UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PEDRO MEYER TOKORO

RESOLUBILIDADE DE EQUAÇÕES DO TIPO VEKUA NO TORO

CURITIBA

2023

PEDRO MEYER TOKORO

RESOLUBILIDADE DE EQUAÇÕES DO TIPO VEKUA NO TORO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Kirilov

Coorientador: Prof. Dr. Wagner Augusto Almeida de Moraes

CURITIBA

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Tokoro, Pedro Meyer
Resolubilidade de equações do tipo Vekua no toro. / Pedro Meyer Tokoro. – Curitiba, 2023.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Kirilov.
Coorientador: Prof. Dr. Wagner Augusto Almeida de Moraes.

1. Resolução de problemas. 2. Vekua, Equações de. 3. Classes de Denjoy-Carleman. I. Kirilov, Alexandre. II. Moraes, Wagner Augusto Almeida de. III. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Matemática. IV. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA -
40001016041P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **PEDRO MEYER TOKORO** intitulada: **Resolubilidade de equações do tipo Vekua no toro**, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 28 de Julho de 2023.

Assinatura Eletrônica
02/08/2023 13:47:37.0
WAGNER AUGUSTO ALMEIDA DE MORAES
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
02/08/2023 14:31:07.0
PAULO LEANDRO DATTORI DA SILVA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

Assinatura Eletrônica
02/08/2023 15:36:36.0
ADALBERTO PANOBIANCO BERGAMASCO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

Assinatura Eletrônica
02/08/2023 14:04:11.0
BRUNO DE LESSA VICTOR
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA)

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente aos meus pais, pelo amor incondicional, por todo o apoio e incentivo e por compreender minha ausência em alguns momentos.

À Amanda, pelo amor, apoio, companheirismo e paciência. A sua presença ao longo de todo este processo com certeza tornou tudo mais fácil.

Ao vovô, meu primeiro professor e quem despertou desde cedo em mim meu interesse pelo conhecimento.

Aos meus amigos não-matemáticos, por tornarem a vida mais leve e também por me apoiarem e torcerem por mim, mesmo sem compreender o que faço, assim como por compreenderem minha ausência em certos momentos.

Aos meus amigos do PPGM, tanto pela ajuda nos estudos quanto pelas conversas aleatórias na sala do PPGM e no RU.

Aos professores Alexandre Kirilov e Wagner Augusto Almeida de Moraes, por terem aceitado me orientar e coorientar, por toda a paciência com minhas inúmeras perguntas, por todos os conselhos e por estarem sempre presentes ao longo de todo este processo.

Aos professores Adalberto Panobianco Bergamasco, Paulo Leandro Dattori da Silva e Bruno de Lessa Victor por terem aceitado fazer parte da banca examinadora, pelas valiosas contribuições para este trabalho.

Aos professores Sidnei Furtado Costa e Bruno Telch dos Santos, que foram meus professores na graduação em Matemática na Udesc e foram fundamentais para que eu estivesse aqui hoje.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a resolubilidade de operadores do tipo Vekua definidos em toros. Na primeira parte, estabelecemos condições necessárias e suficientes para a resolubilidade suave, em espaços de codimensão finita, de operadores com coeficientes constantes. Neste contexto, exploramos condições diofantinas associadas aos coeficientes do operador e provamos a equivalência entre a resolubilidade e a hipoeliticidade global. Também investigamos a resolubilidade suave de uma classe de operadores Vekua com coeficientes variáveis, apresentando condições suficientes para a sobrejetividade. Na segunda parte deste trabalho, estendemos os principais resultados para classes de funções ultradiferenciáveis de Denjoy-Carleman do tipo Roumieu.

Palavras-chave: Resolubilidade; Hipoeliticidade Global; Equações do Tipo Vekua; Classes de Denjoy-Carleman.

ABSTRACT

In this work, we address the solvability of Vekua-type operators defined on tori. In the first part, we establish necessary and sufficient conditions for smooth solvability, in spaces of finite codimension, for constant-coefficients operators. In this context, we explore Diophantine conditions associated with the operator coefficients and prove the equivalence between solvability and global hypoellipticity. We also investigate the smooth solvability of a class of Vekua operators with variable coefficients, presenting sufficient conditions for surjectivity. In the second part of this work, we extend the main previous results to classes of Denjoy-Carleman ultradifferentiable functions of Roumieu type.

Keywords: Solvability; Global Hypoellipticity; Vekua-Type Equations; Denjoy-Carleman Classes.

SUMÁRIO

Introdução

Seja L um operador diferencial parcial linear definido no toro $\mathbb{T}^n$. Estamos interessados em estudar a resolubilidade global de operadores da forma:

$$Pu = Lu - Au - B\bar{u},$$

com A e B sendo funções suaves em $\mathbb{T}^n$. Diremos que o operador $P : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é resolúvel quando existir um subespaço $\mathcal{F} \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$ de codimensão finita tal que, para toda $f \in \mathcal{F}$, exista $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ satisfazendo a equação $Pu = f$.

Esses operadores são conhecidos como "operadores do tipo Vekua", em homenagem ao matemático I. N. Vekua, que estudou equações da forma:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} w - Aw - A\bar{w} = F$$

sendo $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ o operador de Cauchy-Riemann, e A, B e F funções ou constantes complexas. As soluções desta equação são conhecidas como funções analíticas generalizadas, ou funções pseudo-analíticas, e sua teoria foi desenvolvida por Vekua no livro *Generalized Analytic Functions* (ver [25]).

Operadores da forma

$$Pu = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} u - Au - B\bar{u}$$

foram utilizados por A. Meziani em [21] e [23], e por A. Meziani e B. de Lessa Victor em [10] e [11] no estudo de deformações de superfícies.

Propriedades locais e semiglobais de operadores da forma:

$$Pu = \left(a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \right) u - Au - B\bar{u}$$

foram e continuam sendo estudados por A. Meziani e seus colaboradores, como mostrado em [20] e [22].

Em [4], A. Bergamasco, P. Dattori da Silva e A. Meziani estudaram a resolubilidade global de operadores do tipo:

$$Pu = Lu - Au - B\bar{u},$$

no toro $\mathbb{T}^2$, nos casos em que L é um campo vetorial com coeficientes constantes e para uma classe específica de campos vetoriais com coeficientes variáveis. Esses resultados foram estendidos por M. Almeida e P. Dattori da Silva, em [6], para dimensões superiores para estudar a resolubilidade global no sentido de Gevrey. Convém registrar aqui que esses dois trabalhos, [4] e [6], foram a base para o desenvolvimento desta dissertação.

Além disso, vale mencionar que esse tipo de operador também tem sido estudado em grupos de Lie compactos. Em [12], W. de Moraes obteve resultados sobre a hipoeliticidade global de P quando L é um campo vetorial com coeficientes constantes em um grupo de Lie compacto.

É importante observar que, quando $B \neq 0$, o operador P deixa de ser $\mathbb{C}$-linear. O estudo da resolubilidade e hipoeliticidade global no caso em que $B = 0$ foi abordado por diversos autores em toros, grupos de Lie e variedades compactas. Destacamos aqui os resultados obtidos em [2, 3, 15, 17].

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 1 introduzimos notações e resultados que serão úteis no decorrer do texto. No Capítulo 2, trataremos inicialmente o caso a coeficientes constantes. Na Seção 2.1, cujos resultados foram demonstrados originalmente em [4], estudamos a resolubilidade do operador $P : C^\infty(\mathbb{T}^2) \to C^\infty(\mathbb{T}^2)$ dado por

$$Pu = \frac{\partial}{\partial t}u + C\frac{\partial}{\partial x}u - Au - B\bar{u},$$

com $A, B, C \in \mathbb{C}$. No Teorema 2.2, são dadas condições necessárias e suficientes sobre os coeficientes $A, B, C \in \mathbb{C}$ para que o operador P seja resolúvel. Como consequência dos argumentos utilizados no Teorema 2.2, é mostrado que P é resolúvel se, e somente se, é globalmente hipoelítico.

Na Seção 2.2, estudaremos o caso $\mathbb{T}^{n+1}$, sendo $P : C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}) \to C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ o operador dado por

$$Pu = \frac{\partial}{\partial t}u + \sum_{j=1}^{n} C_j\frac{\partial}{\partial x_j}u - Au - B\bar{u},$$

com $A, B, C_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$. Os resultados desta seção são adaptações dos resultados da Seção 2 de [6], em que foi estudada a resolubilidade Gevrey. Primeiramente, a resolubilidade de P é caracterizada a partir de uma condição diofantina. Para o caso $C_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, de maneira análoga à seção anterior, obtemos condições necessárias e suficientes sobre os coeficientes do operador a fim de que P seja resolúvel.

A Seção 2.3 surgiu a partir de uma sugestão do professor Paulo Leandro Dattori da Silva. Se $P : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é um operador da forma

$$Pu = Lu - Au - B\bar{u},$$

sendo L um operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes e $A, B \in \mathbb{C}$, obtivemos uma caracterização, por meio de uma condição diofantina, da resolubilidade de P. A partir dos argumentos da caracterização da resolubilidade de P, mostramos que a resolubilidade e a hipoeliticidade global de P são equivalentes. Como aplicação, analisamos os casos clássicos em que L é o operador do calor, da onda e um operador elíptico qualquer.

Nos casos elíptico e do calor, o operador P sempre será resolúvel, independente das constantes A e B. No caso do operador da onda, obtivemos condições necessárias e suficientes sobre as constantes A, B e η para que P seja resolúvel. Uma dessas condições envolve números de Lionville e recupera um conhecido resultado de S. Greenfield e N. Wallach (ver [15]) no caso bidimensional.

No Capítulo 3, estudaremos a resolubilidade de uma classe de operadores $P : C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}) \to C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ a coeficientes variáveis da forma

$$Pu = \frac{\partial}{\partial t}u - \sum_{j=1}^{n}(p_j(t) + i\lambda_j q(t))\frac{\partial}{\partial x_j}u - (s(t) + i\delta q(t))u - \alpha q(t)\bar{u},$$

com $p_j, q, s \in C^\infty(\mathbb{T}^1_t; \mathbb{R})$, $\lambda_j, \delta \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ e $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sob certas hipóteses sobre a função q e sobre as constantes λ, α e δ, é possível reduzir o problema à resolução de um sistema diagonalizável de equações diferenciais ordinárias.

A Seção 3.1, cujos resultados foram originalmente provados em [4], trata do caso $\mathbb{T}^2$, isto é, P é da forma

$$Pu = \frac{\partial}{\partial t}u + (p_0 + i\lambda q(t))\frac{\partial}{\partial x} + (s(t) + i\delta q(t))u - \alpha q(t)\bar{u},$$

com $q, s \in C^\infty(\mathbb{T}^1_t; \mathbb{R})$, $q \not\equiv 0$, $p_0, \lambda, \delta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. São apresentadas também algumas classes de exemplos. Na Seção 3.2, os resultados da seção anterior foram estendidos para o toro $\mathbb{T}^{n+1}$. Os argumentos foram adaptados de [6], no qual foi estudada a resolubilidade Gevrey destes operadores, para o caso suave.

No caso em que o operador P tem coeficientes constantes, obtemos condições necessárias e suficientes para que P seja resolúvel. Na classe de operadores a coeficientes variáveis estudada, as hipóteses pedidas garantem condições apenas suficientes. Por outro lado, estas condições garantem, mais do que a resolubilidade, a sobrejetividade do operador P.

No Capítulo 4, foram enunciadas definições e resultados importantes sobre espaços de funções ultradiferenciáveis e suas respectivas ultradistribuições. Demonstrações da maior parte dos resultados enunciados podem ser encontradas em [9]. Fixada uma sequência peso $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, consideramos o espaço $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$ definido do seguinte modo: $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ se existem $C, h > 0$ de modo que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, vale

$$\sup |\partial^\alpha f| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!.$$

As classes de funções que satisfazem este tipo de estimativa são conhecidas na literatura como classes de Denjoy-Carleman, do tipo Roumieu.

Por fim, nos Capítulos 5 e 6, adaptamos os resultados dos Capítulos 2 e 3 para resolubilidade e hipoeliticidade global de operadores diferenciais parciais lineares em espaços de funções ultradiferenciáveis. Vale observar que, como os espaços Gevrey são um caso particular das classes estudadas neste trabalho, obtivemos uma versão ultradiferenciável para os resultados obtidos em [4] assim como uma generalização dos resultados obtidos em [6].

Capítulo 1

Pré-Requisitos

Nesta seção, serão apresentados os pré-requisitos para a leitura deste trabalho. As demonstrações dos resultados sobre funções e distribuições periódicas, séries de Fourier, séries parciais de Fourier e operadores diferenciais podem ser encontrados em [26].

1.1 Multi-índices e Derivadas

Denotaremos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais (sem o zero) e por $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ o conjunto dos inteiros não-negativos.

Dado $n \in \mathbb{N}$, dizemos que um elemento $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) =\in \mathbb{N}_0^n$ é um multi-índice e definimos seu comprimento como sendo $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Dados dois multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, dizemos que $\beta < \alpha$ (ou $\beta \leq \alpha$) se $\beta_j < \alpha_j$ (ou $\beta_j \leq \alpha_j$) para todo $j = 1, \ldots, n$. Dada uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, denotaremos

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f,$$

sendo que, para cada $j = 1, \ldots, n$, $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ denota a derivada parcial com respeito à j-ésima variável.

Do mesmo modo, dados $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, denotaremos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Além disso, vale a seguinte fórmula: $|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|}$.

Definimos o fatorial de um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ por

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

Assim, dados $\alpha \geq \beta \in \mathbb{N}_0^n$, podemos definir o coeficiente binomial para multi-índices por

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!\beta!},$$

com $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

Com isso, obtemos a regra de Leibniz para multi-índices:

Proposição 1.1 (Fórmula de Leibniz)**.** Dados $f, g \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, temos que

$$\partial^\alpha (f \cdot g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \cdot \partial^{\alpha - \beta} g.$$

A fórmula abaixo é um caso particular da fórmula de Faà di Bruno para exponenciais que será bastante útil nos Capítulos 3 e 6.

Proposição 1.2 (Fórmula de Faà di Bruno)**.** Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{f(t)} = e^{f(t)} \sum_{\gamma \in \Delta(k)} \frac{k!}{\gamma!} \prod_{\ell=1}^{k} \left(\frac{1}{\ell!} \cdot \frac{d^\ell}{dt^\ell} f(t) \right)^{\gamma_\ell},$$

sendo $\Delta(k) = \left\{ \gamma \in \mathbb{N}_0^k \,:\, \sum_{\ell=1}^{k} \ell \gamma_\ell = k \right\}$.

1.2 Funções e Distribuições Periódicas

Definimos por

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,:\, f(x) = f(x + 2\pi J),\ \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall J \in \mathbb{Z}^n \}$$

o espaço das funções teste 2π-periódicas. É fácil ver que $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de funções e multiplicação de uma função por um escalar.

Dizemos que uma sequência $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ converge em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ se existe uma função $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que $\partial^\alpha f_j \to \partial^\alpha f$ uniformemente para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Temos que a noção convergência em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ dada acima coincide com a convergência em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ dada pela métrica

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(f-g)}{2^k(1+p_k(f-g))}, \quad f,g \in C^\infty(\mathbb{T}^n),$$

sendo

$$p_k(f) = \sup_{\substack{x\in[0,2\pi]^n \\ |\alpha|\leq k}} |\partial^\alpha f(x)|, \quad f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$$

uma seminorma em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$.

Teorema 1.3. Uma sequência $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ converge para f em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se, $p_k(f_j - f) \to 0$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. [26], p. 2, Teorema 1. □

Um funcional linear $u : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$ é dito contínuo se $u(\theta_j) \to 0$ em $\mathbb{C}$ para toda sequência $\{\theta_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$ com $\theta_j \to 0$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. O espaço vetorial $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ dos funcionais lineares contínuos definidos em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é chamado de espaço das distribuições periódicas. Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ e $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, denotamos $u(f) = \langle u, f\rangle$. Em outras palavras, $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ é o dual topológico de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Observação 1.4. Toda função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ integrável em $[0, 2\pi]^n$ pode ser vista como uma distribuição periódica com

$$\langle f, g\rangle = \int_{[0,2\pi]^n} f(x)g(x)\,dx$$

para toda função $g \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Em particular, toda função $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ pode ser vista como uma distribuição periódica.

Dadas $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ e $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, a multiplicação de f por u é a distribuição $fu \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ definida por

$$\langle fu, g\rangle = \langle u, fg\rangle\,, \quad \forall g \in C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

Dados $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$, definimos a derivada $\partial^\alpha u$ por

$$\langle \partial^\alpha u, f\rangle = \left\langle u, (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha f\right\rangle, \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

Note que, se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ é uma distribuição induzida por uma função $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, então a distribuição $\partial^\alpha u$ coincide com a distribuição induzida pela função $\partial^\alpha u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Teorema 1.5. Seja $u : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$ um funcional linear. Então $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se, existem $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}_0$ tais que $|\langle u, f\rangle| \leq C \sum\limits_{|\alpha|\leq k} \sup\limits_{x\in[0,2\pi]^n} |\partial^\alpha f(x)|$ para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. [26], p. 9, Teorema 1. □

Dizemos que uma sequência $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ converge em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ se existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ tal que, para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, a sequência $\{\langle u_j, f\rangle\}_{j\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{C}$ converge para $\langle u, f\rangle$. Naturalmente, podemos definir a convergência de uma série em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$. Seja $\{u_J\}_{J\in\mathbb{Z}^n}$ uma sequência em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$. Dizemos que a série $\sum\limits_{J\in\mathbb{Z}^n} u_J$ é convergente em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ se a sequência das somas parciais $s_\ell = \sum\limits_{\|J\|\leq\ell} u_J$, $\ell \in \mathbb{N}$, for convergente em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$.

1.3 Séries de Fourier

Uma sequência $\{c_J\}_{J\in\mathbb{Z}^n}$ em $\mathbb{C}$ é dita rapidamente decrescente se, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existir $C > 0$ tal que

$$|c_J| \leq C\|J\|^{-k}, \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$$

ou, equivalementemente, se, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existir $M > 0$ tal que

$$|c_J| \leq M(1 + \|J\|)^{-k}, \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n.$$

Teorema 1.6. Seja $\{c_J\}_{J\in\mathbb{Z}^n}$ uma sequência rapidamente decrescente. Então $f = \sum\limits_{J\in\mathbb{Z}^n} c_J e_J \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, sendo $e_J(x) = e^{iJ\cdot x}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $J \cdot x = J_1x_1 + \cdots + J_nx_n$.

Demonstração. [26], p. 50, Teorema 2. □

Teorema 1.7. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Então $f_J = (2\pi)^{-n} \int_{[0,2\pi]^n} f(x)e_{-J}(x)\,dx$ forma uma sequência rapidamente decrescente e $f(x) = \sum\limits_{J\in\mathbb{Z}^n} f_J e_J(x)$.

Demonstração. [26], p. 52, Teorema 3. □

Teorema 1.8. Se $u = \sum\limits_{J\in\mathbb{Z}^n} u_m \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$, então $\partial^\alpha u = \sum\limits_{J\in\mathbb{Z}^n} \partial^\alpha u_m$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Demonstração. [26], p. 47, Teorema 1. □

Uma sequência $\{c_J\}_{J\in\mathbb{Z}^n}$ em C é dita de crescimento lento se existirem $M > 0$ e $k \in \mathbb{N}_0$ tais que

$$|c_J| \leq M\|J\|^k, \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$$

ou, equivalentemente, se existirem $M > 0$ e $k \in \mathbb{N}_0$ tais que

$$|c_J| \leq M(1 + \|J\|)^k, \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n.$$

Teorema 1.9. Seja $\{u_J\}_{J\in\mathbb{Z}^n}$ uma sequência de crescimento lento. Então a série $\sum_{J\in\mathbb{Z}^n} u_J e_J$ é convergente em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$. Além disso, se $u = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} u_J e_J$, então $u_J = (2\pi)^{-n} \langle u, e_{-J}\rangle$ para todo $J \in \mathbb{Z}^n$.

Demonstração. [26], p. 63, Teorema 5. □

Teorema 1.10. Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$. Então $u_J = (2\pi)^{-n} \langle u, e_{-J}\rangle$ forma uma sequência de crescimento lento e $u = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} u_J e_J$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. [26], p. 65, Teorema 6. □

1.4 Séries Parciais de Fourier

Sejam $p, q, n \in \mathbb{N}$ tais que $p + q = n$. Vamos considerar a soma direta $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$. Vamos denotar $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ para indicar que $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$.

Teorema 1.11. Seja $\{f_J\}_{J\in\mathbb{Z}^q}$ uma sequência em $C^\infty(\mathbb{T}^p)$ tal que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $C > 0$ tal que

$$|\partial^\alpha \varphi_J(x)| \leq C(1 + \|J\|)^{-k}$$

para todo $J \in \mathbb{Z}^q$ e para todo $x \in \mathbb{R}^p$. Então a função $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(x, y) = \sum_{J\in\mathbb{Z}^q} f_J(x) e_J(y)$$

está bem definida e pertence a $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. [26], p. 71, Teorema 1. □

Teorema 1.12. Se $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, então $f(x,y) = \sum_{J \in \mathbb{Z}^q} f_J(x) e_J(y)$, sendo $f_J \in C^\infty(\mathbb{T}^p)$ dada por

$$f_J(x) = (2\pi)^{-q} \int_{[0,2\pi]^q} f(x,y) e^{-iJ\cdot y}\, dy.$$

Além disso, dados $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ e $k \in \mathbb{N}$, existe $M > 0$ tal que

$$|\partial^\alpha f_J(x)| \leq M(1 + \|J\|)^{-k}$$

para todo $J \in \mathbb{Z}^q$ e para todo $x \in \mathbb{R}^p$.

Demonstração. [26], p. 77, Teorema 2. □

Dadas $f \in C^\infty(\mathbb{T}^p)$ e $g \in C^\infty(\mathbb{T}^q)$, definimos o produto tensorial de f por g como sendo a função $f \otimes g \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ dada por $(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y)$.

Dadas $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^p)$ e $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^q)$, definimos o produto tensorial de u por v como sendo a única distribuição $u \otimes v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ que satisfaz

$$\langle u \otimes v, f\rangle = \langle u, \langle v, f(x,\,\cdot\,)\rangle\rangle = \langle v, \langle u, f(\,\cdot\,,y)\rangle\rangle$$

para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, sendo $\langle v, f(x,\,\cdot\,)\rangle \in C^\infty(\mathbb{T}^p)$ e $\langle u, f(\,\cdot\,,y)\rangle \in C^\infty(\mathbb{T}^q)$.

Teorema 1.13. Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$, então $u = \sum_{J \in \mathbb{Z}^q} u_J \otimes e_J$, sendo $u_J \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^p)$ dado por

$$\langle u_J, f\rangle = (2\pi)^{-q} \langle u, f \otimes e_{-J}\rangle$$

para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^p)$ e para todo $J \in \mathbb{Z}^q$. Além disso, para cada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^p)$, $\{\langle u_J, f\rangle\}_{J \in \mathbb{Z}^q}$ é uma sequência de crescimento lento.

Demonstração. [26], p. 82, Teorema 3. □

Observação 1.14. Denotaremos $u_J \otimes e_J = u_J e_J$ e, portanto, $u = \sum_{J \in \mathbb{Z}^q} u_J e_J$.

Teorema 1.15. Seja $\{u_J\}_{J \in \mathbb{Z}^q}$ uma sequência em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^p)$. Suponha que existem $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$|\langle u_J, f\rangle| \leq C p_k(f)(1 + \|J\|)^k$$

para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^p)$ e para todo $J \in \mathbb{Z}^q$. Então $u = \sum_{J \in \mathbb{Z}^q} u_J e_J \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. [26], p. 82, Teorema 4. □

1.5 Operadores Diferenciais

Um operador diferencial parcial linear em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é uma aplicação $P : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ da forma

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x)\partial^\alpha,$$

com $C_\alpha \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq m \in \mathbb{N}_0$. Dizemos que m é a ordem de P. Caso os coeficientes de P sejam constantes, isto é, P é da forma

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha\partial^\alpha$$

em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, com $C_\alpha \in \mathbb{C}$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq m$, definimos o símbolo de P como sendo o polinômio

$$\sigma_P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} i^{|\alpha|} C_\alpha \xi^\alpha, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definimos o símbolo principal de P como sendo a parte homogênea de grau m do símbolo σ_P, isto é,

$$\sigma_{m,P} = \sum_{|\alpha| = m} i^{|\alpha|} C_\alpha \xi^\alpha, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dizemos que P é elíptico quando $\sigma_{m,P}(\xi) = 0$ se, e somente se, $\xi = 0$.

Exemplo 1.16. O operador $P : C^\infty(\mathbb{T}^2) \to C^\infty(\mathbb{T}^2)$ dado por $Pu = \dfrac{\partial}{\partial t} + C\dfrac{\partial}{\partial x}$ é elíptico se, e somente se, Im$(C) \neq 0$.

Observe que $\sigma_{m,P} = \sigma_P(\xi, \tau) = i(\tau + C\xi)$.Temos que $\sigma_{m,P}(\xi, \tau) = 0$ se, e somente se, $\tau + C\xi = 0$. Isto ocorre apenas se $\xi = \tau = 0$ ou $\dfrac{\tau}{\xi} = C$. Caso Im$(C) \neq 0$, a segunda opção nunca poderá ocorrer. Logo, P é elíptico.

Por outro lado, se Im$(C) = 0$, isto é, se $C \in \mathbb{R}$, caso $C \neq 0$, o par $(C, C^2) \neq 0$ é raiz de $\sigma_{m,P}$. Caso $C = 0$, temos que $(\xi, 0) \neq 0$ é raiz de σ_P para todo $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Em particular, o operador de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

em $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ é elíptico.

Exemplo 1.17. Vejamos alguns exemplos clássicos de operadores elípticos e não-elípticos de ordem 2:

1. O Laplaciano $L = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ em $\mathbb{T}^n$ é elíptico. Observe que o símbolo principal de L é $\sigma_{2,L}(\xi) = -\xi \cdot \xi = -\|\xi\|^2$, com $\sigma_{2,L}(\xi) = 0$ se, e somente se, $\xi = 0$;
2. O operador do calor $L = \frac{\partial}{\partial t} - \eta^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $\eta > 0$, em $\mathbb{T}^{n+1}$ não é elíptico. Observe que o símbolo principal de L é $\sigma_{2,L}(\xi, \tau) = \eta^2 \|\xi\|^2$, sendo $(0, \tau)$ raiz de $\sigma_{2,L}$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$;
3. O operador da onda $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \eta^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $\eta > 0$, em $\mathbb{T}^{n+1}$ não é elíptico. Observe que o símbolo principal de L é $\sigma_{2,L}(\xi, \tau) = -\tau^2 + \eta^2 \|\xi\|^2$. Deste modo, se $\tau^2 = \eta^2 \|\xi\|^2$, o par (ξ, τ) é raiz de $\sigma_{2,L}$.

Proposição 1.18. Se P é um operador elíptico de ordem m e Q é um operador de ordem estritamente menor que m, então $P + Q$ é elíptico.

Demonstração. Observe que, como Q tem ordem estritamente menor que m e P tem ordem m, então $P + Q$ é um operador de ordem m. Como o símbolo de Q tem grau estritamente menor que m, o símbolo principal de $P + Q$ coincide com o símbolo principal de P, sendo P elíptico. $\square$

Teorema 1.19. Se $P : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é elíptico, então existem $R, M > 0$ tais que

$$\xi \in \mathbb{R}^n, \ \|\xi\| \geq R \ \Rightarrow \ |\sigma_P(\xi)| \geq M \|\xi\|^m.$$

Demonstração. [13], p. 272, Lema 17.4 . $\square$

Definição 1.20. Seja $P : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ um operador diferencial parcial linear. Dizemos que P é globalmente hipoelítico se

$$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) \text{ e } Pu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \ \Rightarrow \ u \in C^\infty(\mathbb{T}^n),$$

isto é, se $P^{-1}(C^\infty(\mathbb{T}^n)) \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Teorema 1.21 (Condição LMR)**.** Seja $P : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ um operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes. Então P é globalmente hipoelítico se, e somente se, existem $L, M, R > 0$ tais que

$$\|J\| \geq R \ \Rightarrow \ |\sigma_P(J)| \geq \frac{L}{\|J\|^{2M}}.$$

Observação 1.22. Este resultado apareceu pela primeira vez em um artigo de S. Greenfield e N. Wallach publicado em 1972 (ver [15]). Uma demonstração detalhada pode ser encontrada em [26], p. 93, Teorema 4. Outros trabalhos relacionados destes mesmos autores, incluindo uma conjectura conhecida que hoje leva o nome de ambos, contribuíram para que o interesse por esta área aumentasse nos anos seguintes.

Corolário 1.23. Todo operador elíptico em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é hipoelítico.

Demonstração. Se P é elíptico de ordem m, pelo Teorema 1.19, existem $R_0, M_0 > 0$ tais que

$$\|\xi\| \geq R_0 \ \Rightarrow \ |\sigma_P(\xi)| \geq M_0\|\xi\|^m \geq M\|\xi\|^{-m}.$$

Tomando $L = M_0$, $M = m/2$ e $R = R_0$, segue do Teorema 1.21 que P é globalmente hipoelítico. □

Dizemos que um número irracional α é de Liouville se, para todo $N \in \mathbb{N}$, existe $C > 0$ de modo que a equação

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^N}$$

possui infinitas soluções $p/q \in \mathbb{Q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Assim, se α é um número irracional não-Liouville, então existem constantes $C, L > 0$ tais que $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geq \dfrac{C}{q^L}$ para todo $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ (ver [24], p. 19, Lema 2.2). O resultado a seguir, originalmente provado no artigo de 1972 de S. Greenfield e N. Wallach (ver [15]), traz uma interessante relação entre números de Liouville e a hipoeliticidade global de campos vetoriais no toro $\mathbb{T}^2$:

Teorema 1.24. Considere o operador $P : C^\infty(\mathbb{T}^2) \to C^\infty(\mathbb{T}^2)$ dado por $Pu = \dfrac{\partial}{\partial t} - \alpha\dfrac{\partial}{\partial x}$, com $\alpha \in \mathbb{C}$. Então P é globalmente hipoelítico se, e somente se, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ou α é um número irracional não-Liouville.

Demonstração. [24], p. 21, Teorema 2.2. □

Exemplo 1.25. Vejamos alguns exemplos

1. O operador Laplaciano $L = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ em $\mathbb{T}^n$ é elíptico e, portanto, globalmente hipoelítico;

2. O operador do calor $L = \dfrac{\partial}{\partial t} - \eta^2 \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $\eta > 0$, em $\mathbb{T}^{n+1}$ é globalmente hipoelítico. O símbolo do operador L é dado por $\sigma_L(J,k) = ik + \eta^2\|J\|^2$, sendo $\|J\|^2 = J \cdot J$. Temos que
$$|\sigma_L(J,k)| \geq |\text{Re}(\sigma_L(J,k))| = \eta^2\|J\|^2$$
$$|\sigma_L(J,k)| \geq |\text{Im}(\sigma_L(J,k))| = |k|$$
e, portanto,
$$|\sigma_L(J,k)| \geq \frac{1}{2}(\eta^2\|J\|^2 + |k|) \geq \frac{C}{2}(\|J\| + |k|)^{-2},$$
com $C = \min\{1, \eta^2\}$. Segue do Teorema 1.21 que L é globalmente hipoelítico;

3. Considere o operador da onda $L = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \eta^2 \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ em $\mathbb{T}^{n+1}$. Observe que o símbolo de L é dado por
$$\sigma_L(\tau, \xi) = -(\tau - \eta\|\xi\|)(\tau + \eta\|\xi\|).$$
Temos que L será globalmente hipoelítico se, e somente se, $\eta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ou η é um número irracional não-Liouville. De fato, caso η seja racional ou um número de Liouville, para cada $N \in \mathbb{N}_0$, obtemos uma sequência $(\tau_l, \xi_l) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\})$ e uma constante $C > 0$ de modo que $|\tau - \eta\|\xi_l\|| < C(|\tau_l| + \|\xi_l\|)^{-N}$.

   Usando argumentos similares aos usados na demonstração do Teorema 1.24 (detalhes podem ser encontrados em [24] ou [26]), segue que L não é globalmente hipoelítico. A recíproca segue utilizando também argumentos similares aos da demonstração do Teorema 1.24.

Dado um operador diferencial
$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x)\partial^\alpha$$

em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, com $C_\alpha \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $|\alpha| \leq m$, o operador transposto ${}^tP$ é naturalmente definido usando as operações de multiplicação de função por distribuição e de diferenciação de distribuição:

$$ {}^tPu = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(C_\alpha(x)u), \ \forall u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n). $$

O próximo lema é particularmente útil quando houver necessidade de comutar um operador diferencial com uma série.

Lema 1.26. Seja P um operador diferencial parcial linear com coeficientes em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Então P é contínuo em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ e em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. Se $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ é tal que $u_j \to 0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$, para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, temos que $\langle u_j, f\rangle \to 0$ em $\mathbb{C}$. Assim, para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, temos que

$$ \langle Pu_j, f\rangle \ = \ \left\langle u_j, {}^tPf\right\rangle \ \to \ 0, $$

uma vez que ${}^tPf \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Logo, $Pu_j \to 0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ e, portanto, P é contínuo em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Se $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é tal que $f_j \to f$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, então $\partial^\alpha f_j \to \partial^\alpha f$ uniformemente para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Segue que $Pf_j \to f$ e, portanto, P é contínuo em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. $\square$

Parte I

Caso Suave

Capítulo 2

Operadores com Coeficientes Constantes

Neste capítulo, estudaremos a resolubilidade de operadores diferenciais parciais a coeficientes constantes $P : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ da forma

$$Pu = Lu - Au - B\bar{u},$$

com $A, B \in \mathbb{C}$ e $L : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ sendo um operador diferencial parcial linear a coeficientes constantes. Neste trabalho, consideraremos a seguinte noção de resolubilidade:

Definição 2.1. Um operador diferencial parcial linear $P : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é dito resolúvel se existe um subespaço $\mathcal{F} \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$ de codimensão finita, de modo que, para toda função $f \in \mathcal{F}$, existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que $Pu = f$.

