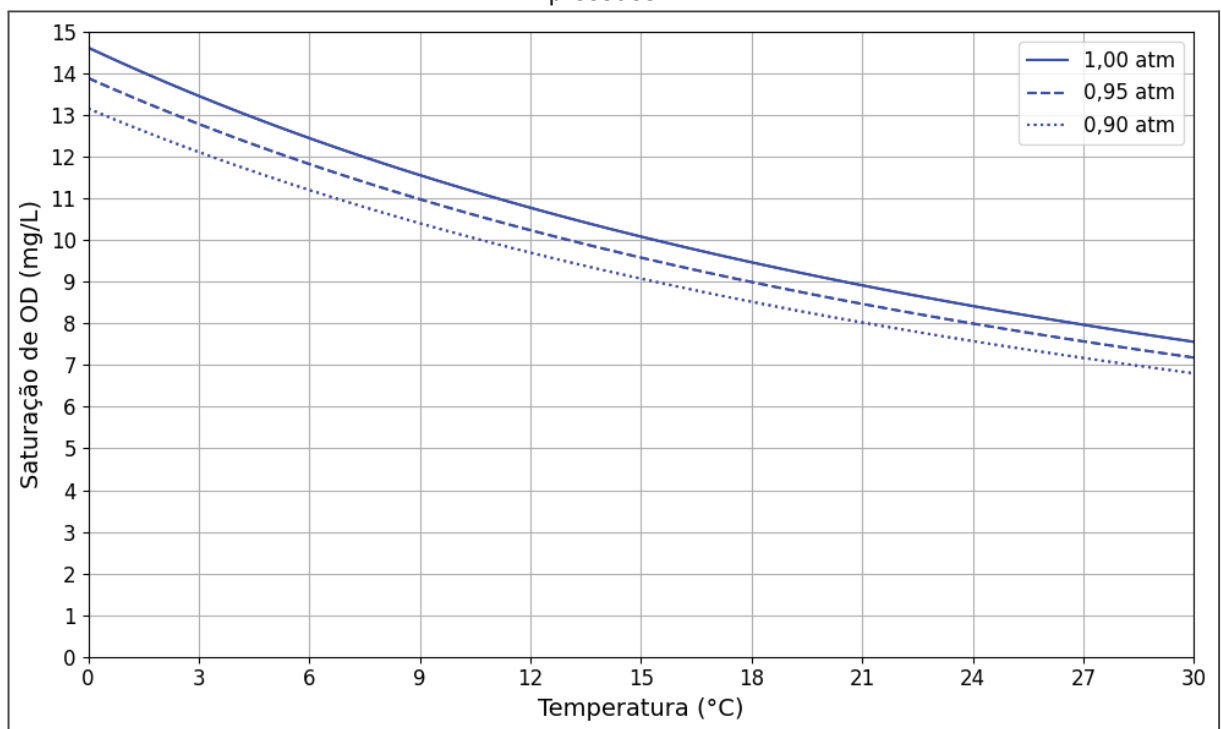
A equação de pressão de vapor da água em atmosferas é dada pela equação (4):

$$u = \exp\left(11,8571 - \frac{3840,70}{Temp} - \frac{216961}{Temp^2}\right) \quad (4)$$

em que $Temp$ é a temperatura da água em Kelvin.

A variação da concentração de oxigênio dissolvido na saturação na água pode ser melhor vista por meio da FIGURA 1 que mostra essa variável em 3 pressões diferentes.

FIGURA 1 - Oxigênio dissolvido na saturação na água em relação à temperatura em diferentes pressões.



Fonte: Autor (2025).

A FIGURA 1 deixa claro a relação inversa entre temperatura da água e concentração de oxigênio dissolvido na saturação, considerando diferentes pressões atmosféricas. Nota-se que, com o aumento da temperatura, a solubilidade do oxigênio diminui, o que pode diminuir a disponibilidade de oxigênio para os organismos aquáticos sobreviverem. A figura também destaca o papel da pressão: em regiões de menor pressão atmosférica, como em altitudes elevadas, a

capacidade da água de manter o oxigênio dissolvido é ainda menor. Esses aspectos reforçam a importância de considerar fatores ambientais locais na avaliação da qualidade da água e na aplicação de modelos de autodepuração.

2.1.2 Coliformes termotolerantes

Os coliformes termotolerantes são bactérias geralmente originárias da excreção de animais endotérmicos e são um dos principais indicadores de poluição das águas por esgoto doméstico. Sua presença nos corpos hídricos se dá, em grande parte, pelo lançamento direto de efluentes sanitários não tratados, bem como por processos de escoamento superficial em áreas urbanas e rurais. Elas não são patogênicas por si, mas a presença de grandes quantidades dessas bactérias indica a possibilidade da existência de patógenos na água (por exemplo, os vetores da disenteria, febre tifoide e cólera) (ANA, 2025).

2.1.3 Potencial Hidrogeniônico - pH

Por definição, pH é o logaritmo negativo da concentração de íons de hidrogênio na solução e indica se ela é ácida ou alcalina (HELMENSTINE, 2020). A equação (5) explicita seu cálculo:

$$pH = -\log_{10}[H^+] \quad (5)$$

em que pH é o potencial hidrogeniônico e $[H^+]$ é a molaridade de íons positivos de hidrogênio em mol/L.

A escala do pH baseia-se na constante de ionização da água pura e varia, em geral, de 0 a 14, sendo que valores abaixo de 7 indicam uma solução ácida, igual a 7 corresponde a uma solução neutra, e acima de 7 indicam uma solução básica (alcalina). Essa classificação é amplamente aceita e descrita por órgãos internacionais como a *United States Environmental Protection Agency* (EPA, 2021).

Para águas doces superficiais, os valores de pH geralmente oscilam entre 6,5 e 8,5, faixa considerada ideal para a manutenção dos processos biológicos e da

integridade dos ecossistemas aquáticos. Alterações fora desse intervalo podem prejudicar a solubilidade de nutrientes e metais, afetar diretamente a vida aquática e comprometer os usos múltiplos da água (EPA, 2021).

Além do próprio pH ser prejudicial para a vida aquática, alterações de pH podem solubilizar substâncias químicas tóxicas (como metais pesados) que afetam os organismos aquáticos (ANA, 2025).

2.1.4 Demanda Bioquímica de Oxigênio – DBO

As bactérias e alguns microrganismos aeróbios utilizam matéria orgânica e oxigênio como fonte de energia. Essa matéria orgânica é quebrada em moléculas mais simples como CO_2 e H_2O e a energia liberada é utilizada para crescimento e reprodução (OMER, 2019).

Quando esse processo ocorre na água é o oxigênio dissolvido que será consumido. Enquanto esses microrganismos metabolizam a matéria orgânica, a concentração de oxigênio dissolvido diminui e é exatamente essa necessidade de oxigênio dissolvido que caracteriza a demanda bioquímica de oxigênio – DBO (OMER, 2019).

Para determinar a DBO, o método de DBO_5^{20} é usualmente adotado como padrão, o qual consiste na medição do oxigênio dissolvido de amostras, diluídas ou não, no início e após um período de 5 dias a 20 °C. Os microrganismos presentes consomem a matéria orgânica utilizando o oxigênio dissolvido da amostra. Para evitar aumento do oxigênio dissolvido a partir da fotossíntese de microalgas, as amostras ficam no escuro durante o processo de análise (BERTOLAMI, 2024).

Levando em conta a metodologia de medição da DBO_5^{20} , obtém-se a seguinte equação (para um tempo igual a 5 dias):

$$\text{DBO}_5^{20} = \text{OD}_0 - \text{OD}_5 \quad (6)$$

Sendo OD_0 o oxigênio dissolvido inicial na amostra e OD_5 o oxigênio dissolvido na amostra após 5 dias. Para evitar problemas biológicos e

físico-químicos, as aferições podem ser feitas diluindo-se as amostras (BERTOLAMI, 2017).

2.1.5 Temperatura

A temperatura influencia vários parâmetros físico-químicos da água como viscosidade, solubilidade e reações químicas. Processos como a sedimentação e o consumo de oxigênio por microrganismos também são dependentes da temperatura (OMER, 2019). Os corpos d'água sofrem variações de temperatura ao longo do dia e durante as diferentes estações do ano, no entanto o despejo de efluentes com altas temperaturas pode prejudicar o equilíbrio natural e inclusive afetar a vida aquática (ANA, 2025).

2.1.6 Nitrogênio total

O nitrogênio está presente em 4 formas nas águas e efluentes: nitrogênio orgânico, nitrogênio amoniacal, nitritos e nitratos. Águas poluídas por esgotos apresentam elevados índices de nitrogênio orgânico e amoniacal, que serão transformados em nitritos e nitratos por microrganismos. Os nitratos, por sua vez, são nutriente essencial para o crescimento de plantas e algas e, juntos com outros nutrientes tais como o fósforo, causam o crescimento excessivo de algas, resultando no processo de eutrofização dos corpos d'água, fenômeno que prejudica o abastecimento público e a preservação da vida aquática (ANA, 2025).

2.1.7 Fósforo total

Igualmente ao nitrogênio, o fósforo é essencial para plantas e algas e seu excesso na água pode gerar o processo de eutrofização do recurso hídrico. As principais fontes de fósforo nos corpos hídricos se deve ao lançamento de efluentes de indústrias de fertilizantes e alimentícia, despejo de esgotos domésticos e pelo escoamento superficial de áreas agrícolas e urbanas. (ANA, 2025).

2.1.8 Turbidez

A turbidez indica o grau de atenuação que um feixe de luz sofre ao atravessar a água. Esta atenuação é gerada pelos sólidos em suspensão (argila, detritos, silte, etc...) que absorvem e espalham a luz que atravessa a água. Suas principais fontes são a erosão do solo (principalmente devido à chuva) e atividades de mineração, lançamento de esgotos e de efluentes industriais. Um elevado nível de turbidez da água afeta o equilíbrio dos organismos aquáticos, quanto o uso industrial e recreativo dos corpos hídricos (ANA, 2025).

2.1.9 Resíduo total

O resíduo total é o material que permanece após o processo de evaporação, secagem e calcinação de uma amostra de água. A alta quantidade de resíduos em um corpo hídrico pode causar seu assoreamento que por sua vez gera problemas, tanto para a navegação quanto aumenta o risco de enchentes (ANA, 2025).

2.2 BASE LEGAL

Um dos recursos naturais que mais chama a atenção da sociedade, principalmente pela divulgação de recentes abusos e acidentes, é a água. Para bem estabelecer as bases legais desse recurso, a Constituição Federal de 1988 delimita algumas de suas características essenciais. A água é um bem da União, quando em

“lagos, rios e quaisquer correntes de água em terrenos de seu domínio, ou que banhem mais de um Estado, sirvam de limites com outros países, ou se estendam a território estrangeiro ou dele provenham, bem como os terrenos marginais e as praias fluviais” (BRASIL, 1988, Art. 20).

De maneira complementar, a água inclui-se como bem dos Estados se “superficiais ou subterrâneas, fluentes, emergentes e em depósito, ressalvadas, neste caso, na forma da lei, as decorrentes de obras da União” (BRASIL, 1988, Art. 26).

A partir da Constituição Federal, e pela importância da água na manutenção da sociedade, surge no Brasil a Política Nacional de Recursos Hídricos, viabilizada pela Lei Federal nº 9.433/1997. Em seus fundamentos, ela estabelece uma gestão

descentralizada dos recursos hídricos com a participação do Poder Público, dos usuários e das comunidades, bem como o uso múltiplo das águas. Importante salientar que a Política Nacional de Recursos Hídricos fornece uma nova visão sobre o valor da água, como observa-se no início da Lei nº 9.433/1997:

A Política Nacional de Recursos Hídricos baseia-se nos seguintes fundamentos:

- I - a água é um bem de domínio público;
- II - a água é um recurso natural limitado, dotado de valor econômico;
- III - em situações de escassez, o uso prioritário dos recursos hídricos é o consumo humano e a dessedentação de animais;
- IV - a gestão dos recursos hídricos deve sempre proporcionar o uso múltiplo das águas;
- V - a bacia hidrográfica é a unidade territorial para implementação da Política Nacional de Recursos Hídricos e atuação do Sistema Nacional de Gerenciamento de Recursos Hídricos;
- VI - a gestão dos recursos hídricos deve ser descentralizada e contar com a participação do Poder Público, dos usuários e das comunidades (BRASIL, 1997, Art. 1º).

Essa nova visão da água: recurso natural limitado, de domínio público e dotado de valor econômico, surge com o objetivo de

- I - assegurar à atual e às futuras gerações a necessária disponibilidade de água, em padrões de qualidade adequados aos respectivos usos;
- [...]
- IV - incentivar e promover a captação, a preservação e o aproveitamento de águas pluviais (BRASIL, 1997, Art. 2º).

Por fim, para assegurar o disposto acima, a Lei firma seu compromisso instituindo os seguintes instrumentos da Política Nacional de Recursos Hídricos:

- I - os Planos de Recursos Hídricos;
- II - o enquadramento dos corpos de água em classes, segundo os usos preponderantes da água;
- III - a outorga dos direitos de uso de recursos hídricos;
- [...]
- VI - o Sistema de Informações sobre Recursos Hídricos (BRASIL, 1997, Art. 5º).

A Lei nº 9.433/1997, também, cria o Conselho Nacional de Recursos Hídricos - CNRH, órgão central do Sistema Nacional de Gerenciamento de Recursos Hídricos (SINGREH), responsável por deliberar e coordenar a implementação da Política Nacional de Recursos Hídricos. O CNRH possui caráter normativo e deliberativo e é formado por representantes do governo, da sociedade civil e dos usuários dos recursos hídricos.

Entre as principais atribuições do CNRH, o Art. 35º lista:

- I - promover a articulação do planejamento de recursos hídricos com os planejamentos nacional, regional, estaduais e dos setores usuários;

II - arbitrar, em última instância administrativa, os conflitos existentes entre Conselhos Estaduais de Recursos Hídricos;

[...]

V - analisar propostas de alteração da legislação pertinente a recursos hídricos e à Política Nacional de Recursos Hídricos;

VI - estabelecer diretrizes complementares para implementação da Política Nacional de Recursos Hídricos, aplicação de seus instrumentos e atuação do Sistema Nacional de Gerenciamento de Recursos Hídricos;

[...]

X - estabelecer critérios gerais para a outorga de direitos de uso de recursos hídricos e para a cobrança por seu uso (BRASIL, 1997, Art. 35°).

O CNRH desempenha um papel estratégico na formulação e implementação de políticas públicas, garantindo que a gestão da água seja integrada e abranja as dimensões econômica, social e ambiental. Complementando a estrutura do SINGREH, a Lei nº 9.433/1997 prevê a criação dos Comitês de Bacia Hidrográfica, órgãos colegiados que atuam no âmbito das bacias hidrográficas, promovendo a gestão descentralizada. Esses comitês são formados por representantes do Poder Público, dos usuários de recursos hídricos e de organizações civis com atuação comprovada na bacia.

Entre suas funções destacam-se:

I - promover o debate das questões relacionadas a recursos hídricos e articular a atuação das entidades intervenientes;

II - arbitrar, em primeira instância administrativa, os conflitos relacionados aos recursos hídricos;

III - aprovar o Plano de Recursos Hídricos da bacia;

IV - acompanhar a execução do Plano de Recursos Hídricos da bacia e sugerir as providências necessárias ao cumprimento de suas metas (BRASIL, 1997, Art. 38°).

Os Comitês de Bacia Hidrográfica são fundamentais para adaptar políticas públicas ao contexto local e para que os recursos hídricos sejam utilizados de forma sustentável. A estrutura do CNRH e dos Comitês de Bacia Hidrográfica formam a base da gestão descentralizada e participativa dos recursos hídricos no Brasil.

A Lei nº 9.433/1997 dá ao Brasil as definições legais necessárias para a gestão dos recursos hídricos, o que possibilita a regulamentação dos padrões de qualidade dos corpos d'água. A Resolução CONAMA nº 357/2005, marco legal do tema, dispõe sobre a classificação dos corpos de água e diretrizes ambientais para o seu enquadramento, bem como estabelece as condições e padrões de lançamento de efluentes. A respeito das possíveis classificações dos corpos de água, o QUADRO 1 apresenta os possíveis usos para cada classe.

QUADRO 1 – Possíveis usos de acordo com a classe estabelecida pela Resolução CONAMA n° 357/2005.

Classe	Usos
Classe 1	a) ao abastecimento para consumo humano, após tratamento simplificado; b) à proteção das comunidades aquáticas; c) à recreação de contato primário, tais como natação, esqui aquático e mergulho, conforme Resolução CONAMA n° 274, de 2000; d) à irrigação de hortaliças que são consumidas cruas e de frutas que se desenvolvam rentes ao solo e que sejam ingeridas cruas sem remoção de película; e e) à proteção das comunidades aquáticas em Terras Indígenas.
Classe 2	a) ao abastecimento para consumo humano, após tratamento convencional; b) à proteção das comunidades aquáticas; c) à recreação de contato primário, tais como natação, esqui aquático e mergulho, conforme Resolução CONAMA n° 274, de 2000; d) à irrigação de hortaliças, plantas frutíferas e de parques, jardins, campos de esporte e lazer, com os quais o público possa vir a ter contato direto; e e) à aqüicultura e à atividade de pesca.
Classe 3	a) ao abastecimento para consumo humano, após tratamento convencional ou avançado; b) à irrigação de culturas arbóreas, cerealíferas e forrageiras; c) à pesca amadora; d) à recreação de contato secundário; e e) à dessedentação de animais.
Classe 4	a) à navegação; e b) à harmonia paisagística.

FONTE: Adaptado de Brasil (1997).

Além destas definições, a Resolução CONAMA n° 357 de 2005 estabelece quais são as condições e parâmetros necessários para o corpo hídrico pertencer a cada classe. A classe 1 conta com mais de 90 parâmetros que precisam ser considerados para garantir o correto enquadramento de um corpo hídrico. De forma ilustrativa, os QUADROS 2, 3, 4 e 5 trazem os limites de alguns parâmetros presentes na resolução.

QUADRO 2 – Valores dos parâmetros estipulados pela Resolução CONAMA n° 357/2005 para Águas Doces de Classe 1.

Parâmetros	Valores Máximos Permitido
pH	Entre 6 e 9
OD	não inferior a 6 mg/L
DBO	3 mg/L
Nitrogênio Amoniacal	3.7mg/L N, para pH ≤ 7,5 2,0 mg/L N, para 7,5 < pH ≤ 8,0 1,0 mg/L N, para 8,0 < pH ≤ 8,5 0,5 mg/L N, para pH > 8.5
Coliformes Totais	200 coliformes termotolerantes por 100 mililitros em 80% ou mais, de pelo menos 6 amostras, coletadas durante o período de um ano

FONTE: Adaptado de Brasil (1997).

QUADRO 3 – Valores dos parâmetros estipulados pela Resolução CONAMA n° 357/2005 para Águas Doces de Classe 2.

Parâmetros	Valores Máximos Permitido
pH	Entre 6 e 9
OD	não inferior a 5 mg/L
DBO	5 mg/L
Nitrogênio Amoniacal	3,7mg/L N, para pH ≤ 7,5 2,0 mg/L N, para 7,5 < pH ≤ 8,0 1,0 mg/L N, para 8,0 < pH ≤ 8,5 0,5 mg/L N, para pH 2 > 8.5
Coliformes Totais	1.000 coliformes termotolerantes por 100 mililitros em 80% ou mais, de pelo menos 6 amostras, coletadas durante o período de um ano

FONTE: Adaptado de Brasil (1997).

QUADRO 4 – Valores dos parâmetros estipulados pela Resolução CONAMA n° 357/2005 para Águas Doces de Classe 3.

Parâmetros	Valores Máximos Permitido
pH	Entre 6 e 9
OD	Superior a 4 mg/L
DBO	10 mg/L
Nitrogênio Amoniacal	13,3 mg/L N, para pH ≤ 7,5 5,6 mg/L N, para 7,5 < pH ≤ 8,0 2,2 mg/L N, para 8,0 < pH ≤ 8,5 1,0 mg/L N, para pH 2 > 8.5
Coliformes Totais	2.500 coliformes termotolerantes por 100 mililitros em 80% ou mais, de pelo menos 6 amostras, coletadas durante o período de um ano

FONTE: Adaptado de Brasil (1997).

QUADRO 5 – Valores dos parâmetros estipulados pela Resolução CONAMA n° 357/2005 para Águas Doces de Classe 4.

Parâmetros	Valores Máximos Permitido
pH	Entre 6 e 9
OD	Superior a 2 mg/L

FONTE: Adaptado de Brasil (1997).

Os QUADROS 2, 3, 4 e 5 mostram parâmetros que são universais para a boa qualidade da água independente da classe (por exemplo, o pH deve se manter entre 6 e 9 para todas as classes) e parâmetros que possuem maior ou menor rigor dependendo da classe do corpo hídrico. O parâmetro DBO é um exemplo que se torna menos rigoroso conforme aumenta-se a classe, tendo um limite de 3 mg/L na classe 1 e não possuindo limite na classe 4.

O enquadramento de corpos hídricos em cada classe é uma tarefa realizada entre Poder Executivo e sociedade, resultando no Plano de Recursos Hídricos da bacia hidrológica em questão. O enquadramento e sua manutenção são essenciais para garantir a gestão pública e saúde da população. Um rio de Classe 1 não poderá

ter uma grande fonte poluidora, visto que o despejo desse efluente altera os parâmetros de qualidade da água, modificando a classe do rio e consequentemente seus usos.

De maneira complementar, a Resolução CONAMA n° 430/2011 permite, em caráter excepcional e temporário, o lançamento de efluentes em desacordo com as condições e padrões estabelecidos, desde que se leve em conta os seguintes requisitos:

- I – comprovação de relevante interesse público, devidamente motivado;
- II – atendimento ao enquadramento do corpo receptor e às metas intermediárias e finais, progressivas e obrigatórias;
- III – realização de estudo ambiental tecnicamente adequado, às expensas do empreendedor, responsável pelo lançamento;
- IV – estabelecimento de tratamento e exigências para este lançamento;
- V – fixação de prazo máximo para o lançamento, prorrogável a critério do órgão ambiental competente enquanto durar a situação que justificou a excepcionalidade aos limites estabelecidos nesta forma; e
- VI – estabelecimento de medidas que visem neutralizar os eventuais efeitos do lançamento excepcional. (BRASIL, 2011, Art. 6°).

Também, a referida resolução, no seu Art. 7º, § 1º, detalha que “o órgão ambiental competente poderá exigir, nos processos de licenciamento ou de sua renovação, a apresentação de estudo de capacidade de suporte do corpo receptor”. Tanto para o estudo ambiental tecnicamente adequado quanto para o estudo de capacidade de suporte do corpo receptor indicado no Art. 7º, a modelagem matemática da qualidade da água é de suma importância, pois permite o entendimento e a comunicação científica clara e objetiva entre o órgão competente e o usuário do corpo hídrico.

2.3 MODELAGEM DA QUALIDADE DA ÁGUA

Os modelos matemáticos para simulação da qualidade da água são um conjunto de equações que, ao serem resolvidas, fornecem a distribuição espacial e temporal dos componentes dos corpos hídricos, bem como permite avaliar quantitativamente parâmetros que influenciam na qualidade da água. Bons modelos matemáticos são aqueles que são representativos da realidade e depois das equações serem resolvidas, e o modelo calibrado, pode-se traçar cenários futuros e passados em função dos valores de entrada que sejam prescritos. Assim, zonas de mistura, dispersão de poluentes e capacidade de suporte do corpo hídrico podem ser calculadas e previstas em simulação.

Para estruturar o entendimento de modelos matemáticos, Garcia (2013) classifica-os de acordo com alguns critérios:

- Estático x Dinâmico: referente à variação temporal do modelo.
- Linear x Não-linear: referente às equações constitutivas do modelo (relação entre variáveis de entrada e saída).
- Paramétricos x Não-paramétricos: referente se o modelo utiliza em sua estrutura um conjunto de parâmetros.
- Determinístico x Estocástico: referente ao cálculo (pontual ou por probabilidade) das variáveis.

Os modelos de qualidade da água possuem um longo período de evolução, começando em 1925 com o clássico estudo de Streeter e Phelps de controle de poluição do rio Ohio, até modelos de acoplamento utilizando redes neurais. O progresso dos modelos abrange a análise uni e multifatorial da qualidade da água, modelos estáticos e dinâmicos, lineares e não-lineares, determinísticos e estocásticos, modelos de fonte única e fontes dispersas e simulações em 0, 1, 2 e 3 dimensões.

Até 2013, mais de 100 modelos de qualidade da água haviam sido desenvolvidos, cada um com seus próprios coeficientes, dimensões, cinética de reações e necessidade de dados de entrada. A literatura divide o desenvolvimento dos modelos de qualidade da água em 3 grandes momentos que serão detalhados a seguir (WANG, 2013).

2.3.1 O primeiro estágio (1925 – 1965)

Nesse estágio os modelos de qualidade da água focam principalmente nas interações entre os diferentes componentes da qualidade da água de rios afetados por fontes poluidoras como indústrias (WANG, 2013).

O modelo de Streeter e Phelps é um sistema estacionário unidimensional simples entre OD e DBO e atingiu grande sucesso na predição e resolução de problemas ligados à poluição da qualidade das águas de rios e estuários. A partir desse modelo, diversas modificações são feitas de maneira a melhorar o modelo. Thomas (1948, apud WANG, 2013), por exemplo, propôs que a DBO não era apenas reduzida a partir do consumo de oxigênio, mas também a partir da floculação e deposição no leito do corpo hídrico.

2.3.2 O estágio de desenvolvimento (1965 - 1995)

Diversos progressos em relação à modelagem da qualidade da água foram conquistados no período. O modelo unidimensional foi adaptado para duas dimensões e houve a possibilidade de simulação da qualidade da água em lagos e golfos. Modelos com sistemas não-lineares começaram a ser desenvolvidos entre 1970 e 1975, levando em conta os ciclos do nitrogênio e fósforo e a dinâmica orgânica de fitoplâncton e zooplâncton, focando principalmente na relação entre o crescimento biológico e a disponibilidade de luz solar, temperatura e nutrientes na água. A resolução desses modelos toma em conta os métodos de diferença finita e elemento finito por causa de suas não-linearidades (WANG, 2013).

Após 1975, o número de variáveis nos modelos aumentou significativamente e surgem modelos com três dimensões que levam em conta o modo hidrodinâmico e a dinâmica de sedimentos dos corpos hídricos. Outro grande desenvolvimento foi a utilização de modelos de bacias hidrográficas juntamente com os modelos de qualidade da água para considerar fontes dispersas de poluição. Nesse contexto diversos modelos surgem como os modelos QUAL, modelo MIKE11 e modelos WASP (WANG, 2013).

2.3.3 O estágio de aprofundamento (após 1995)

Com o avanço das políticas ambientais, as fontes difusas de poluição reduzem consideravelmente. Porém, começou a se entender que parte considerável dos compostos orgânicos, metais pesados e compostos de nitrogênio encontrados nos corpos hídricos advinha da deposição atmosférica. Apesar de diversos modelos já preverem essa deposição atmosférica diretamente nos corpos hídricos, fenômenos como a deposição atmosférica em solo e consequente arraste desses poluentes para os corpos hídricos não era levado em conta. Nesse estágio, inicia-se a integração de modelos de qualidade da água com modelos de poluição do ar para avaliar a contribuição da posição atmosférica de poluentes (WANG, 2013).

