

Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Teoria Básica de EDP e Métodos para Tratar
Equações Diferenciais Elípticas Quasilineares

Por

Rodrigo Bloot

sob orientação do

Prof. Dr. João Batista de Mendonça Xavier

Curitiba / PR

2008

Teoria Básica de EDP e Métodos para Tratar Equações Diferenciais Elípticas Quasilineares

Por
Rodrigo Bloot

sob orientação do
Prof. Dr. João Batista de Mendonça Xavier

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Curitiba / PR

2008

AGRADECIMENTOS

- Agradeço a Deus pelo dom da vida, por me ter permitido, sempre com muito amor e fé, ultrapassar todos os obstáculos.
- A minha mãe pela educação, dedicação e coragem que me deu para enfrentar os desafios e nunca desanimar.
- A minha noiva Ana Paula pelo apoio, compreensão e carinho em todos os momentos.
- Ao meu orientador Professor João Batista de Mendonça Xavier pela paciência, atenção, amizade e por estar sempre disposto em ajudar no que fosse preciso.
- Aos colegas de mestrado pelo constante auxílio.
- E a todos que, de alguma forma, contribuíram para a concretização deste trabalho.

S U M Á R I O

Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	vi
Notação	viii

Capítulo 1

Preliminares	1
1.1 Funções teste	1
1.2 Distribuições	9
1.3 Espaços de Sobolev	17
1.4 Teoremas de ponto fixo	27
1.5 Tópicos de teoria de pontos críticos	29

Capítulo 2

Equações elípticas de segunda ordem	31
2.1 Fórmulas de Green	31
2.2 Princípio do Máximo Forte	33
2.3 Estimativa a priori	36
2.4 Existência e unicidade de solução	39

Capítulo 3

Existência de solução para equação elíptica quasilinear	43
3.1 Introdução	43
3.2 Solubilidade	44
3.3 Aplicação à dinâmica de populações	54

Capítulo 4	
O método variacional e equações do tipo $-\Delta u = f(x, u, \nabla u)$ 57
4.1 Introdução 57
4.2 Prova do Teorema 4.1.2 60
4.3 Prova do Teorema 4.1.3 69
Bibliografia 73

R E S U M O

Este trabalho trata da solubilidade de problemas elípticos da forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x, u, \nabla u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

com Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^n e com fronteira suave. Primeiramente, seguindo [7], estudaremos o problema dado com \mathcal{L} na forma

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Para mostrar que este problema possui ao menos uma solução em $W^{2,p}(\Omega)$, para $p < n$, usaremos o método de sub-supersolução. Posteriormente, guiados por [9], estudaremos o problema com $\mathcal{L} = -\Delta$. Mostraremos que tal problema possui solução fraca, ou seja, em $H_o^1(\Omega)$. Para isso usaremos métodos variacionais. Mas, antes de atacarmos os problemas faremos um aparato geral da teoria que está por trás destes resultados, como funções testes, teoria de distribuições, espaços de Sobolev, entre outros. A exposição destes conteúdos básicos não será longa, pois o intuito é apenas indicar o que é minimamente necessário para entender as técnicas que aqui serão expostas.

Palavras-chave: Sub-Supersoluções, Teoremas de Imersão de Sobolev, Teoremas de pontos fixos e Métodos Variacionais.

A B S T R A C T

This work deals with the solubility of elliptic problems of the form

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x, u, \nabla u) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded, smooth domain in \mathbb{R}^n . First, guided by [7], we study the problem with \mathcal{L} in the form

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

To show that this problem has at least one solution in $W^{2,p}(\Omega)$, for $p < n$, we use the method of upper and lower solutions. Subsequently, guided by [9], we examine the problem with $\mathcal{L} = -\Delta$. We will show you that this problem has a weak solution, that is, in $H_o^1(\Omega)$. To this we use the variational methods, but before tackling the problems we will give apparatus of the general theory behind these procedures, as test functions, theory of distributions, Sobolev spaces, among others. The exposure of these basic contents will not be long, because the aim is merely indicate what is minimally necessary to be understand the techniques that we will be used.

Key words: Upper and Lower-Solutions, Sobolev's Imbedding Theorem, Fixed Point Theorem and Variational Methods.

I N T R O D U Ç Ã O

Em várias aplicações é de fundamental importância saber se a equação que modela certo fenômeno possui solução. Mesmo que não seja possível obter analiticamente tal solução esta informação nos indica se é viável ou não investir em algum método para determinar a solução, bem como as características dela, inclusive a questão de multiplicidade. No presente trabalho, por exemplo, nos concentraremos em apresentar métodos que permitam, sob determinadas condições, mostrar a existência de solução de problemas elípticos quasilineares da forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x, u, \nabla u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

com Ω domínio limitado e possuindo fronteira suave. A existência de solução para o problema (1) vem sendo estudada por vários pesquisadores. Amann [3] provou a existência de solução clássica minimal e maximal para o problema (1), assumindo que uma dupla sub-supersolução de (1) existe. Quando $p > n$, Amann e Crandall [4] provaram um resultado similar no espaço $W^{2,p}(\Omega)$, novamente usando o fato de existir uma sub-supersolução para (1). Na mesma época Kazdan e Kramer [16] demonstraram a existência de uma solução clássica. Alguns anos depois, Dancer e Sweers [6] observaram que, assumindo a existência de sub-supersolução em $W^{1,\infty}(\Omega)$, existe uma solução minimal e maximal em $W^{1,\infty}(\Omega)$. Antes, Hess [13] provou a existência de uma solução $u \in W^{1,2}(\Omega)$ para (1), e usando um argumento de bootstrap encontrou uma solução $u \in W^{2,m}(\Omega)$ onde m é dado por $m = \min\{\frac{2}{\alpha}, p\}$ com $\alpha \leq 2$. Mais recentemente, alguns pesquisadores atacaram o problema utilizando o teorema de ponto fixo de Leray-Schauder partindo do pressuposto que existe sub-supersolução para o problema (1). Xavier [18] encontrou uma solução em $W^{2,p}(\Omega)$ no caso em que \mathcal{L} é o operador de Laplace e $p > n$, porém sem fazer uso de sub-supersolução. Posteriormente Yan [19] provou que a condição $p > n$ pode ser relaxada.

Os problemas do tipo (1) descrevem uma grande quantidade de fenômenos. Aparecem em problemas de condução de calor, em problemas de natureza mecânica, como no movimento de uma membrana delgada e elástica com as extremidades fixas em seu estado estacionário. Também em problemas de eletricidade. Por exemplo, a função potencial elétrico num meio dielétrico que não contém cargas elétricas é modelada por um problema do tipo (1). Isto justifica um trabalho como este.

No primeiro capítulo faremos um breve comentário sobre os conteúdos que são necessários para um pleno aproveitamento dos resultados principais. No segundo capítulo faremos uma breve exposição da teoria de solução para a EDP elíptica clássica. No entanto, ressaltamos que, de maneira nenhuma temos como objetivo apresentar um material sobre teoria geral de equações elípticas. No terceiro capítulo mostraremos, usando o método de sub-supersolução proposto por Delgado e Suárez [7], que o problema (1), com

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

possui ao menos uma solução em $W^{2,p}(\Omega)$. Para isso vamos impor algumas condições sobre a função f e ao operador \mathcal{L} .

No quarto capítulo vamos mostrar que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, \nabla u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui solução em $H_o^1(\Omega)$. Para isso usaremos métodos variacionais, como proposto por de Figueiredo, Girardi e Matzeu [9]. Novamente teremos de impor algumas condições sobre a função f .

NOTAÇÃO

Antes de iniciarmos nossos estudos vejamos algumas notações básicas.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que o vetor α é um n -multiíndice se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ onde os α_i 's são, para cada i , inteiros não negativos.

1. Dado um multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, escrevemos $|\alpha| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$;
2. Para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, denotaremos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$;
3. Escreveremos $\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$;
4. Por D_j , para $j = 1, 2, \dots, n$, representa-se a derivação parcial $\frac{\partial}{\partial x_j}$;
5. Ω denotará um domínio em \mathbb{R}^n , ou seja, um conjunto aberto e conexo;
6. No caso de trabalharmos com Ω limitado ou de medida finita, explicitaremos no decorrer do texto.
7. A fronteira do conjunto B será representada por ∂B ;
8. $A \subset\subset \Omega$ significa que \bar{A} é um conjunto compacto de Ω ;
9. C_0^∞ , veja página 3;
10. $D'(\Omega)$, veja página 10;
11. $\mathcal{E}'(\Omega)$, veja página 16;
12. $W^k(\Omega)$, veja página 18;
13. u^+ e u^- , veja página 21;
14. $W^{k,p}(\Omega)$, veja página 23;
15. $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$, veja página 23;

16. $H_o^1(\Omega)$, veja página 24;
17. \xrightarrow{c} , veja página 26;
18. $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$, veja página 39;
19. $\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$, veja página 40;
20. $\|u\|_{C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})}$, veja página 40;
21. $\|u\|$, veja página 59;

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo estabeleceremos resultados que serão utilizados nos capítulos posteriores. Deixamos desde já claro que o leitor deverá possuir pelo menos conhecimentos mínimos de análise real e teoria da medida e nisso estão incluídos noções básicas de espaços L^p .

Para uma maior quantidade de detalhes consulte [1], [5], [8], [10], [11], [12], [14] e [17].

1.1 Funções Teste

Começaremos o nosso estudo definindo o que é o suporte de uma função.

DEFINIÇÃO 1.1.1. *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. O conjunto $S(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$ é o suporte da função f .*

TEOREMA 1.1.2. *Dados $1 \leq p \leq \infty$ e um aberto Ω , o conjunto das funções contínuas em um aberto Ω é denso em $L^p(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Consulte [17]. ■

TEOREMA 1.1.3. *Conhecidos $1 \leq p < \infty$ e um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto das funções contínuas em Ω , com suporte compacto, é denso em $L^p(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f \in L^p(\Omega)$. Trabalhando com as partes real e imaginária podemos supor que f é real. Fixemos $\epsilon > 0$. O Teorema 1.1.2 nos garante que existe g contínua em Ω , de $L^p(\Omega)$, tal que $\|f - g\|_p < \frac{\epsilon}{2}$. Agora, para cada número natural n , definiremos

$$K_n = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n} \text{ e } \|x\| \leq n\},$$

onde $d(x, \partial\Omega) = \inf\{|x - y|; y \in \partial\Omega\}$ quando $\partial\Omega \neq \emptyset$ e caso contrário tomemos $K_n = \{x \in \Omega; \|x\| \leq n\}$. Com isso temos $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, é possível verificar que K_n é compacto para cada n e $\cup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$.

Temos que a função

$$\mu(B) = \int_B |g(x)|^p dx, \text{ para } B \subset \Omega \text{ mensurável,}$$

é uma medida. Desta forma temos que

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} K_n) = \lim \mu(K_n).$$

Logo é possível encontrar n_o de maneira que

$$\left[\int_{\Omega \setminus K_{n_o}} |g(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pegue $n_1 = n_o + 1$ e defina $t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$t(x) = \frac{d(x, G)}{d(x, F) + d(x, G)}, \quad x \in \Omega,$$

com $F = K_{n_o}$ e $G = \overline{\Omega \setminus K_{n_1}}$. Esta função está bem definida pois temos que $d(a, F) + d(a, G) = 0$ quando, e somente quando, $d(a, \overline{F}) + d(a, \overline{G}) = 0$ se, e somente se, $d(a, \overline{F}) = d(a, \overline{G}) = 0$ se, e somente se, $a \in \overline{F} \cap \overline{G} = F \cap G$, já que F e G são fechados, mas $F \cap G = \emptyset$. Temos que a função t é contínua uma vez que $d(x, G)$, $d(x, F)$ e $d(x, F) + d(x, G)$ são funções contínuas. Além do mais, $0 \leq t(x) \leq 1$ para todo $x \in \Omega$. Com isso podemos construir $\varphi(x) = t(x).g(x)$, $x \in \Omega$, que é contínua e possui suporte compacto tendo em vista que $S(\varphi) \subset K_{n_1}$. Segue que

$$\|f - \varphi\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - \varphi\|_p,$$

com

$$\int_{\Omega} |g(x) - \varphi(x)|^p dx = \int_{K_{n_o}} |g(x) - \varphi(x)|^p dx + \int_{\Omega \setminus K_{n_o}} |g(x) - \varphi(x)|^p dx,$$

que resulta

$$\|g - \varphi\|_p^p \leq \int_{\Omega \setminus K_{n_o}} |g(x)|^p dx.$$

Desse modo temos

$$\|f - \varphi\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - \varphi\|_p < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

que era o que queríamos mostrar. ■

As funções de nosso principal interesse serão as de classe $C^\infty(\Omega)$ que possuem suportes compactos, para este propósito vamos definir o espaço das funções teste.

DEFINIÇÃO 1.1.4. *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e não vazio. Chamaremos de espaço de funções teste ao conjunto*

$$C_o^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; f \in C^\infty(\Omega) \text{ e } S(f) \text{ é compacto}\}.$$

Antes de apresentarmos um exemplo deste espaço vamos enunciar um resultado clássico de grande importância que é:

PROPOSIÇÃO 1.1.5. *Consideremos X e Y subconjuntos do \mathbb{R}^n . Considere as funções mensuráveis $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ com f definida em uma vizinhança de x_o , com exceção possivelmente do próprio x_o , e g definida em uma vizinhança do infinito. Se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ positivo tal que*

$$f(x) = O(|x - x_o|^{-n+\lambda}) \text{ quando } x \rightarrow x_o \text{ e}$$

$$g(x) = O(|x|^{-n-\lambda}) \text{ se } x \rightarrow \infty,$$

então podemos escolher constantes reais e positivas A e r de modo que

$$\int_{|x-x_o| \leq A} |f(x)| dx < \infty \text{ e } \int_{B^c(0,r) \cap Y} |g(x)| dx < \infty.$$

DEMONSTRAÇÃO. Veja referência [11]. ■

Agora vejamos um exemplo de uma função que está em $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$.

EXEMPLO 1.1.6. Para x em \mathbb{R}^n vamos definir

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & \text{se } \|x\| < 1 \text{ e} \\ 0, & \text{quando } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Esta é uma função teste real. Usaremos com muita frequência a função φ , que é obtida multiplicando a função ϕ por uma constante positiva, de modo que a função teste φ é não negativa e satisfaz $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ e $S(\varphi) = \overline{B(0,1)}$. Mostraremos que $C_o^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ usando esta φ e o teorema que segue.

TEOREMA 1.1.7. Dadas $f, \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ de modo que $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, para cada $\epsilon > 0$ defina

$$f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \epsilon y) \phi(y) dy.$$

Então $f_\epsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|f_\epsilon\|_p \leq \|f\|_p \|\phi\|_1$. Além disso, quando p for finito, se por acaso ϕ tiver suporte compacto, $\phi \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$, então $\|f_\epsilon - f\|_p \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Consulte [11]. ■

PROPOSIÇÃO 1.1.8. Seja p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Então $C_o^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.

DEMONSTRAÇÃO. Basta mostrar que $C_o^\infty(\Omega)$ é denso em $C_o^\circ(\Omega)$ já que este espaço é denso em $L^p(\Omega)$ conforme o Teorema 1.1.2. Consideremos f uma função em $C_o^\circ(\Omega)$. Tome φ como no Exemplo 1.1.6 e defina a função

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{caso } x \in \Omega \text{ e} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Podemos concluir que $\widehat{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, levando em conta que f está em $L^p(\Omega)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(x)|^p dx = \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Então, para $\epsilon < \frac{d(S(f), \partial\Omega)}{2}$ podemos definir

$$f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x - \epsilon y) \varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Fazendo uma mudança de variáveis temos que

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x - \epsilon y) \varphi(y) dy = \epsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) \varphi\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) dy \\ &= \epsilon^{-n} \int_{S(f)} f(y) \varphi\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) dy. \end{aligned}$$

Dado α um multiíndice qualquer temos, usando a regra de Leibniz, que

$$\partial^\alpha f_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \int_{S(f)} f(y) (\partial^\alpha \varphi\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right)) dy$$

já que $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$. Portanto $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, se $f_\epsilon(a) \neq 0$, vemos que existe algum y , com $\|y\| \leq 1$ de maneira que $a - \epsilon y \in S(f)$. Desta forma, $a \in S(f) + \epsilon \overline{B(0, 1)}$ e podemos escolher $r > 1$ de modo que $S(f) \subset B(0, r)$. Com isto temos que $a \in S(f_\epsilon) \subset S(f) + \epsilon \overline{B(0, 1)} \subset B(0, r) + \epsilon \overline{B(0, 1)} \subset \overline{B(0, r + \epsilon)}$. Logo $S(f_\epsilon)$ é compacto. Além do mais, como $\epsilon < \frac{d(S(f), \partial\Omega)}{2}$, temos que $S(f_\epsilon) \subset \Omega$ e concluímos que $f_\epsilon \in C_o^\infty(\Omega)$. Usando o Teorema 1.1.7, temos que $\|f_\epsilon - f\|_p \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0^+$. Isso mostra que $C_o^\infty(\Omega)$ é denso em $C_o^o(\Omega)$. Também temos que

$$L^p(\Omega) = \overline{C_o^o(\Omega)} = \overline{\overline{C_o^\infty(\Omega)}} = \overline{C_o^\infty(\Omega)}.$$

Portanto $C_o^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$. ■

Uma observação a ser feita é que dada $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, a função f_ϵ , definida na proposição acima, pertence a $C_o^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ e é dita função regularizante da função f . É possível provar que $C_o^\infty(\Omega)$ não é denso em $L^\infty(\Omega)$.

Vamos, agora, definir o que são funções localmente integráveis.

DEFINIÇÃO 1.1.9. *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $1 \leq p < \infty$. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ for uma função mensurável e para qualquer compacto $K \subset \Omega$ $\int_K |f(x)|^p dx < \infty$, dizemos que $f \in L_{loc}^p(\Omega)$.*

É possível provar que se $f \in L^\infty(\Omega)$, então $f \in L_{loc}^p(\Omega)$ qualquer que seja $1 \leq p < \infty$.

PROPOSIÇÃO 1.1.10. *Se $1 \leq p \leq \infty$, então $L_{loc}^p(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Vejamos o caso $1 < p < \infty$. Peguemos $K \subset \Omega$ compacto e $f \in L^p_{loc}(\Omega)$. Tome

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in K \text{ e} \\ 0, & \text{caso } x \notin K. \end{cases}$$

Temos que $g \in L^q(\Omega)$ para qualquer q satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Observe que $|f|g^{\frac{1}{p}} \in L^p(\Omega)$, pois $f \in L^p_{loc}(\Omega)$. De

$$\left[\int_K |f(x)| dx \right]^p = \left[\int_K |f(x)| g(x)^{\frac{1}{p}} g(x)^{\frac{1}{q}} dx \right]^p,$$

segue, usando a desigualdade de Hölder, que

$$\left[\int_K |f(x)| dx \right]^p \leq \int_K |f(x)|^p dx \left[\int_K dx \right]^{\frac{p}{q}} = \left(\int_K |f(x)|^p dx \right) |K|^{\frac{p}{q}} < \infty,$$

completando a prova. ■

TEOREMA 1.1.11. *Considere K compacto, Ω um conjunto aberto e $K \subset \Omega$. Então existe uma função $\psi \in C^\infty_0(\Omega)$ que vale um numa vizinhança de K . Além do mais, $0 \leq \psi \leq 1$ em Ω .*

DEMONSTRAÇÃO. Tomemos $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$, como no Exemplo 1.1.6, de modo que $\varphi \geq 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1.$$

Quando $\partial\Omega \neq \emptyset$, consideremos $\epsilon > 0$ de modo que $d(K, \partial\Omega) > 4\epsilon$. Caso contrário, tomaremos $\epsilon = 1$. Independente da situação ponhamos

$$K_1 = \{x \in \Omega; d(x, K) \leq \epsilon\} \text{ e } K_2 = \{x \in \Omega; d(x, K_1) \leq \epsilon\}.$$

Consideremos f de modo que

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{caso } x \in K_2 \text{ e} \\ 0, & \text{se } x \notin K_2, \end{cases}$$

e, agora, definiremos

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{quando } x \in \Omega \text{ e} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Podemos desta forma escrever

$$f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x - \epsilon y) \varphi(y) dy,$$

já que $\widehat{f} \in L^1(\Omega)$ e φ pertence a $L^1(\Omega)$. Da Proposição 1.1.8, $f_\epsilon \in C_o^\infty(\Omega)$. Se $c \in K_1$, então $c - \epsilon y \in K_2$ independente de quem seja y , com $\|y\| \leq 1$.

