ARTUR LOURIVAL DA FONSECA MACHADO

# PESQUISA OPERACIONAL APLICADA Á ANALISE DE PORTFÓLIO

CURITIBA
2001

ARTUR LOURIVAL DA FONSECA MACHADO

# PESQUISA OPERACIONAL APLICADA À ANÁLISE DE PORTFÓLIO

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ciências. Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, área de concentração Programação Matemática. Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.
Orientador: Prof. Dr. Celso Carnieri

CURITIBA
2001

**ARTUR LOURIVAL DA FONSECA MACHADO**

# PESQUISA OPERACIONAL APLICADA À ANÁLISE DE PORTFÓLIO

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências no curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - Programação Matemática da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:

Prof. Dr. Celso Carnieri
Departamento de Matemática, UFPR

Prof. Dr. Alceu Souza
Departamento de Ciências Econômicas, UFPR

Prof. Dr. Marco André Mazzarotto
Universidade Tuiuti do Paraná, UTP

Curitiba, 27 de julho de 2001.

SUMÁRIO

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Celso Carnieri, pela orientação para a realização deste trabalho.

Aos professores do curso, Alceu Souza, Anselmo Chaves Neto, Jiahong Yun, Jin Yun Yuan, Maria Teresinha Arns Steiner, Ricardo Mendes Jr., Rubens Robles Ortega, pelos ensinamentos valiosos.

Ao prof. Carlos Henrique e aos colegas Rui, Inácio, Manoel, Ingrid, Elizabeth, com quem pude contar e cujo convívio foi propício à conclusão do curso.

À Diretoria da UNICENTRO, Diretoria de Pós-Graduação e Departamento de Ciências Exatas e Naturais, pela oportunidade e apoio durante o curso.

À coordenação do curso e funcionários do CESEC/UFPR.

À CAPES, pelo apoio na forma de Bolsa de Estudos.

À minha família.

## LISTA DE FIGURAS



## LISTA DE TABELAS



## LISTA DE ABREVIATURAS

APT: *Arbitrage Pricing Theory.*
CAPM: *Capital Asset Pricing Model.*
Ibovespa: Índice da Bolsa de Valores do Estado de São Paulo.
MV: *Mean-Variance.*
VaR: *Value at Risk.*

# LISTA DE SÍMBOLOS

$\boldsymbol{A}$: matriz de dimensão p x n, dos coeficientes de p restrições.

**b**: vetor de dimensão p, dos "recursos" das restrições.

M: matriz de dimensão (n+q+p) x (n+q+p) composta pelas matrizes $\Sigma$, $A'$, $A$, com as demais entradas de valor nulo, utilizada no Algoritmo da Linha Crítica, de Markowitz.

$\boldsymbol{R}$: Conjunto de números reais.

**R**: Vetor de dimensão n+q+p, com as n primeiras coordenadas dadas pelo vetor $\boldsymbol{\mu}$.

S: Vetor de dimensão n+q+p, com as p últimas coordenadas dadas pelo vetor **b**.

$\boldsymbol{R}^n$: Espaço de dimensão n.

$\mathbf{r}_x$: vetor de retornos de um portfólio **x**, dada por $\mathbf{r}_x = X.\mathbf{x}$, e com dimensão igual ao número de cotações disponíveis, m.

$r_t$: Retorno histórico de um portfólio **x** no instante t, t-ésima coordenada de $\mathbf{r}_x$.

$S_t$: cotação de um ativo, no instante t.

**x**: vetor de dimensão n, define as frações de orçamento destinadas a cada ativo, também chamado de portfólio **x**.

X: matriz de dimensão m x n, para m cotações de n ativos.

$\boldsymbol{\mu}$: vetor de dimensão n, da esperança matemática para os retornos de n ativos.

$\lambda_E$: parâmetro "*tradeoff*" entre retorno e risco.

$\boldsymbol{\lambda}$: vetor de dimensão p, de Multiplicadores de Lagrange, no Algoritmo de Markowitz.

$\Sigma$: matriz de covariâncias dos retornos dos n ativos, de dimensão n x n.

$\sigma_P$: desvio padrão dos retornos de um portfólio.

$\sigma_A$: desvio padrão dos retornos de um ativo A.

$\sigma_{A,B}$: covariância entre os retornos dos ativo A e B.

**Nota**: Neste trabalho é utilizado o sistema inglês de escrita numérica.

# RESUMO

O presente trabalho trata da utilização da técnica de Programação Matemática da Pesquisa Operacional para a Análise de Portfólio com otimização da relação risco - retorno em carteiras de investimentos. São construídos portfólios otimizados segundo o critério de dominância de Pareto, para um parâmetro "*tradeoff*" entre risco e retorno. Fazendo-se variar este parâmetro entre a máxima aversão, com portfólios de mínimo risco, à mínima aversão, com portfólios de máximo retorno, é obtido um conjunto de portfólios eficientes estratégicos a partir dos quais é construída a Fronteira de Eficiência dos Portfólios. Os modelos utilizados são o de Média-Variância (MV) proposto por Harry M. Markowitz (1959) e um modelo com base na metodologia de Valor sob Risco de J. P. Morgan (1994), supondo retornos dos portfólios modelados por uma distribuição log-normal e, portanto, não considerados derivativos e commodities. São utilizadas taxas de retorno correspondentes aos preços diários de fechamento de 63 ativos negociados na Bolsa de Valores do Estado de São Paulo - Bovespa - no período de 03/10/1997 a 29/12/2000, obtidos através do banco virtual www.InvestShop.com.br. O modelo MV é formulado como um problema paramétrico de programação quadrática, sujeito a restrições lineares incluindo a restrição de orçamento, com solução através do algoritmo da Linha Crítica, proposto por Markowitz, baseado na técnica de Multiplicadores de Lagrange. O modelo MVaR corresponde a um problema de programação não linear com risco calculado pela metodologia VaR (Value at Risk), sujeito às mesmas restrições do modelo MV, acrescentada uma restrição para retornos iguais aos obtidos no modelo MV, permitindo a comparação dos dois modelos. A solução do modelo MVaR, para retornos normalmente distribuídos, é equivalente à do modelo de MV, que proporciona portfólios com mínima variância, sobre a qual é realizado o cálculo do risco pela metodologia VaR. Como os modelos utilizados supõem que ao menos os retornos dos portfólios sejam normalmente distribuídos, é verificada a qualidade do ajuste destes retornos à distribuição de Gauss. Os algoritmos são implementados nos programas Maple e Lingo.

# ABSTRACT

The present work is about the use of some Operational Research techniques to perform Portfolio Analysis with optimization of the relationship between risk and return in wallets of investments. Optimal Portfolios are built according to the approach of Pareto, for a parameter "tradeoff" between risk and return. Making to vary this parameter among the maximum aversion, with portfólios of minimum risk, to the minimum aversion, with portfolios of maximum return, it is obtained a group of strategic efficient portfolios starting from which the Efficient Frontier of Portfolios is built. The used models are the Mean-variance (MV) proposed by Harry M. Markowitz (1959) and a model of Mean - Value at Risk (MVaR), for returns of the portfolios modeled by a lognormal distribution and, therefore, not considered derivative and commodities. The used returns correspond to daily closing prices of 63 assets negotiated in the stock exchange of the State of São Paulo - Bovespa - in the period from 03/10/1997 to 29/12/2000, obtained through the virtual bank www.InvestShop.com.br. The model MV is formulated as a parametric problem of quadratic programming, subject to lineal constrains including the budget restriction, with solution through the Critical Line algorithm, proposed by Markowitz, based on the Lagrange Multipliers technique. The model MVaR corresponds to a problem of non-lineal programming with risk calculated by the VaR methodology (Value at Risk), subject to the same restrictions of the model MV, added a restriction for the same returns to the obtained in the model MV, allowing the comparison of the two models. The solution of the model MVaR, for lognormal returns, it is equivalent to the one of the MV model, which provides portfolios with minimum variance, on which the calculation of the risk is accomplished by the VaR methodology. As the used models suppose at least that the returns of the portfólios are lognormal distributed, the fitting of a Gauss's distribution is verified for these returns. The algorithms are implemented in the programs Maple and Lingo.

# 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho trata da utilização da técnica de Programação Matemática na análise de portfólio para otimização da relação risco-retorno em modelos matemáticos de administração de carteiras de investimento, visando à obtenção de portfólios eficientes para os diferentes graus de aversão ao risco, isto é, a Fronteira de Eficiência, para portfólios construídos a partir de 63 ativos negociados na Bovespa, no período de 03/10/1997 a 29/12/2000.

O capítulo II trata de algumas definições da Análise de Portfólio, como o retorno e a incerteza (ou risco) de ativos e portfólios, modelagem log-normal para retornos, quantificação do risco pela variância dos retornos, benefícios da diversificação de investimentos, a função utilidade que leva em conta o grau de aversão ao risco de cada investidor, a modelagem de Problema Paramétrico de Programação Quadrática para determinar portfólios estratégicos a partir dos quais é obtida a Fronteira de Eficiência.

No capítulo III são abordados os problemas de Programação Linear (PL) e Programação Quadrática (PQ) e suas formas paramétricas (PPL e PPQ) utilizados na modelagem de problemas que visam à otimização da relação risco-retorno na seleção de portfólios, a técnica de Multiplicadores de Lagrange e, ainda, verificação do ajuste de um conjunto de dados a uma distribuição estatística.

O capítulo IV apresenta o modelo de Média-Variância (MV) proposto por Harry M. Markowitz (1959), primeiro modelo de administração de carteiras de investimentos de risco baseado na Estatística, tendo sido criado na década de 50 e o modelo MVaR como uma aplicação direta da metodologia de mensuração de risco (variância) do modelo MV, para obtenção da Fronteira de Eficiência para risco dado pela metodologia de Valor sob Risco - VaR, desenvolvida por J. P. Morgan, publicada em 1994.

No capítulo V são apresentadas as aplicações do modelo MV de Markowitz e MVaR com base na metodologia de quantificação de risco de J. P. Morgan, onde são utilizados retornos históricos de 63 ativos negociados na Bolsa de Valores do Estado de São Paulo, entre as datas de 03/09/97 a 29/12/00 (848 dias úteis), obtidos do banco virtual InvestShop.com.br. A metodologia utilizada para tratamento dos dados é apresentada no decorrer do capítulo.

No capítulo VI são debatidos os resultados obtidos quanto à sua aplicabilidade na construção de portfólios, aos benefícios obtidos e quanto às suposições necessárias às metodologias de mensuração de risco utilizadas. São ainda apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

# 2. ANÁLISE DE PORTFÓLIO

## 2.1. Introdução

Para exercer uma oportunidade de investimento, empresas sem disponibilidade de caixa podem contratar empréstimo, emitir papéis como ações, debêntures, etc. Em contrapartida, pessoas físicas e jurídicas podem interessar-se por estes títulos, como forma de obter retornos para seus recursos disponíveis.

Esses títulos, ou ativos, possuem algumas características que permitem avaliar sua utilidade de uma perspectiva do investidor, e que se constituem em apelos econômicos para benefícios futuros. Em títulos federais, há o apelo do fluxo de pagamentos futuros pré-especificados; fundos de investimentos e subscrições de ações representam apelos a dividendos futuros e participação em ativos de empresas ou corporações. Outras formas de investimentos são encontradas no mercado financeiro, tais como derivativos (ex. opções), commodities (ex. mercado de futuros), etc.

Os ativos financeiros podem ser caracterizados por dois aspectos importantes: risco e retorno. DOWD (1999, p. 3), relata a preocupação com o risco:

> "*Everything changes, and changes can be good or bad for those affected by them. Change therefore leads to risk, the prospect of gain or loss, and risk (or, more precisely, the risk of loss) is something that we must all come to terms with. (...) It means that we must manage risk: we must decide what risks to avoid, and how we can avoid them; what risks to accept, and on what terms to accept them; what new risks to take on; and so on*".

A decisão entre investir em determinado ativo $A$, com alto retorno esperado e alto risco (variabilidade), e em um ativo $B$, com baixo retorno esperado, mas com baixo risco, requer um critério de ajuste entre retorno esperado e risco.

MARKOWITZ (1959), desenvolveu um modelo de análise da relação risco-retorno baseado em informações históricas sobre ativos, onde as informações necessárias para escolher o melhor portfólio para quaisquer níveis de risco estão contidas em três parâmetros estatísticos: média, desvio padrão (ou variância) e correlações (ou covariâncias).

Segundo GOETZMANN (1998), embora não requeira informações sobre política de dividendos, lucros, participação no mercado, estratégia, qualidade de administração, ou seja, nenhuma informação com que analistas do mercado financeiro preocupam-se, o modelo de Markowitz alterou a forma com que estes tomam suas decisões, não necessariamente seguindo à risca suas recomendações, mas utilizando-o como forma de avaliar riscos básicos e relações risco-retorno.

Modelos como o CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) desenvolvido por William F. Sharpe (1964) e o APT (*Arbitrage Pricing Theory*) desenvolvido por Ross (1976), a partir do modelo de Markowitz, têm como objetivo determinar o risco de um portfólio em relação a fatores mensuráveis direta ou indiretamente, com o estabelecimento de retornos adequados aos níveis de risco.

O CAPM considera na escolha de ativos uma medida da sensibilidade das flutuações de suas taxas de retorno em relação às flutuações de um portfólio de mercado (ex.: Ibovespa, como aproximação), através de fatores de mensuração de risco chamados betas ($\beta$) de ativos, calculados a partir das covariâncias destes ativos em relação ao portfólio de mercado.

ROSS (1976) argumenta que betas são somente pontos de partida, e que os retornos de ativos são relacionados a fatores macroeconômicos, responsáveis pela variabilidade global do mercado. Os fatores de risco são identificados com o estudo da estrutura de covariâncias (ou correlações) dos retornos através de técnicas como a de Análise Fatorial (ver Johnson, 1998) e Análise de Regressão.

Uma técnica bastante conhecida para classificar oportunidades de investimento, para diferentes retornos esperados e respectivos riscos, é a da Razão de Sharpe, que permite a classificação de ativos comparando-se as razões entre seus retornos diferenciais em relação a um portfólio *benchmark* e a variabilidade desses retornos.

Segundo DOWD (1999), a Razão de Sharpe tem algumas vantagens como fornecer informações suficientes para a escolha (*ex ante*) ou avaliação (*ex post*) entre dois investimentos, sem ambigüidade por duas possíveis classificações: 1) pelo desempenho dos retornos e 2) pelas posições do risco, mas relata problemas de correlação dos retornos de ativos com o portfólio do investidor. Dados dois ativos $A$ e $B$ classificados pela Razão de Sharpe, onde $A$ tem melhor desempenho e correlação de retornos positiva com o portfólio, mas $B$ apresenta retornos com correlação negativa com o portfólio, então a compra do ativo $A$ faz aumentar o risco do portfólio, enquanto $B$ proporciona redução de risco.

DOWD propõe a utilização da Regra de Sharpe Generalizada, que não apresenta os problemas de correlação[1], e pode ser calculado para risco dado pela metodologia VaR em substituição ao desvio padrão.

---

[1] A Razão de Sharpe de um ativo não considera a correlação deste ativo com o portfólio do investidor, somente com um portfólio de mercado (benchmark).

DOWD relata a técnica de Valor sob Risco - VaR (Value at Risk), como em crescente utilização na análise de ativos financeiros em mercado de risco. Entre as formas de avaliação do Valor sob Risco, encontram-se as metodologias de VaR paramétrico ou analítico, que parte da suposição de distribuição Gaussiana dos retornos e a Simulação Histórica e com as técnicas de Monte Carlo.

Estabelecida uma forma para a quantificação do risco, a próxima etapa corresponde à construção de portfólios que, por algum critério específico, são os melhores entre todos os portfólios possíveis. Investidores racionais, segundo MARKOWITZ (1959), devem ter como medida do benefício a ser obtido com a aplicação em ativos, não somente a taxa de retorno. Devem considerar, também, os níveis de risco a que seus recursos estarão expostos.

Para as preferências de diferentes investidores, correspondem várias predisposições ao risco, alguns ávidos por retorno, outros mais conservadores. A cada nível de predisposição ao risco, corresponde um parâmetro "*tradeoff*" entre risco e retorno.

Entre os objetivos de um modelo de análise de portfólio, está o de obter portfólios otimizados, segundo o critério de dominância[2], para cada parâmetro de aversão ao risco. Este objetivo está explícito no modelo MV e também em modelos MVaR, com a construção da Fronteira de Eficiência dos portfólios.

Nos modelos APT e CAPM, esta característica está implícita na formação de portfólios, mas suas essências estão nos chamados β (**betas**) de ativos, ou seja, em identificar índices de sensibilidade, para as variações dos retornos em ativos, devidos a variações no mercado. Nestes modelos o objetivo é a diversificação de ativos para proteção contra oscilações correlacionadas com o mercado ou com os fatores de risco deste mercado.

## 2.2. Retorno e Risco de Ativos

O valor mais esperado para as taxas centesimais de retorno ($r_t$) de ativos financeiros corresponde à média geométrica dos fatores ($1 + r_t$) (com t dado normalmente em meses, semanas ou dias) subtraída da unidade. A média geométrica substitui cada um dos fatores, ao longo de vários períodos, por um fator que produz a mesma variação final.

---

[2] Em condições normais, investidores devem adotar o critério de dominância de Pareto na escolha de seus portfólios, isto é, preferir portfólios com menor risco, entre dois portfólios de mesmo retorno e, por outro lado, preferir portfólios com maior retorno, entre portfólios com igual risco.

Dados os retornos percentuais de um ativo em m períodos, $\{r_1, \ldots, r_m\}$, o valor mais esperado ($\bar{r}_G$) para os retornos deste ativo para um período é dado por:

$$\bar{r}_G = \left[\prod_{t=1}^{m}(1+r_t)\right]^{1/m} - 1 \qquad (1)$$

onde $r_t = (S_t/S_{t-1})-1$, com $S_t$ a cotação do ativo no t-ésimo período.

Um exemplo com dois períodos com taxas de retorno de -20%(perda) e 25%(ganho) mostra que a média aritmética (2.5%) não representa adequadamente o valor mais esperado, mas sim a média geométrica (0.0%) dos fatores $(1 + r_t)$, subtraída da unidade.

Uma transformação logarítmica aplicada aos fatores $(1 + r_t) = (S_t/S_{t-1})$, permite obter a Esperança Matemática dos retornos logarítmicos ($\mu = ln(1+\bar{r}_G)$) e a matriz de Covariâncias em conformidade com os resultados de Estimadores de Máxima Verossimilhança[3] da Estatística:

$$\mu = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}\ln(1+r_t) \qquad (2)$$

Esta transformação corrige o problema de equivalência de taxas negativas e positivas, pois uma taxa logarítmica positiva é exatamente a mesma para repor a perda de uma negativa.

Dessa forma a transformação proporciona adequação para obtenção da função distribuição de probabilidade e função de probabilidade acumulada onde retornos negativos têm a mesma importância que positivos. Como exemplo, para os retornos $r_1=\ln(1-20\%)$ e $r_2=\ln(1+25\%)$, as probabilidades $P[\ln(0.8) < r < 0]$ e $P[0 < r < \ln(1.25)]$ apresentam intervalos com a mesma variação e têm a mesma importância, em contraposição às probabilidades $P[-20\% < r < 0]$ e $P[0 < r < 25\%]$.

Substituindo $\ln(1+r_t) = \ln(S_t/S_{t-1})$, pode-se obter (2) a partir das cotações $S_t$:

$$\mu = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}\left[\ln(S_t) - \ln(S_{t-1})\right] \Rightarrow \qquad \mu = \frac{1}{m}\left[\ln(S_m) - \ln(S_0)\right] \qquad (3)$$

A esperança matemática dos retornos apresenta características como incerteza, pois as forças econômicas não são entendidas suficientemente bem para permitir previsões. Além disso, influências não econômicas podem mudar o curso de fatores dados como certos.

Em Decisões Financeiras, considera-se o risco como "o grau de incerteza a respeito de um evento", ou como a "possibilidade de perda".

Nas técnicas matemáticas de Análise de Portfólio deseja-se estabelecer portfólios

---

[3] As estatísticas média e variância amostral ($\bar{x}$ e s) são estimativas dos parâmetros populacionais ($\mu$ e $\sigma$), que maximizam a probabilidade, ou densidade de probabilidade para variável contínua, de ser obtida a amostra observada. Ver Johnson, 1998, pág. 182.

ótimos em relação à performance passada de séries temporais dos retornos. Nesse sentido, o risco está presente principalmente na variabilidade das taxas de remuneração de um ativo financeiro, sobre qual retorno pode-se esperar em performance futura.

A série histórica de retornos de um ativo é resumida por um valor mais esperado. Deve-se estudar a distribuição dos valores históricos para saber-se o intervalo no qual espera-se que ocorra esse valor. Em Probabilidade, para uma população normalmente distribuída, esse intervalo é dado em termos de Desvios Padrão, onde aproximadamente 68.26%, (95.44%, 99.74%) dos dados encontram-se no intervalo entre a média menos um, (dois, três) desvios padrão e a média mais um, (dois, três) desvios padrão.

Assim, quanto maior o desvio padrão ($\sigma$), maior o intervalo onde é provável que o valor mais esperado dos retornos possa oscilar, o que pode ser caracterizado como uma medida do risco associado ao ativo. A variância ($\sigma^2$) dos retornos do i-ésimo ativo é dada por:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{(m-1)} \sum_{t=1}^{m} (r_{t,i} - \mu_i)^2 \tag{4}$$

onde $r_{t,i} = \ln(S_{t+1,i}/S_{t,i})$ são os retornos logarítmicos e $\mu_i$ é o retorno esperado do i-ésimo ativo.

O risco de um portfólio não é dado somente pela soma dos riscos individuais dos ativos que o compõem, mas também pela soma das covariâncias entre estes ativos. A covariância entre os retornos do i-ésimo ativo com os retornos do j-ésimo ativo é dada por:

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{(m-1)} \sum_{t=1}^{m} (r_{t,i} - \mu_i)(r_{t,j} - \mu_j) \tag{5}$$

Entre outras formas de se medir o risco, podemos citar a correlação dos retornos dos ativos com algum índice de mercado, como o Ibovespa (ver **Anexo IV**), e também sua decomposição em conjuntural, ou aquele que é explicado pelas variações no índice de mercado, e específico, que é próprio do ativo e não correlacionado com o mercado.

Alguns modelos como EWMA(*Exponentialy Weighted Moving Average*) e GARCH[4] (*Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedastic*) constituem-se em alternativas mais robustas para avaliação de variância, estimando-a como variável ao longo do tempo, isto é, considerando a existência de Heterocedasticidade.

A determinação de grupos de ativos que se apresentam correlacionados por "fatores de mercado", embora esses fatores não sejam diretamente mensuráveis, através da técnica de

[4] Uma equação GARCH de ordem (p,q) assume que a variância local dos termos de erro no instante t é linearmente dependente nos quadrados dos últimos p valores dos termos de erro e dos últimos q valores das variâncias locais. Quando q é zero, o modelo reduz-se a um modelo de ARCH.

Análise Fatorial, constitui-se em técnica de mensuração do risco. Esta técnica pode apresentar vantagens, uma vez que identifica riscos relacionados a fatores não mensuráveis, mesmo quando não considerados todos ativos existentes, além de proporcionar redução da estrutura do problema, que passa a ser tratado com um número menor de variáveis que representam esses fatores.

## 2.3. Retorno e Variância de um Portfólio

Seja $X_{(m \times n)}$ a matriz de retornos históricos em m períodos para n ativos e $\mathbf{x}$ o vetor de dimensão definida pelo número de ativos cuja i-ésima coordenada define a fração de orçamento destinada ao i-ésimo ativo.

Os retornos históricos de um portfólio $\mathbf{x}$, em m períodos, correspondem às coordenadas do vetor $\mathbf{r}_p = X.\mathbf{x}$. Estas coordenadas correspondem a uma amostra de tamanho m da variável aleatória $r_t = X_t.\mathbf{x}$, onde $X_t$ é a t-ésima linha da matriz X.

Um portfólio $\mathbf{x} = \mathbf{c}$ tem retorno esperado $\mu_p = E(X.\mathbf{c})$ e variância $\sigma^2_p = V(X.\mathbf{c})$ calculados sobre a amostra de tamanho m da variável aleatória $r_t$ e dados por (ver Johnson, pág. 148):

$$\mu_p = E(r_p) = E(X\mathbf{c}) = \mathbf{c}'E(X) = \mathbf{c}'.\boldsymbol{\mu} \qquad \textbf{(6)}$$

$$\sigma^2_p = V(X\mathbf{c}) = \mathbf{c}'V(X)\mathbf{c} = \mathbf{c}'\Sigma\mathbf{c} \qquad \textbf{(7)}$$

onde $\boldsymbol{\mu} = E(X)$ e $\Sigma = V(X)$ são o vetor da esperança matemática e a matriz de covariâncias, respectivamente, dos retornos logarítmicos dos ativos que compõem o portfólio.

## 2.4. Redução da Variância pela Diversificação de Ativos

Segundo MARKOWITZ (1959) a diversificação de investimentos para compor um portfólio traz alguns benefícios:

a) Redução da variância (risco), mantendo o mesmo nível de retorno;

b) Aumento de retorno, com o mesmo nível de variância (risco).

A composição de um portfólio é obtida pela aplicação de percentual do orçamento em cada ativo disponível. Os benefícios ocorrem devido às oscilações em sentidos contrários nos retornos (correlações negativas), de forma alternada ao longo do tempo e as variações tendem a se anular.

Portfólios diversificados normalmente apresentam desvio padrão menor que a média ponderada pelas participações, dos desvios padrões dos ativos que o compõem. A exceção ocorre para ativos que apresentam correlação positiva igual à unidade, (perfeitamente correlacionados).

Um exemplo com dois ativos, com retornos esperados dados por $\boldsymbol{\mu}$ = [ 15%, 10%], variâncias dadas por $\sigma^2_A = 80\%^2$, $\sigma^2_B = 30\%^2$ e covariância $\sigma_{AB} = 40\%^2$. O retorno e a variância de um portfólio $\mathbf{x}$ = [0.6, 0.4], são dados por:

$\boldsymbol{\mu}_p = [0.6, 0.4].[15\%, 10\%]' = 13.00\%$

$$\sigma^2_p = \begin{bmatrix}0.6 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}80 & 40\\ 40 & 30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6\\ 0.4\end{bmatrix} = 52.80\%^2 \rightarrow \sigma_p = 7.266\%$$

Isto é, temos um retorno igual à média ponderada dos retornos dos ativos A e B, e desvio padrão menor que a média ponderada (7.746) dos desvios padrões dos ativos A e B, para um coeficiente de correlação $\rho_{AB} = 40 / (80^{1/2}*30^{1/2}) \cong 0.8$.

Quanto mais próximo da unidade for o coeficiente de correlação, mais próximo da média ponderada dos desvios padrões será o desvio padrão do portfólio.

Para correlações negativas, como $\rho_{AB} = -0.2$ ($\sigma_{AB} \cong -10$) tem-se:

$$\sigma^2_p = \begin{bmatrix}0.6 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}80 & -10\\ -10 & 30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6\\ 0.4\end{bmatrix} = 28.80\%^2$$

O desvio padrão é ainda menor, ou seja, $\sigma_p = 5.367\%$.

À medida que o coeficiente de correlação aproxima-se de -1, temos cada vez maior redução no desvio padrão. Para $\rho_{AB} = -1$, ($\sigma_{AB} \cong -49$), tem-se:

$$\sigma^2_p = \begin{bmatrix}0.6 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}80 & -49\\ -49 & 30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6\\ 0.4\end{bmatrix} = 10.08\%^2$$

E um desvio padrão para o portfólio de $\sigma_p = 3.175\%$.

A diversificação apresenta-se como uma forma de redução de risco.

O gerenciamento de Carteiras de Investimento pela determinação de portfólios com ativos diversificados diminui a incerteza (variabilidade) quanto à taxa de retorno que melhor representa a performance passada.

Este benefício deve ser interpretado com cautela, devido às duas projeções para a performance futura, a partir da passada, supostas no modelo: taxas de retorno e correlações, para os ativos que compõem o portfólio. A diversificação não garante os benefícios, mas corresponde à escolha com melhor desempenho em performance passada: espera-se que um ativo com melhor desempenho (maior retorno) no passado seja também o de melhor desempenho no futuro, e também que as oscilações mantenham-se aproximadamente como nos dados históricos, mantendo também o nível de risco.

Além das características citadas, deve-se considerar que existem correlações dos ativos de um portfólio com ativos que não fazem parte do portfólio ou da análise, por não apresentarem cotações disponíveis, ou não terem sido negociados no período. Estas correlações não são captadas pelo modelo.

## 2.5. Teoria da Utilidade e Fronteira de Eficiência

Conforme SECURATO (1996), uma curva de equilíbrio que pode ser útil a uma grande maioria dos investidores do mercado de capitais, é a chamada Curva de Mercado de Capitais (CMC, **Fig. 1**), que relaciona diversos níveis de retorno a níveis de risco; estes níveis de risco são dispostos a partir de Títulos Federais e Cadernetas de Poupança como de risco zero, às ações ordinárias e preferenciais de empresas, como de risco máximo. A classificação, segundo o autor, não é fixa, podendo ter seu posicionamento alterado com a conjuntura dos ativos.

