

KARINE PIRES

**MEDIDAS DE CONECTIVIDADE BASEADAS EM CORTES  
DE VÉRTICES PARA REDES COMPLEXAS**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre. Programa de Pós-Graduação em Informática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Elias P. Duarte Jr.

CURITIBA

2011

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>iii</b>
<b>RESUMO</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>v</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2 MEDIDAS DE CONECTIVIDADE</b>	<b>4</b>
2.1 Medidas Relacionadas . . . . .	4
2.2 Medidas de Conectividade Baseadas em Cortes de Arestas . . . . .	7
<b>3 MEDIDAS DE CONECTIVIDADE BASEADAS EM CORTES DE VÉRTICES</b>	<b>10</b>
3.1 Definições da Medida . . . . .	10
3.2 Algoritmo para Cálculo do Valor $\kappa_2(v)$ . . . . .	13
3.3 Variações da Medida . . . . .	17
<b>4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS</b>	<b>21</b>
4.1 Cenários das Simulações . . . . .	21
4.2 Grafo Modelo . . . . .	21
4.3 <i>Barabási-Albert</i> . . . . .	22
4.4 Aeroportos dos Estados Unidos . . . . .	24
4.5 <i>Powergrid</i> . . . . .	26
<b>5 CONCLUSÃO</b>	<b>34</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>38</b>

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Exemplos de grafo com os valores da medida grau. . . . .	5
2.2	Exemplos de grafo com os valores da medida grau de intermediação. . . . .	5
2.3	Exemplos de grafo com os valores da medida grau de proximidade. . . . .	6
2.4	Exemplos de grafo com os valores da medida excentricidade. . . . .	7
2.5	Conjunto de vértices com indicação dos cortes mínimos [9]. A aresta-conectividade de $\{a, b, c, d\}$ é 3. . . . .	8
2.6	Conectividade baseada em cortes de arestas [9]. . . . .	9
3.1	Grafo com discrepância entre os valores da aresta-conectividade e da vértice-conectividade. . . . .	11
3.2	Grafo modelo resultante do Algoritmo 1 com discrepância 2. . . . .	12
3.3	Transformação de grafo não orientado para orientado. . . . .	14
3.4	Transformação de grafo orientado para aplicação de corte de arestas [24]. . . . .	15
3.5	Aplicação de pesos para corte de arestas [24]. . . . .	15
3.6	Grafo Peteca ilustra diferença entre utilização de média e máximo. . . . .	18
3.7	Vértice-conectividade aplicada a grafo orientado. . . . .	20
4.1	Comparação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida de conectividade baseada em cortes de arestas no grafo modelo. . . . .	22
4.2	Relação entre a medida de conectividade baseada em vértices e a medida grau no grafo do modelo de <i>Barabási-Albert</i> . . . . .	23
4.3	Relação entre a medida de conectividade baseada em vértices e a medida grau de intermediação no grafo do modelo de <i>Barabási-Albert</i> . . . . .	24
4.4	Relação entre a medida de conectividade baseada em vértices e a medida grau de proximidade no grafo do modelo de <i>Barabási-Albert</i> . . . . .	25
4.5	Relação entre a medida de conectividade baseada em vértices e a medida excentricidade no grafo do modelo de <i>Barabási-Albert</i> . . . . .	26

4.6	Relação entre a medida de conectividade baseada em vértices e a medida de conectividade baseada em arestas no grafo do modelo de <i>Barabási-Albert</i> .	27
4.7	Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida de conectividade baseada em cortes de arestas no grafo dos aeroportos. . . . .	28
4.8	Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida grau no grafo dos aeroportos. . . . .	29
4.9	Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida grau de intermediação no grafo dos aeroportos. . . . .	29
4.10	Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida grau de proximidade no grafo dos aeroportos. . . . .	30
4.11	Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida excentricidade no grafo dos aeroportos. . . . .	30
4.12	Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida de conectividade baseada em cortes de arestas no grafo <i>powergrid</i> . .	31
4.13	Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida grau no grafo <i>powergrid</i> . . . . .	31
4.14	Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida grau de intermediação no grafo <i>powergrid</i> . . . . .	32
4.15	Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida grau de proximidade no grafo <i>powergrid</i> . . . . .	32
4.16	Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida excentricidade no grafo <i>powergrid</i> . . . . .	33

## RESUMO

As redes complexas foram propostas para modelar qualquer sistema que possua várias partes discretas que interajam entre si. Devido a essa generalidade elas são aplicadas a diversas áreas do conhecimento. Em redes complexas existe a necessidade de utilizar diversas medidas para analisar as propriedades da rede sob diferentes aspectos. Neste trabalho apresentamos as medidas de conectividade baseadas em cortes de vértices aplicadas a redes complexas. Essas medidas identificam os nodos importantes em uma rede de acordo com a conectividade dos mesmos em relação aos demais nodos. Mostramos como calcular o valor da medida que chamamos de *vértice-conectividade* dos nodos. O valor da vértice-conectividade é comparado com outras medidas como grau de intermediação, grau de proximidade, excentricidade, grau e as medidas de conectividade baseadas em cortes de arestas. Foram realizadas simulações em redes sintéticas aleatórias e redes reais. As medidas foram também analisadas em casos extremos.

## ABSTRACT

Complex networks have been proposed to model any system with many discrete parts that interact with each other. Currently complex networks are applied to a wide range of research areas. Several measures are used to quantify properties of complex networks. In this dissertation we present connectivity measures based on vertex cuts applied to complex networks. These measures identify important nodes in a network according their connectivity. We show how to calculate the value of the measure that we call vertex-connectivity of the nodes. The value of vertex-connectivity is compared with other measures such as betweenness, closeness, eccentricity, degree and connectivity measures based on edges cuts. Simulations were performed on synthetic random graphs and real networks, which were also evaluated in extreme cases.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Redes complexas têm por objetivo modelar qualquer sistema, natural ou artificial, que possua muitas partes discretas que interagem entre si. Por conta dessa generalidade, o conhecimento sobre redes complexas pode ser aplicado a diversas áreas do conhecimento como física, computação, telecomunicações, astronomia e outras [5, 10]. Também podem ser encontradas aplicações de sistemas complexos em redes reais, como, por exemplo, aquelas que modelam relações existentes entre pessoas [19, 20], redes de energia [27] e a Internet [12, 3, 2].

Dentre as aplicações de redes complexas na área da computação, está a simulação de eventos, como a propagação de vírus em uma rede [4] ou o estudo do comportamento de algoritmos de roteamento que possibilitam torná-los mais eficientes ou mais seguros [11].

A área de grafos, apesar de já amplamente estudada, conta com enorme atividade científica atualmente quando relacionada às aplicações em redes complexas. Dentre os conceitos estudados e aplicados às redes complexas estão medidas para a caracterização de redes. As medidas propostas não são individualmente suficientes para caracterizar as redes complexas e há a necessidade de considerar um conjunto de várias medidas para encontrar resultados satisfatórios [10]. É com este intuito que propomos a medida apresentada neste trabalho, a qual esperamos mostrar ser capaz de contribuir para a compreensão das redes complexas.

Dentre as medidas existentes relacionadas, algumas merecem destaque. São elas: grau, grau de intermediação (*betweenness*), grau de proximidade (*closeness*) e excentricidade. O grau é a medida mais óbvia e consiste no número de arestas incidentes ao vértice. O grau de intermediação (*betweenness*) [14] remete à quantidade de caminhos mínimos que possuem internamente o vértice avaliado. A medida grau de proximidade (*closeness*) [25] é definida como a média das distâncias entre um vértice e todos os outros vértices do

grafo. A excentricidade [17, 28] de um vértice é o máximo das distâncias desse vértice a qualquer outro vértice no grafo.

As medidas de conectividade baseadas em cortes de arestas [9] têm por objetivo encontrar um valor que determine a conectividade de um nodo em relação aos demais nodos da rede. Para tal, elas são fundamentadas no conceito de conectividade de arestas de conjuntos de nodos. Com estas medidas é possível caracterizar efeitos de falhas de enlace em redes de computadores. Em particular, elas permitem encontrar vértices que são mais difíceis de serem desconectados da rede.

A intuição das medidas de conectividade baseadas em cortes de arestas, comparada ao grau, é de que elas representam medidas mais globais do que o grau [26]. O grau nos diz quantas arestas precisamos remover para desconectar um nodo, enquanto as medidas de conectividade informam quantas arestas precisamos remover para desconectar um dado nodo do seu par mais conectado. Um exemplo prático da intuição é a situação em que dada uma rede com vários enlaces e máquinas, deseja-se adicionar, nas máquinas existentes, dois ou mais servidores. Esses servidores deverão estar muito bem conectados. Para encontrar a posição ideal dos servidores basta encontrar as máquinas com os maiores valores das medidas de conectividade baseadas em cortes de arestas.

As medidas de conectividade baseadas em cortes de arestas são parametrizadas de forma a torná-las ainda mais globais dependendo desse parâmetro. O grau do vértice determina o número de arestas que necessitam ser removidas para desconectá-lo totalmente de todos os demais. Porém, é possível que a falha de uma única aresta seja suficiente para separar esse vértice de grau alto de qualquer outro vértice específico da rede, como é o caso em uma rede com topologia de estrela. Por outro lado, uma medida de conectividade alta garante que o nodo é difícil de ser isolado de pelo menos um outro nodo da rede através de falhas de enlaces ou de nodos dependendo do tipo de conectividade escolhida.

A *vértice-conectividade*, nome dado à medida proposta neste trabalho, tem como conceito base a conectividade entre os nodos levando em conta a possibilidade de falha em outros nodos. Ela permite encontrar os nodos de maior importância em uma rede em relação a vértice-conectividade destes com outros nodos. Uma possível aplicação dessas



medidas é a seleção de um conjunto de nodos com máxima confiabilidade em relação a comunicação entre eles.

Um exemplo prático da vértice-conectividade ocorre em uma rede de computadores, na qual existe um servidor e deseja-se encontrar a melhor posição em uma das outras máquinas existentes para configurar outro servidor e que a comunicação entre estes dois servidores seja dificilmente interrompida. A ideia é encontrar a máquina com maior possibilidade de ter sua comunicação sempre disponível com o primeiro servidor caso haja falha de alguma das outras máquinas.

O algoritmo para calcular a vértice-conectividade de um dado nodo  $v$  é apresentado. Como parte do cálculo, é apresentada também uma redução do problema de cortes de vértices para cortes de arestas. Apesar de polinomial, o algoritmo para o cálculo da medida não é eficiente. Para aplicar o algoritmo em grafos de redes grandes é realizada uma seleção dos nodos de maiores graus na rede e então é aplicada a medida de conectividade baseada em cortes de vértices. Assim são analisados os nodos de maior relevância na rede.

Simulações foram realizadas em grafos de redes aleatórias sintéticas e redes reais. Elas mostram que a medida se diferencia de outras medidas relevantes, indicando pares de nodos bem conectados entre si como esperado. A rede real *powergrid* [27] mostrou resultados ainda mais interessantes, as diferenças em comparação a medida de conectividade baseada em cortes de arestas estão presentes. Mesmo com a alta complexidade de tempo da medida foi possível realizar uma simulação com os dados completos dos aeroportos dos Estados Unidos da América [6].

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 são apresentadas as medidas grau, grau de intermediação, grau de proximidade, excentricidade e aquelas baseadas em cortes de arestas. No Capítulo 3 são descritas as medidas de conectividade baseadas em cortes de vértices. No Capítulo 4 é apresentado o algoritmo para o cálculo da medida. Experimentos e comparações com as medidas citadas anteriormente são apresentados no Capítulo 5. O último capítulo apresenta as conclusões.

## CAPÍTULO 2

### MEDIDAS DE CONECTIVIDADE

Neste capítulo definimos algumas medidas importantes de centralidade de nodos de redes. Inicialmente o grau, seguido do grau de intermediação, grau de proximidade, excentricidade e por fim medidas de conectividade baseadas em cortes de arestas.

#### 2.1 Medidas Relacionadas

Dado um grafo  $G = (V, E)$  onde  $V$  é o conjunto de vértices e  $E$  o conjunto de arestas, o grau de um vértice  $v$ , denotado por  $deg(v)$ , é igual ao número de arestas incidentes ao vértice  $v$ .

