

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS HUMANAS, LETRAS E ARTES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA – MESTRADO  
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: HISTÓRIA DA FILOSOFIA MODERNA E  
CONTEMPORÂNEA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Newton e Berkeley:**  
**As críticas aos fundamentos do Método das Fluxões**  
*n'O Analista*

**Alex Calazans**

Curitiba  
2008

2008  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS HUMANAS, LETRAS E ARTES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA – MESTRADO  
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: HISTÓRIA DA FILOSOFIA MODERNA E  
CONTEMPORÂNEA

Alex Calazans

**Newton e Berkeley:**  
**As críticas aos fundamentos do Método das Fluxões**  
*n'O Analista*

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Filosofia. Curso de Mestrado em Filosofia do Setor de Educação, Letras e Artes da Universidade Federal do Paraná. Orientador: Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra.

Curitiba  
2008



*Errores quam minimi in rebus mathematicis non sunt contemnendi*

“Na matemática, por mínimos que sejam, os erros não devem ser desprezados” (Newton, 1693, *De quadratura curvarum*, In: MW-1, p. 141).

*“Este método [das fluxões] deriva imediatamente de sua própria natureza, não de indivisíveis, diferenças leibnizianas ou quantidades infinitamente pequenas. Pois não existem quantidades primeiras nascentes ou quantidades últimas evanescentes, existem somente razões primeiras de quantidades nascentes e razões últimas de quantidades últimas evanescentes”* (Newton, 1714, *Philosophical transctions*, In: MP-3, p. 17-18).

*“De fato, mesmo que se tenha empregado muitos artifícios para escapar ou evitar a admissão de quantidades infinitamente pequenas, de nada adiantou”* [Comentário de Berkeley sobre o método newtoniano das fluxões] (Berkeley, *O Analista*, 1979 [1734], §11, p.71).

*Aos meus pais e à Luíza*

## **Agradecimentos**

Sou totalmente grato ao Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra por ter me orientado sempre com muita atenção, profissionalismo, inesgotável paciência e por compartilhar comigo um pouco do seu imenso talento para interpretar os textos dos autores em questão (principalmente os matemáticos). Agradeço ao Prof. Dr. Pablo Rubén Mariconda e à Prof<sup>a</sup> Dra. Maria Adriana Camargo Cappello por aceitarem participar da banca de defesa desse trabalho. Também agradeço ao Prof. Dr. Luiz Alves Eva, pelas dicas importantíssimas sobre meus textos durante o mestrado. Ao Prof. Dr. Breno Hax Junior por participar da minha qualificação e pelas importantes contribuições. Ao Prof. Dr. Marcos Rodrigues da Silva, por me fornecer importantes sugestões de leitura (incluindo seus próprios artigos) e por me dar oportunidade de debater interessantes aspectos do instrumentalismo científico de Berkeley. Ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal do Paraná. Aos colegas de mestrado. Àqueles que contribuíram com minha pesquisa ao participarem intensivamente dos grupos de estudos Descartes-Newton, em especial ao newtoniano Valdinei Gomes Garcia. À Veronica, minha esposa e colega de mestrado, que pacientemente sempre leu meus textos e discutiu comigo pontos dos autores em questão. Agradeço aos amigos, Marilane dos Santos, Maria Aparecida e João Onadir pela grande torcida. Sou grato também aos pais da Veronica (Mide e Werner) e à Dirceneide (sua prima). Sou grato às minhas queridas irmãs (Emycter, Lely, Thaís) e meus sobrinhos (Emily, Guilherme) pelo grande companheirismo. Por último, agradeço muito aos meus pais (Emi e Airton) por acreditarem muito em mim e por torcerem para que esse trabalho se realizasse.

## ÍNDICE

<b>RESUMO .....</b>	<b>7</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>8</b>
<b>LEGENDA .....</b>	<b>9</b>
<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
<b>1. FACE MATEMÁTICA DE NEWTON: O PERCURSO DO INFINITAMENTE PEQUENO.....</b>	<b>13</b>
1.1. O ESTILO ANALÍTICO DE NEWTON: AS EQUAÇÕES DAS CURVAS E O INFINITAMENTE PEQUENO .....	14
1.1.1. A análise dos modernos .....	14
1.1.2. O infinitamente pequeno no De analysi.....	22
1.1.3. Momentos, fluxões e fluentes no De methodis: a noção cinemática da matemática .....	30
1.2. O ESTILO SINTÉTICO DE NEWTON: O MÉTODO DAS PRIMEIRAS E ÚLTIMAS RAZÕES .....	49
1.3. CONCLUSÃO .....	56
<b>2. A AVALIAÇÃO DO MÉTODO DAS FLUXÕES N’O ANALISTA .....</b>	<b>60</b>
2.1. OS DOIS PERCURSOS DA CRÍTICA DE BERKELEY AO MÉTODO DAS FLUXÕES .....	61
2.1.1. A crítica aos objetos do método das fluxões .....	63
2.1.2. A crítica aos princípios e às demonstrações do método das fluxões .....	65
2.2. A CARACTERÍSTICA INFINITESIMAL DOS MOMENTOS NEWTONIANOS .....	70
2.3. OS OBJETOS DAS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NOS PRINCÍPIOS .....	73
2.3.1. O caso contra a infinita divisibilidade da extensão finita .....	75
2.4. CONCLUSÃO .....	81
<b>3. BERKELEY E A TESE DA “COMPENSAÇÃO DE ERROS” .....</b>	<b>84</b>
3.1. A VERDADE DA CONCLUSÃO COMO FUNDAMENTO PARA A VERDADE DAS PREMISSAS? ..	85
3.2. SOBRE A COMPENSAÇÃO DE ERROS .....	92
3.3. O LADO POSITIVO DA COMPENSAÇÃO DE ERROS .....	100
3.4. CONCLUSÃO .....	102
<b>CONCLUSÃO FINAL.....</b>	<b>106</b>
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>108</b>

## Resumo

Newton manifesta em sua carreira matemática uma posição crítica quanto aos métodos matemáticos inspirados no estilo analítico. O curioso é que o seu próprio trabalho não escapa da sua própria avaliação. O *método das fluxões*, que uma das suas principais contribuições no campo da matemática, sofre modificações com a finalidade de se tornar mais bem fundamentado. Isso significa sim um direto abandono dos procedimentos analíticos (que marca a fase inicial de sua carreira) para assumir uma técnica que estaria muito mais próxima dos procedimentos sintéticos dos geômetras antigos. Por sua vez, Berkeley, em *O Analista* (1734) realiza uma profunda avaliação desses novos procedimentos matemáticos, entre eles está essa principal contribuição de Newton. Visto que se constrói a crítica berkeleyana a partir do trabalho de Newton já reavaliado e fundamentado no estilo sintético, o que se pretende nesse trabalho é localizar o porquê do próprio Berkeley não considerar os esforços de Newton para bem fundamentar o *método das fluxões*. Para isso, trabalha-se com duas hipóteses: seria Newton, na perspectiva de Berkeley, alguém incompetente em aplicar as suas próprias exigências? Ou ainda, estaria Berkeley exigindo um padrão de rigor muito mais rígido, para fundamentar a matemática, em comparação com aquele que Newton aceitou para seu método? Veremos que ambas as hipóteses se aplicam, porém, cabe identificar as peculiaridades com que isso se manifesta no texto de *O Analista*.

### Palavras-chave:

1. Rigor – 2. Fluxões – 3. Inteligibilidade – 4. Análise – 5. Síntese – 6. Infinitamente pequeno.



## Abstract

Newton expresses in his mathematical career a critical stance to mathematical methods based on the analytic style. The most interesting is that his work does not escape from his own evaluation. The *method of fluxions*, which is one of his major contributions in the field of mathematics, undergoes changes with the aim of becoming more well-founded. It does convey a direct abandonment of the analytical procedures (which is the hallmark of the initial phase of his career) to take one technique that would be much closer to the synthetic procedures of the old geometers. In turn, Berkeley in *The Analyst* (1734) conducts a thorough evaluation of these new mathematical procedures, and among them is the main contribution of Newton. Since the critical of Berkeley is built from the work of Newton already reevaluated and based on the synthetic style, this work aims at finding the reason why Berkeley himself did not consider the efforts of Newton to support the method of the fluxions. Thereby, one works with two hypotheses: Newton was, according to Berkeley, someone incompetent to apply his own requirements? Or else, would Berkeley be demanding a standard of rigour much more rigid, to base the mathematics, compared with what Newton accepted for to its method? We will see that both the hypotheses apply; however, it is necessary to identify the peculiarities that it manifests in the text of *The Analyst*.

### Keywords:

1. Rigour – 2. Fluxions – 3. Intelligibility – 4. Analysis – 5. Synthesis – 6. Infinitely small.

## Legenda

**GLB:** Geometrical Lectures of Isaac Barrow

BARROW, I. (1916). *Geometrical lectures of Isaac Barrow*. [Trad. Child, J. M.]. Chicago, London: The Open Court Publishing Company.

**MP:** Mathematical Papers

WHITESIDE, D. T. (1967-1980) (ed.) *The Mathematical Papers of Isaac Newton*. 8 vols. Cambridge: Cambridge University Press.

**MW:** Mathematical Works

WHITESIDE, D. T. (1964) (ed.) *The Mathematical Works of Isaac Newton*. New York, London: Johnson Reprint Corporation, 2 vols.

**PRI:** *Principios*

BERKELEY, G. (1998 [1710]) *A treatise concerning the principles of human knowledge*. [Ed. by Dance, J.] Oxford, New York. Oxford University Press.

**PN:** *Principia*

NEWTON, I. (1999 [1687]). *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Trad. I. B. Cohen e A. Whitman. Berkeley: University of California Press.

**USPN:** Unpublished scientific papers of Isaac Newton

HALL, A. R. e HALL, M-B. (1962) *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton*. Cambridge: Cambridge University Press.

## Introdução

É possível localizar no trabalho matemático de Newton duas fases distintas. A primeira foi influenciada por aquilo que ficou conhecido como “nova análise”, sendo Descartes seu principal representante. Nessa fase encontram-se principalmente os primeiros trabalhos matemáticos de Newton. De outro lado, a outra fase foi marcada por uma espécie de distanciamento dos trabalhos fundamentados na análise dos modernos, aproximando-se do método sintético dos antigos geômetras gregos. Nesse sentido, a principal descoberta matemática de Newton, denominada por *método das Fluxões*, pode ser interpretada de duas maneiras: em um sentido *analítico* e em um *sintético*. É possível indicar como um dos principais motivos dessa mudança as desconfiças de Newton sobre o estatuto geométrico de quantidades infinitamente pequenas largamente admitidas na sua fase analítica (e em métodos analíticos de outros autores de sua época). Por “geométrico”, nesse contexto, entenda-se algo cuja natureza possui conotações espaciais e que, por conseguinte, não é um mero expediente de um cálculo formal abstrato. Essas desconfiças em torno dos infinitesimais teriam-no motivado a elaborar seu *método das primeiras e últimas razões*, permitindo estender as propriedades geométricas às entidades matemáticas invocadas em seu método das fluxões.

Desse modo, é possível perceber uma certa hierarquia entre essas duas fases: a fase sintética, fundamentada nas *primeiras e últimas razões*, é superior quanto ao rigor em relação à sua fase analítica. Isso significa que as mudanças introduzidas por Newton, que consistiram basicamente em enfatizar o caráter geométrico da sua matemática, tinham como objetivo ampliar a exatidão e o rigor do método das fluxões.

Contudo, apesar dos esforços de Newton, Berkeley submete o método das fluxões a uma crítica severa em virtude de suas deficiências em termos do próprio rigor ou exatidão. N’*O Analista* (1734), para chegar a essa conclusão, Berkeley percorre dois caminhos. O primeiro é identificar os *momentos* (conceito central para o método newtoniano) como objetos matemáticos ininteligíveis. O outro caminho é apontar as inconsistências demonstrativas presentes no método das fluxões. No entanto, o curioso dessa empreitada crítica de Berkeley é que ela não se resume a uma simples tarefa “negativa”: a de acusar a carência de rigor do método fluxional newtoniano. Ao final d’*O Analista*, a partir de uma tese de “compensação de erros”, Berkeley sugere um caminho para que o método das fluxões possa ser reabilitado, ainda que tal proposta seja

somente a ilustração de um primeiro “ajuste” para tornar o método newtoniano mais rigoroso.

Desse modo, a questão dessa dissertação poderá ser formulada como se segue: visto que os dois autores manifestam uma atitude crítica quanto aos fundamentos matemáticos do método das fluxões, por que então Berkeley não considera o grande esforço de Newton de se afastar dos métodos analíticos e de seus expedientes formais? Duas possíveis hipóteses poderiam ser levantadas a esse respeito. Primeiro, Berkeley identificaria uma falha de Newton em aplicar seus próprios critérios de fundamentação matemática. Isso significa que Berkeley não consideraria tais esforços porque Newton seria incapaz de cumprir as suas próprias exigências. Segundo, Berkeley possuiria padrões mais rígidos e exigentes do que os de Newton para fundamentação da matemática.

Para se saber qual dessas hipóteses deve prevalecer, ou ainda, se algum outra deveria lhes sobrevir, o seguinte trabalho será dividido como se segue. No primeiro capítulo se investiga o que é o método das fluxões e como Newton o fundamentou. Analisando alguns dos seus principais textos, elege-se o problema do infinitamente pequeno como o fio condutor para apontar as duas fases distintas do estilo matemático newtoniano: a fase analítica e a sintética. É na fase sintética que se apresenta o *método das primeiras e últimas razões*, em uma tentativa de se aproximar do rigor geométrico dos geômetras antigos. Será observado que Newton considera o caráter geométrico das primeiras e últimas razões como o fundamento real do método das fluxões. Isso no sentido de que elas fornecem ao método das fluxões a garantia de uma verdadeira exatidão matemática. No segundo capítulo, pretende-se abordar o texto *O Analista* pela primeira vez. Isso com o objetivo de expor os dois caminhos percorridos para se criticar o rigor do método das fluxões. É nesse capítulo que se investiga se os critérios da crítica de Berkeley são realmente seus ou não. Tal problemática exigirá um confronto com outro central texto de Berkeley: *Tratado Sobre os princípios do conhecimento humano* (1710). Isso acontece justamente para saber se a crítica n'*O Analista* possui alguma relação com a filosofia do *esse est percipi* (ser é ser percebido). Será, também nesse capítulo que se procura esclarecer as razões de Berkeley para anular os esforços realizados por Newton para se afastar dos métodos analíticos infinitesimais. No último capítulo, pretende-se aprofundar a tese berkeleyana de “compensação de erros”. O que motiva esse estudo é saber se Berkeley possui somente uma perspectiva “negativa” quanto ao método das fluxões, ou seja, o que se pretende saber é se tal “compensação de

erros” exclui definitivamente o método das fluxões do âmbito do conhecimento matemático, ou se haveria ainda alguma pretensão de apresentar uma via pela qual se poderia salvar tal método dos problemas antes apontados.

## 1. FACE MATEMÁTICA DE NEWTON: O PERCURSO DO INFINITAMENTE PEQUENO

Outrora Whiteside, considerado um dos mais prestigiados comentadores da matemática newtoniana, fez a seguinte afirmação sobre as sutilezas técnicas da matemática de Newton:

“Os avanços matemáticos multifacetados de Newton só podem ser adequadamente saboreados, em sua profundidade, através de longas horas de estudo solitário, com muitas mordidas no lápis e muito franzir do cenho. Para sua avaliação plena e justa, não conheço nenhum atalho real” (Whiteside, 1982, p. 496).

Esse descontraído relato parece, antes de tudo, ter a finalidade de caracterizar o quão difícil é a compreensão da obra matemática de Newton. No entanto, cabem aqui duas questões: (i) as dificuldades em compreender a matemática newtoniana ocorrem pelo fato dela ser um grande conjunto de métodos destinados à solução de distintos problemas? (ii) Ou, ao invés disso, tais dificuldades se originam das várias formulações que um mesmo método sofreu, tendo em vista sempre a solução do mesmo problema? A primeira questão levanta a possibilidade das dificuldades surgirem ao se interpretar a matemática newtoniana como uma pluralidade de métodos e seus respectivos problemas tratados, sendo um método incomunicável com o outro. Ora, se isso realmente acontece na matemática de Newton não é o que se pretende tratar aqui. A principal questão deste capítulo é a seguinte: o que é o método das fluxões? Em outras palavras, o que se pretende aqui é apresentar alguns exemplos de aplicações de um método matemático de Newton, denominado método das fluxões, e que se tornou um dos alvos principais da crítica realizada por Berkeley, no opúsculo *O Analista*.

Nesse sentido, cabe aqui, como desafio, superar as dificuldades que a questão (ii) levanta. Isso porque, ainda que se pensasse resolver sempre os mesmos problemas, existem indícios de que tal método também sempre fora o mesmo. Newton teria apresentado distintas formulações para o mesmo método das fluxões. Mais especificamente, tudo indica que as motivações para as reiteradas reformulações do método das fluxões repousam em questões relativas ao conceito de infinitamente pequeno. Os diferenciados tratamentos dados ao infinitamente pequeno resultaram em versões diferenciadas do método das fluxões. Em linhas gerais, em uma fase inicial, Newton concebera o infinitamente pequeno de uma tal maneira que fora, numa fase seguinte, abandonada. Desse modo, o método das fluxões não teria se transformado em

outro método propriamente dito. Porém ele teria sofrido modificações com a finalidade de supri-lo com outros fundamentos.

Portanto, se Newton realmente fez um esforço para reformular o seu método das fluxões, qual a melhor maneira de apresentar tal método? Os riscos de anacronismo ou, até mesmo, superficialidade na relação entre seus principais conceitos do método das fluxões parecem reais quando não se levam em conta essas reformulações. Desse modo, para evitar a necessidade de percorrer a enorme pluralidade metodológica da matemática newtoniana, escolher-se-á o conceito de *infinitamente pequeno* como o principal fio condutor na identificação das diferenças na concepção e na aplicação do método das fluxões.

## **1.1. O estilo analítico de Newton: as equações das curvas e o infinitamente pequeno**

### *1.1.1. A análise dos modernos*

Uma das mais marcantes características da formação matemática de Newton foi seu profundo conhecimento adquirido, já em sua juventude, da *Geometria* (1637) – obra matemática de Descartes. Esse fato não pode ser considerado simplesmente um “capricho intelectual” do matemático Isaac Newton. Pois, sua produção matemática – em sua aurora – está profundamente marcada pelo que ficou conhecido como: a *nova análise* dos modernos<sup>1</sup>. É Descartes que se encontra como uma das principais influências dessa fase matemática inicial. Para que isso possa ser compreendido, uma primeira aproximação a algumas das características mais importantes dessa análise se faz necessária.

Existem muitas tentativas do próprio Newton explicar o que era a nova análise. Dessa maneira, as suas próprias palavras podem funcionar como um guia para uma primeira aproximação. Considere-se a seguinte afirmação: “a análise dos modernos tem sua origem na aritmética, e é nada além do que uma aritmética universal aplicada para quantidades, seja ela geométrica ou alguma outra qualquer” (MP-8, p. 444). Ao afirmar que a análise dos modernos é uma “aritmética universal”, Newton nada mais faz do que realçar o caráter *universal* que os modernos pretendiam alcançar nas soluções dos problemas matemáticos. Trata-se da *liberdade* de aplicação de determinadas regras

---

<sup>1</sup>

(cf. Panza 2005, p. 23-44).

aritméticas a outros objetos matemáticos além dos números. Nesse caso, o conteúdo do que Newton afirma aponta diretamente para o trabalho de Descartes.

Na Regra IV, de seu texto *Regras para direção do espírito* (1628), Descartes recomenda enfaticamente a necessária utilização de um método na busca da verdade. Privar-se de tal método, no entanto, não significaria que verdades não pudessem ser encontradas<sup>2</sup>. Nesse caso, tal método deveria promover dois pontos importantes: (a) não permitir a colocação do falso no lugar do verdadeiro e (b) permitir que se possa alcançar o conhecimento de tudo o que é possível conhecer. O primeiro ponto, ou seja, (a), indica que a investigação metódica incorpora um critério para diferenciar o falso do verdadeiro, impedindo que se assuma um pelo outro. Agora com (b), Descartes manifesta a necessidade do método promover um “crescimento” do conhecimento, ou seja, existindo algo desconhecido (e passível de ser conhecido) a aplicação do método o fará conhecido. Ambos os pontos estão presentes na seguinte apresentação de um conceito de método:

“Quanto ao método, entendo por isso regras certas e fáceis cuja exata observação fará que qualquer um nunca tome nada de falso por verdadeiro, e que, sem despender inutilmente nenhum esforço de inteligência, alcance, com um crescimento gradual e contínuo de ciência, o verdadeiro conhecimento de tudo quanto for capaz de conhecer” (Descartes, 1999, p. 20).

Portanto, o método não é um simples processo para demonstrar o que já é conhecido. Ele deve permitir a descoberta de novas verdades.

É nesse sentido que Descartes menciona a “aritmética e geometria”. Para ele, ao observar a história da matemática, percebe-se que tal método esteve de alguma maneira presente no trabalho dos geômetras antigos e nos trabalhos algébricos de alguns matemáticos mais próximos (porém anteriores) à sua época. Descartes menciona esse método como *análise*:

“De fato, observamos suficientemente que os antigos geômetras utilizaram uma espécie de *análise* que estendiam à solução de todos os problemas, se bem que dela tenham privado a posteridade. E agora floresce um gênero de Aritmética, a que chamam de Álgebra, que permite fazer com os números o que os antigos faziam com figuras” [itálico meu] (Descartes, 1999, p. 21).

No entanto, Descartes considera que, principalmente quanto aos antigos, o que permaneceram foram somente as suas descobertas, isto é, verdades que – a qualquer

---

<sup>2</sup> Reflexões sem método somente estariam sujeitas à fortuna, ao acaso, o inclui a possibilidade de nunca se encontrar alguma verdade: “ora, é muito melhor jamais pensar em procurar a verdade de alguma coisa a fazê-lo sem método...” (Descartes, 1999, p. 19).



momento – poderiam ser demonstradas logicamente sem resultar em um aumento do conhecimento. Essas verdades, portanto, são reconhecidamente estéreis:

“Com efeito, como é reconhecido que muitos artesãos o fizeram com suas invenções, eles [os geômetras antigos] talvez temessem que, por causa de sua enorme facilidade e de sua simplicidade, ela [a análise] perdesse seu valor com a vulgarização, e preferiram, para fazer-se admirar, apresentar-nos em seu lugar verdades estéreis demonstradas com um sutil rigor lógico como efeito de sua arte...” (Descartes, 1999, p. 25).

Desse modo, as matemáticas que procuram demonstrar verdades já conhecidas (verdades estéreis), sem se preocupar com a descoberta de novas, são tratadas como *matemáticas comuns*. Portanto, há a necessidade de encontrar um método geral que permita o aumento do conhecimento. Descartes denomina tal método como *Mathesis universalis*, cujos elementos se manifestaram parcialmente nessa análise dos antigos<sup>3</sup>.

De todas essas considerações retira-se várias conclusões. Uma das principais é que a análise dos antigos constitui-se uma espécie de “manifestação” da *Mathesis universalis* e que tal análise era sim considerada como um método para descoberta de verdades na matemática (mesmo que em um sentido mais restrito que a própria *Mathesis*). Porém, um dos problemas centrais dessa análise foi o fato dos antigos terem negado, às gerações futuras, a possibilidade de conhecê-la adequadamente. Por outro lado, quanto à álgebra, Descartes a concebe também como aplicação da *Mathesis*. Nesse sentido, a álgebra constitui-se igualmente uma espécie de método de descoberta – isso mesmo mantendo suas ressalvas quanto a tal álgebra:

“Houve, por fim, alguns homens muito engenhosos que se esforçaram em nosso século para ressuscitar a mesma arte, por aquela que é designada pelo nome bárbaro de Álgebra não parece ser outra coisa, *contanto* apenas que a desvencilhemos das múltiplas cifras e das inexplicáveis figuras que a sobrecarregam, de sorte que já não lhe falte o grau de nitidez e de facilidade extremas que supomos dever encontrar-se na verdadeira Matemática” [meu itálico] (Descartes, 1999, p. 27)<sup>4</sup>.

Uma parte significativa do conteúdo do projeto cartesiano de uma *Mathesis universalis* apresentado nas *Regras* aparece aplicada em outro texto cartesiano. Trata-se da *Geometria*, que poderia ser assim considerada uma ilustração do método de análise

---

<sup>3</sup> Diz Descartes: “Daí resulta [ao observar os problemas abordados pelas matemáticas comuns] que deve haver uma ciência geral que explique tudo quanto se pode procurar referente à ordem e à medida, sem as aplicar a uma matéria especial: essa ciência se designa, não pelo nome emprestado, mas pelo nome, já antigo e consagrado pelo uso, *matemática universal* [*Mathesis universalis*], porque ela encerra tudo o que fez dar a outras ciências a denominação de partes das Matemáticas”. [meu itálico] (Descartes, 1999, p. 27).

<sup>4</sup> Dentre os principais nomes desses matemáticos que tratam da álgebra está o de Viète (cf. Panza 1999, p. 23-44).

de Descartes<sup>5</sup>. Já em seu começo, está evidente a intenção de promover uma ampliação da aritmética. É isso que o subtítulo de uma seção inicial promete: “como o cálculo da aritmética se relaciona com as operações da geometria”. Visa-se, nesse caso, utilizar as operações que estruturam a aritmética para manipular linhas e solucionar problemas de natureza geométrica:

“E como um todo, a aritmética é composta somente por quatro ou cinco operações, que são a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão e a extração de raízes (que se pode tomá-las como uma espécie de divisão). Da mesma maneira, com respeito às linhas que se busca (para prepará-las a ser conhecidas), não há outra coisa a se fazer na geometria que adicioná-las ou subtraí-las a outras linhas...” (Descartes, 1954, p. 3).

Ao afirmar que operações aritméticas (como adição e subtração) seriam suficientes para “preparar” linhas para se tornarem conhecidas, Descartes apresenta uma das características importantes de seu método: que tais operações podem solucionar problemas na geometria no sentido de “ampliar” o conhecimento dessa ciência. Isso se encontra na mesma acepção proposta (como visto acima) na Regra IV, onde verdades desconhecidas devem tornar-se conhecidas. No entanto, é necessário reforçar que, nesse caso, Descartes está pensando em problemas geométricos. O título inicial do Livro I, da geometria, sugere isso claramente: “Sobre os problemas que se pode construir sem empregar mais que círculos e linhas retas”. E em seguida ele acrescenta: “Todos os problemas da Geometria podem se reduzir facilmente a tais termos, que não é necessário conhecer de antemão mais que o comprimento de algumas linhas retas para construí-los” (Descartes, 1954, p. 3) Portanto, se as operações aritméticas ajudarão a solucionar problemas da geometria, deve-se compreender que o as soluções (as verdades buscadas) de tais problemas serão linhas, ou melhor, linhas desconhecidas que se tornarão conhecidas.

Contudo, o desafio é saber a justificativa para ampliar a utilização das operações aritméticas, pois isso não parecia algo tão “corriqueiro” para o próprio Descartes<sup>6</sup>. Mas afinal, o que permite o sucesso de tal indústria cartesiana? A resposta é a seguinte: um novo conceito introduzido, isto é, a noção de unidade. Entretanto, as justificativas para o

---

<sup>5</sup> (cf. Battisti, 2002, p. 129)

<sup>6</sup> Antes de iniciar tal tarefa em sua obra, é evidente a sua preocupação em deixar explícito ao seu leitor (que provavelmente desconfie de tal proposta) que é possível ganhar inteligibilidade ao realizar tal empreita. Nas palavras de Descartes: “eu não hesitarei em introduzir estes termos aritméticos na geometria, a fim de me tornar mais inteligível” (Descartes, 1954, p. 4).

uso de tal conceito não se encontram na *Geometria*. Assim, é útil observar antes o que se encontra sobre isso nas *Regras*.

Na Regra XIV, Descartes afirma que a unidade é a “natureza comum” pertencente às coisas que devem ser comparadas. Essa natureza é necessária para permitir as relações quanto à “ordem e a medida”. Pois é possível reconhecer “... qual ordem existe entre A e B, sem outra consideração além daquela desses dois extremos; mas não reconheço qual relação de grandeza há entre dois e três, sem ter considerado um terceiro termo, que é a unidade que serve de medida comum às duas outras” (Descartes, 1999, p. 123). Assim, o problema da ordem nem sempre necessita de um termo mediador para gerar uma seqüência ordenada. Essa seqüência pode ser construída arbitrariamente. Todavia, para que se estabeleça uma relação de *medida* entre grandezas, percebe-se que a unidade necessariamente deve atuar. Pois, entre “dois” e “três”, não seria possível saber qual dos números é o maior ou o menor caso eles não fossem igualmente redutíveis à unidade. Ou seja, perguntar-se sobre o tamanho entre grandezas resume-se a determinar quantas vezes a “unidade comum” aparece nelas. Dessa maneira, aqui a unidade resolve não somente o problema da medida como também o problema da ordem. Entre “dois” e “três”, ao se saber qual é o maior e o menor mediante a sua medida comum, é possível estabelecer ao mesmo tempo a ordem existente entre eles.

Na mesma Regra XIV, aparece ainda uma outra consideração sobre o conceito de unidade. Ao invés das grandezas discretas, a exemplo dos números, trata-se nesse caso das grandezas contínuas, como linhas e planos. Segundo Descartes, “graças a uma unidade de empréstimo”, as grandezas contínuas podem ser reduzidas completamente à pluralidade<sup>7</sup>. Isso quer dizer que, dadas grandezas a serem relacionadas, é possível considerar uma delas como sendo a unidade, ou seja, a grandeza contínua comum a todas as outras. Assim, “medir” equivale a estabelecer o *número de vezes* que essa unidade aparece nas outras grandezas em questão. Logo, é a unidade que permite atribuir pluralidade (que é esse número de vezes do aparecimento unidade) às figuras geométricas.

---

<sup>7</sup> (cf. Descartes 1999, p. 123). Todavia, essa solução de Descartes apresenta limites. Ele próprio afirma que essa redução a uma pluralidade pode ser realizada “pelo menos em parte”. Por exemplo, as quantidades incomensuráveis não possuem diretamente uma unidade em comum que permitiria tal redução.

Na *Geometria*, é evidente a utilização do conceito de unidade. É ele que também justifica, nessa obra, que grandezas geométricas se relacionem aos números e que libere o uso de operações da aritmética para solucionar problemas geométricos:

“...tendo uma [linha], que nomearei unidade para relacioná-la o melhor possível aos números, e que pode em geral ser tomada arbitrariamente, e tendo logo outras duas para encontrar uma quarta que seja uma dessas duas, como a outra é a unidade, que é o mesmo que a multiplicação...” (Descartes, 1954, p. 4).

Essa afirmação de Descartes aponta o uso da unidade para o exemplo da multiplicação. Nesse caso, para multiplicar deve-se utilizar quatro grandezas (e não somente duas, como a primeira vista pareceria). Duas que serão as grandezas a serem multiplicadas; uma que será a solução da multiplicação e outra que será a unidade. Descartes fornece uma aplicação disso da seguinte maneira.

Considerando-se duas linhas DB e BC, o primeiro passo a ser dado para multiplicá-las é escolher a unidade comum entre elas. Sendo AB tal unidade, surge a possibilidade de estabelecer suas relações de tamanho, ou seja, sabe-se com isso qual é a linha maior e a menor. Com esse raciocínio, apresentam-se os elementos para colocar tais linhas em posição, construindo uma figura que permitirá evocar princípios geométricos e que resultará na localização da linha de expressão do valor da multiplicação. Descartes constrói a figura onde aparecem os triângulos BAC e BDE dados em proporção (ver figura 1.1). Dessa maneira,  $BE:BC::BD:BA$  (BE está para BC assim como BD está para BA). Como BA é a unidade comum à BD, BC e BE, isso significa que essas demais grandezas possuem também uma natureza discreta (relacionada aos números). Assim, pela teoria das proporções, relacionadas aos números<sup>8</sup>, é possível reduzir tal proporcionalidade a uma igualdade:  $BE.BA=BC.BD$  (que é o produto dos

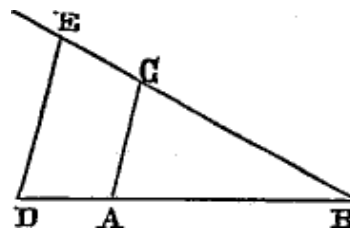


figura 1.1

<sup>8</sup> Segundo Panza, não existe nos *Elementos* de Euclides uma precisa definição de quantidades. O que existe é mais um critério para identificar se algo é uma quantidade matemática. Desse modo, segundo ele, não se deve interpretar as duas teorias das proporções presentes nos *Elementos* como sendo uma teoria geral das quantidades. A teoria das proporções apresentadas no Livro V apoia-se numa concepção originalmente desenvolvida por Eudoxo para quantidades contínuas. Nela não existiria a possibilidade de se reduzir uma proporção entre grandezas contínuas a uma igualdade. Essa teoria distingue-se diretamente da teoria apresentada no Livro VII, que retoma a teoria das proporções para grandezas discretas elaborada por Teeteto, cuja idéia fundamental é a possibilidade de relacionar quantidades discretas por meio da sua redução a uma igualdade. Por exemplo, na definição 19, Euclides sustenta a proporcionalidade entre quatro números na medida em que o produto entre o primeiro e quarto torna-se igual ao produto entre o segundo e o terceiro. Isto é, se  $a:b::c:d$ , então  $a.d=b.d$ , onde  $a, b, c$  e  $d$

extremos igualado ao produto dos meios). Como BA é igual a 1, portanto a igualdade pode ser escrita da seguinte maneira:  $BE \cdot 1 = BC \cdot BD$ , ou melhor,  $BE = BC \cdot BD$ . É por isso que Descartes conclui: “BE é o produto desta multiplicação” (Descartes, 1954, p. 4).

