

RUDINEI CELSO DE SOUZA JANTSCH

MODELOS COSMOLÓGICOS PARA O UNIVERSO ATUAL E PRIMORDIAL

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação
em Física do Setor de Ciências Exatas da Uni-
versidade Federal do Paraná, como requisito
parcial para a obtenção do grau de Doutor em
Física

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Medeiros
Kremer

CURITIBA

2012

Resumo

Neste trabalho, investigamos modelos cosmológicos gerais em que os campos de energia e matéria escuras são analisados em um âmbito mais fundamental. A Teoria da Relatividade Geral e as teorias de gravitação generalizadas são consideradas. Estudamos interações no setor escuro e entre o setor escuro e o campo gravitacional, analisando a sua viabilidade. Nos primeiros três modelos estudados, as possíveis formas para as funções indefinidas nas ações gerais são determinadas a partir da técnica da simetria de Noether. Usando as propriedades de simetria, resolvemos as equações de campo e os cenários resultantes são analisados pelo confronto das curvas teóricas com os dados da astronomia observacional. No quarto modelo, estudamos as generalizações geométricas da Relatividade Geral, cuja aplicação se dá à investigação dos campos de matéria e energia escuras como sendo efeitos geométricos efetivos. Tentativas de solução das equações de campo generalizadas são feitas para correções de primeira ordem com relação à gravitação einsteiniana. A última investigação deste trabalho versa sobre perturbações cosmológicas no Universo primordial. O modelo inflacionário considerado é do tipo lei de potência, cujo inflaton é um campo escalar não canônico. Seus respectivos espectros de potência são calculados para a verificação de sua viabilidade.

Abstract

In this work, we investigate general cosmological models in which the dark matter and energy fields are analyzed in a more fundamental scope. The General Theory of Relativity and generalized gravitational theories are considered. We study the interactions in the dark sector and between it and the gravitational field, analyzing their viability. In the first three models, the possible forms for the undefined functions in the general actions are determined from the Noether symmetry technique. Using the symmetry properties, we solve the field equations and the resulting scenarios are analyzed through the comparison of the theoretical curves with the data from the observational astronomy. In the fourth model, we study the geometrical generalizations of the General Relativity, whose application is to investigate the dark matter and energy fields as being effective geometrical effects. Attempts for solutions of the generalized field equations are done to first order corrections with respect to the Einsteinian gravitation. The last investigation of this work runs upon cosmological perturbations in the primordial Universe. The considered inflationary model is the power-law-type one, whose inflaton is a non-canonical scalar field. Its respective power spectrums are calculated for the verification of its viability.

Agradecimentos

A todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização deste trabalho.

O cientista não estuda a natureza por sua utilidade; ele a estuda por prazer, que advém do fato de a natureza ser bela. Se ela não fosse bela, não valeria a pena conhecê-la, se não valesse a pena conhecê-la, não valeria a pena viver.

HENRY POINCARÉ

Sumário

1	Introdução	ix
2	Relatividade Geral	2
2.1	Princípio da equivalência	2
2.2	Dinâmica da partícula em Relatividade Geral	4
2.3	Tensor de curvatura	6
2.4	Tensor energia-momento	8
2.5	Equações de Einstein da gravitação	9
3	Cosmologia	12
3.1	Observações astronômicas e fundamentos da Cosmologia	13
3.2	Métrica de Friedmann-Robertson-Walker	15
3.3	Determinação do tensor de Ricci e do escalar de curvatura	16
3.4	Forma do tensor energia-momento	18
3.5	Equações do Modelo Padrão da Cosmologia	19
3.6	Parâmetros observacionais	22
3.6.1	Distância de luminosidade	23
3.7	Sucessos e problemas do Modelo Padrão	25
3.8	Modelo do Universo inflacionário	26
3.8.1	Acoplamento ao campo gravitacional	30
3.9	Expansão acelerada e energia escura	32
3.9.1	Matéria escura	34

4	Simetria de Noether	36
4.1	Teorema de Noether	36
4.2	Condição de existência para a simetria de Noether	38
4.3	Determinação da lagrangiana pontual e condição de simetria	42
5	Quintessência não minimamente acoplada versus ΛCDM	45
5.1	Equações de campo	46
5.2	Funções de Noether	48
5.3	Análise do sistema dinâmico	49
6	Campos escalares e espinoriais minimamente acoplados	55
6.1	Espinores em espaço-tempos curvos	56
6.2	Ação geral e equações de campo	60
6.3	Seleção dos potenciais	62
6.4	Férmions de Dirac como matéria escura	64
6.5	Integração do sistema	65
6.6	Análise da solução geral	69
7	Campos escalares interagentes não minimamente acoplados	76
7.1	Campos escalares canônicos interagentes	77
7.1.1	Ação geral e equações de campo	77
7.1.2	Potenciais e acoplamentos de Noether	80
7.1.3	Soluções das equações de campo	82
7.2	Campos escalares canônicos e não canônicos interagentes	88
7.2.1	Ação geral e simetria de Noether	88
7.2.2	Equações de campo e trocas de energia	91
7.2.3	Soluções cosmológicas	93

8	Generalizações geométricas da Relatividade Geral	100
8.1	Ação geral e equações de campo	102
8.1.1	Apêndice	109
8.2	Correção de primeira ordem em $f_2(R)$	111
8.3	Correções de primeira ordem em $f_1(R)$ e $f_2(R)$	116
9	Perturbações cosmológicas para inflação taquiônica do tipo lei de potência	121
9.1	Equações de campo perturbadas	123
9.2	Solução do sistema não perturbado	126
9.3	Solução do sistema perturbado	128
9.4	Determinação do espectro das flutuações	131
9.4.1	Quantização das perturbações	132
9.4.2	Cálculo do espectro de potência	136
9.4.3	Espectro de potência para q não inteiro	138
10	Conclusão	141
10.1	Quintessência não minimamente acoplada versus Λ CDM	141
10.2	Campos escalares e espinoriais minimamente acoplados	142
10.3	Campos escalares interagentes não minimamente acoplados	142
10.4	Generalizações geométricas da Relatividade Geral	143
10.5	Perturbações cosmológicas para inflação taquiônica do tipo lei de potência	144
	Bibliografia	146

Capítulo 1

Introdução

O modelo cosmológico conhecido popularmente como *Big Bang*, baseado na Teoria da Relatividade Geral de Einstein, indubitavelmente teve êxito nas explicações de muitas observações. No entanto, existem alguns fatos observacionais que esse modelo, em sua forma original – chamado de *Modelo Padrão* –, não pode explicar. Naturalmente, isso exige uma reformulação das premissas envolvidas na construção de tal modelo, ou talvez até mesmo correções na própria teoria da Relatividade Geral.

A *cosmologia inflacionária* [1, 2, 3] foi proposta com o intuito de se resolver alguns dos primeiros problemas enfrentados pelo Modelo Padrão, e deu conta de resolver, com algum sucesso, os problemas da *planaridade* do Universo e da homogeneidade da *radiação cósmica de fundo*. Nessa classe de modelo, um campo escalar é o responsável pela fugaz expansão acelerada do Universo primordial, que posteriormente ingressa num período dominado pelo campo de matéria, passando então para uma fase desacelerada.

As recentes observações astronômicas, baseadas em dados das supernovas do tipo Ia, mostram que após a fase desacelerada do Universo, segue uma nova fase acelerada [4, 5], a qual o Modelo Padrão também malogrou em explicar. Os dados observacionais indicam ainda que o valor do *parâmetro de densidade* está muito próximo da unidade. Entretanto, verifica-se que os constituintes

conhecidos do Universo não dão conta desse valor, o que, a princípio, leva-nos a postular a existência de um constituinte ainda desconhecido para a Cosmologia. Inevitavelmente, tal discrepância com as observações torna-se um grande enigma. Desse impasse, concebeu-se a tão famosa e enigmática *energia escura*, a qual deve compor quase 3/4 da densidade de energia do Universo para estar de acordo com as observações. Possivelmente, a energia escura é o constituinte responsável pela expansão acelerada do Universo, o que conecta o problema da aceleração cósmica observada hoje com o problema do parâmetro de densidade.

Reviver o modelo da constante cosmológica foi a primeira possibilidade de explicação para a natureza da energia escura. Infelizmente, tal ideia logo apresentou inconsistências [6] e novos modelos apareceram na literatura, mas até o momento nenhum deles provou ser o modelo definitivo [7]. Dentre esses modelos, o mais conhecido é o modelo da *quintessência*, que consiste num campo escalar *mínima* ou *não minimamente* acoplado à gravidade [8, 9, 10]. Tal campo escalar pode apresentar várias formas aceitáveis para os potenciais, propostos fenomenologicamente ou inspirados por teorias fundamentais [11, 12, 13]. Modelos com campos de férmions [14, 15, 16], táquions [17, 18](k-essência), gás de Chaplygin [19, 20] e gás de van der Waals [21, 22] são também alternativas à constante cosmológica. Essencialmente, todos esses modelos buscam descrever um fluido exótico com pressão negativa que compõe a maior parte do Universo.

As teorias $f(R)$ [23, 24, 25, 26], que consistem na generalização da ação de Einstein-Hilbert, propõem uma explicação de origem geométrica para a expansão acelerada. Dentre essas teorias generalizadas, existem aquelas que levam em conta uma possível propriedade de *torção* do espaço-tempo [27], que também pode contribuir para a expansão acelerada.

Um outro problema relacionado à gravitação, consideravelmente antigo, que surgiu pelo estudo da curva de rotação das galáxias, tem também um papel importante para a Cosmologia. Esse é o problema da matéria faltante [28], a qual é necessária às galáxias e aglomerados de galáxias para explicar corretamente

a dinâmica observada, uma vez que a matéria luminosa não é suficiente para tal. Tendo em vista a causa desse problema, essa matéria faltante leva o nome de matéria escura, a qual deve apresentar somente interação gravitacional ou interações não gravitacionais muito fracas com a matéria luminosa. Até o presente, não se sabe qual é a natureza da matéria escura e a explicação mais aceita é de que a mesma seja composta por partículas ainda desconhecidas.

Algumas teorias propõem explicar a matéria escura como o efeito de uma correção à teoria da gravitação, tanto no contexto newtoniano como no einsteiniano. Nesse escopo, as teorias que estendem as teorias $f(R)$ por meio de uma outra função do escalar de curvatura acoplada à matéria [29] buscam descrever a matéria escura como tendo também uma origem geométrica. Conclusivamente, para a Física contemporânea, a matéria escura continua sendo tão enigmática quanto a energia escura.

Neste trabalho, analisaremos primeiramente três modelos gerais para a descrição do setor escuro. Estudaremos um modelo de quintessência não minimamente acoplada ao campo gravitacional na presença de matéria e radiação, sem nos preocuparmos com a natureza fundamental da matéria escura. Tal modelo será comparado ao modelo da constante cosmológica por meio de soluções explícitas das equações de campo – o objetivo dessa comparação é mostrar de uma forma exata que podem existir equivalências quase que completas entre as dinâmicas cosmológicas de teorias de gravitação fisicamente diferentes. A segunda investigação compreenderá o estudo da energia e da matéria escuras em um nível mais fundamental. Campos escalares e espinoriais minimamente acoplados à gravidade serão considerados neste estudo. Aqui será visto o quanto a natureza dos campos escuros pode influir no comportamento da expansão cosmológica. A última análise será a de um modelo mais geral que os anteriores no que se refere às interações, onde os campos de matéria e energia escuras são representados por campos escalares que interagem entre si e com a gravidade. Este estudo nos indicará se as interações no setor escuro e entre o setor escuro e o campo gravitacional são viáveis.

Partindo de uma ação geral que descreve um determinado modelo, podemos restringir as formas dos acoplamentos e potenciais por meio da exigência de certas propriedades para a lagrangiana, tais como simetrias. As simetrias podem formalmente levar à determinação das possíveis formas para as funções indefinidas em uma dada ação.

Nas análises desses três modelos, exigiremos que a lagrangiana geral de cada um satisfaça a simetria de Noether, a qual fornece uma quantidade conservada associada ao sistema dinâmico. Além de tal método nos dar uma visão mais profunda sobre potenciais e acoplamentos gravitacionais, o mesmo fornece ferramentas poderosas que podem levar à integração completa do sistema dinâmico correspondente. Alguns trabalhos que se utilizaram da simetria de Noether para analisar modelos cosmológicos podem ser encontrados nas referências [18, 23, 24, 25, 26, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37].

Em seguida, estudaremos uma teoria que generaliza a Relatividade Geral geometricamente. Essa teoria será aplicada à descrição da matéria e da energia escuras como efeitos geométricos em vez de fluidos exóticos. Consideraremos correções geométricas tanto no setor gravitacional como no setor da matéria. Levaremos em conta também a propriedade geométrica de torção do espaço-tempo, uma vez que a ausência de tal propriedade do espaço-tempo não é uma consequência natural nessa classe de teoria.

Através da definição de tensores energia-momento efetivos, faremos a investigação de como as correções geométricas poderiam gerar os mesmos efeitos do setor escuro descrito por fluidos. Esse estudo tem sua importância no que concerne à possibilidade de que a teoria de gravitação de Einstein seja um caso especial de uma teoria mais geral. Dessa forma, a expansão acelerada do Universo e a falha na previsão das curvas de rotação de galáxias e da dinâmica de aglomerados galácticos seriam as evidências de uma teoria mais geral. Os efeitos que chamamos de matéria e energia escuras resultariam do comportamento da gravidade em larga escala, não existindo mais os entes exóticos que não irradiam ou que geram gravidade repulsiva.

A última investigação deste trabalho tratará sobre o Universo primordial. Será considerado um modelo inflacionário do tipo lei de potência, cujo campo gerador da expansão acelerada é um campo escalar não canônico do tipo táquion. Primeiramente desenvolveremos as equações de campo para as perturbações primordiais sem considerações quânticas, isto é, num contexto clássico. Uma vez que as soluções dos campos de perturbação clássicos são obtidas, passaremos ao tratamento quântico, a partir do qual se determinará as condições iniciais para os campos tal que as flutuações mínimas de densidade de energia estejam de acordo com as flutuações do vácuo. Tendo garantido as condições iniciais corretas, calcularemos o espectro do potencial gravitacional de perturbação a fim de verificarmos a viabilidade do modelo inflacionário considerado.

Capítulo 2

Relatividade Geral

Em 1915, Albert Einstein publicou sua *Teoria da Relatividade Geral* [38], a qual estendeu a Relatividade Restrita para uma teoria que incorpora campos gravitacionais. Desta feita, surgiu uma nova teoria da gravitação, que interpretou o campo gravitacional como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo devido à presença de matéria-energia.

O fundamento da Relatividade Geral está no *princípio da equivalência*, o qual se refere à equivalência entre um campo gravitacional e um referencial não inercial. As consequências de tal fundamento são desdobradas matematicamente através do *princípio da covariância geral*: a equação que descreve uma lei física deve ter a mesma forma em todos os referenciais – inerciais e não inerciais – ou, formalmente falando, deve ser escrita em forma covariante [39].

2.1 Princípio da equivalência

É fato que os campos gravitacionais têm a propriedade de que todos os corpos se movem da mesma forma na presença destes (se as condições iniciais forem as mesmas), independente da massa ou da carga. Como exemplo, todos os corpos sujeitos ao campo gravitacional da Terra sofrem a mesma aceleração, independente de suas massas.

Graças a essa propriedade dos campos gravitacionais, podemos fazer uma analogia entre o movimento de corpos num campo gravitacional e o movimento de corpos num referencial não inercial. A propósito, sabemos que o movimento livre dos corpos num referencial inercial se processa retilínea e uniformemente por todo o tempo. Então, se observamos o movimento livre desses corpos a partir de um referencial não inercial, certamente os veremos moverem-se todos da mesma forma. Se observamos um corpo movendo-se livremente a partir de um referencial com aceleração constante, o veremos se mover com uma aceleração igual em módulo e em sentido oposto ao do próprio referencial. Isso simula, por exemplo, o campo gravitacional da Terra sobre pequenas regiões (o mesmo pode ser considerado constante em pequenas regiões). Disso, concluímos que as propriedades dos movimentos dos corpos num referencial não inercial são idênticas às dos movimentos dos corpos num campo gravitacional, e podemos dizer que um referencial não inercial é equivalente a um certo campo gravitacional. Esse é o *princípio da equivalência*.

Por outro lado, em cada ponto do espaço sujeito a um campo gravitacional, podemos definir um *referencial localmente inercial*. Isso é possível porque os corpos se movem da mesma forma num campo gravitacional. Essa propriedade nos permite estabelecer um referencial que se move solidariamente aos corpos em queda livre nesse campo, isto é, um referencial que está em queda livre no campo gravitacional da mesma maneira que os corpos, a partir do qual não podemos perceber qualquer aceleração. Assim, nesse referencial localmente inercial, as leis da Física devem ser as mesmas que aquelas num referencial em ausência de campo gravitacional.

A partir do que foi exposto acima, escrevemos o princípio da covariância geral: uma equação é válida num dado campo gravitacional se for válida também na ausência deste. Em outras palavras, uma equação é válida num campo gravitacional se estiver de acordo com a Relatividade Restrita e preservar sua forma sob transformação geral de coordenadas.

2.2 Dinâmica da partícula em Relatividade Geral

Consideremos uma partícula em queda livre num campo gravitacional, vista a partir de um sistema de coordenadas ξ^α solidário à mesma. Esse sistema é localmente inercial, do qual não se observa qualquer aceleração da partícula [39]. Portanto, conforme o princípio da equivalência, as leis da Relatividade Restrita são válidas nesse sistema. Então, a equação de movimento que descreve a dinâmica da partícula será

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2.1)$$

onde $d\tau^2 = ds^2/c^2$ é o tempo próprio medido no referencial localmente inercial.

Tomemos agora um sistema coordenado x^μ em repouso num campo gravitacional. Utilizando a regra da cadeia, podemos determinar a dinâmica da partícula vista a partir do referencial x^μ

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial\tau} \right) = 0, \quad (2.2)$$

que após o desenvolvimento da derivada temporal, toma a forma

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.3)$$

Agora, multiplicando essa equação por $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$, obtemos

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.4)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é chamado de *conexão afim* e definido como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}. \quad (2.5)$$

Uma vez que as derivadas de primeira ordem comutam, da equação (2.5), segue que a conexão afim é simétrica com relação aos índices inferiores

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (2.6)$$

Num referencial localmente inercial, valem as leis da Relatividade Restrita e não podemos perceber um campo gravitacional a partir deste. Mas, quando passamos para um referencial em repouso no campo gravitacional, percebemos que a

equação de movimento (2.4) escrita a partir deste apresenta um termo adicional $\left(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}\right)$, quando comparada à equação de movimento (2.1) escrita a partir do sistema localmente inercial. Isso justamente indica a presença de um campo gravitacional, e ao mesmo tempo nos diz que o espaço-tempo é curvo. Portanto, podemos descrever um campo gravitacional a partir da curvatura do espaço-tempo, ou falando de outra forma, através da geometria do espaço-tempo.

Num espaço-tempo curvo genérico, o elemento de linha tem a forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (2.7)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o *tensor métrico* – o qual é simétrico ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) –, cujas componentes definem a geometria do espaço-tempo e, conseqüentemente, a dinâmica num campo gravitacional.

O comprimento da curva descrita por uma partícula em movimento entre os pontos genéricos a e b , parametrizada por τ ($x^{\mu} = x^{\mu}(\tau)$), é então dado por

$$s = \int_a^b \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau. \quad (2.8)$$

Agora, variando (2.8) com relação a $g_{\mu\nu}$ e extremizando

$$\delta \int_a^b \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau = 0, \quad (2.9)$$

obtemos a equação (2.4) na forma

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \left(\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right) \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0, \quad (2.10)$$

com

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \left(\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right), \quad (2.11)$$

que expressa a conexão afim em termos do tensor métrico, que nessa forma é chamada de *conexão de Levi-Civita* ou *símbolos de Christoffel*.

Sabemos que matéria-energia gera um campo gravitacional. Por outro lado, a partir do princípio da equivalência, vimos que a dinâmica de uma partícula num campo gravitacional pode ser determinada pela geometria do espaço-tempo, que é curvada quando na presença de fontes de campo gravitacional. Daí,

concluimos que a presença de matéria-energia causa uma curvatura no espaço-tempo, a qual é sentida pela partícula como um campo de gravitação.

2.3 Tensor de curvatura

Em qualquer ponto do espaço-tempo, o tensor métrico é uma matriz simétrica de números reais. De acordo com a álgebra das matrizes, existe uma transformação que diagonaliza tal matriz, com todas as componentes da diagonal assumindo valores $+1$ ou -1 . Mas, em geral, não é possível encontrar um sistema de coordenadas no qual o tensor métrico reduz-se à forma diagonal, com as componentes tomando os valores $+1$ ou -1 em todo o espaço. A importância de saber se existe tal sistema de coordenadas reside no fato de que se a métrica pode ser escrita nessa forma, significa que o espaço em questão é plano (ou não curvo) – nesse caso a métrica é dita plana.

A questão é: de que maneira podemos garantir que existe um sistema de coordenadas no qual a matriz do tensor métrico assume tal forma em todo o espaço? Ou, equivalentemente: de que maneira podemos garantir que a métrica é plana? A resposta a essa pergunta está no seguinte teorema

A nulidade do tensor de curvatura é condição necessária e suficiente para uma métrica ser plana.

O *tensor de curvatura* é definido por

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\kappa} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa}. \quad (2.12)$$

Essa necessidade provém do fato de que se existe um sistema coordenado no qual o tensor métrico apresenta as propriedades descritas anteriormente (correspondendo a um espaço plano), o mesmo será obrigatoriamente constante em todo o espaço e, então, suas derivadas serão nulas, o que também leva os $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ e as

suas derivadas a se anularem (ver equação (2.11)). Disso, segue que o tensor de curvatura será nulo. Dessa forma, a definição do tensor de curvatura é uma legítima definição de medida da curvatura do espaço.

A seguir estão listadas as propriedades fundamentais do tensor de curvatura

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) Antissimetria com relação à troca de índices do primeiro par de índices:} \\ R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa}; \\ \\ \text{ii) Antissimetria com relação à troca de índices do segundo par de índices:} \\ R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu}; \\ \\ \text{iii) Simetria com relação à troca do primeiro par de índices com o segundo:} \\ R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}. \end{array} \right.$$

Pela contração do tensor de curvatura com o tensor métrico, definimos um outro importante tensor, o *tensor de Ricci*

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\mu\lambda\kappa}^{\lambda}. \quad (2.13)$$

Por sua vez, contraindo o tensor de Ricci com o tensor métrico, definimos o *escalar de curvatura* (ou *escalar de Ricci*)

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}. \quad (2.14)$$

É importante notar aqui que $R/2$ é igual a conhecida curvatura de Gauss para uma superfície – o inverso do produto dos raios de curvatura principais.

Agora, a partir do tensor de Ricci e do escalar de curvatura, podemos construir um novo tensor simétrico

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.15)$$

chamado *tensor de Einstein*.

O tensor de Einstein satisfaz as chamadas *identidades contraídas de Bianchi*

$$\nabla_{\mu} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0, \quad (2.16)$$

que, como veremos, desempenham um papel importante em Relatividade Geral, pois estão associadas a uma lei de conservação.

2.4 Tensor energia-momento

O *tensor energia-momento*, denotado por $T_{\mu\nu}$, representa o fluxo do quadrimomento p^{μ} através da hipersuperfície que encerra as fontes do campo. O tensor energia-momento é um tensor simétrico, $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, cujas componentes levam consigo um significado físico, a saber,

- i) T_{00} – Componente temporal:
Densidade de energia;
- ii) $T_{i0} = T_{0i}$ – Componentes espaço-temporais:
Densidade da i-ésima componente de momento;
- iii) T_{ii} – Componentes espaciais (índices de mesmo valor):
Fluxo da i-ésima componente de momento através da superfície cuja direção normal está na direção i (pressão);
- iv) T_{ij} ($i \neq j$) – Componentes espaciais (índices de valores diferentes):
Fluxo da i-ésima componente de momento através da superfície cuja direção normal está na direção k.

A lei de conservação do tensor energia-momento é satisfeita com a condição de nulidade da derivada covariante de $T^{\mu\nu}$

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.17)$$

onde a quantidade conservada concerne a todas as fontes do campo gravitacional considerado.

Um exemplo de tensor energia-momento muito importante é o de um fluido perfeito, com densidade de energia ρ , pressão p e quadrivelocidade $U^\mu = dx^\mu/d\tau$

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U^\mu U^\nu - p g^{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

2.5 Equações de Einstein da gravitação

Na seção 2.2, vimos que um campo gravitacional pode ser interpretado como a curvatura do espaço-tempo devido à presença de matéria-energia. O problema fundamental é encontrar uma equação que relaciona a geometria do espaço-tempo com a distribuição de matéria-energia.

Utilizaremos o princípio da mínima ação [40, 41] para encontrar esta relação. Iniciamos de uma ação total S_T , que é a soma da ação do campo gravitacional S_G com a ação do campo de matéria S_m

$$S_T = S_G + S_m = \frac{c^3}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.19)$$

onde \mathcal{L}_m representa a densidade de lagrangiana da matéria e g é o determinante da matriz que representa o tensor métrico $g_{\mu\nu}$. A forma $\sqrt{-g} d^4x$ é a generalização do volume diferencial num espaço plano para um hipervolume diferencial num espaço curvo.

Agora, aplicando o princípio da mínima ação a (2.28), devemos ter

$$\delta S_T = \delta S_G + \delta S_m = 0, \quad (2.20)$$

onde a variação é feita com relação a $g_{\mu\nu}$.

A variação da ação do campo gravitacional com respeito a $g_{\mu\nu}$ nos leva a

$$\delta S_G = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.21)$$

pois $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}$ e a integral $\frac{c^3}{16\pi G} \int (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu}) d^4x$ se anula na fronteira de integração.

Por sua vez, a variação da ação do campo de matéria com respeito a $g_{\mu\nu}$ nos fornece

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.22)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é definido como

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.23)$$

Por fim, a variação da ação total com relação a $g_{\mu\nu}$ será

$$\delta S_T = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0, \quad (2.24)$$

e como o termo $\delta g_{\mu\nu}$ é arbitrário, o princípio da mínima ação é satisfeito se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.25)$$

Estas são as *equações de Einstein da gravitação*. O lado direito descreve a distribuição de matéria-energia e o lado esquerdo a resposta da geometria do espaço-tempo a essa distribuição. Podemos ver, tendo em vista as equações (2.15) e (2.16), que o lado esquerdo das equações de Einstein satisfaz as identidades contraídas de Bianchi, o que implica na derivada covariante do lado direito também ser nula

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = -\frac{8\pi G}{c^4} \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.26)$$

ou seja, as fontes do campo gravitacional obedecem às leis de conservação, conforme (2.17). A princípio, isso indica uma consistência de tal teoria geométrica da gravitação.

Um fato interessante é que, se adicionamos ao lado esquerdo da equação (2.25) um termo linear em $g_{\mu\nu}$, as identidades de Bianchi continuam sendo satisfeitas, haja vista que $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$, e as equações de gravitação permanecem fisicamente consistentes. Daí, podemos dizer que a forma mais geral das equações de Einstein é

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

onde Λ é a famosa *constante cosmológica*, introduzida inicialmente por Einstein com a finalidade de se obter soluções cosmológicas que descrevem um Universo estacionário.

A ação cuja variação com respeito a $g_{\mu\nu}$ reproduz, por meio do princípio da mínima ação, as equações de campo (2.27) é a seguinte

$$S = \frac{c^3}{16\pi G} \int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x + \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_m\sqrt{-g}d^4x, \quad (2.28)$$

onde a constante cosmológica foi incluída arbitrariamente na parte gravitacional, figurando como parte da geometria. No próximo capítulo, veremos que a constante cosmológica como fonte de campo gravitacional e não como parte da geometria tem um papel muito importante para a Cosmologia.

Capítulo 3

Cosmologia

Com o advento da Relatividade Geral, pela primeira vez se teve em mãos uma teoria que possibilitava a descrição do Universo como um todo. Assim, a Cosmologia deixou de ser apenas uma especulação metafísica para tornar-se um ramo da Física. A Relatividade Geral permitia soluções de um Universo não estático e, em 1929, as observações astronômicas de Edwin Hubble [42] mostraram que o Universo estava em expansão.

As observações astronômicas permitiram estabelecer fundamentos válidos para todo o Universo, de onde nasceu um importante pilar para o desenvolvimento da Cosmologia, o chamado *princípio cosmológico*, que estabelece ser o Universo homogêneo e isotrópico em larga escala. Dessa forma, pôde-se construir modelos teóricos gerais que descrevem a evolução do *cosmos* como um todo. Na década de 40, Gamow, Alpher e Herman [43] previram a existência de uma radiação que permeava todo o Universo – hoje chamada de *radiação cósmica de fundo* –, oriunda da época em que a radiação se desacoplou da matéria. Essa previsão foi confirmada na década de 60 [44], consolidando a Cosmologia como Ciência.

3.1 Observações astronômicas e fundamentos da Cosmologia

A mais importante observação astronômica para a Cosmologia foi a que levou Hubble a concluir que o Universo está em expansão. Em 1929, a partir das suas observações de galáxias longínquas, Hubble determinou que todos os objetos distantes estão se afastando de nós, e quanto mais distantes estão, mais velozmente se afastam [42, 45]. A velocidade de recessão desses objetos é proporcional às suas distâncias a nós, sendo expressa pela *lei de Hubble*

$$\mathbf{v} = H_0 \mathbf{r}, \quad (3.1)$$

onde H_0 é a *constante de Hubble* avaliada hoje, tendo como o melhor valor observacional $72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [46].

Podemos, para simplificar nossa descrição, definir um sistema coordenado que acompanha a expansão, isto é, fixo na galáxia da qual se observa a expansão cosmológica (ver Figura 3.1). Tal sistema é chamado de *sistema comóvel*, a partir do qual medimos a distância dos objetos a nós com o tempo por

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}, \quad (3.2)$$

onde r representa a distância real, x a distância comóvel (que tem valor constante no tempo) e $a(t)$ o *fator de escala*, que reescala a distância entre os objetos com o tempo, descrevendo a expansão do espaço.

Da equação (3.2), podemos expressar a constante de Hubble (definida por (3.1)) em termos do fator de escala

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.3)$$

onde o ponto denota derivada com relação ao tempo. Nessa expressão, a "constante" de Hubble é generalizada para qualquer tempo, uma vez que esta não terá sempre o mesmo valor H_0 em virtude de que, em geral, a quantidade \dot{a}/a não apresenta um valor constante. Por esse mesmo motivo, daqui em diante, chamaremos H de

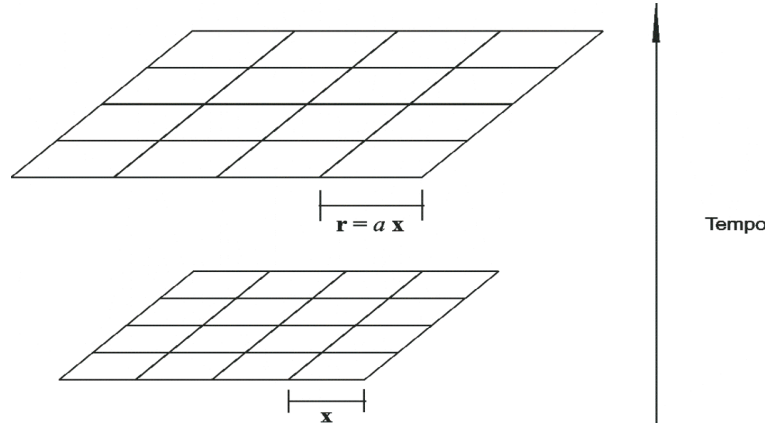


Figura 3.1: Distância r entre dois objetos distantes num Universo em expansão medida a partir de um referencial fixo num dos objetos.

parâmetro de Hubble, o que é mais adequado.

As velocidades de afastamento dos objetos distantes são medidas pelo *redshift* z (desvio para o vermelho) do espectro luminoso emitido pelos objetos. A partir do efeito Doppler para ondas luminosas, escrevemos

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \approx \frac{v}{c}, \quad (3.4)$$

onde λ_{em} é o comprimento de onda da luz emitida pelo objeto e λ_{obs} é o comprimento de onda da luz proveniente do objeto que observamos. Aqui, o efeito Doppler observado não é resultante de algum afastamento de origem cinemática, mas uma consequência da expansão do espaço. Então, quando uma onda eletromagnética se propaga num espaço em expansão, o seu comprimento de onda sofrerá um *estica-mento*, o qual será proporcional ao valor do fator de escala. Daí, podemos determinar o fator de escala a partir da medida do *redshift* (através da equação (3.4))

$$\frac{1}{a(t_{em})} = \frac{a(t_{obs})}{a(t_{em})} = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = 1 + z \implies a(z) = \frac{1}{1 + z}, \quad (3.5)$$

onde $a(t_{obs}) = 1$ por convenção, o que é equivalente a reescalar as coordenadas comóveis pelo tamanho atual do Universo.

Das definições anteriores, vemos que não existe um ponto privilegiado de onde se fazem as observações, pois as coordenadas comóveis eliminam essa possibilidade. Aqui está implícito um princípio muito forte da Cosmologia, o qual foi baseado nas observações. Em larga escala o Universo pode ser considerado homogêneo e isotrópico, o que é equivalente a dizer que de qualquer ponto observamos o Universo sempre com as mesmas propriedades. Esse é o princípio conhecido como *princípio cosmológico*.

3.2 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Tendo em vista o princípio cosmológico, consideremos um espaço tridimensional homogêneo e isotrópico. Em tal espaço, o qual pode estar se expandindo ou se contraindo, a métrica mais geral que pode ser construída apresenta a seguinte forma em coordenadas esféricas

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.6)$$

que é conhecida como *métrica de Friedmann-Robertson-Walker* [39], onde k é a *constante de curvatura*.

A constante de curvatura está associada às três geometrias que satisfazem o princípio cosmológico, assumindo os seguintes valores correspondentes

$$\begin{cases} k = 0 & \text{geometria plana,} \\ k > 0 & \text{geometria esférica,} \\ k < 0 & \text{geometria hiperbólica.} \end{cases}$$

A métrica de Friedmann-Robertson-Walker está escrita a partir de um sistema coordenado comóvel. Tal sistema está fixo nas partículas (galáxias) do fluido cosmológico, desse modo, acompanhando a expansão ou contração cosmológica, com suas coordenadas sendo reescaladas pelo fator de escala a cada instante. Assim, $x^i = (r, \theta, \phi)$ são as coordenadas espaciais medidas a partir do sistema coordenado fixo numa partícula qualquer desse fluido. Mede-se o tempo cosmológico

t a partir de um relógio também fixo nessa partícula (t denota o tempo próprio desse sistema).

Lembrando que a forma mais geral de um intervalo diferencial num espaço-tempo curvo é dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.7)$$

podemos, por comparação com (3.6), determinar o tensor métrico, que em representação matricial se apresenta como

$$g_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a(t)^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Daqui em diante, por comodidade, faremos os índices gregos assumirem os valores (t, r, θ, ϕ) . De (3.8), vemos que somente as componentes da diagonal não são nulas, ou seja, as componentes g_{tt} , g_{rr} , $g_{\theta\theta}$ e $g_{\phi\phi}$ na notação que adotamos aqui.

3.3 Determinação do tensor de Ricci e do escalar de curvatura

Para determinar o tensor de Ricci, devemos calcular todos os elementos da conexão afim. Uma vez que conhecemos a forma do tensor métrico (equação (3.8)), fazemos isso através da equação

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right). \quad (3.9)$$

Lembrando da propriedade $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$, de (3.9), temos

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{a\dot{a}}{c(1-kr^2)}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^t = \frac{a\dot{a}r^2}{c}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^t = \frac{a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta}{c}, \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1-kr^2}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1-kr^2), \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r(1-kr^2) \sin^2 \theta, \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cot \theta, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{r}, \quad (3.12)$$

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{t\theta}^{\theta} = \Gamma_{t\phi}^{\phi} = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.13)$$

sendo os elementos restantes nulos.

Com os $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ em mãos, determinamos o tensor de curvatura a partir de sua definição

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\sigma\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}, \quad (3.14)$$

e lembrando da definição do tensor de Ricci

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\mu\lambda\kappa}^{\lambda}, \quad (3.15)$$

podemos calcular diretamente as componentes de $R_{\mu\nu}$ para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker, obtendo

$$R_{tt} = \frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (3.16)$$

$$R_{rr} = -\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2}{c^2(1-kr^2)}, \quad (3.17)$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2)r^2}{c^2}, \quad (3.18)$$

$$R_{\phi\phi} = -\frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2)r^2 \sin^2 \theta}{c^2}. \quad (3.19)$$

As outras componentes do tensor de Ricci são nulas em decorrência da forma diagonal do tensor métrico.

Agora, a partir da definição do escalar de curvatura (ou escalar de Ricci)

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}, \quad (3.20)$$

como já conhecemos as componentes do tensor de Ricci, obtemos de modo direto

$$R = \frac{6}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} \right], \quad (3.21)$$

que é o escalar de curvatura para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

3.4 Forma do tensor energia-momento

Do lado direito das equações de Einstein, temos o tensor energia-momento, que ainda devemos especificar. Consideraremos as fontes de campo gravitacional do Universo como um fluido perfeito, então o tensor energia-momento que o representa, como já vimos, tem a forma

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu}. \quad (3.22)$$

Como adotamos um sistema comóvel para escrever a métrica, tal sistema move-se conjuntamente ao fluido, e a quadrivelocidade desse fluido será $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$. Então, da equação (3.22), determinamos

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p a(t)^2 / (1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

e temos o tensor energia-momento de um fluido perfeito escrito para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

3.5 Equações do Modelo Padrão da Cosmologia

Nesta seção, determinaremos as equações que descrevem a dinâmica do Universo. Para isso, tomamos as equações de Einstein na forma mais geral (2.27), nas quais aplicamos as componentes do tensor de Ricci (3.16), (3.17), (3.18) e (3.19), do tensor métrico (3.8) e do tensor energia-momento (3.23) e o escalar de curvatura (3.21).

Considerando primeiramente as componentes temporais dos tensores

$$R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R + \Lambda g_{tt} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{tt}, \quad (3.24)$$

chegamos à seguinte equação diferencial

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (3.25)$$

conhecida como *equação de Friedmann*.

Tomando as componentes espaciais dos tensores

$$R_{ii} - \frac{1}{2}g_{ii}R + \Lambda g_{ii} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{ii}, \quad (3.26)$$

qualquer uma delas nos leva à equação diferencial (aqui não há soma com respeito aos índices repetidos ii)

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}p - \frac{kc^2}{a^2} + \Lambda c^2, \quad (3.27)$$

a qual, utilizando-se de (3.25), pode ser escrita na forma

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (3.28)$$

que é conhecida como *equação da aceleração*.

Para resolver essas equações de campo, ainda precisamos saber como ρ e p evoluem com o tempo. Se aplicarmos a condição que representa a conservação do tensor energia-momento ($\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$) ao tensor (3.22), obtemos

$$\dot{\rho} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0, \quad (3.29)$$

que é chamada de *equação do fluido* e é o análogo da equação da continuidade. Essa equação não é independente, pois pode ser obtida pela combinação da equação (3.28) com a derivada temporal da equação (3.25).

A fim de resolver (3.29), necessitamos conhecer as equações de estado dos constituintes do Universo. Supomos que as equações de estado são barotrópicas

$$p = c^2 \omega \rho, \quad (3.30)$$

onde ω é uma constante, a qual especifica a natureza do constituinte. Os casos mais comuns são: $\omega = 1/3$, que representa a radiação; $\omega = 0$, que representa matéria diluída; e $\omega = -1$, que representa a *energia de vácuo*.

Considerando-se que os constituintes do Universo são não interagentes, cada um deles obedece à equação (3.29) separadamente. Então, para a matéria diluída ($p_m = 0$), de (3.29), temos a solução

$$\rho_m \propto a^{-3}; \quad (3.31)$$

para a radiação, $p_r = c^2 \rho_r/3$, obtemos

$$\rho_r \propto a^{-4}; \quad (3.32)$$

e para a energia de vácuo, $p_v = -c^2 \rho_v$, temos

$$\rho_v = \text{constante}, \quad (3.33)$$

que pode ser relacionada à constante cosmológica. Pois, pelo fato de poder escrever a equação de Einstein na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3.34)$$

temos a liberdade de interpretar a constante cosmológica como fonte de campo gravitacional, escrevendo $T_{\mu\nu}^\Lambda = \frac{c^4}{8\pi G}\Lambda g_{\mu\nu}$, quando a equação de Einstein torna-se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^\Lambda). \quad (3.35)$$

Ao comparar $T_{\mu\nu}^{\Lambda}$ com o tensor energia-momento de um fluido perfeito, chegamos a $\rho_{\Lambda} = -p_{\Lambda}/c^2 = c^2\Lambda/8\pi G = \text{constante}$.

Agora que conhecemos a evolução temporal de ρ , estamos aptos a determinar $a = a(t)$. Como foi dito anteriormente, Einstein introduziu a constante cosmológica para obter soluções de um Universo estático, mas como foi observado por Hubble que o Universo estava em expansão, tal ideia foi abandonada, não existindo mais razão alguma para manter a constante cosmológica nas equações. Isso sem contar o seu significado físico obscuro na época. Por esse motivo, no *Modelo Padrão da Cosmologia* faz-se $\Lambda = 0$. Assim, procuraremos soluções para um Universo composto somente por matéria e radiação. No início, quando $a(t)$ é pequeno, vemos, a partir de (3.25), que o termo com a constante de curvatura é desprezível frente ao termo que leva a densidade de energia dos constituintes, conforme as equações (3.31) e (3.32). Daí, a equação de Friedmann toma a forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (3.36)$$

Resolvemos facilmente essa equação quando analisamos épocas em que a densidade de energia do campo de matéria domina sobre a densidade de energia do campo de radiação e vice-versa, ou seja, quando uma é desprezível frente a outra. Para a era dominada pela matéria, temos a solução

$$a(t) \propto t^{2/3}, \quad (3.37)$$

e para a era dominada pela radiação

$$a(t) \propto t^{1/2}. \quad (3.38)$$

Quando $t \rightarrow 0$, também $a \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, $\rho \rightarrow \infty$. Então, temos uma *singularidade inicial*, esta popularmente conhecida como *Big Bang*. Conforme as soluções do Modelo Padrão, o Universo originou-se de um ponto com densidade e temperatura infinitas, resfriando-se à medida que se expandiu. Mas, por outro lado, a Física que conhecemos não pode mais funcionar próximo ao momento do Big Bang, uma vez que estamos entrando no domínio de escalas inferiores à escala

de Planck ($\approx 10^{-33}\text{cm}$) e efeitos quânticos não são mais desprezíveis. Tendo isso em vista, o Big Bang deve representar o limite de validade do Modelo Padrão da Cosmologia.