Uma maneira de mostrar a resolubilidade (ou não) de um operador P em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é mostrar que existem finitas (ou infinitas) condições sobre os coeficientes de Fourier de uma $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ para que a expressão $Pu = f$ faça sentido. Chamamos estas condições de condições de compatibilidade.

Na primeira seção deste capítulo, apresentamos demonstrações detalhadas dos resultados da Seção 2 de [4], no qual L é um campo vetorial no toro bidimensional. Na segunda seção, estendemos estes resultados para um toro de dimensão qualquer. Os resultados desta seção consistem numa adaptação dos resultados da Seção 2 de [6] para o caso suave. Por fim, na terceira seção, obtemos uma generalização destes resultados para um toro de dimensão qualquer e L um operador diferencial com coeficientes constantes qualquer. Os resultados desta última seção surgiram a partir de uma sugestão do professor P. L. Dattori da Silva.

As demonstrações nas três seções deste capítulo são bastante similares e usam essencialmente os mesmos argumentos. Optamos por manter todas as demonstrações tanto pelo caráter didático do texto quanto pelo respeito à forma de apresentação na literatura, assim como pela elegância intrínseca da argumentação utilizada no caso bidimensional.

2.1 Caso $\mathbb{T}^2$

Considere o operador $P : C^\infty(\mathbb{T}^2) \to C^\infty(\mathbb{T}^2)$ dado por

$$Pu = \frac{\partial}{\partial t}u + C\frac{\partial}{\partial x}u - Au - B\bar{u},$$

com $A, B, C \in \mathbb{C}$. Dada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, queremos obter $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tal que $Pu = f$. Considere as séries de Fourier

$$u(x,t) = \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} u_{j,k}e^{i(jx+kt)} \quad \text{e} \quad f(x,t) = \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} f_{j,k}e^{i(jx+kt)}.$$

Da continuidade de P, temos que

$$\begin{aligned}
Pu(x,t) &= \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + C\frac{\partial}{\partial x} - A\right)\left(u_{j,k}e^{i(jx+kt)}\right) - B\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \overline{u_{j,k}e^{i(jx+kt)}} \\
&= \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} [i(k+Cj) - A]\, u_{j,k}e^{i(jx+kt)} - B\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \overline{u_{j,k}}e^{-i(jx+kt)} \\
&= \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} [i(k+Cj) - A]\, u_{j,k}e^{i(jx+kt)} - B\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \overline{u_{-j,-k}}e^{i(jx+kt)}.
\end{aligned}$$

Suponha que $Pu = f$. Deste modo, para cada $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$, temos que

$$[i(k+Cj) - A]\, u_{j,k} - B\overline{u_{-j,-k}} = f_{j,k}.$$

Tomando o conjugado da equação anterior para o par $(-j,-k) \in \mathbb{Z}^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{f_{-j,-k}} &= [-i((-k) + \bar{C}(-j)) - \bar{A}]\overline{u_{-j,-k}} - \bar{B}u_{j,k} \\
&= -\bar{B}u_{j,k} + [i(k+\bar{C}j) - \bar{A}]\overline{u_{-j,-k}},
\end{aligned}$$

o que nos leva ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases}
[i(k+Cj) - A]\, u_{j,k} - B\overline{u_{-j,-k}} = f_{j,k} \\
-\bar{B}u_{j,k} + [i(k+\bar{C}j) - \bar{A}]\overline{u_{-j,-k}} = \overline{f_{-j,-k}}
\end{cases}$$

Resolvendo o sistema para $u_{j,k}$, obtemos

$$\Delta_{j,k}u_{j,k} = [i(k+\bar{C}j) - \bar{A}]f_{j,k} + B\overline{f_{-j,-k}}, \tag{2.1}$$

sendo $\Delta_{j,k}$ o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, dado por

$$\begin{aligned}
\Delta_{j,k} &= [i(k+Cj) - A][i(k+j\bar{C}) - \bar{A}] - B\bar{B} \\
&= -(k+Cj)(k+j\bar{C}) - i\bar{A}(k+Cj) - iA(k+j\bar{C}) + A\bar{A} - B\bar{B} \\
&= -(k+Cj)\overline{(k+Cj)} - i\overline{A(k+j\bar{C})} - iA(k+j\bar{C}) + |A|^2 - |B|^2 \\
&= -|k+Cj|^2 + |A|^2 - |B|^2 - 2i\mathrm{Re}(A(k+\bar{C}j)).
\end{aligned}$$

Observe que, como $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, as sequências $\{f_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ e $\{\overline{f_{-j,-k}}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ são rapidamente decrescentes. Logo, para provar que os coeficientes de Fourier

$$u_{j,k} = \frac{1}{\Delta_{j,k}}\left([i(k+\bar{C}j) - \bar{A}]f_{j,k} + B\overline{f_{-j,-k}}\right) \tag{2.2}$$

correspondem aos de uma função em $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ solução de $Pu = f$, precisamos garantir que a expressão acima esteja bem definida a menos de uma quantidade finita de pares $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$. Além disso, precisamos garantir que qualquer eventual crescimento de $\Delta_{j,k}^{-1}$ possa ser absorvido pelo decaimento de $[i(k+\bar{C}j)-\bar{A}]f_{j,k}+B\overline{f_{-j,-k}}$, isto é, que $\{\Delta_{j,k}^{-1}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ seja no máximo uma sequência de crescimento lento. Para garantir este controle, introduzimos a seguinte condição diofantina para um par $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$:

(DC1) Existe uma constante $\gamma > 0$ tal que

$$j,k \in \mathbb{Z},\ |j|+|k| \geq \gamma \ \Rightarrow\ |k+\xi j-\eta| \geq (|j|+|k|)^{-\gamma}.$$

Uma condição equivalente a (DC1) para um par $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ é

(DC2) Existe uma constante $\gamma > 0$ tal que

$$j,k \in \mathbb{Z},\ |j|+|k| \geq \gamma \ \Rightarrow\ |(k+\xi j)^2-\eta^2| \geq (|j|+|k|)^{-\gamma}.$$

De fato, isto segue da fatoração

$$|(k+\xi j)^2-\eta^2| = |k+\xi j-\eta|\cdot|(-k)+\xi(-j)-\eta|.$$

Suponha que (DC1) seja válida. Então existe $\gamma_0 > 0$ tal que

$$j, k \in \mathbb{Z},\ |j| + |k| \geq \gamma_0 \ \Rightarrow\ |k + \xi j - \eta| \geq (|j| + |k|)^{-\gamma_0}.$$

Com isso, para $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$, $|j| + |k| \geq \gamma_0$, temos

$$|(k + \xi j)^2 - \eta^2| = |k + \xi j - \eta| \cdot |(-k) + \xi(-j) - \eta| \geq (|j| + |k|)^{-2\gamma_0}.$$

Tomando $\gamma = 2\gamma_0$, segue que vale (DC2).

Por outro lado, suponha que não vale (DC1). Então, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, existe $(j_\ell, k_\ell) \in \mathbb{N}$ tal que $|j_\ell| + |k_\ell| \geq \ell + m + 1$ e $|k_\ell + \xi j_\ell - \eta| < (|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell-m-1}$, sendo $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^m \geq \max\{1, |\xi|, |\eta|\}$. Deste modo, temos

$$\begin{aligned}
|(k_\ell + \xi j_\ell)^2 - \eta^2| &= |k_\ell + \xi j_\ell - \eta| \cdot |(-k_\ell) + \xi(-j_\ell) - \eta| \\
&< (|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell-m-1} \left[|\eta| + \max\{1, |\xi|\}(|j_\ell| + |k_\ell|)\right] \\
&\leq \max\{1, |\xi|, |\eta|\}(|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell-m} \\
&\leq 2^{-m} \max\{1, |\xi|, |\eta|\}(|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell} \\
&\leq (|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell}.
\end{aligned}$$

Portanto, não vale (DC2).

O teorema a seguir é o principal resultado desta seção. São apresentadas quatro condições sobre os coeficientes de P. As três primeiras nos garantem a existência de uma constante $C > 0$ de modo que $|\Delta_{j,k}| \geq C > 0$ exceto para uma quantidade finita de índices. Desconsiderando os índices onde $\Delta_{j,k}$ eventualmente zere, teremos que $\{\Delta_{j,k}^{-1}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ será controlada por uma constante positiva. Por (2.2) e pelo fato de que $\{f_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ é rapidamente decrescente, garantiremos que $\{u_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ corresponde aos coeficientes de Fourier de uma função $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ solução de $Pu = f$. Quando nenhuma das primeiras condições é válida, a condição diofantina presente na quarta condição desempenhará o mesmo papel.

Em todos os casos, obtemos a resolubilidade do operador P. Além disso, estas condições são suficientes. De fato, caso nenhuma das quatro condições apresentadas seja válida, em particular, não vale a condição diofantina (DC1). A não-validade de (DC1) nos permitirá obter uma infinidade de funções $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ linearmente independentes de modo que, se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ satisfaz $Pu = f$, então $u \notin C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Isto nos garantirá que o espaço das funções $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ que admitem solução suave para $Pu = f$ tem codimensão infinita.

Teorema 2.2. O operador P é resolúvel se, e somente se, uma das condições abaixo é satisfeita:

(1) $|B| > |A|$;

(2) $\mathrm{Im}(C) \neq 0$;

(3) $|B| < |A|$ e $\mathrm{Re}(A) \neq 0$;

(4) O par $(C, \sqrt{|A|^2 - |B|^2})$ pertence a $\mathbb{R}^2$ e satisfaz (DC1).

Demonstração. Suficiência: Vamos analisar o que ocorre quando vale cada uma das quatro condições do enunciado.

Primeiro, suponha que a condição (1) seja satisfeita. Então, para todo $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$, temos que

$$\begin{aligned} |\Delta_{j,k}| \ \geq \ |\mathrm{Re}(\Delta_{j,k})| \ &= \ |-|k + Cj|^2 + |A|^2 - |B|^2| \\ &= \ |k + Cj| + |B|^2 - |A|^2 \ \geq \ |B|^2 - |A|^2 \ > \ 0. \end{aligned}$$

Assim, existe $K > 0$ tal que $|\Delta_{j,k}|^{-1} \leq K$ para todo $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$ e, com isso, a sequência $\{u_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ em $\mathbb{C}$ dada por

$$u_{j,k} = \frac{[i(k + \bar{C}j) - \bar{A}]f_{j,k} + B\overline{f_{-j,-k}}}{\Delta_{j,k}}$$

é rapidamente decrescente. Segue que

$$u(x,t) = \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} u_{j,k} e^{i(jx+kt)}$$

pertence a $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ e $Pu = f$ por construção. Como $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ foi tomada de maneira arbitrária, temos que P é resolúvel. Mais ainda, temos a sobrejetividade do operador P.

Suponha agora que a condição (2) seja satisfeita. Podemos supor também $|B| \leq |A|$, caso contrário, o problema se reduz ao caso anterior.

Observe que, neste caso, o operador $Q = \dfrac{\partial}{\partial t} + C\dfrac{\partial}{\partial x}$ é elíptico e, portanto, existem $R, M > 0$ tais que

$$|j| + |k| \geq R \ \Rightarrow \ |k + Cj| \geq M(|j| + |k|).$$

Deste modo, temos que $|j| + |k| \geq R$ implica

$$|\Delta_{j,k}| \ \geq \ |k + Cj|^2 + |B|^2 - |A|^2 \ \geq \ M^2(|j| + |k|)^2 + |B|^2 - |A|^2.$$

Como $|B|^2 - |A|^2 \leq 0$, basta tomarmos $R_0 > R$ suficientemente grande de modo que $M^2 + \dfrac{|B|^2 - |A|^2}{R_0^2} \geq 0$. Assim, para $|j| + |k| \geq R_0$, teremos

$$\begin{aligned} M^2(|j|+|k|)^2 + |B|^2 - |A|^2 &= M^2(|j|+|k|)^2 + \frac{|B|^2 - |A|^2}{(|j|+|k|)^2}(|j|+|k|)^2 \\ &= \left(M^2 + \frac{|B|^2 - |A|^2}{(|j|+|k|)^2}\right)(|j|+|k|)^2 \\ &\geq \left(M^2 + \frac{|B|^2 - |A|^2}{R_0^2}\right)(|j|+|k|)^2. \end{aligned}$$

Para obter a última desigualdade, basta observar que $(|j|+|k|)^2 \geq R_0^2$. Logo,

$$\frac{1}{(|j|+|k|)^2} \leq \frac{1}{R_0^2}.$$

Como $|B|^2 - |A^2| \leq 0$, segue que

$$\frac{|B|^2 - |A|^2}{(|j|+|k|)^2} \geq \frac{|B|^2 - |A|^2}{R_0^2}.$$

Tomando $M_0 = M^2 + \dfrac{|B|^2 - |A|^2}{R_0^2}$, temos que

$$|j| + |k| \geq R_0 \ \Rightarrow |\Delta_{j,k}| \geq M_0(|j|+|k|)^2.$$

Deste modo, caso $\mathrm{Im}(C) \neq 0$, podemos supor que existem $R, M > 0$ tais que

$$|j| + |k| \geq R \ \Rightarrow \ |\Delta_{j,k}| \geq M(|j|+|k|)^2. \tag{2.3}$$

Considere então o conjunto $\Lambda = \{(j,k) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ \Delta_{j,k} = 0\}$, o qual é finito, pois está contido em $\{(j,k) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ |j| + |k| \leq R\}$. Observe que (2.1) é satisfeita para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ com $f_{j,k} = 0$ para todo $(j,k) \in \Lambda$. Nestas condições, por (2.3), $u_{j,k}$ é rapidamente decrescente.

Observe que $\mathcal{F} = \{f \in C^\infty(\mathbb{T}^2) \ : \ f_{j,k} = 0, \ \forall (j,k) \in \Lambda\}$ tem codimensão finita. De fato, dada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, escrevendo

$$f(x,t) \ = \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2\setminus\Lambda} u_{j,k}e^{i(jx+kt)} + \sum_{(j,k)\in\Lambda} u_{j,k}e^{i(jx+kt)},$$

verificamos que o primeiro termo da decomposição acima pertence a $\mathcal{F}$ e o segundo pertence ao subespaço de $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ gerado pelas frequências Λ, o qual claramente tem dimensão finita. Assim, para cada $f \in \mathcal{F}$, existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tal que $Pu = f$, sendo $\mathcal{F}$ um espaço de codimensão finita, o que nos dá a resolubilidade de P.

Suponha agora que (3) seja satisfeita e que $\text{Im}(C) = 0$. Caso contrário, o problema recai no caso anterior. Como $|A|^2 - |B|^2 > 0$, vamos analisar os dois casos abaixo:

(i) Se $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$ e $|k + Cj|^2 \leq \frac{1}{2}(|A|^2 - |B|^2)$, então

$$|\Delta_{j,k}|^2 \geq (\text{Re}(\Delta_{j,k}))^2 = (-|k + Cj|^2 + |A|^2 - |B|^2)^2 \geq \frac{1}{4}(|A|^2 - |B|^2)^2 > 0.$$

(ii) Se $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$ e $|k + Cj| > \frac{1}{2}(|A|^2 - |B|^2)$, então

$$\begin{aligned} |\Delta_{j,k}|^2 &\geq (\text{Im}(\Delta_{j,k}))^2 = [2\text{Re}(A(k + \bar{C}j))]^2 = [2\text{Re}(A(k + Cj))]^2 \\ &= 4(k + Cj)^2(\text{Re}(A))^2 > 2(|A|^2 - |B|^2)^2(\text{Re}(A))^2 > 0. \end{aligned}$$

Tomando

$$K = \min\left\{(|A|^2 - |B|^2)/2,\, \text{Re}(A)(|A|^2 - |B|^2)\sqrt{2}\right\} > 0,$$

temos que $|\Delta_{j,k}|^{-1} \leq K^{-1}$ para todo $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$. Daqui, segue que a sequência $\{u_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ é rapidamente decrescente. Logo, o operador P é resolúvel.

Por fim, suponha que a condição (4) seja satisfeita. Como o par $(C, \sqrt{|A|^2 - |B|^2})$ pertence a $\mathbb{R}^2$, temos que $\text{Im}(C) = 0$ e $|A| \geq |B|$. Além disso, como este par satisfaz (DC1), usando a forma equivalente (DC2), existe $\gamma > 0$ tal que

$$|j| + |k| \geq \gamma \Rightarrow \left||k + Cj|^2 - (|A|^2 - |B|^2)\right| \geq (|j| + |k|)^{-\gamma}.$$

Assim como no caso da condição (2), $\{u_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ irá satisfazer (2.1) e será rapidamente decrescente se $f_{j,k} = 0$ para todo $(j,k) \in \Lambda = \{(j,k) \in \mathbb{Z}^2 : \Delta_{j,k} = 0\}$. Como Λ é finito, o espaço $\{f \in C^\infty(\mathbb{T}^2) : f_{j,k} = 0,\ \forall (j,k) \in \Lambda\}$ tem codimensão finita e, portanto, P é resolúvel.

Necessidade: Suponha agora que nenhuma das condições (1)-(4) seja verdadeira. Neste caso, considerando a equivalência entre (DC1) e (DC2), temos duas possibilidades:

(5) $|B| < |A|$, $\text{Im}(C) = 0$, $\text{Re}(A) = 0$ e o par $(C, \sqrt{|A|^2 - |B|^2}) \in \mathbb{R}^2$ não satisfaz (DC2);

(6) $|B| = |A|$, $\text{Im}(C) = 0$ e o par $(C, 0) \in \mathbb{R}^2$ não satisfaz (DC1).

Suponha que vale (5). Como Re$(A) = 0$ e Im$(C) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \Delta_{j,k} &= -|k + Cj|^2 + |A|^2 - |B|^2 \\ &= -\left[(k + Cj) + \sqrt{|A|^2 - |B|^2}\right] \cdot \left[(k + Cj) - \sqrt{|A|^2 - |B|^2}\right]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como o par $(C, \sqrt{|A|^2 - |B|^2})$ não satisfaz (DC2), para cada $\ell \in \mathbb{N}$, existe $(j_\ell, k_\ell) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $|j_\ell| + |k_\ell| \geq \ell$ e

$$|\Delta_{j_\ell,k_\ell}| \;=\; |(k_\ell + Cj_\ell)^2 - (|A|^2 - |B|^2)| \;<\; (|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell}. \tag{2.5}$$

No caso em que vale (6), obtemos uma desigualdade semelhante à do caso anterior. Como $|A| = |B|$ e Im$(C) = 0$, temos que

$$\Delta_{j,k} = -|k + Cj|^2 - 2i(k + Cj)\text{Re}(A),$$

o que nos dá a seguinte desigualdade:

$$|k + Cj|^2 \;\leq\; |\Delta_{j,k}| \;\leq\; |k + Cj|\big(|k + Cj| + 2|\text{Re}(A)|\big). \tag{2.6}$$

Como o par $(C, 0) \in \mathbb{R}^2$ não satisfaz (DC1), para cada $\ell \in \mathbb{N}$, existe $(j_\ell, k_\ell) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $|j_\ell| + |k_\ell| \geq \ell$ e

$$|k_\ell + Cj_\ell| \;=\; |(k_\ell + Cj_\ell) - 0| \;<\; (|j_\ell| + |k_\ell|)^{-2\ell}. \tag{2.7}$$

Por (2.6) e (2.7), temos

$$\begin{aligned} |\Delta_{j_\ell,k_\ell}| &\leq |k_\ell + Cj_\ell|(|k_\ell + Cj_\ell| + 2|\text{Re}(A))| \\ &< (|j_\ell| + |k_\ell|)^{-2\ell}[(|j_\ell| + |k_\ell|)^{-2\ell} + 2|\text{Re}(A)|] \\ &= (|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell}[(|j_\ell| + |k_\ell|)^{-3\ell} + 2(|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell}|\text{Re}(A)|]. \end{aligned}$$

Observe que $|j_\ell| + |k_\ell| \geq \ell \to \infty$ com $\ell \to \infty$. Com isso, temos que

$$(|j_\ell| + |k_\ell|)^{-3\ell} + 2(|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell}|\text{Re}(A)| < 1$$

para ℓ suficientemente grande. Passando a uma subsequência, temos então

$$|\Delta_{j_\ell,k_\ell}| < (|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Deste modo, podemos analisar juntos os casos em que valem as condições (5) ou (6) por meio da sequência $\{(j_\ell, k_\ell)\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^2$. Passando a uma subsequência, caso necessário, podemos supor que todos os k_ℓ são diferentes de zero e possuem o mesmo sinal. Considere o conjunto

$$\Omega = \{(j_\ell, k_\ell) \in \mathbb{Z}^2 \;:\; \ell \in \mathbb{N}\}.$$

Observe que a maneira como a sequência $\{(j_\ell, k_\ell)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ foi escolhida implica que os conjuntos Ω e $-\Omega = \{-(j,k) \in \mathbb{Z}^2 \;:\; (j,k) \in \Omega\}$ são disjuntos.

Dividiremos a prova em dois casos, levando em conta a quantidade de vezes em que Δ_{j_ℓ,k_ℓ} se anula.

Caso (a): $\Delta_{j_\ell,k_\ell} = 0$ para uma infinidade de índices $\ell \in \mathbb{N}$.

Neste caso, passando a uma subsequência, podemos supor $\Delta_{j_\ell,k_\ell} = 0$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$.

Suponha primeiramente que $B = 0$ e $A \neq 0$. Neste caso, temos $|A| > |B|$, o que recai na condição (5). Com isso, temos $\mathrm{Re}(A) = 0$ e, portanto, $A = -\bar{A}$. Para todo $(j,k) \in \Omega$, vale

$$\begin{aligned} 0 = |\Delta_{j,k}| &= |i(k + Cj) - A| \cdot |i(k + Cj) - \bar{A}| \\ &= |i(k + Cj) + \bar{A}| \cdot |i(k + Cj) - \bar{A}| \\ &= |i((-k) + C(-j)) - \bar{A}| \cdot |i(k + Cj) - \bar{A}|. \end{aligned}$$

Segue da igualdade acima que $\Delta_{j,k} = \Delta_{-j,-k} = 0$ para todo $(j,k) \in \Omega$. Neste caso, para $(j,k) \in \Omega \cup (-\Omega)$, a equação (2.1) se reduz a

$$[i(k + Cj) - \bar{A}]f_{j,k} = [i(k + Cj) + A]f_{j,k} = 0. \tag{2.9}$$

Deste modo, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, vale uma (e apenas uma) das situações abaixo:

- $i(k_\ell + Cj_\ell) - \bar{A} = 0$ ou
- $i((-k_\ell) + C(-j_\ell)) - \bar{A} = 0$.

De fato, caso ambas as identidades fossem válidas para algum $\ell \in \mathbb{N}$, teríamos $A = 0$. Assim, caso $i(k_\ell + Cj_\ell) - \bar{A} \neq 0$, teremos $f_{-j_\ell,-k_\ell} = 0$ e, caso $-i(k_\ell + Cj_\ell) - \bar{A} = 0$, teremos $f_{j_\ell,k_\ell} = 0$. Deste modo, teremos $f_{j,k} = 0$ para uma infinidade de índices $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$.

Suponha agora que $A = B = 0$. Então, para $(j,k) \in \pm\Omega$, temos $\Delta_{j,k} = -|k + Cj|^2 = 0$, o que implica $C \in \mathbb{Q}$. Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ e $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ são tais que $Pu = f$, então seus coeficientes de Fourier devem satisfazer

$$i(k + Cj)u_{j,k} = f_{j,k}, \quad \forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2.$$

Como $C \in \mathbb{Q}$, existe uma infinidade de pares $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$ tais que $k + Cj = 0$ e, portanto, a fim de que valha $Pu = f$, é necessário que $f_{j,k} = 0$ para uma infinidade de pares $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$.

Finalmente, suponha que $B \neq 0$. Segue de (2.1) que os coeficientes de Fourier de f devem satisfazer

$$[i(k_\ell + Cj_\ell) - \bar{A}]f_{j_\ell,k_\ell} + B\overline{f_{-j_\ell,-k_\ell}} = 0, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}, \tag{2.10}$$

isto é, o coeficiente $f_{-j_\ell,-k_\ell}$ deve ser um múltiplo de f_{j_ℓ,k_ℓ} para todo $\ell \in \mathbb{N}$.

Considere o subespaço $\mathcal{F}_0$ de $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ gerado pelas exponenciais $e^{i(jx+kt)}$, com $(j,k) \in \mathbb{N}^2$. É imediato que $\mathcal{F}_0$ tem dimensão infinita e, além disso, se $f \in \mathcal{F}$, então f não satisfaz (2.10) e, portanto, f não admite solução suave para $Pu = f$.

Observe que, nas três possibilidades acima, temos uma infinidade de condições de compatibilidade sobre os coeficientes de Fourier de f a fim de que $Pu = f$ tenha solução suave. Com isso, o subespaço de $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ das funções que admitem solução suave para $Pu = f$ possui codimensão infinita. Concluímos que P não é resolúvel.

Caso (b): $\Delta_{j_\ell,k_\ell} = 0$ para uma quantidade finita de índices $\ell \in \mathbb{N}$.

Neste caso, passando a uma subsequência, por (2.5) e (2.8), podemos supor que

$$0 < |\Delta_{j_\ell,k_\ell}| < (|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Suponha que $B \neq 0$, seja Ω_0 um subconjunto infinito de Ω. Por (2.11), temos que

$$f(x,t) = \sum_{(j,k)\in\Omega_0} \Delta_{j,k} e^{i(jx+kt)},$$

define uma função em $C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Como os inteiros k_ℓ têm o mesmo sinal para todo $\ell \in \mathbb{N}$, temos que $f_{-j,-k} = 0$ para todo $(j,k) \in \Omega_0$. Note que, se $Pu = f$ possui solução, esta não é necessariamente única (pode ocorrer de $\Delta_{j,k} = 0$ para $(j,k) \notin \Omega_0$. Por outro lado, a projeção de qualquer solução no subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ gerado pelas frequências $\pm\Omega_0$ é única e dada por

$$v(x,t) = \sum_{(j,k)\in\Omega_0} Be^{-i(jx+kt)} + \sum_{(j,k)\in\Omega_0} [i(k + Cj) - \bar{A}]e^{i(jx+kt)}. \tag{2.12}$$

De fato, observe que, se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ é solução de $Pu = f$, seja

$$v(x,t) = \sum_{(j,k)\in\pm\Omega_0} v_{j,k} e^{i(jx+kt)}$$

tal projeção. Para cada $(j,k) \in \Omega_0$, temos

$$\Delta_{j,k} v_{j,k} \; = \; [i(k+Cj) - \bar{A}] f_{j,k} + B\overline{f_{-j,-k}} \; = \; [i(k+Cj) - \bar{A}]\Delta_{j,k},$$

uma vez que $f_{-j,-k} = 0$ para $(j,k) \in \Omega$. Do mesmo modo, observando que $\overline{\Delta_{j,k}} = \Delta_{-j,-k}$, para cada $(j,k) \in -\Omega$, isto é, $(-j,-k) \in \Omega$, temos

$$\Delta_{j,k} v_{j,k} \; = \; [i(k+Cj) - \bar{A}] f_{j,k} + B\overline{f_{-j,-k}} \; = \; B\overline{\Delta_{-j,-k}} = B\Delta_{j,k}.$$

Deste modo, se $(j,k) \in \Omega_0$, temos que

$$v_{j,k} = [i(k+Cj) - \bar{A}] \quad \text{e} \quad v_{-j,-k} = B.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} v(x,t) \; &= \; \sum_{(j,k)\in\pm\Omega_0} v_{j,k} e^{i(jx+kt)} \\ &= \; \sum_{(j,k)\in-\Omega_0} B e^{i(jx+kt)} + \sum_{(j,k)\in\Omega_0} [i(k+Cj) - \bar{A}] e^{i(jx+kt)} \\ &= \; \sum_{(j,k)\in\Omega_0} B e^{-i(jx+kt)} + \sum_{(j,k)\in\Omega_0} [i(k+Cj) - \bar{A}] e^{i(jx+kt)}. \end{aligned}$$

A soma acima em $-\Omega_0$ garante que $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^2)$ e, portanto, toda solução de $Pu = f$ estará em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Como isso ocorre para todo subconjunto infinito $\Omega_0 \subset \Omega$, obtemos uma quantidade infinita de funções $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ linearmente independentes para as quais não existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ solução de $Pu = f$. Seja $\mathcal{F}_0$ o espaço (de dimensão infinita) gerado por estas funções. Seja $\mathcal{F} \subset C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tal que $C^\infty(\mathbb{T}^2) = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}$. Se $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ é tal que existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ satisfazendo $Pu = f$, então $f \in \mathcal{F}$ necessariamente. Como $\mathcal{F}_0$ tem dimensão infinita, o espaço no qual deveríamos procurar soluções de $Pu = f$ tem codimensão infinita. Deste modo, P não é resolúvel.

Se $B = 0$, observe que

$$(|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell} > |\Delta_{j_\ell,k_\ell}| = |i(k_\ell + Cj_\ell) - A| \cdot | - i(k_\ell + Cj_\ell) - A|, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}$$

e, portanto,

$$|i(k_\ell + Cj_\ell) - A| < (|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell/2} \quad \text{ou} \quad | - i(k_\ell + Cj_\ell) - A| < (|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell/2}$$

para uma infinidade de índices $\ell \in \mathbb{N}$. Suponha que $|i(k_\ell + Cj_\ell) - A| < (|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell/2}$ para uma infinidade de índices $\ell \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência de $\{(j_\ell, k_\ell)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$, caso necessário, podemos supor

$$|i(k_\ell + Cj_\ell) - A| < (|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell/2}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Tomando $\Omega_0 \subset \Omega$ infinito, por (2.13), temos que

$$f(x,t) = \sum_{(j,k)\in\Omega_0} [i(k + Cj) - A] e^{i(jx+kt)}$$

define uma função em $C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Se u é solução de $Pu = f$, para cada $(j, k) \in \Omega_0$, temos

$$[i(k + Cj) - \bar{A}] \cdot [i(k + Cj) - A] u_{j,k} \ = \ \Delta_{j,k} u_{j,k}.$$

Porém,

$$\Delta_{j,k} u_{j,k} \ = \ [i(k + Cj) - \bar{A}] f_{j,k} \ = \ [i(k + Cj) - \bar{A}] \cdot [i(k + Cj) - A],$$

o que nos leva a $u_{j,k} = 1$. Assim, a projeção de u no subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ gerado pelas frequências Ω_0 é dada por

$$v(x,t) = \sum_{(j,k)\in\Omega_0} e^{i(jx+kt)}. \tag{2.14}$$

Temos que $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^2)$ e, portanto, se u é solução de $Pu = f$, então $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^2)$.

Se tivermos $|i(k_\ell + Cj_\ell) - \bar{A}| = | - i(k_\ell + Cj_\ell) - A| < (|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell/2}$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$ (passando a uma subsequência), basta tomar f no caso anterior com frequências em $-\Omega_0$.

Como esta construção vale para todo $\Omega_0 \subset \Omega$ infinito, obtemos uma infinidade de funções $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ linearmente independentes de modo que não existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ solução de $Pu = f$. Logo, P não é resolúvel. $\square$

Com os argumentos do teorema anterior, podemos estabelecer condições necessárias e suficientes para que o operador P seja globalmente hipoelítico. No caso onde nenhuma das condições (1)-(4) sejam verdadeiras, obtivemos duas possibilidades:

(5) $|B| < |A|$, $\text{Im}(C) = 0$, $\text{Re}(A) = 0$ e o par $(C, \sqrt{|A|^2 - |B|^2}) \in \mathbb{R}^2$ não satisfaz (DC1);

(6) $|B| = |A|$, $\text{Im}(C) = 0$ e o par $(C, 0) \in \mathbb{R}^2$ não satisfaz (DC1).

Podemos enunciar as condições (5) e (6) de maneira equivalente do seguinte modo:

(7) O par $(C, \sqrt{|A|^2 - |B|^2})$ pertence a $\mathbb{R}^2$ mas não satisfaz (DC1). Além disso, se $|A| > |B|$, então $\text{Re}(A) = 0$.

Teorema 2.3. O operador P não é globalmente hipoelítico se, e somente se, vale a seguinte condição (7) acima.

Demonstração. A necessidade segue de maneira imediata do teorema anterior.

Vejamos que a condição (7) é suficiente. Se a condição (7) é satisfeita, então existe uma sequência $\{(j_\ell, k_\ell)\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^2$ tal que $|j_\ell| + |k_\ell| \geq \ell$ e

$$|k_\ell + Cj_\ell - \sqrt{|A|^2 - |B|^2}| < (|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N},$$

uma vez que o par $(C, \sqrt{|A|^2 - |B|^2})$ não satisfaz (DC1).

Caso (a): Suponha que o conjunto

$$E = \{\ell \in \mathbb{N} \,:\, k_\ell - Cj_\ell - \sqrt{|A|^2 - |B|^2} = 0\}$$

é infinito.

Se $B \neq 0$, tome $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^2)$ dada por

$$u(x,t) = \sum_{\ell \in E} Be^{-i(j_\ell x + k_\ell t)} + \sum_{\ell \in E} [i(k_\ell + Cj_\ell) - \bar{A}]e^{i(j_\ell x + k_\ell t)},$$

como em (2.12). Neste caso, temos

$$Pu(x,t) = \sum_{\ell \in E} \Delta_{j_\ell, k_\ell} e^{i(j_\ell x + k_\ell t)} = 0 \in C^\infty(\mathbb{T}^2).$$

De fato, note que $k_\ell - Cj_\ell - \sqrt{|A|^2 - |B|^2} = 0$ implica em $\Delta_{j_\ell, k_\ell} = 0$ pela fatoração (2.4).

Se $B = 0$ e $\operatorname{Im}(A) = |A| \geq 0$, tome $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^2)$ dada por

$$u(x,t) = \sum_{\ell \in E} e^{i(j_\ell x + k_\ell t)},$$

como em (2.14). Temos assim que

$$Pu(x,t) = \sum_{\ell \in E} [(k_\ell + Cj_\ell) - |A|] e^{i(j_\ell x + k_\ell t)} = 0,$$

uma vez que $(k_\ell + Cj_\ell) - |A| = (k_\ell + Cj_\ell) - \sqrt{|A|^2 - |B|^2} = 0$ para todo $\ell \in E$.