O grau de intermediação ou *betweenness* [14] de um vértice utiliza para seu cálculo a quantidade de caminhos mínimos entre pares de vértices passam por ele. O grau de intermediação é calculado através da seguinte fórmula:

$$B_u = \sum_{i,j \in V} \frac{\sigma(i, u, j)}{\sigma(i, j)}$$

onde  $\sigma(i, u, j)$  é o número de caminhos mínimos entre os vértices  $i$  e  $j$  que possuem internamente o vértice  $u$  e  $\sigma(i, j)$  é o número total de caminhos mínimos entre os vértices  $i$  e  $j$ . Por convenção fazemos  $\sigma(i, j) = 1$  quando  $i = j$ .

A medida grau de proximidade ou *closeness* [25] de um vértice é definida como o inverso da média das distâncias entre o vértice e todos os outros vértices do grafo, ou seja:

$$C_u = \frac{|V| - 1}{\sum_{i \in V, i \neq u} d_G(u, i)}$$

onde  $d_G(u, i)$  é a distância entre os vértices  $u$  e  $i$ , isto é, o número de arestas de um caminho mínimo entre  $u$  e  $i$ .

A excentricidade [17, 28] de um vértice é a distância máxima do vértice aos outros vértices do grafo, definida por:

$$E_u = \max\{d_G(u, i) \mid i \neq u, i \in V\}$$

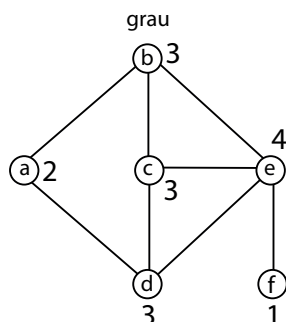


Figura 2.1: Exemplos de grafo com os valores da medida grau.

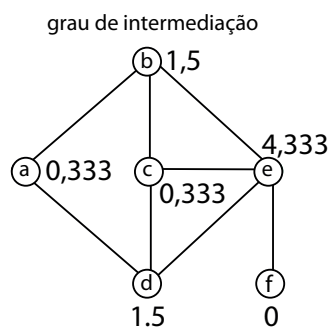


Figura 2.2: Exemplos de grafo com os valores da medida grau de intermediação.

As Figuras 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 mostram os valores das medidas de centralidade para um mesmo grafo. Na primeira, temos o grafo com os valores da medida grau dos vértices. A Figura 2.2 ilustra o grafo que apresenta o valor do grau de intermediação dos vértices. Por exemplo, o cálculo do grau de intermediação do vértice  $a$  é realizado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
B_a &= \sum_{i,j \in V} \frac{\sigma(i, a, j)}{\sigma(i, j)} \\
&= \frac{\sigma(a, a, a)}{\sigma(a, a)} + \frac{\sigma(a, a, b)}{\sigma(a, b)} + \dots + \frac{\sigma(b, a, d)}{\sigma(b, d)} + \dots + \frac{\sigma(e, a, f)}{\sigma(e, f)} + \frac{\sigma(f, a, f)}{\sigma(f, f)} \\
&= \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \dots + \frac{1}{3} + \dots + \frac{0}{1} + \frac{0}{1} \\
&= 0,333
\end{aligned}$$

Note que todos os valores omitidos no cálculo anterior são zeros, pois o único caminho mínimo que passa pelo vértice  $a$  é o caminho entre os vértices  $b$  e  $d$ . Portanto,  $\sigma(b, a, d) = 1$ . Por outro lado, existem três caminhos mínimos entre os vértices  $b$  e  $d$ , logo,  $\sigma(b, d) = 3$ .

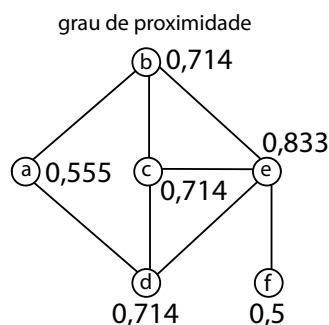


Figura 2.3: Exemplos de grafo com os valores da medida grau de proximidade.

O terceiro grafo, ilustrado na Figura 2.3, trás os valores da medida grau de proximidade. Para o vértice  $a$  o grau de proximidade é calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
C_a &= \frac{|V| - 1}{\sum_{i \in V, i \neq a} d(a, i)} \\
&= \frac{6 - 1}{d(b, a) + d(c, a) + d(d, a) + d(e, a) + d(f, a)} \\
&= \frac{5}{1 + 2 + 1 + 2 + 3} \\
&= 0.5555555555555555\dots
\end{aligned}$$

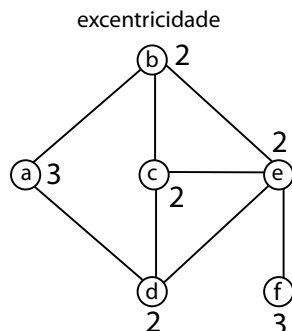


Figura 2.4: Exemplos de grafo com os valores da medida excentricidade.

O último grafo, ilustrado na Figura 2.4, mostra os valores de excentricidade. Para o vértice  $a$ , temos que o valor da excentricidade é:

$$\begin{aligned}
 E_a &= \max\{d(a, i) \mid i \neq a, i \in V\} \\
 &= \max\{d(b, a), d(c, a), d(d, a), d(e, a), d(f, a)\} \\
 &= \max\{1, 2, 1, 2, 3\} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

## 2.2 Medidas de Conectividade Baseadas em Cortes de Arestas

Descrevemos a seguir as medidas de conectividade para nodos de uma rede baseadas em cortes de arestas. Estas medidas foram apresentadas em [21] e [9] e estatísticas e experimentos em redes reais foram apresentados em [9]. O objetivo destas medidas é encontrar um valor significativo a fim de avaliar a conectividade de um nodo em relação à rede. A medida de conectividade mais óbvia é o grau do nodo. Entretanto, em muitas aplicações ela não é ideal. O conceito base para a nova medida é a definição da aresta-conectividade entre pares de nodos do grafo.

A topologia da rede é representada por um grafo não direcionado  $G = (V, E)$ , onde  $V$  são vértices que representam os nodos da rede e  $E$  é o conjunto de arestas que representam as ligações entre os nodos da rede. Seja  $X \subseteq V$ . Denota-se por  $\delta(X)$  o conjunto de arestas

$\{u, v\}$  tal que  $u \in X$  e  $v \in V \setminus X$ . Chama-se o conjunto de arestas  $C \subseteq E$ ,  $C \neq \emptyset$ , um *corte de  $G$*  se  $C = \delta(X)$  para algum  $X \subseteq V$ . Um corte  $C = \delta(X)$  *separa* dois vértices  $s$  e  $t$  se  $s \in X$  e  $t \in V \setminus X$ . Um  *$s$ - $t$ -corte mínimo* é um corte de cardinalidade mínima que separa  $s$  de  $t$ .

Em grafos sem pesos, o tamanho do corte mínimo que separa dois vértices  $s$  e  $t$  é igual ao número máximo de caminhos aresta-disjuntos que conectam  $s$  e  $t$ , definido no Teorema de Menger [22]. Utilizamos em grafos capacitados a relação dada pelo conhecido teorema do Corte Mínimo - Fluxo Máximo [18, 7]. Uma definição importante é:

**Definição 1** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo não direcionado. Considere um conjunto de vértices  $X \subseteq V$ ,  $|X| \geq 2$ . A aresta-conectividade de  $X$  em relação a  $G$  é o tamanho do corte mínimo que separa quaisquer pares de vértices em  $X$ . Denotamos a aresta-conectividade de  $X$  por  $\lambda(X)$ . Se  $|X| = 1$ , com  $X = \{v\}$ , então definimos  $\lambda(X) = \text{grau}(v)$ .*

É importante observar que a aresta-conectividade de um conjunto de nodos  $X$  é diferente da aresta-conectividade de um subgrafo induzido por  $X$ . A razão é que os cortes mínimos são obtidos de  $G$  e não do subgrafo induzido por  $X$ . O subgrafo induzido por  $X$  pode não ter arestas e ainda assim  $X$  possuir a maior aresta-conectividade. A Figura 2.5 ilustra tal situação, onde o conjunto  $X = \{a, b, c, d\}$  tem aresta-conectividade 3 e o grafo induzido por  $X$  não possui nenhuma aresta [9].

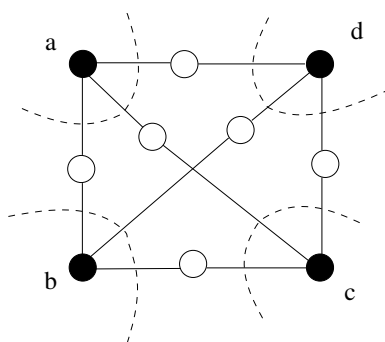


Figura 2.5: Conjunto de vértices com indicação dos cortes mínimos [9]. A aresta-conectividade de  $\{a, b, c, d\}$  é 3.

Em seguida definimos as medidas de conectividade baseadas em cortes de arestas.

**Definição 2** *O número de conectividade de índice  $i$  de um nodo  $v$ , denotado por  $\lambda_i(v)$ , é o maior valor da aresta-conectividade de um conjunto  $X \subseteq V$  satisfazendo:*

*i.*  $v \in X$ , e

*ii.*  $|X| \geq i$

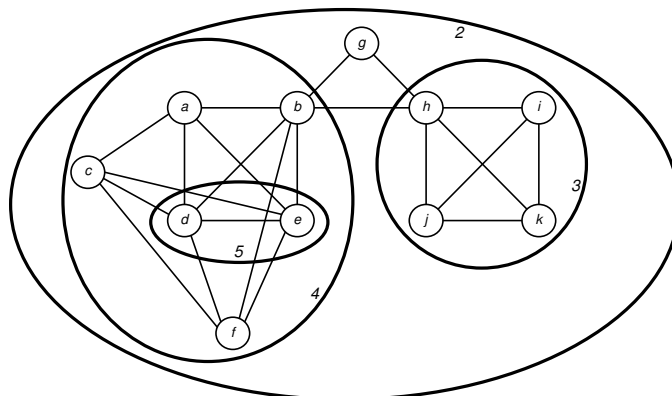


Figura 2.6: Conectividade baseada em cortes de arestas [9].

A Figura 2.6 mostra um exemplo do critério de conectividade. Os números associados aos nodos são os números de conectividade  $\lambda_2(v)$ . As áreas circuladas identificam os componentes de maior conectividade. Para calcular os números de conectividade com índice 2, é necessário verificar a máxima aresta-conectividade de conjuntos com pelo menos 2 nodos. Por exemplo,  $\lambda_2(a) = 4$  pois os nodos  $a$  e  $b$  não podem ser separados por um corte com menos do que 4 arestas e a aresta-conectividade entre  $a$  e outro nodo qualquer é no máximo 4. Quando o índice  $i$  em  $\lambda_i(v)$  é 3, somente conjuntos com pelo menos 3 nodos são considerados. Por exemplo,  $\lambda_3(d) = 4$  porque qualquer conjunto que contenha  $d$  com pelo menos três nodos tem aresta-conectividade pelo menos 4. Observe, entretanto, que  $\lambda_2(d) = 5$ .

Decorre da definição da aresta-conectividade que  $\lambda_1(v)$  é o grau de  $v$  e que  $\lambda_n(v)$ , onde  $n = |V|$ , é o tamanho do menor corte de aresta global. O número de conectividade é uma medida unificada que, conforme  $i$  aumenta de 1 a  $|V|$ ,  $\lambda_i(v)$  inicia como uma propriedade local e termina como uma propriedade global da rede. Outras propriedades dos números de conectividade são discutidas em [9].

## CAPÍTULO 3

### MEDIDAS DE CONECTIVIDADE BASEADAS EM CORTES DE VÉRTICES

As medidas baseadas em cortes de vértices têm por objetivo encontrar um valor que determine a importância de um nodo tendo em vista a sua vértice-conectividade em relação aos outros nodos da rede. A medida é baseada no conceito de conectividade de vértices. São descritas as definições das medidas de conectividade baseadas em cortes de vértices, o algoritmo para calcular a medida e variações da medida como a calculada com a média dos valores ao invés de máximo, a medida aplicada a grafos direcionados e aplicada a grafos com capacidades.

