

## 1.0 INTRODUÇÃO

Durante cerca de 200 anos antes do lançamento do SPUTNIK I (1957), cientistas já demonstravam interesse pela trajetória dos satélites. A partir da Lei da Gravidade de Newton, estudiosos buscaram desenvolver e refinar teorias que descrevem o movimento da Lua, cometas, entre outros astros. Nos dias de hoje, milhares de satélites fabricados pelo homem orbitam a Terra. Dependendo da tarefa, o satélite necessita tanto do controle ativo de sua órbita quanto de sua atitude para que se mantenha em sintonia com os objetivos de suas missões. Desta forma, admitir uma possível falha no processo de localização e comunicação do satélite pode torná-lo inoperante.

A navegação no espaço é, portanto, uma parte essencial das operações realizadas pelos satélites, a qual inclui o planejamento, determinação, predição e correção da órbita e atitude do satélite de maneira a fazer com que os objetivos da missão sejam atingidos.

Assim, o estudo da determinação de órbitas de satélites artificiais apresenta-se com considerável relevância nas aplicações geodésicas, uma vez que tarefas como:

- determinação de parâmetros que ajudam na descrição do campo de gravidade terrestre;
- determinação de coordenadas geocêntricas cartesianas de estações de observação;
- determinação dos parâmetros de orientação do planeta;
- determinação de trajetórias de veículos em navegação em tempo real e
- determinação de coordenadas geodésicas com GPS,

tendem a apresentar resultados mais confiáveis a partir de posições precisas de satélites numa dada época em um sistema de referência conveniente.

Em SEEBER (1993), FERREIRA (1998) e em GEMAEL e ANDRADE (2004), a determinação da posição do satélite num dado instante implica no conhecimento dos seus elementos orbitais ou keplerianos ou em função de seu vetor de estado:  $(\mathbf{r})$  indicando o vetor posição e  $(\dot{\mathbf{r}})$  indicando o vetor velocidade.

Na realidade, o movimento orbital do satélite é afetado por forças de diversas naturezas as quais produzem perturbações em sua órbita. Tais forças são chamadas perturbadoras; o arrasto atmosférico e a pressão de radiação solar são alguns exemplos destas forças (SEEBER, 1993).

VILHENA DE MORAES (1994) comenta que apesar dos grandes avanços na modelagem das forças de perturbação o conhecimento do movimento do satélite não é absoluto.

Logo, a análise e interpretação das perturbações ocorridas nas órbitas de satélites artificiais vêm ganhando espaço no cenário científico, uma vez que a necessidade de modelos que consigam explicar as mais sutis acelerações perturbadoras é crescente. As órbitas dos satélites GPS, por exemplo, são determinadas com uma acurácia na posição de alguns centímetros, usando medidas GPS coletadas por uma rede global de estações de monitoramento.

Considerando-se o movimento de um satélite artificial, é fácil pensar que a interação mais significativa seja a gravitacional, e de fato é. Porém muitos efeitos de ordem não gravitacional atuam de maneira direta ou indireta produzindo pequenas perturbações que são explicadas em modelos convenientes. Tais interações, que em geral possuem justamente uma pequena ordem de grandeza, tornam-se de difícil estudo através da análise de arcos-curtos, fazendo com que somente os resíduos acumulados em longo período possam ser observados e interpretados. Logo, percebe-se que são necessários dados de alta qualidade, como os dos satélites propostos para as aplicações geodinâmicas e geodésicas.

A re-emissão térmica é uma das forças não-gravitacionais perturbadoras das órbitas de satélites que apresenta um interesse científico crescente. O estudo das forças de re-emissão térmica em satélites artificiais teve seu início após o lançamento do satélite geodinâmico LAGEOS I, em 1976, quando foram detectadas acelerações residuais não modeladas na época (DUHA, 2000). Contudo, uma modelagem que leva em conta os períodos em que o mesmo satélite transita pela sombra da Terra (eclipse) é proposta por AFONSO et al. (1989). FLIEGEL e GALLINI (1996) comentam que um desalinhamento entre os painéis solares do satélite GPS, depois de atravessar a

sombra, seja mais severo e pode ocasionar um erro da ordem de 1% da força solar. VIGUE, SCHUTZ e ABUSALI (1993) mostram que se os efeitos do desequilíbrio térmico devido à passagem do satélite GPS pela sombra forem desconsiderados ocorrerá um erro maior do que 10 m em alguns dias.

É inegável a importância dos estudos sobre os efeitos da força de re-emissão térmica na órbita de satélites. Em DUHA, AFONSO e FERREIRA (2001), conclui-se que resíduos observados para o satélite LAGEOS I possam ser explicados por um modelo térmico unificado, o qual leva em consideração a Terra e o Sol como fontes principais de radiação.

Os modelos que explicam a perturbação provocada pela força de re-emissão térmica atuante em satélites artificiais permitindo conhecer o comportamento dos elementos orbitais e auxiliando no seu posicionamento orbital, em sua grande parte, não consideram os períodos em que o satélite encontra-se na sombra da Terra. O modelo proposto por AFONSO et al. (1989) se destaca, portanto, por levar em conta também os instantes em que o satélite resfria-se entrando, e aquece-se saindo da sombra da Terra. Os resultados obtidos no trabalho em questão para o satélite LAGEOS I sugerem que um efeito mais significativo sobre a trajetória do satélite possa ser conseguido ao se considerar sua passagem pela sombra da Terra não só uma única vez, mas por diversas vezes.

Já em DUHA (2000), encontra-se um modelo mais refinado para a re-emissão térmica aplicado ao satélite GPS, porém, por sua vez, não leva em conta o período em que o satélite encontra-se na sombra da Terra.

Este trabalho tem por objetivo geral modelar a força de re-emissão térmica atuante sobre o satélite GPS durante sua entrada e saída da sombra da Terra (eclipse), analisando sua influência na posição e considerando o Sol como fonte de radiação. Para atingir o objetivo principal, julga-se necessário a consecução de metas intermediárias, que são identificadas em: determinação do intervalo de permanência do satélite no interior do cilindro de sombra projetado pela Terra; cálculo da aceleração perturbadora através do modelo proposto e cálculo dos desvios ocasionados aos elementos orbitais do satélite durante o período de entrada e saída da sombra.

O trabalho apresentado consiste de 6 capítulos. No decorrer do capítulo 2 é apresentada uma breve revisão sobre elementos orbitais, que são parâmetros necessários à definição da órbita do satélite, e comenta-se sobre o efeito das principais forças perturbadoras atuantes sobre os satélites GPS. Em seguida, apresenta-se a fundamentação a cerca do fenômeno da re-emissão térmica. O modelo para a força de re-emissão térmica apresentado por DUHA (2000), que sugere a adoção de uma geometria plano-cilíndrica ao formato complexo do satélite GPS, é referenciado como Modelo I e a sugestão para o comportamento do módulo da força térmica durante a sombra, apresentada por AFONSO et. al. (1989), como Modelo II.

O capítulo 3 traz a equação a ser utilizada para o cálculo das longitudes de entrada e saída da sombra da Terra, considerada de geometria cilíndrica. Desenvolve-se o modelo de aceleração para o satélite GPS (Bloco II/IIA) devido à re-emissão térmica durante o período de permanência na sombra “resfriamento” e o período considerado como “reaquecimento”, que engloba o tempo que o satélite gasta para atingir a mesma configuração térmica que possuía antes de entrar na sombra. O capítulo 3 traz ainda as fórmulas para o cálculo do tempo de relaxação do gradiente de temperatura na superfície do satélite.

Os resultados, obtidos para o satélite SVN 15, após aplicação do modelo proposto são apresentados no capítulo 4. O comportamento das componentes da aceleração, descritas no sistema de referência ( $XYZ$ ) do satélite, bem como a sua magnitude pode ser avaliada pelos gráficos dessa mesma seção.

Transformando-se as acelerações do sistema de referência do satélite ( $XYZ$ ) para o sistema inercial geocêntrico ( $X'Y'Z'$ ) e integrando-se numericamente é possível obter-se os elementos orbitais perturbados e não perturbados para os períodos de “resfriamento” e “reaquecimento”. Por fim, plotam-se os gráficos que representam a diferença entre os correspondentes elementos orbitais perturbados e não perturbados.

No capítulo 5 são avaliadas as ordens de grandeza dos resultados e a sua coerência com resultados alcançados de trabalhos anteriores.

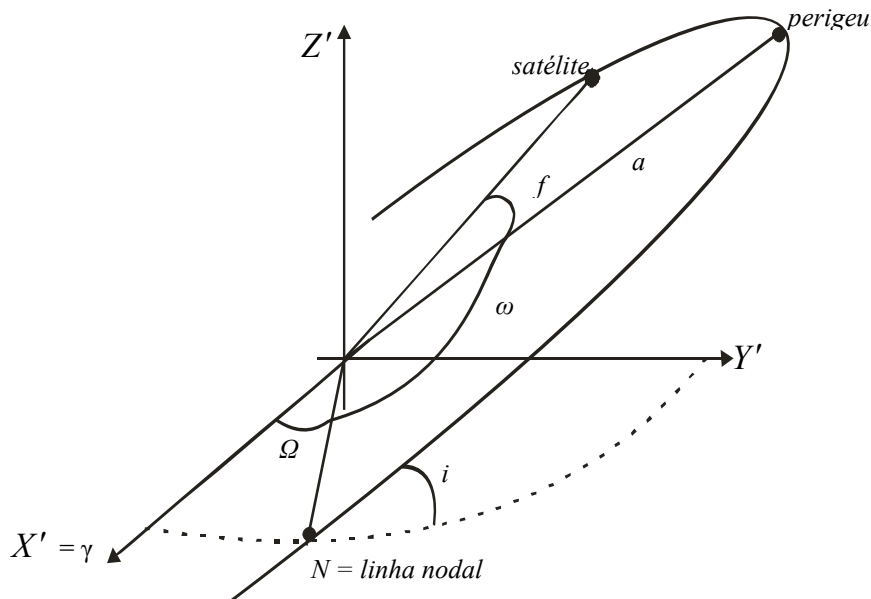
No capítulo 6 apresentam-se as conclusões e as recomendações com base nos resultados obtidos.

## 2.0 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 ELEMENTOS ORBITAIS

Os parâmetros necessários para a determinação da órbita de um satélite artificial são chamados de elementos orbitais ou elementos keplerianos, mostrados na figura (2.1) são eles: semi-eixo maior da órbita ( $a$ ), excentricidade orbital ( $e$ ), inclinação da órbita ( $i$ ), argumento do perigeu ( $\omega$ ), ascensão reta do nodo ascendente ( $\Omega$ ) e anomalia verdadeira ( $f$ ). Ao invés de ( $f$ ), não é raro apresentar a anomalia média ( $\bar{M}$ ), a qual pode ser entendida como sendo a anomalia de um satélite imaginário que desenvolve uma velocidade angular constante ou o tempo de passagem pelo perigeu, como um dos parâmetros orbitais.

FIGURA 2.1 – ELEMENTOS ORBITAIS;  $X'Y'Z'$  – SISTEMA INERCIAL



## 2.2 O MOVIMENTO PERTURBADO DO SATÉLITE

Ao se considerar que o movimento de um satélite artificial em torno da Terra seja representado apenas pelo movimento kepleriano, ou seja, problema dos dois corpos, tem-se a seguinte equação básica para a aceleração, (SEEBER, 2003):

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_{\oplus}}{r^3}\mathbf{r}, \quad (2.1)$$

onde  $G$  é a constante universal gravitacional,  $M_{\oplus}$  é a massa da Terra e  $\mathbf{r}$  é o raio vetor geocêntrico do satélite. Torna-se procedente comentar que os elementos orbitais configuram como as constantes de integração da solução da equação (2.1).

Na busca de uma situação mais próxima da real, deve-se levar em conta que o movimento de satélites ao redor da Terra está sujeito a um determinado número de forças extras, como por exemplo a força de pressão de radiação, a atração gravitacional luni-solar, a força de re-emissão térmica etc. Para diferenciá-las da força central são chamadas de *forças perturbadoras*, representadas matematicamente combinadas em um vetor aceleração perturbadora resultante  $\mathbf{k}_S$  o qual é adicionado à equação (2.1), ficando esta da seguinte forma, (SEEBER, 2003):

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_{\oplus}}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{k}_S, \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{k}_S$  é dado pela equação (2.3),

$$\mathbf{k}_S = \ddot{\mathbf{r}}_E + \ddot{\mathbf{r}}_S + \ddot{\mathbf{r}}_M + \ddot{\mathbf{r}}_e + \ddot{\mathbf{r}}_o + \ddot{\mathbf{r}}_D + \ddot{\mathbf{r}}_{SP} + \ddot{\mathbf{r}}_A. \quad (2.3)$$

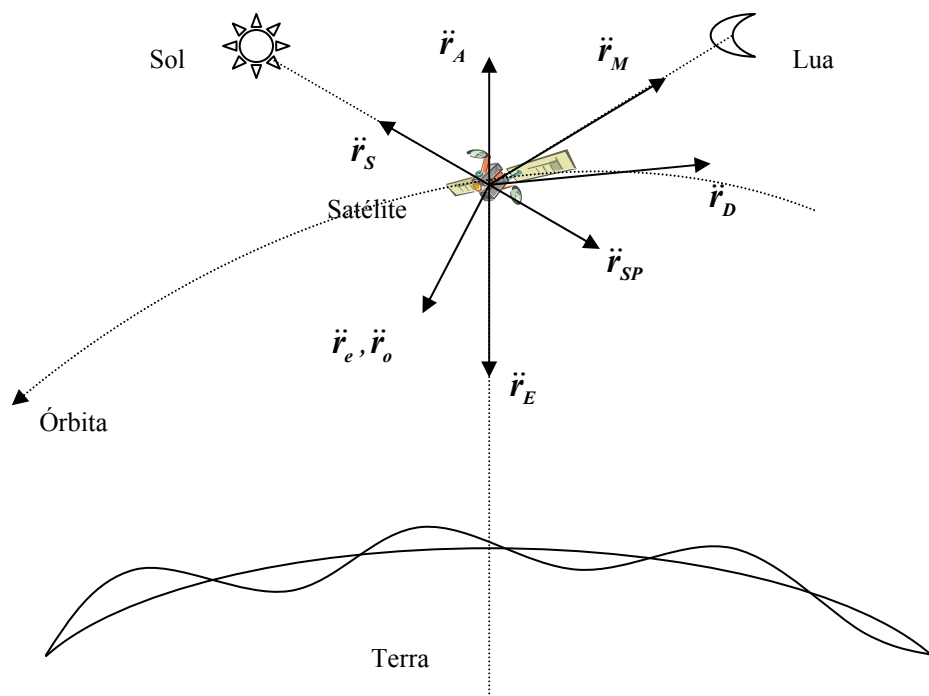
A tabela 2.1 mostra as principais acelerações perturbadoras atuantes nos satélites.

TABELA 2.1 – FORÇAS PERTURBADORAS PRINCIPAIS

$\ddot{r}_E$	Perturbação devido ao achatamento terrestre e à distribuição não homogênea de massa.
$\ddot{r}_S, \ddot{r}_M$	Perturbação devido à atração gravitacional do Sol e da Lua, respectivamente.
$\ddot{r}_e, \ddot{r}_o$	Perturbação devido às marés terrestres e oceânicas, respectivamente.
$\ddot{r}_D$	Perturbação devido ao arrasto atmosférico.
$\ddot{r}_{SP}, \ddot{r}_A$	Perturbação devido à pressão de radiação solar direta e indireta (albedo), respectivamente.

A figura (2.2) tem um caráter ilustrativo das forças perturbadoras e suas acelerações.

FIGURA 2.2 – PRINCIPAIS ACELERAÇÕES PERTURBADORAS ATUANTES EM UM SATÉLITE



Em função das alturas orbitais, algumas perturbações mostram-se mais ou menos representativas, por exemplo, em satélites de sensoriamento remoto (altura orbital em torno de 1000 km) o arrasto atmosférico é mais significativo do que em satélites GPS, GLONASS e GALILEO (altura orbital de aproximadamente 20000 km). Para o caso do satélite GPS, portanto, apresenta-se a tabela (2.2) que mostra os efeitos das principais forças perturbadoras sobre o satélite.

TABELA 2.2 – EFEITOS DE PERTURBAÇÕES NA ÓRBITA DE UM SATÉLITE GPS

Perturbação	Aceleração m/s <sup>2</sup>	Efeito sobre a órbita	
		Órbita de 2h	Órbita de 3 dias
Força central (para comparação)	0,56	-	-
$C_{20}$	$5 \times 10^{-5}$	2 km	14 km
Harmônicos seguintes	$3 \times 10^{-7}$	50-80 m	100-1500 m
Atração luni-solar	$5 \times 10^{-6}$	5-150 m	1000-3000 m
Marés terrestres	$1 \times 10^{-9}$	-	0,5-1,0 m
Marés oceânicas	$1 \times 10^{-9}$	-	0,0-2,0 m
Pressão de radiação solar	$1 \times 10^{-7}$	5-10 m	100-800 m
Albedo	$1 \times 10^{-9}$	-	1,0-1,5 m
Re-emissão térmica	$6 \times 10^{-11}$	-	0,2 m

Já a tabela (2.3) traz as mudanças sofridas nos elementos orbitais de um satélite GPS provocadas por algumas das principais perturbações listadas anteriormente na tabela (2.1).



TABELA 2.3 – EFEITOS DE PERTURBAÇÕES SOBRE SATÉLITES GPS APÓS 4 HORAS

Elemento	$C_{20}$	Outros geopotenciais	Luni-solar	Pressão de radiação
$a$	2600 m	20 m	220 m	5 m
$e$	1600 m	5 m	140 m	5 m
$i$	800 m	5 m	80 m	2 m
$\Omega$	4800 m	3 m	80 m	5 m
$\omega + \bar{M}$	1200 m	4 m	500 m	10 m

FONTE: adaptado de SEEBER, 2003, p. 109

Para uma análise orbital muito mais precisa, outras perturbações podem ser consideradas, cujas contribuições individuais à aceleração do satélite é no máximo de  $10^{-9} \text{ m/s}^2$  (SEEBER, 2003).