Desse exemplo pode-se retirar várias características da nova análise cartesiana. A primeira trata-se das próprias grandezas envolvidas ali. No caso das grandezas contínuas, existem várias possibilidades de unidades. É por isso que Descartes compreende ser um procedimento “arbitrário” a escolha de tal unidade. Dessa maneira, é necessário interpretar as grandezas utilizadas como possuindo uma natureza especial. Elas não podem ser números nem linhas em um sentido próprio. Pois, caso fossem números, os problemas geométricos não seriam contemplados pelas operações aritméticas. Mas, caso fossem grandezas puramente geométricas, apareceriam problemas quanto à homogeneidade das quantidades, pois na sua acepção clássica a multiplicação entre duas linhas gera uma área, e não outra linha como propõe Descartes no exemplo acima<sup>9</sup>. Assim, as grandezas relacionadas por meio de tais operações devem ser interpretadas como constituídas por uma natureza especial que lhes fornece o caráter de uma “grandezas-graduada”. Por conseguinte, uma linha graduada funciona como um elemento neutro que permite a introdução das operações aritméticas na geometria<sup>10</sup>.

Nesse mesmo exemplo da multiplicação, há ainda um apelo evidente à figura geométrica. Mas esse recurso torna-se desnecessário. Isso porque Descartes introduz elementos algébricos, ou seja, as quantidades envolvidas nas operações passam a ser

são números. Para linhas, ou qualquer outra quantidade contínua, essa redução não seria possível, revelando a ausência de uma definição geral de quantidade. (cf. Panza, 2005, p. 4-7).

<sup>9</sup> Jullien denomina esse problema como o “problema da determinação”. É perfeitamente determinável o resultado de uma soma entre grandezas contínuas, pois o resultado é homogêneo aos dados e construído por meio da justaposição desses dados. No entanto, isso não vale para a multiplicação: “Para duas grandezas dadas, como linhas, seu produto não é determinado e não é, em todo caso, imediatamente construído” (Jullien, 1996, p. 70). Esse problema da determinação se mostra ainda mais complicado em relação à multiplicação de quatro ou mais linhas, ou seja, que não são planos e nem sólidos. Esse mesmo problema é relatado por Mancosu: “De fato, na geometria antiga bem como em Viète, a multiplicação de duas linhas é interpretada como uma área, e a multiplicação de três linhas dadas gera um cubo. Mas não existe interpretação correspondente [nos antigos e em Viète] para o produto de quatro ou mais linhas” (Mancosu, 1992, p. 86).

<sup>10</sup> É também Jullien quem utiliza a expressão “grandezas-graduadas” como sendo o caráter especial das grandezas utilizadas na *Geometria*. Segundo ele, caso isso não ocorra, Descartes teria que fornecer outras justificativas para solucionar o problema da determinação e o próprio problema da aplicação das operações aritméticas na geometria (cf. Jullien 1996, p. 72). Considerar essas grandezas como graduáveis resolve tanto um problema como o outro. Pois, por exemplo, a multiplicação nada mais é do que associar três linhas (onde uma é a unidade arbitrariamente escolhida) a uma quarta linha que representa o produto das outras duas. Ao justificar o uso de letra na geometria, mais a diante, o próprio Descartes manifesta esse raciocínio: “...para  $a^2$  ou  $b^3$  [isto é,  $a \cdot a$  e  $b \cdot b \cdot b$ ] ou outras semelhantes, não concebo mais que linhas simples” (Descartes, 1954, p. 7).

representadas por símbolos (letras do alfabeto latino)<sup>11</sup>. Como foi visto acima, Descartes, na Regra IV, aceita a possibilidade de uma álgebra (florescente em seu tempo) conter elementos da *Mathesis universalis*. No entanto, existiriam várias reservas. Uma delas seria o grande comprometimento com as próprias figuras geométricas. Algo que dificulta a atuação do próprio pensamento<sup>12</sup>. Agora em sua *Geometria*, Descartes encontra a possibilidade de resolver os problemas geométricos via operações aritméticas, sem a todo o momento recorrer as tais figuras: “mas não há a necessidade de traçar com freqüência essas linhas sobre o papel, é suficiente designá-las por certas letras, uma só para cada linha” (Descartes, 1954, p.4). Com isso Descartes permite que seu método se comprometa com outro elemento importante: as *equações*. Tais equações não somente conteriam uma representação simbólica para as quantidades envolvidas. Elas também seriam a própria representação simbólica dos problemas a serem solucionados. A seguinte passagem resume como se chega a essas equações:

“Assim querendo resolver algum problema, deve-se considerá-lo de antemão já resolvido, e dar nomes a todas linhas que parecem necessárias por serem construídas, tanto as que são desconhecidas com as outras. Logo, sem considerar nenhuma diferença entre estas linhas conhecidas e desconhecidas, se deve examinar a dificuldade segundo a ordem que se apresenta como a mais natural de todas, na forma como aquelas linhas dependem mutuamente uma das outras, até que tenha encontrado a maneira de expressar uma mesma quantidade de duas maneiras: o que se denomina uma equação, pois os termos de uma dessas duas formas são iguais aos da outra” (Descartes, 1954, p. 8).<sup>13</sup>

Para concluir, pode-se agora relacionar a consideração de Newton (inicialmente apresentada) sobre a análise dos modernos com as próprias características encontradas na obra de Descartes. Em primeiro lugar, ao relacionar os termos “aritmética universal” ao pensamento cartesiano, seu possível significado diria respeito aos procedimentos

---

<sup>11</sup> Mas isso não significa que não se possa construir, sempre que desejar, o referencial geométrico expresso por esses símbolos.

<sup>12</sup> Descartes discute na Regra XVI a necessidade de estabelecer uma certa “economia” do pensamento. Pois, a complexidade somente gera a possibilidade de erro. (cf. Descartes 1999, p. 127-132).

<sup>13</sup> Segundo Battisti, é possível depreender quatro passos dessa passagem que estrutura o procedimento *analítico* de Descartes: (I) considerar o problema dado como resolvido (esse procedimento apresenta-se já na análise dos antigos e, para Descartes, ele significa que o problema já fornecesse todos os dados necessários para a solução do problema, ou seja, que tanto as quantidades conhecidas como desconhecidas, são nomeáveis e assim adquirem um certo estatuto de igualdade operatória); (II) nomear as quantidades por letras (isso vale tanto para as conhecidas com as desconhecidas); (III) encontrar as relações mútuas entre as quantidades, com a finalidade de expressá-las principalmente a partir das quantidades conhecidas; (IV) por último, apresentar a equação propriamente dita (isso significa que se deve encontrar uma única expressão algébrica que reduza todas as relações encontradas e expressas pelo passo anterior). (cf. Battisti, 2002, p. 131-138) O exemplo mais completo da aplicação desses passos entra no tratamento dado por Descartes logo em seguida ao problema de Pappus (cf. Descartes, 1954, p. 16-37).

algébricos utilizados na solução de problemas geométricos. Nessa álgebra cartesiana, está presente uma ampliação da própria aritmética. Logo, a universalidade está assim pautada nessa ampliação. Em segundo lugar, trata-se da natureza das “quantidades” mencionadas por Newton. Aqui se deve fazer uma ressalva: na *Geometria*, em nenhum momento as quantidades são grandezas geométricas ou números no sentido próprio. O sentido de “grandezas-graduadas” extrapola essas duas possibilidades. Se “quantidades” forem interpretadas em um sentido próprio<sup>14</sup>, então o trabalho cartesiano não se relaciona com tais palavras newtonianas. Somente será possível relacionar o trabalho de Descartes à descrição de Newton caso se aceite o seguinte: Newton menciona uma análise comprometida com um conceito de quantidade que admite o *contínuo* e o *discreto* como suas propriedades simultâneas. Caso contrário, será impossível aproximar Newton a Descartes por esse caminho aqui sugerido.

Nas seguintes seções, apresentar-se-á o trabalho realizado por Newton sob a influência dessas características da análise dos modernos. A manipulação de *símbolos* e, consecutivamente, de *equações* é uma das mais visíveis. A outra característica é a própria universalidade desse procedimento. Newton compreende que é possível estabelecer regras universais que possam ser aplicadas na solução de problemas geométricos refratários aos métodos sintéticos tradicionais, sobretudo aqueles que envolvem curvas e áreas curvilíneas. Mesmo que nos Livros II e III, da *Geometria*, Descartes utilize equações para representar linhas curvas, Newton agora expõe um avanço na solução de problemas gerados com essas curvas e que não foram contemplados pelo trabalho cartesiano. É nisso que um conceito de infinitamente pequeno se mostrará útil.

### 1.1.2. O infinitamente pequeno no De analysis

Em alguns dos primeiros escritos matemáticos de Newton, é nítido o uso irrestrito de equações algébricas na solução de problemas geométricos. Principalmente os problemas oriundos de equações que representam áreas curvilíneas. Dentre os problemas tratados por Newton estão: a determinação da *quadratura de uma curva* e do *comprimento de uma curva*. Quadrar uma curva significa encontrar a área de uma figura retilínea equivalente à área delimitada por essa curva; e, por outro lado, dada essa área, o segundo problema resume-se a estabelecer o comprimento da *linha* curva. No entanto,

---

<sup>14</sup> Ou seja, grandezas geométricas são contínuas (sem um aspecto de multiplicidade) e grandezas numéricas são discretas (sem relação com o que é extenso).

na solução desses problemas, a utilização de um peculiar conceito de magnitude tornou-se freqüente: o infinitamente pequeno. Mas isso não é uma novidade newtoniana. Outros autores anteriores a ele, apelaram para alguma dada espécie de quantidade infinitamente pequena ao enfrentarem esses problemas. Cavaliere, por exemplo, sugeriu a presença de indivisíveis (um tipo de quantidade infinitamente pequena) para a solução, especificamente, das quadraturas de figuras curvilíneas. De fato, esses textos de Newton, principalmente os do início de suas investigações matemáticas, possuem um forte apelo ao uso do infinitamente pequeno, além de uma intensa familiaridade com os métodos algoritmos típicos da nova análise. Cabe aqui apresentar um exemplo.

Uma amostra do estilo analítico newtoniano encontra-se no texto *De analysi per aequationes infinitas* (1669)<sup>15</sup>. O problema central que Newton se propõe a solucionar é o de encontrar a área de curvas correspondentes a equações de “termos compostos”, isto é, constituídas por séries infinitas de termos. Para que isso fosse possível, inicialmente, Newton apresenta duas regras para problemas mais simples. Elas se referem à quadratura de figuras curvilíneas expressas por equações simples, isto é, constituídas por um número *finito* de termos.

Primeiramente, nomeiam-se as quantidades em questão. Seja  $AB$  a base de alguma curva  $AD$  e a ordenada  $BD$  traçada perpendicularmente a ela (ver figura 1.2). Consideremos  $AB = x$  e  $BD = y$ , e  $a, b, c$  sejam quantidades dadas e  $m, n$ , números inteiros. Seguem-se, então, as regras:

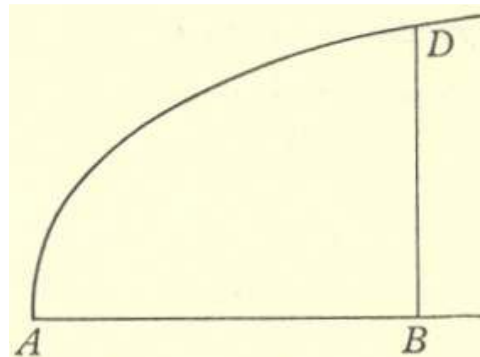


Figura 1.2

$$\text{“Regra I: se } ax^{\frac{m}{n}} = y, \text{ então } \left[ \frac{na}{(m+n)} \right] x^{\frac{(m+n)}{n}} \text{ será a área ABD”}^{16}$$

<sup>15</sup> O *De analysi* reúne algumas das descobertas de Newton, realizadas entre 1665-1666, sobre a utilização de infinitas séries na determinação da quadratura de curvas. Como aquelas descobertas jamais haviam sido divulgadas por meio impresso, ao tomar conhecimento da publicação da *Logarithmotechnia* (1668), de Nicolaus Mercator, Newton sentiu a necessidade de elaborar o *De analysi*, reunindo os resultados por ele obtidos acerca das séries infinitas. O *De analysi* deve ser incluído entre os trabalhos que Newton relutou em publicar oficialmente. Esse texto teve somente uma circulação restrita, por meio de cópias manuscritas. Newton teria se limitado a esse tipo de divulgação, pois passara, mais tarde, a nutrir uma grande desconfiança pela linguagem da nova analítica, amplamente empregada no *De analysi*. (cf. Guicciardini, 2004, p. 463-464).

<sup>16</sup> Nesse manuscrito, Newton enuncia a regra I sem apresentar o processo com o qual ela foi descoberta. Não é meu objetivo elucidar tal processo. No entanto, vale lembrar que Newton



“Regra II: se o valor de  $y$  é composto de vários termos desta espécie, a área também será composta de áreas que surgem separadamente de cada um destes termos” (MP-2, p. 206-209).

Nessas duas regras, Newton admite a possibilidade de oferecer uma solução para o problema de quadrar a curva pela simples manipulação simbólica. Já aqui, deve ser observada a presença alguns aspectos da análise dos modernos. Trata-se da utilização dos símbolos e suas respectivas regras de manipulação. São nessas regras que o caráter de universalidade mais se manifesta. Trata-se de regras universais aplicáveis a qualquer equação comprometida com o problema geométrico da quadratura.

Para deixar evidente como ocorre a aplicação dessas regras, Newton fornece vários exemplos. Um deles é para uma curva  $AD$  cuja equação ele sugere ser  $x^2=y$ . Ao reescrever a equação de maneira mais desenvolvida (ou seja:  $1x^{2/1}=y$ ), pode-se aplicar a regra I, tomando  $a=1$ ,  $m=2$  e  $n=1$ . Assim, substituindo os valores da constante e dos índices na expressão

$$\left[ \frac{na}{(m+n)} \right] x^{\frac{(m+n)}{n}},$$

obtém-se

$$\left[ \frac{1 \times 1}{(2+1)} \right] x^{\frac{(2+1)}{1}}.$$

Ao realizar todas as operações, obtém-se como solução o valor da área da curva  $ABD$ , ou seja:  $ABD = 1/3x^3$ .

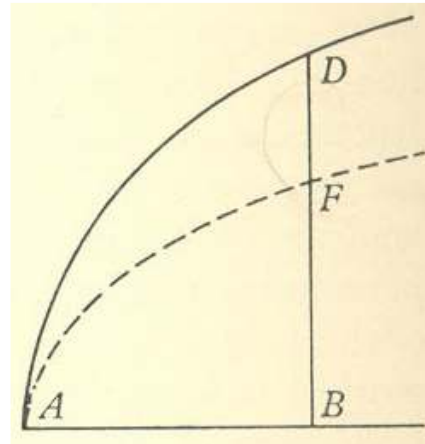


Figura 1.3

Um outro exemplo refere-se à segunda regra. Supõe-se que  $y$  possa se dividir sem, no entanto, perder a relação com  $x$ . Dessa maneira,  $BF+FD=y$ , onde os respectivos valores de  $BF$  e  $FD$  seriam  $x^2$  e  $x^{3/2}$  (ver figura 1.3). Então, Newton assume que a equação para a área  $ABD$  será  $x^2+x^{3/2}=y$ . Esse é um exemplo de equação como termos compostos, porém com um número finito de termos. A Regra II assegura a aplicabilidade da Regra I a essa espécie de equação. Isso quer dizer que basta aplicar a

---

estaria aqui simplesmente apresentando uma regra que Wallis descobriu nas investigações sobre a quadratura das curvas. Newton, mais tarde e tratando-se na terceira pessoa, relatou isso no *Commercium epistolicum* (1713): “Drº Wallis publicou seu *Arithmetica infinitorum* no ano de 1655, e pela proposição 59 desse livro, se a abscissa de alguma figura curvilínea for chamada  $x$ , sendo  $m$  e  $n$  números inteiros e  $x^{m/n}$  a ordenada erguida em ângulo reto, a área dessa figura será  $ax^{m/n} = y$ . Isso é assumido por Sr. Newton como a primeira regra pela qual ele determina a quadratura das curvas” (MP-8, p. 589). Há um consenso entre comentaristas sobre a veracidade dessa afirmação. Newton, no *De analysi*, estaria realmente repetindo a fórmula descoberta por Wallis (cf. Guicciardini, 1999, p. 18-19).

Regra I a cada termo individual dessa equação composta para que a área seja determinada por uma outra equação.

Formalmente, o que acontece é o seguinte. A equação  $x^2+x^{3/2}=y$  pode ser reescrita de maneira completa

$$1x^{\frac{2}{1}} + 1x^{\frac{3}{2}} = y.$$

Desse modo, sabe-se os valores de  $a, m$  e  $n$ . Aplicando-se a Regra I em cada termo obtém-se a equação da quadratura da curva:

$$\left[ \frac{1 \times 1}{(2+1)} \right] x^{\frac{(2+1)}{1}} + \left[ \frac{2 \times 1}{3+2} \right] x^{\frac{(3+2)}{2}} = y.$$

Portanto, a equação inicial se transforma em

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = ABD.$$

Quando se assume que a área  $ABD$  está dividida, é evidente que a equação total dela deverá ser a somatória das equações das partes, como apresentado nesse segundo exemplo. Logo, de fato, a regra II deve se subordinar à regra I. No entanto, a primeira regra não apresenta o significado da passagem da equação  $ax^{\frac{m}{n}} = y$  para o valor da área

$\left[ \frac{na}{(m+n)} \right] x^{\frac{(m+n)}{n}}$ . É isso que faz a Regra I ser “menos evidente” que a própria regra II.

Então, o que Newton compreende ser essa transformação sugerida pela regra I? A resposta parece ser a seguinte: a nova equação é a expressão que revelaria uma espécie de somatória de todos os valores que o eixo  $BD$  pode assumir no intervalo do eixo  $AB$ , utilizando a equação da curva. Enquanto a equação da curva revela o valor de  $BD$ , considerando um ponto na curva, a nova equação (gerada pela aplicação da regra I) seria a somatória dos diversos valores de  $BD$  em relação a todos os pontos da curva  $AD$ . Essa interpretação da regra I está presente quando Newton apresenta uma grande novidade quanto aos dois problemas gerados pelas figuras curvilíneas: há uma similaridade nas soluções do *problema da quadratura* e o de *encontrar o comprimento da curva*. Em outras palavras, o significado dessa similaridade é que a equação que corresponde à linha curva pode ser obtida pela aplicação da própria regra I da quadratura da curva. Isso pode ser observado em um outro exemplo, um pouco mais complexo que os dois anteriores. Adicionalmente, será nesse próximo exemplo que se poderá observar a utilização do infinitamente pequeno.

Em primeiro lugar, Newton assume que as figuras geométricas possam ser geradas pelo movimento<sup>17</sup>. Assim, a área  $ABD$  seria descrita pelo movimento da linha reta  $DB$  sobre a base  $AE$  (ver figura 1.4). Feito isso, o próximo passo é encontrar a equação que expresse o primeiro comprimento do arco do círculo  $AD$  descrito pelo movimento. Nomeando como *momento* do círculo, esse primeiro acréscimo será expresso pela equação da quantidade  $DH$ . Newton soluciona isso da seguinte maneira:

“Seja  $AD$  o arco do círculo  $ADLE$  cujo comprimento deve ser descoberto. Traçando a tangente  $DHT$ , e completando o retângulo infinitamente pequeno  $HGBK$ , faça  $AE=1=2AC$ . Assim,  $BK$  ou  $GH$  (o momento para a base  $AB$ ) estará para  $DH$  (o momento do arco  $AD$ )::  $BT:DT::BD$   $\left(\sqrt{x-xx}\right):DC$   $\left(\frac{1}{2}\right)::1$  ( $BK$ ):  $\frac{1}{\sqrt{x-xx}}$  ( $DH$ ).  
Então  $\frac{1}{\sqrt{x-xx}}$  ou  $\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$  será o momento do arco  $AD$ ” (MP-2. P: 232).

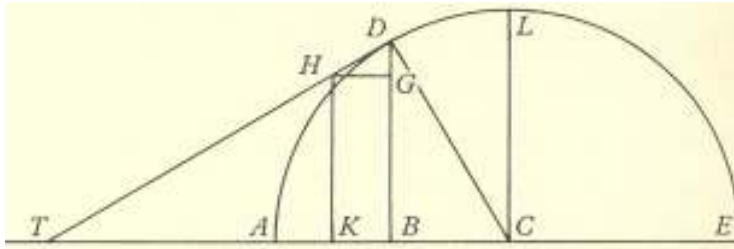


Figura 1.4

Analisemos com mais detalhes cada passo desse enunciado. É possível estabelecer relações de proporcionalidade entre tais linhas envolvidas, pois surgem triângulos semelhantes:

- (i)  $BT:DT::BD:DC$
- (ii)  $BD:DC::BK:DH$

A partir disso as equações são construídas. Colocando  $AB=x$ , Newton encontra o valor de  $DB = \sqrt{(x-x^2)}$ , visto que o triângulo  $BCD$  é retângulo e o valor de  $BC=AC-AB$ <sup>18</sup>.

<sup>17</sup> Aqui Newton se limita em apresentar as quantidades somente como descritas pelo movimento. Porém, mais à frente apresentarei uma discussão mais detalhada sobre a importância que Newton atribui ao movimento na matemática.

<sup>18</sup> De fato, Newton busca a equação que expresse o valor de  $DH$ . Porém, nesse momento, ele utiliza a própria equação da curva que revela a relação entre  $x$  e  $y$ . Nomeando  $DC$  como a *normal*, foi Descartes quem forneceu os passos para a construção da equação da curva em sua *Geometria* (cf. Descartes, 1954, p. 94). Baseando-se nos raciocínios de Descartes, é possível reconstruir a equação da curva para esse exemplo de Newton. Pelo fato dos triângulos serem retângulos, pode-se aplicar o teorema de Pitágoras, ou seja,

$$DC^2 = DB^2 + BC^2.$$

Logo, substituindo os valores, tem-se:

$$\begin{aligned} DC^2 &= DB^2 + (AC-AB)^2; \\ (1/2)^2 &= DB^2 + [(1/2)-x]^2; \\ (1/4) - (1/4) + [2(1/2)x] - x^2 &= DB^2; \end{aligned}$$

Estabelecendo esses valores, é agora que a utilização de uma quantidade considerada como infinitamente pequena se mostra como fundamental. Como o retângulo  $HGBK$  é formado pelo momento da linha  $AB$ , isto é, o primeiro acréscimo infinitamente pequeno  $BK$ , o problema que Newton enfrenta é encontrar a razão entre  $BK$  e  $DH$ . Para colocar essas duas quantidades em proporção, assume-se  $BK=1$ , pois é a “unidade” com que  $AB$  aumenta. Dessa maneira, o problema se transforma em saber qual é o valor de crescimento  $DH$  enquanto  $BK=1$  aumenta, pois é somente  $DH$  que revela qual o primeiro aumento da curva  $AD$ . Como visto na proporção (ii), tanto  $BK$  como  $DH$  estão em proporção com os valores conhecidos, que são  $BD$  e de  $CD$ . Assim, ao substituir os respectivos valores conhecidos para a proporção (ii),  $DH$  torna-se também conhecido, isto é, a partir de  $BD:DC::BK:DH$ , obtém-se

$$\sqrt{(x-x^2)}:(1/2)::1:DH.$$

Isolando  $DH$  encontra-se a seguinte equação:

$$DH = \frac{1}{2\sqrt{(x-x^2)}}.$$

Ainda, o valor de  $DH$  pode ser reorganizado ao multiplicar o denominador e o numerador dessa divisão pela raiz

$$DB = \sqrt{(x-x^2)},$$

obtendo-se assim:

$$DH = \frac{\sqrt{(x-x^2)}}{2(x-x^2)}.$$

Dada essa última equação de  $DH$ , dois aspectos do exemplo de Newton ainda não estão claros. O primeiro refere-se ao fato de  $DH$  representar (na figura) um comprimento da tangente  $DT$ , isto é,  $DH$  é uma linha reta. Como é possível, portanto, a mesma equação de  $DH$  expressar o *momento* do arco  $AD$ ? Como se sabe, o arco  $AD$  é formado por uma linha circular; então, deverá haver algo no exemplo que permite a utilização da mesma equação de uma linha reta para uma linha circular. O principal candidato a esse “cargo” é a noção de movimento associada às quantidades, pois Newton raciocina com base na identidade entre o movimento que descreve a tangente e

e por fim,

$$DB = \sqrt{(x-x^2)},$$

ou seja,

$$y = \sqrt{(x-x^2)}.$$

o que descreve o arco. Em outras palavras, ao analisar a figura, pode-se perceber que o ponto da curva (por onde passa a reta  $HK$ ) e o próprio ponto  $H$  atingem o ponto  $D$  em função do mesmo movimento: o movimento de  $K$  até  $B$ . Desse modo, o *momento* da tangente deve ser realmente igual ao *momento* da curva. Assim, ao encontrar a equação do primeiro movimento da tangente, em função do movimento infinitamente pequeno de  $AB$ , também se encontra a equação do primeiro movimento do arco  $AD$ .

O outro aspecto refere-se ao objetivo inicial de encontrar o arco  $AD$  como um todo, ou seja, com essa equação de  $DH$ , Newton encontrou somente o valor de um *momento* do arco  $ADE$ : o valor do primeiro movimento do arco  $AD$ . Para que se possa encontrar o valor total do arco, Newton aplica a regra I à equação de  $DH$ . Contudo, o que permite essa aplicação? É a similaridade, referida acima, entre os dois problemas das figuras curvilíneas. Em outras palavras, se o problema é encontrar a área da curva, deve-se aplicar a regra I à equação da curva (que somente expressa um valor do eixo  $y$  de cada vez em uma curva), transformando-a em uma equação mais geral (que considera todos os valores de  $y$ ). A partir disso, Newton assume que o mesmo deverá acontecer quanto ao problema do comprimento total da curva. Para ele a curva total seria uma espécie de somatória de todos os *momentos* da curva. Assim o problema resume em transformar uma equação “simples” (que expressa somente um *momento* da curva), em outra que revele a curva como um todo. Portanto, o procedimento para isso encontra-se na própria regra I. Dessa maneira, essa regra deve ser aplicada na equação de  $DH$ , transformando-a em uma outra que será a equação da curva completa  $ADL$ .

No entanto, para aplicar a regra I à equação  $DH = \frac{\sqrt{(x-x^2)}}{2(x-x^2)}$ , Newton necessita

de uma outra regra. Essa é a regra III, que afirma a necessidade de transformar os termos compostos de uma equação em termos simples<sup>19</sup>. Aqui na equação de  $DH$ , tanto o denominador quanto o numerador seriam termos compostos. Da maneira como ali os termos estão apresentados, não existe a possibilidade de aplicação da regra I. É aqui que aparece uma das inovações importantes do *De analysi*: Newton sugere uma técnica de manipulação simbólica para transformar termos compostos em simples. Todavia, tal transformação se apóia na utilização de séries infinitas, ou seja, a extração da raiz

$$\sqrt{(x-x^2)}$$

---

<sup>19</sup> Nas palavras de Newton: “Regra III: mas se o valor de  $y$ , ou algum de seus termos for mais composta do que as precedentes [como visto nas regra I e II], deve-se reduzir em muitos termos simples...” (MP-2, p. 211.)

pode ser escrita como uma série infinita<sup>20</sup>:

$$x^{1/2} - \left(\frac{1}{2}\right)x^{3/2} - \left(\frac{1}{8}\right)x^{5/2} \dots$$

Da mesma maneira a divisão

$$\frac{1}{2(x-x^2)}$$

se transforma em:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{1}{x}\right) - x^0 + x^1 - x^2 \dots\right]$$

Portanto, a equação de  $DH$  é a multiplicação dessas duas séries infinitas e que resulta em:

$$\left(\frac{1}{2}\right)x^{-1/2} + \left(\frac{1}{4}\right)x^{1/2} + \left(\frac{3}{16}\right)x^{3/2} \dots$$

Agora, utilizando-se da regra II, pode-se aplicar a regra I a essa última série infinita, transformando-a em:

$$x^{1/2} + \left(\frac{1}{6}\right)x^{3/2} + \left(\frac{3}{40}\right)x^{5/2} \dots$$

Essa é a equação que revela o valor do arco  $ADH$  como um todo.

Agora, após ter encontrado a equação para o arco  $ADH$ , cabem ainda algumas considerações sobre o emprego do infinitamente pequeno nesse último exemplo de Newton. Como foi possível observar, ali se considerou o retângulo  $HGBK$  como possuindo lados com magnitude infinitamente pequena. Sem isso, não se chegaria à equação final do arco, isto é,  $x^{1/2} + \left(\frac{1}{6}\right)x^{3/2} + \left(\frac{3}{40}\right)x^{5/2} \dots$ . Porém, qual é a natureza dessa quantidade infinitamente pequena utilizada por Newton? Nesse manuscrito, não existem declarações explícitas sobre a natureza de tal quantidade. O que existem são indícios da utilização de uma quantidade infinitesimal que aproximaria Newton dos métodos de outros matemáticos de sua época. Isso pode se confirmar na seguinte declaração:

---

<sup>20</sup> No *De analysi*, Newton interpreta a transformação de equações com termos compostos em infinitas séries como uma espécie de alargamento do poder de análise: “se a análise comum executa equações compostas por um número finito de termos (sempre que isso for possível), este método [apresenta no *De analysi*] pode sempre executar [resolver problemas] por equações de infinitos termos: em consequência, eu jamais hesitei em outorgar-lhe também o nome de análise” (MP-2, p. 235). Mesmo que se acredite ter ampliado o poder da análise, o próprio Newton não fornece os fundamentos para que a igualdade  $\sqrt{(x-x^2)} = x^{1/2} - \left(\frac{1}{2}\right)x^{3/2} - \left(\frac{1}{8}\right)x^{5/2} \dots$  seja verdadeira. Aqui, Newton somente fornece a técnica para a extração de raiz e para a divisão dessas equações de termos compostos. Visto que o objetivo é somente analisar o comprometimento de Newton com o infinitamente pequeno, não me deterei nesses desenvolvimentos formais aqui.

“Mas deve-se notar que essa unidade que é colocada por momento é uma face quando a questão concerne aos sólidos; uma linha quando se relaciona às faces e um ponto quando (como neste exemplo) se trata de linha. Não tenho receio de falar de unidade no ponto ou linha infinitamente pequena visto que geômetras agora consideram proporções com estes quando usam métodos indivisíveis” (MP-2, p. 235).

Aqui, é possível observar que Newton não está muito preocupado com a real natureza do que ele denominou infinitamente pequeno. Sua preocupação central é especificar e raciocinar com base na existência de *momentos*. Ou seja, ao supor que as magnitudes geométricas são constituídas por movimentos, Newton assume que deve existir uma primeira magnitude pela qual tanto linha, face ou sólido são descritos. Como visto, essa primeira magnitude descrita é nomeada como *momento*. Seria contraditório aceitar, por exemplo, o movimento de um ponto sem que se assuma a existência de uma primeira e menor quantidade possível de linha descrita. No entanto, Newton percebe que não existe a necessidade de justificar a própria natureza dessa quantidade infinitamente pequena, porque, seja qual for a sua natureza, ela sempre será a “primeira quantidade” descrita. Logo, pode-se representá-la como unidade ao se estabelecer proporções a partir dela. Assim, seja essa unidade um indivisível ou uma linha infinitamente pequena, não importa<sup>21</sup>. O que realmente é importante é assumir que existe o primeiro aumento de uma magnitude geométrica descrita pelo movimento e que ela possa ser tratada como unidade quando colocada em proporção com as demais quantidades finitas.

### 1.1.3. *Momentos, fluxões e fluentes no De methodis*: a noção cinemática da matemática

Um outro caso em que a da arte analítica de Newton incorpora irrestritamente a suposição de quantidades infinitamente pequenas (ou indefinidamente pequeno)<sup>22</sup> está presente no texto *De methodis serierum et fluxionum* (1670-1671). Ali Newton parece utilizá-lo livremente, sem elaborar nenhuma justificativa para as suas duas características paradoxais: em primeiro lugar, o infinitamente pequeno seria alguma quantidade (algo que se soma às quantidades finitas) e, em segundo lugar, elas não possuiriam a capacidade de alterar as quantidades finitas, pois, seriam “nada” em relação ao que é finito. Essas características fazem do infinitamente pequeno uma

<sup>21</sup> Provavelmente Newton aqui se refere aos métodos de indivisíveis como o de Cavalieri e Isaac Barrow.

<sup>22</sup> Newton usa os termos latinos *infinite parvum* no texto original do *De methodis* (cf. MP-3, p. 80-81). Whiteside os traduz por *indefinitely small*, na edição dos *Mathematical Works* (cf. MW-1, p. 52). Com relação a esse texto de Newton, seguirei a mesma perspectiva de Guicciardini quanto ao “infinitamente” ou “indefinidamente” pequeno, ou seja, serão tratados como sinônimos (cf. Guicciardini, 1999, p. 21-22).

quantidade *sui generis*, pois de um lado, ele é alguma coisa, alguma quantidade (por entrar no processo de comparação com quantidades finitas), e de outro, é incapaz de alterar a magnitude do que é finito. Portanto, admiti-lo como tal seria atribuir propriedades “aparentemente” opostas ao mesmo sujeito.

