

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CÍNTIA TEIXEIRA PRÉVE

IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE DE UM SISTEMA COM UM GRAU DE  
LIBERDADE NÃO LINEAR CÚBICO USANDO NEUTRALIZADORES  
DINÂMICOS VISCOELÁSTICOS

CURITIBA - PR

2015

CÍNTIA TEIXEIRA PRÉVE

**IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE DE UM SISTEMA COM UM GRAU DE  
LIBERDADE NÃO LINEAR CÚBICO USANDO NEUTRALIZADORES  
DINÂMICOS VISCOELÁSTICOS**

Dissertação aprovada como requisito parcial  
à obtenção do grau de Mestra em Engenharia Mecânica do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri

Coorientador: Prof. Dr. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes

**CURITIBA - PR**

**2015**

P944i Prêve, Cíntia Teixeira

Identificação e controle de um sistema com um grau de liberdade não linear cúbico usando neutralizadores dinâmicos viscoelásticos / Cíntia Teixeira Prêve. - Curitiba, 2015.

94 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2015.

Orientador: Carlos Alberto Bavastri - Coorientador: Eduardo Márcio de Oliveira Lopes. Bibliografia: p. 81-87.

1. Mecânica - Vibração. 2. Materiais viscoelásticos. 3. Sistemas não lineares. 4. Derivada. I. Universidade Federal do Paraná. II. Bavastri, Carlos Alberto. III. Lopes, Eduardo Márcio de Oliveira. IV. Identificação e controle de um sistema com um grau de liberdade não linear cúbico usando neutralizadores dinâmicos viscoelásticos.

CDD: 620.11248

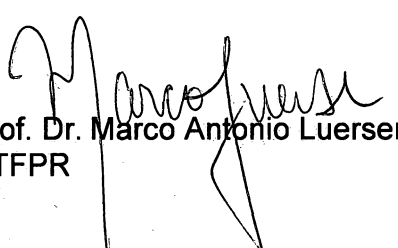
## TERMO DE APROVAÇÃO

CÍNTIA TEIXEIRA PRÉVE

### IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE DE UM SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE NÃO LINEAR CÚBICO USANDO NEUTRALIZADORES DINÂMICOS VISCOELÁSTICOS

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestra em Engenharia Mecânica do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

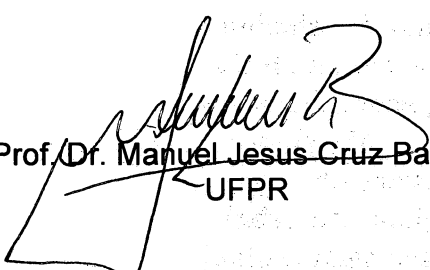
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Marco Antonio Luersen  
UTFPR



Prof. Dr. Flavio Augusto Presezniak  
VOLVO DO BRASIL VEÍCULOS



Prof. Dr. Manuel Jesus Cruz Barreda  
UFPR

Curitiba, 23 fevereiro de 2015.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, que todos os dias me fortalece e ilumina minha caminhada. À minha família, pilares fundamentais da minha educação e desenvolvimento, em especial ao meu pai Vanderlei, minha mãe Nilsa e meu irmão Deison. Dedico também aos meus colegas de mestrado e aos colegas da UFPR. Ainda, aos amigos verdadeiros que estiveram junto comigo nesta etapa e aos ilustres professores, também responsáveis pelo avanço da minha carreira acadêmica. A todos vocês, muito obrigada. Sem esse time, a trajetória não teria sido a mesma. Valeu galera!

## AGRADECIMENTOS

Inicialmente, deixo os meus sinceros agradecimentos a todos que estiveram e estão presentes durante a minha caminhada.

Agradeço ao meu orientador e professor Dr. Carlos Alberto Bavastri e ao meu coorientador e professor Dr. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes pelo auxílio e atenção dedicada a este trabalho. Agradeço também à banca examinadora e aos demais seletos professores. Ao André Born, obrigada pela colaboração, dedicação e comprometimento com este trabalho. E à CAPES pelo apoio financeiro durante todo esse período.

Aos meus colegas do Laboratório de Vibrações e Som em especial à Francielly Castro, que foi minha companheira de todas as horas, das angustiantes até as mais felizes; sem dúvida alguma, foi um presente que Deus me ofertou nesta etapa e que agora não deixo mais sair. À Fernanda Balbino, que foi conforto nos momentos tristes e porto seguro nos momentos de decisão. À Adriana Basniak, que chegou para ficar e, me proporcionou os meus melhores momentos de descontração, sorrisos e alegrias. À Regiane Piontkewicz, que, mesmo distante, compartilhou dos mesmos sentimentos e experiências desde o início dessa caminhada na UFPR. À Jéssica Felix, que, sem querer entrou para ficar e, sem dúvida alguma, entende o quanto esse momento é importante. Ao Pedro Nunes, pelos papos de vida e pela presença divertida diariamente. Ao Leandro da Silva, pelas conversas ambiciosas de carreira e algumas fofocas. Ao colega Jederson da Silva, que auxiliou-me quando preciso no laboratório, e ao colega Marcelo Fortuoso, pela presença sincera e pelo atendimento aos meus inúmeros gritos de socorro. Ao Adair Dumas e ao Saimon Tramontin, por continuarem sendo verdadeiros irmãos desde a UDESC: vocês já não me escapam mais. Não poderia esquecer ainda das minhas colegas do basquete Débora Fidelis, Ana Bonamigo, Juliana Viana, Camilla Albuquerque, Isabel Gebauer, Carolina Mescko, Karine Mottin, Francielly Castro e Tatiana Abdalla, pois junto com elas a caminhada semanal do mestrado ficava leve e o que parecia árduo, tornava-se tranquilo: vocês são sensacionais. Enfim, a todos os colegas dessa Universidade que de, alguma maneira, colaboraram, meus cumprimentos: vocês fazem parte da minha história na UFPR.

Agradeço também ao meu irmão, que resolve todos os meus problemas de informática quando eu me desespero e penso em voltar ao tempo da pedra, além de ser o meu companheiro eterno. Mesmo longe, eu te tenho sempre aqui, sempre no meu coração.

Para fechar com chave de ouro minha gratidão, vem eles, meus queridos pais, o casal mais forte, batalhador, persistente, cúmplice e fiel aos seus filhos e à sua casa. Eu agradeço pela vida, pelo esforço de vocês na minha criação, pela participação ativa nas atividades do meu mestrado, pela minha educação, por me aturarem e por sempre acreditarem em mim. Eu não cumpriria mais essa etapa, se não fossem vocês. A toda a minha grande família, obrigada, eu amo a todos!

Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros  
de gigantes.

Isaac Newton

## RESUMO

Neutralizadores dinâmicos viscoelásticos são dispositivos auxiliares consagrados, utilizados no controle de vibração e ruído de sistemas mecânicos. Mais recentemente, eles vêm sendo particularmente estudados no controle de sistemas não lineares. O uso de neutralizadores viscoelásticos se sobressai pelo fato de que a implementação prática de neutralizadores dinâmicos com amortecimento viscoso é difícil, aparecendo esses na maioria das vezes, apenas para o fim de comparações. Os materiais viscoelásticos têm a capacidade de armazenar e dissipar energia vibratória, consolidando os elementos de mola e amortecedor em um único elemento. Neste trabalho, é apresentada uma metodologia para a identificação de um sistema não linear cúbico, utilizando o problema inverso de identificação e, posteriormente, a concepção de um neutralizador dinâmico viscoelástico linear ótimo ligado àquele sistema não linear cúbico. A formulação matemática baseia-se no conceito de parâmetros equivalentes generalizados para o neutralizador, juntamente com o método do balanço harmônico para a solução da equação de movimento do sistema composto. O modelo de derivada fracionária com quatro parâmetros é utilizado para representar o material viscoelástico. Técnicas de otimização não linear são utilizadas na implementação numérica, tanto na identificação do sistema primário quanto no controle do sistema composto (sistema primário mais neutralizador).

Palavras-chave: Controle de Vibração. Neutralizadores Dinâmicos Viscoelásticos. Sistemas Não Lineares Cúbicos. Derivada Fracionária.



## ABSTRACT

Viscoelastic dynamic neutralizers are well established auxiliary devices used in the vibration and noise control of mechanical systems more recently, they have been particularly investigated for non-linear systems. The use of viscoelastic neutralizers stand out for the reason that viscous neutralizers are difficult to implement, appearing in most cases for comparison purposes only. The viscoelastic materials have the capacity to store and dissipate vibrational energy, joining the spring and the damper in one element only. In this dissertation, a methodology is presented to the identification of a cubic nonlinear system, using the inverse identification problem and, subsequently, the design of an optimal viscoelastic dynamic neutralizer to be attached to that nonlinear system. The mathematical formulation is based on the concept of generalizad equivalent parameters for the neutralizer, along with the harmonic balance method for the solution of the equations of motion of the compound system. The model of fractional derivative with four parameters is used to describe the viscoelastic material. Nonlinear optimization techniques are used in the numerical implementation, both in the identification of the primary system and in the control of the compound system (primary plus neutralizer).

Keywords: Vibration Control. Viscoelastic Dynamic Neutralizers. Cubic Nonlinear Systems. Fractional Derivative.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Deformações dos materiais elásticos. . . . .	25
2	Fator de perda e módulo dinâmico com temperatura e frequência contantes. . . . .	31
3	Nomograma de frequência reduzida. . . . .	32
4	Sinais de resposta de um sistema não linear. . . . .	35
5	Gráfico de Nyquist de um sistema não linear cúbico. . . . .	36
6	Gráfico de Bode de um sistema não linear cúbico. . . . .	36
7	Sistema não linear cúbico com um grau de liberdade. . . . .	44
8	Resposta (deslocamento) de um oscilador de <i>Duffing</i> para uma entrada senoidal. Os pontos de bifurcação são vistos em B e C. . . . .	47
9	Resposta (deslocamento) de um oscilador de <i>Duffing</i> para uma entrada senoidal da frequência inferior à frequência superior. . . . .	47
10	Resposta (deslocamento) de um oscilador de <i>Duffing</i> para uma entrada senoidal da frequência superior à frequência inferior. . . . .	48
11	(a) Isolamento de movimento. (b) Isolamento de força. . . . .	48
12	Sistema não linear cúbico com um grau de liberdade sob movimento da base. . . . .	50
13	Plano complexo. . . . .	52
14	Modelo do sistema composto. . . . .	57
15	Neutralizador simples com um grau de liberdade. . . . .	62
16	Sistemas equivalentes. . . . .	64
17	Modelo do sistema com PEG's. . . . .	65
18	Modelo do sistema composto para transmissibilidade. . . . .	67
19	Método de Nelder e Mead. . . . .	69
20	FRF para um sistema linear com NDV. . . . .	72
21	Esquema de otimização não linear - Identificação + Controle. . . . .	73
22	Instante do ajuste de curvas de transmissibilidade. . . . .	75
23	Ajuste final das curvas de transmissibilidade. . . . .	75
24	Sistema sem e com NDV - Neoprene. . . . .	77
25	Sistema sem e com NDV - Borracha Butílica. . . . .	77
26	Sistema sem e com NDV - EAR-C1002. . . . .	78
27	Sistema não linear cúbico sob excitação. . . . .	88
28	Conjunto experimental. . . . .	89
29	Conjunto experimental real. . . . .	90
30	Sistema Não Linear Cúbico. . . . .	91
31	Curva Experimental (variação crescente de frequência). . . . .	92
32	Módulo de sinais. . . . .	93
33	Amplificador. . . . .	94

## LISTA DE TABELAS

1	Modelo de derivada fracionária de quatro parâmetros dos materiais viscoelásticos. . . . .	76
2	Parâmetros complementares dos materiais viscoelásticos. . . . .	76
3	Frequência ótima do neutralizador viscoelástico linear. . . . .	76

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Alfabeto Latino

$A$	- Área cisalhada
$B$	- Módulo volumétrico
$b_m$	- Parâmetro do modelo fracionário
$b_1$	- Parâmetro do modelo fracionário
$c_{eq}$	- Amortecimento equivalente do sistema composto
$c, c_1$	- Constante de amortecimento linear
$D^{\kappa_m}$	- Derivada de ordem fracionária
$D^{\alpha_n}$	- Derivada de ordem fracionária
$E$	- Módulo de Young
$E_0$	- Parâmetro do modelo fracionário
$E_n$	- Parâmetro do modelo fracionário
$E(\Omega)$	- Módulo dinâmico de elasticidade
$E_c(\Omega)$	- Módulo complexo de elasticidade
$E'(\Omega)$	- Módulo de perda
$F(\Omega)$	- Transformada de Fourier de $f(t)$ , força aplicada ao sistema
$F_t(\Omega)$	- Transformada de Fourier de $f_t(t)$ , força transmitida pelo sistema
$f_{obj}(x)$	- Função objetivo
$G(\Omega)$	- Módulo dinâmico de cisalhamento
$G_c(\Omega)$	- Módulo complexo de cisalhamento
$G_0(\Omega)$	- Módulo instantâneo ou relaxado
$G_1(\Omega)$	- Parâmetro do modelo fracionário
$G_\infty(\Omega)$	- Módulo não relaxado ou de longo tempo
$g_j(x)$	- $j$ -ésima restrição de desigualdade
$H(\Omega)$	- Função resposta em frequência
$h$	- Altura entre as áreas cisalhadas
$h_i(x)$	- $i$ -ésima restrição de igualdade
$i$	- $\sqrt{-1}$
$\bar{k}_b(\Omega)$	- Rigidez dinâmica na base
$k, k_1$	- Constante de rigidez linear
$k_3$	- Constante de rigidez não linear
$\bar{k}$	- Rigidez dinâmica
$L$	- Fator geométrico
$M$	- Relação entre tensão e deformação
$m_a$	- Massa do neutralizador
$m_{eq}$	- Massa equivalente do sistema composto
$m_1$	- Massa do sistema primário
$\mathbb{R}$	- Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	- Espaço n-dimensional
$S$	- Fator de forma
$S_{yy}$	- Densidade espectral de potência

$S_{xy}$	-	Densidade espectral de potência cruzada
$T_0$	-	Temperatura de projeto do neutralizador
$t$	-	tempo
$X(\Omega)$	-	Transformada de Fourier de $x(t)$
$X_b(\Omega)$	-	Transformada de Fourier de $x_b(t)$
$x$	-	Vetor projeto
$x(t)$	-	Deslocamento da massa de um sistema com um grau de liberdade
$x'(t)$	-	Velocidade da massa de um sistema com um grau de liberdade
$x''(t)$	-	Aceleração da massa de um sistema com um grau de liberdade
$x_2$	-	Coordenada generalizada do sistema secundário
$Y(\Omega)$	-	Transformada de Fourier de $y(t)$
$y(t)$	-	Excitação sobre o sistema primário ou estrutura
$Z(\Omega)$	-	Transformada de Fourier de $z(t)$
$z(t)$	-	Movimento da massa em relação a base

### Alfabeto Grego

$\alpha$	-	Parâmetro fracionário
$\alpha_3$	-	Constante de não linearidade cúbica
$\alpha_n$	-	Ordem fracionária
$\alpha_T$	-	Deslocamento das curvas de $G(\Omega)$ ou $E(\Omega)$
$\varepsilon(t)$	-	Deformação
$\eta_G(\Omega)$	-	Fator de perda de cisalhamento do material viscoelástico
$\eta_E(\Omega)$	-	Fator de perda longitudinal do material viscoelástico
$\kappa_m$	-	Ordem fracionária
$\nu$	-	Coefficiente de Poisson
$\Omega_n$	-	Frequência natural
$\Omega_R$	-	Frequência reduzida
$\Omega_i$	-	Frequência inicial
$\Omega_f$	-	Frequência final
$\Omega_k$	-	$k$ -ésima frequência
$\varphi$	-	Ângulo de fase
$\varphi_t$	-	Ângulo de fase da transmissibilidade
$\varphi_x$	-	Ângulo de fase do deslocamento
$\varphi_{x_b}$	-	Ângulo de fase do deslocamento na base
$\varphi_z$	-	Ângulo de fase da diferença de deslocamento
$\sigma(t)$	-	Tensão
$\theta_1$	-	Parâmetro do material viscoelástico
$\theta_2$	-	Parâmetro do material viscoelástico

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
1.1	Proposta . . . . .	16
1.2	Estrutura do Texto . . . . .	17
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>19</b>
2.1	Controle de Vibrações . . . . .	19
2.2	Sistemas Não Lineares . . . . .	21
<b>3</b>	<b>MATERIAIS VISCOELÁSTICOS</b>	<b>24</b>
3.1	Propriedades Dinâmicas do Material Viscoelástico . . . . .	24
3.2	Modelos para o Material Viscoelástico . . . . .	26
3.2.1	Modelo com Derivada de Ordem Inteira . . . . .	26
3.2.2	Modelo com Derivada de Ordem Fracionária . . . . .	28
<b>4</b>	<b>SISTEMAS NÃO LINEARES</b>	<b>33</b>
4.1	Tipos de Excitação . . . . .	37
4.2	Tipos de Não Linearidade . . . . .	39
4.2.1	Rigidez Cúbica . . . . .	39
4.2.2	Rigidez ou Amortecimento Bilinear . . . . .	40
4.2.3	Rigidez Linear por Partes . . . . .	40
4.2.4	Amortecimento Não Linear . . . . .	41
4.2.5	Atrito de Coulomb . . . . .	41
4.3	Solução de uma Equação Diferencial Não Linear . . . . .	42
4.3.1	Método do Balanço Harmônico - (MBH) . . . . .	43
4.3.2	Sistema Não Linear Cúbico com um Grau de Liberdade . . . . .	44
4.3.3	Função Resposta em Frequência - Não Linearidade Cúbica . . . . .	46
4.3.4	Transmissibilidade . . . . .	48
4.3.5	Isolamento de Movimento - Sistema Linear com um Grau de Liberdade	49
4.3.6	Isolamento de Movimento - Sistema Não Linear Cúbico com um Grau de Liberdade . . . . .	50
4.3.7	Influência dos Harmônicos Superiores . . . . .	54
4.3.8	Sistema Não Linear Cúbico com dois Graus de Liberdade . . . . .	56
4.3.9	Sistema Composto Clássico . . . . .	56
4.3.10	Parâmetros Equivalentes Generalizados - PEG's . . . . .	62
4.3.11	Sistema Composto com Parâmetros Equivalentes Generalizados - (PEG's) . . . . .	65
4.3.12	Sistema Composto - Transmissibilidade e PEG's . . . . .	66
<b>5</b>	<b>PROJETO ÓTIMO - PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR</b>	<b>68</b>
5.1	Técnica de Otimização Não Linear . . . . .	68
5.2	Identificação do Sistema . . . . .	70
5.3	Controle do Sistema . . . . .	70
5.3.1	Neutralizador Dinâmico Viscoelástico - (NDV) . . . . .	71
<b>6</b>	<b>EXEMPLO NUMÉRICO</b>	<b>73</b>
6.1	Identificação . . . . .	73
6.2	Controle . . . . .	75

<b>7 CONCLUSÃO</b>	<b>79</b>
7.1 Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	79
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>81</b>
Apêndice A - Realização experimental	88

# 1 INTRODUÇÃO

Para a imensa maioria dos sistemas mecânicos e estruturais de interesse, em que os valores de amortecimento encontrados não são elevados (ou seja, são valores menores do que os valores críticos correspondentes), uma vibração é um movimento oscilatório do sistema em questão em relação a uma configuração de equilíbrio, movimento esse decorrente de ações dinâmicas aplicadas sobre o sistema. Um exemplo clássico é fornecido por uma massa suspensa a partir de uma mola. No equilíbrio, esse sistema se encontra em repouso. Se a massa é deslocada dessa posição e liberada, ela irá experimentar uma vibração vertical, com troca entre as energias potencial e cinética.

Vibrações mecânicas podem ser favoráveis em várias aplicações na indústria e no consumo. As vibrações geradas por instrumentos musicais e por equipamentos vibratórios como escovas de dentes elétricas ou bate-estacas são alguns exemplos.

No entanto, vibrações excessivas podem apresentar consequências prejudiciais e ruídos desagradáveis. Por exemplo, máquinas sujeitas a elevadas amplitudes de vibração apresentam falhas por fadiga, ou ainda, alguns ruídos gerados por motores podem ser desconfortáveis à audição humana. Dessa forma, devido aos efeitos devastadores que as vibrações podem causar nas máquinas e estruturas, a análise de vibrações tornou-se fundamental no projeto e desenvolvimento dos sistemas mecânicos de engenharia. Uma forma de reduzir esses níveis, quando vibrações elevadas decorrem de fenômenos tais como ressonância e instabilidade dinâmica, entre outros, é utilizar algumas das seguintes técnicas básicas:

- atuar sobre a força de excitação, eliminando-a, reduzindo sua amplitude e/ou alterando sua composição em frequência;
- atuar sobre a estrutura, variando a massa e/ou rigidez, ou ainda, introduzindo amortecimento;
- aplicar um sistema mecânico auxiliar sobre o sistema vibrante. (CRUZ, 2004).