São exemplos dessas forças:

- fricção causada por partículas carregadas na atmosfera superior;
- radiação térmica do satélite;
- efeitos de aquecimento nos limites da sombra;
- interação eletromagnética no campo geomagnético; e
- influências da poeira inter-planetária.

### 2.3 A RE-EMISSÃO TÉRMICA

Para efeitos de simplificação, a abordagem conceitual da força de re-emissão térmica se desenvolverá baseada em uma configuração que leva em conta uma simetria esférica, para tanto, adota-se a estrutura do satélite LAGEOS como apoio.

Durante sua órbita em torno da Terra, o satélite está sujeito à ação de radiações que chegam de várias direções do espaço. Após algum tempo, a estrutura do satélite inicia um processo de re-emissão fotônica.

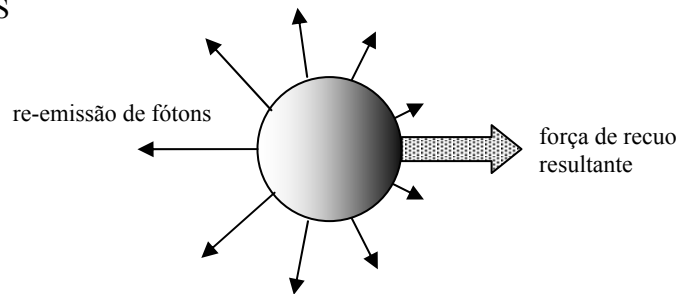
Em AFONSO et al. (1989) analisam-se os efeitos dessa re-emissão quando a fonte de radiação considerada é o Sol. No caso do satélite LAGEOS, em consequência de sua altitude (aproximadamente 6000 km), os efeitos provocados pelo fluxo de

radiação solar são mais intensos do que os produzidos pelo fluxo de radiação térmica oriundo da Terra.

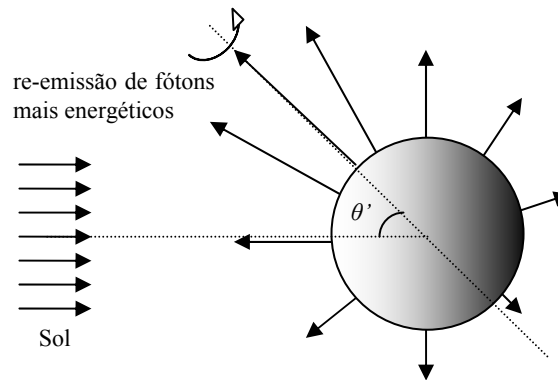
A re-emissão fotônica dá-se em todas as direções de forma que cada elemento da superfície do satélite irradia energia térmica. Através disso, os fótons que deixam o corpo do satélite carregam consigo uma quantidade de momento linear, de modo que se toda re-emissão térmica for considerada, passará a agir sobre o satélite uma força de recuo resultante, como mostra a figura (2.3).

Tanto a re-emissão dos fótons quanto a energia que carregam, dependem das condições de iluminação e da distribuição de temperaturas na superfície do satélite.

FIGURA 2.3 – FORÇA DE RECUO AGINDO SOBRE O SATÉLITE DEVIDO À RE-EMISSÃO DE FÓTONS



Assim como acontece na Terra, a quantidade de radiação recebida por um elemento de área do satélite por unidade de tempo varia proporcionalmente com o cosseno do ângulo zenital do Sol  $\theta'$ . Conforme a orientação do eixo de rotação do satélite e levando em conta o próprio movimento de rotação, a superfície do satélite re-emitirá fótons mais energéticos nas proximidades do pólo que recebe maior quantidade de radiação, figura (2.4). Uma vez observado este comportamento, é possível afirmar a existência de um hemisfério “verão” (mais quente) e outro “inverno” (menos quente), e a intensidade deste efeito, conhecido como efeito “inverno-verão”, dependerá da posição relativa do Sol sobre o satélite, ou seja, assim como acontece na Terra, deve depender da latitude do Sol em relação ao satélite.

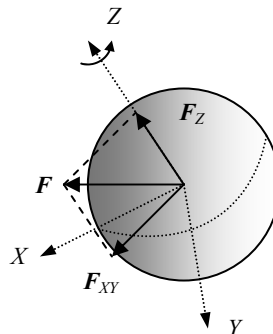
FIGURA 2.4 – ÂNGULO ZENITAL DO SOL  $\theta'$ 

Considerando-se apenas a distribuição de temperaturas associada ao movimento de rotação do satélite, tem-se como resultado o efeito conhecido como “noite-dia”.

Adotando-se um sistema de referência localizado no centro de massa do satélite de modo que o eixo  $Z$  coincida com o eixo de rotação do satélite e os eixos  $X$  e  $Y$  completem o terno cartesiano é possível visualizar as componentes da força de re-emissão térmica  $F$ : a componente equatorial  $F_{XY}$ , resultante do efeito “noite-dia”, e a componente ao longo do eixo de rotação  $F_Z$ , que é atribuída ao efeito “inverno-verão”, figura (2.5).

A composição desses dois efeitos resulta na força de re-emissão térmica total sobre o satélite. Esta força diminui e pode eventualmente desaparecer quando o satélite entra na sombra da Terra.

FIGURA 2.5 – COMPONENTES NOITE-DIA E INVERNO-VERÃO



## 2.4 MODELOS TÉRMICOS

Deve-se comentar, dentre os vários modelos térmicos existentes, o proposto por DUHA (2000) e AFONSO et al. (1989), os quais serão tratados no texto como Modelo I e Modelo II, respectivamente. O primeiro apresenta um aperfeiçoamento na modelagem para a força de re-emissão térmica, aplicando-a sobre o satélite GPS, porém não considera o trânsito do satélite pela sombra terrestre; o segundo sugere um comportamento exponencial para a força de re-emissão térmica durante a passagem do satélite LAGEOS I pela sombra da Terra.

### 2.4.1 Modelagem da Força de Re-emissão Térmica (Modelo I)

Neste caso, modelam-se a distribuição de temperaturas e a força térmica resultante para três simetrias diferentes: esférica, cilíndrica e plana. O uso de diversas simetrias tem aplicações para diferentes satélites, é o caso da simetria esférica aplicada ao LAGEOS e da associação das simetrias cilíndricas e planas aplicadas ao GPS (DUHA, 2000).

### 2.4.2 Distribuição de Temperaturas na Superfície Segundo o Modelo Esférico

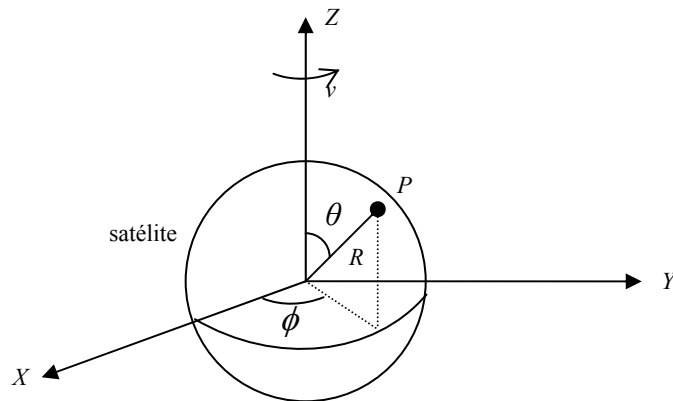
Considere-se o satélite uma esfera homogênea de raio  $R$  o qual recebe energia de uma fonte de energia térmica, e a re-emite de maneira anisotrópica, causando assim o aparecimento de uma força de re-emissão térmica. Sendo a temperatura na superfície do satélite  $T = T_0 + \Delta T$ , onde  $T_0$  é a temperatura média e  $\Delta T$  é a variação da temperatura. Além disso,  $I = I_0 + \Delta I$  representa a radiância, energia radiante incidente, por unidade de área e na unidade de tempo, responsável por aquecimento  $T$ , e  $I_0$  representa a radiância constante da fonte de energia, que proporciona ao corpo a temperatura média  $T_0$ . Considera-se que  $\Delta T$  e  $\Delta I$  sejam funções periódicas, e tenham suas variações regidas de acordo com  $e^{-ivt}$ , onde  $i = (-1)^{1/2}$ , de tal maneira que

$$\Delta T(R, \theta, \phi, t) = \Delta \hat{T}(R, \theta, \phi) e^{-i\nu t}, \quad (2.4)$$

$$\Delta I(\theta, \phi, t) = \Delta \hat{I}(\theta, \phi) e^{-i\nu t}, \quad (2.5)$$

onde,  $\Delta \hat{T}$  e  $\Delta \hat{I}$  são funções apenas das coordenadas do ponto  $P(R, \theta, \phi)$  e  $P(\theta, \phi)$ , respectivamente. Ainda,  $R$  é a distância radial medida a partir do centro geométrico do satélite a um ponto em sua superfície,  $\nu$  é a frequência do movimento angular o qual é responsável pelas variações nas coordenadas da fonte de energia,  $\theta$  é a colatitude, e  $\phi$  é a longitude do ponto considerado, no sistema de referência cartesiano  $(XYZ)$  com origem no centro de massa do satélite. Sendo o eixo  $Z$  orientado no sentido do eixo de rotação e  $X$  e  $Y$  completam o terno cartesiano, figura (2.6). Tanto um ponto na superfície do satélite quanto a direção da fonte de energia possuem coordenadas no sistema de referência localizado no satélite e são representadas por  $P(R, \theta, \phi)$  e  $P''(\theta'', \phi'')$ , respectivamente.

FIGURA 2.6 – COORDENADAS DO PONTO 'P' NA SUPERFÍCIE DO SATÉLITE



A distribuição de temperaturas sobre a superfície do satélite é obtida através da resolução da equação de condução de calor com as devidas condições de contorno

$$\nabla^2 T = \frac{\rho C_e}{k} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.6)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial R} \Big|_{R=R_s} = \alpha I - \varepsilon \sigma T^4, \quad (2.7)$$

nas quais a equação (2.7) representa as condições de contorno para a superfície de acordo com a lei de conservação de energia. A perda líquida de calor em um elemento de área na superfície é dada pela diferença entre a energia térmica absorvida e a re-emitida na unidade de tempo. Nas equações (2.6) e (2.7) são utilizados os símbolos:

- $T$  - temperatura na superfície;
- $\rho$  - densidade de massa;
- $C_e$  - calor específico à pressão constante;
- $k$  - condutividade térmica;
- $I$  - radiância da fonte de energia;
- $R$  - distância radial a partir do centro geométrico do satélite;
- $\alpha$  - absorvidade de radiação;
- $\varepsilon$  - emissividade de radiação;
- $\sigma$  - constante de Stefan-Boltzmann;
- $t$  - tempo.

Relaciona-se a temperatura média com a radiância média através de

$$\varepsilon \sigma T_0^4 = \alpha I_0, \quad (2.8)$$

utilizando a expansão binomial para escrever  $T^4$  e considerando  $\Delta T \ll T_0$ , obtém-se

$$T^4 = T_0^4 + 4T_0^3 \Delta T. \quad (2.9)$$

Substituindo-se  $T = T_0 + \Delta T$  na equação (2.6) e  $I = I_0 + \Delta I$  na equação (2.7) e em seguida linearizando, tem-se

$$\nabla^2(\Delta T) = \frac{\rho C_e}{k} \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t}, \quad (2.10)$$

$$k \frac{\partial(\Delta T)}{\partial R} \Big|_{R=R_s} + 4\varepsilon\sigma T_0^3(\Delta T) = \alpha \Delta I, \quad (2.11)$$

substituindo as equações (2.4) e (2.5) na equação (2.10), vem

$$\nabla^2(\Delta \hat{T}) = -K^2(\Delta \hat{T}), \quad (2.12)$$

na qual

$$K^2 = \frac{i\nu\rho C_e}{k}. \quad (2.13)$$

Devido à simetria envolvida no fenômeno, a equação (2.12) apresenta-se mais convenientemente escrita em coordenadas esféricas

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Delta \hat{T}}{\partial \phi^2} = -K^2 \Delta \hat{T}^2, \quad (2.14)$$

podendo ser resolvida pelo método da separação de variáveis, uma vez que

$$\Delta \hat{T}(R, \theta, \phi) = A(R)B(\theta)C(\phi), \quad (2.15)$$

desta forma, a equação (2.14) dá origem a três equações independentes, em  $R$ , em  $\theta$  e em  $\phi$ , tendo como solução

$$\Delta\hat{T} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{l,m} P_l^m(\cos\theta) j_l(KR) e^{im\phi}, \quad (2.16)$$

onde  $P_l^m(\cos\theta)$  são as funções associadas de Legendre,  $C_{l,m}$  são os seus coeficientes, que podem ser calculados pelas condições de contorno - equação (2.4) - e  $j_l(KR)$  é a função esférica de Bessel (BUTKOV, 1978). Portanto, após algumas considerações e manipulações algébricas, (DUHA, 2000), vem

$$T = T_0 + n_f \frac{\alpha I_0 e^{-i(\nu-\psi)}}{\left(4\varepsilon\sigma T_0^3 + kX\right)^{1/2}} \left(\cos\theta + e^{i\phi} \text{sen}\theta'' \text{sen}\theta\right), \quad (2.17)$$

onde  $X$  é a parte real do seguinte número complexo

$$X + iY = \frac{1}{j_l(KR_s)} \left. \frac{\partial j_l(KR)}{\partial R} \right|_{R=R_s}, \quad (2.18)$$

$\xi$  é definido como

$$\xi = -\frac{kY}{4\varepsilon\sigma T_0^3 + kX}, \quad (2.19)$$

$n_f$  é uma constante de normalização,  $\theta''$  é relacionado com a direção da fonte de energia  $P''(\theta'', \phi'')$  no sistema de referência do satélite e  $\psi$  é o ângulo de atraso, o qual aparece entre a direção de absorção e da re-emissão da radiação devido à inércia térmica do material de que é fabricado o satélite, sendo definido como

$$\psi = \arctan(\xi). \quad (2.20)$$



### 2.4.3 Força Térmica Resultante (Modelo Esférico)

A força associada à perda de momento linear fotônico na superfície esférica é (DUHA, 2000)

$$d\mathbf{F}_E = -\frac{2\varepsilon\sigma}{3c}T^4 d\mathbf{A}, \quad (2.21)$$

onde,  $d\mathbf{A} = dA\mathbf{n}$  é vetor elemento de área, em coordenadas esféricas, no sistema cartesiano de referência centrado no satélite. Sendo assim,  $dA = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$  representa o elemento de área e  $\mathbf{n} = \sin\theta \cos\phi \mathbf{i} + \sin\theta \sin\phi \mathbf{j} + \cos\theta \mathbf{k}$  representa o versor normal à superfície.

Integrando-se a expressão (2.21) sobre todos os elementos de força  $d\mathbf{F}$  distribuídos na superfície esférica do satélite, vem

$$\mathbf{F}_E = -\frac{2\varepsilon\sigma}{3c} \int_{\text{esfera}} T^4 dA\mathbf{n}. \quad (2.22)$$

Fazendo uso da expressão aproximada para  $T^4$ , equação (2.9), e considerando que a relação para a força deve ter uma representação real tem-se

$$\mathbf{F}_E = n_f \{A_1 \sin(\nu_2 t - \psi_2) [\cos(\nu_1 t - \psi_1) \mathbf{i} + \sin(\nu_1 t - \psi_1) \mathbf{j}] + A_2 \cos(\nu_2 t - \psi_2) \mathbf{k}\}, \quad (2.23)$$

na qual a constante de normalização,  $n_f$ , é dada por

$$n_f = \frac{1}{2(1 + \sin^2 \nu_2 t)}, \quad (2.24)$$

onde  $\nu_1$  e  $\nu_2$  são as frequências angulares dos movimentos de rotação e translação do satélite, respectivamente e, além disso, são considerados de modo que  $\psi_1$  seja o ângulo

de atraso devido à rotação e  $\psi_2$  o ângulo de atraso devido à translação. Os coeficientes  $A_1$  e  $A_2$  são fornecidos por

$$A_i = -\frac{8\pi\alpha I_0 R^2}{9c \left(1 + \frac{kX_i}{4\varepsilon\sigma T_0^3}\right) \left(1 + \xi_i^2\right)^{1/2}}. \quad (2.25)$$

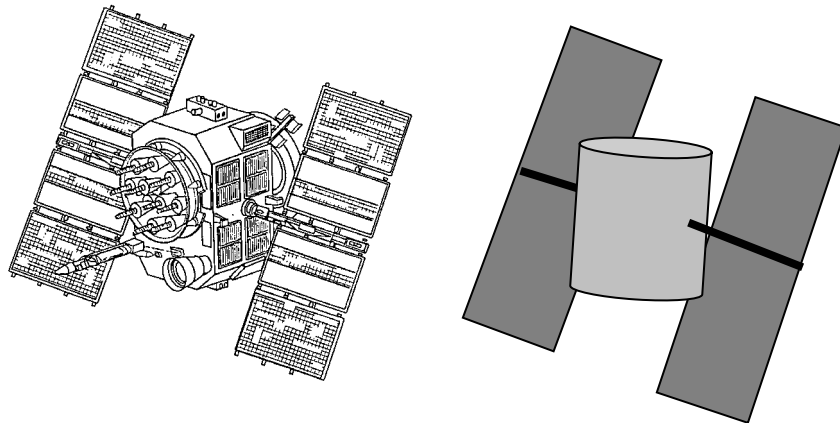
#### 2.4.4 Distribuição de Temperaturas Segundo o Modelo Cilíndrico

Devido ao seu formato complexo, o corpo do satélite GPS pode ser tratado por um modelo que seja caracterizado pela simplicidade, mas que não haja perdas relevantes tanto na acurácia quanto na análise dos resultados após a aplicação do modelo.

Assim como foi utilizado em DUHA (2000), o trabalho proposto considera um formato aproximado para o satélite GPS (Bloco II/IIA) utilizando uma representação cilíndrica para o corpo principal do satélite e uma representação plana para os painéis solares, figura (2.7).

