

**ANGELA CRISTINA CARARO**

**CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS SOBRE AS MEDIDAS DE TEMPO GPS**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção ao grau de Mestre em Ciências Geodésicas, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná.

Orientadores:

Prof. Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira  
Prof. Dr. Germano Bruno Afonso

**CURITIBA**  
**2006**

**“CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS SOBRE AS  
MEDIDAS DE TEMPO GPS”**


**POR**

**ANGELA CRISTINA CARARO**

Dissertação nº 191 aprovada como requisito parcial do grau de Mestre  
no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade  
Federal do Paraná, pela Comissão formada pelos professores:

Curitiba, 24 de fevereiro de 2006.

  
Prof. Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira (UFPR)  
Orientador e Presidente

  
Prof. Dr. Edson Aurélio Barcelos Stédile – Membro (UFPR)

  
Prof. Dr. José Bittencourt de Andrade – Membro (UFPR)

**ANGELA CRISTINA CARARO**

**CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS SOBRE AS MEDIDAS DE TEMPO GPS**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção ao grau de Mestre em Ciências Geodésicas, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná.

Orientadores:

Prof. Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira  
Prof. Dr. Germano Bruno Afonso

**CURITIBA**  
**2006**

O tempo presente e o tempo passado  
Estão ambos talvez presentes no tempo futuro  
E o tempo futuro contido no tempo passado  
Se todo o tempo é eternamente presente  
    Todo o tempo é irredimível  
O que poderia ter sido uma abstração  
Permanece como uma perpétua possibilidade  
    Somente num mundo de especulação  
    O que poderia ter sido e o que foi  
Convergem para um só fim, que é sempre presente  
    (T. S. Eliot, em *Quatro Quartetos*)

Dedico este trabalho ao meu filho Giordano e aos meus pais Joel e Luci.

A matemática sem poesia  
é um deserto árido e inóspito  
e a poesia sem rigor matemático  
é mero delírio, fantasia.  
A ciência sem coração, inconsciência;  
o coração sem ciência, demência.  
Fazei, portanto, teus cálculos alegres  
e teus poemas exatos;  
que teu laboratório tenha algo de oratório  
e que teu templo lembre um químico mistério.  
É que quero que teu cérebro seja um jardim  
e teu coração um sol carmim,  
é que quero que teu viver seja pleno  
e que teu morrer seja sereno.  
(Frederico Lobo, em *Planetário*)

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus orientadores, Prof. Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira e Prof. Dr. Germano Bruno Afonso, pelo incentivo, motivação, atitude compromissada, e principalmente, pela confiança depositada em mim. Ao Professor Germano, especialmente, pela longa amizade, e por ter auxiliado com sugestões importantes em momentos decisivos. Ao Professor Danilo, especialmente, por sua imensa dedicação e paciência, tendo auxiliado com sua competência profissional e amizade ao longo de todo o caminho percorrido.

Agradeço aos membros da banca, Prof. Dr. José Bittencourt de Andrade, Prof. Dr. Edson Stédile, Profa. Dra. Cláudia Pereira Krueger pelas sugestões oferecidas.

Agradeço a todos os professores e alunos do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, pela colaboração e esclarecimento de dúvidas em vários campos.

Agradeço, especialmente, a Luiz Fernando Macedo Morescki, Roberto Teixeira Luz, Glauber Acunha Gonçalves, Fernando Abreu, Ewerton Waldomiro Pedroso Brum, Maurício Ihlenfeldt Sejas e Sandro Reginato. Agradeço a Leonardo Berlim Schneider pela confecção da figura (3.3).

Agradeço aos amigos Thais Helena Passerino Silva e Emerson Tarcísio Meister pela amizade e por suas atitudes sempre encorajadoras e positivas.

Agradeço à secretária do CPGCG, Verali Mônica Kleuser, e à coordenadora, Profa. Dra. Cláudia Pereira Krueger, pela dedicação e amizade.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão da bolsa de estudos.

## SUMÁRIO

<b>SUMÁRIO</b> .....	i
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	ii
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	iii
<b>RESUMO</b> .....	iv
<b>ABSTRACT</b> .....	v
<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	1
<b>2. REVISÃO DA LITERATURA</b> .....	5
2.1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS.....	5
2.1.1. Sistemas de Tempo.....	5
2.1.1.1. Medidas de tempo.....	5
2.1.1.2. Tempo atômico.....	6
2.1.1.3. Escalas de tempo relativísticas.....	8
2.1.2. Sistemas de Referência Celeste e Terrestre.....	12
2.1.2.1. Transformações entre sistemas celeste e terrestre.....	14
2.1.2.2. O sistema WGS-84.....	14
2.1.3. Alguns Conceitos de Mecânica Clássica.....	15
2.1.4. Introdução à Dinâmica Orbital.....	16
2.1.4.1. Órbita Kepleriana.....	17
2.1.4.2. Forças perturbadoras.....	21
2.1.5. Introdução ao Sistema de Posicionamento Global <i>GPS</i> .....	23
2.1.5.1. Princípio físico fundamental do <i>GPS</i> .....	23
2.1.5.2. <i>GPS</i> e medidas de tempo.....	25
2.1.6. <i>GPS</i> e Relatividade.....	26
2.1.6.1. Relógios em solo.....	26
2.1.6.2. Efeito <i>Sagnac</i> .....	29
2.1.6.3. Relógios em órbita.....	30
<b>3. DESENVOLVIMENTO</b> .....	33
3.1. DETALHAMENTO TEÓRICO.....	33
3.1.1. As Relações Entre Escalas de Tempo Utilizadas.....	33
3.1.2. Correções Relativísticas Convencionais Para o <i>GPS</i> .....	37
3.1.3. Novos Desenvolvimentos Teóricos Para As Correções Relativísticas no <i>GPS</i> .....	45
3.2. TESTES E RESULTADOS.....	57
3.2.1. Metodologia Para a Geração Dos Gráficos e Tabelas.....	57
3.2.2. Resultados Obtidos e Análises.....	59
<b>4. CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES</b> .....	69
4.1. CONCLUSÃO.....	69
4.2. RECOMENDAÇÕES.....	72
<b>ANEXO 1. LONGITUDE DO NODO ASCENDENTE</b> .....	73
<b>ANEXO 2. SISTEMAS DE REFERÊNCIA E EFEITO SAGNAC</b> .....	74
<b>ANEXO 3. GRÁFICOS DA CORREÇÃO RELATIVÍSTICA PERIÓDICA</b> .....	77
<b>ANEXO 4. CORREÇÃO DO TEMPO RECEBIDO PELO USUÁRIO</b> .....	82
<b>ANEXO 5. FONTES DE ERRO NO SISTEMA <i>GPS</i></b> .....	84
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	88

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – DIFERENÇAS ENTRE AS DIVERSAS ESCALAS DE TEMPO.....	11
FIGURA 2.2 – OS ELEMENTOS ORBITAIS $i$ , $\Omega$ e $\omega$ DE UM SATÉLITE.....	18
FIGURA 2.3 - DEFINIÇÃO DA ANOMALIA EXCÊNTRICA $E$ .....	19
FIGURA 2.4 – FORÇAS PERTURBADORAS SOBRE A ÓRBITA.....	22
FIGURA 2.5 – DESVIOS DE FREQUÊNCIA RELATIVÍSTICOS.....	31
FIGURA 3.1 – CORREÇÃO RELATIVÍSTICA PARA A EXCENTRICIDADE DA ÓRBITA (REALIZADA PELO RECEPTOR GPS).....	43
FIGURA 3.2. ERROS DAS CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS CONVENCIONAIS.....	46
FIGURA 3.3 – ELEMENTOS ORBITAIS.....	51
FIGURA 3.4 – SATÉLITES GPS DO PLANO ORBITAL A.....	60
FIGURA 3.5 – SATÉLITES GPS DO PLANO ORBITAL B.....	60
FIGURA 3.6 – SATÉLITES GPS DO PLANO ORBITAL C.....	61
FIGURA 3.7 – SATÉLITES GPS DO PLANO ORBITAL D.....	61
FIGURA 3.8 – SATÉLITES GPS DO PLANO ORBITAL E.....	62
FIGURA 3.9 – SATÉLITES GPS DO PLANO ORBITAL F.....	62
FIGURA 3.10 – GRÁFICO DA EQUAÇÃO (3.82) OBTIDO POR KOUBA (2004).....	63
FIGURA 3.11 – GRÁFICO DA EQUAÇÃO (3.82) PARA O PRN 02 EM 13 DE ABRIL DE 2001.....	64
FIGURA 3.12 – INFLUÊNCIA DE $J_2$ SOBRE OS RELÓGIOS DOS SATÉLITES GPS COM $0 < i_0 - 54.7^\circ < 0,90$ .....	66
FIGURA 3.13 – INFLUÊNCIA DE $J_2$ SOBRE OS RELÓGIOS DOS SATÉLITES GPS COM $i_0 - 54.7^\circ < 0$ .....	66
FIGURA 3.14 – INFLUÊNCIA DE $J_2$ SOBRE OS RELÓGIOS DOS SATÉLITES GPS COM $i_0 - 54.7^\circ \geq 0,90$ .....	67
FIGURA 3.15 – INFLUÊNCIA DE $J_2$ SOBRE O RELÓGIO DE UM SATÉLITE GPS HIPOTÉTICO, COM SEMI-EIXO MAIOR E INCLINAÇÃO NOMINAIS.....	68
FIGURA A1.1 – LONGITUDE DO NODO ASCENDENTE.....	73
FIGURA A3.1 – CORREÇÃO RELATIVÍSTICA PARA A EXCENTRICIDADE DA ÓRBITA – SATÉLITES GPS DO PLANO A.....	77
FIGURA A3.2 – CORREÇÃO RELATIVÍSTICA PARA A EXCENTRICIDADE DA ÓRBITA – SATÉLITES GPS DO PLANO B.....	78
FIGURA A3.3 – CORREÇÃO RELATIVÍSTICA PARA A EXCENTRICIDADE DA ÓRBITA – SATÉLITES GPS DO PLANO C.....	78
FIGURA A3.4 – CORREÇÃO RELATIVÍSTICA PARA A EXCENTRICIDADE DA ÓRBITA – SATÉLITES GPS DO PLANO D.....	79
FIGURA A3.5 – CORREÇÃO RELATIVÍSTICA PARA A EXCENTRICIDADE DA ÓRBITA – SATÉLITES GPS DO PLANO E.....	79
FIGURA A3.6 – CORREÇÃO RELATIVÍSTICA PARA A EXCENTRICIDADE DA ÓRBITA – SATÉLITES GPS DO PLANO F.....	80

**LISTA DE TABELAS**

TABELA 2.1 - ALGUNS DOS PRINCIPAIS PARÂMETROS DO WGS-84.....	15
TABELA 2.2 – CLASSIFICAÇÃO DOS SATÉLITES SEGUNDO A ALTITUDE..	17
TABELA 3.1 – O ERRO NA PARTE CONSTANTE DA CORREÇÃO RELATIVÍSTICA CONVENCIONAL.....	42
TABELA 3.2 – SATÉLITES PESQUISADOS.....	59
TABELA 3.3 – PARTE CONSTANTE DO ERRO CAUSADO POR $J_2$ NO RELÓGIO DOS SATÉLITES GPS.....	65
TABELA A3.1 – VALORES MÁXIMO E MÍNIMO DE $\Delta t_{\text{per}}$ PARA OS SATÉLITES PESQUISADOS.....	80



## RESUMO

Há uma diferença de potencial gravitacional não negligenciável entre os satélites do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e os usuários sobre a superfície da Terra. A grande velocidade destes satélites, a rotação da Terra e essa diferença de potencial, combinados com medidas de tempo com precisão de nanossegundos, nas quais está fundamentado o GPS, dão lugar a importantes efeitos relativísticos. Por outro lado, a sincronização de relógios na superfície e redondezas da Terra, onde orbitam os satélites GPS, deve levar em conta que o tempo próprio de cada um dos relógios envolvidos difere ligeiramente, em virtude de efeitos da relatividade geral e especial. Os tempos envolvidos no Sistema GPS devem ser provenientes de um esquema auto-consistente de sincronização, obtido através da adoção de um tempo coordenado, mantido por uma rede de relógios-padrão. Nesta dissertação é feita uma descrição dos três principais efeitos sobre as medidas de tempo GPS: efeito Sagnac, desvio de frequência gravitacional e desvio de frequência pelo efeito Doppler de 2<sup>a</sup>. ordem. São analisadas e comentadas as correções relativísticas convencionais sobre as medidas de tempo GPS, contidas no documento ICD-GPS-200c/1993. Os novos desenvolvimentos sobre as correções padrão, levando em conta o efeito do potencial perturbador gerado pelo achatamento terrestre sobre a marcha dos relógios dos satélites GPS, são também mostrados e comentados. São realizados testes com a nova correção relativística com o objetivo de verificar sua magnitude e influência sobre a marcha dos relógios dos satélites. Os resultados encontrados mostram que a ordem de grandeza deste efeito é da ordem de 0,1 a 0,2 nanossegundos, atrasando ou adiantando a marcha dos relógios em função da posição e velocidade instantâneas do satélite GPS. É sugerida uma aplicação prática deste efeito em posicionamento por ponto GPS altamente preciso.

**PALAVRAS-CHAVE: GPS, SINCRONIZAÇÃO, RELATIVIDADE**

## ABSTRACT

There are no negligible gravity potential differences between Global Positioning System (GPS) satellites and users on the Earth surface. High velocities of such satellites, Earth rotation, and potential differences combined with time measurements, up to nanosecond precision and essential in GPS positioning, yield some fundamental relativistic effects. In other way, the clock synchronization above the Earth surface, where the GPS satellite is in orbit, must take into account its proper time difference for each satellite clock, under both general and special relativistic effects. The GPS time involved on the system must come from an auto consistent synchronization schema, coming from a coordinated time which is maintained by a network of standard clocks. Three principal effects about GPS time are described in this research: Sagnac effect, gravitational frequency shift and second order Doppler frequency shift. Conventional relativistic corrections are commented and analyzed over GPS time measurements, which are contained on the ICD-GPS-200c/1993 report. New developments about standard corrections, taking into account perturbing potential effects, which are generated by the Earth flattening ( $J_2$ ) over GPS satellite clocks, are also studied. Several tests have been performed using new relativistic corrections trying to verify their magnitude and influence over the rate of the satellite clocks. The results obtained point out a magnitude between 0.1 and 0.2 ns for such effects, with an increasing or a decreasing in the clock rate, depending of the position and instantaneous velocity of the GPS satellite. Inclusion of the above relativistic corrections on GPS satellites, for precise point positioning (PPP), is here advised.

**KEY WORDS: GPS, SYNCHRONIZATION, RELATIVITY.**

## 1. INTRODUÇÃO

Das teorias da relatividade geral e especial é conhecido que, comparado com relógios em solo, o “tempo local” ou “tempo próprio” experimentado por um observador numa dada posição do espaço depende de sua localização e de sua dinâmica: estando em repouso ou movendo-se faz diferença, e há também uma influência relacionada ao gradiente do potencial gravitacional. O indicador mais importante deste fenômeno é a marcha do relógio (“*clock rate*”), isto é, a rapidez na mudança da medida do tempo local,  $T_{LOC}$ , comparado com uma medida ideal de tempo  $t$ , em solo:  $\partial T_{LOC} / \partial t$ .

Entretanto, mesmo em solo, as mudanças no potencial gravitacional dependem do local considerado e a velocidade linear de um ponto em repouso sobre a superfície da Terra depende da latitude, em função da rotação de nosso planeta.

A relatividade geral estabelece uma distinção entre quantidades próprias que são diretamente mensuráveis e quantidades coordenadas que dependem de algumas convenções. Enquanto medições básicas são quantidades próprias (por exemplo tempo e frequência) coordenadas são as ferramentas necessárias para estudar, através de modelagem, a interação dos fenômenos físicos com as medidas. Elas são também o instrumento básico para intercâmbio e síntese dos resultados das medidas, principalmente através das coordenadas dos objetos (e.g.: estação geodésica, fonte de rádio) realizando (materializando) uma referência espacial.

Em sua assembléia geral de 1991 a União Astronômica Internacional (*IAU – International Astronomical Union*) adotou explicitamente a teoria da relatividade geral como a base teórica para a definição e realização dos sistemas de referência espaço-tempo (*IAU*, 1991). Escalas de tempo coordenadas geocêntricas e baricêntricas e as transformações relativísticas entre elas foram definidas, juntamente com os procedimentos para sua realização. Escalas de tempo coordenado nas vizinhanças da Terra podem ser realizadas por uma média ponderada de relógios atômicos operando na superfície da Terra ou em satélites terrestres. Para este propósito os relógios devem

ser sincronizados e sintonizados usando-se uma teoria relativística que ofereça o nível de acurácia requerido.

O Sistema de Posicionamento Global *NAVSTAR-GPS* (*Navigation System With Time And Ranging - Global Positioning System*) consiste de uma constelação de 24 satélites, cada um carregando relógios atômicos acurados e altamente estáveis. Há quatro satélites em cada um dos seis diferentes planos orbitais, inclinados  $55^\circ$  em relação ao equador terrestre, com período de aproximadamente 12 horas. Os satélites transmitem sinais de tempo sincronizados, com informações sobre tempo e posição no momento da transmissão. Um receptor *GPS* em solo, a bordo de uma aeronave ou satélite terrestre pode determinar sua posição e tempo decodificando as mensagens de navegação transmitidas por, pelo menos, quatro satélites.

Juntamente com os aceleradores de partículas, o *GPS* é um dos sistemas onde as teorias da relatividade geral e especial têm inúmeras aplicações (ASHBY e SPILKER, 1996). O sistema é baseado no princípio da constância da velocidade da luz num referencial inercial local, com origem no geocentro. Tanto os relógios dos satélites em movimento, quanto os relógios em repouso sobre a superfície da Terra em rotação, são afetados pela dilatação temporal. As diferenças de potencial gravitacional entre os satélites e usuários são responsáveis por desvios de frequência na marcha dos relógios.

O efeito *Sagnac* exerce uma importante influência sobre o *GPS*. A maior parte dos usuários *GPS* está sobre a superfície da Terra e seria desejável sincronizar relógios em relação a um sistema de referências rotacional ligado à Terra. Mas a rotação da Terra provoca o efeito *Sagnac*, causando inconsistências no processo de sincronização sobre a superfície através de relógios atômicos em movimento ou de sinais eletromagnéticos. Esse efeito é dependente da trajetória e pode alcançar centenas de nanossegundos, o que é bastante significativo para o *GPS*. Por isso, a sincronização no *GPS* é realizada através de relógios fictícios em repouso com relação a um referencial inercial cuja origem é o geocentro.

Este trabalho é motivado pelo impacto que o atual desenvolvimento do acompanhamento do tempo, através dos novos relógios atômicos, exerce sobre a precisão e acurácia em posicionamento e disseminação de tempo pelo *GPS*. A base

tecnológica do *GPS* repousa em relógios atômicos extremamente acurados e estáveis, que sofrem a influência da relatividade geral e restrita sobre seus padrões de frequência.

Os novos satélites do Bloco IIF deverão carregar padrões de frequência *masers* de hidrogênio. Isso implica que efeitos relativísticos, já bem conhecidos e contabilizados no sistema, deverão ser acrescidos de melhoramentos, e que outros efeitos, de menor magnitude, serão perceptíveis e deverão ser levados em conta. Mesmo os novos satélites do Bloco IIR, já em operação, carregam padrões de frequência melhorados que possibilitam detectar efeitos relativísticos mais sutis, como o proposto por KOUBA (2004), causado pelo potencial perturbador gerado pelo achatamento terrestre e que afeta o padrão de vibração dos relógios dos satélites *GPS*.

De fato, o *GPS* é um sistema de engenharia no qual a relatividade é essencial para sua performance. Há basicamente três formas da relatividade afetá-lo: nas equações de movimento da órbita dos satélites, na propagação dos sinais eletromagnéticos e na marcha dos relógios dos satélites. Os relógios atômicos a bordo dos satélites *GPS* sofrem desvios de frequência relativísticos em função de sua velocidade e diferença de potencial gravitacional em relação aos usuários. Esses desvios tornariam o sistema não operacional se não fossem contabilizados.

O objetivo geral deste trabalho é investigar os efeitos relativísticos que atuam sobre medidas de tempo e sincronização no *GPS*, com ênfase nos desvios de frequência relativísticos sofridos pelos relógios dos satélites e nos desenvolvimentos mais recentes sobre as equações de correção padrão (ICD-GPS-200c, 1993). Será investigado um modelo melhorado para as correções padrão utilizadas no alinhamento do tempo gerado a bordo dos satélites com o Tempo *GPS* (medido sobre o geóide), descrito por KOUBA (2004). Neste novo modelo a influência do potencial gravitacional perturbador gerado pelo achatamento terrestre sobre a marcha dos relógios dos satélites *GPS* não é negligenciada. O novo modelo ainda não foi incorporado aos programas computacionais mais utilizados para processamentos de dados *GPS*. Este trabalho inclui também a geração de gráficos e tabelas baseados no

novo modelo e que fornecerão informações sobre a sua relevância para as aplicações geodésicas.

Não há, atualmente, em âmbito nacional, trabalhos acadêmicos, artigos ou livros que abordem em detalhes as correções relativísticas que atuam sobre o *GPS*.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. No segundo encontra-se a revisão da literatura, abordando alguns conceitos fundamentais de: medidas de tempo, sistemas de referência terrestre e celeste, mecânica clássica, dinâmica orbital, princípios de funcionamento do *GPS*, efeitos relativísticos sobre o *GPS*. No terceiro capítulo, seção 3.1, encontram-se detalhados e comentados os recentes desenvolvimentos teóricos sobre as equações de correção padrão, que incluem o potencial perturbador gerado pelo achatamento terrestre nas correções relativísticas. Na seção 3.2 são apresentados os testes com as novas correções e resultados. No capítulo quatro estão as conclusões finais e algumas recomendações.

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

#### 2.1.1. Sistemas de Tempo

Os modelos físicos e numéricos utilizados para a descrição do movimento dos satélites assumem implicitamente que há apenas um sistema de referência e tempo para a equação de movimento. Na prática, entretanto, há uma grande variedade de conceitos e definições de sistemas que são empregados uns com os outros. Os conceitos tradicionais de referência e tempo baseiam-se nos movimentos de rotação e translação da Terra. Mas, enquanto esses conceitos ainda são essenciais para um tratamento cuidadoso das órbitas dos satélites e modelagem de mensurações sobre a superfície da Terra, grandes desenvolvimentos tem sido feitos na direção das escalas de tempo atômicas altamente estáveis e de um sistema de referências idealmente não rotacional amarrado a uma constelação de quasares.

##### 2.1.1.1. Medidas de tempo

Os conceitos e definições envolvidos na determinação do tempo, para uso na descrição dos fenômenos físicos, astronômicos e geodésicos requerem cuidadosa atenção e têm sofrido contínuas revisões e refinamentos.

A duração do dia solar é determinada por duas passagens consecutivas do Sol pelo mesmo meridiano, definida como tendo 86400 s. Em virtude do movimento orbital da Terra em torno do Sol, a ascensão reta do Sol muda em aproximadamente um grau por dia, de tal forma que o dia solar é aproximadamente 4 minutos mais longo do que o período de rotação da Terra. Portanto, o dia sideral, que é o tempo entre duas passagens consecutivas do equinócio vernal pelo mesmo meridiano, tem duração de 23h56m4,1 s.

Mas o Sol real não é apropriado para propósitos de contagem do tempo em função das variações em seu movimento aparente causadas pela excentricidade da órbita da Terra. Então, é conveniente a definição de um Sol Médio, fictício, que se move uniformemente de acordo com um padrão determinado por observações e efemérides analíticas. Isso gera uma escala de tempo denominada *Tempo Universal* (*UT – Universal Time*) ou *Tempo Médio de Greenwich* (*GMT – Greenwich Mean Time*) que foi estabelecida em 1925 como a escala de tempo internacional para propósitos astronômicos e civis.