No *De methodis*, pode-se observar essa admissão tácita da dupla natureza do infinitamente pequeno quando Newton manipula algumas de suas equações. Um exemplo encontra-se na seção denominada “transição para o método das fluxões”<sup>23</sup>. O exemplo a ser analisado é uma demonstração de Newton para uma solução fornecida a um primeiro entre dois problemas gerais. Trata-se da transformação das equações abaixo:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0 \quad (1.1)$$

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0 \quad (1.2)$$

Da equação (1.1) Newton encontra a equação (1.2). No entanto, antes do estudo dessa transformação, propriamente dita, será proveitoso esclarecer alguns fundamentos e definições mobilizados por Newton nessa tarefa.

#### 1.1.3.1. *Conceitos preliminares importantes: movimento, velocidade e tempo*

Para realizar essa transformação, Newton adota uma concepção de matemática que fornece ao movimento um importante papel em relação às magnitudes geométricas: atribui-se ao movimento local, isto é, ao movimento no espaço, a função de construir as magnitudes geométricas. Além de aparecer em autores anteriores a Newton, essa concepção cinemática da matemática apareceu em seus manuscritos anteriores ao *De methodis*<sup>24</sup>. Um exemplo, como visto acima, é o próprio *De analysi*, cujas linhas são descritas pelo movimento de pontos. Por sua vez, no *De methodis*, a concepção cinemática é introduzida na seguinte passagem, onde Newton adverte sobre a redução de vários problemas matemáticos a somente dois problemas gerais<sup>25</sup>:

---

<sup>23</sup> Essa seção é apresentada após Newton fornecer esclarecimentos mais detalhados, em comparação como o texto *De analysi*, sobre equações e as séries infinitas.

<sup>24</sup> Existem anotações de Newton, do período de 1665-1666, formuladas já com essa noção cinemática de magnitudes matemáticas. Não se pode dizer que essa concepção cinemática de Newton é uma “invenção” sua. Autores como Cavalieri e Barrow já utilizaram essa concepção de magnitudes geométricas descritas pelo movimento.

<sup>25</sup> Esses dois problemas gerais são identificados por comentadores (entre eles Athur e Guicciardini) como sendo um procedimento fundado no *teorema fundamental do cálculo*, isto é, que um problema é inverso do outro. Por outro lado, eles são dois problemas gerais no sentido de que eles são um procedimento algorítmico que pode ser aplicado para solucionar vários problemas. Isso significa que os passos fornecidos para as soluções desses problemas gerais são os mesmos para muitos outros. Entre os mais comuns, Newton o aplica na solução de problemas tais como: determinar a quadratura da



“Para uma ilustração da Arte Analítica, agora darei algumas espécies de problemas, especialmente os proporcionados pela natureza das curvas. Agora, em função disso, observo que todas as dificuldades a esse respeito podem ser reduzidas somente a dois problemas, considerando o *espaço como descrito pelo movimento local* (qualquer que seja o movimento, acelerado ou retardado)” [itálico meu] (MW-1, p. 48-49).

Em seguida, Newton complementa com os dois problemas:

1-O comprimento de espaço descrito sendo continuamente dado (isto é, em todo tempo), encontrar a velocidade do movimento em algum tempo proposto.

2-A velocidade do movimento sendo continuamente dado, encontrar o comprimento do espaço descrito em algum tempo proposto.

Ao afirmar que o “espaço é descrito pelo movimento local”, Newton pressupõe que as figuras geométricas em movimento recebem acréscimo ou decréscimo contínuo quando são descritas. Há em vários exemplos, no *De methodis*, a utilização de um ponto em movimento como descrevendo uma linha; e do mesmo modo, de linhas descrevendo planos. Se o movimento é “acelerado ou retardado”, isto é, se o movimento nasce ou esvaece (dependendo do caso a ser considerado), as linhas ou os planos recebem contínuos acréscimos ou decréscimos de magnitudes.

Sendo assim, o acréscimo ou decréscimo das magnitudes deve incorporar dois outros elementos importantes: o *tempo* e a *velocidade*. Na concepção cinemática newtoniana, interpreta-se o aumento ou diminuição das magnitudes como ocorrendo no *tempo* e possuindo alguma *velocidade*. Nesse ponto de vista, o movimento que descreve as magnitudes geométricas é entendido como um evento temporal, no sentido de que os eventos que são ditos cinemáticos possuem o tempo como uma espécie de substrato. O tempo é algo que flui ininterrupta e uniformemente, e todo movimento ocorre conjuntamente com o fluir desse tempo. Desse modo, Newton assume que o tempo é uma afecção comum aos vários momentos que descrevem as magnitudes matemáticas – ainda que sejam eles distintos em suas velocidades.

É essa característica do tempo que permite esclarecer o que Newton está assumindo como velocidade (que é o outro elemento ali envolvido). Pois, devido ao fato do tempo ser esse elemento comum aos vários movimentos, existe a possibilidade de compará-los entre si. Isso permite estabelecer a diferença de intensidade com que as quantidades aumentam ou diminuem. A velocidade, nesse sentido, é apreendida por

---

curva, tangentes, raios da curva, subnormais, máximos e mínimos, etc. (cf. Arthur, 1995, p. 336-338) e (cf. Guicciardini, 1999, p. 20).

essa comparação entre as intensidades com que aumentam ou diminuem os movimentos descritos no tempo. Subentendido a esse tratamento da velocidade, está o caráter indireto do procedimento para mensurá-la: mediante a comparação entre as quantidades constitutivas do movimento. Mas, de todo modo, a velocidade deve ser interpretada como uma magnitude *intensiva*, distinguindo-se das extensivas que são mensuradas diretamente. Na realidade, no *De methodis*, não existe uma definição propriamente dita do conceito de velocidade utilizada. Segundo De Gandt, Newton estaria entre os autores que assumem um conceito de velocidade já muito utilizado (cf. 1999, p. 43).

Uma dos disseminadores modernos do conceito de velocidade adotado por Newton foi Galileu: como sendo uma *qualidade* presente nos corpos em movimento – sendo ela suscetível de aumentar ou diminuir<sup>26</sup> – e que, por sua vez, não seria algo medido diretamente da mesma maneira que magnitudes extensivas, como linhas, planos e sólidos. Assim, a velocidade é tratada, por Galileu, como uma magnitude *intensiva*, no sentido de que ela somente pode ser mensurada indiretamente por outras magnitudes. É por isso que Galileu cuidou da sua terminologia: o movimento não possuiria uma determinada *quantidade* de velocidade mas sim um determinado *grau* finito de velocidade. Quanto a Newton, em outro texto de sua juventude, *De gravitatione et aequipondio fluidorum* (1664-1668), aparece ali de maneira explícita o seu comprometimento com a velocidade como algo intensivo: “Definição XIV: a velocidade é a *intensidade* [*intensio*] do movimento, e a *lentidão* a sua diminuição” [itálico meu] (Newton, 1962, p. 115). Nessa definição, a “intensidade” é um termo que se refere a uma espécie de qualidade do móvel. Ainda é possível perceber a diferença entre o que é qualitativo e quantitativo em outras duas anteriores definições: “Definição XI: A *intensidade* de qualquer força (...) é o grau de sua qualidade [*est ejus qualitatis gradus*]. Definição XII: A sua *extensão* é a quantidade de espaço ou de tempo na qual se opera” [itálico meu] (Newton, 1962, p. 115). Aqui, mesmo Newton se referindo ao conceito de força<sup>27</sup>, é possível observar que o termo “quantidade” é relacionado somente ao que é “extensivo”. Isso quer dizer que a grandeza intensiva não possui uma medida direta através da soma de suas partes. O grau intensidade se revela de maneira indireta, como é o caso do movimento, cuja intensidade é apreendida pela relação entre grandezas extensivas: “Desta maneira, o movimento é mais intenso ou mais fraco

---

<sup>26</sup>

(cf. De Gandt, 1999, p. 43).

<sup>27</sup>

No *De gravitatione*, Newton define força como causa do movimento, quanto às ciências mecânicas. Para ele, nesse caso, seriam exemplos de força: a gravidade, a inércia, pressão etc (cf. USPN, p. 114-115).

conforme o espaço percorrido, ao mesmo tempo, for maior ou menor. Isso é razão pela qual se diz que um corpo se move com mais rapidez ou com maior lentidão...” (Newton, 1962, p. 115).

A interpretação de que Newton, no *De methodis*, utiliza a velocidade como magnitude intensiva, pode ser ainda reforçada ao se observar a concepção de Barrow sobre a velocidade. É muito provável que Newton teria se inspirado, quanto a esse conceito de velocidade, na obra de Barrow *Lectiones geometricae* (1670)<sup>28</sup>. Pois, Newton, na mesma época que elabora o *De methodis*, teria auxiliado Barrow na publicação de suas *Lectiones*<sup>29</sup>. Em sua obra, Barrow apresenta a velocidade como algo que só é mensurável indiretamente pela relação entre espaço e tempo: “quantidade de velocidade não pode ser encontrada a partir somente da quantidade de espaço percorrido, nem somente a partir do tempo apreendido, mas a partir da apresentação de ambos juntamente reconhecidos” (Barrow, 1916 p. 38). Mesmo que Barrow nessa afirmação se refira à velocidade com o termo “quantidade”, está evidente que aí a velocidade é tratada como algo indiretamente mensurável. A quantidade de velocidade é algo obtido de maneira diferente da quantidade, por exemplo, do espaço. Em outras afirmações, Barrow substitui o termo “quantidade” de velocidade para “grau” de velocidade, no sentido dado por Galileu. Um exemplo encontra-se em sua suposição de que existe um espaço percorrido para cada grau de velocidade em um instante de tempo: “para cada instante de tempo, afirmo que corresponde algum grau de velocidade, que se considera possuir o movimento do corpo no instante” (Barrow, 1916 p. 38). Desse modo, é evidente o uso da velocidade, por Barrow, enquanto uma qualidade do que está em movimento e, nesse sentido, só será apreendida na comparação entre quantidades extensivas. Igualmente, pode-se afirmar que Newton realmente retoma esse conceito de velocidade, no *De methodis*, porque (como será observado mais à frente em relação ao conceito de *momento*) em nenhum de seu tratamento a velocidade é mensurada sem se comparar (com o recurso de equações) no mínimo duas magnitudes descritas pelo movimento.

De volta à discussão sobre o conceito de tempo no *De methodis*, é ainda possível tirar proveito da distinção entre intensivo e extensivo na interpretação do que Newton

---

<sup>28</sup> Segundo Whiteside, posição igualmente assumida por Arthur, Newton possuiria um débito conceitual e esquemático a Barrow, na apresentação de sua matemática cinemática do *De methodis*. Entre tais débitos estaria o conceito de velocidade como grandeza intensiva. Por outro lado, Barrow estaria seguindo o conceito de Galileu, quanto à velocidade. (cf. MP-3, Nota 43, p. 48-49) e (cf. Arthur, 1995, p. 336-338).

<sup>29</sup> (cf. Jesseph, 1993, p. 144).

apresenta como noções cinemáticas aplicadas aos objetos matemáticos. Na seguinte afirmação, há a preocupação em assumir o tempo como algo que não é medido diretamente: “...não consideramos o tempo aqui algo além do que é exposto e medido por um movimento local uniforme [equable]...” (MW-1, p. 49). Em sua Definição XII, do *De gravitatione* (acima citada), Newton aplica o termo “extensão” tanto para as quantidades referentes ao espaço como para as referentes ao tempo. Ao comparar a afirmação sobre o tempo no *De methodis* com essa Definição XII, evidenciam-se dois tratamentos dados ao tempo. Enquanto no *De gravitatione* o tempo parece ser uma quantidade extensiva, como possuindo uma mensuração direta, no *De methodis*, Newton esclarece que o tempo não é algo que se possa medir diretamente. Assim, surge a pergunta: por que, por um lado, o tempo é assumido como uma magnitude extensiva, análoga ao espaço, e, por outro, Newton indica a impossibilidade de acesso direto às medidas do tempo? Para responder, cabe esclarecer que, no *De methodis*, Newton fornece equações (de quantidades descritas pelo movimento) tomando o tempo de duas maneiras. A primeira é o *tempo verdadeiro* e a outra o tempo compreendido por *analogia*. Essa distinção se mostra necessária, pois está em jogo a preocupação de estabelecer uma homogeneidade entre as quantidades presentes nas equações. Para Newton, tempo (no sentido verdadeiro) e espaço descrito são de naturezas distintas e, portanto, não poderiam ser comparadas em uma mesma equação. Desse modo, Newton evita a afirmação de que o tempo está apreendido de maneira verdadeira, ou de maneira formal, isto é, apreendendo as medidas do próprio tempo. A solução de Newton é medir o tempo indiretamente, por analogia. Aí, o movimento local seria a base para formulação dessa outra noção de tempo:

“... ao passo que (...) somente coisas da mesma espécie podem ser comparadas, sendo que vale o mesmo para suas velocidades de aumento e decréscimo. Por isso, no que segue, não tratarei o tempo considerando-o formalmente. Mas suporei que alguma das quantidades propostas, sendo da mesma espécie, é incrementada por um fluxo uniforme, pelo qual o restante poderia referir-se como se fosse ao tempo. Sendo por isso, por meio da analogia, que isso pode propriamente receber o nome de tempo. Seja onde for que a palavra tempo ocorrerá no que segue (que em consideração à perspicuidade e distinção que tenho algumas vezes usado), não terei compreendido como se medisse o tempo em sua acepção formal, mas somente compreendo esta outra quantidade, por cujo aumento uniforme ou fluxão, o tempo é exposto e medido” (MW-1, p. 49).

Newton está pressupondo aqui que todo movimento local ocorre acompanhado do tempo verdadeiro. Assim, aceitar a ocorrência do movimento local é, também, aceitar que o tempo verdadeiro se manifestou. Assumindo esse ponto de vista, pode-se tomar o

próprio movimento local de uma das quantidades da equação, movendo-se uniformemente, como uma quantidade de referência de tempo. Isso permite dizer que o tempo presente nas equações pode ser compreendido, por analogia, como uma quantidade extensiva. O exemplo (apresentado acima) do *De analysi* revela essa mesma compreensão. O que ali Newton chamou de unidade de movimento, ou momento da linha  $AB$  (ver figura 1.4), é a referência de tempo para os demais movimentos. À medida que esse momento ocorre, Newton procura analisar o que se passa com o movimento das demais quantidades. Na Definição XII do *De gravitatione*, apesar de não fornecer muitos esclarecimentos sobre a natureza quantitativa do tempo, é muito provável que Newton esteja assumindo o tempo como quantidade extensiva a partir do ponto de vista da analogia: o tempo que se pode medir diretamente, ou seja, o tempo que se identifica pelo movimento local.

#### 1.1.3.2. *Fluentes, fluxões e momentos*

Temos agora o necessário para discutir os três conceitos centrais que estruturam a concepção cinemática presente no *De methodis*. São eles: *quantidade fluente*, *fluxão* e *momento*. A quantidade fluente nada mais é do que a própria quantidade espacial descrita pelo movimento. Nesse caso, são linhas, planos e sólidos. Os símbolos utilizados nas equações para tais quantidades são as letras finais do alfabeto:  $v$ ,  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Todavia, quantidades fluentes são descritas pelos movimentos com alguma velocidade. Trata-se das fluxões e que serão representas por letras pontuadas: “a velocidade pela qual todo fluente é aumentado pelo seu movimento gerador (que eu chamarei de *Fluxão*, ou simplesmente velocidade ou celeridade) representarei pelas mesmas letras [que as das quantidades fluentes] pontuadas assim:  $\dot{v}$ ,  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  e  $\dot{z}$ .” (MW-1, p. 49). Assim, por exemplo, quaisquer quantidades fluentes representadas pelas letras  $v$  e  $x$  possuem suas fluxões representadas, respectivamente, pelas letras pontuadas  $\dot{v}$  e  $\dot{x}$ .

O terceiro conceito traz consigo uma referência explícita ao *infinitamente pequeno* (ou *indefinidamente pequeno*): “os momentos de quantidades fluentes (isto é suas partes indefinidamente pequenas, que por aceleração, são continuamente aumentadas em uma porção indefinidamente pequena de tempo) são como as velocidades de seus fluir” (MW-1, p. 52). Nesse caso, o momento é um caso especial da quantidade fluente. Pois, visto que o movimento que descreve as quantidades matemáticas está acompanhado pelo fluir do tempo “verdadeiro”, é de supor que ao se tomar a menor parte fluente desse tempo (que para Newton é infinitamente pequena)

poderá se obter a menor parte da quantidade fluente. O interessante é que Newton também assume essa quantidade fluente como infinitamente pequena. Vale lembrar que o *momento*, no *De methodis*, possui uma representação simbólica nas equações diferente da representação que aparece no *De analysi*. Essa é uma das mais marcantes diferenças entre tais textos. Enquanto neste último texto Newton se refere ao símbolo de uma quantidade em movimento como sendo o símbolo do *momento*, naquele primeiro texto, o conceito de *momento* vem dotado de um suporte simbólico, cujo detalhamento abarca, além da velocidade, inclusive a presença do tempo. Melhor dito, se duas quantidades fluentes são representadas por  $x$  e  $y$ , os seus *momentos* entrarão nas equações, respectivamente, com os seguintes símbolos:  $\dot{x}o$  e  $\dot{y}o$ . Aqui existe uma multiplicação entre o símbolo da fluxão e  $o$  (a letra grega ômicron). A função dessa letra grega é justamente marcar a presença do tempo. Mas vale ressaltar que com ele não se apreende o tempo no sentido formal, verdadeiramente. Essa letra funciona como um indicativo de que linha infinitamente pequena é apreendida em uma determinada parcela de tempo (que nesse caso é infinitamente pequena).

Por outro lado, é curiosa a utilização dos símbolos das fluxões (isto é,  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ ) como um dos elementos para representar os *momentos*. Em primeiro lugar, isso denota que Newton assume – além do tempo por analogia – a possibilidade de representar a velocidade, a fluxão de uma quantidade fluente, utilizando linhas descritas pelo movimento: “portanto, eu considero, no que segue, coisas geradas por um contínuo aumento, da mesma maneira que o espaço, como uma coisa ou ponto em movimento descrito” (MW-1, p. 49). Dessa maneira,  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  são também linhas descritas em uma quantidade de tempo  $o$ . Assim, dada uma equação que representa as quantidades fluentes contendo  $x$  e  $y$ , considerando-se essa parcela de tempo infinitamente pequena, pode-se somar os *momentos* às variáveis. A soma é construída por Newton da seguinte maneira:  $(x + \dot{x}o)$  e  $(y + \dot{y}o)$ . Essas somas significam que, após o transcorrer dessa quantidade infinitamente pequena de tempo, cada quantidade fluente aumentou continuamente com a soma de seus respectivos *momentos*. Todavia, pode-se colocar a seguinte pergunta: se uma equação pretende representar somente quantidades fluentes, como é possível, do ponto de vista da homogeneidade, somar uma quantidade fluente a sua fluxão, como é o caso de  $(x + \dot{x}o)$  e  $(y + \dot{y}o)$ ? Mesmo que Newton considere as fluxões “da mesma maneira que o espaço”, ou seja, como linhas descritas pelo movimento de pontos, ainda deve haver uma justificativa para Newton utilizar esses

símbolos de fluxões (que não são as mesmas linhas representadas por  $x$  e  $y$ ) para simbolizar *momentos* em equações de quantidades fluentes. Em outras palavras, o que permite dois símbolos para coisas diferentes se somarem? Essa justificativa, cujo desenvolvimento que está oculto na apresentação de Newton, pode ser construída da seguinte maneira.

Como já foi observado acima, todo movimento possui uma velocidade. Ao se considerar que existe um tempo verdadeiro que flui igualmente para todos os movimentos, surge um elemento comum que permite comparações entre tais movimentos. Assim, por exemplo, além assumir que quantidades fluentes como  $x$  e  $y$  possuem velocidades, admite-se que seus movimentos podem ser comparados. Agora, supondo-se que em um determinado instante as velocidades de  $x$  e  $y$  sejam representadas por  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  e que, ainda, essas quantidades fluentes continuem se movimentando com a mesma velocidade em um intervalo de tempo  $O$ , pode-se, dessa maneira construir uma relação de proporcionalidade entre quantidades fluentes e fluxões<sup>30</sup>. Um detalhe importante surge quando Newton trata o tempo como aumentando por “um fluxo uniforme, pelo qual o restante poderia referir-se”: o movimento nessa quantidade infinitamente pequena de tempo poderá também ser tratado como *uniforme*, de tal modo que a velocidade do início do movimento deverá ser igual à velocidade final, após decorrer a quantidade  $O$  de tempo. Esse movimento uniforme é algo essencial que permitirá estabelecer as relações de proporcionalidade. No início do movimento tal proporcionalidade pode ser a seguinte:

$$x : y :: \dot{x} : \dot{y} \quad (1)$$

Agora, considerando-se somente as fluxões, pode-se construir uma relação de proporção entre as suas quantidades do início e do movimento total realizado no tempo  $O$ . Devido o movimento ser uniforme, o seu início e o seu fim possuem a mesma velocidade, ou seja,  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ . Porém, para representar a quantidade dos movimentos realizados com essas velocidades, Newton utiliza o produto de  $O$  pelas respectivas fluxões, que assim

---

<sup>30</sup> A relação de proporcionalidade entre fluxão e quantidade fluente é sugerida por Arthur. Porém, ele se limita a informar essa proporcionalidade em linhas gerais, sem detalhar as proporções como faremos nesses próximos parágrafos: “...se for suposto um intervalo de tempo  $O$  indefinidamente pequeno e  $O$  for considerado um ‘momento’, então os ‘momentos’ indefinidamente pequenos de  $x$  e  $y$ , a saber  $\dot{x}O$  e  $\dot{y}O$ , estarão entre si na mesma razão que suas velocidades” (Arthur, 1995, p. 334).

constituem os distintos *momentos*. A proporção, portanto, entre as fluxões iniciais com os momentos seria a seguinte:

$$\dot{x} : \dot{y} :: \dot{x}o : \dot{y}o \quad (2)$$

Na mesma perspectiva, deve-se pensar as quantidades fluentes. Isso quer dizer que, se Newton assume que as quantidades fluentes aumentam continuamente, deve haver uma quantidade fluente que se pode somar às quantidades fluentes iniciais. Ou seja, se no início do movimento as quantidades fluentes são  $x$  e  $y$ , após o intervalo de tempo  $o$ , existem quantidades fluentes proporcionais resultantes das respectivas fluxões. Com a finalidade de representar essas quantidades geradas, será utilizado aqui as letras  $\alpha$  e  $\beta$ . Para o aumento da quantidade  $x$ , será utilizado a letra  $\alpha$ . Do mesmo modo, a letra  $\beta$  representará o aumento de  $y$ . A proporção, portanto, será:

$$x : y :: \alpha : \beta \quad (3)$$

Como o objetivo é justificar a atitude de Newton de realizar as somas  $(x + \dot{x}o)$  e  $(y + \dot{y}o)$ , ao invés de  $(x + \alpha)$  e  $(y + \beta)$ , o desafio é mostrar como seria possível substituir as quantidades  $\alpha$  e  $\beta$ , da proporção (3), por  $\dot{x}o$  e  $\dot{y}o$ , presentes na proporção (2). Pelas proporções (1) e (3) obtém-se uma outra proporção entre as quantidades  $\alpha$  e  $\beta$  com as fluxões  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ . Isto é:

$$\alpha : \beta :: \dot{x} : \dot{y} \quad (4)$$

Considerando-se, agora, as proporções (2) e (4), surge uma nova proporção em que estão presentes as quantidades geradas no intervalo total de tempo  $o$ . Proporção que estão presentes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\dot{x}o$  e  $\dot{y}o$ :

$$\alpha : \beta :: \dot{x}o : \dot{y}o \quad (5)$$

Portanto, é com a garantia da proporção (5) que fluxão e a quantidade fluente gerada pelo movimento, no intervalo  $o$  de tempo proposto, que Newton pode formular as somas  $(x + \dot{x}o)$  e  $(y + \dot{y}o)$ . Pois, no sentido literal, sem essa relação de proporção, Newton só poderia estabelecer a soma das quantidades fluentes  $x$  e  $y$  com seus respectivos aumentos de quantidades fluentes, ou seja,  $\alpha$  e  $\beta$ . Aqui se representaria da seguinte forma:  $(x + \alpha)$  e  $(y + \beta)$ . Mas, como existe essa relação de proporcionalidade, estabelecida pela proporção (5), tanto  $\alpha$  como  $\beta$  podem ser substituídas nessa soma pelas fluxões  $\dot{x}o$  e  $\dot{y}o$ , que é onde se queria chegar para justificar a utilização dos



símbolos de fluxões como elementos dos *momentos* com que as quantidades fluentes aumentam pelo movimento.

Contudo, deve-se ressaltar novamente que os passos de (1) a (5) estão ocultos na apresentação de Newton. Ele se limita a afirmar a igualdade dos “momentos de quantidades fluentes” com as “fluxões de seu fluir”. Porém, é uma igualdade que não pode ser compreendida como sendo uma *igualdade de gêneros* entre quantidade fluente e fluxão, pois essa interpretação geraria problemas com respeito à homogeneidade das quantidades. Por exemplo, em um intervalo de tempo infinitamente pequeno, a velocidade pode ser uma quantidade finita. Por outro lado, nesse mesmo tempo, Newton interpreta que a quantidade fluente gerada é infinitamente pequena. Assim, o que justificaria a troca de um símbolo entre quantidade infinitamente pequena (que a primeira quantidade fluente) por um símbolo de fluxão (que pode ser finita)? A equivalência entre essas quantidades merece uma justificativa. Logo, uma possível resposta é tratá-la a partir das relações de proporções.

### 1.1.3.3. O primeiro problema proposto e a demonstração de sua solução a partir de duas propriedades do infinitamente pequeno

Com as somas  $(x + \dot{x}o)$  e  $(y + \dot{y}o)$ , Newton encontra um procedimento para solucionar o primeiro problema (apresentado acima), quanto à concepção cinemática: encontrar a velocidade de um movimento a partir de um comprimento de espaço descrito continuamente em um intervalo de tempo proposto. Isso significa que Newton admite que o *momento* possa ser expresso mediante os símbolos de velocidades das quantidades fluentes. Com isso estaria justificada a introdução de um símbolo fluxional em uma equação de quantidades fluentes. Assim, para solucionar tal problema – o de encontrar as relações entre velocidades – necessitar-se-ia somente de uma transformação dessa equação (de quantidade fluente) para uma equação que fornecesse a relação das velocidades, ou fluxões. Essa tarefa resume-se em uma “simples” manipulação entre os símbolos da equação.

Analisando o exemplo sugerido acima, a equação (1.1), ou seja,  $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ , expressa a relação entre as quantidades fluentes  $x$  e  $y$ . Por determinadas manipulações algébricas, ela se transforma na equação (1.2), ou seja,  $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{a}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$ , que expressa as relações entre as fluxões  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ . No entanto, no *De methodis*, Newton realiza a transformação dessa equação de duas maneiras. A primeira é a sua *solução* propriamente dita; a segunda é uma *demonstração*

dessa *solução*. Contudo, é ao demonstrar essa solução que Newton necessita dos símbolos de *momentos*, associando-os, mais abertamente, ao *infinitamente pequeno* (ou *indefinidamente pequeno*). Assim, em primeiro lugar, no que segue será analisada a *solução* de Newton e, logo após, a argumentação fornecida para justificá-la.

Podem-se dividir os passos realizados por Newton, para a solução do primeiro problema, da seguinte maneira: (a) dispor a equação de acordo com as potências dos símbolos das quantidades fluentes; (b) multiplicar cada termo por uma progressão geométrica; (c) realizar o mesmo [tanto passo (a) como (b)] para todos os símbolos de quantidade fluentes existentes na equação e, por último, (d) somar todos os resultados das multiplicações às equações. Esses passos são todos aplicados, como primeiro exemplo, na equação  $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ .

Quanto à quantidade fluente  $x$ , a equação já possui uma ordem decrescente de suas potências, respeitando o passo (a). A partir dessas potências, constrói-se uma série aritmética que contém o valor da potência multiplicado pelo símbolo da fluxão e dividido por  $x$ .<sup>31</sup> Para cumprir o passo (b) em relação à fluxão  $x$ , Newton fornece a seguinte série:

$$\frac{3\dot{x}}{x}, \frac{2\dot{x}}{x}, \frac{\dot{x}}{x}, 0,$$

onde o valor 0 corresponde ao valor da potência de  $x$  multiplicado por  $y^3$ , isto é,  $x^0 y^3$ . O resultado da equação, multiplicando cada membro da equação pelo seu respectivo valor na série,<sup>32</sup>:

$$3\dot{x}x^2 - 2ax^2 + ax\dot{y}$$

O passo (c) exige que se faça o mesmo com respeito à quantidade fluente  $y$ . Assim, a disposição da equação resulta em:

$$-y^3 + axy + x^3 - ax^2 = 0.$$

A progressão aritmética para multiplicação dos membros dessa equação é:

---

<sup>31</sup> Newton não fornece uma fórmula geral para construir essa progressão. Porém podemos sugerir que se na equação aparece  $x^n$ , onde  $n$  é qualquer valor da potência, deve-se multiplicar cada membro da equação por  $\frac{n\dot{x}}{x}$ . Da mesma maneira vale para  $y$ . Caso apareça  $y^n$ , deve-se multiplicá-lo por  $\frac{n\dot{y}}{y}$ .

<sup>32</sup> Por exemplo, o primeiro valor dessa equação  $3\dot{x}x^2$  é resultado da multiplicação entre  $x^3$  e  $\frac{3\dot{x}}{x}$ .

$$\frac{3\dot{y}}{y}, \frac{\dot{y}}{y}, 0.$$

Ao multiplicá-los, o resultado será:

$$-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x.$$

O último passo (d) exige que se faça a soma entre as equações resultantes, ou seja, entre

$$(3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{y}y) \text{ e } (-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x).$$

Portanto, o resultado será uma equação que poderá expressar a relação entre as fluxões  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ , ou seja:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{y}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0.$$

O seguinte quadro fornecido por Newton, resume todos os passos acima executados:

Multiplicar $x^3 - ax^2 + axy - y^3$	$-y^3 + axy - \frac{ax^2}{x^3}$
Por $\frac{3\dot{x}}{x} \cdot \frac{2\dot{x}}{x} \cdot \frac{\dot{x}}{x} \cdot 0$	$\frac{3\dot{y}}{y} \cdot \frac{\dot{y}}{y} \cdot 0$
Tem-se: $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{y}y$ *	$-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x$ *

A soma desses resultados (expressos no final de cada coluna) será a equação de relação entre as fluxões (MW-1, p. 50).

Cabe, agora, ainda justificar essa solução. Isso Newton realizou demonstrando (por outros caminhos algébricos), a partir da equação inicial, como é possível chegar à equação final (a equação que expressa a relação entre fluxões).

A demonstração de Newton inicia-se com a apresentação do conceito de *momento*. Para recapitular, é possível resumir esse conceito: como sendo a parte infinitamente pequena aumentada de uma quantidade fluente, com algum grau de velocidade, em um intervalo infinitamente pequeno de tempo. Como foi visto, acima, Newton assume a possibilidade de igualar as fluxões às quantidades fluentes descritas nesse intervalo de tempo. Porém, é uma igualdade construída a partir de uma relação de proporcionalidade. O resultado disso estabelecer a possibilidade de realizar as seguintes somas:  $(x + \dot{x}o)$  e  $(y + \dot{y}o)$ .

Tendo isso em vista, Newton interpreta a equação (1.1) como expressando a relação entre quantidades fluentes nascentes e finitas. Cinematicamente, isso significa que as quantidades finitas estão sendo aumentadas pelo acréscimo de seus momentos. Dessa maneira, tanto  $x$  quanto  $y$ , na equação

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

podem ser substituídos pelas somas  $(x + \dot{x}o)$  e  $(y + \dot{y}o)$ . Assim, aquela equação poderá ser transformada em:

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0.$$

As devidas multiplicações, podem ser expressas como segue:

Assim, o resultado total das multiplicações será:

<b>Termos individualmente tratados</b>	<b>Resultados das multiplicações</b>
$(x + \dot{x}o)^3 \Rightarrow (x + \dot{x}o) \times (x + \dot{x}o) \times (x + \dot{x}o)$	$x^3 + 3\dot{x}o x^2 + 3\dot{x}^2 o x + \dot{x}^3 o^3$
$-a(x + \dot{x}o)^2 \Rightarrow (-1) \times a \times [(x + \dot{x}o) \times (x + \dot{x}o)]$	$-ax^2 - 2ax\dot{o}x - a\dot{x}^2 oo$
$a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) \Rightarrow a \times [(x + \dot{x}o) \times (y + \dot{y}o)]$	$axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}oo$
$-(y + \dot{y}o)^3 \Rightarrow (-1) \times (y + \dot{y}o) \times (y + \dot{y}o) \times (y + \dot{y}o)$	$-y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2 ooy - y^3 o^3 = 0$

$$x^3 + 3\dot{x}o x^2 + 3\dot{x}^2 o x + \dot{x}^3 o^3 - ax^2 - 2ax\dot{o}x - a\dot{x}^2 oo + axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}oo - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2 ooy - y^3 o^3 = 0 \quad (1.3).$$

A partir dessa fase Newton muda o percurso de sua demonstração. Ele, agora, “por suposição” anula aqui os símbolos da equação inicial (1.1). Isso significa que, na equação (1.3), Newton estabelece a soma dos valores atribuídos aos termos da equação (1.1) como sendo igual a zero. Desse modo, se  $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ , é necessário eliminar esses termos da equação resultante (1.3), fazendo com que a equação fique igual a:

$$3\dot{x}o x^2 + 3\dot{x}^2 o x + \dot{x}^3 o^3 - 2ax\dot{o}x - a\dot{x}^2 oo + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}oo - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2 ooy - y^3 o^3 = 0 \quad (1.4).$$

Como cada termo dessa equação que restou possui um elemento comum, Newton estabelece uma eliminação de tal termo comum. Em outras palavras, o símbolo  $o$ , utilizado para representar a presença do tempo, está multiplicado em todos os termos da

equação. Assim, basta dividi-los pelo próprio  $o$  para efetuar a eliminação desse elemento comum. A equação que surge, portanto, será:

$$3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2\alpha x + \dot{x}^3o^2 - 2ax\dot{x} - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}y\alpha - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2\alpha y - y^3o^2 = 0 \quad (1.5).$$

A última tarefa, a partir daqui, é eliminar dessa equação os termos que ainda permaneceram multiplicados por  $o$ . A justificativa de Newton será a de tratá-los como quantidades infinitamente pequenas, ou seja, por estarem multiplicados por  $o$  (que representa uma quantidade infinitamente pequena) deverão ser também quantidades infinitamente pequenas. Para Newton, uma magnitude finita não pode ser alterada ao somar-se às quantidades infinitamente pequenas, pois elas seriam como *nada* em relação ao que é finito. Logo, ao eliminar, por esse motivo, o que está multiplicado por  $o$ , obter-se-á a equação encontrada na solução do problema. Nas palavras de Newton:

“mas considerando que  $o$  é suposto ser indefinidamente pequeno e que se refere ao momento de quantidade, conseqüentemente os termos que estão multiplicados por ele serão nada em relação ao resto: por isso eu os rejeito, e aí permanece  $3\dot{x}x^2 - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$ , como no exemplo 1 [que é a equação-solução do exemplo acima]” (MW-1, p. 52).