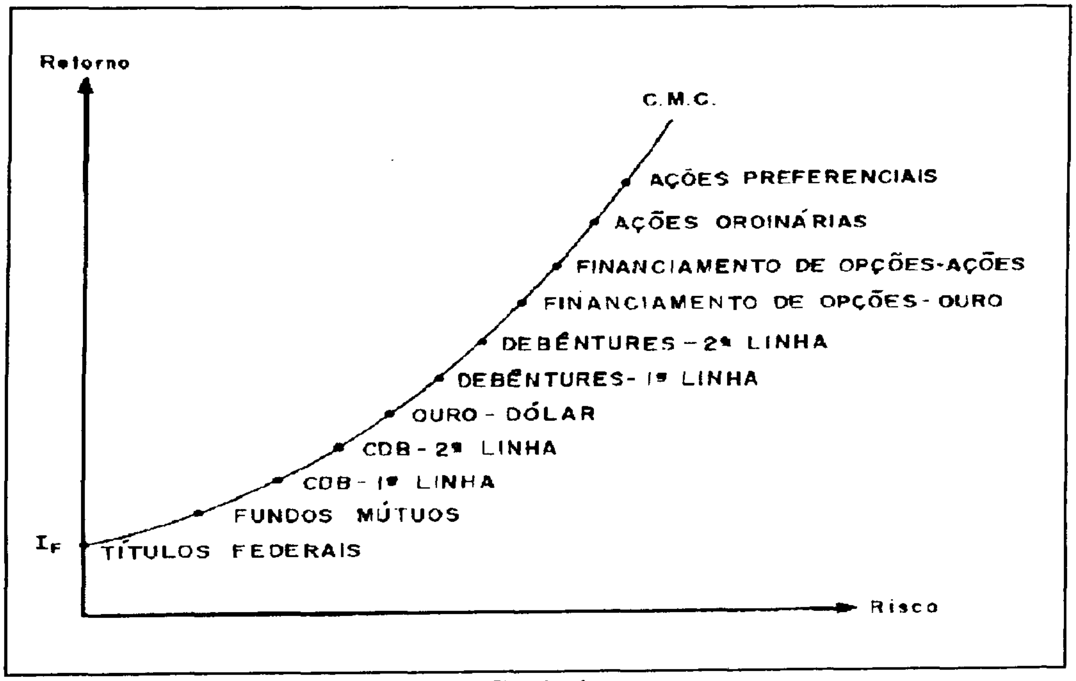



**Figura 1: Curva de Mercado de Capitais**

A Curva de Mercado de Capitais pode ser interpretada como uma curva de indiferença, ou de equilíbrio, informando o retorno esperado para cada nível de risco.

Quando o risco é pequeno, um aumento de risco $\Delta V$ é aceito para se obter um retorno adicional $\Delta r$; para risco mais alto, maior retorno adicional é requerido para compensar o mesmo aumento de risco $\Delta V$.

Uma função que relaciona os retornos r para cada nível de risco V é chamada função utilidade.

Uma função utilidade do investidor - U(r) - deve receber gradativamente menor acréscimo para um mesmo acréscimo de retorno, à medida que o risco se eleva, desde que para maiores retornos tem-se maior risco. Isto é, deve ser uma função crescente a taxas decrescentes:

$U(r) > 0$ e crescente;

$U'(r) > 0$ e decrescente;

$U''(r) < 0$ e crescente, tendendo assintoticamente a zero.

Uma forma muito adotada para obtenção de maior retorno e redução de risco é a da diversificação de ativos, com análise da relação risco-retorno. A função utilidade mais freqüentemente utilizada neste caso, segundo DAS (1998), é uma função utilidade exponencial que tem a forma:

$$U(r) = 1 - \exp(-\lambda r) \qquad \textbf{(8)}$$

onde $\lambda$ é um parâmetro de aversão ao risco, U(r) retorna o nível de utilidade para a variável taxa de retorno do portfólio (r), e r é obtida como combinação linear das taxas de retorno dos ativos, com coeficientes dados pelas participações dos ativos no portfólio.

Esta função tem as características necessárias para uma função utilidade, e pode adaptar-se a todos os tipos de investidores, bastando variar o parâmetro de aversão ao risco $\lambda$.

O valor da função utilidade U(r) depende da distribuição de probabilidade dos retornos f(r). Para maximizar o valor esperado da função utilidade, é necessário que:

$$\text{Max } E[U(r)] = \text{Max } \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \mathbf{e}^{(-\lambda \mathbf{r})}\right) f(r)dr$$

ou

$$\text{Min } E[U(r)] = \text{Min } \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}^{(-\lambda \mathbf{r})} f(r)dr$$

A função a ser minimizada é, em Estatística, a Função Geradora de Momentos, avaliada em $-\lambda$.

Para o caso normal:

$$MGF_N(-\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\lambda r)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(r-\mu_P)}{\sigma}\right]^2} dr$$

$$MGF_N(-\lambda) = \exp(-\lambda\mu_P + (\lambda\sigma)^2/2) \qquad \textbf{(9)}$$

Como $MGF_N$ é dada por uma exponencial, basta minimizar o expoente, para obter o mínimo da $MGF_N$:

$$\text{Min } -\lambda\mu_P + (-\lambda)^2\sigma^2/2$$

ou

$$\text{Max } \mu_P - \lambda\sigma^2/2 \qquad \textbf{(10)}$$

Para retornos históricos de um portfólio com distribuição de probabilidades aproximadamente normal, $r \sim N(\mu_p, \sigma)$, a função utilidade $U(r) = \mu_p - \lambda\sigma_p^2/2$ é a do modelo de Markowitz.

O problema de escolha entre n ativos disponíveis, definindo as frações $x_i$ de orçamento destinadas a cada ativo, foi formulado por Markowitz como um problema de programação quadrática (PQ), cujo objetivo é maximizar o valor esperado da função utilidade exponencial do investidor, satisfazendo a restrição de orçamento.

O retorno do portfólio no t-ésimo período (performance passada) é dado pela variável aleatória $r_t = \mathbf{X_t x}$, onde $X_t$ é o t-ésimo vetor linha da matriz X de ordem ($m$ x $n$) que define uma amostra de tamanho $m$ do vetor multivariado $y = [X_{t1}, X_{t2}, \ldots, X_{tn}]'$ de retornos dos ativos. Então o retorno esperado e a variância do portfólio, ou seja, da variável aleatória $r_t$ são dados pelas formulações em **(6)** e **(7)**:

$$\mu_p = \mathbf{x}'\boldsymbol{\mu}$$

$$\sigma_p^2 = \mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x}$$

O problema de seleção de portfólio de Markowitz, sujeito à restrição de orçamento ($\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} + \ldots + \mathbf{x_n} = 1$) e demais restrições ($A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$), é definido no **Problema P1** a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & (1/2)\, \mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x} - \lambda_E \mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} \\ \text{Sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad \textbf{(P1)} \\ & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & x_i \geq 0 \ \forall i \end{aligned}$$

Este problema **(P1)** tem duas outras formas equivalentes, ou seja, maximizar o retorno esperado dado por $\mu_p = \mathbf{x}'\boldsymbol{\mu}$, sujeito a um valor fixo para a variância, ou minimizar a variância dada por $\sigma_p^2 = \mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x}$, sujeito a um valor fixo para o retorno, ambos também sujeitos às restrições de orçamento e de não negatividade.

A condição de não negatividade também é referida como condição de legitimidade do portfólio. Caso não satisfeita esta condição, tem-se portfólios financiados, ou "alavancados".

Para cada valor fixo do retorno esperado, ou da variância, corresponde um valor do parâmetro de aversão ao risco $\lambda_E$ na formulação que visa maximizar a função utilidade do investidor.

Um conjunto de portfólios na fronteira do conjunto de portfólios factíveis, com retorno máximo para cada nível de risco dado pela variância, é chamado de Fronteira de Eficiência de Markowitz. Na representação do Risco-Retorno em um plano x-y, nesta ordem, não é possível encontrar Portfólios acima da Fronteira de Eficiência e portfólios abaixo desta são dominados pelos Portfólios Eficientes de Markowitz.

## 2.6. Razão de Sharpe

A escolha entre alternativas de investimentos que apresentam diferentes retornos com diferentes níveis de risco exige uma forma de ajuste entre retornos e seus níveis de risco. A performance de ativos e portfólios também pode ser avaliada com o estabelecimento de uma medida do retorno obtido para cada nível de risco.

Segundo DOWD (1999), estas duas formas de avaliação obtidas com o ajuste de risco, para retornos esperados (avaliação *ex ante*, com parâmetros estimados) ou para performance obtida (avaliação *ex post*), permitem a escolha entre oportunidades de investimento ou a avaliação de sua performance, sem ambigüidade por duas possíveis classificações: pela performance dos retornos e pelas posições de risco.

Seja $\mathbf{x}_P$ um portfólio com retornos históricos $r_P$ e $\mathbf{x}_B$ um portfólio *benchmark* com retornos $r_B$ e os retornos diferenciais $r_D = r_P - r_B$ entre os dois portfólios. A razão de Sharpe é definida como o quociente entre o valor esperado ($\mu_D$) e o desvio padrão esperado ($\sigma_D$) do retorno diferencial:

$$SR = \mu_D / \sigma_D \tag{11}$$

Esta razão capta o retorno diferencial esperado por unidade de risco associado com este retorno diferencial. Ou seja a classificação pela SR leva em conta ambos retorno diferencial entre os portfólios e risco do diferencial associado.

Na avaliação de performance, os parâmetros $\mu_D$ e $\sigma_D$ são conhecidos (não estimados).

## 2.7. Modelos de Precificação de Ativos Financeiros

Fundamentos mais elaborados para cálculo do *tradeoff* entre risco e retorno são encontrados no *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) criado por William F. Sharpe (1960) e no *Arbitrage Pricing Theory* (APT), por ROSS (1965). Nestes modelos, construídos a partir do modelo MV, o risco é decomposto em duas parcelas, uma delas relacionada ao mercado e outra própria do ativo ou portfólio.

Estes modelos têm como assertiva que, embora forças específicas de ativos ou ramo de atividade possam influenciar os retornos de um ativo individual, seus efeitos tendem a cancelarem-se em portfólios amplamente diversificados, ou seja, pode-se aproximadamente eliminar o risco próprio característico de cada empresa ou ramo de atividade.

Contudo, forças econômicas influenciam os retornos de todos os ativos em conjunto e este risco não é eliminado pela diversificação. Esta é a parcela do risco pela qual deve ser exigida recompensa adicional, ou seja, maior retorno para maior exposição ao risco.

O CAPM prevê a influência de somente um tipo de risco não diversificável sobre o retorno esperado de um ativo, relacionado ao índice de mercado, suposto eficiente para o modelo Média-Variância.

O modelo APT, mais geral, não fixa a exposição a somente um fator de risco, não fixa seu número ou mesmo exige sua prévia definição. Os fatores originam-se em mudanças não antecipadas na confiança de investidores, taxas de juros, inflação, atividade/negócio, índice de mercado, etc.

Um ativo ou portfólio tem sua exposição a forças econômicas de mercado medida por betas, que identificam seu comportamento ou perfil (variabilidade e performance) em relação ao risco sistemático. O padrão de exposição de um portfólio é definido pela exposição dos ativos selecionados para compô-lo.

## 2.8. *Capital Asset Pricing Model - CAPM*

O Modelo de Precificação de Ativos Financeiros (*Capital Asset Pricing Model* - CAPM), criado por William F. Sharpe (1964), prevê a influência de somente um tipo de risco não diversificável sobre o retorno esperado de um ativo, relacionado ao mercado. Seu modelo estabelece que o índice de mercado é, por si só, eficiente para o modelo Média-Variância, ou seja, que proporciona máximo retorno esperado para cada nível de risco.

SECURATO (1996) apresenta o modelo CAPM, onde os retornos $r_t$ de um portfólio são aproximados por um modelo de regressão linear

$$r_t = \alpha + \beta r_t + \varepsilon_t \qquad \textbf{(12)}$$

onde $r_t$ é o retorno para o fator de risco, $\varepsilon_t$ denota a parcela de retorno específica do ativo ou portfólio, $\beta$ é a sensibilidade do portfólio ao fator de risco, sendo estimado pela razão entre a covariância do portfólio com o fator de risco e a variância do fator de risco.

Desenvolvido por William Sharpe (1964), e com modificações por Lintner (1965) e Mossim (1966), o CAPM (*Capital Asset Pricing Model* ou Modelo de Precificação de Ativos Financeiros) é um dos chamados modelos de equilíbrio. O CAPM assume algumas suposições, tais como:

- Investidores no mercado se comportam racionalmente, usando um mesmo modelo de decisão, o modelo de Markowitz;
- Existe um ativo sem risco, acessível a todos os investidores, que podem tomá-lo emprestado, ou nele investir com uma mesma taxa de retorno $\mu_F$;
- Todos os investidores estão de acordo quanto ao retorno esperado e à matriz de covariâncias dos retornos dos ativos de risco do mercado, ou seja, que a fronteira de eficiência é única.
- Sob condições de equilíbrio, todos os ativos estão presentes no portfólio de mercado.

A partir dessas hipóteses, o modelo calcula propriedades de pontos de equilíbrio do mercado e estabelece uma relação entre o retorno esperado de determinado ativo A e a parcela de seu risco não diversificável, ou seja, a parcela do risco que é correlacionada com a carteira de mercado M.

Uma carteira C, composta pelo ativo A e pela carteira de mercado, com frações $\omega$ e (1-$\omega$), respectivamente, tem retorno $\mu_C$ e risco $\sigma_C$ dados por:

$$\mu_C = \omega.\mu_A + (1-\omega).\mu_M \qquad \textbf{(13)}$$

$$\sigma_C^2 = \omega^2.\ \sigma_A^2 + (1-\omega)^2.\ \sigma_M^2 + 2\omega(1-\omega).\text{cov}(r_A,r_M) \qquad \textbf{(14)}$$

onde

$\mu_A$ e $\sigma_A^2$ são o retorno esperado e a variância do ativo A;

$\mu_M$ e $\sigma_M^2$ são o retorno esperado e a variância da carteira de mercado M.

O ativo A naturalmente faz parte da Carteira de Mercado.

A carteira C, com frações (ω, 1-ω) para A e M, altera a carteira de mercado, que passa a ter maior participação do ativo A. Para manter o equilíbrio de mercado, deve-se ter ω = 0, onde a procura pelo ativo A permanece em proporções de sua participação no mercado, e C = M.

As taxas de variação em $\mu_C$ e $s_C$, em relação à participação do ativo A na carteira C, são dadas por:

$$\frac{\partial \mu_C}{\partial \varpi} = \mu_A - \mu_M \tag{15}$$

$$\frac{\partial \sigma_C}{\partial \varpi} = \frac{2.\varpi.\sigma_A^2 - 2(1-\varpi)\sigma_M^2 + 2(1-2\varpi).\text{cov}(r_A, r_M)}{2\sqrt{\varpi^2\sigma_A^2 + (1-\varpi)^2\sigma_M^2 + 2\varpi(1-\varpi).\text{cov}(r_A, r_M)}} \tag{16}$$

O coeficiente angular da reta tangente à equação risco-retorno das carteiras formadas de ativos A e M é calculado como o quociente entre 15 e 16. Para ω = 0, tem-se:

$$\frac{\partial \mu_C}{\partial \varpi} \Big/ \frac{\partial \sigma_C}{\partial \varpi} = \frac{\mu_A - \mu_M}{\dfrac{\text{cov}(r_A, r_M) - \sigma_M^2}{\sigma_M}} \tag{17}$$

A razão recompensa-variabilidade de Sharpe para a carteira C é calculada em relação a um ativo livre de risco F ($\sigma_F = 0$, com retorno $\mu_F$) e dada por:

$$RV_C = \frac{(\mu_C - \mu_F)}{\sigma_C}$$

Para a máxima razão recompensa-variabilidade, deve-se ter:

$$\frac{\partial RV_C}{\partial \varpi} = \frac{\dfrac{\partial \mu_C}{\partial \varpi}.\sigma_C - (\mu_C - \mu_F)\dfrac{\partial \sigma_C}{\partial \varpi}}{\sigma_C^2} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial \mu_C}{\partial \varpi} \Big/ \frac{\partial \sigma_C}{\partial \varpi} = \frac{(\mu_C - \mu_F)}{\sigma_C}$$

Para ω = 0 (C = M):

$$\frac{\partial \mu_C}{\partial \varpi} \Big/ \frac{\partial \sigma_C}{\partial \varpi} = \frac{(\mu_M - \mu_F)}{\sigma_M} \tag{18}$$

As carteiras C' formadas por F e por M são pontos de uma reta de coeficiente angular $RV_M$, ou seja:

$$\mu_{C'} = \mu_F + \frac{(\mu_M - \mu_F)}{\sigma_M}.\sigma_{C'}$$

Assim, a equação da reta que passa por $\mu_F$ e $\mu_M$ será tangente em $\mu_M$ à hipérbole formada pelas carteiras do tipo C.

Igualando as expressões (17) e (18), temos a Equação Fundamental do CAPM:

$$\frac{\mu_A - \mu_M}{\frac{\text{cov}(r_A, r_M) - \sigma_M^2}{\sigma_M}} = \frac{(\mu_M - \mu_F)}{\sigma_M} \rightarrow$$

$$\mu_A = \mu_F + \frac{\text{cov}(r_A, r_M)}{\sigma_M^2}.(\mu_M - \mu_F)$$

$$\mu_A = \mu_F + \beta_A.(\mu_M - \mu_F) \qquad \textbf{(19)}$$

O retorno esperado para um ativo A deve ser composto por uma parcela de retorno esperado para um ativo livre de risco, acrescido de uma segunda parcela calculada sobre o retorno diferencial deste ativo em relação ao mercado, proporcional ao índice de sensibilidade do ativo ao mercado.

Os índices de sensibilidade ($\beta$) podem ser obtidos com a regressão da variável $r_A$ de retornos do ativo A com a variável explicativa $r_M$ de retornos da carteira de mercado:

$$r_A = a_A + b_A.r_M + \varepsilon_A \qquad \textbf{(20)}$$

onde:

$r_A$= retornos históricos do ativo A;

$r_M$= retornos históricos da carteira de mercado M;

$a_A$ = constante da regressão do ativo A;

$\varepsilon_A$ = erro da regressão de $r_A$ com $r_M$, onde $E(\varepsilon_A) = 0$.

Aplicando o operador esperança matemática à equação (20), tem-se a equação característica do ativo A:

$$\mu_A = a_A + b_A\mu_M$$

A variância total do ativo A pode ser decomposta em uma parcela correspondente à sua correlação com o mercado ($b_A^2 . \sigma_M^2$), e outra não correlacionada, que é própria desse ativo ($\varepsilon_A^2$):

$$\sigma_A^2 = b_A^2 . \sigma_M^2 + \varepsilon_A^2$$

A covariância entre os retornos $r_A$ e $r_M$ é dada por:

$$\text{cov}(r_A, r_M) = \text{cov}(a_A + b_A.r_M + e_A, r_M) \rightarrow$$

$$\text{cov}(r_A, r_M) = \text{cov}(a_A, r_M) + \text{cov}(b_A.r_M, r_M) + \text{cov}(\varepsilon_A, r_M)$$

onde $\text{cov}(a_A, r_M) = 0$ ($a_A$ constante) e $\text{cov}(\varepsilon_A, r_M) = 0$ (parte da variância não captada pelo modelo de mercado), que resulta:

$$\text{cov}(r_A, r_M) = \text{cov}(b_A.r_M, r_M) = b_A\,\sigma_M^2$$

Então:

$$\beta_A = \frac{\text{cov}(r_A, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{b_A.\sigma_M^2}{\sigma_M^2} = b_A$$

Vemos que o CAPM não capta o risco próprio, somente o sistemático ou conjuntural, e que pode ser explicado pelo modelo de regressão linear.

Da equação característica do ativo A,

$$\mu_A = a_A + \beta_A \mu_M$$

Se o ativo A tem comportamento igual ao de M, temos $\mu_M = \beta_M \mu_M \Rightarrow \beta_M = 1$.

Comportamento de ativos, conforme o valor de seu $\beta$:

a) $\beta_A = \beta_M = 1$

O ativo A tem o mesmo comportamento do mercado;

b) $\beta_A > \beta_M = 1$

O ativo A tem comportamento "agressivo" em relação ao mercado;

c) $\beta_A < \beta_M = 1$

O ativo A tem comportamento "defensivo" em relação ao mercado.

$\beta_A > 0$: e reage com fração da variação de mercado.

$\beta_A < 0$: e reage de forma contrária às variações de mercado.

$\beta_A = 0$: é indiferente às variações de mercado.

Obtidos os betas dos ativos, a partir dos dados históricos, pode-se escolher os ativos para compor uma carteira, de maneira a diversificá-la em relação ao risco sistemático ou conjuntural e que pode ser explicado pelo modelo de regressão.

## 2.9. *Arbitrage Pricing Theory - APT*

Segundo ROSS, ROLL e BURMEISTER (1998), o APT segue-se de dois postulados básicos: 1. "Os retornos são gerados por um modelo de k fatores" da forma:

$$r_i(t) - E[r_i(t)] = \beta_{i1} f_1(t) + \ldots + \beta_{ik} f_k(t) + \varepsilon_i(t) \qquad \textbf{(21)}$$

onde

$r_i(t)$ = retorno do ativo i ao final do período t;

$E[r_i(t)]$ = retorno esperado no início do t-ésimo período;

$\beta_{ij}$ = medida da exposição ao risco, ou beta do ativo i ao fator j (j = 1, ..., k);

$f_j$ = carregamento do j-ésimo fator de risco;

$\varepsilon_i(t)$ = retorno residual não explicado pelos fatores, próprio do i-ésimo ativo;

A esperança matemática dos fatores e dos resíduos é nula:

$$E[f_i(t)] = E[\varepsilon_i(t)] = 0, \forall i = 1, 2, ..., n$$

Os retornos residuais não são correlacionados com os fatores:

$$Cov[\varepsilon_i(t), f_i(t)] = 0, \forall j = 1, 2, \ldots, k$$

Finalmente, os fatores e os resíduos são não correlacionados ao longo do tempo:

$$Cov[f_j(t), f_j(t')] = Cov[\varepsilon_i(t), \varepsilon_i(t')] = 0, \forall j = 1, 2, \ldots, k \text{ e para todo } t \neq t'.$$

Estas condições implicam que os retornos são gerados por um modelo fatorial linear.

Fatores de risco podem ser correlacionados (ex. inflação e taxas de juros), bem como os retornos residuais (ex. os retornos de empresas de determinado setor industrial), ou seja, $cov(f_i, f_j)$ e $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ podem ser não nulos.

2. "A receita de um portfólio de arbitragem é nula".

Devido à competição em mercados financeiros, investidores não podem ganhar retorno positivo sobre qualquer combinação de ativos sem submeter-se a algum risco e sem fazer algum investimento líquido. Trata-se de um conceito de equilíbrio com implicações nas áreas da economia financeira, além da determinação de preços.

Em um portfólio de arbitragem, com as seguintes características:

1. $\mathbf{x}'\mathbf{1} = 0$, valor investido igual a zero ($\mathbf{1}$ = vetor de elementos unitários);

2. $\mathbf{x}'\beta = 0$, imune a todas as taxas de risco de mercado;

3. $Var(\mathbf{x}'a)\approx 0$, quase livre de risco próprio (a = vetor de retornos esperados dos ativos);

o retorno esperado deve ser nulo, do contrário seria possível ganhar dinheiro sem risco:

$$\mathbf{x}'E[a] = 0$$

Dados os Postulados 1. e 2., o teorema principal do APT é de que existem k + 1 escalares, nem todos nulos, tal que o retorno esperado do i-ésimo ativo é aproximado por $P_0$ mais a soma sobre j de $\beta_{ij}.P_j$.

A condição de equilíbrio, a partir das características 1 e 2 e de **(22)** é expressa como:

$$\mathbf{x}'[\mathbf{1} \;\; \beta] = 0 \rightarrow \mathbf{x}'E[r_i(t)] = 0$$

isto é, o retorno esperado $E[r_i(t)]$ de um ativo deve ser combinação linear dos fatores de risco.

Conforme Chen, Ingersole (1983), Dybvig (1983), a aproximação é válida exatamente:

$$E[r_i(t)] = P_0 + \beta_{i1}.P_1 + \ldots + \beta_{ik}.P_k \tag{22}$$

onde $P_j$ é o preço (ou prêmio) do j-ésimo fator de risco.

A correspondência de maior exposição (maior beta) para maior retorno, equivale ao *tradeoff* do modelo MV de Markowitz.

Substituindo (22) em (21), tem-se a equação do modelo APT:

$$r_i(t) - P_0 = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}.[P_j + f_j(t)] + \varepsilon_i(t) \tag{23}$$

Um portfólio perfeitamente diversificado ($\varepsilon_p(t) = 0$), sem exposição a fatores ($\beta_{pj} = 0$ para todo $j = 1, 2, \ldots, k$) isto é, com risco zero, tem retorno $P_0$. Então $P_0$ deve ser o retorno esperado de um ativo livre de risco, ou zero beta.

Segundo ROSS, ROLL e BURMEISTER, neste ponto, o APT e o CAPM têm sua diferença. No CAPM, o retorno adicional para um ativo é igual ao produto do beta do ativo pelo retorno adicional esperado sobre o índice de mercado, mesmo para a versão multifatorial do CAPM. Para que o CAPM seja válido, algumas restrições sobre os $P_j$ devem verificar-se, e em testes estatísticos tem sido repetidamente rejeitadas em favor do APT. Para a implementação do APT, segundo os autores, pode-se utilizar um índice para o retorno livre de risco, (citando o índice 30-day Treasury Bill) e as alternativas para estimar o modelo são:

1. Cálculo dos fatores de risco $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_k(t)$ usando técnicas estatísticas como Análise Fatorial ou Componentes Principais;

2. Os k fatores podem ser substituídos por k portfólios bem diversificados;

3. Teoria econômica e conhecimento de mercados financeiros, para especificar k fatores de risco que possam ser mensurados a partir de dados macroeconômicos e financeiros.

A primeira alternativa é útil para determinar o número de fatores necessários, no entanto proporciona dificuldade de interpretação econômica dos fatores, que sofrem mudança com o tempo. A segunda e terceira alternativas estão relacionadas a análises econômicas.

A seleção de um conjunto de fatores macroeconômicos deve proporcionar fácil interpretação econômica, e que explique o máximo possível as variações nos retornos.

Estimativas EWMA ou GARCH para os betas proporcionam betas de mercado variáveis com o tempo, sendo um grande avanço sobre betas de valores constantes usualmente obtidos a partir de fontes de dados padrão.

# 3. PESQUISA OPERACIONAL NA ANÁLISE DE PORTFÓLIO

Entre as técnicas de otimização empregadas na Análise de Portfólio, destaca-se a Programação Matemática, com a Programação Linear (PL) e Programação Quadrática (PQ). Modelos para redução de risco dado pela variância normalmente resultam em Problemas de Programação Quadrática Paramétrica. Outros modelos são construídos como problemas de PL, ou reduzidos a problemas PL por linearização. Um modelo mais simples para a determinação de portfólios ótimos, visando somente à maximização do retorno e sujeito a restrições lineares é formulado como um problema de PL.

A Estatística também é utilizada, com os testes para verificação da qualidade do ajuste da distribuição dos retornos de ativos e portfólios a uma distribuição estatística. Entre estes testes pode-se citar o QQ-Plot para identificar a Gaussianidade de uma amostra multivariada e o teste K-S de Kolmogorov-Smirnov, para amostra univariada. Análise Fatorial e Análise de Componentes Principais também são utilizadas com objetivo de substituir a análise de ativos pela análise de grupos de ativos e, ainda, identificar fatores de risco comuns a esses grupos.

## 3.1. Programação Linear

Problemas que podem ser descritos por uma função objetivo linear, a ser maximizada ou minimizada, satisfazendo restrições lineares de igualdade e/ou desigualdade constituem-se em problemas de Programação Linear (PL). Sua forma padrão é apresentada no **Problema P2** a seguir:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ \text{Sujeito a} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & x_i \geq 0 \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n \end{array} \qquad \textbf{(P2)}$$

onde $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ é o vetor de custos, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ é o vetor de "recursos", $A \in M(m \times n)$ é a matriz dos coeficientes das restrições, a qual é suposto que tem linhas linearmente independentes, ou seja, que não existem restrições redundantes.

Um método bastante eficiente para solução do problema PL foi desenvolvido por George B. Dantzig (1947), e chamado simplex. Contribuições para o aprimoramento deste algoritmo ocorreram com:

- Dantzig, Orchard-Hays, Wolfe (1953/1954), com a elaboração do simplex revisado;

- Lemke(1954) com a Teoria da Dualidade e o algoritmo dual simplex;
- Beale(1955), Dantzig, Orden e Wolfe (1955), com a criação de regras lexicográficas para solução de problemas de degeneração e iterações cíclicas;
- Klee(1972), Minty(1972) com o estudo da complexidade de algoritmos simplex para o comportamento do pior caso;
- Dantzig, Van Slyke (1967), com a criação do chamado *Generalized Upper Bound Algorithm* (GUB);
- Markowitz (1954), com *Basis factorization and the elimination form of the inverse* (EFI), mais tarde também tratados por Beale(1971), Hellerman e Rarick (1971/72).