3.6 Parâmetros observacionais

A *densidade crítica* ρ_c é definida como a densidade necessária para que a constante de curvatura se torne nula, $k = 0$, correspondendo a um Universo com geometria plana. De acordo com a equação de Friedmann, temos um valor de H correspondendo a cada valor de ρ_c , tal que podemos escrever para a densidade crítica

$$\rho_c(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}. \quad (3.39)$$

Com o valor de H estimado hoje, a densidade crítica é da ordem de 10^{-26}kg m^{-3} . A partir do valor da densidade crítica medido observacionalmente, inferimos se o Universo é fechado ou aberto. Se $\rho > \rho_c$, sabemos que o Universo é fechado (geometria esférica), e se $\rho < \rho_c$, que o Universo é aberto (geometria hiperbólica).

A densidade crítica é usada para a parametrização das medidas de densidade dos constituintes do Universo. Define-se o *parâmetro de densidade* Ω_i por

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad (3.40)$$

onde i expressa a densidade correspondente a cada constituinte do Universo que está sendo considerado. A definição do parâmetro de densidade expressa uma comparação entre uma dada densidade relacionada a algum constituinte com a densidade crítica.

A partir das equações (3.25) e (3.40), podemos escrever

$$\Omega_{total} = 1 + \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (3.41)$$

onde Ω_{total} denota o parâmetro de densidade relacionado à densidade total do Universo (a soma das densidades de todos os constituintes). Constatamos da equação

(3.41), que se $k = 0$, $\Omega_{total} = 1$, e o mesmo permanece com esse valor por todo o tempo, uma vez que k é constante.

Uma outra grandeza importante é o *parâmetro de desaceleração*, relacionado à variação da taxa de expansão do Universo com o tempo. O parâmetro de desaceleração q é definido por

$$q = -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{2} + \frac{3p}{2\rho}. \quad (3.42)$$

Dessa definição, vemos que q tem um valor positivo para um Universo desacelerado e um valor negativo para um Universo acelerado. Além disso, o parâmetro de desaceleração depende da densidade ρ e da pressão p totais do Universo. A definição de q foi feita como o negativo da aceleração porque o Modelo Padrão prevê que o Universo se expande desaceleradamente (o Modelo Padrão considera um Universo composto somente de matéria comum, a qual é sempre atrativa), tal que esse parâmetro sempre mede o valor absoluto da desaceleração, tornando-se mais adequado para fins práticos.

Um parâmetro observacional bastante usado pela astronomia observacional é a *diferença de magnitudes* μ_0 , que é definida como a diferença entre a magnitude bolométrica aparente m e a magnitude absoluta M de uma determinada fonte. A expressão para μ_0 é dada por

$$\mu_0 = m - M = 25 + 5 \log_{10} d_L, \quad (3.43)$$

onde d_L é a *distância de luminosidade*, definida por

$$d_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}, \quad (3.44)$$

com $H(z)$ sendo o parâmetro de Hubble em função do *redshift*.

3.6.1 Distância de luminosidade

A distância de luminosidade expressa a quantidade de luz recebida de um objeto distante, o que permite determinar indiretamente a que distância

se encontra o objeto – assumindo-se que a intensidade luminosa cai com o inverso do quadrado da distância ao objeto. Podemos definir a distância de luminosidade em termos de uma luminosidade absoluta L (potência total da fonte) e sua correspondente luminosidade aparente l (potência por unidade de área recebida pelo observador)

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}}. \quad (3.45)$$

Num espaço euclidiano, a luminosidade aparente seria dada por $l = L/4\pi d^2$, onde d é a distância do objeto ao observador. Mas, em escala cosmológica, temos que levar em conta a expansão do espaço, o que gera uma atenuação na luminosidade recebida. Assim, a luminosidade aparente corrigida é dada por

$$l = \frac{L}{4\pi d^2(1+z)^2}. \quad (3.46)$$

Considerando-se um espaço plano ($k = 0$) e a propagação da luz radialmente ($d\theta = d\phi = 0$), para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker, calculamos a distância d (distância espacial) a partir de (2.8), de onde obtemos $d = \int_0^r \sqrt{-g_{rr} dx^r dx^r} = a(t) \int_0^r dr = a(t)r$, onde r é a distância comóvel percorrida pela luz. Substituindo-se $d = a(t)r$ em (3.46), podemos expressar (3.45) para as medidas realizadas hoje ($r, a \rightarrow r_0, a_0$)

$$d_L = a_0 r_0 (1+z). \quad (3.47)$$

Para calcular r_0 , devemos impor $ds = 0$ (estamos calculando a distância comóvel percorrida pela luz), de onde obtemos $c dt/a(t) = dr$, que sob a integração $\int_0^{t_0} c dt/a(t) = \int_0^{r_0} dr$, após a mudança de variáveis $dt = \left(\frac{dt}{da}\right)\left(\frac{da}{dz}\right)dz = -\left[\frac{a(t)}{H}\right]dz$ (a distância de luminosidade é medida em função do *redshift*), toma a forma $r_0 = c \int_0^z dz/H(z)$. Agora, usando esse resultado em (3.47), temos a expressão final para a distância de luminosidade

$$d_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}, \quad (3.48)$$

onde consideramos $a_0 = 1$.

3.7 Sucessos e problemas do Modelo Padrão

Num passado distante, quando o fator de escala era muito menor e a densidade de matéria era muito alta, certamente que o livre caminho médio dos prótons, dos elétrons e da radiação (fótons) era muito menor do que hoje. A interação entre matéria e radiação, por ser abundante nessa época, faria com que todo o meio se encontrasse muito próximo do equilíbrio termodinâmico com os fótons. Como o Universo se expandiu, o gás de fótons se resfriou e a densidade de energia diminuiu, possibilitando que os prótons e os elétrons se combinassem. Assim, houve um desacoplamento do gás de fótons da matéria, o qual fluiu livremente, originando o fundo de fótons com baixa energia que permeia todo o Universo. Esse fundo de radiação é conhecido hoje como *radiação cósmica de fundo* e foi proposto por Gamow em 1948, que imaginou um possível resíduo da época quando a elevada temperatura e a alta densidade poderiam ter resultado na formação de uma parte dos elementos químicos.

Inicialmente, não se deu importância aos cálculos realizados por Gamow, o que resultou em nenhum esforço para detectar tal radiação. Mas, em 1964, por acaso, Penzias e Wilson [44] descobriram essa radiação quando monitoravam antenas de comunicação. A temperatura medida dessa radiação estava muito próxima dos 3K previstos por Gamow. A previsão da existência da radiação cósmica de fundo e a sua confirmação certamente foi o mais notável sucesso do Modelo Padrão.

Apesar do êxito de suas previsões, o Modelo Padrão enfrenta alguns problemas, dos quais citamos os principais:

i) *Problema do Horizonte*: A radiação cósmica de fundo observada apresenta uma elevadíssima homogeneidade. Mas o fato é que as regiões distantes não teriam condições de estar em contato causal antes da época do desacoplamento radiação-matéria que deu origem à radiação que observamos hoje. O Modelo Padrão não pode prever essa homogeneização por mecanismo algum e, assim, permanece a questão

natural de como explicar o fato de o Universo conseguir atingir tal grau de homogeneização.

ii) *Problema da Planaridade*: De acordo com os dados da astronomia observacional, o parâmetro de densidade tem um valor muito próximo a 1, mas não exatamente 1, que corresponde ao modelo crítico ($\Omega_{total} = 1$), o que significa que a geometria do Universo é praticamente plana ($k \approx 0$), de acordo com (3.41). Como vimos na seção 3.6, essa é uma situação muito especial, pois se Ω fosse um pouco maior ou um pouco menor que a unidade no início do Universo, hoje o seu valor seria muito diferente de 1, uma vez que o mesmo é função do tempo. Isso implica num ajuste finíssimo do parâmetro de densidade no início do Universo para que o seu valor seja compatível com o que é observado hoje, o que realmente é algo bastante artificial em virtude desse caráter altamente instável de Ω .

Outros problemas do Modelo Padrão podem ser vistos com detalhes na referência [47].

3.8 Modelo do Universo inflacionário

Desta seção em diante, usaremos as unidades naturais: $8\pi G = c = \hbar = 1$.

Para corrigir alguns dos problemas do Modelo Padrão, Alan Guth propôs em 1981 o *modelo inflacionário* [1]. A ideia fundamental é que no início o Universo expandiu-se violentamente num período muito curto, caracterizado por um crescimento acelerado do fator de escala, o qual ficou conhecido como *inflação*. Esse período inicia-se logo após a era de Planck, quando $t > t_p \approx \hbar/m_p c^2$ (t_p é o tempo de Planck e m_p é a massa de Planck), e a Relatividade Geral passa a ser válida. De acordo com esse modelo, o período inflacionário ocorre entre 10^{-43} s e 10^{-34} s após o Big Bang.

Mas qual seria a causa da inflação? A alternativa mais natural é atribuir à constante cosmológica a causa da aceleração do fator de escala. Da equação (3.28), vemos que isso é possível ($\ddot{a} > 0$) se $2\Lambda > \rho + 3p$. Nesse cenário, o fator de escala ganha um grande acréscimo com o tempo, então o termo k da equação (3.25) sofre grande diluição e pode ser desprezado. Ainda, admitindo-se que a densidade de energia da matéria era desprezível nessa época, de (3.25) temos a solução

$$a(t) = \exp \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t - t_0) \right], \quad (3.49)$$

que expressa o fato de que quando a constante cosmológica domina, a taxa de expansão do Universo é alta. Essa solução é conhecida como *solução de de Sitter*. Mas, certamente, a era inflacionária deve ter um fim e, para isso, especula-se que a energia da constante cosmológica tenha se convertido em matéria, a qual causaria uma expansão desacelerada do Universo que, a partir de então, obedeceria ao Modelo Padrão.

Os modelos inflacionários correntes utilizam-se de campos escalares *acoplados* (ver subseção 3.8.1) ao campo gravitacional, com densidades de potencial de auto interação adequados a fornecer o cenário mais correto. Nesses tipos de modelo, o campo escalar é o responsável pela inflação e é chamado de *inflaton*. A ação que representa um modelo típico de campo escalar acoplado ao campo gravitacional é a seguinte

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \right\}, \quad (3.50)$$

e descreve um Universo dominado pelo campo escalar, aqui representado por ϕ . A ação acima é a soma da ação do campo gravitacional com a ação do campo escalar, proveniente da densidade de lagrangiana $\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)$, que descreve ϕ [48]. As formas mais comuns de potencial utilizadas são a forma exponencial, $V(\phi) = V_0 \exp[-\alpha\phi(t)]$, e a forma de potência, $V(\phi) = V_0\phi(t)^m$, com V_0 , α e m sendo constantes arbitrárias.

Da variação da ação (3.50) com respeito a $g_{\mu\nu}$, temos o tensor energia-momento para o campo

$$T_{\mu\nu}^{\phi} = \partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}\partial_{\sigma}\phi\partial^{\sigma}\phi - V(\phi) \right), \quad (3.51)$$

que identificado ao tensor energia-momento para um fluido perfeito, leva-nos às expressões para a densidade de energia e para a pressão do campo, respectivamente,

$$\rho_{\phi} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.52)$$

$$p_{\phi} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.53)$$

A condição de conservação do tensor energia-momento nos leva à equação de fluido para o campo escalar

$$\dot{\rho}_{\phi} + 3H(\rho_{\phi} + p_{\phi}) = 0, \quad (3.54)$$

e a variação da ação (3.50) com respeito a ϕ nos fornece a equação que governa a evolução temporal do campo escalar (equação de Klein-Gordon)

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (3.55)$$

que não é uma equação independente, pois a mesma pode ser obtida a partir da substituição de (3.52) e (3.53) em (3.54). Lembre que, de acordo com o princípio cosmológico, o Universo é homogêneo e isotrópico, o que nos levou a considerar o campo escalar como homogêneo nas equações acima, ou seja, somente como função do tempo, $\phi = \phi(t)$.

Para um Universo dominado pelo campo escalar, as equações de Friedmann e da aceleração são

$$H^2 = \frac{\rho_{\phi}}{3}, \quad (3.56)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -p_{\phi}. \quad (3.57)$$

Para que tenhamos expansão acelerada, devemos ter uma pressão negativa, o que é garantido pela condição $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, isto é, quando o termo cinético

é desprezível frente ao potencial. Por outro lado, com essa condição, o potencial está para o seu valor máximo e, se temos um período de expansão acelerada, o potencial deve variar muito lentamente nesse período. Então, podemos escrever $V \approx \text{constante}$ ou $V' = \epsilon$, onde ϵ é um valor muito pequeno. Essa aproximação é conhecida como *aproximação slow-roll*, caracterizando uma expansão acelerada.

No regime *slow-roll*, $\dot{\phi} \approx \text{constante}$ e $\ddot{\phi} \approx 0$, tal que a equação (3.55) pode ser escrita como

$$3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (3.58)$$

e pela consideração de que $V \approx \text{constante}$, a equação (3.56), através de (3.52), torna-se

$$H^2 \approx \frac{V_0}{3} = \text{constante}, \quad (3.59)$$

de onde temos a solução inflacionária exponencial

$$a(t) = a_0 \exp \sqrt{\frac{V_0}{3}} t. \quad (3.60)$$

Daí, concluímos que independente da forma do potencial, a aproximação *slow-roll* sempre fornecerá uma solução aproximadamente exponencial.

Das equações (3.52) e (3.53), podemos considerar que no período da inflação exponencial temos $p_\phi = -\rho_\phi = -V$ (similar ao que ocorre no modelo da constante cosmológica), e o inflaton evoluirá do estado de *falso vácuo* (vácuo meta estável) para o estado de *vácuo verdadeiro* (vácuo estável), quando $dV/d\phi$ não for mais pequeno (término do regime inflacionário). No final dessa fase, o potencial chega ao seu mínimo e o termo cinético não é mais desprezível e, de acordo com a equação (3.55), o inflaton sofre oscilações amortecidas e perde energia, a qual reaquece o Universo. Aí temos o fim da inflação e o Modelo Padrão passa a ser a descrição correta da evolução do Universo.

Listamos aqui dois dos principais problemas do Modelo Padrão que o modelo inflacionário consegue resolver:

i) *Problema do Horizonte*: A luz percorre desde o início do Universo até um instante t uma distância dada por

$$d = a(t) \int_0^t \frac{dt^*}{a(t^*)}, \quad (3.61)$$

onde o espaço considerado é descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker, com $k = 0$. Tem-se $ds = 0$ para a luz, o que implica em $dt^2 - a(t)^2 dr^2 = 0$, e escrevemos (3.61) como $d = a(t) \int_0^r dr = a(t)r$. Daqui, podemos ver que as regiões que estavam em contato causal no início ultrapassaram seus horizontes em virtude de $a(t)$ crescer exponencialmente, o que hoje nos faz parecer que essas regiões nunca poderiam estar em contato causal.

ii) *Problema da Planaridade*: Da equação (3.41), temos

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2}. \quad (3.62)$$

Analisando essa equação, constatamos que se o fator de escala cresce exponencialmente, o seu lado direito tende a zero e, conseqüentemente, temos que Ω tende a 1, significando também que o Universo tende a ter uma geometria plana, e isso é o que observamos hoje.

Outros problemas que o modelo inflacionário pode resolver estão detalhados na referência [47].

3.8.1 Acoplamento ao campo gravitacional

O acoplamento de um campo qualquer ao campo gravitacional pode ser mínimo ou não mínimo. Diz-se que o acoplamento é mínimo quando o campo não está acoplado ao escalar de curvatura, e não mínimo quando este está acoplado ao escalar de curvatura. A seguir estão ilustradas as lagrangianas que representam

cada tipo de acoplamento.

$$\begin{aligned} \text{Acoplamento m\u00ednimo} &\longrightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}R + \mathcal{L}_\chi, \\ \text{Acoplamento n\u00e3o m\u00ednimo} &\longrightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}F(\chi)R + \mathcal{L}_\chi, \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde χ representa um campo qualquer e \mathcal{L}_χ a lagrangiana que o descreve, enquanto $F(\chi)$ \u00e9 uma fun\u00e7\u00e3o gen\u00e9rica que descreve o acoplamento n\u00e3o m\u00ednimo deste com o campo gravitacional.

O acoplamento n\u00e3o m\u00ednimo descreve uma teoria de gravita\u00e7\u00e3o onde o valor da "constante" gravitacional varia de ponto a ponto no espa\u00e7o-tempo. Podemos ver isso notando que

$$\frac{c^3}{16\pi}F[\chi(\mathbf{x}, t)] R \equiv \frac{c^3}{16\pi\bar{G}} R, \quad \text{com} \quad \bar{G} = \frac{1}{F[\chi(\mathbf{x}, t)]} = \bar{G}(\mathbf{x}, t). \quad (3.64)$$

Aqui voltamos \u00e0s unidades SI para poder analisar o significado desse acoplamento.

Tendo isso em vista, obviamente que a a\u00e7\u00e3o com um acoplamento n\u00e3o m\u00ednimo nos leva a uma *teoria de gravita\u00e7\u00e3o modificada*. Cabe frisar aqui que podemos considerar teorias da gravita\u00e7\u00e3o com acoplamentos n\u00e3o m\u00ednimos como teorias que generalizam a Relatividade Geral. Pois, de acordo com (3.64), quando $F(\chi) = \text{constante} = 1$, recuperamos a Relatividade Geral como concebida por Einstein. Essa generaliza\u00e7\u00e3o teve sua g\u00eane-se na tentativa de Brans e Dicke de implementar completamente o *princ\u00edpio de Mach* na teoria da Relatividade Geral [49]. Dessa tentativa, surgiu a primeira teoria de gravita\u00e7\u00e3o com acoplamento n\u00e3o m\u00ednimo, representada pela seguinte a\u00e7\u00e3o

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \phi R - \frac{\omega}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \mathcal{L}_c \right\}, \quad (3.65)$$

onde $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ \u00e9 um campo escalar, $\omega = \omega(\phi)$ \u00e9 o par\u00e2metro de Brans-Dicke e \mathcal{L}_c \u00e9 a densidade de lagrangiana que descreve os componentes materiais que comp\u00f5em o Universo.

3.9 Expansão acelerada e energia escura

A partir das medidas observacionais, verifica-se que $\Omega_{total}^0 \approx 1$, mas os constituintes conhecidos não são suficientes para que o parâmetro de densidade tenha esse valor. As medidas do satélite WMAP estabelecem que $\Omega_{total}^0 = 1.02 \pm 0.02$ [50] (lembre-se que nesse caso $k \approx 0$). A radiação e a matéria (incluindo-se a *matéria escura* – ver subseção 3.9.1) totalizam: $\Omega_r^0 + \Omega_m^0 + \Omega_{dm}^0 \approx 0.28$ [51]. Isso significa que deve existir mais um constituinte, ainda desconhecido pela Cosmologia, o qual, por esse motivo, acabou levando o nome de *energia escura*.

Um outro problema com o Modelo Padrão, que veio à tona a partir de observações astronômicas recentes, é o *Problema da Expansão Acelerada*. A medida mais confiável do valor do parâmetro de desaceleração hoje, q_0 , foi realizada por grupos que estudam supernovas distantes do tipo Ia [52]. Os resultados das medidas mostram que o Universo está em expansão acelerada hoje, ou seja, que $q_0 < 0$. Esse resultado certamente é inesperado, pois, como mencionamos na seção 3.6, o Modelo Padrão prevê um Universo sempre em expansão desacelerada. Claramente, as observações astronômicas mostram uma discrepância séria com as previsões do Modelo Padrão, o que inevitavelmente exige mais uma correção.

Em conexão com o problema do parâmetro de densidade, poderíamos também associar a aceleração cosmológica à energia escura. Isso parece algo natural, *a priori*, uma vez que temos dois problemas que aparentemente podem ser resolvidos pela mesma suposição. De acordo com os dados observacionais, o parâmetro de densidade associado à energia escura deve ter hoje o valor $\Omega_{de}^0 = 0.72 \pm 0.03$ [51].

Como no caso da inflação, a alternativa mais imediata é atribuir à constante cosmológica a natureza da energia escura. Desse modo, teríamos um Universo composto por radiação, matéria e constante cosmológica. Esse modelo é chamado de modelo Λ CDM, onde Λ está designando a constante cosmológica e a sigla CDM significa *Cold Dark Matter* (toda a matéria considerada compreende a matéria ordinária mais a matéria escura não relativística). A partir de (3.25),

levando em conta as soluções (3.31) e (3.32), temos então a equação de Friedmann para o modelo Λ CDM

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\rho_m^0}{a^3} + \frac{\rho_r^0}{a^4} + \Lambda. \quad (3.66)$$

As constantes de proporcionalidade ρ_m^0 e ρ_r^0 são as densidades de energia da matéria e da radiação avaliadas num instante t_0 , respectivamente. Lembre-se que agora usamos as unidades $8\pi G = c = 1$ e consideramos $k = 0$.

Quando a matéria e a constante cosmológica são dominantes sobre a radiação, podemos desprezar ρ_r^0/a^4 em (3.66), obtendo a solução

$$a(t) = \left(\frac{\rho_m^0}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \sinh \left[\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2}(t + K_0) \right] \right\}^{\frac{2}{3}}, \quad (3.67)$$

e quando a radiação é dominante sobre a matéria, podemos desprezar ρ_m^0/a^3 , de onde temos

$$a(t) = \left(\frac{\rho_r^0}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sinh \left[2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t + K_1) \right]}, \quad (3.68)$$

onde K_0 e K_1 são constantes de integração.

A curva da diferença de magnitudes μ_0 (ver (3.43)), calculada a partir desse modelo, ajusta-se muito bem à curva observacional. A concordância do modelo com as medidas de anisotropia da radiação cósmica de fundo também é excelente. Mas, apesar desse grande sucesso do modelo Λ CDM, existe um grave problema a ser enfrentado, relacionado à própria constante cosmológica.

De acordo com a teoria inflacionária, o valor da sua densidade de energia nos primórdios do Universo deveria ser $\rho_\Lambda \approx 10^{95}\text{kg/m}^3$. Por outro lado, o valor da sua densidade de energia hoje deve ser $\rho_\Lambda^0 \approx 0.72 \rho_c^0 = 10^{-26}\text{kg/m}^3$. Então, temos que $\rho_\Lambda/\rho_\Lambda^0 \approx 10^{121}$. Lembrando que a constante cosmológica está relacionada à sua densidade de energia por $\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda/c^2$, vemos que o seu valor hoje difere do seu valor na época da inflação em 121 ordens de grandeza! Ora, se Λ é uma constante, está claro que temos aqui uma grave contradição.

Um modelo alternativo ao Λ CDM, bastante estudado pela comunidade científica, considera a energia escura como sendo um campo escalar, que

conforme a equação (3.28) (com $\Lambda = 0$) deve ter uma pressão negativa associada. Esse campo escalar, que promove a aceleração cosmológica atual, é chamado de *quintessência*. A ação que descreve um modelo típico de quintessência é a mesma que a que descreve a inflação, mais as ações da radiação e da matéria

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \right\} + S_r + S_m. \quad (3.69)$$

Em geral, despreza-se S_r , haja vista que a densidade de energia da radiação em comparação às densidades de energia da matéria e da quintessência é desprezível na época atual, o que também pode ser dito de sua pressão em comparação à pressão da quintessência.

Embora o modelo de quintessência aparentemente não possua problemas graves como o modelo da constante cosmológica, é um tanto inconveniente pelo fato de depender de um potencial arbitrário $V(\phi)$, que deve ser finamente ajustado para poder descrever a transição de um regime desacelerado para um regime acelerado em acordo com as observações astronômicas.

Os aprimoramentos dos modelos já existentes, tanto quanto a procura por melhores modelos que descrevam a expansão acelerada atual, são indubitavelmente uma necessidade. Portanto, o problema da energia escura permanece em aberto.

3.9.1 Matéria escura

Observações das curvas de rotação de galáxias [53, 54] mostram que, além da matéria luminosa, existe um outro tipo de matéria compondo o Universo. Essa conclusão se deve ao fato de que, apenas baseando-se na quantidade de matéria calculada a partir das fontes luminosas da galáxia, constata-se que a matéria que conhecemos não dá conta de gerar a força gravitacional à qual as estrelas estão submetidas, medida a partir de suas velocidades de órbita em torno do centro galáctico. Assim, a velocidade orbital das estrelas em torno do centro das galáxias é maior do que a prevista com base na matéria luminosa que compõe cada galáxia.

Isso implica na existência de algum outro tipo de matéria, não luminosa, a qual interage com a matéria ordinária apenas gravitacionalmente e é responsável por essa força gravitacional extra necessária à explicação das curvas de rotação das galáxias. Devido a essas características, tal matéria faltante leva o nome de matéria escura. Os dados astronômicos revelam que em torno de 9/10 de cada galáxia é composto por matéria escura.

A primeira observação que levou à formulação desse problema ocorreu em 1933 [28]. Mesmo que esse seja um problema relativamente antigo, a natureza desse outro tipo de matéria é desconhecido até o presente e várias partículas candidatas são propostas na literatura [55]. Atualmente, a explicação mais aceita pelos cosmólogos e astrônomos para as curvas de rotação de galáxias ainda é a de que existe um campo de matéria desconhecido que apresenta somente interação gravitacional. Os dados recentes das medidas da matéria contida em galáxias através do efeito das lentes gravitacionais suportam fortemente a existência da matéria escura [56, 57]. Algumas teorias alternativas ao fluido de matéria escura são: Modified Newtonian Dynamics (MOND) [58], teorias $f(R)$ [59] e $f_i(R)$ [60] (matéria não minimamente acoplada à gravidade). As teorias $f(R)$ e $f_i(R)$ consideram a matéria escura como um efeito geométrico.

Capítulo 4

Simetria de Noether

Nas análises subsequentes, determinaremos as densidades de potencial e os acoplamentos com o campo gravitacional a partir da *simetria de Noether*. Tal simetria funcionará como um primeiro princípio no lugar de se propor as funções da ação que descreve o modelo de uma maneira *ad hoc*. Desse modo, teremos uma simetria como origem para as formas das ações utilizadas nos modelos estudados.

4.1 Teorema de Noether

Tomemos a lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, \lambda)$, onde q_i representa as coordenadas generalizadas (parametrizadas por λ) e o ponto denota derivada com relação ao parâmetro λ . As quantidades físicas do sistema mecânico descrito por \mathcal{L} que não mudam seu valor durante a evolução do sistema são grandezas conservadas, chamadas de constantes de movimento.

Uma *constante de movimento* de um sistema mecânico é definida matematicamente como uma função f das coordenadas generalizadas q_i e de suas respectivas derivadas \dot{q}_i (possivelmente também do parâmetro λ), a qual permanece constante durante a evolução do sistema

$$f(q_i, \dot{q}_i, \lambda) = \text{constante} \quad \text{ou} \quad \frac{df}{d\lambda} = 0. \quad (4.1)$$

As constantes de movimento fornecem equações diferenciais de primeira ordem, as quais dão informações importantes sobre a evolução do sistema. Tais constantes de movimento ainda podem ajudar na procura de soluções analíticas para as equações de movimento. Portanto, condições gerais que garantem a existência de constantes de movimento são de grande relevância para os problemas de dinâmica.

Na dinâmica lagrangiana, existe uma relação geral entre simetria (invariância sob transformações de coordenadas) e quantidades conservadas – a existência de uma simetria implica numa quantidade conservada.

Considere a seguinte transformação pontual

$$q_i(\lambda) \longrightarrow q'_i(\lambda') = q_i(\lambda) + \epsilon \alpha_i(q(\lambda), \lambda), \quad (4.2)$$

$$\lambda \longrightarrow \lambda' = \lambda + \epsilon \beta(q(\lambda), \lambda), \quad (4.3)$$

onde α_i e β são funções conhecidas de $(n + 1)$ variáveis – funções das n coordenadas generalizadas e do parâmetro λ – e ϵ é um parâmetro infinitesimal arbitrário.

A ação que descreve a dinâmica considerada é invariante sob a transformação (4.2)-(4.3) se

$$\Delta S = \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} \mathcal{L} \left(q'_i(\lambda'), \frac{dq'_i(\lambda')}{d\lambda'}, \lambda' \right) d\lambda' - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathcal{L} \left(q_i(\lambda), \frac{dq_i(\lambda)}{d\lambda}, \lambda \right) d\lambda = 0. \quad (4.4)$$

Se a condição de invariância (4.4) é verificada sob a transformação (4.2)-(4.3), existe uma quantidade conservada associada a \mathcal{L} . Tal relação entre simetria e quantidade conservada é garantida pelo *Teorema de Noether* [61, 62]:

Para um sistema mecânico com n graus de liberdade, se a ação é invariante sob a transformação (4.2)-(4.3), a quantidade

$$\Sigma_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i \beta - \alpha_i) - \mathcal{L} \beta \quad (4.5)$$

é uma constante de movimento.

Esse importante teorema é devido a Emmy Noether (1918) [63].

Se o sistema mecânico é descrito por uma lagrangiana que não depende explicitamente de λ , isto é, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$, teremos invariância sob uma translação em λ , preservando-se as coordenadas q_i inalteradas. Isso corresponde à invariância sob as transformações $\alpha_i = 0$ e $\beta = \text{constante}$ nas transformações (4.2)-(4.3).

Então, pelo teorema de Noether, a constante de movimento associada à dinâmica descrita por $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$ será

$$\bar{\Sigma}_0 = \frac{\Sigma_0}{\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}, \quad (4.6)$$

onde \mathcal{H} é a função hamiltoniana. Isso significa que a energia total do sistema é uma constante de movimento. Isto é, o teorema de Noether diz que a energia total do sistema é conservada.

4.2 Condição de existência para a simetria de Noether

Consideremos uma transformação pontual – a condição de simetria a ser desenvolvida a seguir referir-se-á a *simetrias pontuais* [65, 66, 67]. Qualquer transformação invertível de coordenadas generalizadas $Q^i = Q^i(\mathbf{q})$ induz uma transformação de velocidades generalizadas, tal que

$$\dot{Q}^i(\mathbf{q}) = \frac{\partial Q^i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (4.7)$$

onde a matriz $J = \|\partial Q^i / \partial q_j\|$ é o jacobiano da transformação de coordenadas, cujo determinante é suposto ser não nulo. Em geral, tal condição não pode ser satisfeita em todo o espaço, sendo garantida somente na vizinhança de um ponto. Em outras palavras, a referida transformação é local.

Como ponto de partida, assumiremos que a transformação pontual

depende de um parâmetro ε , isto é, $Q^i = Q^i(\mathbf{q}, \varepsilon)$ – ressaltamos aqui que a transformação pode depender de um ou mais parâmetros. Para valores infinitesimais de ε , a transformação é então gerada por um campo vetorial: podemos no momento considerar $\varepsilon \partial / \partial x$ como representando uma translação infinitesimal ao longo do eixo x e $\varepsilon [x (\partial / \partial y) - y (\partial / \partial x)]$ como uma rotação infinitesimal em torno do eixo z . Portanto, a transformação induzida (4.7) é representada pelo campo vetorial

$$\mathbf{X} = \alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\frac{d}{d\lambda} \alpha^i(\mathbf{q}) \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}, \quad (4.8)$$

definido no espaço tangente ao ponto da transformação. O campo \mathbf{X} é chamado de *gerador infinitesimal de simetria*. Os α^i são os coeficientes do gerador de simetria, os quais são funções somente das coordenadas generalizadas.

Uma função $f = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é invariante sob a transformação \mathbf{X} se

$$L_{\mathbf{X}} f = \mathbf{X} f = \alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial f}{\partial q^i} + \left(\frac{d}{d\lambda} \alpha^i(\mathbf{q}) \right) \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^i} = 0, \quad (4.9)$$

onde $L_{\mathbf{X}} f$ é a derivada de Lie de f com respeito a \mathbf{X} . Se $L_{\mathbf{X}} f = 0$, dizemos que \mathbf{X} é a *simetria* associada a f , ou seja, f é invariante sob translação das coordenadas q_i .

Consideremos agora lagrangianas da forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$, às quais temos associada a *função energia* [64]

$$E_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}, \quad (4.10)$$

onde há soma sobre os índices repetidos ii (todo o desenvolvimento a seguir respeitará essa convenção). A equação (4.10) representa a energia total, que em qualquer caso é uma constante de movimento – atente para o fato de isso sempre ser verdade para uma lagrangiana que não depende explicitamente de λ (veja (4.6)). Considerando a função f como sendo a lagrangiana \mathcal{L} , de (4.9) temos que se

$$L_{\mathbf{X}} \mathcal{L} = 0, \quad (4.11)$$

\mathbf{X} é a simetria associada a \mathcal{L} . Então, se a condição acima é satisfeita, a lagrangiana \mathcal{L} apresenta uma simetria – invariância sob translação das coordenadas q_i .

Por outro lado, tomando as equações de Euler-Lagrange associadas à lagrangiana \mathcal{L}

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} = 0, \quad (4.12)$$

sob a aplicação dos α^i obtemos

$$\alpha^j \left(\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} \right) = 0, \quad (4.13)$$

e da regra do produto escrevemos

$$\alpha^j \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} = \frac{d}{d\lambda} \left(\alpha^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \right) - \left(\frac{d\alpha^j}{d\lambda} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j}. \quad (4.14)$$

Pela substituição de (4.14) em (4.13) e do uso da definição do gerador infinitesimal de simetria (4.8), chegamos a

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\alpha^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) = \mathbf{X}\mathcal{L} = L_{\mathbf{X}}\mathcal{L}. \quad (4.15)$$

Se aplicamos a condição de simetria (4.11) a esse resultado, temos como consequência direta o teorema de Noether:

Se $L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = 0$, então a quantidade $\Sigma_0 = \alpha^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}$ é uma constante de movimento.

Uma vez imposta a condição de simetria $L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = 0$, temos uma simetria de Noether adicional para o sistema dinâmico, além daquela associada à conservação da energia total, inerente a todo sistema descrito por uma lagrangiana que independe explicitamente de λ . Em vista do que foi desenvolvido acima, essa simetria está conectada à imposição de invariância sob translação das coordenadas generalizadas. Isso pode ser visualizado a partir da quantidade conservada resultante da condição de simetria $L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = 0$, pois esta corresponde a $\beta = 0$ e $\alpha^i \neq 0$ na constante de movimento (4.5) do Teorema de Noether, que pelas transformações (4.2) e (4.3) traduzem invariância sob translação dos q_i .

Um ponto importante relacionado à existência da simetria de Noether deve ser abordado aqui. Considere o operador $i_{\mathbf{Y}}$, definido por

$$i_{\mathbf{Y}}\gamma = y^i\gamma_i, \quad (4.16)$$

onde \mathbf{Y} é o campo vetorial $\mathbf{Y} = y^i\partial/\partial x^i$ e γ é o um-forma $\gamma = \gamma_i dx^i$.

A constante associada à simetria de Noether, $\Sigma_0 = \alpha^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}$, pode ser expressa independentemente do sistema de coordenadas pela aplicação do operador (4.16) – com o campo vetorial \mathbf{Y} sendo agora o gerador de simetria \mathbf{X} – ao *um-forma de Cartan* associado a \mathcal{L} [65], definido por

$$\theta_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} dq^i, \quad (4.17)$$

ou seja,

$$i_{\mathbf{X}}\theta_{\mathcal{L}} = \alpha_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = \Sigma_0. \quad (4.18)$$

Isso significa que Σ_0 é uma quantidade invariante com relação à mudança do sistema de coordenadas no qual ela é expressa.

Como consequência, se existir uma simetria de Noether associada ao sistema, sob uma transformação de coordenadas no espaço de configuração, podemos descrever a dinâmica a partir de um sistema de coordenadas em que uma das variáveis seja cíclica. Esse procedimento pode, em alguns casos, levar à integração completa do sistema, o que revela uma vantagem técnica relacionada à simetria de Noether.

Pode-se mostrar, ainda, que o novo conjunto de variáveis $\{Q_k(q_l)\}$, via transformação pontual de coordenadas no espaço de configuração, tal que uma das variáveis é cíclica, obedece ao seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \alpha_l \frac{\partial u_{k'}}{\partial q_l} &= 0, \\ \alpha_l \frac{\partial z}{\partial q_l} &= 1, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde $k' = 1, 2, \dots, k-1$ e os $u_{k'}$ e z compreendem as novas coordenadas $Q_k(q_l)$ do espaço de configuração, com z sendo a variável cíclica.

4.3 Determinação da lagrangiana pontual e condição de simetria

Nos desenvolvimentos dos capítulos posteriores, o método consistirá na aplicação da condição $L_{\mathbf{x}}\mathcal{L} = 0$ a uma lagrangiana pontual genérica que representa algum modelo cosmológico geral. Respeitando essa condição de simetria, determinaremos as formas dos potenciais e dos acoplamentos indefinidos nas ações dos modelos. Portanto, o critério para a existência de alguma simetria de Noether pode restringir as formas possíveis para a lagrangiana geral, ao mesmo tempo em que nos fornece ferramentas que podem ajudar na integração das equações de campo. Tal método funciona como um primeiro princípio para a determinação das funções que representam os potenciais e os acoplamentos.

A condição de existência para a simetria de Noether desenvolvida na seção anterior é aplicada a lagrangianas pontuais. Assim, devemos primeiramente transcrever as densidades de lagrangiana que descrevem os modelos cosmológicos para a forma pontual, para posteriormente aplicar a condição de simetria. O método geral dessa transcrição será desenvolvido a seguir.

Tomemos uma ação que descreve um acoplamento não mínimo de um determinado campo à gravidade

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ F(\chi)R + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\chi) \right\}. \quad (4.20)$$

Como podemos ver, a quantidade entre chaves dessa ação representa uma densidade de lagrangiana, o que significa que o modelo é descrito por um funcional com infinitos graus de liberdade.

A seguir, transformaremos nosso problema original em um problema com finitos graus de liberdade, isto através da especificação de uma métrica que representa um espaço homogêneo e isotrópico. Para uma métrica de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plana, considerando-se o campo homogêneo, a ação

(4.20) toma a forma

$$S = 2\pi^2 \int dt a^3 \left\{ 6F \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 - V \right\}. \quad (4.21)$$

Integrando (4.21) por partes e levando em conta as condições de fronteira, definimos uma nova ação

$$\bar{S} = -\frac{S}{2\pi^2} = \int dt \left\{ 6Fa\dot{a}^2 + 6a^2\dot{a}\frac{dF}{d\chi}\dot{\chi} - a^3\left(\frac{1}{2}\dot{\chi}^2 - V\right) \right\}. \quad (4.22)$$

Por fim, de (4.22) chegamos à nova lagrangiana que descreve a dinâmica do modelo, a saber,

$$\mathcal{L} = 6Fa\dot{a}^2 + 6a^2\dot{a}\frac{dF}{d\chi}\dot{\chi} - a^3\left(\frac{1}{2}\dot{\chi}^2 - V\right). \quad (4.23)$$

Perceba agora que a dinâmica é descrita por uma lagrangiana que tem a forma $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$, ou seja, uma lagrangiana pontual que não depende explicitamente do tempo. Nesse caso ilustrativo, as coordenadas generalizadas são $q_1 = a$, $q_2 = \chi$, onde $\dot{q}_1 = da/dt = \dot{a}$, $\dot{q}_2 = d\chi/dt = \dot{\chi}$, e o problema passa a apresentar dois graus de liberdade. Observe que em nossos problemas o parâmetro λ será o tempo cosmológico, pois uma vez que a lagrangiana pontual provém da imposição de um espaço homogêneo e isotrópico, resulta que os campos são funções do tempo cosmológico.

Com a lagrangiana pontual (4.23) em mãos, estamos aptos a aplicar a condição de existência para a simetria de Noether. Da expressão (4.8), temos o gerador de simetria correspondente

$$\mathbf{X} = \alpha_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} + \alpha_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} + \frac{d\alpha_1}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} + \frac{d\alpha_2}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\chi}}, \quad (4.24)$$

onde α_1 e α_2 são funções das coordenadas a e χ .

Aplicando-se a condição de simetria,

$$L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = \mathbf{X}\mathcal{L} = 0, \quad (4.25)$$

à lagrangiana (4.23), com o gerador de simetria dado por (4.24), obtemos um polinômio em termos das derivadas dos campos que deve ser identicamente nulo

$$A\dot{a}^2 + B\dot{\chi}^2 + C\dot{a}\dot{\chi} + D = 0, \quad (4.26)$$

cujos coeficientes são

$$A = 6F \left[\alpha_1 + 2a \frac{\partial \alpha_1}{\partial a} + \left(\alpha_2 + a \frac{\partial \alpha_2}{\partial a} \right) \frac{a}{F} \frac{dF}{d\chi} \right], \quad (4.27)$$

$$B = -\frac{a^2}{2} \left(3\alpha_1 - 12 \frac{dF}{d\chi} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \chi} + 2a \frac{\partial \alpha_2}{\partial \chi} \right), \quad (4.28)$$

$$C = 6a \left[a\alpha_2 \frac{d^2 F}{d\chi^2} + \left(2\alpha_1 + a \frac{\partial \alpha_1}{\partial a} + a \frac{\partial \alpha_2}{\partial \chi} \right) \frac{dF}{d\chi} + 2F \frac{\partial \alpha_1}{\partial \chi} - \frac{a^2}{6} \frac{\partial \alpha_2}{\partial a} \right], \quad (4.29)$$

$$D = a^2 \left(3\alpha_1 V + a\alpha_2 \frac{dV}{d\chi} \right). \quad (4.30)$$

Para que a igualdade (4.26) seja satisfeita, cada um dos coeficientes A , B , C e D deve se anular, de onde resulta o seguinte sistema de equações diferenciais parciais acopladas

$$\alpha_1 + 2a \frac{\partial \alpha_1}{\partial a} + \left(\alpha_2 + a \frac{\partial \alpha_2}{\partial a} \right) \frac{a}{F} \frac{dF}{d\chi} = 0, \quad (4.31)$$

$$3\alpha_1 - 12 \frac{dF}{d\chi} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \chi} + 2a \frac{\partial \alpha_2}{\partial \chi} = 0, \quad (4.32)$$

$$a\alpha_2 \frac{d^2 F}{d\chi^2} + \left(2\alpha_1 + a \frac{\partial \alpha_1}{\partial a} + a \frac{\partial \alpha_2}{\partial \chi} \right) \frac{dF}{d\chi} + 2F \frac{\partial \alpha_1}{\partial \chi} - \frac{a^2}{6} \frac{\partial \alpha_2}{\partial a} = 0, \quad (4.33)$$

$$3\alpha_1 V + a\alpha_2 \frac{dV}{d\chi} = 0. \quad (4.34)$$

Haverá alguma simetria para a lagrangiana (4.23) – condição (4.25) satisfeita – se existir uma solução para o sistema acima em que pelo menos um α_i seja diferente de zero. Observe que não necessariamente existirá apenas um conjunto de α_i 's porque as funções F e V estão indefinidas. Podem existir vários conjuntos de formas para F e V que correspondam a vários conjuntos de α_i 's. Em outras palavras, a solução do sistema será dada por conjuntos solução $\{\alpha_1, \alpha_2, F, V\}$. Isso significa que poderá existir mais de uma simetria, isto é, a solução para a condição $L_{\mathbf{x}}\mathcal{L} = 0$ não será necessariamente única.