Modelos como o EFDC, QUASAR, QUAL 2K, SWAT, MIKE21 e MIKE31 possuem a capacidade de simular complexas interrelações que afetam a qualidade da água. O modelo INCA, por exemplo, possui uma modelagem da qualidade da

água baseada nos efeitos atmosféricos, quantidade de nitrogênio no solo, formas de uso da terra na bacia hidrográfica e a própria hidrologia do local (WANG, 2013).

2.3.4 Contexto Geral

Portanto, fica clara a enorme diversidade de modelos matemáticos para a simulação da qualidade da água variando em complexidade, abrangência e precisão. No QUADRO 6 encontram-se os principais modelos utilizados mundialmente.

QUADRO 6 - Principais modelos de qualidade da água e suas características.

Modelos	Versões do Modelo	Características
Streeter-Phelps	Modelo S-P Modelo DBO-OD de Thomas	Esse modelo é unidimensional, estático e se baseia no balanço do oxigênio e numa reação de primeira ordem de consumo de matéria orgânica.
QUAL	QUAL I QUAL II QUAL2E QUAL 2K	Os modelos QUAL são unidimensionais e adequados para rios com afluentes e para fontes difusas de poluição, incluem modelos estáticos e dinâmicos.
WASP	WASP 1 – 7	Os modelos WASP são adequados para simulação de rios, lagos, estuários, reservatórios a partir da modelagem em 1, 2 ou 3 dimensões.
QUASAR	Modelo QUASAR	O modelo QUASAR é adequado para modelagem do oxigênio dissolvido em grandes rios.
MIKE	MIKE11 MIKE21 MIKE31	Os modelos MIKE são adequados para simulação da qualidade das águas de rios e estuários em 1,2 ou 3 dimensões.
BASINS	BASINS 1 – 4	Os modelos BASINS são sistemas multiobjetivos de análise ambiental e adequados para análise da qualidade da água em bacias hidrográficas.
EFDC	Modelo EFDC	O modelo EFDC é adequado para simulação da qualidade das águas em rios, lagos, reservatórios e estuários em 1,2 ou 3 dimensões.

FONTE: Adaptado de WANG (2013).

2.3.5 Escolha do modelo matemático

Para a seleção apropriada de um modelo matemático para simular a qualidade da água de um rio, vários aspectos devem ser considerados para assegurar uma representação precisa do sistema. Em primeiro lugar, é essencial avaliar a complexidade do sistema em estudo e a disponibilidade de dados. Modelos mais simples, como o modelo de Streeter-Phelps, podem ser adequados para situações em que a compreensão dos processos é mais direta e dados detalhados são limitados. Por outro lado, para ambientes mais complexos e dados extensos, modelos mais avançados, como os modelos EFDC, que consideram fatores como a ocupação do solo, podem oferecer representações mais precisas.

A escolha do modelo também deve levar em conta os objetivos específicos da simulação, seja para prever cenários futuros, avaliar a eficácia de intervenções ou entender os impactos de diferentes fontes de poluição. Além disso, a capacidade computacional disponível e a facilidade de interpretação dos resultados também desempenham um papel importante na escolha do modelo mais adequado para simulações de qualidade da água em rios.

Nesse sentido, avaliando a disponibilidade dos dados existentes e a complexidade e escopo que se pretende alcançar, o modelo de Streeter-Phelps é escolhido como modelo matemático para a simulação da qualidade d'água do rio Pequeno.

2.3.6 Modelo de Streeter e Phelps

O modelo parte do princípio teórico que a condição de um rio poluído, a qualquer momento, é função do balanço entre o oxigênio disponível na água e a demanda de consumo de oxigênio a partir da matéria orgânica presente no rio. Essa demanda é o resultado de uma reação bioquímica e tende a ser satisfeita com o passar do tempo com o consumo do oxigênio dissolvido na água que, por sua vez, é reabastecido por um fluxo de oxigênio advindo da atmosfera. O entendimento desses dois conceitos são chave para o estudo da autodepuração de um rio (STREETER; PHELPS, 1925).

O modelo estabelece que a variação da DBO remanescente (dL) em um infinitésimo de tempo (dt) é negativamente igual a taxa de desoxigenação ($\frac{dD_1}{dt}$), como mostra a equação (7):

$$-\frac{dL}{dt} = \frac{dD_1}{dt} = K_1 L \quad (7)$$

em que L é a DBO remanescente e K_1 é o coeficiente de desoxigenação K_1 em dia^{-1} .

Ainda em seu estudo, Streeter e Phelps (1925) definem a equação governante da reaeração através da equação (8):

$$\frac{dD_2}{dt} = -K_2 D \quad (8)$$

sendo $\frac{dD_2}{dt}$ a taxa de reaeração, D é o déficit de oxigênio dissolvido (diferença entre a concentração de saturação e a concentração de oxigênio dissolvido no rio - em mg/L) e K_2 o coeficiente de reaeração (dia^{-1}).

De acordo com a base teórica (os dois fluxos governantes são o consumo de oxigênio a partir da oxidação da matéria orgânica e o influxo de oxigênio advindo da atmosfera), tem-se que a variação total do déficit de oxigênio dissolvido ($\frac{dD}{dt}$) é o balanço entre consumo e reaeração de oxigênio ou em forma de equação:

$$\frac{dD}{dt} = K_1 L - K_2 D \quad (9)$$

A equação (9) se caracteriza como uma equação diferencial linear de primeira ordem não-homogênea, que possui forma geral:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad (10)$$

em que dy , dx , y , P e Q são parâmetros genéricos. A resolução dessa equação conduz a equação geral da variação do déficit de oxigênio, mostrada na equação (11):

$$D_t = \frac{K_1 L_0}{K_2 - K_1} * (e^{-K_1 t} - e^{-K_2 t}) + D_0 e^{-K_2 t} \quad (11)$$

em que D_t é o déficit de oxigênio dissolvido em um instante t , L_0 é a DBO inicial e D_0 é o déficit de oxigênio dissolvido no tempo $t=0$.

Considerando que o déficit de oxigênio é a diferença entre a concentração de oxigênio na saturação e a concentração de oxigênio dissolvido num dado momento, reescreve-se a equação (11), como mostrado em Von Sperling (2014):

$$OD_t = OD_s - \frac{K_1 L_0}{K_2 - K_1} * (e^{-K_1 t} - e^{-K_2 t}) - (OD_s - OD_0) e^{-K_2 t} \quad (12)$$

em que:

OD_t – concentração de oxigênio dissolvido no instante t (mg/L)

OD_s – concentração de oxigênio dissolvido na saturação (mg/L)

OD_0 – concentração de oxigênio dissolvido inicial (mg/L)

t – tempo (dia)

A equação (12) é a forma usual que a equação de Streeter-Phelps é apresentada.

2.3.6.1 Coeficiente de desoxigenação – K_1 e coeficiente de remoção de DBO efetiva no rio – K_d

O coeficiente K_1 , geralmente, é obtido em condições de laboratório e depende das características da matéria orgânica, temperatura e presença de substâncias inibidoras. Quanto maior o valor de K_1 , mais rápida será a decomposição da matéria orgânica na amostra de interesse (VON SPERLING, 2014).

Porém, ao comparar o coeficiente de desoxigenação obtido através de

exames em laboratório com o valor observado no curso d'água, tem-se, na maioria das vezes, valores diferentes. Isso se deve ao fato de que no curso d'água, outros processos de decomposição da matéria orgânica entram em ação, como a remoção de DBO pelo lodo de fundo. Assim, o coeficiente de remoção de DBO efetiva no rio – K_d incorpora esses outros processos de oxidação da DBO no rio. De modo geral, o valor de K_d sempre será maior ou igual ao valor de K_1 (VON SPERLING, 2014).

Uma das principais razões do coeficiente de decomposição de matéria orgânica ser maior em rios do que nos testes de laboratório se deve ao fato de que a biomassa (bactérias) que cresce aderida a um suporte é mais efetiva na decomposição da matéria orgânica do que a biomassa dispersa. Esse fenômeno ajuda a explicar, também, o fato de que rios rasos (menor volume de água por unidade de área) possuem um coeficiente de decomposição de matéria orgânica maior que rios mais profundos (maior volume de água por unidade de área) (VON SPERLING, 2014).

De maneira geral, o QUADRO 7 apresenta um resumo das faixas de valores dos coeficientes K_1 e K_d .

QUADRO 7 - Valores típicos do coeficiente K_1 e K_d em dia^{-1} (base e, 20°C)

Origem	K_1 (laboratório)	K_d (rio)	
		Rios rasos*	Rios profundos*
Curso d'água recebendo esgoto bruto concentrado	0,35 – 0,45	0,50 - 1,00	0,35 - 0,50
Curso d'água recebendo esgoto bruto de baixa concentração	0,30 – 0,40	0,40 - 0,80	0,30 - 0,45
Curso d'água recebendo efluente primário	0,30 – 0,40	0,40 - 0,80	0,30 - 0,45
Curso d'água recebendo efluente secundário	0,12 – 0,24	0,12 - 0,24	0,12 - 0,24
Curso d'água com águas limpas	0,08 – 0,20	0,08 - 0,20	0,08 - 0,20

*Rios rasos: profundidade inferior a 1,5m e rios profundos: profundidade inferior a 1,5m.

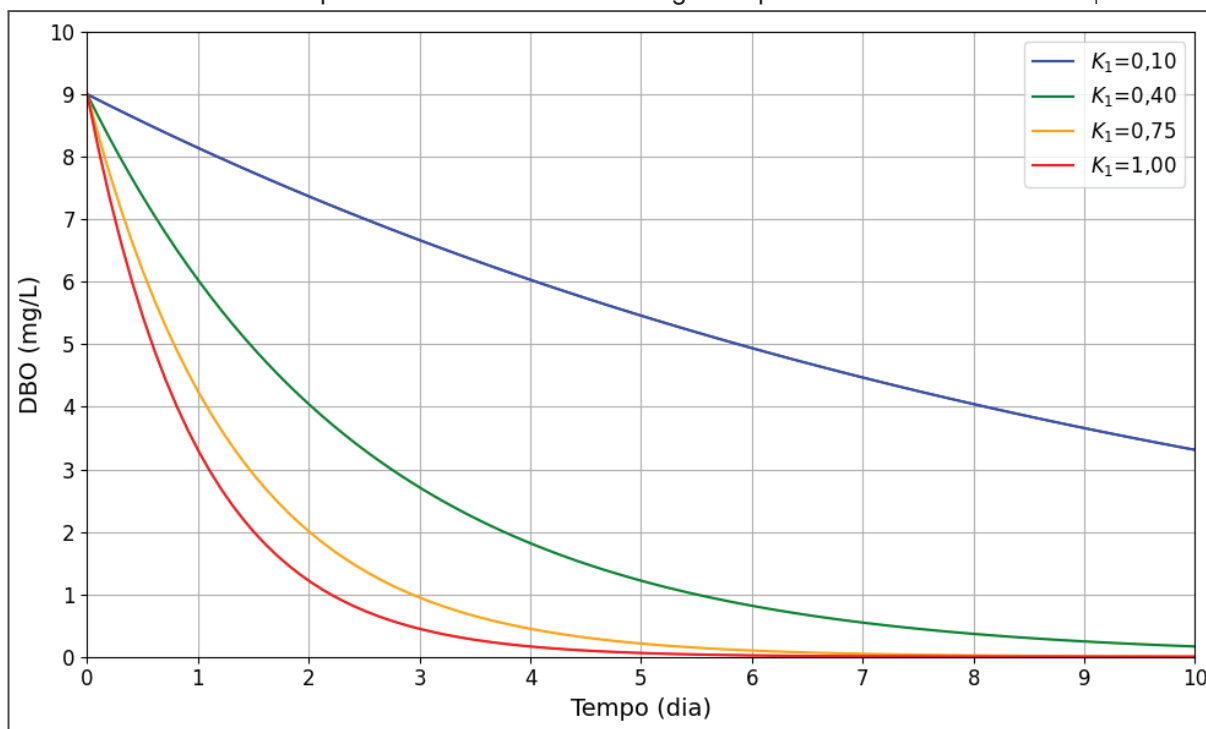
Fonte: adaptado de VON SPERLING (2014).

Para ilustrar o efeito dos diferentes valores do coeficiente de decomposição de matéria orgânica, a equação (7) é integrada entre os limites $L=L_0$ e $L=L_t$ e $t=0$ e $t=t$, resultando na equação (13):

$$L = L_0 e^{-K_1 t} \quad (13)$$

Ao plotar a equação (13), para diferentes valores de coeficiente de decomposição de matéria orgânica, gera-se a FIGURA 2.

FIGURA 2 - Exemplo de consumo de matéria orgânica para diferentes valores de K_1 .



Fonte: Autor (2025).

A FIGURA 2 mostra a evolução da DBO em relação ao tempo para diferentes valores de K_1 , sendo que valores menores de K_1 indicam um consumo mais lento de matéria orgânica, o que é evidenciado por uma menor variação de DBO ao longo do tempo quando comparado com K_1 maiores, em que a DBO chega próximo a zero mais rapidamente (consumo de matéria orgânica mais rápido). De forma análoga, a mesma representação e lógica se aplica para o parâmetro K_d .

2.3.6.2 Coeficiente de reaeração - K_2

Quando um gás está em contato com um líquido, iniciam-se os fenômenos de transferência de massa da fase líquida para gasosa e vice-versa até atingir-se o equilíbrio, ou seja, os fluxos nas duas direções são de mesma magnitude, entrando no que se chama de equilíbrio. A concentração do gás na fase líquida no equilíbrio é chamada de concentração de saturação (VON SPERLING, 2014).

Se, por alguma razão, a concentração do gás no líquido diminua, um maior fluxo de transferência de massa se dará da fase gasosa para a fase líquida e esse é o princípio que rege o processo de reaeração atmosférica nos corpos hídricos (VON SPERLING, 2014). A determinação experimental de K_2 é complexa e por isso, usualmente, utilizam-se métodos aproximados para cálculo desse coeficiente, como as funções apresentadas no QUADRO 8.

QUADRO 8 - Coeficiente K_2 (dia^{-1}) segundo dados hidráulicos do curso d'água (base e, 20°C)

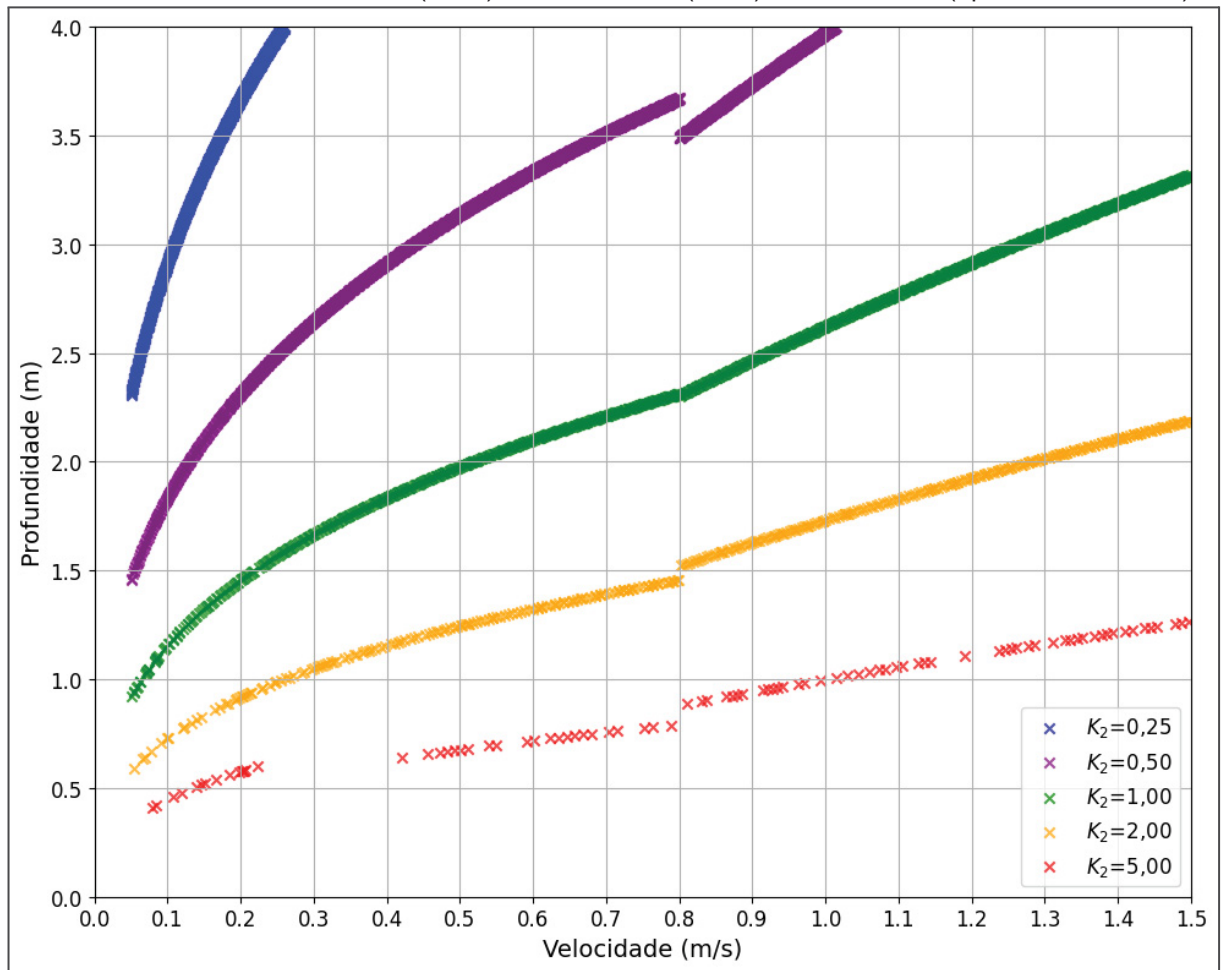
Pesquisador	Fórmula*	Faixa de aplicação aproximada
O'Connor e Dobbins (1958)	$3,93v^{0,5}H^{-1,5}$	$0,6\text{m} \leq H < 4,0\text{m}$ $0,05\text{m/s} \leq v < 0,8\text{m/s}$
Churchill et al. (1962)	$5,0v^{0,97}H^{-1,67}$	$0,6\text{m} \leq H < 4,0\text{m}$ $0,8\text{m/s} \leq v < 1,5\text{m/s}$
Owens et al. (apud Branco, 1978)	$5,3v^{0,67}H^{-1,85}$	$0,1\text{m} \leq H < 0,6\text{m}$ $0,05\text{m/s} \leq v < 1,5\text{m/s}$

v=velocidade do curso d'água (m/s), H=altura da lâmina d'água (m)

Fonte: adaptado de VON SPERLING (apud Covar, apud EPA, 1985).

As fórmulas do QUADRO 8 correlacionam os dados hidráulicos de um corpo hídrico com o valor esperado de K_2 e sua exibição gráfica está representada na FIGURA 3. Observa-se uma “descontinuidade” dos pontos de K_2 , exatamente nos limites de aplicação das fórmulas. Por fim, o valor do coeficiente K_2 tem uma influência maior nos resultados do balanço de oxigênio dissolvido, ou seja, usualmente o modelo de Streeter-Phelps é mais sensível ao valor de K_2 do que de K_1/K_d (VON SPERLING, 2014).

FIGURA 3 - Coeficiente K_2 em função da profundidade e velocidade do corpo hídrico a partir das fórmulas de O'Connor e Dobbins (1958), Churchill et al. (1962) e Owens et al. (apud Branco, 1978)



Fonte: Autor (2025).

2.3.6.3 Correção dos coeficientes pela temperatura

A temperatura tem uma grande influência, tanto no metabolismo microbiano, quanto na velocidade dos processos de absorção do oxigênio na água. Assim, os próprios coeficientes de desoxigenação e reaeração variam conforme a temperatura. Von Sperling (2014) apresenta a equação (14) para realizar esse ajuste:

$$K_{temp} = K \alpha^{(temp-20)} \quad (14)$$

onde:

K_{temp} = Coeficiente K_1 , K_2 , ou K_d (dia^{-1}) ajustado pela temperatura

K = Coeficiente K_1 , K_2 , ou K_d (dia^{-1}) a 20°C

α = coeficiente de temperatura, 1,047 para K_1 e K_d 1,024 para K_2 (VON SPERLING apud EPA, 1987)

temp = temperatura do líquido em graus Celsius

2.3.6.4 Modelo de Streeter-Phelps modificado

Com base nos estudos de Von Sperling (2014), reescreve-se a equação de Streeter-Phelps para considerar o coeficiente K_d como o coeficiente de desoxigenação do corpo hídrico, como é apresentado na equação (15):

$$OD_t = OD_S - \frac{K_d L_0}{K_2 - K_d} * \left(e^{-K_d t} - e^{-K_2 t} \right) - \left(OD_S - OD_0 \right) e^{-K_2 t} \quad (15)$$

2.3.7 Considerações sobre a aplicação de modelos matemáticos

Para que a simulação matemática possa ser utilizada como instrumento de apoio à tomada de decisão em conformidade com a legislação, é fundamental realizar a calibração do modelo e uma análise de risco e sensibilidade dos resultados obtidos. A calibração tem como objetivo ajustar os parâmetros do modelo à realidade física, química e biológica dos recursos hídricos, permitindo assim a obtenção de resultados mais precisos e confiáveis para decisões embasadas (PAULA, 2011 *apud* BATISTA; CABRAL, 2017).

Entretanto, críticas ao uso desses modelos na avaliação da qualidade da água são frequentemente destacadas na literatura. Essas críticas surgem principalmente durante a validação do modelo, etapa que busca confirmar o ajuste dos parâmetros calibrados. A complexidade dos sistemas hídricos naturais, a variabilidade dos dados obtidos no processo de coleta e a precisão das estimativas são fatores que dificultam essa etapa. Além disso, os corpos d'água naturais estão em contínua transformação, o que exige ajustes periódicos na descrição, validação dos modelos e nos valores utilizados para atender os critérios metodológicos (RAMIN et al., 2012 *apud* BATISTA; CABRAL, 2017).

Com o intuito de quantificar o risco da modelagem matemática, uma abordagem a partir da estatística bayesiana será realizada. Como a acurácia de um modelo ambiental nunca será perfeita, a presente pesquisa visa mensurar o risco.

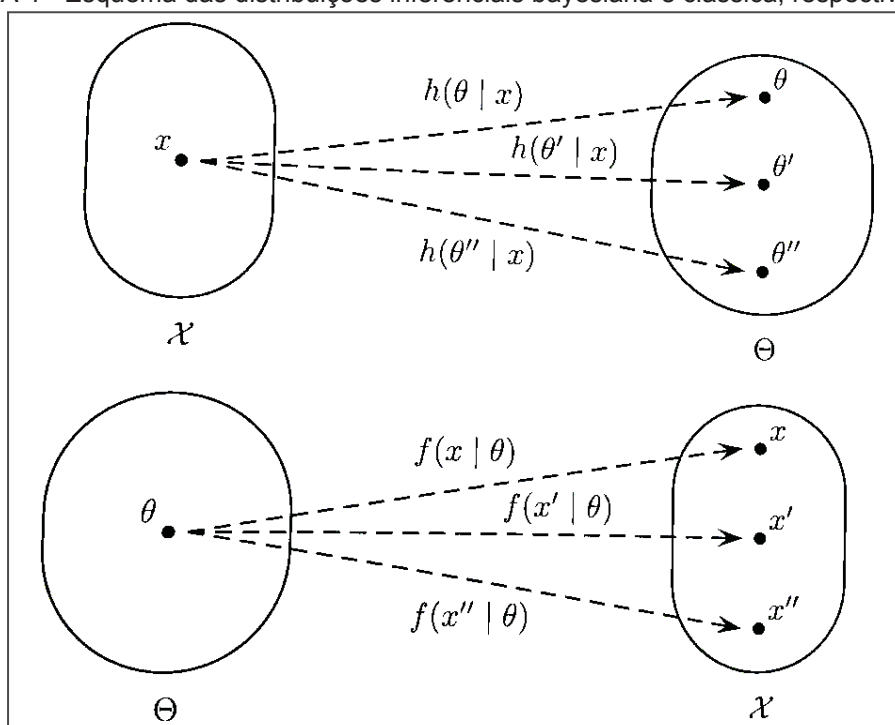
2.4 MÉTODOS ESTATÍSTICOS

A importância desse tópico pode ser ilustrada a partir do escrito por O'Hagan (1994, apud PAULINO *et al.*, 2018):

“O problema fundamental para qual o estudo da estatística é direcionado é o da inferência. Alguns dados são observados e nós queremos fazer afirmações, inferências, sobre uma ou mais características desconhecidas do sistema físico cujo gerou esses dados.”

Desde a coleta dos dados até seu tratamento e análise, a estatística é uma ferramenta poderosa que permite entender melhor o sistema que os criou. Na atualidade, duas abordagens se destacam: a estatística clássica e a estatística bayesiana. Tanto uma quanto a outra tem por objetivo inferir sobre a população (ou alguma de suas características) a partir de amostras coletadas. A FIGURA 4 representa melhor a diferença entre as duas abordagens.

FIGURA 4 - Esquema das distribuições inferenciais bayesiana e clássica, respectivamente.



Fonte: adaptado de PAULINO *et al.* (2018).

A figura é analisada por partes: na parte superior se apresenta o paradigma bayesiano: os valores de interesse θ ($\theta \in \text{conjunto } \Theta$) são condicionados pelo valor particular da amostra observada x ($x \in \text{espaço amostral } \Omega$) que é fixa. Ou seja, a partir da amostra observada, faz-se a inferência do parâmetro θ , uma variável aleatória e desconhecida (premissa importante da estatística bayesiana). Nesse sentido, os graus de credibilidade e as probabilidades calculadas pela inferência bayesiana respondem diretamente à pergunta sobre o parâmetro de interesse θ (PAULINO *et al.*, 2018).

Na parte inferior se apresenta o paradigma clássico: o espaço amostral Ω é gerado a partir do parâmetro θ ($\theta \in \text{conjunto } \Theta$) que é fixo e desconhecido. As amostras (que são as variáveis aleatórias) x , x' e x'' são as possíveis observações que se podem coletar. A partir desse entendimento, os intervalos de confiança e as probabilidades da inferência clássica dizem respeito aos dados e ao espaço amostral e não ao parâmetro θ diretamente (PAULINO *et al.*, 2018).

Além dessa diferença entre a estatística clássica e a estatística bayesiana, outra se faz importante. Na estatística clássica, a probabilidade tem uma interpretação frequencista, ou seja, considerando que um experimento aleatório seja realizado n vezes e n_A seja a quantidade de vezes que um evento A ocorre, a probabilidade de A – $P(A)$ – é dada pela fórmula (PAZ, 2018)

$$P(A) = \frac{n_A}{n} \quad (16)$$

ou seja, por definição, a probabilidade é entendida em situações em que se possa repetir o experimento aleatório indefinidas vezes nas mesmas condições e circunstâncias (PAULINO *et al.*, 2018).