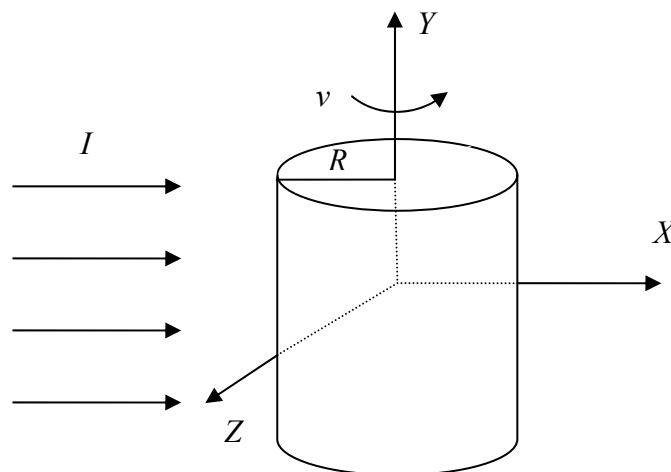
Considera-se um cilindro de raio  $R = R_{cil}$  cujo eixo de rotação, coincidente com o próprio eixo de simetria, é perpendicular à direção de incidência da radiação (PETERSON, 1976). A partir desta aproximação cilíndrica, a radiância será função apenas das coordenadas  $\phi$  e  $\phi''$ , ou seja, do ponto na superfície do satélite e da fonte de energia, respectivamente.

FIGURA 2.7 – REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA



Supõe-se que os raios, provenientes de uma dada fonte térmica, incidam paralelamente entre si e a variação da radiância  $I$  seja a mesma para todos os pontos ao longo da geratriz do cilindro, como indica a figura (2.8).

FIGURA 2.8 – REPRESENTAÇÃO CILÍNDRICA – CASO GPS



Define-se, portanto,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{z}$  como os versores orientados no sentido positivo dos eixos  $X$  e  $Z$ , respectivamente, no sistema de referência do satélite.

Pela substituição da condição  $\theta'' = \pi/2$  e  $\theta = \pi/2$  na equação (2.17) obtém-se a expressão final para a temperatura na superfície cilíndrica do satélite, homogêneo e

aquecido por uma fonte de energia radiante, que é o caso para o satélite GPS, pois a incidência dos raios solares é perpendicular à direção do eixo  $Y$ , então

$$T(R, \pi/2, \phi, t) = T_0 + n_f \frac{\alpha I_0 e^{-i(\nu-\psi)}}{\left(4\varepsilon\sigma T_0^3 + kX\right)\left(1 + \xi^2\right)^{1/2}} e^{i\phi}. \quad (2.26)$$

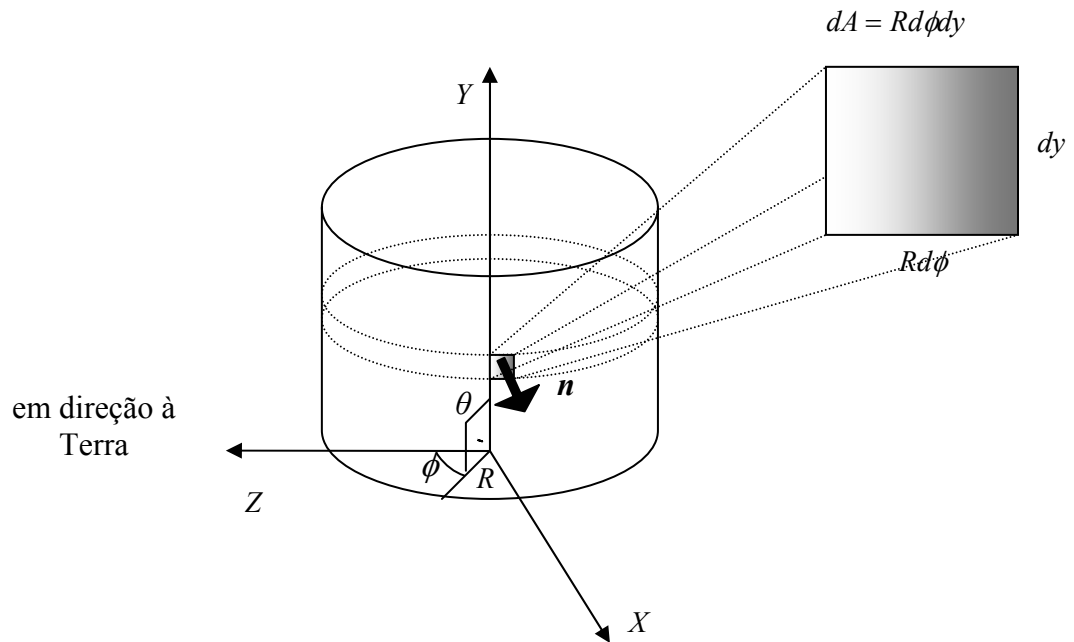
#### 2.4.5 Força Térmica Resultante (Modelo Cilíndrico)

Efetuando-se a integração de todos os elementos de força  $d\mathbf{F}$  distribuídos na superfície cilíndrica do satélite, equação (2.21), vem que:

$$\mathbf{F}_c = -\frac{2\varepsilon\sigma}{3c} \int_{\text{cilindro}} T^4 d\mathbf{A}\mathbf{n}, \quad (2.27)$$

na qual o elemento de área e o versor normal à superfície são dados por  $dA = R d\phi dy$  e  $\mathbf{n} = \sin\phi\mathbf{x} + \cos\phi\mathbf{z}$ , respectivamente.

FIGURA 2.9 – ELEMENTO DE ÁREA EM COORDENADAS CILÍNDRICAS – CASO GPS



A figura (2.9) representa o cilindro que é associado ao corpo do satélite GPS. De acordo com a figura o eixo  $Z$  aponta em direção à Terra;  $Y$  está na direção do eixo de rotação e  $X$  completa o triedro cartesiano positivo.

Ainda na figura (2.9), a longitude  $\phi$  é contada a partir do eixo  $Z$ ; a colatitude  $\theta$ , contada a partir do eixo  $Y$ , é igual a  $\pi/2$  já que o controle de atitude permite o satélite GPS manter o Sol em seu plano de simetria. Além disso, o próprio eixo  $Y$  é perpendicular ao plano Terra-Sol-satélite.

Fazendo uso da expressão aproximada para  $T^d$ , equação (2.9), e lembrando que a equação final para a força deve ter uma representação real, vem (DUHA, 2000)

$$\mathbf{F}_c = \frac{1}{4} A_1^* [\text{sen}(v_1 t - \psi_1) \mathbf{x} + \text{cos}(v_1 t - \psi_1) \mathbf{z}], \quad (2.28)$$

com

$$A_1^* = - \frac{(2\pi)\alpha I_0 R_{cil} h}{3c \left( 1 + \frac{kX_1}{4\epsilon\sigma T_0^3} \right) (1 + \xi_1^2)^{1/2}}, \quad (2.29)$$

o asterisco é utilizado para diferenciar os valores de  $A_l$  obtidos para os modelos esférico e cilíndrico e  $h$  é a altura do cilindro

#### 2.4.6 Modelo Plano

Para os painéis do satélite GPS é necessária a integração dos elementos de força  $d\mathbf{F}$  sobre toda a área do painel, tanto frontal quanto posterior, para a obtenção da força de re-emissão térmica atuante.

$$\mathbf{F}_P = -\frac{2\varepsilon\sigma}{3c} \int_{\text{painel}} T^4 d\mathbf{A}\mathbf{n}, \quad (2.30)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o versor perpendicular a  $dA$ .

Tomando a temperatura igual para todos os pontos de um mesmo lado do painel, seja frontal ou posterior, a equação (2.30) torna-se

$$\mathbf{F}_P = -\frac{2\varepsilon\sigma}{3c} \left\{ \left[ T_f^4 \int_{\text{painel}} dA \right] \mathbf{n}_{Sol} + \left[ T_p^4 \int_{\text{painel}} dA \right] (-\mathbf{n}_{Sol}) \right\}, \quad (2.31)$$

desta forma

$$\mathbf{F}_P = -\frac{2\varepsilon\sigma}{3c} \Delta T_P^* A_P \mathbf{n}_{Sol}, \quad (2.32)$$

em que

$$\Delta T_P^* = T_f^4 - T_p^4, \quad (2.33)$$

nas quais,  $T_f$  é a temperatura do painel frontal, definido como sendo aquele iluminado pelo Sol;  $T_p$  é a temperatura do painel posterior;  $A_P$  é a área do painel. Por fim define-se  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{Sol}$  para o lado iluminado e  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_{Sol}$  para o lado escuro.

Em termos dos versores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{z}$ , definidos anteriormente, a força é escrita como

$$\mathbf{F}_P = -\frac{2\varepsilon\sigma}{3c} \Delta T_P^* A_P (\cos \nu_1 t \mathbf{x} + \sin \nu_1 t \mathbf{z}). \quad (2.34)$$

#### 2.4.7 A Re-emissão Térmica Durante a Passagem do Satélite pela Sombra da Terra (Modelo II)

O fenômeno da passagem do satélite pela sombra produzida pela Terra se mostra tão importante quanto o de estar recebendo radiação incessantemente.

AFONSO et al. (1989) desenvolvem uma expressão capaz de explicar o comportamento da perturbação produzida pela re-emissão fotônica durante a entrada e saída do cilindro de sombra produzido pela Terra, já que o satélite continua emitindo radiação um pouco após a entrada na sombra e leva um certo período de tempo para atingir a mesma configuração térmica presente em sua superfície quando da iminência de sua entrada na sombra.

Após algumas considerações geométricas, bem como alguns cálculos, o Modelo II propõe um comportamento exponencial para a perturbação provocada pela re-emissão térmica, o qual é descrito pelas expressões (2.35) que considera  $\mathbf{f} = f\boldsymbol{\mu}$  ( $\boldsymbol{\mu}$  como sendo o versor na direção do eixo de rotação do satélite). Nas equações (2.35), a primeira expressão representa o resfriamento durante os eclipses enquanto que a segunda equação está relacionada com o aquecimento começando na saída da sombra.

$$f(\tilde{\lambda}) = \begin{cases} f_0 e^{-\tilde{\lambda}\delta}, & 0 \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda_E \\ f_0 C \left( 1 - e^{-(\tilde{\lambda} - \lambda_E)\delta} \right) + f_0 e^{-\lambda_E\delta}, & \lambda_E \leq \tilde{\lambda} \leq 2\lambda_E, \end{cases} \quad (2.35)$$

onde se destaca ainda,  $\delta = 1/(n\tau)$ , onde  $n$  representa o movimento angular médio do satélite e  $\tau$  é o tempo de relaxação do gradiente de temperatura, o qual pode ser obtido

pela solução aproximada da equação de condução de calor em uma dimensão, equação (2.36),

$$\tau \cong \frac{4\rho C_e R_{cil}^2}{\pi^2 k}. \quad (2.36)$$

Detalhes para a obtenção de  $\tilde{\lambda}$ ,  $\lambda_E$ , bem como das constantes  $C$  e  $f_0$ , serão apresentados posteriormente.



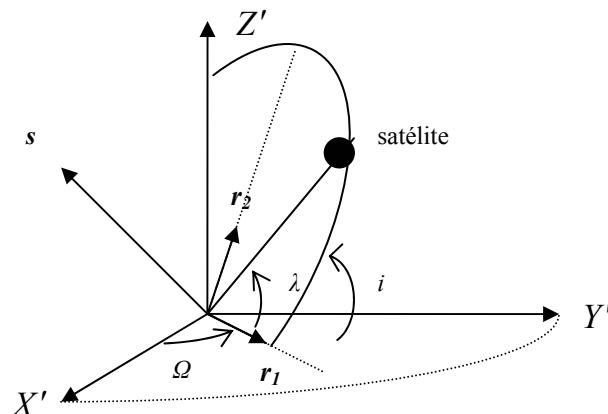
### 3.0 A MODELAGEM DURANTE A SOMBRA

Nesta sessão, apresentam-se as condições e as equações para a determinação da entrada e saída do satélite GPS da região de sombra projetada pela Terra, bem como a adaptação do comportamento atribuído à aceleração devido à força de re-emissão térmica na sombra (Modelo II) à geometria plano-cilíndrica, proposta pelo Modelo I.

#### 3.1 ENTRADA E SAÍDA DA SOMBRA

Tomando como referência o sistema inercial geocêntrico com o eixo ‘ $X'$ ’ apontado para o ponto vernal, o eixo ‘ $Z'$ ’ na direção coincidindo com o eixo de rotação da Terra e o eixo ‘ $Y'$ ’ fechando o terno cartesiano, e considerando uma órbita do satélite GPS, então, como considerado em AFONSO et al.(1989), pode-se definir  $r_1$  e  $r_2$  vetores unitários perpendiculares um ao outro no plano da órbita e descritos como na figura (3.1), onde também aparece o parâmetro  $\lambda$  (longitude do satélite sobre a órbita).

FIGURA 3.1 – PARÂMETROS, VETORES E GEOMETRIA DA ÓRBITA DO SATÉLITE GPS



Os vetores unitários  $r_1$  e  $r_2$  são escritos conforme as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} r_1 &= (\cos \Omega, \sin \Omega, 0), \\ r_2 &= (-\sin \Omega \cos i, \cos \Omega \cos i, \sin i). \end{aligned} \quad (3.1)$$

O vetor 's' unitário Terra-Sol é dado por:

$$s = (\cos \lambda_s, \sin \lambda_s \cos \varepsilon', \sin \lambda_s \sin \varepsilon'), \quad (3.2)$$

na qual  $\lambda_s$  é a longitude do Sol ao longo eclíptica e  $\varepsilon'$  é a obliquidade da eclíptica.

Considerando, para efeitos de simplificação, a órbita do satélite GPS circular de raio 'a', medido em raios terrestres ( $R_{\oplus} = 1$ ), o vetor posição do satélite pode ser representado em função dos versores  $r_1$  e  $r_2$ :

$$r = a \cos \lambda r_1 + a \sin \lambda r_2. \quad (3.3)$$

A geometria da sombra produzida pela Terra no espaço torna-se um tópico pertinente, uma vez que existem vários modelos para descrevê-la. Por questões de simplificação e conveniência, o Modelo II supõe uma forma perfeitamente cilíndrica para a sombra, em que a entrada e saída são fornecidas pela condição:

$$r \cdot s = -\sqrt{a^2 - 1}. \quad (3.4)$$

Definindo  $A = r_1 \cdot s$  e  $B = r_2 \cdot s$  a equação (3.4) torna-se:

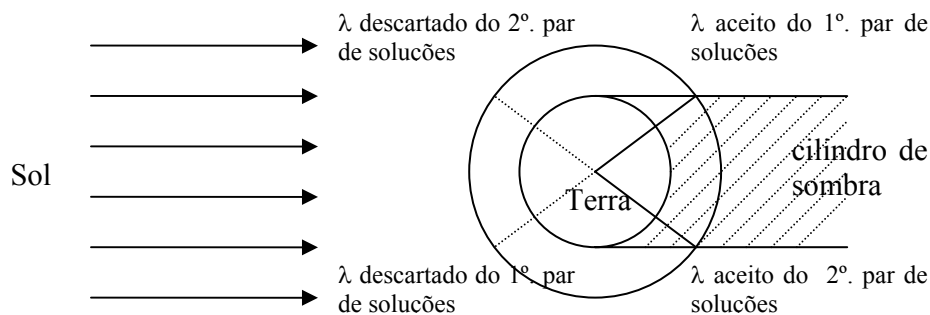
$$A \cos \lambda + B \sin \lambda = -\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}, \quad (3.5)$$

agora tomando  $q = \tan \lambda$  como a nova variável, após manipulações algébricas, tem-se que:

$$q^2 \left( B^2 + \frac{1}{a^2} - 1 \right) + q(2AB) + \left( A^2 + \frac{1}{a^2} - 1 \right) = 0. \quad (3.6)$$

Caso o discriminante da equação (3.6) seja maior do que zero, então existem duas raízes  $q_1$  e  $q_2$  que estão relacionadas com  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  as quais são a entrada e saída do satélite GPS da sombra. De fato, cada solução em  $q$  fornece duas em  $\lambda$ , uma delas é descartada por estar relacionada com a região oposta ao cilindro de sombra. A figura (3.2) representa tal situação.

FIGURA 3.2 – LONGITUDES DE ENTRADA E SAÍDA DA SOMBRA



O par de soluções da equação (3.6) que realmente corresponde às longitudes de entrada e saída da sombra pode ser determinado aplicando-se a condição representada pela equação (3.7), SEEBER (1993), FERREIRA (1998),

$$D = r \cdot s < 0. \quad (3.7)$$

Considerando a idéia de que a órbita do satélite possa ser aproximadamente circular, é possível a estimativa do tempo de permanência do satélite no cilindro de sombra que seria proporcional ao período orbital, para tanto, é desejável um satélite

submetido a uma órbita pouco excêntrica, uma boa aproximação é satisfeita com a excentricidade da ordem de  $10^{-3}$ .

### 3.2 A FORÇA DE RE-EMISSÃO TÉRMICA NA SOMBRA DA TERRA

Após a determinação das longitudes de entrada e saída dos limites de sombra,  $\lambda_I$  e  $\lambda_2$  portanto, há condições para que o domínio das equações (2.35) seja definido. Faz-se  $\tilde{\lambda}$  como sendo a longitude do satélite sobre a órbita medida desde a sua entrada na sombra,

$$\tilde{\lambda} = \lambda - \lambda_1, \quad (3.8)$$

e  $\lambda_E$  como sendo o intervalo de longitude descrito pelo satélite dentro da sombra,

$$\lambda_E = \lambda_2 - \lambda_1. \quad (3.9)$$

Levando em conta que a órbita do satélite é circular, divide-se a equação (3.8) por  $n$  (movimento angular médio do satélite) e definindo-se o tempo a partir da entrada do satélite na sombra

$$\tilde{t} = t - t_1, \quad (3.10)$$

onde  $t$  é contado a partir do nodo ascendente e  $t_1$  é o tempo de entrada na região de sombra. Realizando o mesmo procedimento com (3.9) define-se o tempo de permanência do satélite na sombra

$$t_E = t_2 - t_1, \quad (3.11)$$

na qual  $t_2$  representa o tempo de saída da sombra.