Com o que foi exposto acima, completamos a ilustração do método da simetria de Noether que aplicaremos nos desenvolvimentos a seguir.

Capítulo 5

Quintessência não minimamente acoplada versus Λ CDM

A despeito da variedade de teorias que generalizam a Relatividade Geral, os dados observacionais que confrontam a Relatividade Geral com outras teorias mostram que o modelo Λ CDM [68] ainda parece ser o de melhor precisão – pelo menos desde a era dominada pela matéria até o presente. Sem ignorar tal fato observacional, neste capítulo investigaremos uma teoria geral de quintessência não minimamente acoplada à gravidade, compreendendo as eras da radiação, da matéria e da constante cosmológica. Apesar de o modelo da quintessência não minimamente acoplada ser fisicamente diferente do modelo da constante cosmológica, mostraremos que por meio de uma mudança de coordenadas (gerada pela simetria de Noether) no espaço de configuração, a partir das equações de campo originais, pode-se obter uma dinâmica que é essencialmente a mesma daquela do modelo Λ CDM.

O trabalho [69] analisa um Universo composto por um campo escalar não minimamente acoplado ao campo gravitacional no contexto do período inflacionário (campo de inflaton) usando o método da simetria de Noether, e como resultado, várias formas para o potencial e o acoplamento são obtidas. Na presente análise, essa técnica é empregada para um campo escalar não minimamente acoplado no contexto de um campo de energia escura (quintessência), com os campos

de matéria e radiação presentes. Nesse contexto, somos levados a uma restrição mais robusta às formas do potencial e do acoplamento para a obtenção de uma lagrangiana de Noether. Sob nossas considerações, um único conjunto de funções que representam o potencial e o acoplamento é obtido, o qual nos leva à dinâmica acima mencionada. A partir deste capítulo, serão apresentadas as nossas contribuições originais.

5.1 Equações de campo

Tomamos a seguinte ação geral para um Universo composto por campos de matéria e radiação e um campo escalar (quintessência) não minimamente acoplado à gravidade

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ L(\phi)R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - U(\phi) + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_r \right\}, \quad (5.1)$$

onde ϕ descreve o campo de quintessência e \mathcal{L}_m e \mathcal{L}_r são as densidades de lagrangiana dos campos de matéria e de radiação, respectivamente. Aqui, $L(\phi)$ é uma função genérica de classe C^2 que representa o acoplamento à gravidade e $U(\phi)$ é o potencial de auto interação do campo escalar.

Pela variação da ação (5.1) com respeito ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$, chegamos às equações de Einstein modificadas

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{T_{\mu\nu}}{2L}. \quad (5.2)$$

Acima, $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^m + T_{\mu\nu}^r + T_{\mu\nu}^\phi$, onde os sobrescritos m, r e ϕ representam os tensores energia-momento dos campos de matéria, de radiação e do campo escalar, respectivamente. Estes são definidos por

$$T_{\mu\nu}^m = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad T_{\mu\nu}^r = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_r)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (5.3)$$

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \left(\frac{1}{2} \partial_\theta \phi \partial^\theta \phi - U \right) g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \nabla_\theta \nabla^\theta) L. \quad (5.4)$$

Observemos que quando $L \rightarrow 1/2$ na equação (5.2), as equações de Einstein são recuperadas.

Consideramos agora uma métrica plana de Friedmann-Robertson-Walker, sendo o campo ϕ espacialmente homogêneo e os campos de matéria e de radiação com as equações de estado usuais $p_m = 0$ e $p_r = \rho_r/3$, respectivamente. Sob essas considerações, tomando $\rho_m = \rho_m^0/a^3$ e $\rho_r = \rho_r^0/a^4$ (Capítulo 3), obtemos da ação (5.1) a seguinte lagrangiana pontual

$$\mathcal{L} = 6a\dot{a}^2 L + 6a^2\dot{a}\frac{dL}{d\phi}\dot{\phi} - a^3\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - U\right) + \rho_m^0 + \frac{\rho_r^0}{a}, \quad (5.5)$$

a qual fornece as mesmas equações dinâmicas que aquelas obtidas a partir das equações de campo (5.2).

Chegamos à equação de Friedmann modificada pela imposição de que a função energia associada à lagrangiana (5.5) se anule, ou seja,

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{L}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \dot{a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} = 0, \\ \implies \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{\rho_m + \rho_r + \rho_\phi}{6L}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

com ρ_ϕ denotando a densidade de energia do campo de quintessência.

Da equação de Euler-Lagrange para a e ϕ , aplicada a (5.5), temos as equações da aceleração e de Klein-Gordon modificadas

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{[\rho_m + \rho_r + \rho_\phi + 3(p_r + p_\phi)]}{12L}, \quad (5.7)$$

$$\ddot{\phi} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\phi} - 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]\frac{dL}{d\phi} + \frac{dU}{d\phi} = 0, \quad (5.8)$$

respectivamente, onde p_ϕ é a pressão do campo de quintessência.

Nas equações acima, a pressão e a densidade de energia do campo de quintessência são definidas por

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + U - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\frac{dL}{d\phi}\dot{\phi}, \quad (5.9)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - U + 2\left[\frac{dL}{d\phi}\ddot{\phi} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\frac{dL}{d\phi}\dot{\phi} + \frac{d^2L}{d\phi^2}\dot{\phi}^2\right], \quad (5.10)$$

de acordo com o tensor energia-momento (5.4).

5.2 Funções de Noether

A técnica da simetria de Noether pode ser usada como uma ferramenta para sugerir formalmente funções que representam o acoplamento e o potencial indefinidos na lagrangiana (5.5). Uma vez que as formas indefinidas serão determinadas a partir da condição de existência para a simetria de Noether, o sistema dinâmico apresentará uma quantidade conservada e uma variável cíclica poderá ser encontrada através de uma mudança de coordenadas no espaço de configuração. Tais propriedades podem se mostrar úteis na procura de uma integração completa para o sistema.

Aplicando a condição de Noether $L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = \mathbf{X}\mathcal{L} = 0$ em (5.5), com \mathbf{X} definido para o presente problema por

$$\mathbf{X} = \alpha \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{d\alpha}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \frac{d\beta}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}, \quad (5.11)$$

sendo α e β funções de (a, ϕ) , chegamos ao seguinte sistema de equações diferenciais parciais acopladas

$$\alpha + 2a \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{a}{L} \frac{dL}{d\phi} \left(\beta + a \frac{\partial \beta}{\partial a} \right) = 0, \quad (5.12)$$

$$3\alpha - 12 \frac{dL}{d\phi} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} + 2a \frac{\partial \beta}{\partial \phi} = 0, \quad (5.13)$$

$$a\beta \frac{d^2 L}{d\phi^2} + \left(2\alpha + a \frac{\partial \alpha}{\partial a} + a \frac{\partial \beta}{\partial \phi} \right) \frac{dL}{d\phi} + 2L \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} - \frac{a^2}{6} \frac{\partial \beta}{\partial a} = 0, \quad (5.14)$$

$$\alpha \left(3U - \frac{\rho_r^0}{a^4} \right) + a\beta \frac{dU}{d\phi} = 0. \quad (5.15)$$

Estamos interessados em soluções com $dL/d\phi \neq 0$ (acoplamento não mínimo). Então, procurando por α e β que são dados por funções separáveis de a e ϕ , isto é,

$$\alpha = \alpha_1(a)\alpha_2(\phi), \quad \beta = \beta_1(a)\beta_2(\phi), \quad (5.16)$$

o sistema (5.12)-(5.15) fornece a solução

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{\beta_0}{a}, \quad U = \Lambda, \quad L = A + B\phi - \frac{\phi^2}{12}, \quad (5.17)$$

onde β_0 , Λ , A e B são constantes.

Como resultado, se tomamos L e U dados por (5.17), o sistema passa a apresentar uma simetria de Noether com a constante de movimento dada por

$$M_0 = \alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} + \beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \beta_0 a^2 \left[6 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \left(B - \frac{\phi}{6} \right) - \dot{\phi} \right], \quad (5.18)$$

a qual é determinada pela aplicação de (4.6).

5.3 Análise do sistema dinâmico

A partir das formas de Noether $U = \Lambda$ e $L = A + B\phi - \frac{\phi^2}{12}$ encontradas acima, temos o seguinte sistema dinâmico a ser resolvido

$$6 \left(A + B\phi - \frac{\phi^2}{12} \right) \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\rho_m^0}{a^3} + \frac{\rho_r^0}{a^4} + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \Lambda - 6 \frac{\dot{a}}{a} \left(B - \frac{\phi}{6} \right) \dot{\phi}, \quad (5.19)$$

$$\ddot{\phi} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \dot{\phi} - 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] \left(B - \frac{\phi}{6} \right) = 0, \quad (5.20)$$

$$6 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \left(B - \frac{\phi}{6} \right) - \dot{\phi} = \frac{M_0}{\beta_0 a^2}, \quad (5.21)$$

o qual resulta de (5.6), (5.8) e da inclusão da constante de movimento (5.18).

Se realizarmos a transformação $\phi \rightarrow \phi + \text{constante}$ e tomamos a constante como sendo igual a $6B$, a aplicação das funções de Noether (5.17) – válidas para uma métrica plana de Friedman-Robertson-Walker – à ação (5.1)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left(A + B\phi - \frac{\phi^2}{12} \right) R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \Lambda + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_r \right\}, \quad (5.22)$$

sob essa transformação, resulta em

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left(A - 3B^2 - \frac{\phi^2}{12} \right) R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \Lambda + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_r \right\}. \quad (5.23)$$

Podemos fazer $A - 3B^2 = 1/2$ na ação transformada e obter o acoplamento conforme $L = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\phi^2}{6} \right)$. Isso é equivalente a escolher $A = 1/2$ e $B = 0$ em L para a variável original sem perda de generalidade. Tendo em mente o resultado da transformação (5.23), pode-se retornar ao problema original com a função $L = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\phi^2}{6} \right)$ como sendo a mais general. Fazendo assim, nossa lagrangiana inicial é expressa na forma

$$\mathcal{L} = 3a\dot{a}^2 - \frac{1}{2} a\dot{a}^2 \phi^2 - a^2 \dot{a} \phi \dot{\phi} - a^3 \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - \Lambda \right) + \rho_m^0 + \frac{\rho_r^0}{a}. \quad (5.24)$$

Uma vez que temos uma simetria de Noether para a lagrangiana (5.24), de acordo com (4.19), existe uma transformação de variáveis que obedece ao sistema

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial a} + \beta \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0, \quad (5.25)$$

$$\alpha \frac{\partial z}{\partial a} + \beta \frac{\partial z}{\partial \phi} = 1, \quad (5.26)$$

onde z é a variável cíclica associada à quantidade conservada M_0 . Para o conjunto encontrado ($\alpha = 0, \beta = \beta_0/a$), o sistema (5.25) tem como solução

$$u = f(a), \quad z = \frac{a\phi}{\beta_0} + g(a). \quad (5.27)$$

Tomamos para as soluções gerais (5.27) as formas particulares $u = a$ e $z = a\phi/\beta_0$, as quais transformam a lagrangiana (5.24) em

$$\mathcal{L} = 3a\dot{a}^2 - \frac{\beta_0^2}{2}az^2 + a^3\Lambda + \rho_m^0 + \frac{\rho_r^0}{a}. \quad (5.28)$$

A nulidade da função energia e a equação de Euler-Lagrange para z aplicadas a (5.28), levam-nos a

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\rho_m^0}{a^3} + \frac{\rho_r^0}{a^4} + \frac{\beta_0^2 \dot{z}^2}{2a^2} + \Lambda, \quad (5.29)$$

$$\dot{z} + \frac{M_0}{\beta_0^2} \frac{1}{a} = 0, \quad (5.30)$$

respectivamente, o que gera um sistema muito mais simples que o dado por (5.19)-(5.21) para $A = 1/2$ e $B = 0$.

De (5.29)-(5.30), segue uma equação diferencial apenas em a

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\rho_m^0}{a^3} + \left(\rho_r^0 + \frac{M_0^2}{2\beta_0^2} \right) \frac{1}{a^4} + \Lambda. \quad (5.31)$$

Essa equação diferencial apresenta a mesma forma que a da equação de Friedmann usual para matéria, radiação e constante cosmológica (veja (3.66)). Então, desprezando-se o segundo termo do lado direito de (5.31), a bem conhecida solução para um Universo dominado por matéria, que em seguida passa ao domínio da constante cosmológica, pode ser obtida

$$a(t) = \left(\frac{\rho_m^0}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \sinh \left[\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} (t + C_0) \right] \right\}^{\frac{2}{3}}, \quad (5.32)$$

onde C_0 é uma constante (compare com (3.67)). Esse caso limite corresponde a $\rho_r^0 = 0$ e $M_0 = 0$, e a partir de (5.30), temos $z = \text{constante}$, que para as variáveis originais implica na seguinte solução para $\phi(t) = \phi_0/a(t)$

$$\phi(t) = \phi_0 \left(\frac{\Lambda}{\rho_m^0} \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \sinh \left[\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} (t + C_0) \right] \right\}^{-\frac{2}{3}}, \quad (5.33)$$

onde ϕ_0 é uma constante. Note que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$, tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} L(\phi) = 1/2$, o que está de acordo com a exigência física de que $L \rightarrow 1/2$ no presente.

Por outro lado, quando o termo de radiação domina o termo de matéria, a solução de (5.31) é

$$a(t) = \left(\frac{2\beta_0^2 \rho_r^0 + M_0^2}{2\beta_0^2 \Lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sinh \left[2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} (t + C_1) \right]}, \quad (5.34)$$

onde C_1 é uma constante (compare com (3.68)). Nesse caso temos uma densidade de energia adicional de radiação $\rho_0 = \frac{M_0^2}{2\beta_0^2}$, a qual está relacionada ao campo escalar não minimamente acoplado. Do ponto de vista de (5.31), isso também poderia ser interpretado como equivalente ao termo cinético de um campo escalar minimamente acoplado à gravidade que evolui com a^{-4} , ou simplesmente como um termo de radiação adicional incorporado em ρ_r , a saber,

$$\rho_r = \frac{\rho_r^0}{a^4} \quad \longrightarrow \quad \rho_r = \frac{\tilde{\rho}_r^0}{a^4} = \frac{\rho_r^0 + M_0^2/2\beta_0^2}{a^4}, \quad (5.35)$$

uma vez que os mesmos são indistinguíveis um do outro.

Pelo uso de (5.30) e da solução (5.34), obtemos

$$z = C_2 - \frac{M_0}{\beta_0^2} \left(\frac{2\beta_0^2 \Lambda}{2\beta_0^2 \rho_r^0 + M_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} \int \frac{dt}{\sqrt{\sinh \left[2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} (t + C_1) \right]}}, \quad (5.36)$$

com C_2 sendo uma constante. Aqui identificamos uma integral elíptica de primeira classe, a qual fornece o resultado

$$z = C_2 - \frac{M_0}{2\beta_0^2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \left(\frac{2\beta_0^2 \Lambda}{2\beta_0^2 \rho_r^0 + M_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} F \left(\eta, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (5.37)$$

onde

$$\eta = \arccos \left\{ \frac{1 - \sinh \left[2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t + C_1) \right]}{1 + \sinh \left[2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t + C_1) \right]} \right\}. \quad (5.38)$$

Finalmente, podemos obter $\phi(t)$ diretamente de $z = a\phi/\beta_0$

$$\phi(t) = \phi_1 \frac{F\left(\eta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + C_3}{\sqrt{\sinh \left[2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t + C_1) \right]}}, \quad (5.39)$$

com

$$\phi_1 = -\frac{\sqrt{3}M_0}{\sqrt{2(2\beta_0^2\rho_r^0 + M_0^2)}}, \quad (5.40)$$

$$C_3 = -\frac{2\beta_0^2}{M_0} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \left(\frac{2\beta_0^2\rho_r^0 + M_0^2}{2\beta_0^2\Lambda} \right)^{\frac{1}{4}} C_2. \quad (5.41)$$

Podemos observar que se a constante de movimento M_0 é anulada na equação (5.31), o resultado é idêntico àquele do modelo Λ CDM e a solução $\phi = \phi_0/a$ é válida em todo o período que compreende as eras da radiação, da matéria e da constante cosmológica. É interessante notar que partindo de uma lagrangiana muito diferente da usual para o modelo da constante cosmológica, a dinâmica final é a mesma. A lagrangiana (5.24) descreve um Universo com uma "constante" gravitacional variável, a qual apresenta uma física muito diferente daquela do modelo da constante cosmológica. O artifício matemático da mudança de coordenadas no espaço de configuração mascarou a física por trás da quintessência não minimamente acoplada. Assim, o resultado de tal modelo é que o mesmo reproduz a dinâmica observada das eras cosmológicas (desde a época da radiação até o presente) de forma idêntica ao modelo Λ CDM.

Se fizermos $\rho_r^0 = 0$ e $\rho_m^0 = 0$ em (5.31), tem-se um Universo composto somente pela quintessência não minimamente acoplada, e o comportamento do fator de escala será

$$a(t) = \left(\frac{M_0^2}{2\beta_0^2\Lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sinh \left[2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t + C_1') \right]}, \quad (5.42)$$

com C'_1 sendo uma constante. Tal solução mostra uma expansão inevitavelmente desacelerada-acelerada, tendendo a um Universo de de Sitter quando $t \rightarrow \infty$ (veja 3.49). A partir disso, inferimos que a presença dos campos de radiação e de matéria apenas retardarão o momento do regime acelerado. Por outro lado, um Universo composto somente pela constante cosmológica apresenta uma expansão de de Sitter genuína, sendo a presença de matéria e radiação a responsável por regimes desacelerados.

Agora é interessante extrair alguma informação do sistema dinâmico a partir da constante de movimento gerada pela condição da simetria de Noether. Da equação (5.21), para $B = 0$, obtemos uma expressão com $\dot{\phi}$ diretamente relacionado à quantidade conservada, na seguinte forma

$$\dot{\phi} = -\frac{M_0}{\beta_0 a^2} - \frac{\dot{a}}{a} \phi. \quad (5.43)$$

Haja vista que temos uma relação entre a constante de movimento e $\dot{\phi}$, pode-se relacionar a constante de movimento ao termo cinético do campo escalar. É útil analisar aqui a dinâmica geral por meio da densidade de energia do campo escalar. Aplicando (5.9) às funções de Noether, reescrevemos a densidade de energia do campo escalar em termos da constante de movimento, pelo uso de (5.43), como

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \left[\frac{M_0^2}{\beta_0^2 a^4} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \phi^2 \right] + \Lambda. \quad (5.44)$$

Note que as soluções acima mostram que ϕ dilui até um valor muito pequeno no presente, em comparação a $1/2$, independente da condição inicial de ϕ , sempre levando ao comportamento assintótico $L \rightarrow 1/2$ (acoplamento da Relatividade Geral). Levando-se em conta a mencionada diluição de ϕ e considerando um fator de escala suficientemente grande, da equação (5.44) observa-se que a densidade de energia do campo escalar avaliada hoje tende a $\rho_\phi = \Lambda$. Analogamente, de (5.10) e (5.43) concluímos que a pressão do campo escalar avaliada no presente tende a $p_\phi = -\Lambda$. Esse comportamento no tempo presente é claramente do tipo da constante cosmológica, o que foi observado nas soluções obtidas acima. Tal solução limite existe porque a equação (5.43) estabelece uma relação que garante que se ϕ

dilui, então $\dot{\phi}$ também diluirá. Um desvio do modelo Λ CDM ocorre quando voltamos ao passado, e este pode ser determinado a partir do primeiro termo de (5.44).

A equação (5.43) indica que a condição inicial para $\dot{\phi}$ pode estar diretamente relacionada à quantidade conservada conforme

$$\dot{\phi}(0) = -\frac{M_0}{\beta_0} - H(0)\phi(0), \quad (5.45)$$

onde $H(0)$ e $\phi(0)$ são o parâmetro de Hubble ($H = \dot{a}/a$) e o campo escalar avaliados em $t = 0$, imediatamente após a inflação (digamos). O fator de escala foi normalizado como $a(0) = 1$ por questão de clareza da análise. Do acoplamento $L = \frac{1}{2}(1 - \frac{\phi^2}{6})$, determina-se a possível faixa de valores para $\phi(0)$ pela exigência de que $L > 0$, o que garante uma gravidade atrativa, dando $-\sqrt{6} < \phi(0) < +\sqrt{6}$. Essas limitações na condição inicial de ϕ juntamente com a exigência de uma condição de energia fraca em $t = 0$, $\rho_\phi(0) \geq 0$, poderiam restringir os desvios com relação ao modelo Λ CDM no passado. Como um exemplo, podemos tomar o caso mais simples da constante de movimento nula, $M_0 = 0$, quando ϕ dilui com o inverso de a . Fazendo assim, a condição de energia fraca dá

$$-\sqrt{6} < \phi(0) \leq \frac{\sqrt{2\Lambda}}{H(0)} \implies -\sqrt{2\Lambda} \leq \dot{\phi}(0) < H(0)\sqrt{6}, \quad (5.46)$$

o que restringe os possíveis desvios do presente modelo (para $M_0 = 0$) com relação ao modelo da constante cosmológica.

Capítulo 6

Campos escalares e espinoriais minimamente acoplados

Iniciamos o presente capítulo com uma ação geral que representa campos escalares (quintessência) e espinoriais (férmions de Dirac) minimamente acoplados à gravidade e um campo adicional descrevendo a matéria comum (não escura). As funções indefinidas na lagrangiana geral são selecionados via simetria de Noether. Os potenciais que satisfazem tal simetria indicam que o campo escalar pode descrever a energia escura tanto como um campo de matéria padrão e o campo espinorial comporta-se como matéria padrão. A partir desse resultado, descrevemos o setor escuro com campos escalares e espinoriais, com o campo escalar compondo um campo de energia escura-matéria e os férmions o campo de matéria escura. Esse tipo de matéria escura fermiônica (mas com interações adicionais) também foi estudado em [70]. O comportamento de matéria padrão do campo de Dirac pode ser visto em outros contextos [30, 71, 72].

Haja vista que os potenciais satisfazem a condição de Noether, existe uma constante de movimento e uma variável cíclica pode ser obtida por meio de uma transformação de coordenadas no espaço de configuração para o nosso modelo. Usando essas informações adicionais fornecidas pela simetria de Noether, as equações de campo do nosso problema original podem ser integradas completamente.

Como resultado, a ação proposta que satisfaz tal simetria descreve um Universo com períodos alternados de expansão acelerada e desacelerada.

6.1 Espinores em espaço-tempos curvos

De acordo com a representação espinorial [48], quando da passagem de um referencial inercial a outro, os espinores se transformam conforme

$$\psi'(x') = \exp \left[\frac{1}{2} \lambda_{ab} \Sigma^{ab} \right] \psi(x), \quad (6.1)$$

onde os $\lambda_{ab} = -\lambda_{ba}$ representam os seis parâmetros da transformação de Lorentz e os Σ^{ab} são os geradores de representação espinorial, os quais são definidos por

$$\Sigma^{ab} = \frac{1}{4} [\gamma^a, \gamma^b]. \quad (6.2)$$

Nessa definição, os γ^a são as *matrizes de Dirac*, as quais satisfazem a *álgebra de Clifford*

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} \equiv \gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab}, \quad (6.3)$$

onde η^{ab} é a matriz de Minkowski – que é uma representação especial do tensor métrico $g^{\mu\nu}$ para um espaço-tempo plano. Na representação de Pauli, as matrizes de Dirac são escritas da seguinte forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

de onde temos para os γ^a a relação $\gamma^5 = -i\sqrt{-\eta}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Aqui, η representa o determinante da matriz de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$.

A lagrangiana que descreve os espinores num espaço-tempo plano (espaço-tempo de Minkowski) – chamada de *lagrangiana de Dirac* – é a seguinte

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma^a\partial_a\psi - (\partial_a\bar{\psi})\gamma^a\psi] - m\bar{\psi}\psi - V, \quad (6.7)$$

onde ψ e $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ denotam o campo espinorial e seu adjunto, respectivamente (o *dagger* representa conjugação complexa), m é a massa do férmion e V é a densidade do potencial de auto interação dos férmions. Essa é a descrição de um campo espinorial proveniente das teorias de campo, as quais foram construídas sobre os princípios da Mecânica Quântica e da Relatividade Restrita. Nessa classe de teoria, quando se realiza uma transformação de coordenadas de um referencial inercial para outro, os campos se transformam segundo o *grupo de Lorentz*

$$\phi'(x') = \phi(x), \quad (6.8)$$

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\gamma A^\gamma(x), \quad (6.9)$$

$$T'^{\mu\gamma}(x') = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\gamma_\beta T^{\alpha\beta}(x), \quad (6.10)$$

onde os Λ^μ_γ são as *matrizes de Lorentz*. As equações (6.8), (6.9) e (6.10) representam as leis de transformação para campos escalares, vetoriais e tensoriais, respectivamente.

Vamos agora à generalização da lagrangiana (6.7) para um espaço-tempo curvo. Primeiramente, devemos fazer três generalizações fundamentais, estas exigidas pelo princípio da covariância geral, a saber,

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) Generalizamos o grupo de Lorentz para o grupo de transformação geral de} \\ \text{coordenadas, isto é: } \Lambda_{\mu}^{\alpha} \longrightarrow \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}, \\ \text{ii) Substituímos o tensor de Minkowski } \eta_{\mu\nu} \text{ pelo tensor métrico geral } g_{\mu\nu}, \\ \text{iii) Trocamos as derivadas ordinárias pelas derivadas covariantes: } \partial_{\mu} \longrightarrow D_{\mu}. \end{array} \right.$$

A equação de Dirac, que governa a evolução espaço-temporal do espinor ψ , é derivada por meio das transformações dos espinores sob o grupo de Lorentz [48]. Mas não podemos aqui simplesmente aplicar a generalização i) para reescrever a equação de Dirac num espaço-tempo curvo, isso pelo fato de que o grupo de transformação geral de coordenadas não admite a representação espinorial – sob transformação geral de coordenadas, o espinor se transforma da mesma forma que um escalar.

Tendo em vista esse impasse, desenvolveu-se o *formalismo das tetradas*. Tal formalismo se fundamenta no princípio da equivalência (Capítulo 2): podemos associar a cada ponto do espaço-tempo um referencial localmente inercial, onde o tensor métrico passa a ser $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. A conexão desses referenciais localmente inerciais com um referencial não inercial qualquer, onde teremos para o tensor métrico a forma geral $g_{\mu\nu}$, pode ser feita através da seguinte relação

$$g_{\mu\nu} e_a^{\mu} e_b^{\nu} = \eta_{ab}, \quad \text{onde} \quad e_{\mu}^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^{\mu}}, \quad (6.11)$$

com e_{μ}^a sendo chamado de *tetrada* ou *vierbein* – o qual leva consigo a generalização i). Nas equações acima, os índices gregos se referem às componentes escritas num referencial não inercial e os índices latinos às componentes escritas num referencial localmente inercial.

As tetradas se transformam sob uma transformação de Lorentz por

$$e_{\mu}^a = \Lambda_b^a e_{\mu}^b, \quad (6.12)$$

e sob uma transformação geral de coordenadas por

$$e_\mu^a = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e_\nu^a, \quad (6.13)$$

ou seja, se transformam como um vetor contravariante e covariante, respectivamente. Podemos contrair um quadrivetor com uma tetrada

$$A_a = e_a^\mu A_\mu, \quad (6.14)$$

obtendo uma grandeza que se transforma como um quadrivetor sob transformações de Lorentz e como uma coleção de quatro quantidades sob uma transformação geral de coordenadas. As tetradas nos permitem transformar tensores gerais em tensores de Lorentz locais e, assim, a dependência espaço-temporal acaba por ser descrita pelas próprias tetradas. Dessa forma, escrevemos os espinores a partir de um referencial localmente inercial, e por meio das tetradas os reescrevemos num referencial não inercial, ou equivalentemente, na presença de um campo gravitacional [73, 74].

A partir desse formalismo, definimos um novo gama

$$\Gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a, \quad (6.15)$$

o qual satisfaz, como consequência, uma álgebra de Clifford generalizada

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (6.16)$$

uma necessidade devida à generalização ii).

Segue da generalização iii), a substituição das derivadas ordinárias pelas derivadas covariantes, definidas como

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - \Omega_\mu) \psi, \quad (6.17)$$

$$\bar{D}_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + \bar{\psi} \Omega_\mu, \quad (6.18)$$

onde Ω_μ é a conexão de spin definida por

$$\Omega_\mu = -\frac{1}{4} g_{\sigma\lambda} [\Gamma_{\mu\rho}^\sigma - e_b^\sigma (\partial_\mu e_\rho^b)] \Gamma^\lambda \Gamma^\rho. \quad (6.19)$$

Podemos agora generalizar a lagrangiana (6.7) para um campo espinorial na presença de um campo gravitacional, isto é, num espaço tempo-curvo

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (\bar{D}_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi - V. \quad (6.20)$$

Para o princípio da covariância ser satisfeito, V é função somente do bilinear escalar $\Psi = \bar{\psi} \psi$ e do pseudo escalar $\bar{\psi} \gamma^5 \psi$, segundo o *teorema de Pauli-Fierz* [75]. A partir de (6.20), podemos escrever a ação que representa um campo espinorial num espaço-tempo curvo

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ \frac{i}{2} [\bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (\bar{D}_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi - V \right\}. \quad (6.21)$$

Variando a ação (6.21) com respeito ao tensor métrico, temos o tensor momento-energia do campo

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\bar{\psi} \Gamma_\nu D_\mu \psi + \bar{\psi} \Gamma_\mu D_\nu \psi - \bar{D}_\mu \bar{\psi} \Gamma_\nu \psi - \bar{D}_\nu \bar{\psi} \Gamma_\mu \psi] - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (6.22)$$

Pela variação de (6.21) com relação a $\bar{\psi}$ e a ψ , as equações de Euler-Lagrange nos levam a

$$i \Gamma^\mu D_\mu \psi - m \psi - \frac{dV}{d\bar{\psi}} = 0, \quad (6.23)$$

$$\bar{D}_\mu \bar{\psi} \Gamma^\mu + m \bar{\psi} - \frac{dV}{d\psi} = 0, \quad (6.24)$$

que são a equação de Dirac e a sua adjunta na presença de um campo gravitacional, respectivamente.

6.2 Ação geral e equações de campo

Tomamos uma ação geral que descreve um campo escalar e um campo espinorial minimamente acoplados à gravidade

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{2} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - U(\phi) + \frac{i}{2} [\bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (\bar{D}_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi] - V(\Psi) + \mathcal{L}_M \right\}, \quad (6.25)$$

onde \mathcal{L}_M descreve um campo de matéria comum. Observe que aqui consideramos o potencial V como sendo uma função exclusiva do bilinear $\Psi = \bar{\psi}\psi$.

Variando-se a ação (6.25) com respeito a $g_{\mu\nu}$, obtém-se as equações de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -T_{\mu\nu}, \quad (6.26)$$

com $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^M + T_{\mu\nu}^\psi + T_{\mu\nu}^\phi$, onde os sobrescritos M , ψ e ϕ denotam os tensores energia-momento da matéria comum e dos campos escalar e espinorial, respectivamente, os quais são definidos por

$$T_{\mu\nu}^M = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (6.27)$$

$$T_{\mu\nu}^\psi = \frac{i}{4} \left[\bar{\psi}\Gamma_\nu D_\mu\psi + \bar{\psi}\Gamma_\mu D_\nu\psi - \bar{D}_\mu\bar{\psi}\Gamma_\nu\psi - \bar{D}_\nu\bar{\psi}\Gamma_\mu\psi \right] - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\psi, \quad (6.28)$$

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \left(\frac{1}{2}\partial_\theta\phi\partial^\theta\phi - U \right) g_{\mu\nu}, \quad (6.29)$$

onde \mathcal{L}_ψ representa a lagrangiana de Dirac. Da ação (6.25), para uma métrica plana de Friedmann-Robertson-Walker, com os campos ϕ e ψ espacialmente homogêneos e um campo de matéria comum sem pressão, podemos escrever uma lagrangiana pontual da forma

$$\mathcal{L} = 3a\dot{a}^2 - a^3 \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - U \right) + \frac{i}{2}a^3 \left(\dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi - \bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} \right) + a^3V + \rho_M^0, \quad (6.30)$$

onde ρ_M^0 é a densidade de energia da matéria comum num instante inicial (o que provém de $\rho_M = \rho_M^0/a^3$).

Impondo que a função energia associada à lagrangiana (6.30) é nula, segue a equação de Friedmann

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{L}} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{a}}\dot{a} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi} + \dot{\bar{\psi}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\dot{\psi} - \mathcal{L} = 0 \\ &\implies \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\rho_M + \rho_\psi + \rho_\phi}{3}, \end{aligned} \quad (6.31)$$

com ρ_ψ e ρ_ϕ denotando as densidades de energia, definidas como

$$\rho_\psi = V, \quad \rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + U, \quad (6.32)$$

de acordo com os tensores energia-momento (6.28) e (6.29).

Da equação de Euler-Lagrange para a , aplicada a (6.30), tem-se a equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho_M + \rho_\psi + \rho_\phi + 3(p_\psi + p_\phi)}{6}, \quad (6.33)$$

e para $\bar{\psi}$ e ψ , temos as equações de Dirac para o campo espinorial e seu adjunto acoplados ao campo gravitacional, respectivamente,

$$\dot{\psi} + \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \psi + i\gamma^0 \psi \frac{dV}{d\Psi} = 0, \quad (6.34)$$

$$\dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \bar{\psi} - i\bar{\psi} \gamma^0 \frac{dV}{d\Psi} = 0. \quad (6.35)$$

Em (6.33) as pressões são definidas por

$$p_\psi = \Psi \frac{dV}{d\Psi} - V, \quad p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - U, \quad (6.36)$$

também de acordo com (6.28) e (6.29).

Finalmente, a equação de Euler-Lagrange para ϕ fornece

$$\ddot{\phi} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \dot{\phi} + \frac{dU}{d\phi} = 0, \quad (6.37)$$

que é simplesmente a equação de Klein-Gordon para o campo ϕ .

6.3 Seleção dos potenciais

Pode-se expressar a lagrangiana (6.30) em termos das componentes do campo espinorial $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ e seu adjunto $\bar{\psi} = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*)$, a qual então toma a forma

$$\mathcal{L} = 3a\dot{a}^2 - a^3 \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - U \right) + \frac{i}{2} a^3 \sum_{i=1}^4 (\psi_i^* \dot{\psi}_i - \dot{\psi}_i^* \psi_i) + a^3 V + \rho_M^0. \quad (6.38)$$

Em consequência, a dinâmica do sistema é agora descrita por 10 coordenadas (10 graus de liberdade), ou seja, o espaço de configuração do sistema é representado por $\{a, \phi, \psi_j^*, \psi_j\}$, com $j = 1, 2, 3, 4$.

Partindo da condição de Noether, $L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = \mathbf{X}\mathcal{L} = 0$, aplicada à lagrangiana (6.38), sendo o gerador infinitesimal de simetria \mathbf{X} definido para esse caso como

$$\mathbf{X} = C_0 \frac{\partial}{\partial a} + D_0 \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{dC_0}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \frac{dD_0}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} + \sum_{i=1}^4 \left(C_i \frac{\partial}{\partial \psi_i^*} + D_i \frac{\partial}{\partial \psi_i} + \frac{dC_i}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_i^*} + \frac{dD_i}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_i} \right), \quad (6.39)$$

onde os C_0, D_0, C_j e D_j são funções de $(a, \phi, \psi_j^*, \psi_j)$, temos o seguinte sistema de equações diferenciais parciais acopladas

$$C_0 + 2a \frac{\partial C_0}{\partial a} = 0, \quad 3C_0 + 2a \frac{\partial D_0}{\partial \phi} = 0, \quad 6 \frac{\partial C_0}{\partial \phi} - a^2 \frac{\partial D_0}{\partial a} = 0, \quad (6.40)$$

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial C_i}{\partial a} \psi_i - \frac{\partial D_i}{\partial a} \psi_i^* \right) = 0, \quad \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial C_i}{\partial \phi} \psi_i - \frac{\partial D_i}{\partial \phi} \psi_i^* \right) = 0, \quad (6.41)$$

$$3C_0 \psi_j + a D_j + a \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial C_i}{\partial \psi_j^*} \psi_i - \frac{\partial D_i}{\partial \psi_j^*} \psi_i^* \right) = 0, \quad (6.42)$$

$$3C_0 \psi_j^* + a C_j - a \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial C_i}{\partial \psi_j} \psi_i - \frac{\partial D_i}{\partial \psi_j} \psi_i^* \right) = 0, \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial \psi_j^*} = 0, \quad \frac{\partial C_0}{\partial \psi_j} = 0, \quad \frac{\partial D_0}{\partial \psi_j^*} = 0, \quad \frac{\partial D_0}{\partial \psi_j} = 0, \quad (6.44)$$

$$3C_0(U + V) + a D_0 \frac{dU}{d\phi} + a \sum_{i=1}^4 (C_i \epsilon_i \psi_i + D_i \epsilon_i \psi_i^*) \frac{dV}{d\psi} = 0, \quad (6.45)$$

onde o símbolo ϵ_i assume os valores

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= +1 & \text{para} & \quad i = 1, 2; \\ \epsilon_i &= -1 & \text{para} & \quad i = 3, 4. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Pode-se ver, das equações (6.44), que os coeficientes C_0 e D_0 são funções somente de a e ϕ . Então, assumindo que C_0 e D_0 são funções separáveis

$$C_0 = c_1(a)c_2(\phi), \quad D_0 = d_1(a)d_2(\phi), \quad (6.47)$$

obtém-se a solução para o sistema (6.40)-(6.45)

$$C_0 = \frac{Ae^{\alpha\phi} + Be^{-\alpha\phi}}{\sqrt{6a}}, \quad (6.48)$$

$$D_0 = -\frac{Ae^{\alpha\phi} - Be^{-\alpha\phi}}{a^{3/2}}, \quad (6.49)$$

$$C_j = -\alpha \frac{Ae^{\alpha\phi} + Be^{-\alpha\phi}}{a^{3/2}} \psi_j^* + \beta \epsilon_j \psi_j^*, \quad (6.50)$$

$$D_j = -\alpha \frac{Ae^{\alpha\phi} + Be^{-\alpha\phi}}{a^{3/2}} \psi_j - \beta \epsilon_j \psi_j, \quad (6.51)$$

$$U = U_0 (Ae^{\alpha\phi} - Be^{-\alpha\phi})^2, \quad V = V_0 \Psi, \quad (6.52)$$

com A, B, U_0, V_0 e β sendo constantes e $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Esses são os coeficientes e os potenciais que satisfazem a condição de Noether. Agora, se os potenciais (6.52) são tomados para a lagrangiana (6.38), a mesma apresentará uma simetria de Noether.

6.4 Férmions de Dirac como matéria escura

A solução para o potencial do campo espinorial, $V = V_0 \Psi$, é essencialmente um termo de massa. Portanto, podemos repassar a constante V_0 por m , com o objetivo de identificar essa constante com a massa dos férmions de Dirac. Uma vez que isso é feito, a partir das equações (6.32)₁ e (6.36)₁, determinamos que o campo espinorial tem sua densidade de energia e pressão dadas por

$$\rho_\psi = m\Psi, \quad p_\psi = 0, \quad (6.53)$$

caracterizando um campo de matéria sem pressão. Note que essa forma para ρ_ψ exige que Ψ seja uma quantidade positiva.

Observe que não assumimos *a priori* que o campo espinorial representasse férmions massivos, uma vez que o próprio potencial leva essa informação. Essa característica do campo emergiu exclusivamente da condição de simetria, quando a mesma restringiu o potencial genérico a um termo de massa. Esse resultado sugere que o campo de férmions de Dirac se comporta como um campo de matéria

padrão. Mas, obviamente, esse campo tem uma natureza diferente daquela da matéria comum, haja vista que o mesmo é composto exclusivamente por partículas fermiônicas. Em vista disso, levando-se em conta que esse campo de férmions produz um campo adicional de matéria sem pressão, pode-se identificar o campo espinorial com a matéria escura. Para esse propósito, devemos assumir que tal campo descreve partículas fermiônicas que interagem apenas gravitacionalmente ou tenham uma interação não gravitacional muito fraca com a matéria comum.

Por outro lado, o campo ϕ recebeu da condição de Noether o potencial (6.52)₁, o qual permite uma expansão acelerada. Então, daqui em diante, o setor escuro será identificado com os campos ϕ (energia escura) e ψ (matéria escura).