Na estatística bayesiana, a probabilidade tem uma interpretação chamada de subjetiva, ou seja, a probabilidade mede o grau de credibilidade que alguém atribui a uma hipótese na posse de evidências. Diferentes pessoas podem possuir diferentes graus de credibilidade para uma mesma hipótese e a inferência bayesiana tende a corrigir essa credibilidade a partir da análise dos dados coletados. Uma vantagem dessa interpretação é que ela se aplica a situações não repetitivas como explicita PAULINO *et al.* (2018):

“[...] só em termos subjetivos pode avaliar-se a probabilidade de a inflação no próximo ano não exceder 3%, a probabilidade de a taxa de crescimento do PIB no próximo ano estar compreendida entre 2% e 3%, a probabilidade de a taxa interna de rentabilidade de um projeto exceder 10%, etc., etc.”

Por fim, a interpretação subjetiva ou personalista necessita de coerência interna para que seja possível utilizá-la. Essa coerência é obtida quando as seguintes condições são atendidas (EDWARDS *et al.*, 1963 apud PAULINO *et al.*, 2018):

- $0 \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $A \cap B = \emptyset$

Sendo Ω o espaço fundamental não-vazio que se encontra os eventos A e B .

Assim, mesmo partindo de interpretações subjetivas, a estatística bayesiana se ancora em princípios matemáticos rigorosos, assegurando a consistência dos resultados e tornando suas inferências tão objetivas quanto os métodos clássicos, ainda que em uma perspectiva diferente (PAULINO *et al.*, 2018).

A discussão sobre as vantagens e limitações entre os métodos clássicos e bayesianos até hoje é motivo de impasse na comunidade científica. No entanto, ao longo do desenvolvimento deste trabalho, a natureza flexível e interpretativa da inferência bayesiana se mostrou particularmente atrativa, permitindo integrar incertezas e conhecimento prévio de forma transparente e intuitiva. Assim, a adoção dessa abordagem reflete tanto uma decisão fundamentada no contexto do estudo quanto uma afinidade desenvolvida com o método durante o processo acadêmico.

2.4.1 Estatística Bayesiana

A origem da inferência bayesiana pode ser encontrada na obra do reverendo Thomas Bayes intitulada “An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances”, qual traz a equação conhecida como Teorema de Bayes (PAULINO *et al.*, 2018).

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} \quad (17)$$

em que A_i é a variável de interesse, $P(A_i)$ a probabilidade *a priori* de ocorrer A_i , B um outro acontecimento qualquer, $P(B)$ a probabilidade de ocorrer B , $P(A_i|B)$ a probabilidade *a posteriori* de ocorrer A_i dado B , $P(B|A_i)$ a probabilidade de ocorrer B dado A_i .

Em sua forma para densidade de probabilidades, o Teorema de Bayes toma a forma da equação (18).

$$h(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)h(\theta)}{\int_{\Theta} f(x|\theta)h(\theta)d\theta}, \theta \in \Theta \quad (18)$$

em que θ é o parâmetro de interesse com valor desconhecido, $h(\theta)$ a função de probabilidade *a priori* de θ , $h(\theta|x)$ a função de probabilidade *a posteriori* de θ dado x , x os dados coletados, $f(x|\theta)$ a função de densidade de probabilidade de x dado θ , Ω um espaço amostral não vazio e Θ é o conjunto chamado espaço-parâmetro. A partir do teorema de Bayes, dois conceitos chaves aparecem: a distribuição *a priori* - $h(\theta)$ e a distribuição *a posteriori* - $h(\theta|x)$.

A distribuição *a priori* se incorpora na análise exprimindo informações anteriores possuídas por alguém (dados da literatura, informações advindas de especialistas, dados de regras heurísticas) caso ela seja informativa. Caso contrário, chamamos essa distribuição de não-informativa, a qual traz pouca ou nenhuma informação anterior para análise. Vale destacar que a distribuição *a priori* é um dos pontos mais controversos da teoria bayesiana (PAULINO *et al.*, 2018).

A distribuição *a posteriori* é um elemento fundamental para toda a inferência bayesiana e quantifica as informações contidas nos dados obtidos bem como todo o conhecimento acumulado sobre a variável de interesse (a partir da distribuição *a priori*) (PAULINO *et al.*, 2018).

2.4.2 Intervalos de credibilidade

Os intervalos de credibilidade são um conceito crucial na estatística bayesiana para expressar a incerteza sobre os parâmetros de interesse. Diferentemente dos intervalos de confiança da estatística clássica, que têm uma

interpretação baseada em amostras repetidas, os intervalos de credibilidade fornecem uma probabilidade direta sobre o parâmetro desconhecido. Por exemplo, um intervalo de credibilidade de 95% indica que há uma probabilidade de 95% de que o verdadeiro valor do parâmetro esteja dentro do intervalo, considerando as informações disponíveis no modelo e nos dados. Essa interpretação intuitiva deriva do fato de que a estatística bayesiana trata os parâmetros como variáveis aleatórias e calcula probabilidades diretamente sobre eles, com base na distribuição a posteriori (PAULINO *et al.*, 2018).

Dado um parâmetro θ e a distribuição a posteriori $h(\theta|x)$, $R(x)$ é o intervalo de credibilidade γ para θ se

$$P[\theta \in R(x)|x] = \int_{R(x)} h(\theta|x) d\theta \geq \gamma \quad (19)$$

em que $R(x)$ é o intervalo de credibilidade e γ a probabilidade desse intervalo de credibilidade (PAULINO *et al.*, 2018).

2.4.3 Estrutura bayesiana para o modelo Streeter-Phelps

O trabalho de Liu *et al.* (2011) demonstra a utilização do modelo de Streeter-Phelps para o cálculo do volume de hipóxia da baía de Chesapeake a partir de uma análise bayesiana das incertezas. Para tal, ele considera as seguintes premissas:

- O modelo apresenta erro ε com distribuição normal $N(0, \sigma^2)$
- O parâmetro OD_t é normalmente distribuído - $N(\mu, \sigma^2)$

Tomando suas premissas como verdadeiras, pode-se reescrever o modelo de Streeter-Phelps para a equação (20).

$$OD_t = OD_S - \frac{K_d L_0}{K_2 - K_d} * \left(e^{-K_d t} - e^{-K_2 t} \right) - \left(OD_S - OD_0 \right) e^{-K_2 t} + \varepsilon \quad (20)$$

A equação (20) foi utilizada para modelar o rio Pequeno.

2.4.4 Distribuições estatísticas

As distribuições estatísticas constituem uma das bases da modelagem de fenômenos aleatórios e representam como os dados observados ou os parâmetros desconhecidos se comportam em um espaço amostral. No contexto da inferência bayesiana, as distribuições estatísticas possuem um papel central, pois definem tanto a distribuição a priori quanto a distribuição a posteriori dos parâmetros, sendo fundamentais para quantificar incertezas e integrar o conhecimento prévio aos dados observados (GELMAN et al., 2023).

Esta seção apresenta uma introdução às distribuições estatísticas, com enfoque especial nas distribuições uniforme, normal, gama e beta, todas amplamente utilizadas em estudos de modelagem probabilística modernos.

2.4.4.1 Conceitos Gerais Sobre Distribuições de Probabilidade

De acordo com GELMAN et al. (2023), as distribuições podem ser classificadas em:

- **Distribuições Discretas:** Representam variáveis aleatórias que assumem valores finitos ou contáveis, como o número de eventos em um intervalo fixo de tempo ou espaço.
- **Distribuições Contínuas:** Representam variáveis aleatórias que assumem valores em um intervalo contínuo, como medições de concentração, temperaturas e outras variáveis físicas.

No contexto da inferência bayesiana, as distribuições servem para construir as funções de densidade de probabilidade (f.d.p) ou funções de probabilidade (f.p), que são utilizadas para modelar o comportamento probabilístico de fenômenos ou parâmetros incertos.

2.4.4.2 Distribuição Uniforme

A distribuição uniforme é utilizada para representar variáveis aleatórias com igual probabilidade de ocorrência em um intervalo definido $[a,b]$. Sua função de densidade de probabilidade (f.d.p.) é:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b \quad (21)$$

- **Parâmetros:** a (limite inferior) e b (limite superior).
- **Aplicações:** É amplamente usada como distribuição a priori não-informativa na estatística bayesiana, quando não há informações prévias sobre os parâmetros.

2.4.4.3 Distribuição Normal (Gaussiana)

A distribuição normal é a mais conhecida das distribuições contínuas e descreve fenômenos naturais cuja variabilidade é centrada em torno de uma média. Sua f.d.p. é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty \quad (22)$$

- **Parâmetros:** μ - média e σ - desvio padrão.
- **Aplicações:** É amplamente utilizada em modelagem ambiental, como a concentração média de oxigênio dissolvido em rios, medições de pH e temperaturas ao longo do tempo. Em inferência bayesiana, a normal é frequentemente utilizada como distribuição a posteriori quando a distribuição dos dados é simétrica (GELMAN et al., 2023).

2.4.4.4 Distribuição Lognormal

A distribuição lognormal é uma distribuição contínua, cujo logaritmo natural segue uma distribuição normal. Sua f.d.p. é dada por:

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0 \quad (23)$$

- **Parâmetros:** μ - média e σ - desvio padrão.
- **Aplicações:** Representação de variáveis relacionadas a processos de crescimento, como tamanhos populacionais e rendimentos.

2.4.4.5 Distribuição Gama

A distribuição gama é uma distribuição contínua definida apenas para valores positivos. Ela é especialmente útil quando se deseja modelar incertezas em variáveis positivas com caudas assimétricas. Sua f.d.p. é dada por:

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, x > 0 \quad (24)$$

- **Parâmetros:** α - parâmetro de forma e β - parâmetro de taxa.
- **Aplicações:** Representação de séries de OD e DBO (XUE, 2011).

2.4.5 Testes estatísticos

O teste Qui-quadrado é um método estatístico usado para comparar distribuições observadas com distribuições esperadas, avaliando a consistência entre elas. Sua fórmula está na equação (25).

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (25)$$

em que O_i é o valor observado na categoria i e E_i é o valor esperado na categoria i .

O valor de χ^2 calculado é comparado à distribuição χ^2 com os devidos graus de liberdade e se toma a decisão:

- Se χ^2 calculado é maior ou igual ao χ^2 tabelado: Rejeita-se H_0 .
- Se χ^2 calculado é menor que o χ^2 tabelado: Não rejeita-se H_0 .

Sendo H_0 a hipótese nula de que há aderência à distribuição especificada (BARBETTA *et al.*, 2008).

2.4.6 Métodos de Monte Carlo

Para cenários multidimensionais cuja solução analítica é de difícil determinação ou até mesmo impossível, o experimento de Monte Carlo é uma alternativa apropriada de resolução. Esses métodos se baseiam em simulações estocásticas que reproduzem os valores da distribuição de probabilidade de uma variável e se baseiam em dois grandes conceitos: a Lei Forte dos Grandes Números e a geração de números (pseudo)aleatórios (PAULINO *et al.*, 2018).

A Lei Forte dos Grandes Números prevê como certo que a média de uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas converge para a média populacional μ , quando a quantidade de observações de uma amostra tende ao infinito (UFSC, 2021). Exposta matematicamente, a Lei Forte dos Grandes Números pode ser representada pela expressão seguinte:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right) = 1 \quad (26)$$

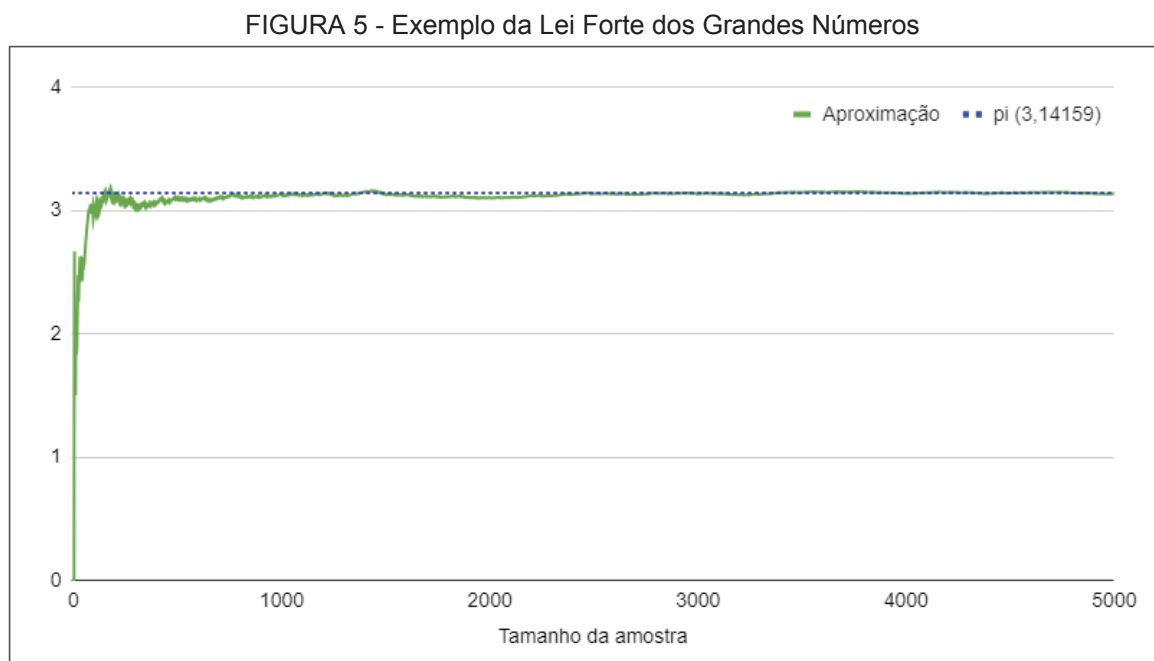
Sendo P a probabilidade do evento, S_n o somatório das variáveis aleatórias e n o número de observações de uma amostra.

Uma aplicação ilustrativa da Lei Forte dos Grandes Números é o cálculo do número π - π , por meio de simulações Monte Carlo. Gera-se uma amostra com diversas coordenadas bidimensionais aleatórias no intervalo $[0,1]$. A distância de cada ponto ao centro $(0,0)$ é calculada e classifica-se o ponto como dentro ou fora de um círculo unitário (raio=1). A razão entre o número de pontos dentro do círculo (N_A) e o número total de pontos gerados (N_T) é usada para estimar a área relativa do círculo. A partir desses dados, é possível deduzir o cálculo de π , mostrado abaixo:

$$\pi = 4 \cdot \frac{N_A}{N_T} \quad (27)$$

Na FIGURA 5, observa-se a convergência da estimativa para o valor real de π à medida que aumenta-se o tamanho da amostra.

A geração de números (pseudo)aleatórios é de extrema importância, pois os métodos de Monte Carlo se baseiam em repetições de amostragem aleatória: várias amostras são geradas de forma aleatória e se realiza a análise estatística a fim de se obter um entendimento melhor do sistema em estudo. Os métodos de Monte Carlo não precisam estritamente de números aleatórios para serem úteis, diversas técnicas determinísticas que geram números pseudoaleatórios (números que se comportam de forma aleatória, porém são gerados deterministicamente) já foram utilizadas com sucesso, valendo a pena citar o método do meio do quadrado utilizado por von Neumann nas simulações de Monte Carlo no projeto da construção da bomba nuclear (METROPOLIS, 1987).



Fonte: Autor (2025).

2.4.6.1 Algoritmo NUTS (No-U-Turn Sampler)

O algoritmo NUTS (No-U-Turn Sampler) é uma extensão do método de Monte Carlo Hamiltoniano (HMC), projetado para superar uma limitação importante do HMC: a necessidade de ajustar manualmente o número de passos e o tamanho do passo (step size). O NUTS resolve isso ao determinar adaptativamente o número de passos a serem dados durante cada iteração.

Desenvolvido por Matthew D. Hoffman e Andrew Gelman (2014), o NUTS é amplamente utilizado em inferência bayesiana para amostragem eficiente de distribuições a posteriori. Ele utiliza o gradiente da função de probabilidade para explorar eficientemente o espaço de parâmetros, permitindo amostragem de alta dimensionalidade e complexidade. Esse algoritmo é empregado em ferramentas de modelagem estatística.

Por fim, os métodos de Monte Carlo podem ser resumidos em três etapas principais:

- Geração de dados de entrada aleatórios ou pseudoaleatórios conforme a distribuição de interesse.
- Simulação do modelo com base nesses dados.
- Análise estatística dos resultados para inferir propriedades do sistema em estudo.

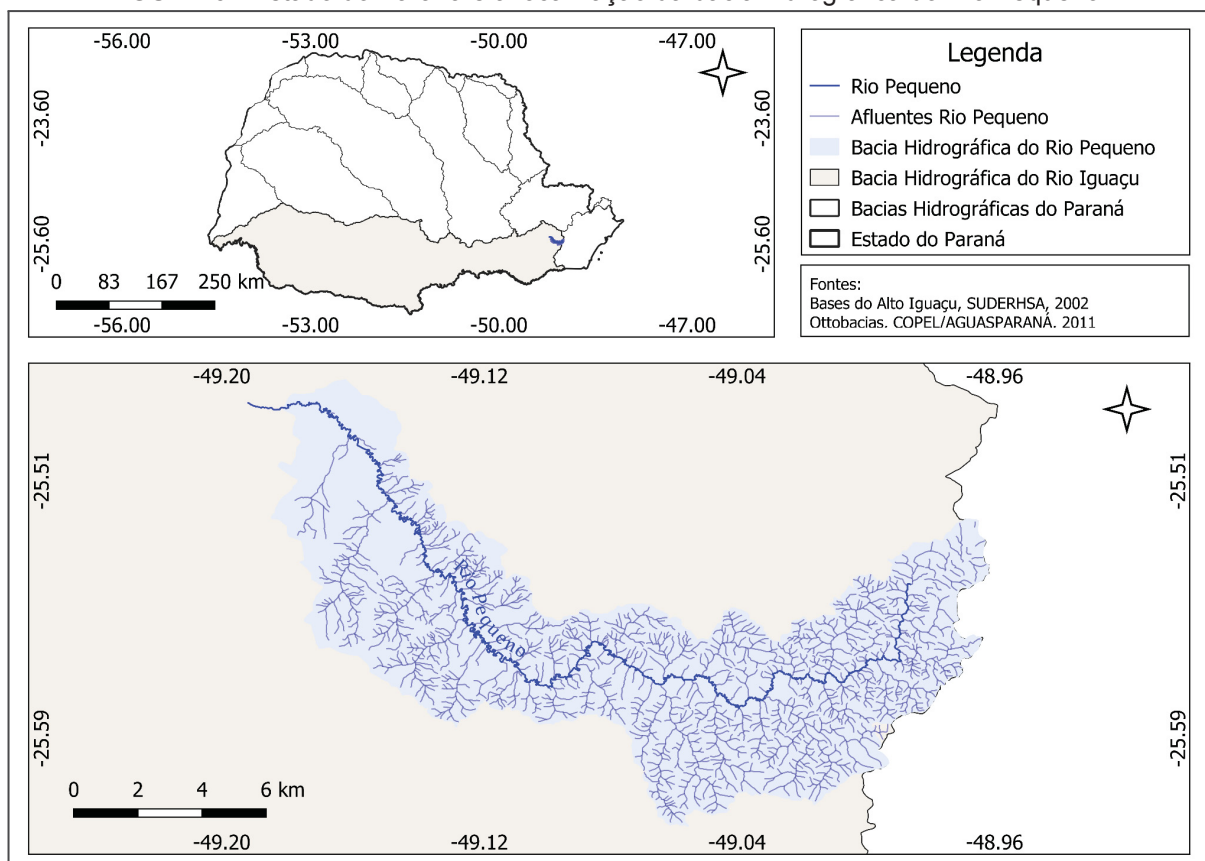
Esses métodos se destacam pela flexibilidade e aplicabilidade, tornando-se ferramentas indispensáveis em diversos campos científicos.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 ÁREA DE ESTUDO

A bacia hidrográfica do rio Pequeno faz parte da bacia hidrográfica do rio Iguaçu e está compreendida integralmente nos limites do município de São José dos Pinhais. A área de drenagem total é de 132,92 km², tendo como limites: ao norte a bacia do rio Itaqui, ao sul a bacia do rio Miringuava, a leste o relevo montanhoso da Serra do Mar e a oeste o rio Iguaçu. O mapa da bacia pode ser visto na FIGURA 6.

FIGURA 6 - Estado do Paraná e a localização da bacia hidrográfica do Rio Pequeno.



Fonte: Autor (2025).

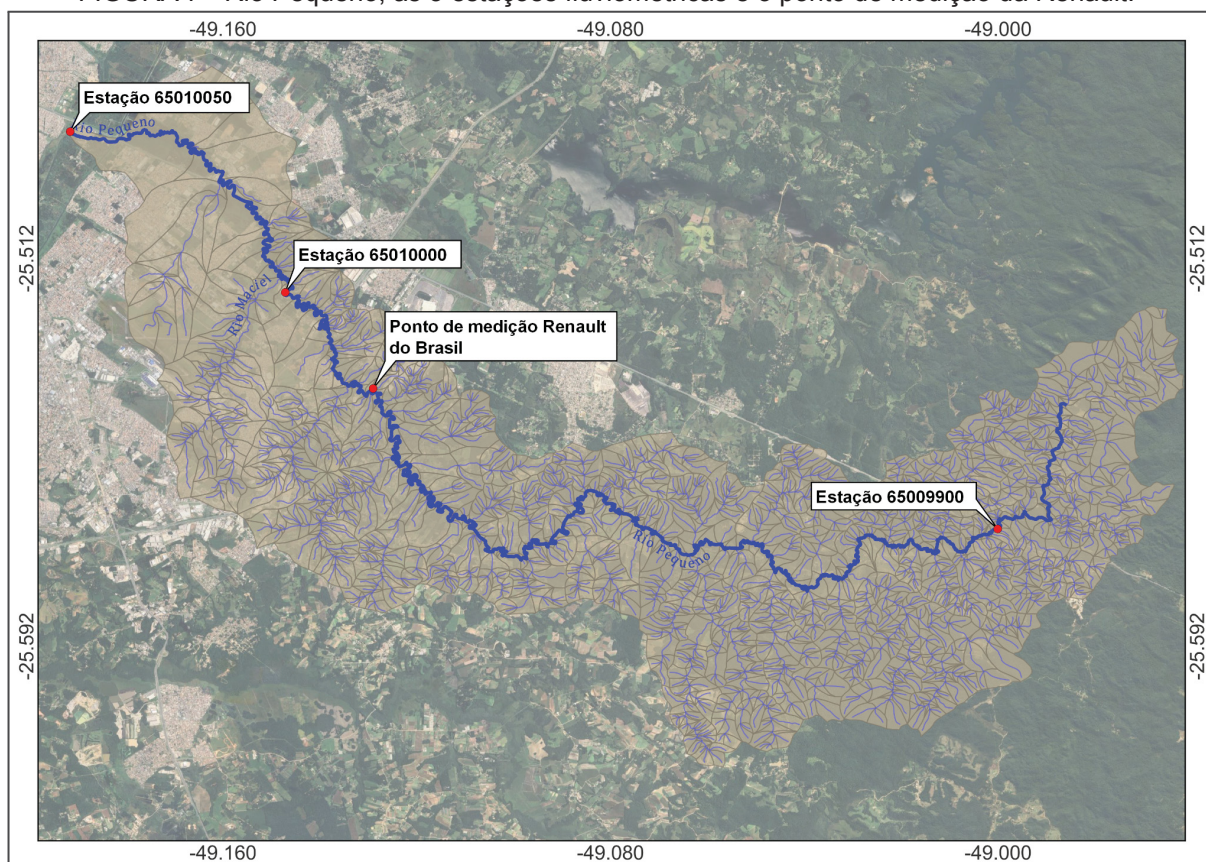
O Rio Pequeno possui 56,7 km de extensão, nascendo na Serra do Mar e com foz no rio Iguaçu. No rio, situam-se 3 estações fluviométricas, fonte dos dados dessa dissertação (as estações podem ser vistas com mais clareza na FIGURA 7):

- Estação 65009900 (BR-277) está localizada a 4,8 km da nascente do rio Pequeno e possui uma área a montante de 15,58 km².

- Estação 65010000 (Fazendinha) está localizada a 47,0 km da nascente e possui uma área a montante de 105,58 km².
- Estação 65010050 (Próximo a foz) está localizada na foz do rio, próximo do seu deságue no rio Iguaçu e possui uma área a montante de 132,92 km².

Adicionalmente, a empresa Renault do Brasil (Renault) disponibilizou as medições realizadas no rio Pequeno, o qual passa próximo do seu complexo industrial em São José dos Pinhais (disponibilizadas no ANEXO 1).

FIGURA 7 - Rio Pequeno, as 3 estações fluviométricas e o ponto de medição da Renault.



Fonte: Autor (2025).

Todas as 3 estações fazem a mensuração de vazão, temperatura, DBO e OD do rio, enquanto a Renault faz apenas medições de DBO e OD. A obtenção dos dados das estações foi realizada pelo Sistema Nacional de Informações sobre Recursos Hídricos (SNIRH), a partir da plataforma HIDROWEB¹.

O período histórico e a quantidade de medições são mostradas no QUADRO 9 para cada uma das estações. Como a estação Fazendinha é aquela que possui a

¹ Disponível em: <https://www.snirh.gov.br/hidroweb/serieshistoricas>.

maior série temporal e maior frequência de medições, suas medições servirão como base para caracterização de algumas características do Rio Pequeno.

Para a obtenção de dados espaciais e hidráulicos do rio Pequeno, os shapefiles disponibilizados pelo Instituto Água e Terra - IAT² foram utilizados como base de dados.

QUADRO 9 - Resumo dos dados das estações fluviométricas do rio Pequeno.

Tipo do dado	Est. 65009900 (BR-277)	Medições Renault	Est. 65010000 (Fazendinha)	Est. 65010050 (Próximo a foz)
Período histórico das medições de vazão	2010 - 2012	-	1955-2024	2010
Quantidade de medições de vazão	10	-	24.182	1
Período histórico das medições da qualidade d'água	1985-2011	2016 - 2020	1984-2023	1996-2011
Quantidade de medições da qualidade d'água	204	10	353	156

Fonte: Autor (2025).

3.1.1 Enquadramento

A partir da criação do Plano da Bacia do Alto Iguaçu, enquadra-se o rio Pequeno como Classe 2, o que possibilita seu uso para consumo humano (após tratamento convencional), irrigação de hortaliças, pesca, entre outros, e que limita a concentração de DBO no rio para um valor máximo de 5 mg/L e uma OD não inferior a 5 mg/L (PARANÁ, 2014).

3.1.2 Vazão e vazão específica

Um dado crucial para caracterizar recursos hídricos é a curva de permanência, que informa o percentual de tempo em que o rio está com uma determinada vazão. Por exemplo, se um rio apresenta uma vazão de 1,0 m³/s para um tempo de permanência de 90%, significa dizer que 90% do tempo, o rio está com uma vazão igual ou maior que 1,0 m³/s.