Com a mudança de variável as equações (2.35) tornam-se

$$f_C(t) = \begin{cases} f_{0C} e^{-(t-t_1)/\tau_C}, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ f_{0C} C_C (1 - e^{-(t-t_2)/\tau_C}) + f_{0C} e^{-t_E/\tau_C}, & t_2 \leq t \leq t_2 + t_E, \end{cases} \quad (3.12)$$

para o corpo-GPS, nas quais  $\tau_C$ , em segundos, indica o tempo de relaxação com respeito ao corpo e  $f_{0C}$  e  $C_C$  são constantes relacionadas ao corpo a serem determinadas mais adiante.

Para os painéis-GPS as equações são tidas como

$$f_P(t) = \begin{cases} f_{0P} e^{-(t-t_1)/\tau_P}, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ f_{0P} C_P (1 - e^{-(t-t_2)/\tau_P}) + f_{0P} e^{-t_E/\tau_P}, & t_2 \leq t \leq t_2 + \tau_P, \end{cases} \quad (3.13)$$

onde verificam-se  $\tau_P$  como o tempo de relaxação, em segundos, relacionado aos painéis-GPS, aos quais também estão vinculadas às constantes  $f_{0P}$  e  $C_P$ .

### 3.2.1 As Constantes $C_C$ , $C_P$ , $f_{0C}$ e $f_{0P}$

Assumindo-se que o tempo para que a superfície do corpo do satélite recupere a configuração térmica do início da travessia da sombra seja igual ao período em que esteve atravessando-a, é possível escrever para a força perturbadora

$$f_C(t_1) = f_C(t_2 + t_E), \quad 1^a \text{ condição} \quad (3.14)$$

de onde parte-se para chegar a  $C_C = 1$ .

Para a determinação da constante  $C_P$  admite-se que o tempo para que os painéis retomem a configuração térmica do momento da travessia da sombra seja igual a  $\tau_P$ , então

$$f_P(t_1) = f_P(t_2 + \tau_P), \quad 2^a. \text{ condição} \quad (3.15)$$

o que leva a

$$C_P = \frac{1 - e^{-t_E / \tau_P}}{1 - \frac{1}{e}}. \quad (3.16)$$

No caso da constante  $f_{0C}$ , a condição para determiná-la é que, após estabelecida a configuração térmica da superfície em  $t_2 + t_E$ , o Modelo I (caso plano-cilíndrico) volte a reger o comportamento da força térmica perturbadora. Portanto, através da equação (2.28), sabe-se que o módulo da força de re-emissão térmica para o corpo (cilíndrico) é dado por

$$F_C = \frac{1}{4} A_1^*, \quad (3.17)$$

e com a condição

$$f(t_2 + t_E) = \frac{1}{4} A_1^*, \quad (3.18)$$

determina-se a constante  $f_0$  para o corpo-GPS, portanto,

$$f_{0C} = |\mathbf{F}_C|. \quad (3.19)$$

Para os painéis solares o módulo da força de re-emissão térmica é calculado utilizando a equação (2.32)

$$F_P = \frac{2\varepsilon\sigma}{3c} \Delta T^* A_P. \quad (3.20)$$

A condição que determina  $f_{0P}$  para os painéis-GPS é

$$f(t_2 + \tau_P) = \frac{2\varepsilon\sigma}{3c} \Delta T^* A_P, \quad (3.21)$$

donde vem

$$f_{0P} = |F_P|. \quad (3.22)$$

Portanto, a modelagem para o módulo da força de re-emissão térmica considerando a passagem pela sombra da Terra torna-se, para o corpo-GPS

$$f_C(t) = \begin{cases} f_{0C} e^{-(t-t_1)/\tau_C}, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ f_{0C} (1 - e^{-(t-t_2)/\tau_C}) + f_{0C} e^{-t_E/\tau_C}, & t_2 \leq t \leq t_2 + t_E, \end{cases} \quad (3.23)$$

e para os painéis solares

$$f_P(t) = \begin{cases} f_{0P} e^{-(t-t_1)/\tau_P}, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ f_{0P} C_P (1 - e^{-(t-t_2)/\tau_P}) + f_{0P} e^{-t_E/\tau_P}, & t_2 \leq t \leq t_2 + \tau_P, \end{cases} \quad (3.24)$$

sugere-se o mesmo comportamento exponencial às componentes do vetor força.

Escrevendo-as, para o corpo-GPS,

$$\mathbf{F}_{C_{sombra}} = \begin{cases} -A_C [\text{sen}(v_1 t - \psi_1) \mathbf{x} + \cos(v_1 t - \psi_1) \mathbf{z}], & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -B_C [\text{sen}(v_1 t - \psi_1) \mathbf{x} + \cos(v_1 t - \psi_1) \mathbf{z}], & t_2 \leq t \leq t_2 + t_E \end{cases}, \quad (3.25)$$

onde

$$A_C = f_{0C} e^{-(t-t_1)/\tau_C}, \quad (3.26)$$

e

$$B_C = f_{0C} \left(1 - e^{-(t-t_2)/\tau_C}\right) + f_{0C} e^{-t_E/\tau_C}. \quad (3.27)$$

No que diz respeito aos painéis-GPS a força perturbadora é escrita em componentes como

$$\mathbf{F}_{P_{sombra}} = \begin{cases} -A_P [\text{sen}(v_1 t) \mathbf{x} + \cos(v_1 t) \mathbf{z}], & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -B_P [\text{sen}(v_1 t) \mathbf{x} + \cos(v_1 t) \mathbf{z}], & t_2 \leq t \leq t_2 + \tau_P \end{cases}, \quad (3.28)$$

onde

$$A_P = f_{0P} e^{-(t-t_1)/\tau_P}, \quad (3.29)$$

e

$$B_P = f_{0P} C_P \left(1 - e^{-(t-t_2)/\tau_P}\right) + f_{0P} e^{-t_E/\tau_P}. \quad (3.30)$$



### 3.3 A ACELERAÇÃO PERTURBADORA DURANTE A SOMBRA

Dividindo-se as equações (3.25) e (3.28) pela massa  $M_S$  do satélite-GPS, obtém-se a modelagem da aceleração perturbadora devido à re-emissão térmica na ocasião da passagem do satélite pela sombra.

A equação (3.25) dividida pela massa  $M_S$  do satélite torna-se

$$\mathbf{a}_{C_{sombra}} = \begin{cases} -A'_C [\text{sen}(\nu_1 t - \psi_1) \mathbf{x} + \text{cos}(\nu_1 t - \psi_1) \mathbf{z}], & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -B'_C [\text{sen}(\nu_1 t - \psi_1) \mathbf{x} + \text{cos}(\nu_1 t - \psi_1) \mathbf{z}], & t_2 \leq t \leq t_2 + t_E \end{cases}, \quad (3.31)$$

onde  $A'_C$  e  $B'_C$  são obtidos dividindo-se, respectivamente, as equações (3.26) e (3.27) pela massa  $M_S$ .

Efetuada-se a divisão da equação (3.28) por  $M_S$  obtém-se

$$\mathbf{a}_{P_{sombra}} = \begin{cases} -A'_P [\text{sen}(\nu_1 t) \mathbf{x} + \text{cos}(\nu_1 t) \mathbf{z}], & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -B'_P [\text{sen}(\nu_1 t) \mathbf{x} + \text{cos}(\nu_1 t) \mathbf{z}], & t_2 \leq t \leq t_2 + \tau_P \end{cases}, \quad (3.32)$$

nas quais  $A'_P$  e  $B'_P$  resultam da divisão das equações (3.29) e (3.30), respectivamente, por  $M_S$ .

#### 3.3.1 O Tempo de Relaxação

Nas expressões que traduzem o comportamento tanto da força quanto da aceleração da re-emissão térmica, quando o evento de sombra é considerado, explicitam-se os tempos de relaxação referentes ao corpo e aos painéis-GPS, simbolizados por  $\tau_C$  e  $\tau_P$ , respectivamente.

Basicamente o tempo de relaxação é o tempo necessário para que a superfície do satélite, a qual não apresenta uma uniformidade na distribuição de temperaturas, atinja um estado de equilíbrio térmico por consequência de sua entrada na sombra.

Para o cálculo do tempo de relaxação adota-se, por razões de simplificação, o corpo do satélite GPS como uma esfera (esfera equivalente) que possui área da seção reta igual a área média da seção reta do corpo do satélite (DUHA, 2000), além disso, adota-se que o corpo e os painéis sejam confeccionados com o mesmo material (alumínio). Após essas considerações, aplica-se a relação (2.36) para o corpo-GPS, desta forma

$$\tau_C = \tau \cong \frac{4\rho C_e R_{cil}^2}{\pi^2 k}. \quad (3.33)$$

No caso dos painéis solares, é possível considerar o fluxo de calor no sentido apenas da sua espessura, por esta dimensão ser muito menor do que as outras dimensões do painel. A equação (2.36), portanto, quando adaptada aos painéis-GPS, escreve-se

$$\tau_P \cong \frac{\rho C_e w^2}{\pi^2 k}, \quad (3.34)$$

onde  $w$  é a espessura do painel.

## 4.0 APLICAÇÃO DA MODELAGEM

### 4.1 DADOS CONSIDERADOS E RESULTADOS

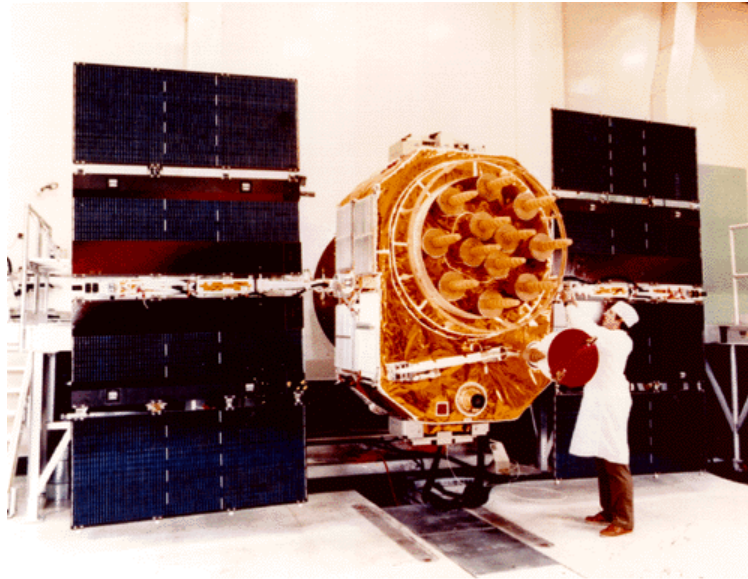
A tabela 4.1 apresenta algumas constantes inerentes aos satélites GPS (Blocos II e IIA).

TABELA 4.1 – CONSTANTES INERENTES AOS SATÉLITES GPS (BLOCOS II-IIA)

GRANDEZA	SÍMBOLO	VALOR NUMÉRICO
radiância (fonte Sol)	$I_0$	1368 W m <sup>-2</sup>
calor específico	$C_e$	880 J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
emissividade	$\varepsilon$	0,25
absorvidade	$\alpha$	0,45
densidade	$\rho$	2690 kg m <sup>-3</sup>
condutividade térmica	$\kappa$	209,3 W K <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup>
constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma$	5,67 x 10 <sup>-8</sup> W m <sup>-2</sup> K <sup>-4</sup>
velocidade da luz	$c$	2,9979 x 10 <sup>8</sup> m s <sup>-1</sup>
área dos painéis	$A_p$	2 m x 5,61 m = 11,22 m <sup>2</sup>
raio do cilindro equivalente	$R_{cil}$	1,10 m
diferença de temperatura entre as superfícies dos Painéis	$\Delta T$	6,0 K
massa média dos satélites	$M_S$	900 kg
obliquidade da eclíptica	$\varepsilon'$	23,439°
constante geocêntrica de gravitação	$GM_{\oplus}$	3,9860047 x 10 <sup>14</sup> m <sup>3</sup> s <sup>-2</sup>

Dados referentes às dimensões do satélite GPS, figura 4.1, mostraram-se de difícil acesso, contudo VIGUE, SCHUTZ e ABUSALI (1994) trazem para a espessura do painel-GPS o valor de  $w = 1,478$  cm.

FIGURA 4.1 – SATÉLITE GPS BLOCO IIA



Os elementos orbitais dos satélites envolvidos na aplicação da modelagem, mostrados na tabela 4.2, foram obtidos por meio das efemérides precisas (arquivo SP3) do dia 13 de abril de 2001 (SV 28 e SV 30) 0 h local e do dia 06 de novembro de 2005 às 15 h e 30 min para o SV 15. As posições dos satélites GPS que constam do arquivo SP3 estão relacionadas ao sistema terrestre, então foi necessário transformá-las para o sistema inercial e deste para o sistema orbital. Deste modo, obtêm-se os elementos orbitais correspondentes ao dia 13/04/2001 e 06/11/2005, nos respectivos horários.

Um parâmetro de interesse para a modelagem da força de re-emissão térmica durante a passagem do satélite pela sombra é justamente o tempo despendido para atravessá-la. Se o tempo de permanência na sombra mostra-se maior que o tempo de relaxação, a superfície considerada do satélite (corpo e/ou painel) apresenta um padrão de equilíbrio térmico, fazendo com que a força resultante devido à re-emissão térmica desapareça durante a travessia da sombra. Caso contrário, a superfície do satélite mantém a re-emissão de radiação de maneira anisotrópica, com isso, uma força de recuo resultante continua agindo sobre o satélite mesmo durante os instantes em que se encontra no interior da sombra.

Aplicando-se as relações (3.33) e (3.34) chega-se a  $\tau_C = 92,44$  min. e  $\tau_P = 0,25$  s. A tabela 4.3, por sua vez, apresenta o tempo decorrido desde a entrada dos satélites SV 28, SV 30 e SV 15 até a saída da sombra, ou seja, o tempo de permanência na sombra  $T_E$ , para uma órbita na data correspondente.

TABELA 4.2 – ELEMENTOS ORBITAIS DOS SATÉLITES

Elemento Orbital	Símbolo	SV 28 (IIA) 13/04/2001	SV 30 (IIA) 13/04/2001	SV 15 (II) 06/11/2005
semi-eixo maior	$a$	26571660,4447 m	26559966,7049 m	26556138,1224 m
excentricidade	$e$	0,0049	0,0058	0,0091
inclinação da órbita	$i$	55,0220°	54,0733°	54,9751°
ascensão reta do nodo ascendente	$\Omega$	217,8663°	216,6645°	40,4840°
argumento do perigeu	$\omega$	220,2797°	79,5227°	143,3863°
anomalia média	$\bar{M}$	256,5307°	165,9579°	226,3967°

TABELA 4.3 – TEMPO DE PERMANÊNCIA NA SOMBRA

SV	Data	$T_E$
28	13/04/2001	46,6077 min
30	13/04/2001	49,3702 min
15	06/11/2005	45,0443 min

Faz-se procedente comentar, com base nos valores da tabela 4.3 e o obtido para  $\tau_P$ , que os painéis possuem um comportamento térmico que o leva a atingir o equilíbrio térmico assim que entra na sombra e retomar o padrão térmico do início da travessia instantaneamente ao sair dela. Pode-se entender que o chamado Modelo Plano, proposto pelo Modelo I, deve voltar a ser aplicado praticamente em  $t_2$  no caso dos painéis.

Com isso, as equações (3.32) podem ser aproximadas para

$$\mathbf{a}_{P_{sombra}} = \begin{cases} -A'_P [\text{sen}(v_1 t) \mathbf{x} + \text{cos}(v_1 t) \mathbf{z}], & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -F'_P [\text{sen}(v_1 t) \mathbf{x} + \text{cos}(v_1 t) \mathbf{z}], & t_2 \leq t \leq t_2 + t_E \end{cases}, \quad (4.1)$$

para a qual  $F'_P$  obtém-se dividindo a equação (3.20) por  $M_S$ .

$$F'_P = \frac{F_P}{M_S}. \quad (4.2)$$

Desta forma a aceleração total resultante é obtida adicionando-se as acelerações de re-emissão térmica considerando o corpo e os painéis do satélite GPS

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_{x_{sombra}} &= -[A'_C \text{sen}(v_1 t + \psi_1) + A'_P \text{sen}(v_1 t)] \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_{z_{sombra}} &= -[A'_C \text{cos}(v_1 t + \psi_1) + A'_P \text{cos}(v_1 t)] \mathbf{z} \end{aligned} \right\}, \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad (4.3a)$$

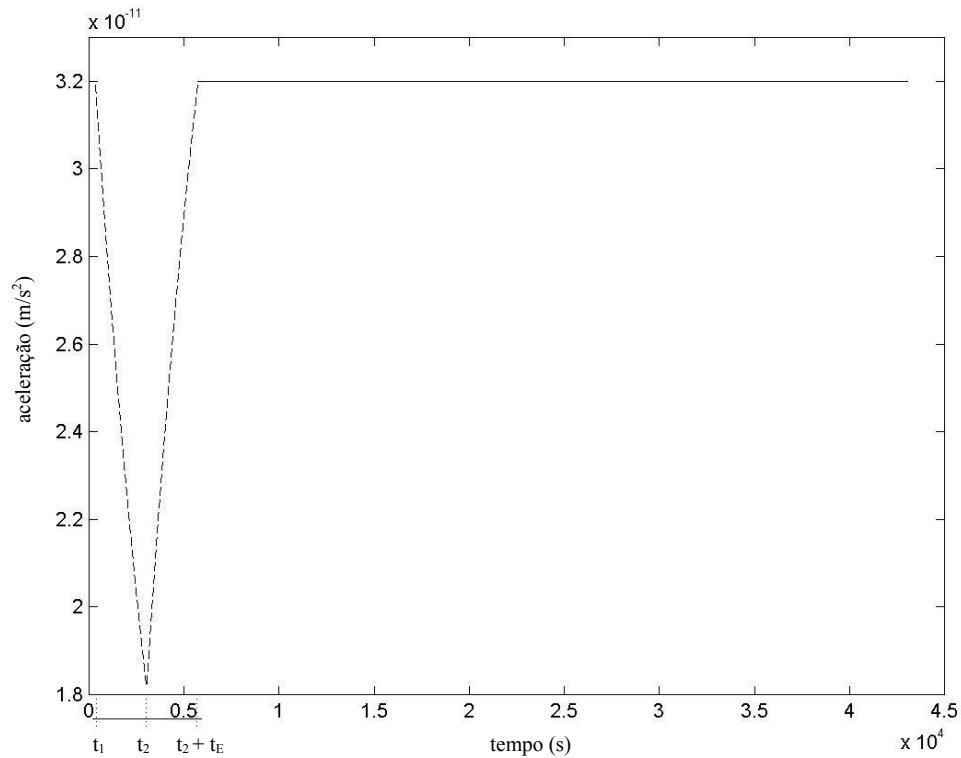
$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_{x_{sombra}} &= -[B'_C \text{sen}(v_1 t + \psi_1) + F'_P \text{sen}(v_1 t)] \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_{z_{sombra}} &= -[B'_C \text{cos}(v_1 t + \psi_1) + F'_P \text{cos}(v_1 t)] \mathbf{z} \end{aligned} \right\}, \quad t_2 \leq t \leq t_2 + t_E, \quad (4.3b)$$

## 4.2 O MÓDULO DA ACELERAÇÃO DURANTE A SOMBRA

Visando objetividade, adotar-se-á como satélite teste o satélite SV/PRN 15, o qual foi lançado em 1º. de outubro de 1990 para operar por sete anos e meio, porém encontra-se em plena atividade quinze anos após o início de seu funcionamento.