Caso $B = 0$ e $\operatorname{Im}(A) = -|A| < 0$, basta proceder como no caso anterior, tomando os coeficientes em $-E$.

Caso (b): Suponha que $k_\ell - Cj_\ell - \sqrt{|A|^2 - |B|^2} = 0$ para uma quantidade finita de índices $\ell \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, caso necessário, podemos supor que

$$0 < |k_\ell + Cj_\ell - \sqrt{|A|^2 - |B|^2}| < (|j_\ell| + |k_\ell|)^{-\ell}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Neste caso, a existência de uma $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tal que $Pu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ segue da construção feita no caso (b) do teorema anterior.

Logo, P não é globalmente hipoelítico. $\square$

Corolário 2.4. O operador P é globalmente hipoelítico se, e somente é, é resolúvel.

2.2 Caso $\mathbb{T}^{n+1}$, $n \geq 1$

Nesta seção, estenderemos os resultados da seção anterior para o toro $\mathbb{T}^{n+1}$. Os resultados desta seção foram originalmente demonstrados em [6] para o caso Gevrey. Nos inspiramos nesta referência para fazer as devidas adaptações para o caso suave. Os argumentos utilizados para o caso $n+1$-dimensional são muito parecidos com os do caso bidimensional.

Considere o operador $P : C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}) \to C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ dado por

$$Pu = \frac{\partial}{\partial t} u + \sum_{j=1}^{n} C_j \frac{\partial}{\partial x_j} u - Au - B\bar{u}, \tag{2.15}$$

com $A, B, C_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$ e $\mathbb{T}^{n+1} = \mathbb{T}^n_x \times \mathbb{T}_t$. Utilizaremos também as notações $C = (C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{C}^n$, $\mathbb{Z}^{n+1} = \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$ e $(J, k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ para denotar que $J \in \mathbb{Z}^n$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Dadas $f \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ e $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$, considere as séries de Fourier

$$u(x,t) = \sum_{(J,k)\in\mathbb{Z}^{n+1}} u_{J,k} e^{i(J\cdot x + kt)} \quad \text{e} \quad f(x,t) = \sum_{(J,k)\in\mathbb{Z}^{n+1}} f_{J,k} e^{i(J\cdot x + kt)}.$$

Da continuidade de P, temos que

$$\begin{aligned} Pu(x,t) &= \sum_{(J,k)\in\mathbb{Z}^{n+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} C_j \frac{\partial}{\partial x_j} - A \right) \left(u_{J,k} e^{i(J\cdot x+kt)} \right) - B \sum_{(J,k)\in\mathbb{Z}^{n+1}} \overline{u_{J,k} e^{i(J\cdot x+kt)}} \\ &= \sum_{(J,k)\in\mathbb{Z}^{n+1}} \left[i(k + C\cdot J) - A \right] u_{J,k} e^{i(J\cdot x+kt)} - B \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \overline{u_{J,k}} e^{-i(J\cdot x+kt)} \\ &= \sum_{(J,k)\in\mathbb{Z}^{n+1}} \left[i(k + C\cdot J) - A \right] u_{J,k} e^{i(J\cdot x+kt)} - B \sum_{(J,k)\in\mathbb{Z}^{n+1}} \overline{u_{-J,-k}} e^{i(J\cdot x+kt)}. \end{aligned}$$

Suponha que $Pu = f$. Deste modo, para cada $(J,k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, temos que

$$\left[i(k + C\cdot J) - A \right] u_{J,k} - B\overline{u_{-J,-k}} = f_{J,k}.$$

Tomando o conjugado da equação anterior para o par $(-J,-k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{f_{-J,-k}} &= [-i((-k) + \bar{C}\cdot(-J)) - \bar{A}]\overline{u_{-J,-k}} - \bar{B}u_{J,k} \\ &= -\bar{B}u_{J,k} + [i(k + \bar{C}\cdot J) - \bar{A}]\overline{u_{-J,-k}}, \end{aligned}$$

o que nos leva ao seguinte sistema linear:

$$\left\{ \begin{aligned} \left[i(k + C\cdot J) - A \right] u_{J,k} - B\overline{u_{-J,-k}} &= f_{J,k} \\ -\bar{B}u_{J,k} + [i(k + \bar{C}\cdot J) - \bar{A}]\overline{u_{-J,-k}} &= \overline{f_{-J,-k}} \end{aligned} \right.$$

Resolvendo o sistema para $u_{J,k}$, obtemos

$$\Delta_{J,k} u_{J,k} = [i(k + \bar{C}\cdot J) - \bar{A}] f_{J,k} + B\overline{f_{-J,-k}}, \tag{2.16}$$

sendo $\Delta_{J,k}$ o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, dado por

$$\begin{aligned}\Delta_{J,k} &= [i(k+C\cdot J)-A][i(k+\bar{C}\cdot J)-\bar{A}]-B\bar{B}\\ &= -(k+C\cdot J)(k+\bar{C}\cdot J)-i\bar{A}(k+C\cdot J)-iA(k+\bar{C}\cdot J)+A\bar{A}-B\bar{B}\\ &= -(k+C\cdot J)\overline{(k+C\cdot J)}-i\overline{A(k+\bar{C}\cdot J)}-iA(k+\bar{C}\cdot J)+|A|^2-|B|^2\\ &= -|k+C\cdot J|^2+|A|^2-|B|^2-2i\mathrm{Re}(A(k+\bar{C}\cdot J)).\end{aligned}$$

Teorema 2.5. Considere o operador $P : C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}) \to C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ dado por (2.15). Então, P é resolúvel se, e somente se, vale a seguinte condição diofantina:

(DC$_{n+1}$) Existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|J\| + |k| \geq \gamma \;\Rightarrow\; |\Delta_{J,k}| \geq (\|J\| + |k|)^{-\gamma}.$$

Demonstração. A ida é imediata. Suponha que (DC$_{n+1}$) não é satisfeita. Deste modo, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, existe $(J_\ell, k_\ell) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tal que

$$\|J_\ell\| + |k_\ell| \geq \ell \quad \text{e} \quad |\Delta_{J_\ell,k_\ell}| < (\|J_\ell\| + |k_\ell|)^{-\ell}.$$

Suponha que $\Delta_{J_\ell,k_\ell} = 0$ para uma infinidade de índices $\ell \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, caso necessário, podemos supor $\Delta_{J_\ell,k_\ell} = 0$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Neste caso, se u é solução de $Pu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$, devemos ter

$$[i(k_\ell + \bar{C}\cdot J_\ell) - \bar{A}]f_{J_\ell,k_\ell} + B\overline{f_{-J_\ell,-k_\ell}} = 0$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Com isso, temos uma quantidade infinita de condições de compatibilidade sobre os coeficientes de Fourier de f. De fato, demonstramos isto na Seção seguinte (Teorema 2.9), na qual é apresentada uma versão mais geral deste teorema. Segue que P não é resolúvel.

Suponha que $\Delta_{J_\ell,k_\ell} = 0$ para uma quantidade finita de índices $\ell \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, caso necessário, podemos supor $\Delta_{J_\ell,k_\ell} \neq 0$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$, isto é,

$$0 < |\Delta_{J_\ell,k_\ell}| < (\|J_\ell\| + |k_\ell|)^{-\ell}$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Podemos também assumir que, para algum $m \in \{1,\dots,n\}$, todos os $J_{m\ell}$ são não-nulos e possuem o mesmo sinal, sendo $J_{m\ell}$ a m-ésima coordenada de J_ℓ. Para isso, basta tomar uma subsequência caso necessário.

Considere o conjunto

$$\Omega = \{(J_\ell, k_\ell) \in \mathbb{Z}^{n+1} \, : \, \ell \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}^{n+1}.$$

A maneira como a sequência $\{(J_\ell, k_\ell)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ foi tomada nos garante que os conjuntos Ω e $-\Omega$ são disjuntos.

Suponha que $B \neq 0$ e seja $\Omega_0 \subset \Omega$ um subconjunto infinito. A sequência Δ_{J_ℓ,k_ℓ} é rapidamente decrescente por hipótese e, portanto,

$$f(t,x) = \sum_{(J,k)\in\Omega_0} \Delta_{J,k} e^{i(J\cdot x+kt)}$$

define uma função em $C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$. Se u é solução de $Pu = f$, a projeção de u no subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ gerado pelas frequências $\pm\Omega_0$ deve ser

$$v(x,t) = \sum_{(J,k)\in\Omega_0} [i(k + \bar{C}\cdot J) - \bar{A}]e^{i(J\cdot x+kt)} + \sum_{(J,k)\in\Omega_0} Be^{-i(J\cdot x+kt)}.$$

Pela maneira como a sequência $\{(J_\ell, k_\ell)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ foi tomada, dado $(J,k) \in \Omega_0$, temos que $f_{-J,-k} = 0$. Note que os coeficientes de Fourier de v formam uma sequência de crescimento lento mas não rapidamente decrescente. Deste modo, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1}) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ e, portanto, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1}) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$. Como esta construção vale para qualquer subconjunto $\Omega_0 \subset \Omega$ infinito, obtemos uma quantidade infinita de funções $f \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ linearmente independentes para as quais não existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ solução de $Pu = f$. Segue que P não é resolúvel.

Suponha que $B = 0$. Neste caso, para $(J_\ell, k_\ell) \in \Omega$, temos que

$$\begin{aligned}
(\|J_\ell\| + |k_\ell|)^{-\ell} &> |\Delta_{J_\ell,k_\ell}| \\
&= |i(k_\ell + C\cdot J_\ell) - A| \cdot |i(k_\ell + \bar{C}\cdot J_\ell) - \bar{A}| \\
&= |i(k_\ell + C\cdot J_\ell) - A| \cdot |-i(k_\ell + C\cdot J_\ell) - A|.
\end{aligned}$$

Deste modo, teremos

$$|i(k_\ell + C\cdot J_\ell) - A| < (\|J_\ell\| + |k_\ell|)^{-\ell/2} \quad \text{ou} \quad |-i(k_\ell + C\cdot J_\ell) - A| < (\|J_\ell\| + |k_\ell|)^{-\ell/2}$$

para uma infinidade de índices $\ell \in \mathbb{N}$. Suponha que tenhamos $|i(k_\ell + C\cdot J_\ell) - A| < (\|J_\ell\| + |k_\ell|)^{-\ell/2}$ para uma infinidade de índices $\ell \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, podemos supor que

$$|i(k_\ell + C\cdot J_\ell) - A| < (\|J_\ell\| + |k_\ell|)^{-\ell/2}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

Dado $\Omega_0 \subset \Omega$ infinito, por (2.17), temos que

$$f(x,t) = \sum_{(J,k)\in\Omega_0} [i(k + C\cdot J) - A]e^{i(J\cdot x+kt)}$$

define uma função em $C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$. Observe que, se u é solução de $Pu = f$, a projeção de u no subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ gerado pelas frequências $\pm\Omega_0$ será

$$v(x,t) = \sum_{(J,k)\in\Omega_0} e^{i(J\cdot x+kt)}.$$

Como no Teorema 2.2, temos que $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1}) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ e, portanto, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1}) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$. Como esta construção vale para qualquer $\Omega_0 \subset \Omega$ infinito, obtemos uma quantidade infinita de funções $f \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ linearmente independentes para as quais não existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ solução de $Pu = f$. Segue que P não é resolúvel. Concluímos que P não é resolúvel. $\square$

Assim como no caso bidimensional, temos que estudar a resolubilidade de P é equivalente a estudar a hipoeliticidade global:

Corolário 2.6. O operador P tal como em (2.15) é resolúvel se, e somente se, é globalmente hipoelítico.

A demonstração deste corolário é semelhante à do caso bidimensional. Uma versão mais geral deste resultado é demonstrada na Subseção seguinte (Corolário 2.11).

Corolário 2.7. Se $|B| > |A|$, então o operador P definido em (2.15) é resolúvel.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} |\Delta_{J,k}| \;&\geq\; |\mathrm{Re}(\Delta_{J,k})| \;=\; \big| - |k + C\cdot J|^2 + |A|^2 - |B|^2 \big| \\ &=\; |k + C\cdot J| + |B|^2 - |A|^2 \;\geq\; |B|^2 - |A|^2 \;>\; 0 \end{aligned}$$

e, portanto, $|\Delta_{J,k}|$ satisfaz (DC$_{n+1}$). $\square$

De maneira análoga ao Teorema 2.2, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.8. Se $\mathrm{Im}(C) = 0$, o operador P definido em (2.15) é resolúvel se, e somente se, vale uma das condições abaixo:

(1) $|B| > |A|$;

(2) $|B| < |A|$ e $\text{Re}(A) \neq 0$;

(3) (DC_{n+1}) é satisfeita.

Demonstração. Se não vale nenhuma das três condições, em particular, não vale (3). Pelo Teorema 2.5, segue que P não é resolúvel.

Se vale (1) ou (3), temos que P é resolúvel pelo corolário anterior e pelo Teorema 2.5, respectivamente.

Suponha que vale (2). Como $|A|^2 - |B|^2 > 0$, vamos analisar os dois casos abaixo:

(i) Se $(J,k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ e $|k + C \cdot J|^2 \leq \frac{1}{2}(|A|^2 - |B|^2)$, então

$$|\Delta_{J,k}|^2 \geq (\text{Re}(\Delta_{J,k}))^2 = (-|k + C \cdot J|^2 + |A|^2 - |B|^2)^2 \geq \frac{1}{4}(|A|^2 - |B|^2)^2 > 0.$$

(ii) Se $(J,k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ e $|k + C \cdot J| > \frac{1}{2}(|A|^2 - |B|^2)$, então

$$\begin{aligned} |\Delta_{J,k}|^2 &\geq (\text{Im}(\Delta_{J,k}))^2 = [2\text{Re}(A(k + \bar{C} \cdot J))]^2 = [2\text{Re}(A(k + C \cdot J))]^2 \\ &= 4(k + C \cdot J)^2(\text{Re}(A))^2 > 2(|A|^2 - |B|^2)^2(\text{Re}(A))^2 > 0, \end{aligned}$$

observando que $\bar{C} = C$, uma vez que $\text{Im}(C) = 0$. Tomando

$$K = \min\left\{(|A|^2 - |B|^2)/2, \ \text{Re}(A)(|A|^2 - |B|^2)\sqrt{2}\right\} > 0,$$

temos que $|\Delta_{J,k}|^{-1} \leq K^{-1}$ para todo $(J,k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Segue que a sequência $\{u_{J,k}\}_{(J,k)\in\mathbb{Z}^{n+1}}$ é rapidamente decrescente e, portanto, o operador P é resolúvel. □

Como o operador P é resolúvel se, e somente se, é globalmente hipoelítico, naturalmente as condições (1), (2) e (3) são necessárias e suficientes para a hipoeliticidade global de P. Vale notar que, no caso $\mathbb{T}^2$, $\text{Im}(C) \neq 0$ implica em $\frac{\partial}{\partial t} - C\frac{\partial}{\partial x}$ ser elíptico, o que nos permite verificar facilmente a resolubilidade de P. Para $\mathbb{T}^{n+1}$, $n \geq 2$, caso $\text{Im}(C) \neq 0$, não podemos afirmar nada sobre $\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} C_j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

2.3 Caso Geral

Considere o operador $P : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ dado por

$$Pu = Lu - Au - B\bar{u}, \tag{2.18}$$

com $A, B \in \mathbb{C}$ e $L : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é um operador diferencial parcial linear com coeficientes em $\mathbb{C}$ de ordem $m \in \mathbb{N}$ sem termos de ordem 0, isto é, L é da forma

$$L = \sum_{0<|\alpha|\leq m} C_\alpha \partial^\alpha,$$

com $C_\alpha \in \mathbb{C}$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ com $0 < |\alpha| \leq m$. O símbolo do operador L é dado por

$$\sigma_L(J) = \sum_{0<|\alpha|\leq m} i^{|\alpha|} C_\alpha J^\alpha, \quad J \in \mathbb{Z}^n.$$

Sejam $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ e considere as respectivas séries de Fourier

$$u(x) = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} u_J e^{iJ\cdot x} \quad \text{e} \quad f(x) = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} f_J e^{iJ\cdot x}.$$

Da continuidade de P, temos que

$$\begin{aligned}
Pu(x,t) &= \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} (L - A)\left(u_J e^{iJ\cdot x}\right) - B \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} \overline{u_J e^{iJ\cdot x}} \\
&= \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} \left[\sum_{0<|\alpha|\leq m} C_\alpha \partial^\alpha - A\right] \left(u_J e^{iJ\cdot x}\right) - B \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} \overline{u_J e^{iJ\cdot x}} \\
&= \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} \left[\sum_{0<|\alpha|\leq m} i^{|\alpha|} C_\alpha J^\alpha - A\right] u_J e^{iJ\cdot x} - B \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} \overline{u_{-J}} e^{-iJ\cdot x} \\
&= \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} [\sigma_L(J) - A]\, u_J e^{iJ\cdot x} - B \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} \overline{u_{-J}} e^{-iJ\cdot x}.
\end{aligned}$$

Suponha que $Pu = f$. Deste modo, para cada $J \in \mathbb{Z}^n$, temos que

$$[\sigma_L(J) - A]\, u_J - B\overline{u_{-J}} = f_J.$$

Tomando o conjugado da equação anterior para $-J \in \mathbb{Z}^n$, obtemos

$$\overline{f_{-J}} \;=\; [\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}]\overline{u_{-J}} - \bar{B} u_J$$

o que nos leva ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} [\sigma_L(J) - A]\, u_J - B\overline{u_{-J}} &= f_J \\ -\bar{B}u_J + [\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}]\overline{u_{-J}} &= \overline{f_{-J}} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para u_J, obtemos

$$\Delta_J u_J = [\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}]f_J + B\overline{f_{-J}}, \tag{2.19}$$

sendo Δ_J o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, dado por

$$\Delta_J = [\sigma_L(J) - A] \cdot [\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}] - |B|^2. \tag{2.20}$$

Vale notar que $\overline{\Delta_J} = \Delta_{-J}$. De fato, dado $J \in \mathbb{Z}^n$, vale

$$\begin{aligned} \overline{\Delta_J} &= \overline{[\sigma_L(J) - A]} \cdot \overline{[\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}]} - |B|^2 \\ &= [\overline{\sigma_L(J)} - \bar{A}][\sigma_L(-J) - A] - |B|^2 \; = \; \Delta_{-J}. \end{aligned}$$

Em particular, $\Delta_J = 0$ se, e somente se, $\Delta_{-J} = 0$.

Teorema 2.9. Seja P como em (2.18) e Δ_J como em (2.20). Então P é resolúvel se, e somente se, vale a seguinte condição diofantina:

(DC) Existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|J\| \geq \gamma \;\Rightarrow\; |\Delta_J| \geq \|J\|^{-\gamma}.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que vale (DC) e denote $\Lambda = \{J \in \mathbb{Z}^2 \,:\, \|J\| < \gamma\}$. Observe que Λ é finito e que, se $J \in \mathbb{Z}^n$ é tal que $\Delta_J = 0$, então $J \in \Lambda$.

Note também que, se $J \in \mathbb{Z}\backslash\Lambda$, então os termos Δ_J^{-1} formam uma sequência de crescimento lento. Se $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ satisfaz

$$[\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}]f_J + B\overline{f_{-J}} = 0, \quad \forall J \in \Lambda, \tag{2.21}$$

por (2.19), temos que $u = \sum_{J \in \mathbb{Z}\backslash\Lambda} u_J e^{iJ\cdot x}$, com

$$u_J = \frac{[\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}]f_J + B\overline{f_{-J}}}{\Delta_J}$$

é solução de $Pu = f$. De fato, como $\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}$ é polinomial e B é constante, Δ_J^{-1} é de crescimento lento e f_J (e $\overline{f_J}$) é rapidamente decrescente (pois $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$), temos que u_J é rapidamente decrescente e, portanto, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Por fim, observe que o subespaço de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ das funções que satisfazem (2.21) possui codimensão finita, uma vez que satisfazem uma quantidade finita de condições de compatibilidade. Segue que P é resolúvel.

($\Leftarrow$) Suponha agora que não vale (DC). Deste modo, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, existe $J_\ell \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\|J_\ell\| \geq \ell$ e $|\Delta_{J_\ell}| < \|J_\ell\|^{-\ell}$.

Como $\|J_\ell\| \geq \ell$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$, temos que $\|J_\ell\| \to \infty$ com $\ell \to \infty$. Deste modo, denotando $J_\ell = (J_{1\ell}, \ldots, J_{n\ell})$, existe uma coordenada $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $|J_{j\ell}| \to \infty$ e, portanto, $J_{j\ell} \neq 0$ para uma infinidade de índices $\ell \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, podemos supor que, para todo $\ell \in \mathbb{N}$, $J_{j\ell}$ são não-nulos e possuem o mesmo sinal.

Seja $\Omega = \{J_\ell \in \mathbb{Z}^n \,:\, \ell \in \mathbb{N}\}$. Pela forma como foi escolhida a sequência $\{J_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$, note que, se $J \in \Omega$, então $-J \notin \Omega$. Em particular, para todo subconjunto $\Omega_0 \subset \Omega$, se $J \in \Omega_0$, então $-J \notin \Omega_0$.

Dividiremos a prova em dois casos, levando em conta a quantidade de vezes em que Δ_{J_ℓ} se anula.

Caso (a): $\Delta_{J_\ell} = 0$ para uma infinidade de índices $\ell \in \mathbb{N}$.

Neste caso, passando a uma subsequência, podemos supor que $\Delta_{J_\ell} = 0$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Assim, por (2.19), devemos ter que

$$[\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}]f_J + B\overline{f_{-J}} = 0 \tag{2.22}$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}$.

Suponha que $B \neq 0$. Como $\Delta_{J_\ell} = 0$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$, temos que

$$[\sigma_L(J_\ell) - A] \cdot [\overline{\sigma_L(-J_\ell)} - \bar{A}] = |B|^2$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Como $|B|^2 \neq 0$, temos que $\sigma_L(J_\ell) - A \neq 0$ e $\overline{\sigma_L(-J_\ell)} - \bar{A} \neq 0$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Nestas condições, (2.22) define uma infinidade de condições de compatibilidade sobre $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ a fim de que $Pu = f$ tenha solução u em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Com isso, o espaço das funções admissíveis para a resolubilidade do operador P possui codimensão infinita e, portanto, P não é resolúvel.

Suponha que $B = 0$. Deste modo, dada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, se u é solução de $Pu = f$, tomando as séries de Fourier, obtemos que

$$(\sigma_L(J) - A)u_J = f_J \quad \text{e} \quad (\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A})\overline{u_{-J}} = \overline{f_{-J}}$$

para todo $J \in \mathbb{Z}^n$. Logo, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, temos

$$0 = \Delta_{J_\ell} = [\sigma_L(J_\ell) - A] \cdot [\overline{\sigma_L(-J_\ell)} - \bar{A}].$$

Nestas condições, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, teremos uma (e apenas uma) das situações abaixo:

$$\sigma_L(J_\ell) - A = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{\sigma_L(-J_\ell)} - \bar{A} = 0,$$

e, portanto, teremos que $f_J = 0$ ou $f_{-J} = 0$ para uma infinidade de índices $J \in \mathbb{Z}^n$. Com isso, temos uma infinidade de condições de compatibilidade sobre os coeficientes de Fourier de f a fim de que $Pu = f$ admita solução suave e, portanto, P não é resolúvel.

Caso (b): $\Delta_{J_\ell} = 0$ para uma quantidade finita de índices $\ell \in \mathbb{N}$.

Neste caso, passando a uma subsequência, podemos supor que $\Delta_{J_\ell} \neq 0$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$, isto é,

$$0 < |\Delta_{J_\ell}| < \|J_\ell\|^{-\ell}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \tag{2.23}$$

Se $B \neq 0$, seja Ω_0 um subconjunto infinito de Ω e considere a função

$$f(x) = \sum_{J \in \Omega_0} \Delta_J e^{iJ\cdot x}.$$

Observe que, por (2.23), os coeficientes de Fourier de f são rapidamente decrescentes e, portanto, $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Suponha que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ seja solução de $Pu = f$. Deste modo, a projeção de u no subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ gerado pelas frequências $\pm\Omega_0$ é

$$v(x) = \sum_{J \in \Omega_0} [\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}]e^{iJ\cdot x} + \sum_{J \in \Omega_0} Be^{-iJ\cdot x}.$$

De fato, se $J \in \Omega_0$, então $f_J = \Delta_J$ e $\overline{f_{-J}} = 0$. Deste modo, por (2.19), temos que

$$\Delta_J u_J = [\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}]f_J = [\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}]\Delta_J \;\Rightarrow\; u_J = \overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}.$$

Se $-J \in \Omega_0$, isto é, se $J \in -\Omega_0$, então $f_J = 0$ e $\overline{f_{-J}} = \overline{\Delta_{-J}} = \Delta_J$. Com isso, por (2.19), temos que

$$\Delta_J u_J = B\Delta_J \;\Rightarrow\; u_J = B.$$

Porém, note que $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^n)$. De fato, os coeficientes de v não são rapidamente decrescentes, uma vez que B é constante e $\overline{\sigma_L(-J) - \bar{A}}$ é polinomial. Logo, $v \notin C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Por outro lado, isto implica que os coeficientes de v são de crescimento lento e, portanto, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$. Deste modo, os coeficientes de v não são rapidamente decrescentes. Como v é projeção de u, segue que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Como esta construção vale para todo $\Omega_0 \subset \Omega$ infinito, obtemos uma infinidade de funções $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ linearmente independentes tais que, se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ satisfaz $Pu = f$, então $u \notin C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Segue que P não é resolúvel.

Suponha agora que $B = 0$ e tome Ω_0 um subconjunto infinito de Ω. Por (2.23), para todo $\ell \in \mathbb{N}$, temos que

$$\|J_\ell\|^{-\ell} \geq |\Delta_{J_\ell}| = |\sigma_L(J_\ell) - A| \cdot |\overline{\sigma_L(-J_\ell)} - \bar{A}| = |\sigma_L(J_\ell) - A| \cdot |\sigma_L(-J_\ell) - A|.$$

Deste modo, temos que $|\sigma_L(J_\ell) - A| \leq \|J_\ell\|^{-\ell/2}$ ou $|\sigma_L(-J_\ell) - A| \leq \|J_\ell\|^{-\ell/2}$ para uma infinidade de índices $\ell \in \mathbb{N}$. Suponha que $|\sigma_L(J_\ell) - A| \leq \|J_\ell\|^{-\ell/2}$ para uma infinidade de índices $\ell \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, caso necessário, podemos supor

$$|\sigma_L(J_\ell) - A| \leq \|J_\ell\|^{-\ell/2}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \tag{2.24}$$

Considere a função

$$f(x) = \sum_{J \in \Omega_0} [\sigma_L(J) - A] e^{iJ\cdot x},$$

com $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ por (2.24). Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ é solução de $Pu = f$, a projeção de u no subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ gerado pelas frequências Ω_0 será

$$v(x) = \sum_{J \in \Omega_0} e^{iJ\cdot x}.$$

De fato, se $J \in \Omega_0$, por (2.19), temos que

$$\underbrace{[\sigma_L(J) - A] \cdot [\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}]}_{=\Delta_J} u_J = [\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}] \cdot \underbrace{[\sigma_L(J) - A]}_{=f_J}$$

e, portanto, $u_J = 1$. Observe que $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^n)$, uma vez que $u_J = 1$ não é rapidamente decrescente. Logo, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Caso tenhamos $|\sigma_L(-J_\ell) - A| \leq \|J_\ell\|^{-\ell/2}$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$ (passando a uma subsequência), basta proceder de maneira análoga ao caso anterior tomando f com coeficientes em $-\Omega_0$.

Como esta construção vale para todo $\Omega_0 \subset \Omega$ infinito, obtemos uma infinidade de funções $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ linearmente independentes tais que, se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ satisfaz $Pu = f$, então $u \notin C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Segue que P não é resolúvel. $\square$

Observação 2.10. Os argumentos do teorema acima não usam a hipótese de que L não tenha termos de ordem 0. Note que não perdemos generalidade ao supormos isso pois, caso L possua um termo de ordem 0, este pode ser incorporado à constante A.

Corolário 2.11. O operador P tal como em (2.18) é resolúvel se, e somente se, é globalmente hipoelítico.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que P seja resolúvel. Pelo Teorema 2.9, vale (DC). Se u é solução de $Pu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, então existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|J\| \geq \gamma \ \Rightarrow \ u_J = \frac{[\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}]f_J + B\overline{f_{-J}}}{\Delta_J}.$$

Note que a sequência $\{u_J\}_{J\in\mathbb{Z}^n}$ é rapidamente decrescente pois $\{f_J\}_{J\in\mathbb{Z}^n}$ é rapidamente decrescente. Observe que $\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}$ é polinomial, B é constante e Δ_J^{-1} é de crescimento lento por (DC). Deste modo, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Segue que P é globalmente hipoelítico.

$(\Leftarrow)$ Por outro lado, suponha que P não é resolúvel. Pelo Teorema 2.9, existem $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tais que $Pu = f$. Segue que P não é globalmente hipoelítico. $\square$

Teorema 2.12. Suponha que $L : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ seja um operador elíptico. Então o operador $P : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ dado por $Pu = Lu - Au - B\bar{u}$, $A, B \in \mathbb{C}$, é resolúvel e globalmente hipoelítico.

Demonstração. Seja m a ordem de L. Como L é elíptico, então $L - A$ é elíptico e, portanto, basta estudarmos a resolubilidade do operador P dado por $Pu = Lu - B\bar{u}$, sendo L elíptico.

Como L é elíptico, existem $R_0, M > 0$ tais que

$$\|J\| \geq R_0 \ \Rightarrow \ |\sigma_L(J)| \geq M\|J\|^m.$$

Com isso, para $\|J\| \geq R_0$, por (2.20), temos

$$\begin{aligned} |\Delta_J| &= |\sigma_L(J) \cdot \overline{\sigma_L(-J)} - |B|^2| \\ &\geq |\sigma_L(J)| \cdot |\sigma_L(-J)| - |B|^2 \\ &\geq M^2\|J\|^{2m} - |B|^2. \end{aligned}$$

Tomando $R \geq R_0$ suficientemente grande de modo que $M^2R^2 > |B|^2 + 1$, temos que $\|J\| \geq R$ implica $|\Delta_J| > 1$ e, portanto, $|\Delta_J|^{-1}$ é uma sequência de crescimento lento. Como o conjunto $\Lambda = \{J \in \mathbb{Z}^n \ : \ \|J\| < R\}$ é finito, segue que P é resolúvel. A hipoeliticidade global segue do Corolário 2.11. $\square$

2.4 Aplicações

Nesta seção, utilizaremos os resultados da seção anterior para explorar a resolubilidade e a hipoeliticidade global de alguns exemplos clássicos de operadores diferenciais com coeficientes constantes.

Exemplo 2.13 (Laplaciano)**.** Como o operador $L = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ é elíptico, segue do Teorema 2.12 que o operador $P \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ dado por $Pu = Lu - Au - B\bar{u}$, $A, B \in \mathbb{C}$, é resolúvel e globalmente hipoelítico.

Teorema 2.14 (Operador do Calor)**.** Seja $L = \dfrac{\partial}{\partial t} - \eta^2 \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, com $\eta > 0$. Então $P : C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}) \to C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ dado por $Pu = Lu - Au - B\bar{u}$, $A, B \in \mathbb{C}$, é resolúvel e globalmente hipoelítico.

Demonstração. Começamos observando que o símbolo de L é $\sigma_L(J,k) = \overline{\sigma_L(-J,-k)} = ik + \eta^2\|J\|^2$. Assim, se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ é solução de $Pu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$, os coeficientes de Fourier de u e f devem satisfazer

$$\Delta_{J,k} u_{J,k} = \left[ik + \eta^2\|J\|^2 - \bar{A}\right] f_{J,k} + B\overline{f_{-J,-k}} \quad \forall (J,k) \in \mathbb{Z}^{n+1},$$

sendo

$$\begin{aligned}\Delta_{J,k} &= \left[ik + \eta^2\|J\|^2 - A\right]\cdot\left[ik + \eta^2\|J\|^2 - \bar{A}\right] - B\bar{B} \\ &= \left(ik + \eta^2\|J\|^2\right)^2 - (A + \bar{A})\,(ik + \eta^2\|J\|^2) + |A|^2 - |B|^2 \\ &= \eta^4\|J\|^4 + 2i\eta^2 k\|J\|^2 - k^2 - 2\mathrm{Re}(A)(ik + \eta^2\|J\|^2) + |A|^2 - |B|^2 \\ &= \eta^4\|J\|^4 - 2\mathrm{Re}(A)\eta^2\|J\|^2 - k^2 + |A|^2 - |B|^2 + 2ik[\eta^2\|J\|^2 - \mathrm{Re}(A)].\end{aligned}$$

Se $k = 0$, então existe $\gamma_1 > 0$ tal que

$$\|J\| > \gamma_1 \;\Rightarrow\; |\Delta_{J,0}| \;\geq\; |\mathrm{Re}(\Delta_{J,0})| \;=\; \left|\, \eta^4\|J\|^4 - 2\mathrm{Re}(A)\eta^2\|J\|^2 + |A|^2 - |B|^2 \,\right| > 1.$$

Se $k \neq 0$, então

$$|\Delta_{J,k}| \geq |\mathrm{Im}(\Delta_{J,k})| = 2|k| \cdot \left|\, \eta^2\|J\|^2 - \mathrm{Re}(A) \,\right|.$$

Observe que $\eta^2\|J\|^2 - \mathrm{Re}(A) = 0$ ocorre para no máximo uma quantidade finita de índices $J \in \mathbb{Z}^n$. Assim, podemos tomar $\gamma_2 > 0$ tal que $\|J\| \geq \gamma_2$ implica em $\left|\eta^2\|J\|^2 - \mathrm{Re}(A)\right| > 1/2$ e, portanto, $|\Delta_{J,k}| > 1$, uma vez que $k \neq 0$ implica $|k| \geq 1$.