Para plotar a curva de permanência do rio Pequeno, utilizou-se todo o histórico de dados de vazão disponível da estação Fazendinha (24.182 pontos de

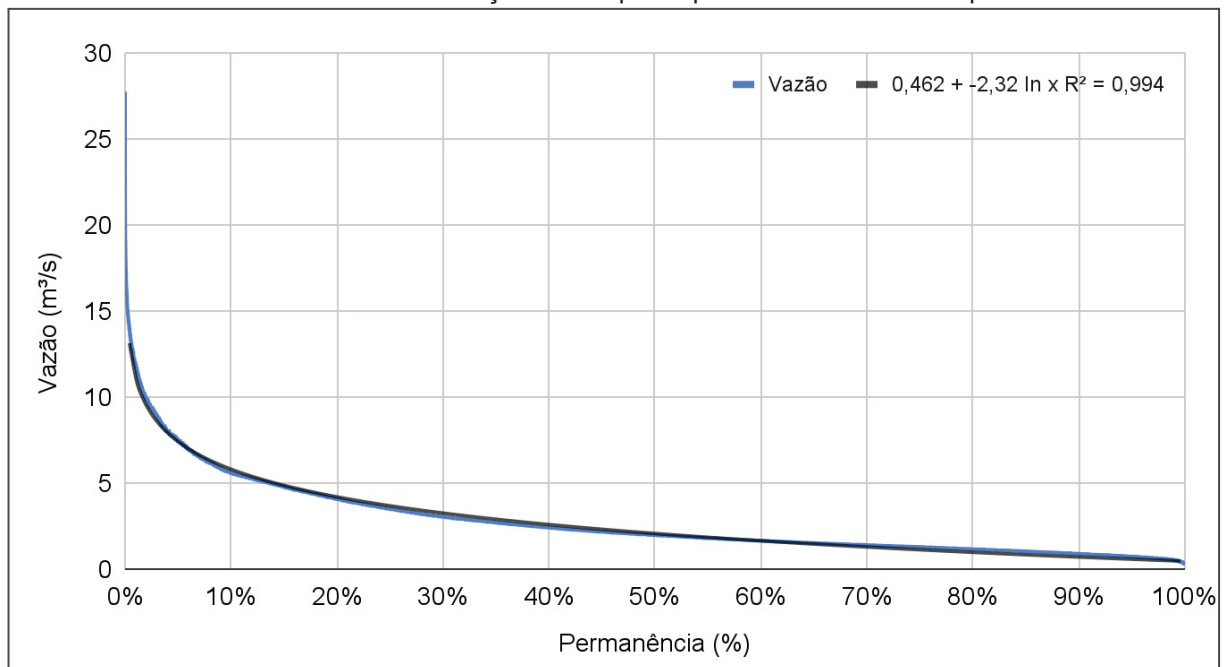
² Disponível em: <https://www.iat.pr.gov.br/Pagina/Mapas-e-Dados-Espaciais>

1955 a 2024) e como linha de tendência, utiliza-se uma equação logarítmica, sendo que a equação ajustada é a

$$Vazão = 0,462 - 2,32 \ln(Permanência) \quad (28)$$

possuindo um R^2 de 0,994, o que indica uma ótima representatividade dos dados. Tanto a curva de permanência quanto sua linha de tendência são mostradas na FIGURA 8.

FIGURA 8 - Vazão em relação ao tempo de permanência do rio Pequeno.



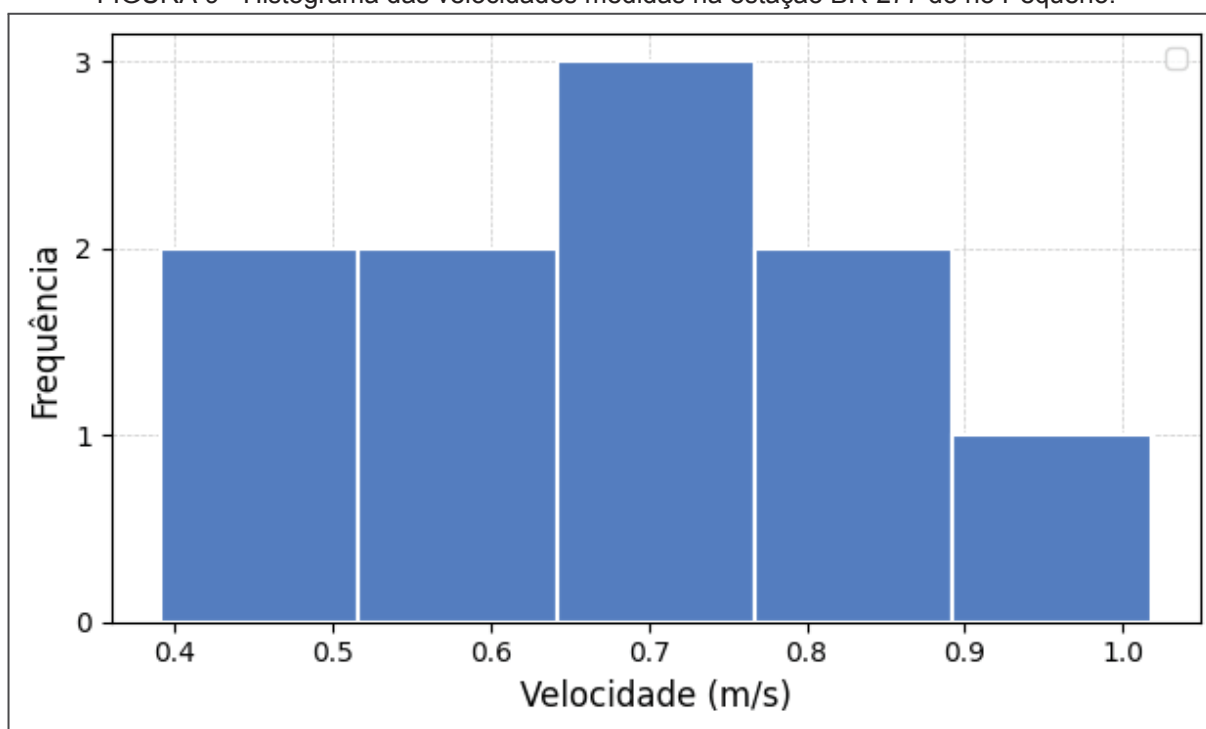
Fonte: Autor (2025).

3.1.3 Velocidade do Rio Pequeno

A velocidade é obtida através das medições de vazão e área molhada do corpo hídrico nas estações fluviométricas, nos parágrafos seguintes encontram-se mais detalhes dessa variável para as 3 estações fluviométricas do rio Pequeno.

A estação BR-277 conta com 10 medições de velocidade e vazão entre os anos de 2010 e 2012. As FIGURAS 9 e 10 representam, respectivamente, o histograma das velocidades registradas e a relação entre vazão e velocidade.

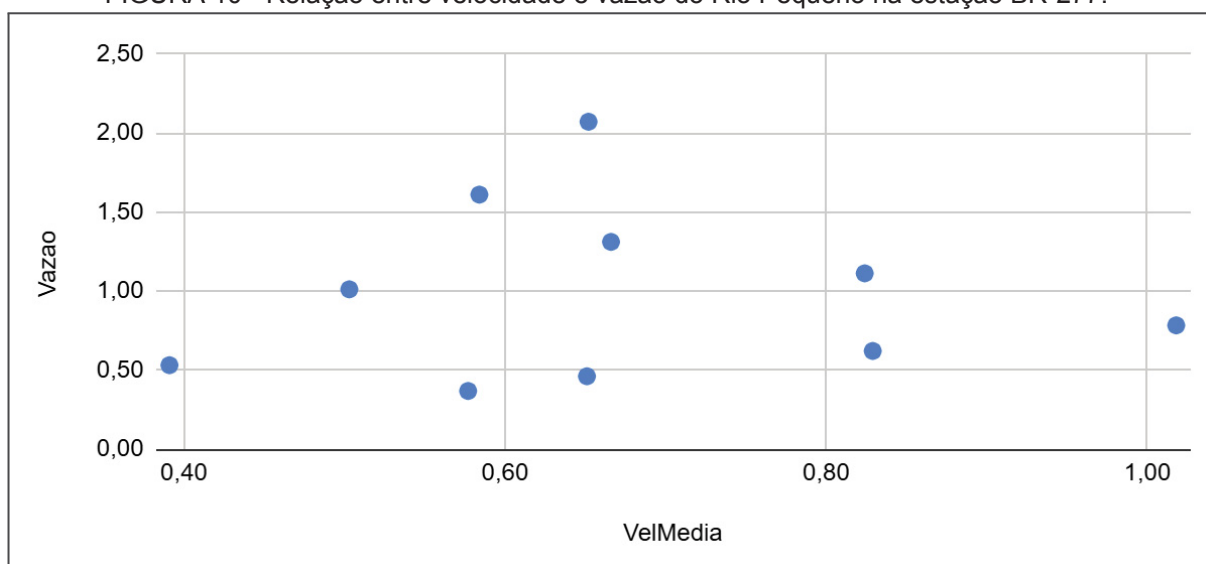
FIGURA 9 - Histograma das velocidades medidas na estação BR-277 do rio Pequeno.



Fonte: Autor (2025).

Pela histograma da FIGURA 9, nota-se uma frequência maior de velocidade ao entorno de 0,7 m/s enquanto uma frequência menor para valores acima de 0,9 m/s.

FIGURA 10 - Relação entre velocidade e vazão do Rio Pequeno na estação BR-277.



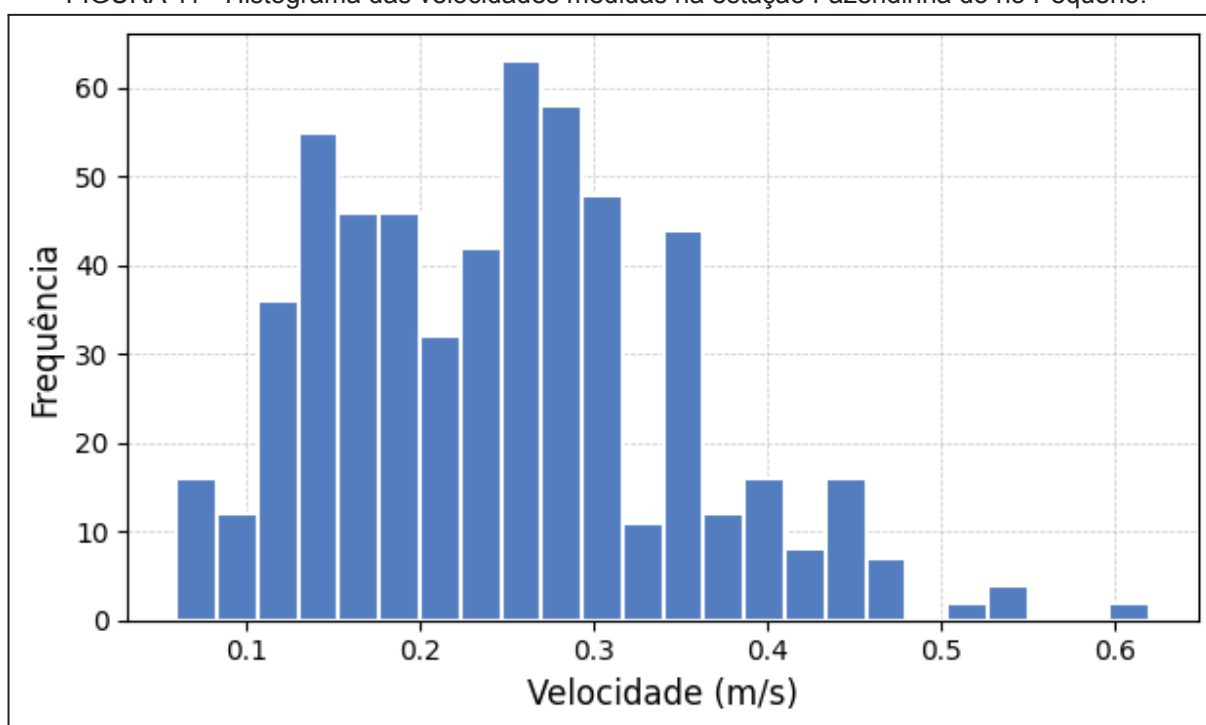
Fonte: Autor (2025).

O gráfico comparativo de vazão e velocidade da FIGURA 10 usualmente é utilizado para se chegar a uma regressão que representa a variação da velocidade

em função da vazão, visto que esses dois parâmetros são correlacionados. Porém, pela dispersão dos dados, as regressões das funções linear, exponencial, polinomial, logarítmica e série de potências foram testadas e nenhuma apresentou R^2 maior que 0,14, motivo pelo qual não se usará uma regressão para descrever o conjunto de dados.

A estação Fazendinha conta com 579 medições de velocidade e vazão entre os anos de 1955 e 2024. As FIGURAS 11 e 12 representam, respectivamente, o histograma das velocidades registradas e a relação entre vazão e velocidade.

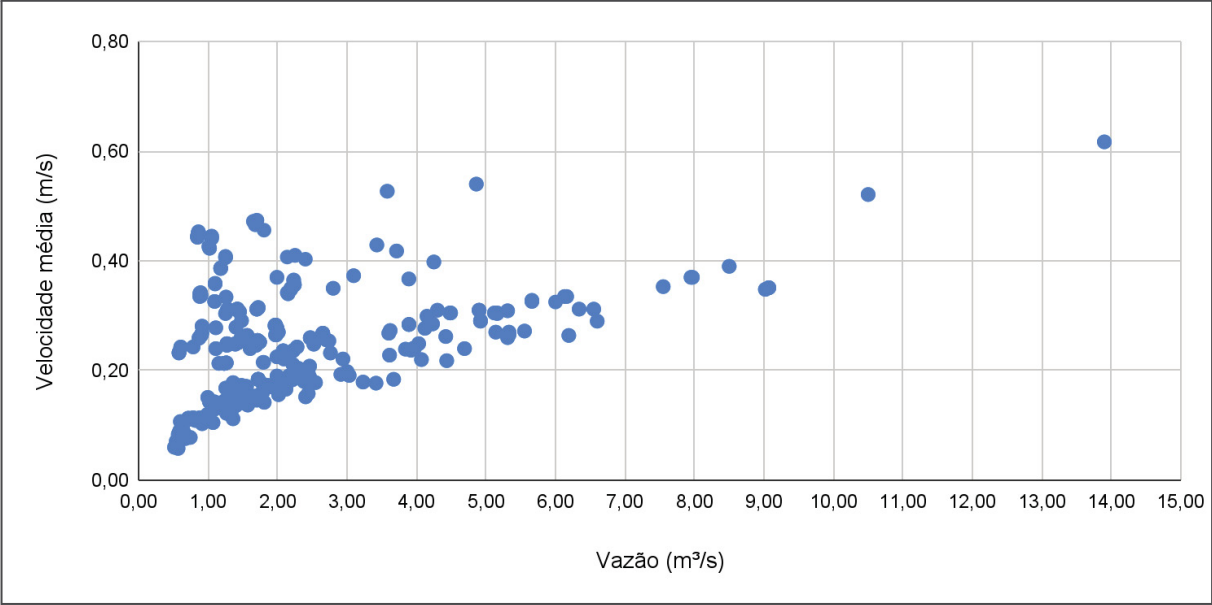
FIGURA 11 - Histograma das velocidades medidas na estação Fazendinha do rio Pequeno.



Fonte: Autor (2025).

O histograma da FIGURA 11 expõe uma frequência maior de observações de velocidade da estação Fazendinha entre o intervalo de 0,1 e 0,35 m/s, porém não evidencia nenhuma tendência central das observações,

FIGURA 12 - Relação entre velocidade e vazão do Rio Pequeno na estação Fazendinha.



Fonte: Autor (2025).

Na FIGURA 12 plota-se as observações da estação Fazendinha a partir da vazão e velocidade de modo a identificar uma função de regressão representativa ao conjunto de dados. A regressão foi testada com as funções linear, exponencial, polinomial, logarítmica e série de potências e nenhuma apresentou R^2 maior que 0,27, motivo pelo qual não se usará uma regressão para descrever o conjunto de dados.

A estação Próximo a Foz conta com 1 medição de velocidade em 2010. Ela pode ser vista, juntamente com as principais estatísticas das outras estações na TABELA 1:

TABELA 1 - Estatísticas das medições de velocidade do rio Pequeno.

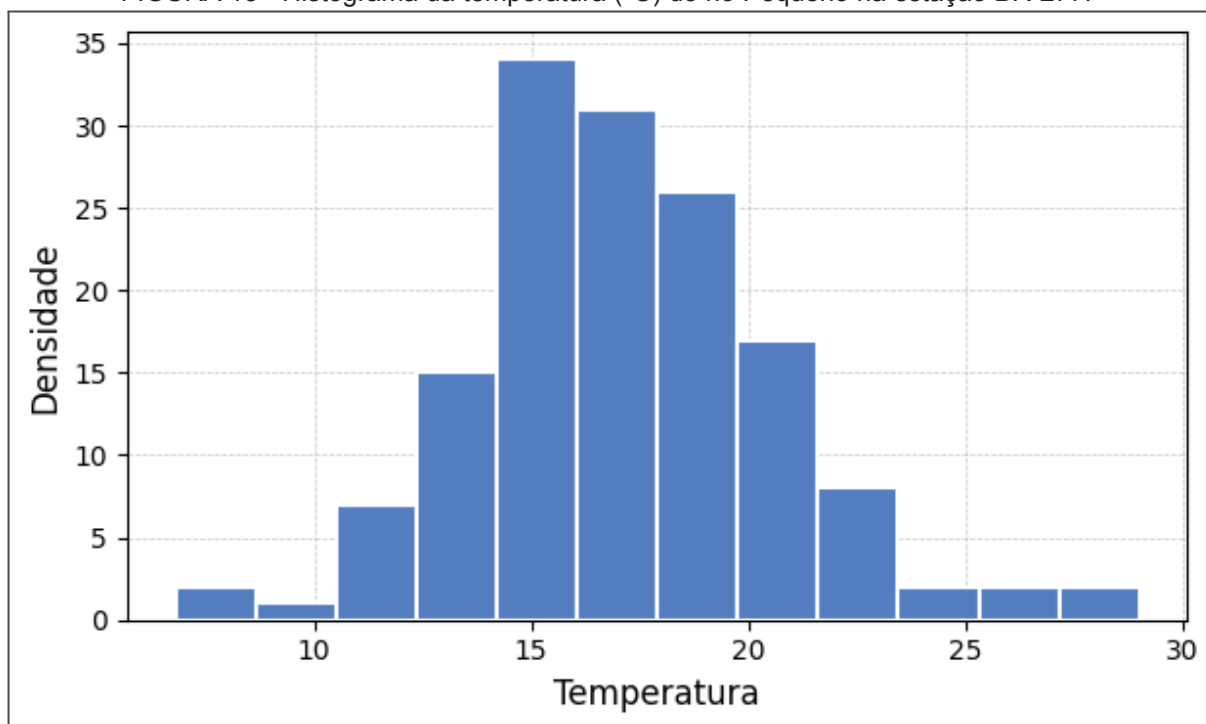
Estatísticas	Estação BR-277	Estação Fazendinha	Estação Próximo a Foz
Quantidade de medições	10	579	1
Velocidade média (m/s)	0,67	0,25	0,17
Velocidade máxima (m/s)	1,02	0,62	0,17
Velocidade mínima (m/s)	0,39	0,06	0,17
Desvio Padrão (m/s)	0,18	0,10	-

Fonte: Autor (2025).

3.1.4 Temperatura do rio Pequeno

Para a caracterização da temperatura no rio Pequeno, utilizam-se os dados disponíveis das 3 estações do rio, abrangendo o período de 1984 até 2023, como mostrado nas FIGURAS 13, 14 e 15.

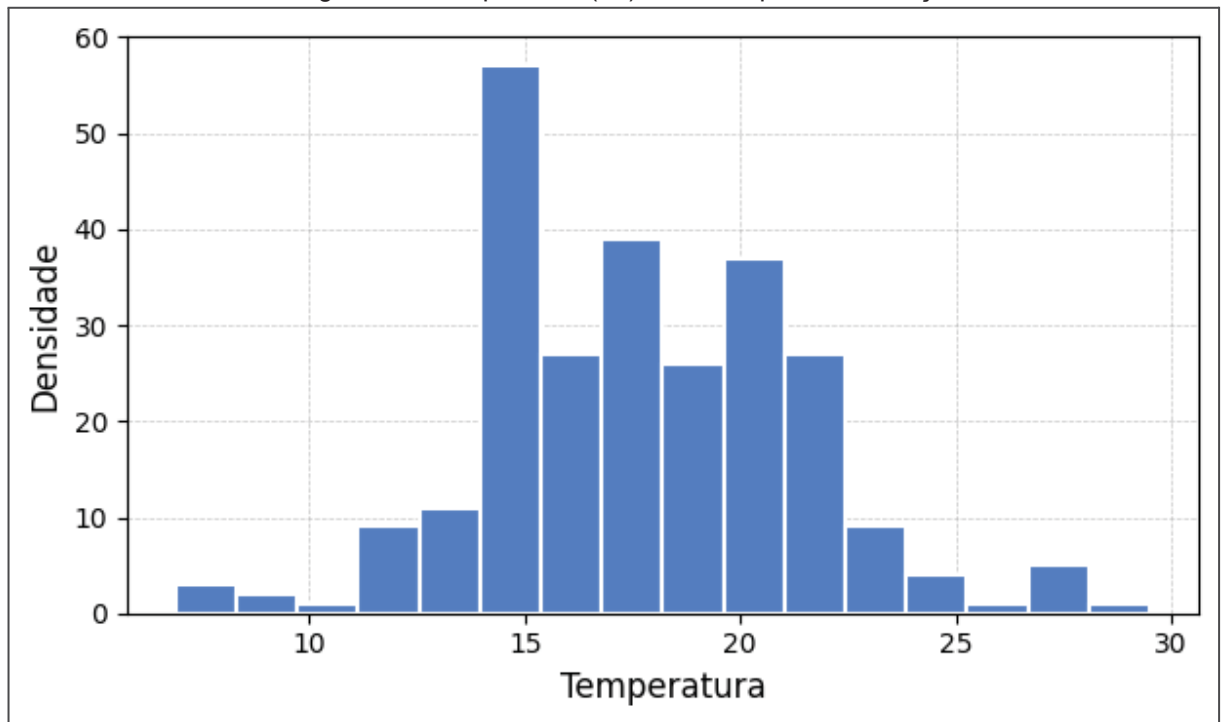
FIGURA 13 - Histograma da temperatura (°C) do rio Pequeno na estação BR-277.



Fonte: Autor (2025).

A FIGURA 13 traz o histograma da temperatura do rio Pequeno na estação BR-277, que conta com 147 medições de temperatura entre os anos de 1985 e 2011. Observa-se uma tendência central na dispersão dos dados.

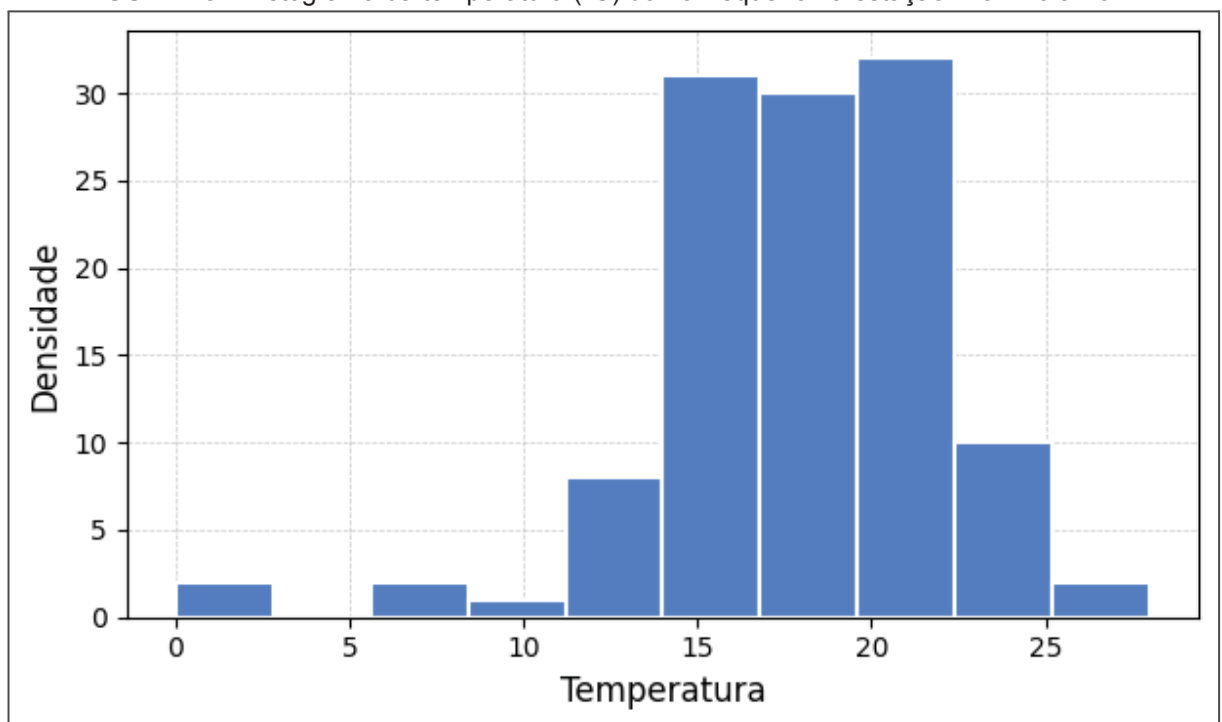
FIGURA 14 - Histograma da temperatura (°C) do rio Pequeno na estação Fazendinha.



Fonte: Autor (2025).

A FIGURA 14 traz o histograma da temperatura do rio Pequeno na estação Fazendinha, que conta com 259 medições de temperatura entre os anos de 1984 e 2023. Observa-se uma tendência central na dispersão dos dados.

FIGURA 15 - Histograma da temperatura (°C) do rio Pequeno na estação Próximo a Foz.



Fonte: Autor (2025).

A FIGURA 15, por sua vez, traz o histograma da temperatura do rio Pequeno na estação Próximo a Foz, que conta com 118 medições de temperatura entre os anos de 1996 e 2011. Observa-se uma tendência central na dispersão dos dados.

A TABELA 2 traz um resumo das principais estatísticas da temperatura do rio Pequeno nas 3 estações. Mesmo com intervalos de tempo e quantidade de observações diferentes, nota-se uma temperatura média próxima entre as estações,

TABELA 2 - Estatísticas das medições de temperatura do rio Pequeno.

Estatísticas	Estação BR-277	Estação Fazendinha	Estação Próximo a Foz
Quantidade de medições	147	259	118
Temperatura média (°C)	17,2	17,7	17,6
Temperatura máxima (°C)	29,0	29,5	28,0
Temperatura mínima (°C)	6,8	6,9	0,0
Desvio Padrão (°C)	8,0	9,2	7,6

Fonte: Autor (2025).