#### 3.1 Definições da Medida

A rede caracterizada é representada por um grafo não direcionado  $G = (V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto de vértices que representam os nodos dessa rede e  $E$  o conjunto de arestas que representam os enlaces entre os nodos da rede.

Definimos a seguir a *vértice-conectividade* de um conjunto de vértices [24].

**Definição 3** *Dados dois vértices  $s, t \in V$ , a vértice-conectividade entre  $s$  e  $t$ , denotada por  $\kappa(s, t)$ , é o número de caminhos vértice-disjuntos entre  $s$  e  $t$  [22].*

**Definição 4** *A vértice-conectividade de um conjunto  $X \subseteq V$  é a menor vértice-conectividade entre quaisquer pares de vértices em  $X$  e é denotada por  $\kappa(X)$ .*

A medida de conectividade de nodos baseada em vértice-conectividade está definida a seguir:

**Definição 5** *Definimos a  $i$ -vértice-conectividade de um vértice  $v$ , denotada por  $\kappa_i(v)$ , como a maior vértice-conectividade de um conjunto  $X \subseteq V$  satisfazendo:*



i.  $v \in X$ , e

ii.  $|X| \geq i$

Para ilustrar a diferença entre as medidas de conectividade baseadas em cortes de arestas e as medidas de conectividade baseadas em cortes de vértices, observe a Figura 3.1. Ela mostra um exemplo de grafo com valores de aresta-conectividade diferentes do valor da vértice-conectividade. Note que os vértices 1 e 5 são os que possuem valores com maior discrepância. Por exemplo,  $\lambda_2(1) = 5$  pois a máxima aresta-conectividade dos conjuntos da forma  $X = \{1, u\}$ ,  $u \in V - \{1\}$ , é 5. Por outro lado,  $\kappa_2(1) = 3$  pois a máxima vértice-conectividade dos conjuntos da forma  $X = \{1, u\}$ ,  $u \in V - \{1\}$ , é 3. Note que o conjunto de vértices  $\{2, 3, 4\}$  separa os vértice 1 e 5. Esse exemplo deixa claro que a vértice-conectividade se relaciona com os caminhos vértice-disjuntos e que a aresta-conectividade é relacionada com os caminhos aresta-disjuntos e que pode haver discrepância entre as duas medidas.

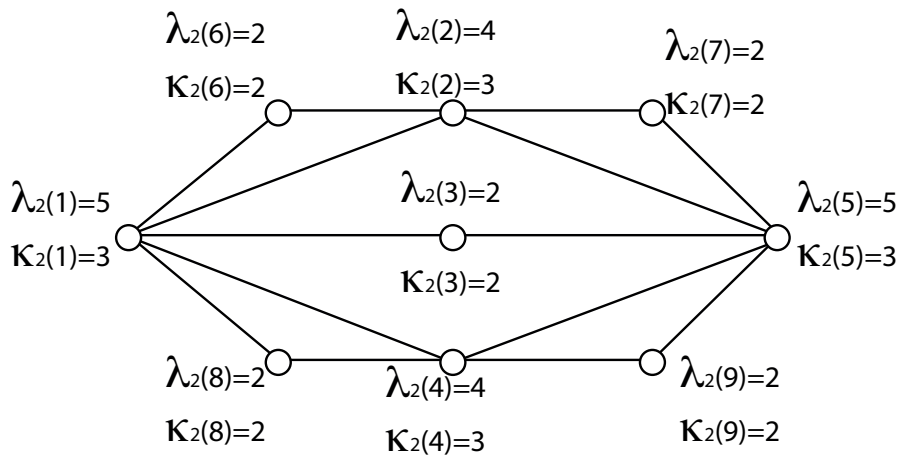


Figura 3.1: Grafo com discrepância entre os valores da aresta-conectividade e da vértice-conectividade.

**Lema 1** Dado um grafo  $G = (V, E)$  e  $v \in V$ , tem-se que  $\kappa_i(v) \leq \lambda_i(v)$  para todo  $i \geq 2$ .

Esse lema decorre do fato que todo caminho vértice-disjunto também é um caminho aresta-disjunto. Portanto, a vértice-conectividade de um par de vértices é menor do que ou igual à aresta-conectividade entre eles. O mesmo vale para a conectividade de conjuntos de vértices.

O Algoritmo 1 produz grafos com uma discrepância arbitrária entre a vértice-conectividade e a aresta-conectividade. Esses grafos generalizam parte do grafo da Figura 3.1. A ideia geral do algoritmo é a de criar arestas a fim de incrementar os caminhos aresta-disjuntos sem incrementar os caminhos vértice-disjuntos.

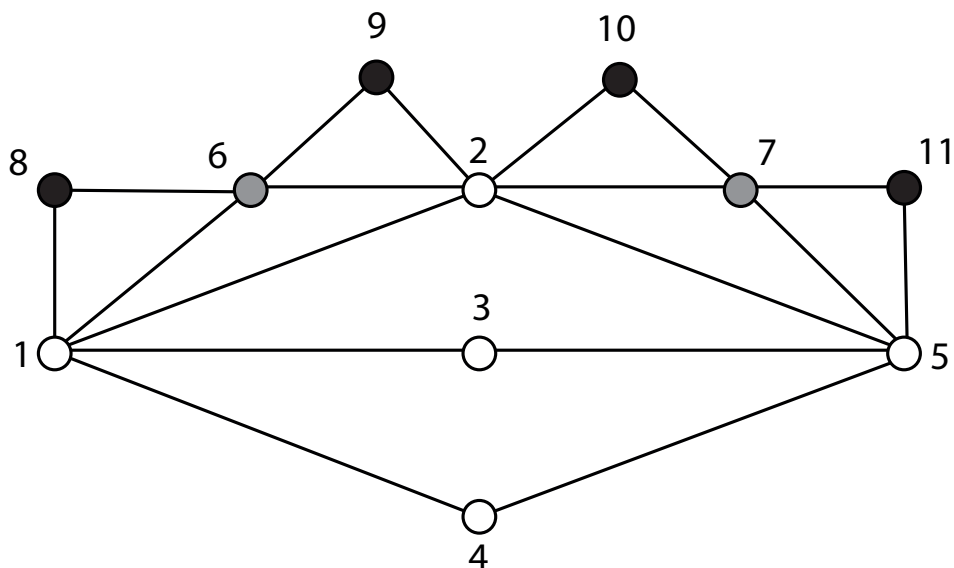


Figura 3.2: Grafo modelo resultante do Algoritmo 1 com discrepância 2.

A discrepância desejada entre as medidas é informada como entrada do algoritmo. Inicialmente, o algoritmo imprime as arestas bases do grafo modelo. São elas  $\{1, 2\}$ ,  $\{2, 5\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{3, 5\}$ ,  $\{1, 4\}$  e  $\{4, 5\}$ , os vértices que essas arestas conectam estão ilustrados na Figura 3.2 com preenchimento na cor branca. Os vértices 1, 2 e 5 são inseridos em uma lista temporária. Essa lista guarda os vértices que serão utilizados no laço seguinte.

Na linha 3 do Algoritmo 1 é definida uma variável para controlar o identificador dos vértices criados. O laço é executado o número de discrepância vezes. Dentro do laço a lista temporária é copiada para a lista atual que será utilizada no laço. A lista temporária é substituída por uma lista vazia para que seja iniciada a lista para a próxima execução do laço. Existe mais um laço que é executado um número de vezes correspondente ao tamanho da lista atual menos uma unidade, controlado pela variável  $j$ . Dentro desse segundo laço, incrementa-se o identificador do vértice criado.

Na linha 9 o Algoritmo 1 imprime a aresta que contém o vértice da lista atual com índice  $j$  e o vértice previamente criado. Na linha seguinte o algoritmo imprime a aresta

**Entrada**  $k$ , discrepância desejada

**Saída** grafo com discrepância  $k$  entre a aresta-conectividade e a vértice-conectividade

imprime arestas  $\{1, 2\}$ ,  $\{2, 5\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{3, 5\}$ ,  $\{1, 4\}$  e  $\{4, 5\}$

lista\_temporaria =  $[1, 2, 5]$

ultimo\_vertice\_utilizado = 5

**para**  $i$  de 1 até  $k + 1$  **faça**

    lista\_atual = lista\_temporaria

    lista\_temporaria =  $[]$

**para**  $j$  de 0 até  $\text{tamanho}(\text{lista\_atual}) - 1$  **faça**

        ultimo\_vertice\_utilizado = ultimo\_vertice\_utilizado + 1

        imprime aresta  $\{\text{lista\_atual}[j], \text{ultimo\_vertice\_utilizado}\}$

        imprime aresta  $\{\text{ultimo\_vertice\_utilizado}, \text{lista\_atual}[j + 1]\}$

**se**  $j == 0$  **então**

            Adicione lista\_atual[j] à lista\_temporaria

**fim se**

        Adicione ultimo\_vertice\_utilizado à lista\_temporaria

        Adicione lista\_atual[j+1] à lista\_temporaria

**fim para**

**fim para**

Algoritmo 1: Gera grafo com discrepância entre aresta-conectividade e vértice-conectividade

que contém o vértice previamente criado e o vértice de índice  $j + 1$  da lista atual. As linhas seguintes adicionam o vértice criado e o vértice índice  $j + 1$  da lista atual à lista temporária. Para que o vértice da posição 0 da lista atual também seja incluído na lista temporária é feita a condição da linha 11.

A Figura 3.2 mostra com preenchimento na cor cinza os vértices criados na primeira iteração do laço da discrepância e com preenchimento na cor preta os vértices criados na segunda iteração do laço.

### 3.2 Algoritmo para Cálculo do Valor $\kappa_2(v)$

Para encontrar a 2-vértice-conectividade de um vértice  $v$ , chamada de  $\kappa_2(v)$ , necessita-se calcular os valores de vértice-conectividade entre o vértice  $v$  e todos os demais vértices do grafo  $G$  pois é trivial provar que  $\kappa_2(v) \geq \kappa_3(v) \geq \dots \geq \kappa_{|V|}(v)$ . Depois de calculados esses valores, selecionamos a maior vértice-conectividade dos conjuntos de tamanho dois ou mais que possuam o vértice  $v$ . A lógica do cálculo do valor  $\kappa_2(v)$  pode ser ilustrada com uma tabela de valores. A Tabela 3.1 contém um exemplo para um grafo com vértices

	s	t	u	v	w
s		$\kappa(s, t)$	$\kappa(s, u)$	$\kappa(s, v)$	$\kappa(s, w)$
t	$\kappa(t, s)$		$\kappa(t, u)$	$\kappa(t, v)$	$\kappa(t, w)$
u	$\kappa(u, s)$	$\kappa(u, t)$		$\kappa(u, v)$	$\kappa(u, w)$
v	$\kappa(v, s)$	$\kappa(v, t)$	$\kappa(v, u)$		$\kappa(v, w)$
w	$\kappa(w, s)$	$\kappa(w, t)$	$\kappa(w, u)$	$\kappa(w, v)$	

Tabela 3.1: Exemplo de matriz com valores de vértice-conectividade

$s, t, u, v, w$ . Para encontrar a 2-vértice-conectividade do vértice  $s$  basta selecionarmos o maior valor da linha onde se encontra o vértice  $s$  na Tabela 3.1.

A vértice-conectividade entre dois vértices, por exemplo  $\kappa(s, t)$  é a quantidade de caminhos vértice-disjuntos entre  $s$  e  $t$ . Para encontrar a quantidade de caminhos vértice-disjuntos calculamos os cortes de vértices mínimos. Ao invés de resolver diretamente o problema dos cortes de vértices, a estratégia descrita em [24] é utilizada e consiste em reduzir o problema dos cortes de vértices ao problema dos cortes de arestas [13, 16]. Essa redução se aplica a grafos orientados. Portanto grafos não-orientados são, primeiramente, transformados em grafos orientados.