A teoria para sistemas lineares em vibrações mecânicas é bem estabelecida e bastante simples. Um sistema é dito linear quando seus componentes, massa, mola e amortecedor, apresentam reações linearmente proporcionais as suas variáveis cinemáticas associadas. Entretanto, sistemas reais são não lineares.

"A presença de não linearidades em estruturas conduz a muitos fenômenos físicos interessantes que não podem ser explicados por modelos lineares" (Nayfeh e Mook, 1979; Nayfeh, 2000). Tais fenômenos podem incluir "pulos" na resposta, saturação e oscilações auto excitadas. Segundo Thomsen (1997), as não linearidades podem ser responsáveis por desvios significativos entre as observações experimentais e as previsões dos modelos lineares. Dessa forma, embora mais recentes do que em sistemas lineares, o controle e



identificação em sistemas não lineares têm emergido de forma significativa.

Neste trabalho, o sistema em estudo é não linear cúbico, embora existam sistemas com outros tipos de não linearidade, tais como: relações quadráticas, logarítmicas, exponenciais, cossenoidais, tangenciais, entre outras. Pode-se citar como exemplo de um sistema não linear do tipo cúbico, um sistema com um grau de liberdade composto por uma massa que está presa a molas lineares e oscilando transversalmente em relação as molas. Este movimento lateral das molas pode introduzir uma não linearidade cúbica.

Conforme citado acima, uma das maneiras de controlar vibrações excessivas é a introdução de um sistema secundário (sistema auxiliar) ao sistema primário (sistema vibrante). A esse sistema secundário dá-se o nome de neutralizador dinâmico. Este dispositivo tem a finalidade de reduzir a vibração no sistema primário, introduzindo uma elevada impedância mecânica, em uma faixa de frequência onde o sistema primário precisa.

Frahm (1909) propôs um neutralizador dinâmico que envolve a adição de um sistema massa-mola para eliminar as vibrações do sistema primário. Desde então, outros modelos vêm sendo propostos para o controle de vibração e ruído irradiado. Uma metodologia para o projeto de um neutralizador dinâmico com um grau de liberdade, atuando em um sistema primário também com um grau de liberdade é conhecida como Método dos Pontos Fixos, de Den Hartog (1956). Este método conta com um neutralizador dinâmico amortecido (massa-mola-amortecedor) atuando em um sistema primário não amortecido (massa-mola). Na prática, neutralizadores dinâmicos com amortecimento viscoso são de difícil implementação, utilizados apenas como modelos matemáticos de comparação.

Assim sendo, esses modelos foram substituídos por neutralizadores dinâmicos utilizando material viscoelástico, os quais foram apresentados primeiramente por Snowdon (1959). Esse tipo de neutralizador é facilmente construído e aplicado a qualquer estrutura, devido à versatilidade dos materiais viscoelásticos, que podem ser moldados e adaptados com flexibilidade. Estes materiais substituem os elementos de mola e amortecedor.

O Grupo de Pesquisa em Vibrações e Som em Sistemas Mecânicos (GVIBS), da Universidade Federal do Paraná (UFPR) vem desenvolvendo metodologias próprias para o controle de vibrações e ruídos irradiados através do uso de materiais e dispositivos viscoelásticos, tanto em sistemas mecânicos não girantes quanto rotativos. Isso é particularmente observado no caso de neutralizadores viscoelásticos

Dessa forma, o objetivo deste trabalho é propor, implementar e validar uma metodologia capaz de identificar e controlar um sistema com um grau de liberdade não linear cúbico, utilizando um neutralizador dinâmico viscoelástico linear.

## 1.1 Proposta

Neste trabalho, pretende-se definir e implementar uma metodologia ampla para a identificação e controle de vibração de um sistema não linear cúbico, com um grau de liberdade. O controle de vibração faz uso de um neutralizador viscoelástico linear.

O processo de identificação proposto consiste em obter os parâmetros do sistema primário (massa, rigidez linear, rigidez não linear e amortecimento) através de um processo inverso de identificação. Para isto, realiza-se a medição de uma curva de transmissibilidade, que é aproximada por mínimos quadrados por um modelo matemático equivalente. O sistema primário estudado tem característica não linear cúbica e a equação de *Duffing* é utilizada para modelá-lo. A solução aproximada faz uso do Método do Balanço Harmônico (MBH), largamente empregado na análise de sistemas não lineares.

O controle de vibração do sistema primário por neutralizador viscoelástico é realizado com o emprego de uma técnica de otimização não linear. Através dessa otimização, determina-se a frequência natural ótima do neutralizador linear. A partir dela, e do correspondente módulo complexo de cisalhamento do material viscoelástico, obtém-se, o fator geométrico do neutralizador utilizado na construção deste. O modelo de derivada fracionária de quatro parâmetros é utilizado para modelar o módulo complexo do material viscoelástico. A formulação do sistema composto (sistema primário + neutralizador) baseia-se nos conceitos de Parâmetros Equivalentes Generalizados (PEG's) para o neutralizador dinâmico viscoelástico.

Anterior a esta proposta, o Grupo de Pesquisa em Vibrações e Som em Sistemas Mecânicos (GVIBS) já realizou estudos com a finalidade de projetar um neutralizador dinâmico viscoelástico ótimo para um dado sistema primário, por meio da Curva de Resposta em Frequência (CRF). Neste trabalho, considera-se para a metodologia como um todo, por razões práticas, a curva de transmissibilidade como resposta do sistema. A medição em si não será realizada, embora seja apresentado um caso hipotético para a validação da metodologia, bem como uma proposta estrutural da experimentação como sugestão para trabalhos futuros.

## 1.2 Estrutura do Texto

Este trabalho é estruturado, em seu núcleo, em seis capítulos, que se seguem à presente introdução.

No capítulo 1, é realizada uma revisão de literatura a cerca dos assuntos abordados nesta pesquisa. Apresenta-se uma breve cronologia dos principais autores, grupos de pesquisa, métodos, formulações e abordagens em geral, relacionados ao estudo de sistemas lineares e não lineares, assim como ao controle de vibrações.

No capítulo 2, são introduzidas as características que definem um material viscoelástico e a aplicação da derivada fracionária de quatro parâmetros para modelar o material. Mostra-se a importância do uso do cálculo fracionário e o porquê da sua utilização em viscoelasticidade.

No capítulo 3, é apresentada a teoria pertinente de sistemas não lineares, expondo os vários tipos de não linearidades existentes e o desenvolvimento da solução aproximada de um sistema não linear cúbico com a utilização do Método do Balanço Harmô-

nico (MBH). É exposto, também, o conceito de Parâmetros Equivalentes Generalizados (PEG's).

No capítulo 4, introduzem-se os conceitos de otimização não linear, bem como o método utilizado no processo de identificação do sistema e do controle de vibração.

No capítulo 5, é desenvolvido um exemplo numérico para a validação dos dois estágios da implementação numérica, ou seja, identificação e controle.

No capítulo 6, apresentam-se as considerações finais deste trabalho e as sugestões de continuidade e complementação desta pesquisa.

Finalmente, são apresentadas as referências bibliográficas consultadas e o apêndice.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, apresenta-se uma breve revisão de literatura com relação ao tema estudado.

### 2.1 Controle de Vibrações

Uma forma de reduzir a resposta de um sistema exposto a excitações em uma região da frequência na qual esse sistema possui uma ou mais frequências naturais é o uso de dispositivos auxiliares conhecidos como neutralizadores dinâmicos. Os neutralizadores são frequentemente encontrados em máquinas elétricas que operam em velocidade constante, tais como serras, lixadeiras, barbeadores e equipamentos alimentados por motores de corrente alternada. São também comuns em linhas aéreas de transmissão de energia elétrica, onde têm a função de protegê-las da vibração excessiva causada pelo vento. Em alguns casos, são utilizados em pontes e edifícios de grande porte, no combate a ações do vento e terremotos. Nos últimos dois casos, excitação é de banda larga de frequência.

Os neutralizadores dinâmicos podem ser classificados em ativos e passivos. Devido ao custo adicional ou maior dos dispositivos ativos, por necessitarem de sensores e processadores, os dispositivos passivos apresentam maior recorrência em projetos de controle.

Tehrani et al. (2013) apresentaram o método da receptância para o controle ativo de vibrações em sistemas não lineares. A aplicação do método não necessitava do conhecimento dos parâmetros do sistema, quais sejam, massa, amortecimento e rigidez. A validação do método tornou-se possível através de comparações iterativas com a utilização do método do balanço harmônico, independentemente da intensidade da não linearidade.

No trabalho de Khadem e Ahmadabadi (2012), o foco foi investigar o efeito de um dissipador de energia não linear acoplado a uma viga sob excitação. O controle de vibração foi realizado através de um caminho irreversível de bombeamento de energia e a otimização dos parâmetros do sistema primário resultaram na aquisição de até 89% de dissipação de energia. Ishida e Inoue (2007) trabalharam com um sistema de rotores não linear, no qual foi realizado um controle de vibração passivo com o uso de um neutralizador dinâmico. Os autores investigaram que a não linearidade encontrada na mola era devido a folga dos rolamentos. Ainda neste trabalho, foram determinados os parâmetros ótimos do sistema primário pelo método de Newton-Raphson, uma vez que se mostrou que a teoria dos pontos fixos de Den Hartog não poderia ser utilizada para a otimização.

Segundo Cruz (2004), sistemas de controle passivo apresentam maior diversidade de concepções, pois resultam de projetos criativos voltados para cada problema específico. O controle de vibração com o uso desses dispositivos pode ser visto tanto em sistemas girantes quanto em sistemas não girantes, sendo este último o escopo deste trabalho.

Um dos pioneiros na aplicação de neutralizadores para suprimir vibrações foi Frahm (1909), desenvolvendo o conceito correspondente através da utilização da transferência de água entre tanques para reduzir as oscilações entre navios. Outro pioneiro foi Den Hartog (1956), que apresentou o modelo matemático de um sistema de dois graus de liberdade (sistema primário mais neutralizador dinâmico massa-mola-amortecedor). A partir da teoria dos pontos fixos, conseguiu determinar de forma ótima os parâmetros do neutralizador dinâmico. Porém, sabe-se que o modelo de amortecimento viscoso, por ele utilizado, é de difícil construção prática.

Uma alternativa foi a utilização de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos. Materiais viscoelásticos são amplamente utilizados na engenharia, no controle de vibrações e ruído irradiado. Snowdon (1959) apresentou modelos de um e dois graus de liberdade, onde a mola e o amortecedor viscoso eram substituídos por um único elemento de material viscoelástico. A grande vantagem desse tipo de material é o elevado grau de amortecimento que pode ser conseguido e a versatilidade para projetar dispositivos de controle de variados tamanhos.

Vários modelos têm sido estudados para descrever o comportamento dos materiais viscoelásticos. Passa-se dos modelos mais simples, de Kelvin e Maxwell, até os modelos mais notórios, como o estudado por Rogers (1983), que utilizou derivadas fracionárias para descrever as variações do módulo de elasticidade e do fator de perda em uma ampla banda de frequências e temperaturas. Já Pritz (1996) estudou o modelo decorrente do uso da derivada fracionária, com quatro parâmetros, o qual provou ser adequado para descrever as propriedades dinâmicas de materiais viscoelásticos termoreologicamente simples. Tal modelo paramétrico também foi apresentado em Espíndola et al. (2010).

Embora a utilização de materiais viscoelásticos no projeto de neutralizadores dinâmicos apresente inúmeras vantagens, um dos problemas é a significativa variação de seus parâmetros de rigidez e amortecimento com a frequência de operação e a temperatura, o que impossibilita a utilização de métodos analíticos de otimização de parâmetros. A fim de solucionar este problema, as técnicas de otimização não linear têm sido aplicadas na obtenção dos parâmetros ótimos dos neutralizadores, como se observa em Kitis (1983). Esse trabalho consistia em diminuir a resposta vibratória de uma viga engastada-livre simples utilizando neutralizadores dinâmicos. Essa proposta resolvia o sistema completo (no espaço de configurações), entretanto, isto poderia se tornar extremamente pesado do ponto de vista computacional quando o sistema apresentava um número de graus de liberdade elevado, com vários neutralizadores sendo projetados simultaneamente.

Espíndola e Silva (1992) estabeleceram uma teoria geral para o projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos quando aplicados a uma estrutura genérica, onde um ou vários neutralizadores poderiam ser projetados para um controle modo a modo. A teoria é baseada no conceito de parâmetros equivalentes generalizados (PEG's) de massa e amortecimento. Segundo Espíndola e Silva (1992), e também Doubrawa (2008), o sistema composto (sistema primário mais neutralizador) pode ser descrito somente em função das

coordenadas generalizadas do sistema primário, sendo possível assim realizar as análises em um subespaço modal deste. Isso é feito com um número reduzido de equações, através de equivalência com a teoria de Den Hartog.

Essa teoria foi posteriormente ampliada para o controle em banda larga de frequência, permitindo que um conjunto de neutralizadores dinâmicos possa reduzir a resposta de uma estrutura não mais modo a modo e sim em banda larga de frequência onde uma ou várias frequências naturais estão presentes. Isso se deu com a utilização de técnicas de otimização não linear, como pode ser visto em Espíndola e Bavastrì (1995), Espíndola e Bavastrì (1997), Bavastrì (1997), Bavastrì et al. (1998) e Espíndola et al. (2005a).

Diversos autores vêm trabalhando o uso de neutralizadores em sistemas mecânicos. Tarng et al. (2000) ajustaram manualmente um neutralizador de vibração e foram capazes de modificar a função resposta em frequência (FRF) de uma determinada ferramenta de corte. Moradi et al. (2008) analisaram a influência da posição do neutralizador ao longo de uma barra de perfuração sobre a resposta de vibração. Nesse estudo, os parâmetros de absorção foram selecionados a fim de minimizar a deformação da extremidade livre da barra de perfuração, sendo, o amortecimento do neutralizador abandonado nessa abordagem. Posteriormente, Saffury e Altus (2009) propuseram o uso de barras viscoelásticas como uma alternativa em um neutralizador dinâmico de vibração. O conceito de neutralizadores dinâmicos também foi aplicado por Mastroddi et al. (2012), onde o neutralizador deveria atuar em um intervalo prescrito de frequência, a fim de minimizar a resposta dinâmica de uma nave espacial.

## 2.2 Sistemas Não Lineares

Segundo Kerschen et al. (2006), estruturas dinâmicas não lineares têm sido estudadas por um longo tempo, com as primeiras contribuições de maior interesse datando da década de 70, com Ibanez et al. (1973) e Masri e Caughey (1979). Estes últimos mostraram uma técnica de identificação de não linearidades não paramétricas, a qual podia ser aplicada tanto para excitações determinísticas quanto para excitações aleatórias. Desde então, vários métodos têm sido desenvolvidos, contemplando sistemas com um grau de liberdade e sistemas com múltiplos graus de liberdade, estes nos últimos 20 anos.

A identificação de modelos de sistemas estruturais através do uso de dados experimentais têm recebido considerável atenção devido ao aumento da importância dada à previsão precisa da resposta de estruturas para vários ambientes de carregamento. A presença de não linearidades em estruturas conduz a muitos fenômenos físicos interessantes, que não podem ser explicados pela abordagem linear (Nayfeh e Mook, 1979; Nayfeh, 2000). Estes fenômenos incluem pulos, saturação e oscilações auto excitadas. Portanto, a ênfase é no desenvolvimento de técnicas de identificação de sistemas não lineares que possam prever seu real comportamento dinâmico.

Nesse contexto, cita-se Nayfeh e Mook (1979) e Schmidt e Tondl (1986), que estudaram sistemas de dois graus de liberdade com características não lineares, e Simon e

Tomlinson (1984), que, através da transformada Hilbert, identificaram e caracterizaram não linearidades em sistemas estruturais em uma análise modo a modo. Outro autor que explorou a utilização da transformada Hilbert foi Feldman (1994 e 1997), só que suas investigações se deram no domínio do tempo. Similar à técnica da transformada Hilbert, Staszewski (1998) desenvolveu uma técnica de identificação de não linearidades em sistemas estruturais, baseada na análise da amplitude e frequência instantâneas obtidas através da transformada de Wavelet.

Com base no método do balanço harmônico, Yasuda e Kamiya (1999) propuseram uma técnica experimental para identificar não linearidades em estruturas elásticas, em que a força de excitação deveria ser periódica e a estimação dos parâmetros da equação governante realizada com o método dos mínimos quadrados. Yang e Lin (2002) também fizeram uso do método dos mínimos quadrados, utilizando as informações de deslocamento, velocidade e aceleração para determinar a solução recursiva de parâmetros do sistema, com a apresentação de simulações numéricas para sistemas não lineares com um e dois graus de liberdade.

Na estimativa dos parâmetros mecânicos de sistemas não lineares discretos, cita-se Ghanem e Romeu (2001). Eles estimaram esses parâmetros através dos dados de entrada e saída por meio da solução da equação de movimento do sistema não linear com a técnica Wavelet-Galerkin.

Ainda com o mesmo enfoque, Nayfeh e Malatkar (2003) apresentaram um procedimento de identificação simples e direto para a estimação dos parâmetros não lineares que descrevem a resposta de uma viga fracamente não linear. A viga foi excitada harmonicamente e o método de múltiplas escalas foi utilizado para determinar a expansão de primeira ordem do modelo de equações. Os resultados do modelo foram comparados com os resultados experimentais através de um ajuste de curvas e verificou-se que o modelo com amortecimento viscoso linear, não modela bem o sistema da viga. No entanto, com a inserção de um termo não linear no amortecimento, pode-se verificar a Curva Resposta em Frequência (CRF) o mais próximo dos pontos experimentais.

Entre outros, Goge et al. (2005) observaram o comportamento entre frequência de ressonância, amplitude de vibração, nível de excitação e funções de excitação em estruturas de aeronaves para identificar as não linearidades das mesmas. A observação foi através das curvas de resposta em frequência versus a amplitude máxima de vibração, amplitude versus força de excitação e FRF's para cada modo.

Daqaq et al. (2011) investigaram as ressonâncias primárias de um sistema de segunda ordem fracamente não linear com não linearidade cúbica. O método de múltiplas escalas foi utilizado na metodologia e a proposta foi validada comparando os resultados obtidos via uma aproximação pelo método do balanço harmônico (MBH). A metodologia conseguiu prever, em alguns exemplos, a amplitude e estabilidade das respostas.

Ghayesh et al. (2011) desenvolveram um procedimento geral para a análise das vibrações de sistemas com não linearidade cúbica. Através do método de múltiplas escalas,

foram determinadas expressões analíticas aproximadas para a resposta em frequência e as frequências naturais não lineares do sistema. Essas soluções foram determinadas através de um algoritmo que forneceu o conhecimento direto sobre o relacionamento entre os parâmetros do sistema e suas características dinâmicas. Esse algoritmo também permitiu a validação do procedimento proposto.

Vários autores utilizaram métodos de aproximação para obter a resposta do estado estacionário de sistemas compostos (primário + neutralizador) com o objetivo de determinar os parâmetros ótimos de neutralizadores não lineares. Nesse âmbito, vale ressaltar as contribuições de Roberson (1952), Pipes (1953), Soom e Lee (1983) e Nissen et al. (1985).

Também nesse contexto, Gatti et al. (2010b) descreveram o comportamento dinâmico de um sistema composto por um shaker, modelado como sendo linear, e um sistema não linear, modelado como um oscilador de *Duffing*. A não linearidade do sistema foi verificada na configuração geométrica da massa suspensa por quatro molas, que se inclinam quando são estendidas. O método do balanço harmônico (MBH) foi utilizado para determinar as equações de resposta em frequência, bem como as condições de estabilidade. Em um trabalho anterior, Gatti et al. (2010a) apresentaram o estudo do comportamento dinâmico de um sistema não linear semelhante ao acima, porém a massa foi suspensa por duas molas, as quais foram ajustadas para alcançar uma rigidez quase nula com não linearidade cúbica pura.

Jing et al. (2014) analisaram a influência da inserção de um amortecedor não linear de ordem cúbica em um sistema isolado com um grau de liberdade. Observou-se que, como esperado, quando o coeficiente de amortecimento linear era aumentado para reduzir a transmissibilidade na frequência de ressonância, aumentava também a transmissibilidade nas frequências altas. Dessa forma, o amortecedor não linear com característica de ordem cúbica poderia ser incluído para suprimir a transmissibilidade na frequência de ressonância.

O presente estudo trata especialmente da identificação e do controle de um sistema não linear cúbico com a utilização de um neutralizador dinâmico linear viscoelástico. Ji e Zhang (2010) e Ji (2012) estudaram um sistema de dois graus de liberdade compreendido por um sistema primário fracamente não linear e um neutralizador dinâmico linear, cuja eficácia na redução de vibração na ressonância foi observada. Bavastri et al (2012) estudaram a inserção de um neutralizador dinâmico viscoelástico aplicado a um sistema com não linearidade cúbica a fim de reduzir sua resposta vibratória.

No próximo capítulo, serão abordadas as características dos materiais viscoelásticos.