Outros desenvolvimentos para solução de problemas LP são encontrados, como o método SSX (*sparse simplex)*, e o método de pontos interiores.

A descrição do simplex revisado pode ser encontrada em MURTY (1976), ou ZIONTS (1974). Para aplicação do método simplex revisado, é suposto que o problema apresente-se na forma padrão, isto é, somente com restrições de igualdade. Para as restrições de desigualdade, são acrescentadas variáveis auxiliares, que assumem a diferença quando a restrição é satisfeita com folga; neste caso são chamadas variáveis de folga.

O problema **P2**, com variáveis de folga para restrições de desigualdade, e considerando que maximizar **c'x** é equivalente a minimizar - **c'x**, é apresentado no **Problema P3** a seguir:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = -\mathbf{c}'\mathbf{x} \\ \text{Sujeito a} & A\mathbf{x} + H\mathbf{s} = \mathbf{b} \\ & x_i \geq 0, \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n \\ & s_j \geq 0, \quad \forall\, j = 1, 2, \dots, p \end{array} \qquad \textbf{(P3)}$$

Se p = m, H é a matriz identidade de ordem m e tem-se uma base factível formada por variáveis de folga, na forma canônica para início do método simplex.

Se p < m, pode-se obter uma base factível inicial usando a rotina *Pricing Out*, que consiste em subtrair múltiplos adequados das (m-p) linhas (restrições de igualdade), da linha de custos (**c'**), de forma que m destes custos sejam atualizados para valor zero, desde que resulte na forma canônica para o início do método simplex.

Outras rotinas para obter a base canônica inicial consistem em formar uma base com variáveis artificiais. O método Big-M acrescenta variáveis artificiais com alto custo (M) à função objetivo, de modo que estas não retornem à base após sua saída.

Definida uma base factível inicial com variáveis básicas $\mathbf{x}_B$, nas iterações do método Simplex Revisado é avaliado se alguma variável não básica (em $\mathbf{x}_N$) pode acrescentar valor à função objetivo. Esta avaliação é obtida com as considerações a seguir.

O sistema de equações das restrições é decomposto na forma:

$$B.\mathbf{x}_B + N.\mathbf{x}_N = b \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}_B = B^{-1}b - B^{-1}N\mathbf{x}_N$$

onde B e N são matrizes formadas por colunas da matriz de restrições, correspondentes às variáveis básicas $\mathbf{x}_B$ e não básicas $\mathbf{x}_N$.

Os conjuntos de variáveis, básicas e não básicas, são dados por:

$J_B = \{i$ tal que $x_i$ está na base$\}$ ($J_B = \{3,5\}$, se $x_3$ e $x_5$ são variáveis da base).

$J_N = \{i$ tal que $x_i$ não está na base$\}$

Então a função objetivo $z = -\mathbf{c}'[\mathbf{x}_B\ \mathbf{x}_N]' = \mathbf{c}_B'\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N'\mathbf{x}_N$ pode ser escrita como:

$$z = \mathbf{c}_B'(B^{-1}b - B^{-1}N\mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N'\mathbf{x}_N \rightarrow$$

$$z = \mathbf{c}_B'B^{-1}b + (\mathbf{c}_N' - \mathbf{c}_B.B^{-1}N)\mathbf{x}_N$$

Se todas as componentes em $\pi = (\mathbf{c}_N' - \mathbf{c}_B.B^{-1}.N)$ são positivas, então nenhuma variável não básica que entrar na base pode acrescentar valor à função objetivo e a solução ótima foi encontrada. Se algum $\pi_i < 0$, então uma variável não básica $x_j$ entra na base, satisfazendo:

$x_j = \{x_i,\ i \in J_N$, tal que $\pi_i$ é mínimo$\}$

A variável $x_k$ a ser substituída, deve ser a que gera menor valor para a que entra:

$x_k = \{x_i,\ i \in J_B$, tal que $b_i/a_{i,j}$ é mínimo, j determinado no passo anterior$\}$.

Para os valores de $b_i$ e $a_{i,j}$ atualizados, isto é, dados por $b_i = [B^{-1}b]_i$ e $a_{i,k} = [B^{-1}A^{k1}]_{i,k}$.

Para a nova base, $J_B = J_B + \{j\} - \{k\}$, repete-se a avaliação para $\pi$, até que se verifique $\pi_j \geq 0\ \forall j$. A solução corresponde ao conjunto de variáveis em $J_B$, com valor $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$.

### 3.1.1. Condições de Otimalidade em PL

BERTSEKAS (2001) apresenta as condições de otimalidade para problemas de PL, que podem ser obtidas da Teoria de Otimização com Restrições. Somente as condições de primeira ordem - condições de Karush-Kuhn-Tucker (**KKT**) - são necessárias. A convexidade do problema de PL garante que estas condições são suficientes para um mínimo global, bem como se pode mostrar que as de segunda ordem não são necessárias por um simples argumento - a Hessiana do Lagrangeano de problemas de PL é nula.

As condições **KKT** requerem independência linear dos vetores gradiente das restrições ativas. Porém, para qualificação de restrições, o resultado continua a valer para restrições com vetores gradiente linearmente dependentes, uma vez que são lineares, caso do problema de PL.

Decompondo o vetor de multiplicador de Lagrange para o problema de PL em dois vetores $\boldsymbol{\pi}$ e $\mathbf{s}$, onde $\boldsymbol{\pi} \in R^m$ é o vetor de multiplicadores para as restrições de igualdade $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, enquanto $\mathbf{s} \in R^n$ é o vetor de multiplicadores para as restrições de não negatividade $x_i \geq 0$.

Usando a definição de Função Lagrangeana, obtemos $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s})$ para o problema PL:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s}) = \mathbf{c}'\mathbf{x} - \boldsymbol{\pi}'(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) - \mathbf{s}'\mathbf{x}.$$

As condições necessárias de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker para que $\mathbf{x}^*$ seja uma solução do problema de PL são de que existam vetores $\boldsymbol{\pi}$ e $\mathbf{s}$ tais que:

$$A'\boldsymbol{\pi} + \mathbf{s} = \mathbf{c} \qquad \textbf{(i)}$$

$$A.\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \textbf{(ii)}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad \textbf{(iii)}$$

$$\mathbf{s} \geq \mathbf{0} \qquad \textbf{(iv)}$$

$$x_i s_i \geq \mathbf{0},\ i = 1, 2, \ldots, n \qquad \textbf{(v)}$$

A interpretação da última condição é essencialmente que ao menos um dos componentes $x_i$ e $s_i$ deve ser zero para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Esta condição é também escrita na forma $\mathbf{x}'\mathbf{s} = 0$, e referida como condição de complementaridade. (Obs.: devido à condição de não negatividade para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{s}$, ambas as formas são idênticas).

Seja $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\pi}^*, \mathbf{s}^*)$ um vetor satisfazendo às condições de KKT, e combinando-se a primeira, quarta e quinta condições, encontra-se que:

$$\mathbf{c}'\mathbf{x}^* = (A'\boldsymbol{\pi}^* + \mathbf{s}^*)'\mathbf{x}^* = (A\mathbf{x}^*)'\boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{b}'\boldsymbol{\pi}^*$$

Como pode ser visto, $\mathbf{b}'\boldsymbol{\pi}$ é a função objetivo para o problema dual do problema LP, assim, a identidade $\mathbf{c}'\mathbf{x}^* = \mathbf{b}'\boldsymbol{\pi}^*$ indica que os objetivos primal e dual são iguais para o vetor $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s})$ que satisfaz as condições KKT.

Para provar que as condições KKT de primeira ordem são suficientes para que $\mathbf{x}^*$ seja a solução global do problema LP, seja $\mathbf{x}_1$ outra solução factível, tal que $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$ e $\mathbf{x}_1 \geq 0$. Então:

$$\mathbf{c}'\mathbf{x}_1 = (A\boldsymbol{\pi}^* + \mathbf{s}^*)'\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}'\boldsymbol{\pi}^* + \mathbf{x}'_1\mathbf{s}^* \geq \mathbf{b}'\boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{c}'\mathbf{x}^*$$

onde a desigualdade é válida, pois $\mathbf{x}_1 \geq 0$ e $s^* \geq 0$.

Esta última desigualdade informa que nenhum outro ponto factível pode ter um valor menor que $\mathbf{c'x^*}$. Além disto, o ponto $\mathbf{x}_1$ é ótimo se e somente se:

$$\mathbf{x'}_1\mathbf{s}^* = 0$$

desde que, do contrário, a desigualdade ($\mathbf{b'}\pi^* + \mathbf{x's}^* \geq \mathbf{b'}\pi^*$) é estrita. Ou seja, quando $\mathbf{s}^*_i > 0$, então se deve ter $\mathbf{x}_i = 0$ para todas as soluções do problema LP.

## 3.2. Programação Quadrática

Problemas gerais de programação quadrática (PQ) têm uma função objetivo quadrática e estão sujeitos a restrições lineares ou quadráticas. Uma classe mais específica de problemas quadráticos trata-se de problemas quadráticos convexos, na qual se encontra a dos problemas de análise de portfólio. Um problema quadrático primal é definido como a seguir:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimize} & \mathbf{z} = \frac{1}{2}\mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x} - \mathbf{c}'\mathbf{x} & \\ \text{Sujeito a:} & A\,x = b & \textbf{(P4)} \\ & x_i \geq 0,\ \forall\ i & \end{array}$$

onde $c$ é um vetor de constantes, $x$ é o vetor de variáveis de decisão, ambos de dimensão $n$, $b$ é o vetor de "recursos" ou disponibilidades das restrições, de dimensão $p$ e $A$ é a matriz de coeficientes das restrições, de dimensão $p$ x $n$. $\Sigma$ é uma matriz positiva semidefinida[5] de dimensão $n$ x $n$.

A correlação perfeita entre dois ativos, ou entre dois grupos de ativos, também gera $\Sigma$ positiva semidefinida, uma vez que as correlações destes dois ativos (ou grupos de ativos) com os demais ativos diferem apenas por um mesmo multiplicador. Se as correlações entre estes ativos (grupos de ativos) for negativa, um portfólio legítimo terá $V(\mathbf{x}) = 0$. Caso contrário, somente portfólios ilegítimos (alavancados, ou financiados) terão variância nula.

A matriz $\Sigma$ será positiva-definida quando excluída a possibilidade dos recursos serem aplicados em um ativo com variabilidade zero (caixa) e inexistência de grupos de ativos com retornos dados por C.L. de outros ativos, devido a $\mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x}$ corresponder à variância do portfólio $\mathbf{x}$, supondo-se positiva.

---

[5] $x'\Sigma x \geq 0\ \forall x \in R^n$.

**Problemas de Programação Quadrática Paramétricos:**

São problemas da forma:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimize} & \mathbf{z = c'.x + \lambda d'\,x + \tfrac{1}{2}x'.\Sigma.x} & \\ \text{Sujeito a:} & \boldsymbol{A\,x = b} & \textbf{(P5)} \\ & x_i \geq 0\ \forall\ i & \\ & \lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max} & \end{array}$$

onde ***c***, ***x***, ***A*** e ***b*** são definidos em **P4**; ***e*** e ***d*** são vetores de parâmetros de ajustes; ***e*** tem dimensão *m* e ***d***, dimensão *n*.

Este problema PQ paramétrico envolve a solução de uma família de problemas PQ, onde $\lambda$ é um parâmetro da função objetivo que pode tomar quaisquer valores não negativos entre $\lambda_{min}$ e $\lambda_{máx}$.

Problemas paramétricos de Programação Quadrática (PPQ) podem ser usados para calcular a Fronteira de Eficiência para carteiras de investimentos. Proporciona estratégia ótima para investimentos para diversos níveis de risco quadrático, e variação de recursos ou disponibilidades para as restrições lineares.

### 3.2.1. Condições de Otimalidade em QP

Condições de otimalidade em QP podem ser encontradas em ROCKAFELLAR(1997):

**Multiplicadores de Lagrange**

Sejam as funções f: $\boldsymbol{R^n} \rightarrow \boldsymbol{R}$ e $h_i$: $\boldsymbol{R^n} \rightarrow \boldsymbol{R}$, i = 1, 2,..., m, e o problema com restrições de igualdade da forma:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & h_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \end{array}$$

O Teorema de multiplicadores de Lagrange para este problema estabelece que, sob suposições apropriadas, para um dado mínimo local $x^*$, existem escalares $\lambda_i^*$, i = 1, 2, ..., m, chamados Multiplicadores de Lagrange, tais que:

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla \mathbf{h_i}(\mathbf{x}) = 0$$

Estas n equações, junto com as m restrições $h_i(x^*) = 0$, formam um sistema de n + m equações com n + m incógnitas dadas pelo vetor $x^*$ e os multiplicadores $\lambda_i^*$. Desta forma o problema de otimização com restrições tem solução através da solução de um sistema de equações (lineares ou não lineares, dependendo de f(x) e $h_i(x)$).

Para uma função convexa, a ser minimizada satisfazendo um conjunto de restrições lineares, um ponto extremo corresponde ao extremo global. Isto fica estabelecido no teorema de Kuhn-Tucker a seguir (para demonstração, ver ROCKAFELLAR, 1997, pág. 273-290):

**Teorema de Kuhn-Tucker**: Seja (P) um problema ordinário convexo satisfazendo as hipóteses de extremo limitado e existência de ao menos uma solução factível na região delimitada pelas restrições, isto é, que existe um vetor de Kuhn-Tucker para (P). Então para que determinado vetor x* seja uma solução ótima de (P), é necessário e suficiente que exista um vetor u* tal que (u*,x*) seja um ponto de sela do Lagrangeano de (P). Equivalentemente, x* é uma solução ótima se, e somente se existem multiplicadores de Lagrange $\lambda_i$, os quais, junto com x* satisfazem as condições de Kuhn-Tucker para (P).

Para o modelo de Markowitz (Problema **P1**), o ponto crítico da função Lagrangeana corresponde ao ponto de mínimo global:

$$\begin{cases} \nabla(\tfrac{1}{2}.\mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x} - \lambda_E\mathbf{x}'\boldsymbol{\mu}) + \lambda\nabla(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}) = 0 & (\lambda \in \Re^m) \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma\mathbf{x} - \lambda_E\boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}'\lambda = 0 \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{cases} \qquad \textbf{(S1)}$$

este sistema **(S1)** corresponde ao sistema de equações lineares do método da Linha Crítica de Markowitz:

$$\begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{A}' \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(S2)}$$

Fixando-se $\lambda_E$ ou **x**, o sistema linear acima fica determinado. O Problema de Programação Quadrática assim definido é um Problema Paramétrico de Programação Quadrática (PPQ).

## 3.3. Ajuste de uma Distribuição Estatística para uma Amostra

A função densidade normal n-dimensional para um vetor aleatório $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots x_n]$ tem a forma

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-(x-\mu)'\Sigma(x-\mu)/2} \qquad \textbf{(11)}$$

onde $\mu$ é o vetor de médias amostrais e $\Sigma$ a matriz de covariâncias, respectivamente, de uma amostra de tamanho m do vetor aleatório $\mathbf{x}$.

Diz-se que o vetor aleatório $\mathbf{x}$ tem distribuição normal multivariada, e denota-se $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$, analogamente à função densidade de probabilidade para o caso univariado.

Para uma distribuição normal n-dimensional, o elipsóide de valores $\mathbf{x}$ satisfazendo:

$$(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu) \leq \chi_n^2(\alpha) \qquad \mathbf{(12)}$$

tem probabilidade 1-$\alpha$ (JOHNSON, 1998, pág. 164, 194).

Desta forma, aproximadamente 50% das observações de uma amostra do vetor multivariado $\mathbf{x}$ devem satisfazer a desigualdade **(12)**, para $\alpha = 0.5$, caso contrário, a suposição de normalidade é suspeita.

Um método mais formal para identificar se um conjunto de dados apresenta distribuição normal é baseada nas distâncias quadráticas generalizadas:

$$d_j^2 = (\mathbf{x}_k - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}_k - \mu),\ j = 1, 2, \ldots, m \qquad \mathbf{(13)}$$

onde $\mathbf{x}_k$ são observações do vetor multivariado $\mathbf{x}$. Cada uma das distâncias $d_j^2$ deve comportar-se aproximadamente como uma variável $\chi^2$. A construção do gráfico dos pares $(q_{c,n}, d_j^2)$, com $q_{c,n}((j-1/2)/m) = \chi^2_n((m-j+1/2)/m)$, onde $q_{c,n}((j-1/2)/m)$ é o $100(j-1/2)/m$ quantil de uma distribuição qui-quadrado com m graus de liberdade, deve apresentar-se aproximadamente linear a partir da origem, com inclinação 1. Um comportamento curvo sugere falta de ajuste para normalidade.

A construção do gráfico qui-quadrado é obtida como segue:

a) Ordenar as distâncias dadas em **(13)** da menor para a maior;

b) Dispor os pares $(q_{c,n}, d_j^2)$ em um plano x-y.

A importância da verificação de normalidade para uma amostra X reside em que todas as informações sobre os verdadeiros parâmetros populacionais ($\mu$ e $\Sigma$) deste conjunto de dados estão contidas nos Estimadores de Máxima Verossimilhança dados pela média amostral e pela matriz de covariâncias amostrais, para dados com distribuição normal.

Técnicas de análise baseadas em $\mu$ e $\Sigma$ podem estar ignorando outras informações amostrais úteis, para dados que não se apresentam normalmente distribuídos.

A verificação do ajuste de uma amostra de uma variável aleatória univariada a uma distribuição normal, pode ser obtida por testes como $\chi^2$. Outro teste utilizado é o K-S de Kolmogorov-Smirnov, que calcula a máxima distância entre a distribuição teórica ajustada aos dados e a distribuição normal para as estatísticas média e desvio padrão amostral ( $\bar{x}$ e s) da amostra. Existem valores tabelados para estas distâncias, e respectivos valores-p para suas ocorrências. Se o valor-p do teste para uma amostra é menor que 0.1 (10% de probabilidade), então deve-se rejeitar a hipótese de que a amostra provenha de uma distribuição normal. (Ver Mood, pág. 508-510).

Além da verificação da qualidade do ajuste com os testes $\chi^2$ e K-S, as estatísticas baseadas em momentos de terceira e quarta ordem, ou seja, assimetria e curtose, também podem ser utilizadas, embora, conforme MOOD (pág. 76-77), não proporcionem informações precisas sobre a forma das curvas das funções densidade de probabilidade. Mood apresenta um exemplo onde duas distribuições bastante diferentes têm os mesmos valores para os quatro primeiros momentos. Neste caso, a avaliação da qualidade do ajuste dos dados à função densidade de probabilidade normal é mais reveladora que o cálculo do terceiro e quarto momentos.

Segundo DAS (1998), a suposição de retornos logarítmicos normalmente distribuídos é extensamente utilizada, e outros critérios para determinação de portfólios ótimos como retornos ajustados a outras distribuições como a Gama, são raramente vistos, devido a duas razões principais: I) a distribuição normal para retornos logarítmicos é a que melhor descreve a distribuição de retornos observados e II) somente a distribuição normal pode ser generalizada para problemas multivariados sem resultar em demasiada complexidade matemática.

Para DOWD, ao assumir um modelo que pressupõe retornos normalmente distribuídos, deve-se sempre verificar se o portfólio construído atende tal suposição. Alerta, ainda, que a utilização de *approach* normal leva a perdas de precisão e ao aumento de complexidade quando tratando de posições de risco não lineares em seus fatores (como exemplo avaliando opções) ou quando os fatores de risco são, por si próprios, não normais.

# 4. MODELOS DE OTIMIZAÇÃO EM ANÁLISE DE PORTFÓLIO

## 4.1. Modelo de Média - Variância (MV)

Trata-se de um modelo de seleção de portfólios com aplicação de métodos matemáticos para a otimização da relação risco-retorno na formação de carteiras de investimentos, desenvolvido por Harry M. Markowitz (1959), a partir de suas considerações sobre *The Theory of Investment Value*, de John Burr William[6]:

> *"Since future dividends are uncertain, I interpreted William's proposal to be to value a stock by its expected future dividends. But if the investor were only interested in expected values of securities, he or she would only be interested in the expected value of the portfólio; and to maximize the expected value of a portfólio one need invest only in a single security. This, I knew, was not the way investors did or should act. Investors diversify because they are concerned with risk as well as return. Variance came to mind as a measure of risk. The fact that portfolio variance depended on security covariances added to the plausibility of the approach. Since there were two criteria, risk and return, it was natural to assume that investors selected from the set of Pareto optimal risk-return combinations."* (*Autobiography of* Harry M. Markowitz, 1999).

O modelo de Markowitz resulta na construção de portfólios cujos pares Média-Variância (ou Retorno-Risco) satisfazem ao critério de otimalidade da relação risco-retorno. Um portfólio eficiente, segundo esse critério, apresenta o maior retorno entre os portfólios com o mesmo risco, e o menor risco entre portfólios com o mesmo retorno.

O risco é quantificado pela variância dos retornos históricos dos ativos, mais precisamente pela variância da variável aleatória definida como a soma ponderada dos retornos históricos dos ativos, onde os fatores de ponderação são as participações de cada ativo no portfólio. Desta forma, as correlações entre os retornos dos ativos são fatores de redução da variabilidade, para portfólios diversificados (ver 2.4).

Segundo DOWD (1999), a ampla diversificação de ativos com retornos estatisticamente independentes entre si para compor os portfólios faz com que a variável aleatória de retornos históricos do portfólio apresente distribuição aproximadamente normal.

Esta propriedade permite a utilização do modelo MV, ainda que os retornos dos ativos não apresentem distribuição normal multivariada.

---

[6] *"Ph.D. thesis at Harvard in 1937. (...) Work on how to value financial assets. (...) An estimate that offers intrinsic value and it is called the 'Dividend Discount Model' which is still used today by professional investors on the institutional side of markets." Amazon.com: buying info.* Ver (Williams. 1997).

Para atender o objetivo de maximizar o retorno e minimizar o risco, Markowitz tem suas bases na Teoria da Utilidade e a aversão ao risco. Sua função objetivo é a Função Utilidade (ver 2.5. **Teoria da Utilidade e Fronteira de Eficiência**) e as restrições de seu modelo são as habituais, ou seja, a de orçamento e demais restrições de composição de carteiras, como percentuais máximos e mínimos a serem aplicados em determinado grupo de ativos, etc.

A formulação do modelo de Markowitz é apresentada a seguir.

Dados n ativos e suas m taxas de retorno, o modelo de Markowitz visa determinar portfólios $\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^n$ cuja performance passada apresente mínima variância ($\mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x}$) para cada retorno esperado $\mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{R}^n$.

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & (1/2)\mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x} - \lambda_E\mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} \\ \text{S. a} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & x_i \geq 0\ \forall i = 1, \ldots, n. \end{array} \qquad \textbf{(P5)}$$

onde:

- $\lambda_E \in R$ é um parâmetro de aversão ao risco, variando de 0 (máxima aversão ao risco), onde o Problema de Programação Quadrática (QP) determina uma solução com mínima variância, a um valor M grande o suficiente para determinar o ponto de máximo retorno (mínima aversão ao risco).
- $\Sigma \in M(n \times n)$ é a matriz de covariâncias dos retornos;
- $\boldsymbol{\mu} \in R^n$ é o vetor de retornos esperados;
- $\mathbf{b} \in R^p$ é o vetor de "recursos";
- $A \in M(p \times n)$ é a matriz de coeficientes das restrições e inclui as restrições de orçamento e de composição da carteira, a seguir:
  a) de orçamento: $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_n = 1$;
  b) composição da carteira: $A_1\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, podendo ser do tipo percentuais máximos/mínimos, integralidade, grupos de ativos por suas correlações, variáveis binárias, entre outras;

Para q restrições de desigualdade, são adicionadas q variáveis de folga, ou residuais. Assim, a matriz $\Sigma$ deverá ser aumentada de q linhas e colunas nulas. O vetor $\mathbf{x}$, que representa o portfólio, tem (n+q) coordenadas.

Aplicando o método de Multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{array}{lll} \nabla(1/2\mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x} - \lambda_E\mathbf{x}'\boldsymbol{\mu}) + \lambda\nabla(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) & = 0 & (\lambda \in R^p) \\ A\mathbf{x} & = \mathbf{b} & \end{array} \qquad \textbf{(S3)}$$

Que resulta no sistema que pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} \Sigma & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(S4)}$$

Fazendo R' = [0 **b**] e S' = [μ 0], e **M** - de ordem (n+p+q) por (n+p+q) - a matriz que multiplica o vetor [**x** λ]', temos:

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \mathbf{R} + \lambda_E \mathbf{S} \qquad \textbf{(S5)}$$

O sistema linear **(S5)** fica determinado, uma vez fixado $\lambda_E$ ou **x**. Fixando um portfólio inicial $\mathbf{x}_0$ com máximo retorno ($\lambda_E$ máximo em **P5**), pode-se avaliar o sistema **S5** para a entrada ou saída de uma variável na composição deste portfólio inicial, aceitando a entrada ou saída da variável que proporciona menor redução possível no parâmetro $\lambda_E$. Como será visto no item 4.1.1 a seguir, o valor de $\lambda_E$ para $\mathbf{x}_0$ é infinito, então a primeira entrada ou saída de variável da base será para o maior valor real de $\lambda_E$.

### 4.1.1. Algoritmo do Modelo MV de Markowitz

A solução do sistema S5, determinando os portfólios estratégicos **x**, para os diferentes valores do parâmetro de aversão ao risco $\lambda_E$, foi estabelecida por MARKOWITZ (1959) com o Algoritmo da Linha Crítica, cujos passos são dados a seguir:

**Passo 1:** Obter o portfólio de maior retorno $\mathbf{x} = \mathbf{x}^+$, isto é, a solução do Problema de Programação Linear (LP) que maximiza o retorno ($\mathbf{x}'\mu$) sujeito às restrições ($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$; $\mathbf{x}_i \geq 0$). As variáveis não nulas em $\mathbf{x}^+$ são referidas como variáveis básicas (*in*) e as nulas, como não-básicas (*out*).

**Passo 2:** Determinar a matriz das variáveis básicas, isto é, determinar as linhas e colunas da matriz **M** que devem ter seus valores reduzidos a zero, para que a solução do sistema seja a obtida. Para isto faz-se linhas e colunas de variáveis *out* iguais ao vetor nulo, exceto para as intersecções destas linhas e colunas, que recebem o valor unitário, o que resulta na matriz $\tilde{M}$.

Para definição da matriz N(1), é calculada a inversa da matriz $\tilde{M}$ que deve ter os elementos que receberam valor unitário no passo anterior reduzidos ao valor nulo.

A determinação de $\tilde{M}^{-1}$ é facilitada com:

1) Eliminar as linhas e colunas de M correspondentes às variáveis *out*;
2) Inverter a matriz resultante;
3) Inserir as linhas e colunas retiradas, com zeros.

Para o caso de p > 1, o cálculo de $\tilde{M}^{-1}$ pode ser obtido por:

$$M = \begin{bmatrix} \Sigma & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{A}^{-1} \\ (\tilde{A}^T)^{-1} & -(\tilde{A}^T)^{-1}\tilde{\Sigma}\tilde{A}^{-1} \end{bmatrix}$$

O sistema **S5**, com a matriz M substituída por $\tilde{M}$, ao ser multiplicada pela matriz **N(1)**, resulta na equação à qual Markowitz chama de Linha Crítica associada ao vetor $[\mathbf{x}^+ \ \lambda]'$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \mathbf{N(1)R} + \lambda_E \mathbf{N(1)S} \qquad \mathbf{(S6)}$$

A matriz N(1) corresponde à inversa da base. Poderá ter linhas e colunas nulas retiradas, resultando em um sistema formado somente pelas variáveis *in*, ou básicas.

Adotando a notação de Markowitz, com T(1) = N(1)R e U(1) = N(1)S, temos a primeira Linha Crítica:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \mathbf{T(1)} + \lambda_E \mathbf{U(1)} \qquad \mathbf{(S7)}$$

Neste ponto, somente λ varia com $\lambda_E$, **x** se mantém constante.

**Passo 3:** Determinar valores de $\lambda_E$ onde a primeira Linha Crítica intercepta cada linha crítica associada às variáveis *out*, com as seguintes três propriedades:

a) todas as variáveis *in* na primeira LC continuam *in*;
b) uma variável adicional torna-se *in*;
c) todas as demais variáveis permanecem *out*.