Cabe, no entanto, refletir sobre essas atitudes de Newton quanto ao infinitamente pequeno.

No percurso da demonstração acima, revelam-se duas diferentes maneiras de Newton considerar o que ele concebe como infinitamente pequeno. Uma delas encontra-se no início, quanto se estabelece a soma dos símbolos das quantidades fluentes com os seus respectivos *momentos*:  $(x + \dot{x}o)$  e  $(y + \dot{y}o)$ . A outra se localiza nos últimos passos quando se chega na equação desejada para expressar a relação entre fluxões. Trata-se da eliminação dos símbolos multiplicados por  $o$ , pois seriam quantidades consideradas como “nada” quando comparados com outras espécies de quantidades. Essas duas atitudes opostas sugerem duas características do infinitamente pequeno: primeiro, ele seria uma quantidade genuína, mas, por outro, a sua magnitude seria desprezível (restando como um “nada”) quando comparada às magnitudes finitas. Pode-se formular assim um princípio que, aparentemente, Newton utiliza nesse último caso: ao somar-se alguma quantidade finita  $A$  a uma quantidade infinitamente pequena  $\alpha$ , então a soma será  $A + \alpha = A$ <sup>33</sup>. Porém, o curioso desse tratamento é que ambas

<sup>33</sup>

Guicciardini sugere que esse princípio foi utilizado por muitos outros autores no século XVII. Ao apresentar essa demonstração para a solução do primeiro problema, ele sugere que Newton teria aplicado de fato tal princípio ao introduzir e eliminar o infinitamente pequeno no percurso dessa demonstração (cf. Guicciardini, 1999, p. 21-22).

características se mostram incompatíveis, na medida em que a primeira faz do infinitamente pequeno ser alguma coisa; a segunda o considera como “nada”. Agora, o desafio é saber se seria possível compreender o significado desse tratamento desigual sem que aí surja alguma espécie de contradição.

A resposta a isso se encontra na observação de Newton presente no final da demonstração. Ali, esclarece-se o porquê da eliminação de alguns termos presentes na equação (1.3):

“aqui se deve observar que os termos que não são multiplicados por  $o$  sempre *esvanecem*, como todos aqueles termos que são multiplicados por mais do que uma dimensão de  $o$ ; e que os restantes dos termos sendo divididos por  $o$  sempre adquirirão a forma que eles devem ter pela regra precedente [isto é, os passos realizados na *solução* do problema 1]. *Q. E. D.*” [meu itálico] (MW-1, p. 52).

Está evidente aqui que Newton se refere à eliminação dos termos da equação como quantidade que “esvaecem”. Nesse caso, são os termos da equação (1.1) e das quantidades multiplicadas por mais de uma dimensão da quantidade de tempo  $o$  (isto é, termos multiplicados por  $o^2$  ou com índice acima de 2). Conceber as quantidades como esvaecendo é o aspecto central da compreensão do significado dos dois tratamentos opostos dados ao infinitamente pequeno. Em outras palavras, após chegar à equação (1.3), Newton não mais concebe o movimento como sendo nascente. Supõe-se o contrário: as quantidades como se esvaecendo por um movimento retardado. O que permite essa mudança quanto ao movimento é a própria “arte analítica” assumida por Newton: os símbolos das equações podem representar várias espécies de quantidades. Nesse caso, as equações são as mesmas para representar as quantidades cinemáticas, tanto para o movimento retardado como para o acelerado.

Disso resulta que os passos realizados da equação (1.1) até (1.3) fornecem a equação para o intervalo das quantidades fluentes  $x$  e  $y$  mais os seus acréscimos nascentes. Após encontrar a equação desse intervalo, Newton compreende que ao se conceber esse mesmo intervalo, agora, como esvaecendo, a equação para ela deverá ser a mesma, ou seja, a equação (1.3). Desse modo, os termos da equação (1.1) devem ser “sempre” rejeitados na equação (1.3) quando o movimento atinge seu fim. Porque, necessariamente a soma  $x^3 - ax^2 + axy - y^3$  ficará igual a zero – já que essas quantidades fluente não mais existirão. Da mesma maneira, o intervalo de tempo  $o$ , também, atingirá o seu fim. Os termos que são multiplicados por esse símbolo devem, também, ser rejeitados, pois serão “nada” no sentido de que suas magnitudes

esvaeceram junto com o intervalo de tempo proposto. Por outro lado, as quantidades que possuem somente uma dimensão de  $o$  podem ser tratadas como quantidades independentes da própria fluxão dos tempo, pois elas podem ser isoladas de  $o$  ao se perceber que trata-se de somente um fator comum aos termos. É desse modo que Newton sugere a eliminação de  $o$  dividindo-se cada termo da equação pelo próprio  $o$ .

Concluindo, Newton concebe o infinitamente pequeno, no conceito de *momento*, como possuindo duas propriedades distintas. No início da demonstração, considera-o como uma quantidade que se pode somar às outras quantidades. Logo após, uma outra propriedade do infinitamente pequeno surge, aquela que estabelece a grandeza do infinitamente pequeno como desprezível, como sendo “nada”. Vê-se que Newton se esforça para compatibilizar esse duplo tratamento, introduzindo uma interpretação cinemática dos termos empregados na sua “arte analítica”: que uma mesma equação possa representar quantidades descritas como nascentes ou como esvanescentes. No início da demonstração, o que Newton chama de infinitamente pequeno são genuínas quantidades que, quando acrescidas a outras quantidades finitas, proporcionam-lhes acréscimos. Após isso, quando o movimento se esvaece, o infinitamente pequeno deve também se esvaecer, porque ele está vinculado ao intervalo de tempo que também está se esvaecendo.

#### 1.1.3.4. A solução do segundo problema proposto e o infinitamente pequeno

É importante lembrar que, no *De methodis*, o objetivo de Newton é apresentar o método das fluxões como uma ferramenta matemática para solucionar *dois* problemas gerais. Como foi analisado acima, o primeiro problema consiste em encontrar a equação que expresse a relação entre as fluxões, partindo da equação de relação entre as suas quantidades fluentes. O infinitamente pequeno aparece ali como um elemento necessário para sustentar a demonstração da solução a esse problema. Quanto ao segundo problema, sua solução é compreendida por Newton como sendo o processo inverso do primeiro. Desse modo, busca-se a equação de relação entre fluentes partindo da equação que expressa a relação entre as suas fluxões. Nos parágrafos a seguir, procura-se analisar os procedimentos algébricos de Newton para a solução do segundo problema, cujo interesse se deve ao fato de que esse procedimento ainda se apóia no mesmo conceito de infinitamente pequeno utilizado na demonstração da solução do primeiro problema.

Já no início da apresentação da solução do segundo problema, Newton fornece sua interpretação que reúne ambos os problemas: eles são problemas inversos. Assim, o que se deve fazer é manipular as equações envolvendo fluxões para obter as equações entre as quantidades fluentes correspondentes. Tal orientação é, conforme se nota, o caminho inverso realizado na solução do primeiro problema. Isso se diz na passagem abaixo, onde também estão esboçados os passos para a solução do segundo problema:

“Como este problema é o inverso do precedente, ele deve ser solucionado por um procedimento contrário, isto é, os termos multiplicados por  $\dot{x}$ , sendo dispostos de acordo com as dimensões de  $x$ , devem ser divididos por  $\frac{\dot{x}}{x}$ , e então pelo número de suas dimensões, ou por alguma outra progressão geométrica. Assim, o mesmo trabalho deve ser repetido com os termos multiplicados por  $\dot{v}$ ,  $\dot{y}$  e  $\dot{z}$ . A soma resultante deve ser igualada a nada, rejeitando os termos que são resultantes” (Newton, MW, v:1, p: 53).

O que é inverso, nesse caso, é também a operação realizada com os termos da equação: é uma operação de *divisão*. No *De methodis*, tomando divisão e multiplicação como operações inversas entre si, e considerando a solução do primeiro problema, Newton multiplica somente *uma vez* cada termo da equação inicial pelo seu termo correspondente (presente em uma progressão aritmética). Tal progressão é construída multiplicando o símbolo da fluxão com o valor do índice do seu símbolo de quantidade fluente e dividindo-se o que resulta pelo próprio símbolo dessa quantidade fluente em questão, ou seja, formula-se essa progressão de acordo com o padrão  $\frac{n\dot{x}}{x}$ , onde  $n$  é o valor do índice de cada  $x$  na equação inicial.

Um exemplo da solução desse segundo problema irá esclarecer melhor o que Newton assume como “caminho inverso”. Trata-se de remontar à equação  $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$  (1.1), tendo como ponto de partida  $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + \dot{a}xy - 3\dot{y}y^2 + \dot{a}yx = 0$  (1.2). A tabela abaixo, fornecida por Newton, resume os passos necessários para esse retorno. Por sua vez, ela não possui a progressão aritmética que permite a solução do problema dividindo os termos somente uma vez:

Dividir	$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + \dot{a}xy$	Dividir	$-3\dot{y}y^2 \quad * \quad + \dot{a}yx$
por $\frac{\dot{x}}{x} =$	$3x^3 - 2ax^2 + axy$	por $\frac{\dot{y}}{y} =$	$-3y^3 \quad * \quad + axy$
Div. por	3 . 2 . 1	Div. por	3 . 2 . 1
Escreve-se:	$x^3 - ax^2 + axy$	Escreve-se:	$-y^3 \quad * \quad + axy$



O que se realiza aqui, no entanto, não são os passos inversos da solução do primeiro problema. Pois, a partir da primeira linha – sendo organizada de acordo com os índices de  $x$  e  $y$  - realiza-se duas divisões. A primeira por  $\frac{\dot{x}}{x}$  e  $\frac{\dot{y}}{y}$ ; e a segunda pelos índices de  $x$  e  $y$  (presentes na terceira linha). Ao somar os resultados finais das duas colunas, expressa na última linha, deve-se ainda eliminar um dos termos repetidos. Assim, a

$$\text{equação final será } 3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0.$$

Por outro lado, essa solução poderia ser efetuada por somente uma divisão da equação inicial. Como já foi afirmado, Newton considera que é possível elaborar uma progressão aritmética que permita alcançar a equação final por meio de somente uma divisão. Nesse caso, a equação será, para os termos multiplicados por  $x$ ,

$\frac{3\dot{x}}{x} \cdot \frac{2\dot{x}}{x} \cdot \frac{\dot{x}}{x}$  e, para os termos multiplicados por  $y$  a progressão,

$$\frac{3\dot{y}}{y} \cdot \frac{2\dot{y}}{y} \cdot \frac{\dot{y}}{y} \quad 34$$

Desse modo, pode-se formular uma tabela, seguindo a atitude de Newton, para resumir os passos da solução do segundo problema para a equação (1.2):

Dividir $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y$	Dividir $-3\dot{y}y^2 + 0\dot{y}y + a\dot{y}x$
Por $\frac{3\dot{x}}{x} \cdot \frac{2\dot{x}}{x} \cdot \frac{\dot{x}}{x}$	Por $\frac{3\dot{y}}{y} \cdot \frac{2\dot{y}}{y} \cdot \frac{\dot{y}}{y}$
Tem-se: $x^3 - ax^2 + axy$	Tem-se: $-y^3 + 0 + axy$

Portanto, ao se desconsiderar os termos que se repetem, o resultado final será a soma dos termos presentes na última linha das duas colunas.

Ao contrario do que ocorreu em relação à solução do primeiro problema, Newton não fornece para a solução do segundo problema uma demonstração propriamente dita. Para assegurar a certeza da solução desse segundo problema, ele ainda se apóia na demonstração fornecida para o primeiro problema:

“Existem algumas outras circunstâncias para se observar, o que eu confiarei à sagacidade do artista [que é o matemático analista]. Por isso seria desnecessário

---

<sup>34</sup> Sugerimos que essas progressões podem ser encontradas a partir das fórmulas  $\frac{(n+1)\dot{x}}{x}$ , para os termos multiplicados por  $x$ , e  $\frac{(n+1)\dot{y}}{y}$ , para os multiplicados por  $y$ . Aqui  $n$  será o valor do índice, respectivamente, de  $x$  e  $y$  presentes na equação inicial que expressa a relação entre quantidade fluentes.

demorar-se longamente neste assunto, já que o problema [isto é, o segundo problema] não pode ser sempre solucionado por esse artifício. No entanto, adiciono que após se obter a relação entre os fluentes por esse método e se podemos retornar pelo problema I para a equação proposta que envolve fluxões, então o trabalho está correto; caso contrário, não” (MW-1, p. 53).

Aqui, devem-se destacar dois pontos importantes. Um refere-se ao fato de Newton considera essa solução sugerida para o segundo problema como sendo limitada. De fato, admite-se, no *De methodis*, a necessidade de fornecer outros tipos de soluções conforme a característica das quantidades fluentes e fluxões envolvidas nas equações. É por isso que Newton denomina tal solução “solução particular”<sup>35</sup>. O outro ponto diz respeito ao termo “circunstâncias”. Com ele, Newton está referindo-se à necessidade de fornecer uma demonstração aos passos dessa solução do segundo problema. No entanto, tal tarefa é repassada para outros matemáticos realizarem (isto é, “artistas” capazes de elaborar tais passos).

Contudo, para ampliar a certeza dos resultados obtidos ao aplicar o algoritmo encontrado para a solução do segundo problema, Newton assume um procedimento indireto. Bastaria aplicar à equação final encontrada nessa solução (à equação de relação entre fluentes) os passos da solução do primeiro problema. Assim, ilustrando com as próprias equações, a busca por uma certeza da solução do segundo problema resume-se da seguinte maneira:

- Primeiro, aplica-se os passos sugeridos para a solução do segundo problema à equação  $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$  (1.2). Com isso ela se transforma na equação que representa a relação entre fluente  $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$  (1.1).
- Segundo, para saber se essa transformação está correta, deve-se aplicar à equação (1.1) os passos que solucionam o primeiro problema. Nesse caso, deve-se encontrar a mesma equação (1.2); caso contrário, a solução inicial proposta ao segundo problema está incorreta.

## 1.2. O estilo sintético de Newton: o método das primeiras e últimas razões

Como já foi possível observar, apareceram dois tratamentos distintos fornecidos ao infinitamente pequeno. Após a conclusão do *De methodis*, por volta de 1670,

---

<sup>35</sup> Newton realmente, no *De methodis*, propõe outras soluções para equações que possuem termos “afetados” ou que necessitam extração de raiz por infinitas séries. Para mais detalhes, ver (MW-1, p. 53-65).

Newton começa a manifestar uma atitude crítica com relação aos métodos com os quais lidara até então com grande desenvoltura. A face mais evidente dessa mudança é o fato de que fluxões e momentos serem muito pouco utilizados nos *Principia*. Em especial, o que está totalmente ausente é o apelo às quantidades infinitamente pequenas. O que Newton colocou no lugar deles? O método das primeiras e últimas razões. No que segue, então, ele será analisado, avaliando-se suas possíveis diferenças e incompatibilidades com os antigos métodos algorítmicos e algébricos dessa fase anterior à década de 70.

Já no início do Livro I, Seção I, da obra *Princípios matemáticos da filosofia natural* (1687) [*Principia*], encontra-se em 11 Lemas uma das apresentações de Newton do conceito de primeiras e últimas razões. Uma característica importante a ser ressaltada, de tais lemas, é que eles são formulados de maneira puramente geométrica. Porém, para Newton, o conjunto desses lemas não é somente a apresentação do conceito de razões, isto é, ali se estrutura um método: o *Método das primeiras e últimas razões*, algo a ser utilizado nas proposições seguintes dos *Principia*. Assim, no Escólio final a esses lemas, Newton faz a seguinte afirmação:

“Portanto, se, de agora em diante, eu vier a considerar as quantidades como formadas por partículas, ou vier a tomar pequenas linhas curvas como retas, isso não significará quantidades indivisíveis, mas quantidades divisíveis evanescentes; nem as somas e razões de partes determinadas, mas sempre o limites das somas e das razões, a força de tais provas [das demonstrações que se seguem] depende sempre do método exposto nos lemas precedentes” (PN, 1999, p. 441).

Nessa citação, pode-se destacar dois conceitos que são centrais para a compreensão do funcionamento do método das primeiras e últimas razões. A primeira é *quantidade evanescente* e a segunda é *limite* de somas e razões. É necessário observar com mais detalhes do que trata cada termo.

Para Newton, quantidades evanescentes e, também, suas opostas quantidades nascentes, são magnitudes geométricas que não podem ser desassociadas de dois elementos: o papel fundamental do tempo e a concepção cinemática da matemática. Já no primeiro lema, Newton insere um elemento temporal como constituinte de quaisquer entidades geométricas de uma maneira tal que a interpretação de todos os demais lemas só se mostra possível desde que se leve em consideração o papel exercido pelo tempo. Em um plano mais geral da filosofia newtoniana, existem boas pistas para esclarecer um pouco mais do porquê do tempo possuir grande importância. Vejamos a seguinte afirmação: “Tempo e Lugar em si mesmos são afecções de todas as coisas, sem o que

nada do tudo [de todas as coisas] pode existir. Todas as coisas estão no tempo com respeito à duração de existência e no espaço com respeito à amplitude de presença”<sup>36</sup>. Aqui Newton revela a impossibilidade de estabelecer a *existência* das coisas sem uma relação espaço-temporal. Estar no tempo e no espaço é uma condição necessária para a existir. Porém, o que é o tempo nesse caso? Mesmo que se relacione espaço e tempo à natureza das coisas, para Newton, o tempo não surge em função do espaço, isto é, como sendo o resultado do movimento dos corpos no espaço. Esse é somente o tempo aparente. Nessa espécie de tempo existe imprecisão, não se consegue estabelecer um padrão de medida que seja sempre a mesma, o que leva a inúmeras correções desse tempo aparente. No entanto, Newton assume a existência de um tempo, que para ser preciso em seu fluir, é independente do movimento. É nesse sentido que ele não pode ser perceptível. Esse é o tempo *absoluto*. Em outros termos, esse é o tempo verdadeiro ao qual Newton se refere no *De methodis*.

Por ser exato em seu fluir, Newton agora declara que o tempo absoluto é *matemático* – em contraposição ao tempo relativo, que é apenas *aparente*. É o conceito de tempo absoluto que está utilizado implicitamente nos lemas do método das primeiras e últimas razões. Todavia, ao contrário do que ocorre com o espaço, nada no tempo exige que a sua presença seja indispensável na constituição dos objetos geométricos. De onde vem a sua indispensabilidade? A resposta encontra-se na concepção cinemática da matemática que Newton, como já visto, desenvolvera desde os seus primeiros anos de estudos.

Em outros textos posteriores ao *De Analise* e *De Methodis*, como é o caso dos *Principia*, Newton amplia a importância que deve ser atribuída ao movimento, encarando as magnitudes geométricas sempre como entidades submetidas a processos contínuos de “gerações” ou “produções”. Nesse esquema, ainda linhas são geradas por pontos em movimento, planos por linhas e sólidos por planos. Porém, agora está mais visível que não se pode fornecer a essa concepção de movimento gerador somente uma simples função: a de construção de figuras geométricas. Quando Newton assume que figuras são geradas, ele se compromete com a presença sempre atual do movimento em todo o processo de análise demonstrativa das magnitudes produzidas. Além do mais, o termo “gerar” está em um sentido mais radical em relação às concepções cinemáticas dos textos *De analysi* e *De methodis*. “Gerar” no método das primeiras e últimas razões

---

<sup>36</sup>

Texto de Newton, manuscrito entre 1692 e 1693. Citado por: (Arthur 1995. p.

327).

significa produzir uma quantidade matemática de maneira real, ou seja, o movimento dá um estatuto real a essa magnitude. É nesse sentido que devem ser interpretados os termos *quantidades evanescentes* ou *nascentes*, ou seja, são quantidades resultantes de um movimento gerador ou aniquilador.

Mas ao lado disso, com exceção ao manuscrito *Geometria curvilínea* (1680), Newton irá introduzir uma noção de que jamais ocorrera em seus manuscritos anteriores aos *Principia*. Trata-se da noção de *limite*, cuja natureza temporal talvez confira à metafísica newtoniana do tempo e dos objetos matemáticos uma unidade mais explícita. Em princípio, o limite é o ponto de partida ou de chegada para o movimento. O surpreendente é que ao identificar tal intervalo de movimento, ocorrerá também uma divisão no tempo, ou seja, que o movimento estará ocorrendo em um intervalo de tempo. Portanto, o tempo assume aqui duas características. Por um lado ele flui continuamente independentemente de qualquer movimento. Por outro lado, os intervalos de tempos somente são identificados por uma atitude do matemático ao determinar intervalos de movimentos das magnitudes que surgem em função desse tempo. Passemos a um exemplo de como Newton opera como essa noção de limite nos lemas iniciais do *Principia*.

Comumente, toma-se o próprio Lema I como sendo a passagem onde a noção de limites ocorre de maneira exemplar:

**Lema I:** *Quantidades, e também razões de quantidades, que em qualquer tempo finito tendem constantemente [constanter tendut] para igualdade, e que antes do fim desse tempo aproxima-se tanto um do outro que sua diferença é menor do que qualquer quantidade dada, tornam-se ultimamente iguais.*

Após o enunciado desse lema, Newton apresenta a seguinte demonstração por meio de uma redução ao absurdo:

“Se você nega isso, suponha-se como finalmente desiguais, e deixe sua última diferença ser  $D$ . Então, elas não podem se aproximar mais para a igualdade do que por sua diferença dada  $D$ , contrariando a hipótese” (PN, 1999, p. 433).

O objetivo principal desse lema é assegurar que certas quantidades possam assumir uma relação de igualdade mesmo que em um momento inicial sejam desiguais. As duas espécies de relação entre quantidades, em jogo aqui, são tanto a comparação pelo processo de subtração ( $A-B \rightarrow 0$ ) quanto pelo processo de razão ( $A:B \rightarrow 0:0$ ). Mas, que garantiria esse estado de igualdade?

Para Newton, chegar à igualdade, tanto no processo de diferença quanto no de razão, é chegar ao limite. O que garantirá tal limite, com já foi afirmado, é o fato de se determinar um intervalo de tempo ao qual o movimento se desenvolverá. É nesse sentido que nesse lema o tempo é assumido como finito. Por outro lado, a aproximação a esse limite ocorre também em função do tempo. A afirmação de Newton de que as quantidades podem se “aproximar uma da outra mais do que qualquer dada diferença” parece evitar tal aproximação ao limite. Mas como as quantidades são geradas tendo como referência o tempo que flui, assim as quantidades adquirem o caráter de contínuo. Desse modo, a afirmação de Newton significa que quantidades contínuas se aproximam indefinidamente do limite até atingi-lo necessariamente.

Dessa maneira, a *igualdade* das quantidades é garantida, pois ao negá-la acaba-se negando a própria afirmação da possibilidade de “aproximar [as quantidade e razões de quantidade] uma da outra mais do que qualquer dada diferença”. Assim, surge uma contradição ao afirmar que as quantidades quando chegam ao limite são desiguais. Estabelecer essa desigualdade no limite é afirmar que o movimento não percorreu infinitas possibilidades de diferenças e isso é uma manifesta contradição com a suposição inicial da possibilidade de diminuição indefinidamente da diferença entre quantidades. Na demonstração do Lema I, a quantidade  $D$  representaria uma última diferença. Ao determiná-la exclui-se a diminuição ao infinito. Portanto, é por isso que as quantidades tornam-se iguais ou adquirem razão de igualdade quando atingem o limite. É nesse sentido que quantidades, como linha curva e reta, podem ser substituídas uma pela outra, pois seus movimentos nascentes ou evanescentes no limite estarão em razão de igualdade.

Como uma outra exemplificação da utilização do conceito de limite para determinar as razões de igualdade, será interessante analisar o Lema 7. O que Newton pretende determinar nesse lema é a razão de igualdade entre arco, corda e tangente de uma curva. Primeiramente, observando o lema e a sua respectiva demonstração, tem-se o seguinte:

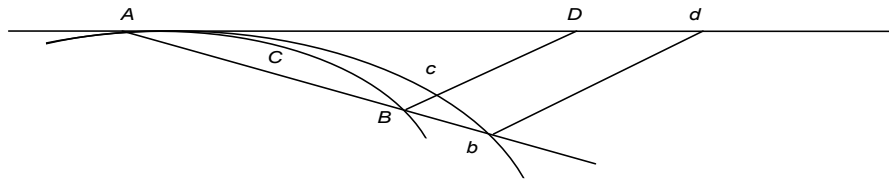
**Lema 7:** supondo-se as mesmas coisas [as do Lema 6], afirmo que a razão última entre arco, a corda e a tangente, entre qualquer um e qualquer outro, será a razão de igualdade.

Newton prossegue com a seguinte demonstração:

“Pois, enquanto o ponto  $B$  aproxima-se do ponto  $A$ , consideremos sempre que  $AB$  e  $AD$  são produzidos para os pontos afastados  $b$  e  $d$ ; e, em paralelo à secante  $BD$ , tracemos  $bd$ ; e que o arco  $Acb$  seja sempre semelhante ao arco  $ACB$ . Então, supondo

que os pontos  $A$  e  $B$  coincidam, o ângulo  $dAb$  desaparecerá, conforme o Lema 6; e portanto, as retas  $Ab$  e  $Ad$  (que são sempre finitas) e o arco intermediário  $Acb$  coincidirão e se tornarão iguais entre si. Donde as retas  $AB$  e  $AD$  e o arco intermediário  $ACB$  (que são proporcionais aos primeiros) desaparecerão, e acabarão adquirindo a razão de igualdade. Q.E.D.” (PN, p. 436).

O que se deve observar, primeiramente, é Newton utilizar uma relação entre quantidades sempre considerando o movimento de um deles como uma espécie de referencial. Nesse caso, o movimento evanescente do ponto  $B$  em direção ao ponto  $A$  será tal movimento de referência (Ver figura 1.5). O que fica em questão, assim, é saber o que acontece com as demais quantidades quando  $B$  encontra  $A$  e faz o arco  $AB$  se anular. Pelo esquema da demonstração de Newton, é possível observar que as quantidades relacionadas devem também se anular. Em outras palavras, tudo o que for admitido para o arco  $AB$ , também será admitido para a corda  $AB$  e a tangente  $AD$  e tenderá a se anular simultaneamente com a aproximação final de  $B$  em  $A$ . Inclusive a secante  $BD$  deve se anular, pois é necessária a sua anulação para garantir que o arco  $AB$  seja uma curva contínua e  $AD$  sua tangente. É isso que o Lema 6, que Newton se refere, assegura<sup>37</sup>.



**Figura 1.5**

Como a noção de limite está sendo aplicada e como é que as razões de igualdade estão sendo determinadas aqui? Para fornecer uma resposta a isso, é agora que se deve considerar o papel desempenhado pelas outras quantidades, ou seja, a corda  $Ab$ , o arco  $Ab$  e a tangente  $Ad$ . Aqui Newton nada mais faz do que criar uma situação onde existem somente quantidades geométricas finitas que podem ser colocadas em proporção.

<sup>37</sup>

O enunciado do lema 6 é o seguinte: “Se um arco  $ACB$  [ver Figura 1.5], dado numa posição, for subtendido por sua corda  $AB$ , e num ponto  $A$  qualquer, no meio da curvatura contínua, for tocado por uma reta  $AD$ , produzida em ambos os sentidos, então, se os pontos  $A$  e  $B$  se aproximarem e se encontrarem, afirmo que o ângulo  $BAD$ , contido entre a corda e a tangente, diminuirá *in infinitum* e acabará desaparecendo” (PN. 435).

Porém, ele formula outra situação que anule somente um dos lados dessa proporção, enquanto o outro permanece finito. Melhor dito, antes do ponto  $A$  coincidir com o ponto  $B$ , todas as quantidades relacionadas ao arco  $AB$  (a corda  $AB$ , a tangente  $AD$  e a secante  $BD$ ) podem ser colocados em relação de proporcionalidade como as quantidades do arco  $Ab$  (a corda  $Ab$ , a tangente  $Ad$  e a secante  $Bd$ ). Newton garante que, se as quantidades relacionadas ao arco  $Ab$  permanecerem finitos (ou seja, eles não se anulam conjuntamente com as outras quantidades), eles deverão assumir razões de igualdade. Nesse sentido, pode-se dizer de maneira mais geral, se duas quantidades geométricas finitas  $X$  e  $Y$  estão em proporção como outras duas quantidades geométricas finitas  $x$  e  $y$ , então, para Newton, o cancelamento de  $X$  e  $Y$ , não impede que ainda exista uma relação de proporcionalidade caso  $x$  e  $y$  permaneçam finitos. O que Newton assegura é que no estado final, do movimento do ponto  $B$  em direção ao ponto  $A$ , ainda existirá uma proporção similar a:

$$0:0::y:x.$$

Portanto, os limites para as quantidades finitas são as quantidades que se esvanescem. E quando essas se esvanescem, no estado limite, não existirá diferença entre elas (de acordo com o lema 1). Porém, quando consideradas na relação de proporcionalidade com as quantidades finitas, para Newton, essa ausência de diferença fará com que na proporção existam somente razões de igualdade. Newton acredita que com isso uma das características principais da geometria clássica está preservada: a possibilidade de colocar quantidades em relação de proporção sem afetar a homogeneidade, isto é, que somente quantidades da mesma natureza fossem comparadas. Nesse sentido, trata-se de uma propriedade finita, determinada ainda quando as quantidades são finitas, e que se preserva quando uma das razões da proporção chega ao seu limite.

Para concluir, as quantidades podem assumir uma relação de igualdade no estado limite. Com isso Newton viu-se descomprometido de quantidade infinitamente pequenas e muito menos de tratamentos algébrico-analíticos. Isso porque ao se determinar a razão de igualdade não significaria que se estivesse determinando a magnitude da quantidade nascente ou evanescente mas sim somente a relação de razões de quantidade primeiras e últimas, significando que, para Newton, uma relação geométrica pode se manter sim mesmo que as quantidades diminuam indefinidamente até atingirem o limite. Newton acredita que essa atitude estava de acordo com os procedimentos dos antigos geômetras. Estes forneciam provas geométricas, indicando



as condições pelas quais as relações geométricas se preservam nas conclusões encontradas.

### 1.3. Conclusão

As primeiras publicações oficiais de Leibniz de algumas das regras matemáticas, do que ele chamou de *cálculo diferencial*, surgiram entre 1684 e 1685, no periódico científico *Acta eruditorum* (periódico que ele próprio ajudou a fundar em 1682)<sup>38</sup>. Até esses anos, Newton não havia publicado nenhum de seus trabalhos de matemática. Porém, grande parte deles já estava elaborada e os assuntos contidos neles tratavam dos mesmos problemas ou de alguns muito parecidos com os que Leibniz desenvolvera nessas publicações da *Acta eruditorum*. Apesar de seus manuscritos não serem publicados de maneira pensada até esse período da publicação dos textos de Leibniz, não significa que Newton esteve isolado das discussões matemáticas, guardando para si suas descobertas. Os modos de publicação de uma obra, no século XVII, não se resumiam somente às publicações pensadas. Existiram outros meios pelos quais se divulgava a produção escrita. Quanto a Newton, isso também se aplica. Além de descrever suas descobertas em correspondências, Newton permitiu que alguns de seus manuscritos fossem copiados por seus contemporâneos; com isso ele atingiria um público mais específico, algo que não seria possível com a publicação impressa.

Com essas observações, têm-se alguns dos elementos centrais que permitiram o surgimento de uma controvérsia matemática entre Newton e Leibniz. O assunto principal dessa disputa era a prioridade da descoberta do que ficou conhecido como cálculo infinitesimal<sup>39</sup>. Um dos elementos é o fato de existirem indícios de que Newton realmente teria elaborado antes de 1684 textos de matemática; mas que, principalmente, não ficaram sem alguma circulação. Outro diz respeito ao fato de que os assuntos

---

<sup>38</sup> Uma das publicações foi do tratado sobre máximos e mínimos: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur es singulare pro illis calculi genus* (Novo método para máximos e mínimos...), em 1684 (cf. Leibniz, 1995, p.96-117).