Vejamos a justificativa deste fato. Se \bar{y} satisfaz $\|\bar{y}\| \leq 1$ e $\bar{x} = c - \epsilon \bar{y}$, daí temos $d(\bar{x}, K_1) = \inf\{d(\bar{x}, k); k \in K_1\}$, ou seja, $d(\bar{x}, K_1) \leq d(\bar{x}, c)$ já que $c \in K_1$ temos que $d(\bar{x}, K_1) \leq \|\bar{x} - c\| = \|-\epsilon \bar{y}\| \leq \epsilon$. Logo $c - \epsilon y \in K_2$.

Da maneira como f foi definida temos que $f(c - \epsilon y) = 1$ para cada y com $\|y\| \leq 1$. Segue que

$$f_\epsilon(c) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(c - \epsilon y) \varphi(y) dy = \int_{B(0,1)} f(c - \epsilon y) \varphi(y) dy = \int_{B(0,1)} \varphi(y) dy = 1.$$

Então f_ϵ vale um numa vizinhança de K . Além disso, de $0 \leq \widehat{f} \leq 1$ e $0 \leq \varphi$ em Ω , temos que

$$0 \leq f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x - \epsilon y) \varphi(y) dy \leq \int_{B(0,1)} \varphi(y) dy = 1.$$

Basta agora considerar $\psi(x) = f_\epsilon(x)$, $x \in \Omega$. Neste caso o Teorema 1.1.8 nos garante que $S(\psi) \subset \Omega$ e que $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Isto completa a prova. ■

DEFINIÇÃO 1.1.12. Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma família de funções de $C_o^\infty(\Omega)$. Diremos que esta família é uma partição da unidade se

- 1) $\forall c \in \Omega$ existir uma vizinhança do ponto c que intercepta apenas um número finito dos suportes das (φ_α) 's;
- 2) $\forall x \in \Omega$ tivermos $\sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha(x) = 1$ e
- 3) $\forall x \in \Omega$ e $\forall \alpha \in I$ tivermos $\varphi_\alpha(x) \geq 0$.

Resulta diretamente das condições 2) e 3), da definição acima, que para cada $x \in \Omega$ temos $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$, isto é, a condição 2) caracteriza o nome partição da unidade. Dados $c \in \Omega$ e uma vizinhança deste ponto, como na condição 1) da definição acima, o somatório em 2) contém apenas um número finito de parcelas.

Isto implica que podemos diferenciar $\sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha$ obtendo, para cada β multiíndice com $|\beta| \geq 1$, $\sum_{\alpha \in I} \partial^\beta \varphi_\alpha(x) = 0$, $\forall x \in \Omega$.

Vejam agora o que é uma partição subordinada.

DEFINIÇÃO 1.1.13. *Seja $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma família de conjuntos abertos de \mathbb{R}^n . Dizemos que a partição da unidade $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ está subordinada à família de abertos $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ se $\forall \alpha \in I$ existir um número natural j de maneira que $S(\varphi_j) \subset U_\alpha$.*

LEMA 1.1.14. *Considere $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto não vazio e os abertos V_1, V_2, \dots, V_m contidos em \mathbb{R}^n de modo que $K \subset \bigcup_{j=1}^m V_j = \Omega$. Então existem conjuntos compactos $K_j \subset V_j$ de modo que $K \subset \bigcup_{i=1}^m K_i$.*

DEMONSTRAÇÃO. K é compacto, então podemos escolher $r > 0$ de maneira que $K \subset B(0, r)$. Como $K \subset \bigcup_{j=1}^m V_j$ podemos trocar os V_j por $V_j \cap B(0, r) = V_j$ e supor que $V_j \neq \emptyset$, $j = 1, 2, \dots, m$. Então os V_j 's são abertos e também são limitados. Portanto $\partial V_j \neq \emptyset$ para todo $j = 1, \dots, m$. Defina, para todo $j = 1, \dots, m$ e para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$V_j^n = \left\{ x \in V_j; d(x, \partial V_j) > \frac{1}{n} \right\}.$$

É possível provar que os V_j^n 's são abertos e que $\overline{V_j^n} \subset V_j$. Afirmamos que existe \bar{n} de modo que $K \subset \bigcup_{j=1}^m V_j^{\bar{n}}$. De fato, procedendo por contradição teríamos que para qualquer n natural existe $x_n \in K$, entretanto x_n não estaria em V_j^n para nenhum número natural n e para nenhum $j = 1, \dots, m$. Contudo, sendo K um conjunto compacto, a seqüência (x_n) contém uma subseqüência (x_{n_k}) convergindo para um ponto $\bar{x} \in K$. Como $K \subset \bigcup_{j=1}^m V_j$, então $\bar{x} \in V_l$ para algum l . Levando em conta que (x_{n_k}) não está em $V_j^{n_k}$ para nenhum k e para cada $j = 1, \dots, m$, segue que $d(\bar{x}, \partial V_l) \leq \frac{1}{n_k}$ para cada k número natural. Com isso temos que $\bar{x} \in \partial V_l$, o que implica $V_l \cap \partial V_l \neq \emptyset$, o que é uma contradição. Agora basta tomar $K_j = \overline{V_j^{\bar{n}}} \cap K$ para cada $j = 1, \dots, m$. Isto completa a demonstração. ■

TEOREMA 1.1.15. *Nas condições do lema anterior temos que para cada j , existem funções $\varphi_j \in C_o^\infty(V_j)$ tais que*

$$a) \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \leq 1, \forall x \in \Omega;$$

- b) $\sum_{i=1}^m \varphi_i = 1$ numa vizinhança de K e
 c) $0 \leq \varphi_i \leq 1$ em Ω para cada $i = 1, 2, \dots, m$.

DEMONSTRAÇÃO. Basta construir uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$. Começaremos determinando compactos $K_i \subset V_i$ de maneira que $K \subset \bigcup_{i=1}^m K_i$, ou seja, formam uma cobertura para K . Isso pode ser feito graças ao lema anterior. Tomemos também funções ϕ_j em $C_o^\infty(V_j)$ valendo um em uma vizinhança de K_j , $0 \leq \phi_j \leq 1$ em V_j para cada $j = 1, 2, \dots, m$. Defina $\varphi_1 = \phi_1$ e para cada $1 < l \leq m$, $\varphi_l = \phi_l(1 - \phi_1)(1 - \phi_2)\dots(1 - \phi_{l-1})$. Desta forma podemos obter, para todo $k = 1, 2, \dots, m$

$$\sum_{l=1}^k \varphi_l = 1 - (1 - \phi_1)(1 - \phi_2)\dots(1 - \phi_k).$$

Usando indução em $k < m$, podemos verificar que a fórmula acima é válida e com a construção das funções φ_l desta maneira podemos constatar a validade de a), b) e c). ■

1.2 Distribuições

Iremos colocar as idéias de maneira direta com o objetivo apenas de estabelecer noções básicas sobre este assunto. Para maiores detalhes consulte [14].

Um funcional linear é contínuo se, e somente se, ele for contínuo no ponto zero. A fim de usar este resultado é necessário a noção do que significa convergência a zero em $C_o^\infty(\Omega)$, que é o que iremos fazer em seguida.

DEFINIÇÃO 1.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Diremos que a seqüência $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C_o^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_o^\infty(\Omega)$ se:*

- 1) *Existir um subconjunto $K \subset \Omega$ tal que $S(\varphi_j) \subset K$ para todo $j = 1, 2, \dots$ e*
- 2) *Para cada multiíndice α , $\partial^\alpha \varphi_j$ converge a zero uniformemente em K .*

NOTA: Diremos que $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C_o^\infty(\Omega)$ converge para a função $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$ quando $\varphi_j - \varphi \rightarrow 0$ em $C_o^\infty(\Omega)$.

DEFINIÇÃO 1.2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Um funcional linear contínuo $u : C_o^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ denomina-se distribuição.*

OBSERVAÇÃO: Denotaremos o valor da distribuição u aplicada na função teste φ por $\langle u, \varphi \rangle$ ou $u(\varphi)$ e indicaremos por $D'(\Omega)$ o conjunto das distribuições definidas em $C_o^\infty(\Omega)$.

EXEMPLO 1.2.3. *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Para $a \in \Omega$ ponhamos $\delta_a : C_o^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ de modo que $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ para todo $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$. Então δ_a é uma distribuição e é denominada distribuição de Dirac centrada no ponto a .*

PROPOSIÇÃO 1.2.4. *Considere $f \in L_{loc}^1(\Omega)$. O funcional*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in C_o^\infty(\Omega),$$

é uma distribuição.

DEMONSTRAÇÃO. Consulte [14]. ■

Na Proposição 1.2.4 também podemos tomar qualquer função $f \in L_{loc}^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, pois $L_{loc}^p(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$.

PROPOSIÇÃO 1.2.5. *Sejam $f, g \in L_{loc}^1(\Omega)$. Então $Tf = Tg$ se, e somente se, $f = g$ q.t.p em Ω .*

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $f = g$ q.t.p em Ω , com isso temos que o conjunto $A = \{x \in \Omega; f(x) \neq g(x)\}$ tem medida nula, então $\varphi(f - g) = 0$ q.t.p em Ω para toda $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$, pois o conjunto onde esta expressão não se anula tem medida zero. Desta forma temos que

$$\int_{\Omega} [\varphi(f - g)](x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_o^\infty(\Omega).$$

Recíprocamente, tome $K \subset \Omega$ compacto e $\psi \in C_o^\infty(\Omega)$ valendo um numa vizinhança de K . Agora, defina

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{caso } x \in \Omega \text{ e} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \quad \text{e} \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & \text{quando } x \in \Omega \text{ e} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

e, por fim,

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{se } x \in \Omega \text{ e} \\ 0, & \text{caso } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Para $h = f - g$ ponha

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x), & \text{se } x \in \Omega \text{ e} \\ 0, & \text{caso } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Decorre que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\psi}(x)| |\tilde{h}(x)| dx &= \int_{\Omega} |\psi(x)| |h(x)| dx = \int_{S(\psi)} |\psi(x)| |f(x) - g(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in S(\psi)} |\psi(x)| \int_{S(\psi)} |f(x) - g(x)| dx < \infty, \end{aligned}$$

já que $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Logo $\tilde{\psi}\tilde{h} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Tome φ como no Exemplo 1.1.6 e para cada $\epsilon > 0$, denotaremos $\varphi_\epsilon(z) = \varphi(z/\epsilon)$, $z \in \mathbb{R}^n$.

Então, para qualquer $x \in \Omega$ temos

$$\begin{aligned} (\psi h)_\epsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{\psi}\tilde{h})(x - \epsilon y) \varphi(y) dy = \epsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{\psi}\tilde{h})(y) \varphi\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) dy \\ &= \epsilon^{-n} \int_{\Omega} (\psi h)(y) \varphi_\epsilon(x - y) dy = T_f(\psi \varphi_\epsilon) - T_g(\psi \varphi_\epsilon) = 0. \end{aligned}$$

Como $(\psi h)_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$ e $(\psi h)_\epsilon \rightarrow \psi h$ em $L^1(\Omega)$, deduzimos que $\psi h = 0$ *q.t.p.* em Ω . Em particular, no conjunto K , $f = g$ *q.t.p.* Agora construiremos uma seqüência de compactos K_n como na prova do Teorema 1.1.3. Com isso vemos que $f = g$ *q.t.p.* em Ω , completando a prova. ■

Podemos imediatamente constatar que se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\langle T_f, \psi \rangle = 0$ para toda $\psi \in C^\infty(\Omega)$, então $f = 0$ *q.t.p.* A distribuição T_f será escrita simplesmente como f , quando não existir possibilidade de confusão.

Caso conheçamos duas distribuições de $D'(\Omega)$, podemos definir naturalmente a distribuição $u + v$ por $\langle u + v, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle + \langle v, \varphi \rangle$ para cada $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Mostrar que $u + v$ é uma distribuição não apresenta grandes dificuldades.

Para definirmos outros tipos de operações que envolvem distribuições vamos considerar dois operadores lineares contínuos $L, L' : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$. Dizemos que L é o adjunto do operador L' , e vice versa, se

$$\int (L\varphi)\phi dx = \int \varphi(L'\phi) dx, \forall \varphi, \phi \in C^\infty(\Omega).$$

Neste caso, escrevemos $\langle L\varphi, \phi \rangle = \langle \varphi, L'\phi \rangle$, $\forall \varphi, \phi \in C_o^\infty(\Omega)$. De uma maneira natural, dizemos que o operador linear L é contínuo em $C_o^\infty(\Omega)$ se $L(\psi_j) \rightarrow 0$ em $C_o^\infty(\Omega)$ desde que $\psi_j \rightarrow 0$ em $C_o^\infty(\Omega)$.

AFIRMAÇÃO: Temos que $C_o^\infty(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega) \subset D'(\Omega)$.

De fato, basta provarmos a primeira inclusão. Se $f \in C_o^\infty(\Omega)$ temos que existe $M > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx = \int_{S(f)} |f(x)| dx \leq M \int_{S(f)} dx = M \cdot |S(f)| < \infty.$$

Portanto temos que $f \in L_{loc}^1(\Omega)$.

PROPOSIÇÃO 1.2.6. *Sejam $L, L' : C_o^\infty(\Omega) \rightarrow C_o^\infty(\Omega)$ dois operadores lineares contínuos de modo que $\langle L\varphi, \phi \rangle = \langle \varphi, L'\phi \rangle$, $\forall \varphi, \phi \in C_o^\infty(\Omega)$. Então existe $\tilde{L} : D'(\Omega) \rightarrow D'(\Omega)$, linear, de maneira que $\tilde{L} = L$ em $C_o^\infty(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [14] ■

Considere $f \in C^\infty(\Omega)$ e defina $L : C_o^\infty(\Omega) \rightarrow C_o^\infty(\Omega)$ colocando $L\varphi = f\varphi$. L é um operador linear contínuo e $L' = L$. Desse modo, dada u uma distribuição definimos a distribuição fu colocando $\langle fu, \psi \rangle = \langle u, f\psi \rangle$, $\forall \psi \in C_o^\infty(\Omega)$.

EXEMPLO 1.2.7. *Para a distribuição de Dirac centrada em $a \in \Omega$, onde Ω é um conjunto aberto, temos*

$$\langle f\delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, f\varphi \rangle = f(a)\varphi(a) = \langle f(a)\delta_a, \varphi \rangle, \forall \varphi \in C_o^\infty(\Omega).$$

Com isso temos $f\delta_a = f(a)\delta_a$.

EXEMPLO 1.2.8. *Considere $\varphi, \phi \in C_o^\infty(\Omega)$. Estendendo φ e ϕ por zero em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ e fazendo integração por partes vemos que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \phi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) dx.$$

Com isso temos que o transposto formal do operador $L = \frac{\partial}{\partial x_j}$ é $L' = -\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Por este motivo definimos

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle \quad \forall \phi \in C_o^\infty(\Omega) \text{ e } \forall u \in D'(\Omega).$$

Por aplicação repetida da expressão acima e indução em $|\alpha|$ vemos que, dados um multiíndice α e $u \in D'(\Omega)$, então

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \forall u \in D'(\Omega).$$

Facilmente isso pode ser verificado.

EXEMPLO 1.2.9. Considere a função Heaviside deslocada de $a \in \mathbb{R}$ dada por

$$H_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x > a \quad e \\ 0, & \text{quando } x < a. \end{cases}$$

Então $\frac{\partial H_a}{\partial x} = \delta_a$.

PROPOSIÇÃO 1.2.10. Considere $f \in C^\infty(\Omega)$ e $u \in D'(\Omega)$. Então, para cada número $j = 1, 2, \dots, n$, obtemos

$$\frac{\partial(fu)}{\partial x_j} = f \frac{\partial u}{\partial x_j} + u \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Veja [14]. ■

Já vimos o que significa dizer que duas distribuições são iguais. Também podemos dizer quando duas distribuições são iguais e um aberto $A \subset \Omega$. Neste caso dizemos que $\langle u_1, \varphi \rangle = \langle u_2, \varphi \rangle$ para cada $\varphi \in C_0^\infty(A)$. Deve ser observado que $C_0^\infty(A) \subset C_0^\infty(\Omega)$ já que basta estender φ por zero em $\Omega \setminus A$.

DEFINIÇÃO 1.2.11. Considere Ω um aberto de \mathbb{R}^n . O suporte da distribuição $u \in D'(\Omega)$, que indicaremos por $S(u)$, é a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais $u = 0$, isto é, $\langle u, \varphi \rangle = 0$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus S(u))$.

AFIRMAÇÃO: Decorre diretamente da Definição 1.2.11, que para mostrar que um determinado ponto $c \in \Omega$ pertence a $S(u)$ é suficiente mostrar que para toda bola aberta $B(c, r) \subset \Omega$, existe $\varphi \in C_0^\infty(B(c, r))$ de maneira que $\langle u, \varphi \rangle \neq 0$.

De fato, tomemos $c \in S(u)$ e suponhamos que exista uma bola de raio $r > 0$ centrada em c tal que para toda $\varphi \in C_0^\infty(B(c, r))$ tenhamos $\langle u, \varphi \rangle = 0$. Como $B(c, r)$ é aberto, temos que $F = \Omega \setminus B(c, r)$ é um conjunto fechado. Como $S(u)$ é a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais $u = 0$ e $c \notin F$, logo c não irá pertencer a interseção destes fechados. Portanto $c \notin S(u)$ o que é uma contradição.

PROPOSIÇÃO 1.2.12. *Dados um multiíndice α e uma distribuição $v \in D'(\Omega)$, então $S(\partial^\alpha v) \subset S(v)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $c \in S(\partial^\alpha v)$, então $\forall B(c, r) \subset \Omega$ dada existe $\phi \in C_o^\infty(B(c, r))$ de modo que $\langle \partial^\alpha v, \phi \rangle \neq 0$. Com isso temos que $(-1)^{|\alpha|} \langle v, \partial^\alpha \phi \rangle \neq 0$. Segue que $\langle v, \partial^\alpha \phi \rangle \neq 0$.

Assim, para $B(c, r)$ dada existe uma função $\partial^\alpha \phi \in C_o^\infty(B(c, r))$ de modo que $\langle v, \partial^\alpha \phi \rangle \neq 0$. Portanto $c \in S(v)$. ■

O suporte da função Heaviside H_a é o intervalo fechado $[a, \infty)$. Tome $a \in \mathbb{R}$. Então $S(\delta_a) = \{a\}$.