Um grafo não orientado pode ser transformado em grafo orientado através da duplicação das arestas do grafo original, fazendo com que uma aresta  $\{a, b\}$  corresponda a duas arestas direcionadas  $\{(a, b), (b, a)\}$  no novo grafo como ilustrado na Figura 3.3.

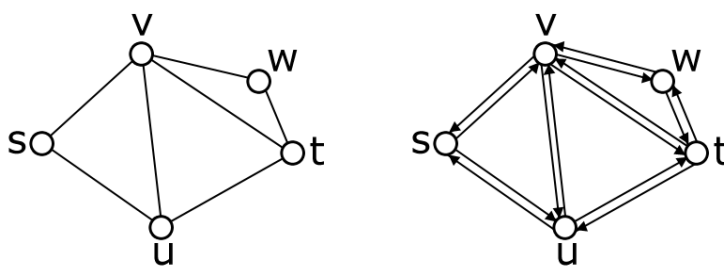


Figura 3.3: Transformação de grafo não orientado para orientado.

Para encontrar os cortes de vértices do grafo orientado, criamos um novo grafo, de forma que os cortes de arestas mínimos do novo grafo correspondam aos cortes de vértices mínimos do grafo original. Para cada vértice  $v$  do grafo original, o grafo transformado contém dois vértices,  $v'$  e  $v''$ . As arestas com origem no vértice  $v$  do grafo original têm como origem no novo grafo o vértice  $v''$ . As arestas com destino no vértice  $v$  no grafo

original têm como destino  $v'$  no grafo transformado. Por fim, adicionamos ao novo grafo arestas direcionadas  $(v', v'')$  entre todos os pares de vértices associados. A Figura 3.4 ilustra a transformação das arestas.

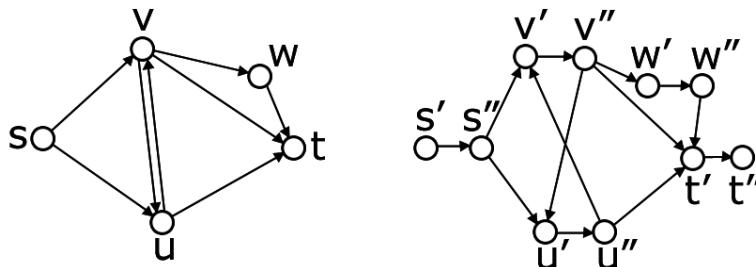


Figura 3.4: Transformação de grafo orientado para aplicação de corte de arestas [24].

As arestas do tipo  $(v', v'')$  recebem capacidade de valor 1 e as demais arestas recebem capacidade  $|V| - 1$ , sendo  $V$  o conjunto de vértices do grafo, como ilustra a Figura 3.5. Essas capacidades garantem que os cortes de arestas de capacidade mínima utilizem somente as arestas que correspondem aos vértices do grafo original, o que justifica a redução entre os problemas.

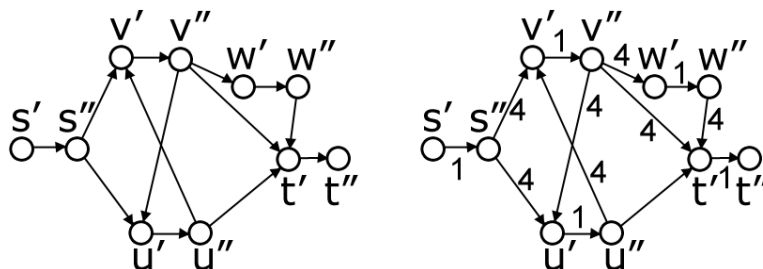


Figura 3.5: Aplicação de pesos para corte de arestas [24].

Nesse novo grafo aplicamos o algoritmo de fluxo máximo [15] para encontrar o corte mínimo de arestas entre pares de vértices  $s$  e  $t$ . Para que a transformação encontre corretamente a vértice-conectividade, que foi definida em termos de caminhos vértice-disjuntos entre  $s$  e  $t$ , ainda é necessário tratar o caso em que a aresta  $(s, t) \in E$ . Nesse caso, a aresta  $(s'', t')$  recebe capacidade 1 para que seja incluída no corte mínimo. Assim, o valor do fluxo máximo entre  $s''$  e  $t'$  no grafo transformado corresponde à vértice-conectividade entre  $s$  e  $t$  no grafo original.

Para calcular  $\kappa_2(v)$  utilizamos a transformação descrita acima entre  $v$  e todos os demais vértices do grafo. A máxima vértice-conectividade encontrada é o valor  $\kappa_2(v)$ .

A complexidade de tempo do algoritmo para o cálculo de 2-vértice-conectividade requer o cálculo de  $|V| - 1$  fluxos máximos para cada vértice. O cálculo do fluxo máximo é facilitado pela estrutura do grafo transformado que possui vértices que são o destino de apenas uma aresta ou são a origem de apenas uma aresta. Nesse caso, o algoritmo de Dinitz tem complexidade de tempo de  $O(|E|\sqrt{|V|})$ , sendo  $E$  o conjunto de arestas do grafo [24]. Logo, a complexidade de tempo para o cálculo de  $\kappa_2(v)$  é  $O(|V||E|\sqrt{|V|})$ .

Os valores de  $\kappa_i(v)$  para  $i > 2$  podem ser calculados considerando conjuntos de tamanho  $i$ , porém tal abordagem não é eficiente. Não conhecemos algoritmos eficientes para calcular  $\kappa_i(v)$  em geral, ao contrário do que ocorre com  $\lambda_i(v)$  que pode ser calculado em tempo polinomial para qualquer valor de  $i$ .

O algoritmo 2 mostra o pseudo-código que calcula o valor da 2-vértice-conectividade de um vértice  $v$ . As entradas do algoritmo são:  $v$  o vértice para o qual deseja-se encontrar o valor da 2-vértice-conectividade,  $V$  o conjunto dos vértices do grafo e  $E$  o conjunto de arestas do grafo. Inicia-se o valor de  $\kappa$  como zero, valor mínimo da medida. Então é realizada a transformação nas arestas do grafo não direcionado, cada aresta não direcionada é substituída por duas arestas direcionadas, uma para cada sentido. Então é feito um laço com todos os vértices do grafo, exceto  $v$ . Dentro desse laço as arestas são transformadas com a estratégia [24] para realizar o corte de arestas a fim de obter o corte de vértices entre o vértice  $v$  e o vértice tratado no laço. Como desejamos o máximo como valor da vértice-conectividade, o valor do corte então calculado é comparado com o valor previamente obtido. O valor antigo é substituído pelo novo valor se esse for maior do que o primeiro. Depois de finalizado o laço, o valor guardado é o maior valor de vértice-conectividade entre  $v$  e todos os outros vértices do grafo, sendo esse o valor final da vértice-conectividade de  $v$ .

Uma otimização na implementação do Algoritmo 2 foi realizada com a propriedade do Lema 1. Ao informar os valores da medida de conectividade baseada em cortes de arestas, a implementação não executa o restante dos fluxos ao encontrar um corte mínimo de vértices igual ao valor da medida de conectividade baseada em cortes de arestas, pois tal valor já é o valor máximo, sendo assim desnecessário encontrar outros valores.

**Entrada**  $v$ , vértice a ser avaliado  
**Entrada**  $V$ , conjunto de vértices do grafo  
**Entrada**  $E$ , conjunto de arestas do grafo  
**Saída** cálculo da 2-vértice-conectividade de um vértice  $v$

- 1:  $2\_kappa\_v = 0$
- 2:  $E\_orientado = ORIENTA\_ARESTAS(E)$
- 3: **para todo**  $i \in \{V - v\}$  **faça**
- 4:    $E\_transformado = PREPARA\_ARESTAS\_PARA\_CORTE(v, E\_orientado)$
- 5:    $2\_kappa\_v\_i = CORTE\_ARESTA(v, i, E\_transformado)$
- 6:   **se**  $2\_kappa\_v\_i > 2\_kappa\_v$  **então**
- 7:      $2\_kappa\_v = 2\_kappa\_v\_i$
- 8:   **fim se**
- 9: **fim para**
- 10: **devolva**  $2\_kappa\_v$

Algoritmo 2: Realiza o cálculo da 2-vértice-conectividade de um vértice  $v$  em um grafo

### 3.3 Variações da Medida

Nesta seção serão descritas variações para as medidas de conectividade baseadas em cortes de vértices. São elas: o cálculo da medida com a média ao invés de máximo, o cálculo para grafos orientados e o cálculo para grafos com capacidades.

#### 3.3.1 Utilização da Média ao Invés do Máximo

A Definição 5 diz que para encontrar a  $i$ -vértice-conectividade de um dado vértice  $v$  precisamos selecionar a maior vértice-conectividade entre  $v$  e os outros vértices. Com essa seleção temos que a medida não considera a variação dos valores de vértice-conectividade entre os vértices. Por exemplo, se apenas um dos valores de vértice-conectividade entre  $v$  e todos os outros vértices for excepcionalmente grande, o valor final da  $i$ -vértice-conectividade não será influenciado por esse comportamento.

Um exemplo prático que mostra o lado negativo dessa decisão é quando dada uma rede com várias máquinas existe um par bem conectado entre si, entretanto os nodos desse par não estão bem conectados com nenhum outro nodo. Em contra partida, temos um outro nodo que está bem conectado com vários porém sua maior vértice-conectividade não é maior do que os nodos do par previamente citados. Para que este nodo bem conectado seja destacado e tenha valor de vértice-conectividade maior que o valor do par podemos

utilizar a média ao invés de selecionar o maior valor e dessa forma considerar a flutuação dos valores de vértice-conectividade entre o nodo avaliado e todos os outros nodos da rede.

A Figura 3.6 ilustra o exemplo descrito, sendo os nodos  $a$  e  $b$  as máquinas do par bem conectado. O nodo bem conectado com vários nodos da rede é o  $c$ .

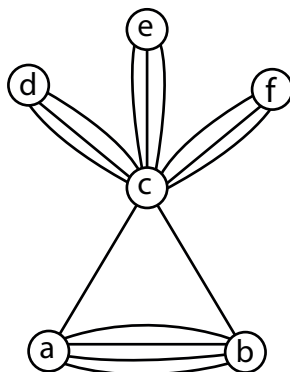


Figura 3.6: Grafo Peteca ilustra diferença entre utilização de média e máximo.

Segue a definição da medida de vértice-conectividade utilizando a média.

**Definição 6** Definimos a *vértice-conectividade média* de um vértice  $v$ , denotada por  $\bar{\kappa}(v)$ , como:

$$\bar{\kappa}(v) = \frac{\sum_{i \in V, i \neq v} \kappa(v, i)}{|V| - 1}$$

Um exemplo de como o cálculo funciona para ambas situações para o grafo da Figura 3.6 é ilustrado na Tabela 3.2.

### 3.3.2 Grafos Orientados

Para realizar o cálculo das medidas de conectividade baseadas em cortes de vértices com grafos orientados é necessário excluir uma etapa do cálculo já explicado com grafos não orientados.

No algoritmo do cálculo de  $\kappa$  temos a etapa na qual, para encontrar os valores de vértice-conectividade entre dois nodos, o grafo dado, que no caso não é orientado, é trans-



	a	b	c	d	e	f	$\kappa_2$	$\bar{\kappa}$
a		5	2	1	1	1	5	2
b	5		2	1	1	1	5	2
c	2	2		3	3	3	3	2.6
d	1	1	3		1	1	3	1.4
e	1	1	3	1		1	3	1.4
f	1	1	3	1	1		3	1.4

Tabela 3.2: Exemplo de matriz com valores de vértice-conectividade com utilização da média

**Entrada**  $v$ , vértice a ser avaliado  
**Entrada**  $V$ , conjunto de vértices do grafo orientado  
**Entrada**  $E_{orientado}$ , conjunto de arestas do grafo orientado  
**Saída** cálculo da 2-vértice-conectividade de um vértice  $v$  em um grafo orientado

- 1:  $2\_kappa\_v = 0$
- 2: # Aqui estaria a transformação de não orientado para orientado
- 3: **para todo**  $i \in \{V - v\}$  **faça**
- 4:    $E\_transformado = PREPARA\_ARESTAS\_PARA\_CORTE(v, E\_orientado)$
- 5:    $2\_kappa\_v\_i = CORTE\_ARESTA(v, i, E\_transformado)$
- 6:   **se**  $2\_kappa\_v\_i > 2\_kappa\_v$  **então**
- 7:      $2\_kappa\_v = 2\_kappa\_v\_i$
- 8:   **fim se**
- 9: **fim para**
- 10: **devolva**  $2\_kappa\_v$

Algoritmo 3: Realiza o cálculo da 2-vértice-conectividade de um vértice  $v$  em um grafo orientado

formado em um grafo orientado com a substituição das arestas não orientadas por duas arestas orientadas, uma para cada sentido. Ao invés de transformar o grafo, temos que o grafo inicial já é orientado e portanto não há a necessidade de realizar a transformação para então calcular os valores de vértice-conectividade entre os nodos.