Em 1960 decidiu-se estabelecer uma nova escala de tempo chamada *Tempo das Efemérides* (*ET – Ephemeris Time*), baseada exclusivamente no movimento orbital dos corpos do sistema solar. As imperfeições no *UT* devidas às irregularidades e variações seculares na rotação da Terra já não satisfaziam mais o grau de precisão e acurácia almejado. No *ET* o tempo é definido como o argumento independente das efemérides lunares e planetárias, caracterizando-o como um protótipo de uma escala de tempo dinâmica, que considera o tempo como uma quantidade física que transcorre contínua e uniformemente nas teorias dinâmicas do movimento.

Após o advento dos relógios atômicos, o *Tempo Atômico* foi introduzido por ser mais acessível em laboratório e livre das deficiências dos modelos dinâmicos. Recentemente, um conjunto de escalas de tempo que leva em conta os efeitos da *Teoria da Relatividade Geral* foi estabelecido e está descrito com as ferramentas de um espaço-tempo quadridimensional (FUKUSHIMA, 1989).

#### 2.1.1.2. Tempo atômico

Em 1960 as irregularidades no padrão de rotação da Terra levaram a uma nova definição do segundo. Antes disso, o segundo era definido como 1/86400 de um dia médio solar. Então, o segundo foi redefinido como sendo uma determinada fração do ano trópico 1900. Essa definição, o “*ephemeris second*”, foi o comprimento oficial do segundo de 1960 até 1967, quando o *segundo atômico*, baseado em uma transição hiperfina do átomo de Césio, foi introduzido. O *ephemeris second* era difícil de medir



e requeria médias anuais. Em oposição, o segundo atômico poderia ser determinado em observações com duração de 1 a 10 dias.

A idéia de um relógio atômico foi concebida no começo dos anos 1940 pelo prêmio Nobel I.I. Rabi. O primeiro relógio atômico construído, baseado na ressonância da molécula de amônia, foi desenvolvido por Harold Lyons no *National Bureau of Standards* (na época com sede em Washington). Sua estabilidade não era muito diferente daquela obtida com a rotação da Terra e não era útil como ferramenta de trabalho, mas foi um importante passo científico e filosófico. No começo dos anos 1950 o grupo de Lyons pesquisava a possibilidade do uso de um feixe atômico de Césio como um padrão atômico de frequência. Esse trabalho pioneiro demonstrava o potencial dos padrões de frequência atômicos altamente acurados, mas não se tornou um relógio operacional por não conter um mecanismo para a contínua e indefinida acumulação dos segundos atômicos.

Foi somente em junho de 1955 que L. Essen e J.V.L. Parry do *National Physical Laboratory* em Teddington, Inglaterra, introduziram o primeiro relógio atômico operacional, também baseado no átomo de Césio. Nos anos seguintes, o contínuo melhoramento em acurácia e uniformidade dos relógios baseados no feixe de Césio tornaram possível uma nova definição do segundo. Então, em outubro de 1967, durante a 13ª. Convocação da *Conferência Geral de Pesos e Medidas*, foi declarado que “o segundo é a duração de 9.192.631.770 períodos de radiação correspondente ao nível de transição hiperfino no estado fundamental do átomo de Césio 133”. Essa definição também foi aceita pela *Convention du Metre* e permanece até o dia de hoje como a definição oficial do segundo para a comunidade científica. Foi uma escolha feliz a do Césio como átomo padrão (ALLAN et al., 1997). Foi muito bem aceita e comercializada. Há atualmente milhares de relógios atômicos de Césio espalhados pelo mundo.

A precisão típica alcançada atualmente com os relógios de Césio varia de  $10^{-12}$  a  $10^{-14}$  com possibilidade de melhora para  $10^{-16}$  (KOUBA, 2004). É interessante comparar isso com a estabilidade da rotação da Terra, em torno de  $10^{-8}$  (0,3 s/ano) e

com a acurácia na determinação do *tempo das efemérides*, em torno de  $10^{-10}$  (0,05s em 10 anos).

No *Bureau International de l'Heure (BIH)* os relógios atômicos começaram a ser usados em 1955 em conjunto com os tradicionais métodos astronômicos de medidas de tempo. A escala de tempo atômico internacional é mantida pela seção *Time Section* do Bureau Internacional de Pesos e Medidas (*BIPM – Bureau International des Poids et Mesures*) em Paris, baseada na leitura de relógios atômicos em um grande número de laboratórios. O *BIH* foi responsável por manter as escalas de tempo atômico até 31 de dezembro de 1987 (SEEBER, 2003).

A unidade de tempo do Tempo Atômico Internacional (*TAI - International Atomic Time*) é definida como o segundo do *SI – Sistema Internacional de Unidades* e sua origem coincide com o Tempo Universal em 1 de janeiro de 1958, de forma que  $ET = TAI + 32,184 s$ .

Além do *TAI*, a escala de tempo atômico estabelecida pelo *GPS*, o Tempo *GPS* (*GPS Time*), tornou-se altamente significativa nos anos de 1990 em função da grande disponibilidade dos receptores *GPS*. Ao lado das aplicações em Geodésia e Navegação, o *GPS* providencia sinais altamente precisos em cronometragem com disponibilidade global e quase-instantânea. O Tempo *GPS* é realizado por um conjunto independente de relógios atômicos e é mantido de forma a seguir o tempo atômico do *United States Naval Observatory (USNO)* com uma acurácia de  $1 \mu s$ , sendo que esse último difere do *TAI* por menos do que  $5 \mu s$ . A origem do tempo *GPS* foi escolhida para coincidir com *UTC* em 6 de janeiro de 1980, isto é, o tempo *GPS* difere do *TAI* de um valor constante:  $GPS = TAI - 19s$ .

### 2.1.1.3. Escalas de tempo relativísticas

Na Mecânica Newtoniana tempo é um conceito absoluto que não depende da posição e movimento do relógio, diferentemente dos conceitos da teoria da relatividade. Nestes, tempos próprios diferentes aplicam-se a cada relógio, que estão relacionados uns com os outros por uma transformação espaço-tempo

quadrimensional. Esta transformação requer o conhecimento da métrica espaço-temporal, que, por sua vez, depende da posição e movimento das massas gravitacionais. Dentro do sistema solar, uma aproximação pós-Newtoniana de primeira ordem (FUKUSHIMA, 1989) é geralmente adequada para o tratamento dos efeitos relativísticos pois as massas e potenciais gravitacionais envolvidos são moderados.

Nas vizinhanças da Terra (até 50.000 Km do geocentro) é possível escolher um sistema não rotacional para as coordenadas espaço-temporais quadridimensionais ( $x^0 = ct$ ,  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ ) de tal forma que o intervalo invariante (distância espaço-temporal entre dois eventos) é dado por (MONTENBRUCK e GILL, 2000):

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)(dx^0)^2 + \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx)^2. \quad (2.1)$$

Aqui  $c = 299792458$  m/s é a velocidade da luz,  $\tau$  é o tempo próprio (em oposição ao tempo coordenado  $t$ ) e  $U$  é a soma do potencial gravitacional gerado pela Terra e o das marés gravitacionais geradas pelo Sol, Lua, etc. A equação (2.1) implica que a marcha de um relógio em repouso na superfície da Terra difere da marcha do tempo coordenado por um fator de (MONTENBRUCK e GILL, 2000):

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{2U}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{GM_T}{R_T c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \approx 1 - 7 \times 10^{-10}, \quad (2.2)$$

onde  $v \approx \omega_T R_T \cos \varphi$  é a velocidade do relógio no sistema não rotacional para uma dada latitude  $\varphi$ ;  $\omega_T$  é a velocidade angular de rotação da Terra e vale  $0,7292115 \cdot 10^{-4}$  rad/s;  $R_T$  é o raio da Terra e é igual a 6378,137 Km. Da mesma forma, relógios a diferentes altitudes apresentarão diferentes tempos próprios e marcha.

A diferença conceitual entre tempo próprio e tempo coordenado levou a *International Astronomical Union (IAU)* a adotar duas diferentes escalas de tempo a partir de 1992, denominadas: *Terrestrial Time (TT)* e *Geocentric Coordinate Time*

*TCG*. A unidade de tempo do *TT* é o **segundo do SI medido sobre o geóide** e providencia uma continuação do *Ephemeris Time*:  $TT = TDT = ET = TAI + 32,184 \text{ s}$ .

Aqui *TDT* é o *Terrestrial Dynamical Time*. A palavra *dynamical* é usada para enfatizar sua natureza como o argumento das teorias dinâmicas do movimento em contraste com as escalas de tempo atômicas governadas pelas leis da mecânica quântica. Atualmente, o *Terrestrial Time* é derivado verdadeiramente da escala de tempo atômico *TAI*.

O *Geocentric Coordinate Time (TCG)*, em contraste, representa a coordenada temporal de um sistema de referências quadridimensional e difere do *TT* por um fator de escala constante:  $1 - L_G$ , onde  $L_G = 6.9692903 \times 10^{-10}$ .

Por convenção, *TCG* concorda com *TT* em 1 de janeiro de 1977, formando a relação:  $TCG = TT + L_G(JD - 2443144,5) \times 86400 \text{ s}$ .

Na época J2000, a diferença  $TCG - TT$  era em torno de 0,5 s.

Em adição ao *TCG*, o *Barycentric Coordinate Time (TCB)* foi introduzido para descrever o movimento dos corpos do sistema solar num sistema de referência relativístico não rotacional com origem no baricentro do sistema solar. Ambas as escalas estão definidas para concordarem em 1 de janeiro de 1977 com o *TAI*, mas exibem uma diferença na marcha dada por (MONTENBRUCK e GILL, 2000):

$$\frac{d(TCB - TCG)}{dTCG} \approx \frac{GM_S}{a_u c^2} + \frac{v_T^2}{2c^2} \approx \frac{3}{2} \frac{GM_S}{ac^2} \approx 1,5 \cdot 10^{-8}, \quad (2.3)$$

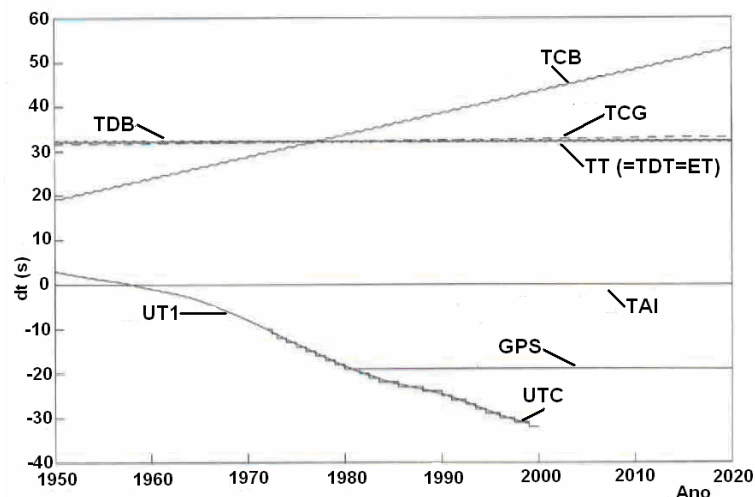
que depende do potencial gravitacional do Sol na distância média Terra-Sol  $a_u = 1 \text{ AU}$  e da velocidade orbital da Terra  $v_T$ . Devido à excentricidade da órbita da Terra e às conseqüentes variações da distância e velocidade heliocêntricas, uma transformação rigorosa entre *TCB* e *TCG* envolve termos periódicos adicionais.

*TCB* substitui uma escala de tempo conhecida como *Barycentric Dynamical Time (TDB)* que foi introduzida pelo *IAU* em 1976 e definida de forma a diferir do *TDT* (agora *TT*) somente por termos periódicos.

Estão relacionadas por:  $TCB = TDB + L_B \cdot (JD - 2443144,5) \cdot 86400 \text{ s}$ , onde a diferença de escala  $L_B = 1,5505197487 \times 10^{-8}$ .

A definição do  $TDB$  parece ser útil, à primeira vista, em função da pequena amplitude da diferença temporal entre  $TDB-TT$ , mas há uma implicação sutil para modelos da dinâmica do sistema solar. Enquanto as equações pós-Newtonianas não dependem do uso do  $TCB$  ou  $TDB$ , o comprimento do segundo no  $TDB$  é maior do que o segundo do  $TCB$  por um fator  $L_B$ . Com o propósito de manter inalterado o valor numérico adotado para a velocidade da luz ( $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ ) o comprimento do metro também é diferente nos sistemas  $TCB$  e  $TDB$ . Do mesmo modo, quantidades derivadas como as massas do Sol, Terra e planetas são afetadas por essa diferença de escala.

FIGURA 2.1 – DIFERENÇAS ENTRE AS DIVERSAS ESCALAS DE TEMPO



FONTE: adaptada de MONTENBRUCK E GILL (2000)

A figura 2.1 mostra a diferença entre as escalas de tempo atômica, dinâmica e solar desde 1950 até 2020. Os termos periódicos em  $TCB$  e  $TDB$  foram exagerados por um fator 100 para melhor visualização.

Em suma, atualmente as seguintes escalas de tempo são de primeira relevância na modelagem de precisão da órbita de satélites e uso do  $GPS$ :

1. Tempo Terrestre (*Terrestrial Time - TT*), uma escala de tempo conceitualmente uniforme que seria medido por um relógio ideal na superfície do geóide. *TT* é medido em dias de 86400 segundos do *SI* e é usado como o argumento independente das efemérides geocêntricas.
2. Tempo Atômico Internacional (*International Atomic Time - TAI*), que fornece a realização prática de uma escala de tempo uniforme gerada por relógios atômicos e concorda com o *TT* exceto por uma diferença constante de 32,184 s e pelas imperfeições apresentadas pelos relógios.
3. Tempo GPS (*GPS Time*), o qual, da mesma forma que o *TAI*, é uma escala de tempo atômico, mas que é realizada por um conjunto diferente de relógios e apresenta outro valor constante de desvio em relação ao *TT*.
4. Tempo Sideral Médio Greenwich (*Greenwich Mean Sidereal Time - GMST*), o ângulo horário entre o meridiano de Greenwich e o equinócio vernal.
5. Tempo Universal (*Universal Time - UT1*), realização atual do tempo médio solar, que é derivada à partir do *GMST* por uma relação convencional.
6. Tempo Universal Coordenado (*Coordinated Universal Time - UTC*), que está amarrado ao Tempo Atômico Internacional exceto por um número inteiro de segundos cujo número é regularmente atualizado para manter *UTC* em estreita concordância com o *UT1*.

### 2.1.2. Sistemas de Referência Celeste e Terrestre

Um sistema de referências quase-inercial ou Newtoniano, que se move com o centro de massa da Terra, mas está livre de rotação, é utilizado para descrever a equação do movimento para a órbita dos satélites. Por outro lado, a observação desses satélites e de suas transmissões é realizada normalmente na superfície da Terra em rotação. Para comparar medidas efetuadas em solo (sistema em rotação) com a posição computada para o satélite (sistema inercial), é necessária uma definição clara de sistemas de referência terrestre e celeste e das relações entre eles.

No sistema celeste de referências convencional (*CCRS*), não rotacional, o eixo *X* aponta para o equinócio vernal médio às 12h *TDB* em 1° de janeiro de 2000; o eixo *Z* aponta na direção do pólo norte celeste médio, para essa mesma época, e o eixo *Y* completa o sistema dextrógiro. O sistema é realizado por um catálogo de coordenadas equatoriais (ascensão reta e declinação) de fontes de rádio extra-galácticas – *quasars* (*quase stelar radio source*). Um exemplo de realização do *CCRS* é o referencial estabelecido pelo *IERS* (*International Earth Rotation Service*) denominado *ICRF – IERS Celestial Reference Frame*. É um sistema geocêntrico.

Já o sistema terrestre de referências convencional (*CTRS*) é um sistema fixo à Terra, isto é, rotaciona com ela. É geocêntrico e o centro de massa é definido pela inclusão dos oceanos e atmosfera. Sua orientação é dada pelo *BIH* (*Bureau International de l'Heure*), na época 1984,0. A escala corresponde à de um sistema de referências terrestre: está diretamente relacionada com a referência de tempo utilizada. Para a determinação das órbitas dos satélites com alta precisão, os efeitos relativistas devem ser levados em consideração. O eixo *Z* aponta na direção do pólo terrestre convencional *CTP*, o eixo *X* aponta para a direção média do meridiano de Greenwich e o eixo *Y* completa o sistema dextrógiro.

A realização do *CTRS* é composta por um catálogo de coordenadas e velocidades de um grupo de estações *IERS* e denominado *ITRF* (*International Terrestrial Reference Frame*). Essas estações têm sido levantadas por diferentes tecnologias: *VLBI* (*Very Long Baseline Interferometry*), *SLR* (*Solar Laser Range*), *DORIS* (*Doppler Orbitography and Radio Positioning Integrated by Satellite*) e *GPS*. Cada uma das realizações é designada por *ITRF-yy*. O número *yy* especifica os dois últimos dígitos do último ano cujos dados contribuíram com a realização em consideração. Exemplos: *ITRF-88*, *ITRF-97*.

### 2.1.2.1. Transformações entre sistemas celeste e terrestre

A transformação entre o *CCRS* e o *CTRS* é feita através de uma seqüência de rotações que levam em consideração a precessão, nutação, rotação e orientação da Terra, incluindo o movimento do pólo.

Precessão e nutação são efeitos resultantes da atração gravitacional do Sol e da Lua sobre a protuberância equatorial da Terra. O movimento total resultante pode ser decomposto em uma componente principal secular (precessão) e em outra secundária periódica (nutação). Em função desse efeito, o eixo de rotação da Terra e seu plano equatorial não estão fixos no espaço, mas rotacionam em relação a um sistema inercial, como o *CCRS*. Quando somente o efeito da precessão é considerado, o equador e o ponto vernal são denominados equador médio e ponto vernal médio, e têm-se, neste caso o sistema celeste de referência médio. Quando também a nutação é considerada, têm-se o equador e o ponto vernal verdadeiros, correspondendo ao sistema de referência celeste verdadeiro. O movimento do pólo é a rotação do pólo celeste verdadeiro em relação ao pólo de um sistema de referência convencional fixo à Terra. Isso ocorre em virtude das propriedades elásticas da Terra e sua interação com a atmosfera. Os parâmetros de orientação da Terra são determinados empiricamente. Atualmente o *IERS* realiza essa função utilizando observações astronômicas de longo período e diversas tecnologias, como *VLBI*, *SLR*, *LLR* e *GPS*. Uma descrição detalhada das matrizes de transformação entre os sistemas celeste e terrestre pode ser encontrada em SEEBER (1993).

### 2.1.2.2. O sistema WGS-84

O *World Geodetic System – 1984 (WGS-84)* é o sistema de referência dos satélites *GPS*, e foi desenvolvido pelo *US Department of Defense (DoD)*. Foi definido pela adoção de coordenadas cartesianas para as estações monitoras *GPS*, obtidas por meio de medidas *Doppler*. O sistema *WGS-84* é materializado através das efemérides



dos satélites *GPS*. Alguns dos parâmetros mais importantes do *WGS-84* estão listados na tabela 2.1.

TABELA 2.1 – ALGUNS DOS PRINCIPAIS PARÂMETROS DO *WGS-84*

Parâmetro	Símbolo	Valor
Semi-eixo maior	$a_E$	6378137 m
Achatamento recíproco	$1/f$	298,257223563
Velocidade angular	$\omega_E$	$7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
Constante gravitacional	GM	$398600,5 \text{ Km}^3 \text{ s}^{-2}$
Segundo harmônico zonal	$J_2$	0,00108262998905

### 2.1.3. Alguns Conceitos de Mecânica Clássica

Neste capítulo será feita uma rápida explanação da expansão do potencial gravitacional terrestre em harmônicos esféricos. Segue a seqüência padrão da maioria dos textos que tratam do assunto. Mais detalhes são encontrados em KAULA (1966), SEEBER (1993) e FERREIRA (1998).

Assume-se que a Terra é composta por partículas que estão conglomeradas de maneira a formar um corpo contínuo de densidade  $\rho(x,y,z)$  e massa total  $M$ . Considera-se agora uma massa puntual  $m$  situada a uma distância  $r$  da distribuição de massas da Terra. Então, o potencial gravitacional de atração mútua entre os dois corpos é obtido através da integração sobre o volume total da Terra. Consequentemente, o potencial, no local onde  $m$  está localizada é:

$$U = -G \int_V \frac{\rho(x,y,z)}{r} dV. \quad (2.4)$$

Aqui  $U$  é naturalmente escolhido como negativo, porque é necessário aplicar um trabalho para escapar do campo gravitacional da Terra. Isto é contrário ao que se adota usualmente em Geodésia, onde o potencial é tomado como positivo.

Pode ser mostrado que o potencial é uma função harmônica e satisfaz a equação de Laplace (KAULA, 1966):

$$\nabla^2 U = 0. \quad (2.5)$$

Segue-se então que o potencial pode ser expandido em uma série de harmônicos esféricos:

$$U = -\frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_E}{r} \right)^n P_{nm}(\cos \theta) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right\}, \quad (2.6)$$

onde  $\theta$  é a co-latidade, e  $\lambda$  é a longitude. A constante  $GM$  vale  $3,9860047 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ , e  $a_E$  é o raio da Terra, e vale  $6378137 \text{ m}$ ;  $P_{nm}$  são os polinômios associados de Legendre de grau  $n$  e ordem  $m$ . Os coeficientes  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  são chamados de *coeficientes dos harmônicos esféricos* e são funções das dimensões, formato e distribuição de massas da Terra e têm sido estimados pelos métodos da Geodésia por Satélite. O somatório sobre  $n$  começa em 2 porque a zero-ésima contribuição resulta 1, e escolhendo-se a origem do sistema de coordenadas de forma a coincidir com o centro de massas da Terra, segue-se que  $C_{11} = S_{11} = 0$ .

#### 2.1.4. Introdução à Dinâmica Orbital

Nesse capítulo serão mostrados, de forma sucinta, alguns desenvolvimentos clássicos de dinâmica orbital que são necessários em Geodésia por Satélite. Para maiores detalhes consultar KAULA (1966), FERREIRA (1998) e MONTENBRUCK e GILL (2000).

### 2.1.4.1. Órbita Kepleriana

Uma das características fundamentais da órbita de um satélite é sua altitude. A escolha da altitude determina em grande parte as finalidades do satélite. Uma classificação convencional é mostrada na tabela 2.2.