PROPOSIÇÃO 1.2.13. *Dada $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ de modo que $f = 0$ q.t.p. fora do conjunto fechado F de Ω , então f define uma distribuição e $S(f) \subset F$, como distribuição.*

DEMONSTRAÇÃO. Tomemos $c \in \Omega \setminus F$. Como F é fechado, temos que $A = \Omega \setminus F$ é aberto. Então existe $r > 0$ tal que $B(c, r) \subset A$. Por hipótese $f = 0$ q.t.p. em $B(c, r)$. Se $\phi \in C_o^\infty(B(c, r))$, então $f\phi = 0$ q.t.p. em Ω . Deste modo

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx = 0.$$

Segue que $\langle f, \phi \rangle = 0$ para cada $\phi \in C_o^\infty(B(c, r))$. Logo $c \notin S(f)$. ■

Note que qualquer função contínua no aberto Ω pertence a $L_{loc}^1(\Omega)$. Assim, funções contínuas definem distribuições e com base nesta informação temos a

PROPOSIÇÃO 1.2.14. *Seja f uma função contínua em Ω . Então o suporte de f como função e como distribuição são iguais.*

DEMONSTRAÇÃO. Denote $S(f)$ e $S(T_f)$ os suportes de f como função e como distribuição, respectivamente. Obviamente $S(f) \subset S(T_f)$ caso $S(f) = \emptyset$ ou $S(T_f) = \Omega$. Portanto vamos descartar estes casos. Suponha que $b \notin S(T_f)$. Logo existe uma vizinhança V_b aberta de modo que

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{V_b} f(x)\varphi(x)dx = 0, \forall \varphi \in C_o^\infty(V_b).$$

Segue que $f \equiv 0$ em V_b . Caso contrário se $a \in V_b$ for tal que $f(a) \neq 0$, podemos supor $f(a) > 0$. Pelo princípio da conservação do sinal existe $r > 0$ de modo que $B(a, 2r) \subset V_b$ e $f(x) > 0, \forall x \in B(a, 2r)$. Para $0 < r_1 < r$ defina

$$\phi_r^a(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x-a\|^2 - r_1^2}}, & \text{se } \|x - a\| < r_1 \\ 0, & \text{quando } \|x - a\| \geq r_1. \end{cases}$$

Deste modo $\phi_r^a \in C_o^\infty(V_b)$ e $\langle T_f, \phi_r^a \rangle = 0$. No entanto,

$$\langle T_f, \phi_r^a \rangle = \int_{V_b} f(x) \phi_r^a(x) dx = \int_{B(a, r_1)} f(x) \phi_r^a(x) dx > 0,$$

o que é uma contradição. Logo $f \equiv 0$ em V_b e mostra que $b \notin S(f)$.

Recíprocamente, sendo $f \equiv 0$ fora do conjunto $S(f)$ e como f define uma distribuição, a proposição anterior garante que $S(T_f) \subset S(f)$. ■

Um passo importante na resolução de EDP's será visto no próximo resultado, o qual nos possibilitará procurar soluções de equações diferenciais em um espaço com muito mais exemplares que o usual.

TEOREMA 1.2.15. *Vamos supor que as funções u e f , definidas em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sejam contínuas e que $\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ para toda $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$. Então u possui derivada clássica $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_j} = f$, isso no sentido clássico.*

DEMONSTRAÇÃO. Consulte [14]. ■

Vejamos agora o que significa uma distribuição ser de classe C^∞ .

DEFINIÇÃO 1.2.16. *Dizemos que uma distribuição u é de classe C^∞ no aberto $U \subset \Omega$ se existir uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, de classe C^∞ , de maneira que*

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_U f(x) \varphi(x) dx, \text{ para toda } \varphi \in C_o^\infty(U).$$

Agora, com esta definição em mãos vamos estabelecer o que é o suporte singular de uma distribuição.

DEFINIÇÃO 1.2.17. *O suporte singular de uma distribuição $u \in D'(\Omega)$, indicado por $SS(u)$, é a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é C^∞ .*

Obviamente $SS(u)$ é fechado em Ω e o leitor pode facilmente verificar que, $u \in D'(\Omega)$ implica $SS(u) \subset S(u)$. O conjunto das distribuições que possuem suporte compacto será denotado por $\mathcal{E}'(\Omega)$.

TEOREMA 1.2.18. *Consideremos u uma distribuição com suporte compacto em Ω . Existe um único funcional $\tilde{u} : C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ linear tal que*

- 1) $\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi)$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e
- 2) $\tilde{u}(\varphi) = 0$ se $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ e $S(\varphi) \cap S(u) = \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO. Consulte [14]. ■

Para tratarmos mais cuidadosamente as distribuições de suporte compacto precisamos da

DEFINIÇÃO 1.2.19. *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Então a seqüência $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C^\infty(\Omega)$ se: para todo $K \subset \Omega$ compacto e para cada inteiro não negativo n , as derivadas de ordem n de φ_j convergem uniformemente a zero em K quando j tende para o infinito.*

DEFINIÇÃO 1.2.20. *Um funcional linear u , definido em $C^\infty(\Omega)$, é contínuo se, e somente se, para cada seqüência $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de $C^\infty(\Omega)$ convergindo a zero implicar que $\langle u, \varphi_j \rangle \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$.*

A fim de concluir esta seção vamos definir precisamente o que significa convergência no espaço $D'(\Omega)$. Além disso provaremos um importante resultado mostrando que o conjunto das distribuições que possuem suporte compacto é denso em $D'(\Omega)$.

DEFINIÇÃO 1.2.21. *Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de distribuições de $D'(\Omega)$. Diremos que esta seqüência converge para a distribuição u de $D'(\Omega)$ quando $\langle u_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle u, \varphi \rangle$ em \mathbb{C} para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Escreveremos $u_n \rightarrow u$ em $D'(\Omega)$.*

EXEMPLO 1.2.22. *Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ de modo que $S(\varphi) \subset \overline{B(0,1)}$, $0 \leq \varphi$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$. Então, dado $a \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \varphi\left(\frac{a-x}{\epsilon}\right)$ converge para δ_a em $D'(\Omega)$.*

De fato, tomemos $\psi \in C_o^\infty(\Omega)$. Logo,

$$\langle \varphi_\epsilon, \psi \rangle = \epsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \varphi\left(\frac{a-x}{\epsilon}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(a-\epsilon x) \varphi(x) dx.$$

Segue que

$$\langle \varphi_\epsilon, \psi \rangle = \psi_\epsilon(a) \rightarrow \psi(a) = \langle \delta_a, \psi \rangle,$$

completando a prova.

PROPOSIÇÃO 1.2.23. $\mathcal{E}'(\Omega)$ é denso em $D'(\Omega)$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de compactos, $K_n \subset \overset{o}{K}_{n+1}$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$. Agora considere $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções de $C_o^\infty(\Omega)$ de modo que $\varphi_n = 1$ numa vizinhança de K_n . Dada $u \in D'(\Omega)$, defina $u_n = \varphi_n u$. Temos que $S(u_n) \subset S(\varphi_n)$ para todo n natural, e teremos $u_n \rightarrow u$ em $D'(\Omega)$. Com efeito, seja $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$. Existe n_o natural tal que $S(\varphi) \subset K_{n_o}$. Donde, $\varphi_n \varphi = \varphi$ para cada $n \geq n_o$. Mas então temos que

$$\langle u_n, \varphi \rangle = \langle \varphi_n u, \varphi \rangle = \langle u, \varphi_n \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle$$

para todo $n \geq n_o$. ■

1.3 Espaços de Sobolev

Agora vamos estabelecer ferramentas que serão de utilidade ímpar nos resultados posteriores. Para obter uma maior quantidade de detalhes sobre este assunto o leitor poderá consultar a referências [1] e [12].

DEFINIÇÃO 1.3.1. Um conjunto A do espaço topológico X será dito *pré-compacto* se seu fecho for compacto.

DEFINIÇÃO 1.3.2. Uma aplicação contínua entre dois espaços de Banach é chamada *compacta* se as imagens de conjuntos limitados forem *pré-compactas*.

Estabeleceremos agora algumas noções do que são espaços de Sobolev bem como algumas informações sobre teoremas de imersão.

DEFINIÇÃO 1.3.3. Uma seqüência $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$ converge para u em $L^p_{loc}(\Omega)$ se $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge para u em $L^p(\Omega')$ para cada $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Seja

$$\phi(x) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & \text{se } \|x\| < 1 \text{ e} \\ 0, & \text{quando } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

onde $\phi \geq 0$, $S(\phi) = \overline{B(0,1)}$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$ para uma escolha conveniente de c . Para $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\epsilon > 0$, a regularização de u , denotada por u_ϵ , é definida por

$$u_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) u(y) dy, \quad (1.1)$$

desde que $\epsilon < d(x, \partial\Omega)$. É claro que $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega')$ para qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega$ desde que $\epsilon < d(\Omega', \partial\Omega)$.

LEMA 1.3.4. Seja $u \in C^0(\Omega)$. Então u_ϵ converge uniformemente para u sobre qualquer domínio $\Omega' \subset\subset \Omega$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [12]. ■

LEMA 1.3.5. Seja $u \in L^p_{loc}(\Omega) (L^p(\Omega))$, $1 \leq p < \infty$. Então teremos que $u_\epsilon \rightarrow u$ em $L^p_{loc}(\Omega) (L^p(\Omega))$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [12]. ■

DEFINIÇÃO 1.3.6. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multiíndice qualquer. Uma função v de $L^1_{loc}(\Omega)$ será chamada α -ésima derivada fraca de u se satisfizer

$$\int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_o^{|\alpha|}(\Omega). \quad (1.2)$$

Chamamos uma função de fracamente derivável se todas as suas derivadas fracas de primeira ordem existirem. Do mesmo modo, diremos que uma função é k vezes fracamente derivável se todas as derivadas fracas de ordem até k existirem.

Denotaremos o espaço das funções k vezes fracamente deriváveis com o símbolo $W^k(\Omega)$. Note que $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$, o que garante a existência de algum exemplar em $W^k(\Omega)$. Além disso, $\partial^\alpha u$ é unicamente determinada a menos de conjuntos de medida nula.

LEMA 1.3.7. *Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multiíndice qualquer. Suponha que $\partial^\alpha u$ existe. Então, se $d(x, \partial\Omega) > \epsilon$, nós temos $\partial^\alpha u_\epsilon(x) = (\partial^\alpha u)_\epsilon(x)$, onde u_ϵ é a regularizada de u .*

DEMONSTRAÇÃO. Temos que

$$u_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) u(y) dy$$

e derivando sob o sinal de integração obtemos

$$\partial^\alpha u_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \int_{\Omega} \partial_x^\alpha \left(\phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \right) u(y) dy.$$

Além do mais, pela regra da cadeia, temos

$$\partial^\alpha u_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \int_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} \partial_y^\alpha \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) u(y) dy.$$

Integrando por partes, temos

$$\partial^\alpha u_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \partial^\alpha u(y) dy = (\partial^\alpha u)_\epsilon(x),$$

já que $\partial^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$. ■

TEOREMA 1.3.8. *Sejam u e v funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multiíndice. Então $v = \partial^\alpha u$ se, e somente se, existir uma seqüência $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$ convergindo para u em $L^1_{loc}(\Omega)$ e $\partial^\alpha u_m \rightarrow v$ em $L^1_{loc}(\Omega)$, também.*

DEMONSTRAÇÃO. Se vale $v = \partial^\alpha u$, basta usar a expressão (1.1), desde que seja válido que $\epsilon < d(x, \partial\Omega)$, use também os Lemas 1.3.4 e 1.3.5 e obterá o resultado.

Recíprocamente, por hipótese existe $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \rightarrow u$ em $L^1_{loc}(\Omega)$ e $\partial^\alpha u_m \rightarrow v$ em $L^1_{loc}(\Omega)$. Fixemos $\varphi \in C_o^{|\alpha|}(\Omega)$ e considere $\Omega' \subset\subset \Omega$ de modo que $S(\varphi) \subset \Omega'$. Desse modo, integrando por partes, temos

$$\int_{\Omega} \partial^\alpha u_m(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_m(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx.$$

Desta forma teremos que

$$\lim \int_{\Omega} \partial^\alpha u_m(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \lim \int_{\Omega} u_m(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx.$$

Portanto vale

$$\int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) \partial^{\alpha} \varphi(x) dx,$$

completando a prova. ■

Podemos agora expandir algumas propriedades da derivada clássica para a derivada fraca. Em particular vale $\partial^{e_i}(u \cdot v) = u \partial^{e_i} v + v \partial^{e_i} u$, $i = 1, \dots, n$ onde u, v estão em $W^1(\Omega)$ pelo menos, uv e $u \partial^{e_i} v + v \partial^{e_i} u$ estão em $L^1_{loc}(\Omega)$. Além disso, temos o

TEOREMA 1.3.9. *Sejam $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ e $u \in W^1(\Omega)$. Então a função composta $(f \circ u) \in W^1(\Omega)$ e para $i = 1, \dots, n$, $\partial^{e_i}(f \circ u) = f'(u) \partial^{e_i} u$.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ pois $u \in W^1(\Omega)$. Além disso, $\partial^{e_i} u$ existe para $i = 1, \dots, n$. Então, pelo Teorema 1.3.8 existe $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset C^{\infty}(\Omega)$ de modo que $u_m \rightarrow u$ e $\partial^{e_i} u_m \rightarrow \partial^{e_i} u$ em $L^1_{loc}(\Omega)$. Tome $\Omega' \subset\subset \Omega$ qualquer e fixe $x_o \in \Omega'$ e m tais que $u_m(x_o)$ e $u(x_o)$ sejam finitos.

Pelo teorema do valor médio teremos que existe c entre $u_m(x_o)$ e $u(x_o)$ tal que

$$|f(u_m(x_o)) - f(u(x_o))| = |f'(c)| |u_m(x_o) - u(x_o)|.$$

Como $f' \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ temos $|f'(c)| \leq \|f'\|_{\infty}$. Portanto

$$|f(u_m(x_o)) - f(u(x_o))| \leq \|f'\|_{\infty} |u_m(x_o) - u(x_o)|.$$

Consequentemente,

$$\int_{\Omega'} |f(u_m(x)) - f(u(x))| dx \leq \|f'\|_{\infty} \int_{\Omega'} |u_m(x) - u(x)| dx \rightarrow 0,$$

quando $m \rightarrow \infty$, já que $u_m \rightarrow u$ em $L^1_{loc}(\Omega)$, isto é,

$$\|(f \circ u_m) - (f \circ u)\|_{L^1(\Omega')} \rightarrow 0.$$

Com isso concluimos que $(f \circ u_m) \rightarrow (f \circ u)$ em $L^1_{loc}(\Omega)$. Temos também que, $(f' \circ u_m) \partial^{e_i} u_m - (f' \circ u) \partial^{e_i} u$ é igual a

$$(f' \circ u_m) (\partial^{e_i} u_m - \partial^{e_i} u) + \partial^{e_i} u ((f' \circ u_m) - (f' \circ u)). \quad (1.3)$$

Segue que $\int_{\Omega'} |(f' \circ u_m) \partial^{e_i} u_m - (f' \circ u) \partial^{e_i} u| dx$ é menor ou igual a

$$\|f'\|_{\infty} \int_{\Omega'} |\partial^{e_i} u_m - \partial^{e_i} u| dx + \int_{\Omega'} |(f' \circ u_m) - (f' \circ u)| |\partial^{e_i} u| dx.$$

Como $u_m \rightarrow u$ q.t.p em Ω' e f' é contínua, temos $\partial^{e_i} u f'(u_m) \rightarrow \partial^{e_i} u f'(u)$ q.t.p em Ω' . Além disso temos $|\partial^{e_i} u f'(u_m)| \leq \|f'\|_{\infty} |\partial^{e_i} u|$ para todo m natural.

Usando o teorema da convergência dominada, já que $\partial^{e_i} u$ está em $L^1_{loc}(\Omega)$, temos $\int_{\Omega'} |f'(u_m) - f'(u)| |\partial^{e_i} u| dx \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$. Voltando a (1.3) concluímos que

$$\|(f' \circ u_m) \partial^{e_i} u_m - (f' \circ u) \partial^{e_i} u\|_{L^1(\Omega')} \rightarrow 0.$$

Então $f'(u_m) \partial^{e_i} u_m \rightarrow f'(u) \partial^{e_i} u$ em $L^1_{loc}(\Omega)$. Dada $\varphi \in C^1_0(\Omega)$ arbitrária de modo que $S(\varphi) \subset \Omega'$, segue, usando integração por partes, que

$$\int_{\Omega} f'(u_m) \partial^{e_i} u_m \varphi dx = - \int_{\Omega} f(u_m) \partial^{e_i} \varphi dx.$$

Temos então que

$$\lim \int_{\Omega} f'(u_m) \partial^{e_i} u_m \varphi dx = - \lim \int_{\Omega} f(u_m) \partial^{e_i} \varphi dx$$

e, portanto, vale

$$\int_{\Omega} f'(u) \partial^{e_i} u \varphi dx = - \int_{\Omega} f(u) \partial^{e_i} \varphi dx.$$

Logo $\partial^{e_i}(f(u)) = f'(u) \partial^{e_i} u$, $i = 1, \dots, n$, provando o resultado. ■

Consideremos $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Vamos agora definir $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ e $u^-(x) = \min\{u(x), 0\}$, respectivamente, como a parte positiva e a parte negativa de u . Obviamente $u = u^+ + u^-$ e $|u| = u^+ - u^-$.

LEMA 1.3.10. *Considere $u \in W^1(\Omega)$. Então u^+, u^- e $|u|$ estão em $W^1(\Omega)$ e para $i = 1, 2, \dots, n$,*

$$\begin{aligned} \partial^{e_i} u^+(x) &= \begin{cases} \partial^{e_i} u(x), & \text{se } u(x) > 0 \\ 0, & \text{quando } u(x) \leq 0, \end{cases} & e \\ \partial^{e_i} u^-(x) &= \begin{cases} 0, & \text{caso } u(x) \geq 0 \\ \partial^{e_i} u(x), & \text{se } u(x) < 0, \end{cases} \\ \partial^{e_i} |u|(x) &= \begin{cases} \partial^{e_i} u(x), & \text{se } u(x) > 0 \\ 0, & \text{quando } u(x) = 0 \\ -\partial^{e_i} u(x), & \text{se } u(x) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO. Defina, para $\epsilon > 0$, $f_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} (t^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \epsilon, & \text{se } t > 0 \text{ e} \\ 0, & \text{quando tivermos } t \leq 0. \end{cases}$$

Pode-se mostrar que $f_\epsilon \in C^1(\mathbb{R})$ para todo $\epsilon > 0$. Considere agora $f_\epsilon \circ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Então

$$(f_\epsilon \circ u)(x) = \begin{cases} (u(x)^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \epsilon, & \text{se } u(x) > 0 \\ 0, & \text{quando } u(x) \leq 0. \end{cases}$$

Pelo Teorema 1.3.9 temos que $\partial^{e_i}(f_\epsilon \circ u) = f'_\epsilon(u) \partial^{e_i}u$, $i = 1, \dots, n$. Logo

$$\int_{\Omega} f'_\epsilon(u) \partial^{e_i}u \varphi dx = - \int_{\Omega} (f_\epsilon \circ u) \partial^{e_i}\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_o^\infty(\Omega).$$

Segue que

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (f_\epsilon \circ u) \partial^{e_i}\varphi dx &= \int_{u \leq 0} f'_\epsilon(u) \partial^{e_i}u \varphi dx + \int_{u > 0} f'_\epsilon(u) \partial^{e_i}u \varphi dx \\ &= \int_{u > 0} \frac{u}{(u^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \epsilon} (\partial^{e_i}u) \varphi dx. \end{aligned}$$

No entanto, quando $\epsilon \rightarrow 0^+$ temos

$$(f_\epsilon \circ u)(x) \rightarrow u^+(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } u(x) > 0 \\ 0, & \text{caso } u(x) \leq 0. \end{cases}$$

Usando o teorema da convergência dominada, temos

$$\int_{\Omega} (f_\epsilon \circ u) \partial^{e_i}\varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} u^+ \partial^{e_i}\varphi dx.$$

Por outro lado, para $u > 0$ temos $\frac{(\partial^{e_i}u)}{(u^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \epsilon} \varphi \rightarrow \partial^{e_i}u \varphi$ q.t.p em Ω^+ , com $\Omega^+ = \{x \in \Omega; u(x) > 0\}$, quando $\epsilon \rightarrow 0^+$ e usando o teorema da convergência dominada novamente temos

$$\int_{u > 0} \frac{u}{(u^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \epsilon} (\partial^{e_i}u) \varphi dx \rightarrow \int_{u > 0} (\partial^{e_i}u) \varphi dx,$$

quando $\epsilon \rightarrow 0^+$. Portanto

$$- \int_{\Omega} u^+ \partial^{e_i}\varphi dx = \int_{u > 0} (\partial^{e_i}u) \varphi dx + \int_{u \leq 0} 0 \cdot \varphi dx = \int_{\Omega} (\partial^{e_i}u^+) \varphi dx$$

onde

$$\partial^{e_i} u^+(x) = \begin{cases} \partial^{e_i} u, & \text{caso } u > 0 \\ 0, & \text{quando } u \leq 0. \end{cases}$$