O pseudo-código do Algoritmo 3 realiza o cálculo da 2-vértice-conectividade em grafos orientados. Os passos são os mesmos do Algoritmo 2, exceto a linha 2 que no Algoritmo 2 realiza a transformação das arestas não direcionadas para arestas direcionadas. No Algoritmo 3 essa linha não realiza essa tarefa pois a entrada  $E_{orientado}$  já possui o conjunto de arestas direcionadas com as quais são desenvolvidos os cálculos necessários.

A medida de conectividade baseada em cortes de vértices aplicada a grafos orientados deixa de ser simétrica. Em grafos orientados os caminhos vértice-disjuntos entre dois

vértices não são simétricos e portanto  $\kappa(u, v) \neq \kappa(v, u)$  para grafos orientados.

A Figura 3.7 mostra a medida aplicada em um grafo orientado e a situação em que não há simetria da medida.

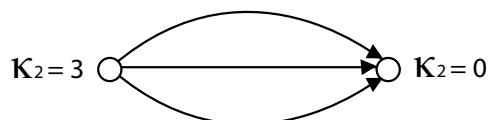


Figura 3.7: Vértice-conectividade aplicada a grafo orientado.

### 3.3.3 Grafos com Capacidades

Os grafos com capacidades nas arestas também podem ser utilizados no cálculo do valor da vértice-conectividade. Parte do cálculo da vértice-conectividade de um determinado vértice  $v$  é calcular a vértice-conectividade entre dois vértices, por exemplo  $v$  e  $t$ . Neste passo, caso a aresta  $(v, t) \in E$  é necessário tratar de forma especial. No algoritmo sem capacidades, a aresta  $(v'', t')$  recebe capacidade 1 para que seja incluída no corte mínimo de vértices na transformação. Ao invés de fazer este tratamento, com grafos de capacidades nas arestas, a aresta  $(v, t)$  é excluída do grafo que retorna o corte mínimo e depois a capacidade da aresta  $(v, t)$  é somada ao valor de corte mínimo, esse total é o valor  $\kappa(v)$ .

## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Nesta seção apresentamos alguns resultados experimentais. O algoritmo que calcula as medidas de conectividade baseadas em cortes de vértices foi implementado em linguagem *C++*. Um *script* na linguagem *Python* foi utilizado para executar os experimentos e gerar os gráficos.

#### 4.1 Cenários das Simulações

Primeiro experimento foi realizado com um grafo modelo gerado de 131 nodos. O segundo experimento foi realizado com um grafo do modelo de rede de *Barabási-Albert* [2, 1] com 100 nodos. O terceiro experimento foi realizado com uma rede real de aeroportos dos Estados Unidos [6] com 332 nodos. O quarto experimento foi realizado com uma rede real de distribuição de energia (*powergrid*) [27] com 4941 nodos, sendo analisados os 300 nodos de maior grau.

#### 4.2 Grafo Modelo

Para ilustrar a diferença entre as medidas de conectividade baseadas em cortes de vértices e as medidas de conectividade baseadas em vértices foi criado o grafo modelo. O grafo modelo é gerado com o Algoritmo 1. Esse grafo tem como objetivo demonstrar que as medidas de conectividade baseadas em arestas e as medidas de conectividade baseadas em vértices podem ter discrepâncias grandes. Portanto apenas o gráfico com a comparação das medidas é interessante para esse grafo, representado pela Figura 4.1. Como já esperado, a figura traz a diferenciação das medidas, tendo como valor máximo de diferença 6, entre os pontos extremos 3 e 9.

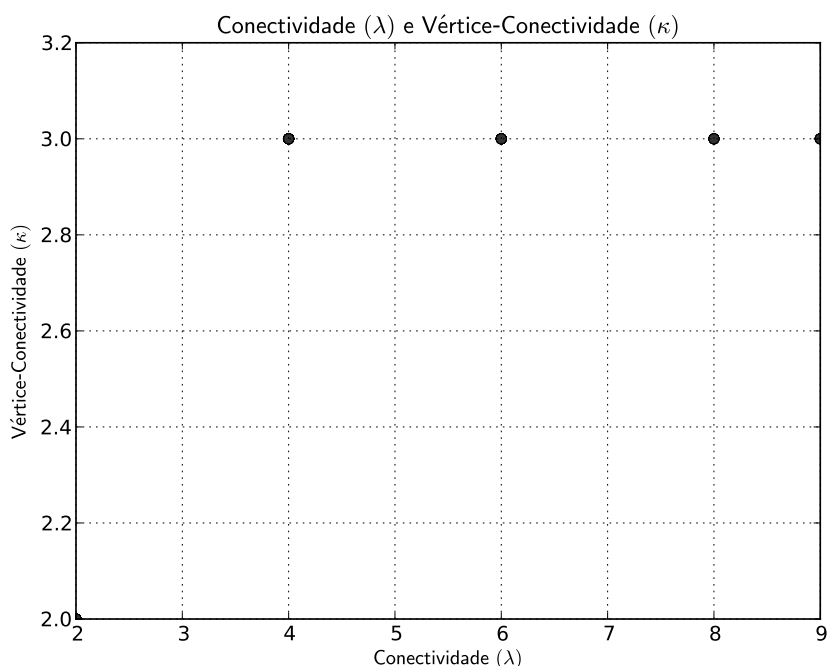


Figura 4.1: Comparação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida de conectividade baseada em cortes de arestas no grafo modelo.

### 4.3 *Barabási-Albert*

Utilizamos nos experimentos um grafo do modelo de rede de *Barabási-Albert* [2]. O modelo *Barabási-Albert* define um algoritmo que gera redes da classe *power-law*, livres de escala [8, 23]. O modelo possui dois importantes conceitos: o de crescimento e de preferência de conexão. O crescimento é o aumento do número de nodos na rede ao passar do tempo. A preferência de conexão é calculada da seguinte maneira: quanto maior é o grau do nodo, maior é a probabilidade dele receber novas conexões.

A rede utilizada nos experimentos tem 100 nodos. Apresentamos a seguir os gráficos das correlações entre a medida proposta e outras medidas de conectividade.

A Figura 4.2 ilustra a diferença entre a medida proposta e o grau. O eixo x corresponde aos valores obtidos da medida grau e o eixo y corresponde aos valores obtidos com as medidas de conectividade baseadas em vértices. É possível perceber que para diversos pontos os valores do grau e da medida resultam próximos. Entretanto, em particular para o vértice de maior grau, a diferença é grande. Isso se deve ao fato de que o modelo utilizado gera várias conexões do primeiro nodo com o resto da rede. Nesse caso específico, enquanto

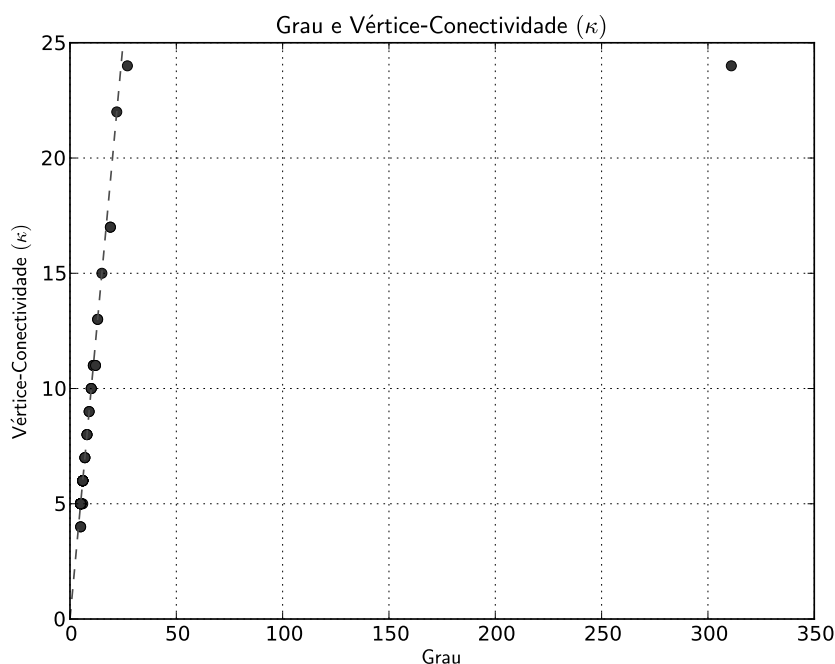


Figura 4.2: Relação entre a medida de conectividade baseada em vértices e a medida grau no grafo do modelo de *Barabási-Albert*.

o grau chega a 311,  $\lambda_2$  não passa de 24. É importante lembrar esse é um multigrafo, que possui arestas múltiplas, e portanto é possível que o valor do grau de um nodo seja maior do que a quantidade de nodos no grafo. A medida proposta nos revela que existe também outro nodo muito importante na rede, que possui conectividade 22, e não somente o primeiro.

A Figura 4.3 mostra a relação entre a medida de conectividade proposta e o grau de intermediação e revela uma diferença ainda maior para o primeiro nodo. Isso se deve ao fato de haver um único valor muito alto gerado pelo grau de intermediação.

A relação entre a medida de conectividade baseada em vértices e a medida grau de proximidade é ilustrada na imagem 4.4. A medida grau de proximidade tem todos os valores entre 0 e 1.

A excentricidade é um valor praticamente constante no grafo analisado. No caso, temos um nodo de valor 1 e todos os outros valores são 2, como pode ser visto no gráfico da Figura 4.5.

Temos pequenas diferenças que podemos notar no gráfico da Figura 4.6 entre as medi-

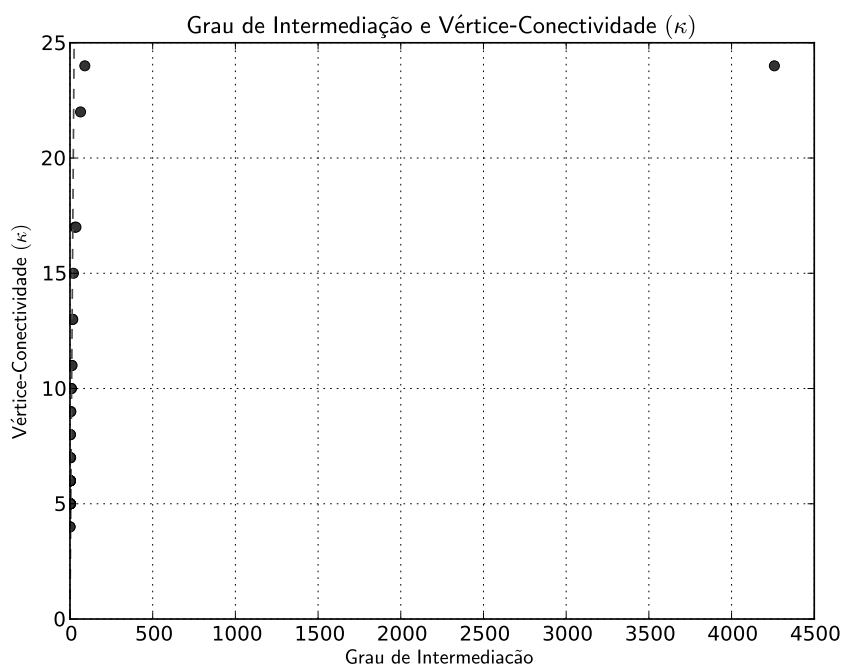


Figura 4.3: Relação entre a medida de conectividade baseada em vértices e a medida grau de intermediação no grafo do modelo de *Barabási-Albert*.

das de conectividade baseadas em cortes de arestas e as medidas propostas. A diferença entre os valores médios é pequena mas está presente.