### 3 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Segundo Findley et al.(1976), a viscoelasticidade combina a elasticidade com a viscosidade; materiais com essa característica são materiais com propriedades mecânicas dependentes do tempo e/ou da frequência. Um material perfeitamente elástico comporta-se de acordo com a lei de Hooke, em que, a tensão é diretamente proporcional à deformação. Assim, um material viscoso é um material que se deforma de maneira contínua e irreversível sob tensão. Um material é dito viscoelástico quando ocorrem deformações elásticas e viscosas simultaneamente, sendo o comportamento viscoso responsável pela dissipação de energia, enquanto a parte elástica encarrega-se do armazenamento da mesma. Materiais que exibem comportamento viscoelástico são, entre outros: plásticos, madeiras, fibras naturais e sintéticas e metais a temperaturas elevadas.

Neste capítulo, serão apresentadas algumas propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos, além de serem expostos os modelos constitutivos que baseiam-se em derivada de ordem inteira e fracionária, esta última utilizada neste trabalho.

#### 3.1 Propriedades Dinâmicas do Material Viscoelástico

Segundo Snowdon (1968), há dois tipos de deformações elementares que um material pode sofrer: de cisalhamento e volumétrica. Quando a deformação é de cisalhamento, há variação de forma e não de volume, enquanto que na deformação volumétrica, o material sofre variação de volume mas não de forma. A deformação de cisalhamento, ilustrada de forma típica na Figura 1.a, é descrita pelo módulo de cisalhamento  $G$ . Já a Figura 1.b apresenta uma deformação volumétrica descrita pelo módulo volumétrico  $B$  (Snowdon, 1968). Uma deformação mista, com variação de forma e volume, é ilustrada na Figura 1.c

Quando tem-se uma placa em que as dimensões laterais são grandes, se comparadas com a espessura, conforme mostra a Figura 1.d, o material pode apresentar características tais que a relação entre tensão e deformação é aproximada pelo módulo  $M$ , tal que

$$M = B + \left(\frac{4G}{3}\right) \cong B, \quad (3.1)$$

onde  $B \gg G$ , ou seja, o módulo volumétrico  $B$  é numericamente muito maior que o módulo de cisalhamento  $G$ .

Já no caso apresentado pela Figura 1.e, que é a situação contrária à da Figura 1.d, com as dimensões laterais pequenas em comparação com a espessura, a relação entre tensão e deformação é aproximada pelo módulo de *Young*  $E$ , em função de  $B$  e  $G$ , tal que

Figura 1: Deformações dos materiais elásticos.

$$E = \frac{9BG}{3B + G}. \quad (3.2)$$

Tem-se ainda a relação de Poisson, dada por

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1. \quad (3.3)$$

Dessa forma, como  $B \gg G$ , as equações (3.2) e (3.3) podem ser aproximadas por  $E = 3G$  e  $\nu = 0,5$ .

Em geral, a rigidez dinâmica  $\bar{k}$  de um elemento de material elastomérico é dada por (Espíndola, 1987)

$$\bar{k} = LG_c, \quad (3.4)$$

onde  $L$  é chamado de fator geométrico, enquanto  $G_c$  é o módulo complexo de cisalhamento (a ser melhor definido adiante). Para a deformação apresentada na Figura 1.a,  $L = \frac{A}{h}$ , sendo  $A$  a área cisalhada e  $h$  é a altura entre as áreas carregadas. No caso da Figura 1.c,  $L = \frac{3A(1 + \lambda S^2)}{h}$ , sendo que  $S$ , é definido como a razão entre uma das áreas carregadas e toda a área livre (Nashif, 1985) e  $\lambda$  é uma constante numérica, que pode ser obtida analiticamente ou experimentalmente. O modo de representar a rigidez de um material

viscoelástico dado acima é muito usado devido à sua simplicidade em controle de vibração e ruído.

## 3.2 Modelos para o Material Viscoelástico

Dentre os modelos elásticos que descrevem o comportamento dos materiais viscoelásticos, podem-se citar os modelos compostos por mola e amortecedor viscoso, tais como os modelos de Maxwell, Kelvin-Voigt e Zener, entre outros. Segundo Cruz (2004), esses modelos são úteis apenas para descrever a resposta viscoelástica de elastômeros sobre uma estreita faixa de temperatura e/ou tempo. Contudo, o interesse frequente é para uma ampla faixa de temperatura e tempo. Uma alternativa é o emprego de modelos obtidos por meio de derivadas de ordem fracionária.

O uso da derivada fracionária tem aflorado como uma ótima opção para modelar o comportamento viscoelástico e gerar modelos paramétricos (Bagley e Torvik, 1979; Bagley e Torvik, 1986; Torvik e Bagley, 1987; Pritz, 1996; Rossikhin e Shitikova, 1998; Lopes, 1998 e Espíndola et al., 2005b e 2005c). Segundo Cruz (2004), esses modelos produzem uma representação analítica bem comportada nos domínios do tempo e da frequência, além de serem consistentes com teorias moleculares que explicam o comportamento mecânico do meio viscoelástico. A eficácia dessa abordagem foi largamente estudada e comprovada por Pritz (1996), tendo ela sido utilizada para descrever o comportamento dinâmico de vários materiais, tais como metais, estratos geológicos, vidro e polímeros para controle de vibrações. No controle de vibração, o Grupo de Pesquisa em Vibrações e Som em Sistemas Mecânicos (GVIBS) tem utilizado esses modelos para caracterizar materiais tais como borracha butílica, neoprene e EAR - C1002.

### 3.2.1 Modelo com Derivada de Ordem Inteira

A relação constitutiva clássica para o modelo viscoelástico linear padrão no domínio do tempo é dada por

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m \frac{d^m \sigma(t)}{dt^m} = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n \frac{d^n \varepsilon(t)}{dt^n}, \quad (3.5)$$

onde  $\sigma(t)$  denota a tensão,  $\varepsilon(t)$  é a deformação,  $b_m$ ,  $E_0$ ,  $E_n$  são parâmetros do material e  $M$ ,  $N$  são números inteiros. A equação (3.5) pode ser melhor compreendida quando relacionada a modelos mecânicos equivalentes (Maxwell, Kelvin e Zener, dentre outros) elaborados a partir de molas e amortecedores viscosos.

Aplicando a transformada de Fourier em ambos os membros da equação (3.5), tem-se

$$E_c(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)}{\varepsilon(\Omega)} = \frac{E_0 + \sum_{n=1}^N E_n (i\Omega)^n}{1 + \sum_{m=1}^M b_m (i\Omega)^m}, \quad (3.6)$$

onde  $\sigma(\Omega)$  e  $\varepsilon(\Omega)$  são as transformadas de Fourier da tensão e deformação, respectivamente, e  $\Omega$  é a frequência. A quantidade  $E_c(\Omega)$  é conhecida como o **módulo complexo de elasticidade** e é dada por

$$E_c(\Omega) = E(\Omega) + iE'(\Omega). \quad (3.7)$$

Na expressão acima,  $E(\Omega)$  é o **módulo dinâmico de elasticidade** e é uma descrição do comportamento elástico do material. Já  $E'(\Omega)$  é o **módulo de perda**, que representa o comportamento dissipativo do material viscoelástico.

Tem-se, portanto, que a parte imaginária da expressão (3.7) é uma medida da capacidade que o material possui para transformar energia mecânica em calor. Esta medida fica melhor evidenciada em termos do **fator de perda** do material, definido por

$$\eta_E(\Omega) = \frac{E'(\Omega)}{E(\Omega)}. \quad (3.8)$$

Dessa forma, a expressão (3.7) pode ser colocada da seguinte forma:

$$E_c(\Omega) = E(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)]. \quad (3.9)$$

A fim de determinar uma estratégia eficaz de controle de vibração usando materiais viscoelásticos, as propriedades dinâmicas básicas, a saber o módulo dinâmico de elasticidade e o fator de perda, devem ser perfeitamente conhecidas, sendo estas propriedades, em geral, dependentes da frequência e da temperatura.

Conforme citado anteriormente, os materiais viscoelásticos que dependem fortemente do tempo e da frequência em uma ampla faixa acabam tendo um número muito grande de derivadas temporais ( $M$  e  $N$ ) na série, para se observar com exatidão o comportamento dos materiais viscoelásticos. Isto acarreta um elevado número de parâmetros no modelo, gerando em modelos extremamente custosos do ponto de vista de tempo computacional.

### 3.2.2 Modelo com Derivada de Ordem Fracionária

A equação constitutiva unidimensional em derivadas fracionárias é (Pritz, 1996)

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m D^{\kappa_m} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n D^{\alpha_n} \varepsilon(t), \quad (3.10)$$

onde  $b_m$ ,  $\kappa_m$ ,  $E_0$ ,  $E_n$  e  $\alpha_n$  são parâmetros do material em consideração. As expressões  $D^{\kappa_m}$  e  $D^{\alpha_n}$  representam derivadas de ordem fracionária  $\kappa_m$  e  $\alpha_n$ , respectivamente. Para  $0 < \alpha_n < 1$  (o que também vale para  $\kappa_m$ ), adota-se como definição de derivada fracionária que (Bagley e Torvik, 1986)

$$D^{\alpha_n}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_n)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\xi)}{(t - \xi)^{\alpha_n}} d\xi. \quad (3.11)$$

Algumas observações experimentais mostram que vários materiais viscoelásticos de interesse podem ser modelados tomando-se apenas as primeiras derivadas fracionárias de cada série na equação (3.10). No caso particular em que  $M = N = 1$  e  $\alpha = \kappa$ , resulta o seguinte modelo viscoelástico com quatro parâmetros ( $b_1$ ,  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $\alpha$  e  $\kappa$ ):

$$\sigma(t) + b_1 D^{\kappa} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_1 D^{\alpha} \varepsilon(t). \quad (3.12)$$

Tomando a transformada de Fourier dessa equação, tem-se

$$\sigma(\Omega) + b_1 (i\Omega)^{\alpha} \sigma(\Omega) = E_0 \varepsilon(\Omega) + E_1 (i\Omega)^{\alpha} \varepsilon(\Omega), \quad (3.13)$$

onde  $\sigma(\Omega)$  e  $\varepsilon(\Omega)$  representam a transformada de Fourier da tensão e da deformação, respectivamente.

Manipulando a equação (3.13), chega-se a

$$E_c(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)}{\varepsilon(\Omega)} = \frac{E_0 + E_1 (i\Omega)^{\alpha}}{1 + b_1 (i\Omega)^{\alpha}}. \quad (3.14)$$

Na equação (3.14), observa-se que o módulo dependente da frequência é uma função de uma potência fracionária da frequência.

Analogamente a equação (3.14), tem-se para o **módulo complexo de cisalhamento**  $G_c(\Omega)$ , já mencionado anteriormente, a seguinte equação:

$$G_c(\Omega) = \frac{\tau(\Omega)}{\gamma(\Omega)} = \frac{G_0 + G_1(i\Omega)^\alpha}{1 + b_1(i\Omega)^\alpha}. \quad (3.15)$$

As equações (3.14) e (3.15) constituem **modelos a derivada fracionária com quatro parâmetros**.

O módulo complexo de cisalhamento, assim como o módulo complexo de elasticidade, pode ser expresso por

$$G_c(\Omega) = G(\Omega)[1 + i\eta_G(\Omega)], \quad (3.16)$$

onde  $\eta_G(\Omega)$  é denominado fator de perda cisalhante. Segundo Snowdon (1968), para borrachas em geral,  $\eta_G(\Omega, T) = \eta_E(\Omega, T)$ , também válida para alguns materiais metálicos. Na expressão (3.16),  $G_c$  é dada por (3.15).

Outras possibilidades para a (3.15) podem ser escritas. Por exemplo, fazendo  $G_1 = G_\infty b_1$ , tem-se

$$G_c(\Omega) = \frac{\tau(\Omega)}{\gamma(\Omega)} = \frac{G_0 + G_\infty b_1(i\Omega)^\alpha}{1 + b_1(i\Omega)^\alpha}. \quad (3.17)$$

Já igualando  $b_1 = b^\alpha$ , decorre que

$$G_c(\Omega) = \frac{\tau(\Omega)}{\gamma(\Omega)} = \frac{G_0 + G_\infty(ib\Omega)^\alpha}{1 + (ib\Omega)^\alpha}. \quad (3.18)$$

Na equação (3.18) observa-se que os quatro parâmetros são:  $\alpha$ ,  $b$ ,  $G_0$  e  $G_\infty$ , onde  $G_0$  e  $G_\infty$  são o módulo instantâneo ou relaxado e o módulo não relaxado ou de longo tempo, respectivamente. A constante  $b$  é conhecida como constante de relaxação e  $\alpha$  é uma constante adimensional proveniente da derivada fracionária, sendo, portanto, tal que  $0 < \alpha < 1$ .

Uma vez que as propriedades de amortecimento e rigidez de um material viscoelástico também variam com a temperatura ( $T$ ), de acordo com a equação (3.9), o módulo complexo de elasticidade e de cisalhamento podem ser modelados, respectivamente, através de

$$E_c(\Omega, T) = E(\Omega, T)[1 + i\eta_E(\Omega, T)] \quad (3.19)$$

e

$$G_c(\Omega, T) = G(\Omega, T)[1 + i\eta_G(\Omega, T)]. \quad (3.20)$$

Sabe-se que tanto o módulo dinâmico de cisalhamento  $G$  (ou elasticidade  $E$ ) quanto o fator de perda  $\eta_G$  (ou  $\eta_E$ ) são inversamente dependentes da frequência e da temperatura. Assim, se a frequência aumenta, então o módulo  $G$  aumenta; já se a temperatura aumenta, então o módulo  $G$  diminui. Agora, se a temperatura permanecer constante, o fator de perda  $\eta_G$  cresce até a frequência de transição  $\Omega_t$  e diminui após esse valor. Isso ocorre analogamente para uma frequência constante, ou seja, o fator de perda  $\eta_G$  cresce com a temperatura até atingir a temperatura de transição e após esse valor começa a decrescer. Isso pode ser visto na (Figura 2).

Nessa figura, vê-se que, na Região I, o valor do fator de perda é baixo e os valores de  $E$  e  $G$  também são baixos e praticamente constantes; essa região é largamente utilizada, em geral, no projeto de isoladores viscoelásticos. A Região II é denominada região de transição, onde  $G$  e  $E$  são altamente variáveis com a frequência e o fator de perda é elevado; essa região é utilizada nos projetos de neutralizadores viscoelásticos. Já a Região III é chamada região vítrea e apresenta altos valores de  $E$  e  $G$  e baixo valor do fator de perda. Essa região não possui aplicação para controle de vibrações.

De acordo com o já exposto, as curvas de módulo dinâmico de cisalhamento (ou elasticidade) em função da frequência poderiam ser deslocadas horizontalmente, se fossem medidas a diferentes temperaturas, e reunidas numa única curva. Essa relação entre o deslocamento em frequência das curvas em função da temperatura ( $T$ ), para uma dada frequência ( $\Omega$ ), conduz a definição de **frequência reduzida** ( $\Omega_R$ ), conforme à seguinte equação

$$\Omega_R = \alpha_T(T)\Omega, \quad (3.21)$$

onde  $\alpha_T(T)$  é o fator de deslocamento em frequência das curvas para cada temperatura. O fator de deslocamento pode ser representado pela equação WLF (Williams-Landel-Ferry), qual seja

$$\log_{10}\alpha_T(T) = \frac{-\theta_1(T - T_0)}{\theta_2 + (T - T_0)}, \quad (3.22)$$

onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são parâmetros do material e  $T_0$  é a temperatura de referência, dada na escala Kelvin.

Figura 2: Fator de perda e módulo dinâmico com temperatura e frequência constantes.  
Fonte: Bavastri et al. (2012)



Assim, as propriedades dinâmicas podem ser representadas em um nomograma, que é um gráfico onde se tem a curva do módulo de elasticidade (ou de cisalhamento) e também a do fator de perda correspondente em função da frequência e a da temperatura. Conhecido como nomograma de frequência reduzida (vide Figura 3), lê-se esse gráfico selecionando a frequência desejada na escala da direita e traçando uma linha horizontal até a isoterma de interesse. Após encontrar essa isoterma, traça-se uma linha vertical até encontrar as curvas do fator de perda e do módulo dinâmico de elasticidade. A partir desses pontos, estendem-se linhas horizontais até a escala da esquerda, para serem obtidas as leituras do módulo dinâmico e do fator de perda.

Figura 3: Nomograma de frequência reduzida.

## 4 SISTEMAS NÃO LINEARES

Conforme já mencionado, a maioria das estruturas encontradas na engenharia pode sob certas condições, ter um comportamento não linear. A característica não linear de uma estrutura dá-se por um ou mais fatores, tais como condições de contorno com restrições na rigidez, materiais dependentes da amplitude de vibração, atuadores com dinâmica dependente da excitação de entrada, conjuntos estruturais com a presença de fricção ou folgas, entre outros. A modelagem correspondente ocorre, não raramente, por polinômios que podem conter termos de ordem quadrática, cúbica ou de ordens superiores. A equação de *Duffing* (Duffing, 1918), vista mais adiante, é a equação mais empregada para representar, de forma aproximada, o comportamento não linear de vários sistemas estruturais.

Face aos diversos fenômenos que podem ocorrer nos sistemas não lineares, como pontos de bifurcação, múltiplas soluções, respostas com períodos diferentes ao da excitação e ressonâncias super harmônicas e sub-harmônicas, é convenientemente realizar, via de regra, uma análise paramétrica. Essa análise consiste em determinar uma faixa de valores na qual determinados parâmetros de controle preestabelecidos podem variar, sem que o sistema apresente fragilidade às condições iniciais ou vibrações com amplitudes elevadas. Em vibrações, esses parâmetros de controle são geralmente a frequência de excitação ou a amplitude associada, e à medida que tais parâmetros são alterados, mudanças no comportamento do sistema irão ocorrer. Os outros parâmetros do sistema são mantidos constantes em toda a análise.

A fim de determinar se uma dada estrutura é linear ou não linear, procedimentos analíticos ou experimentais podem ser empregados. Na dinâmica estrutural, a construção da *Função Resposta em Frequência (FRF)*<sup>1</sup>, é o método mais comum para a visualização das relações entre entrada e saída de um sistema, fornecendo informações tais como ressonância, antirressonância, densidade modal e fase. Esta técnica é o primeiro passo em um teste de vibrações, sendo que a maioria dos analisadores comerciais fornecem a funcionalidade da FRF.

Atualmente, testes para verificar a linearidade de um sistema são comuns. Dessa forma, se em um teste de linearidade essa condição for violada, estar-se-á tratando de um sistema não linear. Alguns testes que podem verificar a ocorrência da não linearidade em uma estrutura são explicados a seguir. Em todos os desenvolvimentos desse capítulo, em particular, e dessa dissertação, em geral, será empregada a seguinte notação:  $x'(t) = \frac{dx}{dt}$  e  $x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ .

- Princípio da superposição (Definição de Linearidade)

---

<sup>1</sup>A função resposta em frequência (FRF) é uma função que relaciona o sinal de saída (resposta) do sistema por cada unidade do sinal de entrada (excitação) no domínio da frequência.

Segundo Kerschen et al. (2006), a quebra do princípio da superposição é um possível meio para se detectar a presença da não linearidade. Em termos matemáticos esse princípio define o que é um sistema linear, podendo ser aplicado em casos estáticos ou dinâmicos. Por ele, tem-se que a resposta total a um conjunto de entradas simultâneas pode ser dividida em várias respostas individuais, com cada uma delas correspondendo a uma entrada específica. Assim, considera-se o caso de dois sistemas: o primeiro com condição inicial  $S_1 = \{x_1(0), x_1'(0)\}$ , que responde a uma entrada  $y_1(t)$  com saída  $x_1(t)$ , e o segundo com condição inicial  $S_2 = \{x_2(0), x_2'(0)\}$ , que responde a uma entrada  $y_2(t)$  com saída  $x_2(t)$ . A superposição acontece se, e somente se, com uma entrada  $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ , com condição inicial  $S_3 = \{\alpha x_1(0) + \beta x_2(0), \alpha x_1'(0) + \beta x_2'(0)\}$ , o sistema responde com uma saída  $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ , ( $\forall \alpha, \beta$  e  $\forall x_1, x_2$ ).

Embora esse princípio tenha uma natureza fundamental, como enfatizado por Worden e Tomlinson (2001), ele tem uma utilidade prática limitada, com procedimentos mais simples podendo ser empregados como testes de linearidade. Por outro lado, para mostrar efetivamente a presença de uma não linearidade em um sistema, seria necessário apenas o conjunto de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  que violasse o princípio.

- Distorção harmônica

Consequência direta do princípio da superposição, a distorção harmônica é um dos indicadores mais claros da presença de não linearidade. Se a excitação para um sistema linear é um sinal harmônico de frequência  $\Omega$ , então a resposta também será um sinal harmônico na mesma frequência (para maiores detalhes e prova, ver Worden e Tomlinson, (2001)). Ou seja, não há geração de outros sinais harmônicos na passagem por um sistema linear. Esse resultado não significa que para sistemas não lineares uma entrada harmônica não produzirá uma saída harmônica correspondente. O que ocorre é que, geralmente, há aparecimento de harmônicos superiores.

Na Figura 4, observa-se um exemplo de distorção de uma onda harmônica, geralmente detectada por um *osciloscópio*<sup>2</sup>. A distorção se revela no sinal de aceleração, e não no de deslocamento, e se deve a uma não linearidade.