Para o caso u^- escreva $u^- = -(-u)^+$ e para o caso $|u|$ devemos lembrar que $\partial^{e_i} |u| = \partial^{e_i} u^+ - \partial^{e_i} u^-$. ■

LEMA 1.3.11. *Seja $u \in W^1(\Omega)$. Então, para $i = 1, \dots, n$ temos $\partial^{e_i} u = 0$ q.t.p em A , onde $A = \{x \in \Omega; u \text{ é constante}\}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $c \in \mathbb{R}$ fixo. Considere $A = \{x \in \Omega; u(x) = c\}$. Defina, para todo x de Ω , $\hat{u}(x) = u(x) - c$. Então, para todo x de A temos $\hat{u} \equiv 0$. Além disso, $\hat{u} \in W^1(\Omega)$ e $\partial^{e_i} \hat{u} = \partial^{e_i} u - \partial^{e_i} c = \partial^{e_i} u$. E temos $\partial^{e_i} \hat{u} = \partial^{e_i} \hat{u}^+ + \partial^{e_i} \hat{u}^- = 0$ em A . Portanto $\partial^{e_i} u = 0$ q.t.p em A . ■

DEFINIÇÃO 1.3.12. *Dizemos que uma função é suave por partes se esta é contínua e possui sua derivada primeira contínua por partes.*

TEOREMA 1.3.13. *Seja f suave por partes em \mathbb{R} e $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Se tivermos que $u \in W^1(\Omega)$, então $f \circ u \in W^1(\Omega)$. Além disso, chamando de L o conjunto dos pontos de descontínuidade de f' , temos que*

$$\partial^{e_i} (f \circ u) = \begin{cases} f'(u) \partial^{e_i} u, & \text{se } u \notin L \\ 0, & \text{quando } u \in L. \end{cases}$$

DEMONSTRAÇÃO. Consulte [12]. ■

DEFINIÇÃO 1.3.14. *Para $p \geq 1$ e k inteiro não negativo, definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ por*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^k(\Omega); \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq k\}.$$

PROPOSIÇÃO 1.3.15. *O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ munido da norma*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

é um espaço de Banach.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy de funções de $W^{k,p}(\Omega)$. Fixe α com $|\alpha| \leq k$. Então, dado $\epsilon > 0$ fixo existe $j_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j, l \geq j_o$ temos

$$\|\partial^\alpha u_j - \partial^\alpha u_l\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_j - u_l\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \epsilon.$$

Isto nos diz que $(\partial^\alpha u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy de funções de $L^p(\Omega)$. Mas este é um espaço de Banach, então existe $v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $\partial^\alpha u_j \rightarrow v_\alpha$ em $L^p(\Omega)$. Quando $\alpha = (0, \dots, 0)$ temos que $v_\alpha = u$ e $u_j \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$. Basta mostrar que $u \in W^k(\Omega)$.

Usando integração por partes temos, para $\varphi \in C_o^{|\alpha|}(\Omega)$, que

$$\int_{\Omega} \partial^\alpha u_j \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_j \partial^\alpha \varphi dx$$

e

$$\lim \int_{\Omega} \partial^\alpha u_j \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \lim \int_{\Omega} u_j \partial^\alpha \varphi dx.$$

Portanto

$$\int_{\Omega} v_\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi dx \text{ para toda } \varphi \in C_o^{|\alpha|}(\Omega),$$

e o resultado segue. ■

Quando $k = 0$, tem-se $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ e sabemos que $C_o^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$. Mas não é sempre verdade que $C_o^\infty(\Omega)$ sempre é denso em $W^{k,p}(\Omega)$ para $k \geq 1$. Motivados por este fato, define-se o espaço $W_o^{k,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_o^k(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Em geral, os espaços $W^{k,p}(\Omega)$ e $W_o^{k,p}(\Omega)$ não coincidem para domínios limitados. O caso $p = 2$ é especial pois $W^{k,2}(\Omega)$ e $W_o^{k,2}(\Omega)$ são espaços de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx.$$

Também podem, estes espaços, serem escritos como $H^k(\Omega)$ e $H_o^k(\Omega)$, respectivamente.

OBSERVAÇÃO: Usando o Lema 1.3.5 e o Lema 1.3.7 temos que se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então $\partial^\alpha u_\epsilon \rightarrow \partial^\alpha u$ em $L_{loc}^p(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq k$.

TEOREMA 1.3.16. $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.

DEMONSTRAÇÃO. Consulte [12]. ■

Vejamos agora alguns resultados sobre imersões.

TEOREMA 1.3.17.

$$W_o^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega), & \text{se } p < n \\ C^o(\bar{\Omega}), & \text{caso } p > n. \end{cases}$$

Além disso, existe $c = c(n, p)$ de modo que se $u \in W_o^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leq c \|\nabla u\|_p, \text{ caso } p < n \text{ e } \sup_{\Omega} |u| \leq c |\Omega|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|\nabla u\|_p, \text{ se } p > n.$$

DEMONSTRAÇÃO. Consulte [12]. ■

DEFINIÇÃO 1.3.18. Um espaço de Banach B_1 é dito continuamente imerso em um espaço de Banach B_2 se $B_1 \subset B_2$ e existir uma transformação $T : B_1 \rightarrow B_2$ linear, injetiva e limitada. Denotaremos $B_1 \rightarrow B_2$.

O teorema anterior mostra-nos que se tomarmos

$$I : W_o^{1,p}(\Omega) \rightarrow \begin{cases} L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega), & \text{caso } p < n \\ C^o(\bar{\Omega}), & \text{se } p > n, \end{cases}$$

dada por $Iv = v$ para todo $v \in W_o^{1,p}(\Omega)$ temos

$$W_o^{1,p}(\Omega) \rightarrow \begin{cases} L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega), & \text{se } p < n \\ C^o(\bar{\Omega}), & \text{caso } p > n. \end{cases}$$

Mais geralmente vale

$$W_o^{k,p}(\Omega) \rightarrow \begin{cases} L^{\frac{np}{n-kp}}(\Omega), & \text{se } kp < n \\ C^m(\bar{\Omega}), & \text{caso } 0 \leq m < k - \frac{n}{p}. \end{cases} \quad (1.4)$$

De um modo geral $W_o^{k,p}(\Omega)$ não pode ser trocado por $W^{k,p}(\Omega)$ na expressão (1.4), poderemos fazer esta troca caso Ω satisfaça a condição uniforme de cone interior, isto é, caso exista um cone fixo Q_Ω tal que cada $x \in \partial\Omega$ é o vértice de um cone $Q_\Omega(x) \subset \bar{\Omega}$ congruente a Q_Ω . Neste caso teremos

$$W^{k,p}(\Omega) \rightarrow \begin{cases} L^{\frac{np}{n-kp}}(\Omega), & \text{se } kp < n \\ C_B^m(\Omega), & \text{caso } 0 \leq m < k - \frac{n}{p}, \end{cases}$$

onde

$$C_B^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega); \partial^\alpha u \in L^\infty(\Omega) \text{ para } |\alpha| \leq m\}.$$

DEFINIÇÃO 1.3.19. *Sejam B_1 e B_2 espaços de Banach. Diremos que B_1 está compactamente imerso em B_2 se a imersão I for uma aplicação compacta.*

TEOREMA 1.3.20. *Seja Ω um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1 pelo menos. Sejam $1 \leq p < \infty$ e j, k satisfazendo $0 \leq j < k$. Se $q \geq 1$ for um número qualquer satisfazendo*

$$\frac{1}{q} > \frac{j}{n} + \frac{1}{p} - \frac{k}{n},$$

então podemos concluir que

$$W^{k,p}(\Omega) \xrightarrow{c} W^{j,q}(\Omega),$$

onde \xrightarrow{c} significa imersão compacta.

DEMONSTRAÇÃO. Consulte [10]. ■

TEOREMA 1.3.21. *Seja Ω um domínio limitado com fronteira de classe C^m e $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, $1 \leq p, r \leq \infty$. Para qualquer inteiro j , $0 \leq j < k$, e qualquer número λ no intervalo $\frac{j}{k} \leq \lambda \leq 1$, seja q tal que*

$$\frac{1}{q} = \frac{j}{n} + \lambda \left(\frac{1}{p} - \frac{k}{n} \right) + (1 - \lambda) \frac{1}{r}.$$

Se $k - j - \frac{n}{p}$ não for um inteiro não negativo, então

$$\|\nabla u\|_{W^{0,q}(\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^\lambda \|u\|_{W^{0,r}(\Omega)}^{1-\lambda}. \quad (1.5)$$

Além disso, se $k - j - \frac{n}{p}$ for um inteiro não negativo, então (1.5) é válida para $\lambda = \frac{j}{k}$, onde $c = c(\Omega, r, p, k, j, \lambda)$.

DEMONSTRAÇÃO. Consulte [10]. ■

1.4 Teoremas de ponto fixo

Nesta parte do trabalho iremos expor alguns teoremas que tratam de pontos fixos. Não vamos nos aprofundar, o leitor interessado no assunto pode consultar [12] e [8].

TEOREMA 1.4.1. *Seja G um conjunto compacto e convexo em um espaço de Banach \mathcal{B} . Considere $T : G \rightarrow G$ uma aplicação contínua. Então T possui um ponto fixo, isto é, $Tx = x$ para algum $x \in G$.*

DEMONSTRAÇÃO. Consulte [12]. ■

Temos o

COROLÁRIO 1.4.2. *Seja G um conjunto convexo fechado em um espaço de Banach \mathcal{B} . Considere $T : G \rightarrow G$ contínua e $T(G)$ precompacta. Então T possui ponto fixo.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $\overline{T(G)} \subset G$. Como G é fechado e convexo tomaremos a envoltória convexa de $\overline{T(G)}$. Esta é compacta e denotaremos por K . Considere a restrição $T : K \rightarrow K$. Como K é compacto podemos concluir que T possui ponto fixo. ■

Vejam agora o Teorema de Schauder.

TEOREMA 1.4.3. *Seja \mathcal{B} um espaço de Banach. Seja $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ uma aplicação compacta. Suponha que exista uma constante m tal que*

$$\|x\| < m$$

sempre que $x \in \mathcal{B}$ satisfaça $\sigma Tx = x$ para algum $\sigma \in [0, 1]$. Então T possui um ponto fixo.

DEMONSTRAÇÃO. Defina a aplicação $T^* : \mathcal{B} \rightarrow \overline{B(0, m)}$ por

$$T^*x = \begin{cases} Tx, & \text{se } \|Tx\| < m \\ \frac{mTx}{\|Tx\|}, & \text{caso } \|Tx\| \geq m. \end{cases}$$

É possível provar que a aplicação T está bem definida, é contínua e $T^* \left(\overline{B(0, m)} \right)$ é precompacto. Desta forma, o Corolário 1.4.2 nos garante que T^* possui ao menos um ponto fixo $x_1 \in \overline{B(0, m)}$. Provaremos que x_1 é ponto fixo de T . De fato, suponha que $\|Tx_1\| \geq m$. Logo

$$x_1 = T^*x_1 = \frac{mTx_1}{\|Tx_1\|} = \sigma Tx_1,$$

onde $\sigma = \frac{m}{\|Tx_1\|} \in [0, 1]$. Segue que

$$\|x_1\| = \frac{\|mTx_1\|}{\|Tx_1\|} = m,$$

o que não é verdade pois, por hipótese temos $\|x\| < m$ para toda $x \in \mathcal{B}$. Portanto, devemos ter $\|Tx_1\| < m$ obrigatoriamente. Consequentemente temos, $x_1 = T^*x_1 = Tx_1$, completando a prova. ■

LEMA 1.4.4. *Seja $B(0, m) \subset \mathcal{B}$, onde \mathcal{B} é um espaço de Banach. Considere $T : \overline{B(0, m)} \rightarrow \mathcal{B}$ contínua tal que $T \left(\overline{B(0, m)} \right)$ é precompacto e além disso temos $T(\partial B) \subset B(0, m)$. Então T possui ponto fixo.*

DEMONSTRAÇÃO. Defina $T^* : \overline{B(0, m)} \rightarrow \overline{B(0, m)}$ por

$$T^*x = \begin{cases} Tx, & \text{se } \|Tx\| < m \\ \frac{mTx}{\|Tx\|}, & \text{caso } \|Tx\| \geq m. \end{cases}$$

Como no teorema anterior, temos que T^* é contínua e $T^* \left(\overline{B(0, m)} \right)$ precompacto. Desta forma, existe $\bar{x} \in \overline{B(0, m)}$ de modo que $T^*\bar{x} = \bar{x}$. Usando o fato de que $T(\partial B) \subset B(0, m)$, temos que este \bar{x} é um ponto fixo de T . ■

Por fim, temos o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder.

TEOREMA 1.4.5. *Sejam \mathcal{B} um espaço de Banach e $T : [0, 1] \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ compacta tal que $T(0, x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{B}$. Suponha, ainda, que existe m de modo que para todo $(\sigma, x) \in [0, 1] \times \mathcal{B}$, satisfazendo $x = T(\sigma, x)$, tenhamos que*

$$\|x\| < m.$$

Então $T_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ dada por $T_1(x) = T(1, x)$ possui ao menos um ponto fixo.

DEMONSTRAÇÃO. Consulte [12]. ■

1.5 Tópicos de teoria de pontos críticos

Nos problemas de mínimo tem um papel importante a noção de derivada. Recordemos que, se X e Y são espaços normados, $\mathcal{L}(X, Y)$ representa o espaço das aplicações lineares contínuas de X em Y . Uma aplicação $f : A \rightarrow Y$, $A \subset X$ aberto, diz-se diferenciável, ou derivável-*Gâteaux*, no ponto x_o em A se existe $f'(x_o)$ em $\mathcal{L}(X, Y)$ tal que para todo h em X vale

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_o + th) - f(x_o)}{t} = f'(x_o)h.$$

Se $f'(x_o)$ tiver a propriedade

$$f(x_o + th) - f(x_o) = f'(x_o)h + o(\|h\|_X),$$

dizemos que f é derivável-*Fréchet* em x_o . Considere A um aberto de X . Dizemos que $f : A \rightarrow Y$ é de classe C^1 em A , e escreve-se $f \in C^1(A, Y)$, se f é diferenciável em cada ponto $a \in A$ e a aplicação $a \rightarrow f'(a)$ de A em $\mathcal{L}(X, Y)$ é contínua.

DEFINIÇÃO 1.5.1. *Sejam X um espaço normado, $A \subset X$ um aberto. Considere $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável-*Gâteaux*. Dizemos que $u \in A$ é um ponto crítico de F se $F'(u) = 0$.*

DEFINIÇÃO 1.5.2. *Considere X um espaço de Banach. Se f está em $C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$, c é dito um valor crítico de f , se existe u em X tal que $f'(u) = 0$ e $f(u) = c$.*

Vejam agora o que significa a condição *Palais – Smale*.

DEFINIÇÃO 1.5.3. *Diremos que f satisfaz a condição *Palais – Smale*, abreviadamente (*PS*), se para toda $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ satisfazendo $f(u_n)$ limitada e $f'(u_n) \rightarrow 0$ em X , existir uma subsequência de (u_n) que seja convergente.*

Vamos agora estabelecer quando uma função satisfaz a condição (*PS*) em um determinado nível.

DEFINIÇÃO 1.5.4. Dizemos que f satisfaz a condição $(PS)_c$, nível c , c real, se toda seqüência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ satisfazendo $f(u_n) \rightarrow c$ e $f'(u_n) \rightarrow 0$, possui uma subseqüência convergente.

Enunciaremos agora o Teorema do Passo da Montanha, este terá um valor inestimável no capítulo três, quando estaremos interessados em mostrar a existência de solução de um determinado problema quasilinear. Vejamos o

TEOREMA 1.5.5 (do Passo da Montanha). Considere $f \in C^1(X, \mathbb{R})$. Assuma que f satisfaz a condição (PS) . Suponha também que

- 1) $f(0) = 0$;
- 2) Existem constantes r e a positivas tais que $f(u) \geq a$ se $\|u\| = r$ e
- 3) Existe um elemento $v \in X$ tal que

$$\|v\| > r, \quad f(v) \leq 0.$$

Defina

$$H = \{h \in C([0, 1], X); h(0) = 0 \text{ e } h(1) = v\}.$$

Então

$$c = \inf_{h \in H} \max_{t \in [0, 1]} f(h(t))$$

é um valor crítico de f .

DEMONSTRAÇÃO. Consulte [8]. ■

Capítulo 2

Equações elípticas de segunda ordem

Antes de atacarmos os problemas quasilineares faremos um breve estudo sobre a EDP elíptica clássica. Começaremos fazendo uma pequena exposição sobre as fórmulas de Green.

2.1 Fórmulas de Green

Começaremos esta seção enunciando a propriedade do valor médio.

TEOREMA 2.1.1. *Seja $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfazendo $\Delta u = 0$ ($\geq 0, 0 \leq$) em um domínio Ω . Então, para qualquer bola $B_R(y) \subset \Omega$, temos*

$$u(y) = (\leq, \geq) \frac{1}{w_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R} u ds \text{ e } u(y) = (\leq, \geq) \frac{n}{w_n R^n} \int_{B_R} u dx.$$

DEMONSTRAÇÃO. Consulte [12]. ■

Seja Ω um domínio e u e v funções de $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. O teorema da divergência diz que se $w \in C^1(\bar{\Omega})$, então

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(w) dx = \int_{\partial\Omega} w \eta ds,$$

onde $\eta = \eta(x)$ é o vetor normal exterior para cada $x \in \partial\Omega$. Então, para $w = v \nabla u$, temos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) dx = \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \eta \rangle ds,$$

onde $\operatorname{div}(v\nabla u) = v\Delta u + \langle \nabla v, \nabla u \rangle$. Com isso temos

$$\int_{\Omega} v\Delta u dx + \int_{\Omega} \langle \nabla v, \nabla u \rangle dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds. \quad (2.1)$$

Podemos de maneira análoga obter

$$\int_{\Omega} u\Delta v dx + \int_{\Omega} \langle \nabla v, \nabla u \rangle dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} ds. \quad (2.2)$$

Subtraindo, membro a membro (2.2) de (2.1) temos

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) ds. \quad (2.3)$$

A expressão (2.1) é conhecida como a primeira identidade de Green. Já (2.3) é conhecida como a segunda identidade de Green. Da teoria básica de EDP (ver [14]) temos que a solução fundamental da equação de Laplace é dada por

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(\|x-y\|) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)w_n} \|x-y\|^{2-n}, & \text{no caso } n > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \log(\|x-y\|), & \text{quando } n = 2, \end{cases}$$

onde w_n é a área da esfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$.

Temos que $\Delta\Gamma = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Usando a segunda identidade de Green para $\Omega \setminus B_\rho$, com $B_\rho = B(y, \rho)$ para ρ suficientemente pequeno, temos

$$\int_{\Omega \setminus B_\rho} (\Gamma\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right) ds + \int_{\partial B_\rho} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right) ds. \quad (2.4)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_\rho} \Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} ds \right| &= \Gamma(\rho) \left| \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \eta} ds \right| = \Gamma(\rho) \left| \int_{\partial B_\rho} \langle \nabla u, \eta \rangle ds \right| \\ &\leq \Gamma(\rho) \int_{\partial B_\rho} \|\nabla u\| \|\eta\| ds \\ &\leq \Gamma(\rho) \sup_{B_\rho} \|\nabla u\| \int_{\partial B_\rho} ds. \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variáveis temos,

$$\left| \int_{\partial B_\rho} \Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} ds \right| \leq \Gamma(\rho) \sup_{B_\rho} \|\nabla u\| w_n \rho^{n-1} \rightarrow 0$$

quando $\rho \rightarrow 0^+$. E temos também que

$$\int_{\partial B_\rho} u \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} ds = -\frac{1}{w_n} \rho^{n-1} \int_{\partial B_\rho} u ds.$$

Segue que

$$\int_{\partial B_\rho} u \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} ds = -\frac{1}{w_n} \rho^{n-1} \int_{\partial B_\rho} u ds \rightarrow -\frac{1}{w_n} w_n u(y) = -u(y)$$

quando $\rho \rightarrow 0^+$.