Para os $J \in \mathbb{Z}^n$ tais que $\eta^2\|J\|^2 - \mathrm{Re}(A) = 0$, isto é, $\eta^2\|J\|^2 = \mathrm{Re}(A)$, temos que

$$\begin{aligned}|\Delta_{J,k}| \;\geq\; |\mathrm{Re}(\Delta_{J,k})| &= \left|\mathrm{Re}(A)^2 - 2\mathrm{Re}(A)^2 + |A|^2 - |B|^2 - k^2\right| \\ &= \left|k^2 + \mathrm{Re}(A)^2 + |B|^2 - |A|^2\right|,\end{aligned}$$

o que nos garante que $|\Delta_{J,k}|$ se anula se, e somente se,

$$k = \pm\sqrt{-\mathrm{Re}(A)^2 + |A|^2 - |B|^2},$$

isto é, $|\Delta_{J,k}|$ se anula em no máximo dois índices $k \in \mathbb{Z}$. Tome $\gamma_3 > 0$ tal que $|k| \geq \gamma_3$ implica $\left|k^2 + \mathrm{Re}(A)^2 + |B|^2 - |A|^2\right| > 1$.

Considere $\gamma = 2\max\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. Se $\|J\| + |k| \geq \gamma$, então $\|J\| \geq \gamma/2$ ou $|k| \geq \gamma/2$.

Suponha $\|J\| \geq \gamma/2$. Caso $k = 0$, como $\gamma/2 \geq \gamma_1$, temos $|\Delta_{J,k}| \geq |\mathrm{Re}(\Delta_{J,k})| > 1$. Caso $k \neq 0$, como $\gamma/2 \geq \gamma_2$, temos $|\Delta_{J,k}| \geq |\mathrm{Im}(\Delta_{J,k})| > 1$.

Suponha $|k| \geq \gamma/2$. Caso $\eta\|J\|^2 - \mathrm{Re}(A) = 0$, como $\gamma/2 \geq \gamma_3$, temos $|\Delta_{J,k}| \geq |\mathrm{Re}(\Delta_{J,k})| > 1$.

Caso $\eta\|J\|^2 - \text{Re}(A) \neq 0$, como $\gamma/2 > 0$, então $|k| \geq 1$ e, com isso, temos $|\Delta_{J,k}| \geq |\text{Im}(\Delta_{J,k})| \geq 2|\eta^2\|J\|^2 - \text{Re}(A)| \geq C > 0$, com

$$C = \inf\{|\eta^2\|J\|^2 - \text{Re}(A)| \,:\, J \in \mathbb{Z}^n,\ \eta^2\|J\|^2 - \text{Re}(A) \neq 0\} > 0,$$

uma vez que o conjunto $\{J \in \mathbb{Z}^n \,:\, \eta^2\|J\|^2 - \text{Re}(A) = 0\}$ é fechado.

Logo, para $\|J\| + |k| \geq \gamma$, $|\Delta_{J,k}| \geq \min\{1, C\} > 0$ e, protanto, vale (DC). Segue do Teorema 2.9 que P é resolúvel. A hipoeliticidade global segue do Corolário 2.11. $\square$

Observação 2.15. Note que o teorema anterior vale para quaisquer $A, B \in \mathbb{C}$, isto é, a resolubilidade (e hipoeliticidade) do operador do calor é estável por perturbações de ordem 0 e por perturbações conjugadas de ordem 0.

Teorema 2.16 (Operador da Onda)**.** Seja $L = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \eta^2 \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, com $\eta > 0$. O operador $P : C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}) \to C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ dado por $Pu = Lu - Au - Bu$, $A, B \in \mathbb{C}$, é resolúvel e globalmente hipoelítico se, e somente se, vale uma das condições abaixo:

(1) $|B| < |\text{Im}(A)|$;

(2) $|A| = |B|$, $\text{Re}(A) = 0$ e η é um número irracional não-Liouville;

(3) (DC) é satisfeita.

Demonstração. Observe que o símbolo de L é $\sigma_L(J,k) = \overline{\sigma_L(-J,-k)} = -k^2 + \eta^2\|J\|^2$. Assim, se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ é solução de $Pu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$, os coeficientes de Fourier de u e f devem satisfazer

$$\Delta_{J,k} u_{J,k} = [-k^2 + \eta^2\|J\|^2 - \bar{A}] f_{J,k} + B\overline{f_{-J,-k}}$$

para todo $(J,k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, sendo

$$\begin{aligned}
\Delta_{J,k} &= [-k^2 + \eta^2\|J\|^2 - A] \cdot [-k^2 + \eta^2\|J\|^2 - \bar{A}] - B\bar{B} \\
&= (-k^2 + \eta^2\|J\|^2)^2 - 2\text{Re}(A)(-k^2 + \eta^2\|J\|^2) + |A|^2 - |B|^2 \\
&= (k^2 - \eta^2\|J\|^2)^2 + 2\text{Re}(A)(k^2 - \eta^2\|J\|^2) + |A|^2 - |B|^2 \\
&= (k^2 - \eta^2\|J\|^2 + \text{Re}(A))^2 - (\text{Re}(A))^2 + |A|^2 - |B|^2 \\
&= (k^2 - \eta^2\|J\|^2 + \text{Re}(A))^2 + (\text{Im}(A))^2 - |B|^2.
\end{aligned}$$

Suponha que vale (1). Então

$$|\Delta_{J,k}| = \Delta_{J,k} \geq (\text{Im}(A))^2 - |B|^2 > 0, \forall (J,k) \in \mathbb{Z}^{n+1}.$$

Logo, vale (DC) e, portanto, segue do Teorema 2.9 que P é resolúvel.

Suponha que vale (2). Então

$$|\Delta_{J,k}| = |-k^2 + \eta^2 \|J\|^2|^2 = |k - \eta\|J\||^2 \cdot |k + \eta\|J\||^2, \quad \forall (J,k) \in \mathbb{Z}^{n+1}.$$

Como η é um número irracional não-Liouville, existem $C, \gamma_0 > 0$ tais que

$$\big|k \pm \eta\|J\|\big| \geq C(\|J\| + |k|)^{-\gamma_0}, \quad \forall (J,k) \in (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}.$$

Com isso, temos

$$|\Delta_{J,k}| \geq C^4(\|J\| + |k|)^{-4\gamma_0} = C_4(\|J\| + |k|)^{\gamma_0}(\|J\| + |k|)^{-5\gamma_0}.$$

Tome $\gamma_1 > 0$ de modo que $C^4(\|J\| + |k|)^{\gamma_0} \geq 1$ sempre que $\|J\| + |k| \geq \gamma_1$ e considere $\gamma = \max\{\gamma_1, 5\gamma_0\}$. Então

$$\|J\| + |k| \geq \gamma \Rightarrow |\Delta_{J,k}| \geq (\|J\| + |k|)^{-\gamma}$$

e, portanto, vale (DC). Pelo Teorema 2.9, segue que P é resolúvel.

Suponha que vale (3). Como vale (DC), pelo Teorema 2.9, segue que P é resolúvel.

Reciprocamente, se não vale nenhuma das condições (1), (2) e (3), em particular, não vale (DC). Pelo Teorema 2.9, segue que P não é resolúvel. A hipoeliticidade global segue do Corolário 2.11. □

Observação 2.17. Note que, para o toro $\mathbb{T}^2$, se $A = B = 0$, obtemos que

$$P = L = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial x}\right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Nestas condições, o problema se reduz ao estudo da hipoeliticidade global dos operadores

$$Q^{\pm} : C^\infty(\mathbb{T}^2) \to C^\infty(\mathbb{T}^2), \quad Q^{\pm} = \frac{\partial}{\partial t} \pm \eta\frac{\partial}{\partial x},$$

os quais são globalmente hipoelíticos se, e somente se, $\eta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ou η é um número irracional não-Liouville (Teorema 1.24). Observe que este caso particular recai na condição (2) do teorema anterior.

Capítulo 3

Uma Classe de Operadores com Coeficientes Variáveis

Neste capítulo, exploraremos uma classe de operadores diferenciais com coeficientes variáveis $P : C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}) \to C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ dados por

$$Pu = Lu - Au - B\bar{u},$$

sendo $A, B \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ e L é um operador diferencial parcial a coeficientes variáveis que se enquadra no modelo conhecido como "caso tubo". Estudaremos o caso onde $L : C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}) \to C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ é da forma

$$Lu = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n}(p_{0j}(t) + i\lambda_j q(t))\frac{\partial}{\partial x_j},$$

sendo $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ e $q, p_j \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$, $j = 1, \ldots, n$, funções que assumem valores reais. Além disso, consideraremos $A(t) = s(t) + i\delta q(t)$ e $B(t) = \alpha q(t)$, sendo $s \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ uma função a valores reais, $\delta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

A escolha destes operadores e sua forma de apresentação foram inspirados nas referências bibliográficas [4] e [6]. A maneira como os coeficientes de P são tomados permite que o problema seja reduzido ao estudo das soluções de uma família de sistemas de EDOs lineares diagonalizáveis. Em [4], os autores investigaram esta classe de operadores no toro bidimensional e a coeficientes suaves. Em [6], o resultado foi estendido para toros de dimensão superior com coeficientes em classes de Gevrey.

No desenvolvimento deste capítulo, dedicamos atenção especial ao caso bidimensional, estabelecendo os resultados fundamentais de resolubilidade. A generalização dos resultados para dimensões maiores seguem de argumentos muito semelhantes aos do caso bidimensional.

3.1 Caso $\mathbb{T}^2$

Considere o operador $L : C^\infty(\mathbb{T}^2) \to C^\infty(\mathbb{T}^2)$ dado por

$$Lu = \frac{\partial}{\partial t}u - (p(t) + i\lambda q(t))\frac{\partial}{\partial x}u,$$

com $p, q \in C^\infty(\mathbb{T}^1_t; \mathbb{R})$, $q \not\equiv 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Sejam

$$p_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\,dt \quad \text{e} \quad m(t) = \int_0^t (p(\tau) - p_0)\,d\tau.$$

Considerando a mudança de coordenadas $\tilde{t} = t$ e $\tilde{x} = x + m(t)$, o operador L se torna

$$\tilde{L} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} - (p_0 + i\lambda q(t))\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}.$$

Com isso, podemos assumir L da forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - (p_0 + i\lambda q(t))\frac{\partial}{\partial x}, \tag{3.1}$$

com $q \in C^\infty(\mathbb{T}^1_t; \mathbb{R})$, $q \not\equiv 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tendo em vista trabalhos como [17] e [7], nos quais os autores estudam a resolubilidade e hipoeliticidade global de campos vetoriais no toro bidimensional, além de suas perturbações por termos de ordem 0, vamos admitir que q não muda de sinal. Então $q_0 = \int_0^{2\pi} q(\tau)\,d\tau \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor $q \geq 0$ (caso contrário, basta tomar a mudança de variáveis $(\tilde{x}, \tilde{t}) = (-x, t)$). Neste caso, $q_0 > 0$.

Nestas condições, considere o operador $P : C^\infty(\mathbb{T}^2) \to C^\infty(\mathbb{T}^2)$ dado por

$$Pu = Lu - (s(t) + i\delta q(t))u - \alpha q(t)\bar{u}, \tag{3.2}$$

com $s \in C^\infty(\mathbb{T}^1_t; \mathbb{R})$, $\delta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sendo $s_0 = \int_0^{2\pi} s(\tau)\,d\tau$, considere

- $A_0 = \int_0^{2\pi} (s(\tau) + i\delta q(\tau))\,d\tau = s_0 + i\delta q_0$;
- $B_0 = \int_0^{2\pi} \alpha q(\tau)\,d\tau = \alpha q_0$;
- $C_0 = \int_0^{2\pi} (p_0 + i\lambda q(\tau))\,d\tau = 2\pi p_0 + i\lambda q_0$.

3.1.1 Caso Complexo

Chamamos de caso complexo o caso em que $\lambda \neq 0$. O caso em que $\lambda = 0$, denominado caso real, será tratado na próxima subseção.

Teorema 3.1. Suponha que o operador P dado por (3.2) satisfaça as seguintes condições:

(I) $|\alpha| \neq |\delta|$;

(II) Não existe $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$ solução de

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(A_0(2\pi k + j\overline{C_0})) = 0 \\ |2\pi k + jC_0|^2 = |A_0|^2 - |B_0|^2 \end{cases}.$$

Então, para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tal que $Pu = f$.

Demonstração. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Suponha que exista $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $Pu = f$. Tomando as séries parciais de Fourier com respeito à variável x, obtemos

$$u(x,t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j(t)e^{ijx} \quad \text{e} \quad f(x,t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j(t)e^{ijx}.$$

Da continuidade de P, temos que

$$\begin{aligned}
Pu(x,t) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} P(u_j(t)e^{ijx}) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[u_j'(t) - (p_0 + i\lambda q(t))iju_j(t) - (s(t) + i\delta q(t))u_j(t)\right] e^{ijx} - \alpha q(t)\overline{u_j(t)e^{ijx}} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[u_j'(t) - \left[(p_0 + i\lambda q(t))ij + s(t) + i\delta q(t)\right] u_j(t)\right] e^{ijx} - \alpha q(t)\overline{u_j(t)}e^{-ijx} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[u_j'(t) - \left[(p_0 + i\lambda q(t))ij + s(t) + i\delta q(t)\right] u_j(t)\right] e^{ijx} - \alpha q(t)\overline{u_j(t)}e^{-ijx} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[u_j'(t) - \left[(p_0 + i\lambda q(t))ij + s(t) + i\delta q(t)\right] u_j(t)\right] e^{ijx} - \alpha q(t)\overline{u_{-j}}(t)e^{ijx} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left[u_j'(t) - \left[(p_0 + i\lambda q(t))ij + s(t) + i\delta q(t)\right] u_j(t) - \alpha q(t)\overline{u_{-j}(t)}\right] e^{ijx}.
\end{aligned}$$

Suponha que $Pu = f$, então, para todo $j \in \mathbb{Z}$, vale

$$u_j' - [(p_0 + i\lambda q(t))ij + s(t) + i\delta q(t)]u_j - \alpha q(t)\overline{u_{-j}} = f_j. \tag{3.3}$$

Tomando o conjugado da equação acima com $-j$ no lugar de j obtemos, para todo $j \in \mathbb{Z}$, a equação

$$\overline{u_{-j}}' - [(p_0 - i\lambda q(t))ij + s(t) - i\delta q(t)]\overline{u_{-j}} - \bar{\alpha} q(t)u_j = \overline{f_{-j}}. \tag{3.4}$$

Com isso, para cada $j \in \mathbb{Z}$, obtemos o seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{cases} u_j' - [(p_0 + i\lambda q(t))ij + s(t) + i\delta q(t)]u_j - \alpha q(t)\overline{u_{-j}} = f_j \\ \overline{u_{-j}}' - [(p_0 - i\lambda q(t))ij + s(t) - i\delta q(t)]\overline{u_{-j}} - \bar{\alpha} q(t)u_j = \overline{f_{-j}} \end{cases} \tag{3.5}$$

Para cada $j \in \mathbb{Z}$, tomando $w_j = \begin{bmatrix} u_j \\ \overline{u_{-j}} \end{bmatrix}$ e $F_j = \begin{bmatrix} f_j \\ \overline{f_{-j}} \end{bmatrix}$, podemos reescrever o sistema (3.5) como

$$w_j' = M_j w_j + F_j, \tag{3.6}$$

sendo $M_j = \begin{bmatrix} (p_0 + i\lambda q(t))ij + s(t) + i\delta q(t) & \alpha q(t) \\ \bar{\alpha} q(t) & (p_0 - i\lambda q(t))ij + s(t) - i\delta q(t) \end{bmatrix}$.

Suponha que w_j é solução 2π-periódica de 3.6 e considere $y_j = e^{-ijp_0 t - S(t)} w_j$, com $S(t) = \int_0^t s(\tau)\, d\tau$. Por (3.6), temos que

$$\begin{aligned} y_j' &= e^{-ijp_0 t - S(t)} w_j' + (-ijp_0 - s(t)) e^{-ijp_0 t - S(t)} w_j \\ &= e^{-ijp_0 t - S(t)} [M_j w_j + F_j] - [ijp_0 + s(t)] e^{-ijp_0 t - S(t)} w_j \\ &= [M_j - (ijp_0 + s(t))I] y_j + e^{-ijp_0 t - S(t)} F_j, \end{aligned}$$

sendo I a matriz identidade de ordem 2. Logo, y_j é solução de

$$y_j' = [M_j - (ijp_0 + s(t))I] y_j + e^{-ijp_0 t - S(t)} F_j. \tag{3.7}$$

Além disso, como $S(2\pi) = s_0$ e $y_j(0) = e^0 w_j(0) = w_j(0)$, temos que

$$y_j(2\pi) = e^{-ijp_0 2\pi - s_0} w_j(2\pi) = e^{-ijp_0 2\pi - s_0} w_j(0) = e^{-ijp_0 2\pi - s_0} y_j(0)$$

e, portanto, y_j satisfaz

$$y_j(0) = e^{ijp_0 2\pi + s_0} y_j(2\pi). \tag{3.8}$$

Observe que

$$M_j - (ijp_0 + s(t))I = \begin{bmatrix} -\lambda j q(t) + i\delta q(t) & \alpha q(t) \\ \bar{\alpha} q(t) & \lambda j q(t) - i\delta q(t) \end{bmatrix} = q(t)\tilde{M}_j,$$

sendo

$$\tilde{M}_j = \begin{bmatrix} -\lambda j + i\delta & \alpha \\ \bar{\alpha} & \lambda j - i\delta \end{bmatrix}.$$

Observe que o polinômio característico de $\tilde{M}_j$ é dado por

$$\chi_{\tilde{M}_j}(X) = (-\lambda j + i\delta - X)(\lambda j - i\delta - X) - \alpha\bar{\alpha} = X^2 - (\lambda j - i\delta)^2 - |\alpha|^2$$

e, portanto, os autovalores de $\tilde{M}_j$ são $\pm\sqrt{(\lambda j - i\delta)^2 + |\alpha|^2}$. Denotemos por ρ_j o autovalor cuja parte real é não-negativa. Observe que, pela condição (I), $\rho_j \neq 0$. Logo, os dois autovalores de $\tilde{M}_j$ são distintos. Isso implica que $\tilde{M}_j$ é diagonalizável. Além disso,

$$V_j^{\pm} = \begin{bmatrix} \alpha \\ (\lambda j - i\delta) \pm \rho_j \end{bmatrix}$$

são autovetores de $\tilde{M}_j$ associados a $\pm\rho_j$.

De fato, se $V_j^+ = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é tal que $\tilde{M}_j V_j^+ = \rho_j V_j^+$, então

$$\begin{cases} (-\lambda j + i\delta)x + \alpha y = \rho_j x \\ \bar{\alpha} x + (\lambda j - i\delta) y = \rho_j y \end{cases}$$

Tomando $x = \alpha$, pela primeira equação do sistema acima, temos que $y = (\lambda j - i\delta) + \rho_j$ e, portanto,

$$V_j^+ = \begin{bmatrix} \alpha \\ (\lambda j - i\delta) + \rho_j \end{bmatrix}.$$

De maneira análoga, obtemos

$$V_j^- = \begin{bmatrix} \alpha \\ (\lambda j - i\delta) - \rho_j \end{bmatrix}.$$

Seja

$$T_j = \begin{bmatrix} V_j^+ & V_j^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ (\lambda j - i\delta) + \rho_j & (\lambda j - i\delta) - \rho_j \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Então

$$T_j^{-1}\tilde{M}_j T_j = \rho_j \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

sendo

$$T_j^{-1} = \frac{-1}{2\alpha\rho_j} \begin{bmatrix} (\lambda j - i\delta) - \rho_j & -\alpha \\ -(\lambda j - i\delta) - \rho_j & \alpha \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a equação (3.7) pode ser reescrita como

$$y_j' = q(t)\rho_j T_j \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} T_j^{-1} y_j + e^{-ijp_0 t - S(t)} T_j T_j^{-1} F_j. \tag{3.10}$$

Tomando $z_j = T_j^{-1} y_j$, temos que z_j é solução de

$$z_j' = T_j^{-1} y_j' = q(t)\rho_j \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z_j + e^{-ijp_0 t - S(t)} G_j, \tag{3.11}$$

com

$$G_j(t) \ = \ \begin{bmatrix} G_{1j}(t) \\ G_{2j}(t) \end{bmatrix} \ = \ T_j^{-1} F_j(t).$$

Além disso, por (3.8), z_j deve satisfazer

$$z_j(0) = e^{ijp_0 2\pi + s_0} z_j(2\pi). \tag{3.12}$$

Com isso, basta resolvermos as duas EDOs abaixo:

$$\begin{cases} z_{1j}' = \rho_j q(t) z_{1j} + e^{-ijp_0 t - S(t)} G_{1j} \\ z_{2j}' = -\rho_j q(t) z_{2j} + e^{-ijp_0 t - S(t)} G_{2j} \end{cases} \tag{3.13}$$

Pelo método do fator integrante, obtemos

$$z_{1j}(t) = -\, e^{\rho_j \tilde{Q}(t)} \int_t^{2\pi} e^{-\rho_j \tilde{Q}(\sigma)} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{1j}(\sigma)\, d\sigma + K_{1j} e^{\rho_j \tilde{Q}(t)}$$

$$z_{2j}(t) = e^{-\rho_j Q(t)} \int_0^t e^{\rho_j Q(\sigma)} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{2j}(\sigma)\, d\sigma + K_{2j} e^{-\rho_j Q(t)}$$

sendo
$$Q(t) = \int_0^t q(\tau)\,d\tau \quad \text{e} \quad \tilde{Q}(t) = -\int_t^{2\pi} q(\tau)\,d\tau.$$

Observe que $\tilde{Q}(0) = -q_0$, $\tilde{Q}(2\pi) = 0$, $Q(0) = 0$ e $Q(2\pi) = q_0$.

A escolha dos fatores integrantes $\mu_{1j}(t) = e^{-\rho_j \tilde{Q}(t)}$ e $\mu_{2j}(t) = e^{\rho_j Q(t)}$ e a escolha dos limites de integração ($-\int_t^{2\pi}$ e $\int_0^t$) foram feitas de modo a tornar mais conveniente o cálculo do decaimento rápido de z_j. Vamos calcular as constantes K_{1j} e K_{2j}.

Temos que
$$\begin{cases} z_{1j}(0) = -\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-\rho_j(q_0+\tilde{Q}(\sigma))} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{1j}(\sigma)\,d\sigma + K_{1j}e^{-\rho_j q_0} \\ z_{1j}(2\pi) = K_{1j} \end{cases}$$

Por (3.12), temos que $z_{1j}(0) = e^{ijp_0 2\pi + s_0} z_{1j}(2\pi)$ e, portanto,
$$(e^{-\rho_j q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0})K_{1j} = \int_0^{2\pi} e^{-\rho_j(q_0+\tilde{Q}(\sigma))} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{1j}(\sigma)\,d\sigma.$$

Do mesmo modo, temos
$$\begin{cases} z_{2j}(0) = K_{2j} \\ z_{2j}(2\pi) = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\rho_j(Q(\sigma)-q_0)} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{2j}(\sigma)\,d\sigma + K_{2j}e^{-\rho_j q_0} \end{cases}$$

Por (3.12), temos que $z_{2j}(0) = e^{ijp_0 2\pi + s_0} z_{2j}(2\pi)$ e, portanto,
$$(1 - e^{-\rho_j q_0 + ijp_0 2\pi + s_0})K_{2j} = \int_0^{2\pi} e^{\rho_j(Q(\sigma)-q_0)} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{2j}(\sigma)\,d\sigma.$$

Para isolarmos K_{1j} e K_{2j}, basta observarmos que $e^{-\rho_j q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0} \neq 0$ e $1 - e^{-\rho_j q_0 + ijp_0 2\pi + s_0} \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Isto segue da condição (II). De fato, caso contrário, isto é, se existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que
$$e^{-\rho_j q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0} = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - e^{-\rho_j q_0 + ijp_0 2\pi + s_0} = 0,$$

então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que
$$\rho_j q_0 + ijp_0 2\pi + s_0 = -i2\pi k \quad \text{ou} \quad -\rho_j q_0 + ijp_0 2\pi + s_0 = -i2\pi k.$$

Deste modo,
$$\rho_j = \pm \frac{s_0 + i(jp_0 2\pi + 2\pi k)}{q_0}$$

e, portanto,

$$\mathrm{Re}(\rho_j) = \pm\frac{s_0}{q_0} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(\rho_j) = \pm\frac{jp_0 2\pi + 2\pi k}{q_0}.$$

Por outro lado, temos que

$$(\rho_j)^2 = \lambda^2 j^2 - \delta^2 + |\alpha|^2 - i2\lambda\delta j.$$

Note que, dado $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{C}$, temos

$$z^2 = (\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z))^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 - (\mathrm{Im}(z))^2 + 2i\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z).$$

Deste modo,

$$\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(z^2) \quad \text{e} \quad \mathrm{Re}(z^2) = (\mathrm{Re}(z))^2 - (\mathrm{Im}(z))^2.$$

Tomando $z = \rho_j$, obtemos

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\rho_j)\mathrm{Im}(\rho_j) = -\lambda\delta j \\ (\mathrm{Re}(\rho_j))^2 - (\mathrm{Im}(\rho_j))^2 = \lambda^2 j^2 - \delta^2 + |\alpha|^2 \end{cases} \tag{3.14}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\rho_j)\mathrm{Im}(\rho_j) = \dfrac{s_0(jp_0 2\pi + 2\pi k)}{q_0^2} \\ (\mathrm{Re}(\rho_j))^2 - (\mathrm{Im}(\rho_j))^2 = \dfrac{s_0^2 - (jp_0 2\pi + 2\pi k)^2}{q_0^2} \end{cases} \tag{3.15}$$

o que nos dá

$$\begin{cases} \dfrac{s_0(jp_0 2\pi + 2\pi k)}{q_0^2} = -\lambda\delta j \\ \dfrac{s_0^2 - (jp_0 2\pi + 2\pi k)^2}{q_0^2} = \lambda^2 j^2 - \delta^2 + |\alpha|^2 \end{cases} \tag{3.16}$$

Observe que

$$\begin{aligned} A_0(2\pi k + j\overline{C_0}) &= (s_0 + i\delta q_0)(2\pi k + j\pi p_0 - ij\lambda q_0) \\ &= s_0(jp_0 2\pi + 2\pi k) + j\delta\lambda q_0^2 + i(\delta q_0 2\pi k + j\delta q_0 2\pi p_0 - js_0\delta q_0). \end{aligned}$$

Em particular, temos que

$$\mathrm{Re}(A_0(2\pi k + j\overline{C_0})) = s_0(jp_0 2\pi + 2\pi k) + j\delta\lambda q_0^2.$$

Pela primeira equação de (3.16), segue que

$$\mathrm{Re}(A_0(2\pi k + j\overline{C_0})) = 0.$$

Além disso, temos que

$$|2\pi k + jC_0|^2 = |2\pi k + j2\pi p_0 + ij\lambda q_0|^2 = (2\pi k + j2\pi p_0)^2 + j^2\lambda^2 q_0^2,$$

$$|A_0|^2 = s_0^2 + \delta^2 q_0^2 \quad \text{e} \quad |B_0|^2 = |\alpha|^2 q_0^2.$$

Segue da segunda equação de (3.16) que

$$|2\pi k + jC_0|^2 = |A_0|^2 - |B_0|^2.$$

Deste modo, existe um par $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$ que satisfaz

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(A_0(2\pi k + j\overline{C_0})) = 0 \\ |2\pi k + jC_0|^2 = |A_0|^2 - |B_0|^2 \end{cases}$$

o que contradiz (II). Logo,

$$K_{1j} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\rho_j(q_0+\tilde{Q}(\sigma))}e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)}}{e^{-\rho_j q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0}} G_{1j}(\sigma)\,d\sigma$$

$$K_{2j} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\rho_j(Q(\sigma)-q_0)}e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)}}{1 - e^{-\rho_j q_0 + ijp_0 2\pi + s_0}} G_{2j}(\sigma)\,d\sigma$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} z_{1j}(t) &= -\int_t^{2\pi} e^{\rho_j(\tilde{Q}(t)-\tilde{Q}(\sigma))}e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{1j}(\sigma)\,d\sigma \\ &\quad + e^{\rho_j \tilde{Q}(t)} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\rho_j(q_0+\tilde{Q}(\sigma))}e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)}}{e^{-\rho_j q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0}} G_{1j}(\sigma)\,d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{2j}(t) &= \int_0^{t} e^{\rho_j(Q(\sigma)-Q(t))}e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{2j}(\sigma)\,d\sigma \\ &\quad + e^{-\rho_j Q(t)} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\rho_j(Q(\sigma)-q_0)}e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)}}{1 - e^{-\rho_j q_0 + ijp_0 2\pi + s_0}} G_{2j}(\sigma)\,d\sigma \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{bmatrix} u_j(t) \\ \overline{u_{-j}}(t) \end{bmatrix} = w_j(t) = e^{ijp_0 t + S(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ (\lambda j - i\delta) + \rho_j & (\lambda j - i\delta) - \rho_j \end{bmatrix}}_{=T_j} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} z_{1j}(t) \\ z_{2j}(t) \end{bmatrix}}_{=z_j(t)}.$$

Deste modo, $u_j(t) = \alpha e^{ijp_0t+S(t)}(z_{1j}(t) + z_{2j}(t))$. Vejamos que u_j é rapidamente decrescente. Dado $L \in \mathbb{N}_0$, temos que

$$\frac{d^L}{dt^L}u_j(t) = \alpha \sum_{k=0}^{L} \binom{L}{k} \frac{d^{L-k}}{dt^{L-k}} e^{ijp_0t+S(t)} \frac{d^k}{dt^k}(z_{1j}(t) + z_{2j}(t)).$$

Para cada $k = 0, \dots, L$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d^{L-k}}{dt^{L-k}} e^{ijp_0+S(t)} &= \sum_{n=0}^{L-k} \binom{L-k}{n} \frac{d^n}{dt^n} e^{S(t)} \frac{d^{L-k-n}}{dt^{L-k-n}} e^{ijp_0t} \\ &= \sum_{n=0}^{L-k} \binom{L-k}{n} (ijp_0)^{L-k-n} e^{ijp_0t} \frac{d^n}{dt^n} e^{S(t)}. \end{aligned}$$

Pela fórmula de Faà di Bruno, para todo $N \in \mathbb{N}$, temos que

$$\frac{d^N}{dt^N} e^{S(t)} = e^{S(t)} \sum_{\gamma \in \Delta(N)} \frac{N!}{\gamma!} \prod_{\ell=1}^{N} \left(\frac{1}{\ell!} \frac{d^\ell}{dt^\ell} S(t) \right)^{\gamma_\ell}. \tag{3.17}$$

Deste modo, para todo $t \in [0, 2\pi]$, utilizando (3.17) para $N = n$, $n = 0, \dots, L-k$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^{L-k}}{dt^{L-k}} e^{ijp_0t+S(t)} \right| &= \left| \sum_{r=0}^{L-k} \binom{L-k}{n} (ijp_0)^{L-k-r} e^{ijp_0t} \left(e^{S(t)} \sum_{\gamma \in \Delta(n)} \frac{n!}{\gamma!} \prod_{\ell=1}^{n} \left(\frac{1}{\ell!} \frac{d^\ell}{dt^\ell} S(t) \right)^{\gamma_\ell} \right) \right| \\ &\leq e^{S(t)} \sum_{n=0}^{L-k} \binom{L-k}{n} (1+|j|)^{L-k-n} |p_0|^{L-k-n} \left(\sum_{\gamma \in \Delta(n)} \frac{n!}{\gamma!} \prod_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell!} \left| \frac{d^\ell}{dt^\ell} S(t) \right|^{\gamma_\ell} \right) \\ &\leq (1+|j|)^{L-k} e^{S(t)} \sum_{n=0}^{L-k} \binom{L-k}{n} |p_0|^{L-k-n} \left(\sum_{\gamma \in \Delta(n)} \frac{n!}{\gamma!} \prod_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell!} \left| \frac{d^\ell}{dt^\ell} S(t) \right|^{\gamma_\ell} \right). \end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre $t \in [0, 2\pi]$ na desigualdade acima, obtemos

$$\left| \frac{d^{L-k}}{dt^{L-k}} e^{ijp_0t+S(t)} \right| \leq C(1+|j|)^{L-k}. \tag{3.18}$$

Com isso, basta verificarmos que z_{1j} e z_{2j} são rapidamente decrescentes. De fato, o decrescimento rápido de z_{1j} e z_{2j} absorverá o crescimento lento de $e^{ijp_0t+S(t)}$. Primeiramente, faremos uma estimativa sobre $|\rho_j|$. Observe que

$$\begin{aligned}
|\rho_j|^4 &= (\lambda^2 j^2 - \delta^2 + |\alpha|^2)^2 + (2\lambda\delta j)^2\\
&= \lambda^4 j^4 + 2\lambda^2 j^2(|\alpha|^2 - \delta^2) + (|\alpha|^2 - \delta^2)^2 + 4\lambda^2\delta^2 j^2\\
&= \lambda^4 j^4 + 2\lambda^2 j^2(|\alpha|^2 + \delta^2) + (|\alpha|^2 - \delta^2)^2.
\end{aligned}$$

Note que, para todo $j \in \mathbb{Z}$, $(1+|j|)^4 \geq j^4 \geq j^2$ e $(1+|j|)^4 \geq 1$. Deste modo,

$$\begin{aligned}
|\rho_j|^4 &\leq \lambda^4(1+|j|)^4 + 2\lambda^2(|\alpha|^2 + \delta^2)(1+|j|)^4 + (|\alpha|^2 - \delta^2)^2(1+|j|)^4\\
&\leq C'(1+|j|)^4,
\end{aligned}$$

com $C' = \max\{\lambda^4, 2\lambda^2(|\alpha|^2+\delta^2), (|\alpha|^2-\delta^2)^2\} > 0$. Deste modo, tomando $C = \sqrt[4]{C'}$, temos que

$$|\rho_j| \leq C(1+|j|), \quad \forall\, j \in \mathbb{Z}. \tag{3.19}$$

O decrescimento rápido de z_j seguirá do fato de que G_{1j} e G_{2j} são rapidamente decrescentes, uma vez que G_j depende dos coeficientes f_j, lembrando que $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Observe que

$$G_j = \underbrace{\frac{-1}{2\alpha\rho_j}\begin{bmatrix} (\lambda j - i\delta) - \rho_j & -\alpha \\ -(\lambda j - i\delta) - \rho_j & \alpha \end{bmatrix}}_{=T_j^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} f_j \\ \overline{f_{-j}} \end{bmatrix}}_{=F_j} = \frac{-1}{2\alpha\rho_j}\begin{bmatrix} ((\lambda j - i\delta) - \rho_j)f_j - \alpha\overline{f_{-j}} \\ (-(\lambda j - i\delta) - \rho_j)f_j + \alpha\overline{f_{-j}} \end{bmatrix}.$$

Por (3.14), temos que

$$(\mathrm{Re}(\rho_j))^2 = (\mathrm{Im}(\rho_j))^2 - \delta^2 + |\alpha|^2 + \lambda^2 j^2 \to \infty.$$

Com isso, $|\rho_j| \to \infty$ e, portanto, $\dfrac{1}{|\rho_j|} \to 0$. Como $\lambda j - i\delta$ é polinomial, ρ_j cresce lentamente por (3.19) e f_j é rapidamente decrescente (assim como $\overline{f_{-j}}$), segue que G_j é rapidamente decrescente.