<sup>39</sup> Esse é o termo como alguns comentadores, como Cohen e Westfall, usam para se referir ao método matemático em questão nessa disputa. No entanto, os nomes com os quais Newton e Leibniz frequentemente trataram seus métodos são respectivamente: *Método das fluxões* e *Cálculo diferencial*. Por outro lado, quanto à disputa, segundo Cohen e Westfall, atingiu-se seu clímax quando Newton, secretamente, articulou para que a Royal Society se posicionasse em relação ao trabalho matemático de Leibniz. O resultado disso foi a publicação do texto *Commercium epistolicum* (1713), divulgado em nome da Royal Society, onde se acusa Leibniz oficialmente de plagiar o método fluxional de Newton. Apesar de não aparecer o seu nome, o próprio Newton teria redigido tal texto (cf. Cohen & Westfall. 2002. p. 203).

tratados por Leibniz seriam muito parecidos com os que Newton trata em seus textos. Um dos exemplos de que Newton teria identificado algumas similaridades entre seu método e de Leibniz encontra-se no texto *Commercium epistolicum D. Johannis Collinij et aliarum De analysi promota* (1714).<sup>40</sup>

O interessante dessa disputa é que Newton tentou, em muitos momentos, esclarecer detalhes sobre sua prática matemática. No *Commercium epistolicum* (1714), Newton faz a seguinte consideração sobre seu método matemático, comparando-o com o de Leibniz: “O método do Sr. Newton é também da maior utilidade e certeza, sendo adaptado ou para a *descoberta* rápida [the ready finding out] de uma proposição (...) ou para a *demonstração* exata dela: o do Sr. Leibniz [método matemático] é somente para encontrá-la” [o *itálico* é meu] (MP-8, p. 598). O método ao qual Newton está se referindo nessa afirmação é, de fato, o método das fluxões e, por outro lado, o de Leibniz é o cálculo diferencial. Porém, Newton rebaixa o cálculo leibniziano, tratando-o como *incompleto* e *inexato* por cumprir somente uma das duas tarefas que o método da fluxões permite realizar. Ambas tarefas são evidentes: descobrir e demonstrar proposições. Todavia, há a necessidade de esclarecer a que Newton está se referindo quando atribui ao seu método essa dupla tarefa. Talvez, alguns de seus manuscritos matemáticos (que não foram publicados em nenhum meio – tanto impresso quanto por circulação copiada) possam fornecer algumas pistas importantes.

A partir da publicação da segunda edição dos *Principia*, em 1713, Newton planejou algumas reformulações para uma nova tiragem dessa segunda edição<sup>41</sup>. Em uma das versões de um possível prefácio para essa nova tiragem, Newton afirmou o seguinte sobre os geômetras gregos:

---

<sup>40</sup> Newton, tratando-se na terceira pessoa, publica esse texto anonimamente como reforço e comentário ao texto de acusação a Leibniz *Commercium epistolicum* (1713). Nas palavras de Newton: “Em novembro de 1684 Sr. Leibniz publicou os elementos de seu método diferencial na *Acta eruditorum* e o ilustrou com exemplos de traçar tangentes e determinar máximos e mínimos; e então adicionou: *ainda todos esses resultados são somente as premissas de uma geometria bem mais sublime, estendendo-se sem exceção, aos problemas mais árduos e os mais belos das matemáticas mistas; sem a ajuda de meu cálculo diferencial ou de outro similar* [avt simili], *não se saberia tratá-los com muita facilidade*. As palavras outro similar [avt simili] simplesmente relatam o método do Sr. Newton. E a sentença toda contém nada mais do que Sr. Newton afirmou em seu método geral nas suas cartas de 1672 e 1676” (MP-8, p. 589). A citação apresentada aqui por Newton é do texto de Leibniz *Nova methodus* e o conteúdo das cartas é o que Newton apresentou no texto *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (1669).

<sup>41</sup> Newton pretendia reforçar algumas das suposições matemáticas dos *Principia*. Daí que se planejou, para uma nova tiragem da segunda edição dos *Principia*, juntá-los a um outro texto *De quadratura curvarum*, escrito em 1673, que até então também já havia sido publicado com a *Ótica* (1704). Newton, para tanto, elaborou um possível prefácio para essa nova publicação conjunta que, afinal, não se concretizou (cf. Whiteside, MP-8, nota 1, p. 647).

“Os geômetras antigos investigavam coisas buscando através da análise, demonstrando-as quando encontravam através da síntese, publicando-as quando demonstradas como elas poderiam ser recebidas na geometria. Eles não receberam imediatamente na geometria uma vez resolvida [resoluta]<sup>42</sup>: existiu a necessidade de sua solução pela composição de suas demonstrações. Pois a força da geometria e seu grande mérito assentam-se na total certeza de seus assuntos, e certamente em suas demonstrações especificamente compostas. Nessa ciência considerou-se necessário ser compensado não somente pela concisão da escrita, mas também pela certeza das coisas” (MP-8, p. 452-453).

Para Newton, os antigos praticaram na investigação matemática dois métodos denominados: análise e síntese. A primeira apresenta-se como a *solução de problemas*, ou seja, a partir de um problema dado, introduzir-se-ia informações na investigação até que a solução do problema fosse alcançada – algo que é reforçado em outra versão desse prefácio: “A análise dos antigos parece ter consistido na dedução de conseqüência de dados até que as coisas buscadas resultassem” (MP-8, p. 444-445).

Por outro lado, a solução do problema em causa poderia ser demonstrado segundo um caminho inverso. A partir do que se mostrou como solução na análise, haveria a possibilidade de se compor uma demonstração, que seria a *verdadeira e segura* prova do que foi encontrado pela análise. Esse seria o caminho da síntese. Newton não manifesta o fato dos antigos geômetras terem evitado que a posteridade conhecesse os procedimentos analíticos por eles utilizados para descobrir verdades na matemática. No entanto, o que é importante observar, é o fato de Newton valorizar o método sintético dos geômetras antigos. Isso ajuda a explicar a virada conceitual que aparece após 1670. Ou seja, o que aparece nos *Principia* não é mais uma álgebra fluxional mas sim uma geometria fluxional, onde duas das mais importantes características dos geômetras antigos estão presentes: o estilo sintético (como no exemplo do Lema I), por um lado, e a constante aplicação da teoria das proporções entre magnitude geométricas. Nesse sentido, as teorias das primeiras e últimas razões seriam uma garantia do caráter geométrico e por sua vez do rigor do método das fluxões. É nesse sentido que Newton critica os métodos algébricos da nova análise dos modernos que se apóia em algum conceito de quantidades infinitamente pequenas:

“Este método [das fluxões] deriva imediatamente de sua própria natureza, não de indivisíveis, diferenças leibnizianas ou quantidades infinitamente pequenas. Pois não existem *quantidades primeiras nascentes* ou *quantidades últimas evanescentes*,

---

<sup>42</sup> Segundo Whiteside, inicialmente Newton teria colocado “*problematum resolutiones*” [a resolução de problemas]. Tanto esses termos quanto “resoluta” se referem ao método de análise, em outras palavras, como método para solucionar problemas (cf. MP-8, Nota 37. p. 453).

existem somente *razões primeiras de quantidades nascentes e razões últimas de quantidades últimas evanescentes*” (MP-3, p. 17-18).

## 2. A AVALIAÇÃO DO MÉTODO DAS FLUXÕES N’O ANALISTA

Em 1734, n’*O Analista*, Berkeley descreve uma “certa” aceitabilidade que o método das fluxões newtoniano conquistou entre os matemáticos de sua época:

“O método das fluxões é a chave geral com cuja ajuda os matemáticos modernos destrancam e revelam os segredos da geometria e, por conseguinte, da natureza. Como foi ele que lhes facultou ultrapassar notavelmente os antigos na descoberta de teoremas e na solução de problemas, seu exercício e aplicação tornaram-se *a principal* tarefa, se não a única, de todos aqueles que, em nossa era, se fazem passar por geômetras profundos” [itálico meu] (Berkeley, 1979, §3, p. 66).

Com as suas justificativas para o método das primeiras e últimas razões, como foi visto, Newton não somente acreditava ter se aproximado do estilo matemático dos geômetras antigos, como também pensava ter fornecido a fundamentação necessária às suas aplicações mecânicas. No Escólio final aos onze lemas iniciais dos *Principia*, Newton compara o caráter geométrico das primeiras e últimas razões com indivisíveis de alguns dos métodos analíticos:

“Mas, como a hipótese dos indivisíveis parece um tanto *problemática* [*durior*] e, por isso, esse método [dos indivisíveis] é tido como *menos geométrico*, optei por reduzir as demonstrações das seguintes proposições às primeiras e últimas somas e razões de quantidades nascentes e evanescentes, isto é, aos limites dessas somas e razões...” [itálico meu] (PN, 1999, p. 441).

O termo “geométrico” aqui está realmente em oposição ao termo “problemático”, isto é, o que não é considerado geométrico apresentaria algum caráter de duvidoso.

Da mesma maneira, em 1710, no *Commercium epistolicum*, Newton (referindo-se a si mesmo na terceira pessoa) se compromete mais abertamente com a inexistência dos infinitamente pequenos:

“Nós não temos idéias de quantidades infinitamente pequenas. Por isso, Sr. Newton introduz fluxões em seu método que procederiam ao máximo possível com quantidades finitas. Esse método é mais natural e geométrico porque se fundamenta nas razões primeiras de quantidades nascentes [*primae quantitatum nascentium rationes*] que têm uma existência na geometria...” (MP-8, p. 597).

O que é real na matemática seria somente aquilo que possui uma correspondência geométrica: ser apresentado sinteticamente, o que em geral significava ser o resultado da manipulação de magnitudes finitas por intermédio da teoria das proporções. Pode-se ler, portanto, a desconfiança de Newton da existência dos infinitesimais como uma preocupação, em última instância, com o rigor do método das fluxões como um “todo”.

Nesse sentido, não se justificaria a utilização de uma hipótese nas demonstrações, ainda que por seu intermédio se obtivessem resultados corretos. Newton está preocupado em fornecer uma adequada fundamentação, que resulta em exatidão, para todos os procedimentos de seu método, desde a apresentação dos objetos matemáticos em jogo até os princípios e demonstrações resultantes.

Contudo, n’*O Analista*, Berkeley elabora uma argumentação para “ofuscar” a crença de que o método das fluxões é matematicamente bem-fundamentado. Haveria problemas no método newtoniano que prejudicariam diretamente o seu caráter rigoroso. Desse modo, é necessário apresentar agora quais são os argumentos de Berkeley para a sua desafiadora empreitada: mostrar que Newton não teria alcançado a exatidão que tanto almejava para seu método fluxional. Além disso, é necessário confrontar os argumentos de Berkeley com os principais pronunciamentos de Newton sobre esse assunto, visto que tais argumentos são pretendidos como refutações às intenções originais de Newton.

## 2.1. Os dois percursos da crítica de Berkeley ao método das fluxões

Já no início d’*O Analista*, Berkeley revela que adotará a postura de um “livre pensador” para avaliar os “objetos, princípios e métodos de demonstração” da matemática então adotada em sua época<sup>43</sup>. Essa informação possui uma interessante característica. Trata-se de uma estratégia argumentativa. Para compreendê-la, antes é necessário observar que os objetivos que levaram à elaboração d’*O Analista* não são somente de caráter matemático. Há ali também um objetivo teológico. Isso está evidente no próprio título do texto: “*O Analista*: um discurso dirigido a um matemático infiel, em que se examina se o objeto, os princípios e as inferências da análise moderna se concebem de maneira mais distinta ou se deduzem de maneira mais evidente que os mistérios da religião e as propostas da fé”<sup>44</sup>. O que se propõe investigar é se um

---

<sup>43</sup> Cf. Berkeley (1979, §2, p. 65). Berkeley utiliza os termos “livre pensador” em outros de seus textos, como por exemplo *Alciphron* (1732), para se referir a pensadores céticos e ateus (cf. Robles, 2006, p. 19-20).

<sup>44</sup> Segundo Robles, existem biógrafos de Berkeley que apontam com sendo o físico e matemático Edmund Halley (o do tão famoso cometa Halley) esse infiel matemático em questão. *O Analista* teria sido escrito em resposta a uma atitude de Halley: ter convencido Samuel Garth (um amigo em comum com Berkeley) a não receber seus últimos serviços espirituais no leito de morte. Pois, para Halley, a religião estaria repleta de mistérios e sofismas a ponto de não valer a pena confiar nela. Robles não assegura a veracidade de tal fato. Porém coloca *O Analista* como parte de um projeto berkeleyano para atacar o ateísmo e ceticismo, tentando assegurar a possibilidade do ensino da religião cristã. *O Analista*, nesse sentido, seria um texto dirigido de maneira mais geral a matemáticos modernos descrentes e difamadores da religião (cf. Robles, 2006, p. 19-20).

matemático teria a permissão para tratar a matemática como mais importante que a religião. Isso porque os objetos com as características dos mistérios (presentes na religião, isto é, os objetos da fé) nunca seriam admitidos nas rigorosas demonstrações matemáticas. Para Berkeley esse é “o caminho mais curto para se produzir infieis” (Berkeley, 1979, §1, p. 65). A estratégia argumentativa, portanto, é assumir transitoriamente a posição de um matemático moderno (que considerasse ao mesmo tempo a religião como duvidosa) para avaliar a então matemática praticada pelos modernos, como, por exemplo, o método das fluxões. Portanto, a posição de um “livre pensador” pode ser caracterizada, n’*O Analista*, como sendo a de um matemático moderno que aceitaria do método das fluxões, devido ao seu tratamento rigoroso, e que, ao mesmo tempo, desconsideraria a religião por seu rigor demonstrativo ser prejudicado pela aceitação dos “mistérios” (objetos impossíveis de serem apreendidos pela razão humana).

Desse modo, se alguém julga a religião como inexata, deve existir um ponto de referência para realizar tal avaliação. Isso se encontraria na própria matemática até então aceita. É nesse sentido que Berkeley localiza, de maneira geral, o que seria um elementar critério para avaliar o rigor da matemática (que os próprios matemáticos teriam utilizado), em especial a geometria:

“Tem sido uma observação antiga que a geometria é uma excelente lógica. Deve-se reconhecer quando as definições são claras, quando os postulados não podem ser recusados nem os axiomas negados; e quando a partir da nítida contemplação e comparação de figuras suas propriedades são derivadas pela cadeira contínua e bem conectada de conseqüências, permanecendo os objetos ainda presentes à mente e a atenção sempre voltada a eles. Adquire-se com isso um hábito de raciocínio, minucioso, exato e metódico: hábito esse que fortalece e ilumina a mente e torna-se de uso geral na investigação da verdade, ao se transferir para outros assuntos” (Berkeley, 1979, §2, p. 65).

Há, portanto, três âmbitos que estariam em questão quando se avalia o rigor de uma investigação. Berkeley ressalta o fato da geometria ser uma *lógica*, no sentido, de as verdades geométricas resultarem de (a) definições claras dos objetos geométricos; (b) princípios auto-evidentes; e (c) propriedades derivadas por uma série interligada de raciocínios<sup>45</sup>. Desse modo, um método matemático seria rejeitado por utilizar objetos ininteligíveis ou por utilizar princípios e ilegítimas inferências demonstrativas. O que é

---

<sup>45</sup> Segundo Jesseph, não há nada de idiossincrático nesses critérios apresentados por Berkeley. Tratar-se-ia do mais elementar padrão de rigor matemático aceito até então. Em especial, esses critérios evocariam princípios lógicos apresentados por Aristóteles nos *Analíticos Posteriores*. (cf: Jesseph, 1993, p. 183-185) e (cf: Jesseph, 2005, p.299).

importante frisar é a real semelhança entre o que Newton aceita como critério para apontar o valor do método das fluxões e o que Berkeley evoca aqui. As primeiras e últimas razões são geométricas e, desse modo, têm todas as possibilidades de corresponder aos ideais acima. Portanto, será a partir desse três pontos retirados da própria prática matemática dos modernos que Berkeley irá avaliar o método das fluxões.

### 2.1.1. A crítica aos objetos do método das fluxões

Berkeley destaca os *momentos* newtonianos como sendo os objetos prioritária e inevitavelmente admitidos pelo método das fluxões. Seu julgamento se apóia em dois textos de Newton o Lema II, Livro II, dos *Principia*, e a versão publicada como apêndice da edição latina da *Opticks* do *De quadratura curvarum*. Segundo Berkeley, “velocidades são chamadas fluxões [fluxions]; enquanto que as quantidades [matemáticas] geradas são chamadas quantidades fluentes [flowing quantities]” (Berkeley, 1979, §3, p. 66). Fluxões e quantidades fluentes surgiriam em partes infinitamente pequenas de tempo. É aqui que se chega ao conceito de momento: as quantidades fluentes geradas nessa quantidade infinitamente pequena de tempo. Como visto no primeiro capítulo, no texto do *De methodis*, Newton apresenta uma igualdade entre a fluxão e os acréscimos (ou decréscimos) das quantidades fluentes gerados nesse tempo infinitamente pequeno. No Lema II (*Principia*, Livro II), considerando essa igualdade, Newton nomeia ambos de momentos. Berkeley reproduz essa diferente atitude de Newton n’*O Analista*:

“Afirma-se que essas fluxões, quase como os incrementos das quantidades fluentes, são geradas nas menores partículas de tempo iguais, e que são exatamente iguais na primeira proporção dos incrementos nascentes ou na última dos incrementos evanescentes. Por vezes, no lugar das velocidades, são considerados os aumentos ou decréscimos momentâneos de quantidades fluentes indeterminadas, sob a denominação de momentos” (Berkeley, 1979, §3, p. 66)<sup>46</sup>.

Há ainda dois aspectos importantes da noção de momento que se deve esclarecer. O primeiro é a interpretação que coloca os momentos como as quantidades com as quais os movimentos se iniciam ou finalizam. Porém, não se deve concebê-los como quantidades finitas, isto é, desconsideram-se as magnitudes dos momentos, pois são quantidades que se localizam entre o nada e uma quantidade finita e, assim, são

<sup>46</sup> Ou ainda nas palavras de Newton: “[os] incrementos ou diminuição momentâneos [das quantidades matemáticas] são o que eu chamo de momentos (...). O mesmo ocorre se em lugar de momentos se tratar das velocidades dos incrementos (que também podem chamar-se movimentos, mutações, fluxões de quantidades) ou bem de qualquer quantidade finita proporcional as ditas velocidades” (PN, 1999, p. 647).



compreendidos como “princípios que geram quantidades finitas”. O outro aspecto refere-se à possibilidade de se determinar momentos de ordens superiores. Isso significa que se pode obter uma nova fluxão instantânea a partir de uma primeira. O que possibilita isso é o tempo matemático, pois ele é comum a todos os movimentos a ponto de ser reutilizado na obtenção da velocidade instantânea com que um primeiro momento é produzido. Tal velocidade instantânea constitui-se um momento de um primeiro momento. E esse processo pode prosseguir indefinidamente: “...das citadas fluxões existem outras fluxões, sendo estas fluxões das fluxões chamadas de segundas fluxões. E as fluxões dessas segundas fluxões são chamadas de terceiras fluxões, e assim sucessivamente, quarta, quinta, sexta etc., *ad infinitum*” (Berkeley, 1979, §4, p. 67). Ou ainda nas palavras de Newton, no *De quadratura*, sobre as fluxões de outras ordens:

“Existem fluxões de fluxões (...), mutações mais ou menos rápidas que podem ser chamadas *segundas fluxões* de  $z, y, x, v$  que podem ser marcadas como  $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$ . As *primeiras fluxões* dessas, ou as *terceiras* de  $z, y, x, v$ , são portanto  $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$ , e as *quartas* são  $\dddot{z}, \dddot{y}, \dddot{x}, \dddot{v}$  ...” (MW-2, p. 143).

Com isso, tem-se o suficiente para apresentar a crítica. Segundo Berkeley, esses objetos tornam-se suspeitos, com respeito à inteligibilidade, em virtude da maneira como as faculdades mentais se estruturariam e têm acesso aos seus conteúdos. As faculdades em questão são os sentidos e a imaginação:

“...assim como nossos *sentidos* ficam exauridos e intrigados com a percepção de objetos extremamente diminutos, também a *imaginação*, faculdade que deriva dos sentidos, fica sumamente exaurida e intrigada para conceber idéias claras das partículas mais diminutas do tempo, ou dos ínfimos incrementos aí gerados; e muito mais ainda para compreender os momentos ou incrementos das quantidades fluentes em *statu nascenti*, em sua origem ou primeiríssimo começo da sua existência, antes de se tornarem partículas finitas” [itálico meu] (Berkeley, 1979, §4, p. 67).

Nessa instância da crítica, há um duplo comprometimento. Um deles é considerar os sentidos como padrão para as demais atividades cognitivas. A imaginação, em particular, seria restrita aos mesmos limites da sensibilidade. Assim, tudo o que não fosse possivelmente perceptível e, por conseguinte, imaginável, tampouco seria inteligível. Em segundo lugar, trata-se do vínculo entre tais faculdades. Entende-se que a imaginação “deriva-se” dos sentidos, supostamente, porque quem fornece o conteúdo para imaginação é a própria faculdade dos sentidos. Sem esse vínculo, a imaginação não atuaria ou, até mesmo, não existiria. Assim, o vínculo não só possibilita a atuação da própria imaginação, como, também a limita a produzir objetos que nunca ultrapassarão

as características dos objetos fornecidos pelos sentidos. Imaginar é trabalhar com o que é primeiramente sensível. Berkeley atribui a essas duas faculdades o papel de determinar se algo é compreensível ou não. Portanto, o critério de inteligibilidade berkeleyano exige que o objeto geométrico seja acessível por alguma dessas duas faculdades.

É nesse sentido que os *momentos* são interditados como conceitos de objetos ininteligíveis. Como os *momentos* são compreendidos como quantidades sem magnitudes, geradas em um fluxo temporal infinitamente pequeno, encontram-se além da nossa capacidade de imaginação. Os sentidos não percebem o que está além do que é finito. O conteúdo que é imaginado incide no mesmo campo do conteúdo dos sentidos: o do finito. Com tal critério, tudo o que diz respeito quanto ao conceito de *momento* fica inteiramente rejeitado. Por exemplo, recusa-se o processo de se obter fluxões instantânea de outra, ou momento de outro momento *ad infinitum*. Pois, a “...celeridade incipiente de uma celeridade incipiente, o aumento nascente de um aumento nascente, isto é, de uma coisa que não tem magnitude, (...), a menos que eu me engane, se revelará impossível...” (Berkeley, 1979, §4, p. 67).

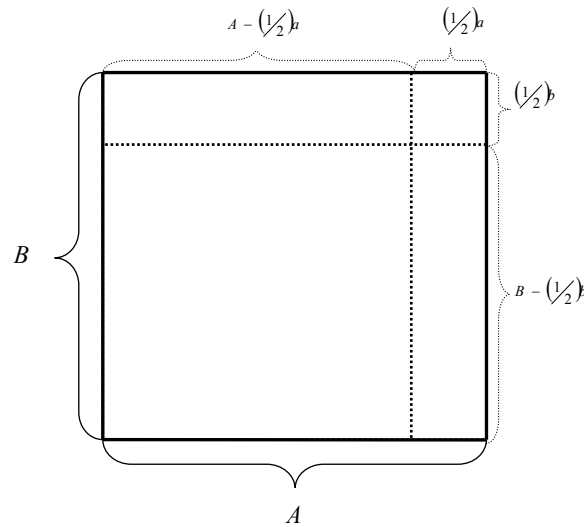
### 2.1.2. A crítica aos princípios e às demonstrações do método das fluxões

Existem n’*O Analista* dois exemplos de demonstração newtoniana que se baseiam em *momentos*. Será suficiente, para se compreender a crítica de Berkeley, analisar somente uma dessas demonstrações de Newton. Em especial, aquela onde Newton demonstra (Lema II, Livro II, dos *Principia*) como encontrar o *momento* gerado pelo movimento nascente de duas quantidades fluentes multiplicadas. Para tanto, pode-se agora dizer que os enunciados apresentados acima (quanto aos objetos dos método das fluxões) entram como princípios que determinariam os passos demonstrativos. Dessa maneira, a apresentação dos problemas demonstrativos deve ser considerada também como uma crítica tanto para os princípios utilizados nessas demonstrações como também para os resultados obtidos.

Assim, para um retângulo de lados  $A$  e  $B$ , encontra-se como momento  $aB + bA$ . Nas palavras de Newton:

“Caso 1: Um retângulo qualquer, como  $AB$ , aumentando por um contínuo movimento, quando ainda faltava dos lados  $A$  e  $B$  a metade de seus momentos  $(\frac{1}{2})^a$  e  $(\frac{1}{2})^b$ , era  $A - (\frac{1}{2})^a$  multiplicado por  $B - (\frac{1}{2})^b$ , ou  $AB - (\frac{1}{2})^aB - (\frac{1}{2})^bA + (\frac{1}{4})^ab$ ; todavia, assim que aos lados  $A$  e  $B$  são acrescidos as outras metades dos momentos, o

retângulo transforma-se em  $A + \left(\frac{1}{2}\right)a$  multiplicado por  $B + \left(\frac{1}{2}\right)b$ , ou  $AB + \left(\frac{1}{2}\right)aB + \left(\frac{1}{2}\right)bA + \left(\frac{1}{4}\right)ab$ . Subtraia-se desse retângulo o retângulo anterior e restará o excesso  $aB + bA$ . Portanto, com a totalidade dos incrementos  $a$  e  $b$  dos lados



**Figura 2.1**

gera-se o incremento  $aB + bA$  do retângulo. Q.E.D.” (PN, 1999, p. 648).

Mesmo que Newton não tenha apresentado as figuras propriamente ditas, será interessante construí-las aqui como um auxílio explicativo do que está exposto nessa demonstração. Primeiro, Newton considera que a multiplicação de duas linhas,  $A$  e  $B$ , geram o retângulo  $AB$  (ver figura 2.1). O que é importante frisar o objetivo dessa demonstração: encontrar o momento de um movimento *nascente* (isto é, *momento* pelo qual o retângulo  $AB$  irá aumentar). A partir disso, pode-se distinguir dois passos: (I) é possível determinar a quantidade desse retângulo quando ainda faltava meio *momento* para se chegar em  $AB$ . Isto é, o retângulo (antes de ser  $AB$ ) poderia ser expresso pela multiplicação dos lados:

$$A - \left(\frac{1}{2}\right)a \text{ e } B - \left(\frac{1}{2}\right)b.$$

Efetuada a multiplicação, obtém-se como resultado:

$$AB - \left(\frac{1}{2}\right)aB - \left(\frac{1}{2}\right)bA + \left(\frac{1}{4}\right)ab.$$

O outro passo (II), pode ser identificado como sendo o fato de Newton encontrar a quantidade do retângulo  $AB$  após transcorrer meio *momento* desse mesmo retângulo. Ou seja, que a multiplicação dos lados fosse:

$$A + \left(\frac{1}{2}\right)a \text{ e } B + \left(\frac{1}{2}\right)b \text{ (ver figura 2.2);}$$

gerando como resultado:

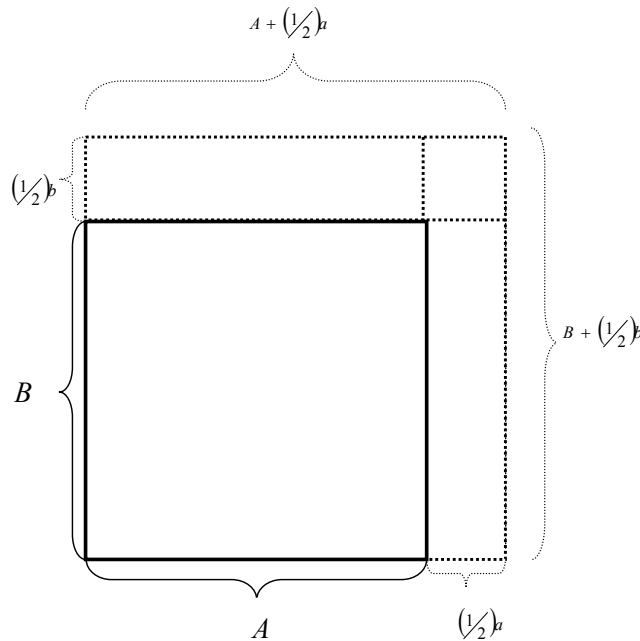
$$AB + \left(\frac{1}{2}\right)aB + \left(\frac{1}{2}\right)bA + \left(\frac{1}{4}\right)ab .$$

Portanto, o *momento* inteiro do retângulo será a soma do valor final do retângulo (apresentado no segundo passo) menos o inicial (obtido no primeiro passo):

$$\left[ AB + \left(\frac{1}{2}\right)aB + \left(\frac{1}{2}\right)bA + \left(\frac{1}{4}\right)ab \right] - \left[ AB - \left(\frac{1}{2}\right)aB - \left(\frac{1}{2}\right)bA + \left(\frac{1}{4}\right)ab \right] \therefore$$

$$\left\{ (AB - AB) + \left[ \left(\frac{1}{2}\right)aB + \left(\frac{1}{2}\right)aB \right] + \left[ \left(\frac{1}{2}\right)bA + \left(\frac{1}{2}\right)bA \right] + \left[ \left(\frac{1}{4}\right)ab - \left(\frac{1}{4}\right)ab \right] \right\}$$

e que resultará em:  $aB + bA$ .



**Figura 2.2**

São dois os problemas que Berkeley encontra na obtenção desse resultado. O primeiro surge do confronto entre duas hipóteses:

(H.1) O movimento é nascente, ou seja, o retângulo  $AB$  está aumentando por um contínuo movimento;

(H.2) Considerar o retângulo como incompleto, isto é, como faltando  $\left(\frac{1}{2}\right)a$  e  $\left(\frac{1}{2}\right)b$ .

Essa duas hipóteses são mutuamente excludentes, porque, ao se afirmar (H.1), Newton se compromete com o movimento nascendo a partir de um limite determinado. O *momento* determinará o primeiro movimento a partir desse limite estabelecido. Nesse

caso, os limites seriam os lados do retângulo, a saber: a linha  $A$  e a linha  $B$ . No entanto, Newton assume como um passo demonstrativo o que está expresso em (H.2). Isso faz com que o movimento evanesça em direção aos limites. Em (H.1) o movimento sai dos limites, enquanto que em (H.2) o movimento vai em direção a eles. Ora, se o movimento é nascente, como descreve (H.1), o que autoriza já em seguida assumir a hipótese (H.2) que trata o movimento como evanescente? Para Berkeley não há nada que permita essa mudança, ou seja, a hipótese (H.1) não implica diretamente (H.2). É por isso que mais adiante ele conclui: “...não é fácil conceber por que devemos tomar quantidades inferiores a  $A$  e  $B$  para obter o incremento de  $AB$ , procedimento do qual devemos admitir que a causa ou motivo último é obvio...” (Berkeley, 1979, §11, p. 71). Aqui, a “causa” ou “motivo” último nada mais é do que o resultado  $aB+bA$ . Newton, na visão de Berkeley, acreditava na veracidade desse resultado, mas tivera dificuldade para mostrar como alcançá-lo. Para Berkeley, é evidente que Newton, e os seus seguidores, teriam se contentado muito facilmente com as demonstrações do método das fluxões. A crença na veracidade do resultado teria os impedido de diferenciar entre a *certeza* e a *utilidade* de um procedimento demonstrativo, permitindo que erros fossem introduzidos em tais demonstrações sem serem percebidas. É esse o significado da seguinte acusação:

“Quando um homem, por métodos não geométricos nem demonstrativos, convence-se da utilidade de certas regras e, em seguida, as propõe a seus discípulos como verdades indubitáveis e se empenha em demonstrá-las de maneira sutil, com ajuda de idéias requintadas e complexas, não é difícil conceber que seus discípulos, para se pouparem do problema de pensar, inclinem-se a confundir a utilidade de uma regra com a certeza de uma verdade e a aceitar uma pela outra, especialmente se forem homens mais acostumados a fazer cálculos do que a pensar, e mais ansiosos por avançar com rapidez do que dispostos a seguir cautelosamente e enxergar o caminho com clareza” (Berkeley, 1979, §10, p. 70).

Passando à outra problemática encontrada por Berkeley, ela diz respeito também a outras duas hipóteses assumidas.

(H.3) Os *momentos* não são quantidades finitas, mas “princípios geradores” dessas quantidades;

(H.4) Os *momentos* podem ser divididos, ou seja, considerado em suas metades;

Novamente, essa duas afirmações são contraditórias entre si. Como visto na seção anterior, (H.3) descreve uma das características dos objetos denominados como *momentos*. Na demonstração de Newton, ela entra sim como uma “premissa” ou espécie

de princípio que regularia a cadeia de raciocínio da demonstração. Isso porque é a finalidade central da demonstração determinar esse tal objeto denominado como *momento*. Contudo, na sua prática demonstrativa, Newton parece não levar em consideração o que está descrito em (H.3). Visto que os *momentos* não são quantidades finitas, eles não podem assumir características dessas quantidades. Assim, ao praticar (H.4), ou seja, dividir os momentos pela metade, Newton está atribuindo uma propriedade das quantidades finitas aos momentos: possuir magnitude que pode ser distinguida em partes. Essa propriedade está justamente sendo negada em (H.3). Berkeley deixa evidente esse problema da seguinte maneira: “Afirma-se que a magnitude dos momentos não é levada em conta, mas supõe-se que esses mesmos momentos se dividam em partes.” (Berkeley, 1979, §11, p. 71).