A interseção é determinada em:

$$\mathbf{M_j}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \mu_j \lambda_E \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, (n+q) \qquad \mathbf{(I)}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \mathbf{T(k)} + \lambda_E \mathbf{U(k)} \qquad \mathbf{(II)}$$

De **I** e **II**, e considerando que $\mathbf{M_j}$ é a j-ésima linha de M, temos:

$$\mathbf{M_j}.[\mathbf{T(k)} + \lambda_E \mathbf{U(k)}] = \mu_j . \lambda_{Ej}$$

$$\lambda_{Ej} = \frac{\mathbf{M_j}.\mathbf{T(k)}}{[\mu_j - \mathbf{M_j U(k)}]}, \quad \text{para } (\mu_j - M_j U_k) \neq 0, j=1, \ldots, n+q, j \notin J$$

Se $\mu_j - M_j U(k) = 0$, não há interseção.

A interseção mais próxima (que proporciona menor redução em $\lambda_E$) define a variável que será adicionada às variáveis da base no próximo passo.

$\lambda_E = \max\{ \lambda_{Ej}, \text{ para } j \notin J\}$

Se $\lambda_E \leq 0$, o problema terminou e $\mathbf{x}^0$ corresponde ao portfólio de máximo retorno e também mínima variância.

Se $\lambda_E > 0$ $x_j$ entra na base ($j = j_k$). Como $\mathbf{x}^0$ permanece constante quando $\lambda_E$ varia, o novo portfólio terá duas coordenadas não nulas.

**Passo 4:** Fórmula para a nova linha crítica, associada à variável $\mathbf{x}_{jk}$.

As atualizações necessárias para N(k) são:

$B = N(k-1).C^j$ ($C^j$ é a j-ésima coluna da matriz M).

$c = M_{jj} - B'.C^j$

$$N(k)ij = \begin{cases} \dfrac{1}{c} & para \quad i = j = j_k \\ \dfrac{-B_i}{c} & para \quad i \neq j_k \\ N(k)_{ij} + \dfrac{B_i B_j}{c} & para \quad i \neq j_k, j \neq j_k \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = N(k).R + \lambda_E N(k).S$$

**Passo 5:** Linha Crítica primeiro interceptada pela LC atual, à medida que $\lambda_E$ decresce. É necessário verificar somente as interseções com as variáveis que ainda não pertenceram às variáveis *in*. Neste passo, temos três possibilidades com o decréscimo de $\lambda_E$:

1) $\lambda_{E(in)} \geq \lambda_{E(out)}$, faz-se então $\lambda_E = \lambda_{E(in)}$ e vai para o passo 6.

2) $\lambda_{E(in)} < \lambda_{E(out)}$, faz-se então $\lambda_E = \lambda_{E(out)}$ e volta ao passo 4.

4) $\lambda_E = 0$, o portfólio de mínima variância foi encontrado e o problema terminou.

onde

$$\lambda_{E(in)} = \max\{\lambda_{Ej} = T_j / U_j;\ \lambda_{Ej} > 0, j \in J\}$$

$$\lambda_{E(out)} = \max\{ \lambda_{Ej} = \frac{\mathbf{M}_j.\mathbf{T(k)}}{[\mu_j - \mathbf{M}_j\mathbf{U(k)}]}, \text{ para } j \notin J \text{ e ainda não } in\}$$

**Passo 6:** Portfólio com o valor de $\lambda_E$ que anula a i-ésima variável na base:

Para atualizar N(k) → N(k+1), substitui-se a linha e coluna da agora variável *out* ($\mathbf{x}_i$) por zeros. Completar a atualização com

$N(k+1)_{ij} = N(k)_{ij} - N(k)_{i(jk)}.N(k)_{(jk)j}/N(k)_{(jk)(jk)}$ para as linhas não zeradas.

A fórmula para a nova linha crítica é determinada com

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = N(k+1).R + \lambda_E.N(k+1).S$$

Retorna ao passo 5.

Os procedimentos descritos determinam soluções intermediárias estratégicas, às quais correspondem valores distintos do parâmetro de aversão ao risco ($\lambda_E$). Fazendo-se variar este parâmetro de aversão ao risco ($\lambda_E$), o sistema linear tem sucessivas soluções no intervalo de variação.

Se dois portfólios subseqüentes atendem à condição de eficientes, a combinação convexa destes também atenderá. Basta verificar que a combinação convexa também é solução do sistema de equações **S5** resultante da aplicação do método de multiplicadores de Lagrange ao problema **P5**.

Um portfólio $\mathbf{x}_3$, com retorno intermediário $\mu_P$ entre dois portfólios estratégicos de retornos $\mu_1$ e $\mu_2$, pode ser obtido através da combinação convexa entre estes portfólios:

$$\mathbf{x}_3 = \lambda.\mathbf{x}_2 + (1 - \lambda).\mathbf{x}_1$$

onde $\lambda$ é dado pelo quociente $\lambda = (\mu_1 - \mu_p)/(\mu_1 - \mu_2)$ e tem retorno $\mu_P$ e variância $V(\mathbf{x}_3) = \mathbf{x}_3'.\Sigma.\mathbf{x}_3$.

### 4.1.2. Exemplo para o modelo MV

Dada a matriz de covariâncias dos retornos ($\Sigma$), o vetor de valor mais esperado dos retornos logarítmicos ($\boldsymbol{\mu}$) e a formulação do modelo MV a seguir, obter os Portfólios Estratégicos ($\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, ... ) e construir a Linha Crítica de Markowitz.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.366444 & 0.006895 & -0.010103 \\ 0.006895 & 0.470944 & -0.000118 \\ -0.010103 & -0.000118 & 0.279217 \end{bmatrix} \qquad \mu = \begin{bmatrix} 0.032054 \\ 0.063906 \\ 0.050033 \end{bmatrix}$$

Problema P:

Minimizar $(1/2)\mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x} - \lambda_E.\mathbf{x}'\boldsymbol{\mu}$

Sujeito a $\mathbf{x}'\mathbf{u} = 1$ ($\mathbf{u} \in R^n$ é o vetor de elementos unitários)

$x_i \geq 0 \ \forall\ i$ $(i = 1, 2, 3)$

Aplicando-se o método de Multiplicadores de Lagrange:

$$\nabla((1/2)\mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x} - \lambda_E.\ \mathbf{x}'\boldsymbol{\mu}) - \lambda\nabla(\ \mathbf{x}'\mathbf{u} - 1) = 0$$

$$\mathbf{x}'\mathbf{u} \qquad\qquad = 1$$

Que resulta no sistema de equações:

$$\Sigma\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u} = \lambda_E.\boldsymbol{\mu}$$

$$\mathbf{u'x} = 1$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \Sigma & u \\ u' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_E . \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.366444 & 0.006895 & -0.010103 \\ 0.006895 & 0.470944 & -0.000118 \\ -0.010103 & -0.000118 & 0.279217 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [\,1 \quad 1 \quad 1\,] & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_E . \begin{bmatrix} 0.032054 \\ 0.063906 \\ 0.050033 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(S8)}$$

**Passo 1**: Portfólio de maior retorno, satisfazendo às restrições dadas:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad \mathbf{x'}\boldsymbol{\mu} \\ &\text{S. a:} \quad \mathbf{x'u} = 1 \qquad\qquad \textbf{(P6)} \\ &\qquad\quad x_i \geq 0 \ \forall \ i. \end{aligned}$$

Para o caso de somente uma restrição, a de orçamento, o portfólio inicial (Passo 1) é formado inteiramente pelo ativo de maior retorno entre os ativos disponíveis: $\mathbf{x}^0 = [\,0 \ \ 1 \ \ 0]$

O retorno deste portfólio é dado por:

$$\mu_{P1} = \mathbf{x}^0.\boldsymbol{\mu} = [0 \ \ 1 \ \ 0] . \begin{bmatrix} 0.032054 \\ 0.063906 \\ 0.050033 \end{bmatrix} \rightarrow \qquad \mu_{P1} = 0.063906$$

**Passo 2**: Para que o sistema S8, acima, tenha como resultado o portfólio $\mathbf{x}^0$, efetuamos alterações na matriz **M**, obtendo a matriz $\widetilde{M}$ no sistema S9:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.470944 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [0 \quad 1 \quad 0] & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_E . \begin{bmatrix} 0.032054 \\ 0.063906 \\ 0.050033 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(S9)}$$

A solução em $[\mathbf{x}^0 \ \lambda]$ é obtida fazendo-se o produto à esquerda pela matriz N1 = $\widetilde{M}_1^{-1}$ para ambos os lados da igualdade do sistema S9; as interseções de linhas e colunas de variáveis não-básicas da matriz N1 são substituídas pelo elemento nulo.

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = N(1).R + \lambda_E.N(1).S$$

$$NI := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -.470944 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -.470944 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_E \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -.470944 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.032054 \\ 0.063906 \\ 0.050033 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ \lambda 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -.470944 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .063906 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(LC1)}$$

Markowitz denomina a **equação** encontrada de Linha Crítica associada à variável $x_2$.

**Passo 3:**

Substituindo a solução obtida (LC1) para o portfólio $\mathbf{x}^0$, no sistema S8, obtemos os valores de $\lambda_E$ para a entrada das variáveis $x_1$ e $x_3$. A menor redução em $\lambda_E$ será a que define a variável a entrar. A variável $x_2$ ainda não é candidata a sair da base, pois entrou na iteração anterior.

$$\begin{bmatrix} .366444 & .006895 & -.010103 & 1 \\ .006895 & .470944 & -.000118 & 1 \\ -0010103 & -.000118 & .279217 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -.470944 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .063906 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} .032054 \\ .063906 \\ .050033 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (S10)$$

A primeira e terceira equações do sistema determinam os valores de $\lambda_E$ na interseção da Linha Crítica (LC) associada à variável $x_2$ ($l_2$) com as LC associadas às variáveis $x_1$ e $x_3$ ($l_{1.2}$ e $l_{1.3}$).

$l_{1.2}$: $0.0068950 - 0.470944 + \lambda_E.0.063906 = \lambda_E.0.032054 \rightarrow \lambda_E = 14.568912$

$l_{1.3}$: $-0.000118 - 0.470944 + \lambda_E.0.063906 = \lambda_E.0.050033 \rightarrow \lambda_E = 33.955309$

O maior $\lambda_E$ ocorre para a entrada na base da variável $x_3$. Este valor de $\lambda_E$ corresponde ao parâmetro de aversão ao risco a partir do qual, para valores decrescentes, o portfólio passa a ter uma fração de seu orçamento destinado ao ativo representado pela variável $x_3$, reduzindo assim a participação de $x_2$.

**Passo 4:**

Procede-se novamente como no passo 2, agora com $x_2$ e $x_3$ na base:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .470944 & -.000118 & 1 \\ 0 & -.000118 & .279217 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_E \cdot \begin{bmatrix} .032054 \\ .063906 \\ .050033 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(S11)}$$

Determinamos N(2) = $\widetilde{M}_2^{-1}$:

$$N2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.332627929 & -1.332627929 & .3722496225 \\ 0 & -1.332627929 & 1.332627929 & .6277503775 \\ 0 & .3722496225 & .6277503775 & -.1752346517 \end{bmatrix}$$

N(2) também poderia ser obtida com os procedimentos do Passo 4, no item 4.1.2.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = N(2) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_E \cdot N(2) \cdot \begin{bmatrix} 0.032054 \\ 0.063906 \\ 0.050033 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ \lambda 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ .3722496225 \\ .6277503775 \\ -.1752346517 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} 0 \\ .01848754726 \\ -.01848754726 \\ .05519721902 \end{bmatrix} \qquad \text{(LC2)}$$

Para $\lambda_E = 33.95530887$, obtém-se novamente a solução para o portfólio $\mathbf{x}^0$:

**Passo 5:**

Semelhante ao passo 3, substitui-se a solução obtida (LC2) no sistema (S8), determinando $\lambda_E$ para a entrada da variável $x_1$. A variável $x_3$, que entrou na base na iteração anterior, não é candidata a sair. A saída da variável $x_2$ é avaliada fazendo-se $x_2 = 0$ em LC2.

$$\begin{bmatrix} .366444 & .006895 & -.010103 & 1 \\ .006895 & .470944 & -.000118 & 1 \\ -0010103 & -.000118 & .279217 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ .3722496225 \\ .6277503775 \\ -.175234652 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} 0 \\ .01848755 \\ -.01848755 \\ .05519722 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} .032054 \\ .063906 \\ .050033 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(S12)}$$

Da primeira equação do sistema S12, obtemos os valores de $\lambda_E$ para a entrada da variável $x_1$,

$l_{123}$: $-0.179010153 + \lambda_E.0.055511470 = \lambda_E.0.032054 \rightarrow \lambda_E = 7.631264$

A saída da variável $x_2$ é avaliada quanto ao valor que $\lambda_E$ assume quando $x_2 = 0$ em LC2:

$l_{13}$: $\lambda_E = -0.3722496225 / 0.01848754726 \rightarrow \lambda_E = -20.135154$

Estes valores de $\lambda_E$ (7.631264 e -20.135154) correspondem às interseções da LC $l_{23}$ com as LCs $l_{123}$ e $l_{13}$.

O maior $\lambda_E$ corresponde à entrada na base da variável $x_1$. Então $x_1$ entra na base.

O portfólio $\mathbf{x^1}$ pode ser determinado substituindo-se o valor de $\lambda_E$ no problema (P), ou na LC obtida no passo 4 anterior.

Obtém-se $\mathbf{x^1} = [0 \quad 0.513333 \quad 0.486667]$.

**Passo 6:**

Procede-se novamente como no passo 2 com $x_1$, $x_2$ e $x_3$ na base. O sistema de equações corresponde ao sistema inicial (S8):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.366444 & 0.006895 & -0.010103 & 1 \\ 0.006895 & 0.470944 & -0.000118 & 1 \\ -0.010103 & -0.000118 & 0.279217 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} 0.032054 \\ 0.063906 \\ 0.050033 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(S13)}$$

O produto da inversa da matriz **M**, pelo sistema S13, resulta na LC associada às variáveis $x_1$, $x_2$ e $x_3$:

$$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ \lambda 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .3261581654 \\ .2434492304 \\ .4303926037 \\ -.1168490287 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} -.04273972943 \\ .03536553618 \\ .00737419325 \\ .04754637349 \end{bmatrix} \qquad \text{(LC3)}$$

Para a saída de ambas as variáveis $x_2$ e $x_3$ tem-se $\lambda_E$ negativo.

$\lambda_{E2} = -0.2434492304 / 0.03536553618$

$\lambda_{E3} = -0.4303926037 / -0.00737419325$

Então $\lambda_E$ anula-se antes destas variáveis saírem da base. O último portfólio é obtido com $\lambda_E = 0$ na equação LC3:

$\mathbf{x}^2 = [0.326158 \quad 0.243449 \quad 0.430393]$

Este ponto apresenta mínima variância, e o algoritmo da LC chegou ao fim.

A saída da variável $x_1$ não é avaliada, pois entrou na iteração anterior - assume valores positivos a partir de $\lambda_E < 7.631264$.

Para contemplar uma situação não encontrada no exemplo acima, caso $x_1$ não tivesse entrado na iteração anterior, não caberia avaliar sua saída, pois o portfólio composto por $x_2$ e $x_3$ seria obtido novamente. Neste caso, o valor de $\lambda_E$ seria maior que o $\lambda_E$ que decidiu a iteração anterior. Este critério pode ser utilizado para não incluí-lo entre os valores de $\lambda_E$ das outras variáveis, dos quais o maior decide a variável a entrar ou sair.

Além disso, se duas variáveis candidatas a entrar na base apresentam o mesmo valor de $\lambda_E$, então ambas devem entrar na base e, portanto deve-se aceitar $\lambda_E$ menor do que ou igual ao que decidiu a iteração anterior, mas somente para a entrada de variáveis à base. E ambas estas variáveis não devem sair da base em uma próxima iteração.

Também é necessário o controle de variáveis que saíram da base, não devendo ser avaliada a hipótese de entrar novamente, exceto variáveis de folga, para restrições compostas por mais de uma variável.

Portfólios com retorno compreendido entre os retornos de dois portfólios estratégicos são determinados pela combinação convexa entre estes, conforme a seguir:

Dados os portfólios estratégicos $\mathbf{x}^0 = [0, 1, 0]$ e $\mathbf{x}^1 = [0, 0.513333, 0.486667]$ com retornos $\mu_{P1} = 0.063906$ e $\mu_{P2} = 0.057154$, obter um portfólio com retorno $\mu_P = 0.06$ e avaliar seu risco.

Cálculo de $\lambda$:

$$\lambda = (0.063906 - 0.06) / (0.063906 - 0.057154) = 0.5784952607$$

Combinação convexa, para o portfólio $\mathbf{x}^3$:

$$\mathbf{x}^3 = \lambda.\mathbf{x}^1 + (1-\lambda).\mathbf{x}^0 = [0, 0.7184654473, 0.2815345527]$$

Retorno e variância:

$$\mu_{P3} = \mathbf{x}^{3\prime}\boldsymbol{\mu} = 0.060000$$

$$V(\mathbf{x}^3) = \mathbf{x}^{3\prime}.\Sigma.\mathbf{x}^3 = 0.2651812862$$

### 4.1.3. Implementação Computacional do Modelo MV

**Identificação das variáveis:**

n, m - número de ativos disponíveis e número de períodos de seus retornos;

p, q -número de restrições e de variáveis auxiliares, para restrições desigualdade;

**x** $\in \boldsymbol{R}^{n+q}$ - vetor correspondente ao portfólio, ou seja, que define as parcelas $x_i$ de um orçamento unitário destinadas ao i-ésimo ativo.

$\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{R}^{n}$ - vetor de retornos esperados (esperança matemática) dos **n** ativos;

$\Sigma \in$ M(n x n) - Matriz de covariâncias dos **n** ativos;

$A \in$ M(p x n) - Matriz dos coeficientes das **p** restrições;

**b** $\in \boldsymbol{R}^{p}$ - vetor de "recursos" das restrições;

**M** $\in$ M(n+p+q x n+p+q) - matriz composta correspondente à matriz de coeficientes no sistema de equações do método de Multiplicadores de Lagrange;

**R** $\in$ M(n+p x 1) - matriz composta onde as n primeiras coordenadas têm valor nulo e as demais correspondem ao vetor **b**;

**S** $\in$ M(n+p x 1) - matriz composta onde as n primeiras coordenadas correspondem ao vetor $\boldsymbol{\mu}$ e as demais têm valor nulo;

**PE** $\in$ M(n+p x $n_{PE}$) - matriz de Portfólios eficientes estratégicos, onde $n_{PE}$ é o número de portfólios estratégicos que serão determinados. Esta matriz é redimensionada para registrar a cada iteração o novo portfólio estratégico determinado;

**J** - Conjunto de variáveis na base(*in*), em uma dada iteração;

**JX** - conjunto de variáveis *in* até a iteração atual; após saírem não retornam à base;

**JIN** - conjunto de variáveis *in* que passaram a fazer parte da base na iteração anterior, não podendo deixar a base na iteração atual;

**VA** - conjunto de variáveis auxiliares, ou de folga;

**LKA** - $\lambda_E$ do portfólio eficiente estratégico imediatamente anterior. A entrada ou saida de variáveis não poderá ser com $\lambda_{E,i}$ maior que **LKA**.

Passos para determinação dos portfólios eficientes:

1. Cálculo dos retornos logarítmicos e da Matriz de covariâncias dos retornos;
2. Cálculo do portfólio de maior retorno para início do algoritmo MV;
3. Aplicação do algoritmo MV, com obtenção de portfólios estratégicos;
4. Determinação da Fronteira de Eficiência, a partir de Combinação Convexa de pares de portfólios estratégicos.

**Retornos Logarítmicos ($\mu$) e Matriz de Covariâncias ($\Sigma$)**:

Os códigos em linguagem de programação Maple são apresentados no Anexo **I**.

**Algoritmo para o cálculo do parâmetro $\lambda_E$**:

```
LC = M.(T + λE.U) - λE.S
LK = -3000
IK = 0
Para i = 1 até n + q
        Se i ∉ J então                                    ! xi não está na base
                Se i ∉ JX então                           ! xi ainda não foi básica
                        LKK = {λE tal que LC[i]=0):       ! LC[i] avalia λE para xi.
                        Se (LKK > LK e LKK <= LKA) então
                                LK = LKK
                                IK = i                    ! λE para xi entrar =LKK
                Senão
                        !Já foi base e não é variável auxiliar
        Senão
                Se i ∉ JIN então                  ! xi não entrou na iteração anterior
                        Se U[i,1] ≠ 0 então
                                LKK = - T[i,1]/U[i,1]
                        Senão
                                LKK = 10^21       ! Não intercepta nenhuma LC
                        Se (LKK > LK e LKK <= LKA) então
                                LK = LKK
                                IK = i            ! λE para xi sair =LKK
                Senão
                        ! x[i] Entrou na Iteração Anterior
                Fim do Se
        Fim do Se
Próximo i
```

## 4.2. Modelo de Média - Valor sob Risco

### 4.2.1. Valor sob Risco

DOWD (1999) apresenta a metodologia de Valor sob Risco (VaR) correspondente à máxima perda esperada em um dado período, para um nível de confiança estatístico especificado. É uma medida do risco de portfólios que indica o valor máximo esperado de perdas monetárias, desenvolvida por J. P. Morgan em 1994.

O período de tempo pode ser dado em dias, semanas, meses, etc., e o nível de confiança, 90%, 95%, 99%, ou outro desejado.

O VaR de um portfólio (ou de um ativo) pode ser definido em termos de valores absolutos de perda, ou em termos de perdas relativas à renda média esperada. Alternativamente, pode-se definir VaR como a máxima perda esperada com um dado nível de confiança, em relação ao valor do portfólio ao final do período de aplicação.

A variância de um portfólio informa somente quanto de variabilidade apresenta o retorno esperado, mas não informa o valor da perda esperada em termos monetários; então uma medida focalizada nos $\alpha$% piores resultados, ou seja, a probabilidade nas caudas da distribuição de probabilidades dos retornos, apresenta-se mais adequada. Pode-se definir VaR como a máxima perda esperada em (1-$\alpha$%) dos casos, para um nível de confiança $\alpha$.

Ao especificar $\alpha$, obtém-se um valor de corte para os retornos, separando (100-$\alpha$)% dos dados correspondentes a retornos aceitáveis, dos $\alpha$% restantes, não aceitáveis.

Pode-se, também, estabelecer um valor de corte e determinar a probabilidade de ocorrer retorno menor.

Seja **W** o valor inicial do portfólio e r o retorno; seja também r* um valore de corte para o retorno, isto é, são aceitos portfólios com valores esperados acima deste corte.

Supondo-se conhecida a distribuição de probabilidades dos retornos, f(r), então para retornos centesimais, tem-se:

$$P[r < r^*] = \int_{-\infty}^{r^*} f(r)dr = \alpha$$

O valor de r*, para dados não padronizados, pode ser obtido calculando-se a inversa da função distribuição de probabilidade acumulada.

Para retornos normalmente distribuídos, o valor de corte do retorno r* ou do nível de confiança $\alpha$, são facilmente encontrados, dados pela relação:

$r^* = \mu + z\sigma$

Resultante das propriedades de $P[Z < (r^*-\mu)/\sigma] = \alpha$, onde $z$ reflete o nível de confiança, assumindo valor de 1.65 para 95%, por exemplo, e obtido de tabelas da distribuição normal padronizada; $z$ está relacionado à probabilidade de eventos nas caudas da distribuição, o que permite definir VaR em termos dos parâmetros $z$ e $\sigma$, para o nível de confiança $\alpha$ desejado:

$VaR = -z\sigma w$ ($w$ = valor inicial do portfólio)

Como medida estimada, o VaR verdadeiro não é conhecido, uma vez que $\sigma$ e $\mu$ são estimados. A utilidade do VaR estimado depende de sua precisão. Se a precisão é alta, então VaR é altamente informativa; caso não seja, as informações são vagas ou de nenhuma valia.

Para avaliar a precisão, uma maneira natural é a construção de intervalo de confiança, que sob a suposição de retornos normalmente distribuídos, é de fácil obtenção.

Para uma população (de retornos) normalmente distribuída, o VaR verdadeiro é igual a ($-z\sigma w$), onde $w$ é o valor inicial do portfólio. Mas para valores amostrais e também por tratar-se de projeção a partir da análise de performance passada para apoio em decisões futuras, deve-se considerar o verdadeiro parâmetro $\sigma$ como desconhecido ou impreciso.

Em amostras de tamanho n, a partir de uma distribuição normal, a variável

$$(n-1)s^2/\sigma^2$$

tem distribuição $\chi^2$ com (n-1) graus de liberdade, onde $s^2$ é a variância amostral e $\sigma^2$ é a variância populacional desconhecida. Desta forma, existe (100-$\alpha$)% de probabilidade de que $\sigma^2$ esteja entre $\chi^2_{0.025}$ e $\chi^2_{0.975}$, então o intervalo de confiança para $\sigma^2$ deve ser:

$$(n-1)\frac{s^2}{\chi^2_{0.975}} < \sigma^2 < (n-1)\frac{s^2}{\chi^2_{0.025}}$$

O intervalo de confiança para VaR, é dado por:

$$-z\cdot s\cdot w\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{0.975}}} < VaR = -z\sigma w < -z\cdot s\cdot w\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{0.025}}}$$

O VaR de um portfólio é menor que a soma de VaR dos ativos individuais que o compõem, isto é, VaR é reduzido pela principio da diversificação. Isto pode ser observado pela decomposição do VaR de portfólios em seus constituintes:

$\sigma^2_P = \mathbf{x}\Sigma\mathbf{x}' = \mathbf{x}\sigma R\sigma\mathbf{x}' \rightarrow$

$VaR_P = -z\sigma_P w = -z[\mathbf{x}\sigma R\sigma\mathbf{x}']^{1/2}.w \rightarrow$

$VaR_P = -\alpha[\mathbf{x}\Sigma\mathbf{x}']^{1/2}.W = [VaR.R.VaR]^{1/2}$

onde VaR corresponde ao vetor cuja i-ésima coordenada corresponde ao VaR do i-ésimo ativo. Assim, para estimar o $VaR_P$ de um portfólio, são necessárias estimativas de fatores como volatilidades ($\sigma$), correlações (R), ou ambos fatores combinados na matriz de covariâncias $\Sigma$, e dos fatores de escala, ou ponderações em $\mathbf{x}$, além do valor do portfólio w.

### 4.2.2. O Modelo Média - Valor sob Risco (MVaR)

Segundo DUARTE (1999), um algoritmo para gerar a Fronteira de Eficiência com risco dado pelo Valor sob Risco pode ser aproximado pelo modelo M-V de Markowitz. Neste modelo se obtém a mensuração do risco pela metodologia VaR, e uma função utilidade com um parâmetro de *tradeoff* entre retorno ($\mu_P = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{x}$) e valor sob risco ($VaR = z.V(\mathbf{x})$, para retornos com distribuição normal), deve ser otimizada segundo o critério de dominância:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Maximizar} & U = \boldsymbol{\mu}'.\mathbf{x} + \lambda_E.z.V(\mathbf{x}) & \\
\text{Sujeito a} & \mathbf{x}'\mathbf{u} = 1 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad \mathbf{(P4)} \\
 & A\mathbf{x} = \mathbf{b} & \\
 & x_i \geq 0 \ \forall i &
\end{array}
$$

onde z reflete o nível de confiança desejado (por ex., -1.65 para 95%), $\lambda$ é um parâmetro de aversão ao risco, característico para cada investidor e $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x}$ é a variância do portfólio.

### 4.2.3. Implementação computacional do Modelo MVaR

O modelo MVaR corresponde a um problema de programação não linear, sujeito a restrições lineares, com solução obtida através do programa Lingo.

O **Anexo III** apresenta o modelo implementado.

Os dados para este modelo consistem em vetor de retornos logarítmicos, matriz de covariâncias e vetor de retornos dos portfólios obtidos com o modelo MV, convertidos do programa Maple para arquivos excel(.xls):

```
! Matriz de covariâncias e vetor de retornos;
    MC   = @OLE('C:\MC.XLS', 'MC');
    RET  = @OLE('C:\VR.XLS', 'VR');
! Retornos Logarítmicos de Portfólios;
    RLN  = @OLE( 'C:\RLN.XLS', 'RLN');
```

As soluções obtidas são exportadas para um arquivo excel, com a inclusão de nome para o intervalo onde são colocados os resultados: Inserir/Nome/Definir, Nome = "INV" e Intervalo = "=INV!$A$1:$BK$1".

```
! Resultados exportados para arquivo excel;
    @OLE( 'C:\VARMV.XLS', 'INV_MV') = INV;
```

A cada solução com o programa Lingo, o resultado (portfólio) é armazenado em uma segunda planilha "PortfMV".

# 5. APLICAÇÃO DOS MODELOS

## 5.1. Seleção de Ativos

São utilizados os preços de 63 ativos negociados na Bolsa de Valores do Estado de São Paulo (BOVESPA), obtidos através do banco virtual www.investshop.com, cujos nomes encontram-se listados na **Tabela 4**, em anexo.

Foram selecionados ativos que apresentaram cotações diárias completas no período de 03/10/1997 a 29/12/2000 (848 dias úteis), permitindo a construção da matriz de covariâncias com a interpolação de alguns poucos dados não disponíveis dentro do intervalo utilizado.

Os dados listados pelo banco virtual corresponderam aos de Maiores Volumes, Maiores Altas e Maiores Baixas, negociados na Bovespa.