Vejamos que z_{1j} é rapidamente decrescente. Vamos analisar o decaimento do termo

$$-\int_t^{2\pi} e^{\rho_j(\tilde{Q}(t)-\tilde{Q}(\sigma))} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{1j}(\sigma)\, d\sigma = -e^{\rho_j\tilde{Q}(t)} \int_t^{2\pi} e^{-\rho_j\tilde{Q}(\sigma)} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{1j}(\sigma)\, d\sigma$$

de z_{1j}. Dado $k = 0, \ldots, L$, temos que

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(-e^{\rho_j\tilde{Q}(t)}\int_t^{2\pi} e^{-\rho_j\tilde{Q}(\sigma)}e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)}G_{1j}(\sigma)\,d\sigma\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\frac{d^{k-n}}{dt^{k-n}}e^{\rho_j\tilde{Q}(t)}\frac{d^n}{dt^n}\left(-\int_t^{2\pi} e^{-\rho_j\tilde{Q}(\sigma)}e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)}G_{1j}(\sigma)\,d\sigma\right)$$

$$= -\left(\frac{d^k}{dt^k}e^{\rho_j\tilde{Q}(t)}\right)\int_t^{2\pi} e^{-\rho_j\tilde{Q}(\sigma)}e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)}G_{1j}(\sigma)\,d\sigma$$

$$-\sum_{n=1}^{k}\binom{k}{n}\frac{d^{k-n}}{dt^{k-n}}e^{\rho_j\tilde{Q}(t)}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(e^{-\rho_j\tilde{Q}(t)}e^{-ijp_0 t - S(t)}G_{1j}(t)\right)$$

Pela fórmula de Faà di Bruno, para todo $N \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d^N}{dt^N}e^{\rho_j\tilde{Q}(t)} &= e^{\rho_j\tilde{Q}(t)}\sum_{\gamma\in\Delta(N)}\frac{N!}{\gamma!}\prod_{\ell=1}^{N}\left(\frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}\rho_j\tilde{Q}(t)\right)^{\gamma_\ell} \\ &= e^{\rho_j\tilde{Q}(t)}\sum_{\gamma\in\Delta(N)}\rho_j^{\gamma_1+\cdots+\gamma_N}\frac{N!}{\gamma!}\prod_{\ell=1}^{N}\left(\frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}\tilde{Q}(t)\right)^{\gamma_\ell}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Pela igualdade acima tomando $N = L - k$, pela estimativa (3.19) e observando que $\gamma_1 + \cdots + \gamma_N \leq N$ para todo $\gamma \in \Delta(N)$, temos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{d^{L-k}}{dt^{L-k}}e^{\rho_j\tilde{Q}(t)}\right| &\leq e^{\mathrm{Re}(\rho_j)\tilde{Q}(t)}\sum_{\gamma\in\Delta(L-k)}C(1+|j|)^{\gamma_1+\cdots+\gamma_{L-k}}\frac{(L-k)!}{\gamma!}\prod_{\ell=1}^{L-k}\frac{1}{\ell!}\left|\frac{d^\ell}{dt^\ell}\tilde{Q}(t)\right|^{\gamma_\ell} \\ &\leq C(1+|j|)^{L-k}e^{\mathrm{Re}(\rho_j)\tilde{Q}(t)}\sum_{\gamma\in\Delta(L-k)}\frac{(L-k)!}{\gamma!}\prod_{\ell=1}^{L-k}\frac{1}{\ell!}\left|\frac{d^\ell}{dt^\ell}\tilde{Q}(t)\right|^{\gamma_\ell}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Observe que $\tilde{Q}(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Como $\mathrm{Re}(\rho_j) \geq 0$, temos que $|e^{\rho_j\tilde{Q}(t)}| \leq 1$. Tomando $N = k$ em (3.20), temos que

$$-\left(\frac{d^k}{dt^k}e^{\rho_j\tilde{Q}(t)}\right)\int_t^{2\pi} e^{-\rho_j\tilde{Q}(\sigma)}e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)}G_{1j}(\sigma)\,d\sigma$$

$$= -\sum_{\gamma\in\Delta(k-r)}\frac{(k-r)!}{\gamma!}\prod_{\ell=1}^{k-r}\left(\frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}\tilde{Q}(t)\right)^{\gamma_\ell}\rho_j^k\int_t^{2\pi} e^{\rho_j(\tilde{Q}(t)-\tilde{Q}(\sigma))}e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)}G_{1j}(\sigma)\,d\sigma$$

Da igualdade acima e pela estimativa (3.19),

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{d^k}{dt^k}e^{\rho_j\tilde{Q}(t)}\right)\int_t^{2\pi} e^{-\rho_j\tilde{Q}(\sigma)}e^{-ijp_0\sigma-S(\sigma)}G_{1j}(\sigma)\,d\sigma\right| \\
&\leq \left|\sum_{\gamma\in\Delta(k-r)}\frac{(k-r)!}{\gamma!}\prod_{\ell=1}^{k-r}\left(\frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}\tilde{Q}(t)\right)^{\gamma_\ell}\rho_j^k\int_t^{2\pi} e^{\rho_j(\tilde{Q}(t)-\tilde{Q}(\sigma))}e^{-ijp_0\sigma-S(\sigma)}G_{1j}(\sigma)\,d\sigma\right| \\
&\leq \sum_{\gamma\in\Delta(k-r)}\frac{(k-r)!}{\gamma!}\prod_{\ell=1}^{k-r}\left|\frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}\tilde{Q}(t)\right|^{\gamma_\ell}|\rho_j|^k\int_t^{2\pi} |e^{\rho_j(\tilde{Q}(t)-\tilde{Q}(\sigma))}e^{-ijp_0\sigma-S(\sigma)}G_{1j}(\sigma)|\,d\sigma \\
&\leq\ C(1+|j|)^k\int_t^{2\pi} e^{\mathrm{Re}(\rho_j)(\tilde{Q}(t)-\tilde{Q}(\sigma))}e^{-S(\sigma)}|G_{1j}(\sigma)|\,d\sigma.
\end{aligned}
$$

para alguma constante $C>0$. Observe que, para todo $\sigma\in[t,2\pi]$, $\tilde{Q}(\sigma)\leq\tilde{Q}(t)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\tilde{Q}(t)-\tilde{Q}(\sigma) &= -\int_t^{2\pi} q(\tau)\,d\tau+\int_\sigma^{2\pi} q(\tau)\,d\tau \\
&= -\int_t^{\sigma} q(\tau)\,d\tau-\int_\sigma^{2\pi} q(\tau)\,d\tau+\int_\sigma^{2\pi} q(\tau)\,d\tau \\
&= -\int_t^{\sigma} q(\tau)\,d\tau\ \leq\ 0,
\end{aligned}
$$

lembrando que $q\geq 0$ e $t\leq\sigma$. Como Re$(\rho_j)\geq 0$, segue que $e^{\mathrm{Re}(\rho_j)(\tilde{Q}(t)-\tilde{Q}(\sigma))}\leq 1$ para todo $j\in\mathbb{Z}$ e, portanto,

$$
\left|\left(\frac{d^k}{dt^k}e^{\rho_j\tilde{Q}(t)}\right)\int_t^{2\pi} e^{-\rho_j\tilde{Q}(\sigma)}e^{-ijp_0\sigma-S(\sigma)}G_{1j}(\sigma)\,d\sigma\right|\leq\ C(1+|j|)^k\sup_{t\in[0,2\pi]}|G_{1j}(t)|. \tag{3.22}
$$

Além disso, dado $n=1,\ldots,k$, temos que

$$
\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(e^{-\rho_j\tilde{Q}(t)-ijp_0t-S(t)}G_{1j}(t)\right)=\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}\frac{d^r}{dt^r}e^{-\rho_j\tilde{Q}(t)-ijp_0t-S(t)}\frac{d^{n-1-r}}{dt^{n-1-r}}(G_{1j}(t)).
$$

Para todo $r=0,\ldots,n-1$, temos

$$
\frac{d^r}{dt^r}e^{-\rho_j\tilde{Q}(t)-ijp_0t-S(t)}\ =\sum_{w=0}^{r}\binom{r}{w}\frac{d^w}{dt^w}e^{-ijp_0t-S(t)}\frac{d^{r-w}}{dt^{r-w}}e^{-\rho_j\tilde{Q}(t)}.
$$

Por (3.20) com $N=r-w$, temos que

$$
\frac{d^{r-w}}{dt^{r-w}}e^{-\rho_j\tilde{Q}(t)}\ =\ e^{-\rho_j\tilde{Q}(t)}\sum_{\gamma\in\Delta(r-w)}\frac{(r-w)!}{\gamma!}(-\rho_j)^{\gamma_1+\cdots+\gamma_{r-w}}\prod_{\ell=1}^{r-w}\left(\frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}\tilde{Q}(t)\right)^{\gamma_\ell}
$$

e, portanto,

$$\left|\frac{d^{r-w}}{dt^{r-w}}e^{-\rho_j\tilde{Q}(t)}\right| \leq C(1+|j|)^{r-w}e^{-\mathrm{Re}(\rho_j)\tilde{Q}(t)}.$$

Por (3.18) com $L-k=w$, temos que

$$\left|\frac{d^{w}}{dt^{w}}e^{-ijp_0t-S(t)}\right| \leq C(1+|j|)^{w}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d^{r}}{dt^{r}}e^{-\rho_j\tilde{Q}(t)-ijp_0t-S(t)}\right| &\leq C\sum_{r=0}^{w}\binom{r}{w}\left|\frac{d^{w}}{dt^{w}}e^{-ijp_0t-S(t)}\right|\cdot\left|\frac{d^{r-w}}{dt^{r-w}}e^{-\rho_j\tilde{Q}(t)}\right| \\
&\leq C\sum_{r=0}^{w}\binom{r}{w}(1+|j|)^{w}(1+|j|)^{r-w}e^{-\mathrm{Re}(\rho_j)\tilde{Q}(t)} \\
&= C(1+|j|)^{r}e^{-\mathrm{Re}(\rho_j)\tilde{Q}(t)}.
\end{aligned}$$

Deste modo, para cada $n=1,\ldots,k$, temos que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(e^{-\rho_j\tilde{Q}(t)-ijp_0t-S(t)}G_{1j}(t)\right)\right| \leq \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}\left|\frac{d^{r}}{dt^{r}}e^{-\rho_j\tilde{Q}(t)-ijp_0t-S(t)}\right|\cdot\left|\frac{d^{n-1-r}}{dt^{n-1-r}}G_{1j}(t)\right| \\
&\leq Ce^{-\mathrm{Re}(\rho_j)\tilde{Q}(t)}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}(1+|j|)^{r}\sup_{t\in[0,2\pi]}\left|\frac{d^{n-1-r}}{dt^{n-1-r}}G_{1j}(t)\right| \\
&\leq C(1+|j|)^{n-1}e^{-\mathrm{Re}(\rho_j)\tilde{Q}(t)}\sup_{\substack{t\in[0,2\pi]\\ m\leq n-1}}\left|\frac{d^{m}}{dt^{m}}G_{1j}(t)\right|.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade anterior e por (3.21), para todo $k=0,\ldots,L$, temos que

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^{k}\binom{k}{n}\frac{d^{k-n}}{dt^{k-n}}e^{\rho_j\tilde{Q}(t)}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(e^{-\rho_j\tilde{Q}(t)}e^{-ijp_0t-S(t)}G_{1j}(t)\right)\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{k}\binom{k}{n}\left|\frac{d^{k-n}}{dt^{k-n}}e^{\rho_j\tilde{Q}(t)}\right|\cdot\left|\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(e^{-\rho_j\tilde{Q}(t)}e^{-ijp_0t-S(t)}G_{1j}(t)\right)\right| \\
&\leq C\sum_{n=1}^{k}\binom{k}{n}(1+|j|)^{k-n}e^{\mathrm{Re}(\rho_j)\tilde{Q}(t)}(1+|j|)^{n-1}e^{-\mathrm{Re}(\rho_j)\tilde{Q}(t)}\sup_{\substack{t\in[0,2\pi]\\ m\leq n-1}}\left|\frac{d^{m}}{dt^{m}}G_{1j}(t)\right|
\end{aligned}$$

$$\leq\; C(1+|j|)^{k-1} \sup_{\substack{t\in[0,2\pi] \\ m\leq k-1}} \left| \frac{d^m}{dt^m} G_{1j}(t) \right|.$$

Como $L \in \mathbb{N}$ foi tomado de maneira arbitrária e G_{1j} é rapidamente decrescente, temos que o termo

$$-\int_t^{2\pi} e^{\rho_j(\tilde{Q}(t)-\tilde{Q}(\sigma))} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{1j}(\sigma)\, d\sigma$$

decai rapidamente. Vejamos agora o decaimento do termo

$$e^{\rho_j \tilde{Q}(t)} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\rho_j(q_0+\tilde{Q}(\sigma))} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)}}{e^{-\rho_j q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0}} G_{1j}(\sigma)\, d\sigma.$$

Observe que

$$|e^{-\rho_j q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0}| \;\geq\; \big||e^{-\rho_j q_0}| - |e^{ijp_0 2\pi + s_0}|\big| \;=\; \left|e^{-\mathrm{Re}(\rho_j) q_0} - e^{s_0}\right|.$$

Considere o conjunto

$$\Lambda \;=\; \left\{ j \in \mathbb{Z} \,:\, e^{-\mathrm{Re}(\rho_j) q_0} - e^{s_0} = 0 \right\} \;=\; \left\{ j \in \mathbb{Z} \,:\, \mathrm{Re}(\rho_j) = -s_0/q_0 \right\}.$$

Temos que Λ é finito. De fato, por (3.14) e pelo fato de que $\lambda \neq 0$, temos que

$$(\mathrm{Re}(\rho_j))^2 = (\mathrm{Im}(\rho_j))^2 - \delta^2 + |\alpha|^2 + \lambda^2 j^2 \to \infty \tag{3.23}$$

com $|j| \to \infty$ e, portanto, $|\mathrm{Re}(\rho_j)| \to \infty$ com $|j| \to \infty$. Deste modo, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathrm{Re}(\rho_j)| \geq \left|\dfrac{s_0}{q_0}\right|$ sempre que $|j| \geq j_0$. Isso implica em Λ ser finito.

Alternativamente, se $j \in \mathbb{Z}$ é tal que $\mathrm{Re}(\rho_j) = -s_0/q_0$, então

$$\mathrm{Re}(\rho_j)^2 = s_0^2/q_0^2.$$

Como $\mathrm{Re}(\rho_j)^2 = \mathrm{Im}(\rho_j)^2 + \lambda^2 j^2 - \delta^2 + |\alpha|^2$ por (3.14), temos que

$$j = \frac{\pm 1}{\lambda} \sqrt{\frac{s_0^2}{q_0^2} + \delta^2 - |\alpha|^2 - \mathrm{Im}(\rho_j)^2}, \tag{3.24}$$

sendo que a equação acima possui no máximo duas soluções para $j \in \mathbb{Z}$. Logo, Λ é finito.

Vimos anteriormente que $e^{-\rho_j q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0} \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ e, portanto, da finitude de Λ, temos que

$$D = \min_{j\in\Lambda} |e^{-\rho_j q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0}| > 0.$$

Vejamos que

$$\mu = \inf_{j\in\mathbb{Z}\setminus\Lambda} \left| e^{-\mathrm{Re}(\rho_j)q_0} - e^{s_0} \right| > 0.$$

Caso $\mu = 0$, teríamos uma sequência de inteiros positivos $\{|j_\ell|\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathrm{Re}(\rho_{j_\ell}) \to -\dfrac{s_0}{q_0}$ com $\ell \to \infty$. Isso é um absurdo, pois $|\mathrm{Re}(\rho_{j_\ell})| \to \infty$ com $\ell \to \infty$. Logo, $\mu > 0$. Tomando $C_1 = \min\{D, \mu\}$, temos que

$$\frac{1}{|e^{-\rho_j q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0}|} \le \frac{1}{C_1}, \quad \forall\, j \in \mathbb{Z}. \tag{3.25}$$

Observe que $q_0 + \tilde{Q}(\sigma) \ge 0$ para todo $\sigma \in [0, 2\pi]$. De fato, como q não muda de sinal, $-q_0 = \tilde{Q}(0) \le \tilde{Q}(\sigma)$ para todo $\sigma \in [0, 2\pi]$. Como $\rho_j \ge 0$, temos que $-\rho_j(q_0 + \tilde{Q}(\sigma)) \le 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ e para todo $\sigma \in [0, 2\pi]$. Portanto, $e^{-\rho_j(q_0+\tilde{Q}(\sigma))} \le 1$. Com isso, observe que

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{-\rho_j(q_0+\tilde{Q}(\sigma))} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{1j}(\sigma)\, d\sigma \right| \le C \sup_{t\in[0,2\pi]} |G_{1j}(t)|,$$

com $C = \int_0^{2\pi} e^{-S(\sigma)}\, d\sigma$. Como G_{1j} é rapidamente decrescente, temos que

$$\int_0^{2\pi} e^{-\rho_j(q_0+\tilde{Q}(\sigma))} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{1j}(\sigma)$$

é uma sequência (numérica) rapidamente decrescente. Por (3.25), temos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{\rho_j(\tilde{Q}(0)-\tilde{Q}(\sigma))} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)}}{e^{-\rho_j q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0}} G_{1j}(\sigma)\, d\sigma$$

decai rapidamente. Assim, para todo $L \in \mathbb{N}$, temos que

$$\left| \frac{d^L}{dt^L} \left(e^{\rho_j \tilde{Q}(t)} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\rho_j(q_0+\tilde{Q}(\sigma))} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)}}{e^{-\rho_j q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0}} G_{1j}(\sigma)\, d\sigma \right) \right|$$

$$= \left| \frac{d^L}{dt^L} e^{\rho_j \tilde{Q}(t)} \right| \cdot \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\rho_j(q_0+\tilde{Q}(\sigma))} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)}}{e^{-\rho_j q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0}} G_{1j}(\sigma)\, d\sigma \right|$$

$$\le C(1 + |j|)^L \sup_{t\in[0,2\pi]} |G_{1j}(t)|$$

e, portanto, o termo

$$e^{\rho_j \tilde{Q}(t)} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\rho_j(q_0+\tilde{Q}(\sigma))} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)}}{e^{-\rho_j q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0}} G_{1j}(\sigma)\, d\sigma$$

decai rapidamente. Segue que z_{1j} é rapidamente decrescente.

Verifica-se de maneira análoga a z_{1j} que z_{2j} é rapidamente decrescente. No cálculo do decaimento do segundo termo de z_{2j}, é necessário obter uma estimativa análoga a (3.25) para $1 - e^{-\rho_j q_0 + ijp_0 2\pi + s_0}$. Note que

$$|1 - e^{-\rho_j q_0 + ijp_0 2\pi + s_0}| \geq \big||1| - |e^{-\rho_j q_0 + ijp_0 2\pi + s_0}|\big| = |1 - e^{-\mathrm{Re}(\rho_j) + s_0}|.$$

Analogamente, o conjunto

$$\Lambda = \{j \in \mathbb{Z} \,:\, 1 - e^{-\rho_j q_0 + ijp_0 2\pi + s_0} = 0\} = \{j \in \mathbb{Z} \,:\, \mathrm{Re}(\rho_j) = s_0/q_0\}$$

é finito. Procedendo como em z_{1j}, segue que z_{2j} é rapidamente decrescente.

Logo, u_j é rapidamente decrescente e, portanto, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ com $Pu = f$. Como $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ foi tomada de maneira arbitrária, nas condições do teorema, para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tal que $Pu = f$. $\square$

Corolário 3.2. Se $|A_0| < |B_0|$, então $P(C^\infty(\mathbb{T}^2)) = C^\infty(\mathbb{T}^2)$.

Demonstração. Observe que $|A_0|^2 = s_0^2 + |\delta|^2 q_0^2$ e $|B_0|^2 = |\alpha|^2 q_0^2$. Deste modo,

$$|\alpha|^2 q_0^2 \; > \; s_0^2 q_0^2 + |\delta|^2 q_0^2 \; \geq \; |\delta|^2 q_0^2.$$

Com isso, $|\alpha|^2 > |\delta|^2$ e, portanto, a condição (I) do Teorema 3.1 é satisfeita.

Além disso, como $|A_0| < |B_0|^2$, então $|A_0|^2 - |B_0|^2 < 0$. Como $|2\pi k + jC_0|^2 \geq 0$ para todo $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$, a condição (II) do Teorema 3.1 é satisfeita. $\square$

Os três exemplos a seguir são consequências do corolário anterior:

Exemplo 3.3. Seja P dado por (3.2) com $s_0 = 0$ e $|\delta| < |\alpha|$. Observe que $A_0 = i\delta q_0$ e $B_0 = \alpha q_0$. Com isso, $|A_0| = |\delta| q_0$ e $|B_0| = |\alpha| q_0$. Como $|\alpha| > |\delta|$, temos que $|A_0| < |B_0|$. Do corolário acima, segue que $PC^\infty(\mathbb{T}^2) = C^\infty(\mathbb{T}^2)$.

Exemplo 3.4. Considere $P : C^\infty(\mathbb{T}^2) \to C^\infty(\mathbb{T}^2)$ dado por

$$Pu = \frac{d}{d\bar{z}}u - (s(t) + i\delta)u - \alpha\bar{u},$$

com $s \in C^\infty(\mathbb{T}^1_t; \mathbb{R})$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $|s_0 + 2\pi i\delta| < |2\pi\alpha|$. Então $PC^\infty(\mathbb{T}^2) = C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Basta notar que $|A_0| = |s_0 + 2\pi i\delta|$ e $|B_0| = |2\pi\alpha|$.

Exemplo 3.5. Considere $P : C^\infty(\mathbb{T}^2) \to C^\infty(\mathbb{T}^2)$ dado por

$$Pu = \frac{\partial}{\partial t}u - iq(t)\frac{\partial}{\partial x}u - s(t)u - q(t)\bar{u},$$

com $q, s \in C^\infty(\mathbb{T}^1_t; \mathbb{R})$, $q \not\equiv 0$, $q \geq 0$. Se $|s_0| < |q_0|$, então $PC^\infty(\mathbb{T}^2) = C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Basta notar que $|A_0| = |s_0|$ e $|B_0| = |q_0|$.

3.1.2 Caso Real

Considere agora $\lambda = 0$ em (3.1). Neste caso, o operador L terá a seguinte forma:

$$Lu = \frac{\partial}{\partial t}u - p_0\frac{\partial}{\partial x}u, \tag{3.26}$$

com $p_0 \in \mathbb{R}$. Considere o operador $P : C^\infty(\mathbb{T}^2) \to C^\infty(\mathbb{T}^2)$ dado por

$$Pu = Lu - (s(t) + i\delta q(t))u - \alpha q(t)\bar{u}, \tag{3.27}$$

com $q, s \in C^\infty(\mathbb{T}^1_t; \mathbb{R})$, $q \not\equiv 0$, $q \geq 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Teorema 3.6. Suponha que o operador P, dado por (3.27), satisfaz uma das condições abaixo:

(1) $|B_0| > |A_0|$;

(2) $|B_0| \leq |A_0|$, $|\alpha| > |\delta|$ e não existe $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ solução de

$$\begin{cases} \text{Re}(A_0(k + jp_0)) = 0 \\ 4\pi^2|k + jp_0|^2 = |A_0|^2 - |B_0|^2 \end{cases} ; \tag{3.28}$$

(3) $|\alpha| < |\delta|$ e $s_0 \neq 0$;

(4) $|\alpha| < |\delta|$, $s_0 = 0$, não existe $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ satisfazendo (3.28) e vale a seguinte condição diofantina:

(DC3) Existe $\gamma > 0$ tal que

$$j, k \in \mathbb{Z},\ |j| \geq \gamma \ \Rightarrow\ |2k\pi + jp_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}| \geq |j|^{-\gamma}.$$

Então, para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tal que $Pu = f$.

Demonstração. Procedendo como no Teorema 3.1, dada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, suponha que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ é solução de $Pu = f$. Tomando as séries parciais de Fourier, para cada $j \in \mathbb{Z}$ e fazendo $y_j = e^{-ijp_0t-S(t)}w_j$, sendo $w_j = \begin{bmatrix} u_j \\ \overline{u_{-j}} \end{bmatrix}$, cada y_j deve ser solução de

$$y_j' = q(t)\tilde{M}y_j + e^{-ijp_0t-S(t)}F_j$$

e satisfazer $y_j(0) = e^{ijp_0 2\pi + s_0}y_j(2\pi)$, com

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} i\delta & \alpha \\ \bar{\alpha} & -i\delta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F_j = \begin{bmatrix} f_j \\ \overline{f_{-j}} \end{bmatrix}.$$

Assim, os autovalores de $\tilde{M}$ são $\pm\sqrt{|\alpha|^2 - \delta^2}$. Note que, neste caso, a matriz $\tilde{M}$ não depende de $j \in \mathbb{Z}$ e, portanto, seus autovalores não dependem de $j \in \mathbb{Z}$. Caso $|\alpha| \geq |\delta|$, temos que $\pm\sqrt{|\alpha|^2 - \delta^2} \in \mathbb{R}$ e, caso $|\alpha| < |\delta|$, temos que $\pm\sqrt{|\alpha|^2 - \delta^2} \in i\mathbb{R}$. No primeiro caso, denotemos $\rho = \sqrt{|\alpha|^2 - \delta^2}$. No segundo caso, denotemos $\rho = -i\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}$.

As condições (1)-(4) nos garantem que $|\alpha| \neq |\delta|$, o que implica em $\pm\rho \neq 0$ e, portanto, $\tilde{M}$ é diagonalizável. Como no Teorema 3.1, os autovetores associados a $\pm\rho$ são

$$V^\pm = \begin{bmatrix} \alpha \\ -i\delta \pm \rho \end{bmatrix}$$

e, com isso,

$$\tilde{M} = \rho T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} T^{-1},$$

sendo

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ -i\delta + \rho & -i\delta - \rho \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T^{-1} = \frac{-1}{2\alpha\rho} \begin{bmatrix} -i\delta - \rho & -\alpha \\ i\delta - \rho & \alpha \end{bmatrix}.$$

Tomando $z_j = T^{-1}y_j$ e $G_j = T^{-1}F_j$, obtemos que z_j é solução de

$$z_j' = q(t)\rho \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z_j + e^{-ijp_0t-S(t)}G_j \tag{3.29}$$

e deve satisfazer

$$z_j(0) = e^{ijp_0 2\pi + s_0}z_j(2\pi). \tag{3.30}$$

Resolvendo (3.29) para cada $j \in \mathbb{Z}$ pelo método do fator integrante, obtemos

$$z_{1j}(t) = -e^{\rho\tilde{Q}(t)} \int_t^{2\pi} e^{-\rho\tilde{Q}(\sigma)} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{1j}(\sigma)\, d\sigma + K_{1j} e^{\rho\tilde{Q}(t)}$$

$$z_{2j}(t) = e^{-\rho Q(t)} \int_0^t e^{\rho Q(\sigma)} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{2j}(\sigma)\, d\sigma + K_{2j} e^{-\rho Q(t)}$$

no qual K_{1j} e K_{2j} devem satisfazer

$$(e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0}) K_{1j} = \int_0^{2\pi} e^{-\rho(q_0 + \tilde{Q}(\sigma))} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{1j}(\sigma)$$

$$(1 - e^{-\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0}) K_{2j} = \int_0^{2\pi} e^{\rho(Q(\sigma) - q_0)} e^{-ijp_0\sigma - S(\sigma)} G_{2j}(\sigma)\, d\sigma$$

por (3.30). Vejamos que as condições (1)-(4) nos garantem que $e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0} \neq 0$ e $1 - e^{-\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0} \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Suponha que vale (1). Note que $|A_0|^2 = s_0^2 + |\delta|^2 q_0^2$ e $|B_0|^2 = |\alpha|^2 q_0^2$. Como $|A_0| < |B_0|$, temos que

$$|\alpha|^2 q_0 > s_0^2 + |\delta|^2 q_0^2 \geq |\delta|^2 q_0^2 \;\Rightarrow\; |\alpha| > |\delta|.$$

Assim, $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$. Suponha que exista $j \in \mathbb{Z}$ tal que $e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0} = 0$. Então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0 = -i2\pi k.$$

Igualando as partes reais, obtemos $\rho q_0 + s_0 = 0$. Como $\rho = \sqrt{|\alpha|^2 - \delta^2}$, temos que

$$\begin{aligned} q_0\sqrt{|\alpha|^2 - \delta^2} + s_0 = 0 \quad &\Rightarrow\quad (|\alpha|^2 - \delta^2) q_0^2 = s_0^2 \\ &\Rightarrow\quad |\alpha|^2 q_0^2 = s_0^2 + \delta^2 q_0^2 \\ &\Rightarrow\quad |A_0|^2 = |B_0|^2, \end{aligned}$$

o que contradiz (1). Logo, $e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0} \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Para $1 - e^{-\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0}$ é análogo.

Suponha que vale (2). Se existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0} = 0$, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0 = -i2\pi k.$$

Como $|\alpha| > |\delta|$, temos que $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$. Assim como no caso anterior, igualando as partes reais, obtemos que $|A_0| = |B_0|$ e, portanto, $|A_0|^2 = |B_0|^2$.

Igualando as partes imaginárias, obtemos que $ijp_0 2\pi = -i2\pi k$ e, portanto, $k + jp_0 = 0$. Deste modo, o par $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ satisfaz (3.28), o que contradiz (2). Logo, $e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0} \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Para $1 - e^{-\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0}$ é análogo.

Suponha que vale (3). Neste caso, como $|\alpha| < |\delta|$, temos que

$$\rho = -i\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2} \in i\mathbb{R}_{<0},$$

com $\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2} \in \mathbb{R}_{>0}$. Caso exista $j \in \mathbb{Z}$ tal que $e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0} = 0$, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0 = -i2\pi k.$$

Igualando as partes reais, obtemos $s_0 = 0$, o que contradiz (3). Deste modo, temos que $e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0} \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Para $1 - e^{-\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0}$ é análogo.

Suponha que vale (4). Assim como no caso anterior, como $|\alpha| < |\delta|$, temos que $\rho = -i\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2} \in i\mathbb{R}_{<0}$, com $\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2} \in \mathbb{R}_{>0}$. Caso exista $j \in \mathbb{Z}$ tal que $e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0} = 0$, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0 = -i2\pi k.$$

Igualando as partes imaginárias, obtemos

$$-iq_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2} + ijp_0 2\pi = -i2\pi k,$$

o que nos dá $(\delta^2 - |\alpha|^2)q_0^2 = 4\pi^2|k + jp_0|^2$. Observe que $(\delta^2 - |\alpha|^2)q_0^2 = |A_0|^2 - |B_0|^2$. Além disso, note que $A_0 = i\delta q_0 \in i\mathbb{R}$. Como $k + jp_0 \in \mathbb{R}$, temos que $\mathrm{Re}(A_0(k + jp_0)) = 0$ e, portanto, o par $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ satisfaz (3.28), o que contradiz (4). Logo, $e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0} \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Para $1 - e^{-\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0}$ é análogo.

Com isso, podemos isolar K_{1j} e K_{2j} para todo $j \in \mathbb{Z}$ e, portanto, nos resta analisar o decaimento dos termos $(e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0})^{-1}$ e $(1 - e^{-\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0})^{-1}$.

No caso (1), temos que $\rho \in \mathbb{R}$. Assim, basta notar que, dado $j \in \mathbb{Z}$,

$$|e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0}| \geq |e^{-\rho q_0} - e^{s_0}| \quad \text{e} \quad |1 - e^{-\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0}| \geq |1 - e^{-\rho q_0 + s_0}|,$$

Como vimos anteriormente, $|A_0| < |B_0|$ nos garante que

$$-\rho q_0 \neq ijp_0 2\pi + s_0 + i2\pi k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomando $C = \min\{|e^{-\rho q_0} - e^{s_0}|,\ |1 - e^{-\rho q_0 + s_0}|\} > 0$, vale

$$|e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0}| \geq C \quad \text{e} \quad |1 - e^{-\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0}| \geq C$$

e, portanto,

$$|e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0}|^{-1} \leq C^{-1} \quad \text{e} \quad |1 - e^{-\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0}|^{-1} \leq C^{-1}$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$.

No caso (2), como $|\alpha| > |\delta|$, temos $\rho \in \mathbb{R}$. Observe que a condição de não existir $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ solução de (3.28) implica em $|A_0| > |B_0|$. De fato, caso $|A_0| = |B_0|$, o par $(0, 0) \in \mathbb{Z}^2$ seria solução de (3.28). Assim,

$$|e^{-\rho q_0} - e^{s_0}| > 0 \quad \text{e} \quad |1 - e^{-\rho q_0 + s_0}| > 0.$$

Tomando $C = \min\{|e^{-\rho q_0} - e^{s_0}|,\ |1 - e^{-\rho q_0 + s_0}|\} > 0$ como no caso anterior, temos que

$$(e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0})^{-1} \leq C \quad \text{e} \quad (1 - e^{-\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0})^{-1} \leq C$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$.