A distorção na aceleração é explicável. Se o sinal de entrada do sistema não linear é dado por  $y(t) = \text{sen}(\Omega t)$ , então a resposta associada  $x(t)$  será geralmente representada por uma *série de Fourier*,<sup>3</sup> tal que

$$x(t) = A_1 \text{sen}(\Omega t + \theta_1) + A_2 \text{sen}(2\Omega t + \theta_2) + A_3 \text{sen}(3\Omega t + \theta_3) + \dots$$

---

<sup>2</sup>Instrumento eletrônico de visualização e medição de sinais.

<sup>3</sup>Seja  $f(t)$  uma função periódica, que satisfaz as condições de Dirichlet. Essa função pode, então ser representada através de uma série de funções harmônicas, conhecida como série de Fourier.

Figura 4: Sinais de resposta de um sistema não linear.

A correspondente aceleração é dada por

$$x''(t) = -\Omega^2 A_1 \text{sen}(\Omega t + \theta_1) - 4\Omega^2 A_2 \text{sen}(2\Omega t + \theta_2) - 9\Omega^2 A_3 \text{sen}(3\Omega t + \theta_3) + \dots$$

Note que, na expressão acima, que as amplitudes são proporcionais à frequência ao quadrado, o que evidencia os harmônicos de ordem superior.

- Homogeneidade (Distorção da FRF)

A homogeneidade é verificada se, quando uma entrada  $y(t) \rightarrow$  saída  $x(t)$ , então uma entrada  $\alpha y(t) \rightarrow$  saída  $\alpha x(t)$ ,  $\forall \alpha$ , o que constitui uma forma restrita do princípio da superposição. Esse teste é usualmente aplicado em testes dinâmicos pela obtenção de funções resposta em frequência (FRF's), com as distorções que indicam a não linearidade sendo visualizadas no gráfico de *Nyquist* (vide Figura 6), o qual reúne as características de amplitude e fase em um único gráfico. Já o gráfico de *Bode* (vide Figura 5) apresenta separadamente a amplitude da FRF e a fase correspondente. Note-se que a região instável do sistema é representada pelas linhas em vermelho e verde. Essa instabilidade será estudada com mais detalhes posteriormente.

Figura 5: Gráfico de Nyquist de um sistema não linear cúbico.

Figura 6: Gráfico de Bode de um sistema não linear cúbico.

Voltando ao teste da homogeneidade, tem-se que um sinal de entrada  $\alpha y_1(t)$  sempre implica, para um sistema linear, uma saída  $\alpha x_1(t)$ , independente da constante  $\alpha$ . Se  $y(t) \rightarrow x(t)$ , então  $Y(\Omega) \rightarrow X(\Omega)$ . Isso significa que

$$H(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{Y(\Omega)} \rightarrow \frac{\alpha X(\Omega)}{\alpha Y(\Omega)} = H(\Omega), \forall \alpha \text{ e } \forall y(t). \quad (4.1)$$

A linearidade é assumida quando, para diferentes níveis de entrada, essas FRF's se sobrepõem. Esse teste não assegura inteiramente a presença de não linearidade pelo fato de que alguns sistemas não lineares satisfazem as condições de homogeneidade, como é o caso do sistema bilinear.

- Reciprocidade

Funções resposta em frequência (FRF's) são funções hermitianas, portanto o módulo é uma função par e seu argumento (fase) é uma função ímpar. Devido ao caráter de  $H(\Omega)$ , medir uma FRF excitando um ponto A e tomando a resposta num ponto B, é equivalente a excitá-la no ponto B e tomar a resposta no ponto A, ou seja,  $\frac{x_B}{y_A} \leftrightarrow \frac{x_A}{y_B}$ . Se essa condição é satisfeita, as FRF's para  $y_A \rightarrow x_B$  e  $y_B \rightarrow x_A$  são iguais e, dessa forma, o sistema é linear. Entretanto, a reciprocidade não é um teste suficiente para assegurar a presença da não linearidade, uma vez que existem sistemas não lineares que satisfazem a condição de reciprocidade porém não satisfazem o princípio da superposição.

Além de se detectar a presença da não linearidade em um sistema, há que se cuidar com sua inserção em um programa de teste por meio de montagens ou instrumentações inadequadas. Recomenda-se fazer uma inspeção visual antes do teste completo começar (Kerschen et al., 2006). Dentre os possíveis problemas, tem-se: excitação excessiva, desalinhamento, pré-carregamentos, folgas, efeitos da temperatura, sobrecargas, agitação de cabos e montagem precária do *transdutor*<sup>4</sup>. A maioria dos problemas citados são verificados cedo ou tarde em toda a cadeia de medição e causam distorções na forma do sinal.

Em testes modais, por exemplo, é indicado que se monitore continuamente o sinal de entrada, pois é comum que ele sofra distorção, muitas vezes pelo desalinhamento do *shaker*. Essa distorção pode criar erros na medição da FRF, que às vezes podem não ser aparentes de imediato. Na análise com ondas harmônicas, recomenda-se um teste da qualidade do sinal de resposta na aceleração, a ser realizado em um osciloscópio, pois, conforme já discutido, em uma resposta harmônica, a distorção é mais evidente quando a aceleração é medida. Assim, qualquer distorção ou ruído presente é mais facilmente visualizado. Vislumbra-se ainda que, em sinais aleatórios, não é tão simples considerar essa característica.

## 4.1 Tipos de Excitação

Como se poderia antecipar pelo já exposto até aqui, estruturas não lineares apresentam significativas variações na resposta em frequência, para diferentes tipos de sinal de entrada. Tal observação é importante na detecção/quantificação/caracterização da não linearidade. Expõe-se abaixo os distintos tipos de excitação empregados.

- Excitação senoidal

Em uma excitação harmônica, toda a energia é concentrada na frequência de excitação, sendo relativamente simples eliminar ruídos e harmônicos indesejados no sinal

---

<sup>4</sup>Dispositivo que converte movimento mecânico em sinal elétrico, ou vice-versa. Exemplos: transdutor de aceleração ou acelerômetro, transdutor de força ou célula de força.

de resposta, face às características comuns de analisadores comerciais. Se comparada com sinais aleatórios ou excitações transientes, a excitação senoidal apresenta de maneira clara o aparecimento da não linearidade nas distorções da FRF, ainda mais se a amplitude de excitação for mantida constante. Entretanto, uma das desvantagens da excitação senoidal com relação aos outros dois métodos é a "varredura" lenta. Para calcular a FRF em cada frequência, um tempo é necessário para que a resposta atinja uma condição de estado estacionário, o que depende do amortecimento presente no sistema. De toda forma, a qualidade das FRF's obtidas por esse método de excitação é manifesta, sendo o uso da excitação senoidal bem conhecido pelo fato de produzir efeitos mais intensos nos sistemas não lineares.

- Excitação transiente

- (i) Impacto

Testes de impacto produzem elevadas amplitudes de resposta. Trata-se de um tipo de excitação transiente, popularmente conhecida pela sua simplicidade e velocidade. Para excitar uma estrutura com um impacto, são utilizados martelos instrumentados e a FRF pode ser bem levantada, de forma elementar, pela razão da *transformada de Fourier*<sup>5</sup> da resposta pela transformada de Fourier da força. Assim como acontece com uma excitação aleatória, o espectro com o uso desse método é muito amplo e a energia associada com cada frequência individual é baixa, ou seja, não é tão fácil excitar estruturas não lineares. As distorções apresentadas nas FRF's com o uso dessa excitação em sistemas não lineares mostram contrárias àquelas apresentadas com excitação senoidal.

- (ii) *Chirp*

A excitação por *chirp* é outro tipo de excitação transiente para medição de FRF's. Essa forma de excitação é efetiva na detecção de não linearidades e é relativamente expedita. O sinal de chirp executa uma "varredura" rápida em frequência e é representado por

$$y(t) = Y \text{sen}(\alpha t + \beta t^2), \quad (4.2)$$

sendo a frequência instantânea dada por

$$\Omega(t) = \frac{d}{dt}(\alpha t + \beta t^2) = \alpha + 2\beta t, \quad (4.3)$$

---

<sup>5</sup>A transformada de Fourier fornece os espectros de amplitude e fase de um sinal temporal.

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são determinados de acordo com as frequências inicial e final da varredura.

- **Excitação aleatória**

Experiências têm mostrado que é frequentemente difícil ensaiar estruturas não lineares com excitação aleatória, pois a energia total de entrada se distribui pela faixa de frequência usada. Dessa forma, se reduz a habilidade de detectar não linearidades, se comparado com o caso de uma excitação senoidal. Uma alternativa seria utilizar sinais com banda mais estreita.

A FRF de uma estrutura excitada por um sinal aleatório aparece distorcida devido a aleatoriedade da amplitude e da fase desse sinal, o que cria uma FRF "média" ou "linearizada". Devido a essa linearização, a excitação aleatória só é viável para detectar a não linearidade quando executados testes com diferentes níveis de excitação de entrada e sobrepostas as FRF's obtidas, para o teste de homogeneidade. A FRF  $H(\Omega)$  obtida através de um sinal aleatório, pode ser estimada como

$$H(\Omega) = \frac{S_{xy}(\Omega)}{S_{yy}(\Omega)}, \quad (4.4)$$

onde  $S_{xy}$  e  $S_{yy}$  são a densidade espectral de potência cruzada entre a resposta e excitação e a densidade espectral de potência da excitação, respectivamente.

É importante salientar que, ao contrário dos sistemas lineares, um sistema não linear pode apresentar FRF's diferentes de acordo com a excitação de entrada. Muitos métodos de detecção e extração de parâmetros para sistemas não lineares são dependentes do tipo do sinal de entrada utilizado e só fornecem respostas confiáveis se condições corretas de excitação forem adotadas.

## 4.2 Tipos de Não Linearidade

As não linearidades comumente encontradas em sistemas mecânicos são dependentes de distintas variáveis. Dessa forma, a fim de incorporá-las em análises e simulações, é comum modelá-las. Uma breve discussão dos modelos mais corriqueiros é realizada nesta seção, a partir do exposto por Worden e Tomlinson (2001).

### 4.2.1 Rigidez Cúbica

A não linearidade denominada de rigidez cúbica escopo deste trabalho, apresenta-se na reação elástica, sendo que a força correspondente pode ser dada, de forma elementar, por



$$f_k(x) = kx(t) + k_3x^3(t), \quad (4.5)$$

onde  $k_3x^3$  é o termo não linear e  $k_3$  pode ser positivo ou negativo. Quando  $k_3 > 0$ , tem-se que, quanto maior o nível de excitação, maior a rigidez no sistema, com o consequente aumento, em sistemas com um grau de liberdade, da frequência de ressonância. Tal propriedade pode ser vista em vigas e placas engastadas. Se  $k_3 < 0$ , a rigidez diminui e a frequência de ressonância decai, à medida que a força de excitação aumenta. Sistemas com esse comportamento cúbico atenuado aparecem na flambagem de vigas e placas.

A equação que rege sistemas com um grau de liberdade com essa característica, chamada equação de *Duffing*, é dada por (Duffing, 1918):

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) + k_3x^3(t) = y(t). \quad (4.6)$$

A equação (4.6) é a mais estudada na análise do comportamento não linear em engenharia. Ela é capaz de mostrar quase todas as características de um sistema não linear, descrevendo um oscilador simples, que possui simetria ímpar, presente na maioria dos sistemas de interesse.

#### 4.2.2 Rigidez ou Amortecimento Bilinear

Sistemas com características de rigidez ou amortecimento bilinear têm um comportamento dual. A força de reação elástica (associada à rigidez) tem, nesse caso, a forma

$$f_b(x) = \begin{cases} k_1x(t), & x > 0 \\ k_2x(t), & x < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

sendo a forma para o amortecimento análoga. Um sistema próximo de um sistema com amortecimento bilinear é o amortecedor padrão de automóveis.

#### 4.2.3 Rigidez Linear por Partes

Este tipo de não linearidade pode surgir em testes de vibrações em solo de aeronaves, em determinados conjuntos mecânicos. A forma da reação elástica nesse caso é dada por

$$f_k(x) = \begin{cases} k_2x(t) + (k_1 - k_2)d, & x > d \\ k_1x(t), & |x| < d \\ k_2x(t) - (k_1 - k_2)d, & x < -d. \end{cases} \quad (4.8)$$

#### 4.2.4 Amortecimento Não Linear

Este tipo de amortecimento é comum em amortecedores automotivos e estruturas *offshore* e ocorre quando um fluido escoar através de um orifício ou em torno de um membro delgado. A forma mais usual desse tipo de amortecimento é a quadrática, que pode ser modelada por

$$f_a(x') = c_2x'(t)|x'(t)|, \quad (4.9)$$

onde o valor absoluto assegura que a força em questão é sempre oposta à velocidade.

A equação fundamental do carregamento por fluidos é dada por (Morison et al., 1950)

$$F(t) = c_1u'(t) + c_2u(t)|u(t)|, \quad (4.10)$$

onde  $F$  é a força no membro e  $u$  é a velocidade de escoamento.

#### 4.2.5 Atrito de Coulomb

O atrito de Coulomb é dominante em estruturas tais como arribancadas, cuja montagem e desmontagem constante fornecem condições para a criação de interfaces que permitem movimento relativo. Nesses tipos de estruturas, ocorrem frequentemente não linearidades de folga, sendo a força correspondente da forma

$$f_a(x') = c_F \text{sgn}(x'(t)), \quad (4.11)$$

onde  $c_F$  é uma constante e  $\text{sgn}$  é a função. O atrito de Coulomb é mais visível em baixos níveis de excitação, uma vez que, em níveis altos, a fricção "se rompe".

Conhecidos alguns conceitos de sistemas não lineares, a próxima seção tratará do método adotado neste trabalho para a determinação de uma solução aproximada do sistema não linear em discussão.

### 4.3 Solução de uma Equação Diferencial Não Linear

Os sistemas não lineares geralmente não apresentam soluções analíticas exatas como os sistemas lineares. Na teoria de equações diferenciais, define-se como um problema de valor inicial (PVI) uma equação diferencial e as condições iniciais associadas, onde o número de condições iniciais corresponde à ordem da derivada mais elevada na equação diferencial.

No domínio do tempo, um PVI pode ser resolvido por integração numérica. A integração numérica é um método aproximado de resolver equações diferenciais não lineares, sendo um dos mais utilizados devido à sua exatidão. Outra ferramenta utilizada em uma análise temporal é o mapeamento de Poincaré, desenvolvido por Henry Poincaré, o qual sugere que o intervalo de tempo corresponda ao período da excitação ou um múltiplo dela. Entretanto, salienta-se que uma seleção imprópria do tamanho do passo de tempo na integração numérica pode ocasionar falsos resultados (Tongue, 1987).

Os métodos que resultam em uma solução analítica aproximada também possuem seus atrativos, uma vez que, encontrada a solução analítica, a análise paramétrica torna-se mais breve e clara. Os métodos mais populares para determinar a solução analítica aproximada de uma equação diferencial não linear são: método do balanço harmônico (MBH), método de Galerkin-Urabe, método de múltiplas escalas, método de Lindsted-Poincaré e o método de determinação da média de Krilov-Bogoliubov-Mitropolsky. Os dois primeiros métodos acima são baseados em expansões de harmônicos, enquanto os três últimos são métodos de perturbação.

Os métodos de perturbação são coerentes quando a não linearidade presente em um sistema é baixa, pois, segundo Hamdam e Burton(1993), esses métodos podem não convergir para alguns valores dos parâmetros e, mesmo com a adição de termos à solução aproximada, a qualidade das soluções de baixa ordem não muda. Além disso, são bastante trabalhosos. Assim, utilizar um método como o método do balanço harmônico (MBH) é mais vantajoso, considerando o fato de que tal método tem a forma mais simples de aplicação, além de apresentar resultados valiosos e atualmente ser o mais utilizado na literatura.

A seguir são apresentadas as principais características do MBH, em especial no tocante às suas vantagens e à sua adaptabilidade ao escopo desse trabalho.

### 4.3.1 Método do Balanço Harmônico - (MBH)

O método do balanço harmônico (MBH), ou método do equilíbrio harmônico, foi desenvolvido essencialmente para equações não lineares polinomiais, especialmente equações com não linearidades cúbicas e quadráticas. Se aplicado a outras não linearidades, pode requerer um grande número de manipulações algébricas, tornando-se usualmente impraticável.

A solução aproximada com o MBH tem caráter periódico, assumindo a forma de uma série harmônica dada por (Hagedorn, 1985; Thomsen, 2010; Worden e Tomlinson, 2001)

$$x(t) = \sum_{i=0}^n A_i \cos(i\Omega t) + B_i \sin(i\Omega t). \quad (4.12)$$

$$\text{a) } \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \quad \text{b) } a + b = 75$$

A solução aproximada (4.12) é então substituída na equação diferencial e potências dos harmônicos presentes aparecem. É importante vislumbrar que deve-se considerar o tipo de não linearidade e, em alguns casos, o tipo do sinal de entrada, ao escrever a solução. As potências e os produtos trigonométricos que surgem na inserção da solução na equação diferencial são substituídos pela expansão em somatórios de harmônicos. Se considerada uma potência cúbica, por exemplo, é válida a relação trigonométrica:

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x),$$

com apenas harmônicos ímpares sendo gerados na expansão de potências ímpares. Então, é realizado o "balanço" dos harmônicos resultantes, isto é, os coeficientes do lado esquerdo são igualados aos coeficientes do lado direito da equação. Assim, cada harmônico de interesse na equação (4.12) cria uma equação linear, que, juntas, formam um sistema não linear.

O MBH pode ser adotado para qualquer grau de não linearidade, entretanto, à medida que cresce a não linearidade, são necessários mais harmônicos para se garantir a exatidão da resposta. Talvez esse seja o ponto de cautela desse método, isto é, o MBH necessita conhecer *a priori* quais harmônicos devem ser inseridos na análise. Esse conhecimento prévio pode ser conseguido através das não linearidades contidas no problema, pela excitação e pela ausência ou não de amortecimento. Encontrar o conjunto de harmônicos que conduz a resultados qualitativamente corretos não é trivial (Rapp e Mees, 1977; Lau et. al, 1990; Hassan e Barton, 1995; Thomsen, 2010).

Nos problemas que envolvem vibração amortecida, os termos em seno e cosseno devem estar presentes ou deve-se adicionar um ângulo de fase a cada harmônico. Assim, a resposta também pode ser dada por

$$x(t) = \sum_{i=0}^n X_i \text{sen}(i\Omega t + \varphi_i). \quad (4.13)$$

Caso a vibração seja não amortecida, livre ou forçada, é suficiente que a solução aproximada contenha termos em seno ou cosseno. O somatório de cossenos considera as condições de deslocamento inicial.

A seguir o método do balanço harmônico (MBH) é aplicado, a fim de se obter a resposta aproximada de um sistema não linear cúbico.

### 4.3.2 Sistema Não Linear Cúbico com um Grau de Liberdade

Quando diz-se que um sistema físico possui apenas um grau de liberdade, quer-se dizer que esse sistema precisa de apenas uma coordenada física para se descrever a sua dinâmica e possui apenas uma frequência natural e uma de ressonância. Assim, voltando à já referenciada equação de *Duffing*, e considerando o método do balanço harmônico (MBH), o sistema com um grau de liberdade apresentado na Figura 7 pode ser modelado por

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) + k_3x^3(t) = y(t). \quad (4.14)$$

Figura 7: Sistema não linear cúbico com um grau de liberdade.

O método do balanço harmônico (MBH) assume que a resposta para um sinal de entrada senoidal seja um sinal senoidal na mesma frequência. Supõe-se uma resposta  $x(t) = X \text{sen}(\Omega t)$  e uma excitação  $Y \text{sen}(\Omega t - \varphi)$ , então a equação de movimento (4.14) fica

$$\begin{aligned}
& -m\Omega^2 X \text{sen}(\Omega t) + c\Omega X \text{cos}(\Omega t) + kX \text{sen}(\Omega t) + k_3 X^3 \text{sen}^3(\Omega t) \\
& = Y \text{sen}(\Omega t - \varphi).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Pela igualdade trigonométrica  $\text{sen}^3(x) = \frac{3}{4}\text{sen}(x) - \frac{1}{4}\text{sen}(3x)$ , tem-se

$$\begin{aligned}
& -m\Omega^2 X \text{sen}(\Omega t) + c\Omega X \text{cos}(\Omega t) + kX \text{sen}(\Omega t) + k_3 X^3 \left[ \frac{3}{4}\text{sen}(\Omega t) - \frac{1}{4}\text{sen}(3\Omega t) \right] \\
& = Y \text{sen}(\Omega t) \text{cos}(\varphi) - Y \text{cos}(\Omega t) \text{sen}(\varphi).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Organizando os termos em  $\text{sen}(\Omega t)$  e  $\text{cos}(\Omega t)$ , decorre que

$$-m\Omega^2 X + kX + \frac{3}{4}k_3 X^3 = Y \text{cos}(\varphi) \tag{4.17}$$

$$c\Omega X = -Y \text{sen}(\varphi). \tag{4.18}$$

Nota-se que a equação não está sendo resolvida por inteiro, uma vez que o termo  $\text{sen}(3\Omega t)$  não é considerado. Assim, tem-se uma solução aproximada e não exata. Elevando (4.17) e (3.18) ao quadrado e somando-as, obtém-se a seguinte relação

$$Y^2 = X^2 \left[ \left( -m\Omega^2 + k + \frac{3}{4}k_3 X^2 \right)^2 + c^2 \Omega^2 \right]. \tag{4.19}$$

Da relação acima, resulta o método da FRF do sistema, qual seja,

$$\frac{|X|}{|Y|} = \frac{1}{\left[ \left( -m\Omega^2 + k + \frac{3}{4}k_3 X^2 \right)^2 + c^2 \Omega^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.20}$$

A fase correspondente é obtida da razão entre (4.17) e (3.18):

$$\varphi = \text{arctg} \left( \frac{-c\Omega}{-m\Omega^2 + k + \frac{3}{4}k_3 X^2} \right). \tag{4.21}$$

O mesmo conceito utilizado aqui para a determinação da FRF de um sistema não linear cúbico com um grau de liberdade também será adotado em seguida, dessa vez para obter a função transmissibilidade. Antes contudo, será discutida a FRF obtida em (4.20).