TABELA 2.2 – CLASSIFICAÇÃO DOS SATÉLITES SEGUNDO SUA ALTITUDE

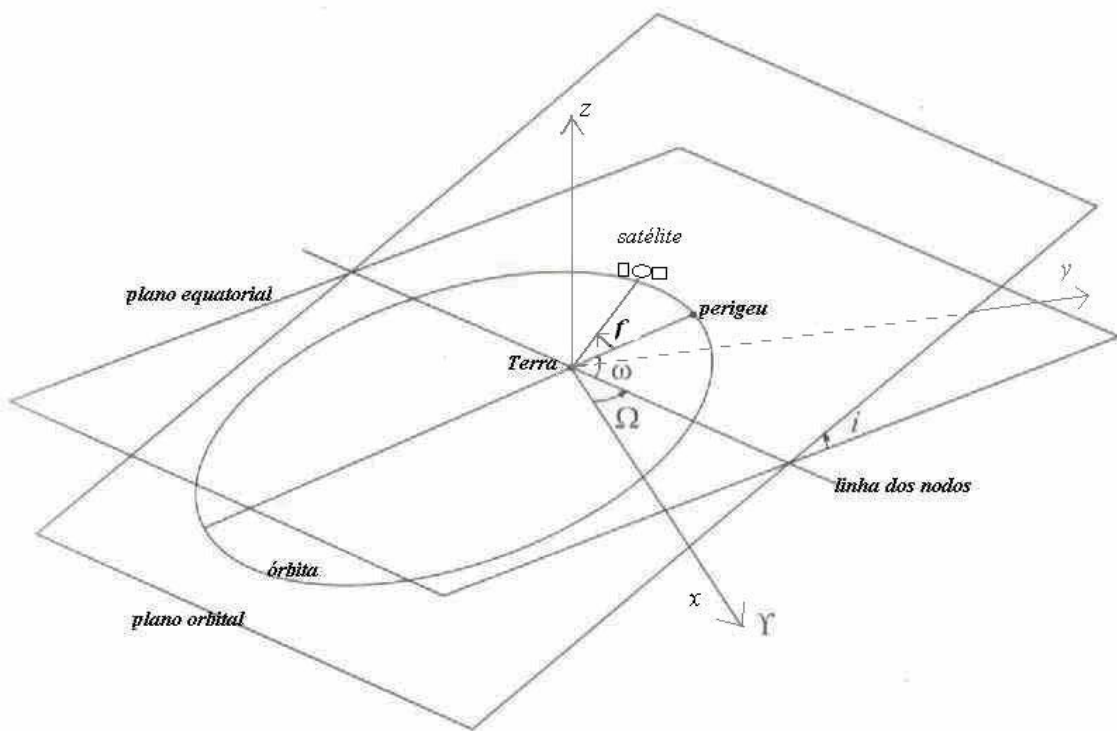
Categoria	Sigla	Altitude	Exemplo
Órbita próxima da Terra	NEO - <i>Near Earth Orbit</i>	150 Km – 500 Km	ônibus espacial
Órbita baixa da Terra	LEO - <i>Low Earth Orbit</i>	500 Km – 1500 Km	CHAMP
Órbita média da Terra	MEO - <i>Medium Earth Orbit</i>	5000 Km – 15000 Km	ICO
Órbita alta da Terra	HEO - <i>High Earth Orbit</i>	20000 Km – 50000 Km	GPS/Glonass Galileo
Órbita Geo-estacionária	GEO - <i>Geo-stationary Orbit</i>	35786 Km	satélites de comunicações

FONTE: adaptado de GULKLETT (2003)

Uma outra característica importante da órbita de um satélite é sua inclinação  $i$ . O ângulo de inclinação  $i$  é medido com respeito ao plano equatorial ao nodo ascendente quando o satélite cruza o equador do hemisfério sul para o hemisfério norte, conforme mostra a figura 2.2. A órbita é chamada direta se  $0 < i < \pi/2$ , por que ele revoluciona no mesmo sentido da rotação da Terra. Se a inclinação excede  $\pi/2$  a órbita é chamada retrógrada e se  $i = 0$  ou  $i = \pi/2$  então a órbita é equatorial ou polar, respectivamente. O eixo  $x$  está direcionado para o ponto vernal  $\Upsilon$ . O ângulo  $\Omega$  é chamado de ascensão reta do nodo ascendente, e descreve o ângulo entre o equinócio vernal e a linha nodal, interseção do plano da órbita com o equador;  $\omega$  é chamado de argumento do perigeu, e descreve o ângulo entre a direção do nodo ascendente e o perigeu. O ângulo  $\Omega$  difere de  $\Omega_0$ , longitude do nodo ascendente, que é o parâmetro orbital disseminado nas efemérides transmitidas pelos satélites *GPS* (ver Anexo 1).

Considera-se agora um satélite em uma órbita elíptica Kepleriana na qual o momento angular orbital é uma constante do movimento (SEEBER, 1993), (FERREIRA, 1998). Isso implica que a órbita é realizada sobre um plano. Esse plano é chamado *orbital*. Outra quantidade física conservada é a energia mecânica total  $e$ , a partir disso, segue-se que a velocidade pode ser expressa como:

FIGURA 2.2 – OS ELEMENTOS ORBITAIS  $i$ ,  $\Omega$  e  $\omega$  de um satélite



FONTE: adaptada de MONTENBRUCK e GILL (2000)

$$v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (2.7)$$

A equação (2.7) é a chamada equação *vis viva*. Aqui,  $r$  é o módulo do raio vetor e  $a$  representa o semi-eixo maior da elipse orbital. Para expressar a dependência temporal da órbita, é útil definir um círculo auxiliar, que circunscreve a elipse orbital

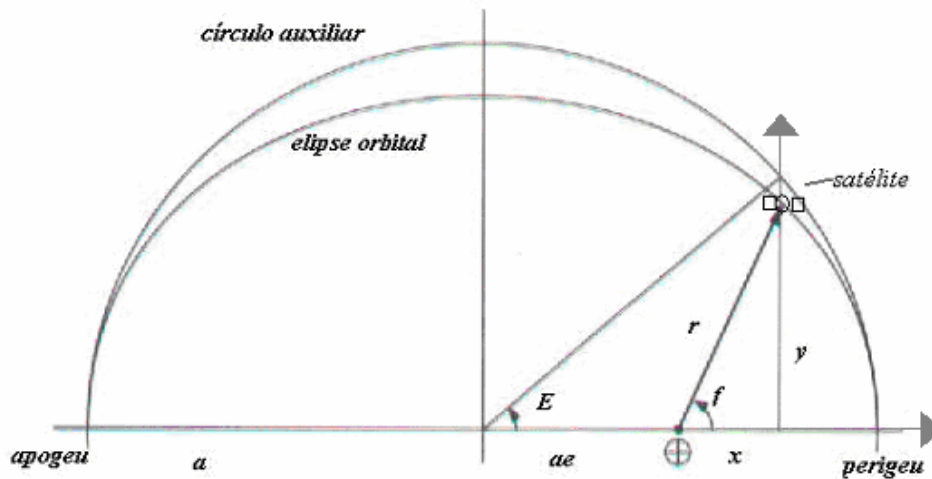
conforme mostra a figura 2.3. Para esse propósito, uma variável auxiliar  $E$ , chamada *anomalia excêntrica* é definida, através das equações:

$$x = r \cos f = a(\cos E - e), \quad (2.8)$$

$$y = r \sin f = a(1 - e^2)^{1/2} \sin E. \quad (2.9)$$

O ângulo  $f$  é a chamada *anomalia verdadeira*.

FIGURA 2.3 – DEFINIÇÃO DA ANOMALIA EXCÊNTRICA  $E$



FONTE: adaptado de MONTENBRUCK e GILL (2000)

O raio vetor  $r$  pode ser, então, expresso através de  $E$ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = a(1 - e \cos E). \quad (2.10)$$

Da geometria da órbita têm-se:

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad (2.11)$$

$$\operatorname{sen} f = \frac{\sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} E}{1 - e \cos E}. \quad (2.12)$$

Relacionando-se as equações (2.11) e (2.12) determina-se a anomalia verdadeira  $f$  em termos da anomalia excêntrica  $E$ . A relação entre  $f$  e  $E$  também pode ser expressa através da equação:

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (2.13)$$

Como a função tangente tem um período de  $180^\circ$ , deve-se ter cuidado com as ambigüidades em quadrante na equação (2.13).

Uma terceira anomalia usada em Dinâmica Orbital é a *anomalia média*  $M$ , definida pela equação:

$$M = n(t - t_p) = E - e \operatorname{sen} E, \quad (2.14)$$

que é conhecida como Equação de Kepler, onde

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \quad (2.15)$$

é o movimento angular médio do satélite e  $t_p$  é o tempo de passagem pelo perigeu.

Como a equação de Kepler é transcendente, não pode ser resolvida analiticamente. Na prática, um método numérico deve ser usado. Para pequenas excentricidades, uma solução aproximada é (SEEBER, 1993):

$$E = M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M + \frac{1}{8} e^3 (3 \sin 3M - \sin M) + \dots \quad (2.16)$$

As grandezas  $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$  são os chamados elementos orbitais ou Keplerianos, e eles especificam completamente a órbita do satélite. A dimensão e formato da órbita são especificados pelo semi-eixo maior  $a$  e pela excentricidade  $e$ . A orientação do plano orbital é especificada pela inclinação  $i$  e pela ascensão reta do nodo ascendente  $\Omega$ . A orientação da órbita em seu próprio plano orbital é especificada pelo argumento do perigeu  $\omega$ . Finalmente, a dependência temporal da órbita é especificada pela anomalia média  $M$  em uma dada época  $t_e$ . Esses seis parâmetros são equivalentes a especificar a posição inicial e velocidade num sistema de referência cartesiano.

#### 2.1.4.2. Forças perturbadoras

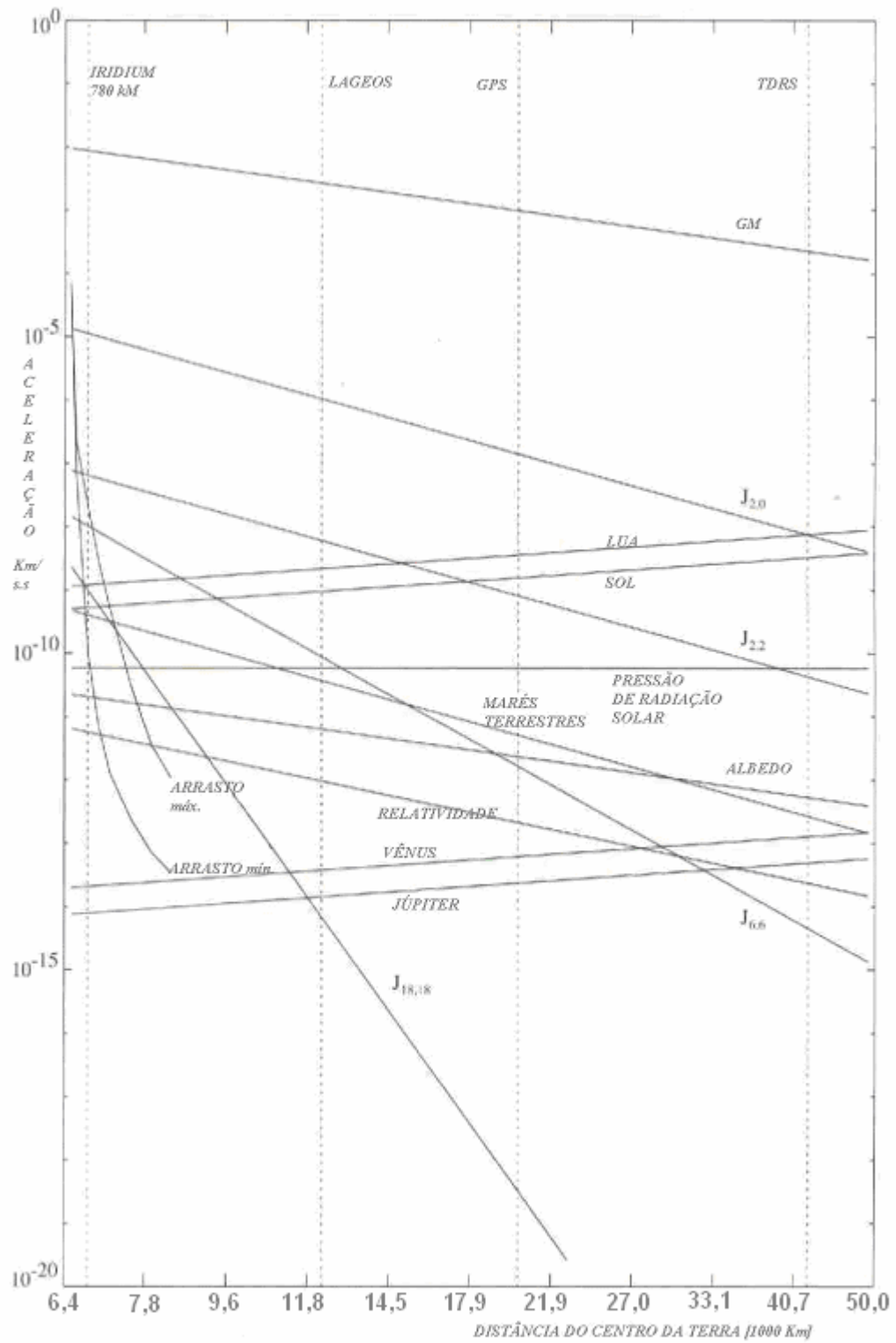
Nessa seção serão consideradas algumas das forças que produzem perturbações nas órbitas dos satélites.

Na figura (2.4) está representada a ordem de grandeza de várias forças perturbadoras, como função da distância radial ao centro de massa da Terra.

A força mais significativa provém da atração gravitacional e um tratamento baseado na órbita Kepleriana é uma boa aproximação da órbita verdadeira. As principais perturbações sobre a órbita provêm do potencial gravitacional da Terra, arrasto atmosférico, pressão de radiação solar e forças gravitacionais geradas pelo Sol e pela Lua.

A altitude de um satélite determina qual força perturbadora terá mais influência sobre a órbita. Arrasto atmosférico tem grande influência na órbita dos satélites de órbitas baixas. Pressão de radiação solar pode ser uma força perturbadora importante para satélites de comunicações geoestacionários, *GPS*, *GLONASS* (*Global Navigation Satellite System*), que possuem grandes painéis solares.

FIGURA 2.4 – FORÇAS PERTURBADORAS SOBRE A ÓRBITA DOS SATÉLITES



FONTE: adaptado de MONTENBRUCK E GILL (2000)



### 2.1.5. Introdução ao Sistema de Posicionamento Global *GPS*

O *GPS* consiste basicamente de três segmentos: espacial, de controle e do usuário. O segmento espacial é composto nominalmente por 24 satélites, quatro em cada um de seis planos orbitais, inclinados de 55 graus em relação ao plano equatorial da Terra. Os satélites estão colocados de tal forma que, de qualquer lugar da Terra, em qualquer horário, pelo menos quatro estão visíveis acima do horizonte. Orbitam a aproximadamente 20.000 Km acima da superfície da Terra, com período de 11 horas e 58 minutos. Cada satélite carrega um ou mais relógios atômicos muito estáveis, de tal forma que possam transmitir sinais codificados sincronizados. Os dados codificados transmitidos informam sobre o tempo de transmissão e posição do satélite.

O segmento de controle compreende uma rede de estações terrestres que rastreia os satélites e monitora os seus sinais. Esses dados são enviados para a *Master Control Station* em *Colorado Springs, CO*, que os analisa, processa, projeta efemérides e o comportamento dos relógios, e os reenvia para os satélites introduzindo correções em seus elementos orbitais e no relógio. Dessa forma, as informações transmitidas pelos satélites são atualizadas e mantêm-se acuradas.

O segmento do usuário consiste de todos os usuários, civis e militares, que, por intermédio dos sinais recebidos, estão capacitados a determinar sua posição, velocidade e tempo nos relógios locais. O sistema *GPS* é afetado por diversos erros (ver anexo 5).

Além das óbvias aplicações civis e militares, o sistema também vem sendo utilizado em muitas outras como: monitoramento de placas tectônicas, previsão de terremotos, detecção de falhas em grandes redes elétricas, navegação espacial, transações financeiras, testes em física fundamental, agricultura e outros.

#### 2.1.5.1. Princípio físico fundamental do *GPS*

Sejam quatro relógios atômicos (assumidos como ideais), sincronizados, que transmitem pulsos eletromagnéticos bem definidos e individualmente

identificados, à partir das posições  $\vec{r}_j$ , nos instantes  $t_j$ , com  $j = 1, 2, 3, 4$  (conhecidos através das efemérides transmitidas pelos satélites que contém os relógios). Supondo que esses quatro sinais sejam recebidos simultaneamente na posição  $\vec{r}$  no instante  $t$ , pelo princípio da constância da velocidade da luz,  $c$ , pode-se escrever (SEEBER, 1993), (ASHBY, 2003):

$$c^2(t - t_j)^2 = |\vec{r} - \vec{r}_j|^2, \text{ com } j = 1, 2, 3, 4, \quad (2.17)$$

onde  $c$  vale 299792458 m/s.

Estas quatro equações contém as quatro incógnitas posição e tempo do receptor *GPS*,  $\{\vec{r}, t\}$ , que ficam, assim, determinadas. Portanto, o princípio da constância de  $c$  é o conceito fundamental no qual o *GPS* está fundamentado. Deve-se observar que erros na determinação do tempo de 1 nanossegundo levam a erros de posicionamento na ordem de 30 cm. A equação (2.17) é válida somente no sistema inercial *ECI* (*Earth Centered Inercial Frame*) pois para sistemas rotacionais a luz não percorre uma linha reta e sim, espirais (ASHBY, 2002).

Esses cálculos são feitos pelo microprocessador embutido no receptor *GPS*. Inicialmente, o software no receptor estima o tempo de viagem dos pulsos emitidos pelos satélites subtraindo o tempo de recepção registrado em seu próprio relógio daquele indicado pelo relógio do satélite no momento da transmissão. Então, o processador multiplica esses intervalos de tempo pela velocidade da luz para obter as distâncias  $R_1, R_2, R_3, R_4$ . Somente três dessas distâncias seriam necessárias para determinar a posição do usuário.

Entretanto, o receptor emprega um relógio de quartzo bem mais simples do que os relógios atômicos dos satélites, causando erros de cronometragem que se refletem no cálculo de  $R_1, R_2, R_3, R_4$ , que, por esse motivo, são chamadas de *pseudodistâncias*. Mas, como o erro no relógio do receptor é o mesmo para as quatro pseudodistâncias, é possível determinar matematicamente esse erro com a quarta das equações (2.17). Esse

quarto sinal capacita um receptor *GPS* qualquer a processar sinais como se ele contivesse um relógio atômico.

#### 2.1.5.2. *GPS* e medidas de tempo

Quase todos os relógios existentes funcionam com base num mesmo princípio. Existe um oscilador que vibra em intervalos de tempo regulares e um contador, que converte essas oscilações em segundos. Os primeiros relógios foram os mecânicos, que possuíam um pêndulo como elemento oscilante, e diversas engrenagens e mecanismos que contavam os segundos. Depois de décadas de avanços, surgiram os eletro-mecânicos (de cristais de quartzo), muito utilizados em relógios de pulso. Por último, surgiram os atômicos, que são dispositivos quantum-mecânicos, nos quais um fóton é absorvido pelo elétron da última camada do átomo de césio. Após absorver este fóton, o elétron emite um outro pulso eletromagnético que é contado e convertido em segundos.

A capacidade de medir o tempo vem progredindo de uma forma impressionante. Atualmente o segundo pode ser medido com uma precisão de 14 casas decimais, mil vezes maior do que qualquer outra unidade fundamental. Os relógios nos satélites *GPS* marcam o tempo com um erro equivalente a uma parte em  $10^{13}$ , e a medida padrão de tempo nos Estados Unidos é feita por um relógio instalado em 1999 que tem um erro equivalente a uma parte em  $10^{15}$ . Prevê-se que em futuro próximo seja enviado à Estação Espacial Internacional um relógio com erro inferior a uma parte em  $10^{17}$  (BLANCHET et al., 2001). Novas tecnologias baseadas em átomos de cálcio ou íons de mercúrio podem tornar possível a construção de relógios com erro inferior a uma parte em  $10^{18}$ . Relógios assim exigiriam uma redefinição do segundo, que é baseada, desde 1967, num determinado número de transições de nível hiperfino do átomo de césio. A utilização de relógios tão precisos deve levar em conta efeitos relativísticos: dilatação do tempo para relógios em movimento em relação a um referencial inercial e diferença de potencial gravitacional entre relógios a diferentes alturas. Relógios com precisão na ordem dos  $10^{-17}$  detectariam esses efeitos até mesmo para baixas

velocidades como 5 Km/h ou diferenças de altura de dez centímetros (ALLAN et al., 1997).

#### 2.1.6. GPS e Relatividade

Medidas de tempo acuradas são o “coração” do sistema *GPS*. Em virtude do alto desempenho e acurácia dos relógios à bordo dos satélites, medidas de pseudodistâncias podem ser efetuadas na ordem de nanossegundos e a fase da portadora no nível do centímetro. Isso, associado ao fato de que os satélites *GPS* possuem alta velocidade (aproximadamente 4 Km/s), de que há uma diferença de potencial gravitacional não negligenciável entre satélites e usuários, e que há diferentes sistemas de referência (inercial para os satélites, rotacional para os usuários) envolvidos no processo, fazem do *GPS* um dos primeiros sistemas operacionais (além dos aceleradores de partículas) onde os efeitos da relatividade geral e especial são significativos e devem ser levados em conta. Erros relativísticos no *GPS* são muito maiores do que uma parte em  $10^{13}$ . De fato, o sistema *GPS* não seria operacional se esses efeitos não fossem contabilizados, pois, apesar de pequenos quando comparados com outras fontes de erro envolvidas, os erros relativísticos são cumulativos em função da inexorável passagem do tempo (ASHBY, 2002).

##### 2.1.6.1. Relógios em solo

Em virtude dos relógios em solo estarem sujeitos a um campo gravitacional e, em alguns casos, terem outro movimento além daquele da rotação da Terra, estão sujeitos a desvios de frequência devidos a efeitos gravitacionais e ao efeito Doppler de 2ª. ordem (dilatação temporal). Um desvio na frequência do padrão de vibração de um relógio implica em alteração da sua marcha e acompanhamento do tempo, e consequente dessincronização com outros relógios. Isso depende basicamente de:

- a) movimento dos relógios,

- b) relógios a diferentes alturas em relação a uma superfície de referência (geóide),
- c) direção dos movimentos (em relação à rotação da Terra).

A sincronização de relógios na superfície da Terra deve levar em conta o fato de que o “tempo próprio” de cada um dos relógios, em seu próprio referencial, difere ligeiramente. Os tempos envolvidos na equação (2.17) devem ser provenientes de um esquema auto-consistente de sincronização para que ela seja válida. Para isso, uma rede de relógios deve satisfazer duas importantes relações (ASHBY, 1994):

- a) reflexividade: Se o relógio A está sincronizado com o relógio B, então, B está sincronizado com A;
- b) transitividade: Se o relógio A está sincronizado com o relógio B, e o relógio B está sincronizado com o relógio C, então, A está sincronizado com C.

Em um referencial inercial, relógios podem ser sincronizados pelo *procedimento de Einstein*, que leva em conta o atraso  $l/c$  entre a transmissão e recepção de um sinal que percorre a distância  $l$  entre dois relógios. Um procedimento equivalente é necessário para sincronização através de deslocamento de relógios atômicos padrão.

No *GPS* essa sincronização é realizada através da adoção de *tempo coordenado*  $t$ . Basicamente supõe-se que não há campo gravitacional envolvido e que relógios-padrão hipotéticos estariam em repouso em relação a um referencial não rotacional subjacente, mas com origem no centro de massa da Terra. Em cada ponto desse referencial subjacente haveria um relógio-padrão fictício sincronizado com os outros pelo procedimento de Einstein, todos os relógios marchando no mesmo ritmo para manter a sincronização.

Para o conjunto de relógios reais (alguns em movimento) sobre a superfície da Terra em rotação, aplicam-se correções, baseadas em suas posições e velocidades conhecidas, para que eles concordem instantaneamente com um relógio fictício subjacente. Isso gera um *tempo coordenado*. O tempo *GPS* é mantido por um

conjunto de 50 relógios atômicos de Césio e 12 *masers* de Hidrogênio, coordenados pelo *US Naval Observatory*.

Considera-se agora o campo gravitacional da Terra. Nas suas vizinhanças, e, considerando-se um sistema de referências inercial ligado ao seu centro de massa, o intervalo invariante  $ds^2$  da relatividade geral pode ser escrito aproximadamente como (ASHBY, 2002):

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)(cdt')^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.18)$$

onde  $\Phi < 0$  é o potencial gravitacional Newtoniano. A variável  $t'$  na equação (2.18) se refere ao tempo coordenado, com os relógios padrão de referência situados no infinito;  $x, y, z$  são as coordenadas no sistema inercial.