No caso (3), temos que $|\alpha| < |\delta|$ e, portanto, $\rho \in i\mathbb{R}$. Assim, note que

$$|e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0}| \geq |1 - e^{s_0}| \quad \text{e} \quad |1 - e^{-\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0}| \geq |1 - e^{s_0}|,$$

com $|1 - e^{s_0}| > 0$ pois $s_0 \neq 0$. Tomando $C = |1 - e^{s_0}|$, temos que

$$(e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0})^{-1} \leq C \quad \text{e} \quad (1 - e^{-\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0})^{-1} \leq C$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Por fim, no caso (4), não obtemos uma constante C que controla $|e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi + s_0}|^{-1}$ e $|1 - e^{-\rho q_0 + ijp_0 2\pi + s_0}|^{-1}$, mas a condição diofantina (DC3) nos garante que estas sequências são de crescimento lento e, portanto, serão absorvidas pelo decaimento de G_{2j}. Como $\rho \in i\mathbb{R}$, temos que $|e^{-\rho q_0}| = 1$ e, portanto,

$$|e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi}| = |1 - e^{\rho q_0 + ijp_0 2\pi}| = |e^{i(jp_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2})} - 1|.$$

Do mesmo modo, temos que

$$|1 - e^{\rho q_0 + ijp_0 2\pi}| = |1 - e^{i(jp_0 2\pi + q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2})} - 1| = |e^{i((-j)p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2})} - 1|.$$

Por fim, pelo Lema 3.7, temos que (DC3) é equivalente à seguinte condição diofantina:

(DC4) Existe $\gamma > 0$ tal que

$$|j| \geq \gamma \;\Rightarrow\; |e^{i(jp_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2})} - 1| \geq \frac{1}{|j|^\gamma}.$$

Com isso, temos que, para todo $|j| \geq \gamma$,

$$|e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi}|^{-1} \leq |j|^\gamma \quad \text{e} \quad |1 - e^{\rho q_0 + ijp_0 2\pi}|^{-1} \leq |j|^\gamma.$$

Segue que $|e^{-\rho q_0} - e^{ijp_0 2\pi}|^{-1}$ e $|1 - e^{\rho q_0 + ijp_0 2\pi}|^{-1}$ são de crescimento lento.

Com isso, de modo análogo ao Teorema 3.1, verifica-se que z_{1j} e z_{2j} são rapidamente decrescentes e, portanto, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, com $Pu = f$. Segue que $PC^\infty(\mathbb{T}^2) = C^\infty(\mathbb{T}^2)$. □

Lema 3.7. A condição diofantina (DC3) é equivalente a

(DC4) Existe $\gamma > 0$ tal que

$$|j| \geq \gamma \;\Rightarrow\; |e^{i(jp_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2})} - 1| \geq |j|^{-\gamma}.$$

Demonstração. Suponha que não vale (DC3). Então, para todo $\ell \in \mathbb{N}$, existem $k_\ell, j_\ell \in \mathbb{Z}$ com $|j_\ell| \geq \ell$ tais que

$$|2\pi k_\ell + j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}| < |j_\ell|^{-\ell}.$$

Deste modo, temos que

$$\begin{aligned} |e^{i(j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2})} - 1|^2 &= |e^{i(2\pi k_\ell + j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2})} - 1|^2 \\ &= 2(1 - \cos(2\pi k_\ell + j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2})) \\ &= 2(2\pi k_\ell + j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2})\text{sen}(\xi_\ell) \end{aligned}$$

para algum $\xi_\ell \in \mathbb{R}$. De fato, observe que

- Dado $\theta \in \mathbb{R}$, temos que

  $$|e^{i\theta}-1|^2 = |e^{i2\theta}-2e^{i\theta}+1| = |e^{i\theta}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}-2)| = 2\left|\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}-1\right| = 2(1-\cos\theta),$$

  lembrando que $|e^{i\theta}| = 1$ e $1-\cos\theta \geq 0$ pois $\cos\theta \leq 1$;

- $1-\cos\theta \leq |\theta|$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Além disso, para todo $\ell \in \mathbb{N}$, temos $|j_\ell|^{-\ell} \leq \ell^{-\ell} \leq 1$. Deste modo, para todo $\ell \in \mathbb{N}$, temos

  $$|2\pi k_\ell + j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2}| < |j_\ell|^{-\ell} \leq 1.$$

  Com isso,
  $$\left|\frac{1-\cos(2\pi k_\ell + j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2})}{2\pi k_\ell + j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2}}\right| < 1$$

  e, portanto, existe $\xi_\ell \in \mathbb{R}$ tal que
  $$\operatorname{sen}(\xi_\ell) = \frac{1-\cos(2\pi k_\ell + j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2})}{2\pi k_\ell + j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2}}.$$

Assim,
$$|e^{i(j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2})}-1|^2 < 2|j_\ell|^{-\ell}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}$$

e, portanto, não vale (DC4).

Por outro lado, suponha que não vale (DC4). Assim, para todo $\ell \in \mathbb{N}$, existe $j_\ell \in \mathbb{Z}$ com $|j_\ell| \geq \ell$ tal que
$$|e^{i(j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2})}-1| < |j_\ell|^{-\ell}.$$

Para cada $\ell \in \mathbb{N}$, tome
$$-k_\ell = \left\lfloor j_\ell p_0 - \frac{q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2}}{2\pi}\right\rfloor,$$

isto é, $-k_\ell$ é a parte inteira de $j_\ell p_0 - \dfrac{q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2}}{2\pi}$. Observe que
$$0 \leq j_\ell p_0 - \frac{q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2}}{2\pi} + k_\ell < 1.$$

Como
$$|e^{i(j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2})}-1| < |j_\ell|^{-\ell} \to 0 \tag{3.31}$$

com $\ell \to \infty$, temos que

$$j_\ell p_0 - \frac{q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}}{2\pi} + k_\ell \to 0 \quad \text{ou} \quad j_\ell p_0 - \frac{q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}}{2\pi} + k_\ell \to 1. \tag{3.32}$$

De fato, como vale (3.31), a parte decimal de $j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}$ deve tender a 0 ou a 1 e, portanto, vale (3.32). Deste modo, para $\ell \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos que

$$\begin{aligned} |e^{i(2\pi k_\ell + j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2})} - 1|^2 &= 2(1 - \cos(2\pi k_\ell + j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2})) \\ &\geq \frac{1}{2}|2\pi k_\ell + j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}|^2, \end{aligned}$$

uma vez que $1 - \cos(x) \geq \frac{1}{4}x^2$ para todo $x \in (-2, 2)$. De fato, isto verifica-se facilmente aplicando a fórmula de Taylor para a função $1 - \cos(x)$ na origem. Como vale

$$|e^{i(2\pi k_\ell + j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2})} - 1| < |j_\ell|^{-\ell}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N},$$

temos que

$$|2\pi k_\ell + j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}|^2 < 2|j_\ell|^{-\ell}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}$$

o que nos dá

$$|2\pi k_\ell + j_\ell p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}| < \sqrt{2}|j_\ell|^{-\ell/2}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}$$

e, portanto, não vale (DC3). Logo, (DC3) e (DC4) são equivalentes. □

3.1.3 Caso Geral

Observe que, na demonstração do Teorema 3.1, a hipótese de que $\lambda \neq 0$ é necessária apenas para garantir o controle do crescimento dos termos

$$e^{-\rho_j q_0} - e^{s_0 + i2\pi j p_0} \quad \text{e} \quad 1 - e^{-\rho_j q_0 + s_0 + i2\pi j p_0},$$

conforme pode ser verificado nas expressões (3.23) e (3.24) na demonstração do Teorema 3.1. Inspirado nos resultados do artigo [6], podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.8. Suponha que o operador P dado por (3.2) satisfaça as seguintes condições:

(I) $|\alpha| \neq |\delta|$;

(II) Não existe $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ solução de

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(A_0(2\pi k + j\overline{C_0})) = 0 \\ |2\pi k + jC_0|^2 = |A_0|^2 - |B_0|^2 \end{cases};$$

(III) Existe $\gamma > 0$ tal que

$$j \in \mathbb{Z},\ |j| \geq \gamma \ \Rightarrow\ \min\{|e^{-\rho_j q_0} - e^{s_0 + i2\pi j p_0}|, |1 - e^{-\rho_j q_0 + s_0 + i2\pi j p_0}|\} \geq |j|^{-\gamma},$$

sendo ρ_j o elemento de $\{\pm\sqrt{(\lambda j - i\delta)^2 + |\alpha|^2}\}$ com parte real não-negativa.

Então, para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tal que $Pu = f$.

Note que este resultado vale para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Em particular, não é difícil ver que as condições (1)-(4) do Teorema 3.6 implicam em (I), (II) e (III). Caso $\lambda \neq 0$, vimos que as condições (I) e (II) implicam em (III). Isto vale apenas para operadores no toro bidimensional, como veremos na seção seguinte.

3.2 Caso $\mathbb{T}^{n+1}$, $n \geq 1$

Estenderemos os resultados da seção anterior para o toro $\mathbb{T}^{n+1}$. Os resultados desta seção são de [6] e as demonstrações são análogas às do caso $\mathbb{T}^2$.

Considere o operador $L : C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}) \to C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ dado por

$$Lu = \frac{\partial}{\partial t}u - \sum_{j=1}^{n}(p_j(t) + i\lambda_j q(t))\frac{\partial}{\partial x_j}u,$$

com $p_j, q \in C^\infty(\mathbb{T}^1_t; \mathbb{R})$ e $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$.

Para cada $j = 1, \ldots, n$, sejam

$$p_{0j} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_j(\tau)\, d\tau, \quad m_j(t) = \int_0^t (p_j(\tau) - p_{0j})\, d\tau$$

e tome $m(t) = (m_1(t), \ldots, m_n(t))$. Dado $J = (J_1, \ldots, J_n) \in \mathbb{Z}^n$, observe que

$$\frac{\partial}{\partial t}(m(t) \cdot J) = \sum_{j=1}^{n}(p_j(t) - p_{0j})J_j.$$

Lema 3.9. O operador $T : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ dado por

$$Tu(x,t) = \sum_{J \in \mathbb{Z}^n} u_J(t) e^{-im(t)\cdot J} e^{iJ\cdot x},$$

com $u(x,t) = \sum_{J \in \mathbb{Z}^n} u_J(t) e^{iJ\cdot x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$, é um isomorfismo linear em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$. Em particular, a restrição $T|_{C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})}$ é um isomorfismo linear em $C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$. Além disso, vale

$$TLT^{-1} = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} (p_{0j} + i\lambda_j q(t)) := \tilde{L}.$$

Demonstração. Seja $u(x,t) = \sum_{J \in \mathbb{Z}^n} u_J(t) e^{iJ\cdot x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$. Como $u_J(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^1)$ para todo $J \in \mathbb{Z}^n$, então $u_J(t) e^{-im(t)\cdot J} \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^1)$ para todo $J \in \mathbb{Z}^n$. Queremos mostrar que $Tu \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$.

Como $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$, existem $C > 0$ e $M \in \mathbb{N}$ tais que

$$|\langle u, f \rangle| \;\leq\; C \sum_{|\beta| \leq M} \sup_{(t,x)} |D^\beta f(t,x)|$$

para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$. Assim, dada $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle (Tu)_J(t), \varphi(t) \rangle &= \left| \left\langle u_J(t) e^{-im(t)\cdot J}, \varphi(t) \right\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle u_J(t), e^{-im(t)\cdot J} \varphi(t) \right\rangle \right| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \left\langle u(t,x), \varphi(t) e^{-im(t)\cdot J} e^{-iJ\cdot x} \right\rangle \right| \\
&\leq \frac{C}{(2\pi)^n} \sum_{|\beta| \leq M} \sup_{(t,x)} \left| \partial^{(\beta_x, \beta_t)} \varphi(t) e^{-im(t)\cdot J} e^{-iJ\cdot x} \right| \\
&= \frac{C}{(2\pi)^n} \sum_{|\beta| \leq M} \sup \left| \partial^{(\beta_x, 0)} e^{-iJ\cdot x} \sum_{j=0}^{\beta_t} \binom{\beta_t}{j} \frac{\partial^j}{\partial t^j} e^{-im(t)\cdot J} \frac{\partial^{\beta_t - j}}{\partial t^{\beta_t - j}} \varphi(t) \right| \\
&= \frac{C}{(2\pi)^n} \sum_{|\beta| \leq M} \sup \sum_{j=0}^{\beta_t} \binom{\beta_t}{j} \left| (-iJ)^{\beta_x} e^{-iJ\cdot x} \frac{\partial^j}{\partial t^j} e^{-im(t)\cdot J} \frac{\partial^{\beta_t - j}}{\partial t^{\beta_t - j}} \varphi(t) \right| \\
&\leq \frac{C}{(2\pi)^n} \|J\|^M \sum_{|\beta| \leq M} \sup \sum_{j=0}^{\beta_t} \binom{\beta_t}{j} \left| g_j(t) e^{-im(t)\cdot J} \frac{\partial^{\beta_t - j}}{\partial t^{\beta_t - j}} \varphi(t) \right| \\
&\leq C(1 + \|J\|)^M p_M(\varphi),
\end{aligned}$$

sendo cada g_j um polinômio de derivadas de $e^{-im(t)\cdot J}$. Observe também que o supremo de uma função em $C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ é sempre finito. Logo, $Tu \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ e, com isso, T está bem definido. A linearidade de T é facilmente verificada. Por fim, observe que a aplicação $T^{-1} : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ dada por

$$T^{-1}v = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} v_J(t)e^{im(t)\cdot J}e^{iJ\cdot x},$$

com $v(x,t) = \sum_{J\in\mathbb{Z}} v_j(t)e^{iJ\cdot x}$, está bem definida (verifica-se de maneira análoga), é linear e é inversa de T.

Agora, vejamos que a restrição $T|_{C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})}$ é um automorfismo em $C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$. De fato, se $u(x,t) = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} u_m(t)e^{iJ\cdot x} \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$, observe que $|u_J(t)e^{-im(t)\cdot J}| = |u_J(t)|$ e, portanto, $Tu \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Para a inversa, é análogo.

Por fim, note que, como o operador L é contínuo, dada $u(x,t) = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} u_m(t)e^{iJ\cdot x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ temos que

$$\begin{aligned}
LT^{-1}u(x,t) &= \sum_{J\in\mathbb{Z}^n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n}(p_j(t)+i\lambda_j q(t))\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(u_J(t)e^{im(t)\cdot J}e^{iJ\cdot x}\right)\right]\\
&= \sum_{J\in\mathbb{Z}^n}\left(\frac{\partial}{\partial t}u_J(t)e^{im(t)\cdot J} + u_J(t)i\left(\sum_{j=1}^{n}(p_j(t)-p_{0j})J_j\right)e^{im(t)\cdot J}\right)e^{iJ\cdot x}\\
&\quad - \left(\sum_{j=1}^{n}(p_j(t)+i\lambda_j q(t))iJ_j u_J(t)e^{im(t)\cdot J}\right)e^{iJ\cdot x}\\
&= \sum_{J\in\mathbb{Z}^n}\left(\frac{\partial}{\partial t}u_J(t) - iu_J(t)\sum_{j=1}^{n}(p_{0j}+i\lambda_j q(t))J_j\right)e^{im(t)\cdot J}e^{iJ\cdot x}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
T^{-1}\tilde{L}u(x,t) &= T^{-1}\sum_{J\in\mathbb{Z}^n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}(p_{0j}+i\lambda_j q(t))\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(u_J(t)e^{iJ\cdot x}\right)\right]\\
&= T^{-1}\sum_{J\in\mathbb{Z}^n}\left(\frac{\partial}{\partial t}u_J(t) - iu_J(t)\sum_{j=1}^{n}(p_{0j}+i\lambda_j q(t))J_j\right)e^{iJ\cdot x}\\
&= \sum_{J\in\mathbb{Z}^n}\left(\frac{\partial}{\partial t}u_J(t) - iu_J(t)\sum_{j=1}^{n}(p_{0j}+i\lambda_j q(t))J_j\right)e^{im(t)\cdot J}e^{iJ\cdot x}.
\end{aligned}$$

Logo, $TLT^{-1} = \tilde{L}$. □

Deste modo, podemos considerar o operador L da forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n}(p_{0j} + i\lambda_j q(t))\frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{3.33}$$

com $q \in C^\infty(\mathbb{T}^1_t;\mathbb{R})$, $p_{0j}, \lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. Denotemos

$$p_0 = (p_{01}, \ldots, p_{0n}) \quad \text{e} \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Sendo L como em (3.33), considere o operador $P : C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}) \to C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ dado por

$$Pu = Lu - (s(t) + i\delta q(t))u - \alpha q(t)\bar{u}, \tag{3.34}$$

com $s \in C^\infty(\mathbb{T}^1_t;\mathbb{R})$, $\delta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Suponha também que $q \not\equiv 0$ e que q não mude de sinal. Sem perda de generalidade, podemos supor que $q \geq 0$, uma vez que, para o caso $q \neq 0$, basta tomar uma mudança de variáveis. Considere

- $A_0 = \displaystyle\int_0^{2\pi} s(\tau) + i\delta q(\tau)\, d\tau = s_0 + i\delta q_0$;
- $B_0 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \alpha q(\tau)\, d\tau = \alpha q_0$;
- $C_0 = \left(\displaystyle\int_0^{2\pi} p_1(t) + i\lambda_1 q(\tau)\, d\tau, \ldots, \int_0^{2\pi} p_n(t) + i\lambda_n q(\tau)\, d\tau\right) = 2\pi p_0 + i\lambda q_0$;

com

$$q_0 = \int_0^{2\pi} q(\tau)\, d\tau \quad \text{e} \quad s_0 = \int_0^{2\pi} s(\tau)\, d\tau.$$

Observe que $q \not\equiv 0$ e $q \geq 0$ implica em $q_0 > 0$.

O teorema abaixo estende o Teorema 3.1 para o toro $\mathbb{T}^{n+1}$ e a demonstração é uma adaptação dos argumentos utilizados na demonstração do Teorema 3.1.

Teorema 3.10. Seja P como em (3.34) e suponha que sejam válidas as seguintes condições abaixo:

(I) $|\alpha| \neq |\delta|$;

(II) Não existe $(J, k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ solução de

$$\begin{cases} \text{Re}(A_0(2\pi k + J \cdot \overline{C_0})) = 0 \\ |2\pi k + J \cdot C_0|^2 = |A_0|^2 - |B_0|^2 \end{cases};$$

(III) Existe $\gamma > 0$ tal que

$$J \in \mathbb{Z}^n,\ \|J\| \geq \gamma \ \Rightarrow\ \min\{|e^{-\rho_J q_0} - e^{s_0 + i2\pi J\cdot p_0}|, |1 - e^{-\rho_J q_0 + s_0 + i2\pi J\cdot p_0}|\} \geq \|J\|^{-\gamma}.$$

Então, para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$, existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ tal que $Pu = f$.

Demonstração. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$. Suponha que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ seja tal que $Pu = f$. Tome as séries parciais de Fourier com respeito à variável $x \in \mathbb{R}^n$

$$u(x,t) = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} u_J(t) e^{iJ\cdot x} \quad \text{e} \quad f(x,t) = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} f_J(t) e^{iJ\cdot x}.$$

Aplicando o operador P em u e comparando os coeficientes de Fourier, para cada $J \in \mathbb{Z}^n$, obtemos o seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{cases} u_J' - [i(p_0 + i\lambda q(t)) \cdot J + s(t) + i\delta q(t)]u_J - \alpha q(t)\overline{u_{-J}} = f_J \\ \overline{u_{-J}}' - [i(p_0 - i\lambda q(t)) \cdot J + s(t) - i\delta q(t)]\overline{u_{-J}} - \bar{\alpha} q(t) u_J = \overline{f_{-J}} \end{cases} \tag{3.35}$$

Procedendo de maneira análoga ao Teorema 3.1 com o uso das condições (I) e (II), obtemos que

$$u_J(t) = \alpha e^{iJ\cdot p_0 t + S(t)}(z_{1J} + z_{2J}),\ \forall J \in \mathbb{Z}^n,$$

com

$$\begin{aligned} z_{1J}(t) &= -\int_t^{2\pi} e^{\rho_J(\tilde{Q}(t) - \tilde{Q}(\sigma))} e^{-iJ\cdot p_0\sigma - S(\sigma)} G_{1J}(\sigma)\, d\sigma \\ &\quad + e^{\rho_J \tilde{Q}(t)} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\rho_J(q_0 + \tilde{Q}(\sigma))} e^{-iJ\cdot p_0\sigma - S(\sigma)}}{e^{-\rho_J q_0} - e^{iJ\cdot p_0 2\pi + s_0}} G_{1J}(\sigma)\, d\sigma \\ z_{2J}(t) &= \int_0^t e^{\rho_J(Q(\sigma) - Q(t))} e^{-iJ\cdot p_0\sigma - S(\sigma)} G_{2J}(\sigma)\, d\sigma \\ &\quad + e^{-\rho_J Q(t)} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\rho_J(Q(\sigma) - q_0)} e^{-iJ\cdot p_0\sigma - S(\sigma)}}{1 - e^{-\rho_J q_0 + iJ\cdot p_0 2\pi + s_0}} G_{2J}(\sigma)\, d\sigma \end{aligned}$$

sendo

$$Q(t) = \int_0^t q(\tau)\, d\tau\,, \quad \tilde{Q}(t) = -\int_t^{2\pi} q(\tau)\, d\tau\,, \quad S(t) = \int_0^{2\pi} s(\tau)\, d\tau,$$

$$G_J = \begin{bmatrix} G_{1J} \\ G_{2J} \end{bmatrix} = \frac{-1}{2\alpha\rho_J} \begin{bmatrix} (\lambda\cdot J - i\delta) - \rho_J & -\alpha \\ -(\lambda\cdot J - i\delta) - \rho_J & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_J \\ \overline{f_{-J}} \end{bmatrix}$$

e ρ_J é o elemento com parte real positiva de $\{\pm\sqrt{(\lambda \cdot J - i\delta)^2 + |\alpha|^2}\}$.

Note que G_{1J} e G_{2J} são rapidamente decrescentes pois f_J e $\overline{f_{-J}}$ o são. Além disso, verifica-se que

$$|\rho_J| \leq C(1 + \|J\|)$$

para todo $J \in \mathbb{Z}^n$ de maneira análoga ao caso bidimensional. A condição (II) nos garante, de maneira análoga ao Teorema 3.1, que

$$e^{-\rho_J q_0} - e^{iJp_0 2\pi + s_0} \neq 0 \quad \text{e} \quad 1 - e^{-\rho_J q_0 + iJ\cdot p_0 2\pi + s_0} \neq 0$$

para todo $J \in \mathbb{Z}^n$. Usando a condição (III) e aplicando a fórmula de Faà di Bruno de maneira análoga ao Teorema 3.1, verifica-se o decaimento rápido de z_{1J}, z_{2J} e suas derivadas, assim como o crescimento lento de $e^{iJ\cdot p_0 t + S(t)}$. Deste modo, u_J é rapidamente decrescente e, portanto, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$, com $Pu = f$ por construção. □

No caso bidimensional, temos que as condições (I) e (II) implicam na condição (III), juntamente com a hipótese de que $\lambda \neq 0$, argumentação que não vale para o caso $n+1$-dimensional. Observe que, supondo a validade da condição (III), não é necessário pedir $\lambda \neq 0$, como vimos na Subseção 3.1.3. Caso $\lambda = 0$, o operador L se reduz a um campo vetorial real, o que nos permite enunciar condições mais simples para a resolubilidade de P:

Corolário 3.11. Seja P tal como em (3.34) e suponha $\lambda = 0$.

(1) $|B_0| > |A_0|$;

(2) $|B_0| \leq |A_0|$, $|\alpha| > |\delta|$ e não existe $(J, k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ solução de

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(A_0(k + J \cdot p_0)) = 0 \\ 4\pi^2 |k + J \cdot p_0|^2 = |A_0|^2 - |B_0|^2 \end{cases} ; \tag{3.36}$$

(3) $|\alpha| < |\delta|$ e $s_0 \neq 0$;

(4) $|\alpha| < |\delta|$, $s_0 = 0$, não existe $(J, k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ satisfazendo (3.36) e vale a seguinte condição diofantina:

(DC3') Existe $\gamma > 0$ tal que

$$(J, k) \in \mathbb{Z}^{n+1}, \ \|J\| \geq \gamma \ \Rightarrow \ |2k\pi + J \cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}| \geq \|J\|^{-\gamma}.$$

Então, para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$, existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ tal que $Pu = f$.

Demonstração. A demonstração é inteiramente análoga à do Teorema 3.6, com o uso do Lema 3.12. Argumentando de maneira inteiramente análoga, verifica-se que as condições (1)-(4) implicam nas condições (I), (II) e (III) do Teorema 3.10, o que nos garante a resolubilidade do operador P. $\square$

Lema 3.12. A condição diofantina (DC3') é equivalente a

(DC4') Existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|J\| \geq \gamma \;\Rightarrow\; |e^{i(J\cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2})} - 1| \geq \|J\|^{-\gamma}.$$

Demonstração. A demonstração é análoga à do Lema 3.7. $\square$

Observação 3.13. Observe que, caso seja válida a condição (4) no Corolário 3.11, os autovalores ρ_J são imaginários puros. Neste caso, a condição (DC4') é exatamente a condição (III) do Teorema 3.10.

Parte II

Caso Ultradiferenciável

Capítulo 4

Funções Ultradiferenciáveis e Ultradistribuições

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados da análise de Fourier para as classes de funções ultradiferenciáveis e ultradistribuições. Não serão feitas demonstrações, as quais podem ser encontradas em [9]. O objetivo deste capítulo é fornecer as ferramentas necessárias para estender os resultados dos capítulos anteriores, que tratam de operadores em espaços de funções suaves, para operadores definidos em espaços de funções ultradiferenciáveis, ampliando assim nosso entendimento e explorando novas perspectivas na análise destes operadores.

Denotemos por $\mathbb{C}^\omega(\mathbb{T}^n)$ o espaço das funções analíticas 2π-periódicas em $\mathbb{R}^n$. É um fato bastante conhecido que, se $f \in \mathbb{C}^\omega(\mathbb{T}^n)$, então, existem $C, h > 0$ tais que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$,

$$\sup |\partial^\alpha f| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot |\alpha|!. \tag{4.1}$$

Além disso, temos que $\mathbb{C}^\omega(\mathbb{T}^n) \subsetneq C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Em particular, $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é um espaço muito maior que $\mathbb{C}^\omega(\mathbb{T}^n)$. Uma forma de estudar espaços funcionais intermediários entre $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e $\mathbb{C}^\omega(\mathbb{T}^n)$, assim como a regularidade de operadores definidos nestes espaços, é enfraquecer um pouco a propriedade (4.1), passando a considerar funções $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tais que, existem $C, h > 0$ de modo que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, vale

$$\sup |\partial^\alpha f| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot (|\alpha|!)^s, \tag{4.2}$$

para algum $s \geq 1$ fixado. O espaço $\mathcal{G}_s(\mathbb{T}^n)$ das funções $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ que satisfazem (4.2) é chamado de espaço das funções Gevrey 2π-periódicas de ordem s. Observe que, para $s = 1$, $\mathcal{G}_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{C}^\omega(\mathbb{T}^n)$.

De modo mais geral, estudaremos classes de funções $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tais que existem $C, h > 0$ de modo que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, vale

$$\sup |\partial^\alpha f| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \tag{4.3}$$

no qual $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ é uma sequência de números reais positivos que satisfaz certas propriedades. Veremos que o caso Gevrey é um caso particular destas classes, as quais chamamos de classes de ultradiferenciabilidade. A partir disso, podemos definir resolubilidade e hipoeliticidade de operadores no sentido ultradiferenciável.

4.1 Sequências Peso e Classes de Funções Ultradiferenciáveis

Definição 4.1. Uma sequência peso é uma sequência $\mathcal{M} = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ de números reais positivos que satisfaz as seguintes condições:

(P1) $m_0 = m_1 = 1$;

(P2) (Convexidade Logarítmica) $m_j^2 \leq m_{j-1} \cdot m_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Proposição 4.2. Seja $\mathcal{M} = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ uma sequência peso. Então:

(a) $\beta_j = (m_j)^{\frac{1}{j}}$ é não-decrescente. Em particular, $\mathcal{M}$ é não-decrescente;

(b) Para quaisquer $k, j \in \mathbb{N}_0$ com $k \leq j$, vale $m_k \cdot m_{j-k} \leq m_j$.

Demonstração. (a) [9], p. 7, Proposição 1.5 e p. 8, Corolário 1.6.

(b) [9], p. 8, Proposição 1.7. □

Definição 4.3. Seja $\mathcal{M} = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ uma sequência peso. Uma função $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é dita ultradiferenciável de classe $\{\mathcal{M}\}$ se existem constantes $C, h > 0$ tais que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, vale

$$\sup |\partial^\alpha f| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!.$$

Denotamos por $\mathcal{E}_\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ o conjunto das funções ultradiferenciáveis de classe $\{\mathcal{M}\}$ em $\mathbb{T}^n$.

Proposição 4.4. Dada uma sequência peso $\mathcal{M}$, o conjunto $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ é um espaço vetorial e é uma subálgebra de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, isto é, $f, g \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ implica $f \cdot g \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$. Além disso, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ contém o espaço das funções analíticas $\mathbb{C}^\omega(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. [9], p. 11, Proposições 1.18 e 1.19. $\square$

Exemplo 4.5 (Gevrey)**.** Dado $s \geq 1$, considere a sequência $\mathcal{M} = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ dada por $m_j = (j!)^{s-1}$. É imediato que $m_0 = m_1 = 1$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{m_{j-1} \cdot m_{j+1}}{m_j^2} &= \frac{[(j-1)!]^{s-1} \cdot [(j+1)!]^{s-1}}{(j!)^{s-1}(j!)^{s-1}} \\
&= \frac{[(j-1)!]^{s-1}(j+1)^{s-1} \cdot (j!)^{s-1}}{j^{s-1}[(j-1)!]^{s-1}(j!)^{s-1}} \\
&= \left(\frac{j+1}{j}\right)^{s-1} \geq 1
\end{aligned}$$

e, portanto, $m_n^2 \leq m_{n-1} \cdot m_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. O espaço $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) = \mathcal{G}^s(\mathbb{T}^n)$ é o espaço das funções Gevrey 2π-periódicas de ordem s.

Definição 4.6. Dadas duas sequências peso $\mathcal{M} = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ e $\mathcal{L} = \{l_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$, denotaremos $M \preceq \mathcal{L}$ quando $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\dfrac{m_j}{l_j}\right)^{\frac{1}{j}} < \infty$.

Não é difícil verificar que $\preceq$ é uma relação reflexiva e transitiva. Caso $\mathcal{M} \preceq \mathcal{L}$ e $L \preceq \mathcal{M}$, denotamos $\mathcal{M} \approx \mathcal{L}$. Nestas condições, $\approx$ é uma relação de equivalência.

Teorema 4.7. Dadas duas sequências peso $\mathcal{M}$ e $\mathcal{L}$, temos que $\mathcal{M} \preceq \mathcal{L}$ se, e somente se, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \subset \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\mathbb{T}^n)$. Em particular, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se, $\mathcal{M} \approx \mathcal{L}$.

Demonstração. [9], p. 14, Teorema 1.22. $\square$

Corolário 4.8. Se $r < s$, então $\mathcal{G}^r(\mathbb{T}^n) \subsetneq \mathcal{G}^s(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. [9], p. 15, Corolário 1.23. $\square$

Teorema 4.9. Dada uma sequência peso $\mathcal{M} = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$, o espaço $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ é fechado em relação à diferenciação se, e somente se, $\sup\limits_{j\geq 1} \left(\dfrac{m_{j+1}}{m_j}\right)^{\frac{1}{j}} < \infty$.

Demonstração. [9], p. 16, Teorema 1.27. □

Observação 4.10. Como desejamos trabalhar com operadores diferenciais parciais lineares $P : \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$, é interessante que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ seja fechado em relação à diferenciação. Deste modo, consideraremos apenas sequências peso que satisfazem, além de (P1) e (P2), a condição

(P3) $\sup\limits_{j\geq 1} \left(\dfrac{m_{j+1}}{m_j}\right)^{\frac{1}{j}} < \infty.$

4.2 A Topologia de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ e Ultradistribuições

Definição 4.11. Seja $\mathcal{M} = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ uma sequência peso. Dado $h > 0$, definimos como $\mathcal{E}_{\mathcal{M},h}(\mathbb{T}^n)$ o espaço das funções $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ tais que

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^n \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n}} \left(\frac{|\partial^\alpha f(x)|}{h^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!}\right) < \infty.$$

Para cada $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M},h}(\mathbb{T}^n)$, denotamos

$$\|f\|_{\mathcal{M},h} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^n \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n}} \left(\frac{|\partial^\alpha f(x)|}{h^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!}\right).$$

Não é difícil ver que $\|\cdot\|_{\mathcal{M},h}$ define uma norma em $\mathcal{E}_{\mathcal{M},h}(\mathbb{T}^n)$.

Proposição 4.12. O espaço $\mathcal{E}_{\mathcal{M},h}$ munido da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{M},h}$ é um espaço de Banach.

Demonstração. [9], p. 18, Proposição 1.31. □

Proposição 4.13. Sejam $\mathcal{M}$ uma sequência peso e $h_2 > h_1 > 0$ números reais positivos. Então $\mathcal{E}_{\mathcal{M},h_1}(\mathbb{T}^n) \subset \mathcal{E}_{\mathcal{M},h_2}(\mathbb{T}^n)$ e a inclusão $\mathcal{E}_{\mathcal{M},h_1}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{M},h_2}(\mathbb{T}^n)$ é compacta.