A variação do módulo da aceleração devido à re-emissão térmica atuante sobre o corpo e os painéis do satélite considerando a passagem pela sombra pode ser visualizada nos gráficos apresentados nas figuras 4.2 e 4.3, respectivamente.

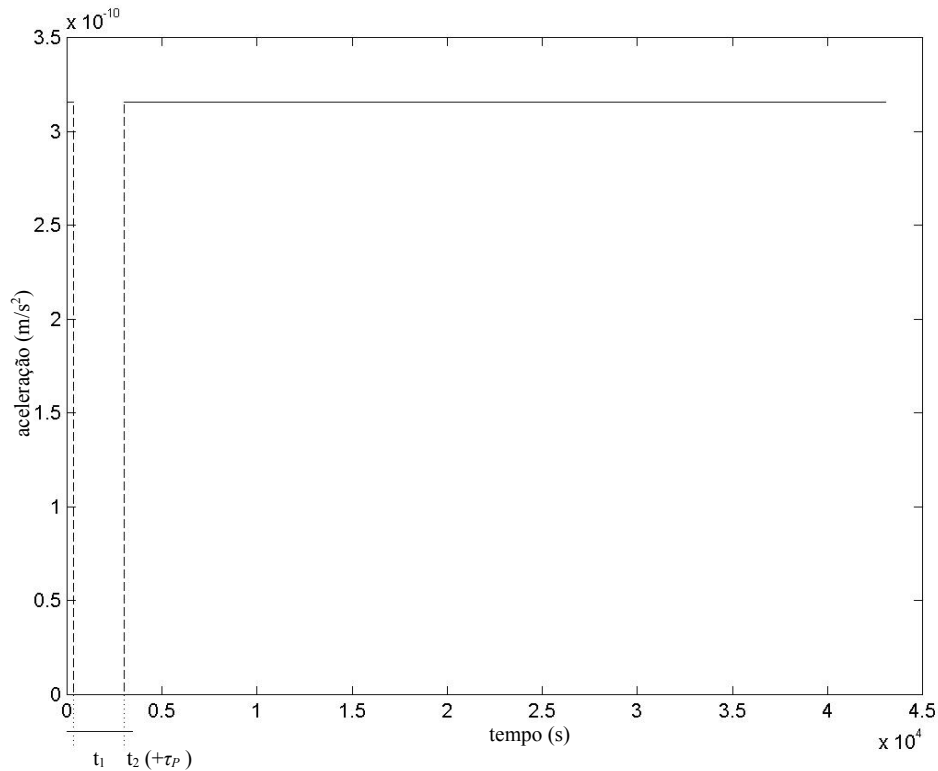
FIGURA 4.2 – MÓDULO ACELERAÇÃO SOBRE O CORPO-GPS



O gráfico da figura 4.2 representa o módulo das acelerações dadas pelas equações (3.31), no intervalo de  $t_1$  a  $t_2 + t_E$ . O módulo da aceleração devido à re-emissão térmica atuante sobre o corpo do satélite, que pode ser calculado dividindo a equação (3.17) por  $M_S$ , é plotado de  $t_2 + t_E$  até o tempo correspondente a um período orbital.

O gráfico da figura 4.3 foi construído utilizando-se os módulos das acelerações apresentadas nas equações (3.32) e a equação (4.2), trazendo no eixo das abscissas o tempo correspondente a um período orbital e no eixo das ordenadas o módulo da aceleração perturbadora.

FIGURA 4.3 – MÓDULO DA ACELERAÇÃO SOBRE OS PAINÉIS-GPS

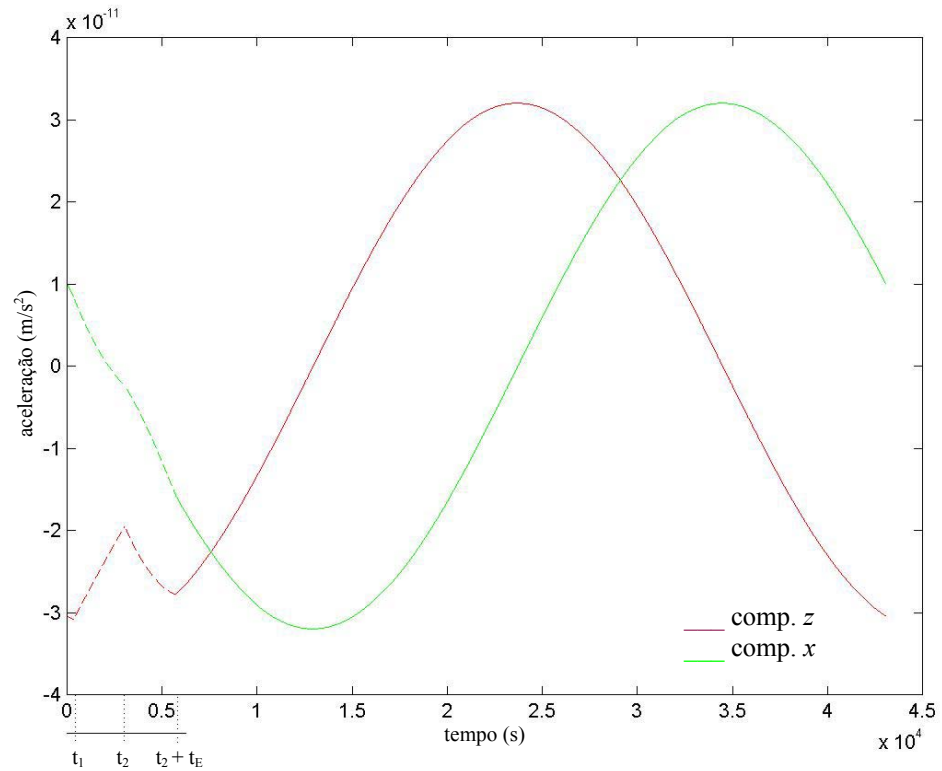


### 4.3 A ACELERAÇÃO EM COMPONENTES

As figuras 4.4 e 4.5 apresentam o comportamento das componentes  $x$  e  $z$  da aceleração perturbadora devido à re-emissão térmica atuante sobre o corpo e painéis-GPS, respectivamente, considerando o efeito da passagem do satélite pela sombra e utilizando o sistema de referência  $XYZ$  fixo no satélite. A região pontilhada em cada curva corresponde ao período de influência da passagem do satélite pela sombra, o que inclui o tempo de permanência na sombra e o tempo para retomar a configuração térmica existente antes de sua entrada na sombra. O tempo correspondente a um período orbital localiza-se no eixo das abscissas e a aceleração perturbadora encontra-se no eixo das ordenadas.



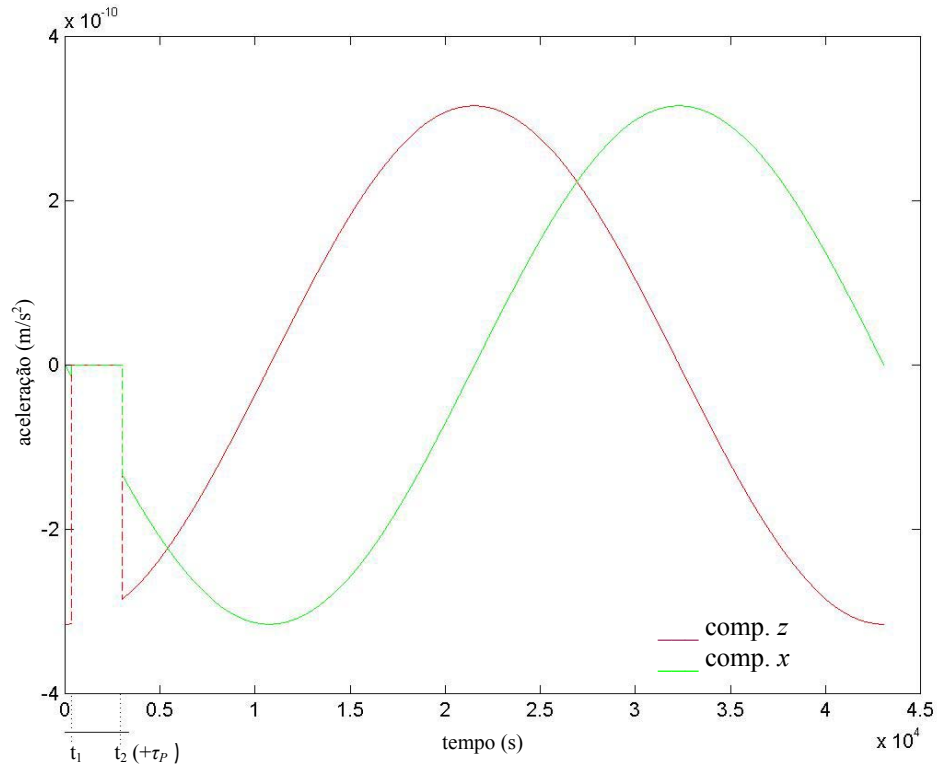
FIGURA 4.4 – COMPONENTES DA ACELERAÇÃO – CORPO-GPS



Na produção do gráfico da figura (4.4) foram utilizadas as equações (3.31) de  $t_1$  a  $t_2 + t_E$  e a equação (2.28) dividida pela massa satélite  $M_S$  rege o comportamento até o fim do período orbital.

No gráfico da figura (4.5), as equações (3.32) são utilizadas de  $t_1$  a  $t_2 + \tau_P$ . Dividindo-se a equação (2.34) por  $M_S$ , obtém-se o comportamento das curvas de  $t_2 + \tau_P$  até o tempo  $T$  (período orbital).

FIGURA 4.5 – COMPONENTES DA ACELERAÇÃO – PAINÉIS-GPS



#### 4.3.1 As Componentes e o Módulo

Com o objetivo de obter-se uma visualização mais abrangente, a curva representando o módulo da aceleração perturbadora é acrescida ao gráfico das componentes, tanto para o corpo-GPS, figura 4.6, como para os painéis solares, figura 4.7. Assim, o gráfico da figura 4.6 é formado pela adição dos gráficos das figuras 4.2 e 4.4; o gráfico da figura 4.7 é resultado da fusão entre os gráficos das figuras 4.3 e 4.5. Os gráficos levam em conta o tempo relativo ao período orbital ( $T$ ) no eixo das abscissas e a aceleração perturbadora no eixo das ordenadas.

FIGURA 4.6 – COMPONENTES E MÓDULO DA ACELERAÇÃO – CORPO-GPS

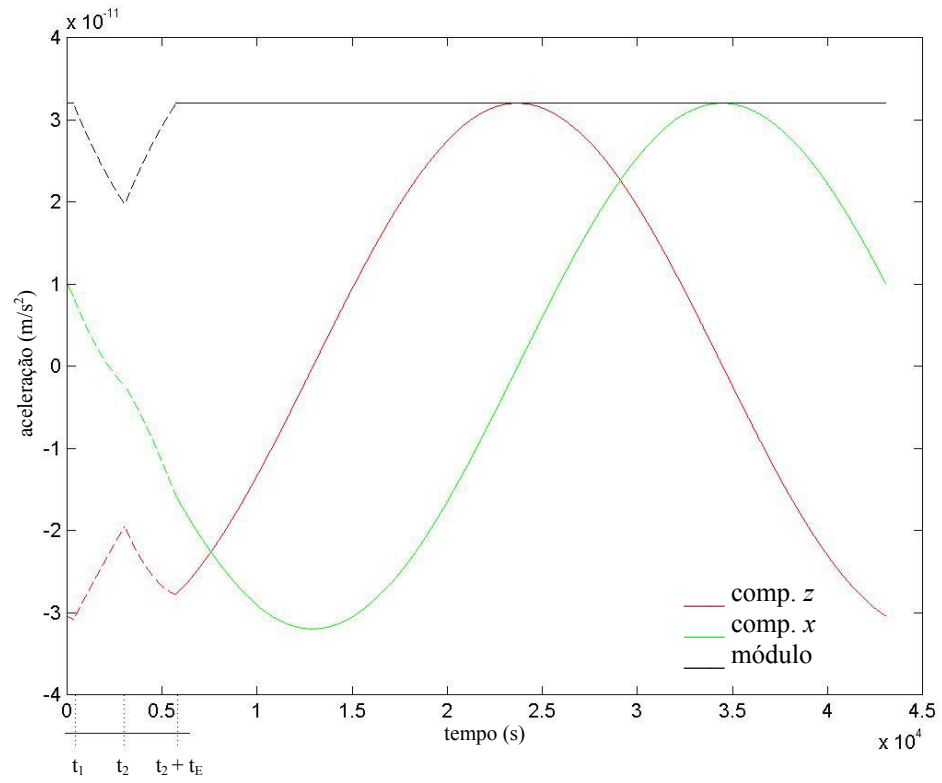
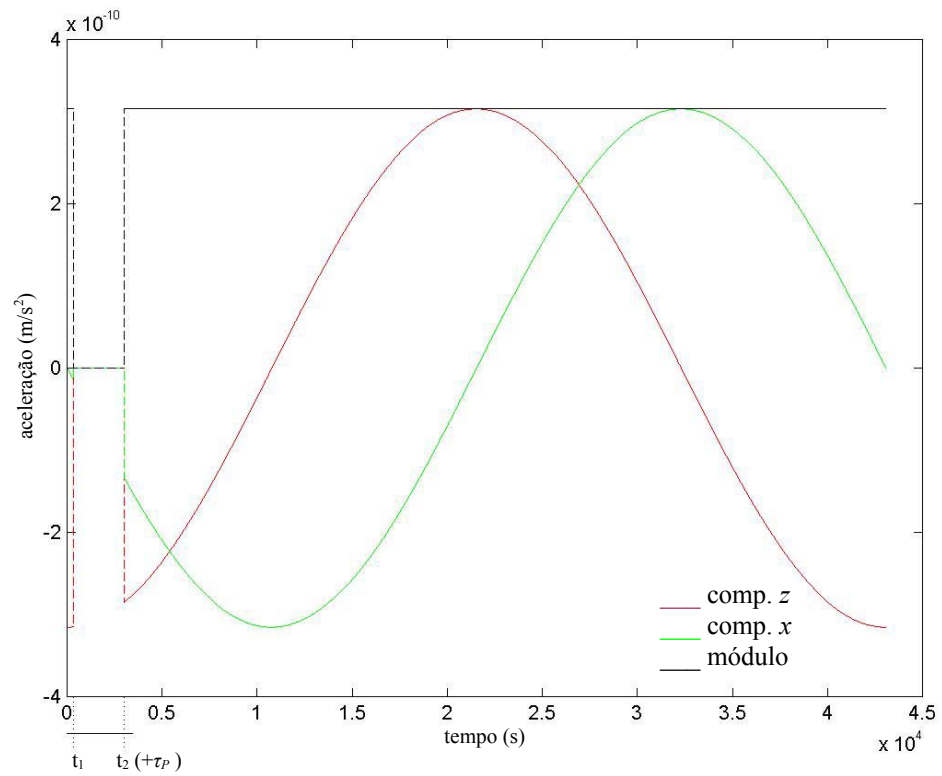


FIGURA 4.7 – COMPONENTES E MÓDULO DA ACELERAÇÃO – PAINÉIS-GPS



#### 4.4 ELEMENTOS ORBITAIS PERTURBADOS E NÃO PERTURBADOS

Após a aplicação da modelagem para as componentes e módulo da aceleração perturbadora, analisa-se o comportamento dos elementos orbitais do satélite GPS, considerando o evento de sua passagem pela sombra. Para tanto, é necessário conhecer como se comporta a aceleração perturbadora utilizando como referência o sistema inercial geocêntrico ( $X'Y'Z'$ ), em seguida propagam-se duas órbitas, uma nominal ou kepleriana (sem a ação de forças perturbadoras) e outra perturbada pela força de re-emissão térmica.

Ambas as órbitas são propagadas durante dois intervalos de tempo: o período em que o satélite encontra-se eclipsado, denominado como período de “resfriamento”, e o período em que o satélite está retomando sua configuração térmica anterior à sua entrada na sombra, “reaquecimento”. A órbita é integrada numericamente utilizando o método Runge-Kutta 4(5), o qual fornece a cada passo de integração o vetor de estado do satélite que consta das componentes do vetor posição ( $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ ) e do vetor velocidade ( $V_{x'}$ ,  $V_{y'}$  e  $V_{z'}$ ) no sistema inercial. Conhecidos os vetores de estado, nominal e perturbado, obtém-se os elementos orbitais correspondentes. De posse dos elementos orbitais, efetua-se o cálculo da diferença entre os parâmetros orbitais perturbados e os não perturbados.