Entretanto, o padrão do Tempo Atômico Internacional (*TAI*) é baseado em relógios em repouso ao nível do mar, e estão sujeitos a efeitos relativísticos (desvio Doppler de 2ª. Ordem e desvio gravitacional para o vermelho) em relação aos relógios situados a 20.000 Km acima do nível do mar. As duas diferentes variáveis  $t'$  e  $t$  podem ser reconciliadas através de uma mudança de escala. A variável temporal  $t$  verdadeiramente utilizada no tempo *GPS* está relacionada com o tempo coordenado  $t'$  da equação (2.18) por (ASHBY, 2002):

$$t' = t \left(1 - \frac{U}{c^2}\right), \quad (2.19)$$

onde  $U$  é uma constante que inclui efeitos gravitacionais devidos a distribuição de massas da Terra e efeitos rotacionais. É um fato extremamente útil que a superfície idealizada para o nível médio dos mares – o geóide – é uma equipotencial gravitacional no sistema rotacional, pois, dessa forma, todos os relógios-padrão sobre ela marcham no mesmo ritmo. Relógios-padrão sobre a superfície da Terra, que não estão sobre o geóide, devem receber correções.

### 2.1.6.2. Efeito *Sagnac*

A passagem de um sistema de referência inercial para outro rotacional faz aparecer um efeito relativístico chamado *efeito Sagnac* (ver Anexo 2). Esse efeito é a base dos giroscópios *laser* utilizados em navegação aérea. No *GPS*, ele pode produzir discrepâncias de centenas de nanossegundos. (Lembrar que, em um nanossegundo, a luz percorre aproximadamente 30 cm).

Considerando-se sinais eletromagnéticos propagando-se de oeste para leste, ao longo do equador, e dando uma volta completa em torno da Terra, com o objetivo de sincronizar relógios, observa-se, ao final do percurso, uma discrepância na sincronização de aproximadamente + 200 ns. Se for tentada uma sincronização no sentido oposto, a discrepância terá sinal contrário. Um experimento dessa forma foi realizado utilizando-se sinais de satélites *GPS* em visualização simultânea por três observatórios remotamente situados em torno da Terra. A experiência confirmou a teoria da relatividade com grande precisão (ASHBY et al., 1985).

O *Efeito Sagnac* também ocorre com relógios atômicos que são deslocados de uma estação em solo para outra. HAFELE e KEATING (1972), utilizando aviões à jato comerciais e relógios atômicos portáteis, juntamente com relógios padrão em repouso sobre a superfície da Terra, circundaram o planeta e verificaram o efeito sobre os relógios. A ordem de grandeza do efeito *Sagnac* para relógios atômicos e sinais eletromagnéticos é a mesma.

Para um observador no sistema inercial, onde são computados os movimentos dos satélites, os receptores *GPS* parecem se mover durante a propagação do sinal transmitido, em função de seu movimento sobre a superfície e também da rotação da Terra. Receptores em repouso ao equador movem-se a 465 m/s em relação ao sistema inercial. A correção que deve ser aplicada (normalmente pelo *software* dos receptores *GPS*) para o *efeito Sagnac* é (ASHBY e SPILKER, 1996):

$$\Delta t_{Sagnac} = \frac{2\vec{\omega}_E \cdot \vec{A}}{c^2}, \quad (2.20)$$

onde  $\vec{\omega}_E$  é a velocidade angular de rotação da Terra e  $\vec{A}$  é um vetor com origem no centro de massa da Terra e que percorre a trajetória de sincronização, sendo considerada positiva quando percorrida em direção leste.

### 2.1.6.3. Relógios em órbita

Os relógios dos satélites *GPS* encontram-se a grande altura acima do geóide e apresentam diferentes tipos de movimentos. Dessa forma, estão sujeitos a efeitos relativísticos como desvios de frequência gravitacionais e desvios de frequência devidos ao efeito Doppler de 2ª. ordem. Após substituir a equação (2.19) adequadamente na equação (2.18), e considerando um relógio atômico movendo-se ao longo de uma trajetória arbitrária, o incremento no tempo próprio  $ds/c$ , e resolvendo a equação (2.19) para  $dt$  e integrando  $dt$  ao longo da trajetória, gera-se o *tempo coordenado*  $t$  (ASHBY, 2003):

$$\int_{traj} dt = \frac{1}{c} \int_{traj} \left[ 1 - \frac{\Phi - U}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2} \right] ds. \quad (2.21)$$

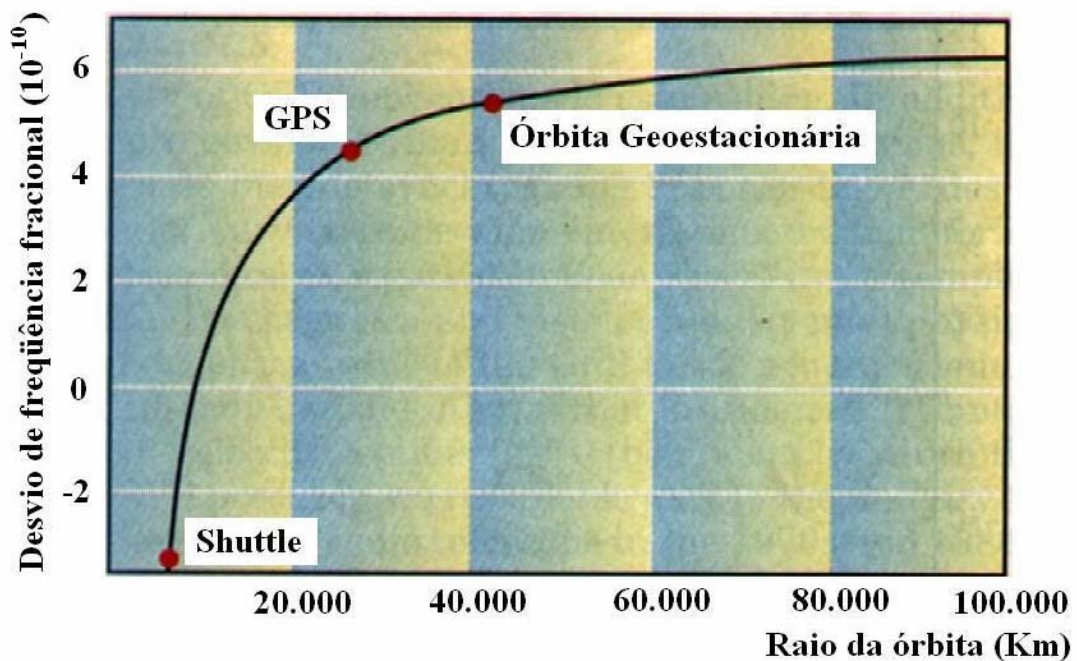
Os efeitos de diferença de potencial gravitacional e Doppler de 2ª. ordem estão contabilizados nos dois últimos termos dentro dos colchetes. Esses dois efeitos afetam de forma oposta os relógios dos satélites, conforme mostra a figura (2.5). Enquanto o Doppler de 2ª. Ordem causa um atraso e conseqüente desvio de frequência para o vermelho, o efeito gravitacional os adianta e causa um desvio de frequência para o azul, quando vistos do geóide. Para satélites de órbitas baixas predomina o desvio para o vermelho. A aproximadamente 3000 Km acima da superfície, os dois efeitos se cancelam. E, para satélites mais altos, como os geoestacionários e *GPS*, predomina o desvio para o azul. A correção líquida constante para um relógio num satélite *GPS* é de



– 4,4647 partes em  $10^{10}$ . Essa correção é realizada sobre os relógios em solo, antes do lançamento do satélite:  $[1 - 4.4647 \cdot 10^{-10}] \cdot 10,23 \text{ MHz} = 10,229\,999\,995\,43 \text{ MHz}$ .

Quando colocados em órbita, os relógios dos satélites parecerão, para um observador sobre o geóide, oscilar na frequência nominal correta de 10,23 MHz. Se essa correção não fosse efetuada os erros acumulados em posicionamento, durante um único dia, chegariam a 11 Km (ASHBY, 2002).

FIGURA 2.5 – DESVIOS DE FREQUÊNCIA RELATIVÍSTICOS



FONTE: adaptado de ASHBY (2002)

Mas as órbitas dos satélites *GPS* não são perfeitamente circulares, de forma que, além da correção constante anterior, há efeitos periódicos sobre os relógios dos satélites. A elipticidade da órbita faz os relógios “subirem” e “descerem” a diferentes alturas dentro do campo gravitacional da Terra, com diferentes velocidades. Isso se reflete em mudanças no padrão de vibração dos relógios atômicos e novos desvios de frequência periódicos. A correção para efeitos periódicos, conhecida como correção

relativística convencional para a excentricidade da órbita, efetuada pelo *software* do receptor *GPS*, é (ICD–GPS–200c, 1993):

$$\Delta t_r = +4,4428 \times 10^{-10} e \sqrt{a} \cdot \text{sen} E \text{ s} / \sqrt{m} . \quad (2.22)$$

onde  $e$  é a excentricidade da órbita,  $a$  é semi-eixo maior e  $E$  é a anomalia excêntrica do satélite. O valor máximo dessa correção para um satélite *GPS* com excentricidade de 0,01 é de 23 *ns* (SEEBER, 1993), (ASHBY, 2003).

Os novos satélites *GPS* do Bloco IIF, que serão lançados em breve para renovação do sistema, deverão carregar à bordo, além dos relógios atômicos, receptores *GPS* de alto desempenho. Esses novos satélites terão operação autônoma de até 180 dias sem contato com estações terrestres, rastreando-se mutuamente através de seus receptores *GPS* internos por um sistema chamado *Autonav*. Para verificação experimental da equação (2.22) em receptores altamente dinâmicos (aqueles em órbitas excêntricas e em alta velocidade) foi realizado um teste com um receptor *GPS* a bordo de um satélite *TOPEX/POSEIDON* (ASHBY, 2003) que a validou para ser utilizada nos softwares dos receptores a bordo dos novos satélites.

### 3. DESENVOLVIMENTO

#### 3.1. DETALHAMENTO TEÓRICO

A seguir serão apresentados os detalhes da obtenção das equações convencionais padrão (ICD-GPS-200c/1993) para as transformações relativísticas sobre o *GPS*. Também serão detalhados os mais recentes desenvolvimentos teóricos nesta área. (IAU, 1991), (BURSA et al., 1998), (PETIT, 1998), (KOUBA, 2002), (ASHBY, 2003), (LAGRASTA, 2004), (KOUBA, 2004).

##### 3.1.1. As Relações Entre Escalas de Tempo Utilizadas

A resolução A4 do IAU (1991) providencia a estrutura teórica para a definição de sistemas de referência baricêntricos e geocêntricos. Para isto estão definidas, na sua Recomendação III, as novas escalas de tempo *TCB* e *TCG* como os tempo-coordenada (coordenada temporal) para os sistemas baricêntrico e geocêntrico, respectivamente, diferindo das anteriores *TDB* e *TDT*. As relações entre quantidades próprias e coordenadas são mostradas em IAU (1991).

A mesma realização relativística dos sistemas de referência espaço-tempo foi também adotada, em 1991, pela *IUGG* (*International Union of Geodesy and Geophysics*), efetivamente tornando-a um padrão internacional. O Tempo Coordenado Geocêntrico (*TCG – Geocentric Coordinated Time*) é um tempo relativístico nas vizinhanças do **geocentro** de uma Terra **não-rotacional** e é o tempo usado para posicionamento e estudos geofísicos no *ITRF* (*International Terrestrial Reference Frame*). De acordo com as convenções citadas acima o padrão de vibração (*rate*) de um relógio em movimento, externo a Terra e marchando no tempo *T* está relacionado ao *TCG* através das teorias da relatividade especial (velocidade) e geral (posição no campo gravitacional) por transformações relativísticas que oferecem precisão de  $10^{-18}$ :

$$\frac{dT}{dTCG} = 1 - \left[ \frac{V(x, y, z) + \Delta V(x, y, z) + \frac{v^2}{2}}{c^2} \right] \quad (3.1)$$

onde  $V$  e  $\Delta V$  são os potenciais gravitacionais da Terra e de marés (devido à Lua, Sol e planetas) na posição do relógio  $(x, y, z)$ , e  $v$  é a velocidade do relógio, num sistema de coordenadas geocêntrico e não rotacional (inercial). Mas  $TCG$  não é diretamente observável, portanto não é útil para ser utilizado na dinâmica de satélites. De acordo com IAU (1991) o  $TCG$  é realizado na prática através do  $TT$  (*Terrestrial Time*). Esta escala é observável, está definida ao nível médio dos mares, e está **convencionalmente** relacionada ao  $TCG$  através da teoria da relatividade geral por:

$$\frac{dT}{dTCG} = 1 - \frac{W_0}{c^2} = \text{constante} = 6,263685600 \times 10^7, \quad (3.2)$$

onde  $W_0$  é o potencial gravitacional ao nível médio dos mares (sobre o **geóide em rotação**). Para um relógio sobre o geóide,

$$W_0 = V(x, y, z) + \Delta V(x, y, z) + \frac{\omega_E^2(x^2 + y^2)}{2}, \quad (3.3)$$

o observador é afetado pela velocidade de rotação da Terra  $\omega_E$ .  $W_0$  refere-se ao nível médio dos mares e latitude equatorial.

Para mostrar como  $W_0$  foi obtido deve-se expressar o potencial gravitacional  $V$  sobre o geóide ao equador: latitude e altitude nulas, com velocidade em solo equatorial.

Neste caso, (considerando-se  $\Delta V = 0$ ):

$$W_0 = V + \frac{v^2}{2} \quad (3.4)$$

Denotando-se:

$\mu = GM = 3,986004418 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ , a constante gravitacional da Terra, produto da massa da Terra e da constante de gravitação universal de Newton;

$a_E = 63781370 \text{ m}$ , o raio equatorial médio da Terra;

$\omega_E = 7,2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ , a velocidade angular média de rotação da Terra;

$J_2 = 1,08263 \times 10^{-3}$ , a constante relacionada ao achatamento terrestre.

A seguinte aproximação para  $V$  pode ser considerada:

$$V = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu a_E^2 J_2}{2r^3} (3 \text{sen}^2(\phi) - 1), \quad (3.5)$$

onde  $\phi$  é a latitude geocêntrica;  $r$  é a distância do equador médio ao centro da Terra:

$r = a_E$ ;  $\phi = 0$ . Então

$$V(r = a_E, \phi = 0) = \frac{\mu}{a_E} + \frac{\mu J_2}{2a_E} = \frac{\mu}{a_E} \left( 1 + \frac{J_2}{2} \right) = 6,252863653 \times 10^7, \quad (3.6)$$

enquanto a velocidade em solo é

$$v(r = a_E, \phi = 0) = \omega_E a_E = 465,101 \text{ m/s}. \quad (3.7)$$

Então,

$$V + \frac{v^2}{2} = 6,263679604 \times 10^7 \text{ m}^2/\text{s}^2, \quad (3.8)$$

valor que está bem próximo da constante adotada para  $W_0$ .

Pode-se converter  $W_0$  em um “raio de referência”  $R_0$ :

$$R_0 = \frac{\mu}{W_0} = 6363672,560 \text{ m.} \quad (3.9)$$

Como  $W_0$  é uma constante,  $TT$  difere do  $TCG$  por uma taxa constante. Inversamente, a razão  $dTT/dTCG$  poderia ser usada para **definir o geóide**. Assim,  $W_0$  poderia ser usado para efetivamente definir um sistema de altitudes mundial ( $WHS$  – *World Height System*) absoluto.

Na prática,  $TT$  é realizado através do  $TAI$ , que é uma média ponderada sobre um grande número de relógios atômicos (aproximadamente 200) espalhados pelo mundo, que apresentam tempo próprio  $T_i$ , ligado ao  $TT$  por:

$$\frac{dT_i}{dTT} = 1 - \frac{(W_i + \Delta W_i - W_0)}{c^2}, \quad (3.10)$$

onde  $\Delta W_i$  é o correspondente potencial de marés,  $W_i$  é o geopotencial na posição do relógio  $T_i$  e depende do conhecimento acurado de sua posição em relação ao geóide ou da diferença  $W_i - W_0$ .

Para transformar o tempo próprio de um relógio em movimento, exterior a Terra (e.g., a bordo de um satélite), que marcha no tempo  $T$ , para uma escala de tempo onde estão normalmente os observadores e receptores GPS, são necessárias duas passagens: primeiro de  $T$  para  $TCG$  e então de  $TCG$  para  $TT$ , resultando:

$$\frac{dT}{dTT} = 1 - \left[ \frac{V(x, y, z) - W_0 + \Delta V(x, y, z) + \frac{v^2}{2}}{c^2} \right] \quad (3.11)$$

A equação (3.11) é precisa ao nível do  $10^{-18}$ .

Resumidamente, a maneira prática de realizar (materializar)  $TT$  ou  $TCG$  à partir de relógios nas vizinhanças da Terra é:

1. para relógios nos satélites: transformar o tempo próprio do relógio para o  $TCG$  usando a métrica descrita em IAU (1991). O  $TT$  pode então ser obtido pela razão  $\partial TT/\partial TCG$ ;
2. para relógios sobre a superfície da Terra: determinar a diferença de potencial gravitacional entre a posição do relógio e a do geóide. Transformar diretamente o tempo próprio para  $TT$  usando esta diferença de potencial e as relações de IAU (1991). O  $TCG$  pode ser obtido através da razão  $\partial TT/\partial TCG$ .

### 3.1.2. Correções Relativísticas Convencionais Para o $GPS$

Assumindo-se que a escala de tempo  $GPS$   $t$  é a mesma do  $TT$  e chamando de  $T_{SV}$  ao tempo  $T$  de um relógio a bordo de um satélite  $GPS$ , com coordenadas  $(x,y,z)$ , obtêm-se a transformação relativística entre as escalas de tempo do  $GPS$   $t$  e do relógio do satélite  $GPS$   $T_{SV}$ :

$$\frac{dT_{SV}}{dt} = 1 - \left[ \frac{V(x,y,z) - W_0 + \Delta V(x,y,z) + \frac{v^2}{2}}{c^2} \right]. \quad (3.12)$$

Assume-se que em  $t = 0$  as duas escalas de tempo estão alinhadas, ou seja:  $t = T_{SV} = 0$ . Agora o objetivo é reconstruir a evolução de  $T_{SV}$  como uma função da variável independente  $t$ . Para isto é necessário integrar a equação (3.12) e algumas simplificações serão consideradas de acordo com as recomendações contidas no documento ICD-GPS-200c/93:

1. negligenciar o potencial de marés  $\Delta V$ ;
2. usar o modelo básico para o potencial gravitacional  $V$ , ou seja:  $V = \mu/r$  ;
3. usar as fórmulas da Dinâmica Orbital que correspondem ao movimento Kepleriano, isto é:

$$v = \sqrt{\mu \cdot \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)},$$

$$n = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a}},$$

(3.13)

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \frac{1}{r},$$

$$E(t) = E(0) + n \cdot t + e \cdot \text{sen}(E).$$

Integrando a equação (3.12), sem levar em conta  $\Delta V$  e o potencial perturbador:

$$\int dT_{SV} = \int \left\{ 1 - \left[ \frac{V - W_0 + (v^2/2)}{c^2} \right] \right\} \cdot dt. \quad (3.14)$$

Lembrando que  $W_0 = \mu/R_0$ , e colocando os extremos de integração:

$$T_{SV}(t) = t - \frac{1}{c^2} \cdot \int_0^t \left( V + \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{R_0} \right) \cdot dt, \quad (3.15)$$

$$= t + \frac{\mu}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2a} \right) \cdot t - \frac{1}{c^2} \cdot \int_0^t \frac{2\mu}{r} \cdot dt, \quad (3.16)$$



$$= t + \frac{\mu}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2a} \right) \cdot t - \frac{1}{c^2} \cdot \int_0^t 2\sqrt{\mu a} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \cdot dt, \quad (3.17)$$

$$= t + \frac{\mu}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2a} \right) \cdot t - \frac{2\sqrt{\mu a}}{c^2} \cdot (E(t) - E(0)), \quad (3.18)$$

$$= t + \frac{\mu}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{R_0} - \frac{3}{2a} \right) \cdot t - \frac{2\sqrt{\mu a}}{c^2} \cdot e \cdot \text{sen}(E), \quad (3.19)$$

$$t = T_{SV} - \frac{GM}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{R_0} - \frac{3}{2a} \right) \cdot t + \frac{2\sqrt{GMa}}{c^2} \cdot e \cdot \text{sen}(E). \quad (3.20)$$

Tem-se agora a forma final das transformações relativísticas **convencionais** para o tempo *GPS*, considerando a órbita Kepleriana:

$$t = T_{SV} - \Delta t_{rel,convencional}, \quad (3.21)$$

$$\Delta t_{rel,convencional} = \frac{GM}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{R_0} - \frac{3}{2a} \right) \cdot t - \frac{2\sqrt{GMa}}{c^2} \cdot e \cdot \text{sen}(E) \quad (3.22)$$

Todos os termos do lado direito da equação (3.22), com exceção de “*t*”, são devidos a efeitos relativísticos e devem ser devidamente compensados: multiplicados pela velocidade da luz *c*, eles podem ser todos convertidos em grandezas com dimensão de comprimento e que representam erros relativísticos sobre as observáveis *GPS* que não são negligenciáveis.

Pode-se subdividir a equação (3.22) em duas partes, uma constante e outra periódica:

$$\Delta t_{rel,convencional} = \Delta t_{con} + \Delta t_{per}. \quad (3.23)$$

Na equação (3.23)  $\Delta t_{con}$  representa a parte constante das correções relativísticas convencionais, e  $\Delta t_{per}$ , que depende das características instantâneas da órbita do satélite *GPS*, representa a parte periódica.

O termo  $\Delta t_{con}$  na equação (3.23) é pré-compensado por um desvio de frequência “fabricado”, sobre os relógios dos satélites *GPS*, **antes do lançamento**. Devido aos efeitos relativísticos, o relógio do satélite *GPS*, ao alcançar a posição orbital final, estará marchando mais rapidamente do que quando estava em solo. Para fornecer a frequência esperada nominal  $f_0 = 10,23$  MHz, após entrarem em órbita, estes relógios deverão ser ajustados, ainda em solo, para apresentar uma frequência um pouco menor  $f$ :

$$f = f_0 \cdot \left( 1 - \frac{\mu}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{R_0} - \frac{3}{2a} \right) \right). \quad (3.24)$$

Como a parte constante da correção é efetuada (sobre o padrão de frequência dos relógios) antes que se conheça a órbita final do satélite, o valor do semi-eixo maior é admitido como sendo igual ao valor nominal de 26561400 m e então:

$$\frac{\mu}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{R_0} - \frac{3}{2a} \right) = -4,4647 \times 10^{-10}, \quad (3.25)$$

$$f = 10,23 \times \left( 1 - 4,4647 \times 10^{-10} \right) = 10,22999999543 \text{ MHz} \quad (3.26)$$

é a frequência na qual operam os relógios dos satélites *GPS* antes do lançamento.

Pode-se expressar o impacto, em posicionamento final *GPS*, desta parte constante convencional da correção relativística:

$$4,4647 \times 10^{-10} \cdot \frac{86400s}{dia} = 38,575 \frac{\mu s}{dia}, \quad (3.27)$$

e multiplicando isto pela velocidade da luz:

$$38,575 \times 10^{-6} \frac{s}{dia} \times 299792458 \frac{m}{s} = 11564,5 \frac{m}{dia}, \quad (3.28)$$

ou seja, um erro acumulado de aproximadamente **11 Km por dia**.