### 4.3.3 Função Resposta em Frequência - Não Linearidade Cúbica

Dos métodos de aproximação da resposta de um sistema não linear, o MBH é o que fornece indiscutivelmente a FRF mais próxima da original (Worden e Tomlinson, 2001), uma vez que, uma FRF original é determinada quando o sistema é linear, em que a resposta para uma excitação senoidal, é também um sinal senoidal na mesma frequência da excitação e é independente da amplitude de excitação  $Y$ . Se o sistema é não linear, a resposta de uma excitação senoidal apresenta componentes em outras frequências que a frequência de excitação.

Ao fixar-se um nível de excitação, a frequência natural do sistema não linear é dada por

$$\Omega_n = \left( \frac{k + \frac{3}{4}k_3X^2}{m} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.22)$$

Se  $k_3 > 0$ , o sistema é dito *hardening* (progressivamente rígido) e a frequência natural aumenta à medida que a amplitude de  $Y$  aumenta. Por outro lado, se  $k_3 < 0$ , a frequência natural diminui com o aumento de  $Y$  e o sistema é caracterizado como *softening* (progressivamente flexível).

A FRF composta do sistema não linear cúbico é obtida através da resposta aproximada da equação (4.19) para uma frequência estabelecida  $\Omega$  e uma amplitude de excitação  $Y$ . A solução de (4.19) pode fornecer raízes complexas em pares conjugados, que são desprezadas por não possuírem sentido. Assim, tem-se uma ou três soluções reais, posto que a equação (4.19) é, em essência, uma equação cúbica em  $X$ .

Suponha um ensaio experimental realizado com uma varredura senoidal crescente e, na sequência, decrescente em relação a frequência. Considere uma faixa de frequência  $[\Omega_i, \Omega_f]$  (para mais detalhes da obtenção desta faixa, vide Worden e Tomlinson, 2001), onde  $\Omega_i$  e  $\Omega_f$  são a frequência inicial e a frequência final, respectivamente, (vide Figura 8). Para a varredura de ida (crescente na frequência) (vide Figura 9), uma única resposta  $X_1$  existe até  $\Omega = \Omega_i$  e continua a existir até  $\Omega = \Omega_f$ . Então  $X_1$ , para de existir e somente a solução  $X_3$  existe a partir dessa frequência. Percebe-se um pulo de  $X_1$  para  $X_3$ , resultando em uma descontinuidade.

Quando a varredura é de volta (decrescente na frequência) (vide Figura 10), a resposta  $X_3$  é a única existente até chegar em  $\Omega = \Omega_i$ , onde há um salto para  $X_1$ , que passa a vigorar até  $\Omega = 0$ . Ambas as varreduras acontecem na prática, e a resposta completa,

associada à FRF composta e considerando a instabilidade  $X_2$ , pode ser observada na Figura 8. Ressalta-se que  $X_2$  é instável e, portanto, nunca será observada na prática.

Respostas observadas experimentalmente apresentam frequentemente descontinuidades quando altos níveis de excitação são adotados. No intervalo  $[\Omega_i, \Omega_f]$ , as soluções  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  ocorrem e  $X_1 > X_2 > X_3$ . Vislumbra-se também que, se  $k_3 > 0$  o pico de ressonância move-se para frequências de valores superiores e os pulos ocorrem no lado direito do pico. Já se  $k_3 < 0$ , os pulos ocorrem no lado esquerdo do pico e o pico de ressonância movimenta-se para frequências inferiores.

Conforme já mencionado neste documento, descontinuidades também aparecem nos respectivos gráficos de fase. Conhecido o comportamento das soluções obtidas através do método do balanço harmônico, dá-se continuidade ao estudo dos modelos de representação de um sistema não linear cúbico.

Figura 8: Resposta (deslocamento) de um oscilador de *Duffing* para uma entrada senoidal. Os pontos de bifurcação são vistos em B e C.

Figura 9: Resposta (deslocamento) de um oscilador de *Duffing* para uma entrada senoidal da frequência inferior à frequência superior.



Figura 10: Resposta (deslocamento) de um oscilador de *Duffing* para uma entrada senoidal da frequência superior à frequência inferior.

#### 4.3.4 Transmissibilidade

Assim como uma função resposta em frequência (FRF) obtida entre deslocamento e força é uma função característica de um sistema, uma transmissibilidade obtida entre deslocamento de saída e deslocamento de entrada também é uma função característica do mesmo. Tal função é muito utilizada em controle de vibrações, particularmente em isolamento (Snowdon, 1966; Espíndola, 1987; Kitis, 1983), uma vez que a eficácia do isolamento pode ser verificada através dela.

De modo geral, o isolamento busca reduzir uma força ou uma vibração, quando estas são transmitidas de um sistema a outro. Essa redução pode requerer a colocação de elementos ativos ou passivos (molas e amortecedores) entre uma máquina e seu suporte.

Há os dois tipos de isolamento, de movimento ou passivo (vide Figura 11.a) e de força ou ativo (vide Figura 11.b) (Snowdon, 1968). Quando o isolamento é de força, a excitação é gerada pelo próprio sistema mecânico e deve-se reduzir tal excitação, quando transmitida por ele para a base, como em prensas mecânicas que geram excitações e as transmitem para a sua fundação. No caso de isolamento de movimento, a vibração é gerada no meio e busca-se reduzi-la na transmissão da base para o sistema mecânico, como vibrações geradas por irregularidades nas estradas e que são transmitidas à carroceria de um automóvel.

Figura 11: (a) Isolamento de movimento. (b) Isolamento de força.

A transmissibilidade em isolamento de força pode ser definida como o valor absoluto da relação, no domínio da frequência, entre a força transmitida à fundação e a força aplicada ao sistema, sendo dada por

$$T = \left| \frac{F_t}{F} \right|. \quad (4.23)$$

Já a transmissibilidade em isolamento de movimento, equivalente à citada anteriormente, pode ser definida como o valor absoluto da relação entre os deslocamentos  $X$  e  $X_b$ , qual seja,

$$T = \left| \frac{X}{X_b} \right|. \quad (4.24)$$

As equações (4.23) e (4.24) resultam na mesma expressão para a transmissibilidade. A seguir, é desenvolvida a expressão para o isolamento de movimento, para um sistema linear.

#### 4.3.5 Isolamento de Movimento - Sistema Linear com um Grau de Liberdade

A Figura 11.a apresenta um sistema linear simples com um grau de liberdade, sendo excitado pela base. Ele é composto por uma massa e um elemento de material viscoelástico ligado à uma base vibrante. Considerando a temperatura constante e uma excitação harmônica de frequência  $\Omega$ , a equação de movimento do sistema da Figura 11.a é dada por

$$\bar{k}[x_b(t) - x(t)] = mx''(t), \quad (4.25)$$

onde  $\bar{k}$  é uma rigidez complexa. Aplicando a transformada de Fourier em (4.25) e, na sequência, considerando  $\bar{k} = LG_c(\Omega) = LG(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)]$ , tem-se

$$T(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{X_b(\Omega)} = \left| \frac{LG(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)]}{-m\Omega^2 + LG(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)]} \right|. \quad (4.26)$$

Pode-se reescrever a equação (4.26) de forma adimensional definindo

$$\begin{aligned}\Omega_n &= \sqrt{\frac{LG(\Omega_n)}{m}}, \\ r(\Omega) &= \frac{G(\Omega)}{G(\Omega_n)}, \\ \varepsilon &= \frac{\Omega}{\Omega_n}\end{aligned}$$

e aplicando essas definições após a divisão de numerador e denominador por  $LG(\Omega_n)$ , de modo que

$$T(\Omega) = \left| \frac{r(\Omega)(1 + i\eta(\Omega))}{-\varepsilon^2 + r(\Omega)(1 + i\eta(\Omega))} \right|. \quad (4.27)$$

A fase da transmissibilidade  $\varphi_t$  é obtida pela diferença entre as fases dos deslocamentos  $X$  e  $X_b$ , ou seja,  $\varphi_t = \varphi_x - \varphi_{x_b}$ . O mesmo vale para a fase da transmissibilidade em isolamento de força, que é a diferença de fase entre a fase força transmitida e a da força aplicada.

#### 4.3.6 Isolamento de Movimento - Sistema Não Linear Cúbico com um Grau de Liberdade

Para obter a transmissibilidade relativa a um sistema não linear cúbico com um grau de liberdade, parte-se do sistema apresentado na Figura 12 e considera-se, inicialmente a equação de movimento (4.14), adaptada ao caso em questão como

$$mx'' + c(x' - x'_b) + k(x - x_b) + k_3(x - x_b)^3 = 0. \quad (4.28)$$

Figura 12: Sistema não linear cúbico com um grau de liberdade sob movimento da base.

Definindo  $z = x - x_b$  então  $z' = x' - x'_b$ , tem-se e  $z'' = x'' - x''_b$ , onde  $z$  é o movimento da massa em relação ao movimento da base. A equação (4.28) toma, assim a forma

$$mz'' + cz' + kz + k_3z^3 = -mx''_b. \quad (4.29)$$

Sejam, agora,  $x_b = X_b \text{sen}(\Omega t - \varphi_{x_b})$  e  $z = Z \text{sen}(\Omega t)$ . A equação (4.29) forma, em decorrência

$$\begin{aligned} -m\Omega^2 Z \text{sen}(\Omega t) + c\Omega Z \cos(\Omega t) + kZ \text{sen}(\Omega t) + k_3 Z^3 \text{sen}^3(\Omega t) \\ = m\Omega^2 X_b \text{sen}(\Omega t - \varphi_{x_b}). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Segundo a igualdade trigonométrica  $\text{sen}^3(x) = \frac{3}{4}\text{sen}(x) - \frac{1}{4}\text{sen}(3x)$ , pode-se reescrever (3.30) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} -m\Omega^2 Z \text{sen}(\Omega t) + c\Omega Z \cos(\Omega t) + kZ \text{sen}(\Omega t) + k_3 Z^3 \left[ \frac{3}{4}\text{sen}(\Omega t) - \frac{1}{4}\text{sen}(3\Omega t) \right] \\ = m\Omega^2 X_b \text{sen}(\Omega t) \cos(\varphi_{x_b}) - m\Omega^2 X_b \cos(\Omega t) \text{sen}(\varphi_{x_b}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Comparando os termos em  $\text{sen}(\Omega t)$  e  $\cos(\Omega t)$  em ambos os lados da igualdade e desprezando o termo  $\text{sen}(3\Omega t)$  (como já discutido neste trabalho), obtem-se

$$-m\Omega^2 Z + kZ + \frac{3}{4}k_3 Z^3 = -m\Omega^2 X_b \cos(\varphi_{x_b}) \quad (4.32)$$

$$c\Omega Z = -m\Omega^2 X_b \text{sen}(\varphi_{x_b}). \quad (4.33)$$

Elevando (4.32) e (3.33) ao quadrado e somando-as, resulta em

$$Z^2 \left[ \left( -m\Omega^2 + k + \frac{3}{4}k_3 Z^2 \right)^2 + c^2 \Omega^2 \right] = m^2 \Omega^4 X_b^2, \quad (4.34)$$

ou ainda

$$\frac{Z^2}{X_b^2} = \frac{m^2\Omega^4}{(-m\Omega^2 + k + \frac{3}{4}k_3Z^2)^2 + c^2\Omega^2}, \quad (4.35)$$

donde resulta que

$$\left| \frac{Z}{X_b} \right| = \frac{m\Omega^2}{[(-m\Omega^2 + k + \frac{3}{4}k_3Z^2)^2 + c^2\Omega^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.36)$$

A fase  $\varphi_{x_b}$  é obtida da razão entre (4.32) e (3.33), sendo dada por

$$\varphi_{x_b} = \text{arctg} \left( \frac{-c\Omega}{-m\Omega^2 + k + \frac{3}{4}k_3Z^2} \right). \quad (4.37)$$

Obtido o valor do deslocamento da massa em relação a base  $|\bar{Z}|$ , determina-se a transmissibilidade. Obtidas as relações acima, segue-se para a determinação da transmissibilidade, já no domínio da frequência. Sabe-se que  $\bar{T} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}_b}$ , com  $\bar{X} = |X|e^{i\varphi_x}$ ,  $\bar{X}_b = |X_b|e^{i\varphi_{x_b}}$  e  $\bar{Z} = |Z|e^{i\varphi_z}$ . Sabe-se ainda que (vide Figura 13)

$$\begin{aligned} \bar{X} &= |X|\cos(\varphi_x) + |X|isen(\varphi_x) \\ &= |X|(\cos\varphi_x + isen\varphi_x) \\ &= |X|e^{i\varphi_x} \end{aligned}$$

Figura 13: Plano complexo.

Voltando a  $z = x - x_b \implies \bar{Z} = \bar{X} - \bar{X}_b$ . Portanto,

$$\frac{\bar{Z}}{\bar{X}_b} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}_b} - \frac{\bar{X}_b}{\bar{X}_b}$$

$$\frac{\bar{Z}}{\bar{X}_b} = \bar{T} - 1$$

$$\bar{T} = \frac{\bar{Z}}{\bar{X}_b} + 1 \quad (4.38)$$

como

$$\bar{T} = |T|e^{i\varphi_t}, \quad (4.39)$$

tem-se com (3.38) e (4.39), que

$$|T|e^{i\varphi_t} = \left| \frac{Z}{X_b} \right| e^{i(\varphi_z - \varphi_{x_b})} + 1. \quad (4.40)$$

Fazendo a mudança de variável  $\frac{\bar{Z}}{\bar{X}_b} = \bar{H}$ , então  $\varphi_z - \varphi_{x_b} = \varphi_h$ , que é a diferença de fase entre o deslocamento relativo e o movimento da base. Decorre que

$$|T|e^{i\varphi_t} = |H|e^{i\varphi_h} + 1$$

$$|T|[\cos(\varphi_t) + i\text{sen}(\varphi_t)] = |H|[\cos(\varphi_h) + i\text{sen}(\varphi_h)] + 1. \quad (4.41)$$

Igualando os termos reais e imaginários, chega-se a

$$|T|\cos(\varphi_t) = |H|\cos(\varphi_h) + 1 \quad (4.42)$$

e

$$|T|\text{sen}(\varphi_t) = |H|\text{sen}(\varphi_h). \quad (4.43)$$

Elevando (4.42) e (4.43) ao quadrado e somando, obtém-se

$$|T| = \left[ \left| \frac{Z}{X_b} \right|^2 + 2 \left| \frac{Z}{X_b} \right| \cos(\varphi_z - \varphi_{x_b}) + 1 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.44)$$

onde  $|T|$ , dado por (4.44) é o módulo da transmissibilidade.

Substituindo  $\left| \frac{Z}{X_b} \right|$ , dado por (4.36), em (4.44) e considerando  $\varphi_z = 0$ , resulta que

$$|\bar{T}| = \left[ \left( \frac{m^2 \Omega^4}{(-m\Omega^2 + k + \frac{3}{4}k_3 Z^2)^2 + c^2 \Omega^2} \right) + 2 \left( \frac{m\Omega^2}{(-m\Omega^2 + k + \frac{3}{4}k_3 Z^2)^2 + c^2 \Omega^2} \cos(\varphi_{x_b}) \right) + 1 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Observa-se que, se  $\varphi_z = 0$ ,  $\varphi_z - \varphi_{x_b} = -\varphi_{x_b}$  e  $\cos(-\varphi_{x_b}) = \cos(\varphi_{x_b})$ . Para obter a fase da transmissibilidade, toma-se a razão entre (4.43) e (4.42), de modo que

$$\text{tg}(\varphi_t) = \frac{|H|\text{sen}(\varphi_h)}{|H|[\cos(\varphi_h)] + 1}. \quad (4.45)$$

Como, para  $\varphi_z = 0$ ,  $\varphi_h = -\varphi_{x_b}$  e  $\text{sen}(-\varphi_{x_b}) = -\text{sen}(\varphi_{x_b})$ , além de  $\cos(-\varphi_{x_b}) = \cos(\varphi_{x_b})$ , tem-se que

$$\varphi_t = \text{arctg} \left[ \frac{-|Z|\text{sen}(\varphi_{x_b})}{|X_b| + |Z|\cos(\varphi_{x_b})} \right], \quad (4.46)$$

que é a expressão da fase. Recordar-se que  $\left| \frac{Z}{X_b} \right|$  e  $\varphi_{x_b}$  são dados, respectivamente, por (4.36) e (4.37).

### 4.3.7 Influência dos Harmônicos Superiores

Conforme previamente exposto, o "balanço" dos harmônicos resultantes é realizado após a substituição da solução aproximada na equação de movimento. Percebe-se que, em (3.16) e (3.34), que este balanço não foi realizado por completo, uma vez que os termos  $-\frac{1}{4}k^3 X^3$  e  $-\frac{1}{4}k^3 Z^3$  foram desprezados. Uma breve discussão será realizada nessa

seção a esse respeito, a título de esclarecimentos gerais, pois, no presente trabalho, a desconsideração desse termo, não altera o resultado.

Seja a solução aproximada (4.47) (Worden e Tomlinson, 2001), considerando apenas os harmônicos ímpares, qual seja

$$x(t) = X_1 \text{sen}(\Omega t + \varphi_1) + X_3 \text{sen}(3\Omega t + \varphi_3). \quad (4.47)$$

Substituindo-a em (4.14), considerando as relações trigonométricas  $\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}(a)\cos(b) \pm \cos(a)\text{sen}(b)$  e  $\text{sen}^3(x) = \frac{3}{4}\text{sen}(x) - \frac{1}{4}\text{sen}(3x)$  e igualando os coeficientes em  $\text{sen}(\Omega t)$ ,  $\cos(\Omega t)$ ,  $\text{sen}(3\Omega t)$  e  $\cos(3\Omega t)$  tem-se, respectivamente

$$\begin{aligned} & -m\Omega^2 X_1 \cos(\varphi_1) - c\Omega X_1 \text{sen}(\varphi_1) + kX_1 X_1 \cos(\varphi_1) + \\ & \frac{3}{4}k^3 X_1^3 \cos(\varphi_1) + \frac{3}{2}k^3 X_1 X_3^3 \cos(\varphi_1) - \frac{3}{4}k^3 X_1^2 x_3 \cos(\varphi_3) \cos 2(\varphi_1) = Y \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} & -m\Omega^2 X_1 \text{sen}(\varphi_1) - c\Omega X_1 \cos(\varphi_1) + kX_1 X_1 \text{sen}(\varphi_1) + \\ & \frac{3}{4}k^3 X_1^3 \text{sen}(\varphi_1) + \frac{3}{2}k^3 X_1 X_3^3 \text{sen}(\varphi_1) - \frac{3}{4}k^3 X_1^2 x_3 \text{sen}(\varphi_3) \cos 2(\varphi_1) = 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} & -9m\Omega^2 X_3 \cos(\varphi_3) - 3c\Omega X_3 \text{sen}(\varphi_3) + kX_3 \cos(\varphi_3) - \frac{1}{4}k_3 X_1^3 \cos^3(\varphi_1) + \\ & \frac{3}{4}k^3 X_3^3 \cos(\varphi_3) + \frac{3}{2}k^3 X_3 X_1^2 \cos(\varphi_3) - \frac{3}{4}k^3 X_1^3 \cos(\varphi_1) \text{sen}^2(\varphi_1) = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} & -9m\Omega^2 X_3 \text{sen}(\varphi_3) + 3c\Omega X_3 \cos(\varphi_3) + kX_3 \text{sen}(\varphi_3) + \frac{1}{4}k_3 X_1^3 \text{sen}^3(\varphi_1) + \\ & \frac{3}{4}k^3 X_3^3 \cos(\varphi_3) + \frac{3}{2}k^3 X_3 X_1^2 \text{sen}(\varphi_3) - \frac{3}{4}k^3 X_1^3 \text{sen}(\varphi_1) \cos^2(\varphi_1) = 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

O sistema de equações acima fornece uma melhor aproximação da solução. Observa-se que os termos em  $\text{sen}^3(\Omega t)$ ,  $\text{sen}^2(\Omega t)\text{sen}(3\Omega t)$ ,  $\text{sen}(\Omega t)\text{sen}^2(3\Omega t)$  e  $\text{sen}^3(3\Omega t)$  são gerados devido ao termo cúbico do sistema. Se decompostos adequadamente, conduzem a uma solução da forma

$$\begin{aligned} x(t) = & X_1 \text{sen}(\Omega t + \varphi_1) + X_3 \text{sen}(3\Omega t + \varphi_3) + X_5 \text{sen}(5\Omega t + \varphi_5) + \\ & X_7 \text{sen}(7\Omega t + \varphi_7) + X_9 \text{sen}(9\Omega t + \varphi_9). \end{aligned} \quad (4.52)$$



Assim, considerando todos os termos ímpares, a solução é dada por

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} X_{2i+1} \text{sen}[(2i+1)\Omega t + \varphi_{2i+1}]. \quad (4.53)$$

A equação (4.53) resume o fato do aparecimento de componentes harmônicos em sistemas não lineares, bem como, a presença de apenas termos ímpares como consequência da reação elástica, associada a  $k$  (linear) e  $k_3$  (cúbica), ser uma função ímpar.