Portanto, quando $\rho \rightarrow 0^+$ a representação de Green de (2.4) é dada por

$$u(y) = \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} - \Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) ds + \int_{\Omega} (\Gamma \Delta u) dx, \quad (2.5)$$

com $y \in \Omega$.

DEFINIÇÃO 2.1.2. *Seja f uma função integrável e limitada. A fórmula*

$$\int_{\Omega} \Gamma(x-y) f(x) dx,$$

é chamada de potencial newtoniano de densidade f .

2.2 Princípio do Máximo Forte

Consideremos a Equação Diferencial Parcial linear

$$P(u) \equiv A(u) + a(u) = f, \quad (2.6)$$

onde

$$A(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ik}(x) u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i}$$

em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $\partial \Omega$ suficientemente suave. Vamos assumir $a_{ik}(x) = a_{ki}(x)$, $x \in \Omega$ e que a_{ki} , a_i , a e f são todas contínuas no conjunto $\bar{\Omega}$, $i, k = 1, 2, \dots, n$. Assumiremos que P é um operador elíptico, o que quer dizer que $\forall x \in \Omega$ e $\xi \neq 0$ qualquer

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \neq 0.$$

Para nossos propósitos assumiremos

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ik}(x) \xi_i \xi_k > 0, \quad \forall (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (2.7)$$

DEFINIÇÃO 2.2.1. *Uma solução de (2.6) em Ω é uma função $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfazendo (2.6). Esta também é conhecida como solução clássica.*

LEMA 2.2.2. *Seja $Au \geq 0$ (resp $Au \leq 0$) em Ω . Suponha que existe $c \in \Omega$ de maneira que $u(x) \leq u(c)$ (resp $u(x) \geq u(c)$) para todo x em Ω . Então $u \equiv u(c)$ em $\overline{\Omega}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Consulte [15]. ■

Usaremos o lema anterior para provar um resultado que é conhecido como princípio do máximo forte. Este resultado terá um papel importante para o problema de unicidade de solução. Vejamos o que ele diz.

TEOREMA 2.2.3. *Suponha que $a \leq 0$ em $\overline{\Omega}$. Se $f \geq 0$ ($f \leq 0$) em $\overline{\Omega}$, então uma solução não constante de $P(u) \equiv A(u) + a(u) = f$ atinge seu máximo positivo (respectivamente mínimo negativo), se existir, na fronteira de Ω e não em Ω .*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos $f \geq 0$. Consideremos u uma solução não constante de (2.6) e admitamos que u possui um máximo positivo $x_o \in \Omega$ e não sobre $\partial\Omega$. Digamos que $u(x_o) = m > 0$ e seja $M = \{x \in \Omega; u(x) = m\}$. Temos que $M \neq \emptyset$, já que $x_o \in M$. Além disso, M é um conjunto fechado. Desta forma, temos que $u(x) \leq u(x_o)$ em uma bola aberta S centrada em x_o e pelo princípio da conservação do sinal temos $u(x) > 0$ em S . Como $f \geq 0$, teremos $Au = -au + f \geq 0$ em S . Então, pelo Lema 2.2.2 temos $u(x) = m$ para todo $x \in S$. Portanto $S \subset M$, garantindo que u é aberto. Levando em conta que Ω é conexo e $M \neq \emptyset$ temos $M = \Omega$ e portanto $u \equiv m$ em Ω . Mas isso contraria o fato de u ser uma solução não constante.

Para o caso $f \leq 0$ em Ω o procedimento é análogo. ■

Antes de prosseguirmos temos que o teorema é falso para $a > 0$. Para constatar este fato consideremos a equação $u_{xx} + u_{yy} + 2u = 0$ no retângulo

$$\Omega = \{(x, y); 0 \leq x, y \leq \pi\}.$$

A função $u(x, y) = \text{sen}(x)\text{sen}(y)$ satisfaz esta equação e seu ponto de máximo é $(\pi/2, \pi/2)$.

COROLÁRIO 2.2.4. *Sejam u_1 e u_2 soluções do problema*

$$\begin{cases} Pu_i = f & \text{em } \Omega \\ u_i = \phi_i & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

para $i = 1, 2$. Então, se $a \leq 0$ em $\bar{\Omega}$ temos

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_1(x) - u_2(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|.$$

DEMONSTRAÇÃO. Defina $u = u_1 - u_2$. Então u é solução do problema

$$\begin{cases} Pu = f & \text{em } \Omega \\ u = \phi_1 - \phi_2 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como u é contínua em $\bar{\Omega}$ temos que existem x_1 e x_2 de maneira que valem $u(x_1) = \max_{\bar{\Omega}} u(x)$ e $u(x_2) = \min_{\bar{\Omega}} u(x)$. Considere $m = \max\{|u(x_1)|, |u(x_2)|\}$. Portanto temos que $-m \leq u(x) \leq m$ para todo $x \in \bar{\Omega}$. Agora basta utilizar o princípio do máximo forte para obter o resultado. ■

COROLÁRIO 2.2.5. *O problema*

$$\begin{cases} P(u) = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

tem no máximo uma solução, sendo $a \leq 0$ em $\bar{\Omega}$.

DEMONSTRAÇÃO. Admitamos que u_1 e u_2 sejam soluções deste problema. Então $u = u_1 - u_2$ é solução do problema

$$\begin{cases} P(u) = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto $u \equiv 0$ em $\bar{\Omega}$. Caso contrário teríamos $u(\bar{x}) = m \neq 0$ um extremante de u em $\bar{\Omega}$. No entanto, se $u(\bar{x}) > 0$, pelo princípio do máximo forte $\bar{x} \in \partial\Omega$. Mas isso é falso. Se $u(\bar{x}) < 0$ o princípio do mínimo forte nos assegura que $\bar{x} \in \partial\Omega$, o que também é falso. ■

O princípio do máximo pode nos informar o comportamento da função u próximo à fronteira. Se η for o vetor unitário normal externo no ponto $x \in \partial\Omega$, então ν será dito um vetor externo a Ω em um ponto $p \in \partial\Omega$ se $\langle \eta, \nu \rangle > 0$. É claro, supondo $\partial\Omega$ suave, digamos de classe C^1 .

TEOREMA 2.2.6. *Suponha $a \leq 0$ em $\bar{\Omega}$ e considere u uma solução de (2.6). Se $f \geq 0$ (resp. $f \leq 0$) em $\bar{\Omega}$ e u atinge seu máximo positivo (resp. mínimo negativo) em $p \in \partial\Omega$, então toda derivada direcional exterior de u em p é positiva (respectivamente negativa) a menos que u seja constante em Ω .*

DEMONSTRAÇÃO. Consulte [15]. ■

2.3 Estimativa a priori

Uma estimativa a priori de uma equação diferencial é simplesmente uma desigualdade que é válida para todas as possíveis soluções, caso existam, cujos dados e coeficientes obedecem a certas restrições.

Considere o problema

$$\begin{cases} P(u) = f & \text{em } \Omega \\ u = \phi & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.8)$$

onde $a \leq 0$ em Ω e Au é definida como antes. Assumiremos $(a_{ik}(x))$ uma matriz simétrica e os coeficientes de P , bem como f , funções contínuas em $\bar{\Omega}$ e ϕ é contínua em $\partial\Omega$. Com estas informações e (2.7) tiramos de graça que existe $m > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \geq m \|\xi\|^2$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\forall x \in \bar{\Omega}$. Por fim, consideraremos K um limitante para $|a_{ki}|$, $|a_i|$ e $|a|$ em $\bar{\Omega}$ com $k, i = 1, 2, \dots, n$.

Segue a primeira estimativa a priori.

TEOREMA 2.3.1. *Seja $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ uma solução de (2.6). Então existe uma constante $M = M(m, \Omega, K)$ tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + M \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Se mudarmos as coordenadas por meio de uma translação o problema nestas novas coordenadas possui a mesma forma. Sem perda de generalidade assumiremos $x_1 \geq 0$ em $\bar{\Omega}$ e defina em $\bar{\Omega}$ a função

$$h(x) = \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + (e^{\alpha\xi} - e^{\alpha x_1}) \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})},$$

onde $\xi > \max\{x_1; x \in \bar{\Omega}\}$ e $\alpha > 0$ a ser escolhido posteriormente. Note que para $x \in \partial\Omega$ temos que

$$\alpha\xi > \alpha x_1 \implies e^{\alpha\xi} - e^{\alpha x_1} > 0,$$

e sabemos que $\|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \geq 0$. Com isso, segue que $h(x) \geq \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$. Se tivermos $\tilde{\xi} = (1, 0, \dots, 0)$, então

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ik}(x) \tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_k \geq m \|\tilde{\xi}\|^2 = m \implies a_{11}(x) \geq m.$$

Portanto

$$\begin{aligned} -Ph &= -\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) h_{x_i x_k}(x) - \sum_{i=1}^n a_i(x) h_{x_i}(x) - ah(x) \\ &= -a \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + [-ae^{\alpha\xi} + e^{\alpha x_1} (a_{11}\alpha^2 + a_1\alpha + a)] \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \\ &\geq [-ae^{\alpha\xi} + e^{\alpha x_1} (a_{11}\alpha^2 + a_1\alpha + a)] \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \\ &\geq [m\alpha^2 e^{\alpha x_1} - a(e^{\alpha\xi} - e^{\alpha x_1}) + a_1\alpha e^{\alpha x_1}] \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}. \end{aligned}$$

Como a e a_1 são contínuas em $\bar{\Omega}$ podemos escolher $\alpha > 0$ suficientemente grande de maneira que

$$e^{\alpha\xi} > 2\max_{x \in \bar{\Omega}} e^{\alpha x_1} \quad \text{e} \quad m\alpha^2 - K(\alpha + 1) \geq 1.$$

Desse modo temos

$$-Ph \geq [m\alpha^2 - a + a_1\alpha] e^{\alpha x_1} \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \geq e^{\alpha x_1} \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \geq \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \geq 0.$$

Defina agora $v = u - h$. Para $x \in \partial\Omega$ temos

$$h(x) \geq \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \geq |\phi(x)| \geq \phi(x).$$

Logo $v(x) = \phi(x) - h(x) \leq 0$ para todo $x \in \partial\Omega$ e $Pv = Pu - Ph$. Mas, temos que $-Ph \geq \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \geq 0$. Isso implica $Pv \geq f + \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \geq 0$ em Ω . Temos

com isso que $v(x) \leq 0$ para todo $x \in \bar{\Omega}$, pois se para algum $x_o \in \Omega$ tivéssemos $v(x_o) > 0$ então, pelo princípio do máximo, o máximo seria atingido sobre $\partial\Omega$, mas $v \leq 0$ sobre $\partial\Omega$. Com isso, podemos escrever $u \leq h$ em $\bar{\Omega}$.

Por outro lado, se definirmos $v = u + h$, sobre $\partial\Omega$ teremos que $v = \phi + h$. Como $\forall x \in \partial\Omega$,

$$|\phi(x)| \leq \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \implies \phi(x) \geq -\|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

e $h(x) \geq \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ implica

$$v(x) = \phi(x) + h(x) \geq -\|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = 0.$$

Além disso, teremos $\forall x \in \bar{\Omega}$,

$$Pv = Pu + Ph \leq f - \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq 0,$$

pois $f \leq \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}$. Com isso $v(x) \geq 0$ para todo $x \in \bar{\Omega}$ e podemos concluir que $u(x) \geq -h(x)$ em $\bar{\Omega}$. Portanto, $\forall x \in \bar{\Omega}$,

$$|u(x)| \leq h(x) = \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + (e^{\alpha\xi} - e^{\alpha x_1}) \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})},$$

mostrando que

$$\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + M \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}, \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

onde $M = \max_{\bar{\Omega}} (e^{\alpha\xi} - e^{\alpha x_1})$. Isto completa a prova. ■

Devemos ressaltar que mesmo que não assumamos $a \leq 0$ em $\bar{\Omega}$, podemos ainda obter uma estimativa da forma

$$\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq C \left(\|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \right), \quad (2.9)$$

onde $C = C(m, K, \Omega)$ desde que Ω seja suficientemente "estrito" em alguma direção (na direção de x_1 por exemplo). Mais precisamente, (2.9) irá valer se $(e^{\alpha\xi} - 1) \|a\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} < 1$ com ξ e α como na prova anterior. Mostremos esta estimativa. Seja $b = \min\{a, 0\}$. Escrevendo

$$Au + bu = Au + au + (b - a)u = f + (b - a)u = g,$$

podemos então aplicar a estimativa obtida no teorema anterior e obter

$$\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + M \|g\|_{L^\infty(\bar{\Omega})},$$

onde $M \leq (e^{\alpha\xi} - 1)$. Desta forma

$$\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + (e^{\alpha\xi} - 1) \|f + (b - a)u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}.$$

Segue que

$$\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + (e^{\alpha\xi} - 1) \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + (e^{\alpha\xi} - 1) \|(b - a)\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}.$$

Com isso temos

$$\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + (e^{\alpha\xi} - 1) \left(\|a\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \right).$$

Portanto

$$\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \left(1 - (e^{\alpha\xi} - 1) \|a\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \right) \leq \|\phi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + (e^{\alpha\xi} - 1) \|f\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}.$$

Segue daí a estimativa.

2.4 Existência e unicidade de solução

Trataremos agora de mostrar a existência de solução para o problema clássico. Mas primeiro definiremos o que são funções Hölder contínuas bem como o espaço de Hölder.

DEFINIÇÃO 2.4.1. *Uma função f , definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é dita Hölder contínua de ordem $\alpha > 0$ se satisfizer*

$$\sup_{\substack{\Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^\alpha} < \infty.$$

DEFINIÇÃO 2.4.2. *Para $m \in \mathbb{Z}_+$ e $\alpha \in (0, 1]$, o conjunto*

$$C^{m,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^m(\bar{\Omega}); \partial^\beta u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ para todo } |\beta| = m\},$$

é conhecido como espaço de Hölder. Neste caso $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ é um subespaço de $C(\bar{\Omega})$ que consiste de todas as funções que são Hölder contínuas com respeito ao expoente α .

OBSERVAÇÃO: O espaço $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach com respeito à norma

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sup \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\alpha}; x, y \in \Omega, x \neq y \right\}.$$

E da mesma forma, o espaço $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach com respeito à norma

$$\|u\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} + \sum_{|\beta|=m} \sup \left\{ \frac{|\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y)|}{\|x - y\|^\alpha}; x, y \in \Omega, x \neq y \right\}.$$

Estamos interessados em mostrar que o problema

$$\begin{cases} P(u) = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.10)$$

possui solução. Uma ferramenta importante que nos ajudará nesse processo é a estimativa de Schauder.

Considerando A uniformemente elíptico em Ω . A estimativa de Schauder nos diz que se u for solução de $C^{2,\alpha}$ para o problema (2.10), então

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq c \|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Aqui $c = c(K, m, \Omega)$, onde m é a constante de elipticidade e K um limitante para os coeficientes de P . Não provaremos esta estimativa aqui, para maiores detalhes consulte [12].

TEOREMA 2.4.3. *Para cada $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, o problema*

$$\begin{cases} P(u) = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.11)$$

tem uma única solução.

DEMONSTRAÇÃO. A unicidade segue do Corolário 2.2.5. Faremos a prova da existência da solução. Vamos fixar $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e considerar a família de problemas

$$\begin{cases} P_t(u) \equiv tP(u) + (1-t)\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.12)$$

com $t \in [0, 1]$. Se tivermos $t = 0$ então (2.12) se reduz ao problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este problema tem solução, para uma prova consulte [12]. Consideremos agora o conjunto

$$T = \{t \in [0, 1]; f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \implies \text{existe uma solução } u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ de (2.12)}\}.$$

Obviamente $T \neq \emptyset$, pois $t = 0$ pertence a este conjunto. Vamos provar que $T = [0, 1]$. Para isso provaremos que T é aberto e fechado em $[0, 1]$.

Primeiro mostraremos que T é aberto em $[0, 1]$. Seja $t_o \in T$ arbitrário. Defina $\phi_t : C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ por $\phi_t(u) = v$, com v solução única em $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ de

$$\begin{cases} P_{t_o}(v) \equiv (t - t_o)[\Delta u - P(u)] + f & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.13)$$

Vamos admitir, por um momento, que $w \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ seja ponto fixo de ϕ_t . Então $w = 0$ sobre $\partial\Omega$ e em Ω temos $P_{t_o}(w) \equiv (t - t_o)[\Delta w - P(w)] + f$. Desta forma, para $t = t_o$, temos

$$\begin{cases} P_{t_o}(w) = f & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto, temos que os pontos fixos de ϕ_t são soluções de (2.12). No entanto, ficou pendente a justificativa de que de fato ϕ_t possui um ponto fixo. Para justificar este fato mostraremos que ϕ_t é uma contração para t suficientemente próximo de t_o . Sejam u_1 e u_2 funções de $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Considere $v_1 = \phi_t(u_1)$ e $v_2 = \phi_t(u_2)$. Então

$$\begin{cases} P_{t_o}(v_1 - v_2) \equiv g & \text{em } \Omega \\ v_1 - v_2 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $g = (t - t_o)[\Delta(u_1 - u_2) - P(u_1 - u_2)]$. Assim, pela estimativa de Schauder temos que

$$\begin{aligned} \|\phi_t(u_1) - \phi_t(u_2)\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} &= \|v_1 - v_2\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \\ &\leq c|t - t_o| \|\Delta(u_1 - u_2) - P(u_1 - u_2)\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \\ &\leq cc_1|t - t_o| \|u_1 - u_2\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}, \end{aligned}$$

onde c_1 independe de u_1 , u_2 , c e t . Se $\epsilon = \frac{1}{2cc_1}$, temos para $|t - t_0| < \epsilon$ que

$$\|\phi_t(u_1) - \phi_t(u_2)\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} < \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})},$$

garantindo que de fato ϕ_t é uma contração. O teorema de ponto fixo de Banach nos permite concluir que ϕ_t possui ponto fixo. E assim segue que T é aberto em $[0, 1]$.

Mostraremos agora que T é fechado em $[0, 1]$. Consideremos $(t_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset T$ uma seqüência qualquer de modo que $t_j \rightarrow \bar{t}$. Devemos mostrar que $\bar{t} \in T$. Como $(t_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset T$, existe u_j no espaço $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ satisfazendo

$$\begin{cases} P_{t_j}(u_j) = f & \text{em } \Omega \\ u_j = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando a estimativa de Schauder temos $\|u_j\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq c \|f\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$. Desta forma (u_j) , $(\partial_i u_j)$ e $(\partial_i \partial_k u_j)$ são todas equicontínuas. O teorema de Arzela-Ascoli implica que existe uma subsqüência (u_{j_k}) que converge, junto com a primeira e segunda derivadas, para uma função $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Portanto, teremos que

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{t_k}(u_{j_k}) = P_{\bar{t}}(u)$$

e $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Segue que $\bar{t} \in T$. Isto conclui a prova do teorema. ■

Capítulo 3

Existência de solução para equação elíptica quasilinear

3.1 Introdução

Seja Ω um domínio limitado em \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, com $\partial\Omega$ suave. Vamos estudar a solubilidade do problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x, u, \nabla u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Para isso utilizaremos o método de sub-supersolução. Assumiremos então que $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory, ou seja, $\forall (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $x \rightarrow f(x, s, \xi)$ é mensurável e *q.t.p* em Ω , $(s, \xi) \rightarrow f(x, s, \xi)$ é contínua.