É importante lembrar que os semi-eixos maior médios para cada um dos satélites *GPS* não correspondem exatamente ao valor nominal, em virtude do fato de sua órbita final não ser perfeitamente conhecida antes de estabelecida. Esta diferença faz com que os relógios de cada satélite ainda apresentem um pequeno erro residual na parte constante das correções relativísticas.

A expressão:

$$\Delta t_{con}(a_0) = \frac{Gm}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{R_0} - \frac{3}{2a_0} \right) \quad (3.29)$$

é a parte constante da correção relativística para um satélite *GPS* com semi-eixo maior médio  $a_0$ . Diferenciando-se a equação (3.29) com respeito a  $a_0$ , obtêm-se o erro residual:

$$\delta \Delta t_{con}(a_0) = \frac{3}{2} \cdot GM \cdot \frac{(a_0 - a_n)}{(a_0 \cdot c^2)}. \quad (3.30)$$

Para mostrar a ordem de grandeza deste erro constante adicional, tem-se para o PRN 26, em 06 de novembro de 2005:

$$(a_0 - a_n) = -1405 \text{ m}, \quad \delta \Delta t_{con} = -1,145(ns / dia). \quad (3.31)$$

A tabela (3.1) mostra o valor de  $\delta \Delta t_{con}$  para o conjunto dos doze satélites analisados, para o dia 06 de novembro de 2005.

TABELA 3.1. – ERRO NA PARTE CONSTANTE DA CORREÇÃO RELATIVÍSTICA CONVENCIONAL

PRN	$\delta\Delta t_{con}$ (ns/dia)
03	- 0,8592
08	- 0,6828
10	- 0,1454
11	- 0,6493
13	- 1,1616
16	- 1,5816
19	- 0,2293
20	- 1,3883
21	- 0,1706
26	- 1,1448
27	- 0,3133
28	- 1,0860

O termo  $\Delta t_{per}$  na equação (3.23) não é corrigido à priori como  $\Delta t_{con}$ , pois é função das variações instantâneas na posição e velocidade do relógio do satélite, causadas pela excentricidade da órbita. Essa correção é realizada pelo *software* dos **receptores GPS**, de acordo com as normas contidas em ICD-GPS-200c/1993. Assim, os dados utilizados pelo receptor, no cálculo, são aqueles que são enviados nas efemérides transmitidas pelos satélites *GPS*, e a órbita é considerada Kepleriana, como já foi citado anteriormente. Como exemplo da ordem de grandeza desta correção mostra-se, na figura (3.1), os gráficos de  $\Delta t_{per}$  para dois satélites *GPS* (*PRN* 13 e *PRN* 26) ambos no plano orbital *F*, para o dia 06 de novembro de 2005, com dados obtidos das efemérides precisas.

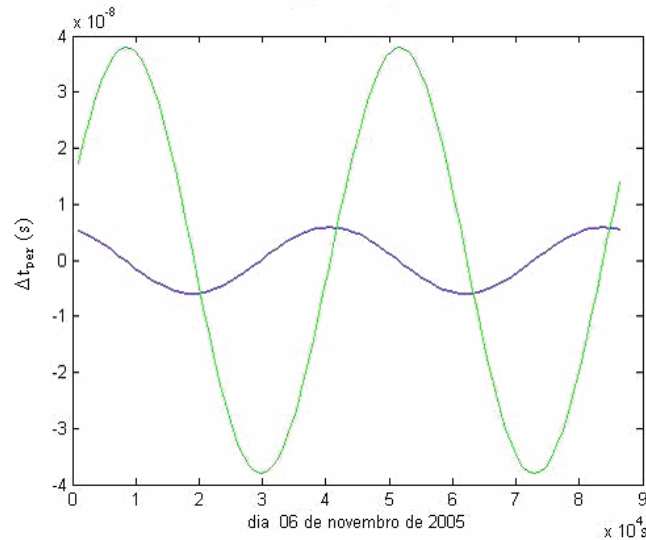
Os valores máximos de  $\Delta t_{per}$  e seu impacto em posicionamento final para os dois satélites da figura (3.1) são:

$$\text{PRN 13: } \pm 0,5 \times 10^{-8} \text{ s} \times 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \pm 1,5 \text{ m}$$

$$\text{PRN 26 : } \pm 4 \times 10^{-8} \text{ s} \times 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \pm 12,0 \text{ m}$$

Estes resultados estão coerentes com a literatura pesquisada (SEEBER, 1993), (ASHBY, 2003).

FIGURA 3.1. – CORREÇÃO RELATIVÍSTICA PARA A EXCENTRICIDADE DA ÓRBITA  
(REALIZADA PELO RECEPTOR GPS)



- PRN 13 ;  $e = 0,0026$
- PRN 26;  $e = 0,0166$

Como pode ser observado,  $\Delta t_{per}$  pode variar de forma significativa, dependendo do satélite avaliado. No Anexo 3 encontram-se os gráficos de  $\Delta t_{per}$  para os satélites PRN 03, 08, 10, 11, 16, 19, 20, 21, 27 e 28.

Conforme já foi afirmado,  $\Delta t_{per}$  é calculada através dos elementos orbitais osculadores. No sistema de coordenadas orbital, as coordenadas dos satélites são (SEEBER, 1993), (FERREIRA, 1998), (GEMAEL E BITTENCOURT, 2004):

$$\begin{aligned} x_o &= a \cos E - ae \\ y_o &= a\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} E \\ z_o &= 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

e as correspondentes velocidades no plano orbital são:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_o &= -a\dot{E}\text{sen}E \\
\dot{y}_o &= a\dot{E}(1-e^2)^{1/2} \cos E \\
\dot{z}_o &= 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

com

$$\dot{E} = \frac{(GM/a^3)^{1/2}}{(1-e\cos E)}, \tag{3.34}$$

resultando, portanto:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_o &= -\frac{\sqrt{GM/a}}{(1-e\cos E)}\text{sen}E \\
\dot{y}_o &= \frac{\sqrt{GM(1-e^2)/a}}{(1-e\cos E)}\cos E \\
\dot{z}_o &= 0
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Efetuada o produto interno entre os vetores posição e velocidade do satélite, no sistema orbital, obtém-se:

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = x_o\dot{x}_o + y_o\dot{y}_o + z_o\dot{z}_o, \tag{3.36}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = -\sqrt{GMa} \cdot \frac{(\cos E - e)}{(1 - e \cos E)} \cdot \text{sen}E + \sqrt{GMa} \cdot \frac{(1 - e^2)\cos E}{(1 - e \cos E)} \cdot \text{sen}E + 0, \tag{3.37}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = \sqrt{GMa} \cdot \left[ -\frac{(\cos E - e)}{(1 - e \cos E)} + \frac{(1 - e^2)\cos E}{(1 - e \cos E)} \right] \cdot \text{sen}E, \tag{3.38}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = \sqrt{GMa} \cdot \left[ \frac{e(1 - e \cos E)}{(1 - e \cos E)} \right] \cdot \text{sen}E, \quad (3.39)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = \sqrt{GMa} \cdot e \cdot \text{sen}E. \quad (3.40)$$

Portanto,

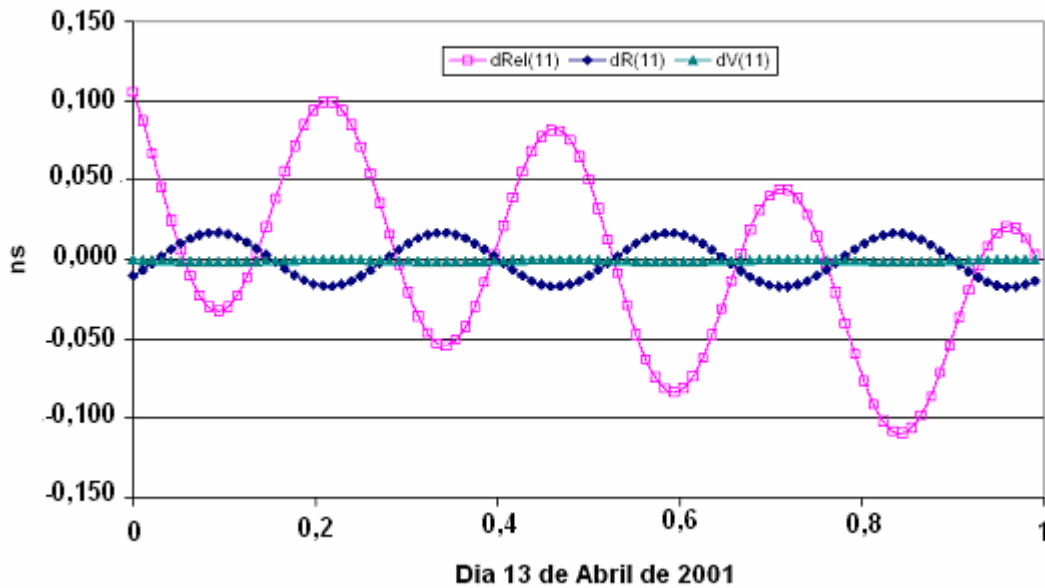
$$\Delta t_{rel} = \frac{2\sqrt{GMa}}{c^2} \cdot e \cdot \text{sen}E \quad \text{e} \quad \Delta t_{rel} = \frac{2\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \quad (3.41)$$

são duas formulações equivalentes da correção relativística para a excentricidade da órbita. Como o produto interno entre dois vetores é invariante em relação a rotações e translações, a formulação que envolve o produto interno de  $r$  e  $v$  pode ser calculada diretamente com os dados para o raio vetor e velocidade provenientes de um sistema de coordenadas que rotacione junto com a Terra, como o *ITRF*.

### 3.1.3. Novos Desenvolvimentos Teóricos Para As Correções Relativísticas No *GPS*

As correções relativísticas convencionais para o *GPS* apresentam erros em virtude das aproximações e simplificações efetuadas na sua obtenção. A constante melhoria nos padrões de frequência dos relógios dos satélites *GPS* tem evidenciado a necessidade de uma modelagem mais precisa dos efeitos relativísticos. A figura (3.2) mostra a magnitude dos erros das correções relativísticas convencionais ( $dRel$ ) para o *PRN* 11, no dia 13 de Abril de 2001, isto é, a diferença entre a equação (3.41) e a integração numérica de (3.55), corrigida dos erros relativísticos constantes (aquele aplicado à frequência dos relógios dos satélites antes do lançamento e também aquele da equação (3.30)); as contribuições do potencial perturbador terrestre ( $dR$ ) e as contribuições do potencial de marés gerado pelo Sol e pela Lua ( $dV$ ). A fonte mais significativa de erros é o potencial perturbador terrestre causado pelo achatamento polar,  $J_2$ .

FIGURA 3.2 – ERROS DAS CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS CONVENCIONAIS



FONTE: ADAPTADA DE KOUBA (2004)

A influência do potencial perturbador gerado pelo achatamento terrestre, sobre a marcha dos relógios dos satélites *GPS*, será agora levada em consideração.

Considera-se o potencial gravitacional  $V(x,y,z)$  na posição do relógio a bordo do satélite *GPS*:

$$V(x, y, z) = \frac{GM}{r} \cdot \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[ \left( \frac{a_E}{r} \right)^n \cdot P_{nm}(\cos \theta) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right] \right\}, \quad (3.42)$$

onde  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  são os coeficientes dos harmônicos esféricos e representam as perturbações gravitacionais causadas pela não esfericidade da Terra e distribuição não homogênea de massas. O termo que contém o somatório duplo expressa o potencial perturbador  $R$  e  $P_{nm}$  são os polinômios associados de Lagrange de grau  $n$  e ordem  $m$ .

Fazendo-se  $C_{nm} = -J_{nm}$  e  $S_{nm} = -K_{nm}$ , a equação (3.42) torna-se:



$$V(x, y, z) = \frac{GM}{r} \cdot \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[ \left( \frac{a_E}{r} \right)^n \cdot P_{nm}(\cos \theta) (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) \right] \right\} \quad (3.43)$$

Na equação (3.42) tem-se que:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} \right), \quad (3.44)$$

$$\lambda = \arctan \left( \frac{y}{x} \right), \quad (3.45)$$

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}. \quad (3.46)$$

Integrando-se equação (3.12) **sem desprezar** o potencial perturbador  $R$  e o potencial de marés  $\Delta V$ , tem-se a correção relativística completa sobre o tempo  $GPS$ , precisa ao nível  $10^{-18}$  para a frequência e ao nível do sub-picossegundo ( $10^{-12}$  s) para as medidas de tempo.

O potencial perturbador  $R(\theta, \lambda, r)$ , representa aproximadamente  $10^{-4}$  do termo central ( $GM/r$ ) e é devido principalmente ao primeiro termo da expansão em série na equação (3.43),  $J_{20} = J_2 = 1,083 \times 10^{-3}$ , que está associado ao achatamento polar terrestre.

As correções relativísticas **completas** sobre o  $GPS$  podem ser agora obtidas, inserindo-se  $V(x, y, z)$  na equação (3.12):

$$\int dT_{SV} = \int \left\{ 1 - \left[ \frac{V - W_0 + \Delta V + (v^2 / 2)}{c^2} \right] \right\} \cdot dt \quad (3.47)$$

Convém lembrar que o objetivo da integração é alinhar o tempo próprio  $T_{SV}$  fornecido pelo relógio atômico do satélite *GPS* (e transmitido na mensagem de navegação) com o Tempo *GPS*  $t$ , fornecido pelos relógios-padrão sobre o geóide. Vale lembrar também que a equação (3.47) leva em conta os efeitos relativísticos causados pela diferença de potencial gravitacional e pela velocidade do relógio do satélite. Outros efeitos relativísticos de menor magnitude não são levados em consideração.

Então:

$$\int dT_{SV} = \int \left\{ 1 - \left[ \frac{V - W_0 + \Delta V + \left( \frac{v^2}{2} \right)}{c^2} \right] \right\} \cdot dt, \quad (3.48)$$

$$T_{SV} = t - \int \left[ \frac{V - W_0 + \Delta V + \left( \frac{v^2}{2} \right)}{c^2} \right] \cdot dt, \quad (3.49)$$

$$t = T_{SV} + \int \left[ \frac{V - W_0 + \Delta V + \left( \frac{v^2}{2} \right)}{c^2} \right] \cdot dt, \quad (3.50)$$

$$t = T_{SV} + \frac{1}{c^2} \cdot \int \left[ \left( \frac{GM}{r} - R \right) - \frac{GM}{R_0} + \Delta V + \frac{v^2}{2} \right] \cdot dt, \quad (3.51)$$

$$t = T_{SV} - \frac{1}{c^2} \cdot \int \left[ GM \cdot \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{r} + \frac{R}{GM} \right) - \Delta V - \frac{v^2}{2} \right] \cdot dt. \quad (3.52)$$

Utilizando a equação de *vis-viva*:  $v^2 = GM \cdot \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$ , e lembrando que  $v$  é a velocidade do relógio em órbita,  $r$  é o raio vetor e  $a$  é o semi-eixo maior da trajetória percorrida pelo relógio do satélite *GPS*, (a recomendação para que se use o movimento Kepleriano neste caso está em ICD-GPS-200c/1993):

$$t = T_{SV} - \frac{1}{c^2} \cdot \int \left[ GM \cdot \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{r} + \frac{R}{GM} \right) - \Delta V - \frac{GM}{2} \cdot \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \right] \cdot dt, \quad (3.53)$$

$$t = T_{SV} - \frac{GM}{c^2} \left\{ \int \frac{dt}{R_0} + \int \left( \frac{1}{2a} - \frac{2}{r} + \frac{R}{GM} - \frac{\Delta v}{GM} \right) \cdot dt \right\}, \quad (3.54)$$

$$t = T_{SV} - \Delta t_{rel} = T_{SV} - \frac{GM}{c^2} \left\{ \frac{t}{R_0} + \int \left( \frac{1}{2a} - \frac{2}{r} + \frac{R}{GM} - \frac{\Delta V}{GM} \right) \cdot dt \right\}. \quad (3.55)$$

A equação (3.55) é precisa ao nível  $10^{-18}$  e deverá ser integrada numericamente. Sua utilidade é servir como padrão de referência e comparação para as expressões analíticas, que, devido às aproximações envolvidas em sua obtenção, são menos precisas.

Se o potencial de marés  $\Delta V$  for desprezado, a precisão fica em torno de  $10^{-16}$  (frequência), ou do picossegundo (medidas de tempo). Com exceção de  $J_2$ , todos os demais termos da expansão do geopotencial podem ser desprezados sem prejuízo para a precisão desejada.

A inclusão de  $J_2$  como perturbação nas correções relativísticas sobre o *GPS* é um pouco trabalhosa do ponto de vista do cálculo, se o objetivo é obter expressões analíticas e não integrais numéricas. Mas o fato da precisão corrente (novos relógios) dos satélites *GPS* ser da mesma ordem de grandeza dos erros causados pela não inclusão de  $J_2$  faz com que estes erros não devam ser negligenciáveis ainda por muito tempo dentro do sistema. A inclusão de  $J_2$  é particularmente importante nos casos

onde análise precisa de tempo (ou frequência) é necessária, como no caso de interpolações sobre o tempo fornecido pelos relógios dos satélites.

Quando as correções relativísticas padrão (analíticas, sem  $J_2$ ) são utilizadas, os erros cometidos ficam na ordem de  $10^{-14}$ . Para os futuros satélites *GPS* que serão equipados com *masers* de hidrogênio estes erros serão inaceitáveis.

Uma aproximação analítica para  $\Delta t_{rel}$ , incluindo  $J_2$ , pode ser útil para uma avaliação rápida dos resultados da equação (3.55). Desprezando o potencial de marés e todos os termos do potencial perturbador, com exceção de  $J_2$ , tem-se:

$$R = GM \frac{a_E^2}{r^3} J_2 P_{20} \quad (3.56)$$

onde  $P_{20}(p)$  é o polinômio de Legendre:

$$P_{20}(p) = P_2(p) = \frac{3}{2} p^2 - \frac{1}{2} . \quad (3.57)$$

Para o potencial perturbador, em coordenadas cartesianas têm-se:

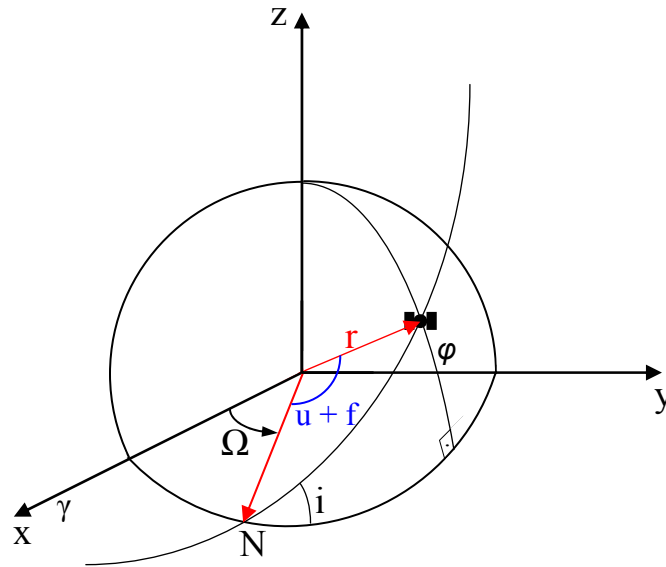
$$P_2 = \frac{3}{2} \left( \frac{z}{r} \right)^2 - \frac{1}{2} . \quad (3.58)$$

De acordo com a figura (3.3), a equação (3.58) pode ser reescrita na forma:

$$P_2 = \frac{3}{2} \text{sen}^2 \varphi - \frac{1}{2} \quad (3.59)$$

Mas  $\text{sen} \varphi = \text{sen}(i) \text{sen}(u)$  e  $u = \omega + f$ , de acordo com a figura (3.3):

FIGURA 3.3. – ELEMENTOS ORBITAIS



Então:

$$P_2 = \frac{3}{2} \text{sen}^2(i) \text{sen}^2(u) - \frac{1}{2}. \quad (3.60)$$

Como

$$\text{sen}^2 u = \frac{(1 - \cos 2u)}{2}, \quad (3.61)$$

tem-se, então, o potencial gravitacional perturbador em função dos elementos orbitais:

$$R = GM \frac{a_E^2}{r^3} J_2 \left( -\frac{3}{4} \text{sen}^2 i \cdot \cos 2u + \frac{3}{4} \text{sen}^2 i - \frac{1}{2} \right) \quad (3.62)$$

Para prosseguir com uma aproximação analítica para equação (3.55) deve-se expressar analiticamente, também, os dois primeiros termos da integral, que contém o semi-eixo maior  $a$  e o módulo do raio vetor  $r$ . Normalmente todas as determinações

precisas de órbitas de satélites empregam integrações numéricas, pois aproximações analíticas para órbitas perturbadas são bastante complexas de se obter.

As perturbações orbitais causadas por  $J_2$  podem ser encontradas em KAULA (1966), e tipicamente envolvem os desvios dos elementos keplerianos médios na seguinte forma:

$$a \approx a_0 + \Delta a(J_2). \quad (3.63)$$

Assim, supondo o movimento Kepleriano baseado apenas nos elementos orbitais médios ( $a_0$ ,  $e_0$  e  $E_0$ ), a equação (3.55) pode ser integrada da mesma forma que a equação (3.12):

$$\Delta t_0^{rel} = \Delta t_{con} t + \Delta t_0^{per} = \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{1}{R_0} - \frac{3}{2a_0} \right] \cdot t - \frac{2\sqrt{a_0 GM}}{c^2} \cdot e_0 \cdot \text{sen} E_0 \quad (3.64)$$

O primeiro termo na equação (3.64) é a parte constante da correção relativística que, neste caso é calculado em função do semi-eixo maior **médio** para um satélite específico. O valor desta parte constante (calculada em função do semi eixo maior nominal  $a_n = 26561400$  m), aplicada a todos os satélites *GPS* é:  $-4,4647 \times 10^{-10}$ , então:

$$\Delta t_0^{rel} = \Delta t_{con} t + \Delta t_0^{per} = \left[ 446.47 \times 10^{-12} + \delta \Delta t_{con}(a_0) \right] \cdot t + \Delta t_0^{per}, \quad (3.65)$$

onde  $\delta \Delta t_{con}(a_0)$  é dado pela equação (3.30) e representa a correção de pequena magnitude sobre a diferença que existe entre  $a_0$  e  $a_n$  que varia levemente de um satélite para outro. O último termo da eq. (3.64),  $\Delta t_0^{per}$ , é a correção relativística periódica expressa agora em termos dos elementos Keplerianos médios. Ou seja: as equações (3.64) e (3.65) expressam de forma **analítica** a correção relativística completa Kepleriana sobre o tempo fornecido pelos relógios dos satélites *GPS*. O objetivo agora é encontrar uma expressão que forneça a diferença entre a equação (3.55) e a equação

(3.64 ou 3.65). Para isto é necessário que se conheça a perturbação sobre  $a$  e  $r$ , ou seja:  $\Delta a$ ,  $\Delta e$  e  $\Delta E$ .

KAULA (1966), SEEBER (1993), FERREIRA (1998), GEMAEL E BITTENCOURT (2004) fornecem as equações planetárias de Lagrange. Para que seja alcançada a expressão analítica desejada, é considerado que a pequena excentricidade da órbita dos satélites *GPS* faz com que o produto entre  $e$  e as perturbações orbitais, nas equações planetárias de Lagrange, seja de segunda ordem e possa ser desprezado.