#### 4.4 Aeroportos dos Estados Unidos

A rede de 332 nodos, utilizadas nos experimentos seguintes, faz parte de uma base de grafos em [6]. Esta rede representa a malha de aeroportos dos Estados Unidos, sendo os vértices os próprios aeroportos enquanto as arestas representam os voos que interligam os aeroportos.

Ao realizar a simulação levando em conta a propriedade do Lema 1 que diz que  $\kappa(v) \leq \lambda(v)$ , tivemos uma redução de 83413 cálculos de fluxos, cerca 75.67% de ganho nesse grafo.

Na Figura 4.7, que mostra a relação entre valores de  $\kappa$  e  $\lambda$  para o grafo dos aeroportos, podemos notar vários pontos de diferença entre as medidas. As diferenças ocorrem principalmente na parte superior do grafo, onde estão os nodos de maior grau do grafo. Existem também diferenças entre nodos de menor grau, como mostram alguns pontos entre valores 10 e 20 de ambas medidas.

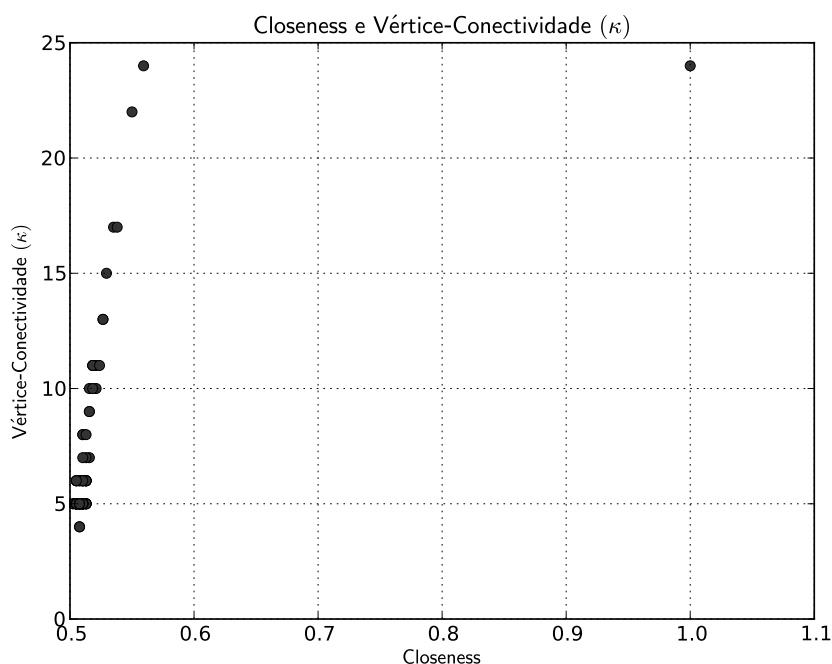


Figura 4.4: Relação entre a medida de conectividade baseada em vértices e a medida grau de proximidade no grafo do modelo de *Barabási-Albert*.

As diferenças, cerca de 24% dos pontos, são visíveis na Figura 4.7 pois são os pontos que diferem da linha pontilhada onde  $\kappa(v) = \lambda(v)$ . Além desses pontos que são numericamente diferentes, também deve-se considerar os que continuam iguais, pois esses permitem inversões de ordem entre as medidas. Por exemplo, dois pontos  $a$  e  $b$ , onde  $\kappa(a) = 90$ ,  $\lambda(a) = 90$ ,  $\kappa(b) = 80$ ,  $\lambda(b) = 100$ , a propriedade do Lema 1 se mantém em ambos os casos, entretanto ao ordenar por  $\kappa$  temos que  $a > b$ , e por  $\lambda$  temos que  $b > a$ .

A Figura 4.11 mostra que apesar de alguns aeroportos terem muitas conexões, eles tem quantidade de caminhos vértice-disjuntos semelhantes a de aeroportos com muito menos conexões. Por exemplo o vértice com grau 139 tem  $\kappa = 83$  e o vértice com grau 94 tem  $\kappa = 82$ .

A relação da medida com o grau de intermediação, representado na Figura 4.9 nos mostra que existem aeroportos menores, com grau menor, que possuem conexões que ligam aeroportos grandes, resultando em valores de grau de intermediação grandes.

O grau de proximidade em relação a medida de conectividade baseada em cortes de vértices é ilustrado na Figura 4.11. Notamos que a correlação entre as medidas para esse

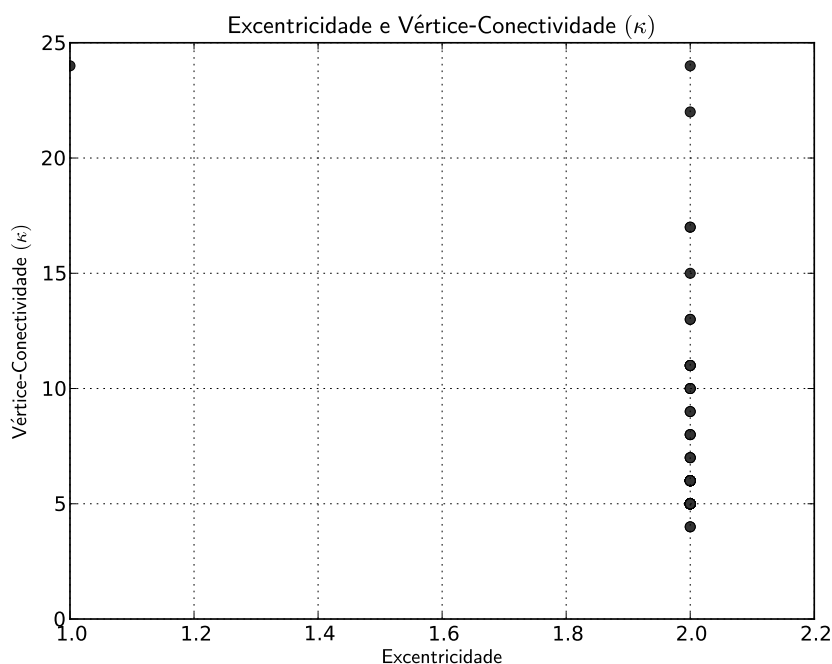


Figura 4.5: Relação entre a medida de conectividade baseada em vértices e a medida excentricidade no grafo do modelo de *Barabási-Albert*.

grafo é grande e forma uma curva no gráfico.

Na Figura 4.11 é fácil perceber que existe um vértice que com 3 passos chega a todos os outros e portanto os valores se distribuem de forma discreta em torno dos valores 4 a 6. O máximo é 6 pois existem no máximo 3 passos até o vértice central e mais 3 para o vértice mais longe do central.

## 4.5 *Powergrid*

A rede *powergrid* possui 4941 nodos e representa a rede de distribuição de energia da parte ocidental dos Estados Unidos [27]. Foi realizada a análise dos 300 nodos de maior grau dentre os 4941 nodos da rede. Os nodos representam os transformadores, subestações e geradores, e os enlaces as linhas de transmissão de alta tensão.

Uma propriedade dessa rede é ser esparsa e por conseqüência ela possui uma quantidade menor de arestas em relação a outros grafos que representam redes reais.

Também realizamos simulações com a implementação que considera a propriedade do Lema 1 que diz que  $\kappa(v) \leq \lambda(v)$ , tivemos uma redução de 1423440 fluxos do total de



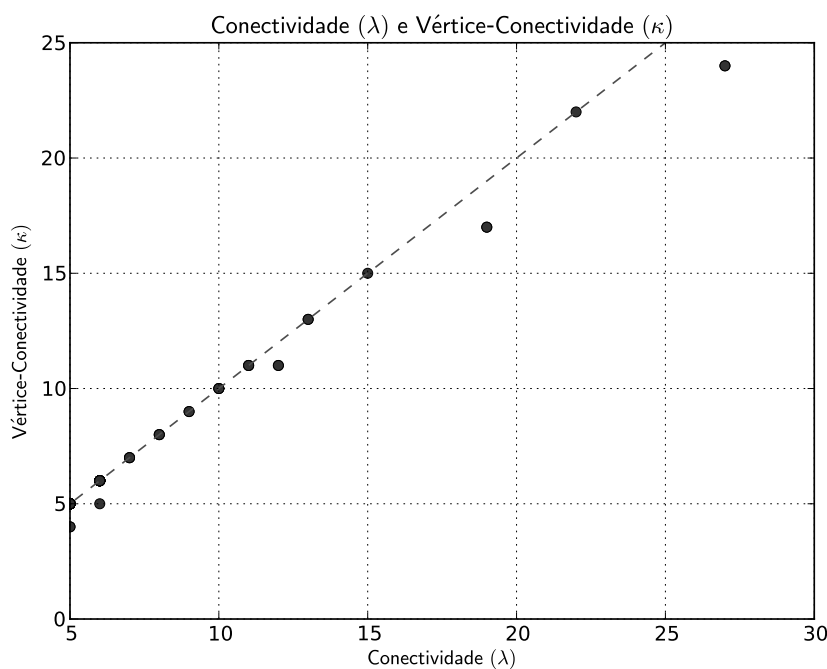


Figura 4.6: Relação entre a medida de conectividade baseada em vértices e a medida de conectividade baseada em arestas no grafo do modelo de *Barabási-Albert*.

1482300, representando cerca de 96.03% de ganho para esse grafo.

A Figura 4.12 mostra a diferença entre as medidas de conectividade baseadas em cortes de vértices e as medidas de conectividade baseadas em cortes de arestas. Notamos várias inversões de ordem nas medidas, assim como diferenças grandes entre os valores delas, a exemplo de dois pontos na parte direita do gráfico, o primeiro com  $\kappa(1) = 9$ . e  $\lambda(1) = 9$ , o segundo com  $\kappa(2) = 8$ . e  $\lambda(2) = 12$ .

É quase inexistente a correlação entre a medida grau e a medida de conectividade baseada em cortes de vértices nesse grafo, como ilustra a Figura 4.16.

Pode-se observar o comportamento no formato esparso na Figura 4.14, na qual evidencia os nodos espalhados pela rede, com alguns poucos nodos centrais e muitos nodos com o mesmo valor para grau de intermediação. A correlação entre as medidas é mínima.

A correlação entre grau de proximidade e a medida de conectividade baseada em cortes de vértices também é muito baixa para esse grafo, como evidencia a Figura 4.16. Novamente o comportamento esparso fica visível com valores de grau de proximidade bem distribuídos.

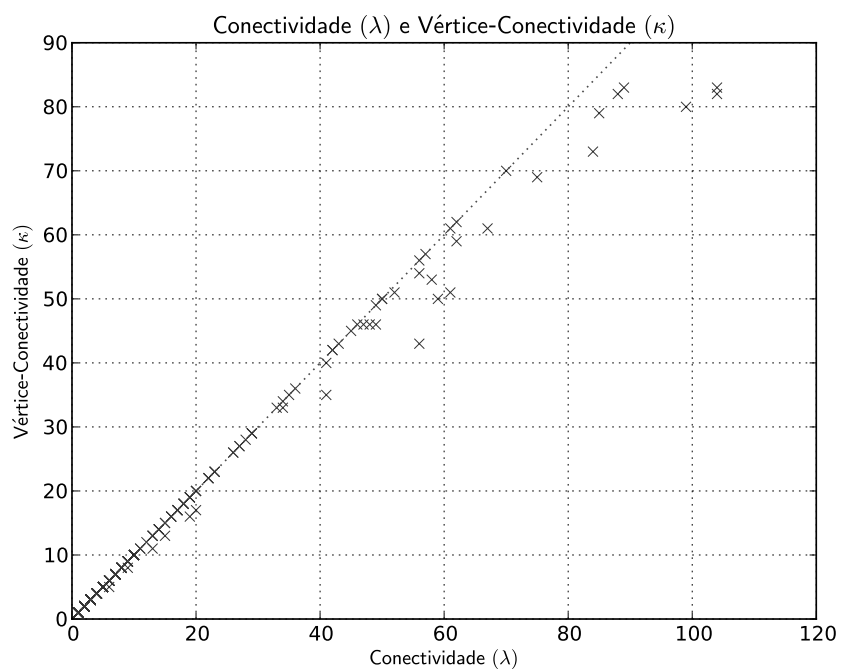


Figura 4.7: Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida de conectividade baseada em cortes de arestas no grafo dos aeroportos.