Com o auxílio da planilha de cálculos Microsoft Excel, são organizados os dados referentes a cotações das ações e gravados em um arquivo (.csv), para o programa Maple.

O cálculo dos retornos logarítmicos esperados e da matriz de covariâncias é realizado com o programa Maple, com os códigos/algoritmos descritos no **Anexo I**.

Como primeira análise, os resultados de retornos logarítmicos esperados e desvio padrão (Risco DP) dos retornos dos ativos são listados na **Tabela 6**e **Tabela 7** dos anexos. A **Figuras 2** e **Figura 3** a seguir apresentam a dispersão dos dados em planos Risco-Retorno, para 63 ativos com 848 cotações diárias.

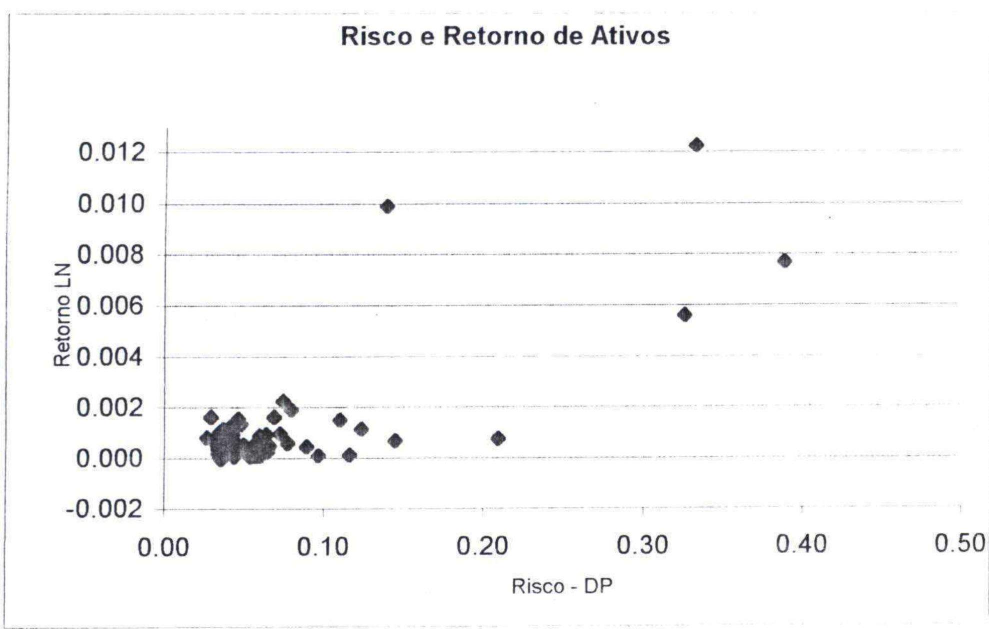



**Figura 1: Risco e Retornos Logarítmicos dos Ativos**

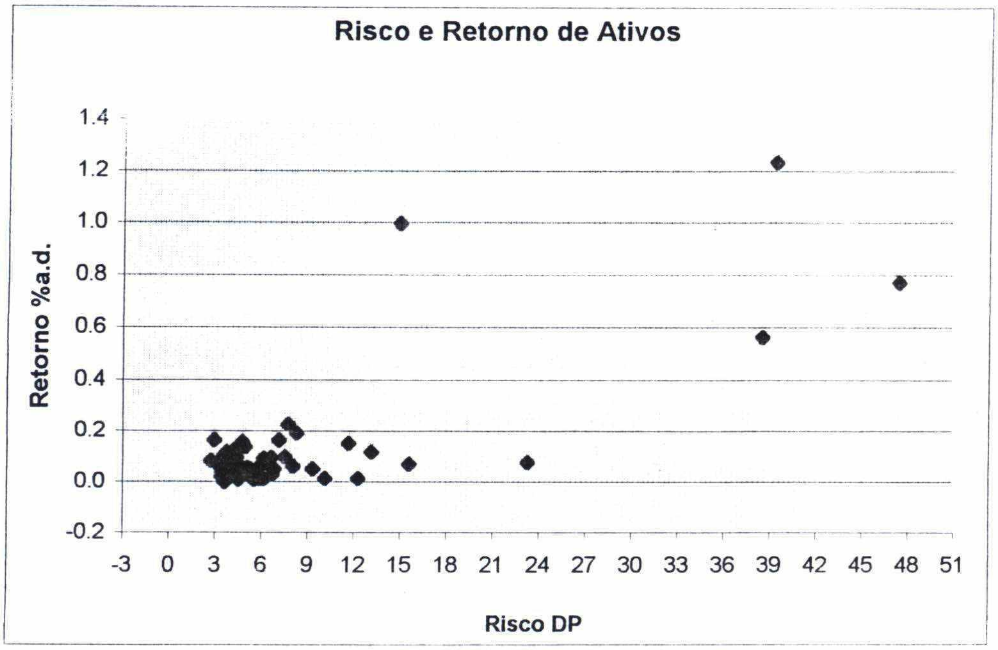



**Figura 3: Risco e Retornos Percentuais - 63 Ativos**

A classificação para alguns dos ativos pelo critério riscos(maior para menor) resulta Ativos: 19, 25, 57, 35 e 63. Com classificação pelo retorno(maior para menor), resulta em Ativos: 25, 63, 19, 57 e 35. A construção da Fronteira de Eficiência permite classificação de portfólios sem esta ambigüidade.

Os retornos logarítmicos semanais esperados e respectivo desvio padrão, para os 146 ativos, são listados na **Tabela 8** dos anexos. A **Figura 4** a seguir apresenta a dispersão dos dados no plano Risco-Retorno, para 146 ativos com 170 cotações semanais.

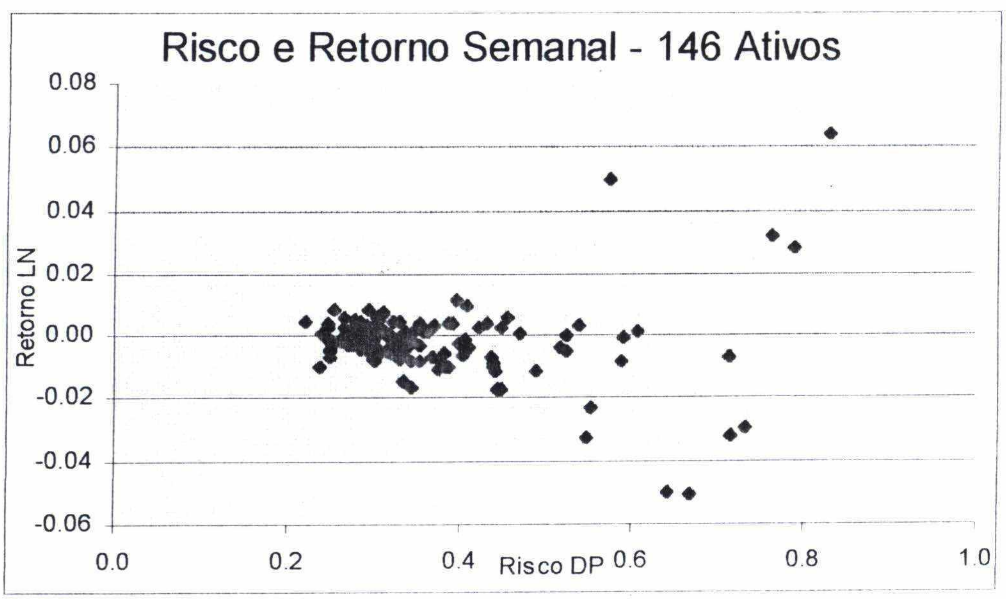



**Figura 4: Risco e Retorno Semanal - 146 Ativos**

## 5.2. Retornos e Matriz de Covariâncias

Os retornos esperados e matriz de covariâncias são calculados a partir da matriz de cotações, utilizando o programa Maple, cujo código/algoritmo encontra-se no Anexo **I**.

O vetor de retornos ($\mu$) e a matriz de covariâncias ($\Sigma$) e o tamanho da amostra (n) são gravados em arquivos para utilização no modelo de Markowitz.

## 5.3. Modelo de Média-Variância (MV)

A determinação da Fronteira de Eficiência para o modelo Média-Variância é realizada conforme o algoritmo descrito em 4.1.1, implementado em linguagem de programação Maple.

Os dados de entrada para o modelo MV são:

- **n** = 63 ativos com retornos diários em 847 dias úteis;
- **p** restrições sendo **q** delas do tipo desigualdades;
- $\boldsymbol{\mu}$ = vetor de valor esperado dos retornos dos ativos eficientes;
- **A** = matriz dos coeficientes das restrições;
- $\Sigma$ = matriz de covariâncias dos retornos logarítmicos.

O primeiro passo determina o portfólio de máximo retorno, com a solução de um problema de Programação Linear. Utilizando um modelo com somente a restrição de orçamento, o primeiro portfólio é composto inteiramente pelo ativo de número 25, com retorno $\mu_P = 0.012272$ e risco $\sigma = 0.33186$. Os portfólios das 61 iterações seguintes correspondem aos que proporcionam a menor redução no parâmetro $\lambda_E$ "*tradeoff*" entre retorno e risco (menor redução no retorno), para a entrada ou saída de uma variável da base.

Os cálculos são efetuados nos programas Maple e Lingo, conforme o algoritmo descrito em 4.1.1 e código descrito no Anexo **II** e Anexo **III**.

Os resultados de Risco e Retorno Logarítmico dos Portfólios Eficientes Estratégicos encontram-se na **Tabela 2** (anexo). Estes resultados estão representados em termos de valor mais esperado dos retornos logarítmicos.

Os valores usuais de retornos percentuais diários são obtidos através da transformação ($E_P = 100[\exp(E_L) - 1]$) e desvio padrão dos retornos percentuais ($DP_P = 100[\exp(DP) - 1]$) e apresentados na **Tabela 3** (anexo).

O gráfico da Fronteira de Eficiência é apresentado na **Figura 5** a seguir.

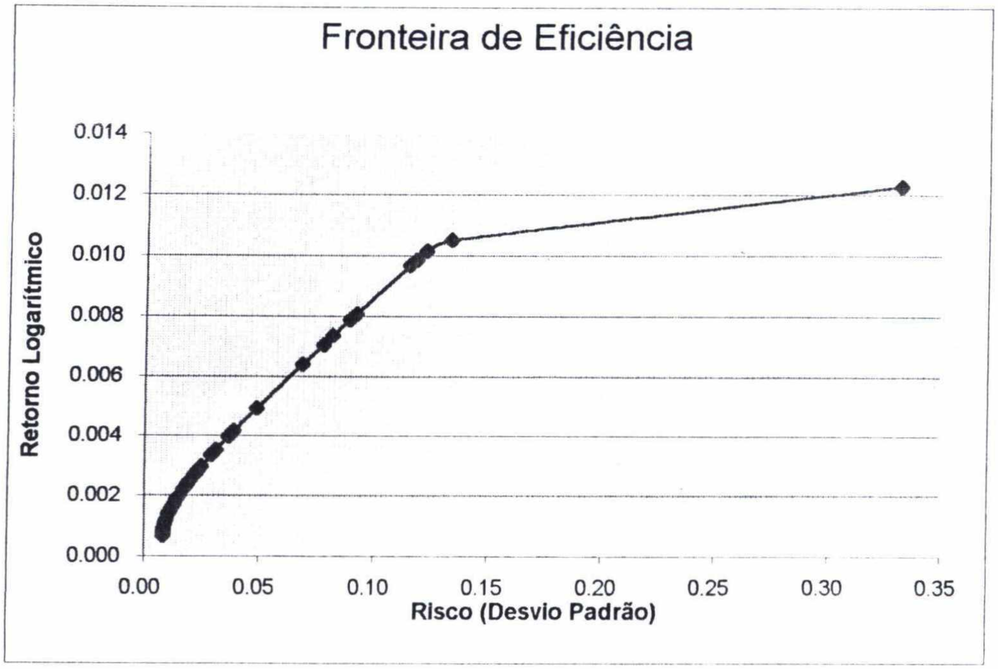



**Figura 5: Fronteira de Eficiência para 63 ativos**

De posse dos portfólios estratégicos determinados (**Tabela 5** anexo), são calculados o Risco e Retorno, utilizando-se as fórmulas (7) e (8): $\mu_P = \mathbf{c}'.\mu$ e $\sigma_P = \mathbf{c}'\Sigma\mathbf{c}$.

## 5.4. Modelo de Média - Valor sob Risco (MVaR)

O modelo MVaR é implementado com o objetivo de verificar o VaR para cada retorno de portfólios estratégicos determinados no modelo Média - Variância de Markowitz, permitindo a comparação da eficiência dos portfólios obtidos a partir das duas metodologias de quantificação do risco.

O modelo MVaR implementado em Lingo (ver **Anexo IV**) é apresentado a seguir:

Minimizar VaR

Sujeito a $\mathbf{x}'.\mathbf{u} = 1$

$\text{VaR} = z^*(\mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x})^{1/2}$

$\mathbf{x}'\mu = R(j)$, $(j = 1, 2, ..., 62$ retornos de portfólios MV)

$x_i \geq 0 \ \forall \ i = 1, 2, ..., 63$

Os resultados (Risco, Retorno) do modelo MVaR, para retornos iguais aos obtidos com portfólios MV são apresentados na tabela a seguir, e apresentam poucas alterações em relação aos resultados do modelo MV, como esperado, pois para a mínima variância tem-se também o mínimo desvio padrão utilizado para obter VaR.

As diferenças entre os portfólios obtidos no modelo MV e MVaR são mínimas, (0,03% para ativos ausentes no modelo MV) podendo ser atribuídas a efeitos de arredondamento. O gráfico da Fronteira de Eficiência para o modelo MVaR é idêntico ao do modelo MV, razão pela qual não é apresentado.

Os valores de VaR para os portfólios MV são apresentados na **Tabela 1** a seguir, onde VaR representa a máxima perda esperada com 95% de probabilidade e VaR% corresponde a VaR em valores percentuais.

**Tabela 1: Valor sob Risco para Retornos Logarítmicos e Percentuais**

| Portf | VaR | VaR% | Portf | VaR | VaR% | Portf | VaR | VaR% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.547 | 42.14 | 22 | 0.038 | 3.69 | 43 | 0.019 | 1.90 |
| 2 | 0.221 | 19.80 | 23 | 0.037 | 3.63 | 44 | 0.019 | 1.88 |
| 3 | 0.203 | 18.36 | 24 | 0.037 | 3.62 | 45 | 0.019 | 1.86 |
| 4 | 0.195 | 17.76 | 25 | 0.036 | 3.58 | 46 | 0.019 | 1.84 |
| 5 | 0.191 | 17.40 | 26 | 0.034 | 3.34 | 47 | 0.018 | 1.78 |
| 6 | 0.153 | 14.17 | 27 | 0.033 | 3.22 | 48 | 0.017 | 1.64 |
| 7 | 0.148 | 13.76 | 28 | 0.033 | 3.22 | 49 | 0.016 | 1.63 |
| 8 | 0.136 | 12.70 | 29 | 0.032 | 3.18 | 50 | 0.016 | 1.59 |
| 9 | 0.129 | 12.09 | 30 | 0.032 | 3.10 | 51 | 0.016 | 1.55 |
| 10 | 0.114 | 10.79 | 31 | 0.031 | 3.01 | 52 | 0.016 | 1.55 |
| 11 | 0.081 | 7.80 | 32 | 0.029 | 2.84 | 53 | 0.016 | 1.54 |
| 12 | 0.065 | 6.27 | 33 | 0.025 | 2.51 | 54 | 0.015 | 1.48 |
| 13 | 0.064 | 6.20 | 34 | 0.025 | 2.51 | 55 | 0.015 | 1.46 |
| 14 | 0.063 | 6.08 | 35 | 0.025 | 2.45 | 56 | 0.015 | 1.44 |
| 15 | 0.061 | 5.93 | 36 | 0.024 | 2.39 | 57 | 0.014 | 1.44 |
| 16 | 0.052 | 5.06 | 37 | 0.024 | 2.35 | 58 | 0.014 | 1.42 |
| 17 | 0.050 | 4.86 | 38 | 0.024 | 2.35 | 59 | 0.014 | 1.42 |
| 18 | 0.049 | 4.83 | 39 | 0.022 | 2.18 | 60 | 0.014 | 1.42 |
| 19 | 0.049 | 4.74 | 40 | 0.021 | 2.09 | 61 | 0.014 | 1.42 |
| 20 | 0.042 | 4.07 | 41 | 0.021 | 2.06 | 62 | 0.014 | 1.42 |
| 21 | 0.040 | 3.89 | 42 | 0.020 | 1.97 | | | |

Para os retornos percentuais, podemos identificar o elevado grau de risco associado aos ativos em análise, uma vez que se trata de retornos diários.

Com o cálculo de assimetria e curtose dos retornos dos portfólios, conforme a Tabela 7 dos anexos, podemos avaliar se os dados apresentam-se aproximadamente distribuídos de acordo com uma curva normal. A assimetria é encontrada somente nos dois primeiros portfólios com valores 20.77 e 4.08(o padrão é zero), indicando assimetria à direita, com excesso de dados à esquerda, indicando que o modelo MV está sub-avaliando o risco. O cálculo de curtose indica que os dados apresentam-se demasiadamente centrados com valores 540.9, 187.3 para os primeiros portfólios a 6.23 e 6.07 para os dois últimos.

O teste K-S de Kolmogorov-Smirnov, para verificar a hipótese de ajuste dos dados à distribuição normal, apresentou valores-p menores que 0.01 para todos os portfólios, ou seja, as variáveis retorno histórico de cada portfólio dadas por combinação linear dos retornos dos ativos com coeficientes as frações de orçamento aplicada em cada ativo, não podem ser adequadamente modeladas pela curva de Gauss.

# 6. CONCLUSÃO

A construção de portfólios amplamente diversificados proporciona uma espécie de proteção contra flutuações imprevisíveis nos retornos, devido ao efeito da diversificação, com redução do risco.

A diversificação com o modelo de Média-Variância de Markowitz, com otimização do parâmetro *tradeoff* entre risco e retorno proporciona melhor resultado, comparado à diversificação aleatória, pois permite a escolha entre os portfólios diversificados, daqueles que tem menor variância para cada nível de risco, e também corresponde à escolha cujos retornos esperados apresentam maior probabilidade de ocorrência, levando-se em conta a performance passada.

Como resultado do modelo MV, são obtidos os portfólios eficientes estratégicos como soluções de um sistema de equações lineares para cada parâmetro de aversão ao risco. As combinações convexas entre duas soluções consecutivas também são portfólios eficientes, proporcionando portfólios adequados aos mais diversos níveis de aversão ao risco. O conjunto de portfólios e suas combinações convexas correspondem à Fronteira de Eficiência dos portfólios, onde não é possível obter um portfólio com maior retorno para determinado nível de risco, bem como não é possível obter um portfólio com menor risco, para determinado retorno esperado.

A análise é adequada, também, para diferentes orçamentos, onde a inclusão de restrições de valor mínimo a aplicar em cada ativo, ou grupos de ativos, gera portfólios com menor número de ativos, de mais fácil administração, embora a curva da fronteira de eficiência possa deslocar-se com algum aumento de risco.

Como os modelos MV e MVaR apresentados neste trabalho partem da suposição de retornos modelados pela distribuição de probabilidades normal, a qualidade de ajuste dos retornos dos portfólios eficientes estratégicos obtidos à distribuição normal foi testada. Segundo MOOD, quando esta suposição não se verifica, pode levar à perda de informações significativas.

Para o conjunto de dados utilizados, foi possível verificar que, para maior diversificação tem-se gradativamente melhor ajuste, como pode ser observado nos valores de assimetria e principalmente de curtose para os portfólios eficientes (Tabela **9**) e valores normais esperados para probabilidades (Figuras 7 e **8** nos anexos). Esta observação está de acordo com DOWD (1999, p. 87, 93) sobre a tendência à distribuição normal para portfólios amplamente diversificados, devido ao efeito do Teorema Central do Limite, da Estatística.

Sob a hipótese de que os retornos dos portfólios eficientes possam ser ajustados pela distribuição de probabilidades normal, a solução do modelo não linear MVaR, que tem risco calculado com base na variância, é equivalente à do modelo MV. A metodologia MVaR pode ser considerada uma extensão natural do modelo de Markowitz, ao menos para retornos com distribuição aproximadamente normal. A utilidade do modelo MVaR, está em que estabelece um valor máximo para a perda de valor monetário esperada em um horizonte de tempo, para determinado nível de confiança estatístico.

**Sugestões para trabalhos futuros**:

1. Implementação do Modelo MVaR fatorial, determinando a máxima perda esperada, com risco dado por combinação linear de fatores de mercado.

2. Construção de portfólios com o uso da Razão de Sharpe Generalizada, proposta por DOWD, que tem a propriedade de levar em conta as correlações de ativos com o portfólio do investidor, adequado para mudança em posições de risco.

3. Utilizar metodologia mais robusta para estimação de volatilidades e correlações, permitindo variação de volatilidade ao longo do tempo, bem como atribuição de ponderação maior para valores mais recentes: Os modelos de estimadores com média móvel ponderada (*EWMA - Exponentially Wighted Moving Average*) e Autoregressivo Generalisado com Heterocedasticidade Condicional (*GARCH - Generalised autoregressive conditional heteroskedastic*), embora, segundo DOWD, as correlações no modelo GARCH apresentem dificuldades com o número de parâmetros crescendo exponencialmente com o número de correlações.

## REFERÊNCIAS


[1] BERTSEKAS, D. P. **Convexity, Duality, and Lagrange Multipliers**. Massachusetts Institute of Technology, 2001. Disponível em http://web.mit.edu/6.291/www. Acesso em: 01/07/2001.

[2] BISSCHOP, Johannes et ENTRIKEN, Robert. **AIMMS – The Modeling System**. Paragon Decision Technology B. V. 1993. The Netherlands.

[3] BRADLEY, Stephen P., HAX, Arnoldo C., MAGNANTI, Thomas L. **Applied Mathematical Programming**. Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1977.

[4] DAS, Satyajit. **Risk Management and Financial Derivatives**. A guide to the Mathematics. New York, USA, McGraw-Hill, 1998.

[5] DOWD, Kevin. **Beyond Value At Risk**. The New Science of Risk Management. Chichester, England, John Wiley & Sons Ltd, 1999.

[6] DUARTE JÚNIOR, Antonio M. et ALCÂNTARA, Sílvia R. **Mean-Value-At-Risk Optimal Portfólios with Derivatives**. In: XXXI SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 1999, Juiz de Fora, MG. Anais do Simpósio. UFJF - Universidade Federal de Juiz de Fora, 1999. p. 891-903.

[7] GOETZMANN, William N. **An Introduction to Investment Theory**. Yale School of Management. Disponível em: http://viking.som.yale.edu/will/finman540/classnotes/summary.html . Acesso em 22/06/99.

[8] JOHNSON, R. A. et WICHERN, D. W. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. Fourth Edition. Prentice Hall, New Jersey, 1998.

[9] LI, David X. **Value at Risk Based on the Volatility, Skewness and Kurtosis**. RiskMetrics Group. New York, NY. 1999.

[10] MARKOWITZ, Harry M. **Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments**. Cowles Foundation For Research in Economics, Yale University. 2ª ed. 1970.

[11] MARKOWITZ, Harry M. **Autobiography of Harry M. Markowitz**. "Les Prix Nobel 1990", The Nobel Foundation, 1999. Disponível em http://www.nobel.se/laureates/economy-1990-1-autobio.html. Acesso em 12/08/99.

[12] MOOD, Alexander M. et all. **Introduction to the Theory of Statistics**. Third Edition. International Student Edition. McGraw-Hill. Singapore, 17th Printing, 1986.

[13] MORGAN, J. P. et REUTERS Ltd. **RiskMetrics™ - Technical Document**. Fourth Edition. New York, Morgan Guaranty Trust Company of New York & Reuters Ltd International Marketing, 1996. Disponível em http://www.riskmetrics.com. Acesso em 07/04/2000.

[14] MURTY, K. G. **Linear and Combinatorial Programming**. Wiley, New York, 1976.

[15] ROCKAFELLAR, R. Tyrrell. **Convex Analysis**. Princeton University Press. USA. Tenth printing, 1997.

[16] ROSS, S. A., ROLL, R., BURMEISTER, E. **A Practitioner's Guide to Arbitrage Pricing Theory**. Reprintetd with permission. Copyright 1998, Salomon Smith Barney Inc. Disponível em http://www.aimr.org/pdf/apgapt.pdf. Acesso em 01/07/2001.

[17] Universidade Federal do Paraná. Sistema de Bibliotecas. **Normas para Apresentação de Documentos Científicos**. Volumes 2 e 6 a 10. Editora da UFPR, Curitiba, 2000.

[18] SECURATO, José Roberto. **Decisões Financeiras em Condições de Risco**. São Paulo, Atlas, 1996.

[19] SHARPE, W. F. **Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk**. Journal of Finance, Vol. XIX, september, 1964. p. 425-442.

[20] SHARPE, W. F. Stanford University. **Macro-Investment Analysis**. Stanford University. Disponível em: http://www.stanford.edu/~wfsharpe/mia/opt/mia_over.htm. Acesso em 07/04/2000.

[21] SHARPE, W. F. **The Sharpe Ratio**. The Journal of Portfolio Management. Institutional Investor, Inc. New York, N.Y. Fall 1994. Disponível em: http://www.stanford. edu /~wfsharpe/art/sr/sr.htm. Acesso em 07/04/2000.

[22] SILVA, Ermes Medeiros e outros. **Pesquisa Operacional. Para os cursos de Economia, Administração, Ciências Contábeis**. São Paulo. Atlas, 1995.

[23] STERN, Julio Michael e outros. **Métodos de Otimização em Finanças**. XIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, SBMAC, IME/USP e BM&F, 1996.

[24] StatSoft, Inc. (1996). **STATISTICA for Windows. Computer program manual**. Tulsa, OK: StatSoft, Inc., 2300 East 14th Street, Tulsa, OK 74104. WEB: http://www.statsoftinc.com.

[25] Waterloo Maple Software, INC. **Maple V software package**, 1994.

[26] WILLIAMS, John Burr, reprint 1997, **The Theory of Investment Value**. Burlington, Vermont: Fraser Publishing. Originally published at Cambridge: Harvard University Press, c1938.

[27] ZIONTS, Stanley. **Linear and Integer Programming**. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey. 1974.

# ANEXOS

## Anexo I: Programação em Linguagem Maple para Retornos e Covariâncias

**1. Lê o arquivo de preços:**

```
> restart:with(linalg):
> read("Cotacoes.txt"): # "Retorna a matriz de A de Cotações"
```

**2. Divide a matriz A em Matrizes A[1] até A[5], para sexta(1) a quinta(5):**

```
> N[1]:=170:N[2]:=170:N[3]:=170:N[4]:=169:N[5]:=169:
> for i from 1 to 5 do
>         AS[i]:=matrix(N[i],n,0):
>         kk:=0:
>         for j from i to m by 5 do
>         kk:=kk+1:
>         for k from 1 to 63 do
>                 AS[i][kk,k]:=A[j,k]:
>         od:
>         od:
> od:
```

**3. Cálculo do Vetor de Retornos Logarítmicos Esperados:**

```
> VMA:=proc()
>         global vr:  local i, j:  vr:=matrix(n,1):
>         for i from 1 to n do
>         vr[i,1]:=(ln(A[m,i])-ln(A[1,i]))/(m-1):
>         od:
> end:
```

**4. Interpolação Geométrica para Dados Não informados:**

```
> INTG:=proc(jj,ii)
>         global A: local K, KI, MK:  K:=jj:
>         while A[K,ii]=0 do
>         K:=K+1:
>         od:
>         MK:=(A[K,ii]/A[jj-1,ii])^(1/(K-jj+1)):
>         for KI from jj to K-1 do
>         A[KI,ii]:=A[KI-1,ii]*MK:
>         od:
> end:
```

**Programação em Linguagem Maple para Retornos e Covariâncias**

**5. Retornos Logarítmicos Históricos - matrix RLN (847 x 63 ou 170 x 63)**:

```
> RLOG:=proc()
>        global A, RL: local i, j, k, vri:
>        RL:=matrix(n,m-1):
>        for i from 1 to n do
>        vri:=vr[i,1]:
>              for j from 2 to m do
>                    if A[j,i]=0 then
>                          INTG(j,i):
>                    fi:
>                    RL[i,j-1]:=ln(A[j,i])-ln(A[j-1,i]):
>              od:
>        od:
> end:
```

**6. Cálculo da Matriz de Covariâncias dos Retornos**:

```
> MCA:=proc()
>        global Sigma, A: local i, j, k, vri, S1, DESV:
>        DESV:=matrix(n,m-1):
>        for i from 1 to n do
>              vri:=vr[i,1]:
>              for j from 2 to m do
>                    if A[j,i]=0 then
>                          INTG(j,i)
>                    fi:
>                    DESV[i,j-1]:=ln(A[j,i])-ln(A[j-1,i])-vri:
>              od:
>        od:  S1:=matrix(n,n,0):
>        for i from 1 to n do
>              for j from i to n do
>                    for k from 1 to m-1 do
>                          S1[i,j]:=DESV[i,k]*DESV[j,k]+S1[i,j]:
>                    od:
>                    S1[j,i]:=S1[i,j]:
>              od:
>        od:  Sigma:=evalm(S1/(m-1.0)):
> end:
```

**Programação em Linguagem Maple para Retornos e Covariâncias**

**Principal**

**7. Vetor de Retornos Logarítmicos para Preços da matriz A(63 x m, 146 x m)**:

```
> #A:=evalm(AS[1]):m:=rowdim(A); #Matrizes de Retornos Semanais 2ª a 6ª
> T_INI:=time():
> RLOG():
```

- print("Tempo de cálculo (s) = ",time()-T_INI);
- save(RL,"RLN146.LN"):                    #Resultado Retornos Logarítmicos.