Cabem ainda algumas reflexões sobre essa crítica de Berkeley a essa demonstração newtoniana. Em qual sentido, inicialmente, se pode dizer que existe um descontentamento por parte de Berkeley em relação à demonstração de Newton? Na verdade, essa pergunta exige um maior esclarecimento (além do que foi feito) da acusação de *non sequitur* de Berkeley ao raciocínio de Newton para encontrar o *momento* do retângulo *AB*. Com o objetivo de levantar vários problemas para os analistas modernos refletirem, problemas esses apresentados no corpo d'*O Analista*, Berkeley elabora uma grande lista de perguntas no final do próprio texto. Em uma delas, a Questão 28, existe algo que pode ser utilizado para precisar tal acusação à Newton: “Não seria a mudança de hipóteses ou (como poderíamos chamar) a *fallacia suppositionis* um sofisma que contagia larga e amplamente os raciocínios modernos, ambos na filosofia mecânica como na abstrusa e refinada geometria?” (Berkeley, 1979, Questão 28, p. 98). Está evidente que Berkeley acusa os modernos de se apoiarem em falácias, tanto na geometria como também na física (ou melhor, mecânica). O importante é que ele denomina a falácia em jogo: *fallacia suppositionis*. O significado disso é que alguns dos raciocínios utilizados pelos modernos supõem hipóteses que são alteradas sem uma justificativa adequada. No caso da demonstração de Newton, apresentada acima, quando de (H.1) vai-se para (H.2), ou de (H.3) vai-se para (H.4), na perspectiva de Berkeley, esta se mudando de hipótese sem, na verdade, justificar tal alteração. Há, nesse sentido, ausência de elementos que justifiquem tal mudança de hipóteses. Isso é uma falácia, ou melhor, uma *fallacia suppositionis*.

Ainda para deixar mais evidente o erro de Newton na demonstração, Berkeley corrige a demonstração e apresentada o que resultaria caso não se altere as hipóteses

assumidas inicialmente. Isto é, se for tratado o movimento realmente como nascente, sem considerar que alguma quantidade esteja faltando, muito menos dividida pela metade mas sim como sendo acrescentada, obteremos como *momento* o seguinte resultado  $aB + bA + ab$ : “Mas está claro que o método direto e verdadeiro para obter o momento ou incremento do retângulo  $AB$  é considerar os lados aumentados por seu incrementos inteiros” (Berkeley, 1979, §9, p. 70). Aqui não há erro demonstrativo, pois “...isso é universalmente válido para as quantidades  $a$  e  $b$ , sejam elas o que forem, grandes ou pequenas, finitas ou infinitesimais, incrementos, momentos ou velocidades” (Berkeley, 1979, §9, p. 70).

Para Berkeley, portanto, esse seria o raciocínio correto para se apresentar a demonstração. Porém, é evidente que Newton não aceitaria como sendo a resposta final do problema, pois haveria a necessidade de encontrar um meio de eliminar a quantidade  $ab$ . É por isso que Berkeley mais a diante firma:

“A situação é realmente difícil. Nada se pode fazer enquanto não se descarta a quantidade  $ab$ . Para tanto, a idéia de fluxões é deslocada, é colocada sob diversos prismas; aspectos que deveriam ser claros como princípios fundamentais são confundidos e termos que deveriam ser usados de maneira constante são ambíguos” (Berkeley, 1979, §10, p. 70).

## 2.2. A característica infinitesimal dos momentos newtonianos

Berkeley não se limita ao ataque à crença do rigor do método newtoniano n’*O Analista*. Há outro alvo ao qual se direciona a mesma espécie de crítica feita a Newton. Esse outro alvo é o *Calculus differentialis*, na versão de L’Hôpital<sup>47</sup>. Por um lado, no método de Newton, o conceito principal criticado é o conceito dos *momentos*. Por outro lado, Berkeley elege as *diferenças* infinitamente pequenas, ou infinitesimais, como as responsáveis pela imprecisão das demonstrações no cálculo diferencial. Segundo Berkeley, o cálculo diferencial “atende a todos os mesmos fins e efeitos que o das fluxões” (Berkeley, 1979, §6, p. 68). Porém, o primeiro utiliza conceitos *infinitesimais* ao invés de *momentos*.

Após a crítica aos *momentos*, a primeira vez que aparece n’*O Analista* considerações acerca do cálculo diferencial é no parágrafo 5. Berkeley o faz em comparação com o método newtoniano:

<sup>47</sup> Apesar de Berkeley não mencionar, a sua crítica está realmente dirigida à versão de L’Hospital, apresentada na *Analyse des infiniment petits* (1696). A apresentação d’*O Analista* é uma espécie de paráfrase do texto de L’Hopital (cf. L’Hôpital, 1768, prefácio, p. 17-18).

“Supõe-se, até entre nós próprios, que os matemáticos estrangeiros procedem de uma maneira menos precisa e, talvez, menos geométrica, no entanto mais inteligível. Ao invés de quantidades fluentes e suas fluxões, eles consideram as quantidades variáveis finitas como aumentando ou diminuindo pela contínua adição ou subtração de quantidades infinitamente pequenas. Ao invés das velocidades com as quais os acréscimos são gerados, eles consideram os próprios aumentos ou diminuições, que chamam diferenças e que *supõem* como infinitamente pequenas. A diferença de uma linha é uma linha infinitamente pequena; de um plano, um plano infinitamente pequeno. Eles *supõem* que as quantidades finitas *consistem* [consist] de partes infinitamente pequenas e que as curvas são polígonos cujos lados são infinitamente pequenos e determinam a sua curvatura pelos ângulos que os lados formam uns com os outros”. [itálico meu] (Berkeley, 1979, §5, p. 67).

Berkeley expõe o cálculo aproximando os conceitos centrais dos dois métodos, ou seja, *momentos* e *diferenças*. A concepção cinemática da matemática newtoniana permite admitir que magnitudes geométricas possuem velocidades em seu primeiro estado de geração ou alteração. No entanto, no cálculo diferencial não há a concepção cinemática de matemática e a primeira variação de uma magnitude surge com o acréscimo contínuo de uma grandeza infinitamente pequena ou infinitesimal. Esse acréscimo é a diferença de uma magnitude<sup>48</sup>. O papel comum de ambas, tanto do momento quanto da diferença, é representar a primeira variação possível das magnitudes. Assim, por exemplo, no caso do cálculo, a primeira possível variação de uma linha surge como o acréscimo de sua diferença, isto é, de uma linha com grandeza infinitamente pequena.

Mesmo indicando a semelhança nos papéis desempenhados pelas diferenças e momentos em seus respectivos métodos, Berkeley leva em consideração suas desigualdades quanto à justificação. Como visto, Newton tentou conferir um caráter geométrico aos momentos ao fundamentá-los na teoria das primeiras e últimas razões<sup>49</sup>. Agora, no cálculo diferencial, Berkeley parece estar ciente da ausência de qualquer tentativa de explicitar o caráter real e geométrico das diferenças, e por isso seria justo considerar o cálculo diferencial como sendo “menos preciso e menos geométrico”. Todavia, a primeira vista, a inteligibilidade do cálculo não estaria por isso

---

<sup>48</sup> Nas palavras de L’Hôpital: “Definição II: As porções pelas quais quantidades variáveis continuamente aumentam ou diminuem são chamadas *diferenças*...” (L’Hôpital, 1768, p. 1)

<sup>49</sup> A base fundamental da teoria das primeiras e últimas razões é a concepção de limite. Nos movimentos nascentes e evanescentes existe um limite de onde o movimento parte ou para onde ele tende, mas nunca ultrapassa. É nesse limite que essas quantidades assumem razão de igualdade. No entanto, para Newton, os limites podem ser determinados geometricamente: “Ai [nas quantidades evanescentes] existe um limite que sua velocidade pode atingir no fim do movimento, mas não pode exceder. Essa é sua última velocidade. Há um limite semelhante para todas as quantidades que começam ou terminam sua existência. E já que esse limite é certo e definido, a determinação dele é propriamente um problema geométrico. Mas tudo o que é geométrico é legitimamente usado na determinação e demonstração de tudo o que pode ser geométrico” (PN, 1999, p. 441). Portanto, os limites, ao serem determinados geometricamente, conferem um caráter geométrico aos momentos.



comprometida, pois sempre restaria a possibilidade de *supor* a presença das diferenças nas magnitudes finitas. Por exemplo, no início de sua obra, L'Hôpital realiza um pedido, ou melhor uma "Demanda ou Suposição": "Necessita-se que uma linha curva possa ser considerada como uma reunião infinita de linhas retas, cada uma infinitamente pequena; ou (que é a mesma coisa) um polígono de um número infinito de lados, cada um infinitamente pequeno..." (L'Hôpital, 1768, p. 3). Para L'Hôpital, essa afirmação não revelaria problemas, pois o que a fundamentaria é justamente seu caráter de uma mera suposição. E a suposição é aceitável quando não gera erro. É por isso que L'Hôpital afirma no prefácio de sua obra: "Uma análise desse tipo nos conduz somente a verdadeiros princípios sobre as curvas" (L'Hôpital, 1768, prefácio, p. 18). Em outras palavras, se uma análise resultasse em falsidades, seria sinal de que a suposição de quantidades infinitamente pequenas seria falsa da mesma maneira. Portanto, esse seria o único nível de comprometimento assumido com as quantidades infinitamente pequenas: a suposição de sua existência onde a sua veracidade pudesse ser garantida pelos resultados verdadeiros obtidos.

Todavia, as exigências de Berkeley quanto à compreensibilidade ou *inteligibilidade* poderiam ser retroagidas à própria *suposição* do infinitamente pequeno. Na visão de Berkeley, mesmo não se afirmando no cálculo diferencial o caráter real e geométrico dos infinitésimos, o matemático ali está pelo menos admitindo a possibilidade de concebê-los de alguma maneira. Nas palavras de Berkeley, concebê-las pela imaginação. Assim, tal possibilidade de *supor* algo está relacionada à possibilidade dele ser imaginado. E Berkeley é contundente ao rejeitar a inteligibilidade dos infinitamente pequenos mesmo como suposições: "Ora, conceber uma quantidade infinitamente pequena, isto é, infinitamente menor do que alguma quantidade sensível ou imaginável, ou do que a menor magnitude finita, está, eu confesso, acima de minha capacidade". (Berkeley, 1979, §5, p. 67). Portanto, as *diferenças* tampouco são objetos claros à mente.

A crítica ao cálculo diferencial deve ser considerada como um ponto estratégico para fortalecer a própria crítica ao método das fluxões. Em outras palavras, mesmo que Newton tenha relutado para se afastar de qualquer espécie de infinitamente pequeno, Berkeley ainda o acusa de não ter alcançado tal objetivo. É no parágrafo 11, d'*O Analista*, que se aponta o caráter infinitesimal das quantidades utilizadas na demonstração de Newton, no Lema II, Livro II, dos *Principia*. O argumento berkeleyano focaliza o próprio conceito de limite matemático: uma das peças

fundamentais da teoria das primeiras e últimas razões. Berkeley raciocina da seguinte maneira. Primeiro, para Newton, os limites matemáticos não podem ser compreendidos como limites ao estilo da geometria euclidiana, ou seja, que são meros pontos ou linhas sem magnitudes. A própria terminologia newtoniana (“quantidade nascente” ou “acrécimo momentâneo”) exige essa diferenciação. Porém, em segundo lugar, mesmo que tais acréscimos fossem algo superior ao nada, eles não seriam, no entanto, quantidades finitas. No entanto, aqui pode-se questionar: essa não é uma das principais característica das quantidades infinitesimais, a saber, ser um acréscimo e possuir uma magnitude que se pode desconsiderar? A resposta de Berkeley é enfática: *momentos*, fundados nessas razões primeiras e últimas, ainda são infinitésimos. Nas palavras de Berkeley: “pelo que entendo, não se pode admitir uma quantidade como meio-termo entre uma quantidade finita e o nada sem admitir infinitésimos” (Berkeley, 1979, §11, p. 71).

Mas Newton não enfatizara que se deveria levar em conta somente as razões geométricas e, assim, a relações de proporcionalidade dessas quantidades? Para Berkeley, isso não é uma justificativa que evitaria tais infinitésimos, ao estilo do cálculo diferencial. Pois na demonstração acima mencionada, Newton trata os momentos enquanto quantidades. Ao dividi-los em partes deixou-se de considerar a proporção dos momentos para tratá-los como magnitudes bem determinadas. Portanto, para Berkeley, não é obvio e fácil de explicar como o método das fluxões é geométrico, porém, desprovido do comprometimento com quantidades infinitamente pequenas. Desse modo, Berkeley é contundente: “De fato, embora se tenha empregado muitos artifícios para escapar ou evitar a admissão de quantidades infinitamente pequenas, parece que ainda foi ineficaz.” (Berkeley, 1979, §11, p.71).

### **2.3. Os objeto das demonstrações matemáticas nos Princípios**

Foi possível, até agora, observar como se estrutura a crítica de Berkeley ao método das fluxões. Resumindo os principais pontos, vimos que, primeiro, trata-se de um questionamento sobre a inteligibilidade dos objetos matemáticos, ou seja, para Berkeley, de nenhuma maneira as faculdades cognitivas (como elas estão vinculadas, isto é, a imaginação subordinada aos sentidos) não conseguem estabelecer idéias inteligíveis de tais *momentos*. Ao lado disso, as inferências (da demonstração newtoniana) utilizam duas propriedades opostas dos momentos: o fato de não serem

quantidades finitas, mas ao mesmo tempo poderem ser divididas (que é uma propriedade de quantidades finitas). Com base nisso, Berkeley conclui que os *momentos* newtonianos em nada se distinguem das indesejadas *diferenças* infinitesimais (no estilo leibniziano).

Como foi apresentada acima, a afirmação de Berkeley sobre a postura de um “livre pensador”, no parágrafo 2, d’*O Analista*, deveria ser interpretada como uma estratégia na construção da crítica ao método newtoniano. Mais precisamente, Berkeley afirma que assumiria a posição de um “livre pensador” para avaliar a matemática dos “analíticos modernos”. Isso indica que os critérios para a própria crítica estariam subjacentes às considerações dos próprios analistas. Em especial, no caso de Newton, Berkeley teria retirado da própria fundamentação newtoniana da matemática os critérios para a crítica ao rigor do método das fluxões. Nesse sentido, Berkeley estaria aplicando o próprio critério de rigor (para objetos e demonstrações matemáticos) utilizado por Newton. Se for assim, então, cabe uma pergunta a ser feita que diz respeito ainda sobre o esclarecimento dessa crítica de Berkeley a Newton: como deve ser compreendida a afirmação de Berkeley sobre o vínculo da imaginação aos sentidos? A crítica se formula pela limitação existente na atividade imaginativa: não se ultrapassa as características sensíveis com o que é produzido pela imaginação. Os *momentos* são inimagináveis em seu estado nascente.

Quando Newton atribui às primeiras e últimas razões um caráter geométrico isso não significa, pelo menos de maneira imediata, que a imaginação estaria subordinada ao sensível. Caso Newton assumisse isso, a sua seguinte afirmação sobre as quantidades incomensuráveis poderia ser refutada:

“Poderia se objetar que se as últimas razões de quantidades evanescentes são dadas, suas últimas magnitudes serão dadas também; e assim, todas as quantidades consistirão de indivisíveis, contrariando o que Euclides provou com respeito aos indivisíveis no Livro X de seus *Elementos*. Mas essa objeção se baseia sobre uma hipótese falsa. Pois as razões últimas com que as quantidades desaparecem não são, na verdade, as razões das quantidades últimas, e sim os limites para os quais sempre convergem as razões de quantidades decrescentes sem limite, e dos quais elas se aproximam mais do que por qualquer diferença dada, mas nunca vão além deles nem realmente os atingem, até as quantidades serem diminuídas indefinidamente”. (PN, 1999, p. 442).

Ora, se Newton não quer que sua teoria das primeiras e últimas razões se confronte com a teoria dos incomensuráveis, é evidente que as quantidades em jogo não poderão ser constituídas de quantidades últimas. Tais indivisíveis seriam essas quantidades últimas.

Euclides na definição 1, Livro X, dos *Elementos*, apresenta como magnitudes incomensuráveis, ao contrário das comensuráveis, aquelas que não têm uma “medida comum”<sup>50</sup>. Isso significa que é possível encontrar duas magnitudes desiguais e que nunca forneceriam uma magnitude última que as mensure. Uma prova dessa interpretação encontra-se na aplicação da Proposição 2: “se, quando a menor de duas magnitudes desiguais é continuamente subtraída alternadamente da maior, o que resulta nunca medirá a anterior, as magnitudes serão incomensuráveis” (Heath, 1956, v-3, p. 17). Segundo essa afirmação, se duas magnitudes são incomensuráveis, é possível repetir sem fim um processo de subtração, sempre a menor da maior<sup>51</sup>. Subentende-se nisso que as magnitudes não são formadas por uma quantidade última. Caso isso não ocorra, poderia ser interpretado que na matemática somente existiriam magnitudes comensuráveis, ou seja, magnitudes que sempre podem ser reduzidas à uma quantidade última. Voltando a Newton, caso ele se comprometa com a relação descrita entre imaginação e sentidos (para garantir a inteligibilidades dos objetos geométricos), inevitavelmente existiria uma quantidade última e sensível, constituinte das magnitudes geométricas. Portanto, se for levada em consideração essa atitude de aceitação dos incomensuráveis, por parte de Newton, seria uma atitude muito precipitada atribuir à crítica de Berkeley, apresentada no parágrafo 3, d’*O Analista*, uma simples retomada de um critério newtoniano.

### 2.3.1. O caso contra a infinita divisibilidade da extensão finita

O que deve ser investigado, no entanto, é a possível origem dessa relação existente entre sentidos e imaginação, n’*O Analista*. Para isso, caso seja considerada uma afirmação presente no último parágrafo desse texto, surgirá um excelente indicativo para resolver essa questão. Trata-se da afirmação de Berkeley com respeito às suas reflexões (sobre a matemática dos analistas modernos) apresentados em outro texto seu:

“Desde um longo tempo havia suspeitado que esta analítica moderna não era científica e disso havia publicado algumas pistas há vinte e cinco anos. Desde então, dediquei-

---

<sup>50</sup> (cf. Heath, 1956, v-3, p. 10).

<sup>51</sup> Nesse caso, sedo AB e CD duas magnitudes, onde  $CD > AB$ . Ao se realiza a subtração  $CD - AB$  sugira uma magnitude que pode ser denominada FD, ou seja,  $CD - AB = FD$  (Sendo  $CD > AB > FD$ ). Mas ao continuarmos a subtração agora com AB e FD surgirá uma outra magnitude GB, ou seja,  $AB - FD = GB$  (sendo  $AB > FD > GB$ ). Segundo essa proposição 2 de Euclides, esse processo de subtração pode seguir sem fim, caso as quantidades em questão sejam incomensuráveis. Isso quer dizer que nunca se chegará a uma quantidade final que seja uma medida comum entre AB e CD.

me a outras ocupações e imaginava que me podia dedicar a algo melhor que a deduzir e reunir meus pensamentos sobre um tema tão refinado” (Berkeley, 1979, §50, p.95).

O texto ao qual Berkeley está se referindo aqui é seu *Tratado sobre os princípios do conhecimento humano*, publicado em 1710<sup>52</sup>. Desse modo será interessante compreender o papel dos sentidos e imaginação, nesse texto de 1710, quanto ao que se refere à geometria, para novamente analisar a crítica apresentada no parágrafo 4, d’*O Analista*.

Nos *Princípios*, o modo como Berkeley considera a matemática – desde a inauguração na antiga Grécia até os matemáticos modernos (do período da publicação dos *Princípios*) – é muito mais uma atitude de aprovação do que qualquer outra coisa<sup>53</sup>. A matemática possuiria princípios e demonstrações incontestáveis. Porém, a atitude de Berkeley, nos *Princípios*, quanto a essa ciência, é mais a de denunciar princípios usados, ou pelo menos subentendidos nas demonstrações, que impediria a própria matemática de ser considerada uma ciência totalmente coerente:

“Vamos agora fazer um inquirimento concernente a outro ramo do conhecimento especulativo: a matemática. Celebrada ao máximo pela sua clareza e certeza demonstrativa, (...), no entanto não pode supor-se livre de erros (...). Embora os matemáticos deduzam os seus teoremas de um alto nível de evidência, os seus primeiros princípios são limitados à consideração da quantidade; e como não ascendem à investigação concernente às máximas transcendentais que influenciam todas as ciências, cada uma de suas partes desde o início, inclusive a matemática, de fato estão sujeitos aos erros envolvidos nelas. *Não se pode negar* a veracidade desses princípios, nem a clareza e incontestabilidade da dedução efetuada; mas pode haver máximas errôneas de extensão superior ao objeto da matemática, tacitamente admitidas no progresso desta ciência...” [itálico meu] (PRI, §118, p.146).

Aqui é possível encontrar sim uma consideração favorável ao trabalho matemático. Isso está explícito quanto Berkeley afirma a impossibilidade de “negar” a veracidade e clareza dos princípios e demonstrações realizados no trabalho matemático. O interessante que a afirmação como um todo, além de ressaltar esse lado “positivo” da matemática, apresenta uma intenção: apontar os seus compreensíveis desvios das “máximas transcendentais que influenciam todas as ciências”, para então torná-la corretamente fundamentada. Nos seguintes parágrafos dos *Princípios*, Berkeley analisa

---

<sup>52</sup> Mais precisamente, segundo Jesseph, Berkeley estaria se referindo aos §§130-132, dos *Princípios* (cf. Berkeley, 1992, nota 35, p 209).

<sup>53</sup> Jesseph é cuidadoso em seu texto para alertar que, antes dos *Princípios*, Berkeley manifestara uma intenção de reformular quase a totalidade da ciência matemática, em especial a geometria: “Em seus primeiros cadernos de anotações, ou *Comentários Filosóficos*[1707-1708], Berkeley sublinhou um radical programa para a geometria que requereria a rejeição de quase tudo da geometria clássica” (Jesseph, 2005, p. 278). Essa atitude não está presente, no entanto, nos *Princípios*, como será possível observar mais à frente.

dois ramos da matemática: a geometria e a aritmética. Aqui, portanto, o que interessa nesse momento é compreender a crítica aos objetos da geometria.

Um dos problemas que Berkeley encontra na geometria diz respeito às máximas sobre a extensão. Trata-se da divisibilidade infinita da extensão finita (divisibilidade que vai potencialmente ao infinito) e da concepção da extensão finita detentora de infinitas partes (divisibilidade infinita atualmente percebida); essas são duas concepções que tornariam o estudo da matemática tão difícil e fastidioso. Contra a extensão finita como possuidora de infinitas partes, Berkeley argumenta inicialmente que: “Cada extensão finita particular pensável é uma *idéia* existente apenas no espírito, e, portanto, cada parte dela deve ser percebida” (PRI, §124, p.149). Vê-se claramente, aqui, a identificação da extensão finita como sendo *idéia*. E parece ser fundamental a compreensão dessa identificação entre *idéia* e extensão finita para o conhecimento geométrico, pois Berkeley conclui já em seguida a impossibilidade dessa espécie de infinito atualmente percebido: “logo, se não posso perceber inúmeras partes em uma extensão finita considerada, é certo não estarem aí contidas” (PRI, §124, p.150). Berkeley também relaciona *idéia* e extensão finita para argumenta contra a extensão potencialmente dividida infinitamente:

“...e não menos clara a impossibilidade de dividir cada uma das minhas idéias em um número infinito de outras idéias, isto é, não são infinitamente divisíveis. Se por extensão finita se entende algo diverso de uma *idéia* finita, não sei o que seja...” (PRI, §124, p.149).

Dessa maneira, surgem as seguintes questões: o que significa ser *idéia* e qual a sua relação com a extensão percebida (a ponto de eliminar qualquer noção de infinito)? Como dessa noção da percepção (mesmo que seja da própria extensão) deriva a imaginação? Para responder isso, faremos uma breve digressão sobre o significado desse conceito de *idéia* – que parece ser um dos pontos importantes dessa argumentação.

Para Berkeley, há três possíveis origens para nossas idéias, isto é, tudo o que é *idéia* diz respeito, somente, ao conteúdo fornecido por estas três maneiras (PRI, §1, p.103). A primeira é recebê-las impressas de forma atual nos sentidos (como: cor, cheiro, sabor, forma e vários sons). A segunda, trata-se das idéias que sentimos a partir das paixões e operações do espírito (são excitações como amor, alegria, repugnância e tristeza, que se sentem quando as sensações da primeira maneira atingem o espírito). E, a terceira e última maneira, são as idéias que surgem com o auxílio da *memória* e da

*imaginação* ao compor, dividir ou representar as idéias surgidas pelas outras maneiras. São somente esses três tipos de origem das idéias que Berkeley aceita, havendo, todavia, entre elas uma ordem para que as idéias atinjam o espírito, cujo ponto inicial são os sentidos.

Algo importante acerca da origem das idéias diz respeito à possibilidade do conhecimento ou como algo pode vir a ser um genuíno objeto conhecimento. Argumenta-se, nos *Princípios*, contra a possibilidade de haver um mundo independente do que seja percebido por algum dos três modos enunciados acima: “E que percebemos nós *além das nossas próprias idéias ou sensações?* E não repugna admitir que alguma ou um conjunto delas possa existir impercebido?” (PRI, §4, p. 104). Ao apontar essa impossibilidade, Berkeley, necessariamente, identifica a *idéia* como o objeto do conhecimento. Todo o conteúdo que pode ser conhecido (ou conteúdo cognitivo) não vai além das percepções ou das idéias adquiridas pelos três modos acima citados; isso resulta, obrigatoriamente, também, na negação de idéias ou conhecimentos inatos. Nada surge na mente sem que tenha uma relação com a percepção obtida por algum dos órgãos dos sentidos.

Assim, falar de algo, inclusive sobre a existência, que não possua o respaldo no fato de ser percebido é, para Berkeley, falar coisas sem sentido algum: “O que se tem dito da existência absoluta de coisas impensáveis sem alguma relação com o seu ser-percebidas parece perfeitamente ininteligível” (PRI, §3, p. 104). Fica evidente que pensar é possuir idéias e possuir idéias é, antes de tudo, possuir percepções. A compreensão de algo está intrinsecamente ligada à condição de ser *idéia* percebida. O objeto do conhecimento não pode possuir outra forma que não seja *idéia*. Adicionalmente, essa orientação está presente na doutrina contida na expressão latina do *esse est percipi* (ser é ser percebido) (PRI, §3, p. 104), ou seja, não podemos nos comprometer com a compreensão ou inteligibilidade das coisas que se encontram fora do âmbito das coisas percebidas. O *esse est percipi* como apresentado aqui, agora manifesta no mínimo duas perspectivas: ele é um princípio que define o objeto do conhecimento e, além disso, define um critério para a existência deles<sup>54</sup>. Nessa segunda parte, ele assevera que o que existe é somente o que é percebido. Desse modo, a geometria, por encerrar pretensos objetos do conhecimento humano, deve possuir suas

---

<sup>54</sup> Isto é, podemos dizer que existem no mínimo duas perspectivas para o “ser é ser percebido” de Berkeley: uma epistemológica e uma ontológica.

raízes (ou suas “máximas transcendentais”) nesse dois aspectos do “ser é ser percebido”.

Pode-se agora retornar à discussão sobre o fundamento do argumento de Berkeley contra qualquer pretensão sobre a infinitude da extensão, extensão essa compreendida como o objeto de estudo da geometria. A possível divisibilidade infinita e a divisibilidade infinita atualmente percebida, a tal ponto aceitas entre os matemáticos que “não se admite dúvida ou discussão a tal respeito” (PRI, §123, p. 1149), só provocou paradoxos geométricos e por isso devem ser corrigidas. E, para corrigi-las, Berkeley compreende que o objeto da geometria deve submeter aos padrões comuns a todas as percepções. Então, em se tratando de extensão, a única coisa que é perceptível, que chegam ao espírito enquanto percepção, são quantidades finitas da extensão. Os sentidos não conseguem perceber nada mais do que partes finitas e isso é percorrer uma quantidade numerável de partes. Todavia, qualquer interpretação de infinito considera a extensão como detentora de quantidades inumerável de partes, o que é uma manifesta contradição (PRI, §124, p. 149). O que é numerável é perceptível pelo espírito, sendo o contrário impossível ou incompreensível. Contudo, não seria a imaginação a responsável em conferir inteligibilidade à noção de infinito? Ou melhor, a imaginação não seria capaz de criar essas espécies de divisibilidade infinita?

Como já citado, Berkeley aceita somente três maneiras para que as idéias cheguem ao espírito. A imaginação é uma dessas três, vista como uma faculdade ativa, produtora de idéias. Contudo, existe um limite para ela: ter que se referir sempre aos materiais oriundo dos sentidos; há um vínculo entre os sentidos e a imaginação. Berkeley consegue sustentar a existência desse vínculo ao observar que todas as idéias que a imaginação produz podem, de alguma maneira, ser reduzidas a uma idéia vinda pelos sentidos:

“...por mim tenho realmente a faculdade de imaginar ou representar-me idéias de coisas particulares e de variamente as compor e dividir. Posso imaginar um homem bicípite ou a parte superior de um homem ligada a um corpo de cavalo; posso considerar a mão, os olhos, o nariz separados do resto do corpo. Mas olho e mão imaginados terão forma e cor particulares. Igualmente a idéia de homem imaginado tem de ser de homem branco ou preto ou moreno, direito, curvado, alto, baixo ou mediano” (PRI. Int, §10, p.92)

Berkeley sustenta a sua tese ao indicar que os exemplos produzidos, tanto pela composição como pela separação, sempre possuem algo que é particularmente percebido. Mesmo a composição de idéias, como no exemplo da ligação da parte de um



corpo humano ao de um cavalo, não retira a característica de que cada parte ligada pode realmente ser percebida pelos sentidos. A imaginação necessariamente atua sobre o sensível. Dessa maneira, nenhuma noção de infinito (potencial ou atual) conforma-se à faculdade da imaginação, pois ela não tem a capacidade de ir além do que é finito, do que é particular. Compor e dividir é criar noções finitas a partir de percepções que são, elas mesmas, finitas e anteriormente fornecidas pelos sentidos.

De forma mais pontual, agora, pode-se compreender o que Berkeley está reclamando, no parágrafo 4, para o método das fluxões, no texto d'*O Analista*: o modelo de inteligibilidade que nasce a partir do que é *percebido*. Isso significa que nem mesmo a imaginação consegue fornecer aos *momentos* ou infinitésimos o estatuto de objeto de conhecimento, porque ultrapassam a possibilidade de serem percebidas pelos sentidos.

Como visto acima, a inteligibilidade é retirada do próprio “material” com que a imaginação trabalha; e mesmo que Berkeley compreenda ser uma faculdade ativa, produtiva, a da imaginação, para ele, imaginar não significa produzir quantidades infinitamente pequenas (sejam denominados *momentos* ou *diferenças*) a partir de elementos finitos e muito menos retirar inteligibilidade de quantidade finitas, como são os materiais sensíveis, para aplicar na possível criação de noções infinitas. “Se os termos ‘extensão’, ‘partes’ etc, estão em sentido concebível, isto é, são idéias, então, dizer que extensão ou quantidade finita consiste em uma infinidade de partes é contradição tão manifesta, que todos a vêem imediatamente” (PRI, §124, p. 150).

Pode-se desse modo afirmar que Berkeley está, sim, retomando n'*O Analista* (para criticar Newton) um de seus elementos presentes nos *Princípios*: o vínculo existente entre sentidos e imaginação. E tal vínculo possui como base sustentadora as características dos objetos do conhecimento fundamentado na filosofia do *esse est percipi*. A única diferença entre tais textos é que, n'*O Analista*, Berkeley permanece no plano da inteligibilidade dos *momentos*. Nos *Princípios*, é muito mais explícita a conclusão da não existência das infinitas partes em uma linha finita atualmente percebida, ou seja, nesse texto Berkeley aplica seu “ser é ser percebido” tanto à inteligibilidade como também à existência dessas noções de infinitos. Por outro lado, n'*O Analista*, Berkeley não necessita afirmar que os *momentos* não existem. Para acusar o caráter impreciso do método das fluxões bastou apontar a inteligibilidade dos *momentos* newtonianos.

## 2.4. Conclusão

No capítulo anterior, vimos que Newton expressou severas restrições à admissibilidade dos infinitesimais, utilizados em sua fase analítica e por métodos analíticos de outros matemáticos. O resultado dessas restrições foi a elaboração do método das primeiras e últimas razões. A principal vantagem vista em tal método foi a sua evidente característica geométrica. Para Newton, ser geométrico é, antes de tudo, ser real, ou seja, não se poderia duvidar da realidade dessas razões presentes nos estado nascente ou evanescente dos movimentos das magnitudes geométricas. Em especial, pode-se dizer que a realidade dessas primeiras e últimas razões seria garantida por serem uma extensão de propriedades de magnitudes finitas que ainda permaneceriam em seus estados limites, isto é, antes do seu completo aniquilamento ou no exato momento em que surgem. Desse modo, as relações de proporcionalidade presentes no estado finito, antes do fim do movimento pelo qual são supostamente geradas, são preservadas.

No entanto, pode-se ler que Newton, ao utilizar as primeira e últimas razões no método da fluxões, estaria preocupado com o rigor com que as fluxões fossem determinadas. Apontar a realidade dessas razões é uma tentativa de fornecer um rigor completo ao método das fluxões. Isso distancia Newton da tentativa de justificar o método das fluxões somente pela veracidade dos resultados encontrados. Assim, ele não aceita a hipótese dos infinitesimais somente por serem úteis no sentido de produzirem resultados verdadeiros.

Por sua vez, Berkeley lança dúvidas sobre o caráter rigoroso do método das fluxões. Por se apoiar em objetos ininteligíveis e demonstrações falaciosas (por realizar uma mudança não justificada de hipóteses), o método das fluxões não seria digno de confiança, enquanto método bem fundamentado. Nesse sentido, pode-se concluir, com o que foi apresentado nesse capítulo, que o grande empenho de Newton para afastar dos métodos analíticos se mostrou inócuo aos olhos de Berkeley. Isso está realmente evidente quando Berkeley argumenta que os *momentos*, como utilizados na demonstração do Lema II, Livro II, dos *Principia*, iguala-se às características dos tão suspeitos infinitesimais. Mais precisamente, para Berkeley, eles são idênticos aos infinitesimais do método diferencial, denominados *diferenças*.