Nas figuras 4.8 a 4.19 são apresentados os gráficos referentes às diferenças entre os elementos orbitais perturbados e não perturbados do satélite GPS (SVN-15) durante a fase de “resfriamento” (eclipse) e de “reaquecimento”, cujos respectivos intervalos de tempo encontram-se no eixo das abscissas; o eixo das ordenadas é reservado aos valores das diferenças.

FIGURA 4.8 – DIFERENÇA SEMI-EIXO MAIOR – RESFRIAMENTO

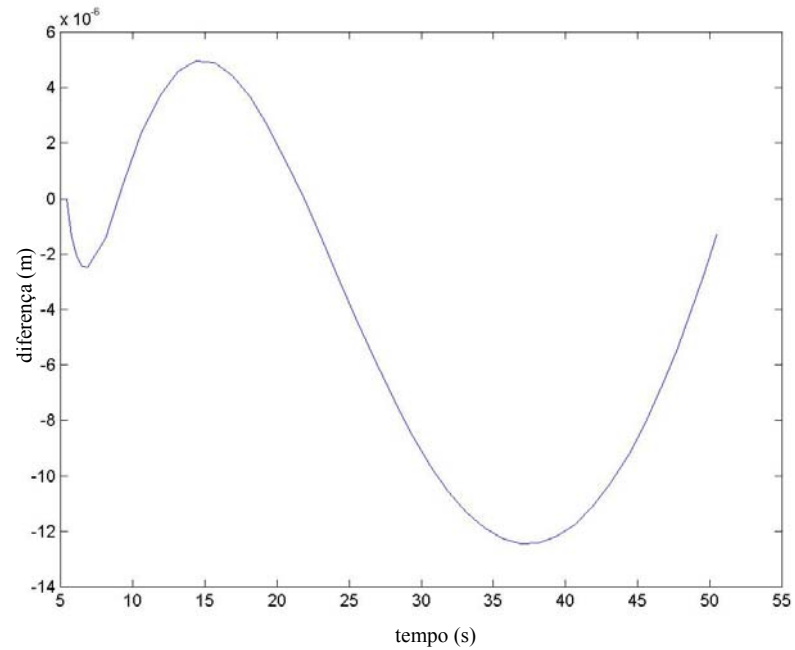
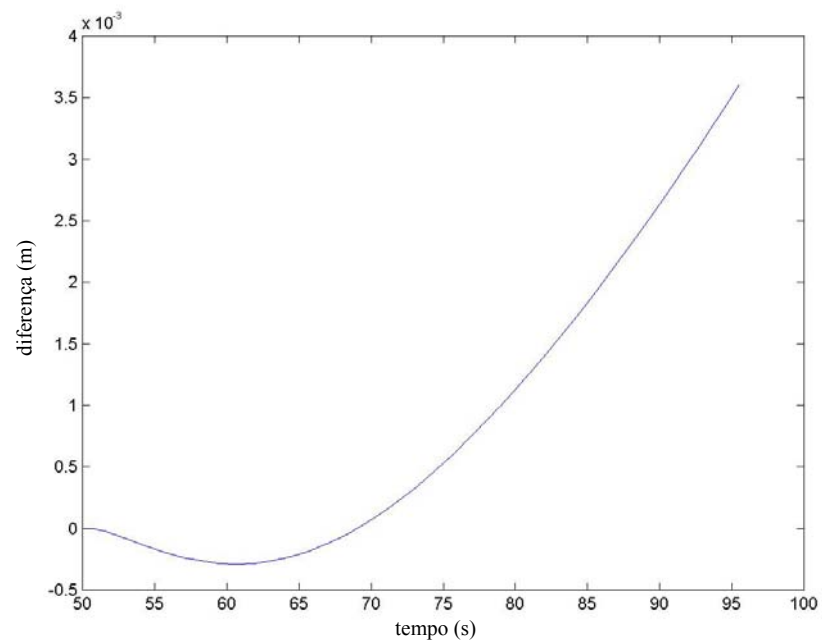


FIGURA 4.9 – DIFERENÇA SEMI-EIXO MAIOR – REAQUECIMENTO



As figuras 4.8 e 4.9 representam a diferença entre o semi-eixo maior perturbado e o não perturbado da órbita do satélite durante o “resfriamento” e o “reaquecimento”.

FIGURA 4.10 – DIFERENÇA EXCENTRICIDADE – RESFRIAMENTO

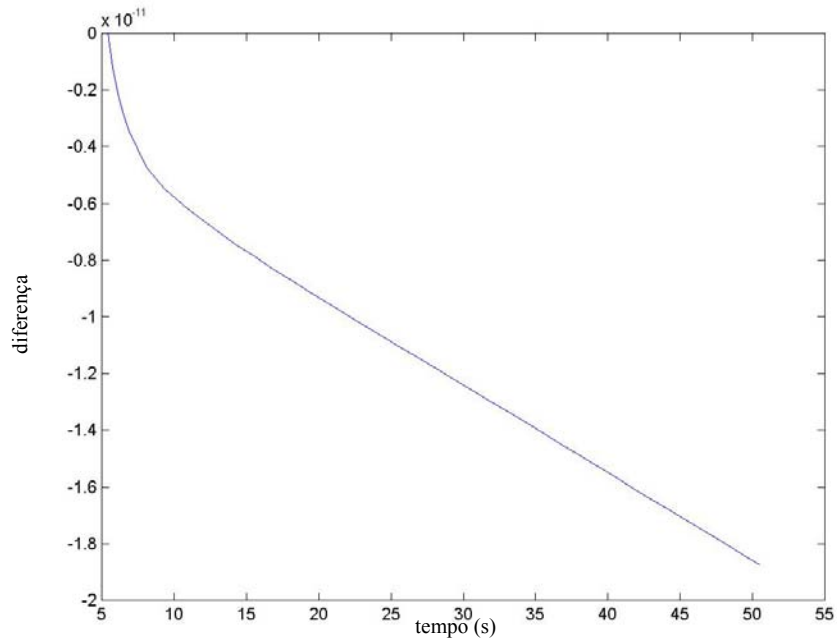
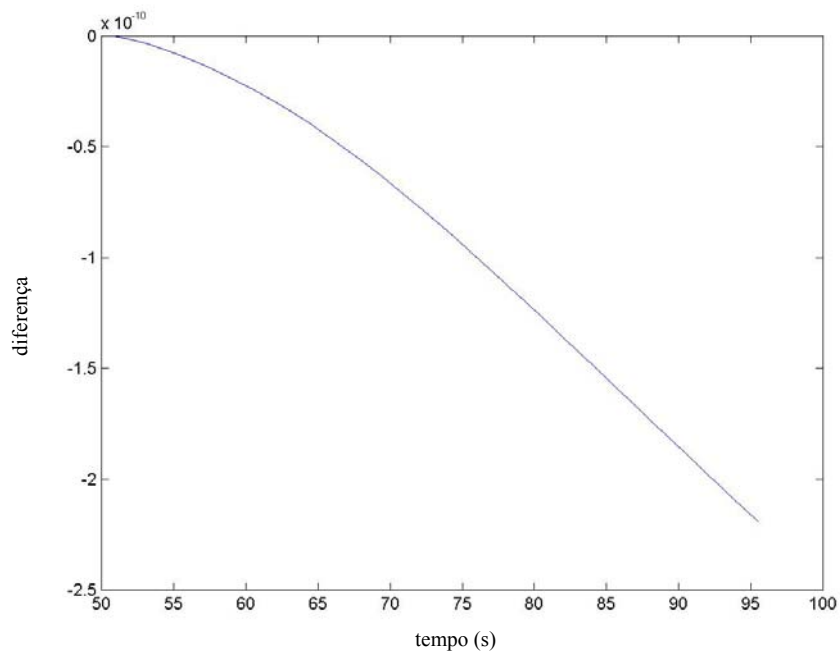


FIGURA 4.11 – DIFERENÇA EXCENTRICIDADE – REAQUECIMENTO



As figuras 4.10 e 4.11 apresentam a diferença entre excentricidade da órbita perturbada e não perturbada do satélite SVN 15 durante a sombra e a saída da sombra respectivamente

FIGURA 4.12 – DIFERENÇA INCLINAÇÃO – RESFRIAMENTO

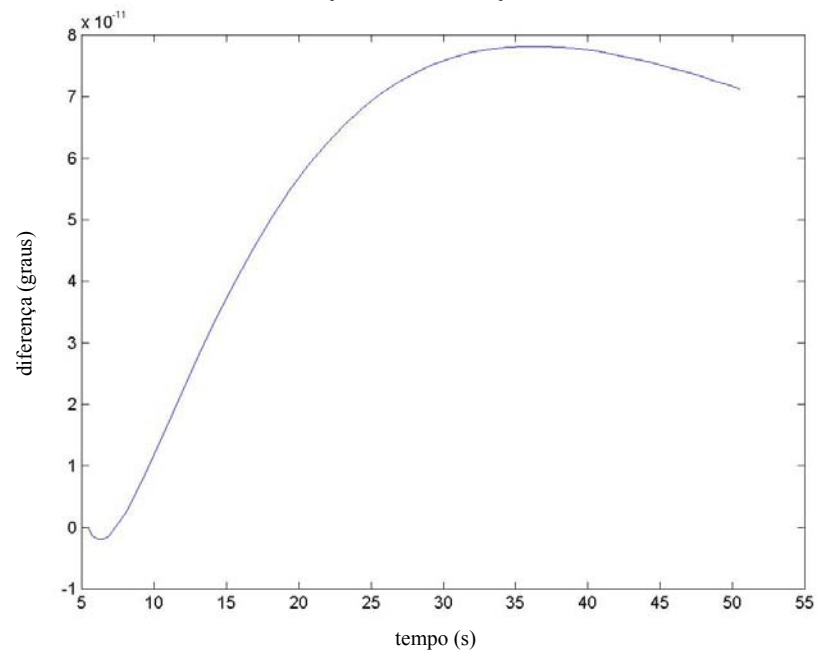
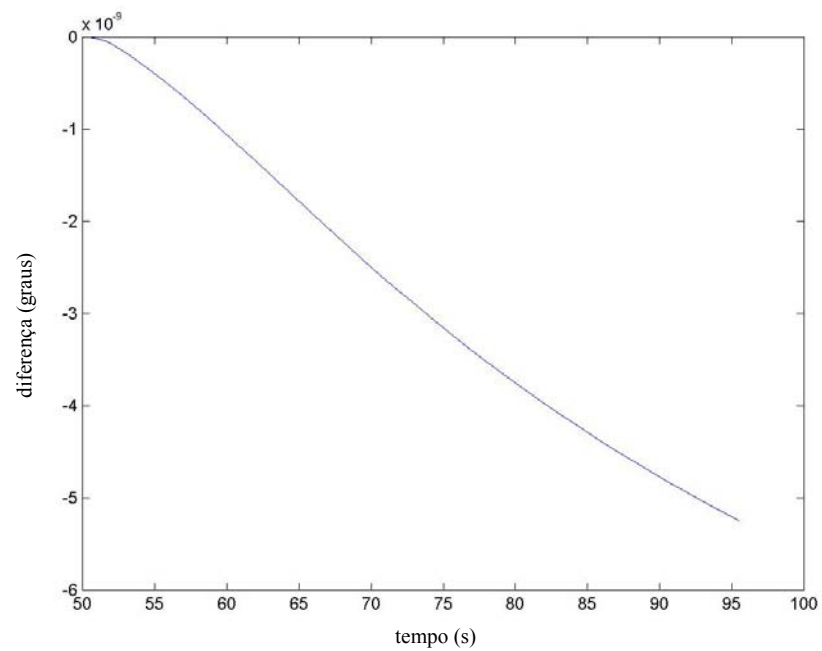


FIGURA 4.13 – DIFERENÇA INCLINAÇÃO – REAQUECIMENTO



A diferença entre a inclinação da órbita perturbada e não perturbada do satélite SVN 15 durante o “resfriamento” e o “reaquecimento” está representada nas figuras 4.12 e 4.13.

FIGURA 4.14 – DIFERENÇA ASCENÇÃO RETA DO NODO ASCENDENTE – RESFRIAMENTO

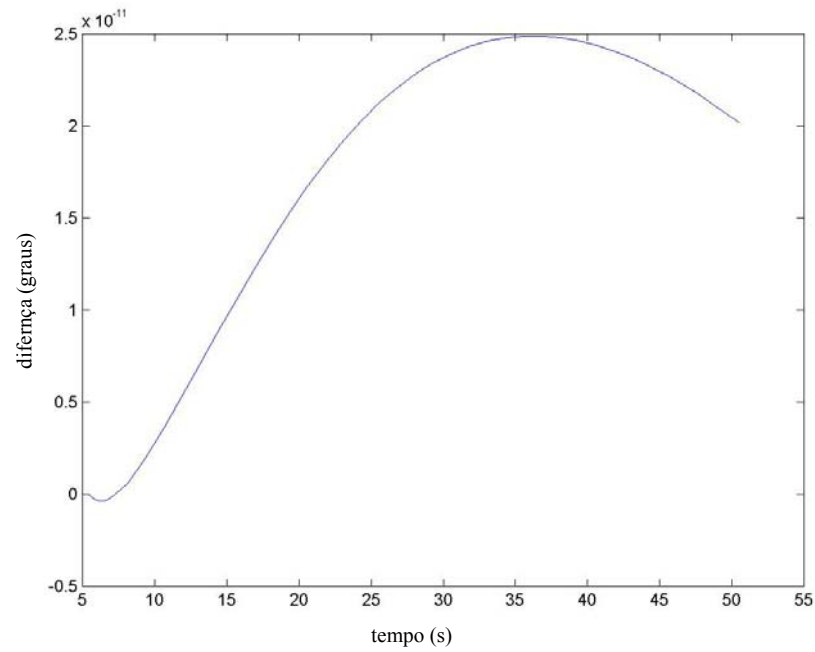
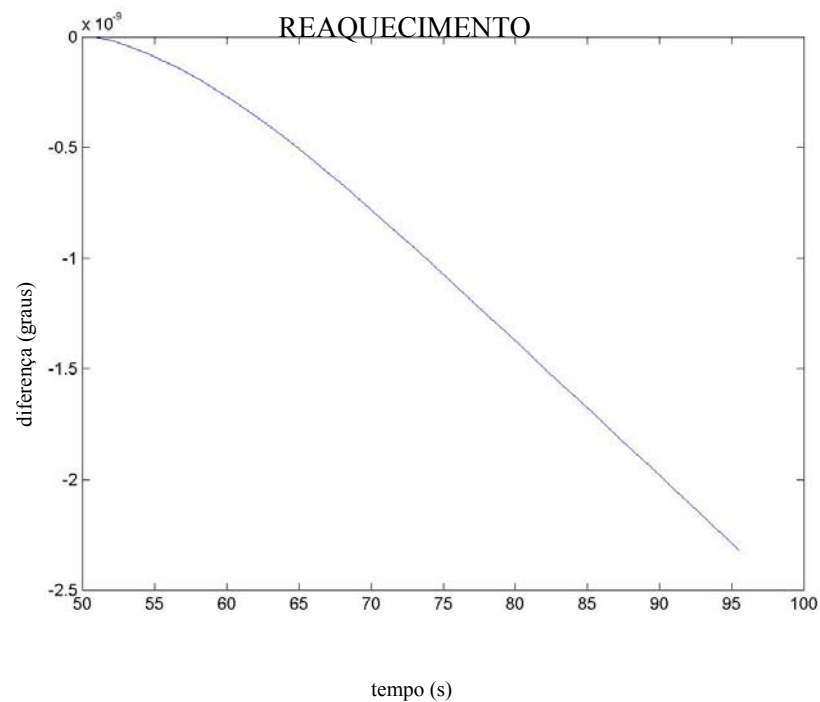


FIGURA 4.15 – DIFERENÇA ASCENÇÃO RETA DO NODO ASCENDENTE –



As figuras 4.14 e 4.15 mostram o comportamento da diferença entre a ascensão reta do nodo ascendente perturbada e não perturbada para o satélite SVN 15.