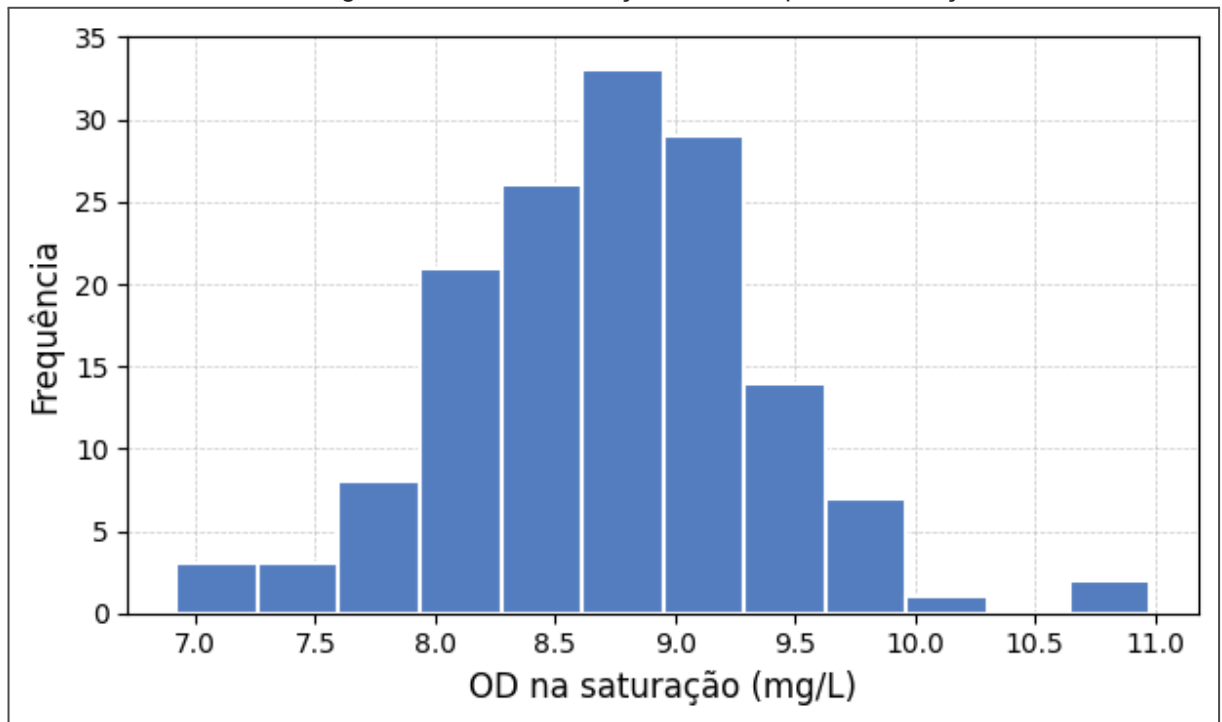
3.1.5 OD na saturação (OD_s)

A variável OD na saturação é uma medida calculada a partir da temperatura e pressão pelas equações (1) e (2). Considerando uma pressão de $0,9 \text{ atm}^3$ no rio Pequeno e as medições de temperatura das 3 estações, chega-se nas FIGURAS 16, 17 e 18 que apresentam o histograma da OD de saturação do rio Pequeno nas 3 estações.

A FIGURA 16 apresenta os dados de OD na saturação calculados para a estação BR-277, como os pontos calculados são provenientes das observações de temperaturas ilustradas na FIGURA 13, observa-se similaridade entre os perfis de temperatura e OD na saturação.

³ Considera-se como aproximação da pressão do rio Pequeno a pressão média de 1981 a 2020 presente nas bases do INMET. Disponível em: <https://portal.inmet.gov.br/normais>

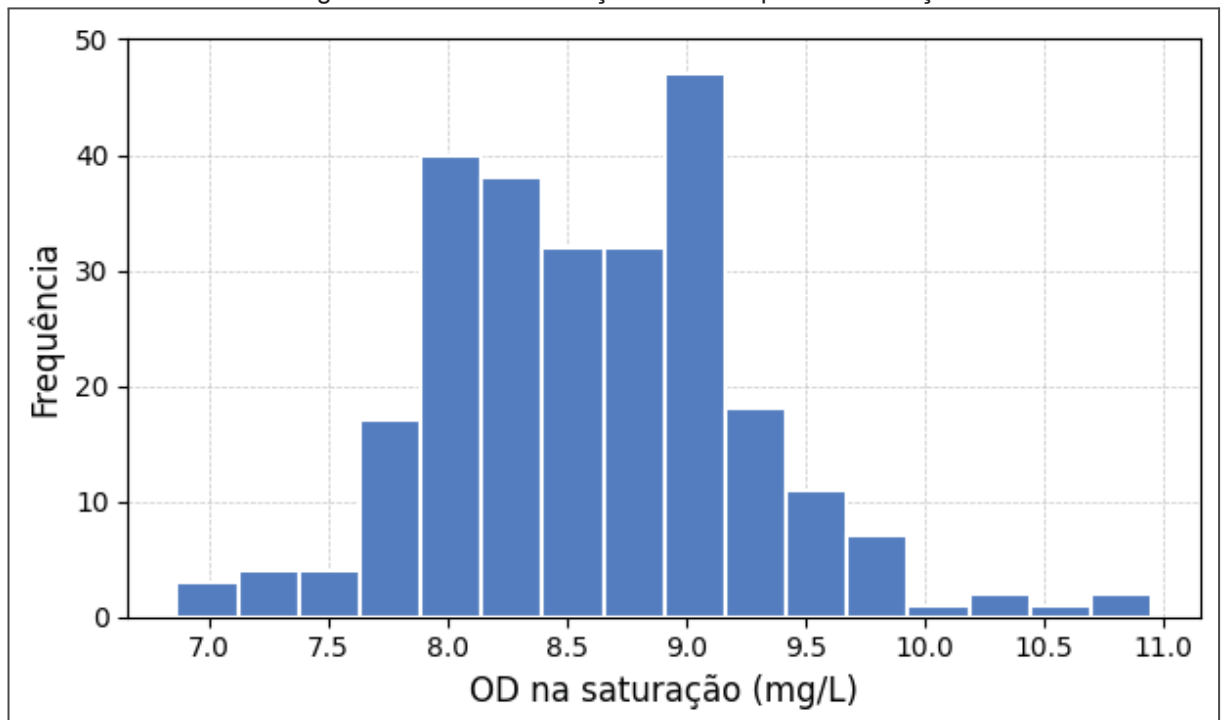
FIGURA 16 - Histograma da OD na saturação do rio Pequeno na estação BR-277.



Fonte: Autor (2025).

A FIGURA 17 apresenta os dados de OD na saturação calculados para a estação Fazendinha, que possui uma tendência central da mesma maneira que as observações de temperatura presentes na FIGURA 14.

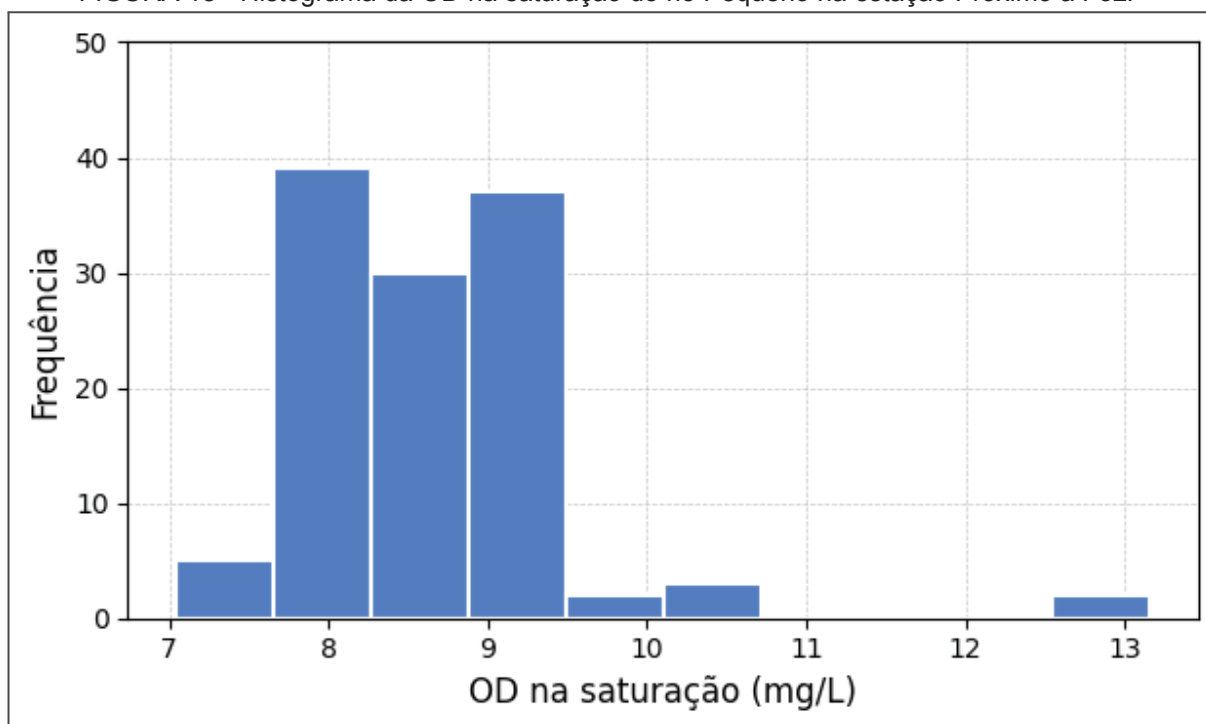
FIGURA 17 - Histograma da OD na saturação do rio Pequeno na estação Fazendinha.



Fonte: Autor (2025).

Por fim, a FIGURA 18 apresenta os dados de OD na saturação calculados para a estação Próximo a Foz, a partir das observações de temperatura apresentadas na FIGURA 15.

FIGURA 18 - Histograma da OD na saturação do rio Pequeno na estação Próximo a Foz.



Fonte: Autor (2025).

As FIGURAS 16, 17 e 18 possuem um formato muito parecido com os histogramas de temperatura, porém ao inverso, o que evidencia que quanto maior a temperatura menor será a OD na saturação e vice-versa. De maneira complementar, um resumo das principais estatísticas do parâmetro OD na saturação nas 3 estações pode ser encontrado na TABELA 3.

TABELA 3 - Estatísticas dos cálculos de OD na saturação do rio Pequeno.

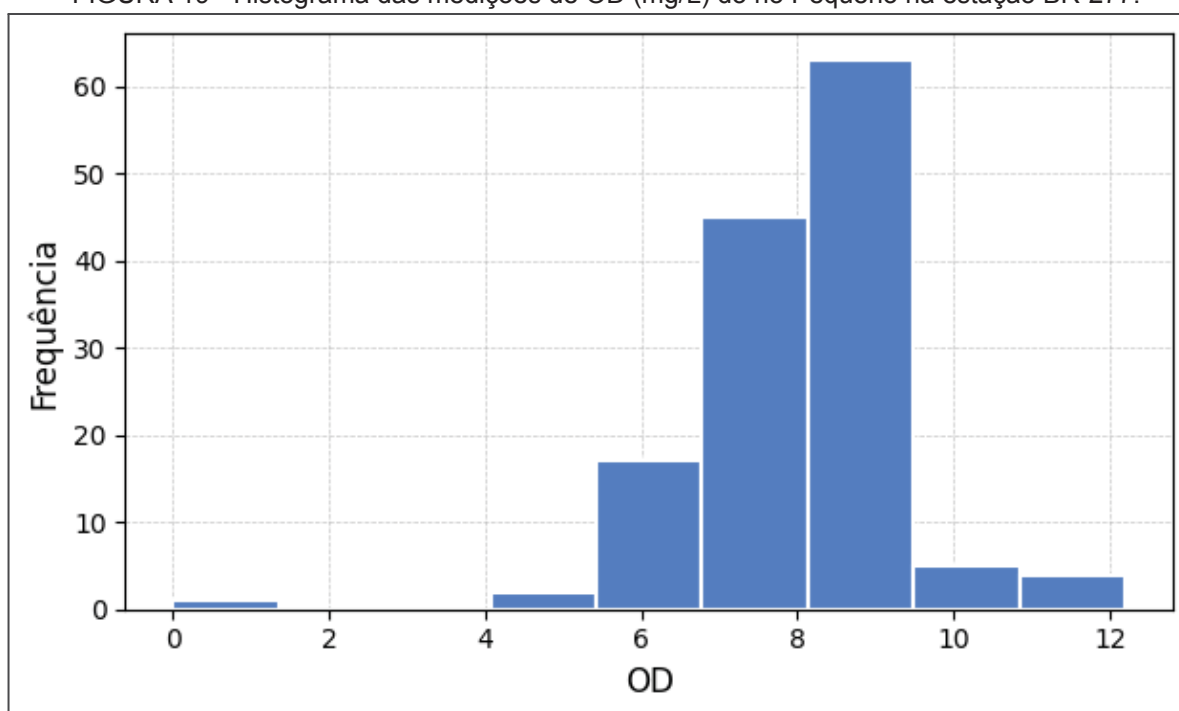
Estatísticas	Estação BR-277	Estação Fazendinha	Estação Próximo a Foz
Quantidade de pontos	147	259	118
OD _s média (mg/L)	8,7	8,6	8,7
OD _s máxima (mg/L)	11,0	11,0	13,2
OD _s mínima (mg/L)	6,9	6,9	7,0
Desvio Padrão (mg/L)	0,6	0,7	0,9

Fonte: Autor (2025).

3.1.6 OD do rio Pequeno

O rio Pequeno possui registros de medições de OD nas três estações fluviométricas, abrangendo o período de 1984 a 2023 e na Renault, abrangendo o período de 2016 a 2020. Os histogramas apresentados nas FIGURAS 19, 20, 21 e 22 refletem os dados das bases fornecidas pelo SNIRH e pela Renault, exceto por dois valores da estação Fazendinha (19,0 mg/L e 92,0 mg/L), que foram excluídos por serem considerados outliers.

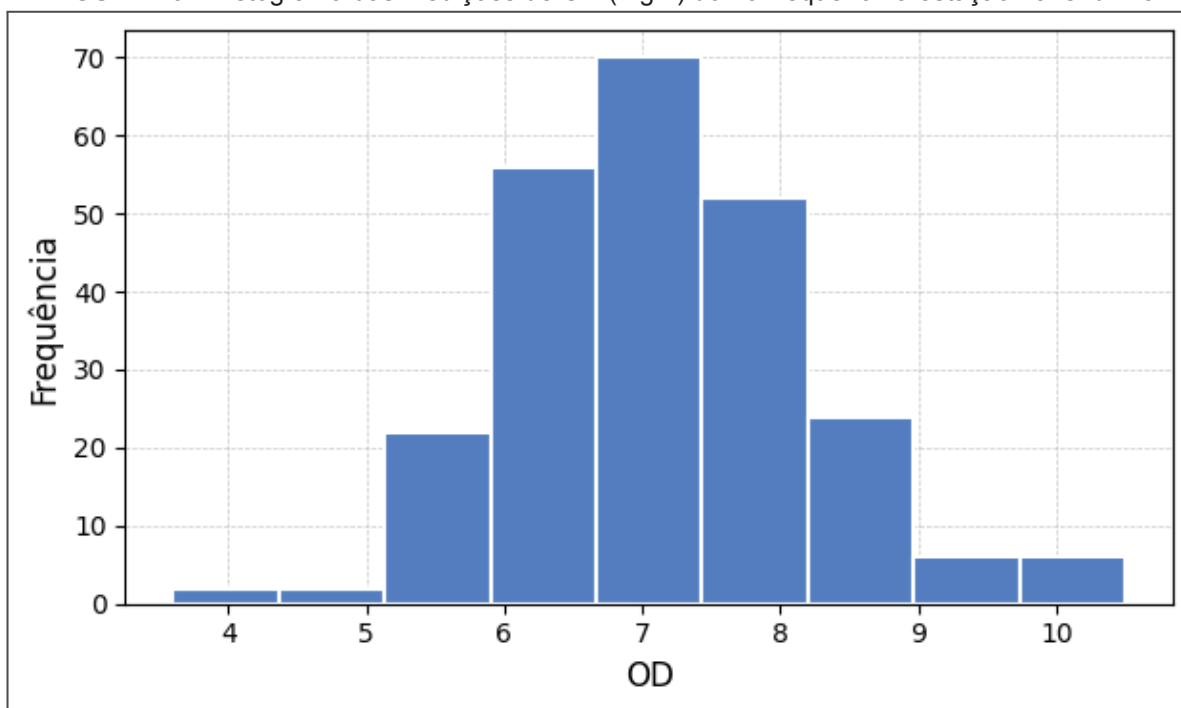
FIGURA 19 - Histograma das medições de OD (mg/L) do rio Pequeno na estação BR-277.



Fonte: Autor (2025).

A FIGURA 19 exibe o histograma das 137 observações de OD na estação BR-277 de 1991 a 2011, em que a maioria das observações estão entre o intervalo de 4 e 12 mg/L.

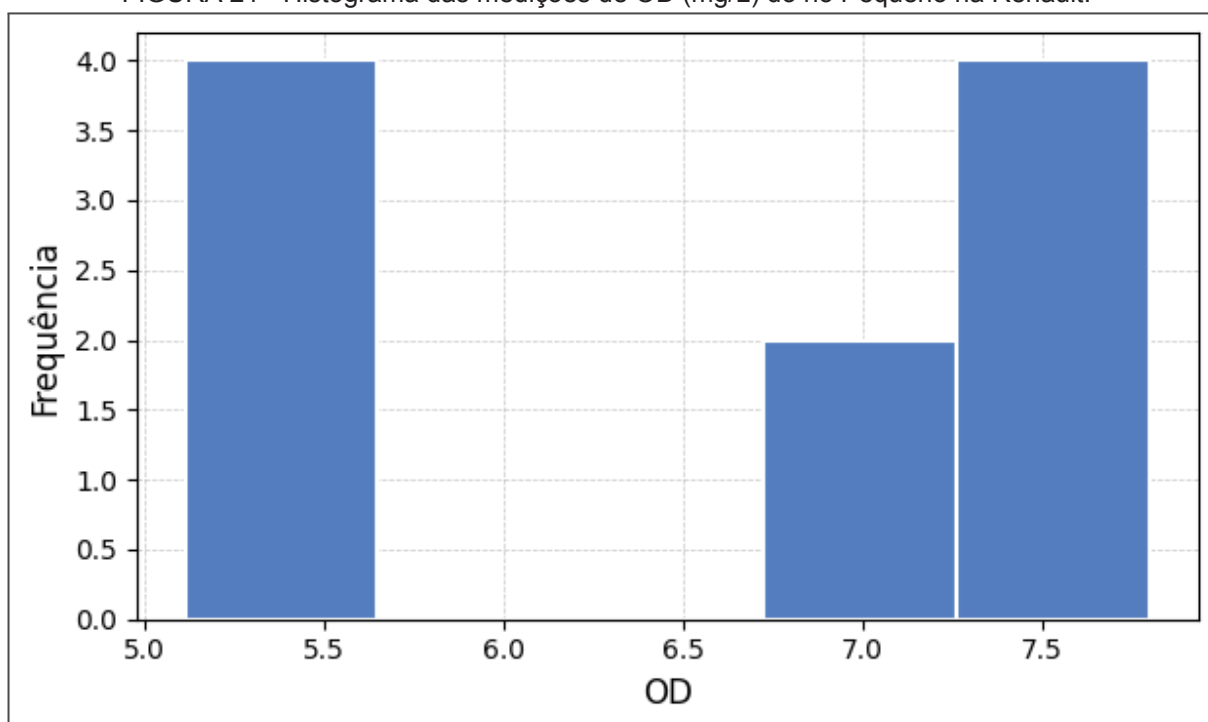
FIGURA 20 - Histograma das medições de OD (mg/L) do rio Pequeno na estação Fazendinha.



Fonte: Autor (2025).

A FIGURA 20 exibe o histograma das 242 observações de OD na estação Fazendinha de 1984 a 2023, em que os dados apresentam uma tendência central em torno do valor de 7,0 mg/L.

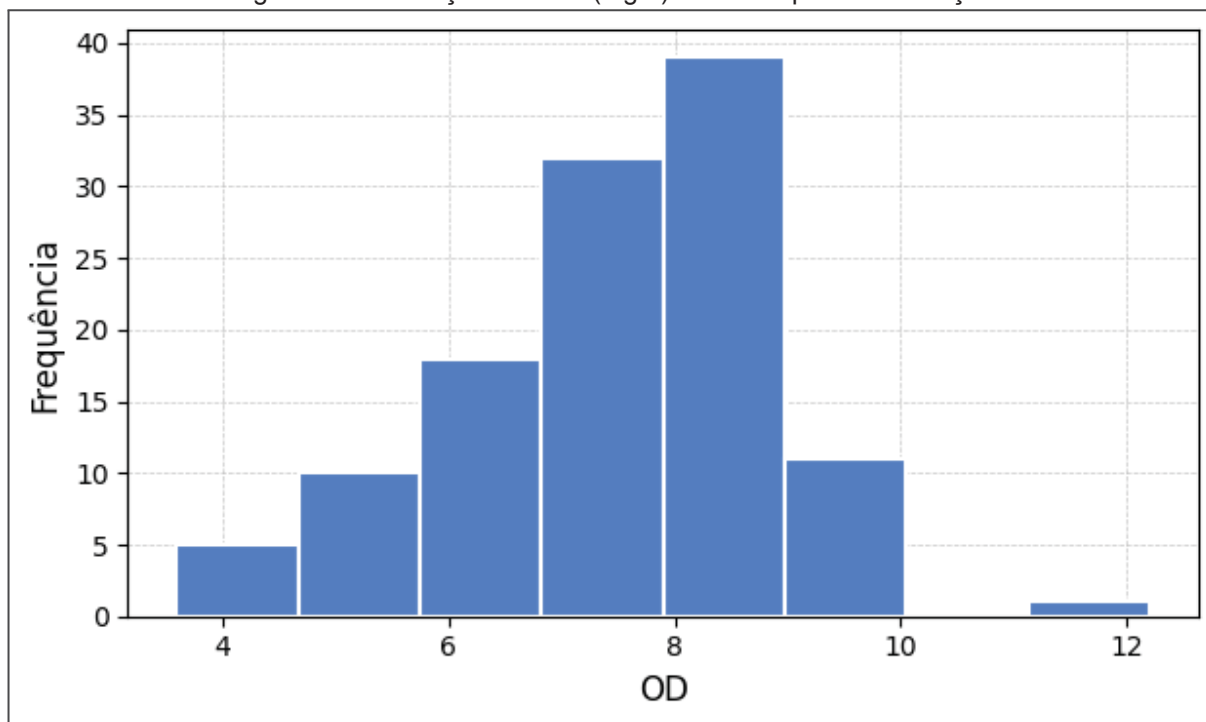
FIGURA 21 - Histograma das medições de OD (mg/L) do rio Pequeno na Renault.



Fonte: Autor (2025).

A FIGURA 21 exibe o histograma das 10 observações de OD da Renault entre os anos de 2016 e 2020, em que os dados estão contidos no intervalo de 5,0 a 8,0 mg/L.

FIGURA 22 - Histograma das medições de OD (mg/L) do rio Pequeno na estação Próximo a Foz.



Fonte: Autor (2025).

A FIGURA 22 exibe o histograma das 116 observações de OD na estação Próximo a Foz de 1996 a 2011, em que a maior parte das observações estão entre o intervalo de 4 e 10 mg/L.

O resumo das observações do parâmetro OD do rio Pequeno pode ser encontrado na TABELA 4, em que se observa um alto nível de OD no trecho inicial do rio, uma concentração reduzida de OD no ponto de medição da Renault e na estação Fazendinha, aumentando a concentração desse parâmetro no trecho próximo a foz do rio.

TABELA 4 - Estatísticas das medições de OD do rio Pequeno.

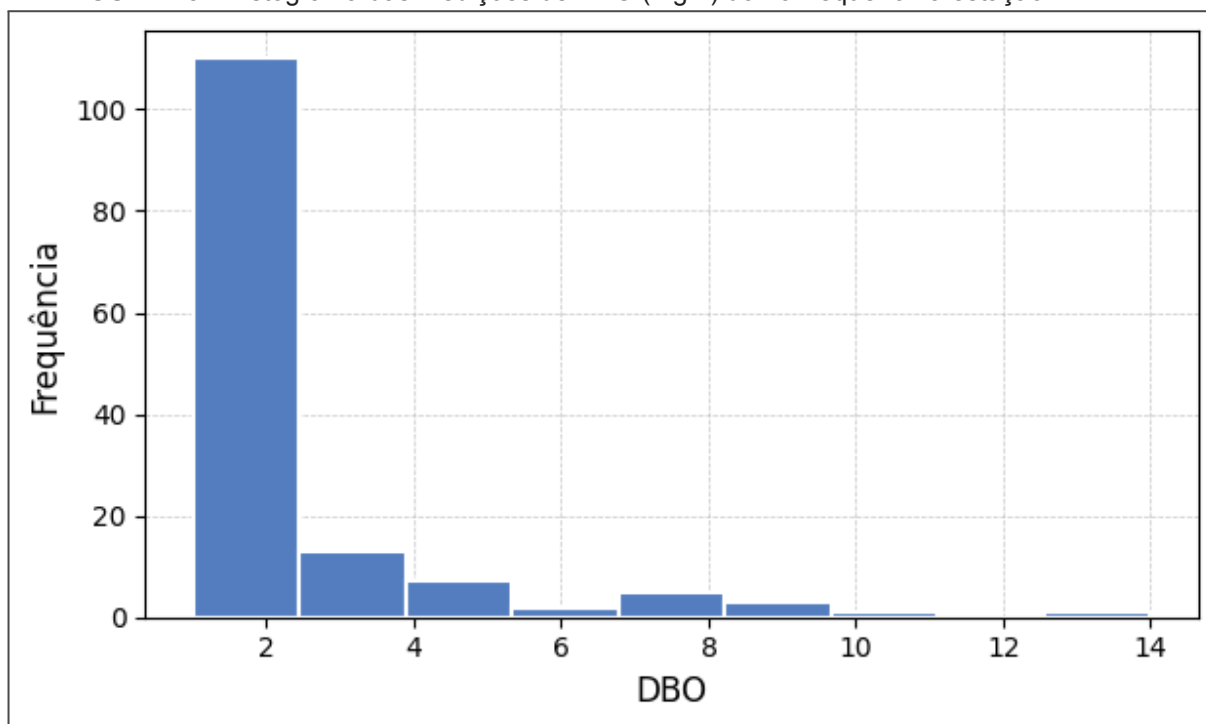
Estatísticas	Estação BR-277	Medições Renault	Estação Fazendinha	Estação Próximo a Foz
Quantidade de pontos	137	10	240	116
OD média (mg/L)	8,1	6,5	7,1	7,4
OD máxima (mg/L)	12,2	7,7	10,5	12,2
OD mínima (mg/L)	0,0	5,1	3,6	3,6
Desvio Padrão (mg/L)	1,4	1,2	1,1	1,4

Fonte: Autor (2025).

3.1.7 DBO do rio Pequeno

O rio Pequeno possui registros de medições de DBO nas três estações fluviométricas, abrangendo o período de 1984 a 2023 e na Renault, abrangendo o período de 2016 a 2020. Os histogramas apresentados nas FIGURAS 23, 24, 25 e 26 refletem os dados das bases fornecidas pelo SNIRH e pela Renault.