Desta forma tem-se, para as equações de Lagrange:

$$\dot{a} \approx -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}, \quad (3.66)$$

$$\dot{e} \approx -\frac{1}{na^2 e} \left( \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\partial R}{\partial \omega} \right), \quad (3.67)$$

$$\dot{M} \approx \frac{1}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}. \quad (3.68)$$

As derivadas parciais do potencial perturbador  $R$  (equação (3.62)) podem ser então efetuadas, e após várias aproximações e simplificações, descritas em KOUBA (2004), obtêm-se as expressões de primeira ordem para as desejadas perturbações orbitais:

$$\Delta a(J_2) = \frac{3}{2} \frac{a_E^2}{a} J_2 \text{sen}^2 i \cos 2u, \quad (3.69)$$

$$\Delta e(J_2) = \frac{3}{2} \frac{a_E^2}{a^2} J_2 \left\{ \left( 1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \right) \cos f + \text{sen}^2 i \left[ \frac{5}{6} \cos(2u + f) + \frac{1}{2} \text{sen} 2u \text{sen} f \right] \right\}, \quad (3.70)$$

$$\Delta M(J_2) = -\frac{1}{2} \frac{a_E^2}{a^2 e} J_2 \left\{ 3 \left( 1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \right) \text{sen} f + \text{sen}^2 i \left[ \frac{3}{2} \cos 2u \text{sen} f + \text{sen}(2u + f) \right] \right\}. \quad (3.71)$$

Diferenciando-se  $r = a(1 - e \cos E)$ , chega-se à perturbação sobre  $r$ :

$$\Delta r = \Delta a - a \Delta e \cos E + ae \Delta E \text{sen} E. \quad (3.72)$$

Substituindo-se as equações (3.69), (3.70) e (3.71) na equação (3.72), e após algumas simplificações, chega-se a uma expressão para a perturbação causada por  $J_2$  sobre o raio vetor:

$$\Delta r = \frac{1}{2} \frac{a_E^2}{a} J_2 \left[ -3 \left( 1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \right) + \frac{1}{2} \text{sen}^2 i \cos 2u \right]. \quad (3.73)$$

Considera-se que:

$$\Delta t^{rel} = \Delta t_0^{rel} + \delta \Delta t_0^{rel}, \quad (3.74)$$

ou seja: uma aproximação **analítica** para a correção relativística **completa** para o tempo *GPS* pode ser obtida desdobrando-se em duas partes:

$\Delta t_0^{rel}$ , equação (3.65), que representa as correções relativísticas baseadas na órbita Kepleriana e nos elementos orbitais médios e

$\delta \Delta t_0^{rel}$ , que representa o erro, em virtude da perturbação causada por  $J_2$ , sobre as correções relativísticas para o tempo *GPS*. É obtido através da diferenciação da equação (3.55) :



$$\Delta t^{rel} = \Delta t_0^{rel} + \frac{GM}{c^2} \cdot \int \left( -\frac{1}{2a^2} \Delta a + \frac{2}{a^2} \Delta r + \frac{R}{GM} \right) \cdot dt \quad (3.75)$$

Finalmente, substituindo-se as equações (3.62), (3.69) e (3.73) na equação (3.75) e após algumas simplificações (lembrando-se de considerar  $e$  muito pequeno), chega-se a:

$$\delta \Delta t_0^{rel} = -\frac{GMa_E^2}{c^2} J_2 \int \frac{1}{a^3} \left[ \frac{7}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \right) + \text{sen}^2 i \cos 2u \right] dt \quad (3.76)$$

O próximo passo é a integração da equação (3.76). Conforme feito anteriormente,  $\omega$ ,  $a$  e  $i$  podem ser considerados constantes (elementos orbitais médios), considerando que  $f \approx E \approx M$  e lembrando que  $dt = dM/n$ , então:

$$\delta \Delta t_0^{rel} = -\frac{GMa_E^2}{c^2} J_2 \left\{ \frac{7}{2a^3} \left( 1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \right) \cdot t + \frac{\text{sen}^2 i}{a^3} \int \cos 2u \frac{dM}{n} \right\}. \quad (3.77)$$

Integrando:

$$\delta \Delta t_0^{rel} = \frac{a_E^2}{2a^2 c^2} J_2 \left[ \sqrt{GMa} \cdot \text{sen}^2 i \cdot \text{sen} 2u - 7 \frac{GM}{a} \left( 1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \right) \cdot t \right]. \quad (3.78)$$

A equação (3.78) possui uma parte periódica e outra constante, e depende da **inclinação orbital**. Agora, a equação (3.78) junto com a equação (3.65), representam uma formulação **analítica** para as correções relativísticas. Isto significa que elas podem substituir a equação (3.55), que é uma integração numérica, por um procedimento mais simples. Vale lembrar que estas equações foram obtidas levando-se em consideração os elementos orbitais médios.

As aproximações consideradas permitem que tanto os elementos médios quanto os elementos osculadores sejam utilizados. Na equação (3.30) o termo  $a_0$  não pode ser substituído pelo osculador, mas pode ser obtido através das efemérides transmitidas pelos satélites *GPS*, com precisão de 150 m. Se o termo  $\Delta t_0^{per}$  na equação (3.65) for expresso em função das equações (3.41) então toda a equação (3.65) poderá ser calculada utilizando-se os elementos orbitais osculadores.

A diferença entre usar elementos orbitais ou osculadores pode ser representada por:

$$\delta\Delta t_0^{per} = \Delta t^{per} - \Delta t_0^{per}. \quad (3.79)$$

Através de um procedimento de diferenciação, tem-se:

$$\delta\Delta t_0^{per} = -\frac{2\sqrt{GMa}}{c^2} \cdot (\Delta e \sen E + \Delta E e \cos E). \quad (3.80)$$

Substituindo-se as equações (3.70) e (3.71) na equação (3.80), lembrando que  $M \approx E$ , e efetuando simplificações, tem-se:

$$\delta\Delta t_0^{per} = \frac{a_E^2}{a^2 c^2} J_2 \cdot \sqrt{GMa} \cdot \sen^2 i \cdot \sen 2u. \quad (3.81)$$

Agora, subtraindo-se a equação (3.81) da equação (3.78), encontra-se a diferença entre usar elementos osculadores ou médios:

$$\delta\Delta t^{rel} = -\frac{a_E^2 J_2}{2a^2 c^2} \cdot \left[ 3\sqrt{GMa} \cdot \sen^2 i \cdot \sen 2u - \frac{7GM}{a} \left( 1 - \frac{3}{2} \sen^2 i \right) \cdot t \right]. \quad (3.82)$$

A nova correção relativística completa, analítica, sobre o tempo fornecido pelos relógios dos satélites *GPS* (e que substitui a integral numérica equação (3.55)) é, então:

$$\Delta t^{rel} = \left[ 4,4647 \times 10^{-10} + \delta\Delta_{con}(a_0) \right] \cdot t - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} + \delta\Delta t^{rel}, \quad (3.83)$$

onde  $\delta\Delta_{con}$  é calculado pela equação (3.30) e  $\delta\Delta t^{rel}$  é calculado pela equação (3.82).

## 3.2. TESTES E RESULTADOS:

### 3.2.1. Metodologia Para a Geração dos Gráficos e Tabelas

Como parte do desenvolvimento desta dissertação, vários passos foram realizados para se gerar os gráficos e tabelas apresentados neste capítulo. Descreve-se abaixo a seqüência seguida:

1. Obter, via *Internet*, (<http://igsceb.jpl.nasa.gov>) os arquivos *SP3* fornecidos para a data de interesse (06/11/2005). Este arquivo contém as três componentes do vetor posição para cada um dos satélites da constelação *GPS* ativos para aquela data. Os dados são fornecidos com intervalos de 15 min, o vetor posição é dado em *Km*, com precisão de 5 *cm*. Os dados estão referenciados ao *ITRF2000*. Os arquivos *SP3* contém as **efemérides precisas** produzidas pelo *IGS* e estão disponíveis na *Internet* com 10 a 12 dias de latência.
2. Os dados obtidos devem agora ser utilizados para a geração de um novo arquivo, no formato *SP1*, contendo o vetor de estado completo (as três componentes da posição e as três da velocidade), para um conjunto de 12 satélites *GPS* escolhidos, sendo 2

satélites para cada plano orbital com a maior e a menor excentricidade) ocupando lugares (“*slots*”) diferentes.

3. O vetor de estado no *SPI* está no sistema terrestre (*CTS*) e deverá ser transformado para o sistema inercial (*CIS*). As matrizes de transformação encontram-se em SEEBER (1993).
4. Através de uma nova mudança de coordenadas e das equações da Dinâmica Orbital para o movimento Kepleriano, o vetor de estado passa do *CIS* para o sistema orbital, gerando um novo arquivo contendo os elementos orbitais:  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $M$ . As matrizes de transformação encontram-se em GEMAEL e ANDRADE (2004).
5. Obter o arquivo *Rinex* (GURTNER, 2001) contendo as efemérides transmitidas para os satélites *GPS* escolhidos, no dia 06 de novembro de 2005.
6. Determinar os elementos orbitais médios  $a_0$ ,  $e_0$  e  $i_0$  à partir do arquivo *Rinex*.
7. Para cada um dos 12 satélites *GPS* escolhidos, o conjunto de dados contendo o vetor de estado no *CIS* (ao longo do dia 06/11/2005) é utilizado para gerar os gráficos da correção relativística padrão para a excentricidade da órbita, através da eq. (3.41).
8. O conjunto de dados contendo os elementos orbitais (ao longo do dia 06/11/2005) é utilizado para gerar o gráfico da equação (3.82), que fornece uma correção para o efeito relativístico causado pelo achatamento terrestre sobre o tempo fornecido pelos relógios destes satélites. Esta etapa é realizada para cada um dos 12 satélites *GPS*.

Os passos 2, 3, 4 e 6 foram realizados através de programas escritos em linguagem de programação *Fortran*.

Para gerar os gráficos dos passos 7 e 8 foi utilizado o programa computacional *Matlab*.

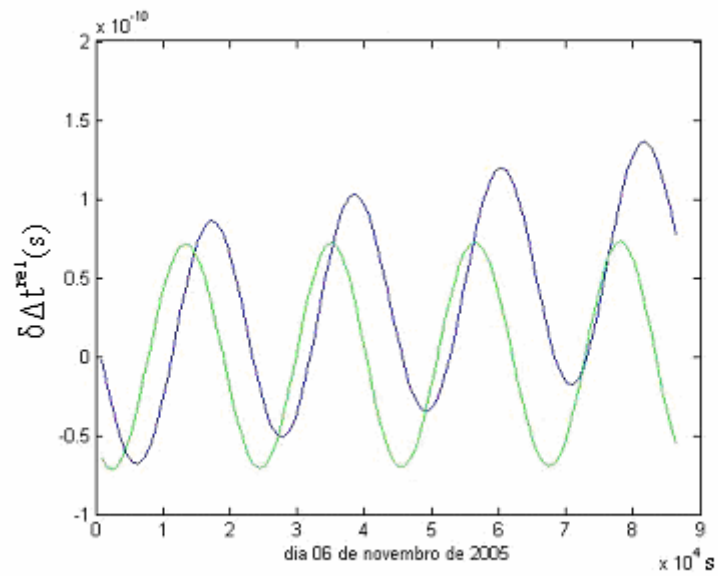
### 3.2.2. Resultados Obtidos Com o Processamento dos Dados e Análises

A tabela (3.2) mostra o conjunto dos satélites estudados neste trabalho, juntamente com os elementos orbitais médios  $a_0$ ,  $e_0$  e  $i_0$  para o dia 06 de novembro de 2005.

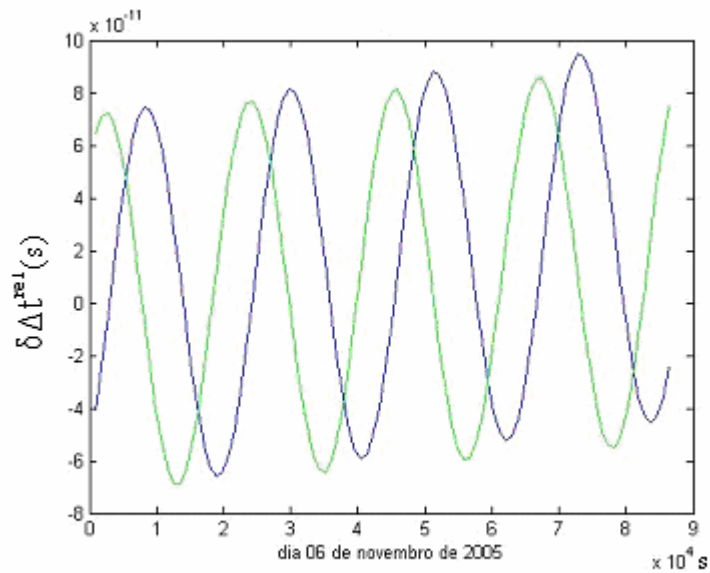
TABELA 3.2. – SATÉLITES PESQUISADOS

PRN	SVN	BLOCO	$a_0 - a_n$ (m)	$e_0$	$i_0 - 54.7^\circ$	plano /slot	relógio
03	33	II-A	- 1054,6	0,0075	-1,59	C2	Cs
08	38	II-A	- 838,1	0,0096	0,90	A3	Cs
10	40	II-A	- 178,5	0,0066	1,22	E3	Cs
11	46	II-R	- 796,9	0,0048	- 3,14	D2	Rb
13	43	II-R	- 1425,7	0,0025	2,04	F3	Rb
16	56	II-R	- 1941,0	0,0029	0,40	B1	Rb
19	59	II-R	- 281,5	0,0032	0,25	C3	Rb
20	51	II-R	- 1703,9	0,0024	0,28	E1	Rb
21	45	II-R	- 209,4	0,0104	- 0,50	D3	Rb
26	26	II-A	- 1405,1	0,0166	1,93	F2	Rb
27	27	II-A	- 384,6	0,0193	0,06	A4	Cs
28	44	II-R	- 1332,9	0,0195	0,27	B3	Rb

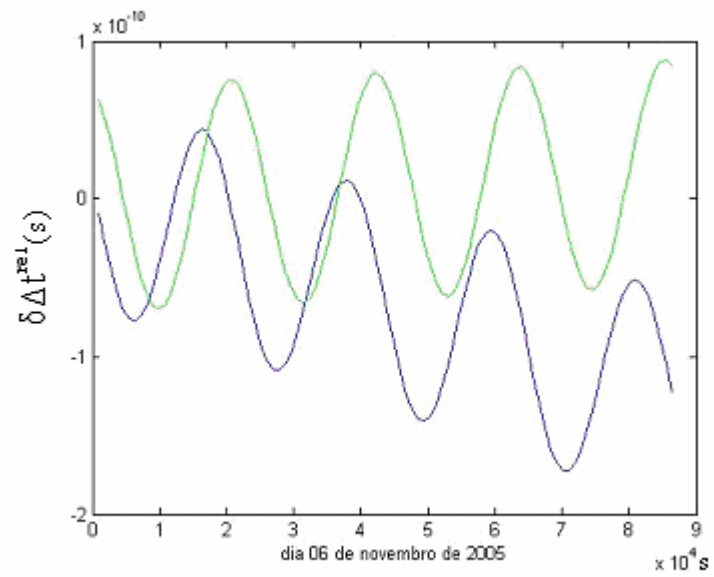
A avaliação da correção relativística, equação (3.82), é apresentada em forma de gráficos para os satélites disponíveis na tabela (3.2). Deste modo, esta correção é apresentada nas figuras (3.4) até (3.9). No eixo das ordenadas encontra-se  $\delta\Delta t^{rel}$  e no eixo das abcissas, o tempo de propagação da órbita dos satélites *GPS*, que no caso é um dia, ou seja, duas órbitas.

FIGURA 3.4. – SATÉLITES GPS DO PLANO ORBITAL *A*

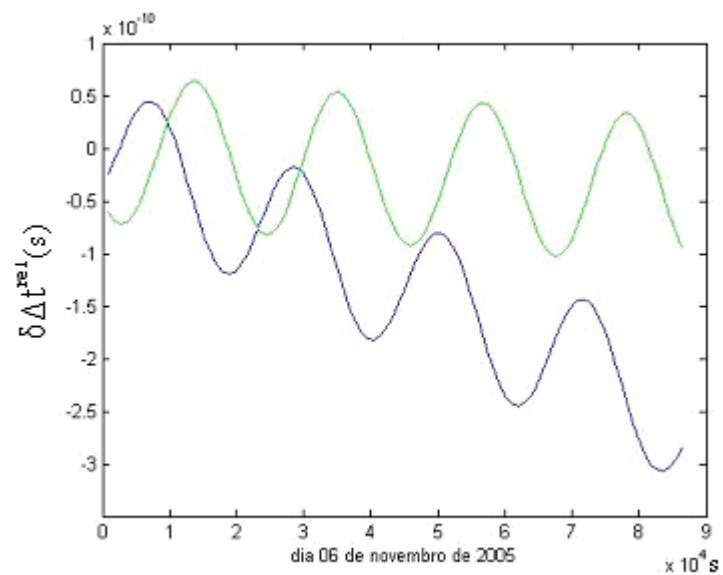
- PRN 08
- PRN 27

FIGURA 3.5. – SATÉLITES GPS DO PLANO ORBITAL *B*

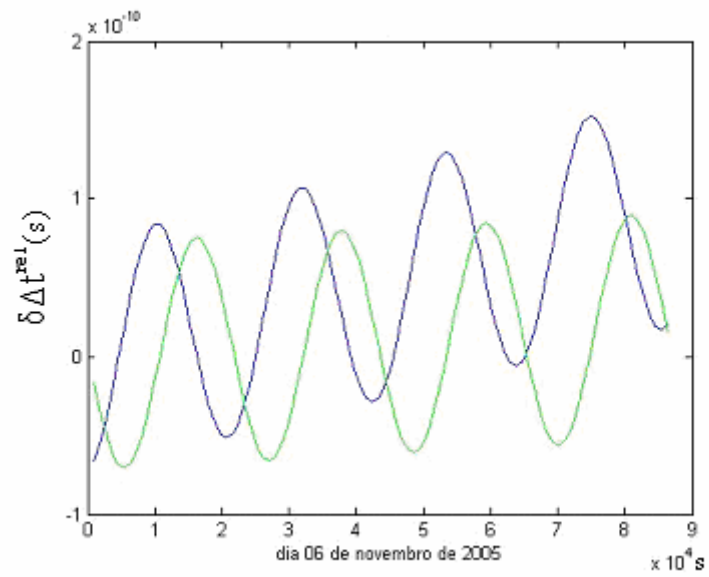
- PRN 16
- PRN 28

FIGURA 3.6. – SATÉLITES GPS DO PLANO ORBITAL *C*

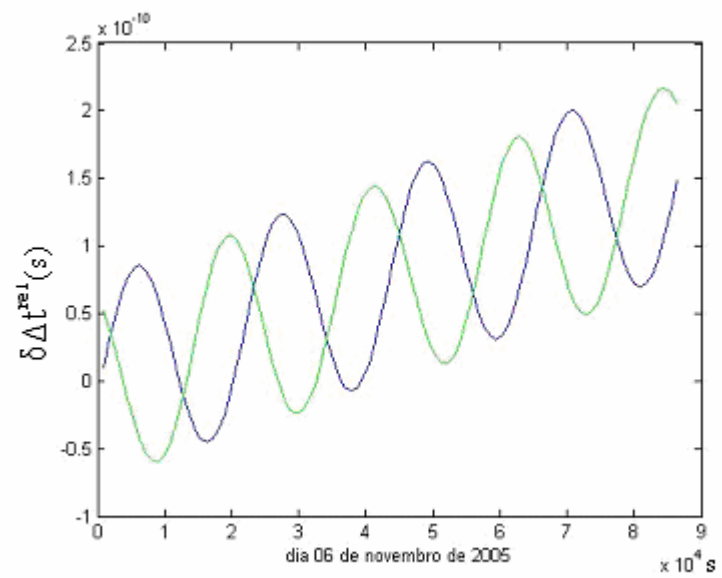
- PRN 03
- PRN 19

FIGURA 3.7. – SATÉLITES GPS DO PLANO ORBITAL *D*

- PRN 11
- PRN 21

FIGURA 3.8. – SATÉLITES GPS DO PLANO ORBITAL *E*

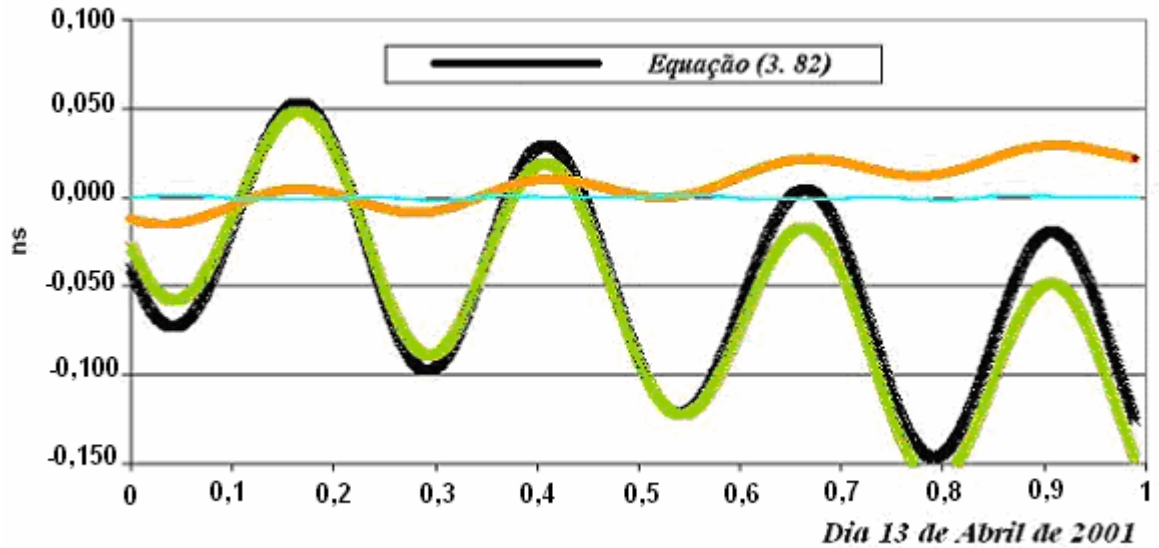
- PRN 10
- PRN 20

FIGURA 3.9. SATÉLITES GPS DO PLANO ORBITAL *F*

- PRN 13
- PRN 26



FIGURA 3.10.- GRÁFICO DA EQUAÇÃO (3.82) OBTIDO POR KOUBA (2004)



FONTE: adaptada de KOUBA (2004)

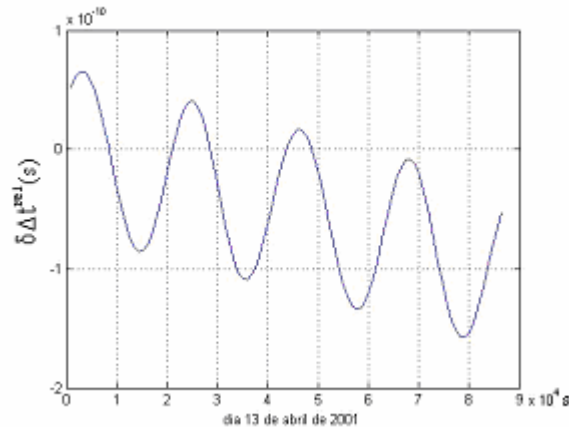
Na figura (3.10) é mostrado o gráfico (linha cheia, negra), obtido por KOUBA (2004), da correção relativística equação (3.82), para o satélite *SVN 13* (*PRN 02*), no dia 13 de abril de 2001. O satélite *SVN 13* foi desativado em 12 de maio de 2004. Atualmente um novo satélite, o *SVN 61*, do Bloco IIR, ocupa o *PRN 02* e passou a operar em 22 de Novembro de 2004.

Na figura (3.11) mostra-se o gráfico da equação (3.82) para o satélite *PRN 02* (*SVN 13*), gerado com dados do dia 13 de abril de 2001.