FIGURA 4.16 – DIFERENÇA ARGUMENTO DO PERIGEU – RESFRIAMENTO

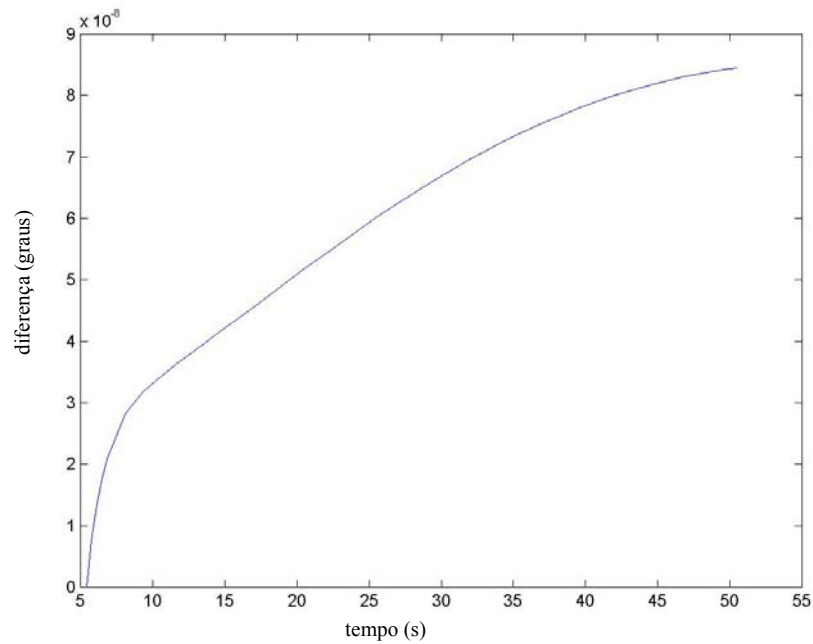
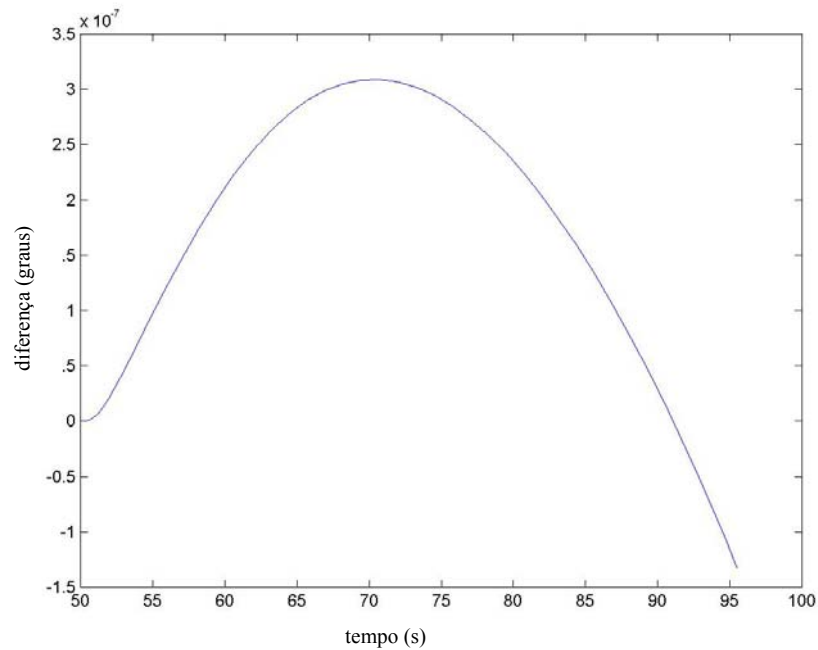


FIGURA 4.17 – DIFERENÇA ARGUMENTO DO PERIGEU – REAQUECIMENTO



As diferenças entre o argumento do perigeu perturbado e não perturbado para os períodos de “resfriamento” e “reaquecimento” do satélite SVN 15 são representadas pelas figuras 4.16 e 4.17 respectivamente.

FIGURA 4.18 – DIFERENÇA ANOMALIA MÉDIA – RESFRIAMENTO

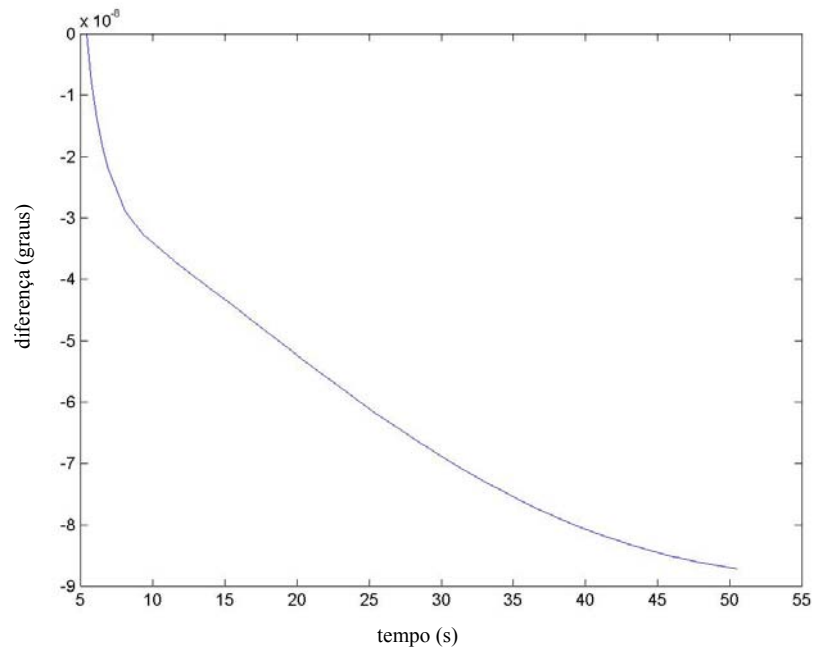
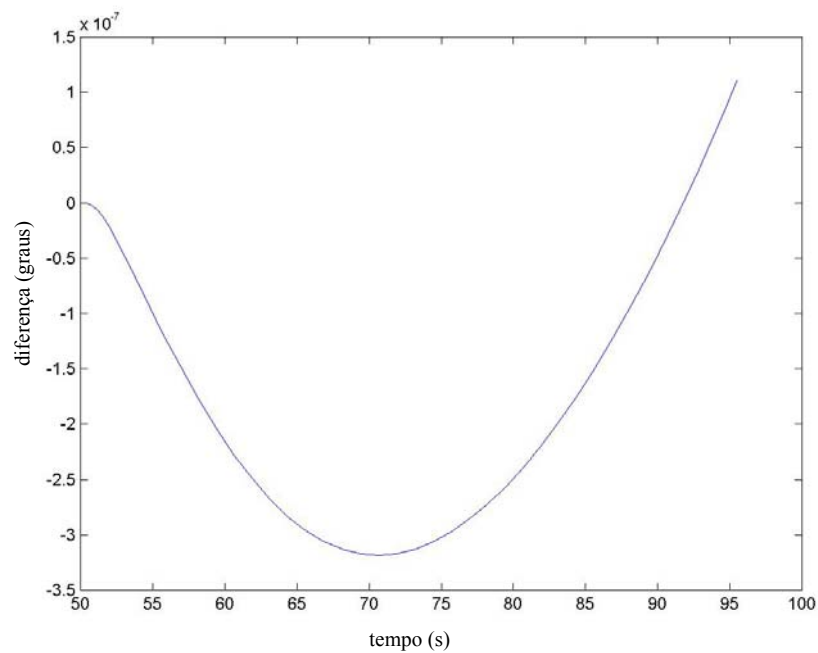


FIGURA 4.19 – DIFERENÇA ANOMALIA MÉDIA – REAQUECIMENTO



As figuras 4.18 e 4.19 apresentam a diferença entre a anomalia média para a órbita perturbada e não perturbada do satélite em questão nos períodos de sombra e saída da sombra.

Nos apêndices de 1 a 6 constam tabelas que mostram as diferenças, obtidas a cada passo de integração, entre os elementos orbitais perturbados e não perturbados para os períodos de “resfriamento” e “reaquecimento”.

## 5.0 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Torna-se visível, através das figuras 4.2 a 4.5, o efeito provocado pela existência do tempo de relaxação característico para o satélite GPS. Percebe-se que o módulo da aceleração perturbadora, figuras 4.3 e 4.7, chega a zero rapidamente no caso dos painéis, enquanto que para o corpo-GPS, figuras 4.2 e 4.6, este valor, apesar de sofrer um decaimento, não chega a anular-se no intervalo de passagem pela sombra. Portanto, é pertinente uma comparação entre os tempos de relaxação para o corpo e painéis com o tempo de permanência do satélite na sombra. Em VIGUE, SCHUTZ e ABUSALI (1994) consta que o intervalo de tempo gasto pelo satélite GPS é de aproximadamente 3200 s (53 minutos), para o SVN 15, chegou-se a um valor de 2702,66 s, o que dá em torno de 45 minutos de travessia da sombra. Para os tempos de relaxação tem-se aproximadamente 92,44 minutos para o corpo e 0,25 s para os painéis, que atingem o equilíbrio térmico instantaneamente após entrarem na região de sombra.

Os efeitos da aceleração sobre o satélite podem ser verificados em seus elementos orbitais nos gráficos das figuras 4.8 a 4.19. Através deles torna-se possível a avaliação da ordem de grandeza da diferença entre os elementos orbitais perturbados e não perturbados.

Chama-se a atenção, portanto, para as figuras 4.8, 4.9, referentes à diferença existente entre o semi-eixo maior perturbado e não perturbado da órbita do satélite GPS durante o período de sombra e saída da sombra. Na figura 4.8 a diferença entre o comportamento do semi-eixo maior perturbado e o do semi-eixo maior não perturbado é da ordem de  $10^{-6}$  m. No caso da figura 4.9, o desvio entre as curvas atinge um valor maior período de “reaquecimento” e atinge a ordem de  $10^{-3}$  m.

Em todo caso, deve-se enfatizar que, em vista do comportamento dos demais elementos orbitais, o que mais é afetado é o semi-eixo maior da órbita, seja durante o período de “resfriamento” quanto no período de “reaquecimento”. Haja visto que, depois do semi-eixo maior, os elementos que mais demonstram-se afetados pela força

de re-emissão térmica na sombra e na saída dela são o argumento do perigeu e a anomalia média com desvios máximos da ordem de  $10^{-7}$ .

Em AFONSO et. al. (1989) e em DUHA (2000) verifica-se que o elemento orbital mais afetado em virtude da re-emissão térmica é o semi-eixo maior. Para o satélite LAGEOS, em AFONSO et. al. (1989), que leva em conta a passagem do satélite pela sombra, a força perturbadora promove um desvio da ordem de 1 cm/dia sobre o semi-eixo maior do satélite.

No caso da travessia do satélite GPS pela sombra da Terra constata-se, novamente utilizando as figuras 4.8 e 4.9, em um dia (2 passagens pela sombra) o acúmulo de desvio é da ordem de  $10^{-6}$  m ( $\mu\text{m}$ ), para o intervalo referente à sombra, “resfriamento”, e da ordem de  $10^{-3}$  m (milímetro) para o “reaquecimento”.

Os apêndices de 1 a 6 trazem tabelas que mostram a diferença entre os elementos orbitais, perturbados e não perturbados, correspondente a cada passo de integração tanto para o “resfriamento” quanto para o “reaquecimento”.

## 6.0 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Objetivando uma modelagem para a força de re-emissão térmica atuante sobre o satélite GPS (bloco II/IIA) durante sua permanência e saída da sombra da Terra, o trabalho proposto associou o Modelo I, que propõe um comportamento exponencial à força térmica durante a entrada e a saída da sombra, ao Modelo II, que modela a força térmica para o satélite GPS considerando a geometria plano-cilíndrica.

Parâmetros como o tempo de permanência na sombra e o tempo de relaxação tanto para o corpo como para os painéis mostraram-se de grande importância na avaliação do comportamento da aceleração perturbadora durante a entrada e a saída da sombra. Enquanto o módulo da aceleração sobre os painéis anula-se instantaneamente na entrada da sombra, já que o tempo de relaxação é menor do que 1 s ( $\tau_P = 0,25$  s), sobre o corpo o módulo da aceleração atinge, no final da passagem pela sombra, aproximadamente a metade do valor do início da travessia. Tal comportamento para o corpo é atribuído ao fato do tempo de permanência na sombra ( $T_E \cong 45$  min.) ser menor do que o tempo de relaxação para o corpo ( $\tau_C \cong 92,44$  min.).

A ação da força perturbadora provocou mudança no comportamento dos elementos orbitais e seu efeito sobre eles pôde ser avaliado. Verificou-se que todos os parâmetros considerados apresentaram perturbações nos períodos denominados de “resfriamento” e de “reaquecimento”. Porém o comportamento a ser destacado é o registrado pelo semi-eixo maior da órbita atingindo desvios da ordem micrometro para durante o resfriamento e comparáveis ao décimo de milímetro durante o reaquecimento.

Comenta-se também que os desvios podem ser considerados pequenos, porém existem e não seria recomendável desprezá-los, especialmente quando os desvios referem-se aos do semi-eixo maior da órbita do satélite GPS.

Modelos mais completos para avaliar o efeito da força térmica sobre o satélite durante a passagem pela sombra podem contribuir com resultados mais precisos a medida que se torna apreciável levar em conta situações contendo: a abordagem de uma geometria cônica para a sombra, análise aprofundada sobre o período de transição

entre a sombra e a região iluminada, consideração sobre a radiação emitida pela Terra e discussão sobre os métodos computacionais utilizados bem como o seu comportamento nos limites da sombra.

## 7.0 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AFONSO, G.B.; BARLIER, F.; CARPINO, M.; FARINELLA, P.; MIGNARD, F.; MILANI, A.; NOBILI, A.M. (1989). Orbital effects of LAGEOS seasons and eclipses. **Annalae Geophysicae**, v. 7, p. 501-514.

BUTKOV, E. (1978). **Física Matemática**. Guanabara Dois: Rio de Janeiro.

DUHA, J. (1996). **Modelagem e aplicações do efeito inverno-verão**. Curitiba. 80 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

DUHA, J. (2000). **Modelagem dos efeitos de re-emissão térmica em satélites artificiais: LAGEOS e GPS**. Curitiba. 146 f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná.

DUHA, J.; AFONSO, G. B.; FERREIRA, L. D. D. (2001). Thermal re-emission effects on the LAGEOS I satellite versus spin axis orientation. **Brazilian Journal of Geophysics**, v. 19(2), p. 185-198.

FERREIRA, L. D. D. (1998). **Dinâmica Orbital**. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná. Curitiba.

FLIEGEL, H. F.; GALLINI, T. E. (1996). Solar Force Modeling of Block IIR Global Positioning System Satellites. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 33, No. 6, p. 863-866.

GEMAEL, C.; ANDRADE, J. B. de. (2004). **Geodésia Celeste**. Curitiba: UFPR.

MONTENBRUCK, O.; GILL, E. (2000). **Satellite Orbits – Models, Methods, Applications**. Germany: Springer.

PETERSON, C. (1976). A Source Mechanism for Meteorites Controlled by the Yarkovsky Effect, **Icarus**, v. 29, p. 91-111.

SEEBER, G. (1993). **Satellite Geodesy: foundations, methods and applications**. Hannover: W. de Gruyter.

SEEBER, G. (2003). **Satellite Geodesy: foundations, methods and applications**. Hannover: W. de Gruyter.

VIGUE, Y.; SCHUTZ, B. E.; ABUSALI, P. A. M. (1994). Thermal Force Modeling for Global System Satellites Using the Finite Element Method. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 31, No. 5, p. 855-859.

VILHENA DE MORAES, R. (1994). Non-gravitational disturbing Forces, **Adv. Space Res.**, 14, (5)45-(5)68.



## APÊNDICES

APÊNDICE 1 – DIFERENÇAS ENTRE SEMI-EIXO MAIOR PERTURBADO E NÃO PERTURBADO.....	60
APÊNDICE 2 – DIFERENÇAS ENTRE EXCENTRICIDADE PERTURBADA E NÃO PERTURBADA.....	61
APÊNDICE 3 – DIFERENÇAS ENTRE INCLINAÇÃO PERTURBADA E NÃO PERTURBADA.....	62
APÊNDICE 4 – DIFERENÇAS ENTRE A. R. N. A. PERTURBADA E NÃO PERTURBADA.....	63
APÊNDICE 5 – DIFERENÇAS ENTRE ARGUMENTO DO PERIGEU PERTURBADO E NÃO PERTURBADO.....	64
APÊNDICE 6 – DIFERENÇAS ENTRE ANOMALIA MÉDIA PERTURBADA E NÃO PERTURBADA.....	65

APÊNDICE – 1 DIFERENÇAS ENTRE SEMI-EIXO MAIOR PERTURBADO E  
NÃO PERTURBADO

tempo (s) * e+003	diferença (m) resfriamento	tempo (s) * e+003	diferença (m) reaquecimento
0.3245	0	3.0271	0
0.3466	-1.348555088043213e-006	3.0492	-3.393739461898804e-006
0.3686	-2.097338438034058e-006	3.0713	-1.149252057075501e-005
0.3907	-2.451241016387940e-006	3.0934	-2.290681004524231e-005
0.4128	-2.477318048477173e-006	3.1155	-3.646686673164368e-005
0.4878	-1.419335603713989e-006	3.1905	-8.949264883995056e-005
0.5628	5.625188350677490e-007	3.2655	-1.442506909370422e-004
0.6378	2.443790435791016e-006	3.3405	-1.933537423610687e-004
0.7128	3.699213266372681e-006	3.4155	-2.332776784896851e-004
0.7878	4.582107067108154e-006	3.4905	-2.632290124893189e-004
0.8628	4.950910806655884e-006	3.5655	-2.819225192070007e-004
0.9378	4.898756742477417e-006	3.6405	-2.884604036808014e-004
1.0128	4.455447196960449e-006	3.7155	-2.822764217853546e-004
1.0878	3.665685653686523e-006	3.7905	-2.629756927490234e-004
1.1628	2.622604370117188e-006	3.8655	-2.304427325725555e-004
1.2378	1.367181539535523e-006	3.9405	-1.847259700298309e-004
1.3128	-1.862645149230957e-008	4.0155	-1.260973513126373e-004
1.3878	-1.490116119384766e-006	4.0905	-5.496665835380554e-005
1.4628	-3.006309270858765e-006	4.1655	2.816319465637207e-005
1.5378	-4.500150680541992e-006	4.2405	1.227147877216339e-004
1.6128	-5.938112735748291e-006	4.3155	2.280622720718384e-004
1.6878	-7.290393114089966e-006	4.3905	3.435686230659485e-004
1.7628	-8.527189493179321e-006	4.4655	4.686638712882996e-004
1.8378	-9.618699550628662e-006	4.5405	6.027184426784515e-004
1.9128	-1.054629683494568e-005	4.6155	7.451809942722321e-004
1.9878	-1.131370663642883e-005	4.6905	8.955821394920349e-004
2.0628	-1.187995076179504e-005	4.7655	1.053430140018463e-003
2.1378	-1.225993037223816e-005	4.8405	1.218307763338089e-003
2.2128	-1.244619488716126e-005	4.9155	1.389820128679276e-003
2.2878	-1.240894198417664e-005	4.9905	1.567628234624863e-003
2.3628	-1.218169927597046e-005	5.0655	1.751415431499481e-003
2.4378	-1.174956560134888e-005	5.1405	1.940891146659851e-003
2.5128	-1.110509037971497e-005	5.2155	2.135779708623886e-003
2.5878	-1.026690006256104e-005	5.2905	2.335883677005768e-003
2.6628	-9.216368198394775e-006	5.3655	2.540972083806992e-003
2.7378	-7.972121238708496e-006	5.4405	2.750858664512634e-003
2.8128	-6.511807441711426e-006	5.5155	2.965379506349564e-003
2.8664	-5.353242158889771e-006	5.5691	3.121364861726761e-003
2.9200	-4.108995199203491e-006	5.6226	3.279563039541245e-003
2.9736	-2.764165401458740e-006	5.6762	3.439936786890030e-003
3.0271	-1.296401023864746e-006	5.7298	3.602437674999237e-003