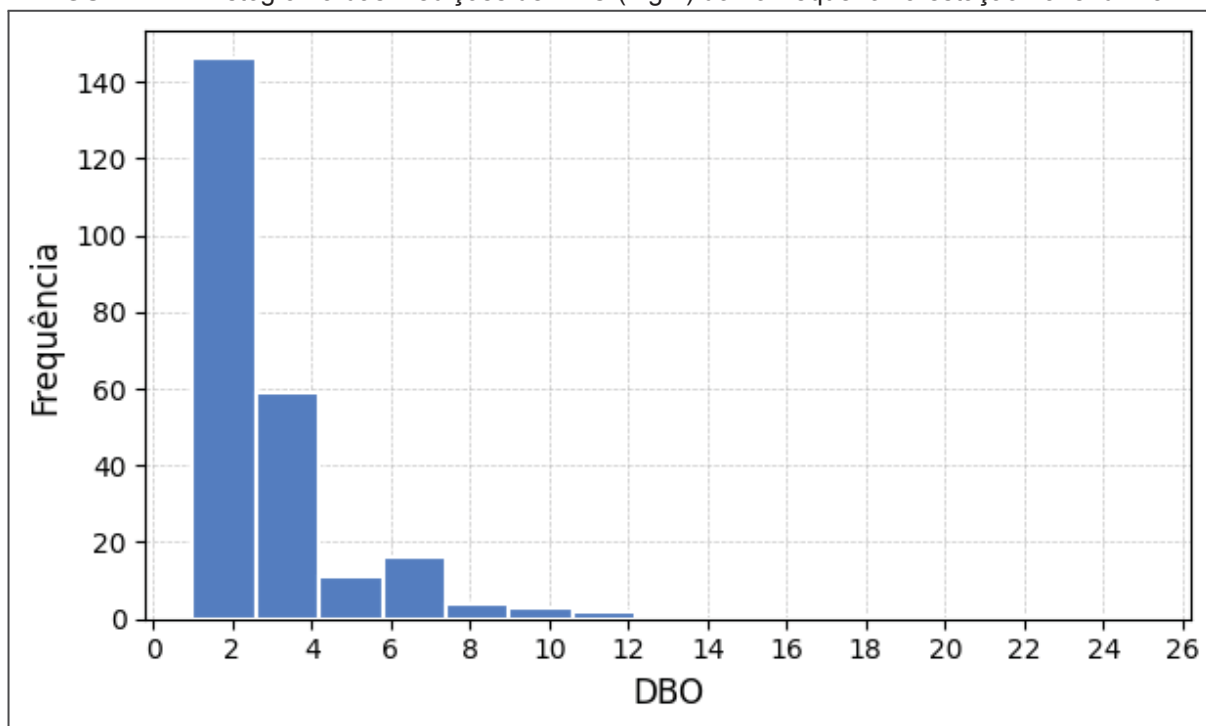
FIGURA 23 - Histograma das medições de DBO (mg/L) do rio Pequeno na estação BR-277.



Fonte: Autor (2025).

A FIGURA 23 apresenta o histograma das 143 observações de DBO da estação BR-277 de 1991 e 2011, em que observa-se uma forte assimetria à direita na distribuição dos dados.

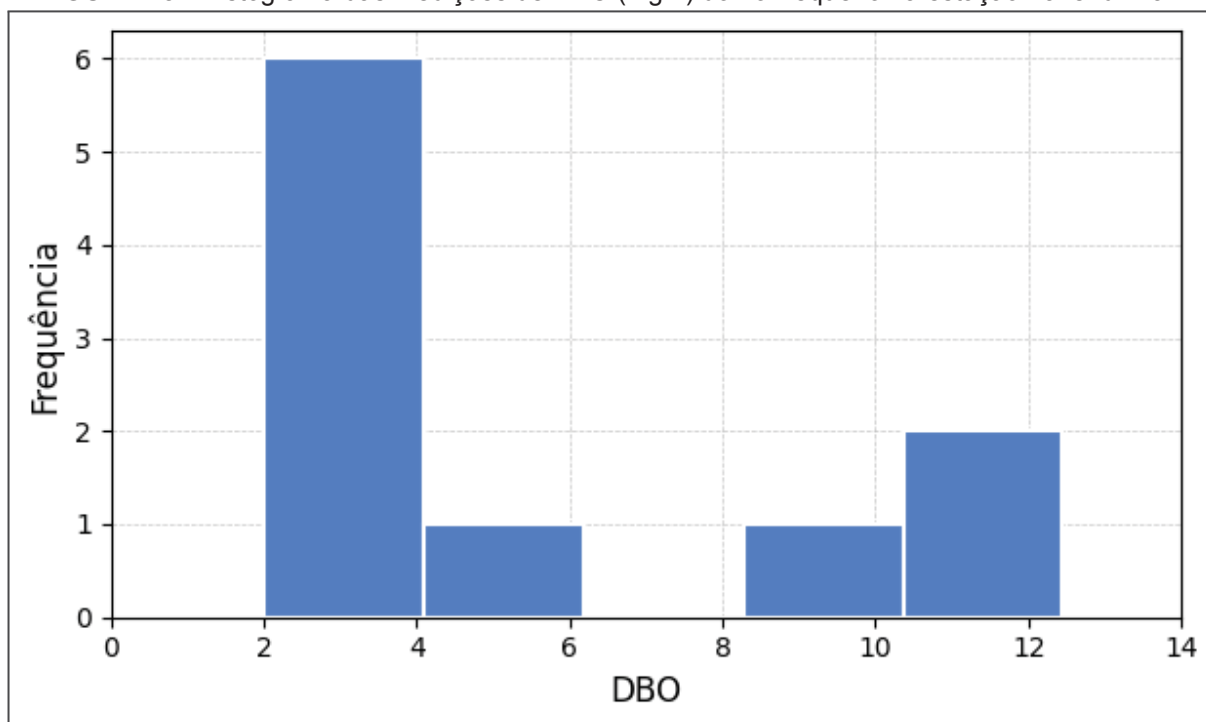
FIGURA 24 - Histograma das medições de DBO (mg/L) do rio Pequeno na estação Fazendinha.



Fonte: Autor (2025).

A FIGURA 24 apresenta o histograma das 244 observações de DBO da estação Fazendinha de 1984 e 2023, em que observa-se uma forte assimetria à direita na distribuição dos dados.

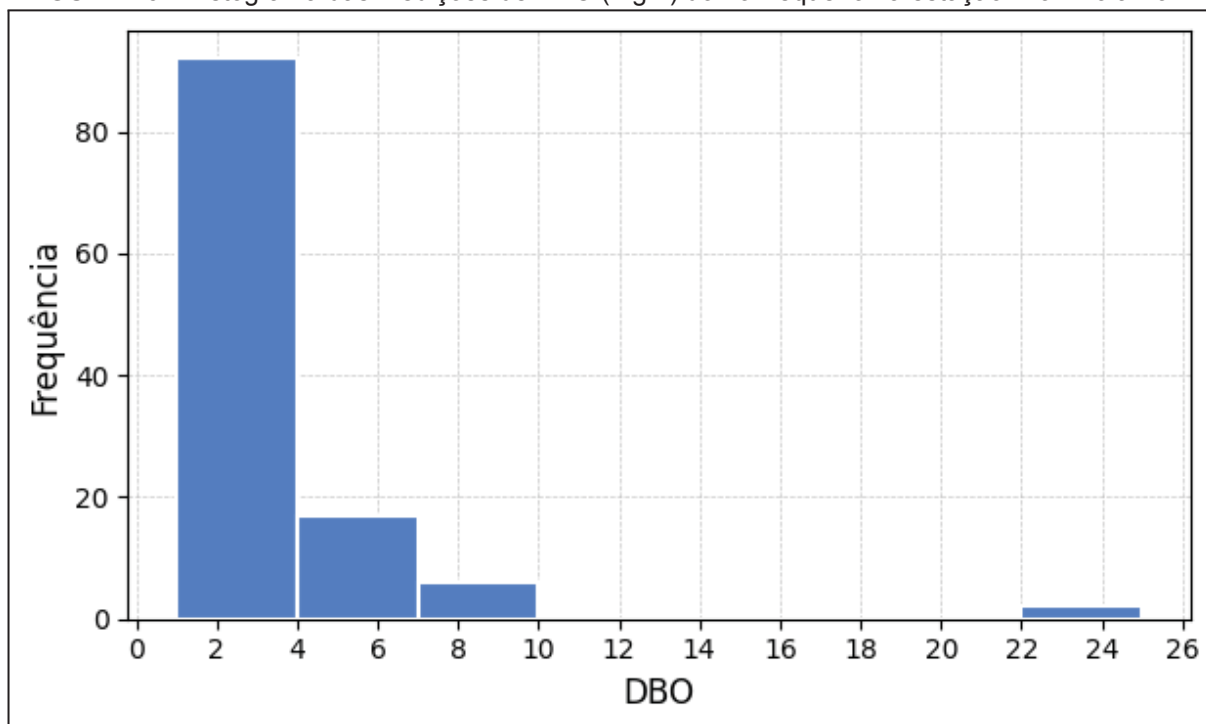
FIGURA 25 - Histograma das medições de DBO (mg/L) do rio Pequeno na estação Fazendinha.



Fonte: Autor (2025).

A FIGURA 25 exibe o histograma das 10 observações de DBO da Renault entre os anos de 2016 e 2020, em que observa-se a maior quantidade de observações no início do histograma, na faixa de 2,0 a 4,0 mg/L de DBO.

FIGURA 26 - Histograma das medições de DBO (mg/L) do rio Pequeno na estação Próximo a Foz.



Fonte: Autor (2025).

A FIGURA 26 apresenta o histograma das 117 observações de DBO da estação Próximo a Foz de 1996 e 2011, em que observa-se uma forte assimetria à direita na distribuição dos dados.

O resumo das observações do parâmetro DBO do rio Pequeno pode ser encontrado na TABELA 5.

TABELA 5 - Estatísticas das medições de DBO do rio Pequeno.

Estatísticas	Estação BR-277	Medições Renault	Estação Fazendinha	Estação Próximo a Foz
Quantidade de pontos	142	10	244	117
DBO média (mg/L)	2,6	5,3	3,1	3,3
DBO máxima (mg/L)	14,0	12,5	25,0	25,0
DBO mínima (mg/L)	1,0	2,0	1,0	1,0
Desvio Padrão (mg/L)	2,0	4,2	2,9	3,3

Fonte: Autor (2025).

Quando compara-se as médias de DBO ao longo do corpo hídrico que estão na TABELA 5, observa-se uma baixa quantidade de carga orgânica na sessão inicial do rio, tendo como ponto de maior quantidade de DBO as medições na Renault.

3.2 METODOLOGIA PARA MODELAGEM MATEMÁTICA

3.2.1 Escolha dos pontos para calibração do modelo

Pelo processo de autodepuração de um corpo hídrico, espera-se que a DBO seja gradualmente consumida, resultando em uma redução de sua concentração ao longo do tempo. Para o parâmetro OD, é esperado um comportamento inicial de breve diminuição de concentração, devido ao consumo de matéria orgânica, seguido por um aumento progressivo da concentração em direção à saturação pelos processos de reaeração (VON SPERLING, 2014).

Contudo, entre as estações BR-277 e Fazendinha, observa-se um padrão oposto: um aumento na concentração média de DBO acompanhado por uma redução média de OD. Essa diminuição do OD sugere um consumo contínuo de matéria orgânica, cuja concentração deveria diminuir à medida que o rio avança em direção à estação Fazendinha.

Os sistemas abertos, como corpos hídricos, estão sujeitos a inúmeras influências externas que nem sempre podem ser monitoradas ou controladas. Para minimizar os impactos dessas influências externas e permitir uma caracterização mais precisa do rio, essa pesquisa escolheu o trecho entre a Renault do Brasil e a estação Fazendinha para a calibração dos parâmetros K_d e K_2 da equação (19).

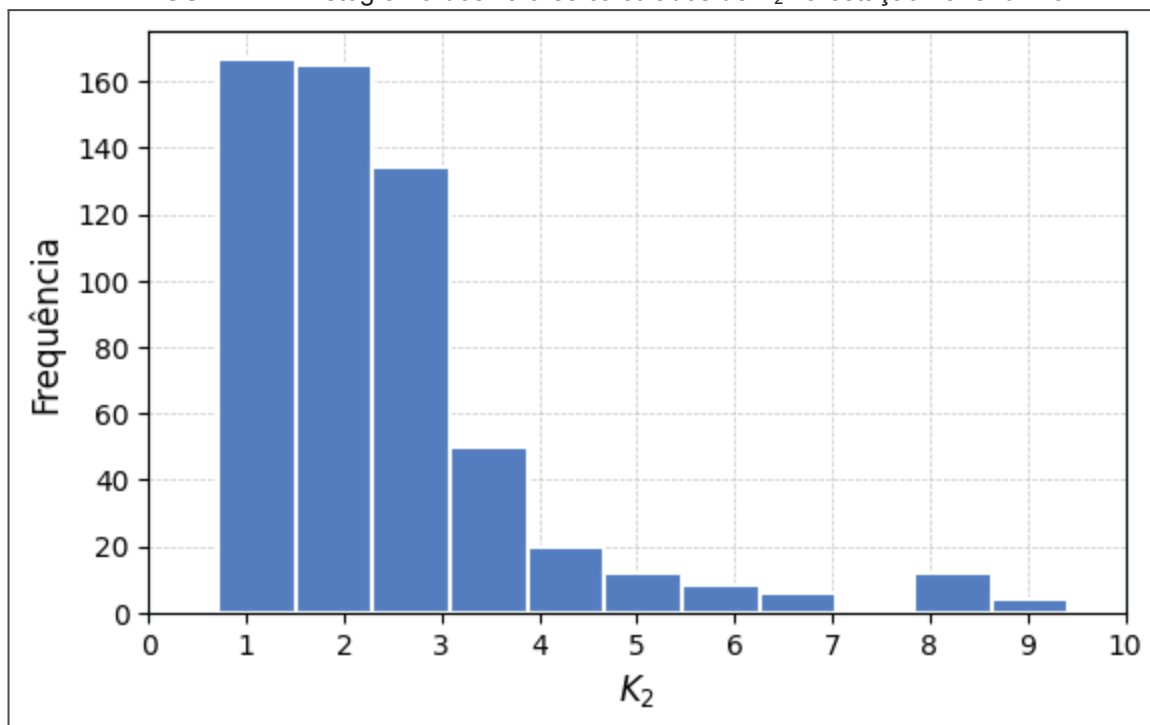
3.2.2 Distribuição *a priori* $h(\theta)$

Para cálculo da distribuição *a priori*, faz-se inicialmente uma análise dos possíveis valores dos coeficientes através da literatura. A partir da QUADRO 7, e considerando que o rio Pequeno não possui nenhuma outorga para lançamento de efluente, seleciona-se o intervalo de curso d'água com águas limpas entre 0,08 a 0,20 d^{-1} como valor possível do coeficiente K_d .

Para identificar a distribuição *a priori* do coeficiente K_2 , utiliza-se o QUADRO 8 como referencial teórico. Com os dados da estação Fazendinha, calculou-se o

coeficiente K_2 para os diferentes registros de cota e velocidade, obtendo a FIGURA 27.

FIGURA 27 - Histograma dos valores calculados de K_2 na estação Fazendinha.

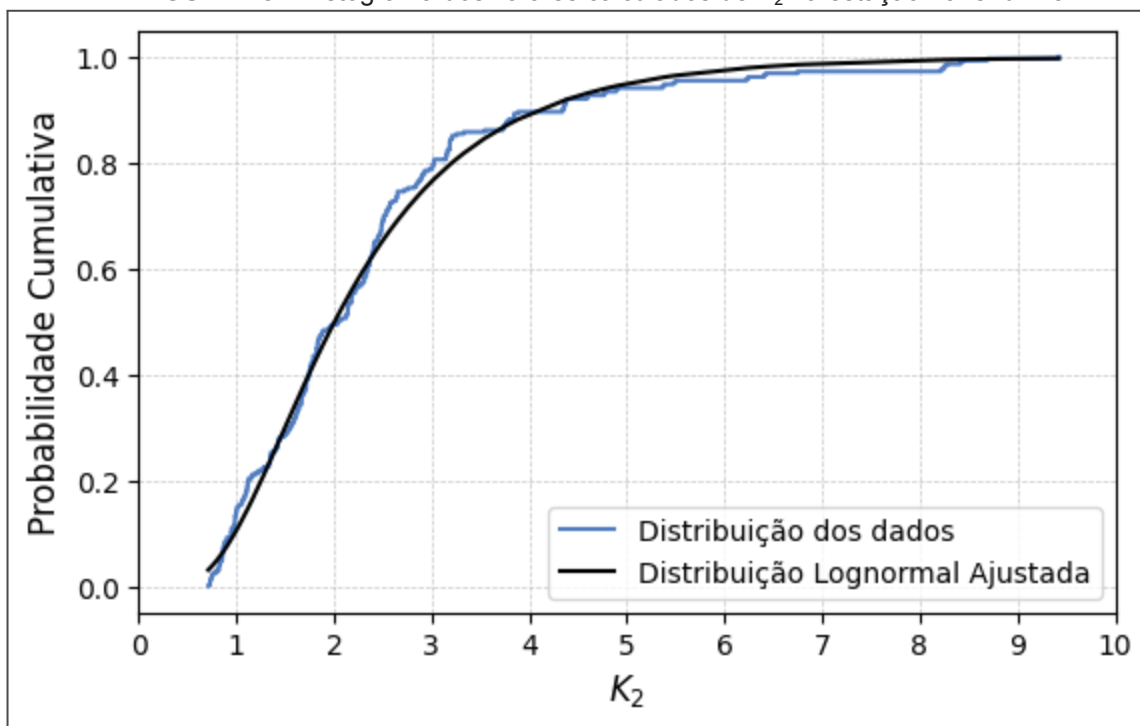


Fonte: Autor (2025).

A FIGURA 27 mostra os diferentes valores de K_2 através de sua estimativa através dos registros da estação Fazendinha. Sua distribuição é assimétrica à direita e não possui valores negativos, com valores variando de 0,7 a 9,4.

Com base nas características dos dados e nos valores estimados, foram testadas diversas distribuições estatísticas quanto à sua aderência aos dados observados. Entre elas, a distribuição lognormal — com média $\mu = 2,344$ e desvio padrão $\sigma = 1,413$ — apresentou o melhor ajuste.

O teste de Kolmogorov–Smirnov indicou que não se deve rejeitar a hipótese nula de que os dados seguem essa distribuição, o que reforça a adequação do modelo lognormal. A comparação entre as funções de distribuição cumulativa empírica e teórica pode ser visualizada na FIGURA 28.

FIGURA 28 - Histograma dos valores calculados de K_2 na estação Fazendinha.

Fonte: Autor (2025).

3.3 FERRAMENTAS PARA PROGRAMAÇÃO E MODELAGEM

O código fonte desta dissertação se encontra no ANEXO 2 e foi desenvolvido em linguagem Python, através da plataforma Google Colab⁴. Essa escolha se deve a sua flexibilidade, ambiente em nuvem e à integração simplificada com bibliotecas de análise de dados e modelagem estatística. Complementarmente, a IA ChatGPT⁵ foi utilizada como suporte consultivo, principalmente na formulação de códigos base.

O resumo das principais bibliotecas de Python necessárias às estimativas se encontra abaixo:

1. **PyMC**: biblioteca principal para modelagem estatística bayesiana, permitindo a construção de modelos probabilísticos complexos e execução de inferências de maneira eficiente por meio de métodos de amostragem como os Métodos de Monte Carlo (MMC).
2. **NumPy**: biblioteca para manipulação de arrays e cálculos numéricos.
3. **SciPy**: aplicada no ajuste de distribuições e na realização de testes estatísticos, como qui-quadrado.

⁴ Google Colab pode ser acessado através do link: <https://colab.research.google.com/>

⁵ IA ChatGPT pode ser acessada através do link: <https://chatgpt.com/>

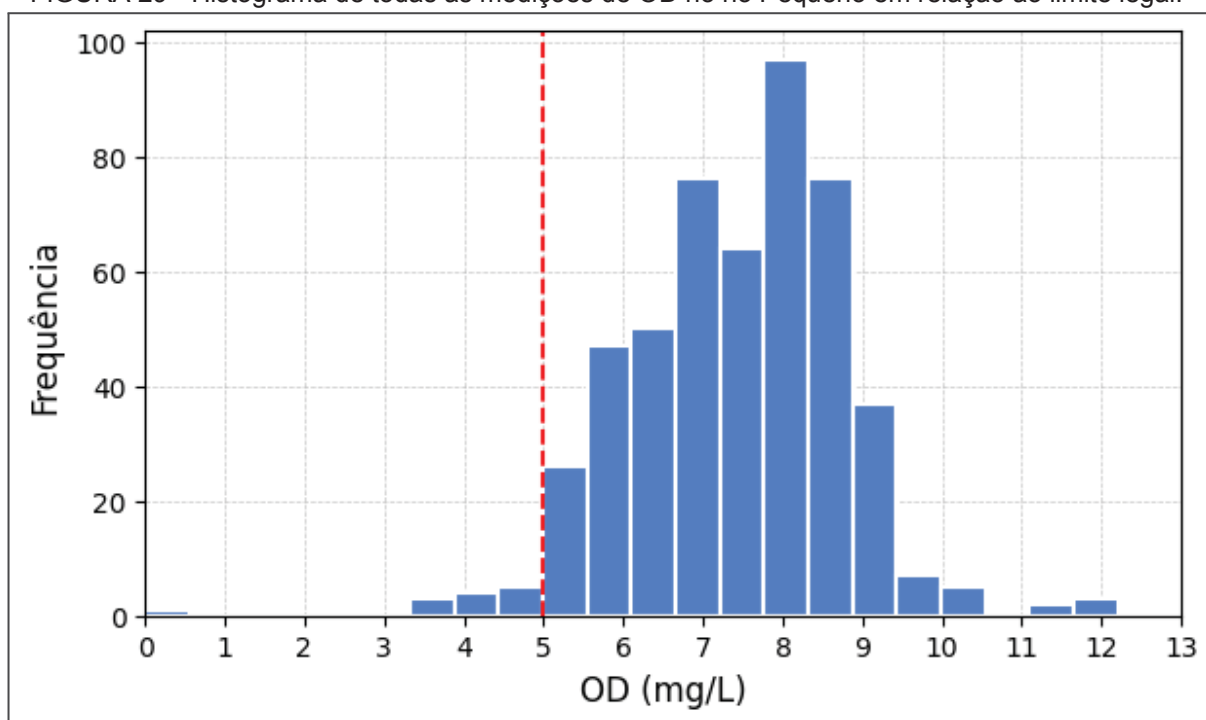
4. **Matplotlib:** biblioteca para geração de gráficos personalizados, incluindo histogramas comparativos entre os dados observados e modelados.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 ANÁLISE DA QUALIDADE DO RIO PEQUENO

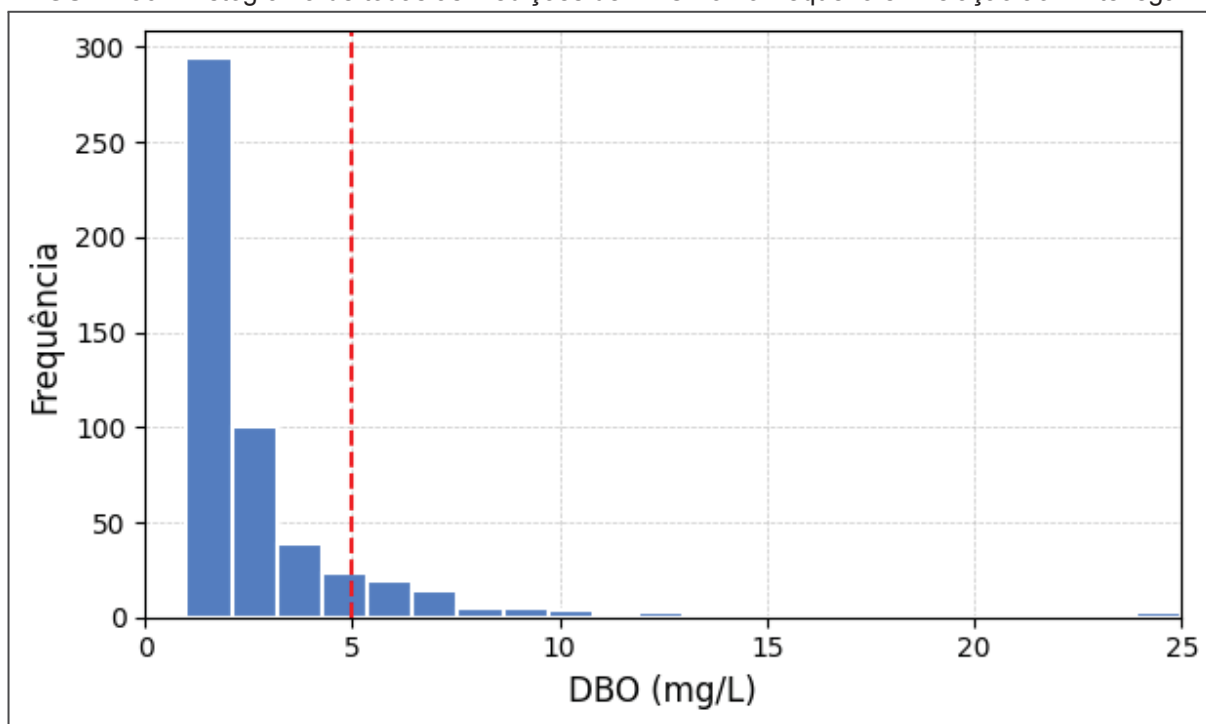
Antes de adentrar na modelagem e calibração de parâmetros, vale a pena analisar as medições de OD e DBO ao longo do rio Pequeno e entender como essas medições se confrontam perante os limites legais. Desde a nascente até sua foz, o rio Pequeno possui um enquadramento de Classe 2, ou seja, deve possuir um OD não inferior a 5 mg/L e uma DBO de, no máximo, 5 mg/L. Para essa análise, plota-se as FIGURAS 29 e 30, nas quais se encontram todas as medições de OD e DBO, comparadas com o limite legal, respectivamente.

FIGURA 29 - Histograma de todas as medições de OD no rio Pequeno em relação ao limite legal.



Fonte: Autor (2025).

FIGURA 30 - Histograma de todas as medições de DBO no rio Pequeno em relação ao limite legal.



Fonte: Autor (2025).

Uma simples observação das FIGURAS 29 e 30 confirma que, de fato, há momentos em que o rio está fora do seu enquadramento. Mais precisamente, 2,5% das medições de OD e 11% das medições de DBO estão fora dos limites legais do seu enquadramento de Classe 2.

Para se ter mais clareza de como o processo de autodepuração no rio acontece, faz-se a modelagem da equação (20).

4.2 DADOS DE ENTRADA

Para calibrar os parâmetros K_d e K_2 do modelo de Streeter-Phelps, algumas premissas e valores são utilizados como entrada para a simulação:

- **Trecho de estudo:** a simulação é realizada entre a estação Fazendinha e o ponto de medição da Renault, totalizando 5,3 km de trajeto;
- **Temperatura do rio Pequeno:** foram considerados todos os pontos de temperatura do rio Pequeno medidos na estação Fazendinha;
- **Pressão no rio Pequeno:** considera-se uma pressão constante de 0,9 atm em todo o percurso do rio;
- **Tempo de percurso:** razão entre distância e os pontos de velocidade;

- **Velocidade:** considera-se todos os pontos de velocidade medidos na estação Fazendinha;
- **Distribuição a priori K_d :** distribuição normal que possui 95% de probabilidade em estar entre o intervalo de 0,08 a 0,20 d⁻¹ ($\mu=0,014$ e $\sigma=0,03$);
- **Distribuição a priori K_2 :** distribuição lognormal com os parâmetros $\mu = 2,34$ e $\sigma = 1,413$;
- **L0:** utilização de uma distribuição gama ajustada ($\alpha=1,932$ e $\beta=0,362$) aos pontos de medição de DBO das medições da Renault;
- **OD0:** utilização de uma distribuição normal ajustada ($\mu=6,5$ e $\sigma=1,2$) aos pontos de medição da Renault;
- **DBO observada:** as medições da estação Fazendinha;
- **OD observada:** as medições da estação Fazendinha;
- **Experimento de Monte Carlo:** experimento realizado através do algoritmo de amostragem NUT-S, com 5.000 amostras sendo 500 usadas para amostra inicial que foram descartadas.