Consideraremos o operador na forma do divergente

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

onde $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e $\operatorname{div}(b) \leq 0$, com $b = (b_1, \dots, b_n)$.

Além disso, assumiremos também que existe θ real positivo de modo que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.2)$$

Por fim consideraremos

$$|f(x, s, \xi)| \leq g(x, s) + k |\xi|^\alpha, \quad \forall (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ e quase todo } x \in \Omega, \quad (3.3)$$

onde k, α são constantes reais positivas. Assuma que g também é uma função Carathéodory e satisfaz:

$$H_1) \forall r > 0 \text{ temos que } \sup_{|s| \leq r} |g(\cdot, s)| \in L^p(\Omega).$$

$H_2)$ a) Se $n = 2$, então

$$1 < p < 2 \text{ e } \frac{2}{p+1} \leq \alpha < 2.$$

b) Quando $n \geq 3$, temos

$$\frac{2n}{n+2} \leq p < \frac{n}{2} \text{ e } \frac{2}{p+1} \leq \alpha < \frac{n}{n-p}$$

ou

$$\frac{n}{2} \leq p < n \text{ e } \frac{2}{p+1} \leq \alpha < 2.$$

DEFINIÇÃO 3.1.1. *As funções $\{u_0, u^0\}$, que estão em $W^{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, são sub-supersolução para o problema (3.1) em $W^{2,p}(\Omega)$ se:*

- 1) $u_0 \leq 0 \leq u^0$ sobre $\partial\Omega$.
- 2) $u_0 \leq u^0$ em Ω .
- 3) $\mathcal{L}u_0 - f(x, u_0, \nabla u_0) \leq 0 \leq \mathcal{L}u^0 - f(x, u^0, \nabla u^0)$ q.t.p em Ω .

3.2 Solubilidade

Mostraremos que se o problema (3.1) possuir sub-supersolução então este problema possuirá ao menos uma solução. Isso será explorado no próximo resultado.

TEOREMA 3.2.1 (Delgado e Suárez) *Assuma $1 < p < 2$ se $n = 2$ e considere $\frac{2n}{n+2} \leq p < n$ se tivermos $n \geq 3$. Também assuma $H_1)$ e $H_2)$. Se existir sub-supersolução para (3.1) em $W^{2,p}(\Omega)$, então (3.1) possui ao menos uma solução em $W^{2,p}(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $p^* = \frac{np}{n-p} \geq 2$. Isso é obvio para $n = 2$. Para $n \geq 3$ temos que $\frac{np}{n-p} \geq 2$ se, e somente se $p \geq \frac{2n}{n+2}$. Isto é verdade segundo o item b) da hipótese $H_2)$.

Além disso o intervalo $[\alpha p, p^*) \neq \emptyset$ pois

$$\alpha p < \frac{np}{n-p} \iff \alpha < \frac{n}{n-p},$$

que é verdade pelo item b) de H_2) para $n \geq 3$. No caso $n = 2$ temos

$$\alpha < \frac{2}{2-p} \iff \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2-p}$$

que é de fato verdade pois pelo item a) de H_2) temos $\frac{\alpha}{2} < 1 < \frac{1}{2-p}$. Diretamente, para qualquer $q \in [\alpha p, p^*)$ temos

$$q < \frac{np}{n-p} \iff \frac{1}{q} > \frac{n-p}{np} = \frac{1}{n} + \frac{1}{p} - \frac{2}{n},$$

e o Teorema 1.3.20 nos garante que $W^{2,p}(\Omega) \xrightarrow{c} W^{1,q}(\Omega)$. Fixemos $q_0 \in [\alpha p, p^*)$ e consideremos o operador

$$T : W^{1,q_0}(\Omega) \rightarrow W^{1,q_0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

associado a $\{u_0, u^0\}$ sub-supersolução de (3.1) dado por

$$Tu(x) = \begin{cases} u^0(x), & \text{caso } u^0(x) \leq u(x) \\ u(x), & \text{se } u_0(x) \leq u(x) \leq u^0(x) \\ u_0(x), & \text{quando } u(x) \leq u_0(x). \end{cases} \quad (3.4)$$

Obviamente devemos verificar que este operador está bem definido. Primeiramente observe que

$$|Tu(x)| \leq \max\{\|u_0\|_\infty, \|u^0\|_\infty\} = m$$

q.t.p em Ω já que $u_0, u^0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Com isto concluímos que

$$Tu \in L^\infty(\Omega), \quad \forall u \in W^{1,q_0}(\Omega).$$

Por outro lado, se $u \in W^{1,q_0}(\Omega)$ e $x \in \Omega$ forem tais que são finitos $u(x)$, $u^0(x)$ e $u_0(x)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} Tu(x) &= \frac{u(x) + u^0(x) + 2u_0(x) - |u(x) - u^0(x)|}{4} \\ &\quad + \frac{|u(x) + u^0(x) - 2u_0(x) - |u(x) - u^0(x)||}{4}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

De fato, temos que se $u^0(x) \leq u(x)$, então

$$Tu(x) = \frac{u(x) + u^0(x) + 2u_0(x) - u(x) + u^0(x)}{4} \\ + \frac{|u(x) + u^0(x) - 2u_0(x) - u(x) + u^0(x)|}{4}$$

e desta forma temos que

$$Tu(x) = \frac{1}{2}(u^0(x) + u_0(x)) + \frac{1}{2}|u^0(x) - u_0(x)|$$

Mas por hipótese temos que $u^0(x) \geq u_0(x)$ implica $u^0(x) - u_0(x) \geq 0$.

Logo

$$Tu(x) = \frac{1}{2}(u^0(x) + u_0(x)) + \frac{1}{2}(u^0(x) - u_0(x)) = u^0(x).$$

Nos outros casos o procedimento é análogo. Portanto (3.5) coincide com (3.4).

Antes de prosseguirmos observe que se u e $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ estão em $L^{q_0}(\Omega)$, então $|u|$ e $\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|$ estão em $L^{q_0}(\Omega)$. Sabemos que $u \in W^{1,q_0}(\Omega)$ e além disso $u^0, u_0 \in W^{1,q_0}(\Omega)$ pois já sabemos que $W^{2,p}(\Omega) \xrightarrow{c} W^{1,q_0}(\Omega)$. Desse modo, usando o Lema 1.3.10 e a observação feita temos que

$$|u - u^0| \in W^{1,q_0}(\Omega)$$

já que

$$(u - u^0) \in W^{1,q_0}(\Omega).$$

Consequentemente

$$\frac{u + u^0 + 2u_0 - |u - u^0|}{4} \in W^{1,q_0}(\Omega).$$

Novamente usando o Lema 1.3.10 temos

$$\frac{|u + u^0 - 2u_0 - |u - u^0||}{4} \in W^{1,q_0}(\Omega).$$

Portanto $Tu \in W^{1,q_0}(\Omega)$ e, consequentemente, $Tu \in W^{1,q_0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Introduza agora as funções $U^0, U_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $U^0 = u^0 + K$ e $U_0 = u_0 - K$ com K escolhido de modo que $U^0 \geq 1$ e $U_0 \leq -1$. A questão é se de fato é possível encontrar tal K . Com efeito, já sabemos que $|u_0| \leq m$ e $|u^0| \leq m$ q.t.p em Ω .

Com isso temos, *q.t.p* em Ω , que $u_0 \leq m$ e $-m \leq u^0$ implicam $u_0 \leq (m+1) - 1$ e $1 - (m+1) \leq u^0$. Desta forma temos que $u_0 - (m+1) \leq -1$ e $u^0 + (m+1) \geq 1$ com $K = m+1$.

Outra coisa a ser observada é que $TU_0 = u_0$ e $TU^0 = u^0$ pois temos que $u^0 \leq u^0 + K = U^0$ e $u_0 \geq u_0 - K = U_0$.

Defina agora $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$a(x) = \text{máx}\{-\mathcal{L}U^0(x), \mathcal{L}U_0(x), 1\}.$$

Segue que $a \geq 1$ e $a \in L^p(\Omega)$. A primeira afirmação é direta e a segunda segue do fato de que $\mathcal{L}U^0 = \mathcal{L}u^0$ e $\mathcal{L}U_0 = \mathcal{L}u_0$ estão em $L^p(\Omega)$ e *q.t.p* em Ω ,

$$|a(x)| \leq |\mathcal{L}u^0(x)| + |\mathcal{L}u_0(x)| + 1.$$

Agora, para $t \in [0, 1]$, vamos considerar o seguinte problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = tf(x, Tu, \nabla(Tu)) - (1-t)a(x)u \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6)$$

Temos que $\{U_0, U^0\}$ é uma dupla sub-supersolução para (3.6). Com efeito, temos que

$$U_0 \leq -1 \leq 0 \leq 1 \leq U^0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

e que $U_0 \leq U^0$ em Ω . Além disso,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}U_0 + (1-t)a(x)U_0 &\leq \mathcal{L}U_0 - (1-t)a(x) \\ &\leq \mathcal{L}U_0 - (1-t)\mathcal{L}U_0 = t\mathcal{L}U_0 = t\mathcal{L}u_0 \\ &\leq tf(x, u_0, \nabla u_0) = tf(x, TU_0, \nabla(TU_0)). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}U^0 + (1-t)a(x)U^0 &\geq \mathcal{L}U^0 + (1-t)a(x) \\ &\geq \mathcal{L}U^0 - (1-t)\mathcal{L}U^0 = t\mathcal{L}U^0 = t\mathcal{L}u^0 \\ &\geq tf(x, u^0, \nabla u^0) = tf(x, TU^0, \nabla(TU^0)). \end{aligned}$$

Tudo isso em *q.t.p* em Ω , claro. Portanto $\{U_0, U^0\}$ é sub-supersolução para (3.6). Além do mais, se $u \in W^{2,p}(\Omega)$ for uma solução do problema (3.6) para

algum $\bar{t} \in [0, 1]$, temos que

$$U_0 \leq u \leq U^0. \quad (3.7)$$

Vamos provar que $u \leq U^0$. Para isso defina $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela expressão $v(x) = u(x) - U^0(x)$. Segue que $v \in W^{2,p}(\Omega)$. Temos de mostrar que $v^+ = 0$.

Sabemos que

$$\mathcal{L}u + (1 - \bar{t}) a(x) u = \bar{t} f(x, Tu, \nabla(Tu))$$

e

$$\mathcal{L}U^0 + (1 - \bar{t}) a(x) U^0 \geq \bar{t} f(x, u^0, \nabla u^0).$$

Subtraindo membro a membro estas duas expressões temos

$$\mathcal{L}v + (1 - \bar{t}) a(x) v \leq \bar{t} [f(x, Tu, \nabla(Tu)) - f(x, u^0, \nabla u^0)].$$

Multiplicando esta igualdade por v^+ temos

$$(\mathcal{L}v) v^+ + (1 - \bar{t}) a(x) v v^+ \leq \bar{t} [f(x, Tu, \nabla(Tu)) - f(x, u^0, \nabla u^0)] v^+. \quad (3.8)$$

Antes de continuar faremos algumas considerações. Como $v \in W^{2,p}(\Omega)$, temos que $\mathcal{L}v \in L^p(\Omega)$ e vamos provar que $v^+ \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. O caso $n = 2$ não apresenta dificuldades. Para $n \geq 3$, escolha $s = \frac{n(p-1)}{n-p} > 1$ e s_o tal que $\frac{1}{s} + \frac{1}{s_o} = 1$ e use a desigualdade de Hölder para mostrar que

$$\int_{\Omega} |v^+(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx \leq \left\| |v^+|^{\frac{p}{p-1}} \right\|_s \|1\|_{s_o} < \infty.$$

Esta última expressão é válida, pois $v^+ \in W^{1,p}(\Omega)$ e como $p < n$ temos que $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$. Logo

$$\int_{\Omega} |v^+(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx < \infty.$$

Também temos que $f(x, Tu, \nabla(Tu)) \in L^p(\Omega)$. Por hipótese

$$|f(x, Tu, \nabla(Tu))| \leq |g(x, Tu)| + k |\nabla(Tu)|^\alpha.$$

De H_1) temos que $g(\cdot, Tu) \in L^p(\Omega)$. Vamos provar que $|\nabla(Tu)|^\alpha \in L^p(\Omega)$.

Sabemos que $|\nabla(Tu)| \in L^{q_0}(\Omega)$. Basta escolher $s = \frac{q_0}{\alpha p} > 1$ e s_0 de maneira que $\frac{1}{s} + \frac{1}{s_0} = 1$ e usando a desigualdade de Hölder temos

$$\int_{\Omega} |\nabla(Tu)|^{\alpha p} \leq \| |\nabla(Tu)|^{\alpha p} \|_s \|1\|_{s_0} < \infty.$$

Portanto $f(\cdot, Tu, \nabla(Tu)) \in L^p(\Omega)$. Para $f(\cdot, u^0, \nabla u^0)$ procedemos de forma similar. Agora podemos integrar a expressão (3.8) sobre Ω e obter

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}v) v^+ + (1 - \bar{t}) \int_{\Omega} a(x) v v^+ \leq \bar{t} \int_{\Omega} [f(x, Tu, \nabla(Tu)) - f(x, u^0, \nabla u^0)] v^+.$$

Considere agora os conjuntos

$$A = \{x \in \Omega; u(x) \leq U^0(x)\}$$

e

$$B = \{x \in \Omega; u(x) \geq U^0(x)\}.$$

Temos que $\Omega = A \cup B$ e $v^+ = 0$ em A . Podemos desta forma escrever

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}v) v^+ = \int_B (\mathcal{L}v) v^+ \leq \int_B (\mathcal{L}v) v^+ + (1 - \bar{t}) \int_B a(x) (v^+)^2 \leq 0, \quad (3.9)$$

uma vez que em B temos $Tu = u^0$. Temos que

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}v) v^+ = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) v^+ + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} v^+.$$

Como $v^+ = 0$ sobre $\partial\Omega$ podemos escrever $\int_{\Omega} (\mathcal{L}v) v^+$ igual a

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v^+}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(b) v v^+ - \sum_{i=1}^n \left[\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} v v^+ + \frac{\partial}{\partial x_i} (v^+) v b_i \right) \right].$$

Defina os conjuntos

$$C = \{x \in \Omega; v(x) \geq 0\}$$

e

$$D = \{x \in \Omega; v(x) < 0\}.$$

Temos que

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} v v^+ + \frac{\partial}{\partial x_i} (v^+) v b_i \right) = \int_{\Omega} - \frac{\partial}{\partial x_i} (v^+) v^+ b_i + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (v^+) v b_i = 0.$$

Podemos, desta forma, concluir que

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}v) v^+ = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v^+}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(b) v v^+$$

e, usando (3.2), podemos escrever

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}v) v^+ \geq \theta \int_{\Omega} |\nabla v^+|^2 \geq 0. \quad (3.10)$$

De (3.9) e (3.10) temos

$$\int_{\Omega} |\nabla v^+|^2 = 0.$$

Portanto $v^+ = 0$ q.t.p em Ω . De maneira muito similar pode-se mostrar que $U_0 \leq u$.

Defina agora $S : [0, 1] \times W^{1,q_0}(\Omega) \rightarrow W^{1,q_0}(\Omega)$ por $S(t, u) = v$, onde v é solução do problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = tf(x, Tu, \nabla(Tu)) - (1-t)a(x)v \text{ em } \Omega \\ v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.11)$$

Temos de verificar se S está bem definida. Já foi provado que $f(\cdot, Tu, \nabla(Tu))$ está em $L^p(\Omega)$. Assim, a teoria de operadores elípticos nos garante que se v for solução de (3.11) então $v \in W^{2,p}(\Omega)$. Além disso, o princípio do máximo de Aleksandrov (Veja [2]) nos diz que v será único. Isto assegura que S está bem definida pois já foi visto também que $W^{2,p}(\Omega) \xrightarrow{c} W^{1,q_0}(\Omega)$. Usando a teoria de operadores elípticos e a expressão (3.11) não apresenta dificuldade provar que S é um operador contínuo e, portanto, compacto. Provaremos que existe $C > 0$ tal que sempre que a função $u \in W^{1,q_0}(\Omega)$ for tal que $S(t, u) = u$ para algum $t \in [0, 1]$ teremos

$$\|u\|_{W^{1,q_0}(\Omega)} \leq C. \quad (3.12)$$

Admitamos por um momento que já tenhamos provado (3.12). Então, levando em conta que $S(0, u) = 0$, o Teorema 1.4.5 nos garante que existe $u \in W^{1,q_0}(\Omega)$ tal que $S(1, u) = u$, isto é, u satisfazendo

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x, Tu, \nabla(Tu)) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se provarmos que $u_0 \leq u \leq u^0$ poderemos concluir que u resolve (3.1). Mostraremos que $u \leq u^0$. Aqui o procedimento é análogo ao que foi feito para provar (3.7). A teoria de operadores elípticos nos garante que $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Então $v = u - u^0$ está neste espaço. Vamos provar que $v^+ = 0$. Temos que

$$\mathcal{L}u = f(x, Tu, \nabla(Tu))$$

e, por hipótese,

$$\mathcal{L}u^0 \geq f(x, u^0, \nabla(u^0)).$$

Segue que

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}v) v^+ \leq \int_{\Omega} [f(x, Tu, \nabla(Tu)) - f(x, u^0, \nabla u^0)] v^+.$$

Defina

$$A_1 = \{x \in \Omega; u(x) \leq u^0(x)\}$$

e

$$B_1 = \{x \in \Omega; u(x) \geq u^0(x)\}.$$

Em A_1 temos $v^+ = 0$ e em B_1 , $Tu = u^0$. Logo $v^+ = 0$. O outro caso é análogo e, portanto, $Tu = u$ e u resolve (3.7). Para concluir o resultado basta provar (3.12). Seja $u \in W^{1,q_0}(\Omega)$ satisfazendo $S(\bar{t}, u) = u$, com $\bar{t} \in [0, 1]$. Devido ao teorema de imersão segue que

$$\|u\|_{W^{1,q_0}(\Omega)} \leq \tilde{C} \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}.$$

A constante \tilde{C} não será necessariamente a mesma nas outras desigualdades. Além disso, da teoria de operadores elípticos temos

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \tilde{C} \|\mathcal{L}u\|_p.$$

Temos então

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} &\leq \tilde{C} \left\| (1 - \bar{t}) a(x) u + \bar{t} f(x, Tu, \nabla(Tu)) \right\|_p \\ &\leq \tilde{C} \left(\left\| (1 - \bar{t}) au \right\|_p + \left\| \bar{t} f(x, Tu, \nabla(Tu)) \right\|_p \right). \end{aligned}$$

Desta forma podemos escrever

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \tilde{C} \left(\|a\|_p \|u\|_\infty + \|g(\cdot, Tu)\|_p + \|\nabla(Tu)\|_p^\alpha \right),$$

Todavia, temos que

$$\left(\int_\Omega |\nabla(Tu)|^{\alpha p} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\|\nabla(Tu)\|_{\alpha p}^\alpha \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Com isso podemos escrever

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \left(\|a\|_p \|u\|_\infty + \|g(\cdot, Tu)\|_p + \left(\|\nabla(Tu)\|_{\alpha p}^\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \right). \quad (3.13)$$

Levando em conta que $|\Omega| < \infty$ e que vale (3.7) temos condições de concluir que $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, para todo $r \geq 1$. O Teorema 1.3.21 nos garante que

$$\|\nabla u\|_{W^{0,\alpha p}(\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}^\lambda \|u\|_{W^{0,r}(\Omega)}^{1-\lambda} \quad (3.14)$$

com $\frac{1}{\alpha p} = \frac{1}{n} + \lambda \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{n} \right) + (1-\lambda) \frac{1}{r}$. No entanto, para estarmos de acordo com o Teorema 1.3.21 precisamos ter $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$. Entretanto, com nossas hipóteses podemos mostrar que é possível escolher $r \geq 1$ satisfazendo

$$r(n-2p) < np. \quad (3.15)$$

De fato, utilizando H_2) vamos analisar cada caso. Na condição $n = 2$ temos

$$1 < p < 2 \implies 2 < 2p \implies 2 - 2p < 0.$$

Além disso $2p > 0$ e isso nos permite encontrar $r \geq 1$ satisfazendo $r(2-2p) < 2p$.