Demonstração. [9], p. 19, Proposição 1.32. □

Definição 4.14. Seja E um $\mathbb{C}$-espaço vetorial e suponha que E seja uma união de uma sequência crescente de espaços vetoriais topológicos localmente convexos $\{E_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ tais que as inclusões $E_j \hookrightarrow E_{j+1}$ são contínuas para todo $j \in \mathbb{Z}$. Definimos sobre E a topologia mais fina que torna todas as inclusões $E_j \hookrightarrow E$ contínuas. Esta topologia é chamada de topologia limite indutivo.

Consideraremos em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ a topologia limite indutivo da família de espaços $\mathcal{E}_{\mathcal{M},h}(\mathbb{T}^n)$ para todo $h > 0$. É possível mostrar que, para toda sequência $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ é limite indutivo de $\{\mathcal{E}_{\mathcal{M},h_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Teorema 4.15. Uma sequência $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ converge para 0 em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se, existe $m \in \mathbb{N}$ de modo que $f_j \in \mathcal{E}_{\mathcal{M},h_m}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $f_j \to 0$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M},h_m}$.

Demonstração. [18], Teorema 6'. □

Definição 4.16. Dada uma sequência peso $\mathcal{M}$, definimos $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ como sendo o dual topológico de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$, isto é, espaço dos funcionais lineares contínuos sobre $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$. Se $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$, então u é dita uma ultradistribuição.

Observação 4.17 (Gevrey)**.** Dado $s \geq 1$, denotamos o dual topológico do espaço $\mathcal{G}_s(\mathbb{T}^n)$ das funções Gevrey de ordem s por $\mathcal{D}'_s(\mathbb{T}^n)$.

Teorema 4.18. Seja $u : \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$ um funcional linear. São equivalentes:

(a) $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$;

(b) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\langle u, f\rangle| \leq C_\varepsilon \cdot \sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^n\\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n}} \left(\frac{|\partial^\alpha f(x)| \cdot \varepsilon^{|\alpha|}}{m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!}\right) \quad \forall f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n);$$

(c) Seja $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$. Se $f_j \to 0$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$, então $\langle u, f_j\rangle \to 0$ em $\mathbb{C}$.

Demonstração. [9], p. 22, Teorema 2.2. □

Definição 4.19. Seja $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$. Dizemos que u_n converge para uma $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ se, para toda $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$, $\langle u_j, f\rangle \to \langle u, f\rangle$ em $\mathbb{C}$.

4.3 Séries de Fourier em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ e $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$

Denotemos por $\mathcal{M} = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ uma sequência peso. Neste capítulo, serão enunciados resultados referentes a séries de Fourier de funções ultradiferenciáveis e ultradistribuições. Assim como no caso $\mathbb{C}^\infty$, podemos obter condições de decaimento sobre os coeficientes de Fourier de uma série da forma $u = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} u_J e^{iJ\cdot x}$ que nos garantam que $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ ou $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$.

Teorema 4.20. Seja $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$. Então

$$f(x) = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} f_J e^{iJ\cdot x}$$

com convergência em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$, sendo

$$f_J := (2\pi)^{-n} \int_{[0,2\pi]^n} f(\xi) e^{-iJ\cdot\xi}\, d\xi.$$

Além disso, existem $C, \delta > 0$ tais que

$$|f_J| \leq C \inf_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\delta^j \cdot (1 + \|J\|)^j} \right) \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n.$$

Demonstração. [9], p. 24, Teorema 2.4. □

Teorema 4.21. Seja $\{u_J\}_{J\in\mathbb{Z}^n}$ uma sequência em $\mathbb{C}$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ de modo que

$$|u_J| \leq C_\varepsilon \cdot \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{\varepsilon^j (1 + \|J\|)^j}{m_j \cdot j!} \right) \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n.$$

Então, o funcional $u = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} u_J e^{iJ\cdot x}$ que age em $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ do seguinte modo

$$\langle u, f \rangle = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,2\pi]^n} \sum_{\|J\|\leq k} u_J e^{iJ\cdot x} f(x)\, dx$$

está bem definido e pertence a $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. [9], p. 28, Teorema 2.11. □

Teorema 4.22. Seja $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$. Para cada $J \in \mathbb{Z}^n$, defina

$$u_J = (2\pi)^{-n} \left\langle u, e^{-iJ\cdot x} \right\rangle.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|u_J| \leq C_\varepsilon \cdot \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{\varepsilon^j (1+\|J\|)^j}{m_j \cdot j!} \right) \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n.$$

Em particular, temos que

$$u = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} u_J e^{iJ\cdot x}$$

com convergência em $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. [9], p. 26, Teorema 2.6 e p. 30, Teorema 2.12. □

Teorema 4.23. Seja $\{c_J\}_{J\in\mathbb{Z}^n}$ uma sequência em $\mathbb{C}$ tal que existem $C, \delta > 0$ de modo que

$$|c_J| \leq C \cdot \inf_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\delta^j (1+\|J\|)^j} \right) \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n.$$

Então existe $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ tal que $f(x) = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} c_J e^{iJ\cdot x}$ com convergência em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$. Além disso, $f_J = c_J$.

Demonstração. [9], p. 31, Teorema 2.13. □

Corolário 4.24. Dada $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$, suponha que existam $C, \delta > 0$ tais que

$$|u_J| \leq C \cdot \inf_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\delta^j (1+\|J\|)^j} \right) \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n.$$

Então $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$.

Corolário 4.25. Se $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$, então existem $C, \varepsilon > 0$ tais que

$$|f_J| \leq C \cdot \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j (1+\|J\|)^j} \right) \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n.$$

4.4 Funções Peso

Definição 4.26. Dada uma sequência peso $\mathcal{M} = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$, definimos a função peso $\omega_{\mathcal{M}} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ por

$$\omega_{\mathcal{M}}(t) = \begin{cases} \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \log\left(\dfrac{t^j}{m_j \cdot j!} \right), & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t = 0 \end{cases}.$$

Proposição 4.27. Seja $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|u_J| \leq C_\varepsilon e^{\omega_{\mathcal{M}}(\varepsilon(1+\|J\|))} \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n.$$

Além disso, $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se, existirem $C, \delta > 0$ tais que

$$|u_J| \leq Ce^{-\omega_{\mathcal{M}}(\delta(1+\|J\|))} \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n.$$

Demonstração. [9], p. 32, Proposição 2.16. □

Exemplo 4.28 (Gevrey)**.** Em particular, para o caso dos espaços Gevrey, dado $s \geq 1$, denotaremos ω_s a respectiva função peso. Para $s = 1$, verifica-se que

$$\omega_1(t) \leq t \leq 2(\log 2 + \omega_1(t))$$

e, para $s > 1$, que

$$t^{1/s} - s\log\left(\frac{1}{1-s^{-1}}\right) \leq \omega_s(t) \leq s \cdot t^{1/s}.$$

Os detalhes podem ser encontrados em [9], p. 33. Com isso, obtemos que é equivalente caracterizamos os espaços Gevrey por $e^{\omega_s(t)}$ e por $e^{t^{1/s}}$.

É usual, portanto, a seguinte caracterização para espaços Gevrey: Dado $s \geq 1$, se $u \in \mathcal{D}'_s(\mathbb{T}^n)$, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|u_J| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon\|J\|^{1/2}} \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n.$$

Além disso, $u \in \mathcal{G}_s(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se, existem $C, \delta > 0$ tais que

$$|u_J| \leq Ce^{-\delta\|J\|^{1/s}} \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n.$$

4.5 Sequências de Crescimento Moderado

Definição 4.29. Seja $\mathcal{M} = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ uma sequência peso. Dizemos que $\mathcal{M}$ é uma sequência de crescimento moderado se satisfaz a seguinte condição:

(P3') Existe $H < \infty$ tal que $\displaystyle\sup_{j,k\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_{j+k}}{m_j \cdot m_k}\right)^{\frac{1}{j+k}} \leq H.$

É imediato que a condição (P3') implica em (P3). A partir daqui, consideraremos apenas sequências peso de crescimento moderado.

Exemplo 4.30 (Gevrey)**.** Dado $s \geq 1$, considere a sequência peso $\mathcal{M} = \{(j!)^{s-1}\}_{j \in \mathbb{N}_0}$. Vejamos que $\mathcal{M}$ é de crescimento moderado. De fato, dados $j, k \in \mathbb{N}_0$, temos que

$$\frac{m_{j+k}}{m_j \cdot m_k} = \left(\frac{(j+k)!}{j!k!} \right)^{\frac{1}{s}} = \binom{j+k}{k}^{1/s} \leq (2^{s-1})^{j+k}.$$

Deste modo,

$$\sup_{j,k \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_{j+k}}{m_j \cdot m_k} \right)^{\frac{1}{j+k}} \leq 2^{s-1} < \infty.$$

Lema 4.31. Seja $\mathcal{M}$ uma sequência peso de crescimento moderado. Então, para todo $\rho > 0$, vale

$$\left[\sup_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{\rho^j}{m_j \cdot j!} \right) \right]^2 \leq \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{\rho^j H^j}{m_j \cdot j!} \right),$$

sendo $H > 0$ conforme a Definição 4.29.

Demonstração. [18], Proposição 3.6. □

Observação 4.32. No Lema 4.31, usando o fato de que $\dfrac{1}{\sup S} = \inf \dfrac{1}{S}$, obtemos que

$$\left[\inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\rho^j} \right) \right]^2 \geq \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\rho^j H^j} \right).$$

Em particular, dado $\delta > 0$, tomando $\rho = \delta / H$, obtemos

$$\left[\inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{(\delta/H)^j} \right) \right]^2 \geq \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\delta^j} \right).$$

4.6 Séries Parciais de Fourier em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ e $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$

Sejam $p, q, n \in \mathbb{N}$ tais que $p + q = n$ e considere a soma direta $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$. Denotaremos $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ com $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$.

Dada $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$, para cada $x \in \mathbb{R}^p$ fixado, considere a função $f_x : \mathbb{R}^q \to \mathbb{C}$ dada por $f_x(y) = f(x, y)$. É imediato que $f_x \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^q)$. Pelo Teorema 4.20, temos que

$$f(x, y) = f_x(y) = \sum_{J \in \mathbb{Z}^q} (f_x)_J e^{iJ \cdot y}$$

com convergência em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^q)$, sendo

$$(f_x)_J = (2\pi)^{-q} \int_{[0,2\pi]^q} f_x(y) e^{-iJ \cdot y} \, dy = (2\pi)^{-q} \int_{[0,2\pi]^q} f(x, y) e^{-iJ \cdot y} \, dy.$$

Denotando $(f_x)_J = f_J(x)$, para cada $J \in \mathbb{Z}^q$, temos que $f_J \in C^\infty(\mathbb{T}^p)$. Vejamos que $f_J \in \mathcal{E}_\mathcal{M}(\mathbb{T}^p)$. De fato, dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$, temos que

$$\partial_x^\alpha f_J(x) = (2\pi)^{-q} \int_{[0,2\pi]^q} \partial_x^\alpha f(x,y) e^{-iJ\cdot y}\, dy$$

e, portanto,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^p} |\partial_x^\alpha f_J(x)| \leq \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^n} |\partial_x^\alpha f(x,y)| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!,$$

uma vez que $f \in \mathcal{E}_\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$. O teorema a seguir nos dá uma estimativa melhor sobre os coeficientes f_J:

Teorema 4.33. Dada $f \in \mathcal{E}_\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$, existem $C_p, h_p, h_q > 0$ tais que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ e para todo $J \in \mathbb{Z}^q$, vale

$$\sup |\partial_x^\alpha f_J(x)| \leq C_p \cdot h_p^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot \inf_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{h_q^j \cdot (1+\|J\|)^j} \right).$$

Demonstração. [9], p. 36, Teorema 2.20. □

Teorema 4.34. Seja $\{f_J\}_{J\in\mathbb{Z}^q}$ uma sequência em $\mathcal{E}_\mathcal{M}(\mathbb{T}^p)$ e suponha que existam constantes $C_p, h_p, h_q > 0$ tais que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ e para todo $J \in \mathbb{Z}^q$, vale

$$\sup |\partial_x^\alpha f_J(x)| \leq C_p \cdot h_p^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot \inf_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{h_q^j \cdot (1+\|J\|)^j} \right).$$

Então a função $f(x,y) = \sum_{J\in\mathbb{Z}^q} f_J(x) e^{iJ\cdot y}$ está bem definida e pertence a $\mathcal{E}_\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. [9], p. 37, Teorema 2.21. □

Lema 4.35. Seja $u \in \mathcal{D}'_\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$. Para todo $J \in \mathbb{Z}^q$, a aplicação $u_J : \mathcal{E}_\mathcal{M}(\mathbb{T}^p) \to \mathbb{C}$ dada por

$$\langle u_J, f \rangle = (2\pi)^{-q} \left\langle u, f(x) \otimes e^{-iJ\cdot y} \right\rangle$$

está bem definida e pertence a $\mathcal{D}'_\mathcal{M}(\mathbb{T}^p)$.

Demonstração. [9], p. 39, Lema 2.22 e p. 40, Lema 2.23. □

Teorema 4.36. Seja $u \in \mathcal{D}'_\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$. Então $u = \sum_{J\in\mathbb{Z}^q} u_J \otimes e^{iJ\cdot y}$ com convergência em $\mathcal{D}'_\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$. Além disso, dados $\varepsilon, h > 0$, existe $C_{\varepsilon,h} > 0$ tal que, para quaisquer $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M},h}(\mathbb{T}^p)$ e $J \in \mathbb{Z}^q$, vale

$$|\langle u_J, f \rangle| \leq C_{\varepsilon,h} \cdot \|f\|_{\mathcal{M},h} \cdot \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{\varepsilon^j \cdot (1+\|J\|)^j}{m_j \cdot j!} \right).$$

Demonstração. [9], p. 40, Teorema 2.24. □

Teorema 4.37. Seja $\{u_J\}_{J\in\mathbb{Z}^q}$ uma sequência em $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^p)$ tal que, dados $\varepsilon, h > 0$, existe $C_{\varepsilon,h} > 0$ de modo que, para quaisquer $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M},h}(\mathbb{T}^p)$ e $J \in \mathbb{Z}^q$, vale

$$|\langle u_J, f\rangle| \leq C_{\varepsilon,h} \cdot \|f\|_{\mathcal{M},h} \cdot \sup_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\varepsilon^j \cdot (1+\|J\|)^j}{m_j \cdot j!}\right).$$

Então $u = \sum_{J\in\mathbb{Z}^q} u_J \otimes e^{iJ\cdot y}$ pertence a $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$.

Demonstração. [9], p. 41, Teorema 2.26. □

Observação 4.38. Denotaremos $\sum_{J\in\mathbb{Z}^q} u_J \otimes e^{iJ\cdot y} := \sum_{J\in\mathbb{Z}^q} u_J e^{iJ\cdot y}$.

4.7 Resolubilidade e Hipoeliticidade Global em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$

Seja $\mathcal{M} = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ uma sequência peso e $P : \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ um operador diferencial parcial linear.

Definição 4.39. Dizemos que P é $\mathcal{M}$-resolúvel se, para toda f num subespaço de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ de codimensão finita, existe $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ tal que $Pu = f$.

Definição 4.40. Dizemos que P é $\mathcal{M}$-globalmente hipoelítico se

$$u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n),\ Pu \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \ \Rightarrow\ u \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n),$$

isto é, se $P^{-1}(\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)) \subset \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$.

Para o caso Gevrey de ordem $s \geq 1$, chamaremos estas propriedades de $\mathcal{G}_s$-resolubilidade e $\mathcal{G}_s$-hipoeliticidade global.

A partir destas noções de regularidade, nos Capítulos 5 e 6, adaptaremos os resultados dos Capítulos 2 e 3 para a $\mathcal{M}$-resolubilidade de operadores diferenciais.

Capítulo 5

Operadores com Coeficientes Constantes

Neste capítulo, nosso objetivo é estender os resultados a respeito da resolubilidade de operadores com coeficientes constantes (vistos no Capítulo 2) para a classe das funções ultradiferenciáveis. Mais precisamente, dada uma sequência peso $\mathcal{M} = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de crescimento moderado e um operador diferencial parcial linear a coeficientes constantes $L : \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ de ordem N, sem termos de ordem 0, considere o operador $P : \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ dado por

$$Pu = Lu - Au - B\bar{u}. \tag{5.1}$$

sendo $A, B \in \mathbb{C}$ constantes fixadas. Observe que a hipótese de L não possuir termos de ordem 0 é apenas uma formalidade, pois qualquer termo de ordem 0 presente em L poderia ser incorporado à constante A acima. Logo, não há perda de generalidade ao considerar operadores com coeficientes constantes desta forma.

A noção de resolubilidade no ambiente funcional ultradiferenciável é a mesma de antes, vamos enunciá-la aqui para deixar registrado.

Definição 5.1. Um operador diferencial parcial linear $P : \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ é dito resolúvel se existe um subespaço $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ de codimensão finita, de modo que, para toda função $f \in \mathcal{F}$, existe $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ tal que $Pu = f$.

Procedendo como no caso suave (Capítulo 2, Seção 2.3), dada $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$, se $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ (ultradistribuições) é solução de $Pu = f$, tomando as séries de Fourier

$$u(x) = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} u_J e^{iJ\cdot x} \quad \text{e} \quad f(x) = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} f_J e^{iJ\cdot x},$$

temos que

$$\Delta_J u_J = [\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}] f_J + B\overline{f_{-J}}, \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n, \tag{5.2}$$

sendo σ_L o símbolo do operador L e

$$\Delta_J = [\sigma_L(J) - A] \cdot [\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}] - |B|^2. \tag{5.3}$$

Como vimos anteriormente, a resolubilidade dependerá essencialmente do controle do crescimento de Δ_J. Para isso introduzimos a seguinte condição diofantina:

(DC$_{\mathcal{M}}$) Para todo $\varepsilon > 0$, existem $C_\varepsilon, \gamma_\varepsilon > 0$ tais que

$$\|J\| \geq \gamma_\varepsilon \;\Rightarrow\; |\Delta_J| \geq C_\varepsilon \cdot \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j (1 + \|J\|)^j} \right).$$

Agora estamos em condições de enunciar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 5.2. Seja $P : \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ dado por (5.1) e Δ_J dado por (5.3). Então, P é $\mathcal{M}$-resolúvel se, e somente se, vale a condição diofantina (DC$_{\mathcal{M}}$).

Na primeira seção deste capítulo apresentaremos a demonstração do teorema acima. Na sequência, discutimos algumas consequências deste resultado, recuperamos os resultados de P. Dattori e M. Almeida para espaços de Gevrey e apresentamos mais alguns exemplos interessantes.

5.1 Demonstração do Teorema 5.2

Primeiramente, vejamos que $\inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j (1 + \|J\|)^j} \right) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$. De fato, note que

$$\sup_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{\varepsilon^j (1 + \|J\|)^j}{m_j \cdot j!} \right) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{\varepsilon^j (1 + \|J\|)^j}{m_j \cdot j!} \leq \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{\varepsilon^j (1 + \|J\|)^j}{j!} = e^{\varepsilon(1+\|J\|)} < \infty$$

para todo $\varepsilon > 0$ e, portanto,

$$\inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j (1 + \|J\|)^j} \right) = \left[\sup_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{\varepsilon^j (1 + \|J\|)^j}{m_j \cdot j!} \right) \right]^{-1} \geq e^{-\varepsilon(1+\|J\|)} > 0$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Suponha que vale (DC$_{\mathcal{M}}$). Então o conjunto

$$\Omega = \{J \in \mathbb{Z}^n \,:\, \Delta_J = 0\}$$

é finito e, portanto,

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \; : \; f_J = 0 \; \forall J \in \Omega\}$$

tem codimensão finita. Seja $f \in \mathcal{F}$. Então existem $C, \delta > 0$ tais que

$$|f_J| \leq C \cdot \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\delta^j (1 + \|J\|)^j} \right)$$

para todo $J \in \mathbb{Z}^n$. Tome $\varepsilon = \delta/H$ na condição diofantina, com $H > 0$ conforme a Definição 4.29. Assim, existem $C_\varepsilon, \gamma_\varepsilon > 0$ tais que

$$\|J\| \geq \gamma_\varepsilon \;\Rightarrow\; |\Delta_J| \geq C_\varepsilon \cdot \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j (1 + \|J\|)^j} \right).$$

Observe que $\|J\| \geq \gamma_\varepsilon$ implica em $J \in \mathbb{Z}^n \backslash \Omega$. Nestas condições, se $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ é solução de $Pu = f$, por (5.2), para $\|J\| \geq \gamma_\varepsilon$, temos que

$$\begin{aligned}
|u_J| &= |\Delta_J|^{-1} \cdot \left| [\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}] f_J + B\overline{f_{-J}} \right| \\
&\leq \frac{C}{C_\varepsilon} \left(|\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}| + |B| \right) \cdot \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\delta^j (1 + \|J\|)^j} \right) \cdot \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{(\delta/H)^j (1 + \|J\|)^j}{m_j \cdot j!} \right)
\end{aligned}$$

Observe que σ_L é um polinômio de grau N. Deste modo, existe $C > 0$ tal que

$$|\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}| + |B| \;\leq\; C(1 + \|J\|)^N, \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n.$$

Pelo Lema 4.31, temos que

$$\begin{aligned}
&\inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\delta^j (1 + \|J\|)^j} \right) \cdot \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{(\delta/H)^j (1 + \|J\|)^j}{m_j \cdot j!} \right) \\
\leq\; & \left[\inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{(\delta/H)^j (1 + \|J\|)^j} \right) \right]^2 \cdot \left[\inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{(\delta/H)^j (1 + \|J\|)^j} \right) \right]^{-1} \\
=\; & \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{(\delta/H)^j (1 + \|J\|)^j} \right).
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
|u_J| &\leq C(1 + \|J\|)^N \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{(\delta/H)^j (1 + \|J\|)^j} \right) \\
&\leq C(1 + \|J\|)^N \left[\inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{(\delta/H^2)^j (1 + \|J\|)^j} \right) \right]^2
\end{aligned}$$

$$\leq C(1+\|J\|)^N \cdot \frac{m_N \cdot N!}{(\delta/H^2)^N(1+\|J\|)^N} \cdot \inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j \cdot j!}{(\delta/H^2)^j(1+\|J\|)^j}\right)$$

$$\leq C \cdot h^N \cdot m_N \cdot N! \cdot \inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j \cdot j!}{\delta_0^j(1+\|J\|)^j}\right),$$

com $h = \delta/H$ e $\delta_0 = \delta/H^2$. Segue que $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ e, portanto, P é $\mathcal{M}$-resolúvel.

Por outro lado, suponha que não vale (DC$_{\mathcal{M}}$). Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para quaisquer $C, \gamma > 0$, existe $J \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\|J\| \geq \gamma$ e

$$|\Delta_J| < C \inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j(1+\|J\|)^j}\right).$$

Com isso, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, tome $J_\ell \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\|J_\ell\| \geq \ell$ e

$$|\Delta_{J_\ell}| < \inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j(1+\|J_\ell\|)^j}\right). \tag{5.4}$$

Em particular, denotando $J_\ell = (J_{1\ell}, \ldots, J_{n\ell})$, podemos tomar $\{J_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ de modo que existe uma coordenada $j = 1, \ldots, n$ tal que todos os $J_{j\ell}$ são não-nulos e têm mesmo sinal. Basta passar a uma subsequência caso necessário.

Caso 1: Suponha que $\Delta_{J_\ell} = 0$ para infinitos $\ell \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, podemos supor que $\Delta_{J_\ell} = 0$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Dado $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$, para que exista $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ tal que $Pu = f$, para todo $\ell \in \mathbb{N}$,

- Caso $B = 0$, $f_{J_\ell} = 0$ ou $f_{-J_\ell} = 0$;
- Caso $B \neq 0$, $[\overline{\sigma_L(-J_\ell)} - \bar{A}]f_{J_\ell} + B\overline{f_{-J_\ell}} = 0$.

Em ambos os casos, de maneira análoga aos Teoremas 2.2 e 2.9, temos infinitas condições de compatibilidade sobre f e, portanto, P não é $\mathcal{M}$-resolúvel.

Caso 2: Suponha que $\Delta_{J_\ell} = 0$ para uma quantidade finita de índices $\ell \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, podemos supor $\Delta_{J_\ell} \neq 0$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Considere o conjunto

$$\Omega = \{J_\ell \in \mathbb{Z}^n \,:\, \ell \in \mathbb{N}\}.$$

Pela maneira como a sequência $\{J_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ foi tomada, temos que $J \in \Omega$ se, e somente se, $-J \notin \Omega$. Seja $\Omega_0 \subset \Omega$ um subconjunto infinito.

Suponha que $B \neq 0$ e considere a função $f(x) = \sum_{J \in \Omega_0} \Delta_J e^{iJ\cdot x}$. Temos que $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ por (5.4). Se $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ é solução de $Pu = f$, procedendo como no Teorema 2.9, a projeção de u no subespaço de $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ gerado pelas frequências $\pm\Omega_0$ é

$$v(x) = \sum_{J \in \Omega_0} Be^{-iJ\cdot x} + \sum_{J \in \Omega_0} [\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}]e^{iJ\cdot x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^n)$$

e, portanto, $v \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$. Segue que $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$.

Suponha que $B = 0$. Observe que, para todo $J \in \Omega_0$,

$$\begin{aligned}\left[\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j \cdot j!}{(\varepsilon/H)^j(1+\|J\|)^j}\right)\right]^2 \; &\geq \; \inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j(1+\|J\|)^j}\right)\\ &> |\Delta_J| \; = \; |\sigma_L(J) - A| \cdot |\overline{\sigma_L(-J)} - \bar{A}|\\ &= |\sigma_L(J) - A| \cdot |\sigma_L(-J) - A|.\end{aligned}$$

Com isso, para infinitos $J \in \Omega_0$, teremos que

$$|\sigma_L(J) - A| < \inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j \cdot j!}{(\varepsilon/H)^j(1+\|J\|)^j}\right) \quad \text{ou} \quad |\sigma_L(-J) - A| < \inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j \cdot j!}{(\varepsilon/H)^j(1+\|J\|)^j}\right).$$

Suponha que tenhamos

$$|\sigma_L(J) - A| < \inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j \cdot j!}{(\varepsilon/H)^j(1+\|J\|)^j}\right) \tag{5.5}$$

para infinitos $J \in \Omega_0$. Passando a uma subsequência de $\{J_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$, podemos supor que a desigualdade vale para todo $J \in \Omega_0$. Defina então $f(x) = \sum_{J\in\Omega_0} [\sigma_L(J) - A]e^{iJ\cdot x}$. Observe que $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ por (5.5). Se $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ é solução de $Pu = f$, procedendo como no Teorema 2.9, a projeção de u no subespaço de $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ gerado pelas frequências Ω_0 será

$$v(x) = \sum_{J\in\Omega_0} e^{iJ\cdot x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^n)$$

e, portanto, $v \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$. Segue que $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$.

Caso tenhamos

$$|\sigma_L(-J) - A| < \inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j \cdot j!}{(\varepsilon/H)^j(1+\|J\|)^j}\right)$$

para todo $J \in \Omega_0$ (passando a uma subsequência), basta tomar f tal como no caso anterior porém tomando os índices em Ω_0.

Como esta construção vale para todo $\Omega_0 \subset \Omega$ infinito, obtemos infinitas funções linearmente independentes em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ tais que não existe $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ de modo que $Pu = f$. Segue que P não é $\mathcal{M}$-resolúvel.

5.2 Consequências do Teorema 5.2

Nesta seção, apresentaremos algumas consequências interessantes do resultado demonstrado na seção anterior.

Proposição 5.3. Temos que P tal como no Teorema 5.2 é $\mathcal{M}$-resolúvel se, e somente se, é $\mathcal{M}$-globalmente hipoelítico.

Demonstração. Se P é $\mathcal{M}$-resolúvel, no Teorema 5.2, mostramos que, se $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ é tal que $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ é solução de $Pu = f$, então $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$.

Se P não é $\mathcal{M}$-resolúvel, pelo Teorema 5.2, não vale (DC$_{\mathcal{M}}$), o que nos permite obter $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ tal que $Pu \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$. Segue que P não é $\mathcal{M}$-globalmente hipoelítico. $\square$

Proposição 5.4. Se P é resolúvel, então P é $\mathcal{M}$-resolúvel.

Demonstração. Se P é resolúvel, pelo Teorema 2.9, existe $\gamma \in \mathbb{N}$ tal que $\|J\| \geq \gamma$ implica

$$|\Delta_J| \;\geq\; \frac{1}{(1+\|J\|)^\gamma} \;=\; \frac{\varepsilon^\gamma}{m_\gamma \cdot \gamma!} \cdot \frac{m_\gamma \cdot \gamma!}{\varepsilon^\gamma (1+\|J\|)^\gamma} \;\geq\; C_\varepsilon \cdot \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j (1+\|J\|)^j} \right)$$

para todo $\varepsilon > 0$, com $C_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon^\gamma}{m_\gamma \cdot \gamma!}$. Tomando $\gamma_\varepsilon = \gamma$ para todo $\varepsilon > 0$, segue que vale (DC$_{\mathcal{M}}$) e, portanto, P é $\mathcal{M}$-resolúvel. $\square$

Em geral, a recíproca do corolário anterior não é verdadeira.

Dizemos que um número irracional α é exponencial Liouville de ordem $s \geq 1$ se existe $\varepsilon > 0$ de modo que a equação

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < e^{-\varepsilon q^{1/s}}$$

possui infinitas soluções $p/q \in \mathbb{Q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$.

Exemplo 5.5. Considere o operador $P : \mathcal{G}_s(\mathbb{T}^2) \to \mathcal{G}_s(\mathbb{T}^2)$ dado por

$$Pu = \frac{\partial}{\partial t}u + \alpha\frac{\partial}{\partial x}u - iu - \bar{u},$$

com $\alpha = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} 10^{-l!}$. Afirmamos que P é $\mathcal{G}_s$-resolúvel mas não é resolúvel.

Temos que α é um número de Liouville (ver [16]) mas não é exponencial Liouville de ordem s para nenhum $s \geq 1$ (ver [1] e [14]). Observe que

$$|\Delta_{j,k}| = |k - \alpha j|^2.$$

Como α é um número de Liouville, para todo $N \in \mathbb{N}$, existem $C > 0$ e uma sequência $\{(p_\ell, q_\ell)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{Z}^2$ com $q_\ell \to \infty$ de modo que

$$|\Delta_{p_\ell,q_\ell}| = |q_\ell - \alpha p_\ell|^2 < Cq_\ell^{-N} \leq C(1 + |p_\ell| + |q_\ell|)^{-N}.$$

Segue do Teorema 2.9 que P não é resolúvel. Por outro lado, como α não é exponencial Liouville de ordem s, para todo $\varepsilon > 0$, existe C_ε tal que

$$|k - \alpha j| \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon(|j|+|k|)^{1/s}}.$$

Deste modo, vale (DC$_{\mathcal{M}}$) tal como no Teorema 5.2 e, portanto, P é $\mathcal{G}_s$-resolúvel.

Como consequência das Proposições 5.3 e 5.4, obtemos versões dos Teoremas 2.12, 2.14 e 2.16 para o contexto ultradiferenciável:

Teorema 5.6 (Caso Elíptico)**.** Suponha que $L : \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ seja um operador elíptico a coeficientes constantes. Então o operador $P : \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ dado por $Pu = Lu - Au - B\bar{u}$, $A, B \in \mathbb{C}$, é $\mathcal{M}$-resolúvel e $\mathcal{M}$-globalmente hipoelítico.

Exemplo 5.7 (Laplaciano)**.** Temos que $L = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ é elíptico e, portanto, $P : \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ dado por $Pu = Lu - Au - B\bar{u}$, com $A, B \in \mathbb{C}$, é $\mathcal{M}$-resolúvel.

Teorema 5.8 (Operador do Calor)**.** Seja $L = \dfrac{\partial}{\partial t} - \eta^2 \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, com $\eta > 0$. Então $P : \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1}) \to \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1})$ dado por $Pu = Lu - Au - B\bar{u}$, com $A, B \in \mathbb{C}$, é $\mathcal{M}$-resolúvel e $\mathcal{M}$-globalmente hipoelítico.

Demonstração. Segue do fato de que P, nestas condições, é resolúvel no sentido suave. $\square$

Teorema 5.9 (Operador da Onda)**.** Seja $L = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \eta^2 \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, com $\eta > 0$. O operador $P : C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}) \to C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ dado por $Pu = Lu - Au - Bu$, $A, B \in \mathbb{C}$, é $\mathcal{M}$-resolúvel e $\mathcal{M}$-globalmente hipoelítico se, e somente se, vale uma das condições abaixo:

(1) $|B| < |\text{Im}(A)|$;

(2) $|A| = |B|$, $\text{Re}(A) = 0$ e η é um número irracional não Liouville;

(3) (DC$_\mathcal{M}$) é satisfeita.

Demonstração. Se vale (3), é imediato. Observe que as condições (1) e (2) implicam na resolubilidade de P no sentido suave e, portanto, P é $\mathcal{M}$-resolúvel. Por outro lado, se não vale (1), (2) e (3), em particular, não vale (DC$_\mathcal{M}$) e, portanto, P não é $\mathcal{M}$-resolúvel. $\square$

Como um caso particular do Teorema 5.2, obtemos uma versão ultradiferenciável do Teorema 1 de [6], no qual é feita a demonstração para o caso particular das classes de Gevrey, e do Teorema 2.5, no qual é estudado o caso suave.