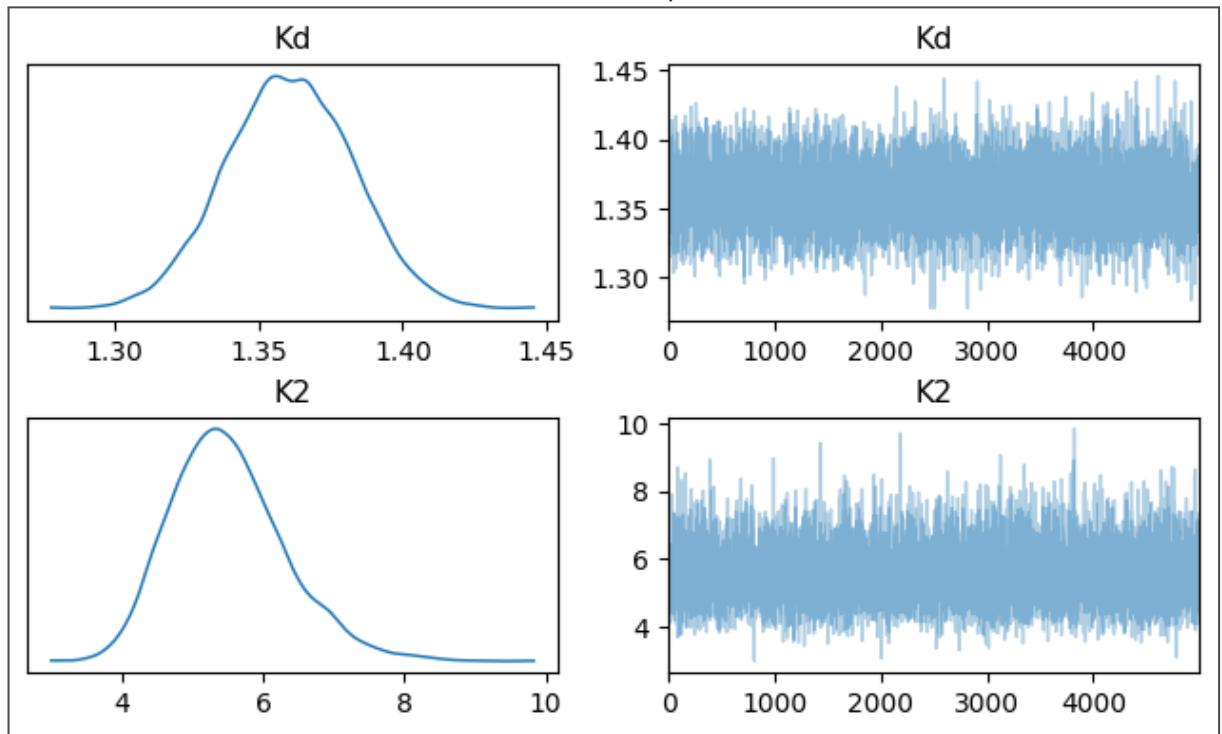
4.3 CALIBRAÇÃO DOS PARÂMETROS K_d E K_2

A inserção dos dados de entrada no código que está no ANEXO 2 gera as FIGURAS 31 e 32, que respectivamente, trazem a representação do método de Monte Carlo e a calibração dos parâmetros K_d e K_2 e a comparação entre as distribuições a priori e a posteriori desses parâmetros.

A FIGURA 31 apresenta do seu lado esquerdo as distribuições a posteriori dos parâmetros K_d e K_2 , sendo que o parâmetro K_d possui uma média entre 1,35 e 1,40 com uma boa simetria. O parâmetro K_2 , por sua vez, possui uma média entre 4,0 e 6,0 com uma assimetria à direita. O lado direito apresenta as amostras da cadeia de Markov do experimento de Monte Carlo que indica, para os dois casos, estabilidade (ao oscilar ao entorno de um valor médio), ausência de tendências e uma mistura boa, oscilando com uma boa amplitude.

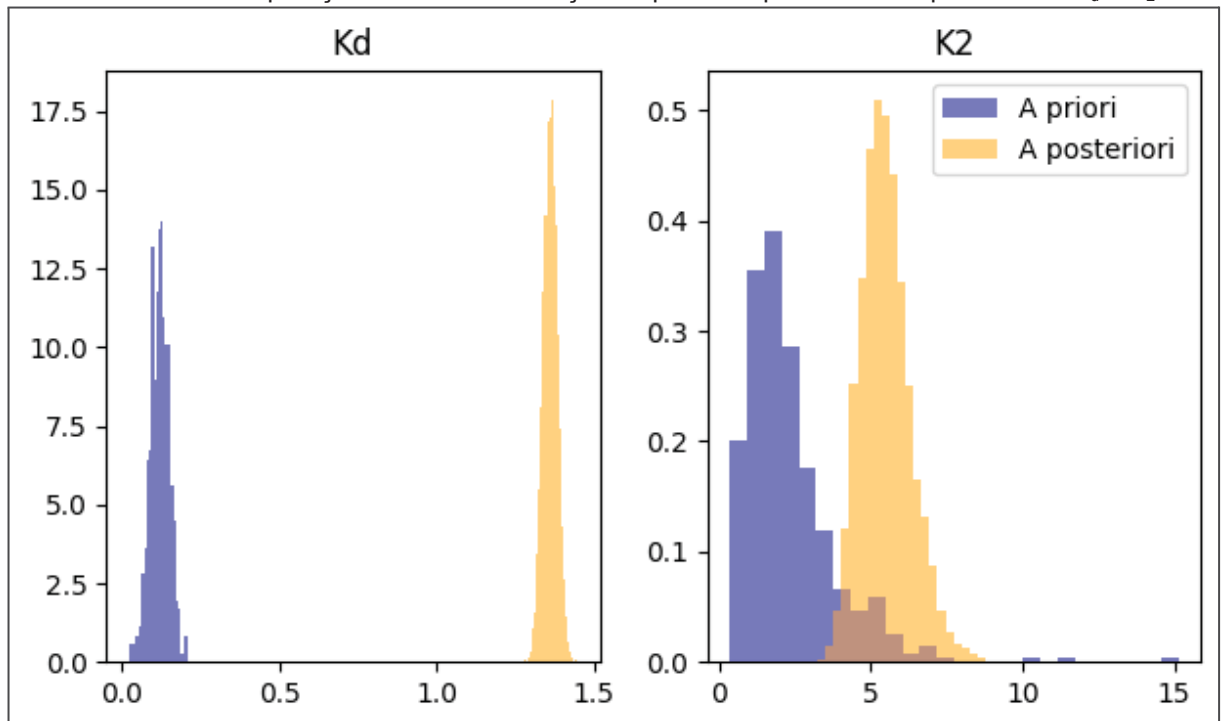
Complementarmente, a FIGURA 32 mostra as distribuições a priori e posteriori dos parâmetros K_d e K_2 . A diferença das distribuições azul e laranja mostra o processo de atualização dos parâmetros em face aos dados e ao processo bayesiano.

FIGURA 31 - Representação do método de Monte Carlo e parâmetros K_d e K_2 calibrados para os dados do rio Pequeno.



Fonte: Autor (2025).

FIGURA 32 - Comparação entre as distribuições a priori e a posteriori dos parâmetros K_d e K_2 .



Fonte: Autor (2025).

De maneira resumida, a TABELA 6 apresenta as principais estatísticas dos parâmetros K_d e K_2 calibrados.

TABELA 6 - Estatísticas dos parâmetros K_d e K_2 calibrados.

Estatísticas	K_d	K_2
Média	1,36	5,50
Desvio padrão	0,02	0,82
HDI 3%	1,32	4,05
HDI 97%	1,40	7,04

Fonte: Autor (2025).

A TABELA 6 apresenta os valores médios, os desvios padrão e os intervalos de maior densidade (HDI) de 94% para os parâmetros K_d e K_2 . Os resultados evidenciam uma diferença significativa no grau de incerteza associado a cada parâmetro, com o K_2 apresentando tanto um desvio padrão quanto uma amplitude do HDI consideravelmente maiores que os do K_d . Isso indica que a estimativa de K_2 é mais incerta, refletindo maior variabilidade em comparação ao K_d .

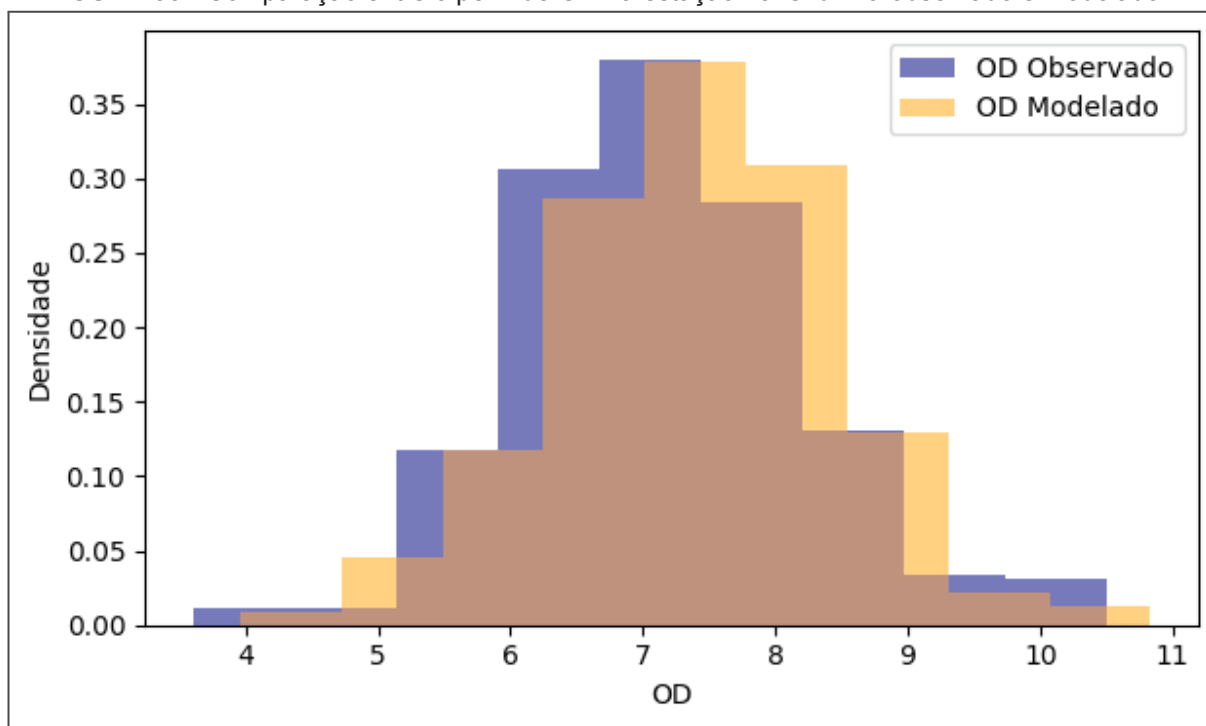
Por fim, para garantir que a calibração do modelo representa os dados do rio Pequeno, a comparação entre o modelo ajustado e os dados observados é imprescindível.

4.4 COMPARAÇÃO ENTRE MODELO E DADOS OBSERVADOS

Após a calibração dos parâmetros K_d e K_2 , o próximo passo é verificar a adequação do modelo aos dados coletados no trecho entre a Renault do Brasil e a estação Fazendinha. Essa verificação da adequação consiste em comparar os perfis simulados de OD e DBO com as respectivas observações obtidas em campo, permitindo avaliar a capacidade preditiva do modelo de Streeter-Phelps.

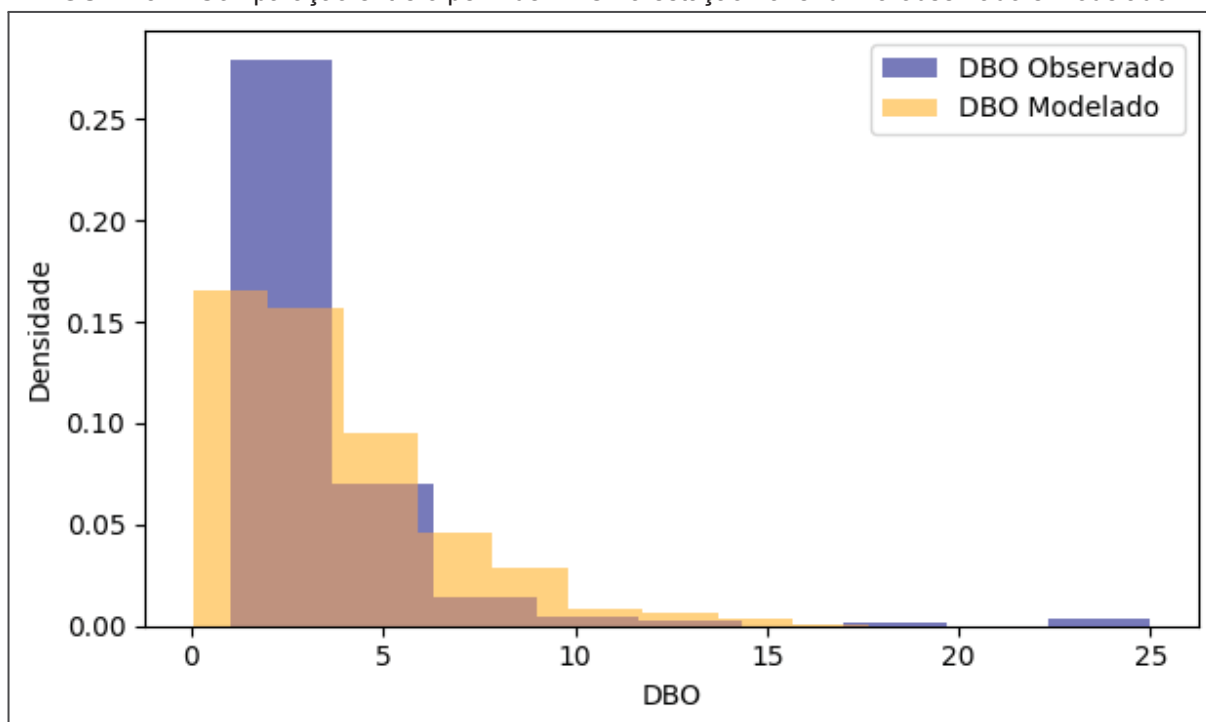
A comparação entre os valores observados e modelados é mostrada nas FIGURAS 33 e 34 para o perfil de concentração de OD e DBO, respectivamente. A comparação é realizada com os dados que o modelo bayesiano traz como resultado e os dados observados na estação Fazendinha.

FIGURA 33 - Comparação entre o perfil de OD na estação Fazendinha observado e modelado.



Fonte: Autor (2025).

FIGURA 34 - Comparação entre o perfil de DBO na estação Fazendinha observado e modelado.



Fonte: Autor (2025).

A avaliação da precisão do modelo foi realizada por meio do teste de aderência do qui-quadrado, aplicado aos perfis simulados de DBO e OD. Esse teste

tem o objetivo de verificar se há evidência estatística de que as distribuições simuladas diferem significativamente das observadas.

A hipótese nula (H_0) do teste é de que não há diferença significativa entre as distribuições observada e simulada e a hipótese alternativa (H_1) é de que há diferença significativa entre as distribuições observada e simulada. O teste foi parametrizado com um nível de significância de 0,05, ou seja, admite-se uma probabilidade de 5% de rejeitar erroneamente a hipótese nula (erro do Tipo I). A partir das distribuições observadas e simuladas, utiliza-se a equação (23) para calcular a estatística qui-quadrado que está na TABELA 7, juntamente com os valores críticos de qui-quadrado, com um nível de significância (α) de 0,05 e grau de liberdade (GL) igual a 8.

TABELA 7 - Estatística qui-quadrado dos perfis de OD e DBO simulados e observados e valores qui-quadrado críticos.

Teste	OD	DBO
Qui-quadrado (calculado)	0,06	0,89
Qui-quadrado tabelado ($\alpha=0,05$ e $GL=8$)	15,51	15,51

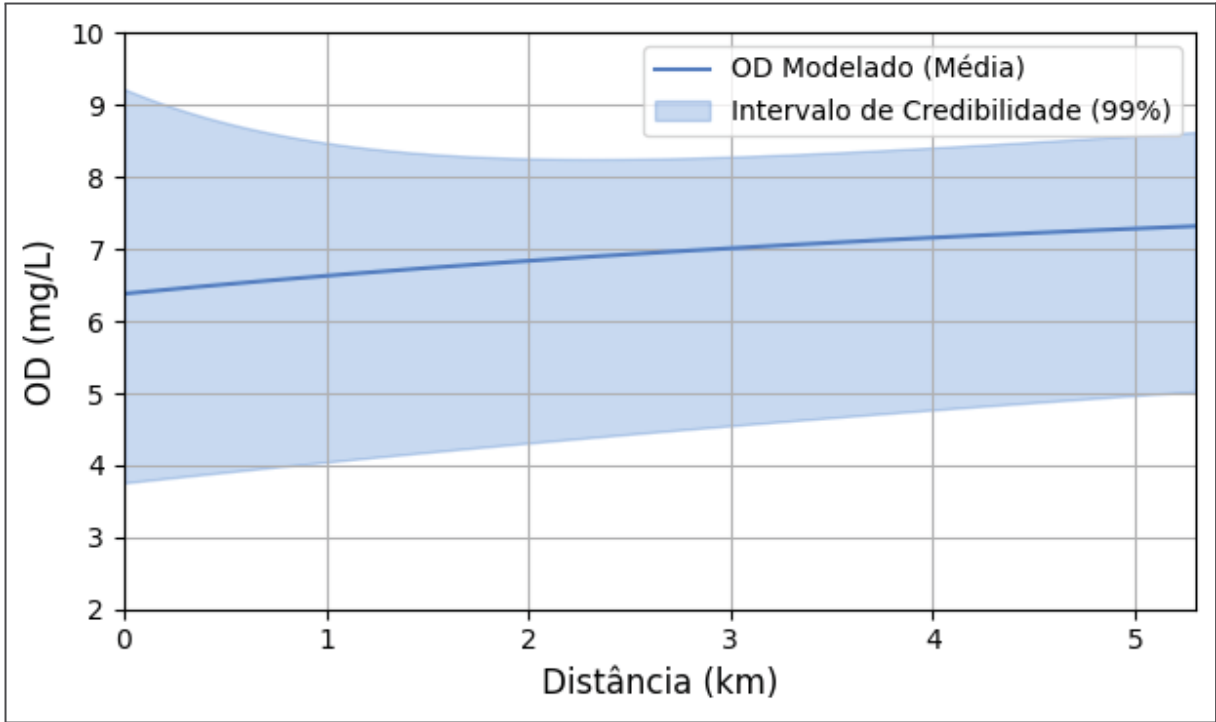
Fonte: Autor (2025).

Ao comparar os valores da TABELA 7, observa-se que os valores calculados estão bem abaixo do valor crítico (15,51). Essa constatação implica que não se rejeita a hipótese nula, o que é indicativo de uma boa concordância entre as distribuições simuladas de OD e DBO em relação às observações.

4.5 SIMULAÇÃO DOS PERFIS DE OD E DBO AO LONGO DO RIO

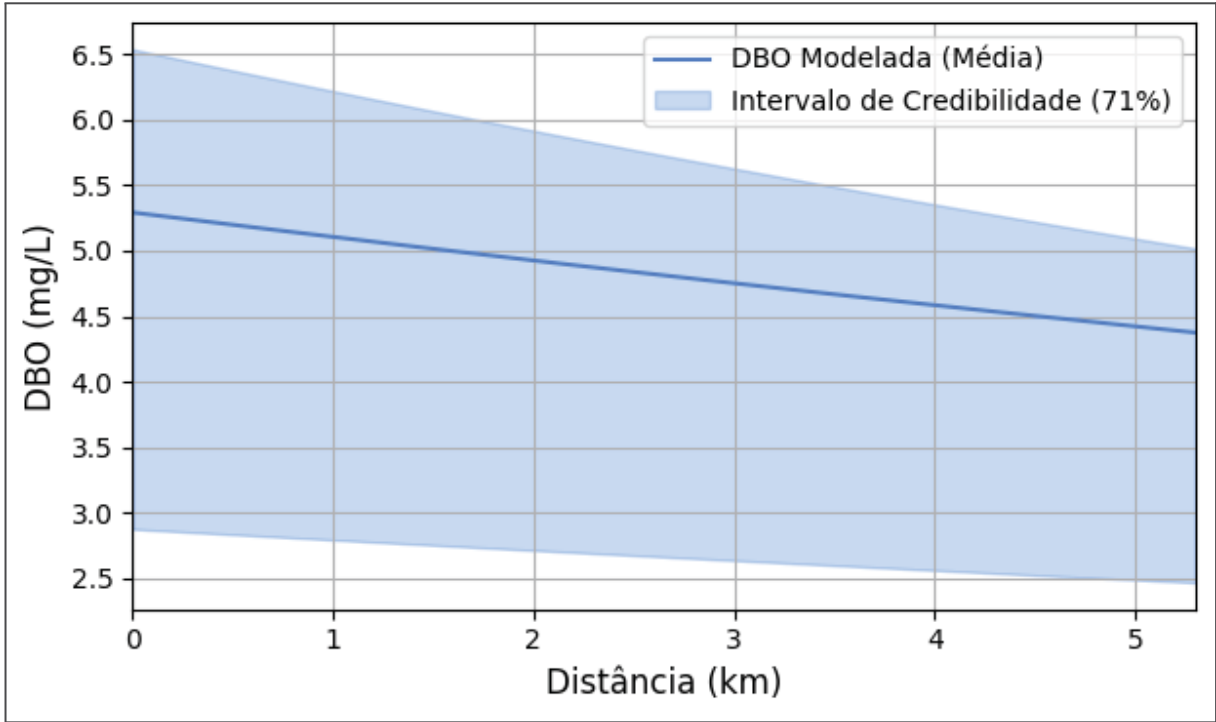
Com os parâmetros do modelo calculados, é possível realizar a simulação da OD e DBO do Rio Pequeno ao longo do trajeto do ponto de medição da Renault à estação Fazendinha. As FIGURAS 35 e 36 apresentam essas simulações, incluindo os intervalos de credibilidade associados às estimativas. Importante salientar que os intervalos de credibilidade representam a região dentro da qual se espera que o valor verdadeiro esteja, com uma determinada probabilidade, ou seja, para um intervalo de credibilidade de 99% é possível afirmar que há 99% de chance do valor de concentração de OD esteja dentro do intervalo mostrado, dadas as informações disponíveis.

FIGURA 35 - Perfil de OD modelado entre o ponto de medição Renault e a estação Fazendinha e seu intervalo de credibilidade de 99%.



Fonte: Autor (2025).

FIGURA 36 - Perfil de DBO modelado entre o ponto de medição Renault e a estação Fazendinha e seu intervalo de credibilidade de 71%.



Fonte: Autor (2025).

Para a simulação do perfil de OD, o intervalo de credibilidade foi estabelecido de forma a atingir exatamente o limite legal de 5 mg/L no ponto $x = 5,3$ km, correspondente à estação Fazendinha. Isso significa que, com base nas incertezas incorporadas ao modelo, a OD permanecerá acima do valor mínimo exigido pela legislação em 99% dos cenários simulados — o que evidencia um cenário hídrico em que o processo de autodepuração garante os níveis de oxigênio adequados.

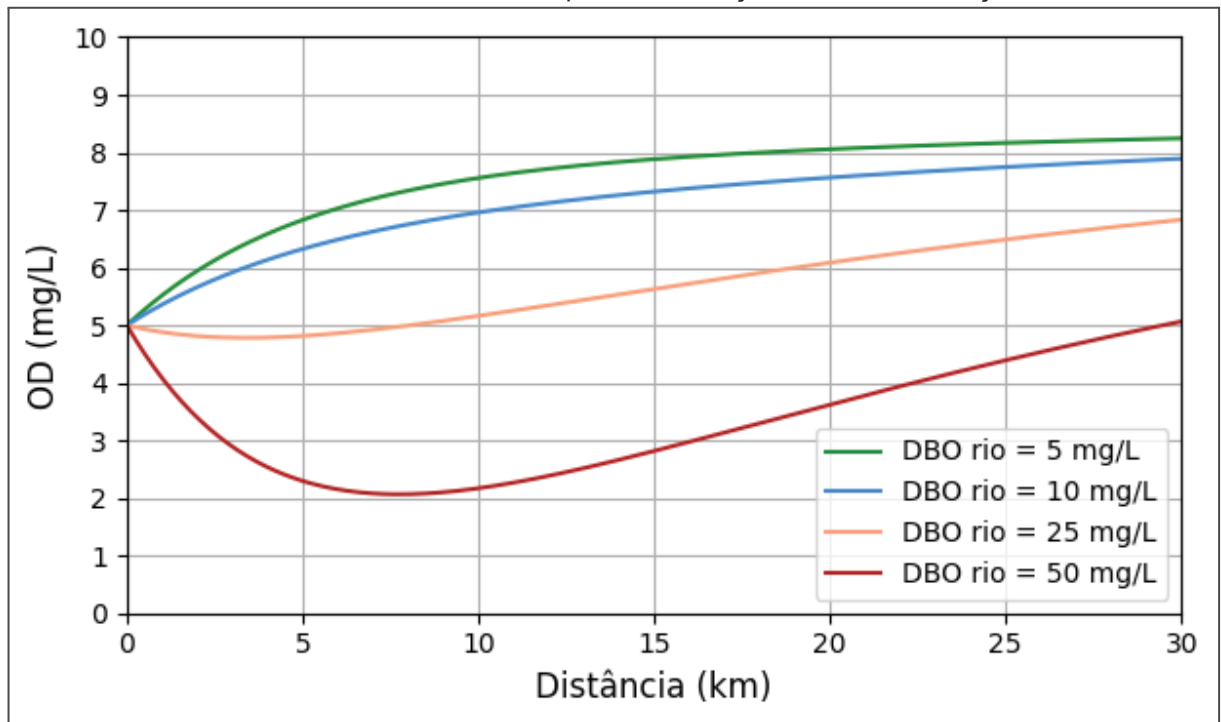
Já para a DBO, o mesmo procedimento de simulação indica que apenas 71% dos cenários permanecem abaixo do valor máximo permitido de 5 mg/L no mesmo ponto. A escolha de apresentar esse percentual reflete o fato de que, mesmo com os mesmos parâmetros calibrados, a incerteza associada à remoção de carga orgânica é maior, o que indica um risco no atendimento aos padrões legais.

4.6 SIMULAÇÃO DE LANÇAMENTO PONTUAL NO RIO PEQUENO

Com os parâmetros do modelo calculados, foi possível realizar simulações adicionais para avaliar o comportamento do rio Pequeno sob condições de estresse, representadas por lançamentos pontuais de efluentes com diferentes concentrações de DBO e OD.