No caso $n \geq 3$ temos duas situações. Quando $\frac{n}{2} \leq p$ temos $n-2p \leq 0$. Mas $pn > 0$. Então poderemos também, neste caso, encontrar $r \geq 1$ satisfazendo (3.15). Se $p < \frac{n}{2}$ temos $n-2p > 0$. O número r a ser escolhido neste caso deve satisfazer

$$1 \leq r < \frac{np}{n-2p}.$$

Com base nesta análise podemos concluir que é possível encontrar $r \geq 1$ satisfazendo (3.15). De posse de tal r temos que

$$\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \iff \frac{1}{2} \leq \frac{nr - \alpha pr - \alpha pn}{\alpha(nr - 2pr - np)} \leq 1 \iff \frac{2r}{p+r} \leq \alpha \leq \frac{n}{n-p}.$$

Podemos desta forma aplicar o teorema sem o risco de entrar em conflito com nossas hipóteses. Além disso, combinando (3.13) e (3.14), podemos escrever

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \tilde{C} \left(1 + \|g(\cdot, Tu)\|_p + \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}^{\lambda\alpha} \|u\|_{W^{0,r}(\Omega)}^{(1-\lambda)\alpha} \right).$$

Agora, teremos que

$$\alpha\lambda < 1 \iff \alpha < \frac{n+2r}{n+r}.$$

Portanto, para qualquer r e α satisfazendo

$$1 \leq r, \quad r(n-2p) < np \quad \text{e} \quad \frac{2r}{p+r} \leq \alpha < \frac{n+2r}{n+r} \quad (3.16)$$

teremos $\alpha\lambda < 1$ e conseqüentemente

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}^{1-\alpha\lambda} \leq \tilde{C}$$

e, portanto, vale (3.12).

Já foi visto que é possível obter $r \geq 1$ satisfazendo $r(n-2p) < np$. A questão é se tal r também vai satisfazer (3.16). Para verificar isto defina as funções l_1 e l_2 por

$$l_1(r) = \frac{2r}{p+r} \quad \text{e} \quad l_2(r) = \frac{n+2r}{n+r}.$$

Pode-se provar que estas funções são crescentes e

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} l_j(r) = 2$$

para $j = 1, 2$. Além disso, temos que $l_1(1) < l_2(1)$ e os seus gráficos irão se interceptar somente quando $\bar{r} = \frac{np}{n-2p}$ e teremos, para $j = 1, 2$,

$$l_j(\bar{r}) = \frac{n}{n-p}.$$

Deste modo, se

$$2p < n \quad \text{e} \quad \frac{2}{p+1} \leq \alpha < \frac{n}{n-p}$$

poderemos encontrar r satisfazendo (3.16). Se $2p \geq n$ as funções nunca se interceptarão para valores positivos de r . Então para qualquer $\alpha \in \left[\frac{2}{p+1}, 2 \right)$ podemos encontrar r satisfazendo (3.16). Isto completa a demonstração. ■

3.3 Aplicação ao estudo da dinâmica de populações

Nesta seção vamos analisar um exemplo, apresentado por Delgado e Suárez em [7], em que o teorema anterior pode ser aplicado. Considere o caso particular $n = 3$, e o problema quasilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = n(x) + u(\gamma - m(x)u) + (b(x) \cdot \nabla u)^\alpha & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.17)$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}$, $\frac{2}{3} \leq \alpha < 2$. Além disso, temos que

$$m \in L^2(\Omega), n \in L^\infty(\Omega), b \in (L^\infty(\Omega))^3, n \geq 0, m \geq m_o > 0. \quad (3.18)$$

No contexto da dinâmica de populações, qualquer solução positiva de (3.17) pode ser vista como o estado de equilíbrio da densidade populacional. O coeficiente $m = m(x)$ está associado à limitação da população em estudo enquanto que $b = b(x)$ e $n = n(x)$ são responsáveis pelo efeito de transporte e à influência do meio na vizinhança, respectivamente. Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, s, \xi) = n(x) + s(\gamma - m(x)s) + (b(x) \cdot \xi)^\alpha.$$

Temos que

$$|f(x, s, \xi)| \leq |n(x)| + |s\gamma| + |m(x)||s|^2 + \|b\|^\alpha \|\xi\|^\alpha.$$

Desta forma existe k tal que

$$|f(x, s, \xi)| \leq k(1 + m(x))|s|^2 + |s\gamma| + k\|\xi\|^\alpha.$$

Considerando

$$g(x, s) = k(1 + m(x))|s|^2 + |s\gamma|$$

temos que

$$|f(x, s, \xi)| \leq g(x, s) + k\|\xi\|^\alpha.$$

Observe que, devido a (3.18), f e g são funções Carathéodory. Provaremos que $\{u_0, u^0\} = \{0, K\}$ são sub-supersolução para o problema (3.17) para $K > 0$ suficientemente grande. Temos que

$$-\Delta K - n(x) - K(\gamma - m(x)K) - (b(x) \cdot \nabla K)^\alpha = -n(x) - K(\gamma - m(x)K)$$

que é igual a

$$-n(x) - K\gamma + m(x)K^2 \geq -n(x) - K\gamma + K^2m_o.$$

No entanto temos que $-n(x) \geq -k$ *q.t.p* em Ω . Assim, *q.t.p* em Ω ,

$$-\Delta K - n(x) - K(\gamma - m(x)K) - (b(x) \cdot \nabla K)^\alpha \geq K^2m_o - K\gamma - k.$$

Sendo $m_o > 0$, existe $K > 0$ tal que $K^2m_o - K\gamma - k > 0$. Portanto é possível encontrar $K > 0$ satisfazendo, *q.t.p* em Ω ,

$$-\Delta K - n(x) - K(\gamma - m(x)K) - (b(x) \cdot \nabla K)^\alpha \geq 0.$$

Como $\{0, K\}$ satisfazem as outras condições da Definição 3.1.1 temos que $\{0, K\}$ é sub-supersolução para (3.17).

Assim, levando em conta que Δ é um operador uniformemente elíptico em Ω o Teorema 3.2.1 nos permite concluir que o problema (3.17) possui ao menos uma solução u em $W^{2,p}(\Omega)$, com $u \geq 0$ em Ω .

Capítulo 4

O método variacional e equações do tipo $-\Delta u = f(x, u, \nabla u)$

4.1 Introdução

Neste capítulo vamos considerar a resolubilidade do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, \nabla u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

com Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^n com fronteira suave. Assumiremos $n \geq 3$. A técnica que será usada para resolver (4.1) consiste em associar ao problema (4.1) uma família de problemas elípticos semilineares que não dependam do gradiente da solução. Mais precisamente, para cada $w \in H_o^1(\Omega)$, consideraremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, \nabla w) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

Temos que (4.2) é um problema variacional e podemos atacá-lo com métodos variacionais. Vejamos agora as hipóteses sobre a função $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$h_o)$ f é localmente Lipschitziana e contínua.

$h_1)$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t, \xi)}{t} = 0$ uniformemente para $x \in \bar{\Omega}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

$h_2)$ Existem constantes $a_1 > 0$ e $p \in \left(1, \frac{n+2}{n-2}\right)$ tais que

$$|f(x, t, \xi)| \leq a_1 (1 + |t|^p), \quad \forall x \in \bar{\Omega}, t \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

h_3) Existem constantes $\theta > 2$ e $t_o > 0$ tais que

$$0 < \theta F(x, t, \xi) \leq t f(x, t, \xi), \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad |t| \geq t_o, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

com

$$F(x, t, \xi) = \int_0^t f(x, s, \xi) ds.$$

h_4) Existem constantes $a_2 > 0$ e $a_3 > 0$ tais que

$$F(x, t, \xi) \geq a_2 |t|^\theta - a_3, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

EXEMPLO 4.1.1. A função dada por

$$f(x, t, \xi) = b_1 |t|^{p-1} t g(\xi), \quad \forall (x, t, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

com $b_1 > 0$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $0 < b_2 \leq g(\xi)$ para alguma constante b_2 , satisfaz $h_0), \dots, h_4)$.

De fato, é imediato que f satisfaz $h_0)$. Vejamos as outras condições. Levando em conta que $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t, \xi)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} b_1 |t|^{p-1} g(\xi) = 0$$

uniformemente para $x \in \bar{\Omega}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, satisfazendo $h_1)$. Temos também que

$$|f(x, t, \xi)| = |b_1| |t|^{p-1} |t| |g(\xi)|.$$

No entanto existe $k > 0$ tal que

$$|f(x, t, \xi)| \leq |b_1| k |t|^p \leq a_1 (1 + |t|^p)$$

com $a_1 = |b_1| k$, satisfazendo $h_2)$. Quando $t > 0$ temos que

$$F(x, t, \xi) = b_1 g(\xi) \int_0^t s^p ds = \frac{b_1 g(\xi)}{p+1} t^{p+1}.$$

Por outro lado,

$$t f(x, t, \xi) = b_1 g(\xi) t^{p+1}$$

se $\theta > 2$ então

$$\frac{\theta}{p+1} \leq 1 \iff \theta \leq p+1.$$

Nestas condições temos

$$0 < \theta F(x, t, \xi) = \frac{\theta}{p+1} b_1 g(\xi) t^{p+1} \leq b_1 g(\xi) t^{p+1} = t f(x, t, \xi).$$

Para $t < 0$, segue que

$$F(x, t, \xi) = \frac{b_1 g(\xi)}{p+1} (-t)^{p+1}$$

e

$$t f(x, t, \xi) = b_1 g(\xi) (-t)^{p+1}.$$

Novamente escolha $\theta > 2$ com $\theta \leq p+1$. Isso garante que f satisfaz H_3). Por fim sabemos que

$$F(x, t, \xi) = \frac{b_1 g(\xi)}{p+1} |t|^{p+1} \geq \frac{b_1 b_2}{p+1} |t|^{p+1}.$$

Neste caso tome $\theta = p+1$ e $a_2 = \frac{b_1 b_2}{p+1}$. Desta forma é possível encontrar $a_3 > 0$ de modo que $F(x, t, \xi) \geq a_2 |t|^\theta - a_3$ para todo $(x, t, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, completando a prova.

Uma coisa a ser observada é que h_2) e h_3) nos garantem que $\theta \leq p+1$. Como estaremos trabalhando em $H_o^1(\Omega)$ a norma que utilizaremos é a usual dada por

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vejamos os dois resultados principais.

TEOREMA 4.1.2 *(de Figueredo, Girardi e Matzeu) Suponhamos que valem as hipóteses $h_0), \dots, h_4$). Então, existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que para cada $w \in H_o^1(\Omega)$ o problema (4.2) possui ao menos uma solução u_w satisfazendo $c_1 \leq \|u_w\| \leq c_2$. Além disso, sob as condições das hipóteses temos que (4.2) possui ao menos uma solução positiva e uma solução negativa.*

Se estivermos observando apenas a solução positiva devemos assumir h_3) e h_4) somente para t positivo. Para resolver o problema (4.1) precisaremos de mais uma hipótese.

h_5) A função f satisfaz as seguintes condições de Lipschitz localmente,

$$|f(x, t', \xi) - f(x, t'', \xi)| \leq L_1 |t' - t''| \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad t', t'' \text{ em } [0, \rho_1] \text{ e } |\xi| \leq \rho_2$$

e

$$|f(x, t, \xi') - f(x, t, \xi'')| \leq L_2 |\xi' - \xi''| \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad t \in [0, \rho_1], \quad |\xi'| \text{ e } |\xi''| \text{ em } [0, \rho_2]$$

onde ρ_1 e ρ_2 dependem de p, n, θ, a_1, a_2 e a_3 dados nas hipóteses anteriores.

TEOREMA 4.1.3 (de *Figueredo, Girardi e Matzeu*) *Assuma que valem as hipóteses h_0, \dots, h_5). Então, o problema (4.1) possui uma solução positiva e uma negativa desde que $\lambda_1^{-1} L_1 + \lambda_1^{-\frac{1}{2}} L_2 < 1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$. Além disso, as soluções obtidas são de classe C^2 .*

4.2 Prova do Teorema 4.1.2.

A solução de um problema como em (4.2), que é variacional, é obtida como um ponto crítico de um funcional

$$I_w : H_o^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

definido por

$$I_w(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} F(x, v, \nabla w).$$

Quebraremos a prova do Teorema 4.1.2 em vários lemas. Primeiramente provaremos que o funcional I_w possui a geometria do teorema do passo da montanha. Mas antes vejamos a

PROPOSIÇÃO 4.2.1. *As hipóteses h_1) e h_2) nos garantem que dado $\epsilon > 0$ existe uma constante $k_\epsilon > 0$ de modo que, $\forall (x, t, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,*

$$|F(x, t, \xi)| \leq \frac{\epsilon}{2} t^2 + k_\epsilon |t|^{p+1}. \quad (4.3)$$

DEMONSTRAÇÃO. Dado $\epsilon > 0$ fixo, h_1) nos garante que existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $t \in \mathbb{R}$, $0 < |t| < \delta(\epsilon)$ implica $|f(x, t, \xi)| \leq \epsilon |t|$. No caso em que $t > 0$ temos

$$f(x, t, \xi) \leq \epsilon t, \quad 0 < t < \delta(\epsilon).$$

Então

$$\int_0^t f(x, s, \xi) ds \leq \epsilon \int_0^t s ds$$

e, portanto,

$$F(x, t, \xi) \leq \frac{\epsilon}{2} t^2, \quad 0 < t < \delta(\epsilon).$$

Se tivermos $t < 0$, segue que $f(x, t, \xi) \leq \epsilon(-t)$ daí $-f(x, t, \xi) \geq \epsilon t$. Logo

$$-\int_t^0 f(x, s, \xi) ds \geq \epsilon \int_t^0 s ds, \quad -\delta(\epsilon) < t < 0,$$

e segue que

$$F(x, t, \xi) \geq -\frac{\epsilon}{2} t^2, \quad -\delta(\epsilon) < t < 0$$

e desta forma concluímos que

$$|F(x, t, \xi)| \leq \frac{\epsilon}{2} t^2 \text{ com } 0 < |t| < \delta(\epsilon).$$

De h_2) existem constantes $a_1 > 0$ e $p \in \left(1, \frac{n+2}{n-2}\right)$ tais que

$$|f(x, t, \xi)| \leq a_1 (1 + |t|^p) \quad \forall (x, t, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

No caso em que $t > 0$ temos

$$|F(x, t, \xi)| \leq \int_0^t |f(x, s, \xi)| ds \leq a_1 \int_0^t (1 + s^p) ds = a_1 \left(t + \frac{t^{p+1}}{p+1} \right).$$

Desta forma

$$|F(x, t, \xi)| \leq a_1 t^{p+1} \left(\frac{1}{t^p} + \frac{1}{p+1} \right), \quad t > 0.$$

Para $t < 0$ temos

$$\begin{aligned} |F(x, t, \xi)| &= \left| \int_0^t f(x, s, \xi) ds \right| = \left| - \int_t^0 f(x, s, \xi) ds \right| \\ &\leq \int_t^0 |f(x, s, \xi)| ds \leq a_1 \int_t^0 (1 + (-s)^p) ds \end{aligned}$$

e segue que

$$|F(x, t, \xi)| \leq a_1 (-t)^{p+1} \left(\frac{1}{(-t)^p} + \frac{1}{p+1} \right), \quad t < 0.$$

Portanto, para $t \in \mathbb{R}$, temos

$$|F(x, t, \xi)| \leq a_1 |t|^{p+1} \left(\frac{1}{|t|^p} + \frac{1}{p+1} \right).$$

No caso em que $|t| \geq \delta(\epsilon)$ temos $\frac{1}{\delta(\epsilon)^p} \geq \frac{1}{|t|^p}$, e desta forma segue que

$$|F(x, t, \xi)| \leq a_1 |t|^{p+1} \left(\frac{1}{\delta(\epsilon)^p} + \frac{1}{p+1} \right).$$

Levando em conta que $2 < \theta \leq p+1$ temos

$$|F(x, t, \xi)| \leq a_1 |t|^{p+1} \left(\frac{1}{\delta(\epsilon)^p} + \frac{1}{2} \right), \quad |t| > \delta(\epsilon)$$

e desta forma podemos concluir que é possível encontrar $k_\epsilon > 0$ independente de x , t e ξ , de modo que

$$|F(x, t, \xi)| \leq \frac{\epsilon}{2} t^2 + k_\epsilon |t|^{p+1}, \quad \forall (x, t, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

concluindo o resultado. ■

Vejamos agora o primeiro lema.

LEMA 4.2.2. *Considere $w \in H_o^1(\Omega)$. Existem números positivos ρ e α , independentes de w , tais que*

$$I_w(v) \geq \alpha, \quad \forall v \in H_o^1(\Omega) \text{ tal que } \|v\| = \rho.$$

DEMONSTRAÇÃO. Considere $w \in H_o^1(\Omega)$ arbitrário e fixe $\epsilon > 0$, com $\epsilon < \lambda_1$. A Proposição 4.2.1 nos diz que existe $k_\epsilon > 0$, independente de w , satisfazendo

$$|F(x, v, \nabla w)| \leq \frac{\epsilon}{2} v^2 + k_\epsilon |v|^{p+1}, \quad q.t.p \text{ para } x \in \Omega. \quad (4.4)$$

Sabemos que v está em $L^2(\Omega)$, vamos agora mostrar que v está em $L^{p+1}(\Omega)$.

O teorema de imersão de Sobolev nos garante que $H_o^1(\Omega)$ está imerso em $L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$. Escolha $s = \left(\frac{2n}{n-2} \right) \frac{1}{p+1}$ e s_o satisfazendo $\frac{1}{s} + \frac{1}{s_o} = 1$. Usando a desigualdade de Hölder temos

$$\int_{\Omega} |v|^{p+1} \leq \left(\int_{\Omega} |v|^{(p+1)s} \right)^{\frac{1}{s}} |\Omega|^{\frac{1}{s_o}} = \left(\|v\|_{\frac{2n}{n-2}} \right)^{p+1} |\Omega|^{\frac{1}{s_o}} < \infty.$$

Desta forma podemos integrar (4.4) sobre Ω e obter

$$\int_{\Omega} |F(x, v, \nabla w)| dx \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx + k_\epsilon \int_{\Omega} |v(x)|^{p+1} dx,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} |F(x, v, \nabla w)| \leq \frac{\epsilon}{2} \|v\|_2^2 + k_{\epsilon} \|v\|_{p+1}^{p+1}.$$

Além disso podemos escrever

$$I_w(v) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \frac{\epsilon}{2} \|v\|_2^2 - k_{\epsilon} \|v\|_{p+1}^{p+1}.$$

Devido à desigualdade de Hölder temos

$$I_w(v) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \frac{\epsilon}{2} \|v\|_2^2 - \tilde{k}_{\epsilon} \|v\|_{\frac{2n}{n-2}}^{p+1}$$

e o teorema de imersão de Sobolev e a desigualdade de Poincaré nos garantem que

$$I_w(v) \geq \frac{1}{2} \|v\|^2 - \frac{\epsilon}{2\lambda_1} \|v\|^2 - \bar{k}_{\epsilon} \|v\|^{p+1}.$$

Portanto

$$I_w(v) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) \|v\|^2 - \bar{k}_{\epsilon} \|v\|^{p+1},$$

onde \bar{k}_{ϵ} não depende de w . Desta forma segue

$$I_w(v) \geq \|v\|^2 \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) - \bar{k}_{\epsilon} \|v\|^{p-1} \right].$$

Tome $\rho > 0$ tal que

$$\rho^2 \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) - \bar{k}_{\epsilon} \rho^{p-1} \right] = \alpha > 0.$$

A escolha de ϵ nos garante que podemos escolher tal ρ . ■

Provaremos agora o

LEMA 4.2.3. *Considere $w \in H_o^1(\Omega)$. Fixe $v_o \in H_o^1(\Omega)$, com $\|v_o\| = 1$. Então existe $T > 0$, independente de w , tal que*

$$I_w(tv_o) \leq 0, \quad \forall t \geq T.$$

DEMONSTRAÇÃO. Da hipótese h_4) temos que, $\forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$,

$$F(x, tv_o, \xi) \geq a_2 |t|^{\theta} |v_o|^{\theta} - a_3. \tag{4.5}$$

Provaremos agora que

$$\int_{\Omega} |v_o|^{\theta} < \infty. \tag{4.6}$$

Para isso escolha $s = \frac{2n-1}{n-2\theta}$ e s_o satisfazendo $\frac{1}{s} + \frac{1}{s_o} = 1$. Usando a desigualdade de Hölder temos

$$\int_{\Omega} |v_o|^\theta \leq \left(\|v_o\|_{\frac{2n}{n-2}} \right)^\theta |\Omega|^{\frac{1}{s_o}} < \infty,$$

garantindo que vale (4.6).