Outra vez sem praticamente nenhuma correlação, a Figura 4.16 traz as medidas de conectividade baseadas em cortes de vértices e a excentricidade. Podemos notar que os nodos mais centrais, nodos com os menores valores de excentricidade, não possuem os maiores valores de  $\kappa$ .

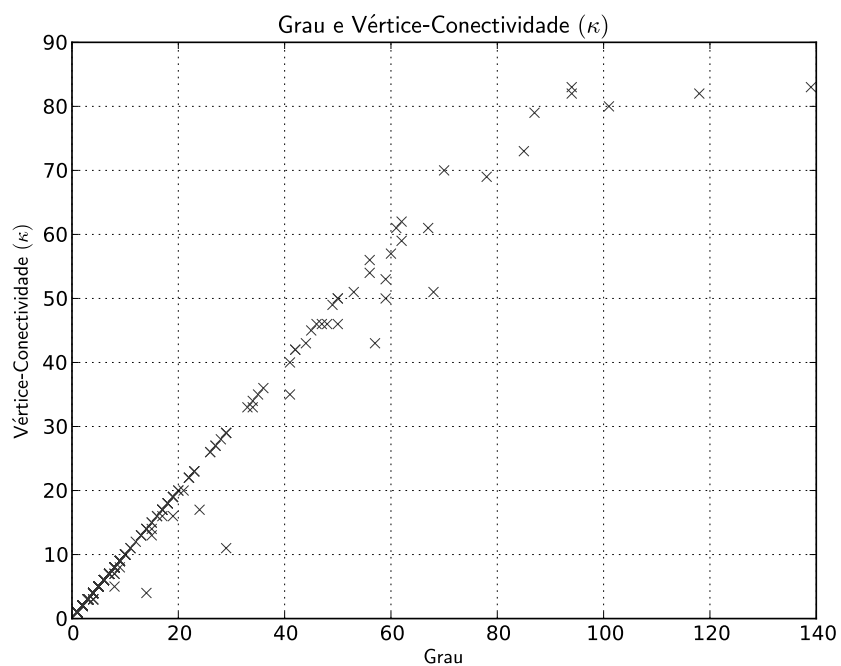


Figura 4.8: Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida grau no grafo dos aeroportos.

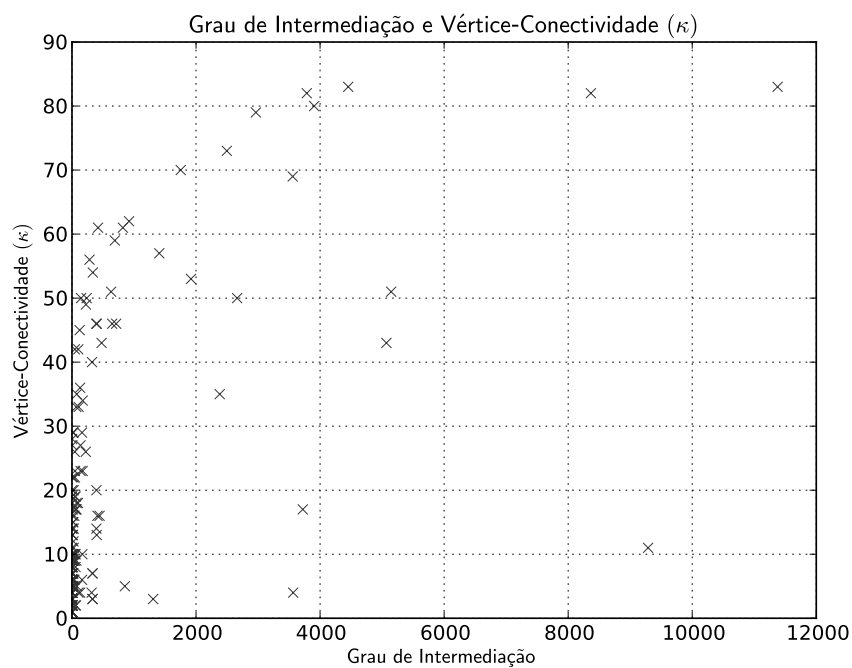


Figura 4.9: Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida grau de intermediação no grafo dos aeroportos.

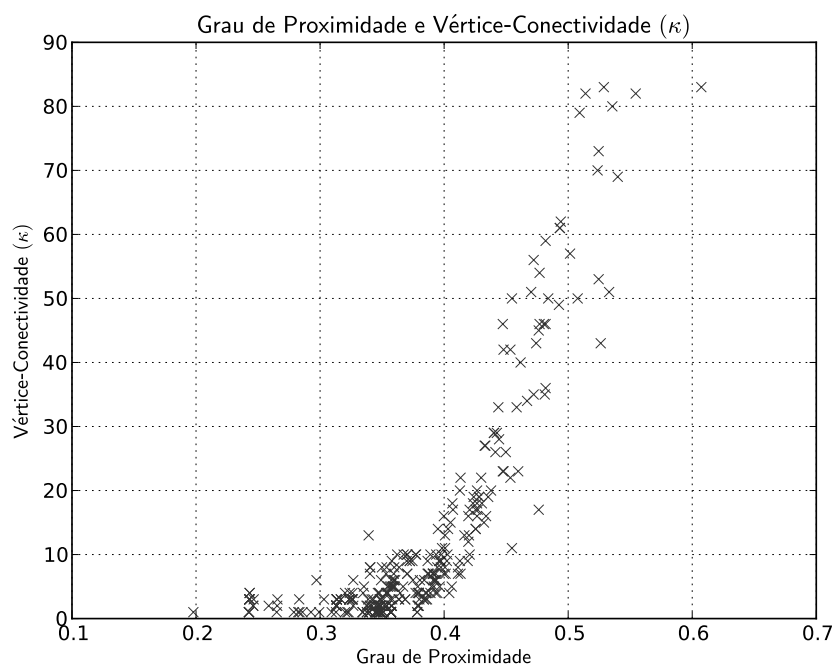


Figura 4.10: Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida grau de proximidade no grafo dos aeroportos.

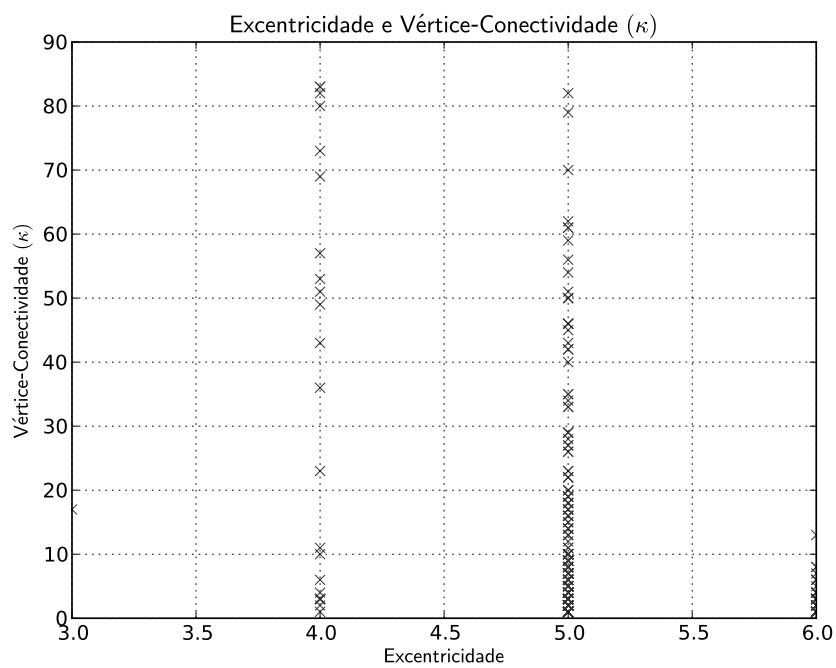


Figura 4.11: Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida excentricidade no grafo dos aeroportos.

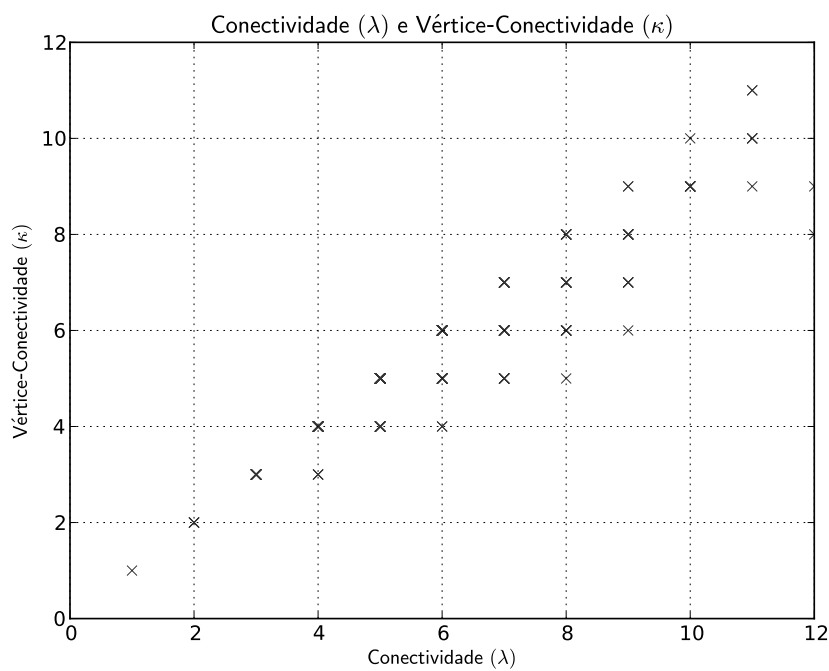


Figura 4.12: Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida de conectividade baseada em cortes de arestas no grafo *powergrid*.

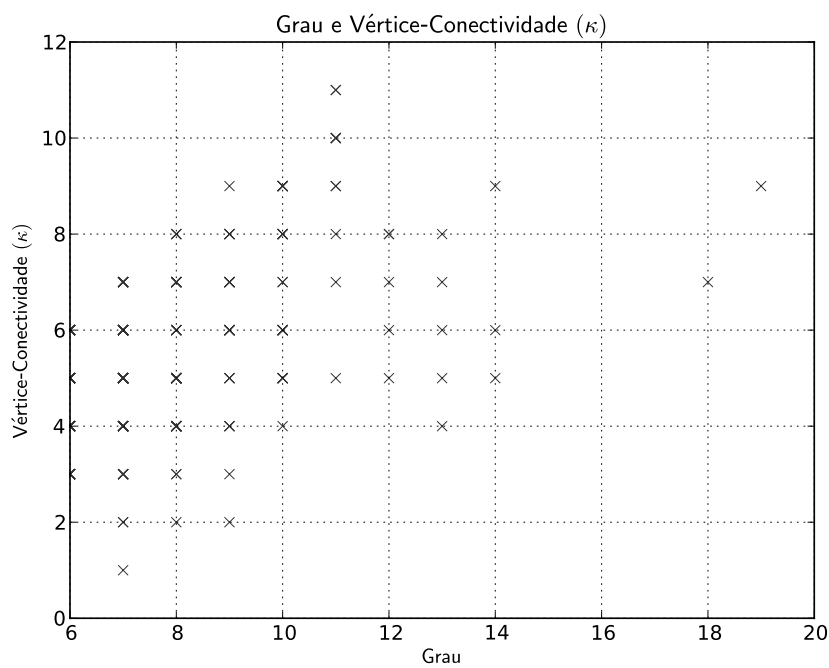


Figura 4.13: Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida grau no grafo *powergrid*.