Novamente, necessita-se conhecer a *priori* quais harmônicos devem ser inseridos na solução aproximada. Em trabalhos realizados anteriormente pelo GVIBS (Bavastri et al., 2012), detectou-se que a resposta do sistema não linear cúbico pode ser satisfatoriamente aproximada com somente um harmônico na solução. A verificação desse fato não foi realizada neste trabalho e fica como sugestão para trabalhos futuros.

#### 4.3.8 Sistema Não Linear Cúbico com dois Graus de Liberdade

Um sistema com dois graus de liberdade necessita de duas coordenadas físicas independentes para determinação de sua dinâmica. Aqui, será apresentada a curva resposta em frequência (CRF) para um sistema composto (sistema primário não linear mais o sistema secundário linear - neutralizador dinâmico viscoelástico). As respectivas manipulações algébricas também serão explanadas, bem como os métodos utilizados para a concepção do modelo matemático. O neutralizador dinâmico viscoelástico será modelado sem e com o uso do conceito de parâmetros equivalentes generalizados (PEG's) (Espíndola e Silva, 1992).

#### 4.3.9 Sistema Composto Clássico

Primeiramente é apresentado o modelo tradicional de dois graus de liberdade. Este modelo equivalente representa o sistema primário e o neutralizador dinâmico viscoelástico, sendo o primeiro com comportamento não linear cúbico e o segundo considerado linear.

A Figura 14 representa o modelo a ser estudado, sendo a excitação harmônica aplicada no sistema primário.

Como pode-se observar na Figura 14:

- $m_1$  é a massa do sistema primário;
- $c_1$  é a constante de amortecimento do sistema primário;
- $k_1$  é a parcela linear da rigidez do sistema primário;
- $k_3$  é a parcela não linear (cúbica) da rigidez do sistema primário;
- $x_1$  é a coordenada generalizada do sistema primário;
- $m_a$  é a massa do neutralizador;

Figura 14: Modelo do sistema composto.

$x_2$  é a coordenada generalizada do neutralizador;

$f$  é a amplitude da excitação aplicada no sistema primário.

O modelo matemático do sistema é obtido a partir do diagrama de corpo livre e do diagrama de forças resultantes (Gonçalves et al., 2012), tal que

$$m_1 x_1'' + k_1 x_1 + k_3 x_1^3 + c_1 x_1' - k_s(\Omega)(x_2 - x_1) = f \cos(\Omega t) \quad (4.54)$$

$$m_a x_2'' + k_s(\Omega)(x_2 - x_1) = 0. \quad (4.55)$$

Nas equações (4.54) e (4.55),  $k_s$  é a rigidez do elemento viscoelástico, rigidez essa dependente da frequência. Dividindo as equações (4.54) e (4.55) por  $m_1$  e  $m_a$ , dependente respectivamente, tem-se

$$x_1'' + \frac{k_1}{m_1} x_1 + \frac{k_3}{m_1} x_1^3 + \frac{c_1}{m_1} x_1' - \frac{k_s(\Omega)}{m_1} (x_2 - x_1) = \frac{f}{m_1} \cos(\Omega t) \quad (4.56)$$

$$x_2'' + \frac{k_s(\Omega)}{m_a} (x_2 - x_1) = 0. \quad (4.57)$$

Definindo as variáveis

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \varepsilon = \frac{k_3}{m_1}, \quad \mu_{10} = \frac{c_1}{m_1}, \quad f_0 = \frac{f}{m_1}, \quad \mu = \frac{m_a}{m_1} \quad \text{e} \quad x_r = x_2 - x_1,$$

as equações podem ser reescritas como

$$x_1'' + \omega_{10}^2 x_1 + \varepsilon x_1^3 + \mu_{10} x_1' - \frac{k_R(\Omega)}{m_1} x_r - \frac{k_I(\Omega)}{m_1 \Omega} x_r' = f_0 \cos(\Omega t) \quad (4.58)$$

$$x_r'' + \frac{k_R(\Omega)}{m_a} x_r + \frac{k_I(\Omega)}{m_a \Omega} x_r' = -x_1'', \quad (4.59)$$

onde  $k_R$  e  $k_I$  são, respectivamente, a parte real e imaginária da rigidez do elemento viscoelástico  $k_s$ .

A relação  $\frac{k_R(\Omega)}{m_1}$  pode ser escrita como

$$\frac{k_R(\Omega)}{m_1} = \frac{m_a}{m_1} \cdot \frac{k_R(\Omega_a)}{m_a} \cdot \frac{k_R(\Omega)}{k_R(\Omega_a)} = \mu \Omega_a^2 R(\Omega). \quad (4.60)$$

Na equação (4.60),  $\Omega_a$  é a frequência natural do neutralizador, dada por

$$\Omega_a^2 = \frac{k_R(\Omega_a)}{m_a}$$

enquanto

$$R(\Omega) = \frac{k_R(\Omega)}{k_R(\Omega_a)} = \frac{G_R(\Omega)}{G_R(\Omega_a)},$$

lembrando que  $G_R(\Omega_a)$  é a parte real do módulo de cisalhamento complexo, avaliado para  $\Omega = \Omega_a$ .

Da mesma forma, a relação  $\frac{k_I(\Omega)}{m_1}$  também pode ser escrita como

$$\frac{k_I(\Omega)}{m_1} = \frac{k_R(\Omega)}{m_1} \cdot \frac{\eta(\Omega)}{\Omega} = \frac{\mu \Omega_a^2 R(\Omega)}{\Omega} R(\Omega) \eta(\Omega). \quad (4.61)$$

Logo, as equações (4.58) e (4.59), resultam no sistema

$$x_1'' + \omega_{10}^2 x_1 + \varepsilon x_1^3 + \mu_{10} x_1' - \mu \Omega_a^2 R(\Omega) x_r - \mu \frac{\Omega_a^2}{\Omega} R(\Omega) \eta(\Omega) x_r' = f_0 \cos(\Omega t) \quad (4.62)$$

$$x_r'' + \Omega_a^2 R(\Omega) x_r + \frac{\Omega_a^2}{\Omega} R(\Omega) \eta(\Omega) x_r' = -x_1''. \quad (4.63)$$

Definindo  $\tau = \Omega t$ , é possível calcular  $\frac{d^2(\cdot)}{dt^2} = \Omega^2 \frac{d^2(\cdot)}{d\tau^2}$  e  $\frac{d(\cdot)}{dt} = \Omega \frac{d(\cdot)}{d\tau}$ . Assim, dividindo as equações (4.62) e (4.63) por  $\Omega^2$ , obtem-se

$$x_1'' + \overline{\omega_{10}^2} x_1 + \overline{\varepsilon} x_1^3 + \overline{\mu_{10}} x_1' - \mu \frac{R(\Omega)}{\beta^2} x_r - \mu \frac{R(\Omega)}{\beta^2} \eta(\Omega) x_r' = \overline{f_0} \cos(\tau) \quad (4.64)$$

$$x_r'' + \frac{R(\Omega)}{\beta^2} x_r + \frac{R(\Omega)}{\beta^2} \eta(\Omega) x_r' = -x_1'' \quad (4.65)$$

A notação com barra de algumas variáveis indica a diferenciação em relação a nova variável  $\tau$  e correspondem a

$$\overline{\omega_{10}^2} = \frac{\omega_{10}^2}{\Omega^2}, \quad \beta = \frac{\Omega}{\Omega_a}, \quad \overline{\mu_{10}} = \frac{\mu_{10}}{\Omega}, \quad \overline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\Omega^2} \quad \text{e} \quad \overline{\Omega_a} = \frac{\Omega_a}{\Omega}.$$

As equações (4.64) e (4.65) podem ser reescritas na forma matricial, qual seja

$$Mq'' + Cq' + Kq = f, \quad (4.66)$$

onde as matrizes de massa, amortecimento e rigidez são dadas por

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

$$C = \begin{bmatrix} \overline{\mu_{10}} & -\mu\beta^{-2}R(\Omega)\eta(\Omega) \\ 0 & \beta^{-2}R(\Omega)\eta(\Omega) \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

e

$$K = \begin{bmatrix} \overline{\omega_{10}^2} & -\mu\beta^{-2}R(\Omega) \\ 0 & \beta^{-2}R(\Omega) \end{bmatrix}, \quad (4.69)$$

e os vetores de coordenadas e esforços dados por

$$q = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

e

$$f = \begin{bmatrix} \overline{f_0} \cos(\tau) - \overline{\varepsilon} x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Para determinar a resposta, supõe-se a seguinte equação:

$$q(\tau) = u(\tau) \cos(\tau) + v(\tau) \sin(\tau), \quad (4.72)$$

onde  $u = [u_1(\tau) \ u_2(\tau)]^T$  e  $v = [v_1(\tau) \ v_2(\tau)]^T$ . A derivada de primeira ordem da equação (4.72) fica

$$q'(\tau) = -u(\tau) \sin(\tau) + v(\tau) \cos(\tau). \quad (4.73)$$

Segundo o método do balanço harmônico (MBH) (Thomsen, 2010), para obter a curva de resposta em frequência (CRF), parte-se da seguinte relação:

$$u'(\tau) \cos(\tau) + v'(\tau) \sin(\tau) = 0. \quad (4.74)$$

Empregando a equação (4.74), bem como a equação (4.73) para determinar  $q''$  e substituindo os resultados na equação (4.66), tem-se

$$(Mv' - Mu + Cv + Ku) \cos(\tau) - (Mu' - Mv + Cu + Kv) \sin(\tau) = f(u, v, \tau). \quad (4.75)$$

Multiplicando a equação (4.74) por  $M \cos(\tau)$  e a equação (4.75) por  $-\sin(\tau)$ , somando ambos os resultados e integrando a equação resultante de 0 a  $2\pi$ , com  $u$  e  $v$  constantes, chega-se a

$$Mu' = -\frac{1}{2}(M - K)v' - \frac{1}{2}Cu + \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\frac{3}{4}v_1a_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4.76)$$

onde  $a_1^2 = u_1^2 + v_1^2$  e  $a_2^2 = u_2^2 + v_2^2$ .

De forma análoga, multiplica-se a equação (4.74) por  $M\sin(\tau)$  e a equação (4.75) por  $\cos(\tau)$  e, em seguida, fazem-se as mesmas manipulações anteriores para a obtenção da equação (4.77). Decorre que

$$Mv' = -\frac{1}{2}(M - K)u' - \frac{1}{2}Cu + \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\bar{f}_0 - \bar{\varepsilon}\frac{3}{4}u_{21}a_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right). \quad (4.77)$$

Assim, as equações (4.76) e (4.77) são postas do lado esquerdo e igualadas a zero, a fim de se determinar a solução em estado estacionário para as equações (4.74) e (4.75). Após as manipulações algébricas propostas, chega-se a curva de resposta em frequência (CRF), uma função implícita de  $a_1$  e  $\Omega$ , dada por

$$a_1^2[A(\Omega)^2 + B(\Omega)^2] - \bar{f}_0^2[(1 - \beta^{-2}R(\Omega))^2 + (\beta^{-2}R(\Omega)\eta(\Omega))^2] = 0, \quad (4.78)$$

onde

$$A(\Omega) = \left[ \left( 1 - \bar{\omega}_{10}^2 + \mu - \frac{3}{4}\bar{\varepsilon}a_1^2 \right) \beta^{-2}R(\Omega)\eta(\Omega) + \bar{\mu}_{10} (1 - \beta^{-2}R(\Omega)) \right]$$

e

$$B(\Omega) = \left[ \left( 1 - \bar{\omega}_{10}^2 \right) (1 - \beta^{-2}R(\Omega)) - \mu\beta^{-2}R(\Omega) - \bar{\mu}_{10}\beta^{-2}R(\Omega)\eta(\Omega) - \frac{3}{4}\bar{\varepsilon}a_1^2 (1 - \beta^{-2}R(\Omega)) \right].$$

Após a determinação da amplitude  $a_1$  do sistema primário, é possível determinar a amplitude  $a_2$  do sistema secundário, a qual é dada por

$$a_2^2[A(\Omega)^2 + B(\Omega)^2] - \bar{f}_0^2 = 0. \quad (4.79)$$

As equações (4.78) e (4.79) fornecem a curva de resposta em frequência (CRF) para o sistema composto proposto.

#### 4.3.10 Parâmetros Equivalentes Generalizados - PEG's

A principal vantagem da utilização dos parâmetros equivalente generalizados (PEG's) para os neutralizadores dinâmicos é a possibilidade de modelar o sistema composto (sistema primário mais neutralizador) em função apenas da coordenada do sistema primário. Nesse trabalho, serão apresentados, de forma concisa, para um neutralizador viscoelástico simples, os principais conceitos. Para mais detalhes, recomenda-se Espíndola e Silva (1992).

Seja o neutralizador viscoelástico simples de um grau de liberdade representado na Figura 15. Para uma dada temperatura constante, a rigidez complexa  $LG_c(\Omega)$  do elemento viscoelástico é dada por

$$LG_c(\Omega) = LG(\Omega)[1 + i\eta_G(\Omega)]. \quad (4.80)$$

Figura 15: Neutralizador simples com um grau de liberdade.

A partir do desenvolvimento do diagrama de corpo livre desse sistema, chega-se, após algumas manipulações algébricas, à equação da rigidez dinâmica na base (também poderia ser a impedância mecânica ou a massa dinâmica), dada por

$$k_b(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{X_b(\Omega)} = \frac{LG_c(\Omega)(-m\Omega^2)}{LG_c(\Omega) + (-m\Omega^2)} \quad (4.81)$$

ou

$$k_b(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{X_b(\Omega)} = \frac{LG(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)](-m\Omega^2)}{LG(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)] + (-m\Omega^2)} \quad (4.82)$$

onde  $\eta_G(\Omega) = \eta(\Omega)$  e  $LG_c(\Omega) = LG(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)]$ .

Da Figura 16, pode-se mostrar que  $k_b(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{X_b(\Omega)} = -\Omega^2 m_{eq}(\Omega) + i\Omega c_{eq}(\Omega)$ , em que  $m_{eq}$  e  $c_{eq}$  são a massa e a constante de amortecimento equivalentes, respectivamente.

Voltando à equação (4.82) com as definições  $\Omega_n = \sqrt{\frac{LG(\Omega_n)}{m}}$ ,  $r(\Omega) = \frac{G(\Omega)}{G(\Omega_n)}$  e  $\varepsilon = \frac{\Omega}{\Omega_n}$ , onde  $\Omega_n$  é a frequência natural e  $m$  a massa do neutralizador, tem-se, dividindo (4.82) por  $LG(\Omega_n)$ , que

$$k_b(\Omega) = \frac{(-m\Omega^2)r(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)]}{[-\varepsilon^2 + r(\Omega)][1 + i\eta(\Omega)]}. \quad (4.83)$$

Multiplicando e dividindo a equação (4.83) pelo complexo conjugado do denominador, é possível evidenciar a parte real e a parte imaginária de  $k_b(\Omega)$ , a saber

$$\begin{aligned} k_b(\Omega) &= \frac{-m\Omega^2 r(\Omega)[-\varepsilon^2 + r(\Omega)(1 + \eta^2(\Omega))]}{[-\varepsilon^2 + r(\Omega)]^2 + [\eta(\Omega)r(\Omega)]^2} \\ &+ \frac{i[m\Omega^2 \eta(\Omega)r(\Omega)\varepsilon^2]}{[-\varepsilon^2 + r(\Omega)]^2 + [\eta(\Omega)r(\Omega)]^2}. \end{aligned}$$

Dividindo a parte real de  $k_b(\Omega)$  por  $-\Omega^2$  e a parte imaginária por  $\Omega$ , obtem-se  $m_{eq}(\Omega)$  e  $c_{eq}(\Omega)$ , respectivamente. Ou seja,

$$m_{eq}(\Omega) = \frac{Re[k_b(\Omega)]}{-\Omega^2}$$

e

$$c_{eq}(\Omega) = \frac{Im[k_b(\Omega)]}{\Omega},$$

onde  $(Re)$  e  $(Im)$  são a parte real e imaginária, respectivamente. Dessa forma tem-se

$$m_{eq}(\Omega) = \frac{mr(\Omega)[-\varepsilon^2 + r(\Omega)(1 + \eta^2(\Omega))]}{[-\varepsilon^2 + r(\Omega)]^2 + [\eta(\Omega)r(\Omega)]^2} \quad (4.84)$$



e

$$c_{eq}(\Omega) = \frac{m\Omega\eta(\Omega)r(\Omega)\varepsilon^2}{[-\varepsilon^2 + r(\Omega)]^2 + [\eta(\Omega)r(\Omega)]^2}. \quad (4.85)$$

Lembrando que  $\varepsilon = \frac{\Omega}{\Omega_n}$  e multiplicando o numerador pela unidade  $\frac{\Omega_n}{\Omega_n} = 1$ , então  $c_{eq}(\Omega)$  pode ser reescrito como

$$c_{eq}(\Omega) = \frac{m\Omega_n\eta(\Omega)r(\Omega)\varepsilon^3}{[-\varepsilon^2 + r(\Omega)]^2 + [\eta(\Omega)r(\Omega)]^2}. \quad (4.86)$$

Pela Figura 16, pode-se observar que a estrutura primária "sente" o neutralizador no ponto de ligação como uma massa  $m_{eq}(\Omega)$ , conectada a um referencial fixo por um amortecedor viscoso de constante  $c_{eq}(\Omega)$ . Os sistemas da Figura 16 são, portanto, dinamicamente equivalentes (Espíndola e Silva, 1992).

Figura 16: Sistemas equivalentes.

Para um sistema primário com um grau de liberdade, contendo um neutralizador dinâmico simples, modelado como exposto acima, a FRF é dada por

$$H(\Omega) = \frac{1}{-\Omega^2[m_1 + m_{eq}(\Omega)] + i\Omega[c_1 + c_{eq}(\Omega)] + k_1}, \quad (4.87)$$

onde  $m_1$ ,  $c_1$  e  $k_1$  são os parâmetros do sistema primário.

### 4.3.11 Sistema Composto com Parâmetros Equivalentes Generalizados - (PEG's)

Com o conhecimento prévio do conceito de parâmetros equivalentes generalizados (PEG's), e uma vez que o seu uso leva a uma formulação mais eficiente do ponto de vista computacional (Bavastri et al, 1997) apresenta-se, abaixo, a solução do sistema dado na Figura 14. Esse sistema é representado de forma equivalente na Figura 17.

Figura 17: Modelo do sistema com PEG's.  
Fonte: Bavastri (2013)

O sistema a ser controlado tem um comportamento não linear cúbico enquanto o sistema de controle é um neutralizador dinâmico viscoelástico com comportamento linear. De acordo com a 2ª lei de Newton, e com a utilização dos parâmetros equivalentes generalizados, a equação do sistema é dada por:

$$[(m_1 + m_{eq}(\Omega))x_1'' + k_1x_1 + k_3x_1^3 + [c_1 + c_{eq}(\Omega)]x_1' = f\cos(\Omega t), \quad (4.88)$$

onde:

- $m_1$  é a massa do sistema primário;
- $c_1$  é a constante de amortecimento do sistema primário;
- $k_1$  é a parcela linear da rigidez do sistema primário;
- $k_3$  é a parcela não linear (cúbica) da rigidez do sistema primário;
- $x_1$  é a coordenada generalizada do sistema primário;
- $m_a$  é a massa do neutralizador;
- $m_{eq}$  é a massa equivalente do neutralizador;
- $c_{eq}$  é a amortecimento equivalente do neutralizador;
- $f$  é a amplitude da excitação aplicada no sistema primário.