Observa-se que o resultado obtido na figura (3.11) está compatível com aquele da figura (3.10), apenas devendo-se observar que há uma defasagem entre as duas curvas devida à diferença no horário de início de propagação dos dados. O primeiro ponto de máximo em (3.11) corresponde ao primeiro ponto de máximo em (3.10).

Segue-se, portanto, que os resultados obtidos para as figuras e tabelas apresentadas corroboram aqueles obtidos por KOUBA (2004). Isto significa que a abordagem teórica e a metodologia empregada se mostram adequadas para reproduzir os resultados.

FIGURA 3.11 – GRÁFICO DA EQUAÇÃO (3.82) PARA O PRN 02 EM 13/04/2001



Os gráficos mostram claramente que há uma parte periódica e outra constante, no erro causado por  $J_2$  sobre os relógios dos satélites. A tabela (3.3) mostra o resultado encontrado para a parte **constante** do erro causado por  $J_2$  no relógios dos satélites,  $\delta\Delta t^{rel}_{const}$ , calculado através do segundo termo do lado direito da equação (3.82).

A parte periódica do erro relativístico causado por  $J_2$ , conforme os gráficos das figuras (3.4) até (3.11), possui um período de 6 horas, com amplitude de até  $0,1 \text{ ns}$ .

Na tabela (3.3) verifica-se que a parte constante pode apresentar erros de até  $0,2 \text{ ns/dia}$ . Estes resultados concordam com a literatura.

Segundo KOUBA (2004), uma pequena e constante deriva nos relógios dos satélites *GPS* não afetaria significativamente as interpolações ou extrapolações necessárias para a distribuição das informações a respeito destes relógios. Mas as perturbações periódicas são muito significativas neste aspecto, pois comprometem a qualidade das predições.

No documento ICD-GPS-200c/1993 a parte constante da correção **convencional** é efetuada *a priori* e a parte periódica, *a posteriori*. Isto sugere que a parte periódica da correção relativística, equação (3.82), também deveria ser efetuada em solo, ou pelos receptores *GPS* ou através de pós-processamentos. A parte periódica da influência de

$J_2$  é função da posição e velocidade instantâneas do satélite *GPS*. Os receptores *GPS* não realizam, ainda, esta correção.

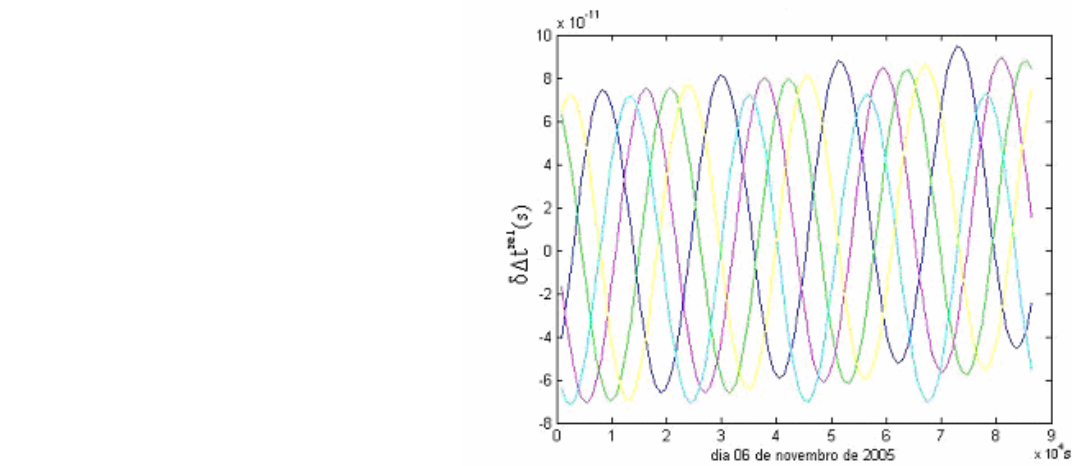
TABELA 3.3. – PARTE CONSTANTE DO ERRO CAUSADO POR  $J_2$  NO RELÓGIOS DOS SATÉLITES GPS

PRN	$\delta\Delta^{rel}_{const}$ (ns/dia)
03	0,1280
08	- 0,0669
10	- 0,0913
11	0,2510
13	- 0,1538
16	- 0,0272
19	- 0,0164
20	- 0,0189
21	0,0414
26	- 0,1460
27	- 0,0017
28	- 0,0184

Apesar da pequena magnitude do efeito de  $J_2$  na marcha dos relógios dos satélites *GPS*, a alta qualidade das efemérides precisas e a modelagem sofisticada dos erros não relativísticos que afetam o *GPS* possivelmente possibilitariam que este efeito fosse detectado em posicionamento final altamente preciso.

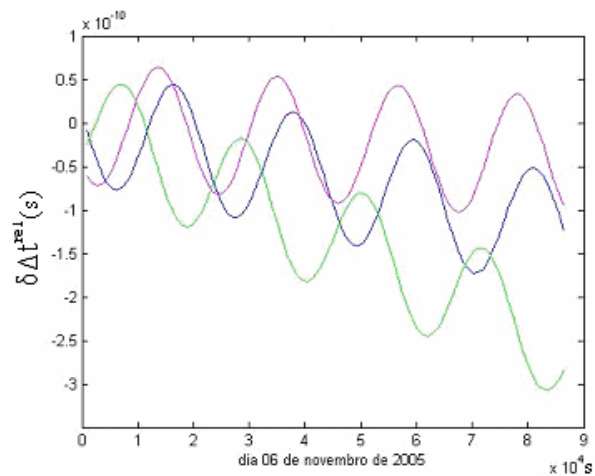
É interessante reunir os satélites *GPS* com inclinações orbitais médias  $i_0$  semelhantes em um único gráfico da equação (3.82), conforme mostrado nas figuras (3.12) até (3.14):

FIGURA 3.12. – INFLUÊNCIA DE  $J_2$  SOBRE OS RELÓGIOS DOS SATÉLITES GPS PARA  
 $0 < i_0 - 54,7^\circ < 0,90$



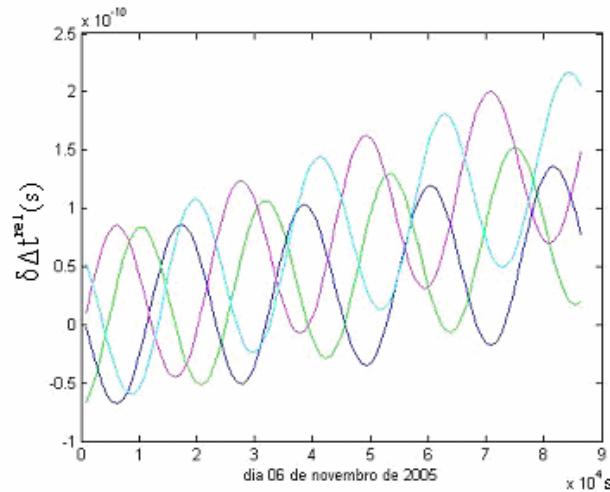
- PRN 16  $i_0 - 54,7^\circ = 0,40$
- PRN 19  $i_0 - 54,7^\circ = 0,25$
- PRN 20  $i_0 - 54,7^\circ = 0,28$
- PRN 27  $i_0 - 54,7^\circ = 0,06$
- PRN 28  $i_0 - 54,7^\circ = 0,27$

FIGURA 3.13. – INFLUÊNCIA DE  $J_2$  SOBRE OS RELÓGIOS DOS SATÉLITES GPS PARA  
 $i_0 - 54,7^\circ < 0$



- PRN 03;  $i_0 - 54,7^\circ = -1,59$
- PRN 11;  $i_0 - 54,7^\circ = -3,14$
- PRN 21;  $i_0 - 54,7^\circ = -0,50$

FIGURA 3.14. – INFLUÊNCIA DE  $J_2$  SOBRE OS RELÓGIOS DOS SATÉLITES GPS PARA  $i_0 - 54,7^\circ \geq 0,90$



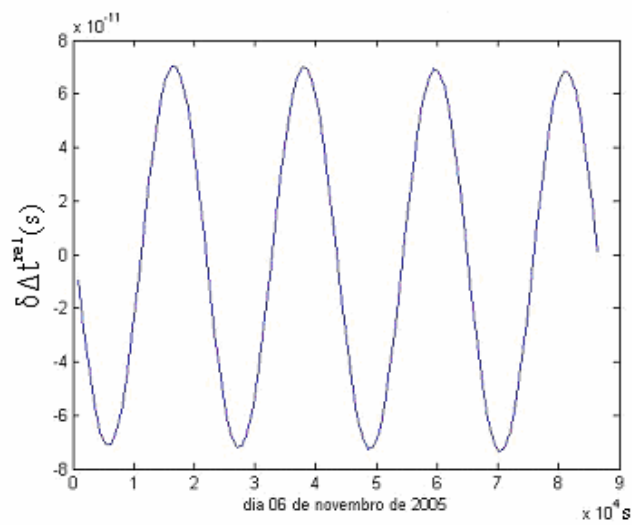
- PRN 08;  $i_0 - 54,7^\circ = 0,90$
- PRN 10;  $i_0 - 54,7^\circ = 1,22$
- PRN 13;  $i_0 - 54,7^\circ = 2,04$
- PRN 26;  $i_0 - 54,7^\circ = 1,93$

Observa-se claramente o comportamento ascendente ou descendente das curvas, nas figuras (3.12) até (3.14), relacionado ao sinal positivo ou negativo da diferença  $i_0 - 54,7^\circ$ . A consequência física disto está em um pequeno adiantamento ou atraso (deriva) **constante** nos relógios dos satélites, causado pela parte constante da influência de  $J_2$  e que é tanto maior, em módulo, quanto mais distante a inclinação média  $i_0$  está da inclinação nominal  $i_n = 54,7^\circ$ .

Com relação à parte periódica, seu comportamento é semelhante àquele da equação (3.41), que representa a correção **convencional** para a excentricidade da órbita, corrigida pelos receptores *GPS*. O relógio dos satélites adianta ou atrasa ao longo da órbita em função de sua posição e velocidade instantâneas. Nota-se que a amplitude da nova correção não varia muito de um satélite *GPS* para outro, diferindo, neste aspecto, em relação à correção convencional equação (3.41).

Na figura (3.15) mostra-se o gráfico da equação (3.82) para um satélite hipotético com semi-eixo maior e inclinação nominais. Nota-se que a parte constante da perturbação sobre a marcha dos relógios dos satélites quase desaparece, restando a influência periódica, na ordem de  $10^{-11}s$ .

FIGURA 3.15. – INFLUÊNCIA DE  $J_2$  SOBRE O RELÓGIO DE UM SATÉLITE GPS HIPOTÉTICO, COM SEMI-EIXO MAIOR E INCLINAÇÃO NOMINAIS



## 4. CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

### 4.1. CONCLUSÃO

A correção relativística para a excentricidade da órbita faz parte do *GPS Interface Control Document (GPS-ICD-200c, 1993)* e é realizada pelo *software* do receptor. Todos os fabricantes de receptores *GPS* que projetam um receptor para seguir as especificações do documento acima devem usar as mesmas correções. Sem elas um receptor *GPS* pode apresentar sérios erros em posicionamento, na ordem de dezenas de metros. Entretanto, com a melhoria nas medidas de tempo efetuadas pelos relógios dos satélites *GPS*, já pode ser possível detectar erros causados por efeitos relativísticos que não estão incorporados à correção padrão. A ordem de grandeza das novas correções, mostradas neste trabalho, é de aproximadamente 0,1 a 0,2 *ns*. Os resultados encontrados estão coerentes com aqueles obtidos por KOUBA (2004).

O objetivo principal desta dissertação consistiu em realizar um estudo detalhado das correções relativísticas aplicadas às medidas de tempo e sincronização *GPS* e também dos recentes desenvolvimentos nesta área. Este objetivo foi alcançado com a análise e exposição dos artigos consultados, e com os resultados obtidos através da manipulação e processamento de dados *GPS* para gerar os gráficos e tabelas apresentados. Resumidamente, os resultados encontrados foram:

1. Correção relativística convencional para a excentricidade da órbita: a tabela (A3.1) resume os valores encontrados da correção relativística para a excentricidade da órbita, equação (3.41), para os satélites pesquisados. Os valores encontrados estão coerentes com a literatura (SEEBER, 1993), (ASHBY, 2003).
2. Erro residual na parte constante da correção relativística convencional: os valores encontrados para a equação (3.30) estão resumidos na tabela (3.1). Para

o conjunto de satélites analisados, no dia 06 de novembro de 2005, foram encontrados valores desde  $-0,14 \text{ ns/dia}$  até  $-1,58 \text{ ns/dia}$ , que concordam com a literatura (ASHBY, 2003), (KOUBA, 2004).

3. Influência do potencial perturbador gerado pelo achatamento polar terrestre sobre os relógios dos satélites *GPS*:

3.1. comparando-se as figuras (3.10) e (3.11) verifica-se que ambas concordam sobre os resultados encontrados para a influência de  $J_2$  sobre o relógio do satélite *GPS PRN 02*, no dia 13 de abril de 2001. Isto significa que a metodologia empregada para processar os dados e gerar os gráficos é adequada.

3.2. Nas figuras (3.4) até (3.9) está mostrado o resultado encontrado para a influência de  $J_2$ , equação (3.82), sobre o relógio dos satélites pesquisados, para o dia 06 de novembro de 2005. A amplitude média encontrada para a parte periódica é de aproximadamente  $1,5 \times 10^{-10}$  s, o período é de aproximadamente 6 horas, resultados coerentes com aqueles obtidos por KOUBA (2004). A consequência física deste fenômeno é alteração na marcha dos relógios dos satélites, aumentando ou diminuindo a sua frequência de vibração em função da posição e velocidade do satélite sob a influência do potencial perturbador gerado pelo achatamento terrestre.

3.3. Os resultados encontrados para a parte constante da equação (3.82) estão resumidos na tabela (3.3). Os valores obtidos variam de  $-0,0017 \text{ ns/dia}$  até  $+0,2510 \text{ ns/dia}$ . Mostram-se coerentes com a literatura.

3.4. Nas figuras (3.12) até (3.14) os satélites foram agrupados de acordo com a diferença entre sua inclinação média e a inclinação nominal de  $54,7^\circ$ . O objetivo disto é mostrar a relação entre o sinal desta diferença (positivo ou negativo) e o comportamento (ascendente ou descendente) das curvas. A



conseqüência física é um erro acumulativo crescente ou decrescente (deriva) sobre as medidas de tempo efetuadas pelos relógios dos satélites.

3.5. Na figura (3.15) está mostrado o resultado obtido para a influência de  $J_2$ , equação (3.82), sobre o relógio de um satélite *GPS* hipotético, com semi-eixo maior e inclinação nominais. Neste caso a curva não mostra comportamento ascendente ou descendente constante, mantendo-se apenas a parte periódica oscilando ao longo do dia.

Conclui-se, portanto, que a abordagem teórica, seqüência de passos e a forma de manipulação dos dados nos programas computacionais mostrou-se adequada para reproduzir os resultados mostrados na literatura, em especial aqueles obtidos por KOUBA (2004). Isto significa que a parte teórica de um trabalho posterior, de verificar o impacto desta nova correção em posicionamento final, já está fundamentada.

É interessante também lembrar que as aplicações da sincronização e disseminação de tempo através do *GPS* têm aumentado rapidamente em função da melhoria dos relógios atômicos e disponibilidade dos receptores. Além das aplicações clássicas em geodésia (posicionamento, navegação, determinação do geóide, etc ...) é essencial também em comunicações, codificação e decodificação de mensagens criptografadas, detecção de falhas em linhas de transmissão de energia, metrologia e experimentos em física fundamental. Atualmente o *GPS* é o laboratório por excelência para realização de testes em relatividade geral e especial.

## 4.2. RECOMENDAÇÕES

Quando é utilizada a técnica de posicionamento estático por ponto de alta precisão *GPS* (*PPP*), onde todos os erros envolvidos são modelados, a precisão obtida em posicionamento final pode alcançar até poucos milímetros. Isto indica que, em futuro próximo, os *softwares* para processamento de dados *GPS*, que realizam *PPP*, também deverão levar em conta as novas correções relativísticas, pois elas ainda não estão incluídas nos programas mais utilizados para pós-processamento de dados *GPS*. A modelagem cada vez mais sofisticada dos erros que atuam sobre o posicionamento *GPS* melhora sua performance global e aumenta o interesse no *PPP*.

Recomenda-se, portanto, o desenvolvimento de um módulo computacional, em linguagem de programação *Fortran*, contendo as novas correções relativísticas e a sua implementação no *software* para processamento de dados *Bernese*. Para verificar o impacto da nova modelagem dos efeitos relativísticos, em posicionamento final, é recomendada a técnica de posicionamento por ponto altamente preciso, nela os erros dos relógios não se cancelam como nas técnicas envolvendo posicionamento relativo, onde dois ou mais receptores estão envolvidos. Para isto é necessária a modelagem de todos os erros envolvidos em posicionamento *GPS*. Como a ordem de grandeza da nova correção é de 0,1 a 0,2 *ns*, poderia ser esperada uma melhoria de 3 a 6 cm no posicionamento final.

## ANEXO 1 – LONGITUDE DO NODO ASCENDENTE

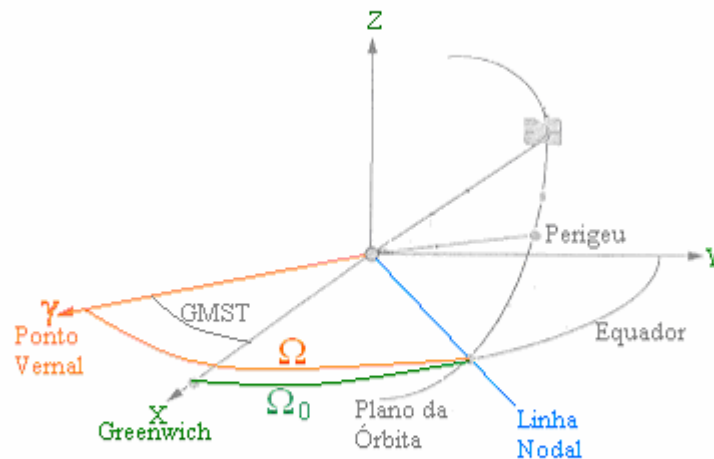
Há uma diferença entre o parâmetro orbital  $\Omega$ , ascensão reta do nodo ascendente, e o parâmetro  $\Omega_0$ , longitude do nodo ascendente, que é disseminado nas efemérides transmitidas pelos satélites *GPS*.

O primeiro,  $\Omega$ , é medido desde o ponto vernal até a linha nodal, intersecção entre o plano da órbita do satélite e o plano do equador terrestre. É este o parâmetro utilizado nas equações da Dinâmica Orbital e nesta dissertação.

O segundo,  $\Omega_0$ , é medido desde o meridiano de Greenwich até a linha nodal.

As equações de transformação entre os dois parâmetros encontram-se em SEEBER (1993), página 224 e em GEMAEL e ANDRADE (2004), página 251.

FIGURA A1.1 – LONGITUDE DO NODO ASCENDENTE



FONTE: ADAPTADA DE MONICO (2000)

## ANEXO 2 – SISTEMAS DE REFERÊNCIA E EFEITO *SAGNAC*

A maior parte dos usuários do *GPS* estão sobre a superfície da Terra, fixos ou movendo-se lentamente em relação à superfície. As efemérides transmitidas pelos satélites *GPS*, usadas pelos receptores, providenciam ao usuário dados para calcular a posição do satélite no instante da transmissão do sinal, num sistema de referências geocêntrico e que rotaciona com velocidade angular  $\omega_E = 7,2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ , chamado *WGS-84*. Usualmente, os tempos de transmissão do sinal  $t_j$  de cada satélite são diferentes, e cada medida realizada pelo receptor deve levar em conta a diferença de orientação no sistema no qual as efemérides são transmitidas. Portanto, para implementar as equações (2.17) o receptor deve efetuar diferentes rotações para o sistema inercial, geocêntrico, no qual elas se aplicam. Após, uma nova rotação deve ser realizada para o sistema rotacional, com o objetivo de calcular a posição do receptor.

Considera-se agora a transformação de um sistema inercial no qual o espaço tempo é Minkowskiano, para um sistema de referências rotacional. Num primeiro momento o potencial gravitacional será ignorado e então a métrica em um sistema de referências inercial em coordenadas cilíndricas é (ASHBY, 2003):

$$-ds^2 = -(cdt)^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (\text{A2.1})$$

e a transformação para um sistema de coordenadas  $\{t', r', \phi', z'\}$  rotacionando com velocidade angular uniforme  $\omega_E$  é:

$$t = t', \quad r = r', \quad \phi = \phi' + \omega_E t', \quad z = z'. \quad (\text{A2.2})$$

Isto resulta na métrica de *Langevin* no sistema rotacional (ASHBY, 2003):

$$-ds^2 = -\left(1 - \frac{\omega_E^2 r'^2}{c^2}\right) \cdot (cdt')^2 + 2\omega_E r'^2 d\phi' dt' + (d\sigma')^2 \quad (\text{A2.3})$$

onde

$$(d\sigma')^2 = (dr')^2 + (r'd\phi')^2 + (dz')^2. \quad (\text{A2.4})$$

Assumir que  $t = t'$  nas equações (A2.2) significa que no sistema rotacional a variável  $t'$  é verdadeiramente determinada no sistema inercial subjacente. Este é o conceito de tempo coordenado utilizado no *GPS*.

Agora considera-se a necessidade de sincronizar relógios reais em um sistema rotacional, ou seja, sobre a superfície da Terra. O procedimento utilizado é a sincronização de Einstein, ou seja, a constância da velocidade da luz. Para a luz,  $ds^2 = 0$  na equação (A2.3). Considerando apenas os termos de primeira ordem no pequeno parâmetro  $\omega_E r' / c$ , tem-se:

$$(cdt')^2 - \frac{2\omega_E r'^2 d\phi'(cdt')}{c} - (d\sigma')^2 = 0 \quad (\text{A2.5})$$

$$cdt' = d\sigma' + \frac{\omega_E r'^2 d\phi'}{c} \quad (\text{A2.6})$$

O tempo total para a luz percorrer a trajetória é:

$$\int_{traj} dt' = \int_{traj} \frac{d\sigma'}{c} + \frac{2\omega_E}{c^2} \int_{traj} dA'_z \quad (\text{A2.7})$$

A área infinitesimal  $dA'_z$  é a projeção, sobre o plano equatorial, da área varrida (no sistema rotacional) por um vetor desde o geocentro até o pulso luminoso em movimento e é igual a  $r'^2 d\phi' / 2$ .

Observadores no sistema inercial subjacente ao rotacional, assistindo a um procedimento de sincronização no sistema rotacional onde é tomado que  $\int d\sigma'/c$ , afirmariam que há inconsistências dependentes da trajetória no processo e que são proporcionais à projeção, sobre um plano, da área varrida pelo vetor que descreve a trajetória.