Agora podemos integrar (4.5) sobre Ω e obter

$$\int_{\Omega} |F(x, tv_o, \nabla w)| \geq a_2 |t|^\theta \int_{\Omega} |v_o|^\theta - a_3 |\Omega|$$

e, portanto, vale

$$I_w(tv_o) \leq \frac{1}{2}t^2 - a_2 |t|^\theta \int_{\Omega} |v_o|^\theta + a_3 |\Omega|.$$

Levando em conta que $\theta \in \left(2, \frac{2n}{n-2}\right)$ e que $\|v_o\| = 1$, existe $S_\theta > 0$ tal que $\|v_o\|_\theta^\theta \geq S_\theta^\theta > 0$ e desta forma temos que

$$I_w(tv_o) \leq \frac{1}{2}t^2 - a_2 |t|^\theta S_\theta^\theta + a_3 |\Omega|.$$

Desta maneira, levando em conta que $2 < \theta$ é possível obter $T > 0$ independente de v_o e w de modo que $I_w(tv_o) \leq 0$ para todo $t \geq T$. ■

Vejamos agora o

LEMA 4.2.4. *Suponha que vale h_0, \dots, h_4 . Então para qualquer $w \in H_o^1(\Omega)$ o problema (4.2) possui ao menos uma solução u_w não nula.*

DEMONSTRAÇÃO. Os Lemas 4.2.2 e 4.2.3 indicam que o funcional I_w possui a geometria do teorema do passo da montanha. Além disso, de maneira padrão (veja a referência [8] página 476), temos que as hipóteses h_2 e h_3 implicam que I_w satisfaz a condição (PS). Desta forma uma solução fraca de (4.2), u_w , é obtida como sendo um ponto crítico em um determinado nível, mais precisamente temos

$$I'_w(u_w) = 0 \text{ e } I_w(u_w) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_w(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma = \{ \gamma \in C^0([0,1], H_o^1(\Omega)); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = Tv_o \}$$

para v_o e T , como no Lema 4.2.3, fixados. Isto conclui a demonstração. ■

Os próximos lemas tratarão das características que possuem as soluções obtidas no Lema 4.2.4.

LEMA 4.2.5. *Considere $w \in H_o^1(\Omega)$. Então existe uma constante positiva c_1 , independente de w , tal que*

$$\|u_w\| \geq c_1$$

para toda solução u_w obtida no Lema 4.2.4.

DEMONSTRAÇÃO. Do Lema 4.2.4 temos que u_w satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u_w = f(x, u_w, \nabla w) & \text{em } \Omega \\ u_w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Desta forma temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_w|^2 = \int_{\Omega} f(x, u_w, \nabla u_w) u_w$$

Usando $h_1)$ e $h_2)$ temos que, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $c_\epsilon > 0$ independente de x , t e ξ , tal que,

$$|f(x, t, \xi)| \leq \epsilon |t| + c_\epsilon |t|^p, \quad \forall (x, t, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Desta forma podemos concluir que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_w|^2 \leq \epsilon \int_{\Omega} |u_w|^2 + c_\epsilon \int_{\Omega} |u_w|^{p+1}.$$

Usando a desigualdade de Poincaré temos

$$\|u_w\|^2 \left(1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) \leq c_\epsilon \|u_w\|_{p+1}^{p+1},$$

e usando a desigualdade de Hölder e o teorema de imersão de Sobolev segue que

$$\|u_w\|^2 \left(1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) \leq \bar{c}_\epsilon \|u_w\|^{p+1}.$$

Desta forma

$$\frac{1}{\bar{c}_\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) \leq \|u_w\|^{p-1}$$

e, portanto,

$$\|u_w\| \geq \left[\frac{1}{\bar{c}_\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \right]^{\frac{1}{p-1}} = c_1 > 0$$

desde que $p > 1$ e $\epsilon < \lambda_1$. ■

Por outro lado temos o

LEMA 4.2.6. *Considere $w \in H_o^1(\Omega)$. Então existe uma constante positiva c_2 , independente de w , tal que*

$$\|u_w\| \leq c_2$$

para toda solução u_w obtida no Lema 4.2.4.

DEMONSTRAÇÃO. Considere u_w obtida no Lema 4.2.4. Então vale

$$I_w(u_w) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_w(\gamma(t))$$

com

$$\Gamma = \{ \gamma \in C^0([0,1], H_o^1(\Omega)); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = Tv_o \},$$

sendo T e v_o como no Lema 4.2.3 fixados. Temos que

$$I_w(u_w) \leq \max_{t \in [0,1]} I_w(\gamma(t)), \forall \gamma \in \Gamma.$$

Em particular temos

$$I_w(u_w) \leq \max_{t \in [0,1]} I_w(t(Tv_o)),$$

onde $\gamma(t) = t(Tv_o)$. Usando h_4) temos

$$I_w(t(Tv_o)) \leq \frac{|T|^2}{2} t^2 - a_2 |T|^\theta |t|^\theta S_\theta^\theta + a_3 |\Omega|.$$

Defina $h : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(t) = \frac{|T|^2}{2} t^2 - a_2 |T|^\theta |t|^\theta S_\theta^\theta + a_3 |\Omega|.$$

Levando em conta que h é uma função contínua definida em um conjunto compacto existe $\bar{t} \in [0,1]$ de maneira que h assume seu máximo em \bar{t} . Logo, temos que

$I_w(u_w) \leq h(\bar{t})$. Caso $h(\bar{t})$ seja negativa podemos trocá-la por outra constante positiva. Então existe $c > 0$ tal que $I_w(u_w) \leq c$. Podemos, portanto, escrever

$$\frac{1}{2} \|u_w\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u_w, \nabla w) \leq c.$$

Sejam t_o e θ como em h_3) e considere os conjuntos

$$A = \{x \in \bar{\Omega} ; |u_w(x)| \geq t_o\}$$

e

$$B = \{x \in \bar{\Omega} ; |u_w(x)| < t_o\}.$$

Podemos escrever

$$\frac{\theta}{2} \|u_w\|^2 - \int_A \theta F(x, u_w, \nabla w) - \int_B \theta F(x, u_w, \nabla w) \leq c\theta.$$

Segue que

$$\frac{\theta}{2} \|u_w\|^2 - \int_A \theta F(x, u_w, \nabla w) \leq c\theta + \int_B \theta F(x, u_w, \nabla w).$$

Usando a Proposição 4.2.1 temos

$$\frac{\theta}{2} \|u_w\|^2 - \int_A \theta F(x, u_w, \nabla w) \leq c\theta + \left(\frac{\epsilon}{2} t_o^2 + k_{\epsilon} |t_o|^{p+1}\right) |B| \theta. \quad (4.7)$$

Além disso, temos também que vale

$$\|u_w\|^2 = \int_{\Omega} f(x, u_w, \nabla w) u_w = \int_A f(x, u_w, \nabla w) u_w + \int_B f(x, u_w, \nabla w) u_w.$$

Conseqüentemente, usando h_3), temos

$$\|u_w\|^2 - \int_B f(x, u_w, \nabla w) u_w = \int_A f(x, u_w, \nabla w) u_w \geq \int_A \theta F(x, u_w, \nabla w) > 0.$$

A expressão (4.7) pode ser escrita como

$$\left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \|u_w\|^2 \leq \tilde{c} - \int_B f(x, u_w, \nabla w) u_w$$

com

$$\tilde{c} = c\theta + \left(\frac{\epsilon}{2} t_o^2 + k_{\epsilon} |t_o|^{p+1}\right) |B| \theta.$$

Usando h_2), temos que

$$- \int_B f(x, u_w, \nabla w) u_w \leq \int_B a_1 (|u_w| + |u_w|^{p+1}).$$

Por isso é possível concluir que

$$-\int_B f(x, u_w, \nabla w) u_w \leq a_1 (t_o + t_o^{p+1}) |B| = k.$$

Desta forma, segue que

$$\left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \|u_w\|^2 \leq \tilde{c} + k = \tilde{c}_2,$$

e, portanto, temos

$$\|u_w\| \leq \left(\frac{2\tilde{c}_2}{\theta - 2}\right)^{\frac{1}{2}} = c_2,$$

provando o resultado. ■

OBSERVAÇÃO: No Lema 4.2.4 nós obtivemos uma solução fraca do problema (4.2) para cada $w \in H_o^1(\Omega)$. Como $p < \frac{n+2}{n-2}$ pode-se usar a teoria de regularidade em L^p para mostrar que u_w está em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0, 1)$. No entanto, a regularidade não pode ser obtida se w for uma função qualquer em $H_o^1(\Omega)$. Se w for $C^1(\overline{\Omega})$ podemos usar a teoria de regularidade de Schauder para mostrar que u_w está em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Além disso, usando o teorema de imersão de Sobolev e o Lema 4.2.6, é possível provar que se $w \in H_o^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ existem constantes ρ_1 e ρ_2 positivas e independentes de w satisfazendo

$$\|u_w\|_{C^0} \leq \rho_1 \text{ e } \|\nabla u_w\|_{C^0} \leq \rho_2$$

para toda u_w obtida no Lema 4.2.4.

Utilizaremos na próxima seção estes dados sobre a regularidade da solução de (4.2).

Agora provaremos a existência de uma solução positiva. Claro que a existência de uma solução negativa é obtida de forma análoga.

LEMA 4.2.7. *O problema (4.2) possui uma solução positiva.*

DEMONSTRAÇÃO. Defina $\tilde{f} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pondo:

$$\tilde{f}(x, t, \xi) = \begin{cases} f(x, t, \xi), & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{caso } t < 0. \end{cases}$$

Temos que \tilde{f} satisfaz h_3) e h_4) somente para $t \geq 0$. Além disso, na prova do Lema 4.2.3 escolha $v_o > 0$. Com esta modificação e levando em conta que a condição (PS) ainda é válida para tal \tilde{f} , podemos usar o teorema do passo da montanha para mostrar que o problema, para $w \in H_o^1(\Omega)$,

$$\begin{cases} -\Delta u_w = \tilde{f}(x, u_w, \nabla w) & \text{em } \Omega \\ u_w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

possui uma solução u_w não nula em Ω . Desta forma temos que

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u_w, \nabla u_w^- \rangle = \int_{\Omega} \tilde{f}(x, u_w, \nabla w) u_w^-.$$

Consideremos, agora, os conjuntos

$$A = \{x \in \bar{\Omega}; u_w(x) > 0\}$$

e

$$B = \{x \in \bar{\Omega}; u_w(x) < 0\}.$$

Segue que

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u_w, \nabla u_w^- \rangle = \int_A \tilde{f}(x, u_w, \nabla w) u_w^- + \int_B \tilde{f}(x, u_w, \nabla w) u_w^-.$$

Portanto

$$\|u_w^-\|^2 = \int_{\Omega} \langle \nabla u_w, \nabla u_w^- \rangle = 0$$

para toda u_w satisfazendo o Lema 4.2.4. Desta forma temos que $u_w^-(x) = 0$, $\forall x \in \Omega$. Por isso, podemos concluir que u_w é positiva em Ω , pelo princípio do máximo. ■

4.3 Prova do Teorema 4.1.3.

Para demonstrar o Teorema 4.1.3 usaremos o Teorema 4.1.2 de maneira iterativa.

Construiremos uma seqüência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_o^1(\Omega)$ com as soluções de

$$\begin{cases} -\Delta u_n = f(x, u_n, \nabla u_{n-1}) & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.8)$$

considerando inicialmente $u_0 \in H_o^1(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, fixada.

Usando (4.8) para n e $n + 1$ temos $-\Delta u_n = f(x, u_n, \nabla u_{n-1})$ e também $-\Delta u_{n+1} = f(x, u_{n+1}, \nabla u_n)$. Segue que

$$-\Delta u_n (u_{n+1} - u_n) = f(x, u_n, \nabla u_{n-1}) (u_{n+1} - u_n) \quad (4.9)$$

e

$$-\Delta u_{n+1} (u_{n+1} - u_n) = f(x, u_{n+1}, \nabla u_n) (u_{n+1} - u_n). \quad (4.10)$$

Integrando (4.9) e (4.10) sobre Ω teremos

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u_n, (\nabla u_{n+1} - \nabla u_n) \rangle = \int_{\Omega} f(x, u_n, \nabla u_{n-1}) (u_{n+1} - u_n)$$

e

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u_{n+1}, (\nabla u_{n+1} - \nabla u_n) \rangle = \int_{\Omega} f(x, u_{n+1}, \nabla u_n) (u_{n+1} - u_n).$$

Usando a linearidade do produto interno e subtraindo membro a membro temos que

$$- \left[\int_{\Omega} |\nabla u_{n+1}|^2 - 2 \langle \nabla u_{n+1}, \nabla u_n \rangle + \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \right]$$

é igual a

$$\int_{\Omega} [f(x, u_n, \nabla u_{n-1}) - f(x, u_{n+1}, \nabla u_n)] (u_{n+1} - u_n).$$

Desta forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla (u_{n+1} - u_n)|^2 &= \int_{\Omega} [f(x, u_{n+1}, \nabla u_n) - f(x, u_n, \nabla u_n)] (u_{n+1} - u_n) \\ &\quad + \int_{\Omega} [f(x, u_n, \nabla u_n) - f(x, u_n, \nabla u_{n-1})] (u_{n+1} - u_n). \end{aligned}$$

A observação feita após a demonstração do Lema 4.2.7 nos garante que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\|_{C^0} \leq \rho_1 \text{ e } \|\nabla u_n\|_{C^0} \leq \rho_2.$$

Podemos usar a hipótese h_5) para obter

$$\|u_{n+1} - u_n\|^2 \leq L_1 \int_{\Omega} |u_{n+1} - u_n|^2 + L_2 \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_{n-1}| |u_{n+1} - u_n|.$$

Usando a desigualdade de Hölder temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_{n-1}| |u_{n+1} - u_n| \leq \|\nabla (u_n - u_{n-1})\|_2 \|u_{n+1} - u_n\|_2.$$

Agora, usando a desigualdade de Poincaré, teremos que

$$\|u_{n+1} - u_n\|^2 \leq L_1 \lambda_1^{-1} \|u_{n+1} - u_n\|^2 + L_2 \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \|u_{n+1} - u_n\| \|u_n - u_{n-1}\|.$$

Segue que

$$(1 - L_1 \lambda_1^{-1}) \|u_{n+1} - u_n\|^2 \leq L_2 \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \|u_{n+1} - u_n\| \|u_n - u_{n-1}\|.$$

Desta forma, temos

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \frac{L_2 \lambda_1^{-\frac{1}{2}}}{1 - L_1 \lambda_1^{-1}} \|u_n - u_{n-1}\|.$$

Considere $k = \frac{L_2 \lambda_1^{-\frac{1}{2}}}{1 - L_1 \lambda_1^{-1}}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq k \|u_n - u_{n-1}\|.$$

Levando em conta que por hipótese $k < 1$ não é difícil provar que $\{u_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em $H_o^1(\Omega)$. Sendo este um espaço de Hilbert temos que $\{u_n\}$ converge para $u \in H_o^1(\Omega)$, isto é, existe $u \in H_o^1(\Omega)$ tal que

$$\lim \|u_n - u\| = 0.$$

Além disso, o Lema 4.2.5 diz que existe $c_1 > 0$ tal que $\|u_n\| \geq c_1$ para todo n natural. Desta forma temos que u é não nulo, assegurando que u é uma solução não trivial do problema.

Para mostrar que u é uma solução positiva usamos o mesmo argumento do Lema 4.2.7. Um argumento análogo possibilita mostrar que existe uma solução negativa. Ademais, a observação feita após o Lema 4.2.6 na seção anterior nos possibilita concluir que $u \in C^2(\Omega)$.

Além do mais, o resultado exposto neste capítulo, com algumas modificações, pode ser obtido para um operador elíptico \mathcal{L} qualquer na forma do divergente. Desta forma, apesar de estarmos trabalhando com o operador laplaciano, esta técnica pode ser utilizada em casos mais gerais.

Bibliografia

- [1] Adams, R. A. *Sobolev Spaces*. New York. Academic Press, 1975.
- [2] Aleksandrov, A. D. *Uniqueness Conditions and Estimates for the Solution of the Dirichlet Problem*. American Mathematical Society Translation (Serie 2) 68 (1968), 89-119.
- [3] Amann, H. *Existence and multiplicity teorems for semilinear elliptic boundary value problems*. Math Z 150 (1976), 281-295.
- [4] Amann, H. & Crandall, M. *On Some Existence Theorems for Semilinear Elliptic Equations*. Indiana Univ. Math. J. 27 (1978), 779-790.
- [5] Bartle, R. G. *The elements of integration*. New York. Jonh Wiley & Sons, 1966.
- [6] Dancer, E. N. & Sweers, G. *On the existence of maximal weak solution for a semilinear elliptic equation*. Differential and Integral Equations 2 (1989) 533-540.
- [7] Delgado, M. & Suárez, A. *Weak Solutions for Some Quasilinear Elliptic Equations by the Sub-supersolution Method*. Nonlinear Analysis 42 (2000), 995-1002.
- [8] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*. Berkeley. American Mathematical Society, 1997.
- [9] de Figueiredo, D. G. & Girardi, M. & Matzeu, M.. *Semilinear Elliptic Equations with Dependence on the Gradient via Mountain-Pass Techniques*. Differential and Integral Equations 17 (2004), 119-126.

- [10] Friedman, A. *Partial Differential Equations*. New York. Academic Press, 1969.
- [11] Furlanetto, J.R.S. *Sobre Equações Elípticas e Aplicações*. Curitiba. Ed da UFPR, 2007.
- [12] Gilbarg, T. & Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. New York: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1977.
- [13] Hess, P. *On a second-order nonlinear elliptic boundary value problem*. Nonlinear Analysis em: L. Cesari, R. Kannan, H. Weinberger (Eds.), A Collection of Papers in Honor of E. Rothe, Academic Press, New York (1978), pp. 99-107.
- [14] Hounie, J. *Teoria Elementar das Distribuições. 12^o Colóquio Brasileiro de Matemática*. Rio de Janeiro. IMPA, 1979.
- [15] Smoller, J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. New York. Spring-Verlag, 1982.
- [16] Kazdan, J. L. & Kramer, R. J. *Invariant Criteria for Existence of Solutions to Second Order Quasilinear Elliptic Equations*. Comm. on Pure and Applied Math. 31 (1978), 619-645.
- [17] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*. New York. Mc Graw-Hill, 1966.
- [18] Xavier, J. B. M. *Some existence theorems for equations of form $-\Delta u = f(x, u, \nabla u)$* . Nonlinear Analysis 15 (1990) 59-67.
- [19] Yan, Z. *A note on solvability in $W^{2,p}(\Omega)$ for equation $-\Delta u = f(x, u, \nabla u)$* . Nonlinear Analysis 24 (1995) 1413-1416.