Definindo os seguintes parâmetros:

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}; \quad \alpha_3 = \frac{k_3}{m_1}; \quad \mu_{eq} = \frac{m_{eq}}{m_1}; \quad \mu = \frac{m_a}{m_1}; \quad f_0 = \frac{f}{m_1}; \quad \lambda_1 = \frac{c_1}{m_1}; \quad \lambda_{eq}(\Omega) = \frac{c_{eq}(\Omega)}{m_1}$$

e dividindo a equação (4.88) por  $m_1$ , obtem-se

$$[1 + \mu_{eq}(\Omega)]x_1'' + \omega_{10}^2 x_1 + \alpha_3 x_1^3 + [\lambda_1 + \lambda_{eq}(\Omega)]x_1' = f_0 \cos(\Omega t). \quad (4.89)$$

Se for feita uma mudança de fase ( $\varphi$ ) na força de excitação, substituindo  $\cos(\Omega t)$  por  $\cos(\Omega t + \varphi)$ , a solução aproximada do estado estacionário do sistema pode ser dada por

$$x_1 = a_1 \cos(\Omega t). \quad (4.90)$$

A partir da aplicação do método do balanço harmônico (MBH) (Nayfeh e Mook, 1979), a curva de resposta em frequência (CRF) é dada por

$$a_1^2 \left[ \omega_{10}^2 - \Omega^2((1 + \mu_{eq})(\Omega)) + \alpha_3 \frac{3}{4} a_1^2 \right]^2 + [\lambda_1 + \lambda_{eq}(\Omega)]^2 \Omega^2 a_1^2 = f_0^2. \quad (4.91)$$

Dessa forma, tanto a equação (4.78), obtida pelo método clássico, quanto a equação (4.91) representam a resposta do sistema composto medido no sistema da Figura (14). Contudo, o uso do conceito de parâmetros equivalentes generalizados (PEG's) permite que se obtenha a resposta do sistema composto de forma mais simples e direta.

#### 4.3.12 Sistema Composto - Transmissibilidade e PEG's

A solução para a transmissibilidade do sistema composto, tal como ilustrado na Figura 18, é obtida de maneira análoga a apresentada anteriormente. A equação de movimento do sistema composto, de acordo com o conceito de parâmetros equivalentes generalizados (PEG's), é dada por

$$[m_1 + m_{eq}(\Omega)]z_1'' + k_1 z_1 + k_3 z_1^3 + [(c_1 + c_{eq}(\Omega))]z_1' = -m x_b'', \quad (4.92)$$

onde  $z_1 = a_t \cos(\Omega t)$  e  $x_b = X_b \sin(\Omega t)$ .

Figura 18: Modelo do sistema composto para transmissibilidade.

Da mesma forma que em (4.91), a curva de resposta em frequência para a transmissibilidade ( $a_t$ ) é dada por

$$a_t^2 \left[ \omega_{10}^2 - \Omega^2((1 + \mu_{eq})(\Omega)) + \alpha_3 \frac{3}{4} a_t^2 \right]^2 + [\lambda_1 + \lambda_{eq}(\Omega)]^2 \Omega^2 a_t^2 = m^2 \Omega^4 X_b^2. \quad (4.93)$$

A partir dos modelos analíticos até aqui apresentados, são abordados, no próximo capítulo, os métodos computacionais para a identificação e para o projeto de controle ótimo do sistema não linear cúbico, que é o objetivo deste trabalho.

## 5 PROJETO ÓTIMO - PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

Após a especificação do modelo matemático do sistema composto (sistema primário mais neutralizador), um método numérico de otimização não linear pode ser utilizado a fim de obter os parâmetros ótimos do neutralizador dinâmico viscoelástico, que irá reduzir a resposta do sistema primário não linear cúbico. Por outro lado, para poder implementar a metodologia de projeto é necessário identificar o sistema primário não linear cúbico. Isto, portanto, deve ser realizado previamente.

Este capítulo apresenta a identificação do sistema primário e o projeto ótimo do sistema de controle empregados na dissertação. Ambos utilizam uma técnica de otimização não linear.

### 5.1 Técnica de Otimização Não Linear

As técnicas de otimização não linear têm o objetivo de identificar mínimos ou máximos de uma determinada função, as quais podem estar ou não sujeitas a restrições. Uma técnica de otimização não linear é um método numérico de otimização, utilizado para determinar os parâmetros ótimos após um modelo matemático ser pré-estabelecido. Pode-se apresentar um problema de otimização como (Arora, 2004)

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{sendo } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^n \\ & \text{sujeita a restrições:} \\ & h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & g_j(x) \geq 0 \quad j = m + 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Em palavras, deseja-se minimizar a função  $f(x)$ , chamada aqui de função objetivo, sendo  $x$  o vetor projeto e  $h_i(x)$  e  $g_j(x)$ , a  $i$ -ésima e  $j$ -ésima restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. A região viável que o projeto pode assumir é determinada pelo conjunto de pontos  $x$  na interseção das restrições acima mencionadas.

Para encontrar o ponto ótimo da função  $f(x)$  no espaço  $n$  dimensional, existem técnicas que determinam uma direção de busca, a partir de um ponto qualquer de partida. Uma vez que determinada essa direção, deve-se aplicar uma técnica unidimensional para a definição do tamanho do passo. Os dois processos anteriores são iterativos. Os métodos para direção de busca podem ou não utilizar a informação da derivada, assim como as técnicas unidimensionais.

Neste trabalho, as funções a serem otimizadas são, em geral, multidimensionais e não determinadas analiticamente. A técnica adotada é a apresentada por Nelder e

Mead em 1965 (Himmelblau, 1972; Bazarra e Shetty, 1979), chamada "*Nelder and Mead Method*" e implementada através da função *fminsearch* do MatLab®. Essa técnica é multidimensional e não utiliza informação da derivada da função (Nascimento e Yoneyama, 1997).

Figura 19: Método de Nelder e Mead.  
Fonte: Bavastri (1997)

Denominado também método do poliedro flexível ou simplex, esse método utiliza um poliedro de  $n + 1$  vértices construído para  $x \in \mathbb{R}^n$ . Na procura do mínimo, o valor da função é encontrado para cada vértice e o maior valor é abandonado. Ou seja, com o valor da função em cada ponto, descobre-se o pior ponto; em seguida, é calculado o centróide da face oposta a esse pior ponto e há um rebatimento desse ponto, fazendo uma reflexão baseada no centro de gravidade do poliedro.

Esse procedimento é repetido até a satisfação de um critério de convergência, que pode ser determinado pela norma da soma dos vetores de pontos do poliedro corrente, com a exceção do pior ponto. Assim, o ponto de mínimo é extraído da média aritmética dos pontos do poliedro. A Figura 19 mostra um gráfico com as curvas de nível de uma função qualquer e a aplicação do método nos moldes descritos acima para uma função bidimensional. Outras operações, além da reflexão podem ser realizadas a fim da deformação do poliedro em cada iteração: são elas expansão, redução e contração.

Apesar de ser um método rápido de programar, tem a desvantagem da lentidão de execução quando comparado a métodos que utilizam informação da derivada. Esse método concede excelentes resultados e depende muito do ponto inicial, uma vez que estaciona no primeiro ponto ótimo local que encontra.

As próximas seções trazem os problemas de otimização específicos da identificação do sistema primário e do controle do sistema composto.

## 5.2 Identificação do Sistema

O procedimento de identificação do sistema primário é realizado através de um processo inverso de identificação. Para isto, uma curva característica é obtida experimentalmente e a esta é ajustada, por mínimos quadrados, uma curva numérica equivalente. O *método dos mínimos quadrados*<sup>6</sup> foi o processo matemático adotado para o ajuste e o vetor projeto está composto pelos parâmetros do sistema primário não linear cúbico ( $m_1$ ,  $c_1$ ,  $k_1$  e  $k_3$ ).

Com a técnica de otimização não linear adotada, qual seja, o método do poliedro flexível, define-se a função objetivo

$$f_{obj}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} = [erro]^T \cdot [erro],$$

onde

$$[erro] = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ (T_{experimental}(\Omega_k) - T_{matemática}(\Omega_k)) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

e

$$erro_k = (T_{experimental}(\Omega_k) - T_{matemática}(\Omega_k)),$$

sendo  $\Omega_k$  a  $k$ -ésima frequência,  $T$  a curva de resposta em frequência (CRF) da transmissibilidade e o vetor projeto dado por  $x = (m_1, c_1, k_1, k_3)$ .

Determinados os parâmetros do sistema primário, o projeto do sistema de controle de vibração pode ser realizado.

## 5.3 Controle do Sistema

No controle do sistema primário, uma vez conhecido, através de neutralizadores dinâmicos, o objetivo é buscar o valor da frequência natural do neutralizador que, quando acoplado ao sistema primário, conduz à menor amplitude de resposta possível. Conforme dito anteriormente, precisa-se de um modelo matemático previamente estabelecido. Nesse

---

<sup>6</sup>Esse método possibilita obter uma função real que passe o mais próximo possível dos pontos  $(x_i, y_i)$  dados. As curvas mais comuns utilizadas no ajuste são: reta, parábola, cúbica e quártica. Por exemplo: seja uma função  $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ , tenta-se descobrir para a função  $y$ , quais são os valores dos coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ , de tal forma que a soma dos quadrados das distâncias (tomadas na vertical) da curva  $y$  a cada um dos pontos dados  $y_i$  seja a menor possível, por isso o nome método dos mínimos quadrados.

caso, é empregado o modelo do sistema composto, com o uso dos parâmetros equivalentes generalizados, para a transmissibilidade que é o computacionalmente mais rápido.

A função objetivo utilizada nesse processo de otimização é a norma de *Frobenius* da amplitude ( $a_t(\Omega, x)$ ), ou seja,

$$f_{obj}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} = \|a_t(\Omega, x)_{\Omega_i \leq \Omega \leq \Omega_f}\|_F, \quad (5.1)$$

onde  $\|\dots\|_F$  representa a norma de *Frobenius*<sup>7</sup>,  $\Omega_i$  e  $\Omega_f$  são os limites inferior e superior da faixa de frequência de interesse, respectivamente, e  $x$  é o vetor projeto, que, neste caso, é definido como a frequência natural do neutralizador, ou seja,

$$x = \Omega_a.$$

O problema padrão de otimização para o caso do controle resume-se a

$$\begin{aligned} & \min f_{obj}(x) \\ f_{obj}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} &= \|a_t(\Omega, x)_{\Omega_i \leq \Omega \leq \Omega_f}\|_F \end{aligned}$$

O objetivo, então, é reduzir tanto quanto possível a amplitude do sistema primário quando o neutralizador ótimo é conectado. O processo consiste na busca de um  $x$  (frequência ótima) que corresponda ao menor valor da amplitude para a faixa de frequência considerada  $[\Omega_i, \Omega_f]$ . Restrições de igualdade e desigualdade não serão empregadas, assim como também não foram no processo de identificação. Após a determinação da frequência ótima do neutralizador, é possível, como se verá adiante, calcular o fator geométrico  $L$  correspondente assim construir o dispositivo, conforme Espíndola et al. (2010).

### 5.3.1 Neutralizador Dinâmico Viscoelástico - (NDV)

Neutralizador dinâmico, ou absorvedor dinâmico, de vibrações é um sistema ressonante que quando devidamente projetado e fixado em um sistema mecânico qualquer, reduz o nível de vibração deste último (vide Figura 20). A vibração estrutural é um dos problemas principais na engenharia, que podem levar ao colapso de estruturas ou sistemas mecânicos ou produzir um elevado nível de ruído irradiado (Cruz, 2004). Um neutralizador é composto de uma certa massa fixada a um material resiliente (material viscoelástico), que é acoplado ao sistema primário.

---

<sup>7</sup>  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{traço}(AA^T)}$ .



Figura 20: FRF para um sistema linear com NDV.  
Fonte: Bavastri et al. (2012)

Os efeitos da introdução de amortecimento no sistema primário, quando da realização do projeto ótimo do neutralizador, têm sido estudados por diversos autores (Warburton e Ayorinde, 1980; Kitis, 1983; Espíndola e Bavastri, 1995; Dayou e Brennan, 2003). Determinar o ponto ótimo, ou seja, os parâmetros ótimos de um neutralizador para um sistema mecânico, resume-se em obter os parâmetros físicos do neutralizador que devem conduzir à mínima resposta do sistema.

## 6 EXEMPLO NUMÉRICO

A fim de verificar o desempenho e a generalidade da metodologia proposta para identificação de um sistema não linear cúbico e o controle de vibração do mesmo, apresenta-se uma implementação numérica, como ilustrado na Figura 21.

Figura 21: Esquema de otimização não linear - Identificação + Controle.

A identificação dos parâmetros do sistema primário é estabelecida após uma aproximação por mínimos quadrados das curvas de transmissibilidade experimental e de transmissibilidade obtida numericamente. A formulação do sistema composto é feita em termos das coordenadas generalizadas do sistema primário, devido à introdução do conceito de parâmetros equivalentes generalizados. O modelo viscoelástico, mediante o cálculo fracionário, é usado em forma geral para modelar o material viscoelástico do neutralizador dinâmico.

Conhecendo-se os parâmetros do sistema primário, o controle de vibração sobre o mesmo é realizado. O controle requer que seja encontrada uma frequência ótima para o neutralizador. A partir dessa frequência, determinam-se os parâmetros físicos do dispositivo, para que, posteriormente, ele possa ser construído.

### 6.1 Identificação

O processo de identificação, conforme já mencionado, acontece através de um processo inverso: tem-se *a priori* uma curva medida experimentalmente e a ela aproxima-se uma curva obtida a partir de um modelo numérico. Neste trabalho, a curva experimental é gerada numericamente, uma vez que, por exiguidade de tempo não foi possível obter curvas medidas. A função objetivo na identificação corresponde a de um processo de ajuste de curvas. Trata-se da minimização de diferença (erro), por mínimos quadrados entre as duas curvas de transmissibilidade, a experimental hipotética, obtida do sistema real, e a oferecida pelo modelo matemático (vide equação 4.35). Assim,

$$f_{obj}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} = [erro]^T \cdot [erro],$$

onde

$$[erro] = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ (T_{experimental}(\Omega_k) - T_{matemática}(\Omega_k)) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

com

$$erro_k = [T_{experimental}(\Omega_k) - T_{matemática}(\Omega_k)].$$

A amplitude da aceleração na base é  $2500[m/s^2]$  e a faixa de frequência  $\Omega_i = 40[rad/s]$  a  $\Omega_f = 160[rad/s]$ , discretizada em 1000 pontos. As estimativas iniciais no processo de otimização foram estabelecidas de modo a garantir a convergência da função objetivo. Os dados empregados na simulação numérica fornecidos pelo modelo matemático são:  $k_1 = 73^2[N/m]$ ,  $c_1 = 2[N.s/m]$ ,  $k_3 = 20[N/m^3]$  e  $m_1 = 1[Kg]$ . Já os dados oriundos do sistema real são:  $k_1 = 70^2[N/m]$ ,  $c_1 = 1[N.s/m]$ ,  $k_3 = 30[N/m^3]$  e  $m_1 = 1[Kg]$ .

Percebeu-se que para valores distantes dos acima estabelecidos para  $c$  e  $k_3$ , fixando os demais parâmetros, a função não convergia. Recorda-se que o vetor projeto é formado por  $x = (k_1 \ c_1 \ m_1 \ k_3)$ , onde  $k_3$  é a constante não linear cúbica do sistema.

A equação (4.36) foi a equação utilizada para determinar a Curva de Resposta em Frequência (CRF) para a transmissibilidade. Como a transmissibilidade dependente do movimento da massa em relação a base  $Z$ , a relação da equação (3.38) conseqüentemente foi utilizada no processo de otimização.

A Figura 22 apresenta um determinado instante do processo de ajuste de curvas em busca do menor erro entre as duas curvas, enquanto a Figura 23 mostra o ajuste final. Note-se que, na Figura 23 as linhas em vermelho e verde indicam a região instável do sistema, além de mostrar *um zoom* do ajuste de curvas final.

O vetor projeto (parâmetros do sistema primário) encontrado no processo de otimização foi o seguinte:  $x = (72.9997^2[N/m] \ 1.9983[N.s/m] \ 20.0007[N/m^3] \ 1[Kg])$ .

Determinados os parâmetros ótimos do sistema primário, passou-se para o controle de vibração do mesmo, o que é detalhado na próxima seção.

Figura 22: Instante do ajuste de curvas de transmissibilidade.

Figura 23: Ajuste final das curvas de transmissibilidade.

## 6.2 Controle

Obtidos os parâmetros do sistema primário, o projeto do sistema de controle foi realizado. A função objetivo utilizada nesse processo de otimização é a norma da amplitude  $(a_t(\Omega, x))$ , qual seja,

$$f_{obj}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} = \|a_t(\Omega, x)_{\Omega_i \leq \Omega \leq \Omega_f}\|_F, \quad (6.1)$$

onde  $\Omega_i = 40[rad/s]$  e  $\Omega_f = 160[rad/s]$  são os limites inferior e superior da faixa de frequência de interesse, respectivamente, enquanto  $x$  é o vetor projeto, que nesse caso é definido pela frequência natural do neutralizador, ou seja,

$$x = \Omega_a.$$

Diferentes materiais viscoelásticos foram testados neste trabalho, devido ao conhecimento prévio de suas propriedades por parte do Grupo de Pesquisa de Vibrações e Som em Sistemas Mecânicos (GVIBS). Os materiais utilizados foram: neoprene, borracha butílica e EAR-C1002. Para descrição de cada material viscoelástico, foi usado o modelo a derivada fracionária de quatro parâmetros, conforme a equação (3.18). As Tabelas 1 e 2 exibem os quatro parâmetros associados aos três materiais adotados na simulação, bem como os parâmetros complementares, respectivamente.

Tabela 1: Modelo de derivada fracionária de quatro parâmetros dos materiais viscoelásticos.

Material	$G_0 [N/m^2]$	$G_\infty [N/m^2]$	$\alpha$	$b^\alpha$
Neoprene	4.55e6	4.18e8	0.319	0.00274
Borracha butílica	1.76e5	2.41e8	0.424	0.00424
EAR-C1002	6.19e5	9.997e8	0.5463	7.107e - 4

Tabela 2: Parâmetros complementares dos materiais viscoelásticos.

Material	$\theta_1$	$\theta_2$	$T[K]$	$T_0[K]$
Neoprene	5.09	46.5	303	273
Borracha butílica	9.91	119	303	273
EAR-C1002	17.805	177.119	303	284.61

O sistema composto é modelado em termos do conceito de parâmetros equivalentes generalizados (PEG's) e a curva de transmissibilidade é obtida pela equação (4.93). A temperatura, considerada constante em todo o processo de otimização, foi  $T = 303[K]$ . As Figuras 24, 25 e 26 expõem o comportamento do controle de vibração para o neoprene, a borracha butílica e o EAR-C1002, respectivamente.

O vetor projeto, dado pela frequência ótima do neutralizador linear para cada material adotado, é exibido na Tabela 3.

Tabela 3: Frequência ótima do neutralizador viscoelástico linear.

Material	Frequência [ $rad/s$ ]
Neoprene	67,7764
Borracha butílica	60,3597
EAR-C1002	65,5041

Figura 24: Sistema sem e com NDV - Neoprene.

Figura 25: Sistema sem e com NDV - Borracha Butílica.

Após a determinação da frequência ótima de cada neutralizador, encontra-se através do nomograma de frequência reduzida correspondente ao material empregado (vide Figura 3), o módulo de cisalhamento associado. Na sequência, obtém-se o fator geométrico de cada neutralizador para o posterior projeto.

Isso se dá através da equação (6.2) abaixo, em que se expressa a rigidez dinâmica  $k$  do material viscoelástico na frequência ótima por

$$\bar{k}(\Omega_a) = LG_c(\Omega_a), \quad (6.2)$$

Figura 26: Sistema sem e com NDV - EAR-C1002.

onde o fator geométrico do sistema  $L = \frac{A}{h}$  (vide seção 2.1). Então, a frequência ótima é tal que  $\Omega_a^2 = \frac{LG(\Omega_a)}{m_a}$ , de modo que a área  $A = \frac{\Omega_a^2 \cdot h \cdot m_a}{G(\Omega_a)}$ . A realização física do neutralizador, a partir de valores adequados de  $A$  e  $h$ , é citada como sugestão de trabalhos futuros.

## 7 CONCLUSÃO

No presente trabalho foi proposta e testada, através de simulações numéricas, uma metodologia para identificação e controle de um sistema não linear cúbico com um grau de liberdade, utilizando um neutralizador dinâmico viscoelástico linear.

Tanto no sistema primário não linear, quanto no sistema composto, foi usado o método do balanço harmônico (MBH) para a determinação da solução aproximada do sistema. Um modelo matemático para a curva de transmissibilidade foi implementado. A excitação imposta ao sistema foi do tipo harmônica. Uma curva experimental hipotética foi proposta para verificar os algoritmos implementados. O ajuste de curvas por mínimos quadrados entre a curva experimental e uma equivalente numérica determinou os parâmetros do sistema primário através de uma técnica de otimização não linear.

O sistema composto (sistema primário não linear cúbico + sistema secundário - neutralizador dinâmico) foi modelado com base no conceito de parâmetros equivalentes generalizados (PEG's). Este conceito aqui revisado, permite a representação das equações de movimento do sistema composto em termos apenas das coordenadas do sistema primário.

O material viscoelástico foi descrito matematicamente pelo modelo de derivada fracionária de quatro parâmetros, o qual permite prever com exatidão o comportamento dinâmico desses materiais. O uso de uma técnica de otimização não linear permitiu obter a frequência natural do neutralizador dinâmico viscoelástico para uma dada temperatura de trabalho. Três materiais diferentes para o neutralizador foram adotados no exemplo numérico: neoprene, borracha butílica e EAR-C1002.