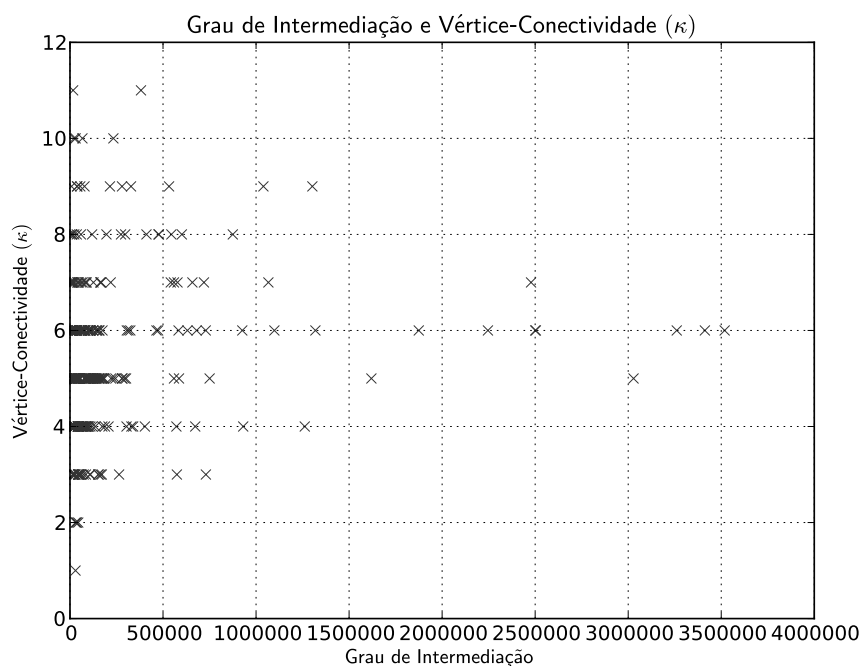


Figura 4.14: Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida grau de intermediação no grafo *powergrid*.

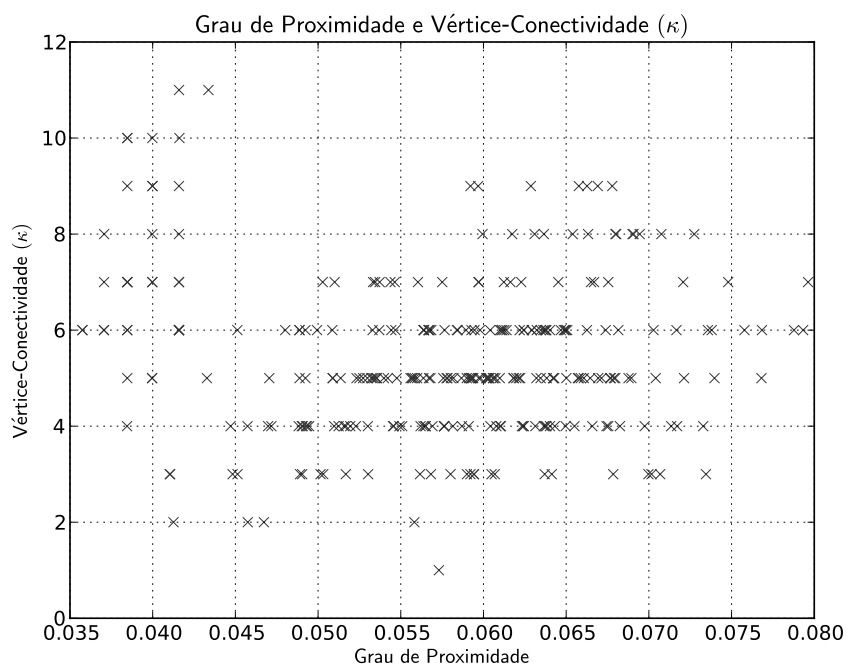


Figura 4.15: Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida grau de proximidade no grafo *powergrid*.

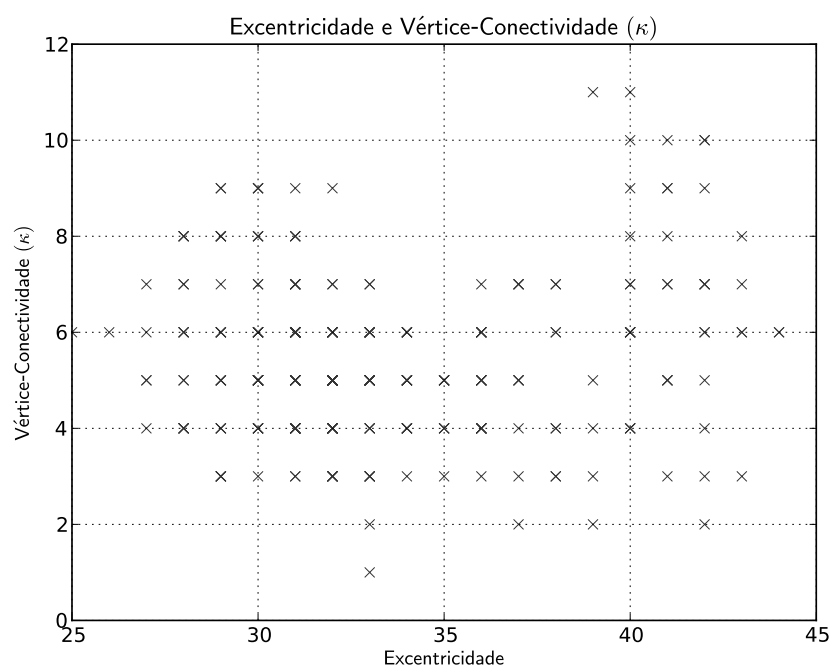


Figura 4.16: Relação entre a medida de conectividade baseada em cortes de vértices e a medida excentricidade no grafo *powergrid*.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÃO

Nesse trabalho foram propostas medidas de conectividade baseadas em cortes de vértices. As medidas propostas podem contribuir para caracterização de redes complexas, uma vez que, para caracterizá-las, é necessária a seleção de um conjunto de medidas.

A  $i$ -vértice-conectividade de um vértice  $v$ , denotada como  $\kappa_i(v)$ , determina o valor da conectividade baseada em cortes de vértices para um vértice  $v$ . Essas medidas caracterizam os efeitos de falhas de nodos em uma rede e fundamenta-se no cálculo cortes de vértices. Para calcular o corte de vértices utilizamos uma redução do problema de cortes de vértices ao problema de cortes de arestas.

Além de definir formalmente a medida, esta foi implementada em linguagem C para simulações. Foi realizada uma otimização na implementação com a propriedade  $\kappa_i(v) \leq \lambda_i(v)$  que resultou em um alto ganho de desempenho na execução. O algoritmo que gera grafos sintéticos também foi implementado para que fossem realizadas simulações com foco na discrepância entre as medidas.

Outras contribuições foram a definição da medida de conectividade baseada em cortes de vértices com a utilização da média ao invés do máximo, a aplicação do cálculo para grafos orientados e a utilização de grafos com capacidades nas arestas no cálculo da vértice-conectividade.

Foram realizadas simulações em grafos sintéticos, como o grafo modelo e o grafo do modelo de *Barabási-Albert*, e em grafos de redes reais, o dos aeroportos dos Estados Unidos e o do *powergrid*. Observamos que o grau e o grau de intermediação (*betweenness*) amplificam casos extremos e raros que nem sempre são relevantes. Observa-se ainda nas simulações que a diferenciação entre as medidas de conectividade baseadas em cortes de arestas e as medidas de conectividade baseadas em cortes de vértices é presente. No grafo dos aeroportos a diferença foi pouco mais do que 24%. Na rede *powergrid* as inversões



de ordem entre os valores das medidas são presentes porém pequenas, a quantidade de diferenças entre as medidas foi cerca de 4% do valor total dos pontos calculados.

A desvantagem da medida proposta é o alto custo computacional do seu cálculo. Entre os trabalhos futuros está a busca de alternativas mais eficientes para seu cálculo. Um estudo mais aprofundado das características das redes que levam a uma maior discrepância nas medidas baseadas em cortes de vértices e arestas também merece atenção. Por fim, são diversas as redes nas quais as medidas podem ser aplicadas para sua caracterização.

## REFERÊNCIAS

- [1] R. Albert e A. L. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 74(1), 2002.
- [2] R. Albert, A. L. Barabási, e H. Jeong. Scale-free characteristics of random networks: The topology of the world wide web. *Physica A*, 281, 2000.
- [3] R. Albert, H. Jeong, e A. L. Barabási. The diameter of the world wide web. *Nature*, 401, 1999.
- [4] J. Balthrop, S. Forrest, M. E. J. Newman, e M. M. Williamson. Technological networks and the spread of computer viruses. *Science*, 304, 2004.
- [5] A. L. Barabási. *Linked: How Everything Is Connected to Everything Else and What It Means*. Plume, 2003.
- [6] V. Batagelj e A. Mrvar. Pajek datasets. <http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/data/>, 2006. [Online; acessado 10-Junho-2011].
- [7] C. S. Chekuri, A. V. Goldberg, D. R. Karger, M. S. Levine, e C. Stein. Experimental study of minimum cut algorithms. *Proceedings of the eighth annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, 1997.
- [8] A. Clauset, C. R. Shalizi, e M. E. J. Newman. Power-law distributions in empirical data. *SIAM Review*, 51, 2009.
- [9] J. Cohen, J. Schroeder, e E. P. Duarte Jr. Connectivity criteria for ranking network nodes. *Communications in Computer and Information Science (CCIS) - aceito para publicação*, 2011.
- [10] L. F. Costa, F. A. Rodrigues, G. Travieso, e P. R. V. Boas. Characterization of complex networks: A survey of measurements. *Advances in Physics*, 56(1), 2006.

- [11] P. Echenique, J. Gómez-Gardeñes, e Y. Moreno. Dynamics of jamming transitions in complex networks. *EPL (Europhysics Letters)*, 71(2), 2005.
- [12] M. Faloutsos, P. Faloutsos, e C. Faloutsos. On power-law relationships of the internet topology. *Proceedings of the conference on Applications, technologies, architectures, and protocols for computer communication*, volume 29 of *SIGCOMM '99*, 1999.
- [13] L. R. Ford e D. R. Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canadian Journal of Mathematics*, 8, 1956.
- [14] L. C. Freeman. A set of measures of centrality based on betweenness. *Sociometry*, 40, 1977.
- [15] A. V. Goldberg. An efficient implementation of a scaling minimum-cost flow algorithm. *Journal of Algorithms*, 22, 1997.
- [16] A. V. Goldberg e R. E. Tarjan. A new approach to the maximum flow problem. *Journal of the ACM*, 35, 1988.
- [17] P. Hage. Eccentricity and centrality in networks. *Social Networks*, 17, 1995.
- [18] B. Korte e J. Vygen. *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*. Springer, 2nd edition, 2002.
- [19] J. Leskovec, D. Huttenlocher, e J. Kleinberg. Signed networks in social media. *Proceedings of the 28th international conference on Human factors in computing systems*, 2010.
- [20] F. Liljeros, C. R. Edling, L. A. Amaral, E. H. Stanley, e Åberg Y. The web of human sexual contacts. *Nature*, 411, 2001.
- [21] E. P. Duarte Jr., R. Santini, e J. Cohen. Delivering packets during the routing convergence latency interval through highly connected detours. *DSN*. IEEE Computer Society, 2004.
- [22] K. Menger. Zur allgemeinen kurventheorie. *Fund. Math*, 10, 1927.

- [23] M. Mitzenmacher. A brief history of generative models for power law and lognormal distributions. *Internet Mathematics*, 1, 2004.
- [24] H. Nagamochi e T. Ibaraki. *Algorithmic Aspects of Graph Connectivity*. Cambridge University Press, 2008.
- [25] K. Okamoto, W. Chen, e X. Li. Ranking of closeness centrality for Large-Scale social networks. *Frontiers in Algorithmics*, 5059, 2008.
- [26] H. Tangmunarunkit, R. Govindan, S. Jamin, S. Shenker, e W. Willinger. Network topology generators: Degree-based vs. structural. *In Proceedings of ACM SIGCOMM*, 2002.
- [27] D. J. Watts e S. H. Strogatz. Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, 393, 1998.
- [28] S. Wuchty e P. F. Stadler. Centers of complex networks. *J Theor Biol*, 223, 2003.