    "Tempo de cálculo (s) = ", 3.714

**8. Vetor de Retornos(LN) Esperados e Matriz de Covariâncias:**

- T_INI:=time():
- VMA():
- MCA():
- print("Tempo_Cálculo (s) = ",time()-T_INI);
- mu:=evalm(vr):MC:=evalm(Sigma):
- save(n,mu,"MED146.LN"):
- save(MC,"MC146.LN"):

    "Tempo_Cálculo (s) = ", 121.370

**Anexo II: Modelo MV de Markowitz no programa Maple**

## Inicialização:

Iniciar:

```
> restart:  with(linalg):  with(simplex):  q:=0:  p:=1:
> ImpITER:=0: #1 => Mostra Iteracões:
```

Dados

Vetor de Retornos e Matriz de Covariâncias:

```
> read("RET.LN"):read("MC.LN"):n:=rowdim(MC):
```

Conjunto de Variáveis de Restrições e Vetor de "Recursos":

```
> VR[1]:={1}: VR[2]:={2}: VR[3]:={3}:
> b:=matrix(p,1,[1]):  #b:=matrix(p,1,[0.5,0.9,0.9,1]):
```

Variáveis e Matrizes do modelo MV

```
> A:=matrix(p,n+q,0):  VA:={}:  VR[p]:={}:
> for i from 1 to n do
>    VR[p]:= VR[p] union {i}:
> end do:
> for i from 1 to p do
>    for j in VR[i] do
>       A[i,j]:=1:
>    end do:
> end do:
> for i from 1 to q do
>    A[i,n+i]:=1: VA:= VA union {n+i}:
> end do:
> M:=copyinto(MC,matrix(n+p+q,n+p+q,0),1,1):
> M:=copyinto(A,M,n+p,1):
> M:=copyinto(transpose(A),M,1,n+p):   N1:=evalm(M):
> R:=matrix(n+p+q,1,0):  R:=copyinto(b,R,n+q+1,1):
> S:=copyinto(mu,matrix(n+p+q,1,0),1,1):
> X:=matrix(n+q+p,1):
> for i from 1 to n+q do
>    X[i,1]:=x[i]:
> end do:
> for i from n+q+1 to n+q+p do
>    X[i,1]:=lambda[i-n-q]:
> end do:  JAUX:={}:  LK:=0:
> VL:=matrix(0,1,0):
```

Procedures:

**Modelo MV de Markowitz no programa Maple**

Inversão da matriz M~, Equações e Linha Crítica

```
> MN:=proc()
>     global M1, N1, N2, T, U: local i,j:
>     M1:=evalm(M):
>     N2:=evalm(N1):
>     for i from 1 to n+q do:
>        if member(i,J)=false then
>           for j from 1 to n+p+q do
>              M1[i,j]:=0:
>              M1[j,i]:=0:
>           od:
>           M1[i,i]:=1:
>        fi:
>     od:
>     N1:=inverse(M1):
>     for i from 1 to n do
>        if member(i,J)=false then
>           N1[i,i]:=0:
>        fi:
>     od:
>     T:=multiply(N1,R):U:=multiply(N1,S):
>     if ImpITER = 1 then
>        print(evalm(X)=evalm(N1)*(evalm(R)+
>        lambda[E]*evalm(S)));
>        print(evalm(X)=evalm(T)+lambda[E]*evalm(U));
>     fi:
> end:
```

Cálculo de lambda[E] para entrada ou saída de variáveis

```
> LAMBDA:=proc()
>     global lambda,LC,LK,IK,JIN,JAUX,J,XX,LKA,VL:
>     local i, LKK:
>     LC:=evalm(multiply(M,T+lambda[E]*evalm(U))-
>     lambda[E]*evalm(S)):
>     LK:=-3000:    IK:=0:
>     for i from 1 to n+q do
>        if member(i,J)=false then
>           if member(i,JAUX)=false then
>              LKK:=solve(LC[i,1]=0,lambda[E]):
>              if (LKK > LK and LKK <= LKA) then
>                 LK:=LKK:    IK:=i:
>              fi:
>              #print(x[i],'lambda[E,ENTRAR]'=LKK);
>           else
>              #print(x[i],"JÁ FOI BASE"):
```

```
> 
>          fi:
>       else
>          if member(i,JIN)=false then
>             if U[i,1] <> 0 then
>                LKK:=-T[i,1]/U[i,1]:
>             else
>                LKK:=10^21:
>             fi:
>             if (LKK > LK and LKK <= LKA) then
>                LK:=LKK:   IK:=i:
>             fi:
>              #print(x[i],'lambda[E,SAIR]'=LKK):
>          else
>             #print(x[i],"Entrou Iteracão Anterior"):
>          fi:
>       fi:
>    od:
>    LKA:=LK:
>    if LK > 0 then
>       if member(IK,J)=false then
>          JIN:={IK}:
>          J:= J union {IK}:
>          print(x[IK],"Entra na Base",'lambda[E]'=LK):
>       else
>          if member(IK,VA)=false then
>             JAUX:= JAUX union {IK}:
>          fi:
>          J:= J minus {IK}:
>          print(x[IK],"Sai da Base",'lambda[E]'=LK):
>          JIN:={}:
>       fi:
>       print('J'=J):
>       VL:=extend(VL,1,0,LK):
>    else
>       print("Variável",IK,"gera",'lambda[E]'=0):
>       print("Fim das Iterações. MÍNIMO ENCONTRADO"):
>       LK:=0:
>    fi:
> end:
```

Restrições

```
> REST:=proc()
>    global consts:  local AX,RHSV,i,AR: consts:={}:
>    AR:=extend(A,0,p,0):   AX:=multiply(AR,X):
>    for i from 1 to p do
```

**Modelo MV de Markowitz no programa Maple**

```
> 
```

```
>          consts:= consts union {evalm(AX[i,1])=b[i,1]};
>      od:
>   end:
```

PPL - Portfólio de maior retorno:

```
>   PPL:=proc()
>      global Soluc, consts:  local Z, SR:
>      SR   :=extend(mu,p+q,0,0):
>      Z    := multiply(transpose(SR),X)[1,1]:
>      Soluc:=maximize(Z,consts,NONNEGATIVE);
>   end:
```

Conjunto J de variáveis IN e Soluções ordenadas:

```
>   CJVIN:=proc()
>      global XX, J, JIN:
>      local i, k:
>      XX:=matrix(n+q,1):J:={}:
>      for k from 1 to n+q do
>         for i from 1 to n+q do
>            if lhs(Soluc[k]) = X[i,1] then
>               XX[i,1]:=evalf(rhs(Soluc[k])):
>               if XX[i,1] <> 0 then
>                  J:= J union {i}:
>               fi:
>            fi:
>         od:
>      od:
>      JIN:=J:   print('J'=J):
>   end:
```

Conjunto de portfólios estratégicos(matriz PE)

```
>   PPE:=proc()
>      global XX, PE, PXA, N_IT: local i:
>      PE:=evalm(PXA):
>      XX:=evalm(multiply(N1,R)+LK*multiply(N1,S));
>      for i from 1 to n+q do
>         PE[i,N_IT]:=XX[i,1]:
>      od:
>      PXA:=extend(PE,0,1,0):
>      if LKA > 0 then
>         N_IT:=N_IT+1:
>      fi:
>   end:
```

**Modelo MV de Markowitz no programa Maple**

Inicializa variáveis de controle da LC

```
> INIC_LC:=proc()
>    global N_IT, LKA, PXA:
>    PXA:=matrix(n+q,1,0):
>    N_IT:=1:LKA:=10^20:
>    unassign('PE'):
> end:
```

Principal:

Inicializa Variáveis, Restrições, Portfólio Inicial e Conjunto J

```
> INIC_LC();
> REST();
> PPL();
> CJVIN();
```

Iterações até Mínima Variância

```
> TimeIni:=time();
> while LKA > 0 do
>    MN(): LAMBDA():  PPE():
> od:
> PPE():
> print(N_IT,"Iterações, em ",time()-TimeIni," s."):
```

Salva Conjunto de Portfólioes Estratégicos

```
> save(PE,"PE146.FIN");
```

**Fronteira de Eficiência**:

Portfólios Eficientes e Combinações Convexas

```
> NPI:=1: #Número de pontos como combinação convexa
> Digits:=7:
> PFE:=matrix(n,NPI*N_IT):
> for i from 1 to n do
>    kk:=0:
>    for j from 1 to N_IT do
>       for k from 1 to NPI do
>          kk:=kk+1:
>          PFE[i,kk]:=(NPI+1-k)*PE[i,j]/NPI+(k-1)*
>          PE[i,j+1]/NPI:
>       od:
>    od:
>    PFE[i,NPI*N_IT]:=PE[i,N_IT]
> od:
> PFE:=evalm(PFE):
```

**Modelo MV de Markowitz no programa Maple**

Risco-Retorno

```
> RR:=matrix(NPI*N_IT,2):
```

```
> for i from 1 to NPI*N_IT do
>     RR[i,1]:=sqrt(multiply(multiply(col(PFE,i),
>     MC),col(PFE,i)));
>     RR[i,2]:=multiply(col(PFE,i),mu)[1];
> od:
> RR:=evalm(RR);
```

Fronteira de Eficiência

```
> with(plottools):
> AA:=[RR[1,1],RR[1,2]]:
> for i from 2 to NPI*N_IT do
>     AA:=AA,[RR[i,1],RR[i,2]];
> od:
> AB:=curve([AA]):
> plots[display](AB,title="Fronteira de Eficiência 146
  Ativos",labels=[Risco_DP,Retorno_Semanal]);
```

## Anexo III: Modelo MV no programa Lingo

```
MODEL:      ! Média - Variância - MV
            ! Determinar portfólios com mínima Variância
            ! para cada nível de retorno;

SETS:

      ATIVOS/1..63/: INV, RET;
      COV(ATIVOS,ATIVOS): MC;
      LAMBDAS /1..62/: LKMV;

ENDSETS

DATA:

! Orçamento disponível;
      W = 1.0;
! Matriz de covariâncias, vetor de retornos e de Lambdas;
      MC    = @OLE( 'C:\MC.XLS', 'MC');
      RET   = @OLE( 'C:\VR.XLS', 'VR');
      LKMV  = @OLE( 'C:\LKMV.XLS', 'LKMV');

ENDDATA

! FUNÇÃO OBJETIVO;
      [Funcao_Objetivo] Min = SD2/2 - LKMV(1)*XMU;

! Restrição de Orçamento;
      @SUM(ATIVOS: INV) = W;

! Valor do portfólio;
      XMU = @SUM(ATIVOS: INV * RET);

! Desvio Padrão;
      SD2 = (@SUM(COV(I,J): INV(I) * INV(J) * MC(I,J)));

END
```

## Anexo IV: Modelo MVaR no programa Lingo

```
MODEL:         ! Média - Valor sob Risco - MVaR
               ! Determinar portfólios que minimizam o valor sob risco,
               ! com probabilidade "alfa" de ser excedido, para cada
               ! retorno obtido no modelo MV;

SETS:

     ATIVOS/1..63/: INV, RET;         !Portfólio x e vetor μ de retornos
     COV(ATIVOS,ATIVOS): MC;          !Matriz de covariâncias
     PARAMETROS /1..62/: RLN;         !Retornos dos portfólios MV

ENDSETS

DATA:

! Portfólio MV sendo analisado (1 a 62);
     K = 1;
! Orcamento disponível;
     W = 1.0;
! Risco com probabilidade alfa de VaR ser excedido;
     alfa = 0.05;
! Matriz de covariâncias, vetor de retornos e de Lambdas;
     MC    = @OLE('C:\MC.XLS', 'MC');
     RET   = @OLE('C:\VR.XLS', 'VR');
! Retornos Logarítmicos de Portfólios;
     RLN   = @OLE( 'C:\RLN.XLS', 'RLN');

! Resultados exportados para arquivo excel;
     @OLE( 'C:\VARMV.XLS', 'INV_MV') = INV;

ENDDATA

! FUNÇÃO OBJETIVO;
     [Funcao_Objetivo] Min = VaR;

! Z = Número de DP's para P[VaR > VaR*] (-1.644853 para 5%);
     alfa = @PSN(Z);
     @FREE(Z);

! Restrição de Orcamento;
     @SUM(ATIVOS: INV) = W;

! Restrição de retorno requerido. Excluir para mínimo VaR;
     XMU = RLN(K);

! Retorno do portfólio;
     XMU = @SUM(ATIVOS: INV * RET);

! Desvio Padrão;
     SD = (@SUM(COV(I,J): INV(I) * INV(J) * MC(I,J)))^0.5;

! Valor sob Risco (VaR) com 5% de probabilidade de ser excedido;
     VaR = -Z*SD;              ! Obs.:  Z < 0.
END
```

**Anexo V: Índice IBOVESPA**

É o mais importante Indicador de desempenho médio das cotações do mercado brasileiro de ações, retrata o comportamento dos principais papéis negociados na BOVESPA - Bolsa de Valores do Estado de São Paulo. Implementado em 02/01/1968, não sofreu modificações metodológicas até a presente data.

Representa o valor atual, em moeda corrente, de uma carteira teórica de ações, a partir de uma aplicação hipotética, ou teórica, integrada pelas ações que, em conjunto, representam 80% do volume transacionado à vista nos doze meses anteriores à formação da carteira. A ação deve apresentar, no mínimo, 80% de presença nos pregões no período.

A participação de cada ação na carteira é relacionada à representatividade desse título no mercado à vista - em termos de número de negócios e volume em moeda corrente - ajustado ao tamanho da amostra.

Sofre reavaliações quadrimestrais, para que a representatividade do índice se mantenha ao longo do tempo, com base nos 12 meses anteriores.

**Tabela 2: Portfólios Eficientes pelo critério Média - Variância**

| Portfólio | $\lambda_E$ | Risco | Retorno | Portfólio | $\lambda_E$ | Risco | Retorno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 46.6096 | 0.331860 | 0.012272 | 32 | 0.1628 | 0.017444 | 0.002189 |
| 2 | 5.8972 | 0.133791 | 0.010515 | 33 | 0.1329 | 0.015428 | 0.001965 |
| 3 | 1.8432 | 0.123016 | 0.010158 | 34 | 0.1323 | 0.015390 | 0.001961 |
| 4 | 1.7566 | 0.118549 | 0.009858 | 35 | 0.1270 | 0.015032 | 0.001919 |
| 5 | 1.7101 | 0.115903 | 0.009679 | 36 | 0.1220 | 0.014691 | 0.001878 |
| 6 | 1.3120 | 0.092644 | 0.008074 | 37 | 0.1182 | 0.014433 | 0.001847 |
| 7 | 1.2636 | 0.089810 | 0.007873 | 38 | 0.1181 | 0.014430 | 0.001846 |
| 8 | 1.1504 | 0.082355 | 0.007341 | 39 | 0.1021 | 0.013342 | 0.001709 |
| 9 | 1.0874 | 0.078167 | 0.007041 | 40 | 0.0941 | 0.012798 | 0.001637 |
| 10 | 0.9519 | 0.069214 | 0.006394 | 41 | 0.0912 | 0.012608 | 0.001610 |
| 11 | 0.6469 | 0.049277 | 0.004916 | 42 | 0.0828 | 0.012049 | 0.001531 |
| 12 | 0.4901 | 0.039284 | 0.004138 | 43 | 0.0760 | 0.011627 | 0.001468 |
| 13 | 0.4824 | 0.038792 | 0.004098 | 44 | 0.0745 | 0.011530 | 0.001453 |
| 14 | 0.4717 | 0.038073 | 0.004041 | 45 | 0.0724 | 0.011407 | 0.001434 |
| 15 | 0.4566 | 0.037048 | 0.003958 | 46 | 0.0703 | 0.011274 | 0.001413 |
| 16 | 0.3728 | 0.031495 | 0.003499 | 47 | 0.0644 | 0.010921 | 0.001355 |
| 17 | 0.3528 | 0.030200 | 0.003389 | 48 | 0.0485 | 0.010054 | 0.001194 |
| 18 | 0.3498 | 0.030001 | 0.003371 | 49 | 0.0467 | 0.009961 | 0.001174 |
| 19 | 0.3419 | 0.029474 | 0.003326 | 50 | 0.0424 | 0.009750 | 0.001128 |
| 20 | 0.2780 | 0.025224 | 0.002951 | 51 | 0.0362 | 0.009467 | 0.001058 |
| 21 | 0.2597 | 0.024038 | 0.002842 | 52 | 0.0351 | 0.009457 | 0.001056 |
| 22 | 0.2410 | 0.022818 | 0.002728 | 53 | 0.0351 | 0.009422 | 0.001046 |
| 23 | 0.2353 | 0.022455 | 0.002694 | 54 | 0.0240 | 0.009013 | 0.000919 |
| 24 | 0.2340 | 0.022369 | 0.002686 | 55 | 0.0215 | 0.008942 | 0.000891 |
| 25 | 0.2300 | 0.022091 | 0.002659 | 56 | 0.0165 | 0.008819 | 0.000834 |
| 26 | 0.2078 | 0.020577 | 0.002511 | 57 | 0.0139 | 0.008767 | 0.000803 |
| 27 | 0.1972 | 0.019866 | 0.002440 | 58 | 0.0090 | 0.008693 | 0.000747 |
| 28 | 0.1966 | 0.019826 | 0.002436 | 59 | 0.0078 | 0.008680 | 0.000733 |
| 29 | 0.1935 | 0.019607 | 0.002414 | 60 | 0.0073 | 0.008675 | 0.000727 |
| 30 | 0.1868 | 0.019129 | 0.002365 | 61 | 0.0064 | 0.008668 | 0.000719 |
| 31 | 0.1782 | 0.018520 | 0.002303 | 62 | 0.0000 | 0.008645 | 0.000656 |

**Tabela 3: Portfólios Eficientes pelo critério MV - Retornos Percentuais**

| Portfólio | Risco | Retorno(%a.d.) | Portfólio | Risco | Retorno(%a.d.) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 39.356 | 1.235 | 32 | 1.760 | 0.219 |
| 2 | 14.315 | 1.057 | 33 | 1.555 | 0.197 |
| 3 | 13.090 | 1.021 | 34 | 1.551 | 0.196 |
| 4 | 12.586 | 0.991 | 35 | 1.515 | 0.192 |
| 5 | 12.289 | 0.973 | 36 | 1.480 | 0.188 |
| 6 | 9.707 | 0.811 | 37 | 1.454 | 0.185 |
| 7 | 9.397 | 0.790 | 38 | 1.453 | 0.185 |
| 8 | 8.584 | 0.737 | 39 | 1.343 | 0.171 |
| 9 | 8.130 | 0.707 | 40 | 1.288 | 0.164 |
| 10 | 7.167 | 0.641 | 41 | 1.269 | 0.161 |
| 11 | 5.051 | 0.493 | 42 | 1.212 | 0.153 |
| 12 | 4.007 | 0.415 | 43 | 1.169 | 0.147 |
| 13 | 3.955 | 0.411 | 44 | 1.160 | 0.145 |
| 14 | 3.881 | 0.405 | 45 | 1.147 | 0.144 |
| 15 | 3.774 | 0.397 | 46 | 1.134 | 0.141 |
| 16 | 3.200 | 0.350 | 47 | 1.098 | 0.136 |
| 17 | 3.066 | 0.339 | 48 | 1.010 | 0.119 |
| 18 | 3.046 | 0.338 | 49 | 1.001 | 0.118 |
| 19 | 2.991 | 0.333 | 50 | 0.980 | 0.113 |
| 20 | 2.555 | 0.296 | 51 | 0.951 | 0.106 |
| 21 | 2.433 | 0.285 | 52 | 0.950 | 0.106 |
| 22 | 2.308 | 0.273 | 53 | 0.947 | 0.105 |
| 23 | 2.271 | 0.270 | 54 | 0.905 | 0.092 |
| 24 | 2.262 | 0.269 | 55 | 0.898 | 0.089 |
| 25 | 2.234 | 0.266 | 56 | 0.886 | 0.083 |
| 26 | 2.079 | 0.251 | 57 | 0.881 | 0.080 |
| 27 | 2.006 | 0.244 | 58 | 0.873 | 0.075 |
| 28 | 2.002 | 0.244 | 59 | 0.872 | 0.073 |
| 29 | 1.980 | 0.242 | 60 | 0.871 | 0.073 |
| 30 | 1.931 | 0.237 | 61 | 0.871 | 0.072 |
| 31 | 1.869 | 0.231 | 62 | 0.868 | 0.066 |

**Tabela 4: Relação das Empresas de Ativos Utilizad**

| Número | Código | Descrição | Tipo | Índice | Amostra |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ALBA3 | ALBARUS | ON | BV | 848 |
| 2 | ARCZ5 | ARACRUZ | PNA | BV | 848 |
| 3 | ARCZ6 | ARACRUZ | PNB | IBV | 848 |
| 4 | ARLA4 | ARTHUR LANGE | PN | BV | 848 |
| 5 | BARB3 | MET BARBARA | ON | BV | 848 |
| 6 | BAZA3 | AMAZONIA | ON EJ | BV | 848 |
| 7 | BBDC4 | BRADESCO | PN | IBV | 848 |
| 8 | BELG3 | BELGO MINEIR | ON | BV | 848 |
| 9 | BELG4 | BELGO MINEIR | PN | BV | 848 |
| 10 | BESP3 | BANESPA | ON | BV | 848 |
| 11 | BESP4 | BANESPA | PN | IBV | 848 |
| 12 | BMEB4 | MERC BRASIL | PN | BV | 848 |
| 13 | BRDT4 | PETROBRAS BR | PN | IBV | 848 |
| 14 | BRHA4 | BRAHMA | PN INT | IBV | 848 |
| 15 | CCTU4 | CBC CARTUCHO | PN | BV | 848 |
| 16 | CMET4 | CAEMI METAL | PN | BV | 848 |
| 17 | COCE5 | COELCE | PNA | BV | 848 |
| 18 | CPCA4 | TRIKEM | PN | BV | 848 |
| 19 | CPFL4 | FERRO LIGAS | PN | BV | 848 |
| 20 | CPNE5 | COPENE | PNA | IBV | 848 |
| 21 | CPSL3 | COPESUL | ON | BV | 848 |
| 22 | CSNA3 | SID NACIONAL | ON | IBV | 848 |
| 23 | DHBI4 | D H B | PN | BV | 848 |
| 24 | EBCO3 | EMBRACO | ON | BV | 848 |
| 25 | EBER4 | EBERLE | PN | BV | 848 |
| 26 | ELMJ4 | WEG | PN | BV | 848 |
| 27 | ERIC3 | ERICSSON | ON | BV | 848 |
| 28 | ESTR4 | ESTRELA | PN | BV | 848 |
| 29 | FJTA4 | FORJA TAURUS | PN | BV | 848 |
| 30 | FTSE4 | FERT SERRANA | PN | BV | 848 |
| 31 | GLOB4 | GLOBEX | PN | BV | 848 |
| 32 | ILMD4 | ADUBOS TREVO | PN | BV | 848 |
| 33 | ITEC3 | ITAUTEC | ON EG | BV | 848 |
| 34 | ITSA4 | ITAUSA | PN EJ | IBV | 848 |
| 35 | JBDU4 | J B DUARTE | PN | BV | 848 |
| 36 | KLAB4 | KLABIN | PN | IBV | 848 |
| 37 | LATS3 | LATASA | ON | BV | 848 |
| 38 | LHER4 | LOJAS HERING | BV | PN | 848 |
| 39 | LITS3 | BRASILIT | ON | BV | 848 |
| 40 | LIXC4 | LIX DA CUNHA | BV | PN | 848 |
| 41 | MGEL4 | MANGELS INDL | PN | BV | 848 |
| 42 | OXIT4 | OXITENO | PN | BV | 848 |
| 43 | PCAR4 | P.ACUCAR-CBD | PN | BV | 848 |
| 44 | PLDN4 | POLIALDEN | PN | BV | 848 |
| 45 | PLIM4 | GLOBO CABO | PN | IBV | 848 |
| 46 | PLTO6 | POLITENO | PNB | BV | 848 |
| 47 | PNOR6 | PRONOR | PNB | BV | 848 |

[7] IBV indica que o ativo participa na definição do índice IBOVESPA; BV, negociado na BOVESPA.