A implementação numérica para os dois momentos, de identificação e de controle, foi realizada com o intuito de validar a metodologia proposta neste estudo. Um exemplo numérico ilustrou a identificação do sistema primário não linear com a obtenção dos seus parâmetros, e o controle desse sistema, os três tipos de materiais viscoelásticos. As respectivas frequências ótimas dos neutralizadores foram exibidas.

### 7.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

- A implementação numérica de verificação da influência dos harmônicos superiores não foi realizada neste trabalho (vide capítulo 3), embora o Grupo de Pesquisa de Vibrações e Som em Sistemas Mecânicos (GVIBS) já tenha familiaridade com este fato. Assim, fica como proposta de complementação e/ou ampliação a realização deste estudo.
- As estimativas iniciais da simulação numérica de identificação do sistema primário podem ser melhor obtidas através da análise gráfica da função objetivo aqui formulada ou com a utilização da transformada Hilbert.



- Outro t3pico que pode dar continuidade a este trabalho 3 o estudo de outros tipos de n3o linearidade e da estabilidade do sistema composto, al3m de uma compara33o do controle realizado para os tr3s tipos de materiais viscoel3sticos utilizados.
- Por fim, sugere-se o uso de curvas experimentais, e n3o simuladas numericamente, para a identifica33o dos par3metros do sistema prim3rio. Uma poss3vel realiza33o experimental 3 detalhada no Ap3ndice A.

## REFERÊNCIAS

- ALAUZE, C.; HAGOPIAN, J. D. GAUDILLER, L. **Active Balancing of Turbomachinery: Application to Large Shaft Lines.** Journal of Vibration and Control. Vol. 7, pp. 249-278, 2001.
- ARORA, J. S. **Introduction to Optimum Design.** San Diego, California, USA: Elsevier Academic Press, 2004.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. **A Generalized Derivative Model for an Elastic Damper.** The Shock and Vibration Bulletin. Vol. 49 (2), pp. 135-143, 1979.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. **On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior.** Journal of Rheology. Vol. 30 (1), pp. 133-155, 1986.
- BAVASTRI, C. A. **Reduções de Vibrações de Banda Larga em Estruturas Complexas por Neutralizadores Viscoelásticos.** Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica - UFSC, 1997.
- BAVASTRI, C. A. ESPÍNDOLA, J. J.; TEIXEIRA, P. H. **A Hybrid Algorithm to Compute the Optimal Parameters of a System of Viscoelastic Vibration Neutralizers in a Frequency Band.** In Proceedings of the Fourth International Conference on Motion and Vibration Control, Zurich, Switzerland, August 25-28. Vol. 2, pp. 577-582, 1998.
- BAVASTRI, C. A.; LOPES, E. M. O; GONÇALVES, V. V.; FEBBO, M. **Optimum Viscoelastic Absorbers for Cubic Non-Linear Systems.** Journal of vibration and Control. Vol.20 (10), pp. 1464-1474, 2012.
- BAZARAA, M. S.; SHETTY, C. M. **Nonlinear Programming.** John Wiley & Sons, 1979.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (eighth ed.).** New York: Wiley Inc., 2005.
- CHAVEZ, R. G. D. **Dinâmica de um Rotor Horizontal em Apoios Elásticos.** Dissertação de Mestrado - PUC-RJ, 2003.
- CRUZ, G. A. M. **Projeto Ótimo de Neutralizadores Viscoelásticos Baseado no Modelo a Derivadas Fracionárias.** Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica - UFSC, 2004.
- DAQAQ, M. F.; ALHAZZA, K. A.; QAROUSH, Y. **On primary resonances of weakly nonlinear delay systems with cubic nonlinearities.** Nonlinear Dynamics, Vol. 64, pp. 253-277, 2011.
- DAYOU, J.; BRENNAN, M. J. **Experimental verification of the optimal tuning of a tunable vibration neutralizer for global vibration control.** Applied Acoustics.

Vol. 64(3), pp. 311-323, 2003.

DEN HARTOG, J. P. **Mechanical Vibrations**. New York: McGraw-Hill, 1956.

DOUBRAWA FILHO, F. J. **Controle de Vibração Flexional em Sistemas Girantes utilizando Neutralizadores Dinâmicos Viscoelásticos**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica - UTFPR, 2008.

DUFFING, G. **Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz (Forced Oscillations in the presence of variable eigenfrequencies)**. Braunschweig: Vieweg, 1918.

ESPÍNDOLA, J. J. **Apostila de controle de vibração**. Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica, UFSC, Santa Catarina, 1987.

ESPÍNDOLA, J. J.; BAVASTRI, C. A.; LOPES, E. M. O. **On the Passive Control of Vibrations with Viscoelastic Dynamic Absorbers of Ordinary and Pendulum Types**. Journal of the Franklin Institute. Vol. 347, pp. 102-115, 2010.

ESPÍNDOLA, J. J.; BAVASTRI, C. A.; CRUZ, G. A. M. **On the Design of Optimum Systems of Viscoelastic Vibration Neutralizers**. In Modelling and Control of Autonomous Decision Support Based Systems, E. P. Hofer e E. Reithmeier, eds., pp. 49-64, 2005a.

ESPÍNDOLA, J. J.; BAVASTRI, C. A. **Modal Reduction of Vibrations by Dynamic Neutralizers in a Frequency Band: A generalized approach**. In Proceedings of the Sixth International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, 06-10 March, Caxambu, Minas Gerais. Vol. 1, pp. 214-217, 1995.

ESPÍNDOLA, J. J.; BAVASTRI, C. A. **Viscoelastic Neutralizers in Vibration Abatement: A non-linear optimization Approach**. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, Vol. 19(2), pp. 154-163, 1997.

ESPÍNDOLA, J. J.; SILVA NETO, J. M.; LOPES, E. M. O. **A Generalized Fractional Derivate Approach to Viscoelastic Material Properties Measurements**. Applied Mathematics and Computation, Vol. 164(2), pp. 493-506, 2005b.

ESPÍNDOLA, J. J.; SILVA NETO, J. M.; LOPES, E. M. O. **On the Fractional Parameter Identification os Viscoelastic Materials**. In Fractional Differentiation and its Applications, A. Le Mehauté, J. A. Terneiro Machado, J. C. Trigeassou, e J. Sabatier, eds., Ubooks Verlag, Neusaess, Germany, pp. 327-340, 2005c.

ESPÍNDOLA, J. J.; SILVA, H. P. **Modal Reduction of Vibrations by Dynamic Neutralizers: A generalized approach**. IMAC 10-10 th International Modal Analysis Conference. Society for Experimental Mechanics, San Diego. Vol. 2, pp. 1367-1373, 1992.

FELDMAN, M. **Non-Linear systems vibration analysis using Hilbert Transform-I. Free Vibration analysis method 'Freevib'**. Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 2, pp. 119-127, 1994.

- FELDMAN, M. **Non-Linear free vibration identification via the Hilbert transform.** Journal of Sound and Vibration, Vol. 3, pp. 475-489, 1997.
- FERREIRA, E. M. da Silva. **Modelo de Rotores Dinâmicos com mancal utilizando Material Viscoelástico.** Dissertação de Mestrado - UFPR, 2005.
- FINDLEY, W. N.; LAI, J. S.; ONARAN, K. **Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials with an Introduction to Linear Viscoelasticity.** Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1976.
- FRAHM, H. **Device for Damping Vibration of Bodies.** U.S. Patent nº 989959. October 1909.
- GATTI, G.; BRENNAN, M. J.; KOVACIC, I. **On the interaction of the responses at the resonance frequencies of a nonlinear two degrees-of-freedom system.** Physica D, Vol. 239, pp. 591-599, 2010a.
- GATTI, G.; BRENNAN, M. J.; KOVACIC, I. **On the response of a harmonically excited two degree-of-freedom system consisting of a linear and a nonlinear quasi-zero stiffness oscillator.** Journal of Sound and Vibration, Vol. 329, pp. 1823-1835, 2010b.
- GHANEM, R.; ROMEU, F. **A Wavelet-based approach for modal and parameter identification of non linear systems.** International Journal of Non-Linear Mechanical, Vol. 36, pp. 835-859, 2001.
- GHAYESH, M. H.; KAZEMIRAD, S.; DARABI, M. **A general solution procedure for vibrations of systems with cubic nonlinearities and nonlinear/time-dependent internal boundary conditions.** Journal of Sound and Vibration, Vol. 330, pp. 5382-5400, 2011.
- GOGE, et al.; **Detection and description of non-linear phenomena in experimental modal analysis via linearity plots.** International Journal of Non-Linear Mechanics. Vol. 40, p. 27-48, 2005.
- GONÇALVES, V. V.; FEBBO, M.; BAVASTRI, C. A. **Viscoelastic Neutralizer for a Non-Linear Cubic Primary System: Classical Approach.** In: X Congresso Argentino de Mecânica Computacional (MECOM 2012), Salta. pp. 2389-2409, 2012.
- HAGEDORN, P. **Oscilações não-lineares.** São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1985.
- HAMDAN, M. N.; BURTON, T. D. **On the steady state response and stability of non-linear oscillators using harmonic balance.** Journal of Sound and Vibration, Vol. 166(2), pp. 255-266, 1993.
- HASSAN, A.; BARTON, T. D. *Extraneous solutions predicted by the harmonic balance method.* Journal of Sound and Vibration. Vol. 182 (4), pp. 523-539, 1995.
- HIMMELBLAU, D. M. **Applied Nonlinear Programming.** McGraw Hill Book Company, USA, 1972.

HOPE, R.; MIYAJI, T.; KNOSPE, C. **Adaptative Vibration Control of Magnetic Bearing Equipped Industrial Turbomachinery.** Proceedings of MAG97, Technomics Press. August 21-27, Alexandria, VA, 1998.

IBANEZ, P.; SPENCER, R. B.; SMITH, C. B. **Forced vibration test on electrical distribution equipment.** Nuclear Engineering and Design, Vol. 25(1), pp. 94-111, 1973.

ISHIDA, Y.; INOUE, T. **Vibration suppression of nonlinear rotor system using a dynamic damper.** Journal of Vibration and Control, Vol. 13 (8), pp. 1127-1143, 2007.

JI, J. C.; ZHANG, N. **Suppression of the Primary Resonance Vibrations of a Forced Nonlinear System using a Dynamic Vibration Absorber.** Journal of Sound and Vibration, Vol. 329 (11), pp. 2044-2056, 2010.

JI, J. C. **Application of a Weakly Nonlinear Absorber to Suppress the Resonant Vibrations of a Forced Nonlinear Oscillator.** Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 134 (4), 2012.

JING, Z.; LI, Y.; XU, D.; FU, Y. **Dynamic effects of delayed feedback control on nonlinear vibration isolation floating raft systems.** Journal of Sound and Vibration, 333, p. 2665-2676, 2014.

KERSCHEN, Gaëtan; et al. **Past, Present and Future of Nonlinear System Identification in Structural Dynamics.** Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. (20) pp. 505-592, 2006.

KHADEM, S. E.; AHMADABADI, Z. L. **Nonlinear vibration control of a cantilever beam by a nonlinear energy sink.** Mechanism and Machine Theory, Vol. 50, pp. 134-149, 2012.

KITIS, L. **Vibration Reduction over a Frequency Range.** Journal of Sound and Vibration. Vol. 89 (4) pp. 559-569, 1983.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics.** New York: John Wiley & Sons, 1993.

LAU, S. L.; CHEUNG, Y. K.; CHEN, S. H. **Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems.** Journal of Sound and Vibration, Vol. 140 (2), pp. 273-286, 1990.

LOPES, E. M. O. **On the Experimental Response Reanalysis os Structures with Elastomeric Materials.** Tese de Pós-Doutorado. University of Wales Cardiff, Cardiff, UK, 1998.

MAIA, N.M.; SILVA, J. M. M. **Theoretical and experimental modal analysis.** New York: Wiley & Sons, 1997.

MASRI, S. F.; CAUGHEY, T. K. **A nonparametric identification technique for**

**nonlinear dynamic problems.** Trans. ASME J. Appl. Mech, Vol. 46 (2), pp. 433-447, 1979.

MASTRODDI, F.; FACCHINI, G.; GAUDENZI, P. **Multi-frequency Dynamic Absorber for Improved Spacecraft Comfort During the Launch Phase.** CEAS Space Journal, Vol. 3, pp. 77-88, 2012.

MORADI, H.; BAKHTIARI-NEJAD, F.; MOVAHHEDY, M. **Tuneable Vibration Absorber Design to Suppress Vibrations: An Application in Boring Manufacturing Process.** Journal of Sound and Vibration. Vol. 318, pp. 93-108, 2008.

MORISON, J. R., O'BRIEN, M. P., JOHNSON, J. W. e SCHAF, S. A. **The force exerted by surface waves on piles.** Petroleum Trans, Vol. 189, pp. 149-57, 1950.

NASCIMENTO Jr, C. L.; YONEYAMA, T. **Inteligência Artificial em Automação e Controle.** São Paulo, 1997.

NASHIF, A. D.; DAVID, I. G. J. E JOHN, P. H. **Vibration Damping.** John Wiley and Sons, 1985.

NAYFEH, A.; MALATKAR, P. **A parametric identification technique for single-degree-of-freedom weakly nonlinear systems with cubic nonlinearities.** Journal of Vibration and Control, 9 p. 317-336, 2003.

NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. **Nonlinear Oscillations.** John Wiley and Sons, 1979.

NAYFEH, A. H. **Nonlinear Interactions.** John Wiley and Sons, 2000.

NELDER, A.; MEAD, R. **A Simplex Method for Function Minimization.** In: Computer Journal. Vol. 7, pp. 308, 1965.

NISSEN, J. C.; POPP, K.; SCHMALHORST, B. **Optimization of a Non-Linear Dynamic Vibration Absorber.** Journal of Sound and Vibration, Vol. 99 (1), pp. 149-154, 1985.

PIPES, L. A. **Analysis of a Non-Linear Dynamic Vibration Absorber.** Journal of Applied Mechanics, Vol. 20, pp. 515-518, 1953.

PRITZ, T. **Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials.** Journal of Sound and Vibration. Vol. 195 (1), pp. 103-115, 1996.

QUEIROZ, M. **An Active Hydrodynamic Bearing for Controlling Self-excited Vibrations: Theory and Simulation.** Journal of Vibration and Control. September 2012.

RAO, S. **Vibrações Mecânicas.** 4<sup>a</sup> ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

RAPP, P. E.; MEES, A. I. **Spurious predictions of limit cycles in a nonlinear feedback system by the describing function method.** International Journal Control, Vol. 26 (6), pp. 821-829, 1977.

- ROBERSON, R. E. **Synthesis of a Non-Linear Dynamic Vibration Absorber.** Journal of the Franklin Institute, Vol. 254, pp. 205-220, 1952.
- ROGERS, L. **Operators and Fractional Derivates for Viscoelastic Constitutive Equations.** Journal of Rheology, Vol. 27, pp. 351-372, 1983.
- ROSSIKHIN, Y. A.; SHITIKOVA, V. **Application of Fractional Calculus for Analysis of Nonlinear Damped Vibrations os Suspension Bridges.** Journal of Engineering Mechanics. Vol. 124 (9), pp. 1029-1036, 1998.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos Computacionais.** Segunda Edição, Pearson, São Paulo, 1994.
- SAFFURY, J.; ALTUS, E. **Optimized Chatter Resistance of Viscoelastic Turning Bars.** Journal of Sound and Vibration. Vol. 324, pp. 26-39, 2009.
- SCHMIDT, G.; TONDL, A. **Non-Linear Vibrations.** Cambridge University Press, 1986.
- SIMON, M.; TOMLINSON, G. R. **Use of the Hilbert Transform in modal analysis of linear and non-linear structures.** Journal of Sound and Vibration, Vol. 4, pp. 421-436, 1984.
- SNOWDON, J. C. **Steady-State Behavior of the Dynamic Absorber.** Journal of Acoustical Society of America. Vol. 31 (8), pp. 1096-1103, August 1959.
- SNOWDON, J. C. **Vibration of cantilever beams to which dynamic absorbers are attached.** The Journal of the Acoustical Society os America, Vol. 39, pp. 878-881, 1966.
- SNOWDON, J. C. **Vibration and shock in damped mechanical systems.** John Wiley & Sons, New York, 1968.
- SOOM, A.; LEE, M. **Optimal Design of Linear and Nonlinear Vibration Absorbers for Damped Systems.** Journal of Vibration and Acoustics, Stress Reliability Design, Vol. 105, pp. 112-119, 1983.
- STASZEWSKI, W. J. **Identification of non-linear systems using multi-scale Ridges and Skeletons of the Wavelet Transform.** Journal of Sound and Vibration, Vol. 4, pp. 639-650, 1998.
- TAMMI, K. **Active Control of Radial Rotor Vibrations.** Tese de Doutorado - Helsinki University of Technology. Finland, maio 2007.
- TARNG, Y. S.; KAO, J. Y.; LEE, E. C. **Chatter suppression in turning operations with a tuned vibration absorber.** Journal of Materials Processing Technology. Vol. 105, pp. 55-60, 2000.
- TEHRANI, M. G.; WILMSHURST, L.; ELLIOTT, S. J. **Receptance method for ac-**

**tive vibration control of a nonlinear system.** Journal of Sound and Vibration, Vol. 332, pp. 4440-4449, 2013.

TONGUE, B. H. **Characteristics of numerical simulations of chaotic systems.** American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, Vol. 54, pp. 695-699, 1987.

TORVIK, P. J.; BAGLEY, R. L. **Fractional Derivatives in the Description of Damping Materials and Phenomena: The role of Damping in Vibration and Noise Control.** In Proceedings of the Eleventh Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Boston, MA. September, pp. 125-135, 1987.

THOMSEN, J. J. **Vibrations and Stability: Order and Chaos.** Berlin: Springer-Verlag, 2010.

WARBURTON, G. B.; AYORINDE, E. O. **Optimum absorber parameters for simple systems.** Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 8, pp. 197-217, 1980.

WORDEN, K.; TOMLINSON, G. R. **Nonlinearity in Structural Dynamics: Detection, Identification and Modelling.** Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2001.

YANG, J. N.; LIN, S. **On-line identification of non-linear hysteretic structures using an adaptive tracking technique.** International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 9, pp. 165-175, 2002.

YASUDA, K.; KAMIYA, K. **Experimental identification technique of nonlinear beams in the time domain.** Nonlinear Dynamics, Vol. 18, pp. 185-202, 1999.

ZEIDAN, F. Y. **Application of squeeze film dampers.** Turbomachinery International, September/October, 1995.

ZHOU, S.; SHI, J. **Active Balancing and Vibration Control of Rotating Machinery: A survey.** The Shock and Vibration Digest. pp. 360-371, September 2001.



## Apêndice A - Realização experimental

Apresenta-se, nesse apêndice, a montagem experimental sugerida para a execução de experimentos correspondentes ao investigado na dissertação. A Figura 27 mostra, em destaque, o sistema não linear cúbico sob excitação. Uma pequena massa é fixada por quatro elementos, a um suporte de acrílico, que é, por sua vez, excitada por "shaker". Os quatro elementos entre a massa e o suporte são feitas de linha de pesca e podem ser modelados como uma mola em paralelo a um amortecedor. A tensão inicial nos fios pode ser ajustada e tem um efeito considerável na rigidez do sistema. Quando a massa vibra na direção horizontal, os fios se esticam em tração, criando, assim, uma não linearidade geométrica. A excitação produzida pelo "shaker" pode ser modelada como uma força harmônica.

Figura 27: Sistema não linear cúbico sob excitação.

O conjunto experimental é ilustrado na Figura 28. O "shaker" eletrodinâmico é impulsionado, através de um amplificador, por um gerador de sinais, que fornece um sinal senoidal. Acelerômetros são conectados à estrutura do suporte e à pequena massa, sendo os sinais correspondentes adquiridos e processados num analisador. Esses sinais são visualizados num computador portátil, interfaceado ao analisador. Gerador de sinais e analisador encontram-se num único módulo de sinais.

Figura 28: Conjunto experimental.

Os componentes principais da montagem experimental são descritos abaixo e ilustrados nas Figuras 29 a 33, direta ou indiretamente.

- "Shaker"(Brüel & Kjaer tipo 4824)
- Amplificador (Brüel & Kjaer tipo 2732)
- Acelerômetros (PCB tipo 352C68 e PCB tipo 352C65)
- Módulo de Sinais (Brüel & Kjaer tipo 3160-B-042)
- Suporte de acrílico com massa conectada por fios

Enfatiza-se que os neutralizadores sejam construídos com materiais viscoelásticos já caracterizados, a saber neoprene, borracha butílica e EAR-C1002.

O intuito com essa montagem sistema experimental é, como já antecipado, validar os resultados numéricos obtidos, tanto na identificação quanto no projeto ótimo de controle, através de um neutralizador dinâmico viscoelástico.

Figura 29: Conjunto experimental real.

Figura 30: Sistema Não Linear Cúbico.

Figura 31: Curva Experimental (variação crescente de frequência).

Figura 32: Módulo de sinais.

Figura 33: Amplificador.