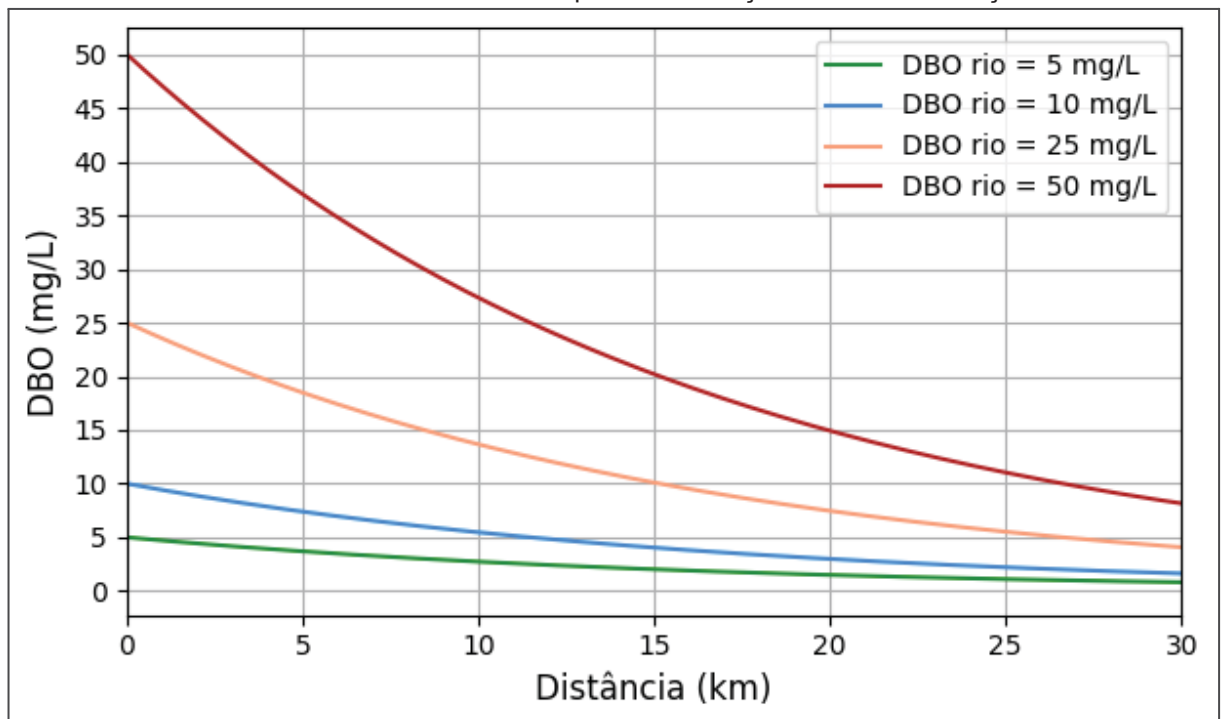
As FIGURAS 37 e 38 ilustram os perfis simulados de OD e DBO ao longo do rio considerando quatro cenários em que a DBO inicial do rio, imediatamente após o lançamento de efluentes, é de 2 mg/L, 10 mg/L, 25 mg/L e 50 mg/L. Para esse exercício, os valores médios de velocidade, OD na saturação, K_d e K_2 foram utilizados, considerando o rio no seu limite legal para a OD inicial (5mg/L).

FIGURA 37 - Perfil de OD modelado entre o ponto de medição Renault e a estação Fazendinha.



Fonte: Autor (2025).

FIGURA 38 - Perfil de DBO modelado entre o ponto de medição Renault e a estação Fazendinha.



Fonte: Autor (2025).

As simulações foram concebidas de modo a investigar a resiliência do processo de autodepuração diante de diferentes cargas orgânicas, ou seja, a capacidade do rio de recuperar sua qualidade após um lançamento pontual de

poluição. Como mostrado na FIGURA 37, mesmo no cenário mais extremo (concentração inicial do rio de DBO de 50 mg/L), o rio demonstra capacidade de recuperação, com a OD retornando a valores acima do limite legal após aproximadamente 30 km. Nos cenários de menor carga (2, 10 e 25 mg/L), a variação da OD ao longo do trecho é pequena, indicando boa capacidade de assimilação e reaeração do sistema.

Entretanto, os resultados da FIGURA 38 revelam um cenário mais crítico para a DBO. Apenas nos cenários com DBO inicial de 5, 10 e 25 mg/L o rio consegue reduzir a concentração de DBO abaixo do limite legal de 5 mg/L ao longo dos 30 km simulados. No cenário de 50 mg/L, a carga orgânica excede a capacidade de autodepuração nesse intervalo, permanecendo acima dos limites legais até o final do trecho.

Esses resultados reforçam a necessidade de controle rigoroso dos lançamentos pontuais de carga orgânica, especialmente em trechos onde o oxigênio dissolvido já se encontra próximo aos limites críticos. A simulação também demonstra o potencial do modelo de Streeter-Phelps com abordagem bayesiana como ferramenta preditiva e de apoio à tomada de decisão na gestão ambiental da bacia do rio Pequeno.

4.7 ANÁLISE CRÍTICA DOS RESULTADOS

A aplicação do modelo de Streeter-Phelps com abordagem bayesiana demonstrou sua utilidade ao fornecer uma visão probabilística da autodepuração do rio Pequeno. Apesar da boa concordância entre os dados observados e simulados, rio Pequeno é um sistema aberto, sujeito a diversas influências não controladas e monitoradas, o que gera incertezas nos parâmetros calibrados (como cargas pontuais e difusas de poluição). Essa limitação é esperada devido à complexidade dos sistemas naturais e reforça a necessidade de incorporar fontes adicionais de dados.

A análise evidenciou que o rio Pequeno, mesmo sob pressão ambiental, mantém sua capacidade de autodepuração na maior parte do tempo, garantindo concentrações de oxigênio dissolvido (OD) acima do limite legal em 99% dos cenários simulados. No entanto, para a Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO), a conformidade é de apenas 71% dos cenários simulados. Esses resultados indicam a

necessidade de monitoramento em relação aos lançamentos pontuais não outorgados e à gestão das atividades na bacia hidrográfica.

A inclusão de outros coeficientes, como os de sedimentação e consumo bentônico, poderia refinar ainda mais as estimativas da DBO, especialmente em áreas com deposição significativa de matéria orgânica.

O teste de aderência do Qui-quadrado contribuiu para validar a precisão do modelo. A abordagem bayesiana mostrou-se particularmente eficaz ao integrar incertezas e atribuir probabilidades para os parâmetros modelados, o que agrega transparência e robustez ao processo de tomada de decisão ambiental.

5 CONCLUSÃO

O modelo modificado de Streeter-Phelps apresentou boa aderência aos dados observados, permitindo a simulação realista da concentração de OD e DBO ao longo do rio Pequeno. A utilização da inferência bayesiana destacou-se por possibilitar a quantificação das incertezas nos parâmetros modelados, fornecendo uma análise robusta e transparente para a gestão ambiental. Apesar disso, a inclusão de outros coeficientes, como os de sedimentação e consumo bentônico, poderia melhorar ainda mais a representação da dinâmica da DBO.

Os resultados reforçam a aplicabilidade do modelo Streeter-Phelps como uma ferramenta importante para a gestão da qualidade da água em rios, devido a sua simplicidade e facilidade de aplicação (necessitando apenas dados básicos do rio). A abordagem adotada mostrou que, mesmo em cenários de estresse ambiental, o rio Pequeno possui significativa capacidade de autodepuração, atendendo os limites legais em grande parte dos casos. No entanto, para cenários mais desafiadores, a conformidade em relação à legislação fica comprometida e exige intervenções externas e melhorias no manejo da bacia.

Sugere-se como próximos passos a adição de outros coeficientes no modelo de Streeter-Phelps, além da aplicação de modelos mais complexos, como o QUAL-UFMG, que permitem simular não apenas as variáveis OD e DBO, mas também a concentração de nutrientes como nitrogênio e fósforo.

As limitações deste estudo estão relacionadas principalmente à ausência de dados mais recentes e à dificuldade de considerar fontes difusas de poluição, além da simplicidade relativa do modelo adotado em comparação com modelos mais avançados. Contudo, essas limitações também representam oportunidades para estudos futuros, que poderiam integrar informações sobre fontes difusas, impactos climáticos e variáveis não consideradas, permitindo uma representação mais abrangente da dinâmica dos recursos hídricos.

REFERÊNCIAS

ANA. **Indicadores de qualidade - Índice de Qualidade das Águas (IQA).** <https://portalpnqa.ana.gov.br/indicadores-indice-aguas.aspx>. Acesso: jan/2025.

BARBETTA, Pedro Alberto; REIS, Marcelo Menezes; BORNIA, Antonio Cezar. Estatística: para cursos de engenharia e informática. São Paulo: Atlas, 2008.

BATISTA, Daiane Ferreira; CABRAL, João Batista Pereira. **Modelos matemáticos para avaliação do índice de qualidade de água: uma revisão.** *ACTA Geográfica*, Boa Vista, v. 11, n. 25, p. 111-136, jan./abr. 2017.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil.** Brasília, DF: Senado Federal: Centro Gráfico, 1988.

BRASIL. **Lei nº 9.433, de 8 de janeiro de 1997.** Institui a Política Nacional de Recursos Hídricos, Cria o Sistema Nacional de Gerenciamento de Recursos Hídricos, regulamenta o inciso XIX do art. 21 da Constituição Federal, e altera o art. 1 da Lei nº 8.001, de 13 de março de 1990, que modificou a Lei nº 7.990, de 28 de dezembro de 1989. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 09 de jan. 1997.

BRASIL, **Resolução CONAMA nº 357, de 17 de março de 2005.** Dispõe sobre a classificação dos corpos de água e diretrizes ambientais para o seu enquadramento, bem como estabelece as condições e padrões de lançamento de efluentes, e dá outras providências. Diário Oficial da União: Brasília, 2005.

BRASIL, **Resolução CONAMA nº 430, de 13 de maio de 2011.** Dispõe sobre as condições e padrões de lançamento de efluentes, complementa e altera a Resolução nº 357, de 17 de março de 2005, do Conselho Nacional do Meio Ambiente-CONAMA. Diário Oficial da União: Brasília, 2011.

BENSON, B.B.; KRAUSE, Daniel Jr, 1980, The concentration and isotopic fractionation of gases dissolved in freshwater in equilibrium with the atmosphere. 1. Oxygen: Limnology and Oceanography, vol. 25, no. 4, p. 662-671. (Disponível em <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/2835754.pdf>.)

BENSON, B.B.; KRAUSE, Daniel Jr, 1984, The concentration and isotopic fractionation of oxygen dissolved in freshwater and seawater in equilibrium with the atmosphere: Limnology and Oceanography, vol. 29, no. 3, p. 620-632. (Disponível em <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/2836308.pdf>.)

BERTOLAMI, Gisela Kovacs. **Nota técnica – A técnica de Demanda Bioquímica de Oxigênio e o kit rápido da MachereyNagel NANOCOLOR® BOD5-TT.** Disponível em: <https://www.carvalhaes.net/anexos/products/12070/130903-a-tecnica-de-dbo520-e-o-kit-bod5-tt-rev.03.pdf>. Acesso em: fev/2024.

EPA, ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY. **PARAMETERS OF WATER QUALITY. Interpretation and Standards.** Disponível em:

https://www.epa.ie/pubs/advice/water/quality/Water_Quality.pdf. Acesso em: fev/2024.

GELMAN, Andrew; CARLIN, John B.; STERN, Hal S.; DUNSON, David B.; VEHTARI, Aki; RUBIN, Donald B. **Bayesian Data Analysis**. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 2013. Disponível em: <http://www.stat.columbia.edu/~gelman/book/BDA3.pdf>. Acesso em: dez/2024.

HASSAN, Fekri. **Water history for our times**. 1º Ed. Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, 2011, 7 – 20 p.

HELMENSTINE, Anne Marie. **Here's How to Calculate pH Values**. Disponível em: <https://www.thoughtco.com/how-to-calculate-ph-quick-review-606089>. Acesso em: fev/2021.

HOFFMAN, Matthew D.; GELMAN, Andrew. **The No-U-Turn Sampler: Adaptively Setting Path Lengths in Hamiltonian Monte Carlo**. Disponível em: <https://jmlr.org/papers/v15/hoffman14a.html>. Acesso em: dez/2024.

INMET. **NORMAIS CLIMATOLÓGICAS DO BRASIL**. Disponível em: <https://portal.inmet.gov.br/normais>. Acesso em: jan/2025.

LIU *et al.*, **PREDICTING THE HYPOXIC-VOLUME IN CHESAPEAKE BAY WITH THE STREETER–PHELPS MODEL: A BAYESIAN APPROACH**. Disponível em: <https://digitalcommons.unl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1287&context=usdeptcommercepub>. Acesso em: jan/2025.

MATIAS, José. Distribuições de Dados. José Matias, 8 jan. 2020. Disponível em: <https://zehmatias.com/data-science/distribuicoes-de-dados/>. Acesso em: 17 dez. 2024

OMER, Nayla Hassan. Water Quality Parameters. DOI: 10.5772/intechopen.89657. Data: 2019.

PARANÁ (ESTADO). Secretaria Estadual do Meio Ambiente e Recursos Hídricos (SEMA). Plano das Bacias do Alto Iguaçu e Afluentes do Alto Ribeira, 2014. Disponível em: http://www.aguasparana.pr.gov.br/arquivos/File/COALIAR/Comite/plano_de_bacia/PBAI_Produto_11_Relatorio_tecnico.pdf. Acesso em: 06 de jun. 2019.

PAULINO, C.D. et al. **Estatística Bayesiana**, 2. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2018.

PAZ, Rosineide da. **Teoria das Probabilidades**. 2018. Disponível em: <https://bookdown.org/rfdapaz/probabilidade/>. Acesso em: mar/2024.

SAMEJIMA, Kim. MATD49-Estatística não paramétrica: 5 - Testes de Aderência. Disponível em: <https://est.ufba.br/sites/est.ufba.br/files/kim/matd49-aula05-aderencia.pdf>. Acesso em: jan/2025.

SANEPAR. PLANO DIRETOR SAIC: Sistema de abastecimento de água integrado de Curitiba e Região Metropolitana.

Disponível em: <https://site.sanepar.com.br/arquivos/saicplanodiretor.pdf>. Acesso em jan/2025.

STOW, Craig A.; RECKHOW, Kenneth H.; QIAN, Song S.; LAMON III, Estel Conrad; ARHONDITSIS, George B.; BORSUK, Mark E.; SEO, Dongil. **Approaches to evaluate water quality model parameter uncertainty for adaptive TMDL implementation**. Journal of the American Water Resources Association, v. 43, n. 6, p. 1499-1510, 2007.

STREETER, H. W.; PHELPS, E. B. "A study of the pollution and natural purification of the Ohio River. US Public Health Service." Public Health Bulletin 146, 1925.

THOMANN, Robert V.; MUELLER, John A. **Principles of surface water quality modeling and control**. Harper & Row Publishers, 1987.

UFSC. **Probabilidades**. Disponível em:

<https://www.inf.ufsc.br/~andre.zibetti/probabilidade/teoremas-limite.html>. Acesso em: jan/2025.

UNITED STATES ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY (EPA). Factsheet on Water Quality Parameters. Washington, D.C., 14 set. 2021. Disponível em: https://www.epa.gov/system/files/documents/2021-07/parameter-factsheet_ph.pdf. Acesso em: 21 abr. 2025.

VON SPERLING, Marcos. **Estudos e modelagem da qualidade da água de rios**. 2. Ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2014.

WANG, Qinggai et Al. **A Review of Surface Water Quality Models**. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/2013/231768>. First published: 17 June 2013

ANEXO 1

As medições de DBO e OD disponibilizadas pela Renault do Brasil do rio Pequeno entre 2016 e 2020 se encontram abaixo.

Data	DBO5 (mg/L O2)	Oxigênio Dissolvido (mg/L)
8/11/2016	2	7,3
8/11/2016	3,5	7,7
11/27/2017	2	5,2
11/27/2017	2	5,3
11/29/2018	11,15	7,2
11/29/2018	12,45	7,36
9/16/2019	2,5	7
9/16/2019	9,83	7,8
11/3/2020	2	5,19
11/3/2020	6	5,11


```
num_combinations = 700
sampler = gmc.LatinHypercube(d=4, seed=42)
```



```

sample_unit_cube = sampler.random(n=num_combinations)
combined_samples = np.zeros((num_combinations, 4))
for i in range(num_combinations):
    idx1 = int(np.floor(sample_unit_cube[i, 0] * len(ODS)))
    idx2 = int(np.floor(sample_unit_cube[i, 1] * len(OD_observed_t1)))
    idx3 = int(np.floor(sample_unit_cube[i, 2] * len(DBO_observed_t1)))
    idx4 = int(np.floor(sample_unit_cube[i, 3] * len(velocidade)))

    combined_samples[i, 0] = ODS[idx1]
    combined_samples[i, 1] = OD_observed_t1[idx2]
    combined_samples[i, 2] = DBO_observed_t1[idx3]
    combined_samples[i, 3] = velocidade[idx4]

sample_ODS = combined_samples[:, 0]
sample_OD_observed_t1 = combined_samples[:, 1]
sample_DBO_observed_t1 = combined_samples[:, 2]
sample_velocidade = combined_samples[:, 3]
OD_observed_t1_orig = np.array([10.5, 10.5, 10.3, 10.3, 9.76, 9.76, 9.4, 9.3, 9.3, 9.2,
9.0, 8.98, 8.96, 8.9, 8.9, 8.7, 8.7, 8.7, 8.6, 8.6, 8.6, 8.6, 8.6, 8.6, 8.5, 8.5, 8.5, 8.5,
8.5, 8.4, 8.4, 8.4, 8.3, 8.3, 8.28, 8.2, 8.18, 8.1, 8.1, 8.1, 8.02, 8.0, 8.0, 8.0, 8.0, 8.0,
8.0, 8.0, 7.9, 7.9, 7.9, 7.9, 7.9, 7.9, 7.9, 7.9, 7.9, 7.9, 7.88, 7.82, 7.82, 7.8, 7.8, 7.8,
7.8, 7.8, 7.8, 7.78, 7.76, 7.7, 7.7, 7.7, 7.7, 7.7, 7.7, 7.7, 7.7, 7.64, 7.6, 7.6, 7.5, 7.5,
7.5, 7.5, 7.5, 7.5, 7.4, 7.4, 7.4, 7.4, 7.4, 7.4, 7.4, 7.4, 7.36, 7.3, 7.3, 7.3, 7.3, 7.3,
7.3, 7.3, 7.3, 7.2, 7.2, 7.2, 7.2, 7.18, 7.18, 7.18, 7.1, 7.1, 7.1, 7.1, 7.1, 7.1, 7.1, 7.08,
7.06, 7.06, 7.02, 7.0, 7.0, 7.0, 7.0, 7.0, 7.0, 7.0, 7.0, 6.97, 6.9, 6.9, 6.9, 6.9, 6.9, 6.9,
6.9, 6.9, 6.9, 6.8, 6.8, 6.8, 6.8, 6.8, 6.8, 6.8, 6.8, 6.7, 6.7, 6.7, 6.7, 6.7, 6.7, 6.7, 6.7,
6.7, 6.6, 6.6, 6.6, 6.6, 6.6, 6.6, 6.6, 6.5, 6.5, 6.5, 6.5, 6.5, 6.5, 6.48, 6.47, 6.4, 6.4, 6.4, 6.4, 6.4,
6.4, 6.4, 6.4, 6.3, 6.3, 6.3, 6.3, 6.3, 6.3, 6.3, 6.2, 6.2, 6.14, 6.14, 6.14, 6.1, 6.1, 6.1,
6.1, 6.0, 6.0, 6.0, 6.0, 6.0, 6.0, 5.98, 5.98, 5.9, 5.9, 5.9, 5.9, 5.9, 5.9, 5.9, 5.9, 5.9,
5.9, 5.9, 5.84, 5.84, 5.8, 5.6, 5.6, 5.6, 5.6, 5.6, 5.52, 5.52, 5.5, 5.5, 5.5, 5.4, 5.4, 5.4,
5.3, 5.3, 5.3, 5.3, 5.27, 5.2, 4.9, 4.8, 3.9, 3.6])
DBO_observed_t1_orig = np.array([1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0,
1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0,
1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0,
1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.1, 1.5, 1.5, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0,
2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0,
2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0,
2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0,
2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.1, 2.1, 2.1, 2.1, 2.1, 2.1, 2.2, 2.3, 2.3, 2.4, 2.4, 2.4, 2.5,
2.5, 2.5, 2.6, 2.6, 2.7, 2.7, 2.9, 2.9, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0,
3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 3.0, 3.1, 3.1, 3.1, 3.1, 3.1, 3.1, 3.5,
3.7, 3.7, 3.8, 3.9, 3.9, 4.0, 4.0, 4.0, 4.0, 4.0, 4.0, 4.0, 4.0, 4.0, 4.0, 4.0, 4.0, 4.0, 4.0,
4.0, 4.0, 4.1, 4.1, 4.6, 4.8, 4.8, 4.9, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 6.0, 6.0, 6.0, 6.0,
6.0, 6.0, 6.0, 6.0, 6.2, 6.2, 6.2, 7.0, 7.0, 7.0, 7.0, 7.0, 7.0, 8.0, 8.0, 8.0, 8.0, 9.0, 10.0, 10.0,
12.0, 12.0, 18.0, 23.0, 25.0])

OD_observed_t1 = np.array(sample_OD_observed_t1)
DBO_observed_t1 = np.array(sample_DBO_observed_t1)
ODS = np.array(sample_ODS)

```

```

OD_observed_t1 = np.array(sample_OD_observed_t1)
DBO_observed_t1 = np.array(sample_DBO_observed_t1)
velocidade=np.array(sample_velocidade)
velocidade=np.array(velocidade)
distancia=5.3
ajuste_de_unidade=(24*3.6)
t1 = distancia/velocidade/ajuste_de_unidade
#t1 = np.random.uniform(low=0.05, high=0.25, size=min_len)
# Ajustar ao menor tamanho comum
min_len = min(len(ODS), len(OD_observed_t1), len(DBO_observed_t1),len(t1))

def stratified_sampling(array, target_size):
    sorted_array = np.sort(array)
    bins = np.linspace(0, len(sorted_array), target_size + 1, dtype=int)
    sampled = [np.mean(sorted_array[bins[i]:bins[i + 1]]) for i in range(len(bins) - 1)]
    return np.array(sampled)

ODS = stratified_sampling(ODS, min_len)
OD_observed_t1 = stratified_sampling(OD_observed_t1, min_len)
DBO_observed_t1 = stratified_sampling(DBO_observed_t1, min_len)
t1 = stratified_sampling(t1, min_len)

# Distribuições para DBO2 e OD2
rng = np.random.default_rng()
L0 = gamma.rvs(a=1.9320, scale=2.7655, size=min_len)
OD0 = t.rvs(df=10, loc=6.5, scale=1.2, size=min_len)

# Funções de Streeter-Phelps para OD e DBO
def streeter_phelps_od(t, L0, ODS, OD0, Kd, K2):
    term1 = ODS
    term2 = (Kd * L0) / (K2 - Kd) * (np.exp(-Kd * t) - np.exp(-K2 * t))
    term3 = (ODS - OD0) * np.exp(-K2 * t)
    return term1 - term2 - term3

def streeter_phelps_dbo(t, L0, Kd):
    return L0 * np.exp(-Kd * t)

# Modelo Bayesiano e Amostragem
with pm.Model() as model:
    # Priors
    Kd = pm.Normal("Kd", mu=0.12, sigma=0.03)
    #Kd = pm.Uniform("Kd", lower=0.1, upper=20)
    K2 = pm.Lognormal("K2", mu=np.log(2.0065), sigma=0.5580)

    # Modelos determinísticos
    OD_model_t1 = streeter_phelps_od(t1, L0, ODS, OD0, Kd, K2)
    DBO_model_t1 = streeter_phelps_dbo(t1, L0, Kd)

# Verossimilhança

```

```

    pm.Normal("OD_obs_t1", mu=OD_model_t1, sigma=5,
observed=OD_observed_t1)
    pm.Gamma("DBO_obs_t1", mu=DBO_model_t1, sigma=2,
observed=DBO_observed_t1)

# Amostragem
trace = pm.sample(5000, tune=500, return_inferencedata=True)
prior_samples = pm.sample_prior_predictive(500)

# Resultados
ax=az.plot_trace(trace, var_names=["Kd", "K2"], figsize=(6.3, 3.78),
compact=True, # Reduz espaço para ocultar rastreamento
combined=True, # Combina todas as cadeias
)
for axes in ax.flatten(): # Iterar pelos eixos gerados
    for line in axes.get_lines():
        line.set_linestyle("-") # Define linha sólida
plt.tight_layout(pad=0.5) # Ajusta o layout
plt.show()
# Amostragem preditiva posterior
posterior_predictive = pm.sample_posterior_predictive(trace, model=model)
# Histogramas das distribuições a PRIORI de Kd e K2
kd_prori = prior_samples.prior["Kd"].values.flatten()
k2_prori = prior_samples.prior["K2"].values.flatten()

# Extração de valores preditivos
od_posterior = posterior_predictive.posterior_predictive["OD_obs_t1"].mean(axis=(0,
1)) # Média sobre chain e draw
dbo_posterior =
posterior_predictive.posterior_predictive["DBO_obs_t1"].mean(axis=(0, 1)) # Média
sobre chain e draw

# Criando o gráfico
plt.figure(figsize=(6.3, 3.78))
plt.hist(OD_observed_t1, bins=int(np.ceil(1 + 3.322 *
np.log10(len(OD_observed_t1_orig)))), alpha=0.5, label="OD Observado",
color="blue", density=True)
plt.hist(od_posterior, bins=int(np.ceil(1 + 3.322 *
np.log10(len(OD_observed_t1_orig)))), alpha=0.5, label="OD Modelado",
color="orange", density=True)
plt.xlabel("OD")
plt.ylabel("Densidade")
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
# Histograma para DBO
plt.figure(figsize=(6.3, 3.78))
plt.hist(DBO_observed_t1, bins=int(len(DBO_observed_t1_orig)**0.5), alpha=0.5,
label="DBO Observado", color="blue", density=True)

```

```

plt.hist(dbo_posterior, bins=int(len(DBO_observed_t1_orig)**0.5), alpha=0.5,
label="DBO Modelado", color="orange", density=True)
plt.xlabel("DBO")
plt.ylabel("Densidade")
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()

# Função para plotar distribuições a priori e a posteriori
def plot_priors_and_posteriors(prior_samples, trace, variable_name, ax):
    """ Plota as distribuições a priori e a posteriori. """
    bins=int(len(DBO_observed_t1)**0.5)
    #bins=int(np.ceil(1 + 3.322 * np.log10(len(DBO_observed_t1))))
    # Prior
    ax.hist(prior_samples, bins=bins, density=True, alpha=0.5, label="A priori",
color="blue")
    # Posterior
    posterior_samples = trace.posterior[variable_name].values.flatten()
    ax.hist(posterior_samples, bins=bins, density=True, alpha=0.5, label="A
posteriori", color="orange")
    # Adicionar legenda somente para K2
    if variable_name == "K2":
        ax.legend()

# Criando o gráfico
fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(6.3, 3.78))
variables = ["Kd", "K2"]
priors = [kd_prori, k2_prori]

for ax, var, prior in zip(axes.ravel(), variables, priors):
    plot_priors_and_posteriors(prior, trace, var, ax)
    ax.set_title(var, fontsize=12) # Adiciona o título do eixo individual

plt.tight_layout()
plt.show()

```