6.5 Integração do sistema

Tomando U e V dados por (6.52), temos que resolver o seguinte sistema de equações diferenciais acopladas

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\rho_M^0}{a^3} + m\Psi + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + U_0 (Ae^{\alpha\phi} - Be^{-\alpha\phi})^2, \quad (6.54)$$

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\dot{\phi}^2}{2} - U_0 (Ae^{\alpha\phi} - Be^{-\alpha\phi})^2 = 0, \quad (6.55)$$

$$\ddot{\phi} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \dot{\phi} + 2\alpha U_0 (A^2 e^{2\alpha\phi} - B^2 e^{-2\alpha\phi}) = 0, \quad (6.56)$$

$$\dot{\psi} + \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \psi + im\gamma^0 \psi = 0, \quad \dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \bar{\psi} - im\bar{\psi}\gamma^0 = 0. \quad (6.57)$$

Haja vista que com essas formas para U e V o sistema dinâmico apresenta uma simetria de Noether, tem-se uma equação dinâmica adicional proveniente da quantidade conservada, a saber,

$$\begin{aligned} M_0 &= C_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} + D_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \sum_{i=1}^4 \left(C_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i^*} + D_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} \right) \\ &= (Ae^{\alpha\phi} + Be^{-\alpha\phi}) \sqrt{6aa} + (Ae^{\alpha\phi} - Be^{-\alpha\phi}) a^{3/2} \dot{\phi} + i\beta a^3 \Psi, \end{aligned} \quad (6.58)$$

a qual é determinada a partir de (4.6). Nessa expressão pode-se fazer $\beta = i\beta_0$, com β_0 sendo uma constante real, a fim de termos uma constante de movimento cujo valor é real, uma vez que $\Psi = \bar{\psi}\psi$ é uma quantidade real positiva.

Como exposto anteriormente (Capítulo 4), se o sistema apresenta uma simetria de Noether, existe uma variável cíclica que reduz o sistema, a qual é obtida por uma transformação de variáveis. A transformação que leva o espaço de configuração de $\{a, \phi, \psi_j^*, \psi_j\}$ a $\{z, u, v_j, w_j\}$ satisfaz o seguinte sistema

$$C_0 \frac{\partial u}{\partial a} + D_0 \frac{\partial u}{\partial \phi} + \sum_{i=1}^4 \left(C_i \frac{\partial u}{\partial \psi_i^*} + D_i \frac{\partial u}{\partial \psi_i} \right) = 0, \quad (6.59)$$

$$C_0 \frac{\partial v_j}{\partial a} + D_0 \frac{\partial v_j}{\partial \phi} + \sum_{i=1}^4 \left(C_i \frac{\partial v_j}{\partial \psi_i^*} + D_i \frac{\partial v_j}{\partial \psi_i} \right) = 0, \quad (6.60)$$

$$C_0 \frac{\partial w_j}{\partial a} + D_0 \frac{\partial w_j}{\partial \phi} + \sum_{i=1}^4 \left(C_i \frac{\partial w_j}{\partial \psi_i^*} + D_i \frac{\partial w_j}{\partial \psi_i} \right) = 0, \quad (6.61)$$

$$C_0 \frac{\partial z}{\partial a} + D_0 \frac{\partial z}{\partial \phi} + \sum_{i=1}^4 \left(C_i \frac{\partial z}{\partial \psi_i^*} + D_i \frac{\partial z}{\partial \psi_i} \right) = 1, \quad (6.62)$$

com z sendo a variável cíclica. Esse conjunto de equações diferenciais foi obtido pela aplicação de (4.19). Usando-se a constante de movimento (6.58) e uma transformação de variáveis satisfazendo (6.59)-(6.62), procuraremos uma solução equações de campo (6.54)-(6.57).

Primeiramente, as equações de Dirac (6.57)₁ e (6.57)₂ podem ser reduzidas a uma equação para Ψ

$$\dot{\Psi} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \Psi = 0, \quad (6.63)$$

que é facilmente integrada em termos do fator de escala a , dando

$$\Psi = \frac{\Psi_0}{a^3}, \quad (6.64)$$

onde Ψ_0 é uma constante positiva. Ou, resolvendo a equação (6.57)₁ em termos de a , a solução para ψ é

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1^0 e^{-imt} \\ \psi_2^0 e^{-imt} \\ \psi_3^0 e^{imt} \\ \psi_4^0 e^{imt} \end{pmatrix} a^{-3/2}, \quad (6.65)$$

com ψ_j^0 representando constantes que satisfazem a relação $\Psi_0 = \psi_1^{*0}\psi_1^0 + \psi_2^{*0}\psi_2^0 - \psi_3^{*0}\psi_3^0 - \psi_4^{*0}\psi_4^0$.

Nesse ponto é interessante notar que a solução $\Psi = \Psi_0/a^3$ implica que o campo espinorial tem densidade de energia $\rho_\psi = m\Psi_0/a^3$. Dessa forma, um campo de matéria extra é naturalmente adicionado ao campo de matéria comum. Esse primeiro resultado corrobora a nossa identificação inicial do campo de férmions com a matéria escura.

Tendo em vista que as equações de Dirac puderam ser resolvidas independentemente das outras equações de campo, em termos de a , tem-se efetivamente uma redução do sistema (6.54)-(6.57) a equações diferenciais envolvendo somente as variáveis dinâmicas a e ϕ . Então resolveremos nosso problema a partir do sistema reduzido

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\rho_M^0 + m\Psi_0}{a^3} + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + U_0 (Ae^{\alpha\phi} - Be^{-\alpha\phi})^2, \quad (6.66)$$

$$\ddot{\phi} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \dot{\phi} + 2\alpha U_0 (A^2 e^{2\alpha\phi} - B^2 e^{-2\alpha\phi}) = 0, \quad (6.67)$$

$$(Ae^{\alpha\phi} + Be^{-\alpha\phi}) \sqrt{6a\dot{a}} + (Ae^{\alpha\phi} - Be^{-\alpha\phi}) a^{3/2} \dot{\phi} = \bar{M}_0, \quad (6.68)$$

onde $\bar{M}_0 = M_0 + \beta_0\Psi_0$ e o resultado $\Psi = \Psi_0/a^3$ foi usado.

Consequentemente, é suficiente encontrar um novo conjunto de variáveis relacionadas somente a a e ϕ . Uma solução particular adequada (em a e ϕ) para o sistema (6.59)-(6.62) é

$$u = a^{3/2} \frac{Ae^{\alpha\phi} - Be^{-\alpha\phi}}{\sqrt{6AB}}, \quad v_j = 0, \quad w_j = 0, \quad (6.69)$$

$$z = a^{3/2} \frac{Ae^{\alpha\phi} + Be^{-\alpha\phi}}{\sqrt{6AB}}. \quad (6.70)$$

Usando (6.70), podemos expressar a constante de movimento somente em termos da variável cíclica, obtendo

$$\dot{z} = \frac{\overline{M}_0}{4AB}. \quad (6.71)$$

Essa equação é imediatamente integrada, fornecendo

$$z(t) = z_1 t + z_2, \quad (6.72)$$

com $z_1 = \overline{M}_0/4AB$ e $z_2 = \text{constante}$.

Em termos das novas variáveis, a equação de Friedmann toma a seguinte forma

$$\dot{z}^2 = \dot{u}^2 + 3ABU_0 u^2 + \frac{\rho_0 + m\Psi_0}{2AB}. \quad (6.73)$$

Substituindo \dot{z} de (6.71) na equação de Friedmann, conseguimos integrá-la, obtendo a solução

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t + b_0), \quad (6.74)$$

onde

$$u_0^2 = \frac{\overline{M}_0^2 - 8AB(\rho_M^0 + m\Psi_0)}{48A^3 B^3 U_0}, \quad \omega^2 = 3ABU_0, \quad (6.75)$$

e b_0 é uma constante.

Para as soluções $z(t)$ e $u(t)$, expressas em termos das variáveis originais pelo uso das relações (6.69)₁ e (6.70), obtemos facilmente as formas explícitas de $a(t)$ e $\phi(t)$

$$a(t) = \left(\frac{\omega^2}{2U_0} \right)^{1/3} \left\{ z_1^2 t^2 + 2z_1 z_2 t + z_2^2 - u_0^2 \sin^2(\omega t + b_0) \right\}^{1/3}, \quad (6.76)$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2\alpha} \ln \left\{ \frac{z_1 t + z_2 + u_0 \sin(\omega t + b_0)}{z_1 t + z_2 - u_0 \sin(\omega t + b_0)} \right\} - \frac{1}{2\alpha} \ln \left(\frac{A}{B} \right). \quad (6.77)$$

Finalmente, da equação (6.65), pode-se escrever a evolução temporal do campo espinorial

$$\psi(t) = \frac{\sqrt{2U_0}}{\omega} \begin{pmatrix} \psi_1^0 e^{-imt} \\ \psi_2^0 e^{-imt} \\ \psi_3^0 e^{imt} \\ \psi_4^0 e^{imt} \end{pmatrix} \Theta(t), \quad (6.78)$$

onde

$$\Theta(t) = \{z_1^2 t^2 + 2z_1 z_2 t + z_2^2 - u_0^2 \sin^2(\omega t + b_0)\}^{-1/2}. \quad (6.79)$$

6.6 Análise da solução geral

Agora analisaremos o comportamento do fator de escala. A solução (6.76) é válida a partir do tempo quando o regime dominado por matéria ocorre. Próximo a esse tempo, temos que a evolução de a deve ser próxima à forma $a \propto t^{2/3}$, isto é, quando o termo oscilante $u_0^2 \sin^2(\omega t + b_0)$ apresenta seu valor mínimo e o termo $z_1 t$ domina z_2 na expressão (6.76). Podemos satisfazer essa condição tomando-se $z_2 = 0$ e repassando a constante b_0 por $-\omega\tau$, tal que $u_0^2 \sin^2[\omega(t - \tau)]$ tem seu valor mínimo (zero) em $t = \tau$, com τ sendo o tempo a partir do qual o referido regime passa a figurar.

Antes de realizar a análise, introduz-se as seguintes variáveis adimensionais: $\tilde{t} = H_0 t$, $\tilde{\tau} = H_0 \tau$, $\tilde{A} = \frac{A}{H_0}$, $\tilde{B} = \frac{B}{H_0}$, $\tilde{\omega}^2 = 3\tilde{A}\tilde{B}U_0$, $\tilde{u}_0 = H_0 u_0$, $\tilde{M}_0 = \frac{\bar{M}_0}{H_0^2}$, $\tilde{z}_2 = H_0 z_2$ e $\Omega_{M\psi}^0 = \frac{\rho_M^0}{3H_0^2} + \frac{m\Psi_0}{3H_0^2} = \Omega_M^0 + \Omega_\psi^0$, onde H_0 é o parâmetro de Hubble no tempo presente. Assim, as soluções (6.76), (6.77) e (6.78) tomam as formas

$$a(\tilde{t}) = \left(\frac{\tilde{\omega}^2}{2U_0}\right)^{1/3} \{z_1^2 \tilde{t}^2 - \tilde{u}_0^2 \sin^2[\tilde{\omega}(\tilde{t} - \tilde{\tau})]\}^{1/3}, \quad (6.80)$$

$$\phi(\tilde{t}) = \frac{1}{2\alpha} \ln \left\{ \frac{z_1 \tilde{t} + \tilde{u}_0 \sin[\tilde{\omega}(\tilde{t} - \tilde{\tau})]}{z_1 \tilde{t} - \tilde{u}_0 \sin[\tilde{\omega}(\tilde{t} - \tilde{\tau})]} \right\} - \frac{1}{2\alpha} \ln \left(\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} \right), \quad (6.81)$$

$$\psi(\tilde{t}) = \frac{\sqrt{2U_0}}{\tilde{\omega}} \begin{pmatrix} \psi_1^0 e^{-i\tilde{m}\tilde{t}} \\ \psi_2^0 e^{-i\tilde{m}\tilde{t}} \\ \psi_3^0 e^{i\tilde{m}\tilde{t}} \\ \psi_4^0 e^{i\tilde{m}\tilde{t}} \end{pmatrix} \{z_1^2 \tilde{t}^2 - \tilde{u}_0^2 \sin^2 [\tilde{\omega}(\tilde{t} - \tilde{\tau})]\}^{-1/2}. \quad (6.82)$$

De (6.80), a normalização $a(\tilde{t}_0) = 1$ implica na relação

$$z_1^2 = \frac{2U_0 + \tilde{u}_0^2 \tilde{\omega}^2 \sin [\tilde{\omega}(\tilde{t}_0 - \tilde{\tau})]}{\tilde{\omega}^2 \tilde{t}_0^2}, \quad (6.83)$$

com \tilde{t}_0 sendo o tempo presente. Pela substituição de $z_1 = \tilde{M}_0/4\tilde{A}\tilde{B}$ em (6.83) e usando (6.75)₁ na forma adimensional, escrita como

$$\tilde{u}_0^2 = \frac{3U_0 (3U_0 \tilde{M}_0^2 - 24\tilde{\omega}^2 \Omega_{M\psi}^0)}{16\tilde{\omega}^6}, \quad (6.84)$$

obtém-se \tilde{M}_0 em termos de \tilde{A}, \tilde{B} e U_0 , a saber,

$$\tilde{M}_0^2 = \frac{8\tilde{\omega}^2 \{4\tilde{\omega}^2 - 9\Omega_{M\psi}^0 \sin^2 [\tilde{\omega}(\tilde{t}_0 - \tilde{\tau})]\}}{9U_0 \{\tilde{\omega}^2 \tilde{t}_0^2 - \sin^2 [\tilde{\omega}(\tilde{t}_0 - \tilde{\tau})]\}}. \quad (6.85)$$

Portanto, temos três parâmetros livres, \tilde{A}, \tilde{B} e U_0 , que determinam todos os outros parâmetros, $\tilde{\omega}, \tilde{M}_0, \tilde{u}_0$ e z_1 , uma vez que se conhecem $\Omega_{M\psi}^0, \tilde{t}_0$ e $\tilde{\tau}$. Usando a solução (6.81) para reescrever a densidade de energia e a pressão do campo ϕ , temos as seguintes expressões adimensionais para a densidade de energia e a pressão

$$\tilde{\rho}_M(\tilde{t}) = \frac{\rho_M^0}{H_0^2 a(\tilde{t})^3} = \frac{3\Omega_M^0}{a(\tilde{t})^3}, \quad \tilde{\rho}_\psi(\tilde{t}) = \frac{m\Psi_0}{H_0^2 a(\tilde{t})^3} = \frac{3\Omega_\psi^0}{a(\tilde{t})^3}, \quad (6.86)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_\phi(\tilde{t}) &= \frac{\tilde{\omega}^4 z_1^2 \tilde{u}_0^2}{4\alpha^2 U_0^2 a(\tilde{t})^6} \{ \sin [\tilde{\omega}(\tilde{t} - \tilde{\tau})] - \tilde{\omega}\tilde{t} \cos [\tilde{\omega}(\tilde{t} - \tilde{\tau})] \}^2 \\ &\quad + \frac{2\tilde{\omega}^4 \tilde{u}_0^2 \sin^2 [\tilde{\omega}(\tilde{t} - \tilde{\tau})]}{3U_0 a(\tilde{t})^3}, \end{aligned} \quad (6.87)$$

$$\tilde{p}_\phi(\tilde{t}) = \tilde{\rho}_\phi(\tilde{t}) - \frac{4\tilde{\omega}^4 \tilde{u}_0^2 \sin^2 [\tilde{\omega}(\tilde{t} - \tilde{\tau})]}{3U_0 a(\tilde{t})^3}. \quad (6.88)$$

Observando (6.80) e o conjunto (6.86)-(6.88), e levando em conta

(6.83)-(6.85), concluímos que a evolução temporal das quantidades (fator de escala, densidades de energia e pressão) que fornecerão os parâmetros cosmológicos dependem essencialmente de U_0 e do produto $\tilde{A}\tilde{B}$. Haja vista que o tempo de Hubble é definido como $t_0 = 1/H_0$ e nosso tempo adimensional é $\tilde{t} = H_0 t$, o valor aproximado para o tempo presente adimensional é $\tilde{t}_0 = 1$. Note que o tempo presente adimensional não é exatamente igual a unidade devido ao fato de o Universo apresentar uma razão de expansão não constante (expansão acelerada: $\tilde{t} < 1$, expansão desacelerada: $\tilde{t} > 1$). Tomando o tempo de Hubble como 14 Giga-anos (ver [7, 76]) e o início do período dominado por matéria quando o Universo tem aproximadamente 75 kilo-anos, $\tilde{\tau}$ assume o valor $\tilde{\tau} = 5.4 \times 10^{-6} \tilde{t}_0 = 5.4 \times 10^{-6}$. O termo oscilante de a tem seu período determinado por $\tilde{\omega}$, o qual pode ser obtido adotando-se $\Omega_M^0 = 0.04$, $\Omega_\psi^0 = 0.22$ e $\Omega_\phi^0 = 0.74$. Esses valores são baseados nas referências [7, 77], tal que em \tilde{t}_0 observamos $\Omega_0 = 0.04 + 0.22 + 0.74 = 1$ em nossa análise. Assim, a partir desses parâmetros cosmológicos avaliados no presente, pode-se inferir os valores dos parâmetros livres. Com o objetivo de apresentar os resultados para uma descrição realística – tal que os dados observacionais sejam respeitados –, os valores mais adequados que encontramos são $U_0 = 15$ e $\tilde{A}\tilde{B} = 10^{-3}$.

Na Figura 6.1, estão representados os parâmetros de densidade dos campos de matéria (compreendendo a matéria comum e o campo de férmions) e do campo escalar como funções de \tilde{t} – que é apenas denotado por t de agora em diante. Todos os valores possíveis para U_0 e $\tilde{A}\tilde{B}$ implicam que $\Omega_M^0, \Omega_\psi^0$ e Ω_ϕ^0 estejam localizados em tempos maiores que $t = 1$. Isso mostra que a solução naturalmente produz um Universo acelerado, independente dos valores de U_0 e $\tilde{A}\tilde{B}$. Tendo em vista que a idade do Universo é próxima ao tempo de Hubble, os parâmetros de densidade na Figura 6.1 estão representados de tal forma que $\Omega_M^0 = 0.04$, $\Omega_\psi^0 = 0.22$ e $\Omega_\phi^0 = 0.74$ aparecem tão próximos de $t = 1$ quanto possível. Na Figura 6.1, os valores presentes dos parâmetros estão em $t = 1.08$ (≈ 15 Giga-anos), que é 8 % maior do que o tempo de Hubble. Assim, nos gráficos seguintes o tempo presente será $t = 1.08$, caracterizando um Universo com expansão acelerada. Na esquerda da Figura 6.1,

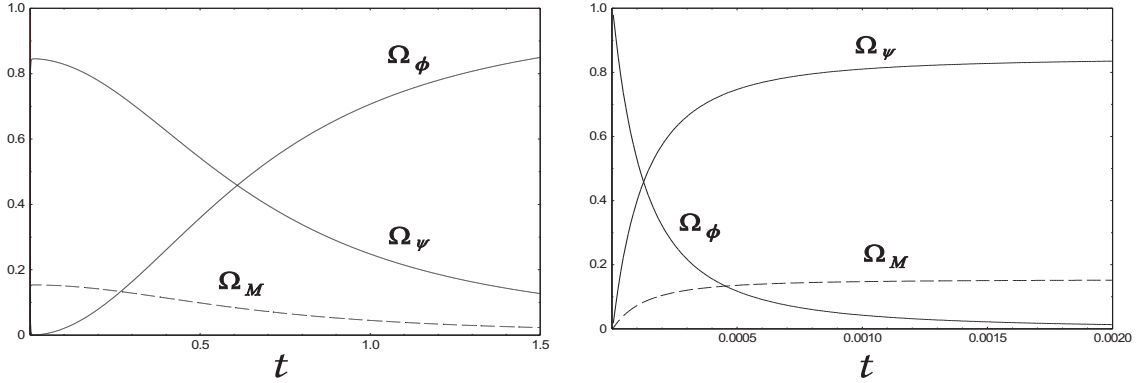


Figura 6.1: Parâmetros de densidade dos campos de matéria (matéria comum e fermiônica) e do campo escalar. Até $t = 1.5$ (janela da esquerda) e até $t = 0.002$ (janela da direita).

pode-se observar que Ω_ϕ é dominante hoje, mas voltando para o passado, os campos de matéria se tornam as componentes dominantes. Na direita dessa figura, notamos que próximo a τ tem-se que Ω_ϕ domina os parâmetros de densidade de matéria. No entanto, a partir da solução de a , temos que chegando a τ o comportamento aproximado é $a \propto t^{2/3}$, ou seja, o Universo é dominado por matéria. Então, o campo escalar deve se comportar como um campo de matéria nessa época. Isso ficará mais claro nos próximos resultados.

Os parâmetros de densidade no futuro distante do Universo estão representados na Figura 6.2. Na esquerda dessa figura, a evolução de Ω_ϕ é representada, a qual oscila tendendo a um valor constante quando $t \rightarrow \infty$. Na janela da direita, o mesmo tipo de evolução pode ser observado para $\Omega_{M\psi}$, obviamente. Podemos observar que no futuro Ω_ϕ sempre dominará $\Omega_{M\psi}$.

A evolução temporal da equação de estado do campo escalar $\omega_\phi = p_\phi/\rho_\phi$ está representada na Figura 6.3. Da janela da esquerda, inferimos que ω_ϕ evolui de um valor positivo e decresce até -1 , e torna a crescer lentamente até o valor $\omega_\phi = -0.73$ no tempo presente – algo maior que o valor da equação de estado da constante cosmológica, $\omega_\Lambda = -1$. Note que, de acordo com [7], o valor do parâmetro

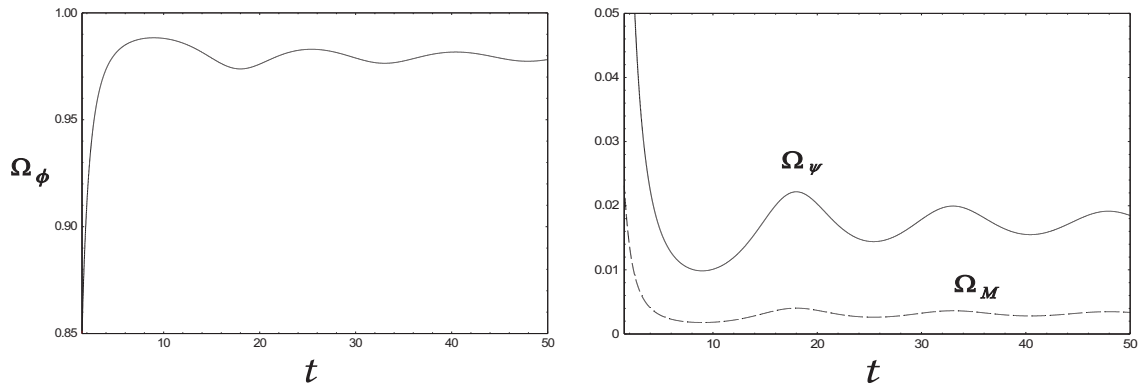


Figura 6.2: Parâmetros de densidade do campo escalar (janela da esquerda) e dos campos de matéria (janela da direita) para $t > 1.5$.

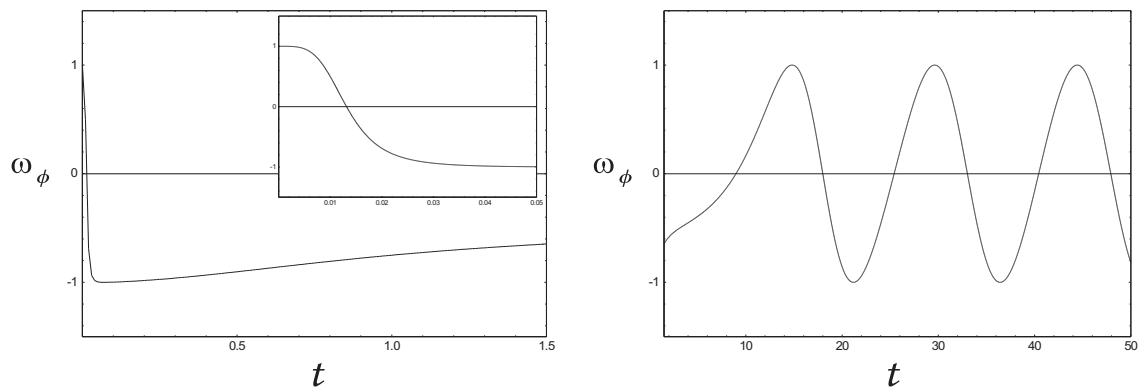


Figura 6.3: Equação de estado do campo escalar. Até $t = 1.5$ e $t = 0.002$ (janela da esquerda), e para $t > 1.5$ (janela da direita).

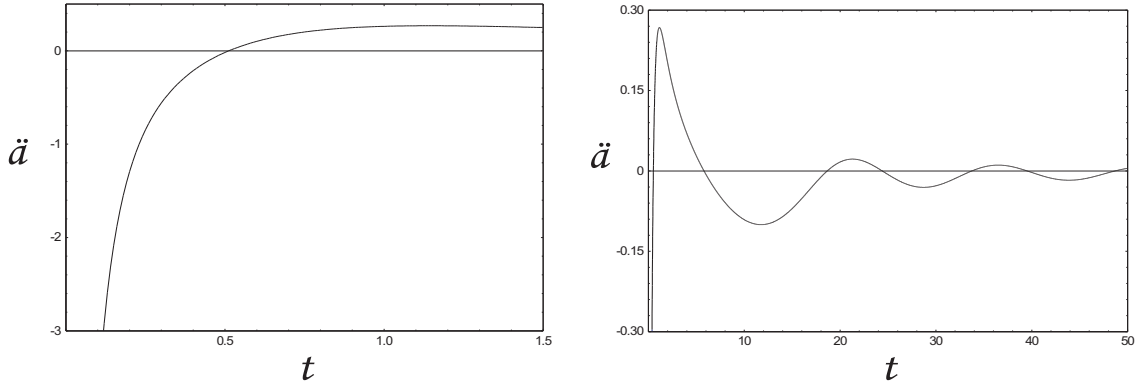


Figura 6.4: Aceleração do fator de escala. Até $t = 1.5$ (janela da esquerda) e até $t = 50$ (janela da direita).

ω_ϕ inferido a partir dos dados observacionais para a energia escura é ainda muito incerto. Para tempos próximos ao início da era dominada por matéria, observa-se da figura que voltando para o passado até τ o parâmetro ω_ϕ inverte o seu sinal, que tende a 1. Portanto, o mesmo apresenta um comportamento de matéria, explicando a forma aproximada $a \propto t^{2/3}$ para o fator de escala com um Ω_ϕ dominante na Figura 6.3. Na direita dessa figura, temos a evolução temporal de ω_ϕ para tempos grandes. Daí pode-se inferir que ω_ϕ oscila com o tempo no intervalo $-1 \leq \omega_\phi \leq 1$, o que mostra que o campo escalar se comporta como matéria e energia escura alternadamente.

Na Figura 6.4, está representada a aceleração do fator de escala. Iniciamos com a exigência de que $\Omega_M^0, \Omega_\psi^0$ e Ω_ϕ^0 devem ser observados próximos a $t = 1$, e agora constatamos que estes se encontram precisamente em $t = 1.08$, isto é, muito próximos do ponto exigido. Na esquerda da Figura 6.4, pode-se ver que temos naturalmente uma expansão acelerada que se originou de uma transição de um período desacelerado para um período acelerado. Essa transição ocorre em aproximadamente $t = 0.51$ (7.1 Giga-anos) e o período presente permanece acelerado. Voltando no tempo até τ , um período desacelerado correspondendo a um Universo dominado por matéria ocorre.

A aceleração do fator de escala para o futuro distante está representada na janela da direita. Essa curva mostra um Universo que retornará a um período desacelerado e novamente a um período acelerado, e assim sucessivamente – esse comportamento é causado obviamente pela equação de estado oscilante do campo escalar. O resultado final é que a solução descreve um Universo que evolui com períodos alternados de expansão acelerada e desacelerada, e esse comportamento oscilante é uma espécie de oscilação amortecida: quando $t \rightarrow \infty$, tem-se $\ddot{a} \rightarrow 0$.

Capítulo 7

Campos escalares interagentes não minimamente acoplados

Após a descoberta da expansão acelerada do Universo, vários modelos levando em conta a energia escura e a matéria escura – o chamado setor escuro – foram propostos, mas a maior parte deles considera a matéria e a energia escuras como campos não interagentes. Na literatura mais recente, apareceram investigações de um setor escuro interagente – uma análise interessante da viabilidade dessas interações pode ser encontrada em [78] – e os efeitos de uma possível interação escura sobre a dinâmica dos aglomerados de galáxias parecem estar de acordo com as observações [79]. No artigo [80], os autores analisam a troca de energia entre os campos escuros. Os trabalhos [81, 82, 83] propõem modelos que usam campos escalares especificados *a priori* para a representação do setor escuro, enquanto os trabalhos [84, 85] supõem certas interações entre os campos escuros e os representam por relações que envolvem suas densidades de energia, as quais são posteriormente determinadas. Um setor escuro interagente não minimamente acoplado ao campo gravitacional é proposto em [10]. No trabalho [86] investiga-se um modelo de energia escura interagindo com neutrinos e a matéria escura. A formação de estruturas galácticas sob a interação entre a matéria e a energia escuras foi investigada no artigo [87]. Também no contexto de campos escalares, os campos de táquions rece-

beram considerável atenção em Cosmologia, uma vez que os mesmos podem simular a energia escura com considerável sucesso [18, 88, 89, 90, 91, 92, 93].

Com o objetivo de descrever o Universo atual, consideramos um Universo homogêneo, isotrópico e plano composto por um setor escuro interagente e um campo de matéria comum. O setor escuro será investigado a partir de dois modelos gerais: campos escalares canônicos interagentes e campos canônicos e não canônicos (táquions) interagentes, não minimamente acoplados ao campo gravitacional. A análise se dará a partir de uma ação geral com os potenciais e acoplamentos à gravidade sendo selecionados pela condição de existência de uma simetria de Noether. Cada conjunto de potenciais e acoplamentos satisfazendo a condição de simetria corresponde a um modelo particular. As equações de campo para alguns modelos particulares resultantes da simetria são resolvidas e seus respectivos cenários cosmológicos analisados. As soluções obtidas mostram que essa classe de modelos produz regimes desacelerado-acelerados a partir de uma dinâmica com trocas de energia entre o campo gravitacional e os campos escuros. Os resultados obtidos estão em boa concordância com os dados observacionais.

7.1 Campos escalares canônicos interagentes

7.1.1 Ação geral e equações de campo

Consideremos uma ação geral para dois campos escalares interagentes não minimamente acoplados à gravidade com a seguinte forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ [F(\phi) + G(\chi)]R + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - W(\phi, \chi) \right\} + S_m, \quad (7.1)$$

onde $S_m = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m$ é uma ação adicional que representa o campo de matéria comum. Aqui $F(\phi)$ e $G(\chi)$ denotam funções genéricas de classe C^2 que descrevem o acoplamento dos campos escalares ao campo gravitacional. Por outro lado, $V(\phi)$ é o potencial de auto interação do campo ϕ e $W(\phi, \chi)$ descreve a interação entre os

campos ϕ e χ , incluindo a auto interação do campo χ . Nessa ação, o acoplamento de Einstein é recuperado quando $F(\phi) + G(\chi) \rightarrow 1/2$.

Pela variação da ação (7.1) com respeito ao tensor métrico, obtemos as seguintes equações de Einstein modificadas

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{T_{\mu\nu}}{2(F+G)}, \quad (7.2)$$

onde $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^m + T_{\mu\nu}^\phi + T_{\mu\nu}^\chi$ denota o tensor energia-momento total relacionado a todas as componentes do Universo e os sobrescritos m, ϕ e χ designam o tensor energia-momento da matéria comum e dos campos ϕ e χ , respectivamente. Os mesmos são dados por

$$T_{\mu\nu}^m = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (7.3)$$

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \left(\frac{1}{2}\partial_\theta\phi\partial^\theta\phi - V\right)g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\nabla_\theta\nabla^\theta)F, \quad (7.4)$$

$$T_{\mu\nu}^\chi = \partial_\mu\chi\partial_\nu\chi - \left(\frac{1}{2}\partial_\theta\chi\partial^\theta\chi - W\right)g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\nabla_\theta\nabla^\theta)G. \quad (7.5)$$

Tomamos agora a métrica plana de Friedmann-Robertson-Walker, sendo os campos escalares espacialmente homogêneos, $\phi = \phi(t)$ e $\chi = \chi(t)$, e a matéria comum um fluido sem pressão. Como resultado, escrevemos a partir da ação (7.1) a seguinte lagrangiana pontual

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & 6a\dot{a}^2(F+G) + 6a^2\dot{a} \left(\frac{dF}{d\phi}\dot{\phi} + \frac{dG}{d\chi}\dot{\chi} \right) \\ & - a^3 \left\{ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V + \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 - W \right\} + \rho_m^0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

A equação de Euler-Lagrange aplicada à lagrangiana (7.6) para a , ϕ e χ fornece

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{p}{2(F+G)}, \quad (7.7)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - 6\left(\dot{H} + 2H^2\right)\frac{dF}{d\phi} + \frac{dV}{d\phi} + \frac{\partial W}{\partial\phi} = 0, \quad (7.8)$$

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - 6\left(\dot{H} + 2H^2\right)\frac{dG}{d\chi} + \frac{\partial W}{\partial\chi} = 0, \quad (7.9)$$

respectivamente. Adicionalmente, pela imposição de que a função energia associada à lagrangiana (7.6) se anule, obtém-se a equação de Friedmann modificada, isto é,

$$E_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \dot{a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\chi}} \dot{\chi} - \mathcal{L} = 0, \implies H^2 = \frac{\rho}{6(F+G)}. \quad (7.10)$$

O sistema (7.7)-(7.10) compreende as equações de campo do modelo geral, onde a densidade de energia total, $\rho = \rho_m + \rho_\phi + \rho_\chi$, e a pressão total, $p = p_\phi + p_\chi$, são determinadas por

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V - 6H \frac{dF}{d\phi} \dot{\phi}, \quad (7.11)$$

$$\rho_\chi = \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 + W - 6H \frac{dG}{d\chi} \dot{\chi}, \quad (7.12)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V + 2 \left(\frac{dF}{d\phi} \ddot{\phi} + 2H \frac{dF}{d\phi} \dot{\phi} + \frac{d^2 F}{d\phi^2} \dot{\phi}^2 \right), \quad (7.13)$$

$$p_\chi = \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 - W + 2 \left(\frac{dG}{d\chi} \ddot{\chi} + 2H \frac{dG}{d\chi} \dot{\chi} + \frac{d^2 G}{d\chi^2} \dot{\chi}^2 \right), \quad (7.14)$$

de acordo com as definições (7.4) e (7.5).

Agora calcularemos a derivada covariante do tensor energia-momento total, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu T_m^{\mu\nu} + \nabla_\mu T_\phi^{\mu\nu} + \nabla_\mu T_\chi^{\mu\nu}$, a fim de analisar a troca de energia entre os campos. Primeiramente, o cálculo da quantidade $\dot{\rho} + 3H(\rho + p)$ para as densidades de energia (7.11) e (7.12) e suas respectivas pressões, leva-nos a

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = -\frac{\partial W}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{(dF/d\phi) \dot{\phi}}{F+G} \rho, \quad (7.15)$$

$$\dot{\rho}_\chi + 3H(\rho_\chi + p_\chi) = \frac{\partial W}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{(dG/d\chi) \dot{\chi}}{F+G} \rho, \quad (7.16)$$

onde (7.8), (7.9) e (7.10) foram usadas para as simplificações. As equações (7.15) e (7.16) são as mesmas daquelas que resultariam da derivada covariante dos tensores energia-momento para os campos escalares ϕ e χ ($\nabla_\mu T_\phi^{\mu\nu}$ e $\nabla_\mu T_\chi^{\mu\nu}$), respectivamente. Então, lembrando que $\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0$, temos que a derivada covariante do tensor energia-momento total é

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{\rho}{F+G} \left(\frac{dF}{d\phi} \dot{\phi} + \frac{dG}{d\chi} \dot{\chi} \right). \quad (7.17)$$

Observando (7.15) e (7.16), podemos notar que seus primeiros termos do lado direito representam a troca de energia entre os campos ϕ e χ e seus segundos

termos do lado direito descrevem a troca de energia entre os campos escalares e o campo gravitacional (acoplamento não mínimo). De (7.17), vemos que se F e G são constantes, tem-se $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Isso significa que, quando esse é o caso, existe uma troca de energia somente entre os campos escalares e a energia total relacionada aos constituintes do Universo é conservada na forma usual da Relatividade Geral (com a definição usual de tensor energia-momento da Relatividade Geral).

7.1.2 Potenciais e acoplamentos de Noether

A condição de existência da simetria de Noether, $L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = \mathbf{X}\mathcal{L} = 0$, é aplicada à lagrangiana (7.6), com o campo vetorial \mathbf{X} definido para o nosso problema como segue

$$\mathbf{X} = \alpha \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial \phi} + \gamma \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{d\alpha}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \frac{d\beta}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} + \frac{d\gamma}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\chi}}, \quad (7.18)$$

sendo α , β e γ funções de (a, ϕ, χ) . A quantidade conservada associada à simetria de Noether gerada por esse \mathbf{X} será dada por

$$M_0 = \alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} + \beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\chi}}, \quad (7.19)$$

conforme (4.6). Dessa aplicação, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais parciais acopladas

$$(F + G) \left(\alpha + 2a \frac{\partial \alpha}{\partial a} \right) + a \frac{dF}{d\phi} \left(\beta + a \frac{\partial \beta}{\partial a} \right) + a \frac{dG}{d\chi} \left(\gamma + a \frac{\partial \gamma}{\partial a} \right) = 0, \quad (7.20)$$

$$3\alpha - 12 \frac{dF}{d\phi} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} + 2a \frac{\partial \beta}{\partial \phi} = 0, \quad (7.21)$$

$$3\alpha - 12 \frac{dG}{d\chi} \frac{\partial \alpha}{\partial \chi} + 2a \frac{\partial \gamma}{\partial \chi} = 0, \quad (7.22)$$

$$a\beta \frac{d^2 F}{d\phi^2} + \left(2\alpha + a \frac{\partial \alpha}{\partial a} + a \frac{\partial \beta}{\partial \phi} \right) \frac{dF}{d\phi} + a \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \frac{dG}{d\chi} + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} (F + G) - \frac{a^2}{6} \frac{\partial \beta}{\partial a} = 0, \quad (7.23)$$

$$a\gamma \frac{d^2G}{d\chi^2} + \left(2\alpha + a \frac{\partial\alpha}{\partial a} + a \frac{\partial\gamma}{\partial\chi}\right) \frac{dG}{d\chi} + a \frac{\partial\beta}{\partial\chi} \frac{dF}{d\phi} + 2 \frac{\partial\alpha}{\partial\chi} (F + G) - \frac{a^2}{6} \frac{\partial\gamma}{\partial a} = 0, \quad (7.24)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\phi} \frac{dG}{d\chi} + \frac{\partial\alpha}{\partial\chi} \frac{dF}{d\phi} - \frac{a}{6} \left(\frac{\partial\beta}{\partial\chi} + \frac{\partial\gamma}{\partial\phi} \right) = 0, \quad (7.25)$$

$$3\alpha(V + W) + a\beta \left(\frac{dV}{d\phi} + \frac{\partial W}{\partial\phi} \right) + a\gamma \frac{\partial W}{\partial\chi} = 0. \quad (7.26)$$

A solução do sistema de equações diferenciais (7.20)-(7.26) não é única e as várias soluções que encontramos estão sumarizadas nas tabelas 7.1 e 7.2, as quais contém todos os conjuntos das funções $\alpha, \beta, \gamma, F, G, V, W$, onde as quantidades $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, F_0, F_0^1, G_0, G_0^1, V_0, W_0$ são constantes e $K = \beta_0/\gamma_0$. Procuramos por soluções que sempre fornecem para a função W uma expressão diferente de (0, constante, $f(\phi)$, $g(\chi)$), o que garante uma interação entre os campos ϕ e χ .

	α	β	γ	F	G	V	W
I	$\alpha_0 a$	$-3\alpha_0 \phi/2$	$-3\alpha_0 \chi/2$	$F_0 \phi^2$	$G_0 \chi^2$	$0, V_0 \phi^2$	$f(\chi/\phi) \phi^2$
II	$\alpha_0 a$	$-3\alpha_0 \phi/2$	$-3\alpha_0 \chi/2$	$F_0 \phi^2$	0	$0, V_0 \phi^2$	$f(\chi/\phi) \phi^2$
III	$\alpha_0 a$	$-3\alpha_0 \phi/2$	$-3\alpha_0 \chi/2$	0	$G_0 \chi^2$	$0, V_0 \phi^2$	$f(\chi/\phi) \phi^2$

Tabela 7.1: Soluções com $(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$.

Pode-se observar da Tabela 7.2 que as formas gerais de W geradas pela simetria de Noether permitem a existência de somas que incorporam termos da forma $f(\phi)$ – os quais representam um termo de auto interação adicional para o campo ϕ – a saber, $W = f(\phi) + g(\phi, \chi)$. Nesse caso, deve-se redefinir os potenciais nas equações das densidades de energia (7.11) e (7.12) e das pressões (7.13) e (7.14), escrevendo $W \rightarrow \bar{W} = W - f(\phi)$ e $V \rightarrow \bar{V} = V + f(\phi)$. Assim levamos em conta o termo de auto interação adicional do campo ϕ .

O caso II da Tabela 7.1 com $V = V_0 \phi^2$ é similar ao modelo analisado no artigo [10], e o caso III da Tabela 7.2, quando $h = \phi^2 + \chi^2$, é o modelo proposto em [81] com $V = W_0 \phi^4$, mas com um termo de auto interação adicional da forma $W_0 \chi^4$. Os modelos [81, 10] são casos particulares do caso I da Tabela 7.2.

	β	γ	F	G	V	W
I	$\beta_0\chi$	$-\beta_0\phi$	$F_0^1 + F_0\phi^2$	$G_0^1 + G_0\chi^2$	$\int \left(\frac{\phi}{\chi} \frac{\partial W}{\partial \chi} - \frac{\partial W}{\partial \phi} \right) d\phi$	$W_0 \int h\chi d\chi$
II	$\beta_0\chi$	$-\beta_0\phi$	$F_0^1 + F_0\phi^2$	$G_0^1 + G_0\chi^2$	$0, V_0$	$W(\phi^2 + \chi^2)$
III	$\beta_0\chi$	$-\beta_0\phi$	F_0	G_0	$\int \left(\frac{\phi}{\chi} \frac{\partial W}{\partial \chi} - \frac{\partial W}{\partial \phi} \right) d\phi$	$W_0 \int h\chi d\chi$
IV	$\beta_0\chi$	$-\beta_0\phi$	F_0	G_0	$0, V_0$	$W(\phi^2 + \chi^2)$
V	β_0	γ_0	$F_0^1 + F_0\phi$	$G_0^1 - KF_0\chi$	$0, V_0$	$W(\phi - K\chi)$
VI	β_0	γ_0	F_0	G_0	$0, V_0$	$W(\phi - K\chi)$

Tabela 7.2: Soluções com $\alpha = 0$ e $(\beta, \gamma) \neq 0$, onde $h = h(\phi^2 + \chi^2)$.