APÊNDICE 2 – DIFERENÇAS ENTRE EXCENTRICIDADE PERTURBADA E  
NÃO PERTURBADA

tempo (s) * e+003	diferença resfriamento	tempo (s) * e+003	diferença reaquecimento
0.3245	0	3.0271	0
0.3466	-1.213409581146685e-012	3.0492	-1.554017331484303e-013
0.3686	-2.146435806871239e-012	3.0713	-4.585793550448969e-013
0.3907	-2.872748913751444e-012	3.0934	-8.759642317057725e-013
0.4128	-3.447932911404550e-012	3.1155	-1.384546990945701e-012
0.4878	-4.745153922569578e-012	3.1905	-3.578146459681797e-012
0.5628	-5.498480143417694e-012	3.2655	-6.279678166354330e-012
0.6378	-6.060226973025884e-012	3.3405	-9.333882625139900e-012
0.7128	-6.569514029997059e-012	3.4155	-1.268817863275817e-011
0.7878	-7.033870014216959e-012	3.4905	-1.635263972843415e-011
0.8628	-7.476083987989490e-012	3.5655	-2.032940482621370e-011
0.9378	-7.903724549840341e-012	3.6405	-2.462517516288454e-011
1.0128	-8.320512681625480e-012	3.7155	-2.924274017379602e-011
1.0878	-8.727291458954234e-012	3.7905	-3.418121168052846e-011
1.1628	-9.127141750719936e-012	3.8655	-3.943325527222541e-011
1.2378	-9.520620403158375e-012	3.9405	-4.498645726769279e-011
1.3128	-9.909991230405701e-012	4.0155	-5.082503862219312e-011
1.3878	-1.029608516500691e-011	4.0905	-5.692940216461828e-011
1.4628	-1.067971405754875e-011	4.1655	-6.327838253383789e-011
1.5378	-1.106222578817206e-011	4.2405	-6.984967292067434e-011
1.6128	-1.144421016285868e-011	4.3155	-7.662072712411039e-011
1.6878	-1.182626913065477e-011	4.3905	-8.356873006098997e-011
1.7628	-1.220878606544851e-011	4.4655	-9.067325015821304e-011
1.8378	-1.259206974801863e-011	4.5405	-9.791312031992572e-011
1.9128	-1.297642722442038e-011	4.6155	-1.052695673686710e-010
1.9878	-1.336135715956921e-011	4.6905	-1.127251902932613e-010
2.0628	-1.374782059027080e-011	4.7655	-1.202633409524978e-010
2.1378	-1.413499699232101e-011	4.8405	-1.278686375533189e-010
2.2128	-1.452294708104152e-011	4.9155	-1.355275423137181e-010
2.2878	-1.491166218281492e-011	4.9905	-1.432264411238560e-010
2.3628	-1.530066524868534e-011	5.0655	-1.509535170474141e-010
2.4378	-1.568987648137288e-011	5.1405	-1.586976314249533e-010
2.5128	-1.607941904624433e-011	5.2155	-1.664478867235975e-010
2.5878	-1.646835098845223e-011	5.2905	-1.741949327838110e-010
2.6628	-1.685706088605521e-011	5.3655	-1.819292268917527e-010
2.7378	-1.724506648592694e-011	5.4405	-1.896424076802683e-010
2.8128	-1.763213533512165e-011	5.5155	-1.973258847987047e-010
2.8664	-1.790784708022297e-011	5.5691	-2.027924234787593e-010
2.9200	-1.818262380937075e-011	5.6226	-2.082368426997716e-010
2.9736	-1.845658001431438e-011	5.6762	-2.136568144628370e-010
3.0271	-1.873005570085518e-011	5.7298	-2.190499188287065e-010

APÊNDICE 3 – DIFERENÇAS ENTRE INCLINAÇÃO PERTURBADA E NÃO  
PERTURBADA

tempo (s) * e+003	diferença (graus) resfriamento	tempo (s) * e+003	diferença (graus) reaquecimento
0.3245	0	3.0271	0
0.3466	-1.335820343228988e-012	3.0492	-5.954348125669640e-012
0.3686	-1.911359959194670e-012	3.0713	-2.080469130305573e-011
0.3907	-1.882938249764266e-012	3.0934	-4.243361217959318e-011
0.4128	-1.385558334732195e-012	3.1155	-6.927081130925217e-011
0.4878	2.607691840239568e-012	3.1905	-1.852740183494461e-010
0.5628	8.597567102697212e-012	3.2655	-3.252580427215435e-010
0.6378	1.519850911790854e-011	3.3405	-4.779607820637466e-010
0.7128	2.177813485104707e-011	3.4155	-6.384226480804500e-010
0.7878	2.823696831910638e-011	3.4905	-8.056062483774440e-010
0.8628	3.434763584664324e-011	3.5655	-9.780478649190627e-010
0.9378	4.011013743365766e-011	3.6405	-1.154511153345084e-009
1.0128	4.543920795185841e-011	3.7155	-1.333951615833939e-009
1.0878	5.032774197388790e-011	3.7905	-1.515246594863129e-009
1.1628	5.476152864503092e-011	3.8655	-1.697287643764867e-009
1.2378	5.875477882000268e-011	3.9405	-1.879072897281731e-009
1.3128	6.229328164408798e-011	4.0155	-2.059678649857233e-009
1.3878	6.539835339935962e-011	4.0905	-2.238294882772607e-009
1.4628	6.811262664996320e-011	4.1655	-2.414289212993026e-009
1.5378	7.042189054118353e-011	4.2405	-2.587107417184598e-009
1.6128	7.237588306452381e-011	4.3155	-2.756387118552084e-009
1.6878	7.401013135677204e-011	4.3905	-2.921858310855896e-009
1.7628	7.531042456321302e-011	4.4655	-3.083343358412094e-009
1.8378	7.636202781213797e-011	4.5405	-3.240735679810314e-009
1.9128	7.715783567618928e-011	4.6155	-3.394035275050555e-009
1.9878	7.769784815536696e-011	4.6905	-3.543242144132819e-009
2.0628	7.805311952324701e-011	4.7655	-3.688434446758038e-009
2.1378	7.820943892511423e-011	4.8405	-3.829718764336576e-009
2.2128	7.820233349775663e-011	4.9155	-3.967144834859937e-009
2.2878	7.804601409588940e-011	4.9905	-4.100883188584703e-009
2.3628	7.776890242894297e-011	5.0655	-4.231033301493881e-009
2.4378	7.735678764220211e-011	5.1405	-4.357730176707264e-009
2.5128	7.685230229981244e-011	5.2155	-4.481101711917290e-009
2.5878	7.622702469234355e-011	5.2905	-4.601261593961681e-009
2.6628	7.552358738394105e-011	5.3655	-4.718351931387588e-009
2.7378	7.477041208403534e-011	5.4405	-4.832486411032733e-009
2.8128	7.393907708319603e-011	5.5155	-4.943771614307480e-009
2.8664	7.329958862101194e-011	5.5691	-5.021583149300568e-009
2.9200	7.263878387675504e-011	5.6226	-5.098037547668355e-009
2.9736	7.194955742306775e-011	5.6762	-5.173191652829701e-009
3.0271	7.126033096938045e-011	5.7298	-5.247038359357248e-009

APÊNDICE 4 – DIFERENÇAS ENTRE A. R. N. A. PERTURBADA E NÃO  
PERTURBADA

tempo (s) * e+003	diferença (graus) resfriamento	tempo (s) * e+003	diferença (graus) reaquecimento
0.3245	0	3.0271	0
0.3466	-2.557953848736361e-013	3.0492	-1.172395514004165e-012
0.3686	-3.765876499528531e-013	3.0713	-4.142464149481384e-012
0.3907	-3.836930773104541e-013	3.0934	-8.562039965909207e-012
0.4128	-2.629008122312371e-013	3.1155	-1.413980044162599e-011
0.4878	5.897504706808832e-013	3.1905	-3.932143499696394e-011
0.5628	1.982414232770680e-012	3.2655	-7.161560233726050e-011
0.6378	3.609557097661309e-012	3.3405	-1.089119905373082e-010
0.7128	5.314859663485549e-012	3.4155	-1.502797886132612e-010
0.7878	7.055689366097795e-012	3.4905	-1.957332074198348e-010
0.8628	8.803624496067641e-012	3.5655	-2.449880298627249e-010
0.9378	1.053734877132229e-011	3.6405	-2.978666202579916e-010
1.0128	1.220001877300092e-011	3.7155	-3.541487103575491e-010
1.0878	1.379163450110355e-011	3.7905	-4.135856102038815e-010
1.1628	1.531219595563016e-011	3.8655	-4.758291538564663e-010
1.2378	1.674749228186556e-011	3.9405	-5.405880187936418e-010
1.3128	1.806199634302175e-011	4.0155	-6.075353553569585e-010
1.3878	1.925570813909872e-011	4.0905	-6.763229976058938e-010
1.4628	2.032152224273887e-011	4.1655	-7.466738338735013e-010
1.5378	2.130207121808780e-011	4.2405	-8.182823307834042e-010
1.6128	2.213340621892712e-011	4.3155	-8.909424309422320e-010
1.6878	2.285815980940242e-011	4.3905	-9.644409715292568e-010
1.7628	2.346922656215611e-011	4.4655	-1.038571895151108e-009
1.8378	2.394529019511538e-011	4.5405	-1.113242831252137e-009
1.9128	2.433608869978343e-011	4.6155	-1.188276144148404e-009
1.9878	2.462741122144507e-011	4.6905	-1.263650517557835e-009
2.0628	2.479083605066990e-011	4.7655	-1.339252264642710e-009
2.1378	2.489031203367631e-011	4.8405	-1.415017436556809e-009
2.2128	2.488320660631871e-011	4.9155	-1.490910506163345e-009
2.2878	2.479083605066990e-011	4.9905	-1.566910157180246e-009
2.3628	2.462741122144507e-011	5.0655	-1.642973757043365e-009
2.4378	2.437161583657144e-011	5.1405	-1.719094200325344e-009
2.5128	2.405187160547939e-011	5.2155	-1.795264381598827e-009
2.5878	2.366817852816894e-011	5.2905	-1.871455879154382e-009
2.6628	2.321343117728247e-011	5.3655	-1.947697114701441e-009
2.7378	2.268762955282000e-011	5.4405	-2.023952561103215e-009
2.8128	2.212630079156952e-011	5.5155	-2.100229323787062e-009
2.8664	2.168576429539826e-011	5.5691	-2.154749267901934e-009
2.9200	2.120259523508139e-011	5.6226	-2.209283422871522e-009
2.9736	2.070521532004932e-011	5.6762	-2.263824683268467e-009
3.0271	2.018651912294445e-011	5.7298	-2.318394365374843e-009

APÊNDICE 5 – DIFERENÇAS ENTRE ARGUMENTO DO PERIGEU  
PERTURBADO E NÃO PERTURBADO

tempo (s) * e+003	diferença (graus) resfriamento	tempo (s) * e+003	diferença (graus) reaquecimento
0.3245	0	3.0271	0
0.3466	7.654932687728433e-009	3.0492	2.032123802564456e-009
0.3686	1.341092570328328e-008	3.0713	6.467899993367610e-009
0.3907	1.778528258000733e-008	3.0934	1.262651494471356e-008
0.4128	2.114876451742020e-008	3.1155	1.999185883505561e-008
0.4878	2.826749323503464e-008	3.1905	4.968180178366310e-008
0.5628	3.187599872944702e-008	3.2655	8.234130177697807e-008
0.6378	3.437696705077542e-008	3.3405	1.146609918123431e-007
0.7128	3.671823378681438e-008	3.4155	1.452146420888312e-007
0.7878	3.889059030370845e-008	3.4905	1.738027037845313e-007
0.8628	4.104995809939283e-008	3.5655	2.000294898607535e-007
0.9378	4.321753976910259e-008	3.6405	2.236675697986357e-007
1.0128	4.540191866908572e-008	3.7155	2.445545703722019e-007
1.0878	4.759397143061506e-008	3.7905	2.625743036333006e-007
1.1628	4.978193146598642e-008	3.8655	2.776609449028911e-007
1.2378	5.195769858801214e-008	3.9405	2.897789670441853e-007
1.3128	5.411149572864815e-008	4.0155	2.989393408370233e-007
1.3878	5.623098786600167e-008	4.0905	3.051797250464006e-007
1.4628	5.830963800690370e-008	4.1655	3.085629884935770e-007
1.5378	6.033727117937815e-008	4.2405	3.091661255893996e-007
1.6128	6.230683879948629e-008	4.3155	3.070798584303702e-007
1.6878	6.421092280106677e-008	4.3905	3.024008492502617e-007
1.7628	6.604545887967106e-008	4.4655	2.952198201455758e-007
1.8378	6.780533112760168e-008	4.5405	2.856364460512850e-007
1.9128	6.948641839699121e-008	4.6155	2.737397721830348e-007
1.9878	7.108786803655676e-008	4.6905	2.596104877738981e-007
2.0628	7.260541678988375e-008	4.7655	2.433290831049817e-007
2.1378	7.403733093269693e-008	4.8405	2.249693693556765e-007
2.2128	7.538562840636587e-008	4.9155	2.045993596766493e-007
2.2878	7.664465329071390e-008	4.9905	1.822775175241986e-007
2.3628	7.781949307172908e-008	5.0655	1.580644095611206e-007
2.4378	7.890628239692887e-008	5.1405	1.320086937539600e-007
2.5128	7.990786343725631e-008	5.2155	1.041637744947366e-007
2.5878	8.082338354142848e-008	5.2905	7.456685580109479e-008
2.6628	8.165375220414717e-008	5.3655	4.326403768573073e-008
2.7378	8.239823046096717e-008	5.4405	1.028931251312315e-008
2.8128	8.305838150590716e-008	5.5155	-2.431983148198924e-008
2.8664	8.347976176992233e-008	5.5691	-5.002539182896726e-008
2.9200	8.386143690586323e-008	5.6226	-7.653369493709761e-008
2.9736	8.420093422500941e-008	5.6762	-1.038372090533812e-007
3.0271	8.449654842479504e-008	5.7298	-1.319242528552422e-007

APÊNDICE 6 – DIFERENÇAS ENTRE ANOMALIA MÉDIA PERTURBADA E  
NÃO PERTURBADA

tempo (s) * e+003	diferença (graus) resfriamento	tempo (s) * e+003	diferença (graus) reaquecimento
0.3245	0	3.0271	0
0.3466	-7.854026762288413e-009	3.0492	-2.071431026706705e-009
0.3686	-1.376031377731124e-008	3.0713	-6.586219569726382e-009
0.3907	-1.824963646868127e-008	3.0934	-1.285502548853401e-008
0.4128	-2.170415314139973e-008	3.1155	-2.035278612311231e-008
0.4878	-2.902172013818927e-008	3.1905	-5.058220153841830e-008
0.5628	-3.273996185271244e-008	3.2655	-8.385364935747930e-008
0.6378	-3.532156256369490e-008	3.3405	-1.168043581856182e-007
0.7128	-3.773521939365310e-008	3.4155	-1.479866398312879e-007
0.7878	-3.997590170001786e-008	3.4905	-1.772014854850568e-007
0.8628	-4.220052574055444e-008	3.5655	-2.040499964550691e-007
0.9378	-4.443279522092780e-008	3.6405	-2.283058222474210e-007
1.0128	-4.668007136388042e-008	3.7155	-2.498052538157936e-007
1.0878	-4.893593086308101e-008	3.7905	-2.684321032120351e-007
1.1628	-5.118562285133521e-008	3.8655	-2.841211426130030e-007
1.2378	-5.342329245650035e-008	3.9405	-2.968404260172974e-007
1.3128	-5.563674676523078e-008	4.0155	-3.065969735871477e-007
1.3878	-5.781600975751644e-008	4.0905	-3.134337305255031e-007
1.4628	-5.995272545078478e-008	4.1655	-3.174098424096883e-007
1.5378	-6.203944735716505e-008	4.2405	-3.186045205438859e-007
1.6128	-6.406500574485108e-008	4.3155	-3.171087712416920e-007
1.6878	-6.602536473110376e-008	4.3905	-3.130204220269661e-007
1.7628	-6.791549367335392e-008	4.4655	-3.064298255139875e-007
1.8378	-6.972973665142490e-008	4.5405	-2.974367419028567e-007
1.9128	-7.146300617932866e-008	4.6155	-2.861301879875100e-007
1.9878	-7.311990657399292e-008	4.6905	-2.725938941239292e-007
2.0628	-7.468773333130230e-008	4.7655	-2.569038883848407e-007
2.1378	-7.617151709382597e-008	4.8405	-2.391383873145969e-007
2.2128	-7.756992204122071e-008	4.9155	-2.193621924106992e-007
2.2878	-7.887817332630220e-008	4.9905	-1.976373482648342e-007
2.3628	-8.010249530343572e-008	5.0655	-1.740218920076586e-007
2.4378	-8.123802786030865e-008	5.1405	-1.485657321609324e-007
2.5128	-8.228661840803397e-008	5.2155	-1.213230689245393e-007
2.5878	-8.324991540575866e-008	5.2905	-9.232894626620691e-008
2.6628	-8.412601459895086e-008	5.3655	-6.163247689983109e-008
2.7378	-8.491670655530470e-008	5.4405	-2.926523734458897e-008
2.8128	-8.562105335840897e-008	5.5155	4.733834657599800e-009
2.8664	-8.607477752775594e-008	5.5691	3.000243964379479e-008
2.9200	-8.648783023090800e-008	5.6226	5.607185471490084e-008
2.9736	-8.685969987709541e-008	5.6762	8.293633868561301e-008
3.0271	-8.718393473827746e-008	5.7298	1.105826470393367e-007