**Relação das empresas de ativos utilizados**

(continuação)

| Número | Código | Descrição | Tipo | Indice | Amostra |
|---|---|---|---|---|---|
| 48 | POLA4 | POLAR | PN | BV | 848 |
| 49 | PORP4 | POLIPR PART | PN | BV | 848 |
| 50 | PQUN3 | PETROQ UNIAO | ON EJ | BV | 848 |
| 51 | PRGA4 | PERDIGAO S/A | PN | BV | 848 |
| 52 | PTPA4 | PETROPAR | PN | BV | 848 |
| 53 | RIPI4 | IPIRANGA REF | PN | BV | 848 |
| 54 | ROSI4 | AMADEO ROSSI | PN | BV | 848 |
| 55 | SGAS4 | SUPERGASBRAS | PN | BV | 848 |
| 56 | SHUL4 | SCHULZ | PN | BV | 848 |
| 57 | SIBR7 | SIBRA | PNC | BV | 848 |
| 58 | SOLO4 | SOLORRICO | PN | BV | 848 |
| 59 | SUZA4 | SUZANO | PN | BV | 848 |
| 60 | UCOP4 | USIN C PINTO | PN | BV | 848 |
| 61 | VAGV4 | VARIG | PN | BV | 848 |
| 62 | VGOR4 | VIGOR | PN | BV | 848 |
| 63 | ZIVI4 | ZIVI | PN | BV | 848 |
| 64 | ACES4 | ACESITA | PN | IBV | 170 |
| 65 | ARTE3 | KUALA | ON | BV | 170 |
| 66 | AVIL4 | ACOS VILL | PN | BV | 170 |
| 67 | BBAS3 | BRASIL | ON | BV | 170 |
| 68 | BBAS4 | BRASIL | PN | IBV | 170 |
| 69 | BBDC3 | BRADESCO | ON | BV | 170 |
| 70 | BEPA4 | BANESTADO | PN INT | BV | 170 |
| 71 | BMCT3 | MERC S PAULO | ON INT | BV | 170 |
| 72 | BPCO4 | BOMPRECO | PN | BV | 170 |
| 73 | BRGE3 | ALFA CONSORC | ON | BV | 170 |
| 74 | BRIV3 | ALFA INVEST | ON | BV | 170 |
| 75 | BRIV4 | ALFA INVEST | PN | BV | 170 |
| 76 | BSCT6 | BESC | PNB INT | BV | 170 |
| 77 | CBEE3 | CERJ | ON INT | BV | 170 |
| 78 | CEEB3 | COELBA | ON EJ | BV | 170 |
| 79 | CESP3 | CESP | ON | BV | 170 |
| 80 | CESP4 | CESP | PN | IBV | 170 |
| 81 | CEVA3 | CEVAL | BV | ON | 170 |
| 82 | CGAS4 | COMGAS | PN | BV | 170 |
| 83 | CHAP4 | CHAPECO | PN | BV | 170 |
| 84 | CMGR3 | CEMAT | ON | BV | 170 |
| 85 | CMIG3 | CEMIG | ON | IBV | 170 |
| 86 | CMIG4 | CEMIG | PN | IBV | 170 |
| 87 | COGU4 | GERDAU | PN | IBV | 170 |
| 88 | CPLE3 | COPEL | ON | BV | 170 |
| 89 | CPLE6 | COPEL | PNB | IBV | 170 |
| 90 | CQUE8 | CIQUINE PETR | PND | BV | 170 |
| 91 | CRUZ3 | SOUZA CRUZ | ON | IBV | 170 |
| 92 | DURA4 | DURATEX | PN | BV | 170 |
| 93 | ELET3 | ELETROBRAS | ON | IBV | 170 |
| 94 | ELET6 | ELETROBRAS | PNB | IBV | 170 |
| 95 | ELPL4 | ELETROPAULO | PN | IBV | 170 |
| 96 | EMBR3 | EMBRAER | ON | IBV | 170 |
| 97 | ERIC4 | ERICSSON | PN | BV | 170 |

**Relação das empresas de ativos utilizados**

(conclusão)

| Número | Código | Descrição | Tipo | Índice | Amostra |
|---|---|---|---|---|---|
| 98 | FLCL5 | F CATAGUAZES | PNA | BV | 170 |
| 99 | GOAU4 | GERDAU MET | PN | BV | 170 |
| 100 | GRNL4 | GRANOLEO | PN | BV | 170 |
| 101 | HGTX4 | CIA HERING | PN | BV | 170 |
| 102 | ITAU3 | ITAUBANCO | ON | BV | 170 |
| 103 | ITAU4 | ITAUBANCO | PN EJ | IBV | 170 |
| 104 | IVIL4 | IND VILLARES | PN | BV | 170 |
| 105 | JFEN3 | JOAO FORTES | ON | BV | 170 |
| 106 | LIGH3 | LIGHT | ON | IBV | 170 |
| 107 | LIPR3 | LIGHTPAR | ON | BV | 170 |
| 108 | MAHS4 | MANAH | PN | BV | 170 |
| 109 | MFLU3 | SANTISTA ALM | ON | BV | 170 |
| 110 | MNPR4 | MINUPAR | PN | BV | 170 |
| 111 | MOAR3 | MONT ARANHA | ON ED | BV | 170 |
| 112 | MWET4 | WETZEL S/A | BV | PN | 170 |
| 113 | MYPK4 | IOCHP-MAXION | PN | BV | 170 |
| 114 | OSAO4 | PLASCAR PART | PN | BV | 170 |
| 115 | PETR3 | PETROBRAS | ON | IBV | 170 |
| 116 | PETR4 | PETROBRAS | PN | IBV | 170 |
| 117 | PMAM4 | PARANAPANEMA | PN | BV | 170 |
| 118 | PNOR5 | PRONOR | PNA | BV | 170 |
| 119 | PNVL3 | DIMED | ON | BV | 170 |
| 120 | PRBN4 | PARAIBUNA | PN | BV | 170 |
| 121 | PTIP4 | IPIRANGA PET | PN | IBV | 170 |
| 122 | RCSL4 | RECRUSUL | PN | BV | 170 |
| 123 | REPA4 | ELECTROLUX | PN | BV | 170 |
| 124 | RHDS3 | RHODIA-STER | ON | BV | 170 |
| 125 | RPAD3 | ALFA HOLDING | ON | BV | 170 |
| 126 | RPAD5 | ALFA HOLDING | PNA | BV | 170 |
| 127 | RPAD6 | ALFA HOLDING | PNB | BV | 170 |
| 128 | SBSP3 | SABESP | ON INT | IBV | 170 |
| 129 | SHAP4 | SHARP | PN | BV | 170 |
| 130 | SIFC4 | SIFCO | PN | BV | 170 |
| 131 | SLAL4 | SOLA | PN | BV | 170 |
| 132 | SOES4 | SADIA S/A | PN | BV | 170 |
| 133 | SPRI5 | SPRINGER | PNA | BV | 170 |
| 134 | STRP4 | STAROUP | PN | BV | 170 |
| 135 | SULT4 | SULTEPA | BV | PN | 170 |
| 136 | TAMR4 | TAM | PN | BV | 170 |
| 137 | TELB3 | TELEBRAS | ON | BV | 170 |
| 138 | TELB4 | TELEBRAS | PN | BV | 170 |
| 139 | TEPR4 | BRASIL TELEC | PN ANT | IBV | 170 |
| 140 | TERJ3 | TELERJ | ON | BV | 170 |
| 141 | TERJ4 | TELERJ | PN | IBV | 170 |
| 142 | TMGR3 | TELEMIG | ON EJ | BV | 170 |
| 143 | TMGR6 | TELEMIG | PNB | BV | 170 |
| 144 | TMGR8 | TELEMIG | PND | BV | 170 |
| 145 | TRBR4 | TRANSBRASIL | PN | BV | 170 |
| 146 | VULC4 | VULCABRAS | PN | BV | 170 |

**Tabela 5: Composição dos Portfólios do modelo MV - 63 ativos**

| Portfólio | Ativos | Participações |
|---|---|---|
| 1 | 25 | 1.00 |
| 2 | 25,63 | 0.26, 0.74 |
| 3 | 19, 25, 63 | 0.07, 0.17, 0.76 |
| 4 | 6, 19, 25, 63 | 0.03, 0.06, 0.16, 0.74 |
| 5 | 6, 19, 25, 51, 63 | 0.05, 0.06, 0.16, 0.01, 0.72 |
| 6 | 6, 19, 25, 49, 51, 63 | 0.12, 0.05, 0.12, 0.06, 0.07, 0.58 |
| 7 | 4, 6, 19, 25, 49, 51, 63 | 0.00, 0.13, 0.05, 0.12, 0.06, 0.08, 0.56 |
| 8 | 4, 6, 19, 25, 49, 50, 51, 63 | 0.01, 0.13, 0.04, 0.11, 0.07, 0.06, 0.08, 0.51 |
| 9 | 4, 6, 16, 19, 25, 49, 50, 51, 63 | 0.01, 0.13, 0.01, 0.04, 0.10, 0.07, 0.08, 0.08, 0.48 |
| 10 | 4, 6, 16, 19, 25, 35, 49, 50, 51, 63 | 0.01, 0.12, 0.03, 0.04, 0.09, 0.00, 0.07, 0.14, 0.07, 0.43 |
| 11 | 4, 6, 16, 19, 25, 35, 44, 49, 50, 51, 63 | 0.02, 0.11, 0.07, 0.03, 0.06, 0.01, 0.05, 0.07, 0.24, 0.06, 0.30 |
| 12 | 4, 6, 16, 19, 25, 35, 43, 44, 49, 50, 51, 63 | 0.02, 0.10, 0.08, 0.02, 0.05, 0.01, 0.04, 0.07, 0.06, 0.27, 0.05, 0.23 |
| 13 | 4, 6, 16, 19, 25, 31, 35, 43, 44, 49, 50, 51, 63 | 0.02, 0.10, 0.08, 0.02, 0.04, 0.00, 0.01, 0.04, 0.07, 0.06, 0.28, 0.05, 0.23 |
| 14 | 4, 6, 16, 19, 24, 25, 31, 35, 43, 44, 49, 50, 51, 63 | 0.02, 0.10, 0.08, 0.02, 0.00, 0.04, 0.00, 0.01, 0.04, 0.07, 0.06, 0.28, 0.05, 0.22 |
| 15 | 4, 6, 16, 19, 24, 25, 30, 31, 35, 43, 44, 49, 50, 51, 63 | 0.02, 0.09, 0.08, 0.02, 0.01, 0.04, 0.00, 0.01, 0.01, 0.04, 0.07, 0.06, 0.28, 0.05, 0.22 |
| 16 | 4, 6, 16, 19, 24, 25, 29, 30, 31, 35, 43, 44, 49, 50, 51, 63 | 0.02, 0.09, 0.08, 0.01, 0.04, 0.03, 0.01, 0.01, 0.03, 0.01, 0.05, 0.07, 0.06, 0.27, 0.04, 0.18 |
| 17 | 4, 6, 16, 18, 19, 24, 25, 29, 30, 31, 35, 43, 44, 49, 50, 51, 63 | 0.02, 0.09, 0.08, 0.00, 0.01, 0.04, 0.03, 0.01, 0.02, 0.03, 0.01, 0.05, 0.07, 0.06, 0.27, 0.04, 0.17 |
| 18 | 4, 6, 13, 16, 18, 19, 24, 25, 29, 30, 31, 35, 43, 44, 49, 50, 51, 63 | 0.02, 0.09, 0.00, 0.08, 0.00, 0.01, 0.04, 0.03, 0.01, 0.02, 0.03, 0.01, 0.05, 0.07, 0.06, 0.27, 0.04, 0.17 |
| 19 | 4, 6, 13, 16, 18, 19, 24, 25, 29, 30, 31, 35, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 63 | 0.02, 0.09, 0.00, 0.08, 0.00, 0.01, 0.05, 0.03, 0.01, 0.02, 0.03, 0.01, 0.00, 0.05, 0.07, 0.06, 0.27, 0.04, 0.17 |
| 20 | 4, 6, 13, 16, 18, 19, 24, 25, 29, 30, 31, 35, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 53, 63 | 0.02, 0.08, 0.02, 0.07, 0.00, 0.01, 0.06, 0.03, 0.01, 0.02, 0.04, 0.01, 0.02, 0.05, 0.07, 0.05, 0.26, 0.03, 0.02, 0.14 |
| 21 | 4, 6, 13, 16, 18, 19, 24, 25, 29, 30, 31, 35, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 53, 54, 63 | 0.02, 0.08, 0.02, 0.07, 0.00, 0.01, 0.06, 0.02, 0.01, 0.02, 0.05, 0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.05, 0.25, 0.02, 0.03, 0.00, 0.13 |
| 22 | 4, 6, 13, 16, 18, 19, 24, 25, 29, 30, 31, 35, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 53, 54, 60, 63 | 0.02, 0.07, 0.02, 0.07, 0.00, 0.01, 0.07, 0.02, 0.01, 0.03, 0.05, 0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.05, 0.25, 0.02, 0.03, 0.00, 0.00, 0.12 |
| 23 | 4, 6, 13, 16, 18, 19, 24, 25, 29, 30, 31, 35, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 53, 54, 57, 60, 63 | 0.02, 0.07, 0.02, 0.07, 0.00, 0.01, 0.07, 0.02, 0.01, 0.03, 0.05, 0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.05, 0.24, 0.02, 0.03, 0.00, 0.00, 0.00, 0.12 |
| 24 | 4, 6, 13, 16, 18, 19, 24, 25, 29, 30, 31, 35, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 57, 60, 63 | 0.02, 0.07, 0.02, 0.07, 0.00, 0.01, 0.07, 0.02, 0.01, 0.03, 0.05, 0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.05, 0.24, 0.02, 0.00, 0.03, 0.01, 0.00, 0.01, 0.12 |
| 25 | 4, 6, 13, 16, 18, 19, 21, 24, 25, 29, 30, 31, 35, 40, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 57, 60, 63 | 0.02, 0.07, 0.03, 0.06, 0.01, 0.01, 0.02, 0.07, 0.02, 0.01, 0.03, 0.05, 0.01, 0.00, 0.04, 0.04, 0.06, 0.04, 0.23, 0.02, 0.01, 0.04, 0.01, 0.00, 0.01, 0.10 |
| 26 | 4, 6, 13, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 29, 30, 31, 35, 40, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 57, 60, 63 | 0.02, 0.07, 0.03, 0.06, 0.01, 0.01, 0.02, 0.00, 0.07, 0.02, 0.01, 0.03, 0.05, 0.01, 0.00, 0.04, 0.04, 0.06, 0.04, 0.23, 0.02, 0.01, 0.04, 0.01, 0.00, 0.01, 0.10 |
| 27 | 4, 6, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 29, 30, 31, 35, 40, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 57, 60, 63 | 0.02, 0.07, 0.03, 0.00, 0.06, 0.01, 0.01, 0.02, 0.00, 0.07, 0.02, 0.01, 0.03, 0.05, 0.01, 0.00, 0.04, 0.04, 0.06, 0.04, 0.23, 0.02, 0.01, 0.04, 0.01, 0.00, 0.01, 0.10 |

## Composição dos Portfólios do modelo MV

**(continuação)**

| Portfólio | Ativos | Participações |
|---|---|---|
| 28 | 4, 6, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 29, 30, 31, 35, 40, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 60, 63 | 0.02, 0.07, 0.03, 0.00, 0.06, 0.01, 0.01, 0.02, 0.00, 0.07, 0.02, 0.00, 0.01, 0.03, 0.05, 0.01, 0.00, 0.04, 0.04, 0.06, 0.04, 0.23, 0.02, 0.01, 0.04, 0.01, 0.01, 0.10 |
| 29 | 4, 6, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 29, 30, 31, 35, 40, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 60, 63 | 0.01, 0.06, 0.03, 0.00, 0.06, 0.01, 0.01, 0.03, 0.00, 0.07, 0.02, 0.00, 0.01, 0.03, 0.05, 0.01, 0.00, 0.04, 0.04, 0.06, 0.04, 0.22, 0.02, 0.02, 0.04, 0.01, 0.01, 0.09 |
| 30 | 4, 6, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 29, 30, 31, 35, 40, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 58, 60, 63 | 0.01, 0.06, 0.03, 0.01, 0.06, 0.01, 0.01, 0.03, 0.00, 0.07, 0.02, 0.01, 0.01, 0.03, 0.05, 0.01, 0.00, 0.04, 0.04, 0.06, 0.04, 0.22, 0.01, 0.02, 0.04, 0.01, 0.00, 0.01, 0.09 |
| 31 | 4, 6, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 29, 30, 31, 33, 35, 40, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 58, 60, 63 | 0.01, 0.06, 0.03, 0.02, 0.05, 0.00, 0.01, 0.04, 0.00, 0.07, 0.01, 0.02, 0.01, 0.03, 0.05, 0.00, 0.01, 0.00, 0.04, 0.04, 0.06, 0.04, 0.21, 0.01, 0.02, 0.04, 0.01, 0.01, 0.02, 0.08 |
| 32 | 4, 6, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 40, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 58, 60, 63 | 0.01, 0.05, 0.03, 0.03, 0.05, 0.00, 0.01, 0.05, 0.00, 0.08, 0.01, 0.03, 0.01, 0.01, 0.03, 0.05, 0.00, 0.01, 0.00, 0.05, 0.03, 0.05, 0.04, 0.19, 0.01, 0.03, 0.04, 0.01, 0.01, 0.02, 0.07 |
| 33 | 4, 6, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 40, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 58, 60, 63 | 0.01, 0.05, 0.03, 0.03, 0.05, 0.00, 0.01, 0.05, 0.00, 0.08, 0.01, 0.03, 0.01, 0.01, 0.03, 0.05, 0.00, 0.01, 0.00, 0.05, 0.03, 0.05, 0.04, 0.19, 0.01, 0.03, 0.04, 0.01, 0.00, 0.01, 0.02, 0.07 |
| 34 | 1, 4, 6, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 40, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 58, 60, 63 | 0.00, 0.01, 0.05, 0.03, 0.03, 0.04, 0.00, 0.01, 0.06, 0.00, 0.08, 0.01, 0.03, 0.01, 0.01, 0.03, 0.05, 0.01, 0.01, 0.00, 0.05, 0.03, 0.05, 0.03, 0.19, 0.01, 0.03, 0.04, 0.01, 0.00, 0.01, 0.02, 0.07 |
| 35 | 1, 4, 6, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 40, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 58, 60, 62, 63 | 0.00, 0.01, 0.05, 0.03, 0.03, 0.04, 0.00, 0.01, 0.06, 0.00, 0.08, 0.01, 0.03, 0.01, 0.01, 0.03, 0.05, 0.01, 0.01, 0.00, 0.05, 0.03, 0.05, 0.03, 0.18, 0.01, 0.03, 0.04, 0.01, 0.00, 0.01, 0.02, 0.00, 0.06 |
| 36 | 1, 4, 6, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 40, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 58, 60, 62, 63 | 0.00, 0.01, 0.05, 0.03, 0.03, 0.04, 0.00, 0.01, 0.06, 0.01, 0.08, 0.01, 0.03, 0.01, 0.01, 0.02, 0.05, 0.01, 0.01, 0.00, 0.00, 0.05, 0.03, 0.05, 0.03, 0.18, 0.01, 0.03, 0.04, 0.01, 0.00, 0.02, 0.02, 0.00, 0.06 |
| 37 | 1, 4, 6, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 40, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 58, 60, 61, 62, 63 | 0.00, 0.01, 0.05, 0.03, 0.03, 0.04, 0.00, 0.01, 0.06, 0.01, 0.08, 0.01, 0.03, 0.01, 0.01, 0.02, 0.05, 0.01, 0.01, 0.00, 0.00, 0.05, 0.03, 0.05, 0.03, 0.18, 0.01, 0.03, 0.04, 0.01, 0.00, 0.02, 0.02, 0.00, 0.00, 0.06 |
| 38 | 1, 4, 6, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 40, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 58, 60, 61, 62, 63 | 0.01, 0.01, 0.04, 0.01, 0.03, 0.04, 0.04, 0.00, 0.00, 0.07, 0.01, 0.07, 0.01, 0.04, 0.01, 0.01, 0.02, 0.05, 0.01, 0.01, 0.00, 0.00, 0.05, 0.02, 0.04, 0.03, 0.17, 0.01, 0.03, 0.04, 0.01, 0.01, 0.02, 0.02, 0.00, 0.01, 0.05 |
| 39 | 1, 2, 4, 6, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 40, 42, 43, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 58, 60, 61, 62, 63 | 0.01, 0.00, 0.01, 0.04, 0.01, 0.03, 0.04, 0.03, 0.00, 0.00, 0.07, 0.01, 0.07, 0.01, 0.04, 0.01, 0.01, 0.02, 0.04, 0.01, 0.01, 0.00, 0.00, 0.05, 0.02, 0.04, 0.03, 0.16, 0.01, 0.04, 0.04, 0.01, 0.01, 0.02, 0.02, 0.01, 0.02, 0.05 |
| 40 | 1, 2, 4, 6, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 40, 42, 43, 44, 46, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 58, 60, 61, 62, 63 | 0.01, 0.01, 0.01, 0.04, 0.01, 0.03, 0.04, 0.03, 0.00, 0.00, 0.07, 0.01, 0.07, 0.01, 0.04, 0.01, 0.01, 0.02, 0.04, 0.01, 0.01, 0.00, 0.00, 0.05, 0.02, 0.04, 0.00, 0.03, 0.16, 0.01, 0.04, 0.04, 0.01, 0.01, 0.02, 0.02, 0.01, 0.02, 0.05 |

**Composição dos Portfólios do modelo MV**

**(continuação)**

| Portfólio | Ativos | Participações |
|---|---|---|
| 41 | 1, 2, 4, 6, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 40, 42, 43, 44, 46, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 60, 61, 62, 63 | 0.01, 0.01, 0.01, 0.04, 0.01, 0.02, 0.04, 0.03, 0.00, 0.07, 0.01, 0.07, 0.01, 0.04, 0.02, 0.01, 0.02, 0.04, 0.01, 0.01, 0.00, 0.00, 0.05, 0.02, 0.04, 0.00, 0.03, 0.15, 0.01, 0.04, 0.04, 0.01, 0.01, 0.00, 0.02, 0.02, 0.01, 0.02, 0.04 |
| 42 | 1, 2, 4, 6, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 40, 42, 43, 44, 46, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 60, 61, 62, 63 | 0.01, 0.01, 0.01, 0.04, 0.01, 0.02, 0.05, 0.03, 0.00, 0.07, 0.01, 0.07, 0.01, 0.04, 0.02, 0.01, 0.02, 0.04, 0.01, 0.01, 0.00, 0.00, 0.05, 0.02, 0.04, 0.01, 0.03, 0.15, 0.01, 0.04, 0.04, 0.01, 0.01, 0.00, 0.02, 0.02, 0.01, 0.02, 0.04 |
| 43 | 1, 2, 4, 6, 8, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 40, 42, 43, 44, 46, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 60, 61, 62, 63 | 0.01, 0.01, 0.01, 0.04, 0.00, 0.01, 0.02, 0.05, 0.03, 0.00, 0.07, 0.01, 0.07, 0.01, 0.04, 0.02, 0.01, 0.02, 0.04, 0.01, 0.01, 0.00, 0.00, 0.05, 0.02, 0.04, 0.01, 0.03, 0.15, 0.00, 0.04, 0.04, 0.01, 0.02, 0.00, 0.02, 0.02, 0.01, 0.02, 0.04 |
| 44 | 1, 2, 4, 6, 8, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 60, 61, 62, 63 | 0.01, 0.01, 0.01, 0.04, 0.00, 0.02, 0.02, 0.05, 0.03, 0.00, 0.07, 0.01, 0.07, 0.01, 0.04, 0.02, 0.01, 0.02, 0.04, 0.01, 0.01, 0.00, 0.00, 0.05, 0.02, 0.03, 0.00, 0.01, 0.03, 0.15, 0.00, 0.04, 0.04, 0.01, 0.02, 0.00, 0.02, 0.02, 0.01, 0.02, 0.04 |
| 45 | 1, 2, 4, 6, 8, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 60, 61, 62, 63 | 0.01, 0.01, 0.01, 0.03, 0.00, 0.02, 0.02, 0.05, 0.03, 0.00, 0.07, 0.01, 0.07, 0.01, 0.04, 0.02, 0.01, 0.02, 0.04, 0.01, 0.01, 0.00, 0.00, 0.00, 0.05, 0.02, 0.03, 0.00, 0.01, 0.02, 0.14, 0.00, 0.04, 0.04, 0.01, 0.02, 0.00, 0.02, 0.02, 0.01, 0.02, 0.04 |
| 46 | 1, 2, 4, 6, 8, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 60, 61, 62, 63 | 0.01, 0.02, 0.01, 0.03, 0.00, 0.02, 0.02, 0.05, 0.02, 0.00, 0.08, 0.01, 0.07, 0.01, 0.04, 0.02, 0.01, 0.02, 0.04, 0.01, 0.01, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.05, 0.02, 0.03, 0.00, 0.01, 0.02, 0.14, 0.00, 0.04, 0.03, 0.01, 0.02, 0.00, 0.02, 0.02, 0.01, 0.03, 0.03 |
| 47 | 1, 2, 4, 6, 8, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 60, 61, 62, 63 | 0.02, 0.02, 0.01, 0.03, 0.01, 0.02, 0.02, 0.05, 0.02, 0.00, 0.08, 0.01, 0.06, 0.00, 0.05, 0.02, 0.01, 0.02, 0.04, 0.01, 0.00, 0.01, 0.00, 0.01, 0.00, 0.01, 0.05, 0.01, 0.03, 0.00, 0.01, 0.02, 0.13, 0.00, 0.04, 0.03, 0.01, 0.02, 0.01, 0.03, 0.02, 0.02, 0.03, 0.03 |
| 48 | 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 60, 61, 62, 63 | 0.02, 0.02, 0.00, 0.01, 0.03, 0.01, 0.02, 0.02, 0.05, 0.02, 0.00, 0.08, 0.01, 0.06, 0.00, 0.05, 0.02, 0.01, 0.02, 0.04, 0.01, 0.00, 0.01, 0.00, 0.01, 0.00, 0.01, 0.05, 0.01, 0.03, 0.00, 0.02, 0.02, 0.12, 0.00, 0.04, 0.03, 0.01, 0.02, 0.01, 0.03, 0.02, 0.02, 0.03, 0.03 |
| 49 | 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 60, 61, 62, 63 | 0.02, 0.03, 0.00, 0.01, 0.02, 0.01, 0.02, 0.02, 0.05, 0.02, 0.00, 0.08, 0.01, 0.06, 0.00, 0.05, 0.02, 0.01, 0.02, 0.03, 0.01, 0.00, 0.01, 0.00, 0.01, 0.00, 0.01, 0.04, 0.01, 0.02, 0.00, 0.02, 0.00, 0.02, 0.12, 0.00, 0.04, 0.03, 0.01, 0.02, 0.01, 0.03, 0.02, 0.02, 0.03, 0.02 |
| 50 | 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63 | 0.02, 0.03, 0.01, 0.01, 0.02, 0.01, 0.03, 0.02, 0.05, 0.01, 0.00, 0.08, 0.01, 0.06, 0.00, 0.05, 0.02, 0.01, 0.02, 0.03, 0.01, 0.00, 0.01, 0.00, 0.01, 0.00, 0.01, 0.04, 0.01, 0.02, 0.00, 0.02, 0.01, 0.02, 0.11, 0.00, 0.04, 0.03, 0.01, 0.02, 0.01, 0.03, 0.00, 0.02, 0.02, 0.04, 0.02 |

**Composição dos Portfólios do modelo MV**

**(continuação)**

| Portfólio | Ativos | Participações |
|---|---|---|
| 51 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63 | 0.02, 0.03, 0.01, 0.01, 0.00, 0.02, 0.01, 0.03, 0.02, 0.05, 0.01, 0.00, 0.08, 0.01, 0.06, 0.00, 0.05, 0.02, 0.01, 0.02, 0.03, 0.01, 0.00, 0.01, 0.00, 0.01, 0.00, 0.01, 0.04, 0.01, 0.02, 0.00, 0.02, 0.01, 0.02, 0.11, 0.00, 0.04, 0.03, 0.01, 0.02, 0.01, 0.03, 0.00, 0.02, 0.02, 0.04, 0.02 |
| 52 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63 | 1.9, 2.9, 0.6, 0.5, 0.0, 2.1, 1.3, 2.6, 1.6, 5.4, 1.3, 0.2, 7.9, 0.9, 6.0, 0.3, 4.7, 2.0, 0.7, 1.7, 3.2, 1.0, 0.4, 0.8, 0.1, 1.1, 0.1, 0.8, 4.4, 0.8, 2.2, 0.1, 1.7, 0.7, 1.8, 11.4, 0.1, 4.2, 2.7, 1.3, 2.5, 0.9, 2.9, 0.2, 2.4, 1.8, 3.7, 1.9 |
| 53 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63 | 1.9, 2.9, 0.6, 0.5, 0.0, 2.0, 1.3, 2.6, 1.6, 5.4, 1.2, 0.2, 7.9, 0.9, 6.0, 0.3, 4.7, 2.0, 0.0, 0.7, 1.7, 3.2, 1.0, 0.4, 0.8, 0.1, 1.1, 0.1, 0.9, 4.4, 0.8, 2.2, 0.1, 1.8, 0.8, 1.8, 11.3, 0.1, 4.2, 2.6, 1.3, 2.5, 0.9, 2.9, 0.2, 2.4, 1.8, 3.7, 1.9 |
| 54 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63 | 2.0, 3.4, 1.1, 0.4, 0.2, 1.5, 1.7, 2.9, 1.2, 5.6, 0.7, 0.1, 7.9, 0.2, 0.9, 5.7, 0.2, 4.9, 2.1, 0.3, 0.6, 1.5, 2.8, 1.1, 0.4, 1.0, 0.1, 1.5, 0.1, 1.1, 4.2, 0.4, 1.8, 0.2, 2.0, 1.5, 1.6, 10.2, 4.3, 2.1, 1.3, 2.7, 1.1, 3.0, 0.6, 2.5, 2.0, 4.1, 1.3 |
| 55 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63 | 2.0, 3.5, 1.2, 0.4, 0.2, 1.4, 1.7, 3.0, 1.2, 5.6, 0.6, 0.1, 7.9, 0.3, 0.9, 5.6, 0.1, 4.9, 2.1, 0.3, 0.6, 1.5, 2.7, 1.1, 0.4, 1.1, 0.1, 1.6, 0.1, 1.2, 4.2, 0.3, 1.7, 0.2, 2.1, 1.7, 1.5, 10.0, 4.3, 2.0, 1.3, 2.8, 1.1, 3.0, 0.6, 2.5, 2.0, 4.1, 1.2 |
| 56 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63 | 2.1, 3.8, 1.4, 0.3, 0.2, 1.2, 1.8, 0.1, 3.1, 1.0, 5.7, 0.4, 0.1, 7.8, 0.4, 0.9, 5.5, 0.1, 5.0, 2.2, 0.5, 0.5, 1.4, 2.5, 1.1, 0.4, 1.2, 0.1, 1.8, 0.1, 1.3, 4.1, 0.1, 1.5, 0.2, 2.2, 2.0, 1.4, 9.4, 4.4, 1.8, 1.3, 2.9, 1.2, 3.1, 0.8, 2.5, 2.1, 4.3, 0.9 |
| 57 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63 | 2.1, 3.9, 1.5, 0.3, 0.3, 1.1, 1.9, 0.2, 3.2, 0.9, 5.8, 0.3, 0.0, 7.8, 0.4, 1.0, 5.4, 0.1, 5.0, 2.2, 0.5, 0.5, 1.4, 2.5, 1.1, 0.4, 1.2, 0.0, 1.9, 0.1, 1.4, 4.1, 1.4, 0.2, 2.2, 0.0, 2.1, 1.3, 9.2, 4.4, 1.7, 1.2, 2.9, 1.2, 3.1, 0.9, 2.5, 2.2, 4.4, 0.8 |
| 58 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 15, 16, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63 | 2.2, 4.1, 1.7, 0.2, 0.3, 0.8, 2.0, 0.3, 3.3, 0.6, 5.9, 0.1, 0.0, 7.8, 0.5, 1.0, 5.2, 0.0, 5.1, 2.2, 0.6, 0.5, 1.3, 2.3, 1.1, 0.3, 1.3, 0.0, 2.0, 0.0, 1.5, 4.0, 1.2, 0.2, 2.3, 0.1, 2.4, 1.2, 8.7, 4.4, 1.4, 1.2, 3.0, 1.3, 3.2, 1.0, 2.6, 2.2, 4.5, 0.5 |
| 59 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63 | 2.2, 4.2, 1.7, 0.2, 0.3, 0.7, 2.0, 0.4, 3.3, 0.6, 5.9, 0.0, 7.7, 0.5, 1.0, 5.2, 0.0, 5.1, 2.2, 0.6, 0.5, 1.3, 2.2, 0.0, 1.2, 0.3, 1.4, 0.0, 2.1, 0.0, 1.5, 4.0, 1.1, 0.2, 2.3, 0.2, 2.5, 1.2, 8.5, 4.4, 1.4, 1.2, 3.0, 1.3, 3.2, 1.0, 2.6, 2.3, 4.6, 0.4 |