Casos	M_0
I–III Tab 7.1	$\frac{3}{2}\alpha_0 a^3 \left\{ 2H \left[4(F + G) - 3 \left(\phi \frac{dF}{d\phi} + \chi \frac{dG}{d\chi} \right) \right] + \mathcal{F}_\phi \dot{\phi} + \mathcal{G}_\chi \dot{\chi} \right\}$
I–IV Tab 7.2	$\beta_0 a^3 \left\{ 6H \left(\chi \frac{dF}{d\phi} - \phi \frac{dG}{d\chi} \right) + \phi \dot{\chi} - \chi \dot{\phi} \right\}$
V–VI Tab 7.2	$\gamma_0 a^3 \left\{ 6H \left(K \frac{dF}{d\phi} + \frac{dG}{d\chi} \right) - K \dot{\phi} - \dot{\chi} \right\}$

Tabela 7.3: Quantidades conservadas, com $\mathcal{F}_\phi = \left(4 \frac{dF}{d\phi} + \phi \right)$ e $\mathcal{G}_\chi = \left(4 \frac{dG}{d\chi} + \chi \right)$.

Da equação (7.51), podemos escrever as quantidades conservadas associadas aos casos das tabelas 7.1 e 7.2, as quais estão sumarizadas na Tabela 7.3.

7.1.3 Soluções das equações de campo

Devido à interação entre os campos ϕ e χ e a presença de um campo de matéria comum na ação (7.1), as equações de campo tornam-se mais complicadas do que no caso com dois campos escalares não interagentes [34]. Consequentemente, a procura por soluções numéricas do sistema (7.7)-(7.10) para os casos mais gerais das tabelas 7.1 e 7.2 será realizada.

Primeiramente, transformamos as derivadas temporais das equações (7.7)-(7.10) em derivadas com relação ao *redshift*, através das relações

$$z = \frac{1}{a} - 1, \quad \frac{d}{dt} = -H(1+z) \frac{d}{dz}, \quad (7.27)$$

e então dividimos (7.7)-(7.10) por ρ_0 – a densidade de energia total do Universo no presente. Como resultado, obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais acopladas

$$4\tilde{H}\tilde{H}'(1+z)(F+G) = \tilde{\rho} + \tilde{p}, \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^2(1+z)^2\phi'' + \tilde{H} \left[\tilde{H}'(1+z) - 2\tilde{H} \right] \left[(1+z)\phi' + 6\frac{dF}{d\phi} \right] \\ + \frac{d\tilde{V}}{d\phi} + \frac{\partial\tilde{W}}{\partial\phi} = 0, \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\tilde{H}^2(1+z)^2\chi'' + \tilde{H} \left[\tilde{H}'(1+z) - 2\tilde{H} \right] \left[(1+z)\chi' + 6\frac{dG}{d\chi} \right] + \frac{\partial\tilde{W}}{\partial\chi} = 0. \quad (7.30)$$

Acima, a linha representa derivada com relação a z e as seguintes quantidades adimensionais foram introduzidas: $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0 = \rho_m/\rho_0 + \rho_\phi/\rho_0 + \rho_\chi/\rho_0 = \tilde{\rho}_m + \tilde{\rho}_\phi + \tilde{\rho}_\chi$, $\tilde{p} = p/\rho_0 = p_\phi/\rho_0 + p_\chi/\rho_0 = \tilde{p}_\phi + \tilde{p}_\chi$, $\tilde{H} = H/\sqrt{\rho_0}$, $\tilde{V} = V/\rho_0$, e $\tilde{W} = W/\rho_0$. Aqui as densidades de energia e as pressões apresentam as formas

$$\tilde{\rho}_m = \tilde{\rho}_m^0(1+z)^3, \quad (7.31)$$

$$\tilde{\rho}_\phi = \frac{\tilde{H}^2(1+z)^2\phi'^2}{2} + \tilde{V} + 6\tilde{H}^2(1+z)\frac{dF}{d\phi}\phi', \quad (7.32)$$

$$\tilde{\rho}_\chi = \frac{\tilde{H}^2(1+z)^2\chi'^2}{2} + \tilde{W} + 6\tilde{H}^2(1+z)\frac{dG}{d\chi}\chi', \quad (7.33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\phi = \frac{\tilde{H}^2(1+z)^2\phi'^2}{2} - \tilde{V} + 2\tilde{H}(1+z) \left\{ \tilde{H}(1+z) \left(\frac{d^2F}{d\phi^2}\phi'^2 + \frac{dF}{d\phi}\phi'' \right) \right. \\ \left. + [\tilde{H}'(1+z) - \tilde{H}]\frac{dF}{d\phi}\phi' \right\}, \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\chi = \frac{\tilde{H}^2(1+z)^2\chi'^2}{2} - \tilde{W} + 2\tilde{H}(1+z) \left\{ \tilde{H}(1+z) \left(\frac{d^2G}{d\chi^2}\chi'^2 + \frac{dG}{d\chi}\chi'' \right) \right. \\ \left. + [\tilde{H}'(1+z) - \tilde{H}]\frac{dG}{d\chi}\chi' \right\}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Nosso objetivo é usar as soluções dadas nas tabelas 7.1 e 7.2 para descrever o setor escuro como uma estrutura interagente. Para isso, consideramos os campos ϕ e χ correspondendo aos campos de energia escura e matéria escura, respectivamente. Para esse fim, temos que exigir certas propriedades para cada campo: (i) o campo ϕ deve apresentar uma pressão negativa no presente e sua densidade

de energia compõe a maior parte da energia total do Universo atualmente; (ii) o campo χ tem uma pequena pressão positiva em comparação ao módulo da pressão da energia escura e representa uma considerável fração da energia total do Universo no presente.

Com o intuito de satisfazer as exigências acima, usaremos condições iniciais para o sistema (7.28)-(7.30) baseadas nos dados astronômicos. Em $z = 0$, introduzimos as quantidades $\tilde{\rho}_m(0) = \rho_m^0/\rho_0 = \Omega_m^0$, $\tilde{\rho}_\phi(0) = \rho_\phi^0/\rho_0 = \Omega_\phi^0$ e $\tilde{\rho}_\chi(0) = \rho_\chi^0/\rho_0 = \Omega_\chi^0$, onde Ω_i^0 denota o valor do parâmetro de densidade de cada componente no presente e $\Omega_0 = \Omega_m^0 + \Omega_\phi^0 + \Omega_\chi^0$ refere-se ao parâmetro de densidade total. Os valores dos parâmetros de densidade adotados aqui são: $\Omega_m^0 = 0.05$, $\Omega_\phi^0 = 0.72$ e $\Omega_\chi^0 = 0.23$ (ver [51]). Além disso, de acordo com a exigência (i), tem-se que $\phi'(0)^2 \ll 1$, o que significa que o campo ϕ varia muito lentamente no presente, isto é, $\phi'(0) = \epsilon$, com ϵ muito pequeno. De (7.32) e dessa última condição, segue que $\tilde{V}(0) \approx \Omega_\phi^0$ e pode-se obter a condição inicial para ϕ . Uma vez que fixamos $\phi(0)$, pode-se determinar a condição inicial para χ a partir da necessidade de que o acoplamento tenha hoje o valor $1/2$, ou seja, $F(0) + G(0) = 1/2$. Satisfazendo a exigência II pela condição $\tilde{\rho}_\chi(0) = \Omega_\chi^0$, e uma vez que se conhece $\chi(0)$, de (7.33), determinamos a condição inicial para χ' . A parte da exigência (ii) que concerne ao valor de p_χ pode ser satisfeita por meio de ajustes das constantes que aparecem nas funções dos acoplamentos e potenciais. A partir de (7.10), obtemos para o parâmetro de Hubble a condição inicial $\tilde{H}(0) = \sqrt{\Omega_0/6[F(0) + G(0)]} = 1/\sqrt{3}$.

Sumarizando, temos:

- (a) $\tilde{H}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
- (b) $\tilde{V}(0) = \Omega_\phi^0$ determina $\phi(0)$, $\phi'(0)^2 \ll 1$;
- (c) $G(0) = \frac{1}{2} - F(0)$ determina $\chi(0)$;
- (d) $\chi'(0)^2 + 6\tilde{W}(0) + 12\chi'(0)\frac{dG}{d\chi}\Big|_{z=0} = 6\Omega_\chi^0$ determina $\chi'(0)$.

Para o caso I da Tabela 7.1 (que chamaremos de caso 1), tomamos

$$V = V_0\phi^2, \quad f\left(\frac{\chi}{\phi}\right) = \frac{\chi}{\phi}, \quad \text{que implica em } W = W_0\phi\chi.$$

Pelo uso das equações acima, as condições iniciais são

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \sqrt{\frac{0.72}{\widetilde{V}_0}}, & \chi(0) &= \sqrt{\frac{1/2 - F_0\phi(0)^2}{G_0}}, \\ \chi'(0) &= \sqrt{6[0.23 + 24G_0^2\chi(0)^2 - \widetilde{W}_0\phi(0)\chi(0)]} - 12G_0\chi(0), \end{aligned}$$

onde

$$F_0 \leq \frac{1}{2\phi(0)^2} \quad \text{e} \quad \widetilde{W}_0 \leq \frac{0.23/\chi(0) + 24G_0^2\chi(0)}{\phi(0)}.$$

Adotamos nas computações numéricas os seguintes valores *ótimos* para as constantes: $F_0 = -0.002366$, $G_0 = 0.04651$, $V_0 = 0.01001$ e $W_0 = 0.01856$.

Agora, para o caso I da Tabela 7.2 (que chamaremos de caso 2), considerando-se $F_0^1 = G_0^1 = 0$ sem perda de generalidade, tomamos

$$V = W_0\phi^4, \quad h(\phi^2 + \chi^2) = \phi^2 + \chi^2, \quad \text{que implica em } W = W_0(\chi^4 + 2\phi^2\chi^2),$$

com W_0 da Tabela 7.2 repassado por $4W_0$.

Nesse caso, tem-se as condições iniciais

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \left(\frac{0.72}{\widetilde{W}_0}\right)^{1/4}, & \chi(0) &= \sqrt{\frac{1/2 - F_0\phi(0)^2}{G_0}}, \\ \chi'(0) &= \sqrt{6[0.23 + (24G_0^2 - \widetilde{W}_0)\chi(0)^4 - 2\widetilde{W}_0\phi(0)^2\chi(0)^2]} - 12G_0\chi(0), \end{aligned}$$

onde

$$F_0 \leq \frac{1}{2\phi(0)^2} \quad \text{e} \quad \widetilde{W}_0 \leq \frac{0.23 + 24G_0^2\chi(0)^4}{\chi(0)^4 + 2\phi(0)^2\chi(0)^2},$$

com os seguintes valores *ótimos* tomados para as constantes: $F_0 = 0.2064$, $G_0 = 0.03333$ e $W_0 = 0.1250$.

Na Figura 7.1 estão representados os parâmetros de densidade da matéria comum, energia escura e matéria escura para os casos 1 e 2, nas janelas da esquerda e da direita, respectivamente. A partir dessa figura podemos observar a

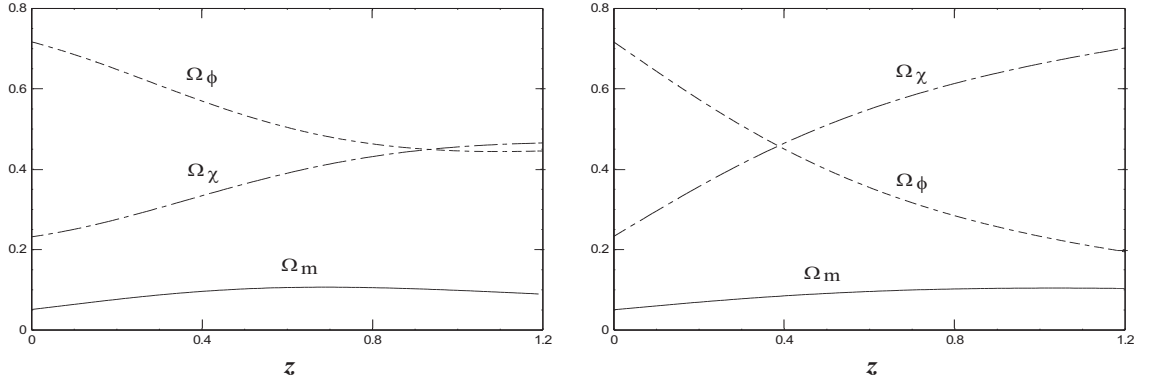


Figura 7.1: Parâmetros de densidade da matéria comum e dos campos escalares como funções do *redshift* z . Janela da esquerda: caso 1; Janela da direita: caso 2.

evidente diferença no aumento do valor do parâmetro de densidade da energia escura com o *redshift* e a correspondente diminuição do parâmetro de densidade da matéria escura para os dois casos. Haja vista que o acoplamento gravitacional tem formas quadráticas em ambos os casos, as diferentes evoluções dos parâmetros de densidade com o *redshift* são determinadas unicamente pela interação e pelos potenciais de auto interação dos campos, os quais são responsáveis pela transferência de energia entre os campos escalares e entre os campos escalares e o campo gravitacional. Tal resultado é facilmente entendido pela observação das equações (7.15) e (7.16).

Essas transferências de energia entre os campos (campo escalar - campo escalar e campo gravitacional - campos escalares) têm um papel definitivo na variedade de comportamentos que pode ser produzida por modelos com campos escalares, de acordo com o que é observado a partir dos dois casos representados na Figura 7.1. Isso é definitivamente verificado quando se observa na Figura 7.1 que o campo de matéria comum, o qual não está acoplado aos outros campos, tem uma evolução do seu parâmetro de densidade com o *redshift* quase idêntico nos dois casos, o que significa que o mesmo está apenas submetido à diluição causada pela expansão do Universo, que apresenta praticamente a mesma razão para os dois casos. Dessas propriedades, concluímos que um setor escuro interagente pode apresentar

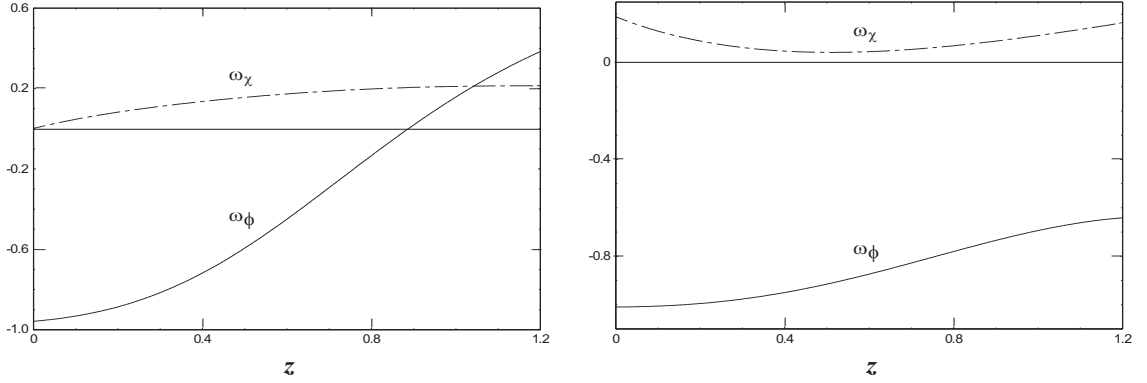


Figura 7.2: Razão entre a pressão e a densidade de energia dos campos escalares como funções do *redshift* z . Janela da esquerda: caso 1; Janela da direita: caso 2.

uma gama de possibilidades para a evolução da matéria escura.

As razões entre a pressão e a densidade de energia dos campos escalares, $\omega_\phi = p_\phi/\rho_\phi$ e $\omega_\chi = p_\chi/\rho_\chi$, estão representadas na Figura 7.2, onde a janela da esquerda corresponde ao caso 1 e a janela da direita corresponde ao caso 2. Da figura vemos que o ω_χ é pequeno em comparação ao módulo de ω_ϕ , para ambos os casos. Por outro lado, a pressão da matéria escura tem um papel significativo na determinação da época em que ocorre a transição do Universo de uma expansão desacelerada para uma acelerada, haja vista que sua participação na composição do Universo é significativa. Observe que no presente $\omega_\phi \rightarrow -1$, o que corresponde à constante cosmológica.

Na janela da esquerda da Figura 7.3 está representado o acoplamento efetivo $F + G$ e na janela da direita o parâmetro de desaceleração $q = \frac{1}{2} + \frac{3p}{2\rho}$, para os casos 1 e 2. Podemos inferir da Figura 7.3 que o acoplamento gravitacional efetivo apresenta uma pequena variação em torno do seu presente valor $F(0) + G(0) = 1/2$. Essa variação é de aproximadamente 10 %, o que significa que a "constante" gravitacional efetiva varia essa quantidade no intervalo considerado. A janela da direita mostra que existe uma pequena diferença entre os *redshifts* de transição de um regime desacelerado para um acelerado para os dois casos. Os valo-

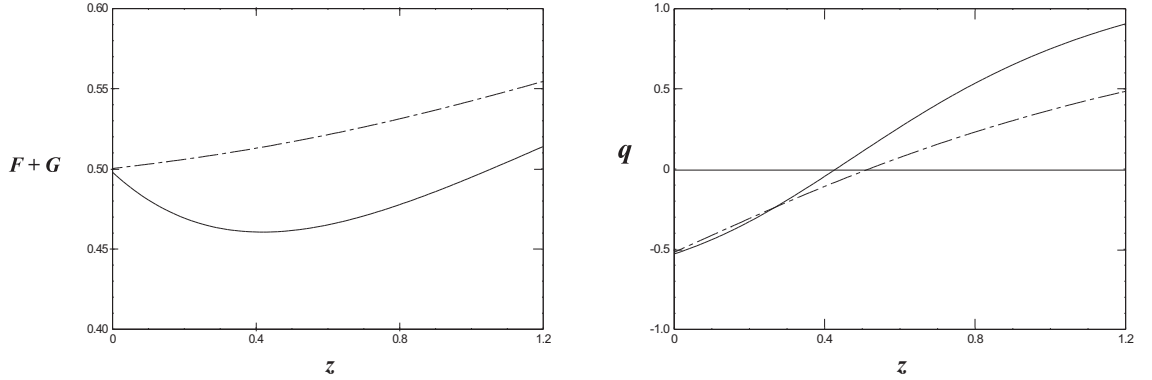


Figura 7.3: Janela da esquerda: acoplamento efetivo versus *redshift* z ; Janela da direita: Parâmetro de desaceleração versus *redshift* z . A linha homogênea representa o caso 1 e a linha pontilhada o caso 2.

res dos *redshifts* de transição para os casos 1 e 2 são $z_T = 0.43$ e $z_T = 0.52$, enquanto os valores presentes do parâmetro de desaceleração são $q(0) = -0.53$ e $q(0) = -0.52$, respectivamente. Para fins de comparação com os dados observacionais, tem-se $z_T = 0.74 \pm 0.18$ (de [94]) para o *redshift* de transição e $q(0) = -0.46 \pm 0.13$ (de [95]) para o parâmetro de desaceleração avaliado em $z = 0$.

7.2 Campos escalares canônicos e não canônicos interagentes

7.2.1 Ação geral e simetria de Noether

Tomamos agora a ação geral onde um campo escalar é não canônico (campo de táquions) e representado por φ , e o outro campo escalar é canônico e representado por ϕ

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ [F(\varphi) + G(\phi)]R - V(\varphi) \sqrt{1 - \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi} + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - W(\varphi, \phi) \right\} + S_m, \quad (7.36)$$

onde $F(\varphi)$ e $G(\phi)$ representam funções genéricas de classe C^2 que descrevem o acoplamento dos campos escalares à gravidade, $V(\varphi)$ é o potencial de auto interação do campo φ e $W(\varphi, \phi)$ descreve a auto interação do campo ϕ e a interação entre os campos φ e ϕ . Como anteriormente, quando $F(\varphi) + G(\phi) \rightarrow 1/2$, recuperamos o acoplamento de Einstein.

O campo de táquions teve sua origem na teoria de cordas, mas pode ser introduzido de uma forma simples da seguinte maneira. O campo taquiônico pode ser interpretado como a generalização da lagrangiana para uma partícula relativística: $\mathcal{L}_q = -m\sqrt{1 - \dot{q}^2} \rightarrow \mathcal{L}_\varphi = -V(\varphi)\sqrt{1 - \partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi}$. Da mesma forma como o campo escalar canônico é a generalização natural da lagrangiana para uma partícula não relativística: $\mathcal{L}_q = (1/2)\dot{q}^2 - V(q) \rightarrow \mathcal{L}_\varphi = (1/2)\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - V(\varphi)$.

A partir da variação da ação (7.36) com respeito a $g_{\mu\nu}$, obtém-se as equações de Einstein modificadas com a mesma forma de (7.2)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{T_{\mu\nu}}{2(F + G)}, \quad (7.37)$$

sendo $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^m + T_{\mu\nu}^\varphi + T_{\mu\nu}^\phi$ definido como segue

$$T_{\mu\nu}^m = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (7.38)$$

$$T_{\mu\nu}^\varphi = V \left(\frac{\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi}{\sqrt{1 - \partial_\theta\varphi\partial^\theta\varphi}} + g_{\mu\nu}\sqrt{1 - \partial_\theta\varphi\partial^\theta\varphi} \right) + (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\nabla_\theta\nabla^\theta) F, \quad (7.39)$$

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \left(\frac{1}{2}\partial_\theta\phi\partial^\theta\phi - W \right) g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\nabla_\theta\nabla^\theta) G. \quad (7.40)$$

Considerando-se novamente a métrica plana de Friedmann-Robertson-Walker e os campos escalares espacialmente homogêneos, $\varphi = \varphi(t)$ e $\phi = \phi(t)$, com o campo de matéria comum sendo um fluido sem pressão, a lagrangiana pontual que resulta da ação (7.36) tem a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & 6a\dot{a}^2(F + G) + 6a^2\dot{a} \left(\frac{dF}{d\varphi}\dot{\varphi} + \frac{dG}{d\phi}\dot{\phi} \right) \\ & + a^3V\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2} - a^3 \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - W \right) + \rho_m^0. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Da condição para a simetria de Noether, $L_{\mathbf{X}}\mathcal{L} = \mathbf{X}\mathcal{L} = 0$, aplicada à lagrangiana (7.41), sendo o campo vetorial \mathbf{X} agora definido por

$$\mathbf{X} = \alpha \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial \varphi} + \gamma \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{d\alpha}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \frac{d\beta}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{d\gamma}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}, \quad (7.42)$$

onde α , β e γ são funções de (a, φ, ϕ) , obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais parciais acopladas

$$(F + G) \left(\alpha + 2a \frac{\partial \alpha}{\partial a} \right) + a \frac{dF}{d\varphi} \left(\beta + a \frac{\partial \beta}{\partial a} \right) + a \frac{dG}{d\phi} \left(\gamma + a \frac{\partial \gamma}{\partial a} \right) = 0, \quad (7.43)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \frac{dF}{d\varphi} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \phi} = 0, \quad (7.44)$$

$$3\alpha - 12 \frac{dG}{d\phi} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} + 2a \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} = 0, \quad (7.45)$$

$$a\beta \frac{d^2 F}{d\varphi^2} + \left(2\alpha + a \frac{\partial \alpha}{\partial a} + a \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \right) \frac{dF}{d\varphi} + a \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \frac{dG}{d\phi} + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} (F + G) = 0, \quad (7.46)$$

$$a\gamma \frac{d^2 G}{d\phi^2} + \left(2\alpha + a \frac{\partial \alpha}{\partial a} + a \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \right) \frac{dG}{d\phi} + a \frac{\partial \beta}{\partial \phi} \frac{dF}{d\varphi} + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} (F + G) - \frac{a^2}{6} \frac{\partial \gamma}{\partial a} = 0, \quad (7.47)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \frac{dG}{d\phi} + \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \frac{dF}{d\varphi} - \frac{a}{6} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \phi} + \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (7.48)$$

$$3\alpha V + a\beta \frac{dV}{d\varphi} = 0, \quad (7.49)$$

$$3\alpha W + a\beta \frac{\partial W}{\partial \varphi} + a\gamma \frac{\partial W}{\partial \phi} = 0, \quad (7.50)$$

e a quantidade conservada associada à simetria gerada por (7.42) é dada pela expressão

$$M_0 = \alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} + \beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + \gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \quad (7.51)$$

A solução do sistema (7.43)-(7.50) não é única e as soluções que encontramos estão dadas na Tabela 7.4, contendo todos os conjuntos de $\alpha, \beta, \gamma, F, G, V, W$, onde $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, F_0, F_0^1, G_0, G_0^1, V_0$ são constantes e $\mu = 3\alpha_0/\beta_0, K = \beta_0/\gamma_0$. Aqui também procuramos por soluções que apresentem potenciais da forma $W \neq (0, \text{constante}, f(\varphi), g(\phi))$, para que seja produzida uma interação entre os campos φ e ϕ . De (7.51), temos as respectivas quantidades conservadas, as quais estão dadas na Tabela 7.5.

	α	β	γ	F	G	V	W
I	$\alpha_0 a$	β_0	$-3\alpha_0\phi/2$	$F_0 e^{-\mu\varphi}$	$G_0\phi^2$	$V_0 e^{-\mu\varphi}$	$f(\phi e^{\frac{\mu\varphi}{2}}) e^{-\mu\varphi}$
II	$\alpha_0 a$	β_0	$-3\alpha_0\phi/2$	$F_0 e^{-\mu\varphi}$	0	$V_0 e^{-\mu\varphi}$	$f(\phi e^{\frac{\mu\varphi}{2}}) e^{-\mu\varphi}$
III	$\alpha_0 a$	β_0	$-3\alpha_0\phi/2$	0	$G_0\phi^2$	$V_0 e^{-\mu\varphi}$	$f(\phi e^{\frac{\mu\varphi}{2}}) e^{-\mu\varphi}$
IV	0	β_0	γ_0	$F_0^1 + F_0\varphi$	$G_0^1 - KF_0\phi$	V_0	$W(\varphi - K\phi)$
V	0	β_0	γ_0	F_0	G_0	V_0	$W(\varphi - K\phi)$

Tabela 7.4: Soluções.

Casos	M_0
I-III	$\frac{3}{2}\alpha_0 a^3 \left\{ 2H \left[4(F + G) + 3 \left(\frac{2}{\mu} \frac{dF}{d\varphi} - \phi \frac{dG}{d\phi} \right) \right] + \left(4 \frac{dF}{d\varphi} - \frac{2V}{\mu\sqrt{1-\dot{\varphi}^2}} \right) \dot{\varphi} + \mathcal{G}_\phi \dot{\phi} \right\}$
IV-V	$\gamma_0 a^3 \left\{ 6H \left(K \frac{dF}{d\varphi} + \frac{dG}{d\phi} \right) - \frac{KV\dot{\varphi}}{\sqrt{1-\dot{\varphi}^2}} - \dot{\phi} \right\}$

Tabela 7.5: Quantidades conservadas, com $\mathcal{G}_\phi = \left(4 \frac{dG}{d\phi} + \phi \right)$.

É interessante observar que a solução I generaliza o modelo analisado no trabalho [18].

7.2.2 Equações de campo e trocas de energia

Aplicando-se a equação de Euler-Lagrange à lagrangiana (7.41) para a , φ e ϕ , respectivamente, tem-se

$$2(F + G)(2\dot{H} + 3H^2) - V\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - W + 2 \left(\frac{dF}{d\varphi} \ddot{\varphi} + 2H \frac{dF}{d\varphi} \dot{\varphi} + \frac{d^2 F}{d\varphi^2} \dot{\varphi}^2 \right) + 2 \left(\frac{dG}{d\phi} \ddot{\phi} + 2H \frac{dG}{d\phi} \dot{\phi} + \frac{d^2 G}{d\phi^2} \dot{\phi}^2 \right) = 0, \quad (7.52)$$

$$\frac{\ddot{\varphi}}{1 - \dot{\varphi}^2} + 3H\dot{\varphi} + \frac{1}{V} \frac{dV}{d\varphi} + \left[\frac{\partial W}{\partial \varphi} - 6(\dot{H} + 2H^2) \frac{dF}{d\varphi} \right] \frac{\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2}}{V} = 0, \quad (7.53)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - 6(\dot{H} + 2H^2) \frac{dG}{d\phi} + \frac{\partial W}{\partial \phi} = 0. \quad (7.54)$$

Da mesma forma que na seção anterior, pela imposição de que a função energia $E_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \dot{a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L}$ associada à lagrangiana (7.41) seja nula,

segue a equação de Friedmann modificada

$$6(F + G)H^2 - \frac{\rho_m^0}{a^3} - \frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2}} + 6H \frac{dF}{d\varphi} \dot{\varphi} - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - W + 6H \frac{dG}{d\phi} \dot{\phi} = 0. \quad (7.55)$$

A partir das equações (7.52)-(7.55), define-se $\rho = \rho_m + \rho_\varphi + \rho_\phi$ e $p = p_\varphi + p_\phi$, com suas formas dadas por

$$\rho_\varphi = \frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\varphi}^2}} - 6H \frac{dF}{d\varphi} \dot{\varphi}, \quad (7.56)$$

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + W - 6H \frac{dG}{d\phi} \dot{\phi}, \quad (7.57)$$

$$p_\varphi = -V \sqrt{1 - \dot{\varphi}^2} + 2 \left(\frac{dF}{d\varphi} \ddot{\varphi} + 2H \frac{dF}{d\varphi} \dot{\varphi} + \frac{d^2 F}{d\varphi^2} \dot{\varphi}^2 \right), \quad (7.58)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - W + 2 \left(\frac{dG}{d\phi} \ddot{\phi} + 2H \frac{dG}{d\phi} \dot{\phi} + \frac{d^2 G}{d\phi^2} \dot{\phi}^2 \right), \quad (7.59)$$

de acordo com as definições dos tensores energia-momento (7.39) e (7.40).

Pelo uso das densidades de energia (7.56) e (7.57) e suas respectivas pressões (7.58) e (7.59), tem-se

$$\dot{\rho}_\varphi + 3H(\rho_\varphi + p_\varphi) = -\frac{\partial W}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{(dF/d\varphi)\dot{\varphi}}{F + G} \rho, \quad (7.60)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = \frac{\partial W}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{(dG/d\phi)\dot{\phi}}{F + G} \rho, \quad (7.61)$$

onde (7.53), (7.54) e (7.55) foram usadas nas simplificações. Por conseguinte, procedendo como na Seção 7.1, temos a derivada covariante do tensor energia-momento total

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{\rho}{F + G} \left(\frac{dF}{d\varphi} \dot{\varphi} + \frac{dG}{d\phi} \dot{\phi} \right), \quad (7.62)$$

que tem a mesma forma de (7.17).

Em virtude desses resultados, consideraremos o modelo do setor escuro interagente como anteriormente: toma-se o campo φ para representar a energia escura e o campo ϕ para representar a matéria escura. E seguindo as restrições impostas pelos dados da astronomia: (i) o campo φ compõe a maior parte da energia total do Universo e tem uma expressiva pressão negativa atualmente; (ii) o campo ϕ tem uma pequena pressão positiva e sua densidade de energia representa uma considerável fração da energia total do Universo no presente.

7.2.3 Soluções cosmológicas

Tendo em vista as dificuldades de integração, procuraremos por soluções numéricas para o sistema (7.52)-(7.55). Com o objetivo de analisar os cenários cosmológicos que esses modelos podem descrever, as soluções para alguns casos da Tabela 7.4 serão consideradas.

Transformamos agora as derivadas temporais do sistema (7.52)-(7.55) em derivadas com relação ao *redshift*. Adicionalmente, pela substituição de H^2 dado pela equação (7.55) na equação (7.52), obtém-se o seguinte sistema final de equações diferenciais

$$4\tilde{H}\tilde{H}'(1+z)(F+G) = \tilde{\rho} + \tilde{p}, \quad (7.63)$$

$$\frac{\tilde{H}^2(1+z)^2\tilde{\varphi}'' + \tilde{H}(1+z)[\tilde{H}'(1+z) + \tilde{H}]\tilde{\varphi}'}{1 - \tilde{H}^2(1+z)^2\tilde{\varphi}'^2} + \frac{1}{\tilde{V}} \frac{d\tilde{V}}{d\tilde{\varphi}} - 3\tilde{H}^2(1+z)\tilde{\varphi}' + \left\{ 6\tilde{H}[\tilde{H}'(1+z) - 2\tilde{H}] \frac{dF}{d\tilde{\varphi}} + \frac{\partial\tilde{W}}{\partial\tilde{\varphi}} \right\} \frac{\sqrt{1 - \tilde{H}^2(1+z)^2\tilde{\varphi}'^2}}{\tilde{V}} = 0, \quad (7.64)$$

$$\tilde{H}^2(1+z)^2\phi'' + \tilde{H}[\tilde{H}'(1+z) - 2\tilde{H}] \left[(1+z)\phi' + 6\frac{dG}{d\phi} \right] + \frac{\partial\tilde{W}}{\partial\phi} = 0, \quad (7.65)$$

com a linha representando derivadas com respeito ao *redshift* z , onde $\tilde{H} = H/\sqrt{\rho_0}$, $\tilde{\varphi} = \sqrt{\rho_0}\varphi$, $\tilde{V} = V/\rho_0$, $\tilde{W} = W/\rho_0$, $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0 = \rho_m/\rho_0 + \rho_\varphi/\rho_0 + \rho_\phi/\rho_0 = \tilde{\rho}_m + \tilde{\rho}_\varphi + \tilde{\rho}_\phi$ e $\tilde{p} = p/\rho_0 = p_\varphi/\rho_0 + p_\phi/\rho_0 = \tilde{p}_\varphi + \tilde{p}_\phi$, as quais são quantidades adimensionais. As densidades de energia e pressões são dadas por

$$\tilde{\rho}_m = \tilde{\rho}_m^0(1+z)^3, \quad (7.66)$$

$$\tilde{\rho}_\varphi = \frac{\tilde{V}}{\sqrt{1 - \tilde{H}^2(1+z)^2\tilde{\varphi}'^2}} + 6\tilde{H}^2(1+z)\frac{dF}{d\tilde{\varphi}}\tilde{\varphi}', \quad (7.67)$$

$$\tilde{\rho}_\phi = \frac{\tilde{H}^2(1+z)^2\phi'^2}{2} + \tilde{W} + 6\tilde{H}^2(1+z)\frac{dG}{d\phi}\phi', \quad (7.68)$$

$$\tilde{p}_\varphi = 2\tilde{H}(1+z) \left\{ \tilde{H}(1+z) \left(\frac{d^2F}{d\tilde{\varphi}^2}\tilde{\varphi}'^2 + \frac{dF}{d\tilde{\varphi}}\tilde{\varphi}'' \right) + [\tilde{H}'(1+z) - \tilde{H}] \frac{dF}{d\tilde{\varphi}}\tilde{\varphi}' \right\} - \tilde{V}\sqrt{1 - \tilde{H}^2(1+z)^2\tilde{\varphi}'^2}, \quad (7.69)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\phi = 2\tilde{H}(1+z) \left\{ \tilde{H}(1+z) \left(\frac{d^2G}{d\phi^2} \phi'^2 + \frac{dG}{d\phi} \phi'' \right) + \left[\tilde{H}'(1+z) - \tilde{H} \right] \frac{dG}{d\phi} \phi' \right\} \\ + \frac{\tilde{H}^2(1+z)^2 \phi'^2}{2} - \tilde{W}. \end{aligned} \quad (7.70)$$

As exigências (i) e (ii) para os campos ϕ e φ serão satisfeitas pelo uso de condições iniciais para o sistema (7.63)-(7.65) determinadas a partir dos dados astronômicos, da mesma forma como foi feito para o modelo canônico - canônico. Da exigência I, temos que $\tilde{\varphi}'(0)^2 \ll 1$, ou seja, o campo φ está variando muito lentamente no presente (a mesma consideração da Seção 7.1). Essa condição e (7.67) implicam na relação $\tilde{V}(0) \approx \Omega_\varphi^0$. Lembrando que o acoplamento gravitacional deve ter o valor 1/2 atualmente, $F(0) + G(0) = 1/2$, a equação (7.55) fornece a condição inicial $\tilde{H}(0) = \sqrt{\Omega_0/6[F(0) + G(0)]} = 1/\sqrt{3}$ para o parâmetro de Hubble, da mesma forma que no primeiro caso. Todas essas relações serão empregadas nas comparações com os dados observacionais. De agora em diante, analisaremos os casos I e V da Tabela 7.4, os quais representam modelos interagentes não minimamente e minimamente acoplados ao campo gravitacional, respectivamente.

Para o caso I, consideramos

$$f\left(\phi e^{\frac{\mu\varphi}{2}}\right) = \frac{e^{-\frac{\mu\varphi}{2}}}{\phi}, \quad \text{que implica em } W = W_0 \frac{e^{-\frac{3\mu\varphi}{2}}}{\phi}.$$

A partir dessas funções, determina-se que as condições iniciais são dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(0) &= \frac{\ln[\tilde{V}_0/0.72]}{\tilde{\mu}}, & \phi(0) &= \sqrt{\frac{1/2 - F_0 e^{-\tilde{\mu}\tilde{\varphi}(0)}}{G_0}}, \\ \phi'(0) &= \sqrt{6 \left[0.23 + 24G_0^2 \phi(0)^2 - \tilde{W}_0 \phi(0)^{-1} e^{-\frac{3\tilde{\mu}\tilde{\varphi}(0)}{2}} \right]} - 12G_0 \phi(0), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\mu} = \mu/\sqrt{\rho_0}$ e

$$F_0 \leq \frac{e^{\tilde{\mu}\tilde{\varphi}(0)}}{2}, \quad \tilde{W}_0 \leq [0.23 + 24G_0^2 \phi(0)^2] \phi(0) e^{\frac{3\tilde{\mu}\tilde{\varphi}}{2}}.$$

Tomamos $\tilde{\varphi}'(0) = 10^{-6}$ e os seguintes valores *ótimos* para as constantes: $F_0 = -8.5 \times 10^{-3}$; $G_0 = 6.9 \times 10^{-3}$; $\tilde{V}_0 = 2.2 \times 10^{-3}$; $\tilde{W}_0 = 1.9 \times 10^{-3}$. Para fins de comparação, dois valores para os coeficientes do termo exponencial foram

adotados, a saber, $\tilde{\mu}_1 = 10^{-3}$ e $\tilde{\mu}_2 = 10^{-2}$.

Consideramos para o caso V que a pressão da matéria escura se anula em $z = 0$ e que o potencial de interação dos campos escalares é dado por $W(\varphi - \kappa\phi) = W_0 e^{-\xi(\varphi - \kappa\phi)}$. Da subtração e da soma das equações (7.68) e (7.70), obtém-se as condições iniciais para $\phi(0)$ e $\phi'(0)$, respectivamente,

$$\phi(0) = \frac{\tilde{\varphi}(0) + \ln(0.115/\tilde{W}_0)/\tilde{\xi}}{\tilde{\kappa}}, \quad \phi'(0) = \sqrt{0.69},$$

onde $\tilde{\xi} = \xi/\sqrt{\rho_0}$ e $\tilde{\kappa} = \sqrt{\rho_0}\kappa$. As condições iniciais para $\tilde{\varphi}(0)$ e $\tilde{\varphi}'(0)$ são livres e foram escolhidas como $\tilde{\varphi}(0) = 1.0$ e $\tilde{\varphi}'(0) = 10^{-2}$. Os seguintes valores *ótimos* foram adotados para as constantes: $F_0 + G_0 = 1/2$; $\tilde{V}_0 = 0.72$; $\tilde{W}_0 = 10^{-2}$; $\tilde{\kappa} = 0.5405$. Como no caso anterior, dois valores para o coeficiente do termo exponencial foram tomados, a saber, $\tilde{\xi}_1 = 4.9$ e $\tilde{\xi}_2 = 4.45$.

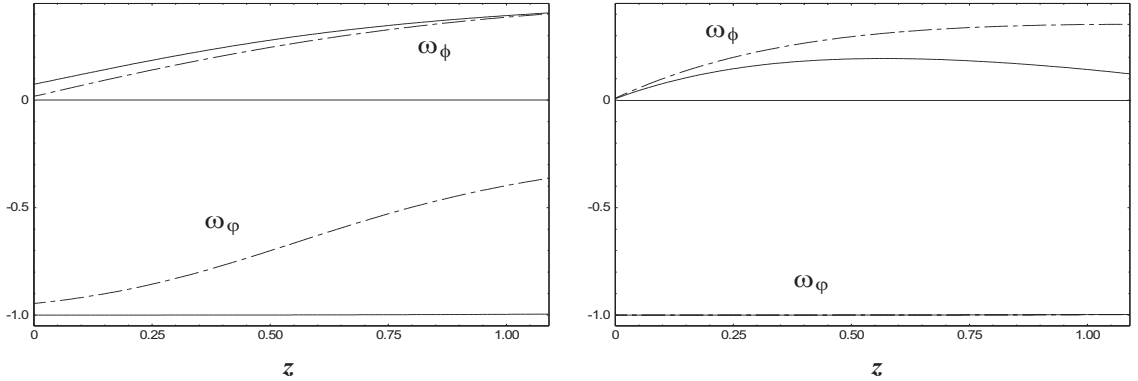


Figura 7.4: Janela da esquerda: a razão entre a pressão e a densidade de energia dos campos escalares para o caso I, representada pela linha homogênea para $\tilde{\mu}_1 = 10^{-3}$ e pela linha pontilhada para $\tilde{\mu}_2 = 10^{-2}$. Janela da direita: a razão entre a pressão e a densidade de energia dos campos escalares para o caso V, representada pela linha homogênea para $\tilde{\xi}_1 = 4.900$ e pela linha pontilhada para $\tilde{\xi}_2 = 4.450$.