Sobre a crítica de Berkeley a Newton, como foi visto, surgiu uma interessante questão. Até que ponto Berkeley estaria se apoiando em sua doutrina epistemológica e

ontológica dos *Princípios* para criticar a inteligibilidade dos *momentos* newtonianos? Apesar de Berkeley afirmar que irá se comportar como um matemático “livre pensador”, a conclusão é que o problema do vínculo entre sentidos e imaginação tem uma relação estreita com a filosofia do *esse est percipi*. O que necessita ser esclarecido agora é que Berkeley não estaria modificando sua estratégia argumentativa. Em outras palavras, quando evoca o papel dos sentidos, ele está pensando não particularmente em Newton, mas nos matemáticos “livre pensadores”. Pois, Berkeley reconhece que para esses matemáticos os sentidos seriam um dos principais elementos para determinar a inteligibilidade dos objetos das demonstrações. Assim, os “livres pensadores” duvidariam da religião porque os “mistérios” da fé não são passíveis de se apresentarem aos sentidos. Na seguinte afirmação Berkeley deixa evidente a contradição de aceitar os *momentos* (e também, as *diferenciais*) como objetos claros e distintos, mas ao mesmo tempo negar os objetos da fé por não serem empíricos:

“Afirmo que todos esses pontos [a respeito tanto dos *momentos* como dos *diferenciais*] são objetos de suposição e de crença de alguns homens que, de modo rigoroso, exigem exatidão nas evidências relativas à religião. Homens que têm a pretensão de não acreditar senão naquilo que podem ver” (Berkeley, 1979, §7, p. 68).

Assim, pode-se afirmar que a ênfase dada ao vínculo entre sentidos e imaginação, no parágrafo 4, evoca o critério de Berkeley para determinar os genuínos objetos do conhecimento presente em sua filosofia do *esse est percipi*. No entanto, no que diz respeito aos sentidos, somente, seria sim um critério compartilhado com os matemáticos “livre pensadores”. Portanto, a afirmação de que “a imaginação deriva dos sentidos” é mais uma alusão reveladora das razões mais profundas para a posição de Berkeley do que o indicio de uma mudança propriamente dita de estratégia argumentativa. Essa conclusão, aparentemente, contraria a interpretação de Jesseph sobre a crítica de Berkeley, n’*O Analista*. Segundo ele, o ataque ao método das fluxões:

“...não depende de peculiaridades da epistemologia e metafísica de Berkeley: o padrão de rigor que ele sustenta foi um lugar comum entre matemáticos do século dezoito, ele não indicia as fluxões ou os incrementos evanescente como impossíveis porque eles contrariam a tese do *esse é percipi* ou pleiteiam as rejeitadas idéias abstratas” (Jesseph, 2005, p. 304-305)<sup>55</sup>.

---

<sup>55</sup>

Essa é uma afirmação enfática de Jesseph. No entanto, em seu texto, de 1992, *Berkeley's philosophy of mathematics*, ele afirma pontualmente, em nota de rodapé, que Berkeley estaria evocando o vínculo entre sentidos e imaginação como apresentado nos *Princípios*, algo que o compromete com a doutrina do *esse est percipi* (cf. Jesseph, 1992, nota 8, p. 186).

De fato, com respeito à passagem do §7, citada acima, Berkeley está pensando sim no critério aceito pelo “livre pensador”. Porém, quando ele afirma que a imaginação deriva dos sentidos, emerge a marca pessoal do Berkeley. Algo que não significa propriamente uma mudança de rumo, pois o critério de ser sensível é que estaria em questão e isso é que os matemáticos infiéis estariam aceitando como elemento característico da inteligibilidade dos objetos das demonstrações.

A partir disso, agora pode ser questionado se a crítica de Berkeley aos métodos newtonianos abalam igualmente a defesa do realismo matemático que inspirou Newton na sua ruptura com os métodos analíticos dos modernos. No próximo capítulo, veremos que Berkeley não somente amplia a sua argumentação contra a matemática dos analistas modernos como também fornece uma sugestão ou um modelo para que essa matemática continue atuando de maneira que contribua para resolver os problemas da vida prática. É nesse sentido que iremos nos deter sobre a interpretação da “compensação de erros” proposta por Berkeley.

### 3. BERKELEY E A TESE DA “COMPENSAÇÃO DE ERROS”

Para introduzir o tema deste capítulo, será instrutivo retornar primeiramente aos propósitos a que Berkeley se atribui no início d'*O Analista*. Mais precisamente, é a sua atitude de isenção preliminar em relação ao método das fluxões (aceito sem nenhuma suspeita pelos matemáticos modernos). Ou ainda em suas palavras: “Mas se este método é claro ou obscuro, coerente ou repugnante, demonstrativo ou precário, *como pretendo indagar* com extrema imparcialidade, submeto minha indagação a vosso julgamento e ao de todos os leitores sinceros” [itálico meu] (Berkeley, 1979, §3, p. 66). Como foi longamente discutido no capítulo anterior, Berkeley fornece apenas argumentos que permitiriam atribuir ao tal método newtoniano todos esses adjetivos desfavoráveis, apresentados na citação acima. Dessa maneira, o método das fluxões seria: “obscuro”, “repugnante” e “precário”.

Foi visto também que, nos *Princípios*, Berkeley se propõe a avaliar alguns dos princípios utilizados pelos matemáticos. Apesar de se referir primeiramente à geometria como um todo, não especificamente à matemática dos modernos (como o método das fluxões e o cálculo diferencial), Berkeley apresenta uma atitude mais de aprovação a esse ramo da matemática do que o contrário. Sua tarefa não é obstar a ciência geométrica, mas somente denunciar alguns dos princípios aceitos entre os geômetras (como o princípio da indivisibilidade infinita da extensão atualmente percebida) que somente comprometem a exatidão de tal ciência. Isso significa, portanto, que recusar as noções de infinito não implica em recusar a totalidade da ciência geométrica, em especial a geometria clássica, entre elas a dos *Elementos* de Euclides.

O tema, portanto, deste último capítulo diz respeito a um segundo, mas não menos importante, aspecto das críticas de Berkeley aos padrões conceituais e inferenciais da matemática da sua época. Trata-se da contraparte positiva ou construtiva da crítica anterior. O simples fato de que haja uma contraparte positiva ou construtiva na crítica de Berkeley reforça a idéia de que, n'*O Analista*, ao denunciar os problemas dos objetos e das demonstrações do método das fluxões, o seu propósito não poderia ser reprovar o método das fluxões, no sentido de eliminá-lo da prática matemática com um todo. Ao invés disso, dever-se-ia interpretar a crítica de Berkeley ao método newtoniano como uma postura que o aproxima da atitude dos *Princípios*, isto é, a de corrigir uma prática matemática para torná-la mais estruturada como conhecimento. É nesse sentido

que Berkeley propõe a sua *tese da compensação de erros* – como ela será denominada aqui<sup>56</sup>. Em princípio, ela é um mero desdobramento de um truísmo lógico, qual seja, é possível de premissas falsas inferir conclusões verdadeiras. Mas estaria Berkeley disposta a admitir como exato ou rigoroso um sistema matemático cuja verdade pudesse ser atribuída apenas às suas conclusões? O primeiro desafio, portanto, será analisar como Berkeley concebeu a relação de transmissão da verdade entre premissas e conclusões em tais circunstâncias particulares. Logo após, será, desse modo, analisado a tese da compensação de erros, propriamente dita, com o propósito de compreender as possíveis motivações especulativas que conduziram Berkeley a propor uma tal solução para o método das fluxões, assim como para o cálculo diferencial.

### **3.1.A verdade da conclusão como fundamento para a verdade das premissas?**

Os parágrafos 19 e 20, d'*O Analista*, poderiam ser interpretados como demarcando uma divisão entre duas fases. A primeira é a finalização do processo de crítica às demonstrações do método das fluxões e, também, do cálculo diferencial. A segunda fase diz respeito aos preparativos para demonstrar a tese da compensação de erros. No entanto, é no parágrafo 19 que aparece uma afirmação que motiva a uma investigação que ainda se encontra nessa primeira fase. Berkeley afirma o seguinte: “Eu digo que em qualquer outra ciência os homens provam suas conclusões por seus princípios e não seus princípios por suas conclusões” (Berkeley, 1979, §19, p. 76). Isso ele afirma em resposta a uma possível tentativa de justificação das demonstrações do cálculo diferencial, baseada no fato de que as conclusões do cálculo, apesar de todas as suas deficiências inferências, são verdadeiras. É tal justificativa que leva Berkeley a elaborar a segunda fase, ou seja, apresentar a tese da compensação de erros.

N'*O Analista*, não existe uma análise das demonstrações do cálculo. Berkeley apresenta as demonstrações do método das fluxões como elas realmente se encontram nos textos newtonianos. Para o caso do cálculo diferencial (inspirado no de Leibniz) ele faz somente uma menção ao procedimento apresentado por L'Hôpital no texto *Analyse des infiniment petits* (1696).

---

<sup>56</sup>

Esse título não é propriamente sugerido por Berkeley. Mais precisamente esse é um título que alguns comentadores utilizam para se referirem ao problema que Berkeley pretende resolver: de mostrar como é possível obter resultados verdadeiros mesmo que ele utilize premissas falsas (cf. Jesseph, 1993, p. 199).

“Pode não ser equivocado observar que o método para encontrar a fluxão de um retângulo de duas quantidades fluentes, como se coloca publicamente no *tratado das quadraturas*, difere-se do mencionado acima, retirado do segundo livro dos *Principia*, e que é, com efeito, igual ao usado no *calculus differentialis*” (Berkeley, 1979, §17, p. 74).

Aqui Berkeley diferencia duas demonstrações de Newton para determinar a fluxão da multiplicação de duas quantidades fluentes. Uma delas é aquela do Lema II, Livro II, dos *Principia* (algo apresentado no Capítulo anterior). A outra Newton teria fornecido no outro texto seu *De quadratura curvarum*. Berkeley iguala o procedimento de L'Hôpital a essa segunda demonstração de Newton. No entanto, o que iguala ambos os procedimentos demonstrativos são exclusivamente seus defeitos e deficiências. Portanto, a crítica ao cálculo se faz indiretamente: Berkeley aponta os defeitos da demonstração de Newton e a acusa de reincidir nos mesmos defeitos do cálculo diferencial, sem, entretanto, prolongar-se no assunto. Será importante, dessa maneira, compreender o que existe de problemático na demonstração de Newton e que estaria, também, presente em tal proposta de L'Hôpital.

No *De quadratura*, Newton apresenta o seguinte procedimento geral para encontrar as fluxões com potências:

“Faça a quantidade  $x$  fluir uniformemente e deixe a fluxão de  $x^n$  ser descoberta. Da mesma maneira que a quantidade  $x$  pelo fluir, torna-se  $x+o$ , a quantidade  $x^n$  torna-se,  $(x+o)^n$  isto é pelo método das infinitas séries:

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2}oox^{n-2} + Etc.,$$

e os aumentos

$$o e nox^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2}oox^{n-2} + Etc.$$

estão um para o outro como 1 está para  $nx^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2}ox^{n-2} + Etc.$

Agora faça esses aumentos evanescerem, e suas últimas razões estarão na razão de 1 para  $nx^{n-1}$ . É por isso que a fluxão da quantidade  $x$  estará para a fluxão da quantidade  $x^n$  assim como 1 estará para  $nx^{n-1}$ ”. (MW-1, p. 142).

É evidente nessa demonstração Newton utilizar um processo simbólico que lembra muito a fase analítica de sua matemática. Nas demonstrações dos lemas iniciais, dos *Principia*, realmente tal “simbolismo” não aparece. Contudo, o texto *De quadratura* foi elaborado por Newton entre 1691 e 1692<sup>57</sup>. Desse modo, é um texto da fase sintética de Newton, ou seja, da fase em que ele já manifestava um distanciamento da análise dos modernos para se aproximar do estilo geométrico dos antigos. O que evita a interpretação absoluta da demonstração acima, do *De quadratura*, ser uma retomada da análise dos modernos é o fato de Newton frisar o caráter geométrico dela. Isso quer dizer que os símbolos sempre estariam se referindo obrigatoriamente às quantidades geométricas, sejam elas quantidades finitas ou primeiras e últimas razões. Por isso, apesar de usar símbolos, essa demonstração ainda estaria próximo do estilo dos geômetras antigos. É por isso que Newton continua:

“A composição de um cálculo com quantidades finitas está ajustada à geometria dos antigos (assim como a investigação das primeiras e últimas razões de quantidades finitas evanescentes). Eu me dispus a mostrar que no método das fluxões não existe a necessidade de introduzir na geometria quantidades infinitamente pequenas” (MW-1, p. 143).

Elucidada essa utilização de símbolos por parte Newton, cabe agora saber o que está em jogo na sua demonstração. A idéia central do que ali está posto é a identificação da relação de proporcionalidade entre os movimentos das quantidades fluentes. Para Newton o primeiro movimento de  $x$  está para o primeiro movimento da quantidade  $x^n$  assim como  $x + o$  está para  $(x + o)^n$ , ou seja:

$$(i) \quad x : x^n :: x + o : (x + o)^n.$$

Como visto no primeiro capítulo, Newton encontrou várias soluções para transformar equações de termos composto em infinitas séries. A origem desse trabalho se deu a partir da influência do trabalho de Wallis<sup>58</sup>. Desse modo, Newton encontrou uma maneira de transformar  $(x + o)^n$  na série infinita:

$$x^n + n o x^{n-1} + \frac{(nm - n)}{2} o o x^{n-2} + Etc.$$

Isso faz com que a proporção (i) possa ser reescrita da seguinte maneira:

---

<sup>57</sup> Guicciardini afirma que o *De quadratura* foi elaborado por Newton no contexto com da disputa sobre a prioridade do cálculo com Leibniz (cf: Guicciardini, 2004, p. 465). Newton estaria por sua vez preocupado em reforçar com esse tratado duas características: (a) suas descobertas utilizando as infinitas séries na quadratura de curvas e (b) a superioridade geométrica de tal procedimento por não se apoiar na suspeitas quantidades infinitamente pequenas.

<sup>58</sup> (cf. Guicciardini, 1999, p. 18).



$$(ii) \quad x : x^n :: x + o : x^n + nox^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2} oox^{n-2} + Etc.$$

É aqui que aparece uma sutil estratégia. Como o que se pretende é determinar somente os aumentos de  $x$  e de  $x^n$ , eles podem ser descartados do terceiro e quarto membros da proporção (ii). O que permanecerá assim será:

$$(iii) \quad x : x^n :: o : nox^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2} oox^{n-2} + Etc.$$

Ainda resta um passo a ser explicado: é o fato de Newton substituir o símbolo  $o$  pelo número 1. O que isso significa? Trata-se da interpretação cinemática de sua matemática. Em outras palavras,  $o$  é o momento de  $x$ . Portanto, é o primeiro movimento com que  $x$  aumenta. Esse símbolo seria considerado geométrico porque ele representa as razões nascentes de  $x$ . Assim, por ser o primeiro movimento,  $o$  torna-se a referência para todos os outros movimentos<sup>59</sup>. Isso gera uma outra proporção:

$$(iv) \quad o : nox^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2} oox^{n-2} + Etc. :: 1 : nx^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2} ox^{n-2} + Etc.$$

O que Newton realiza na quarta proporcional de (iv), isto é,  $nx^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2} ox^{n-2} + Etc.$ , nada mais é do que eliminar somente uma instância de  $o$  em cada termo. Isso significa que cada termo é regulado somente por um  $o$ , fazendo com que ainda restem termos contendo outros  $o$ . Com isso, portanto, surge o último passo. Visto que permanecem na série infinita  $nx^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2} ox^{n-2} + Etc.$  termos com o elemento temporal representado por  $o$ , pode-se fazer com que essas quantidades esvançam. Após a isso, somente o que não possui relação com um elemento temporal restará, que será a quantidade  $nx^{n-1}$ . Portanto, é somente após esse movimento esvanecente que a proporção (iii) tornar-se-á a proporção descrita no final da citação acima:

$$(v) \quad x : x^n :: 1 : nx^{n-1}.$$

---

<sup>59</sup> Como visto no primeiro capítulo, Newton afirma no *De methodis* que não poderia apreender o tempo verdadeiro (ou seja, absoluto) de maneira formal. O que ele faria, nesse caso, é supor que o movimento matemático ocorreria tendo o tempo verdadeiro como “pano de fundo”. Isso significa que as quantidades seriam geradas no tempo verdadeiro. Porém, Newton escolheria um dos movimentos com sendo o tempo por analogia. Aqui, no *De quadratura*, como  $o$  representa o primeiro movimento, ele, nesse caso, seria o tempo por analogia. Em outras palavras, ele o movimento pelo qual todos os outros movimentos seriam regulados.

É muito claro o porquê de Berkeley não aceitar essa demonstração com sendo rigorosa: ela ofende diretamente um lema aceito na lógica. Em suas palavras:

“Se em vista para demonstrar alguma proposição, um certo ponto é considerado e que, em virtude deste, outros pontos são alcançados. Tal ponto considerado sendo posteriormente destruído ou rejeitado por uma suposição contrária, nesse caso, todos os outros pontos são atingido com isso e conseqüentemente a isso, devem ser destruídos ou rejeitados também. Desse modo, portanto, no que segue não serão mais supostos ou aplicados na demonstração'. Isso é tão claro que não necessita de prova” (Berkeley, 1979, §12, p. 71-72).

Berkeley está afirmado com esse lema a seguinte relação entre premissas e conclusão: se a partir de uma premissa  $P$  se conclui  $C$  e, assumindo-se logo em seguida  $\neg P$  (isto é, a negação da premissa  $P$ ), então não será possível reter a conclusão  $C$ . Esse lema não elimina a possibilidade de que, em uma demonstração, alguma hipótese inicial seja alterada. O que ele afirma é que ao se alterar uma hipótese inicial, tudo o que surgiu dessa hipótese deve também ser afetado. Newton estaria agindo contra o lema de Berkeley. Isso porque primeiro ele assume que o movimento é nascente, o que gera como incremento de  $x^2$ . a série infinita  $no x^{n-1} + \frac{(nm-n)}{2} o x^{n-2} + Etc.$ . Porém ao final da demonstração essa hipótese é alterada, ou seja, passa-se a considerar o movimento como evanescente. Assim, de acordo com o lema de Berkeley, tudo o que surgiu com a hipótese inicial deve ser descartado ou rejeitado. Não seria correto reter nada dessa primeira hipótese, pois, ela foi rejeitada. Para Berkeley, Newton não pode reter a expressão  $nx^{(n-1)}$ , porque ela surgiu da hipótese inicial que considera o movimento como nascente. É por isso que Berkeley afirma:

“Mas isso mostra que o raciocínio não é claro ou conclusivo. Pois quando se faz com que os incrementos se desvançam, isto é, que os incremento sejam nada ou que não tenha incremento, se destrói a primeira suposição de que os incrementos eram algo ou de que havia incrementos, e, no entanto, se retém uma conseqüência dessa suposição, isto é, uma expressão que se obteve em virtude dela. Isso, conforme o lema anterior, é uma forma falsa de raciocínio” (Berkeley, 1979, §12, p. 71).

Pode-se afirma, portanto, que a mudança de hipótese, por parte de Newton, é o mesmo problema que ocorre com a demonstração do Lema II, Livro II, dos *Principia*. Na visão Berkeley, Newton está apresentando o mesmo tipo de falácia: *Fallacia suppositionis* ou mudança de hipótese.

Para Berkeley, o mesmo tipo de falácia que Newton apresenta para determinar a fluxão de  $x^n$  ainda ocorre nas demonstrações que apresentam as multiplicações das

quantidades fluentes. Newton, não apresenta no *De quadratura* uma demonstração específica para o caso da multiplicação (algo como é feito no Lema II, Livro II, dos *Principia*). No entanto, quando ele necessita apresentar a fluxão de uma multiplicação, sempre está suposto o que foi visto na demonstração acima para de terminar a fluxão de  $x^n$ . Em outras palavras, primeiro, supõe-se que as quantidades multiplicadas aumentem pelos seus respectivos momentos e que, posteriormente, sejam compreendidas como quantidades evanescentes. Para Berkeley, esse é o mesmo procedimento que o realizado por L'Hôpital. Agora, portanto, pode-se retomar a discussão sobre sua crítica ao cálculo diferencial.

O que L'Hôpital apresenta como procedimento para determinar a as *diferenças* de uma multiplicação se apoiaria na mesma espécie de erro que se encontra nessa demonstração de Newton. Primeiro se supõe o aumento das quantidades e logo em seguida esse aumentos são descartados. A pesar de Berkeley não a apresentar, a Proposição 2, de L'Hôpital, afirma o seguinte:

“A diferença de  $xy$  é  $ydx+xdy$ . Porque  $y$  torna-se  $y+dy$ , quando  $x$  torna-se  $x+dx$ . Por consequência, portanto,  $xy$  torna-se  $xy+ydx+xdy+dx dy$ , que é o produto de  $x+dx$  por  $y+dy$ . Sua diferença [isto é, de  $xy$ ] será  $ydx+xdy+dx dy$ , isto é, (...)  $ydx+xdy$ , porque  $dx dy$  é uma quantidade infinitamente pequena em relação aos outros termos  $ydx$  e  $xdy$ ” (L'Hôpital, 1768, p. 5).

Segundo Berkeley, primeiro se supõe que os símbolos  $dx$  e  $dy$ , representem um acréscimo infinitamente pequeno. Nesse sentido, tais símbolos representam alguma coisa, ou seja, algo que aumenta o tamanho de  $x$  e  $y$ . Com essa hipótese se obtém, a partir de  $xy$ , a seguinte expressão:  $ydx+xdy+dx dy$ . Contudo, a hipótese inicial é alterada, isto é,  $dx$  e  $dy$  passam a representar uma quantidade que age como se fosse nada. Na compreensão de Berkeley, isso é um erro de raciocínio. Isso porque, se  $dx$  e  $dy$  passam a se comportar como se fossem nada a ponto de serem descartados da demonstração, tudo o que foi encontrado com eles deveria também passar se comportar como se fossem nada e serem descartados da demonstração. Portanto, para Berkeley, surge aqui mais um exemplo da *Fallacia suppositionis* ou mudança de hipótese.

Como a apresentação dos problemas dessa proposição do cálculo diferencial, tem-se o necessário para formular as motivações de Berkeley que o leva a tese da compensação de erros. Berkeley considera, n'*O Analista*, uma possível justificativa para se rejeitar as quantidades infinitamente pequenas representadas por  $dx dy$ , ou seja, o fato das conclusões do cálculo serem verdadeiras. Isso necessita de uma melhor explicação.

Ao supor em seu texto que uma linha curva seja considerada como um polígono de infinitos lados, sendo cada qual de dimensões infinitesimais, L'Hôpital não apresenta qualquer demonstração em suporte de tal suposição. Essa suposição resta como uma hipótese útil para os procedimentos demonstrativos do cálculo. Apesar disso, L'Hôpital afirma que uma análise que se utiliza dessa hipótese somente pode conduzir aos “verdadeiros princípios das linhas curvas”<sup>60</sup>. A veracidade dos princípios alcançados com essa hipótese seria confirmada principalmente na aplicação dos resultados em procedimentos empíricos, isto é, na aplicabilidade que o cálculo possuiria na física, em especial a mecânica<sup>61</sup>.

Berkeley observa nesse tipo de atitude uma tentativa invertida de justificar a verdade da hipótese dos infinitesimais. Dito de outra maneira, a verdade da conclusão mostraria que a hipótese utilizada como premissa não é falsa. Isso pareceria uma excelente justificativa ainda pelo fato que Berkeley considera algo importante do processo demonstrativo: “No entanto, deve parecer que qualquer erro que se admita nas premissas deve aparecer erros proporcionais na conclusão, sejam finitos ou infinitesimais. E que, portanto, a ἀκρίβεια [rigor] da geometria requer que nada se negligencie ou se rejeite” (Berkeley, 1979, §19, p. 76). Isso significa que, se existisse erro na hipótese dos infinitesimais e nos procedimentos adotados com ele (por exemplo, os adotados na Proposição 2 de L'Hôpital), os resultados não poderiam ser verdadeiros. Porém, Berkeley não aceita isso, pois, segundo ele, o próprio rigor da lógica da demonstração exige que somente a verdade das premissas pode assegurar a verdade da conclusão – o contrário, isto é, se as premissas são sabidamente falsas, o valor de verdade da conclusão é irremediavelmente indeterminado. Tampouco seria o caso de a lógica demonstrativa justificar as premissas pela conclusão: “... esta forma invertida de demonstrar vossos princípios mediante vossas conclusões, tal como sois peculiares a vós, cavalheiros, assim também sois contrários às regras da lógica” (Berkeley, 1979, §19, p. 76). Portanto, para Berkeley, tanto existiriam procedimentos inconsistentes nas demonstrações do cálculo diferencial e do método das fluxões quanto seria logicamente improvável que a verdade da conclusão garantisse o rigor de tais métodos.

---

<sup>60</sup> (cf. L'Hôpital, 1768, Introdução, p. 18).

<sup>61</sup> O que L'Hôpital realmente faz quanto à física é somente mencionar a possível aplicabilidade do cálculo a ela, pois problemas de saúde o teriam impedido de elaborar o texto dessa tal aplicação: “Eu tive o designo de juntar ainda uma seção para se fazer sentir o tão maravilhoso uso do cálculo na física, até que ponto de precisão ele portaria e o quanto as mecânicas podem dele retirar de útil. Mas uma doença me impediu. O público não perderá nada; e ele o terá algum dia com lucro” (L'Hôpital, 1768, Introdução, p. 28).

### 3.2. Sobre a compensação de erros

Com a discussão anterior fica evidente que Berkeley não aceita um procedimento invertido para sustentar a verdade das premissas com base na verdade da conclusão. Por outro lado, essa discussão não deve ser interpretada como um inquirimento da real veracidade (ou não) das conclusões encontradas com os métodos dos modernos. O que estaria em questão seria o procedimento para se chegar a tais conclusões. Em suas palavras:

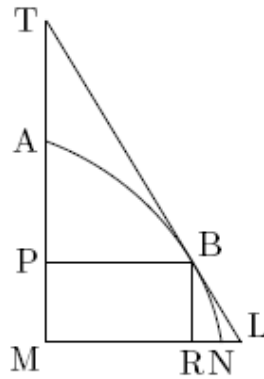
“Eu não tenho controvérsia acerca de vossas conclusões, mas somente a respeito de vossas lógica e método. Como vós demonstrais? Em quais objetos vós sois versados, e se os concebeis claramente? Sobre quais princípios vós procedeis? Quão bem fundamentados eles podem ser e como vós os aplicais? Deve ser relembrado que eu não estou preocupado com a verdade de vossos teoremas, mas somente com o caminho de chegar a eles; se ele é legítimo ou ilegítimo, claro ou obscuro, científico ou ao acaso” (Berkeley, 1979, §20, p. 76).

No entanto, mesmo que Berkeley não esteja se questionando sobre a verdade das conclusões, resta ainda um problema a ser explicado. Por que se obtêm resultados verdadeiros visto que, tanto o método das fluxões como o cálculo diferencial, são fundamentados em argumentos sofisticos? Portanto, para que Berkeley elimine definitivamente a possibilidade de justificar esses métodos matemáticos por um caminho invertido, há a necessidade de elucidar o porquê de tais verdades surgirem de procedimentos falaciosos: “...eu tentarei particularmente explicar por que isso [a dedução de proposições verdadeiras a partir de princípios falsos] pode acontecer; e mostrarei como o erro pode produzir verdade, embora não possa produzir ciência” (Berkeley, 1979, §20, p. 76). É dessa maneira que Berkeley justifica a necessidade de fornecer a sua tese da compensação de erros.

Pode-se afirmar, de antemão, que a tese central da compensação de erro é mostrar que um erro (de natureza geométrica) é compensado, ou anulado, por outro erro (agora de natureza algébrica). N’*O Analista*, existem quatro exemplos distintos para mostrar a compensação de erros. Cada um pretende abarcar uma solução aos problemas normalmente considerados pelo método das fluxões e pelo cálculo diferencial. A título de ilustração dessa tarefa de Berkeley, será necessário, aqui, somente compreender dois desses exemplos. Um que é inspirado nos procedimentos do cálculo diferencial e o outro inspirado no trabalho fluxional de Newton.

Um exemplo trata do problema de encontrar a subtangente de uma parábola em função de sua ordenada e sua abscissa<sup>62</sup>. Nesse caso, tal subtangente será  $PT$  (ver figura 3.1). A solução desse problema compreende dois momentos. O primeiro resume-se ao fato de determinar  $PT$  a partir das relações de proporcionalidade entre as linhas das figuras. Nesse sentido, trata-se de encontrar a solução a partir de um viés geométrico. Para que isso ocorra, supõe-se que existam diferenças infinitesimais e que se possa nomear as linhas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} AP &= x \quad (\text{abscissa}); \\ PB &= y \quad (\text{ordenada}); \\ PM &= dx \quad (\text{diferença da abscissa}); \\ RN &= dy \quad (\text{diferença da ordenada}). \end{aligned}$$



**Figura 3.1**

Dentro desse caminho geométrico, ainda existem outras duas suposições importantes. Uma considera a linha curva a  $ABN$  como sendo um polígono com infinitos lados, sendo cada lado infinitesimal. A outra suposição afirma que  $BN$  será a *diferença* infinitesimal da curva  $AB$ . Dados esses passos, agora Berkeley identifica as relações de proporcionalidades existentes na figura. A primeira proporção nasceria do fato de que os triângulos  $BRN$  e  $TPB$  seriam semelhantes. Isso produziria:

$$(a.1) \quad RN : RB :: PB : PT;$$

Essa proporção determina que as diferenças (da ordenada e da subtangente) são respectivamente proporcionais à ordenada e a subtangente. Desse modo, a subtangente torna-se a quarta proporcional. Mas como essa linhas possuem os símbolos

<sup>62</sup>

(cf. Berkeley, 1979, §§21-23, p. 77-79).

apresentados acima, pode-se transformar a proporção (a.1) em:  $dy : dx :: y : PT$ . Ao se isolar  $PT$  obtém-se a seguinte expressão:

$$(a.2) \quad PT = \frac{ydx}{dy} \text{ }^{63}$$

Vale lembrar que Berkeley nesse primeiro momento está determinado  $PT$  somente por um caminho geométrico.

Porém, como já foi dito, o que Berkeley pretende encontrar é o valor de  $PT$  em função de  $x$  e  $y$ . Desse modo deve existir um meio eliminar  $dx$  e  $dy$  da equação (a.2). Para que isso ocorra Berkeley inicia o outro caminho, agora com um viés algébrico. Berkeley apontando a equação  $y^2 = px$  como sendo a equação da parábola  $ABP$ , onde  $p$  seria o parâmetro de tal equação<sup>64</sup>. Pela regra do cálculo diferencial, cada termo dessa equação deverá ser acrescentado pela sua respectiva diferença. Assim, a equação se transformaria em:

$$(a.3), \quad (y + dy)^2 = p(x + dx)$$

ou (pela transformação algébrica)

$$(a.4) \quad y^2 + 2ydy + dy^2 = px + pdx .$$

Pela regra das diferenças, a equação inicial da parábola deve ser retirada de (a.4) assim como a multiplicação das diferenças de  $y$ , ou seja,  $dy^2$ <sup>65</sup>. Com isso, ao isolar  $dy$  encontrar-se-á:

$$(a.5) \quad dy = \frac{pdx}{2y} .$$

Ao se substituir em (a.2) o valor de  $dy$ , encontra-se a solução final para o problema da subtangente:

$$(a.6) \quad PT = \frac{ydx}{pdx/2y} = \frac{2y^2}{p}$$

<sup>63</sup> Contudo, essa é somente uma solução parcial do problema. Como será visto no final da demonstração, Berkeley fornecerá o valor de  $PT$  somente em termos de  $x$  e  $y$ .

<sup>64</sup> Mais precisamente, Berkeley afirma que essa equação nasce da “natureza das curvas” (Cf. Berkeley, 1979, §21 p. 77). O que ele quer com isso é apontar a possibilidade de construção de tal equação a partir das relações geométricas entre as linhas de uma parábola. Em especial, pode-se dizer que essa equação nasce a partir do que Apolônio apresentou na Proposição 52 das *Cônicas*. Descartes, na *Geometria*, utiliza-se dessa equação para determinar o parâmetro (ou, como ele denomina, *Latus rectum*), de uma passagem da solução do problema de Pappus. (cf. Descartes, 1954, p.68).

<sup>65</sup> Como visto acima na Proposição 2, de L'Hôpital, as diferenças de segunda ordem, como é o caso de  $dy^2$ , são descartadas. Aqui Berkeley estaria assumindo essa necessidade de descartá-la justamente para mostra como isso é um erro.

Segundo Berkeley, existiram dois erros aqui, onde um elimina o outro. No caminho geométrico existe um erro porque não são  $BRN$  e  $TPB$  os verdadeiros triângulos semelhantes. Os triângulos que são realmente semelhantes (que possuiriam todos os ângulos iguais) são:  $BRL$  e  $PTB$ . Isso faz com que  $RL$  seja a soma de  $RN$  e  $NL$ . Berkeley nomeia  $NL$  como o símbolo  $z$  e reorganiza a expressão (a.2) que forneceria o real valor de  $PT$  a partir desse caminho geométrico de raciocínio. Ou seja, se  $(RN+LN) : RB :: PB : PT$ , então, a real equação de  $PT$  será:

$$(a.7) \quad PT = \frac{ydx}{dy + z}.$$

Portanto, nesse caminho geométrico, na determinação da equação (a.2) cometeu-se um “erro de insuficiência”, pois não se considerou a quantidade  $NL$  ou  $z$ .