Pode-se considerar, por exemplo, vários relógios sobre o equador, num procedimento de sincronização, onde o primeiro relógio envia um sinal eletromagnético para o seguinte, em direção ao leste. Então, para uma volta completa em torno do equador,  $2\omega_E/c^2 = 1,6227 \times 10^{-21} s/m^2$ , supondo  $a_E = 6.378.137 m$  para o raio equatorial, tem-se a área  $\pi a_E^2 = 1,27802 \times 10^{14} m^2$ , e:

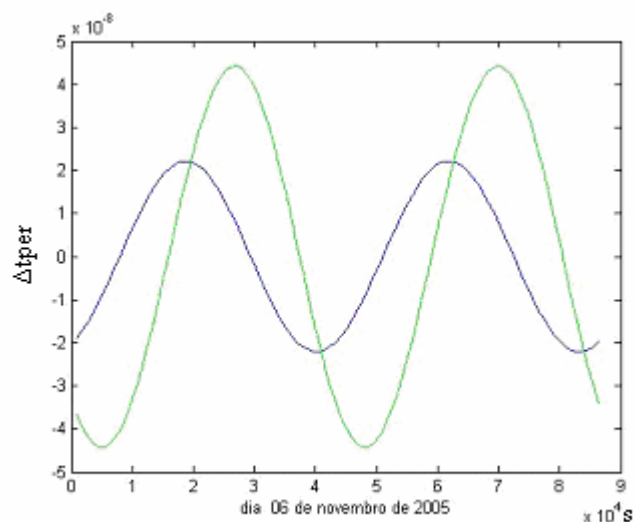
$$\frac{2\omega_E}{c^2} \int_{traj} dA'_z = 207,4 \text{ ns.} \quad (\text{A2.8})$$

Isto significa que, percorrendo o equador para o sentido leste, o último relógio no procedimento de sincronização estaria atrasado em relação ao primeiro de  $207,4 \text{ ns}$ . Se é realizado o mesmo procedimento de sincronização sobre o equador, no sentido oeste, o último relógio estaria adiantado em relação ao primeiro de  $207,4 \text{ ns}$ . Este é o efeito *Sagnac*.

### ANEXO 3 – GRÁFICOS DA CORREÇÃO RELATIVÍSTICA PERIÓDICA CONVENCIONAL

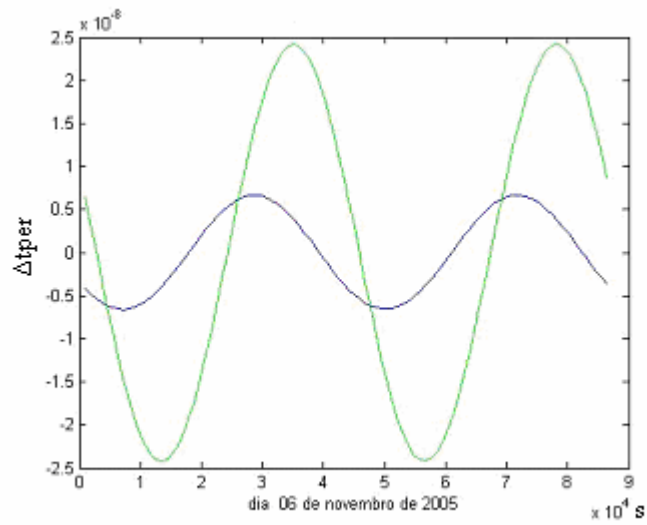
Os gráficos da correção relativística convencional para a excentricidade da órbita, equação (3.41), para os doze satélites analisados, são mostrados nas figuras (A3.1) até (A3.6). O receptor *GPS* calcula esta correção com os dados recebidos nas efemérides transmitidas, que são baseadas em previsões. Nas figuras (A3.1) até (A3.6), calculou-se a equação (3.41) com os dados das efemérides precisas do arquivo *SP3* para o dia 06 de novembro de 2005. Portanto, estas correções são mais precisas do que aquelas que seriam calculadas pelo receptor. É interessante verificar que a magnitude desta correção pode variar bastante de um satélite *GPS* para outro.

FIGURA A3.1 - CORREÇÃO RELATIVÍSTICA PARA A EXCENRICIDADE DA ÓRBITA – SATÉLITES *GPS* DO PLANO ORBITAL **A**



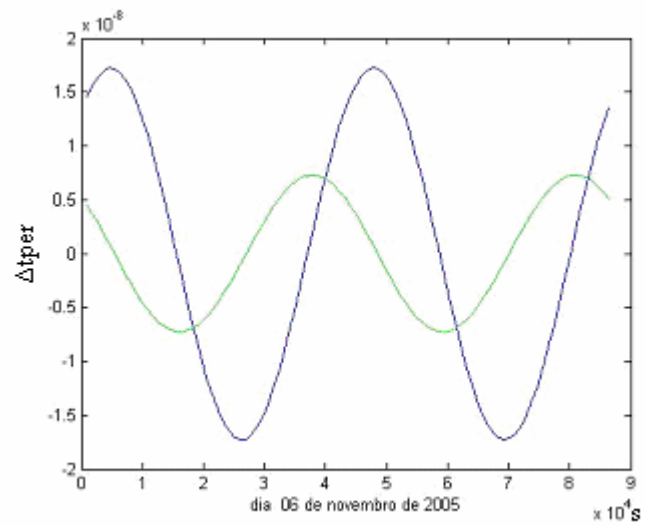
- PRN 08
- PRN 27

FIGURA A3.2 - CORREÇÃO RELATIVÍSTICA PARA A EXCENRICIDADE DA ÓRBITA – SATÉLITES *GPS* DO PLANO ORBITAL *B*



- PRN 16
- PRN 28

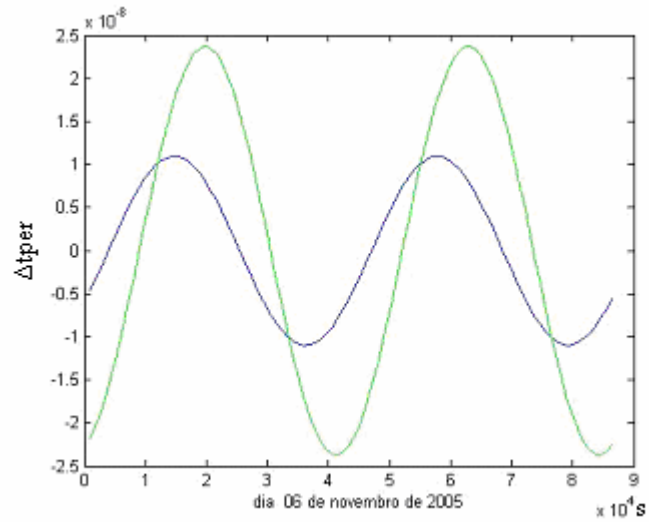
FIGURA A3.3 - CORREÇÃO RELATIVÍSTICA PARA A EXCENRICIDADE DA ÓRBITA – SATÉLITES *GPS* DO PLANO ORBITAL *C*



- PRN 03
- PRN 19

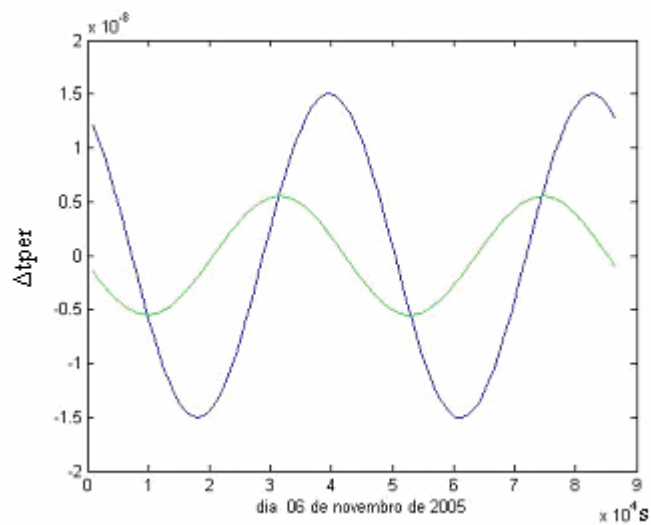


FIGURA A3.4 - CORREÇÃO RELATIVÍSTICA PARA A EXCENTRICIDADE DA ÓRBITA – SATÉLITES *GPS* DO PLANO ORBITAL *D*



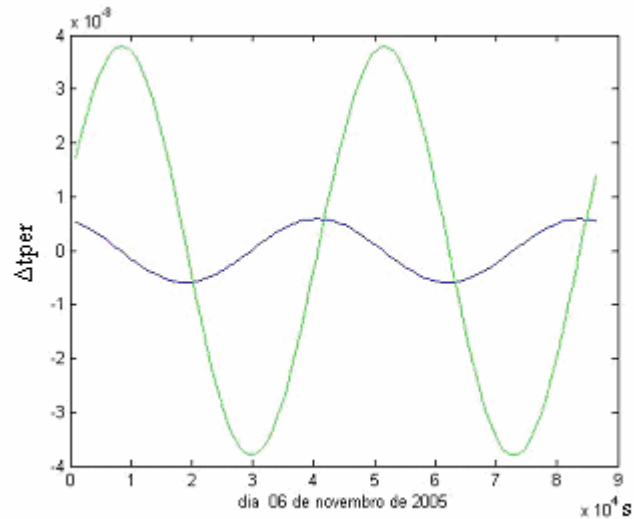
- PRN 11
- PRN 21

FIGURA A3.5 - CORREÇÃO RELATIVÍSTICA PARA A EXCENTRICIDADE DA ÓRBITA – SATÉLITES *GPS* DO PLANO ORBITAL *E*



- PRN 10
- PRN 20

FIGURA A3.6 - CORREÇÃO RELATIVÍSTICA PARA A EXCENTRICIDADE DA ÓRBITA – SATÉLITES GPS DO PLANO ORBITAL *F*



- PRN 13
- PRN 26

TABELA A3.1 – VALORES MÁXIMO E MÍNIMO DE  $\Delta t_{per}$  PARA OS SATÉLITES PESQUISADOS

PRN	$\Delta t_{per}$ ( $\times 10^{-8}$ s)	Erro em pseudo-distância (metros)
03	- 1,7 até + 1,7	- 5,0 até + 5,0
08	- 2,0 até + 2,0	- 6,0 até + 6,0
10	- 1,5 até + 1,5	- 4,5 até + 4,5
11	- 1,2 até + 1,0	- 3,6 até + 3,0
13	- 0,5 até + 0,5	- 1,5 até + 1,5
16	- 0,7 até + 0,5	- 2,0 até + 1,5
19	- 0,7 até + 0,5	- 2,0 até + 1,5
20	- 0,5 até + 0,5	- 1,5 até + 1,5
21	- 2,2 até + 2,5	- 6,6 até + 7,5
26	- 4,0 até + 4,0	- 12,0 até + 12,0
27	- 4,5 até + 4,5	- 13,5 até + 13,5
28	- 2,5 até + 2,5	- 7,5 até + 7,5

A tabela (A3.1) mostra os resultados obtidos nas figuras (A3.1) até (A3.6), de forma resumida. Na segunda coluna estão os valores máximo e mínimo de  $\Delta t_{\text{per}}$  para os satélites pesquisados. Na terceira coluna é mostrado o impacto destes erros em pseudodistância.

## ANEXO 4 – CORREÇÃO DO TEMPO RECEBIDO PELO USUÁRIO

As mensagens de navegação transmitidas pelos satélites *GPS* contém, nos subquadros 1, 2 e 3, dados a respeito dos relógios dos satélites e das efemérides que permitem ao usuário estimar a posição do satélite no momento da transmissão dos sinais (ANDRADE, 1988) e também calcular a diferença entre o tempo fornecido pelo relógio do satélite e o Tempo *GPS* (para o momento da transmissão). Sobre cada uma das pseudodistâncias medidas é efetuada uma correção com respeito a esta diferença entre os tempos do relógios do satélite e o Tempo *GPS* (sobre o geóide).

A equação padrão que o usuário deve utilizar é (SEEBER, 1993), (GEMAEL E ANDRADE, 2004):

$$t = t_{sv} - \Delta t_{sv}, \quad (\text{A4.1})$$

onde:

$t$  = Tempo *GPS* (segundos);

$t_{sv}$  = tempo fornecido pelo relógio de um satélite *GPS* específico, no momento da transmissão do sinal (segundos);

$\Delta t_{sv}$  = correção sobre o tempo fornecido pelo relógio do satélite observado;

com

$$\Delta t_{sv} = a_{f0} + a_{f1}(t - t_{oc}) + a_{f2}(t - t_{oc})^2 + \Delta t_{rel} \quad (\text{A4.2})$$

$$e \quad \Delta t_{rel} = \left( \frac{-2\sqrt{GM}}{c^2} \right) \cdot \sqrt{a} \cdot e \cdot \text{sen}E. \quad (\text{A4.3})$$

Os parâmetros  $a_{f_0}(s)$ ,  $a_{f_1}(s/s)$  e  $a_{f_2}(s/s^2)$  são coeficientes polinomiais contidos no subquadro 1. O parâmetro  $t_{oc}$  é o tempo de referência dos relógios dos satélites.

A constante  $\left(\frac{-2\sqrt{GM}}{c^2}\right)$  vale  $-4.442807633 \times 10^{-10} \text{ s/m}^{1/2}$ .

Os parâmetros orbitais ( $a$ ,  $e$ ,  $E$ ) estão contidos nos subquadros 2 e 3 na mensagem de navegação.

## ANEXO 5 – FONTES DE ERRO NO SISTEMA GPS

A seguir são apresentados, de forma sucinta, alguns dos principais erros que afetam o sistema *GPS*.

### 1) Avaliação Seletiva (SA/Selective Availability):

No dia 02 de Maio de 2002 a SA foi desativada. SA é uma perturbação intencional no tempo fornecido pela portadora L1 transmitida pelos satélites GPS. Para os receptores civis isto significa uma determinação de posição menos acurada (flutuação de 50 metros num intervalo de alguns minutos). Adicionalmente, os dados das efemérides são transmitidos com menor acurácia. Desta forma, a erro em posicionamento pode alcançar até 150 m em algumas horas.

### 2) Geometria dos satélites:

Um outro fator que influencia a acurácia na determinação da posição é a geometria dos satélites, que, de forma simplificada, pode ser vista como a distribuição relativa de suas posições do ponto de vista do receptor GPS. Se quatro satélites estão, por exemplo, dispostos na direção norte-sul, pode-se dizer que a geometria não é boa. Numa das piores circunstâncias, todos os satélites visíveis pelo receptor estariam alinhados numa mesma direção. Se, por outro lado, os quatro satélites estão bem distribuídos por todo o firmamento, a determinação da posição será bem mais acurada. Se, por exemplo, os satélites estão posicionados no norte, sul, leste e oeste, o receptor efetuará medidas de distâncias em quatro direções diferentes, refletindo uma “boa geometria”. Para indicar a qualidade da geometria dos satélites, os valores DOP (dilution of precision) são utilizados. Dependendo de quais variáveis estão sendo usadas no cálculo dos valores DOP, diferentes variantes são obtidas:

GDOP (geometric dilution of precision),

PDOP (positional dilution of precision),

HDOP (horizontal dilution of precision),  
VDOP (vertical dilution of precision),  
TDOP (time dilution of precision).

Valores abaixo de 4 para o HDOP são bons e acima de 8 não. Os valores para o HDOP pioram se os satélites estão altos, no firmamento. Por outro lado, os valores do VDOP pioram quando os satélites estão mais próximos da linha do horizonte. Os valores para o PDOP são os melhores se um dos satélites está posicionado diretamente acima da vertical e os outros três estão espaçados nas proximidades da linha do horizonte. Para uma determinação acurada da posição, o valor para o GDOP não deve ser menor que 5. A geometria dos satélites não causa inacurácia nas medidas de posição que são realizadas em metros. O GDOP amplifica outras inacurácias. Os erros na determinação da posição causados pela geometria dos satélites também dependem da latitude do receptor.

### 3) Órbitas dos satélites:

Embora os satélites estejam posicionados em órbitas muito precisas, pequenos desvios são possíveis em função de efeitos gravitacionais. O Sol e a Lua têm uma fraca influência na órbita dos satélites GPS. Os dados orbitais são controlados e corrigidos regularmente e são enviados para os receptores nas efemérides transmitidas. Normalmente estes erros são da ordem de 2 metros.

### 4) Efeitos de multicaminhamento:

O efeito de multicaminhamento é causado pela reflexão dos sinais enviados pelos satélites nos objetos próximos ao receptor. Para os satélites GPS este efeito aparece principalmente nas vizinhanças de edifícios e outras elevações. O sinal refletido leva mais tempo para chegar ao receptor do que o sinal direto. A ordem de

grandeza típica deste erro é de alguns metros. A sensibilidade dos receptores GPS a este efeito é função particularmente da arquitetura da antena.

#### 5) Efeitos atmosféricos:

Outra fonte de inacurácia em posicionamento GPS é a redução da velocidade de propagação do sinal transmitido pelos satélites quando atravessam a ionosfera e atmosfera. Entre 80 e 200 Km acima da superfície, na ionosfera, um grande número de partículas positivamente ionizadas e elétrons está presente em função da ionização gerada pela radiação emitida pelo Sol. A maior parte deste erro é corrigida pelo receptor GPS. A ordem de grandeza típica deste efeito é bem conhecida para condições atmosféricas padrão. Entretanto, os receptores civis não são capazes de corrigir mudanças imprevistas como no caso de fortes ventos solares. É conhecido que as ondas eletromagnéticas têm sua velocidade de propagação diminuída com o inverso do quadrado de sua frequência ( $1/f^2$ ) ao passar pela ionosfera. Isto significa que ondas eletromagnéticas de baixas frequências são mais refratadas do que ondas de frequências altas. Se os sinais de frequências diferentes, recebidos por um receptor, são analisados levando-se em consideração seus diferentes tempos de chegada, o erro causado pela propagação ionosférica pode ser calculado. A passagem do sinal eletromagnético pela troposfera é um fator adicional de atraso por refração. Neste caso, a refração se dá pelas diferentes concentrações de vapor de água na troposfera, em virtude das diferentes condições atmosféricas. O erro troposférico é menor do que o ionosférico, mas não pode ser eliminado por cálculos. Ele pode apenas ser aproximado através de modelos matemáticos.

#### 6) Efeitos relativísticos:

Na vida diária não se percebe a onipresença a teoria da relatividade. Entretanto, ela tem influência em vários processos, entre eles, o funcionamento do sistema GPS. Como é bem conhecido, tempo é um fator muito relevante em navegação e



posicionamento por GPS e a acurácia em suas medidas deve estar entre 20 ns a 30 ns. É conhecido da teoria da relatividade que o tempo marcha mais lentamente quando o relógio se movimenta. Para os satélites GPS, que se movimentam a 3874 m/s, os relógios marcharão mais lentamente quando observados da superfície da Terra. Isto se chama dilatação temporal e leva a uma inacurácia nas medidas de tempo da ordem de 7,2 microssegundos por dia. Também é conhecido da teoria da relatividade que o tempo marcha mais lentamente em campos gravitacionais mais intensos. Para um observador na superfície, os relógios dos satélites GPS estão marchando mais rapidamente (os satélites GPS estão a 20.000 km de altitude e expostos a um campo gravitacional bem menos intenso do que na superfície). E este último efeito é aproximadamente 6 vezes maior do que a dilatação temporal causada pela velocidade dos satélites. O resultado líquido dos dois efeitos faz com que os relógios dos satélites GPS pareçam marchar um pouco mais rapidamente quando observados da superfície.

#### 7) Centro de fase da antena:

A não coincidência entre o centro mecânico e centro eletromagnético da antena do receptor *GPS* causa um erro na ordem de alguns milímetros ou centímetros. Para minimizar este erro é necessária a calibração da antena, especialmente se num mesmo posicionamento forem empregadas antenas de fabricantes diferentes. Se forem utilizadas antenas idênticas, no posicionamento relativo, então este erro é desprezível. (KRUEGER, 1996)

## REFERÊNCIAS

ALLAN, D. W., ASHBY, N. e HODGE, C. C., **The Science of Timekeeping**. Application Note 1289, Hewlett Packard Company. Junho/1997.

ASHBY, N. **Relativity in the Global Positioning System**. Living Reviews in Relativity, **6**, (2003), 1.[Online Article]: citado em 5 de Maio de 2004.

<http://www.livingreviews.org/Articles/Volume6/2003-1ashby/>

ASHBY, N. **Relativity and the Global Positioning System**. Physics Today, pp 41-47, Maio/2002.

ASHBY, N., ALLAN, D. W., e WEISS, M. **Around-the-World Relativistic Sagnac Experiment**. Science, vol. **228**, pp. 69-70, 5 de Abril de 1985.

ASHBY, N. **Relativity in the Future of Engineering**. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. **43**, número 4, Agosto de 1994.

ASHBY, N. e SPILKER JR, J. J. **Introduction to Relativistic Effects on the Global Positioning System**, em PARKINSON, B. W. e SPILKER JR, J. J. (eds.), Global Positioning System: Theory and Applications, vol **1**, cap. 18, 623-697. American Institute of Aeronautics and Astronautics , Inc., Washington, 1996.

ANDRADE, J. B de. **Navstar – GPS**. Departamento de Geociências, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná (UFPR). Curitiba, 1988.

BLANCHET, L., SALOMON, C., TEYSSANDIER, P., WOLF, P. **Relativistic Theory for Time and Frequency Transfer to Order  $c^{-3}$** . Astronomy and Astrophysics 370, pp 320-329, 2001.

BURSA M., KOUBA J., RADEJ K., VATRT V., VOJTISKOVA M., TRUE, S. A. **Determination of Geopotential At The Tide Gauge Defining The North American Vertical Datum 1988 (NAVD88)**. Geomatica vol. **53**(3), pp. 291-296, 1998.

FERREIRA, L. D. D. **Dinâmica Orbital**. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná (UFPR). Curitiba, 1998.

FUKUSHIMA, T. **Time Systems in General Relativity**, em KOVALEVSKY, J. et al (eds), Reference Frames, pp 417-444. Kluwer Academic Publishers, 1989.

GEMAEL, C.; ANDRADE, J. B. **Geodésia Celeste**. Curitiba: Editora da UFPR, 2004.

GULKLETT, M. **Relativistic Effects in GPS and LEO**. Department of Geophysics, The Niels Bohr Institute for Physics, Astronomy and Geophysics, University of Copenhagen. Denmark, 2003.

GURTNER, W. **Rinex: The Receiver Independent Exchange Format Version 2.1**. Astronomical Institute, University of Berne, 08 de junho, 2001.

HAFELE, J. C. e KEATING, R. E. **Around the World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains**. Science, vol **177**, 1972.

IAU **IAU Transactions**, vol. 11B. Kluwer, Dordecht, 1991.

ICD-GPS-200c **Interface Control Document**. NAVSTAR GPS Space Segment, Navigation User Interface. AIR Inc. Research Corporation, Fountain Valley, California, 10 de Outubro de 1993.

KAULA, W. M. **Theory of Satellite Geodesy**. London, Blaisdell, 1966.

KOUBA, J. **Relativistic Time Transformations in GPS.** GPS Solutions, vol 5, número 4, pp. 1-9, 2002.

KOUBA, J. **Improved Relativistic Transformations in GPS.** GPS Solutions, vol. 8, pp. 170-180, 2004.

KRUEGER, C. P. **Investigações sobre aplicações de alta precisão do GPS no âmbito marinho.** Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da UFPR, como requisito parcial à obtenção do grau de Doutora, Curitiba, 1996.

LAGRASTA, S. **Navigation And Clocks, Time, Relativity Modelling: A Short Survey.** International Workshop On Galileo Time. Torino, Itália. 27 e 28 de Setembro de 2004.

MONICO, J. F. G. **Posicionamento Por Ponto de Alta Precisão Utilizando o GPS: Uma Solução Para a Geodinâmica.** Brazilian Journal of Geophysics, vol. 18(1), 2000.

MONTENBRUCK, O. e GILL, E. **Satellite Orbits – Models, Methods and Applications.** Berlin: Springer – Verlag, 2000.

PETIT, G. **Importance Of Common Framework For Realization Of Space-time Reference Systems** em Rummel R., Drewes H., Bosh W., Hornik H. (eds) Towards An Integrated Global Geodetic Observing System (IGGOS). Berlin: Springer – Verlag, pp 1-7, 1998.

SEEBER, G., **Satellite Geodesy: Foundations, Methods and Applications.** Berlin: Walter de Gruyter, 1993.