Na Figura 7.4 estão representadas as razões entre a pressão e a densidade de energia dos campos escalares, $\omega_\varphi = p_\varphi/\rho_\varphi$ e $\omega_\phi = p_\phi/\rho_\phi$, onde as janelas da esquerda e da direita representam os casos I e V, respectivamente. Dessa figura

pode-se inferir que quando o parâmetro $\tilde{\mu}$ é variado de 10^{-3} à 10^{-2} (caso I), a razão ω_φ muda sua evolução com o *redshift* drasticamente. Esse comportamento pode ser entendido observando-se que, de acordo com (7.60), essa razão está relacionada com a troca direta de energia entre o campo φ e o campo gravitacional. Conseqüentemente, o comportamento da energia escura muda do tipo constante cosmológica, $\omega_\varphi \approx -1$ (para $\tilde{\mu}_1 = 10^{-3}$), a um ω_φ variável (para $\tilde{\mu}_2 = 10^{-2}$) como um resultado da modificação na troca direta de energia com o campo gravitacional. No entanto, a razão ω_φ tem uma variação suave quando os valores dos coeficientes do termo exponencial são variados. Para o caso V, quando o parâmetro $\tilde{\xi}$ é variado, nota-se, por meio da observação do comportamento de ω_φ , que a matéria escura sofre uma influência significativa, enquanto a energia escura sempre tem um comportamento aproximado de constante cosmológica, uma vez que ocorre uma pequena variação em ω_φ . Observe que para o caso V não existe uma troca direta de energia com o campo gravitacional devido à condição $\{F, G\} = \text{constante}$.

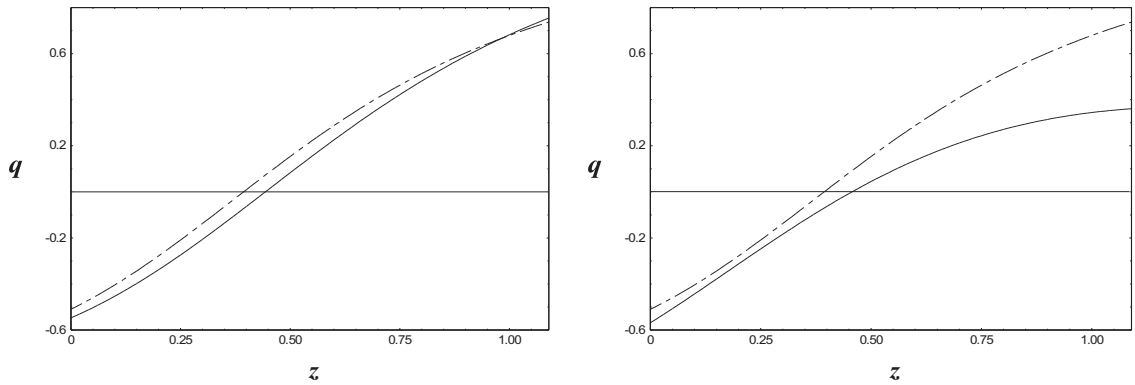


Figura 7.5: Janela da esquerda: parâmetro de desaceleração para o caso I, representado pela linha homogênea para $\tilde{\mu}_1 = 10^{-3}$ e pela linha pontilhada para $\tilde{\mu}_2 = 10^{-2}$. Janela da direita: parâmetro de desaceleração para o caso V, representado pela linha homogênea para $\tilde{\xi}_1 = 4.900$ e pela linha pontilhada para $\tilde{\xi}_2 = 4.450$.

O parâmetro de desaceleração $q = 1/2 + 3p/2\rho$ está representado na Figura 7.5, para os casos I (janela da esquerda) e V (janela da direita). A janela da

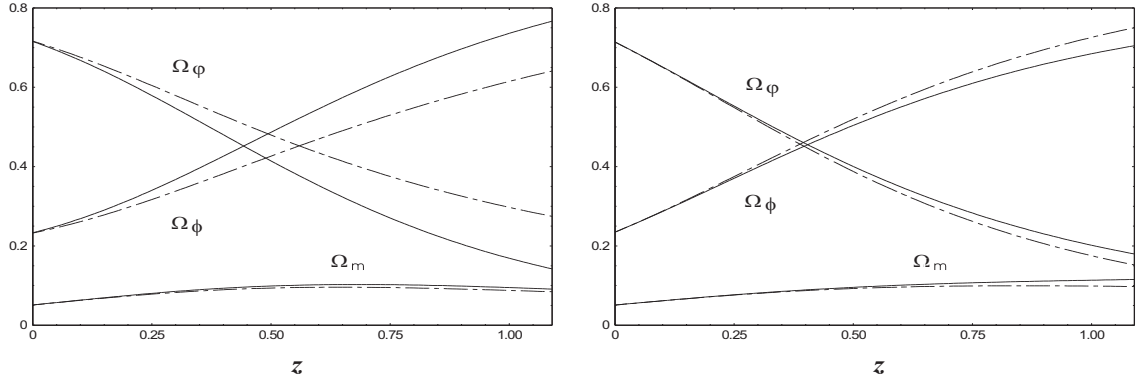


Figura 7.6: Janela da esquerda: parâmetros de densidade para o caso I, representados pela linha homogênea para $\tilde{\mu}_1 = 10^{-3}$ e pela linha pontilhada para $\tilde{\mu}_2 = 10^{-2}$. Janela da direita: parâmetros de densidade para o caso V, representados pela linha homogênea para $\tilde{\xi}_1 = 4.900$ e pela linha pontilhada para $\tilde{\xi}_2 = 4.450$.

esquerda mostra que o parâmetro de desaceleração exibe uma pequena modificação quando se varia o valor do coeficiente do termo exponencial, $\tilde{\mu}$. Entretanto, pode-se inferir da figura que quando $\tilde{\mu}_2 = 10^{-2}$ e ω_φ evolui assintoticamente para -1 no presente, o *redshift* de transição de um regime desacelerado para um acelerado é menor do que para $\tilde{\mu}_1 = 10^{-3}$. Realmente, nessa última situação ($\tilde{\mu}_1 = 10^{-3}$) temos que $\omega_\varphi \approx -1$ em todo o intervalo de evolução do parâmetro de densidade, o que implica numa transição de regime mais prematura. Para o caso V, pode-se observar que para $\tilde{\xi}_2 = 4.45$ o *redshift* de transição é menor do que para $\tilde{\xi}_1 = 4.9$. Isso pode ser entendido por meio da observação da Figura 7.4 novamente, onde nota-se que ω_ϕ é maior para $\tilde{\xi}_2 = 4.45$ do que para $\tilde{\xi}_1 = 4.9$, significando que nessa situação a matéria escura tem uma pressão relativa maior, o que contribui para retardar a transição de regime. Os valores do *redshift* de transição para o caso I são: $z_T = 0.45$ ($\tilde{\mu}_1 = 10^{-3}$) e $z_T = 0.40$ ($\tilde{\mu}_2 = 10^{-2}$), enquanto os valores para o caso V são: $z_T = 0.46$ ($\tilde{\xi}_1 = 4.9$) e $z_T = 0.40$ ($\tilde{\xi}_2 = 4.45$). E os valores do parâmetro de desaceleração q em $z = 0$ para o caso I são: $q_0 = -0.55$ ($\tilde{\mu}_1 = 10^{-3}$) e $q_0 = -0.51$ ($\tilde{\mu}_2 = 10^{-2}$), enquanto que para o caso V são: $q_0 = -0.57$ ($\tilde{\xi}_1 = 4.9$) e $q_0 = -0.51$ ($\tilde{\xi}_2 = 4.45$). A fim de

fazer comparações com os dados observacionais, os valores são $z_T = 0.74 \pm 0.18$ (de [94]) para o *redshift* de transição e $q_0 = -0.46 \pm 0.13$ (de [95]) para o parâmetro de desaceleração no presente.

Os parâmetros de densidade da matéria comum, energia escura e matéria escura estão representados na Figura 7.6 para os casos I (janela da esquerda) e V (janela da direita). Da janela da esquerda observa-se que para $\tilde{\mu}_2$ os parâmetros de densidade da energia escura e da matéria escura tornam-se iguais antes que para $\tilde{\mu}_1$, mas seu *redshift* de transição ocorre em *redshifts* menores que para $\tilde{\mu}_1$. Isso mostra que a mudança de comportamento de ω_φ causada pela troca de energia com o campo gravitacional realmente é o responsável por um *redshift* de transição menor para o caso I. Por outro lado, pela observação da janela da direita, nota-se que para $\tilde{\xi}_1$ os parâmetros de densidade da energia e da matéria escuras tornam-se iguais antes que para $\tilde{\xi}_2$. Isso reforça para $\tilde{\xi}_2$ o deslocamento do *redshift* de transição causado por uma pressão relativa maior da matéria escura.

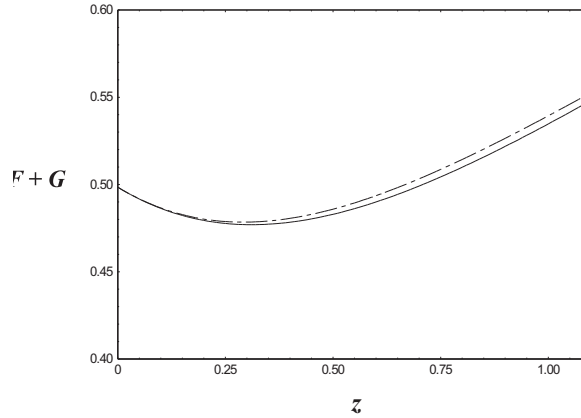


Figura 7.7: Acoplamento gravitacional efetivo para o caso I, representado pela linha homogênea para $\tilde{\mu}_1 = 10^{-3}$ e pela linha pontilhada para $\tilde{\mu}_2 = 10^{-2}$.

O acoplamento gravitacional efetivo $F + G$ para o caso I é representado na Figura 7.7. Observa-se da figura que o acoplamento gravitacional efetivo apresenta uma pequena variação em comparação ao seu presente valor $F(0) + G(0) = 1/2$. Existe uma variação menor que 10 % em torno do valor $1/2$ e, consequentemente, a "constante" gravitacional tem seu valor alterado em aproximadamente 10 % no intervalo considerado. Esse resultado é similar ao do caso canônico - canônico.

Capítulo 8

Generalizações geométricas da Relatividade Geral

Até o momento, nossos modelos cosmológicos foram construídos a partir da Relatividade Geral. Nos casos em que houve generalização, esta consistiu num campo escalar não minimamente acoplado à gravidade, o qual é um novo grau de liberdade do campo gravitacional. No entanto, essa não é a única possibilidade de generalização da Relatividade Geral. A parte geométrica da ação de Einstein-Hilbert, que corresponde ao campo gravitacional, é um funcional linear no escalar de curvatura, que mantivemos inalterado em nossos modelos. Mas, a princípio, não há motivo físico algum que nos impeça de descrever a gravidade por outra função qualquer do escalar de curvatura [96, 97]. Essa é a primeira generalização geométrica natural possível de ser realizada na teoria de gravitação de Einstein. A referida generalização conduz a resultados que descrevem um Universo acelerado sem a introdução da energia escura [98, 99]. Uma extensão direta dessa generalização é a introdução de uma outra função do escalar de Ricci [29] para gerar um acoplamento não mínimo entre o setor da matéria com o setor gravitacional. Essa extensão foi primeiramente proposta em [100], mas num contexto diferente do que é considerado atualmente. Tal acoplamento não mínimo com a lagrangiana da matéria resulta numa força gravitacional extra que pode gerar o efeito da matéria escura sem a

necessidade de introduzir matéria exótica [101, 102, 103, 104].

Outra generalização estritamente geométrica está relacionada com a conexão afim. Na Relatividade Geral, supõe-se que a conexão afim é determinada unicamente em termos do tensor métrico (conexão de Levi-Civita ou símbolos de Christoffel), sendo portanto simétrica com relação a seus índices covariantes. No entanto, qualquer teoria gravitacional mais geral permite uma conexão afim que não seja determinada unicamente pelo tensor métrico e também não seja necessariamente simétrica. Geometricamente, uma conexão não simétrica significa que o espaço-tempo pode apresentar uma propriedade chamada de torção [105, 27]. Assumir que a conexão afim seja simétrica *a priori* não é natural em teorias mais gerais, pelo menos num contexto puramente geométrico. Não ignorando o efeito de torção, talvez seja possível uma descrição mais completa do setor escuro como um efeito efetivo de correções geométricas.

Neste capítulo, investigaremos a descrição do setor escuro como um efeito puramente geométrico. Consideraremos a generalização da ação de Einstein-Hilbert, no que concerne ao termo gravitacional, por meio de uma função genérica $f_1(R)$, e com um acoplamento não mínimo da matéria ao escalar de Ricci por uma função genérica $f_2(R)$. Também não suporemos que a conexão afim seja simétrica, a fim de se levar em conta que o espaço-tempo pode apresentar torção. Analisaremos tal teoria generalizada para o caso de um Universo homogêneo e isotrópico, procurando verificar de que modo que as correções geométricas da Relatividade Geral podem dar conta de reproduzir os comportamentos inerentes à matéria e energia escuras. A parte variacional tanto como a tentativa de encontrar alguma solução para as equações de campo será apresentada com um certo detalhamento, haja vista que essa classe de teoria generalizada exhibe muito mais sutilezas e complicações do que as da Relatividade Geral como concebida originalmente por Einstein.

8.1 Ação geral e equações de campo

Consideremos a ação que descreve uma teoria $f(R)$ com a lagrangiana de matéria não minimamente acoplada à gravidade

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{f_1(R)}{2} + f_2(R) \mathcal{L}_m \right\}, \quad (8.1)$$

onde $f_1(R)$ e $f_2(R)$ são funções genéricas do escalar de curvatura, sendo que $R = R(\Gamma)$ (isto é, em termos da conexão afim) e $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(g, \psi)$, com ψ representando os campos de matéria.

A definição do tensor de curvatura adotada daqui em diante será

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \Gamma_{\nu\beta}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\mu\beta}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha, \quad (8.2)$$

a fim de que utilizemos a mesma convenção da literatura para essa classe de teoria. Além do mais, naturalmente, permitiremos que o espaço-tempo seja equipado com torção, sendo tomada a seguinte definição de conexão não simétrica

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - K_{\mu\nu}^\lambda, \quad (8.3)$$

onde $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ é a conexão de Levi-Civita e $K_{\mu\nu}^\lambda$ é o *tensor de contorção*, que apresenta a propriedade de antissimetria $K_\mu^{\nu\lambda} = -K_\mu^{\lambda\nu}$, a qual assegura a compatibilidade da métrica associada a $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, isto é, $\nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0$ (com ∇ denotando a derivada covariante definida por $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$). A partir dessa propriedade de antissimetria, podemos obter duas outras propriedades, a saber

$$\begin{aligned} g_{\nu\sigma} K_\mu^{\nu\lambda} &= -g_{\nu\sigma} K_\mu^{\lambda\nu} \\ \implies K_{\mu\sigma}^\lambda &= -K_{\mu\sigma}^\lambda, \end{aligned} \quad (8.4)$$

a qual implica em (Apêndice A)

$$K_{\mu\nu}^\nu = 0. \quad (8.5)$$

Considerando o *tensor de torção* como definido por

$$T_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda = 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda, \quad (8.6)$$

de (8.3) conclui-se que

$$T_{\mu\nu}{}^\lambda = -K_{\mu\nu}{}^\lambda + K_{\nu\mu}{}^\lambda, \quad (8.7)$$

o qual, por (8.5), implica em

$$T_{\mu\nu}{}^\mu = -K_{\mu\nu}{}^\mu + K_{\nu\mu}{}^\mu = -K_{\mu\nu}{}^\mu. \quad (8.8)$$

Por outro lado, pela substituição de (8.3) em (8.2), obtém-se

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} &= \partial_\mu \tilde{\Gamma}_{\nu\beta}{}^\alpha - \partial_\nu \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}{}^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\nu\beta}{}^\sigma \tilde{\Gamma}_{\mu\sigma}{}^\alpha - \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}{}^\sigma \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}{}^\alpha \\ &\quad + \tilde{\nabla}_\nu K_{\mu\beta}{}^\alpha - \tilde{\nabla}_\mu K_{\nu\beta}{}^\alpha + K_{\nu\beta}{}^\sigma K_{\mu\sigma}{}^\alpha - K_{\mu\beta}{}^\sigma K_{\nu\sigma}{}^\alpha \\ \implies R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} &= \tilde{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(g) + \mathcal{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(K) \equiv R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(g, K), \end{aligned} \quad (8.9)$$

O resultado acima vem do repasse das derivadas parciais de $K_{\mu\nu}{}^\lambda$ por suas derivadas covariantes correspondentes, por meio das seguintes relações

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\nu K_{\mu\beta}{}^\alpha &= \partial_\nu K_{\mu\beta}{}^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\sigma\nu}{}^\alpha K_{\mu\beta}{}^\sigma - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\sigma K_{\sigma\beta}{}^\alpha - \tilde{\Gamma}_{\beta\nu}{}^\sigma K_{\mu\sigma}{}^\alpha, \\ \tilde{\nabla}_\mu K_{\nu\beta}{}^\alpha &= \partial_\mu K_{\nu\beta}{}^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\sigma\mu}{}^\alpha K_{\nu\beta}{}^\sigma - \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}{}^\sigma K_{\sigma\beta}{}^\alpha - \tilde{\Gamma}_{\beta\mu}{}^\sigma K_{\nu\sigma}{}^\alpha, \end{aligned} \quad (8.10)$$

e pelo emprego das definições

$$\begin{aligned} \tilde{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(g) &= \partial_\mu \tilde{\Gamma}_{\nu\beta}{}^\alpha - \partial_\nu \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}{}^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\nu\beta}{}^\sigma \tilde{\Gamma}_{\mu\sigma}{}^\alpha - \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}{}^\sigma \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}{}^\alpha, \\ \mathcal{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(K) &= \tilde{\nabla}_\nu K_{\mu\beta}{}^\alpha - \tilde{\nabla}_\mu K_{\nu\beta}{}^\alpha + K_{\nu\beta}{}^\sigma K_{\mu\sigma}{}^\alpha - K_{\mu\beta}{}^\sigma K_{\nu\sigma}{}^\alpha, \end{aligned} \quad (8.11)$$

onde $\tilde{\nabla}$ denota a derivada covariante definida pela conexão de Levi-Civita e, claro, $\tilde{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ representa o tensor de Riemann usual da conexão de Levi-Civita. Dessa forma, o tensor de curvatura é decomposto em uma parte que é o tensor de Riemann usual, dado em termos do tensor métrico, e outra parte em termos do tensor de contorção.

De (8.9), temos

$$R^\alpha{}_{\beta\alpha\nu} = R_{\beta\nu} = \tilde{R}_{\beta\nu} + \mathcal{R}_{\beta\nu}, \quad (8.12)$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\beta\nu} &= \partial_\alpha \tilde{\Gamma}_{\nu\beta}{}^\alpha - \partial_\nu \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\nu\beta}{}^\sigma \tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}{}^\alpha - \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\sigma \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}{}^\alpha, \\ \mathcal{R}_{\beta\nu} &= \tilde{\nabla}_\nu K_{\alpha\beta}{}^\alpha - \tilde{\nabla}_\alpha K_{\nu\beta}{}^\alpha + K_{\nu\beta}{}^\sigma K_{\alpha\sigma}{}^\alpha - K_{\alpha\beta}{}^\sigma K_{\nu\sigma}{}^\alpha, \end{aligned} \quad (8.13)$$

onde $\tilde{R}_{\beta\nu}$ é o tensor de Ricci usual.

A variação da ação (8.1) com respeito a $K_{\mu\nu}{}^\lambda$ fornece (Apêndice **B**)

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \delta f_1 + \delta f_2 \mathcal{L}_m \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) g^{\mu\nu} \delta \mathcal{R}_{\mu\nu},\end{aligned}\quad (8.14)$$

uma vez que de (8.12) tem-se $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(g, K) = \tilde{R}_{\mu\nu}(g) + \mathcal{R}_{\mu\nu}(K)$.

Pelo uso de (8.13)₂, pode-se avaliar a integral (8.14):

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) g^{\mu\nu} \delta \mathcal{R}_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) g^{\mu\nu} (\tilde{\nabla}_\nu \delta K_{\alpha\mu}{}^\alpha - \tilde{\nabla}_\alpha \delta K_{\nu\mu}{}^\alpha + \\ &\quad \delta K_{\nu\mu}{}^\beta K_{\alpha\beta}{}^\alpha + K_{\nu\mu}{}^\beta \delta K_{\alpha\beta}{}^\alpha - \delta K_{\alpha\mu}{}^\beta K_{\nu\beta}{}^\alpha - K_{\alpha\mu}{}^\beta \delta K_{\nu\beta}{}^\alpha).\end{aligned}\quad (8.15)$$

Para o primeiro termo do integrando de (8.15), usando a regra do produto, escrevemos (Apêndice **C**)

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\nu \delta K_{\alpha\mu}{}^\alpha &= g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\nu \left[\left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta K_{\alpha\mu}{}^\alpha \right] \\ &\quad + \partial_\nu \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta K_{\alpha}{}^{\mu\nu} \delta_\mu^\alpha,\end{aligned}\quad (8.16)$$

onde a propriedade de antissimetria de $K_{\mu\nu}{}^\lambda$ foi aplicada.

Analogamente, para o segundo termo obtém-se (Apêndice **D**)

$$\begin{aligned}- \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha \delta K_{\nu\mu}{}^\alpha &= - g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha \left[\left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta K_{\nu\mu}{}^\alpha \right] \\ &\quad - \partial_\mu \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta K_{\alpha}{}^{\mu\nu} \delta_\nu^\alpha.\end{aligned}\quad (8.17)$$

Observe que os primeiros termos de (8.16) e (8.17) geram integrais de superfície (teorema de Gauss), as quais se anulam pelo fato de as variações de $K_{\mu\nu}{}^\lambda$ se anularem na fronteira de integração.

Para os termos remanescentes de (8.15), escrevemos (Apêndice **E**)

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\delta K_{\nu\mu}{}^\beta K_{\alpha\beta}{}^\alpha &= K_{\beta\nu}{}^\beta\delta K_\alpha{}^{\mu\nu}\delta_\mu^\alpha, \\
g^{\mu\nu}K_{\nu\mu}{}^\beta\delta K_{\alpha\beta}{}^\alpha &= -K_{\beta\mu}{}^\beta\delta K_\alpha{}^{\mu\nu}\delta_\nu^\alpha, \\
-g^{\mu\nu}\delta K_{\alpha\mu}{}^\beta K_{\nu\beta}{}^\alpha &= -K_{\mu\nu}{}^\alpha\delta K_\alpha{}^{\mu\nu}, \\
-g^{\mu\nu}K_{\alpha\mu}{}^\beta\delta K_{\nu\beta}{}^\alpha &= K_{\nu\mu}{}^\alpha\delta K_\alpha{}^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{8.18}$$

onde a propriedade (8.4) foi utilizada.

Inserindo (8.16), (8.17) e (8.18) em (8.15) – levando-se em conta o anulamento dos termos de superfície – chegamos à seguinte forma

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2\right)g^{\mu\nu}\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left[\partial_\nu\left(\frac{1}{2}f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2\right)\delta_\mu^\alpha - \partial_\mu\left(\frac{1}{2}f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2\right)\delta_\nu^\alpha\right. \\
&\quad \left.+ \left(\frac{1}{2}f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2\right)(K_{\beta\nu}{}^\beta\delta_\mu^\alpha - K_{\beta\mu}{}^\beta\delta_\nu^\alpha + K_{\nu\mu}{}^\alpha - K_{\mu\nu}{}^\alpha)\right]\delta K_\alpha{}^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{8.19}$$

e, pelo princípio da mínima ação, finalmente obtemos a expressão

$$K_{\beta\nu}{}^\beta\delta_\mu^\alpha - K_{\beta\mu}{}^\beta\delta_\nu^\alpha + K_{\nu\mu}{}^\alpha - K_{\mu\nu}{}^\alpha = \frac{\partial_\beta(f'_1 + 2\mathcal{L}_m f'_2)}{f'_1 + 2\mathcal{L}_m f'_2}(\delta_\mu^\beta\delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^\beta\delta_\mu^\alpha), \tag{8.20}$$

que, por (8.7) e (8.8), pode ser escrita em termos do tensor de torção, a saber

$$T_{\mu\nu}{}^\alpha + T_{\nu\beta}{}^\beta\delta_\mu^\alpha - T_{\mu\beta}{}^\beta\delta_\nu^\alpha = \frac{\partial_\beta(f'_1 + 2\mathcal{L}_m f'_2)}{f'_1 + 2\mathcal{L}_m f'_2}(\delta_\mu^\beta\delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^\beta\delta_\mu^\alpha). \tag{8.21}$$

Fazendo-se $\nu = \alpha$ nesta última, obtém-se

$$T_{\mu\alpha}{}^\alpha = -\frac{3\partial_\beta(f'_1 + 2\mathcal{L}_m f'_2)}{2(f'_1 + 2\mathcal{L}_m f'_2)}\delta_\mu^\beta, \tag{8.22}$$

a qual pode ser inserida em (8.21), fornecendo a seguinte forma final

$$T_{\mu\nu}{}^\alpha = -\frac{\partial_\beta(f'_1 + 2\mathcal{L}_m f'_2)}{2(f'_1 + 2\mathcal{L}_m f'_2)}(\delta_\mu^\beta\delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^\beta\delta_\mu^\alpha), \tag{8.23}$$

que é uma equação de campo que relaciona a torção aos termos de curvatura e à lagrangiana de matéria.

A variação de (8.1) com respeito a $g^{\mu\nu}$ fornece (Apêndice **F**)

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \delta(\sqrt{-g} f_1) + \delta(\sqrt{-g} f_2 \mathcal{L}_m) \right\} \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} f_1 + \frac{f_2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right\} \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}, \tag{8.24}
\end{aligned}$$

onde a linha denota derivada com respeito a R . Até aqui usamos apenas as seguintes relações variacionais

$$\begin{aligned}
\delta \sqrt{-g} &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \\
\delta R &= \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \tag{8.25}
\end{aligned}$$

Levando-se em conta (8.12) novamente, a segunda integral de (8.24) torna-se

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) g^{\mu\nu} \delta \tilde{R}_{\mu\nu}. \tag{8.26}$$

Vamos ao processo de avaliação variacional da integral acima. Primeiramente, aplicamos uma variação tipo *Palatini* a (8.13)₁ e substituímos o resultado em (8.26), de onde obtemos

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) g^{\mu\nu} (\tilde{\nabla}_\sigma \delta \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\sigma - \tilde{\nabla}_\nu \delta \tilde{\Gamma}_{\sigma\mu}^\sigma), \tag{8.27}$$

que, pela introdução da conexão de Levi-Civita

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}), \tag{8.28}$$

toma a forma

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \tilde{\nabla}_\mu \left(g_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}^\mu \delta g^{\alpha\beta} - \tilde{\nabla}_\nu \delta g^{\mu\nu} \right). \tag{8.29}$$

Aplicando a regra do produto, essa última integral é escrita como

$$\begin{aligned}
&\int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \tilde{\nabla}_\mu \left[\left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \left(g_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}^\mu \delta g^{\alpha\beta} - \tilde{\nabla}_\nu \delta g^{\mu\nu} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left(g_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}^\mu \delta g^{\alpha\beta} - \tilde{\nabla}_\nu \delta g^{\mu\nu} \right) \tilde{\nabla}_\mu \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \right\}. \tag{8.30}
\end{aligned}$$

O primeiro termo do integrando gera uma integral de superfície que se anula porque a variação de $g_{\mu\nu}$ se anula na fronteira de integração. Então podemos aplicar a regra do produto novamente, de onde chegamos a

$$\begin{aligned} & \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \tilde{\nabla}_\nu \left[\delta g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \right] - g_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}^\mu \left[\delta g^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\mu \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + \left[g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) - \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \right] \delta g^{\mu\nu} \right\} \\ & = \int d^4x \sqrt{-g} \left[g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) - \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \right] \delta g^{\mu\nu}, \quad (8.31) \end{aligned}$$

tendo em vista que os dois primeiros termos do integrando resultante também se anulam na fronteira.

Substituindo-se essa última integral em (8.24), temos

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} f_1 + \frac{f_2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right. \\ \left. - \left(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu - g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha \right) \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \right\} \delta g^{\mu\nu}, \quad (8.32) \end{aligned}$$

a qual, pelo princípio da mínima ação, fornece

$$(f'_1 + 2\mathcal{L}_m f'_2) R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f_1 - \tilde{\Delta}_{\mu\nu} (f'_1 + 2\mathcal{L}_m f'_2) = f_2 \mathcal{T}_{\mu\nu}. \quad (8.33)$$

Aqui, $\tilde{\Delta}_{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu - g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha$, $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento usual da matéria

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (8.34)$$

e $R_{\mu\nu}$ aparece simetrizado porque os termos de torção (assimétricos) contidos nele podem torná-lo assimétrico. Note que isso é necessário para mantermos a equação de campo consistente, pois o tensor energia-momento da matéria é simétrico.

Consideremos a seguinte identidade que relaciona o tensor de con-torção ao tensor de torção

$$K_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{1}{2} (-T_{\mu\nu}{}^\lambda + T_\nu{}^\lambda{}_\mu - T^\lambda{}_{\mu\nu}). \quad (8.35)$$

Por outro lado, de (8.22) e (8.23), podemos escrever também a seguinte relação para o tensor de torção

$$T_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{2}{3}T_{[\mu}\delta_{\nu]}^\lambda, \quad (8.36)$$

a qual, por sua vez, fornece

$$T_\nu{}^\lambda{}_\mu = \frac{1}{3}(T_\nu\delta_\mu^\lambda - g_{\mu\nu}T^\lambda), \quad T^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{3}(g_{\mu\nu}T^\lambda - T_\mu\delta_\nu^\lambda) = -T_\mu{}^\lambda{}_\nu. \quad (8.37)$$

Agora, colocando (8.36) e (8.37) em (8.35), tem-se

$$K_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{1}{3}(T_\nu\delta_\mu^\lambda - g_{\mu\nu}T^\lambda), \quad (8.38)$$

que, após a sua substituição em (8.13)₂ e pela consideração de (8.12), leva-nos a

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\tilde{\nabla}_\nu T_\mu + \frac{1}{3}\tilde{\nabla}_\alpha T^\alpha g_{\mu\nu} + \frac{2}{9}T_\mu T_\nu - \frac{2}{9}T_\alpha T^\alpha g_{\mu\nu}, \quad (8.39)$$

e, finalmente, pela observação de (8.22) novamente, concluímos que $R_{\mu\nu}$ é simétrico e podemos escrevê-lo sem o símbolo de simetrização. A partir disso, reescrevemos (8.33) na forma

$$(f'_1 + 2\mathcal{L}_m f'_2) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_1 - \tilde{\Delta}_{\mu\nu}(f'_1 + 2\mathcal{L}_m f'_2) = f_2 \mathcal{T}_{\mu\nu}. \quad (8.40)$$

Então, nossas equações de campo básicas são (8.23) e (8.40), as quais são a generalização geométrica das equações de Einstein. Se fizermos $\mathcal{L}_m = 0$ nessas equações, temos as equações de campo da teoria $f(R)$ usual com torção para o espaço vazio, a saber

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}{}^\alpha &= -\frac{\partial_\beta f'_1}{2f'_1}(\delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\alpha), \\ f'_1 R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_1 - \tilde{\Delta}_{\mu\nu}f'_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Notemos que se $f_1(R) = R$ nas equações acima, recuperamos a Relatividade Geral para o espaço vazio exatamente na sua forma original, pois o tensor torção se anula, não sendo mais possível um espaço-tempo com torção. O mesmo resultado é obtido a partir das equações de campo (8.23) e (8.40) se fizermos

$f_1(R) = R$ e $f_2(R) = 1$ (Relatividade Geral sem torção). Sendo assim, ao se tomar a generalização considerada aqui, a Relatividade Geral emerge naturalmente como uma teoria de espaço-tempo sem torção se a parte gravitacional depender linearmente do escalar de curvatura e o acoplamento com a matéria for mínimo.

8.1.1 Apêndice

A. Determinação da propriedade (8.5)

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu}{}^\nu &= -K_{\mu}{}^\nu{}_\nu \equiv -K_{\mu}{}^\sigma{}_\sigma = -K_{\mu\nu}{}^\theta g_{\theta\sigma} g^{\nu\sigma} = -K_{\mu\nu}{}^\theta \delta_\theta^\nu = -K_{\mu\nu}{}^\nu \\ \implies K_{\mu\nu}{}^\nu &= 0. \end{aligned} \quad (8.42)$$

B. Variação da ação (8.1) com respeito a $K_{\mu\nu}{}^\lambda$

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \delta f_1 + \delta f_2 \mathcal{L}_m \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta R \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) g^{\mu\nu} \delta (\tilde{R}_{\mu\nu} + \mathcal{R}_{\mu\nu}) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) g^{\mu\nu} \delta \mathcal{R}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (8.43)$$

C. Regra do produto para o primeiro termo do integrando de (8.15)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\nu \delta K_{\alpha\mu}{}^\alpha &= g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\nu \left[\left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta K_{\alpha\mu}{}^\alpha \right] \\ &\quad - g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\nu \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta K_{\alpha\mu}{}^\alpha \\ &= g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\nu \left[\left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta K_{\alpha\mu}{}^\alpha \right] - \partial_\nu \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta K_{\alpha}{}^{\nu\alpha} \\ &= g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\nu \left[\left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta K_{\alpha\mu}{}^\alpha \right] + \partial_\nu \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta K_{\alpha}{}^{\alpha\nu} \\ &= g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\nu \left[\left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta K_{\alpha\mu}{}^\alpha \right] + \partial_\nu \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta K_{\alpha}{}^{\mu\nu} \delta_\mu^\alpha. \end{aligned} \quad (8.44)$$

D. Regra do produto para o segundo termo do integrando de (8.15)

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha \delta K_{\nu\mu}{}^\alpha = - g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha \left[\left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta K_{\nu\mu}{}^\alpha \right] \\
& \quad - \partial_\alpha \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta K_\nu{}^{\alpha\nu} \\
& \equiv - g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha \left[\left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta K_{\nu\mu}{}^\alpha \right] - \partial_\mu \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \delta K_\alpha{}^{\mu\nu} \delta_\nu^\alpha. \tag{8.45}
\end{aligned}$$

E. Determinação das relações para os termos remanescentes de (8.15)

$$\begin{aligned}
& g^{\mu\nu} \delta K_{\nu\mu}{}^\beta K_{\alpha\beta}{}^\alpha = K_{\alpha\beta}{}^\alpha \delta K_\nu{}^{\nu\beta} \equiv K_{\beta\nu}{}^\beta \delta K_\alpha{}^{\mu\nu} \delta_\mu^\alpha, \\
& g^{\mu\nu} K_{\nu\mu}{}^\beta \delta K_{\alpha\beta}{}^\alpha = g^{\mu\nu} K_{\nu\mu}{}^\beta \delta K_\alpha{}^{\gamma\alpha} g_{\beta\gamma} = K_{\nu\gamma}{}^\nu \delta K_\alpha{}^{\gamma\alpha} = -K_{\nu\gamma}{}^\nu \delta K_\alpha{}^{\gamma\alpha} \\
& \quad \equiv -K_{\beta\mu}{}^\beta \delta K_\alpha{}^{\mu\nu} \delta_\nu^\alpha, \\
& -g^{\mu\nu} \delta K_{\alpha\mu}{}^\beta K_{\nu\beta}{}^\alpha = -K_{\nu\beta}{}^\alpha \delta K_\alpha{}^{\nu\beta} \equiv -K_{\mu\nu}{}^\alpha \delta K_\alpha{}^{\mu\nu}, \\
& -g^{\mu\nu} K_{\alpha\mu}{}^\beta \delta K_{\nu\beta}{}^\alpha = -g^{\mu\nu} K_{\alpha\mu}{}^\beta \delta K_\nu{}^{\gamma\alpha} g_{\beta\gamma} = -K_{\alpha\gamma}{}^\nu \delta K_\nu{}^{\gamma\alpha} = K_{\alpha\gamma}{}^\nu \delta K_\nu{}^{\gamma\alpha} \\
& \quad \equiv K_{\nu\mu}{}^\alpha \delta K_\alpha{}^{\mu\nu}. \tag{8.46}
\end{aligned}$$

F. Variação de (8.1) com respeito a $g^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \delta(\sqrt{-g} f_1) + \delta(\sqrt{-g} f_2 \mathcal{L}_m) \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\delta\sqrt{-g} f_1 + \sqrt{-g} \delta f_1) + \delta f_2 \sqrt{-g} \mathcal{L}_m + f_2 \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} f'_1 \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} f_1 \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + \mathcal{L}_m f'_2 \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{f_2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} f_1 \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \right. \\
& \quad \left. + \frac{f_2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right\}, \\
\Rightarrow \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} f_1 + \frac{f_2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right\} \delta g^{\mu\nu} \\
& \quad + \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} f'_1 + \mathcal{L}_m f'_2 \right) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \tag{8.47}
\end{aligned}$$

8.2 Correção de primeira ordem em $f_2(R)$

Bertolami e Páramos [104] mostraram que quando se considera $\mathcal{L}_m = \rho$, com ρ denotando a densidade de energia da componente de matéria, a teoria com matéria não minimamente acoplada (não se considerando torção) consegue descrever o efeito da matéria escura na escala de galáxias a partir de um efeito geométrico efetivo, o qual gera uma força extra que pode dar conta da curva de rotação das galáxias. Para a forma $\mathcal{L}_m = -p$ (p é a pressão da componente de matéria) não se observa a produção dessa força extra. Tendo em vista esse resultado, adotaremos $\mathcal{L}_m = \rho$ em nossos modelos com o objetivo de analisar qual é o possível papel dos termos que envolvem torção em larga escala nessa classe de teoria.

Com o intuito de investigarmos o papel do acoplamento não mínimo da matéria com a curvatura, conservaremos a parte gravitacional da Relatividade Geral, $f_1 = R$, e consideraremos uma correção em primeira ordem no escalar de curvatura para o acoplamento com a matéria, $f_2 = 1 + \alpha R$, onde $\alpha = \text{constante}$. Assim, nossas equações de campo básicas, (8.23) e (8.40), podem ser reescritas na forma

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R} &= \mathcal{T}_{\mu\nu} + \alpha R\mathcal{T}_{\mu\nu} + 2\alpha(\tilde{\Delta}_{\mu\nu}\rho - \rho R_{\mu\nu}) - \left[\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} \right], \\ \mathcal{T}_{\mu\nu}{}^\alpha &= -\alpha \frac{\partial_\beta \rho}{(1 + 2\alpha\rho)} (\delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\alpha), \end{aligned} \quad (8.48)$$

onde decompomos $R_{\mu\nu}$ e R (do lado esquerdo) em suas partes métricas e de torção. Logo, podemos escrever (8.48)₁ na forma das equações de Einstein

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R} = \mathcal{T}_{\mu\nu} + \mathcal{T}_{\mu\nu}^G = \mathcal{T}_{\mu\nu}^E, \quad (8.49)$$

onde definimos

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^G = \alpha R\mathcal{T}_{\mu\nu} + 2\alpha(\tilde{\Delta}_{\mu\nu}\rho - \rho R_{\mu\nu}) - \left[\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} \right], \quad (8.50)$$

que pode ser interpretado como um tensor energia-momento resultante da correção geométrica (correção de ordem superior em R e torção), sendo o tensor energia-momento $\mathcal{T}_{\mu\nu}^E$ a fonte total (efetiva) de gravidade devida à matéria observável (poeira

não relativística) e à geometria.

Tomando agora um campo de matéria homogêneo e sem pressão, $\mathcal{L}_m = \rho(t)$, o seguinte resultado a partir da componente 00 das equações (8.48)₁ e do traço das equações (8.48)₂ emerge

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\tilde{R} &= \rho + \alpha\rho R + 2\alpha(\tilde{\Delta}_{00}\rho - \rho R_{00}) - \left[\mathcal{R}_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\mathcal{R} \right], \\ T_0 &= -\frac{3\alpha\dot{\rho}}{(1+2\alpha\rho)}, \quad T_i = 0. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Observe que, sob nossas considerações, o tensor energia-momento da matéria tem componentes $\mathcal{T}_{00} = \rho$ e $\mathcal{T}_{0i} = \mathcal{T}_{ij} = 0$.

Aplicando a métrica de Friedmann-Robertson-Walker plana e usando (8.51)₂, obtemos \tilde{R} , \tilde{R}_{00} , \mathcal{R} e \mathcal{R}_{00}

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= -6(\dot{H} + 2H^2), \quad \tilde{R}_{00} = -3(\dot{H} + H^2), \\ \mathcal{R} &= \frac{6\alpha}{1+2\alpha\rho} \left[\frac{\alpha\dot{\rho}^2}{1+2\alpha\rho} - (\ddot{\rho} + 3H\dot{\rho}) \right], \\ \mathcal{R}_{00} &= \frac{3\alpha}{1+2\alpha\rho} \left[\frac{2\alpha\dot{\rho}^2}{1+2\alpha\rho} - (\ddot{\rho} + H\dot{\rho}) \right], \end{aligned} \quad (8.52)$$

sendo que as seguintes quantidades foram empregadas nos cálculos

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \tilde{R} + \mathcal{R}, \quad \text{com} \quad \mathcal{R} = 2\tilde{\nabla}_\mu T^\mu - \frac{2}{3}T_\mu T^\mu, \quad (8.53)$$

– veja (8.39) – onde \tilde{R} é o escalar de Ricci usual e

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\mu T^\mu &= \frac{3\alpha}{1+2\alpha\rho} \left[\frac{2\alpha\dot{\rho}^2}{1+2\alpha\rho} - (\ddot{\rho} + 3H\dot{\rho}) \right], \\ T_\mu T^\mu &= \frac{9\alpha^2}{(1+2\alpha\rho)^2} \dot{\rho}^2, \end{aligned} \quad (8.54)$$

para a métrica aqui considerada.

Ao substituírmos as quantidades (8.52) em (8.49), chegamos a uma equação do tipo Friedmann, a saber

$$3H^2 = \rho + \rho^G = \rho^E, \quad (8.55)$$

com

$$\rho^G = \alpha\rho R + 2\alpha(\tilde{\Delta}_{00}\rho - \rho R_{00}) - \left[\mathcal{R}_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\mathcal{R} \right], \quad (8.56)$$

que representa uma densidade de energia efetiva devida à geometria, sendo ρ^E a densidade de energia efetiva total, incluindo a matéria comum.