O outro erro surge no caminho algébrico. Trata-se da regra para a diferença das equações. Para se determinar (a.5) necessitou-se descartar um excesso, ou seja,  $dy^2$  que é a multiplicação das diferenças de  $y$ . Ao se considerar somente a regra da diferença, não existiria uma justificativa para realmente descartar  $dy^2$ . Esse é o erro do excesso, ou seja, o erro de descartar um excesso. Há, assim, dois erros que se anulam para determinar a equação (a.6). Todavia, Berkeley demonstra mais claramente como esses erros se anulam.

Caso não se desconsidere o valor da multiplicação das diferenças  $dy^2$ , a equação (a.4) se transformaria em:

$$(a.8) \quad 2ydy + dy^2 = pdx;$$

isolando-se  $dy$  e realizando as divisões necessárias, (a.8) se transforma em:

$$(a.9) \quad dy = \frac{pdx}{2y} - \frac{dy^2}{2y}.$$

Ao se substituir  $dx$  da verdadeira equação dos triângulos semelhantes, ou seja, (a.7), com o valor de  $dy$  fornecido por (a.9), então, obtém-se:

$$(a.10) \quad PT = \frac{ydx}{\left(\frac{pdx}{2y} - \frac{dy^2}{2y}\right) + z}.$$

É agora que aparece uma importante estratégia de Berkeley. Caso seja possível provar que na equação (a.10) a fração  $\frac{dy^2}{2y}$  é igual a  $z$ , então, poderá ser eliminada a outra



quantidade obtida com a equação (a.7), o que resultará na solução buscada para o valor da subtangente.

Berkeley prova  $z = \frac{dy^2}{2y}$  da seguinte maneira. Como é uma prova isolada do que até agora foi apresentado. Berkeley nomeia na parábola as linhas  $BR$  ou  $dx$  como  $m$ , e  $RN$  ou  $dy$  como  $n$ . Isso significa que em tal prova não se estaria considerando especificamente tais linhas como sendo infinitesimais. Em seguida, Berkeley evoca a *Proposição* 33 de Apolônio e que, segundo ele, pode-se determinar  $TP=2AP=2x^{66}$ . Sendo os triângulos  $TPB$  e  $BRL$  semelhantes, surgirá a proporção a proporção  $TP:PB::BR:RL$ . Ao se substituir os símbolos encontra-se  $2x:y::m:(n+z)$ . Isso fornece seguinte equação:

$$(b.1) \quad n + z = \frac{my}{2x}.$$

Isso foi retirado pela noção de triângulos semelhantes. No entanto, pode-se aplicar a equação da parábola (determinada pela natureza das curvas, com visto acima) para encontrar o aumento da parábola.

$$(b.2) \quad y^2 + 2yn + n^2 = px + pm.$$

Ao se eliminar a equação inicial, encontra-se:

$$(b.3) \quad 2yn + n^2 = pm.$$

E isolando-se  $m$ :

$$(b.4) \quad \frac{2yn + n^2}{p} = m$$

Agora surge o passo mais sutil. Ao se considerar que da equação (b.2) foi isolada a equação da parábola  $y^2 = px$ , então, ao considerá-la novamente (junto com a equação (b.4)), surgem os valores de  $m$  e  $x$  para serem substituídos na equação (b.1). Mais precisamente, a equação (b.1) se transforma em:

$$(b.5) \quad n + z = \frac{\left(\frac{2yn + n^2}{p}\right)y}{2\frac{y^2}{p}} = \frac{2y^2np + yn^2p}{2y^2p}.$$

---

<sup>66</sup> Nessa proposição Apolônio afirma o seguinte: “se em alguma parábola algum ponto é dado e a partir dele é traçado um diâmetro. Abaixando-se uma reta de maneira ordenada sobre o diâmetro a partir do vértice, uma linha reta na mesma linha reta a partir de sua extremidade é feita igual, então a linha reta (ligada a partir do ponto e resultando para o ponto tomado) tocará a seção” (Apolônio, 1952, p.640).

Isolando e cancelando os termos necessários, a equação se transforma em:

$$(b.6) \quad n + z = \frac{2yn + n^2}{2y}; \text{ o que fornecerá o valor de } z:$$

$$(b.7) \quad z = \frac{n^2}{2y} = \frac{dy^2}{2y}.$$

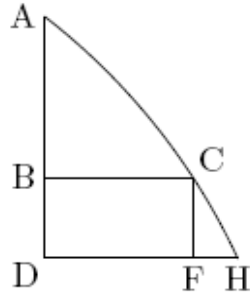
Desse modo se prova que  $z$  é igual a  $\frac{dy^2}{2y}$ . Isso permite que se retome a equação (a.10), agora, substituindo tal fração pelo próprio símbolo  $z$  e que gera uma nova equação.

$$(b.8) \quad PT = \frac{ydx}{\left(\frac{pdx}{2y} - z\right) + z}; \text{ e ao se eliminar o valor } z, \text{ obtém-se a}$$

equação que se buscava para  $PT$ , no entanto, contemplando somente as relação entre a abscissa e ordenada, ou seja:

$$(b.9) \quad PT = \frac{ydx}{\left(\frac{pdx}{2y} - z\right) + z} = \frac{2y^2}{p}.$$

A conclusão de Berkeley é muito clara, a solução do problema do problema da subtangente resulta em um correto resultado não porque existem princípios claros e evidentes sendo utilizados nas demonstrações. O que acontece é que se introduz um erro nas premissas que é eliminado por outro erro, não aparecendo nada de equivocado na conclusão. Isso, para Berkeley é ainda um caminho ilegítimo de se realizar uma demonstração: “Se você cometeu somente um erro, não se teria chegado à uma verdadeira solução do problema. Mas pela virtude de um erro duplo chegar-se-ia, embora não à ciência, ainda à verdade. Isso não pode ser chamado de ciência, quando se procedeu vendado, e chegou à verdade não sabendo como ou por quais meios” (Berkeley, 1979, §22, p. 76).



**Figura 3.2**

Um outro exemplo da compensação de erros é apresentado por Berkeley, utilizando-se, agora, o estilo do método das fluxões<sup>67</sup>. O problema a ser resolvido é o de encontrar uma ordenada a partir de uma equação de área. Berkeley supõe que  $x^2$  represente a área  $ABC$ <sup>68</sup> (ver figura 3.2). Tomando-se  $AB=x$ ,  $BC=y$  e  $BD=o$ , Berkeley procura mostrar como  $y = 2x$ . Para que isso ocorra, supõe-se que  $AC$  é uma magnitude fluente. A área abaixo dessa linha curva flui com o movimento da linha  $BC$  na abscissa  $AD$ . Após o primeiro aumento dessa área,  $x$  torna-se  $x + o$ . Do mesmo modo  $x^2$  torna-se  $(x + o)^2$ . Ao se desenvolver esse binômio, a expressão que surge é:

$$(c.1) \quad x^2 + 2xo + o^2.$$

Até aqui o que Berkeley apresenta é somente a manipulação de equações. Pode-se dizer que, como no exemplo anterior, aqui se trata do caminho algébrico desse segundo exemplo de Berkeley. O aspecto geométrico surge quando se relaciona a equação (c.1) com as próprias magnitudes geométricas. Isso permite escrever:

$$(c.2) \quad x^2 + 2xo + o^2 = ABC + CBDH.$$

Quando se elimina de (c.2) a equação inicial  $x^2$  e o seu respectivo referencial geométrico  $ABC$ , o que restará, portanto, será somente o incremento da área:

$$(c.3) \quad 2xo + o^2 = CBDH.$$

Agora, considerando o lado geométrico, é possível igualar o incremento a uma soma. Desse modo  $CBDH = BCFD + CFH$ . Com isso obtém-se:

$$(c.4) \quad 2xo + o^2 = BCFD + CFH.$$

<sup>67</sup>

(cf. Berkeley, 1979, §§26-27, p. 81-83).

<sup>68</sup>

Essa equação é utilizada por Newton em vários de seus textos para representar uma área curvilínea. Um exemplo disso encontra-se na aplicação da Regra I das quadraturas, no *De analyse*. (cf. MP-2, p. 206-209). Portanto, Berkeley está retomando aqui uma equação que não é estranha ao trabalho newtoniano.

É a partir desse momento que Berkeley fornece um sutil procedimento. Ele sugere uma representação simbólica para o lado geométrico.

No caso da figura retangular  $BCFD$ , Berkeley sugere como símbolo  $y^o$ . Isso nada mais é do que a multiplicação da base do retângulo pela sua altura, o que está de acordo com geometria dos antigos. Pois, para eles, duas linhas multiplicadas fornecem uma área. Nesse caso, a área é a multiplicação da linha  $BD$  (representado por  $o$ ) pela outra linha  $DF$  (representada por  $y$ ). O restante do incremento, que é a figura curvilínea  $CFH$ , recebe uma interessante interpretação. Berkeley observa que, na figura curvilínea  $ABC$ , a sua equação é apresentada como sendo o quadrado da abscissa  $AB$ , ou seja,  $x^2$ . Assim, como  $CFH$  é uma figura curvilínea semelhante a  $ABC$ , Berkeley assume com sendo o quadrado da base de  $CFH$  a expressão para a sua área, gerando  $qo^2$ . Aqui  $q$  representa um número qualquer, pois ainda Berkeley estaria pensando em um caso geral dessa expressão. A partir desses raciocínios pode-se fornecer a equação:

$$(c.5) \quad 2xo + o^2 = yo + qo^2.$$

Berkeley ainda reescreve essa equação retirando o elemento comum aos termos. Nesse caso é o próprio  $o$ . Isso fornece:

$$(c.6) \quad 2x + o = y + qo.$$

Com essa equação Berkeley agora argumenta como é que acontece a compensação de erros. Primeiro, poder-se-ia considerar que as quantidades podem esvanecer. No esquema newtoniano, tudo o que possuiria um elemento temporal, dessa maneira, desapareceria. Na equação (c.6), as quantidades que possuem o elemento temporal seriam as quantidades com  $o$ , o que resultaria em:  $y = 2x$ . Contudo, Berkeley relembra que se uma hipótese inicial é alterada ou rejeitada, tudo o que foi alcançado com ela deve também dever ser alterada ou rejeitada: "...já foi assinalado que não é legítimo ou lógico supor que  $o$  se esvanesce, digo, que é nada, isto é, que não existe incremento, a menos que, ao mesmo tempo, rejeitemos com o incremento mesmo toda consequência sua, isto é, qualquer coisa que não pudesse se obter senão supondo tal incremento" (Berkeley, 1979, §19, p. 76). O que Berkeley está relembando aqui é a própria crítica ao método das fluxões, onde se acusa Newton de agir falaciosamente (como foi apresentado acima).

No entanto, Berkeley apresenta o que permitiria fornecer os resultados corretos no método das fluxões. Isso seria a própria compensação de erros. Explicando, como  $q$ ,

ao se considerar o caso específico da figura  $ABC$ , assume o valor de 1 (isso porque  $1x^2$  é proporcional a  $qo^2$ ), então  $o = qo$ . Isso significa que esses valores estão em lados opostos da equação, ou seja, estão com sinais invertidos, o que permite escrever  $o - qo = 0$ . Aqui existirá a compensação de erro, ao se assumir que as quantidades contendo  $o$  esvanecem. Porém, são erros que se localizam em lado opostos da equação isso faz com que eles não gerem erros na conclusão: “portanto, se perguntará: como sucede que por eliminar  $o$  não aparece nenhum erro na conclusão? Respondo que a verdadeira razão disso é claramente que ao ser  $q$  unidade,  $qo$  é igual a  $o$ , e portanto,  $2x + o - qo = y = 2x$ , as quantidades iguais  $qo$  e  $o$  sendo eliminadas devido ao seus sinais contrários.” (Berkeley, 1979, §26, p. 76). Portanto, com isso Berkeley mostra como o método das fluxões procederia falaciosamente, mesmo que fornecendo resultados que possam ser considerados verdadeiros. Nesse sentido, com esses exemplos, é possível observar em que sentido Berkeley não admite demonstrações invertidas: aquelas que assegurariam a veracidade dos princípios tendo como base o sucesso das conclusões.

### 3.3. O lado positivo da compensação de erros

Seria possível concluir, a partir do que foi apresentado até agora, que Berkeley definitivamente não aceita nem o método das fluxões e nem o cálculo diferencial como sendo métodos matemáticos absolutamente rigorosos – isso, é claro, na perspectiva como Newton e L'Hôpital os teriam apresentado. Caso se encerrasse essa análise da crítica a esses métodos aqui nesse ponto, seria possível, dizer que Berkeley, n'*O Analista*, não possuiria a mesma atitude que ele apresenta, quanto à matemática, no texto dos *Princípios*. Como existe um intervalo de tempo entre a publicação desse dois textos (de vinte cinco anos, como o próprio Berkeley relata no último parágrafo d'*O Analista*), um leitor não muito atento desses textos poderia realmente concluir essa distinta postura de Berkeley entre os textos. No entanto, essa situação começa a se alterar quando se considera uma afirmação presente n'*O Analista* acerca da tese da compensação de erros:

“Essa sugestão pode ser talvez mais estendida e aplicada a bons propósitos por aqueles que possuem tempo disponível [leisure] e curiosidade por tais assuntos. O uso que eu faço disso é mostrar o que a análise não pode obter nos aumentos ou diferenças, mas também o que ela pode obter em quantidades finitas, sejam elas tão grandes quanto forem, como foi anteriormente observado” (Berkeley, 1979, §29, p. 84).

O que não está evidente ainda é o que estariam em jogo ao se aceitar a tese de compensação de erros no sentido “positivo”. Se for observada a citação acima, Berkeley abre a possibilidade do método analítico (isto é, o cálculo diferencial) obter as diferenças sem considerar quantidades infinitesimais. O que ele quer como isso é algo que não foi ressaltado ainda. Isso exige que se volte aos dois exemplos apresentados acima sobre a tese da compensação de erros. Quanto ao primeiro exemplo Berkeley afirma:

“Agora, observo, em primeiro lugar, que a conclusão revela-se correta, não porque o quadrado rejeitado de  $dy$  era infinitamente pequeno; mas porque esse erro foi compensado por um outro erro igual e contrário. Observo, em segundo lugar, que seja o que for rejeitado, sendo sempre muito pequeno, sendo real e conseqüentemente fazendo um erro real nas premissas, produzirá um erro real e proporcional na conclusão. Por isso vossos teoremas não podem ser precisamente verdadeiros, nem vossos problemas precisamente resolvidos, em virtude das premissas que em si não são precisas; existindo uma regra na lógica que *conclusio sequitur partem debiliorem*. Assim, em terceiro lugar, observo que quando a conclusão é evidente e as premissas obscuras, ou a conclusão precisa e as premissas imprecisas, nós podemos seguramente pronunciar que tal conclusão é nem evidente e nem precisa, em virtude dessas premissas ou princípios imprecisos e obscuros; mas em virtude dos mesmos outros princípios que talvez o demonstrador nunca soube ou pensou. Em último lugar, observo que no caso das diferenças se supôs quantidades finitas sempre muito grandes, a conclusão, todavia, produzirá o mesmo: visto que as quantidades rejeitadas são jogadas fora legitimamente, não pela sua pequenez, mas por outra razão, a saber, por causa dos erros contrários, que, destruindo-se um ao outro agem sobre a inteira causa que nada é realmente jogado fora, embora seja aparentemente de certo modo. Essa razão concordada igualmente com respeito às quantidades finitas tanto quanto com as infinitesimais, com o grande assim como o pequeno, com um pé ou uma longa jarda assim como o incremento mais minúsculo” (Berkeley, 1979, §23, p. 78).

Aqui Berkeley realiza vários apontamentos. O que está apresentado até o último apontamento pode ser assumido aqui como um resumo das principais queixas de Berkeley (observadas até aqui) quanto ao cálculo diferencial. Pode-se dizer também que muitos desses tópicos se aplicam ao método das fluxões. Porém, é o último tópico que merece ser explicado aqui para elucidar o que Berkeley assume como sendo o “bom propósito” da compensação de erros. O que está dito ali é que Berkeley teria suposto (como uma espécie de exercício) que as diferenças  $dy$  e  $dx$  só representassem quantidades finitas, sejam elas grandes ou pequenas. O importante é que elas sejam reais, isto é, finitas. A conclusão de Berkeley é que os procedimentos pela tese da compensação de erros levam, nesse caso, inevitavelmente à solução do problema

proposto:  $PT = \frac{2y^2}{p}$ . Quanto ao segundo exemplo, ao estilo newtoniano, a situação é a

mesma. Quando Berkeley afirma que a diferença  $o - qo$  é igual a nada, isso permite

que as quantidades de qualquer magnitude entrem na compensação. Nesse caso, qualquer quantidade finita que for representada por  $o$  e por  $qo$  permitirá que se encontre  $y = 2x$ . Com isso elucida-se um dos significados do lado “positivo” da compensação de erros: não há a necessidade de supor quantidades infinitesimais com a compensação de erros, sejam elas nomeadas *diferenças* ou *momentos*. Desse modo, quando se compreende que, em tais demonstrações, as quantidades são finitas, não se poderá falar mais em “erros” no mesmo sentido que foi atribuído quando se considerou o lado “negativo” da compensação de erros. Melhor explicado, quando se inclui os símbolos (isto é,  $o$ ,  $qo$ ,  $dx$  e  $dy$ ) representando quantidade finitas, o termo “erro” deve ser interpretado indicando o fato de se atribuir sinais opostos a quantidade finitas. Desse modo, “erro” não denota o fato de se atribuir uma propriedade ininteligível a quantidades também ininteligíveis. No sentido “positivo”, os erros são compreensíveis. É por isso que Berkeley afirma no parágrafo 23 d'*O Analista* (ver citação acima) que as quantidades rejeitadas, no cálculo, são jogadas fora “legitimamente”.

Desse modo, a tese da compensação de erros esboça um projeto para tornar a matemática, praticada pelos modernos, mais rigorosa. Com essa perspectiva, pode-se afirmar que Berkeley possui uma atitude similar ao dos *Princípios*, ou seja, n'*O Analista*, não somente critica-se, mas também se apontam alguns elementos construtivos para a estruturação de uma prática matemática não sujeita às mesmas críticas.

### 3.4. conclusão

Uma questão interessante surge à medida que se considera o lado “positivo” da tese da compensação de erros: ao sugerir um caminho para que, tanto o método das fluxões como o cálculo diferencial, percorram, a fim de se tornarem mais rigorosos, Berkeley não estaria agora aplicando o seu próprio critério de rigor? Quando Berkeley crítica o método das fluxões, é possível perceber em suas afirmações que ele realmente assume um critério aceito pelos praticantes de tal método. Contudo, o que se pode concluir a respeito de tal questão é o seguinte: com a compensação de erros surge sim um elemento berkeleyano no projeto de reformulação dessa matemática moderna. Primeiramente, é o fato de Berkeley restringir-se à utilização de quantidades finitas. Esse seria o objeto dessa matemática e considerá-lo seria compreender a própria

finalidade com que a matemática em geral teria sido elaborada. Isso está evidente nas seguintes questões, apresentadas no fim d'*O Analista*:

**Questão 1.** Não seriam os objetos da geometria as proporções de extensões finitas? E existe alguma necessidade de considerar quantidades, sejam infinitamente grandes ou infinitamente pequenas?

**Questão 2.** Não é a finalidade da geometria medir a extensão finita assinalável e não foi esta finalidade prática que primeiramente levou os homens ao estudo da geometria? (Berkeley, 1979, Questões, p. 96).

Pode-se interpretar essa tentativa de reforçar a idéia de que o finito é o objeto da matemática como algo já presente nos *Princípios*. Neste texto, ao rejeitar que a extensão finita é divisível infinitamente ou que contém um número infinito de partes, necessariamente segue-se que o objeto da geometria é a extensão finita atual ou possivelmente percebida. Os objetos que Berkeley exige que método das fluxões e o cálculo diferencial utilizem estão, assim, de acordo com os princípios tanto epistemológicos como ontológicos, que decorrem da filosofia do *esse est percipi*.

Por outro lado, se os objetos do método das fluxões e do cálculo fossem a extensão finita, caberia justificar como que uma demonstração com esse tipo de objetos pode ter um caráter geral. Ao limitar-se a objetos finitos, não poderia ocorrer que rigorosamente nenhuma demonstração pudesse ser universalizada? O que Berkeley havia criticado no método de Newton para determinar a fluxão de uma potência, não fora justamente a sua capacidade de ser generalizado. Desse modo, deve existir algo, para Berkeley, que empõem as demonstrações com as compensações de erros de serem encaradas como meras coleções de resoluções de casos particulares. Esse problema liga a tese da compensação de erros com a filosofia da linguagem de Berkeley, aplicada à geometria, presente nos *Princípios*. Trata-se do conceito de símbolo geométrico. Rapidamente, isso pode ser apresentado como se segue.

Berkeley aponta, nos *Princípios*, que as demonstrações necessitam de um conceito de universal. No entanto, isso não significa que se possa realizar uma *idéia geral abstrata* (ao estilo de Locke) para dar essa universalidade à demonstração. A tese central da teoria da abstração que Berkeley rejeita é aquela que assegura ao espírito a possibilidade de abstrair, ou seja, separar, isolar e tornar independentes idéias que só poderiam ser percebidas juntas. São duas as espécies de abstração rejeitadas: (a) separar qualidades sensíveis uma das outras que só são percebidas juntas; e (b) a formação de uma idéia geral aos objetos, porém que não implica a determinação de um objeto



particular a ser compreendido. Berkeley sustenta ser um equívoco admitir a possibilidade dessas abstrações, pois tudo o que é pensado de algum modo se resume aos particulares. Não se consegue pensar em algo sem que venha à mente um objeto que realmente pode ser percebido pelos sentidos. Desse modo, pensar em algo que não pode ser percebido é contrário ao critério de *esse est percipi*. Na linguagem, como nas demonstrações matemática, um abstracionista desse porte, asseguraria que as idéias abstratas são o que garantiriam a universalidade necessária. Uma demonstração matemática assim seria universal em virtude das idéias abstratas dos objetos matemáticos que entrariam em tal demonstração. É aqui que Berkeley sugere uma idéia de universalidade sem que se apele para a doutrina das idéias abstratas: “universalidade, tanto quanto compreendo, não consiste na absoluta, *positiva*, natureza ou concepção de alguma coisa, mas na *relação* que significa entre particulares” (PRI, 1998, introdução, §15, p. 96).

O que está por trás da idéia de “relação” aqui é o fato de se considerar que um particular qualquer pode possuir uma propriedade percebida e que pode ser identificada em outros possíveis particulares. Nesse sentido um particular torna-se símbolo ou representativo de outros particulares, exclusivamente por possuir um elemento possivelmente percebido e comum aos demais. No caso da geometria, Berkeley afirma que os objetos empregados nas demonstrações devem ser admitidos como representantes de uma classe de objetos similares:

“...linhas particulares e figuras incluídas no diagrama [da demonstração] representam inúmeras outras grandezas diferentes. Em outras palavras, o geômetra abstrai da sua grandeza – sem isso implicar que ele forme uma idéia abstrata, mas apenas que ele não se preocupa com a grandeza particular, se é grande ou pequena, apenas considerando-a nula para a demonstração” (PRI, 1998, §126, p. 150).

É esse caráter representativo dos objetos invocados nas demonstrações é, mais uma vez, retomado n’*O Analista*:

**Questão 18.** Se de que as proposições geométricas sejam gerais e, portanto, as linhas dos diagramas sejam substitutos ou representantes gerais não se segue que não podemos limitar ou considerar o número de partes em que são divisíveis tais linhas particulares? (Berkeley, 1979, Questões, p. 97).

Isso impõe que as quantidades que entram nas demonstrações sejam finitas, pois elas serão gerais à medida que se tornam representantes de outras possíveis quantidades finitas. Isso faz com que a tese da compensação de erros mantenha um vínculo estreito com a filosofia do *esse est percipi*. E somente após a apresentação do lado “positivo” da

tese da compensação erros que esse vínculo pôde ser afirmado, via a invocação de objetos finitos nas demonstrações.

## Conclusão final

O realismo matemático newtoniano nasce do fato de se atribuir aos objetos matemáticos em questão uma natureza geométrica e, potencialmente, finita. Mais precisamente, a abordagem cinemática das magnitudes geométricas preserva certas propriedades das magnitudes finitas. O principal é que Newton observa que essa abordagem não elimina tais propriedades em um estado muito especial: os estados nascentes ou evanescentes de tais magnitudes. A principal propriedade que Newton diz se preservar nesse estado é a relação de proporcionalidade, ou seja, supondo-se que existe um limite para os movimentos nascerem ou esvanecerem, afirma-se que ainda existem razões que podem ser determinadas. Não se deve confundir essas razões como sendo as quantidades últimas ou nascentes dos movimentos. Segundo, Newton são razões de quantidades. Isso significa que se está pensando na relação de proporção e não na determinação de tais magnitudes. É isso que fundamenta o *método das primeiras e últimas razões*. Portanto, com isso Newton acreditara ter superado a matemática analítica ao estilo cartesiano (e infinitesimal), pois em todo o momento se trabalharia como propriedades finitas. Isso daria mais segurança a sua matemática, ou seja, seria mais rigorosa, pois possuiria definitivamente um estatuto de *realidade*.

Em um primeiro momento, pode-se dizer que a crítica de Berkeley realmente se apóia em um critério de rigor (tanto para os objetos como para os princípios e demonstrações) que seria aceito entre os matemáticos. Em especial, esse rigor não poderia ser atribuído a Newton, no âmbito dos objetos, pois a relação que se exige entre sentidos e imaginação não seria aplicada a ele. No entanto, quando apresenta a tese de compensação de erros, inevitavelmente Berkeley fornece elementos para conectar a crítica d'*O Analista* aos padrões epistemológicos e ontológicos próprios à filosofia do *ser é ser percebido*.

Desse modo, pode-se solucionar a questão proposta na introdução da seguinte maneira. Os motivos de Berkeley não valorizar os esforços newtonianos podem ser divididos em dois momentos. Até a apresentação da tese da compensação de erros Berkeley nada mais faz do que localizar elementos inconsistentes nas próprias intenções de Newton. Principalmente no que diz respeito ao aspecto demonstrativo, Newton não teria sido capaz de seguir os princípios da lógica que ele próprio aceitara: o padrão demonstrativo dos antigos. O fato de Berkeley em muitos momentos evocar termos e

princípios da geometria clássica, revela que ela estaria avaliando Newton em seus próprios critérios. Desse modo, a primeira hipótese se aplica.

No entanto, é possível ler que essa hipótese vigora, no percurso d'*O Analista*, até o momento que Berkeley sugere o lado “positivo” da tese de compensação de erros. É nesse momento que começam a vigorar as próprias perspectivas de Berkeley, ou seja, aparecem para esse critério de rigor elementos doutrinários que estão fundamentados no *ser é ser percebido*. Isso vale tanto para os objetos como para os princípios demonstrativos. Quanto ao primeiro, somente as quantidades finitas poderiam vigorar no método das fluxões. Assim, uma razão primeira entre quantidades (onde se desconsidera as suas magnitudes) poderia muito bem se enquadrar na rejeitada teoria das idéias abstratas. Esse critério é muito mais exigente do que aquele que Newton aplica. Por outro lado, os elementos demonstrativos, da mesma maneira, não estariam desvinculados ainda de tal filosofia. O conceito de universalidade exige somente propriedades observáveis, ou possivelmente observáveis. Isso mais uma vez exclui que elementos abstratos sejam eliminados, o que evita novamente a possibilidade de tal conceito de proporcionalidade ser demonstrado. Portanto, é evidente que o realismo exigido pela própria filosofia de Berkeley é muito mais intenso e diversificado do que fora o de Newton. É essa uma outra face do “desprezo” de Berkeley pelos esforços newtonianos.

## Bibliografia

- APOLONIO de Perga. (1952) *Conics*. (trad. R. Castesby Taliaferro). In: *Great Books of the Western World*. V-11. p 593-804. Chicago, Encyclopaedia Britannica.
- ARTHUR, R. T. W. (1995) *Newton's fluxions and equably flowing time*. *Studies in History and Philosophy of Science*, v. 26, n. 2, p. 340-356.
- BARROW, I. (1916). *Geometrical lectures of Isaac Barrow*. [Trad. Child, J. M.]. Chicago, London: The Open Court Publishing Company.
- BATTISTI, C. A. (2002) *O método de Análise em Descartes: da resolução de problemas à constituição do sistema do conhecimento*. Cascavel: Edunioeste.
- BERKELEY, G. (1998 [1710]) *A treatise concerning the principles of human knowledge*. [Ed. by Dance, J.] Oxford, New York. Oxford University Press.
- BERKELEY, G.(1979 [1734]) *The Analyst*. In: *The Works of George Berkeley Bishop of Cloyne*. [Ed. e Com. por Luce, A. A. e Jessop, T. E.]. V. 4, p. 53-102. Nelson (Kraus Reprint), Nelden.
- COHEN, I. B. & WESTFALL, R. S. (2002) *Newton: Textos, Antecedentes e Comentários*. [Trad. Vera Ribeiro]. Rio de Janeiro: Contraponto.
- DE GANDT, F. (1986) *Le style mathématique des Principia de Newton*. *Revue d'Histoire des Sciences*, v. 39, p. 195-222.
- DE GANDT, F. (1999) *Matemáticas y realidad física en el siglo XVII: de la velocidad de Galileo a las fluxiones de Newton*. In: GUENARD, F. et LELIÈVRE, G. (orgs) *Pensar la matemática*. [trad. Carlos Bidón-Chanal], Barcelona, Tusquets Editores, 3ª ed.
- DESCARTES, R. (1954 [1637]) *The Geometry of René Descartes*. [Trad. Smith, D. e Lathan, M.]. New York: Dover Publications.
- DESCARTES, R. (1999[1628]) *Regras para a Orientação do Espírito*. [Trad. Maria E. Galvão] São Paulo: Martins Fontes.
- GIORELLO, G. (1992) *The 'fine structure' of mathematical revolutions: metaphysics, legitimacy e rigour. The case of calculus from Newton to Berkeley and Maclaurin*. In: GILLIES, D. (ed.) (1992) *Revolutions in mathematics*. Oxford: Carendon Press.

- GUICCIARDINI, N. (1999) *Reading the Principia: The Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736*. Cambridge: Cambridge University Press.
- GUICCIARDINI, N. (2004) *Newton and the publication of his mathematical manuscripts*. *Studies in History and Philosophy of Science*, V. 35, n. 3, p. 1-18.
- HALL, A. R. e HALL, M-B. (1962) *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton*. Cambridge : Cambridge University Press.
- HEATH, T. (ed.) (1956) *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover, 3 vols.
- JESSEPH, D. M. (1993) *Berkeley's Philosophy of Mathematics* Chicago/London: The University of Chicago Press.
- JESSEPH, D. M. (1998) *Leibniz on the foundations of the calculus: the question of the reality of infinitesimal magnitudes*. *Perspectives on Science*. V.6, p.6-40.
- JESSEPH, D. M. (2005). *Berkeley's Philosophy of Mathematics*. In: *The Cambridge Companion to Berkeley*. (ed. Winkler, K.). Cambridge University Press. New York.
- LEIBNIZ, G. W (1995 [1669]) *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*. In: PARMENTIER, M. (ind., trad., e notas) (1995) *La naissance du calcul différentiel – 26 articles des Acta Eruditorum*. 2<sup>a</sup> ed. Paris: Vrin.
- L'HÔPITAL, G. F. A. (1768 [1696]). *Analyse des infiniment petits par l'intelligence des lignes courbes*. Paris: Imprimerie Royale.
- MANCOSU, P. (1992) *Descartes's Géométrie and revolutions in mathematics*. In: GILLIES, D. (ed.) (1992) *Revolutions in mathematics*. Oxford: Carendon Press.
- NEWTON, I. (1934 [1687]) *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World*. Translated into English by Andrew Motte in 1729. The translations revised, and supplied with an historical and explanatory appendix, by Florian Cajori. Berkeley : University of California Press. 2 vols.
- NEWTON, I. (1959-1977) *The Correspondence of Isaac Newton*. (ed. H. W. Turnbull *et alii*) Cambridge : Cambridge University Press. 7 vols.
- NEWTON, I. (1999 [1687]). *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Trad. I. B. Cohen e A. Whitman. Berkeley: University of California Press.

- NEWTON, Isaac. (1979) *Princípios matemáticos; Óptica; O peso e o equilíbrio dos fluidos.*(Traduções de Carlos Lopes de Matos, Pablo Rubén Mariconda e Luiz João Baraúna) São Paulo : Abril Cultural (Col. Os Pensadores).
- PANZA, M. (2003) *Newton*. Paris: Belles Lettres.
- PANZA, M. (2005) *Newton et les origines de l'analyse: 1664-1666*. Paris: Albert Blanchard.
- ROBLES, J. A. (2006). *Los escritos matemáticos de George Berkeley y la polémica sobre El Analista*. Universidad Nacional Autónoma de México. México.
- URBANEJA, P. M. G. (1992) *Las raíces del calculo infinitesimal en el siglo XVII*. Madri: Alianza.
- VINCENT, J. (1996) *Descarte la Géométrie de 1637*. Paris: Presses Universitaires de France.
- WHITESIDE, D. T. (1964) (ed.) *The Mathematical Works of Isaac Newton*. New York, London: Johnson Reprint Corporation, 2 vols.
- WHITESIDE, D. T. (1967-1980) (ed.) *The Mathematical Papers of Isaac Newton*. 8 vols. Cambridge: Cambridge University Press.
- WHITESIDE, D. T. (1982). *Newton, o matemático*. p. 489-497. In: COHEN, I. B. & WESTFALL, R. S. (2002) *Newton: Textos, Antecedentes e Comentários*. [Trad. Vera Ribeiro]. Rio de Janeiro: Contraponto.

**Versão Final aprovada pelo Orientador em ...../...../.....**

Eduardo Salles de Oliveira Barra

(orientador)