**Composição dos Portfólios do modelo MV**

**(conclusão)**

| Portfólio | Ativos | Participações |
|---|---|---|
| 60 | 1. 2. 3. 4. 5. 6. 8. 9. 12. 13. 15. 19. 21. 22. 23. 24. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 35. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 52. 53. 54. 55. 56. 58. 59. 60. 61. 62. 63 | 2.2. 4.2. 1.8. 0.2. 0.3. 0.7. 2.1. 0.4. 3.3. 0.6. 5.9. 0.0. 7.7. 0.5. 1.0. 5.2. 5.1. 2.2. 0.7. 0.5. 1.3. 2.2. 0.0. 1.2. 0.3. 1.4. 0.0. 2.1. 0.0. 1.5. 4.0. 1.1. 0.2. 2.4. 0.2. 2.5. 1.2. 8.5. 4.4. 1.3. 1.2. 3.1. 1.4. 3.2. 1.0. 2.6. 2.3. 4.6. 0.4 |
| 61 | 1. 2. 3. 4. 5. 6. 8. 9. 12. 13. 15. 21. 22. 23. 24. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 35. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 52. 53. 54. 55. 56. 58. 59. 60. 61. 62. 63 | 2.2. 4.2. 1.8. 0.2. 0.4. 0.7. 2.1. 0.4. 3.4. 0.5. 5.9. 7.7. 0.5. 1.0. 5.2. 5.1. 2.3. 0.7. 0.5. 1.3. 2.2. 0.0. 1.2. 0.3. 1.4. 0.0. 2.1. 0.0. 1.5. 4.0. 1.1. 0.2. 2.4. 0.2. 2.6. 1.1. 8.4. 4.4. 1.3. 1.2. 3.1. 1.4. 3.2. 1.0. 2.6. 2.3. 4.6. 0.3 |
| 62 | 1. 2. 3. 4. 5. 6. 8. 9. 12. 13. 15. 21. 22. 23. 24. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 35. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 52. 53. 54. 55. 56. 58. 59. 60. 61. 62. 63 | 2.2. 4.5. 2.0. 0.1. 0.4. 0.4. 2.2. 0.6. 3.5. 0.3. 6.0. 7.7. 0.6. 1.0. 4.9. 5.1. 2.3. 0.8. 0.4. 1.2. 2.0. 0.1. 1.2. 0.3. 1.5. 0.0. 2.3. 0.0. 1.7. 3.9. 0.8. 0.2. 2.5. 0.3. 2.9. 0.9. 7.6. 4.5. 0.9. 1.2. 3.1. 1.5. 3.2. 1.2. 2.6. 2.4. 4.9. 0.0 |

**Tabela 6: Retornos Logarítmicos e Percentuais de 63 Ativos**

**(amostra m = 847)**

| Ativo | Retorno Log | Retorno %a.d. |
|---|---|---|
| 25 | 0.012272 | 1.235 |
| 63 | 0.009905 | 0.995 |
| 19 | 0.007692 | 0.772 |
| 57 | 0.005611 | 0.563 |
| 51 | 0.002247 | 0.225 |
| 49 | 0.001900 | 0.190 |
| 6 | 0.001637 | 0.164 |
| 50 | 0.001633 | 0.163 |
| 16 | 0.001551 | 0.155 |
| 4 | 0.001512 | 0.151 |
| 44 | 0.001354 | 0.136 |
| 43 | 0.001256 | 0.126 |
| 42 | 0.001149 | 0.115 |
| 40 | 0.001142 | 0.114 |
| 13 | 0.001033 | 0.103 |
| 24 | 0.000985 | 0.099 |
| 18 | 0.000958 | 0.096 |
| 31 | 0.000953 | 0.095 |
| 29 | 0.000943 | 0.094 |
| 59 | 0.000901 | 0.090 |
| 30 | 0.000897 | 0.090 |
| 21 | 0.000809 | 0.081 |
| 53 | 0.000807 | 0.081 |
| 35 | 0.000758 | 0.076 |
| 58 | 0.000755 | 0.075 |
| 26 | 0.000731 | 0.073 |
| 60 | 0.000705 | 0.071 |
| 45 | 0.000702 | 0.070 |
| 38 | 0.000694 | 0.069 |
| 55 | 0.000665 | 0.067 |
| 34 | 0.000614 | 0.061 |
| 54 | 0.000578 | 0.058 |
| 9 | 0.000573 | 0.057 |
| 52 | 0.000551 | 0.055 |
| 8 | 0.000540 | 0.054 |
| 20 | 0.000535 | 0.054 |
| 22 | 0.000519 | 0.052 |
| 15 | 0.000483 | 0.048 |
| 33 | 0.000479 | 0.048 |
| 1 | 0.000473 | 0.047 |
| 23 | 0.000473 | 0.047 |
| 36 | 0.000470 | 0.047 |
| 46 | 0.000454 | 0.045 |
| 39 | 0.000408 | 0.041 |
| 62 | 0.000388 | 0.039 |
| 10 | 0.000383 | 0.038 |
| 61 | 0.000383 | 0.038 |
| 5 | 0.000376 | 0.038 |
| 3 | 0.000282 | 0.028 |
| 28 | 0.000263 | 0.026 |
| 7 | 0.000234 | 0.023 |
| 12 | 0.000192 | 0.019 |
| 48 | 0.000184 | 0.018 |
| 11 | 0.000175 | 0.017 |
| 27 | 0.000167 | 0.017 |
| 32 | 0.000124 | 0.012 |
| 47 | 0.000103 | 0.010 |
| 41 | 0.000088 | 0.009 |
| 56 | 0.000087 | 0.009 |
| 17 | 0.000086 | 0.009 |
| 37 | 0.000055 | 0.005 |
| 2 | 0.000052 | 0.005 |
| 14 | -0.000043 | -0.004 |

**Tabela 7: Desvio Padrão dos Retornos - 63 Ativos**

**(amostra m = 847)**

| Ativo | DP (Log) | DP (%a.d.) | Ativo | DP(Log) | DP(%a.d.) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.05128 | 5.262 | 33 | 0.06624 | 6.848 |
| 2 | 0.04416 | 4.515 | 34 | 0.03362 | 3.419 |
| 3 | 0.03995 | 4.076 | 35 | 0.20941 | 23.295 |
| 4 | 0.11026 | 11.657 | 36 | 0.04411 | 4.510 |
| 5 | 0.05481 | 5.634 | 37 | 0.05407 | 5.556 |
| 6 | 0.06886 | 7.128 | 38 | 0.14475 | 15.575 |
| 7 | 0.03869 | 3.945 | 39 | 0.03944 | 4.023 |
| 8 | 0.04971 | 5.097 | 40 | 0.12341 | 13.135 |
| 9 | 0.04601 | 4.708 | 41 | 0.05792 | 5.963 |
| 10 | 0.04949 | 5.073 | 42 | 0.03703 | 3.772 |
| 11 | 0.04507 | 4.610 | 43 | 0.04167 | 4.255 |
| 12 | 0.04234 | 4.325 | 44 | 0.04821 | 4.939 |
| 13 | 0.03521 | 3.583 | 45 | 0.06197 | 6.393 |
| 14 | 0.03580 | 3.644 | 46 | 0.04201 | 4.291 |
| 15 | 0.03544 | 3.608 | 47 | 0.09671 | 10.154 |
| 16 | 0.04660 | 4.771 | 48 | 0.03386 | 3.444 |
| 17 | 0.05670 | 5.834 | 49 | 0.07960 | 8.286 |
| 18 | 0.07264 | 7.534 | 50 | 0.02916 | 2.959 |
| 19 | 0.38811 | 47.420 | 51 | 0.07452 | 7.737 |
| 20 | 0.03324 | 3.380 | 52 | 0.04347 | 4.443 |
| 21 | 0.02701 | 2.737 | 53 | 0.03338 | 3.395 |
| 22 | 0.03692 | 3.761 | 54 | 0.07766 | 8.076 |
| 23 | 0.08916 | 9.326 | 55 | 0.05816 | 5.989 |
| 24 | 0.04083 | 4.168 | 56 | 0.06003 | 6.187 |
| 25 | 0.33186 | 39.356 | 57 | 0.32570 | 38.500 |
| 26 | 0.03123 | 3.172 | 58 | 0.04018 | 4.099 |
| 27 | 0.05392 | 5.541 | 59 | 0.03849 | 3.924 |
| 28 | 0.06496 | 6.711 | 60 | 0.05912 | 6.090 |
| 29 | 0.06419 | 6.629 | 61 | 0.05082 | 5.214 |
| 30 | 0.05989 | 6.171 | 62 | 0.03401 | 3.460 |
| 31 | 0.04282 | 4.375 | 63 | 0.13905 | 14.918 |
| 32 | 0.11610 | 12.311 | | | |

**Tabela 8: Retornos Logarítmicos de 146 Ativos**

**(amostra m = 170 retornos)**

| Ativo | Retorno | Risco |
|---|---|---|
| 1 | 0.00237 | 0.09482 |
| 2 | 0.00026 | 0.09972 |
| 3 | 0.00157 | 0.09225 |
| 4 | 0.00410 | 0.18554 |
| 5 | 0.00188 | 0.12174 |
| 6 | 0.00820 | 0.08687 |
| 7 | 0.00047 | 0.08234 |
| 8 | 0.00254 | 0.09427 |
| 9 | 0.00317 | 0.08572 |
| 10 | 0.00183 | 0.09592 |
| 11 | 0.00078 | 0.11264 |
| 12 | 0.00094 | 0.07721 |
| 13 | 0.00005 | 0.08384 |
| 14 | 0.00542 | 0.07768 |
| 15 | 0.00242 | 0.07155 |
| 16 | 0.00749 | 0.09743 |
| 17 | 0.00037 | 0.11750 |
| 18 | 0.00397 | 0.14904 |
| 19 | 0.03226 | 0.57882 |
| 20 | 0.00291 | 0.07051 |
| 21 | 0.00458 | 0.04871 |
| 22 | 0.00250 | 0.08085 |
| 23 | 0.00240 | 0.20124 |
| 24 | 0.00520 | 0.09423 |
| 25 | 0.06390 | 0.68445 |
| 26 | 0.00295 | 0.06130 |
| 27 | 0.00053 | 0.09462 |
| 28 | 0.00132 | 0.13200 |
| 29 | 0.00472 | 0.08155 |
| 30 | 0.00450 | 0.10864 |
| 31 | 0.00456 | 0.10407 |
| 32 | 0.00036 | 0.27382 |
| 33 | 0.00259 | 0.17813 |
| 34 | 0.00297 | 0.08021 |
| 35 | 0.00140 | 0.36618 |
| 36 | 0.00283 | 0.09139 |
| 37 | 0.00007 | 0.11520 |
| 38 | 0.00348 | 0.28837 |
| 39 | 0.00171 | 0.07491 |
| 40 | 0.00573 | 0.20616 |
| 41 | 0.00044 | 0.10103 |
| 42 | 0.00557 | 0.07119 |
| 43 | 0.00572 | 0.09243 |
| 44 | 0.00691 | 0.09692 |
| 45 | 0.00378 | 0.12511 |
| 46 | 0.00234 | 0.08446 |
| 47 | 0.00051 | 0.22002 |
| 48 | 0.00062 | 0.05772 |
| 49 | 0.00952 | 0.16620 |
| 50 | 0.00818 | 0.06480 |

| Ativo | Retorno | Risco |
|---|---|---|
| 51 | 0.0115 | 0.1564 |
| 52 | 0.0028 | 0.0878 |
| 53 | 0.0041 | 0.0616 |
| 54 | 0.0038 | 0.1535 |
| 55 | 0.0036 | 0.0925 |
| 56 | 0.0014 | 0.1292 |
| 57 | 0.0281 | 0.6190 |
| 58 | 0.0042 | 0.0923 |
| 59 | 0.0038 | 0.0926 |
| 60 | 0.0035 | 0.1375 |
| 61 | 0.0016 | 0.1145 |
| 62 | 0.0018 | 0.0835 |
| 63 | 0.0496 | 0.3293 |
| 64 | -0.0049 | 0.1002 |
| 65 | -0.0116 | 0.2390 |
| 66 | -0.0108 | 0.1397 |
| 67 | -0.0032 | 0.0641 |
| 68 | -0.0032 | 0.0764 |
| 69 | -0.0005 | 0.0768 |
| 70 | -0.0099 | 0.0569 |
| 71 | -0.0022 | 0.0639 |
| 72 | -0.0052 | 0.0622 |
| 73 | -0.0013 | 0.0618 |
| 74 | -0.0020 | 0.0684 |
| 75 | -0.0011 | 0.0780 |
| 76 | -0.0078 | 0.0898 |
| 77 | -0.0045 | 0.1028 |
| 78 | -0.0060 | 0.0923 |
| 79 | -0.0100 | 0.1478 |
| 80 | -0.0101 | 0.1495 |
| 81 | -0.0072 | 0.1353 |
| 82 | -0.0006 | 0.1032 |
| 83 | -0.0036 | 0.2676 |
| 84 | -0.0079 | 0.1257 |
| 85 | -0.0047 | 0.0872 |
| 86 | -0.0046 | 0.1064 |
| 87 | -0.0025 | 0.1097 |
| 88 | -0.0019 | 0.0893 |
| 89 | -0.0009 | 0.1097 |
| 90 | -0.0006 | 0.1039 |
| 91 | -0.0010 | 0.0627 |
| 92 | -0.0013 | 0.0714 |
| 93 | -0.0171 | 0.2007 |
| 94 | -0.0174 | 0.1964 |
| 95 | -0.0066 | 0.1116 |
| 96 | -0.0053 | 0.2734 |
| 97 | -0.0018 | 0.1113 |
| 98 | -0.0030 | 0.0732 |
| 99 | -0.0022 | 0.1041 |
| 100 | -0.0012 | 0.1642 |

| Ativo | Retorno | Risco |
|---|---|---|
| 101 | -0.0090 | 0.1438 |
| 102 | -0.0068 | 0.1913 |
| 103 | -0.0086 | 0.1921 |
| 104 | -0.0325 | 0.2998 |
| 105 | -0.0026 | 0.0896 |
| 106 | -0.0043 | 0.0993 |
| 107 | -0.0290 | 0.5361 |
| 108 | -0.0058 | 0.1048 |
| 109 | -0.0085 | 0.0915 |
| 110 | -0.0024 | 0.1597 |
| 111 | -0.0040 | 0.0907 |
| 112 | -0.0071 | 0.5058 |
| 113 | -0.0055 | 0.1465 |
| 114 | -0.0036 | 0.1132 |
| 115 | -0.0099 | 0.1932 |
| 116 | -0.0117 | 0.1952 |
| 117 | -0.0056 | 0.1028 |
| 118 | -0.0037 | 0.1107 |
| 119 | -0.0043 | 0.0629 |
| 120 | -0.0036 | 0.1688 |
| 121 | -0.0003 | 0.0750 |
| 122 | -0.0084 | 0.1186 |
| 123 | -0.0028 | 0.1246 |
| 124 | -0.0063 | 0.1627 |
| 125 | -0.0017 | 0.0795 |
| 126 | -0.0008 | 0.0698 |
| 127 | -0.0007 | 0.0784 |
| 128 | -0.0036 | 0.1148 |
| 129 | -0.0166 | 0.1179 |
| 130 | -0.0006 | 0.3480 |
| 131 | -0.0147 | 0.1124 |
| 132 | -0.0316 | 0.5096 |
| 133 | -0.0004 | 0.0864 |
| 134 | -0.0041 | 0.0938 |
| 135 | -0.0066 | 0.0630 |
| 136 | -0.0020 | 0.0845 |
| 137 | -0.0499 | 0.4124 |
| 138 | -0.0506 | 0.4441 |
| 139 | -0.0230 | 0.3052 |
| 140 | -0.0077 | 0.1086 |
| 141 | -0.0062 | 0.1112 |
| 142 | -0.0050 | 0.1076 |
| 143 | -0.0043 | 0.0809 |
| 144 | -0.0023 | 0.1181 |
| 145 | -0.0020 | 0.1194 |
| 146 | -0.0082 | 0.3458 |

**Tabela 9: Assimetria e Curtose dos retornos de Portfólios MV**

| Portfólio | Assimetria | Curtose |
|---|---|---|
| 1 | 20.77 | 540.91 |
| 2 | 4.08 | 187.31 |
| 3 | -0.18 | 179.76 |
| 4 | -0.27 | 179.54 |
| 5 | -0.31 | 179.30 |
| 6 | -0.63 | 173.93 |
| 7 | -0.67 | 172.73 |
| 8 | -0.74 | 170.66 |
| 9 | -0.78 | 169.31 |
| 10 | -0.86 | 165.39 |
| 11 | -0.92 | 146.56 |
| 12 | -0.82 | 126.43 |
| 13 | -0.82 | 125.29 |
| 14 | -0.82 | 123.86 |
| 15 | -0.82 | 121.84 |
| 16 | -0.78 | 107.74 |
| 17 | -0.76 | 103.43 |
| 18 | -0.76 | 102.78 |
| 19 | -0.75 | 101.22 |
| 20 | -0.67 | 86.33 |
| 21 | -0.64 | 81.18 |
| 22 | -0.60 | 75.64 |
| 23 | -0.59 | 73.86 |
| 24 | -0.59 | 73.48 |
| 25 | -0.58 | 72.39 |
| 26 | -0.55 | 65.87 |
| 27 | -0.53 | 62.49 |
| 28 | -0.53 | 62.32 |
| 29 | -0.53 | 61.45 |
| 30 | -0.52 | 59.47 |
| 31 | -0.51 | 56.85 |
| 32 | -0.49 | 51.82 |
| 33 | -0.46 | 40.94 |
| 34 | -0.46 | 40.72 |
| 35 | -0.46 | 38.69 |
| 36 | -0.46 | 36.82 |
| 37 | -0.46 | 35.36 |
| 38 | -0.46 | 35.34 |
| 39 | -0.46 | 29.31 |
| 40 | -0.46 | 26.33 |
| 41 | -0.45 | 25.29 |
| 42 | -0.45 | 22.17 |
| 43 | -0.45 | 19.70 |
| 44 | -0.45 | 19.14 |
| 45 | -0.45 | 18.44 |
| 46 | -0.45 | 17.69 |
| 47 | -0.46 | 15.76 |
| 48 | -0.48 | 11.18 |
| 49 | -0.48 | 10.73 |
| 50 | -0.49 | 9.82 |
| 51 | -0.51 | 8.67 |
| 52 | -0.51 | 8.64 |
| 53 | -0.51 | 8.51 |
| 54 | -0.53 | 7.15 |
| 55 | -0.54 | 6.95 |
| 56 | -0.54 | 6.63 |
| 57 | -0.54 | 6.50 |
| 58 | -0.55 | 6.31 |
| 59 | -0.55 | 6.27 |
| 60 | -0.54 | 6.26 |
| 61 | -0.54 | 6.23 |
| 62 | -0.53 | 6.07 |

**Tabela 10: Teste K-S para normalidade dos retornos de Portfólios MV (63 ativos, 62 portfólios)**

| Variável r do Portfólio Nº | Distância entre f.d.p.'s | Valor-p | Variável r do Portfólio Nº | Distância entre f.d.p.'s | Valor-p |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.385825 | < 0.01 | 32 | 0.146310 | < 0.01 |
| 2 | 0.367053 | < 0.01 | 33 | 0.138015 | < 0.01 |
| 3 | 0.293500 | < 0.01 | 34 | 0.137581 | < 0.01 |
| 4 | 0.290752 | < 0.01 | 35 | 0.134954 | < 0.01 |
| 5 | 0.285268 | < 0.01 | 36 | 0.132504 | < 0.01 |
| 6 | 0.276730 | < 0.01 | 37 | 0.130748 | < 0.01 |
| 7 | 0.276038 | < 0.01 | 38 | 0.130701 | < 0.01 |
| 8 | 0.275510 | < 0.01 | 39 | 0.120166 | < 0.01 |
| 9 | 0.272617 | < 0.01 | 40 | 0.114570 | < 0.01 |
| 10 | 0.269790 | < 0.01 | 41 | 0.113953 | < 0.01 |
| 11 | 0.248628 | < 0.01 | 42 | 0.110081 | < 0.01 |
| 12 | 0.228658 | < 0.01 | 43 | 0.103818 | < 0.01 |
| 13 | 0.228135 | < 0.01 | 44 | 0.102972 | < 0.01 |
| 14 | 0.228162 | < 0.01 | 45 | 0.102412 | < 0.01 |
| 15 | 0.226887 | < 0.01 | 46 | 0.101810 | < 0.01 |
| 16 | 0.208774 | < 0.01 | 47 | 0.102457 | < 0.01 |
| 17 | 0.205113 | < 0.01 | 48 | 0.098752 | < 0.01 |
| 18 | 0.204770 | < 0.01 | 49 | 0.097123 | < 0.01 |
| 19 | 0.204372 | < 0.01 | 50 | 0.096905 | < 0.01 |
| 20 | 0.187469 | < 0.01 | 51 | 0.094505 | < 0.01 |
| 21 | 0.182542 | < 0.01 | 52 | 0.094621 | < 0.01 |
| 22 | 0.176849 | < 0.01 | 53 | 0.095188 | < 0.01 |
| 23 | 0.173394 | < 0.01 | 54 | 0.093747 | < 0.01 |
| 24 | 0.172290 | < 0.01 | 55 | 0.089405 | < 0.01 |
| 25 | 0.170164 | < 0.01 | 56 | 0.087964 | < 0.01 |
| 26 | 0.160034 | < 0.01 | 57 | 0.082495 | < 0.01 |
| 27 | 0.156571 | < 0.01 | 58 | 0.078743 | < 0.01 |
| 28 | 0.156642 | < 0.01 | 59 | 0.077541 | < 0.01 |
| 29 | 0.155986 | < 0.01 | 50 | 0.077169 | < 0.01 |
| 30 | 0.154995 | < 0.01 | 61 | 0.078933 | < 0.01 |
| 31 | 0.151374 | < 0.01 | 62 | 0.077875 | < 0.01 |

**Figura 6: Fronteira de Eficiência para Retornos Percentuais - 63 Ativos**

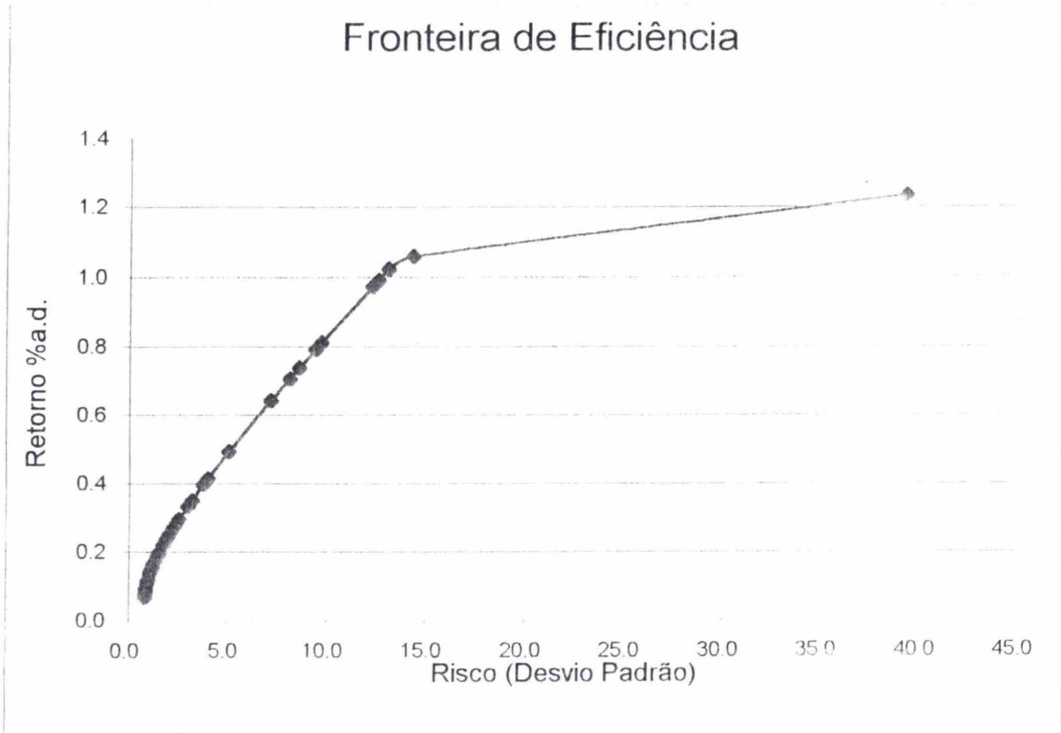
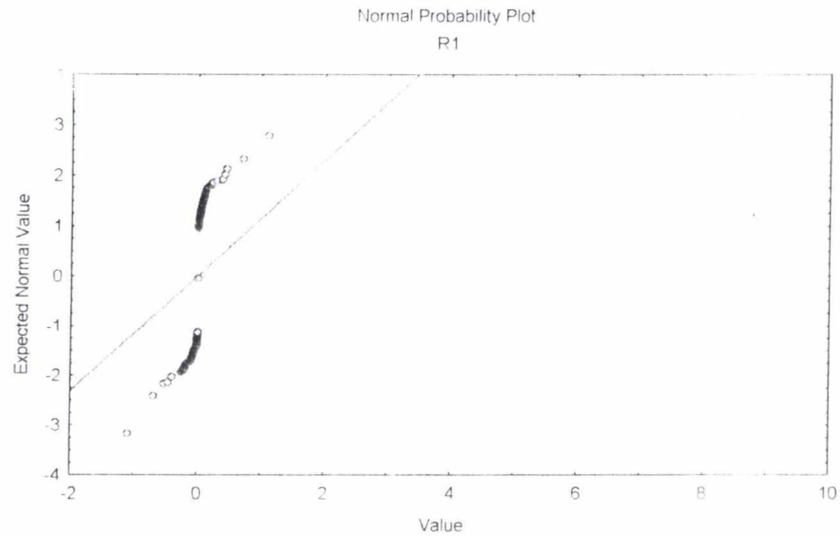
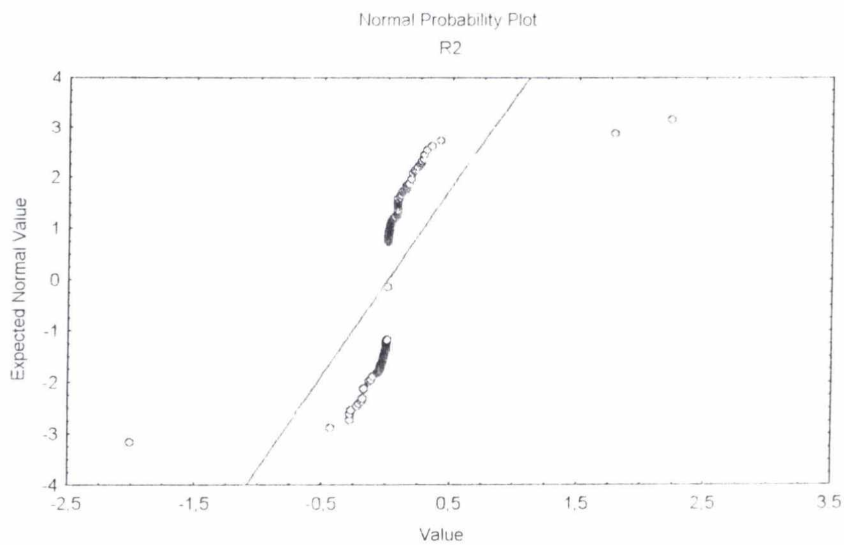
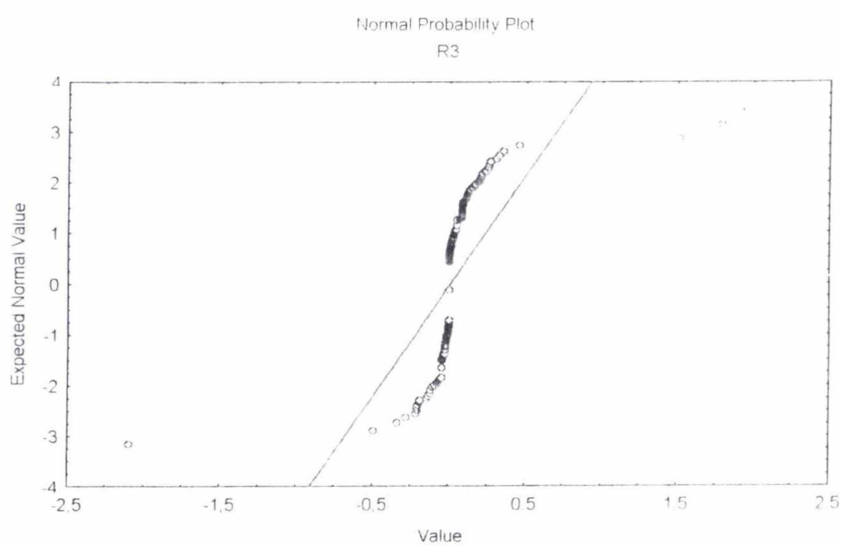


**Figura 7: Valor Normal Esperado para Probabilidades - Portfólios 1 a 3**



# Figura 8: Valor Normal Esperado para Probabilidades - Portfólios 60 a 62