Substituindo (8.52) em (8.56), a evolução temporal de ρ^G fica determinada em função da densidade de matéria e do parâmetro de Hubble

$$\rho^G = 2\alpha\rho^2 + 24\alpha H^2\rho + 33\alpha^2 H^2\rho^2. \quad (8.57)$$

Por sua vez, substituindo esse resultado em (8.55), tem-se

$$3H^2 = \rho + 2\alpha\rho^2 + 24\alpha H^2\rho + 33\alpha^2 H^2\rho^2 = \rho^E. \quad (8.58)$$

Pode-se ver que essa última equação se reduz à equação de Friedmann usual quando $\alpha = 0$, como deveria ser.

Uma vez que a densidade de energia da matéria aqui considerada refere-se à matéria comum, impõe-se que a sua corrente seja conservada [103], tal que esta evolui na forma usual $\rho = \rho_0/a^3$. Dessa imposição, temos que (8.58) produz a seguinte equação diferencial

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{\rho_0}{3}} a \left(\frac{a^3 + 2\alpha\rho_0}{a^6 - 8\alpha\rho_0 a^3 - 11\alpha^2\rho_0^2} \right)^{1/2}. \quad (8.59)$$

Fazendo-se a troca de variável $u = a^3/\alpha\rho_0$ em (8.59) e integrando, obtém-se

$$\sqrt{\alpha\rho_0} \int \frac{du}{u} \left(\frac{u^2 - 8u - 11}{u + 2} \right)^{1/2} = \sqrt{3\rho_0} t + k_0, \quad (8.60)$$

onde k_0 é uma constante de integração.

Da integral (8.60), conseguimos a solução de (8.59), a qual tem a forma

$$\sqrt{\alpha\rho_0} f_1(u) \left\{ f_2(u) + f_3(u) \left[k_1 E(\phi(u), \beta_1) + k_2 F(\phi(u), \beta_1) + k_3 \Pi(\beta_2, -\phi(u), \beta_1) \right] \right\} = \sqrt{3\rho_0} t + k_0, \quad (8.61)$$

com

$$\begin{aligned}
k_1 &= 6 \left(3 + 2\sqrt{3} \right), & k_2 &= 3 \left(6 + \sqrt{3} \right), & k_3 &= 11\sqrt{3}; \\
f_1(u) &= \frac{u+2}{3} \sqrt{\frac{u+2}{u^2-8u-11}}, \\
f_2(u) &= 6 - \frac{72}{2+u} + \frac{54}{(u+2)^2}, \\
f_3(u) &= \frac{1}{u+2} \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})u^2 + 8(\sqrt{3}-2)u + 11(\sqrt{3}-2)}{u+2}}; \tag{8.62}
\end{aligned}$$

onde E , F e Π são funções elípticas de primeira, segunda e terceira espécies, respectivamente, cujos argumentos são

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \arcsin \left(\sqrt{\frac{3(2+\sqrt{3})}{2+u}} \right), \\
\beta_1 &= 7 - 4\sqrt{3}, \\
\beta_2 &= \frac{2}{3} (2 - \sqrt{3}). \tag{8.63}
\end{aligned}$$

Se definirmos uma nova variável $v = 1/u$, podemos expandir (8.61) em uma série da forma

$$c_0 v^{-1/2} + c_1 v^{1/2} + c_2 v^{3/2} + c_3 v^{5/2} + \dots + c_n v^{n-1/2} = \sqrt{3\rho_0} t + k_0, \tag{8.64}$$

onde os c_n são constantes. Olhando essa expressão, nota-se que quando v é pequeno, podemos considerar apenas seus termos de ordem mais baixa. Isso corresponde a um a grande, haja vista que $v = 1/u = \alpha\rho_0/a^3$. Então, considerando-se um Universo suficientemente velho (um a suficientemente grande), pode-se truncar a série em $n = 1$, de onde temos

$$2\sqrt{\alpha\rho_0} (v^{-1/2} + 5v^{1/2}) = \sqrt{3\rho_0} t + k_0. \tag{8.65}$$

Se agora retornamos à variável original, conseguimos uma forma explícita para a^3 , isto é,

$$a^3 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \sqrt{a_3 + (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)^2}, \tag{8.66}$$

onde

$$a_0 = \frac{k_0^2}{8} - 5\alpha\rho_0, \quad a_1 = \frac{\sqrt{3\rho_0}k_0}{4}, \quad a_2 = \frac{3\rho_0}{8}, \quad a_3 = -25\alpha^2\rho_0^2. \quad (8.67)$$

Colocando $\alpha = 0$ nessa solução (Relatividade Geral), e assumindo $k_0 = 0$ por questão de simplicidade, somente a constante a_2 sobrevive e obtemos de (8.66) a forma esperada para o fator de escala, $a \propto t^{2/3}$, correspondendo à solução da Relatividade Geral para um Universo homogêneo e isotrópico dominado por matéria.

Se fizermos $k_0 = 0$ para o caso $\alpha \neq 0$, a evolução temporal do fator de escala passa a ser

$$a = \left(\frac{3}{4}\rho_0 t^2 - 5\alpha\rho_0 \right)^{1/3}, \quad (8.68)$$

que, a partir de (8.58), permite-nos calcular a evolução temporal da densidade de energia efetiva, cuja forma é

$$\rho^E = \frac{4}{3t^2 - 80\alpha}. \quad (8.69)$$

Esse resultado impõe um valor à constante α , pois para que a densidade de energia seja positiva, $\rho^E > 0$, devemos ter

$$\alpha < \frac{3t_0^2}{80}, \quad (8.70)$$

onde t_0 é um instante inicial a partir do qual vale a nossa aproximação.

Convém notar aqui que o fator de escala (8.68) apresenta uma evolução temporal sensivelmente diferente daquele da Cosmologia Padrão para um Universo dominado por matéria. A diferença está apenas na constante $-5\alpha\rho_0$, a qual depende da densidade de energia inicial da matéria e da constante do acoplamento não mínimo da matéria à gravidade. Consequentemente, a evolução temporal da densidade de energia efetiva apresenta uma taxa de decaimento diferente daquela da densidade de energia da matéria conforme a Cosmologia Padrão. Essa diferença depende do valor de α , como pode ser diretamente inferido de (8.69).

8.3 Correções de primeira ordem em $f_1(R)$ e $f_2(R)$

Queremos investigar nesta seção as consequências de correções no setor gravitacional em presença de matéria. Com esse intuito, levaremos a cabo as correções $f_1 = R + \alpha R^2$ e $f_2 = 1 + \beta R$, onde α e β são constantes. Como na seção anterior, tomaremos para o setor da matéria $\mathcal{L}_m = \rho$. Antes de realizar os cálculos necessários, lembremos que nossas equações de campo básicas para o caso geral são

$$\begin{aligned} (f'_1 + 2\mathcal{L}_m f'_2) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_1 - \tilde{\Delta}_{\mu\nu}(f'_1 + 2\mathcal{L}_m f'_2) &= f_2 \mathcal{T}_{\mu\nu}, \\ T_{\mu\nu}{}^\alpha &= -\frac{\partial_\beta (f'_1 + 2\mathcal{L}_m f'_2)}{2(f'_1 + 2\mathcal{L}_m f'_2)} (\delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\alpha), \end{aligned} \quad (8.71)$$

as quais recaem na teoria $f(R)$ com torção no vácuo se o campo de matéria for nulo ou desprezível, $\mathcal{L}_m = 0$, – ver (8.41).

A partir das referidas correções e considerações, as equações de campo acima podem ser escritas como

$$\begin{aligned} (1 + 2\alpha R + 2\beta\rho) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R + \alpha R^2) - 2\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(\alpha R + \beta\rho) &= (1 + \beta R)\mathcal{T}_{\mu\nu}, \\ T_{\mu\nu}{}^\alpha &= -\frac{\partial_\beta (\alpha R + \beta\rho)}{1 + 2\alpha R + 2\beta\rho} (\delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\alpha). \end{aligned} \quad (8.72)$$

A fim de analisarmos o comportamento efetivo das correções geométricas no setor gravitacional em presença de matéria, da mesma forma como fizemos para o caso de correção apenas na setor da matéria, reescrevemos a equação (8.72)₁ na seguinte forma

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R} &= \mathcal{T}_{\mu\nu} + \beta R \mathcal{T}_{\mu\nu} - \left[2(\alpha R + \beta\rho)R_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{2}g_{\mu\nu}R^2 + \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} \right] + \\ &\quad \frac{2}{9}(1 + 2\alpha R + 2\beta\rho) \left[2(T_\mu T_\nu - g_{\mu\nu}T_\sigma T^\sigma) - 3(\tilde{\nabla}_\mu T_\nu - g_{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\sigma T^\sigma) \right], \end{aligned} \quad (8.73)$$

onde o traço de (8.72)₂ foi substituído no termo com $\tilde{\Delta}_{\mu\nu}$. Assim, como o lado esquerdo de (8.73) é a estrutura geométrica do espaço-tempo da Relatividade Geral, é natural definirmos um tensor energia-momento de origem geométrica com sua

forma dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu\nu}^G = & \beta R \mathcal{T}_{\mu\nu} - \left[2(\alpha R + \beta \rho) R_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{2} g_{\mu\nu} R^2 + \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} \right] + \\ & \frac{2}{9} (1 + 2\alpha R + 2\beta \rho) \left[2(T_\mu T_\nu - g_{\mu\nu} T_\sigma T^\sigma) - 3(\tilde{\nabla}_\mu T_\nu - g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\sigma T^\sigma) \right], \end{aligned} \quad (8.74)$$

Essa definição nos permite escrever (8.73) na forma das equações de Einstein, a saber,

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{R} = \mathcal{T}_{\mu\nu}^E, \quad (8.75)$$

com $\mathcal{T}_{\mu\nu}^E = \mathcal{T}_{\mu\nu} + \mathcal{T}_{\mu\nu}^G$, isto é, uma "fonte efetiva" de campo gravitacional que resulta da matéria observável (poeira não relativística) e correções geométricas à teoria de gravidade padrão – termos de ordem mais alta na curvatura e torção, nos setores gravitacional e da matéria.

Considerando agora um campo de matéria homogêneo e sem pressão, sob a aplicação da métrica de Friedmann-Robertson-Walker plana, da componente 00 do tensor (8.75), temos

$$3H^2 = \rho + \rho^G, \quad (8.76)$$

com

$$\begin{aligned} \rho^G = & \beta \rho R - \left[2(\alpha R + \beta \rho) R_{00} - \frac{\alpha}{2} R^2 + \mathcal{R}_{00} - \frac{\mathcal{R}}{2} \right] \\ & + 2T_0 H (1 + 2\alpha R + 2\beta \rho). \end{aligned} \quad (8.77)$$

Como anteriormente, a equação (8.76) pode ser comparada à equação de Friedmann usual. Essa equação nos permite verificar como a correção geométrica à Relatividade Geral gera uma densidade de energia efetiva de origem geométrica que poderia dar conta da dinâmica das componentes escuras. Os resultados encontrados anteriormente mostraram que a correção linear no acoplamento não mínimo com a matéria produziam um Universo desacelerado, o que significa que a densidade de energia efetiva era do tipo matéria padrão, a qual é gravitacionalmente atrativa. A princípio, uma correção no setor gravitacional poderia gerar uma densidade de

energia efetiva que leva uma componente do tipo energia escura, produzindo uma pressão efetiva negativa e acelerando a expansão do Universo. Isso é o que investigaremos a seguir.

Das componentes espaciais (qualquer uma delas) de (8.75), obtém-se a equação da aceleração na sua forma familiar

$$2\dot{H} + 3H^2 = -p^G, \quad (8.78)$$

onde p^G é uma pressão efetiva de origem geométrica, que resulta das componentes espaciais do tensor energia-momento (8.74). Sua forma é dada por

$$p^G = - \left[2(\alpha R + \beta\rho) \frac{R_{11}}{a^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\mathcal{R}_{11}}{a^2} + \frac{\mathcal{R}}{2} \right] + \frac{2}{9}(1 + 2\alpha R + 2\beta\rho)(2T_0^2 - 6HT_0 - 3\dot{T}_0), \quad (8.79)$$

sendo que aqui a calculamos a partir das componentes 11 de (8.74), por conveniência. Observe que estamos considerando matéria comum sem pressão, tal que $\mathcal{T}_{11} = \mathcal{T}_{22} = \mathcal{T}_{33} = 0$ em (8.74) e (8.75). De (8.79), inferimos que a pressão efetiva é uma função complicada, a qual poderia apresentar um valor negativo suficiente para acelerar a expansão cosmológica, dependendo da evolução temporal das quantidades geométricas.

Para determinarmos a evolução temporal das quantidades acima, devemos resolver um sistema de duas equações diferenciais acopladas: as equações (8.76) ou (8.78) acopladas à equação (8.72)₂ – aplicada a uma métrica plana de Friedmann-Robertson-Walker. Essa é uma tarefa realmente difícil, pois encontrar soluções analíticas para esse sistema, se elas existirem, é bastante complicado em virtude de suas não linearidades. No caso mais simples da seção anterior, encontramos uma solução explícita somente em forma aproximada. Em vista disso, a seguir escreveremos um sistema de equações adequado à procura de uma solução numérica.

Substituindo a equação (8.76) na equação (8.78) e aplicando as considerações de homogeneidade e isotropia ao traço de (8.72)₂, tem-se o seguinte sistema

de equações diferenciais em função do *redshift* para se resolver

$$2(1+z)\tilde{H}\tilde{H}' - (\tilde{\rho} + \tilde{\rho}^G + \tilde{p}^G) = 0,$$

$$\tilde{T}_0 \left(1 + 2\tilde{\alpha}\frac{R}{\rho_0^E} + 2\tilde{\beta}\tilde{\rho} \right) - \frac{3}{2}(1+z)\tilde{H}\frac{d}{dz} \left(1 + 2\tilde{\alpha}\frac{R}{\rho_0^E} + 2\tilde{\beta}\tilde{\rho} \right) = 0, \quad (8.80)$$

onde a linha denota derivada com respeito ao *redshift* z , ρ_0^E corresponde à densidade crítica avaliada em $z = 0$ e o til representa as seguintes quantidades adimensionais

$$\tilde{\alpha} = \rho_0^E \alpha, \quad \tilde{\beta} = \rho_0^E \beta, \quad \tilde{H} = \frac{H}{\sqrt{\rho_0^E}}, \quad \tilde{T}_0 = \frac{T_0}{\sqrt{\rho_0^E}},$$

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0^E}, \quad \tilde{\rho}^G = \frac{\rho^G}{\rho_0^E}, \quad \tilde{p}^G = \frac{p^G}{\rho_0^E}. \quad (8.81)$$

As equações acima foram escritas em função do *redshift* pela substituição das derivadas temporais por derivadas no *redshift*, da mesma forma como foi feito no Capítulo 7, através das relações

$$z = \frac{1}{a} - 1, \quad \frac{d}{dt} = -H(1+z)\frac{d}{dz}. \quad (8.82)$$

As densidades de energia e pressão adimensionais em (8.80) são dadas por

$$\tilde{\rho} = \Omega_0(1+z)^3, \quad (8.83)$$

$$\tilde{\rho}^G = \tilde{\beta}\tilde{\rho}\frac{R}{\rho_0^E} - \left[2 \left(\tilde{\alpha}\frac{R}{\rho_0^E} + \tilde{\beta}\tilde{\rho} \right) \frac{R_{00}}{\rho_0^E} - \frac{\tilde{\alpha}}{2} \left(\frac{R}{\rho_0^E} \right)^2 + \frac{\mathcal{R}_{00}}{\rho_0^E} - \frac{1}{\rho_0^E} \frac{\mathcal{R}}{2} \right]$$

$$+ 2\tilde{T}_0\tilde{H} \left(1 + 2\tilde{\alpha}\frac{R}{\rho_0^E} + 2\tilde{\beta}\tilde{\rho} \right), \quad (8.84)$$

$$\tilde{p}^G = - \left[2 \left(\tilde{\alpha}\frac{R}{\rho_0^E} + \tilde{\beta}\tilde{\rho} \right) \frac{1}{\rho_0^E} \frac{R_{11}}{a^2} + \frac{\tilde{\alpha}}{2} \left(\frac{R}{\rho_0^E} \right)^2 + \frac{1}{\rho_0^E} \frac{\mathcal{R}_{11}}{a^2} + \frac{1}{\rho_0^E} \frac{\mathcal{R}}{2} \right]$$

$$+ \frac{2}{9} \left(1 + 2\tilde{\alpha}\frac{R}{\rho_0^E} + 2\tilde{\beta}\tilde{\rho} \right) \left(2\tilde{T}_0^2 - 6\tilde{H}\tilde{T}_0 + 3(1+z)\tilde{H}\tilde{T}_0' \right), \quad (8.85)$$

sendo as correspondentes quantidades geométricas determinadas nas seguintes formas

$$\frac{R}{\rho_0^E} = 6[(1+z)\tilde{H}' - 2\tilde{H}]\tilde{H} + \frac{\mathcal{R}}{\rho_0^E}, \quad (8.86)$$

$$\frac{\mathcal{R}}{\rho_0^E} = 6\tilde{H}\tilde{T}_0 - 2(1+z)\tilde{H}\tilde{T}'_0 - \frac{2}{3}\tilde{T}_0^2, \quad (8.87)$$

$$\frac{R_{00}}{\rho_0^E} = 3[(1+z)\tilde{H}' - \tilde{H}]\tilde{H} + \frac{\mathcal{R}_{00}}{\rho_0^E}, \quad (8.88)$$

$$\frac{\mathcal{R}_{00}}{\rho_0^E} = \tilde{H}\tilde{T}_0 - (1+z)\tilde{H}\tilde{T}'_0, \quad (8.89)$$

$$\frac{1}{\rho_0^E} \frac{R_{11}}{a^2} = [3\tilde{H} - (1+z)\tilde{H}']\tilde{H} + \frac{1}{\rho_0^E} \frac{\mathcal{R}_{11}}{a^2}, \quad (8.90)$$

$$\frac{1}{\rho_0^E} \frac{\mathcal{R}_{11}}{a^2} = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3}\tilde{T}_0^2 - 5\tilde{H}\tilde{T}_0 + (1+z)\tilde{H}\tilde{T}'_0 \right]. \quad (8.91)$$

Resolver o sistema (8.80) numericamente também se mostra uma tarefa bastante difícil, em virtude do formato das duas equações acopladas. Até o momento não foi encontrado um método para resolvê-lo. Apesar de as formas explícitas das densidades de energia e pressão efetivas indicarem a possibilidade de descrição da energia e da matéria escuras como um efeito geométrico, só saberemos se o modelo permite uma pressão efetiva negativa suficiente para uma expansão acelerada após encontrarmos uma maneira de resolver esse sistema.

Capítulo 9

Perturbações cosmológicas para inflação taquiônica do tipo lei de potência

Um dos pontos centrais da Cosmologia atual, no que concerne ao Universo primordial, é a explicação da origem das inomogeneidades da radiação cósmica de fundo. A importância dessas inomogeneidades reside no fato de que essas são as "sementes" da formação de estruturas em larga escala, isto é, de galáxias e aglomerados de galáxias que são observados hoje. Em linguagem matemática, se uma teoria é capaz de descrever corretamente a origem das perturbações primordiais (inomogeneidades) do espaço-tempo, esta também poderá descrever toda a evolução destas até a formação das estruturas, prevendo o espectro das respectivas flutuações de forma não *ad hoc*. Inicialmente, postulou-se essas perturbações primordiais e, por meio de ajustes, os respectivos espectros eram determinados em conformidade com as observações. Com o advento da teoria do Universo inflacionário, a explicação para a origem das perturbações veio à tona e a previsão correta do espectro das flutuações foi possível.

Conforme a teoria inflacionária, as perturbações primordiais são geradas por flutuações quânticas da energia de vácuo, cujas amplitudes são significa-

tivas somente na escala de Planck. À medida que o Universo infla, as perturbações se propagam até a escala de galáxias e suas amplitudes permanecem praticamente inalteradas. Dessa forma, as estruturas em larga escala estão diretamente ligadas à natureza das perturbações primordiais em escala microscópica, cujo padrão de inhomogeneidade é muito similar ao da radiação cósmica de fundo, conforme mostram as observações relativamente recentes. Essa propriedade de *quasi* invariância das amplitudes das perturbações implica num espectro de flutuações praticamente independente de escala, o qual é chamado de espectro plano (ou aproximadamente plano). Uma teoria inflacionária satisfatória deve ser capaz de prever um espectro de flutuações primordiais que apresenta essa propriedade.

Usualmente considera-se a inflação como uma expansão acelerada do tipo de Sitter – o fator de escala cresce exponencialmente com o tempo –, cuja dinâmica é descrita por um campo escalar canônico. Nesse cenário, a teoria de perturbações é aplicada e a previsão do espectro das flutuações concorda com as observações. Neste trabalho, determinaremos o espectro das flutuações para uma teoria inflacionária do tipo lei de potência – o fator de escala cresce como uma potência do tempo –, com um campo escalar não canônico, do tipo táquion, descrevendo a sua dinâmica. Nosso intuito é investigar se esse tipo de modelo inflacionário é capaz de fazer previsões plausíveis com respeito às perturbações primordiais.

O tratamento matemático desenvolvido neste capítulo baseia-se principalmente na teoria de perturbações cosmológicas desenvolvida nas referências clássicas [106, 107]. Discussões detalhadas e desenvolvimentos matemáticos mais modernos sobre perturbações cosmológicas podem ser encontrados em [108, 109]. Primeiramente derivaremos as equações das perturbações cosmológicas para o nosso modelo num contexto clássico (sem considerações quânticas). Após obter as soluções dos campos de perturbação clássicos, faremos um tratamento quântico a fim de determinarmos as condições iniciais para os campos, tal que não violemos as condições de densidade de energia mínima, isto é, as flutuações de energia do vácuo. Após esse tratamento, calcularemos finalmente o espectro das perturbações.

9.1 Equações de campo perturbadas

Consideremos a seguinte ação que descreve um campo taquiônico minimamente acoplado ao campo gravitacional

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{2} + V(\varphi) \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi} \right\}. \quad (9.1)$$

A variação de (9.1) com respeito a $g_{\mu\nu}$ nos leva às equações de Einstein, que na forma tensorial mista pode ser escrita como

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R = T^\mu_\nu, \quad (9.2)$$

sendo a definição do tensor de Ricci a mesma do capítulo anterior e o tensor energia-momento dado por

$$T^\mu_\nu = V \left(\frac{g^{\sigma\mu} \partial_\sigma \varphi \partial_\nu \varphi}{\sqrt{1 - g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi}} + \delta^\mu_\nu \sqrt{1 - g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi} \right). \quad (9.3)$$

A seguir, aplicaremos as equações acima ao estudo de perturbações em primeira ordem num espaço-tempo plano, homogêneo e isotrópico.

Pequenas perturbações no elemento de linha da métrica plana de Friedmann-Robertson-Walker, até termos de perturbação em primeira ordem, são representadas na seguinte forma [106, 107]

$$ds^2 = a^2(\eta) \{ (1 + 2\phi) d\eta^2 - 2(\partial_i B) d\eta dx^i - [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j C] dx^i dx^j \}, \quad (9.4)$$

onde η é o tempo conforme definido por $d\eta = dt/a$ e ϕ , ψ , B , e C são perturbações escalares das componentes da métrica.

Para os cálculos a seguir, é conveniente escrevermos explicitamente as componentes do tensor métrico perturbadas até primeira ordem, as quais são

$$g^{00} = g_{(0)}^{00} + \delta g^{00} = a^{-2}(1 - 2\phi), \quad (9.5)$$

$$g^{0i} = g_{(0)}^{0i} + \delta g^{0i} = -a^{-2} \partial^i B, \quad (9.6)$$

$$g^{ij} = g_{(0)}^{ij} + \delta g^{ij} = -a^{-2} [(1 + 2\psi)\delta^{ij} - 2\partial^i \partial^j C]. \quad (9.7)$$

Consideramos agora a perturbação do campo taquiônico, cuja forma é escrita como

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(\mathbf{x}, t), \quad (9.8)$$

onde $\delta\varphi(\mathbf{x}, t)$ é muito menor do que $\varphi_0(t)$, a fim de preservarmos a consistência com as pequenas perturbações introduzidas na métrica.

Aplicando-se (9.5), (9.6), (9.7) e (9.8) em (9.3), e levando-se em conta os termos até primeira ordem nas perturbações, o tensor energia-momento pode ser escrito na forma

$$T_\nu^\mu = T_{(0)\nu}^\mu + \delta T_\nu^\mu, \quad (9.9)$$

com as componentes do tensor não perturbado dadas por

$$\begin{aligned} T_{(0)0}^0 &= \frac{V(\varphi_0)}{\sqrt{1 - a^{-2}\varphi_0'^2}} = \rho, & T_{(0)i}^0 &= 0, \\ T_{(0)j}^i &= \delta_j^i V(\varphi_0) \sqrt{1 - a^{-2}\varphi_0'^2} = -p\delta_j^i. \end{aligned} \quad (9.10)$$

As componentes da parte perturbada são dadas na forma

$$\delta T_0^0 = \frac{a^{-2}V(\varphi_0)(-\varphi_0'^2\phi + \varphi_0'\delta\varphi') + (1 - a^{-2}\varphi_0'^2)\partial_\varphi V\delta\varphi}{\left(1 - a^{-2}\varphi_0'^2\right)^{3/2}}, \quad (9.11)$$

$$\delta T_i^0 = \frac{a^{-2}V(\varphi_0)\varphi_0'\delta(\partial_i\varphi)}{\sqrt{1 - a^{-2}\varphi_0'^2}}, \quad (9.12)$$

$$\delta T_j^i = \frac{a^{-2}V(\varphi_0)(\varphi_0'^2\phi - \varphi_0'\delta\varphi') + (1 - a^{-2}\varphi_0'^2)\partial_\varphi V\delta\varphi}{\sqrt{1 - a^{-2}\varphi_0'^2}}\delta_j^i, \quad (9.13)$$

onde a linha denota derivada com respeito ao tempo conforme.

Utilizando-se dos resultados acima, as equações de movimento para pequenas perturbações na métrica são determinadas, a saber,

$$\delta G_\nu^\mu = \delta T_\nu^\mu, \quad (9.14)$$

cujas componentes para o elemento de linha (9.4) fornecem

$$\nabla^2[\psi - \mathcal{H}(B - C')] - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\phi + \psi') = \frac{a^2}{2}\delta T_0^0, \quad (9.15)$$

$$\partial_i(\mathcal{H}\phi + \psi') = \frac{a^2}{2}\delta T_i^0, \quad (9.16)$$

$$\left[(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi + \mathcal{H}\phi' + 2\mathcal{H}\psi' + \psi'' + \frac{1}{2}\nabla^2 D\right]\delta_j^i - \frac{1}{2}\delta^{ik}\partial_k\partial_j D = -\frac{a^2}{2}\delta T_j^i, \quad (9.17)$$

onde $D = (\phi - \psi) + 2\mathcal{H}(B - C') + (B - C)'$ e $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$.

A versão do tensor energia-momento para perturbações invariantes de *gauge* é determinada por

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{T}_0^0 &= \delta T_0^0 + (T_{(0)0}^0)'(B - C'), & \delta\mathbf{T}_j^i &= \delta T_j^i + (T_{(0)j}^i)'(B - C'), \\ \delta\mathbf{T}_i^0 &= \delta T_i^0 + \left(T_{(0)0}^0 - \frac{1}{3}T_{(0)k}^k\right)\partial_i(B - C'),\end{aligned}\quad (9.18)$$

com as variáveis invariantes de gauge definidas como [106, 107]

$$\Phi = \phi + \frac{1}{a}[(B - C')a]', \quad \Psi = \psi - \mathcal{H}(B - C'), \quad \delta\bar{\varphi} = \delta\varphi + \varphi_0'(B - C'). \quad (9.19)$$

Pela aplicação das relações (9.18) e (9.19) a (9.11)-(9.13), as componentes invariantes de gauge da parte perturbada do tensor energia-momento são

$$\delta\mathbf{T}_0^0 = \frac{a^{-2}V(\varphi_0)(-\varphi_0'^2\Phi + \varphi_0'\delta\bar{\varphi}') + (1 - a^{-2}\varphi_0'^2)\partial_\varphi V\delta\bar{\varphi}}{(1 - a^{-2}\varphi_0'^2)^{3/2}}, \quad (9.20)$$

$$\delta\mathbf{T}_i^0 = \frac{a^{-2}V(\varphi_0)\varphi_0'\delta(\partial_i\bar{\varphi})}{\sqrt{1 - a^{-2}\varphi_0'^2}}, \quad (9.21)$$

$$\delta\mathbf{T}_j^i = \frac{a^{-2}V(\varphi_0)(\varphi_0'^2\Phi - \varphi_0'\delta\bar{\varphi}') + (1 - a^{-2}\varphi_0'^2)\partial_\varphi V\delta\bar{\varphi}}{\sqrt{1 - a^{-2}\varphi_0'^2}}\delta_j^i. \quad (9.22)$$

Por sua vez, as equações de movimento para as perturbações invariantes de gauge obedecem

$$\delta\mathbf{G}_\nu^\mu = \delta\mathbf{T}_\nu^\mu, \quad (9.23)$$

sendo que as perturbações invariantes de gauge da parte geométrica ficam determinadas na forma

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{G}_0^0 &= \delta G_0^0 + (G_{(0)0}^0)'(B - C'), & \delta\mathbf{G}_j^i &= \delta G_j^i + (G_{(0)j}^i)'(B - C'), \\ \delta\mathbf{G}_i^0 &= \delta G_i^0 + \left(G_{(0)0}^0 - \frac{1}{3}G_{(0)k}^k\right)\partial_i(B - C').\end{aligned}\quad (9.24)$$

Usando (9.24) e os δG_ν^μ obtidos para (9.15)-(9.17), podemos escrever (9.23) em termos das variáveis invariantes de gauge, obtendo-se

$$\nabla^2\Psi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') = \frac{a^2}{2}\delta\mathbf{T}_0^0, \quad (9.25)$$

$$\partial_i(\mathcal{H}\Phi + \Psi') = \frac{a^2}{2}\delta\mathbf{T}_i^0, \quad (9.26)$$

$$\left[(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + 2\mathcal{H}\Psi' + \Psi'' + \frac{1}{2}\nabla^2 D\right]\delta_j^i - \frac{1}{2}\delta^{ik}\partial_k\partial_j D = -\frac{a^2}{2}\delta\mathbf{T}_j^i, \quad (9.27)$$

com $D = \Phi - \Psi$.

Uma vez que $\delta \mathbf{T}_j^i \propto \delta_j^i$, a equação (9.27) implica que $\Phi = \Psi$, e pelo emprego das equações (9.20)-(9.22), obtém-se a forma final das equações invariantes de gauge para as perturbações, a saber

$$\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}\Phi' - 3\mathcal{H}^2\Phi = \frac{V(\varphi_0)(-\varphi_0'^2\Phi + \varphi_0'\delta\bar{\varphi}') + a^2(1 - a^{-2}\varphi_0'^2)\partial_\varphi V\delta\bar{\varphi}}{2\left(1 - a^{-2}\varphi_0'^2\right)^{3/2}}, \quad (9.28)$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{V(\varphi_0)\varphi_0'\delta\bar{\varphi}}{2\sqrt{1 - a^{-2}\varphi_0'^2}}, \quad (9.29)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = \frac{V(\varphi_0)(-\varphi_0'^2\Phi + \varphi_0'\delta\bar{\varphi}') - a^2(1 - a^{-2}\varphi_0'^2)\partial_\varphi V\delta\bar{\varphi}}{2\sqrt{1 - a^{-2}\varphi_0'^2}}. \quad (9.30)$$

O conjunto de equações diferenciais acima descreve a dinâmica dos campos de perturbação Φ e $\delta\bar{\varphi}$, os quais podem ser determinados a partir do conhecimento dos correspondentes campos não perturbados. No que se segue, a nossa tarefa será determinar os campos de perturbação a partir desse sistema de equações diferenciais para posteriormente calcularmos os respectivos espectros.

9.2 Solução do sistema não perturbado

Como temos que conhecer os campos não perturbados para a determinação dos campos de perturbação, devemos primeiramente resolver as equações de campo não perturbadas. Fazemos isso pelo procedimento padrão de resolução das equações de Einstein (9.2) para um Universo homogêneo e isotrópico plano. Assim, temos a equação de Friedmann para a densidade de energia do campo taquiônico, de onde obtemos o fator de escala. Adicionalmente, da variação da ação (9.1) com respeito a φ , tem-se a equação de Klein-Gordon para φ , a qual é aplicada para uma métrica plana de Friedmann-Robertson-Walker, fornecendo a evolução temporal do campo taquiônico.

Procedendo conforme o que foi exposto acima, as equações de campo não perturbadas – equações de Friedmann e de Klein-Gordon – para o presente mo-

delo são, respectivamente,

$$H^2 = \frac{V}{3\sqrt{1-\dot{\varphi}_0^2}}, \quad \frac{\ddot{\varphi}_0}{1-\dot{\varphi}_0^2} + 3H\dot{\varphi}_0 + \frac{\partial_{\varphi_0}V}{V} = 0, \quad (9.31)$$

onde o ponto denota o tempo físico e $H = \dot{a}/a$, como usualmente.

Se considerarmos um potencial do tipo inverso do quadrado, isto é,

$$V = \frac{\lambda}{\varphi_0^2}, \quad (9.32)$$

as equações de campo (9.31) fornecem o seguinte sistema de equações diferenciais acopladas

$$H^2 = \frac{\lambda}{3\varphi_0^2\sqrt{1-\dot{\varphi}_0^2}}, \quad \frac{\ddot{\varphi}_0}{1-\dot{\varphi}_0^2} + 3H\dot{\varphi}_0 - \frac{2}{\varphi_0} = 0. \quad (9.33)$$

O sistema acima pode ser satisfeito pela simples solução

$$a(t) = a_0(t + c_1)^n, \quad \varphi_0(t) = \sqrt{\frac{2}{3n}}(t + c_1), \quad (9.34)$$

com

$$n = \frac{1}{6} \left(2 + \sqrt{4 + 9\lambda^2} \right), \quad (9.35)$$

onde a_0 e c_1 são constantes.

De (9.34)₁, vemos que quando $n > 1$, temos que $\ddot{a} > 0$, o que significa, pela observação de (9.35), que uma inflação do tipo lei de potência ocorre se $\lambda > 2/\sqrt{3}$. O resultado (9.34)₂ nos diz que a evolução de φ_0 é linear no tempo, o que leva o potencial (9.32) a apresentar as seguintes propriedades assintóticas

$$V(t \rightarrow 0) = \frac{3n\lambda}{2c_1^2}, \quad V(t \rightarrow \infty) = 0. \quad (9.36)$$

Tomando-se um n suficientemente grande, o que descreve um Universo com uma expansão altamente acelerada, tem-se que λ é grande e $\dot{\varphi}_0^2 = 2/3n \ll 1$. Conseqüentemente, a partir de (9.10) pode-se escrever

$$\rho \simeq \frac{3n\lambda}{2(t + c_1)^2}, \quad p \simeq -\frac{3n\lambda}{2(t + c_1)^2}, \quad (9.37)$$

o que implica numa equação de estado do tipo constante cosmológica para cada instante, isto é, $p(t) \simeq -\rho(t)$.

Se tentarmos resolver a equação (9.33) usando o tempo conforme no lugar do tempo físico, não conseguiremos integrá-la analiticamente. Assim é mais conveniente tentar resolver o sistema perturbado (9.28)-(9.30) usando-se o tempo físico a fim de se aplicar a solução analítica encontrada acima para as equações de movimento não perturbadas.

9.3 Solução do sistema perturbado

Agora escrevemos o sistema (9.28)-(9.30) em termos do tempo físico no lugar do tempo conforme e expressamos Φ como uma função do fator de escala, $\Phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \Phi(\mathbf{x}, a)$. Em seguida subtraímos a equação (9.28) da equação (9.30) e empregamos (9.29) para expressar $\delta\bar{\varphi}$ em termos de Φ e $d\Phi/da$. Finalmente, pelo uso da equação (9.31)₂ para eliminar o termo $(\partial_\varphi V(\varphi)|_{\varphi=\varphi_0})/V(\varphi_0) = \partial_{\varphi_0} V(\varphi_0)/V(\varphi_0)$, obtém-se a seguinte equação diferencial para o potencial de perturbação

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{da^2} + \frac{1}{a} \left(\frac{\dot{H}}{H^2} + 5 \right) \frac{d\Phi}{da} + \frac{1}{a^2} \left(2 \frac{\dot{H}}{H^2} + 3 \right) \Phi - \frac{1}{a^4} (1 - \dot{\varphi}_0^2) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{H^2} \nabla^2 \Phi + a^2 \left[3 + \frac{2\ddot{\varphi}_0}{H\dot{\varphi}_0(1 - \dot{\varphi}_0^2)} \right] \left(a \frac{d\Phi}{da} + \Phi \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Vamos resolver essa equação diferencial utilizando-se da solução não perturbada obtida na seção anterior. Primeiramente, de (9.34)₁ calcula-se H^2 e \dot{H} , resultando nas respectivas relações

$$H^2 = \frac{n^2}{(t + c_1)^2} = n^2 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-\frac{2}{n}}, \quad \frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{-\frac{n}{(t+c_1)^2}}{\frac{n^2}{(t+c_1)^2}} = -\frac{1}{n}, \quad (9.39)$$

e de (9.34)₂, temos $\dot{\varphi}_0^2 = 2/3n$ e $\ddot{\varphi}_0 = 0$. Pela substituição desses resultados em (9.38), obtém-se uma equação diferencial da seguinte forma

$$\frac{d^2\Phi}{da^2} + \left(\frac{2n+1}{n} \right) \frac{1}{a} \frac{d\Phi}{da} - \frac{1}{a_0^{2/n}} \left(\frac{3n-2}{3n^3} \right) \frac{1}{a^{\frac{2}{n}(2n-1)}} \nabla^2 \Phi = 0. \quad (9.40)$$

Podemos assumir que Φ é separável em suas partes temporal (em termos de a) e espacial como um produto de duas funções na forma $\Phi(a)\chi(\mathbf{x})$.

Fazendo assim, a equação (9.40) é satisfeita se

$$a^2 \frac{d^2}{da^2} \Phi(a) + (2p+1)a \frac{d}{da} \Phi(a) + \alpha^2 a^{2r} \Phi(a) = 0, \quad (9.41)$$

$$\nabla^2 \chi + k^2 \chi = 0, \quad (9.42)$$

onde k é uma constante e

$$p = \frac{n+1}{2n}, \quad \alpha^2 = \frac{k^2}{a_0^{2/n}} \frac{3n-2}{3n^3}, \quad r = -\frac{n-1}{n}. \quad (9.43)$$

A solução de (9.42) é a bem conhecida parte espacial da solução de onda plana $\chi(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, e a equação (9.41) é uma das formas da equação diferencial de Bessel, cuja solução geral, para esse caso, é

$$\Phi_{\mathbf{k}}(a) = a^{-p} [A_{\mathbf{k}} J_q(\beta k a^r) + B_{\mathbf{k}} Y_q(\beta k a^r)], \quad (9.44)$$

válida para q inteiro. Para valores de q não inteiros, temos

$$\Phi_{\mathbf{k}}(a) = a^{-p} [A_{\mathbf{k}} J_q(\beta k a^r) + B_{\mathbf{k}} J_{-q}(\beta k a^r)]. \quad (9.45)$$

Nas soluções acima, definimos

$$q = \frac{n+1}{2(n-1)}, \quad \beta = \frac{1}{a_0^{1/n}(n-1)} \sqrt{\frac{3n-2}{3n}}, \quad (9.46)$$

sendo $A_{\mathbf{k}}$ e $B_{\mathbf{k}}$ constantes e J_q e Y_q as funções de Bessel de primeira e segunda espécies, respectivamente.

Investigaremos primeiramente a solução para q inteiro. Fazendo-se $B_{\mathbf{k}} = iA_{\mathbf{k}}$ em (9.44), temos

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{k}}(a) &= A_{\mathbf{k}} a^{-p} [J_q(\beta k a^r) + iY_q(\beta k a^r)] \\ &= A_{\mathbf{k}} a^{-p} H_q^{(1)}(\beta k a^r), \end{aligned} \quad (9.47)$$

onde $H_q^{(1)}$ denota a função de Hankel de primeira espécie.

As formas assintóticas das funções de Bessel para σ não negativo e com um argumento pequeno, $0 < z \ll \sqrt{1+\sigma}$ e $\sigma \neq 0$, são

$$J_{\sigma}(z) \simeq \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\sigma}, \quad Y_{\sigma}(z) \simeq -\pi^{-1} \Gamma(\sigma) \left(\frac{2}{z}\right)^{\sigma}, \quad (9.48)$$

onde os $\Gamma(\zeta)$ são funções gama, e para um argumento grande, $z \gg |\sigma^2 - 1/4|$, são

$$J_\sigma(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left[z - \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + \sigma \right) \right], \quad Y_\sigma(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin \left[z - \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + \sigma \right) \right]. \quad (9.49)$$

Por sua vez, utilizando essas formas assintóticas na solução acima para q inteiro, na aproximação de perturbações para comprimentos de onda curtos, os quais satisfazem $ka^r \gg 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_{\mathbf{k}\chi} &\simeq \left(\sqrt{\frac{2}{\pi\beta k}} A_{\mathbf{k}} e^{-i\xi} \right) a^{-\frac{1}{n}} e^{i\beta k a^r} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &\simeq C_{\mathbf{k}} a^{-\frac{1}{n}} e^{i\beta k(a^r - a_i^r)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (9.50)$$

onde definimos

$$C_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{2}{\pi\beta k}} e^{-i\xi} e^{i\beta k a_i^r} A_{\mathbf{k}}, \quad (9.51)$$

sendo que $a_i^r = a^r(t_i)$ ou $a_i^r = a^r(\eta_i)$, onde t_i e η_i referem-se a instantes iniciais, e

$$\xi = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + q \right) = \frac{\pi n}{2(n-1)}. \quad (9.52)$$

A conveniência dessa definição para as constantes ficará evidente nos tratamentos posteriores.

Agora, pelo emprego do resultado (9.50) e das soluções não perturbadas, podemos calcular diretamente de (9.29) o campo de gauge $\delta\bar{\varphi}$ para o caso de comprimentos de onda curtos, de onde obtemos

$$\delta\bar{\varphi} = \delta\bar{\varphi}_{\mathbf{k}\chi} \simeq \delta_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} a^r e^{i\beta k(a^r - a_i^r)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (9.53)$$

com

$$\delta_{\mathbf{k}} = -\frac{4ik(3n-2)}{3\sqrt{6}\lambda n^{3/2} a_0^{2/n}}. \quad (9.54)$$

Para perturbações na aproximação de comprimentos de onda longos, quando $ka^r \ll 1$, tem-se a partir das formas assintóticas para as funções de Bessel

$$\Phi \simeq \Phi_{\mathbf{k}} \simeq C_{1\mathbf{k}} + C_{2\mathbf{k}} a^{-2p}, \quad (9.55)$$

onde redefinimos as constantes como

$$C_{1\mathbf{k}} = -iA_{\mathbf{k}}\Gamma(q)\pi^{-1}\left(\frac{\beta k}{2}\right)^{-q}, \quad C_{2\mathbf{k}} = \frac{A_{\mathbf{k}}}{\Gamma(1+q)}\left(\frac{\beta k}{2}\right)^q. \quad (9.56)$$

Analogamente ao caso anterior, calculamos o campo de gauge $\delta\bar{\varphi}$ para perturbações com comprimentos de onda longos

$$\delta\bar{\varphi} \simeq \delta\bar{\varphi}_{\mathbf{k}} \simeq \delta_0 C_{1\mathbf{k}} a^{\frac{1}{n}}, \quad (9.57)$$

onde

$$\delta_0 = \frac{4}{3\lambda a_0^{1/n}} \sqrt{\frac{3n-2}{2}}. \quad (9.58)$$

Haja vista que as soluções dos campos de perturbação para os casos limites acima são válidas para q inteiro, estas descrevem perturbações para uma inflação do tipo lei de potência com os valores do expoente n dados por

$$n = \frac{2q+1}{2q-1}, \quad \text{com } q = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.59)$$

sendo $n = 3$ o máximo valor possível para o expoente. Quando $q \gg 1$, tem-se que $n \rightarrow 1$, significando que nesse caso n tende ao limite do valor mínimo do expoente para que haja uma expansão acelerada. O índice $q = 0$ deve ser excluído porque este dá $n = -1$, o que descreve um Universo em colapso.

9.4 Determinação do espectro das flutuações

Até agora determinamos a evolução espaço-temporal das perturbações, mas ainda existe um ponto crucial a ser tratado. No início do Universo não havia matéria, mas apenas vácuo num estado meta estável – o chamado falso vácuo –, o qual decaiu pra um estado de energia mais baixa, sendo que a energia excedente desse decaimento gerou as partículas e antipartículas de matéria. Então, nossas soluções devem satisfazer a condição de densidade de energia mínima no instante inicial, a qual corresponde às flutuações de energia do vácuo.

As flutuações mínimas de densidade de energia devem ser satisfeitas

nas condições iniciais dos nossos campos de perturbação. Para isso, devemos partir para um tratamento quântico, tal que as condições iniciais sejam determinadas em conformidade com o *princípio da incerteza*, garantindo as flutuações mínimas de energia do espaço "vazio". Sendo assim, as constantes de integração devem ter seus valores determinados de tal forma que as condições iniciais dos campos de perturbação satisfaçam as propriedades físicas do Universo primordial imediatamente após o Big Bang. A seguir vamos discorrer sobre as ideias principais da teoria geral para perturbações cosmológicas quânticas.

9.4.1 Quantização das perturbações

Consideremos a ação de um campo escalar φ qualquer, canônico ou não canônico, num Universo plano, dada na forma de uma integral quadridimensional da sua pressão hidrodinâmica

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} p(X, \varphi), \quad (9.60)$$

onde

$$X = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi. \quad (9.61)$$

Na nossa análise, $p(X, \varphi)$ será a pressão do campo de táquions, cuja forma nos dá a ação (9.1).

A ação acima representa um fluido hidrodinâmico ideal, sendo o seu tensor energia-momento da forma

$$T_\nu^\mu = (\rho + p) u^\mu u_\nu - p \delta_\nu^\mu. \quad (9.62)$$

Nesse caso, a densidade de energia do campo escalar pode ser dada por

$$\rho = 2X \frac{\partial p}{\partial X} - p, \quad (9.63)$$

cujas grandezas "velocidade do som" associada é definida por

$$c_s^2 = \frac{\partial_X p}{\partial_X \rho} = \frac{\rho + p}{2X \partial_X \rho}. \quad (9.64)$$

Agora introduzimos um novo conjunto de variáveis [107, 109], dadas a partir das variáveis dos campos não perturbados e dos campos de perturbação, invariantes de gauge e em função do tempo conforme, a saber,

$$u = \frac{2\Phi}{\sqrt{\rho + p}}, \quad v = \sqrt{\frac{\partial\rho}{\partial X}} a \left(\delta\bar{\varphi} + \frac{\varphi'_0}{\mathcal{H}} \Phi \right). \quad (9.65)$$

Essas são as chamadas *variáveis de Mukhanov-Sasaki*. As correspondentes equações diferenciais para as perturbações tomam as seguintes formas

$$c_s \nabla^2 u = v' - \frac{z'}{z} v, \quad c_s v = u' - \frac{\theta'}{\theta} u, \quad (9.66)$$

onde

$$z = \frac{a^2 \sqrt{\rho + p}}{c_s \mathcal{H}}, \quad \theta = \frac{1}{c_s z}. \quad (9.67)$$

Se aplicadas ao nosso modelo taquiônico, essas equações reproduzem um sistema equivalente ao sistema (9.28)-(9.30).

Pode-se construir a seguinte ação em termos das variáveis v e z [107]

$$S = \int \mathcal{L} d\eta d^3x = \frac{1}{2} \int \left(v'^2 + c_s^2 v \nabla^2 v + \frac{z''}{z} v^2 \right) d\eta d^3x, \quad (9.68)$$

cujas variações com respeito a v produzem a equação

$$v'' - c_s^2 \nabla^2 v - \frac{z''}{z} v = 0. \quad (9.69)$$

Essa equação é dinamicamente equivalente ao sistema (9.66), o que significa que essa ação gera equações de perturbação equivalentes às das variáveis originais.

Tendo em vista o resultado acima, definimos o momento Π canonicamente conjugado a v

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v'} = v'. \quad (9.70)$$

Seguindo o programa básico de quantização, as variáveis Π e v se tornam os operadores $\hat{\Pi}$ e \hat{v} , os quais obedecem às tradicionais relações de comutação

$$\begin{aligned} [\hat{v}(\eta, \mathbf{x}), \hat{v}(\eta, \mathbf{y})] &= [\hat{\Pi}(\eta, \mathbf{x}), \hat{\Pi}(\eta, \mathbf{y})] = 0, \\ [\hat{v}(\eta, \mathbf{x}), \hat{\Pi}(\eta, \mathbf{y})] &= [\hat{v}(\eta, \mathbf{x}), \hat{v}'(\eta, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (9.71)$$

onde \hbar não está visível porque estamos utilizando as unidades naturais ($\hbar=1$).

A partir dessas definições, o operador \hat{v} deve satisfazer uma equação diferencial que tem a mesma forma daquela que a variável clássica v obedece, isto é,

$$\hat{v}'' - c_s^2 \nabla^2 \hat{v} - \frac{z''}{z} \hat{v} = 0, \quad (9.72)$$

a qual tem a solução geral [107, 108]

$$\hat{v}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int [v_{\mathbf{k}}^*(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^- + v_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+] \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (9.73)$$

onde $\hat{a}_{\mathbf{k}}^-$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}}^+$ são constantes de integração (na forma de operadores independentes do tempo) e as funções temporais $v_{\mathbf{k}}(\eta)$ satisfazem

$$v_{\mathbf{k}}'' + \omega_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}} = 0, \quad \text{com} \quad \omega_{\mathbf{k}}^2 = \omega_{\mathbf{k}}^2(\eta) = c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z}. \quad (9.74)$$

Impõe-se que as constantes de integração $\hat{a}_{\mathbf{k}}^-$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}}^+$ obedeçam as relações de comutação bosônicas

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}^-, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^-] = [\hat{a}_{\mathbf{k}}^+, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+] = 0, \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}^-, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (9.75)$$

sendo o estado de vácuo $|0\rangle$ definido como o estado aniquilado pelos operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}^-$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^- |0\rangle = 0. \quad (9.76)$$

Assume-se que o conjunto completo de estados linearmente independentes é obtido pela ação de produtos dos operadores de criação no estado de vácuo $|0\rangle$. Além do mais, os $v_{\mathbf{k}}$ devem satisfazer a seguinte condição de normalização

$$v'_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* - v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^{*'} = 2i, \quad (9.77)$$

garantindo que a solução (9.73) seja consistente com as relações de comutação (9.71). O lado esquerdo dessa expressão nada mais é que o wronskiano das duas soluções linearmente independentes de (9.74), $v_{\mathbf{k}}$ e $v_{\mathbf{k}}^*$, o qual, portanto, é independente do tempo.

As equações (9.74) descrevem um oscilador harmônico com energia

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} (|v'_{\mathbf{k}}|^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 |v_{\mathbf{k}}|^2). \quad (9.78)$$

A partir dessa expressão para a energia e da condição de normalização (9.77), mostra-se que as flutuações mínimas de energia ocorrem quando as condições iniciais para $v_{\mathbf{k}}$ e $v'_{\mathbf{k}}$ satisfazem

$$v_{\mathbf{k}}(\eta_i) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} e^{i\alpha_{\mathbf{k}}(\eta_i)}, \quad v'_{\mathbf{k}}(\eta_i) = i\sqrt{\omega_k} e^{i\alpha_{\mathbf{k}}(\eta_i)}, \quad (9.79)$$

onde $\alpha_{\mathbf{k}}$ é apenas um fator de fase indeterminado que pode ser igualado a zero. Com esse tratamento quântico, garantimos as mínimas flutuações de energia em conformidade com o princípio da incerteza. Tais condições iniciais são válidas para $\omega_k^2 > 0$ (tal restrição assegura um mínimo de energia bem definido).

Com o mesmo procedimento desenvolvido acima para a variável $v_{\mathbf{k}}$, mostra-se que o operador correspondente à variável $u_{\mathbf{k}}$ tem a forma

$$\hat{u}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int [v_{\mathbf{k}}^*(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^- + v_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+] \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (9.80)$$

que a partir da definição (9.65)₁ para a variável $u_{\mathbf{k}}$ nos fornece o operador correspondente ao potencial gravitacional de perturbação

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\eta, \mathbf{x}) &= \frac{\sqrt{\rho+p}}{2} \hat{u}(\eta, \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho+p}{2}} \int [v_{\mathbf{k}}^*(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^- + v_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+] \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (9.81)$$

Desse resultado, a função de correlação num instante $\eta > \eta_i$ para o estado de vácuo inicial pode ser calculada, fornecendo

$$\langle 0 | \hat{\Phi}(\eta, \mathbf{x}) \hat{\Phi}(\eta, \mathbf{y}) | 0 \rangle = \int \frac{\rho+p}{16\pi^2} |u_{\mathbf{k}}|^2 k^3 \frac{\sin(kr)}{kr} \frac{dk}{k}, \quad (9.82)$$

a partir do que se define a quantidade

$$\delta_{\Phi}^2(k, \eta) = \frac{\rho+p}{16\pi^2} |u_{\mathbf{k}}|^2 k^3 = \frac{|\Phi_{\mathbf{k}}|^2 k^3}{4\pi^2}, \quad (9.83)$$

que é o chamado espectro de potência das flutuações do campo de perturbação Φ [107]. Tal quantidade fornece o quadrado da amplitude das flutuações do potencial gravitacional de perturbação.

A seguir determinaremos as constantes de integração da solução obtida na seção anterior tal que satisfaçam as condições iniciais (9.79), para posteriormente calcularmos o espectro das respectivas flutuações conforme (9.83).

9.4.2 Cálculo do espectro de potência

Primeiramente calcularemos as quantidades necessárias definidas na subseção anterior para o caso do campo taquiônico, cuja solução não perturbada (9.34) será usada. De (9.64), (9.65) e (9.67)₁, obtemos

$$\begin{aligned} c_s^2 &= \frac{3n-2}{3n}, & u_{\mathbf{k}} &= \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^{\frac{1}{4}} \Phi_{\mathbf{k}}, \\ v_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{n} \sqrt{\lambda} a \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^{-\frac{3}{4}} \left[n \sqrt{\frac{3n}{2}} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{1}{n}} \delta\bar{\varphi}_{\mathbf{k}} + \Phi_{\mathbf{k}} \right], \\ z &= \frac{1}{n} \sqrt{\lambda} a \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^{-\frac{3}{4}}. \end{aligned} \quad (9.84)$$

Por sua vez, de (9.74)₂, pela aplicação de (9.84)₁ e (9.84)₄, determinamos que

$$\omega_k^2 = c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z} = \frac{3n-2}{3n} k^2 - n(2n-1) a_0^{2/n} a^{\frac{2}{n}(n-1)}. \quad (9.85)$$

Para comprimentos de onda curtos, $ka^r \gg 1$, a expressão acima pode ser aproximada por

$$\omega_k \simeq c_s k = \sqrt{\frac{3n-2}{3n}} k, \quad (9.86)$$

de onde também concluímos que $\omega_{ki} \simeq c_s k$. Então, das condições iniciais (9.79), fazendo $\alpha_{\mathbf{k}} = 0$, escrevemos

$$v_{\mathbf{ki}} = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} \simeq \frac{1}{\sqrt{c_s k}}, \quad v'_{\mathbf{ki}} = i\sqrt{\omega_k} \simeq i\sqrt{c_s k}. \quad (9.87)$$

Da equação (9.66)₁, avaliada num instante inicial, para $ka^r \gg 1$, podemos escrever a seguinte aproximação

$$-c_s k^2 u_{\mathbf{ki}} = v'_{\mathbf{ki}} - \frac{z'}{z} v_{\mathbf{ki}} \simeq v'_{\mathbf{ki}}, \quad (9.88)$$

que procede em virtude de (9.87). Finalmente, colocando (9.87)₂ nesse último resultado, determinamos de modo direto a condição inicial para $u_{\mathbf{k}}$, a saber,

$$u_{\mathbf{ki}} \simeq -\frac{i}{\sqrt{c_s}} k^{-\frac{3}{2}} = -i \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^{-\frac{1}{4}} k^{-\frac{3}{2}}. \quad (9.89)$$

Pela substituição de (9.50) em (9.84)₂, obtemos

$$u_{\mathbf{k}} \simeq \frac{2}{a_0^{1/n} \sqrt{\lambda}} \left(\frac{3n-2}{3n} \right)^{\frac{1}{4}} C_{\mathbf{k}} e^{i\beta k(a^r - a_i^r)}. \quad (9.90)$$

Avaliando essa função no instante inicial, quando $a^r = a_i^r$, e comparando com (9.89), determinamos imediatamente o valor adequado da constante de integração do potencial de perturbação

$$C_{\mathbf{k}} = -i \frac{a_0^{1/n} \sqrt{\lambda}}{2} \left(\frac{3n-2}{3n} \right)^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{3}{2}} = -i \frac{a_0^{1/n} \sqrt{\lambda}}{2c_s} k^{-\frac{3}{2}}, \quad (9.91)$$

sendo que agora as flutuações do potencial de perturbação avaliadas no início do Universo estão de acordo com as flutuações mínimas do vácuo.

A partir disso, temos que a forma da função $u_{\mathbf{k}}$ para perturbações com comprimentos de onda curtos é

$$u_{\mathbf{k}} \simeq -\frac{i}{k^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3n-2}{3n} \right)^{-\frac{1}{4}} e^{i\beta k(a^r - a_i^r)}. \quad (9.92)$$

Substituindo esse resultado em (9.83), temos finalmente a forma do espectro de potência correspondente

$$\delta_{\Phi}^2(k, a) \simeq \frac{\lambda}{16\pi^2} \left(\frac{3n-2}{3n} \right)^{-1} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-\frac{2}{n}} = \frac{\lambda}{16\pi^2 c_s^2} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-\frac{2}{n}}, \quad (9.93)$$

o qual é independente de escala. Esse resultado está de acordo com o que se espera a partir das observações, ou seja, o espectro deve ser *aproximadamente* independente de escala.

Usando o resultado (9.91), determinamos $A_{\mathbf{k}}$ e as constantes da solução (9.55). Uma vez que $ka^r \ll 1$ para essa solução, podemos manter apenas o seu primeiro termo, e de (9.84)₂ calculamos o respectivo $u_{\mathbf{k}}$

$$u_{\mathbf{k}} \simeq -\frac{\Gamma(q)}{\sqrt{\pi} k^{1+q}} \left(\frac{3n-2}{3n} \right)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{\beta}{2} \right)^{\frac{1}{2}-q} a^{\frac{1}{n}}, \quad (9.94)$$

que aplicado em (9.83) nos fornece

$$\begin{aligned} \delta_{\Phi}^2(k, a) &\simeq \frac{\lambda a_0^{2/n} \Gamma^2(q) k^{1-2q}}{16\pi^3} \left(\frac{3n-2}{3n} \right)^{-1} \left(\frac{\beta}{2} \right)^{1-2q} \\ &\simeq \frac{\lambda a_0^{2/n} \Gamma^2(q) k^{1-2q}}{16\pi^3 c_s^2} \left(\frac{\beta}{2} \right)^{1-2q}, \end{aligned} \quad (9.95)$$

e assim obtemos o espectro de potência do potencial gravitacional de perturbação para perturbações com comprimentos de onda longos. Observemos que esse espectro é dependente de escala para qualquer valor de q (lembre-se que esses resultados são válidos para $q = 1, 2, 3, \dots$). Portanto, tal espectro de potência não está de acordo com as observações. A solução do potencial gravitacional de perturbação para o caso de q inteiro não é viável à descrição das perturbações primordiais.

9.4.3 Espectro de potência para q não inteiro

Para calcularmos o potencial gravitacional de perturbação no caso de q não inteiro, solução (9.45), necessitamos das seguintes formas assintóticas da função da Bessel, onde σ é não negativo,

$$J_{-\sigma}(z) \simeq \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \left(\frac{2}{z}\right)^\sigma, \quad (9.96)$$

válida para um argumento pequeno, $0 < z \ll \sqrt{1+\sigma}$ e $\sigma \neq 0$, e

$$J_{-\sigma}(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left[z - \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \sigma \right) \right], \quad (9.97)$$

válida para um argumento grande, $z \gg |\sigma^2 - 1/4|$.

Assim, para comprimentos de onda curtos, $ka^r \gg 1$, de (9.48) e das formas assintóticas acima, fazendo-se $B_{\mathbf{k}} = iA_{\mathbf{k}}$ por conveniência, temos

$$\Phi \simeq D_{\mathbf{k}} a^{-\frac{1}{n}} [\cos(\beta ka^r - \xi) + i \cos(\beta ka^r - \xi + \pi q)] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (9.98)$$

com ξ dado por (9.52) e

$$D_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{2}{\pi\beta k}} A_{\mathbf{k}}. \quad (9.99)$$

Usando esse resultado em (9.29), obtemos o campo de gauge $\delta\bar{\varphi}$ correspondente

$$\delta\bar{\varphi} \simeq i\delta_{\mathbf{k}} D_{\mathbf{k}} a^r [\cos(\beta ka^r - \xi) + i \cos(\beta ka^r - \xi + \pi q)] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (9.100)$$

com $\delta_{\mathbf{k}}$ sendo dado por (9.54).

Para comprimentos de onda longos, $ka^r \ll 1$, de (9.49) e das formas assintóticas acima, determinamos

$$\Phi \simeq D_{1\mathbf{k}} + D_{2\mathbf{k}}a^{-2p}, \quad (9.101)$$

com

$$D_{1\mathbf{k}} = -\frac{iA_{\mathbf{k}}}{\Gamma(1-q)} \left(\frac{\beta k}{2}\right)^{-q}, \quad D_{2\mathbf{k}} = \frac{A_{\mathbf{k}}}{\Gamma(1+q)} \left(\frac{\beta k}{2}\right)^q. \quad (9.102)$$

E, analogamente ao caso anterior, determinamos o respectivo campo de gauge $\delta\bar{\varphi}$

$$\delta\bar{\varphi} \simeq \delta_0 D_{1\mathbf{k}} a^{\frac{1}{n}}, \quad (9.103)$$

onde δ_0 é dado por (9.58).

De (9.98), temos o $u_{\mathbf{k}}$ para perturbações com comprimentos de onda curtos, a saber,

$$u_{\mathbf{k}} = \frac{2\Phi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\rho+p}} \simeq \frac{2\sqrt{c_s}}{a_0^{1/n}\sqrt{\lambda}} D_{\mathbf{k}} [\cos(\beta ka^r - \xi) + i \cos(\beta ka^r - \xi + \pi q)]. \quad (9.104)$$

Por sua vez, comparando essa última expressão com a condição inicial (9.89), determinamos que $D_{\mathbf{k}}$ deve ter a forma

$$D_{\mathbf{k}} = -\frac{ia_0^{1/n}\sqrt{\lambda}}{2c_s k^{\frac{3}{2}}} [\cos(\beta ka_i^r - \xi) + i \cos(\beta ka_i^r - \xi + \pi q)]^{-1}, \quad (9.105)$$

Como consequência, o $u_{\mathbf{k}}$ que satisfaz a condição de mínima flutuação de energia é

$$u_{\mathbf{k}} \simeq -\frac{i}{\sqrt{c_s} k^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\cos(\beta ka^r - \xi) + i \cos(\beta ka^r - \xi + \pi q)}{\cos(\beta ka_i^r - \xi) + i \cos(\beta ka_i^r - \xi + \pi q)} \right]. \quad (9.106)$$

Aplicando esse último resultado a (9.83), obtemos o espectro de potência para perturbações com comprimentos de onda curtos, a saber,

$$\delta_{\Phi}^2(k, a) \simeq \frac{\lambda}{16\pi^2 c_s^2} \left[\frac{\cos^2(\beta ka^r - \xi + \pi q) + \cos^2(\beta ka^r - \xi)}{\cos^2(\beta ka_i^r - \xi + \pi q) + \cos^2(\beta ka_i^r - \xi)} \right] \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\frac{2}{n}}. \quad (9.107)$$

Desse resultado, podemos observar que quando $q \rightarrow 1/2$, o espectro tende a plano. Por outro lado, de (9.46)₁,

$$q = \frac{n+1}{2(n-1)}, \quad (9.108)$$

a partir do que podemos constatar que isso ocorre para um n suficientemente grande. Então, satisfeita essa condição para n , teremos um espectro aproximadamente plano no limite de perturbações com comprimentos de onda curtos.

A partir de (9.105) e (9.99), determinamos $A_{\mathbf{k}}$ e as constantes de (9.101), e uma vez que na aproximação de perturbações com comprimentos de onda longos tem-se $ka^r \ll 1$, também podemos desprezar o segundo termo de (9.101). Assim, temos que o $u_{\mathbf{k}}$ correspondente é dado por

$$u_{\mathbf{k}} \simeq -\frac{i\sqrt{2\pi}(\beta/2)^{\frac{1}{2}-q}k^{-1-q}}{2\sqrt{c_s}\Gamma(1-q)}[\cos(\beta ka_i^r - \xi) + i\cos(\beta ka_i^r - \xi + \pi q)]^{-1}a^{\frac{1}{n}}, \quad (9.109)$$

cuja aplicação em (9.83) nos fornece o seguinte espectro de potência para perturbações com comprimentos de onda longos

$$\delta_{\Phi}^2(k, a) \simeq \frac{\lambda a_0^{2/n}(\beta/2)^{1-2q}}{32\pi c_s^2\Gamma^2(1-q)}[\cos^2(\beta ka_i^r - \xi + \pi q) + \cos^2(\beta ka_i^r - \xi)]^{-1}k^{1-2q}. \quad (9.110)$$

Facilmente notamos que esse espectro tende a plano se $q \rightarrow 1/2$, exatamente como no regime de perturbações com comprimentos de onda curtos. Portanto, preservamos um espectro aproximadamente plano no período inflacionário se n for suficientemente grande, isto é, sendo satisfeita essa condição, o modelo gera um espectro praticamente independente de escala conforme as observações exigem.

Por fim, observando a forma da evolução temporal do fator de escala, (9.34)₁,

$$a(t) = a_0(t + c_1)^n, \quad (9.111)$$

chega-se à importante conclusão de que quanto maior é a aceleração da expansão (quanto maior é o valor de n) no período inflacionário, mais o espectro de potência se aproxima de um espectro plano, por (9.108). Tendo em vista os resultados acima, o valor da aceleração de expansão tem um papel determinante na forma do espectro de potência das flutuações primordiais.

Capítulo 10

Conclusão

10.1 Quintessência não minimamente acoplada versus Λ CDM

Da condição de existência para a simetria de Noether, um potencial constante e um acoplamento conforme emergem. A partir das propriedades da simetria encontrada, por meio de uma mudança de coordenadas no espaço de configuração, pudemos reduzir o sistema dinâmico original. A equação de campo final apresenta-se com a mesma forma da equação de Friedmann para o modelo da constante cosmológica. Consequentemente, a dinâmica resultante mostra-se similar àquela do modelo Λ CDM. Esse artifício matemático pode mascarar a física por trás da quintessência não minimamente acoplada ao campo gravitacional e permite que as soluções do modelo Λ CDM emerjam. Com esse resultado, mostramos que um modelo com um acoplamento não mínimo, isto é, com uma física onde a "constante" gravitacional é variável, pode reproduzir os dados observacionais desde a era da radiação até a presente era acelerada exatamente como o modelo Λ CDM faz.

10.2 Campos escalares e espinoriais minimamente acoplados

Partindo de uma ação geral que descreve os campos escalar, espinorial e de matéria comum, sem especificar seus potenciais, a condição de Noether é aplicada e a correspondente lagrangiana e os potenciais indefinidos são restringidos. Com a lagrangiana satisfazendo a simetria de Noether, o campo espinorial passa a apresentar um termo de massa e o campo escalar um potencial que pode levar a uma expansão acelerada.

O primeiro resultado é que o campo de férmions de Dirac tem um comportamento de matéria sem pressão e pode representar a matéria escura. Adicionalmente, a existência de uma simetria de Noether prova-se uma ferramenta poderosa para a integração completa do sistema. A solução obtida é então moldada pelos dados observacionais e por exigências físicas. Como um dos resultados, o campo escalar apresenta uma equação de estado com seu valor variando *quasi*-periodicamente no intervalo $[-1, 1]$, o que significa que o mesmo se comporta como matéria e energia escura. No início da era dominada por matéria, o campo escalar tem um importante papel, quando o próprio se comporta como um campo de matéria. Uma consequência dessa solução é que o modelo consegue descrever o período acelerado presente e prevê um Universo com uma expansão oscilante. Além disso, o Universo evolui de tal forma que no futuro distante sua expansão tende a uma razão constante. Isto é, uma expansão acelerada eterna, como usualmente é prevista pelos modelos cosmológicos, não ocorre nesse modelo [110].

10.3 Campos escalares interagentes não minimamente acoplados

Pela aplicação do método da simetria de Noether, as possíveis formas para os potenciais e acoplamentos indefinidos nos modelos gerais são restringidas a

famílias de funções. Analisamos as soluções cosmológicas de alguns modelos particulares com setor escuro interagente, os quais correspondem a potenciais e acoplamentos que satisfazem a condição de simetria para as ações gerais. Alguns dos modelos resultantes da condição de simetria generalizam certos modelos com setor escuro interagente encontrados na literatura. A troca de energia entre os campos (campo escalar - campo escalar e campo gravitacional - campos escalares) tem forte influência sobre os comportamentos produzidos por campos escalares. Uma verificação importante é que os acoplamentos não mínimos podem influenciar significativamente sobre a evolução das densidades de energia e pressões dos constituintes do Universo.

Os resultados para ambos os modelos gerais (canônico - canônico e não canônico - canônico) mostraram caminhos distintos para a evolução das densidades de energia em regimes de expansão do Universo similares. Além do mais, ambos podem reproduzir um regime desacelerado-acelerado, descrevendo a recente transição de uma expansão desacelerada para uma acelerada em boa concordância com os dados observacionais. Modelos canônico - não canônicos reproduzem comportamentos muito similares ao do modelo da constante cosmológica para o Universo atual (com respeito à razão entre a pressão e a densidade da energia escura), mas com a vantagem adicional de apresentar uma certa variedade de caminhos possíveis para a evolução da densidade de energia dos campos de matéria [111].

10.4 Generalizações geométricas da Relatividade Geral

Generalizamos as partes gravitacional e da matéria da ação de Einstein-Hilbert pela introdução das funções genéricas $f_1(R)$ e $f_2(R)$, com $f_1(R)$ repassando a forma linear no escalar de Ricci e $f_2(R)$ gerando um acoplamento não mínimo da matéria à gravidade. Adicionalmente, deixamos a conexão afim livre para ser assimétrica, de tal forma que o espaço-tempo apresentou torção. Aplicando

o princípio variacional, derivamos as equações de campo a partir da ação geral e consideramos, para fins de aplicação, correções de primeira ordem em $f_1(R)$ e $f_2(R)$.

Reescrevendo as equações de campo básicas na forma das equações de Einstein, pela definição de um tensor energia-momento efetivo, procuramos por soluções para um Universo homogêneo e isotrópico plano. Com esse procedimento, buscamos verificar se a matéria e a energia escuras podem ser manifestações de correções à teoria gravitacional einsteiniana. Com a solução obtida para o caso de correção de primeira ordem no setor da matéria, conseguimos mostrar que é possível ter uma densidade de energia efetiva de matéria maior que a da matéria ordinária. A princípio, o comportamento da evolução cosmológica resultante dessa correção poderia simular o efeito da matéria escura em larga escala.

Para o caso de correções de primeira ordem nos setores gravitacional e da matéria, apesar de que não encontramos uma solução, analisamos qualitativamente as densidades de energia e pressão efetivas e pudemos verificar que existe a possibilidade de termos uma pressão efetiva negativa, a qual poderia acelerar a expansão do Universo, simulando a energia escura.

10.5 Perturbações cosmológicas para inflação taquiônica do tipo lei de potência

Aplicamos a teoria de perturbações a uma teoria inflacionária do tipo lei de potência, em que o inflaton era um campo escalar não canônico, do tipo táquion. Num primeiro passo, derivamos as equações de campo perturbadas classicamente e as resolvemos analiticamente, obtendo os respectivos campos de perturbação. Em seguida, partimos a um tratamento quântico para determinarmos as condições iniciais do potencial gravitacional de perturbação em acordo com as flutuações mínimas de densidade de energia do vácuo.

Os últimos cálculos que realizamos forneceram o espectro de potência do potencial gravitacional de perturbação para o Universo primordial. Para a solução do potencial gravitacional de perturbação em termos de funções de Bessel com índices inteiros, o espectro de potência inicial é plano – regime de perturbações com comprimentos de onda curtos – mas se torna dependente de escala no limite de perturbações com comprimentos de onda longos. No caso da solução em termos de funções de Bessel com índices não inteiros, para o limite de perturbações com comprimentos de onda curtos, o espectro de potência tende a plano para uma expansão cosmológica suficientemente acelerada. No limite de perturbações com comprimentos de onda longos, o espectro se aproxima de plano com a mesma condição de expansão suficientemente acelerada. Com esse resultado, o modelo inflacionário estudado produz um espectro de potência progressivamente menos dependente de escala quanto maior for a aceleração de expansão, significando que a intensidade da aceleração cosmológica primordial tem um papel central na origem das flutuações com espectro de potência aproximadamente plano.

Bibliografia

- [1] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981).
- [2] A. Linde, *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1982).
- [3] A. Albrecht, P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).
- [4] A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [5] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [6] O. Bertolami, *Int. J. Mod. Phys.* **18**, 2303 (2009).
- [7] O. Lahav, A. R. Liddle, arXiv: 10023488, (2010).
- [8] P. J. E. Peebles, B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003).
- [9] M. Szydlowski, A. Kurek, A. Krawieck, *Phys. Lett. B* **642**, 171 (2006).
- [10] J. B. Binder, G. M. Kremer, *Gen. Rel. Grav.* **38**, 857 (2006).
- [11] P. Brax, J. Martin, A. Riazuelo, *Phys Rev. D* **62**, 103505 (2000).
- [12] C. L. Gardner, *Nucl. Phys. B* **707**, 278 (2005).
- [13] K. Henttunen, T. Multamäki, I. Vilja, *Phys. Lett. B* **634**, 5 (2006).
- [14] M. O. Ribas, F. P. Devecchi, G. M. Kremer, *Phys. Rev. D* **72**, 123502 (2005).
- [15] B. Saha, *Grav. Cosmol.* **12**, 215 (2006).
- [16] M. O. Ribas, F. P. Devecchi, G. M. Kremer, *Europhys. Lett.* **81**, 19001 (2008).

- [17] J. Ren, X. H. Meng, *Int. J. Mod. Phys. D* **17**, 2325 (2008).
- [18] R. C. de Souza, G. M. Kremer, *Class. Quant. Grav.* **26**, 135008 (2009).
- [19] P. P. Avelino, L. M. G., J. P. M. de Carvalho, C. J. A. P. Martins, *JCAP* **0309**, 002 (2003).
- [20] G. M. Kremer, *Gen. Rel. Grav.* **35**, 1459 (2003).
- [21] S. Capozziello, S. de Martino, M. Falanga, *Phys. Lett. A* **299**, 494 (2002).
- [22] G. M. Kremer, *Phys. Rev. D* **68**, 123507 (2003).
- [23] S. Capozziello, G. Lambiase, *Gen. Relativ. Grav.* **32**, 295 (2000).
- [24] J. C. C. de Souza, V. Faraoni, *Class. Quantum Grav.* **24**, 3637 (2007).
- [25] B. Vakili, *Phys. Lett. B* **664**, 16 (2008).
- [26] S. Capozziello, A. deFelice, arXiv: 08042163, (2008).
- [27] T. P. Sotiriou, S. Liberati, *Ann. of Phys.* **322**, 935 (2007).
- [28] F. Zwicky, *Helvetica Physica Acta.* **6**, 110 (1933).
- [29] M. P. C. A. de Sequeira, *Modified Gravity Theories with non-minimal coupling between curvature and matter*. Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 2009.
- [30] R. C. de Souza, G. M. Kremer, *Class. Quantum Grav.* **25**, 225006 (2008).
- [31] R. de Ritis, G. Marmo, G. Platania, C. Rubano, P. Scudellaro, C. Stornaiolo, *Phys. Rev. D* **42**, 1091 (1990).
- [32] R. de Ritis, G. Marmo, G. Platania, C. Rubano, P. Scudellaro, C. Stornaiolo, *Phys. Rev. D* **44**, 3136 (1991).
- [33] S. Capozziello, R. de Ritis, *Class. Quantum Grav.* **11**, 107 (1994).

- [34] S. Capozziello, G. Lambiase G, *Grav. Cosmol.* **6**, 174 (2000).
- [35] M. Demianski, E. Piedipalumbo, C. Rubano, C. Tortora, *Astron. and Astrophys.* **454**, 55 (2006).
- [36] S. Capozziello, P. K. S. Dunsby, E. Piedipalumbo, C. Rubano, *Astron. and Astrophys.* **472**, 51 (2007).
- [37] Y. Zhang, Y. G. Gong, Z. H. Zhu, *Class. Quant. Grav.* **27**, 135019 (2010).
- [38] A. Einstein, *Analen der Physik* **49**, (1916).
- [39] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principle and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, 1972.
- [40] R. A. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press, 1997.
- [41] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Teoria do Campo*. Editora Mir, 1980.
- [42] E. Hubble, *Proceedings of the National Academy of Sciences.* **15**, (1929).
- [43] R. A. Alpher, H. Bethe, G. Gamow, *Phys. Rev* **73**, 803 (1948).
- [44] A. A. Penzias, R. W. Wilson, *Astrophys. J.* **142**, 419 (1965).
- [45] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*. John Wiley and Sons, 2003.
- [46] W. L. Freedman *et al.*, *Astrophys. J.* **533**, 47 (2001).
- [47] A. Linde, *Particle Physics as Inflationary Cosmology*. Harwood Academic Publisher, 1993.
- [48] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2^a ed., 1996.
- [49] C. Brans, R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **124**, 925 (1961).
- [50] c. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J. Supp.* **148**, 1 (2003).

- [51] M. Fukugita, P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **616**, 643 (2004).
- [52] A. G. Riess *et al.*, *Astrophys. J.* **659**, 98 (2007).
- [53] M. Persic, P. Salucci, F. Stel, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **281**, 27 (1996).
- [54] K. Freese, *Phys. Rep.* **333**, 183 (2000).
- [55] L. Bergström L, *New J. Phys.* **11**, 105006 (2009).
- [56] D. Clowe, *et al.* *Astrophys. J.* **648**, L109 (2006).
- [57] R. Massey, *et al.* *Nature* **445**, 286 (2007).
- [58] M. Milgrom, arXiv: 11015122, (2010).
- [59] C. G. Boehmer, H. Tiberiu, F. S. N. Lobo, *Astrop. Phys.* **29**, 386 (2008).
- [60] O. Bertolami, J. Paramos, arXiv: 10031875 (2010).
- [61] L. N. Hand , J. D. Finch, *Analytical Mechanics*. Cambridge University Press, 1998.
- [62] G. J. Sussman, J. Wisdom, M. E. Mayer, *Structure and Interpretation of Classical Mechanics*. The MIT Press, 2000.
- [63] E. Noether, *Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Math-Phys. Klasse*, 235 (1918).
- [64] H. Goldstein, C. Poole, Safko J, *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 3^a ed., 2000.
- [65] R. Abraham, J. Marsdem, *Foundation of Mechanics*. Benjamin, 1978.
- [66] G. Marmo, E. J. Saletan, A. Simoni, B. Vitale, *Dynamical Systems. A Differential Geometric Approach to Symmetry and Reduction*. Wiley, 1985.
- [67] G. Morandi, C. Ferrario, G. L. Vecchio, G. Marmo, C. Rubano, *Physics Rep.* **188**, 149 (1990).

- [68] R. Reyes *et al.*, *Nature* **464**, 256 (2010).
- [69] S. Capozziello, M. Demianski, R. de Ritis, Rubano C., *Phys. Rev. D* **52**, 3288 (1995).
- [70] S. M. R. Micheletti, E. Abdalla, B. Wang, *Phys. Rev. D* **79**, 123506 (2009).
- [71] C. Armendariz-Picon, P. B. Greene, *Gen. Rel. Grav.* **35**, 1637 (2003).
- [72] B. Saha, *Roman. Rep. Phys.* **62**, 209 (2010).
- [73] N. D. Birrell, P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, 1982.
- [74] R. Balian, J. Zinn-Justin, *Methods in Field Theory*. North-Holland Publishing Company & World Scientific Publishing, 1981.
- [75] V. B. Berestetski, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevski, *Quantum Electrodynamics*. Nauka, Moscow, 1989.
- [76] J. Coles, *Astrophys. J.* **679**, 17 (2008).
- [77] N. Liang, P. Wu, S. N. Zhang, *Phys. Rev. D* **81**, 083518 (2010).
- [78] D. Comelli D, M. Pietroni, A. Riotto, *Phys. Letters B* **571**, 115 (2003).
- [79] E. Abdalla, L. R. Abramo, L. Sodré Jr., B. Wang, *Phys. Letters B* **673**, 107 (2009).
- [80] J. Zhou, B. Wang, D. Pavón, E. Abdalla, *Mod. Phys. Lett. A* **24**, 1689 (2009).
- [81] H. B. Hoffman, arXiv: 0307350, (2003).
- [82] M. Axenides, K. Dimopoulos, *JCAP* **07**, 010 (2004).
- [83] A. de la Macorra, *JCAP* **01**, 030 (2008).
- [84] L. P. Chimento, M. Forte, G. M. Kremer, *Gen. Rel. Grav.* **41**, 1125 (2009).

- [85] G. Caldera-Cabral, R. Maartens, *Phys. Review D* **79**, 063518 (2009).
- [86] G. M. Kremer, *Gen. Rel. Grav.* **39**, 965 (2007).
- [87] G. Caldera-Cabral, R. Maartens, B. M. Schaefer, *JCAP* **07**, 027 (2009).
- [88] J. S. Bagla, H. K. Jassal, T. Padmanabhan, *Phys. Rev. D* **67**, 063504 (2003).
- [89] H. K. Jassal, *Pramana* **62**, 757 (2004).
- [90] G. M. Kremer, D. S. M. Alves, *Gen. Relativ. Grav.* **36**, 2039 (2004).
- [91] A. Das, S. Gupta, T. D. Saini, S. Kar, *Phys. Rev. D* **72**, 043528 (2005).
- [92] G. Panotopoulos, arXiv: 0606249, (2006).
- [93] J. Ren, X. Meng, arXiv: 0610266, (2008).
- [94] J. M. Virey *et al.*, *Phys. Rev. D* **72**, 061302 (2005).
- [95] A. G. Riess *et al.*, *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004).
- [96] T. P. Sotiriou, V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010).
- [97] G. J. Olmo, arXiv: 11122223, (2011).
- [98] D. Samart, arXiv: 0606612, (2006).
- [99] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, L. Sebastiani, S. Zerbini, *Phys. Rev. D* **77**, 046009 (2008).
- [100] S. Nojiri, S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B* **599**, 137 (2004).
- [101] O. Bertolami, J. Páramos, T. Harkoa, F. S. N. Lobo, arXiv: 08112876, (2008).
- [102] V. Faraoni, *Phys. Rev. D* **80**, 124040 (2009).
- [103] T. Harko, *Phys. Rev. D* **81**, 044021 (2010).
- [104] O Bertolami, J. Páramos, *J. Phys.: Conf. Ser.* **222**, 012011 (2010).

- [105] S. Capozziello, C. Stornaiolo, *Ann. de la Fond. Louis de Broglie* **32**, (2007).
- [106] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, R. H. Brandenberger, *R. H. Phys. Rep.* **215**, 203 (1992).
- [107] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [108] S. Weinberg, *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- [109] S. D. P. Vitenti, F. T. Falciano, N. Pinto-Neto, arXiv: 12064374, (2012).
- [110] R. C. de Souza, G. M. Kremer, *Class. Quantum Grav.* **28**, 125006 (2011).
- [111] R. C. de Souza, G. M. Kremer, *Class. Quantum Grav.* **27**, 175006 (2010).