Teorema 5.10. Considere o operador $P : \mathcal{E}_\mathcal{M}(\mathbb{T}^{n+1}) \to \mathcal{E}_\mathcal{M}(\mathbb{T}^{n+1})$ dado por

$$Pu = \frac{\partial}{\partial t}u + \sum_{j=1}^{n} C_j \frac{\partial}{\partial x_j}u - Au - B\bar{u},$$

com $A, B, C_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$. Então, P é $\mathcal{M}$-resolúvel se, e somente se, vale

(DC$_\mathcal{M}$) Para todo $\varepsilon > 0$, existem $C_\varepsilon, \gamma_\varepsilon > 0$ tais que

$$\|J\| + |k| \geq \gamma_\varepsilon \;\Rightarrow\; |\Delta_{J,k}| \geq C_\varepsilon \cdot \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j (1 + \|J\| + |k|)^j} \right).$$

Observação 5.11. Para o operador do Teorema 5.10, temos que

$$\Delta_{J,k} = -|k + C \cdot J|^2 + |A|^2 - |B|^2 - 2i\text{Re}(A(k + \bar{C} \cdot J)). \tag{5.6}$$

O Teorema 1 de [6] é enunciado do seguinte modo:

Corolário 5.12 (Gevrey)**.** Considere o operador $P : \mathcal{G}_s(\mathbb{T}^{n+1}) \to \mathcal{G}_s(\mathbb{T}^{n+1})$ dado por

$$Pu = \frac{\partial}{\partial t}u + \sum_{j=1}^{n} C_j \frac{\partial}{\partial x_j}u - Au - B\bar{u},$$

com $A, B, C_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$. Então, P é $\mathcal{G}_s$-resolúvel se, e somente se, vale a seguinte condição diofantina:

(DC$_s$) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\|J\| + |k| \geq C_\varepsilon \;\Rightarrow\; |\Delta_{J,k}| \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon(\|J\|+|k|)^{1/s}}.$$

Observação 5.13. Observe que, no caso Gevrey, podemos formular a condição diofantina (DC$_\mathcal{M}$) utilizando a função peso mais a equivalência obtida no Exemplo 4.28, o que nos dá a condição (DC$_s$).

Corolário 5.14. Seja $P : \mathcal{E}_\mathcal{M}(\mathbb{T}^{n+1}) \to \mathcal{E}_\mathcal{M}(\mathbb{T}^{n+1})$ como no Teorema 5.10. Se $|B| > |A|$, então P é $\mathcal{M}$-resolúvel.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} |\Delta_{J,k}| \;&\geq\; |\mathrm{Re}(\Delta_{J,k})| \;=\; \left| -|k + C\cdot J|^2 + |A|^2 - |B|^2 \right| \\ &=\; |k + C\cdot J| + |B|^2 - |A|^2 \;\geq\; |B|^2 - |A|^2 \;>\; 0 \end{aligned}$$

e, portanto, $|\Delta_{J,k}|$ satisfaz (DC$_\mathcal{M}$). □

Teorema 5.15. Seja $P : \mathcal{E}_\mathcal{M}(\mathbb{T}^{n+1}) \to \mathcal{E}_\mathcal{M}(\mathbb{T}^{n+1})$ como no Teorema 5.10. Suponha que $\mathrm{Im}(C) = 0$. Então P é $\mathcal{M}$-resolúvel se, e somente se, vale uma das condições abaixo:

(1) $|B| > |A|$;

(2) $|B| < |A|$ e $\mathrm{Re}(A) \neq 0$;

(3) Vale (DC$_\mathcal{M}$).

Demonstração. O item (1) segue do Corolário 5.14 e o item (3) segue do Teorema 5.10. Pelo Teorema 2.2, se (2) é satisfeita, então P é resolúvel no sentido suave e, portanto, pela Proposição 5.4, P é $\mathcal{M}$-resolúvel. □

Em particular, para o toro $\mathbb{T}^2$, obtemos uma versão ultradiferenciável do Teorema 1 de [4] (Teorema 2.2):

Teorema 5.16. Seja $P : \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^2) \to \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^2)$ dado por $Pu = \dfrac{\partial}{\partial t}u + C\dfrac{\partial}{\partial x}u - Au - B\bar{u}$, com $A, B, C \in \mathbb{C}$. Então P é $\mathcal{M}$-resolúvel se, e somente se, vale uma das condições abaixo:

(1) $|B| > |A|$;

(2) $\mathrm{Im}(C) \neq 0$;

(3) $|B| < |A|$ e $\mathrm{Re}(A) \neq 0$;

(4) Vale (DC$_{\mathcal{M}}$).

Observação 5.17. Note que no caso $\mathrm{Im}(C) \neq 0$ o operador $\dfrac{\partial}{\partial t} + C\dfrac{\partial}{\partial x}$ é elíptico e, portanto, a $\mathcal{M}$-resolubilidade de P segue do Teorema 5.6.

Capítulo 6

Uma Classe de Operadores com Coeficientes Variáveis

Neste capítulo, nosso objetivo é estender os resultados a respeito da resolubilidade de operadores com coeficientes variáveis vistos na Seção 3.2 do Capítulo 3 para a classe das funções ultradiferenciáveis.

Seja $\mathcal{M} = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência peso de crescimento moderado e considere o operador diferencial $L : \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ definido por

$$Lu = \frac{\partial}{\partial t}u - \sum_{j=1}^{n}(p_j(t) + i\lambda_j q(t))\frac{\partial}{\partial x_j}u, \tag{6.1}$$

com $p_j, q \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^1_t;\mathbb{R})$, $j = 1,\ldots,n$, e $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Assim como no Capítulo 3, supomos $q \not\equiv 0$ e que q não muda de sinal. Sem perda de generalidade, podemos supor $q \geq 0$.

A seguir defina um operador diferencial $P : \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1}) \to \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1})$ por

$$Pu = Lu - (s(t) + i\delta q(t))u - \alpha q(t)\bar{u}, \tag{6.2}$$

com $s \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^1_t;\mathbb{R})$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

O principal resultado deste capítulo trata da $\mathcal{M}$-resolubilidade do operador P. Para enunciá-lo de forma precisa, vamos introduzir algumas constantes.

Sejam

$$q_0 = \int_0^{2\pi} q(\tau)\,d\tau, \quad s_0 = \int_0^{2\pi} s(\tau)\,d\tau, \quad \text{e} \quad p_{0j} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_j(\tau)\,d\tau,\ 1 \leq j \leq n.$$

Observe que as hipóteses sobre q implicam em $q_0 > 0$.

Também definimos $p_0 = (p_{01}, \ldots, p_{0n}) \in \mathbb{R}^n$, tomamos ρ_J como sendo o elemento com parte real positiva de $\{\pm\sqrt{(\lambda \cdot J - i\delta)^2 + |\alpha|^2}\}$ e

$$A_0 = \int_0^{2\pi} (s(\tau) + i\delta q(\tau))\, d\tau = s_0 + i\delta q_0;$$

$$B_0 = \int_0^{2\pi} (\alpha q(\tau))\, d\tau = \alpha q_0;$$

$$C_0 = \left(\int_0^{2\pi} (p_1(t) + i\lambda_1 q(\tau))\, d\tau,\ \ldots,\ \int_0^{2\pi} (p_n(t) + i\lambda_n q(\tau))\, d\tau\right) = 2\pi p_0 + i\lambda q_0.$$

Além disso, considere a seguinte condição diofantina:

(DC_ε) Para todo $\varepsilon > 0$, existem $C_\varepsilon, \gamma_\varepsilon > 0$ tais que $(J, k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $\|J\| \geq \gamma_\varepsilon$ implica

$$\min\{|e^{-\rho_J q_0} - e^{s_0 + i2\pi J \cdot p_0}|, |1 - e^{-\rho_J q_0 + s_0 + i2\pi J \cdot p_0}|\} \geq C_\varepsilon \cdot \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j (1 + \|J\|)^j}\right).$$

Com todos esses elementos em mãos, podemos enunciar o principal teorema deste capítulo.

Teorema 6.1. Suponha que sejam válidas as seguintes condições:

(I) $|\alpha| \neq |\delta|$;

(II) O sistema

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(A_0(2\pi k + J \cdot \overline{C_0})) = 0 \\ |2\pi k + J \cdot C_0|^2 = |A_0|^2 - |B_0|^2 \end{cases}$$

não possui solução $(J, k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$;

(III) Vale a condição diofantina (DC_ε).

Então, para toda $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1})$, existe $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1})$ tal que $Pu = f$.

A demonstração deste teorema será feita na Seção 6.1 deste capítulo. Antes de iniciá-la observe que, para estudarmos a $\mathcal{M}$-resolubilidade de P, basta considerar o caso em que cada uma das funções p_j é constante. De fato, para cada $j = 1, \ldots, n$, defina

$$m_j(t) = \int_0^t (p_j(\tau) - p_{0j})\, d\tau$$

e denote $m(t) = (m_1(t), \ldots, m_n(t))$. Dado $J = (J_1, \ldots, J_n) \in \mathbb{Z}^n$, observe que

$$\frac{\partial}{\partial t}(m(t) \cdot J) = \sum_{j=1}^n (p_j(t) - p_{0j}) J_j.$$

Agora basta usar o resultado a seguir para garantir no estudo da $\mathcal{M}$-resolubilidade do operador P podemos substituir cada uma das funções p_j pelas suas respectivas médias p_{0j}.

Lema 6.2. Considere o operador $T : \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1}) \to \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1})$ dado por

$$Tu(x,t) = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} u_J(t)e^{-im(t)\cdot J}e^{iJ\cdot x},$$

com $u(x,t) = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} u_J(t)e^{iJ\cdot x} \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1})$. Então:

(a) T é um automorfismo em $\mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1})$;

(b) A restrição $T|_{\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1})}$ é um automorfismo em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1})$;

(c) Vale a seguinte conjugação:

$$TLT^{-1} = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n}(p_{0j} + i\lambda_j q(t))\frac{\partial}{\partial x_j} := \tilde{L},$$

sendo L é o operador dado por (6.1);

(d) L é $\mathcal{M}$-resolúvel ($\mathcal{M}$-globalmente hipoelítico) se, e somente se, $\tilde{L}$ o é.

Demonstração. [8], Teoremas 5.12 e 5.13. □

6.1 Demonstração do Teorema 6.1

Antes de passar a demonstração do resultado principal deste capítulo, introduzimos dois lemas fundamentais para a obtenção das estimativas de decaimento dos coeficientes de Fourier nas classes das funções ultradiferenciáveis.

Lema 6.3. Dados $k \in \mathbb{N}_0$ e $R > 0$, temos que

$$\sum_{\gamma\in\Delta(k)} \frac{|\gamma|!}{\gamma!}R^{|\gamma|} = R(1+R)^{k-1},$$

sendo $\Delta(k) = \left\{\gamma \in \mathbb{N}_0^k \,:\, \sum_{\ell=1}^{k} \ell\gamma_\ell = k\right\}$.

Demonstração. [19], Lema 1.4.1. □

Lema 6.4. Seja $\mathcal{M}$ uma sequência peso de crescimento moderado e $\gamma \in \Delta(k)$. Denotemos $|\gamma| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$. Então

$$m_{|\gamma|} m_1^{\gamma_1} \cdots m_k^{\gamma_k} \leq m_k.$$

Demonstração. [5], Proposição 4.4. □

Demonstração do Teorema:

Sejam $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1})$ e $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1})$ e suponha que $Pu = f$. Tomando as séries parciais de Fourier

$$u(x,t) = \sum_{J \in \mathbb{Z}^n} u_J(t) e^{iJ\cdot x} \quad \text{e} \quad f(x,t) \sum_{J \in \mathbb{Z}^n} f_J(t) e^{iJ\cdot x},$$

e procedendo como nos Teoremas 3.1 e 3.10, as condições (I) e (II) nos dão

$$u_J(t) = \alpha e^{iJ\cdot p_0 t + S(t)} (z_{1J}(t) + z_{2J}(t)), \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n,$$

sendo

$$z_{1J}(t) = -\int_t^{2\pi} e^{\rho_J(\tilde{Q}(t) - \tilde{Q}(\sigma))} e^{-iJ\cdot p_0\sigma - S(\sigma)} G_{1J}(\sigma)\, d\sigma$$

$$+ \; e^{\rho_J \tilde{Q}(t)} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\rho_J(q_0 + \tilde{Q}(\sigma))} e^{-iJ\cdot p_0\sigma - S(\sigma)}}{e^{-\rho_J q_0} - e^{iJ\cdot p_0 2\pi + s_0}} G_{1J}(\sigma)\, d\sigma$$

e

$$z_{2J}(t) = \int_0^t e^{\rho_J(Q(\sigma) - Q(t))} e^{-iJ\cdot p_0\sigma - S(\sigma)} G_{2J}(\sigma)\, d\sigma$$

$$+ \; e^{-\rho_J Q(t)} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\rho_J(Q(\sigma) - q_0)} e^{-iJ\cdot p_0\sigma - S(\sigma)}}{1 - e^{-\rho_J q_0 + iJ\cdot p_0 2\pi + s_0}} G_{2J}(\sigma)\, d\sigma,$$

com

$$Q(t) = \int_0^t q(\tau)\, d\tau\,, \quad \tilde{Q}(t) = -\int_t^{2\pi} q(\tau)\, d\tau\,, \quad S(t) = \int_0^{2\pi} s(\tau)\, d\tau,$$

$$G_J = \begin{bmatrix} G_{1J} \\ G_{2J} \end{bmatrix} = \frac{-1}{2\alpha\rho_J} \begin{bmatrix} (\lambda\cdot J - i\delta) - \rho_J & -\alpha \\ -(\lambda\cdot J - i\delta) - \rho_J & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_J \\ \overline{f_{-J}} \end{bmatrix}$$

Verifica-se como no Teorema 3.1 que

$$|\rho_J| \leq C(1 + \|J\|), \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n. \tag{6.3}$$

Além disso, temos que

$$|\rho_J|^4 = (\lambda \cdot J)^4 + 2(|\alpha|^2 + \delta^2)(\lambda \cdot J)^2 + (|\alpha|^2 + \delta^2)^2 \geq (|\alpha|^2 + \delta^2)^2 > 0$$

e, portanto, existe $C > 0$ tal que

$$0 < |\rho_J|^{-1} \leq C, \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n. \tag{6.4}$$

Observe que

$$G_{1J}(t) = \left[\frac{(i\delta - \lambda \cdot J)}{2\alpha\rho_J} + \frac{1}{2\alpha}\right] f_J(t) + \frac{1}{2\rho_J}\overline{f_{-J}}(t).$$

Como vale (6.4) e $(i\delta - \lambda \cdot J)$ é polinomial de grau 1, existe $C > 0$ tal que

$$\left|\frac{(i\delta - \lambda \cdot J)}{2\alpha\rho_J} + \frac{1}{2\alpha}\right| \leq C(1 + \|J\|), \quad \forall J \in \mathbb{Z}^n.$$

Como $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1})$, existem $C_f, h_{f1}, h_{f_2} > 0$ tais que, para todo $N \in \mathbb{N}_0$ e para todo $J \in \mathbb{Z}^n$, vale

$$\left|\frac{d^N}{dt^N} f_J(t)\right| \leq C_f \cdot h_{f_1}^N \cdot m_N \cdot N! \cdot \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{h_{f_2}^j (1 + \|J\|)^j}\right).$$

Com isso, dado $N \in \mathbb{N}_0$, pelo Lema 4.31, temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d^N}{dt^N} G_{1J}(t)\right| &\leq \left|\frac{(i\delta - \lambda \cdot J)}{2\alpha\rho_J} + \frac{1}{2\alpha}\right| \cdot |f_J(t)| + \frac{1}{2C} \cdot |f_{-J}(t)| \\
&\leq C(1 + \|J\|) \cdot C_f \cdot h_{f_1}^N \cdot m_N \cdot N! \cdot \left[\inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{h_{f_3}^j (1 + \|J\|)^j}\right)\right]^2 \\
&\quad + \frac{1}{2C} \cdot C_f \cdot h_{f_1}^N \cdot m_N \cdot N! \cdot \left[\inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{h_{f_3}^j (1 + \|J\|)^j}\right)\right]^2 \\
&\leq C(1 + \|J\|) \cdot C_f \cdot h_{f_1}^N \cdot m_N \cdot N! \cdot \left[\inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{h_{f_3}^j (1 + \|J\|)^j}\right)\right]^2 \\
&\quad + \frac{1}{2C} \cdot C_f \cdot h_{f_1}^N \cdot m_N \cdot N! \cdot \left[\inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{h_{f_3}^j (1 + \|J\|)^j}\right)\right]^2 \\
&\leq C(1 + \|J\|) \cdot C_f \cdot h_{f_1}^N \cdot m_N \cdot N! \cdot \frac{1}{h_{f_3}(1 + \|J\|)} \cdot \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{h_{f_3}^j (1 + \|J\|)^j}\right)
\end{aligned}$$

$$+\ \frac{1}{2C}\cdot C_f\cdot h_{f_1}^N\cdot m_N\cdot N!\cdot\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{h_{f_3}^j(1+\|J\|)^j}\right)$$

$$\leq\ C_G\cdot h_{G_1}^N\cdot m_N\cdot N!\cdot\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{h_{G_2}^j(1+\|J\|)^j}\right),$$

com $h_{G_1}=h_{f_1}, h_{G_2}=h_{f_3}=h_{f_2}/H$ e $C_G=\max\left\{\frac{C\cdot C_f}{h_{f_3}},\frac{C_f}{2C}\right\}$.

Para G_{2J}, é análogo. Existem portanto $C_G, h_{G_1}, h_{G_2}>0$ tais que, para todo $N\in\mathbb{N}_0$, vale

$$\left|\frac{d^N}{dt^N}G_{\ell J}(t)\right|\leq C_G\cdot h_{G_1}^N\cdot m_N\cdot N!\cdot\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{h_{G_2}^j(1+\|J\|)^j}\right),\quad \ell=1,2.$$

Primeiramente, dado $N\in\mathbb{N}_0$, temos

$$\frac{d^N}{dt^N}e^{iJ\cdot p_0t}=(iJ\cdot p_0)^Ne^{iJ\cdot p_0t},$$

o que nos dá

$$\left|\frac{d^N}{dt^N}e^{iJ\cdot p_0t}\right|\ \leq\ h_p^N(1+\|J\|)^N|e^{iJ\cdot p_0t}|\ =\ h_p^N(1+\|J\|)^N$$

para um certo $h_p>0$, lembrando que $|e^{iJ\cdot p_0t}|=1$ para todo $t\in\mathbb{R}$. De maneira análoga, temos

$$\left|\frac{d^N}{dt^N}e^{-iJ\cdot p_0t}\right|\leq h_p^N(1+\|J\|)^N.$$

Além disso, pela Fórmula de Faà di Bruno, dado $N\in\mathbb{N}_0$, temos

$$\frac{d^N}{dt^N}e^{\rho_J\tilde{Q}(t)}\ =\ e^{\rho_J\tilde{Q}(t)}\sum_{\gamma\in\Delta(N)}\frac{N!}{\gamma!}\prod_{\ell=1}^N\left(\frac{1}{\ell!}\cdot\frac{d^\ell}{dt^\ell}\rho_J\tilde{Q}(t)\right)^{\gamma_\ell}$$

$$=\ e^{\rho_J\tilde{Q}(t)}\sum_{\gamma\in\Delta(N)}\frac{N!}{\gamma!}\prod_{\ell=1}^N\left(\frac{-\rho_J}{\ell!}\cdot\frac{d^{\ell-1}}{dt^{\ell-1}}q(t)\right)^{\gamma_\ell}.$$

Como $q\in\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^1)$, existem $C_{q0}, h_{q0}>0$ tais que

$$\left|\frac{d^k}{dt^k}q(t)\right|\leq C_{q0}\cdot h_{q0}^k\cdot m_k\cdot k!$$

para todo $k\in\mathbb{N}_0$. Com isso,

$$\left|\frac{d^N}{dt^N}e^{\rho_J\tilde{Q}(t)}\right|\ \leq\ |e^{\rho_J\tilde{Q}(t)}|\sum_{\gamma\in\Delta(N)}\frac{N!}{\gamma!}|\rho_J|^{|\gamma|}\prod_{\ell=1}^N\left(\frac{1}{\ell!}\cdot C_{q0}h_{q0}^{\ell-1}m_{\ell-1}(\ell-1)!\right)^{\gamma_\ell}$$

$$\leq \ |e^{\rho_J \tilde{Q}(t)}| \sum_{\gamma \in \Delta(N)} \frac{N!}{\gamma!} C^{|\gamma|} (1 + \|J\|)^{|\gamma|} \prod_{\ell=1}^{N} \left(\frac{1}{\ell} \cdot C_{q0} h_{q0}^{\ell} m_{\ell} \right)^{\gamma_\ell}$$

$$\leq \ |e^{\rho_J \tilde{Q}(t)}| h_{q0}^N \sum_{\gamma \in \Delta(N)} \frac{N!}{\gamma!} (C C_{q0})^{|\gamma|} (1 + \|J\|)^{|\gamma|} \prod_{\ell=1}^{N} \left(\frac{1}{\ell} \cdot m_{\ell} \right)^{\gamma_\ell}$$

$$\leq \ |e^{\rho_J \tilde{Q}(t)}| h_{q0}^N \sum_{\gamma \in \Delta(N)} \frac{1}{\gamma!} (C_q)^{|\gamma|} (1 + \|J\|)^{|\gamma|} \frac{m_N}{m_{|\gamma|}}.$$

Na primeira desigualdade, foi utilizado o fato da sequência $\mathcal{M}$ ser não-decrescente. Na segunda, foi utilizada a estimativa (6.3). Na terceira desigualdade, foi utilizado o fato de que

$$\prod_{\ell=1}^{N} \left(\frac{1}{\ell} \right)^{\gamma_\ell} \leq \prod_{\ell=1}^{N} \left(\frac{1}{\ell} \right) = \frac{1}{N!}$$

e, na última desigualdade, foi utilizado o Lema 6.4 e denotamos $C_q = C C_{q0}$.

Procedendo de maneira análoga, obtemos que

$$\left| \frac{d^N}{dt^N} e^{S(t)} \right| \leq |e^{S(t)}| h_{s0}^N \sum_{\gamma \in \Delta(N)} \frac{1}{\gamma!} (C_{s0})^{|\gamma|} \frac{m_N}{m_{|\gamma|}}.$$

para todo $N \in \mathbb{N}_0$, sendo $C_{s0}, h_{s0} > 0$ tais que

$$\left| \frac{d^k}{dt^k} s(t) \right| \leq C_{s0} \cdot h_{s0}^k \cdot m_k \cdot k!$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$, uma vez que $s \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^1)$. Para $e^{-iJ \cdot p_0 t}$, $e^{-\rho_J \tilde{Q}(t)}$ e $e^{-S(t)}$, o procedimento é análogo, o que nos dá, para todo $N \in \mathbb{N}_0$,

$$\left| \frac{d^N}{dt^N} e^{\pm iJ \cdot p_0 t} \right| \leq h_p^N (1 + \|J\|)^N; \tag{6.5}$$

$$\left| \frac{d^N}{dt^N} e^{\pm \rho_J \tilde{Q}(t)} \right| \leq |e^{\pm \rho_J \tilde{Q}(t)}| h_{q0}^N \sum_{\gamma \in \Delta(N)} \frac{1}{\gamma!} (C_q)^{|\gamma|} (1 + \|J\|)^{|\gamma|} \frac{m_N}{m_{|\gamma|}}; \tag{6.6}$$

$$\left| \frac{d^N}{dt^N} e^{\pm S(t)} \right| \leq |e^{\pm S(t)}| h_{s0}^N \sum_{\gamma \in \Delta(N)} \frac{1}{\gamma!} (C_{s0})^{|\gamma|} \frac{m_N}{m_{|\gamma|}}. \tag{6.7}$$

Vamos analisar o decaimento de $e^{iJ \cdot p_0 t + S(t)} z_{1J}$. Dado $N \in \mathbb{N}_0$, temos

$$\frac{d^N}{dt^N} \left(e^{iJ \cdot p_0 t + S(t)} e^{\rho_J \tilde{Q}(t)} \int_t^{2\pi} e^{-\rho_J \tilde{Q}(\sigma)} e^{-iJ \cdot p_0 \sigma - S(\sigma)} G_{1J}(\sigma) \, d\sigma \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{d^{N-k}}{dt^{N-k}} (e^{iJ\cdot p_0 t + S(t)} e^{\rho_J \tilde{Q}(t)}) \cdot \frac{d^k}{dt^k} \left(\int_t^{2\pi} e^{-\rho_J \tilde{Q}(\sigma)} e^{-iJ\cdot p_0 \sigma - S(\sigma)} G_{1J}(\sigma)\, d\sigma \right)$$

$$= \frac{d^N}{dt^N} (e^{iJ\cdot p_0 t + S(t)} e^{\rho_J \tilde{Q}(t)}) \cdot \left(\int_t^{2\pi} e^{-\rho_J \tilde{Q}(\sigma)} e^{-iJ\cdot p_0 \sigma - S(\sigma)} G_{1J}(\sigma)\, d\sigma \right)$$

$$- \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \frac{d^{N-k}}{dt^{N-k}} (e^{iJ\cdot p_0 t + S(t)} e^{\rho_J \tilde{Q}(t)}) \cdot \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left(e^{-\rho_J \tilde{Q}(t)} e^{-iJ\cdot p_0 t - S(t)} G_{1J}(t) \right).$$

Dados $k = 1, \ldots, N-1$ e $r = 0, \ldots, k-1$, por (6.6) e (6.7), temos que

$$\left| \frac{d^r}{dt^r} \left(e^{-\rho_J \tilde{Q}(t) - S(t)} \right) \right| \le \sum_{w=0}^{r} \binom{r}{w} \left| \frac{d^w}{dt^w} \left(e^{-\rho_J \tilde{Q}(t)} \right) \right| \cdot \left| \frac{d^{r-w}}{dt^{r-w}} \left(e^{-S(t)} \right) \right|$$

$$\le |e^{-\rho_J \tilde{Q}(t) - S(t)}| \sum_{w=0}^{r} \binom{r}{w} \left[h_{q0}^{w} \sum_{\gamma \in \Delta(w)} \frac{1}{\gamma!} (C_q)^{|\gamma|} (1 + \|J\|)^{|\gamma|} \frac{m_w}{m_{|\gamma|}} \right]$$

$$\times \left[h_{s0}^{r-w} \sum_{\eta \in \Delta(r-w)} \frac{1}{\eta!} (C_{s0})^{|\eta|} \frac{m_{r-w}}{m_{|\eta|}} \right]$$

Denotando $k - 1 - r = k_r$, temos também

$$\left| \frac{d^{k_r}}{dt^{k_r}} (e^{-iJ\cdot p_0 t} G_{1J}(t)) \right| \le \sum_{w=0}^{k_r} \binom{k_r}{w} \left| \frac{d^{k_r - w}}{dt^{k_r - w}} (G_{1J}(t)) \right| \cdot \left| \frac{d^w}{dt^w} e^{-iJ\cdot p_0 t} \right|$$

$$\le \sum_{w=0}^{k_r} \binom{k_r}{w} h_p^w (1 + \|J\|)^w C_G h_{G_1}^{k_r - w} m_{k_r - w} (k_r - w)! \cdot \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{h_{G_2}^j (1 + \|J\|)^j} \right)$$

$$\le \sum_{w=0}^{k_r} \binom{k_r}{w} h_p^w (1 + \|J\|)^w C_G h_{G_1}^{k_r - w} m_{k_r - w} (k_r - w)! \cdot \left[\inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{(h_{G_2}/H)^j (1 + \|J\|)^j} \right) \right]^2$$

$$\le \sum_{w=0}^{k_r} \binom{k_r}{w} h_p^w (1 + \|J\|)^w C_G \cdot h_{G_1}^{k_r - w} m_{k_r - w} (k_r - w)! \cdot \frac{m_w \cdot w!}{(h_{G_2}/H)^w (1 + \|J\|)^w}$$

$$\times \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{(h_{G_2}/H)^j (1 + \|J\|)^j} \right)$$

$$\leq\; C_G \cdot h_{G0}^{k_r} \sum_{w=0}^{k_r} \binom{k_r}{w} m_{k_r-w} m_w (k_r-w)! w! \cdot \inf_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\delta_1^j (1+\|J\|)^j} \right)$$

$$\leq\; C_G \cdot h_{G0}^{k_r} \sum_{w=0}^{k_r} \binom{k_r}{w} m_{k_r} k_r! \cdot \inf_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\delta_1^j (1+\|J\|)^j} \right)$$

$$\leq\; C_G \cdot h_G^{k_r} \cdot m_{k_r} k_r! \cdot \inf_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\delta_1^j (1+\|J\|)^j} \right),$$

com $\delta_1 = h_{G_2}/H$, $h_{G0} = \max\{h_p, h_{G_1}\}$ e $h_G = 2h_{G0}$, observando que

$$\sum_{w=0}^{k_r} \binom{k_r}{w} = 2^{k_r}.$$

Com isso, dado $k = 1\dots, N-1$, utilizando os Lemas 4.31, 6.3 e 6.4 e as desigualdades obtidas anteriormente, temos que

$$\left| \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left(e^{-\rho_J \tilde{Q}(t)} e^{-iJ\cdot p_0 t - S(t)} G_{1J}(t) \right) \right|$$

$$\leq\; \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} \left| \frac{d^r}{dt^r} \left(e^{-\rho_J \tilde{Q}(t) - S(t)} \right) \right| \cdot \left| \frac{d^{k-1-r}}{dt^{k-1-r}} \left(e^{-iJ\cdot p_0 t} G_{1J}(t) \right) \right|$$

$$\leq\; |e^{-\rho_J \tilde{Q}(t) - S(t)}| \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} \left[\sum_{w=0}^{r} \binom{r}{w} \left[h_{q0}^w \sum_{\gamma\in\Delta(w)} \frac{1}{\gamma!} (C_q)^{|\gamma|} (1+\|J\|)^{|\gamma|} \frac{m_w}{m_{|\gamma|}} \right] \right.$$

$$\left. \times \left[h_{s0}^{r-w} \sum_{\eta\in\Delta(r-w)} \frac{1}{\eta!} (C_{s0})^{|\eta|} \frac{m_{r-w}}{m_{|\eta|}} \right] \cdot C_G \cdot h_G^{k_r} \cdot m_{k_r} k_r! \cdot \inf_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\delta_1^j (1+\|J\|)^j} \right) \right]$$

$$\leq\; |e^{-\rho_J \tilde{Q}(t) - S(t)}| \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} \left[\sum_{w=0}^{r} \binom{r}{w} \left[h_{q0}^w \sum_{\gamma\in\Delta(w)} \frac{1}{\gamma!} (C_q)^{|\gamma|} (1+\|J\|)^{|\gamma|} \frac{m_w}{m_{|\gamma|}} \right] \right.$$

$$\times \left[h_{s0}^{r-w} \sum_{\eta\in\Delta(r-w)} \frac{1}{\eta!} (C_{s0})^{|\eta|} \frac{m_{r-w}}{m_{|\eta|}} \right] \cdot C_G \cdot h_G^{k_r} \cdot m_{k_r} k_r! \cdot \inf_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{(\delta_1/H)^j (1+\|J\|)^j} \right)$$

$$\times \left[\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{(\delta_1/H^2)^j(1+\|J\|)^j}\right)\right]^2\Bigg]$$

$$\leq |e^{-\rho_J\tilde{Q}(t)-S(t)}|\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}\left[\sum_{w=0}^{r}\binom{r}{w}\left[h_{q0}^{w}\sum_{\gamma\in\Delta(w)}\frac{1}{\gamma!}(C_q)^{|\gamma|}(1+\|J\|)^{|\gamma|}\frac{m_w}{m_{|\gamma|}}\right]\right.$$

$$\times\frac{m_{|\gamma|}\cdot|\gamma|!}{\delta_3^{|\gamma|}(1+\|J\|)^{|\gamma|}}\cdot\left[h_{s0}^{r-w}\sum_{\eta\in\Delta(r-w)}\frac{1}{\eta!}(C_{s0})^{|\eta|}\frac{m_{r-w}}{m_{|\eta|}}\right]\cdot\frac{m_{|\eta|}\cdot|\eta|!}{\delta_3^{|\eta|}(1+\|J\|)^{|\eta|}}$$

$$\left.\times C_G\cdot h_G^{k_r}\cdot m_{k_r}\cdot k_r!\cdot\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{\delta_2^j(1+\|J\|)^j}\right)\right]$$

$$\leq |e^{-\rho_J\tilde{Q}(t)-S(t)}|C_Gh_0^{k-1}\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}\left[\sum_{w=0}^{r}\binom{r}{w}m_wm_{r-w}\left[\sum_{\gamma\in\Delta(w)}\frac{|\gamma|!}{\gamma!}\left(\frac{C_q}{\delta_3}\right)^{|\gamma|}\right]\right.$$

$$\left.\times\left[\sum_{\eta\in\Delta(r-w)}\frac{|\eta|!}{\eta!}\left(\frac{C_{s0}}{\delta_3}\right)^{|\eta|}\right]\cdot m_{k_r}\cdot k_r!\cdot\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{\delta_2^j(1+\|J\|)^j}\right)\right]$$

$$\leq |e^{-\rho_J\tilde{Q}(t)-S(t)}|C_Gh_0^{k-1}\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}m_rm_{k-1-r}\left[\sum_{w=0}^{r}\binom{r}{w}C_{q1}(1+C_{q1})^{w-1}\right.$$

$$\left.\times C_{s1}(1+C_{s1})^{r-w-1}\cdot(k-1-r)!\cdot\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{\delta_2^j(1+\|J\|)^j}\right)\right]$$

$$\leq |e^{-\rho_J\tilde{Q}(t)-S(t)}|C_Gh_0^{k-1}m_{k-1}\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{r}\left[\sum_{w=0}^{r}\binom{r}{w}C_{q2}^{w}C_{s2}^{r-w}(k-1-r)!\right.$$

$$\left.\times\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{\delta_2^j(1+\|J\|)^j}\right)\right]$$

$$\leq |e^{-\rho_J\tilde{Q}(t)-S(t)}|\cdot C_{G0}\cdot h_{00}^{k-1}\cdot m_{k-1}\cdot(k-1)!\cdot\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{\delta_2^j(1+\|J\|)^j}\right),$$

com $\delta_2 = \delta_1/H$, $\delta_3 = \delta_1/H^2$, $h_0 = \max\{h_{q0}, h_{s0}\}$, $C_{q1} = C_q/\delta_3$, $C_{s1} = C_{s0}/\delta_3$, $C_{q_2} = (1 + C_{q1})$, $C_{s2} = 1 + C_{s1}$ e $h_{00} = 2h_0$ e $C_{G0} = 2C_G$, observando que

$$\sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} \sum_{w=0}^{r} \binom{r}{w} = 2^k - \frac{1}{2} \leq 2^k = 2 \cdot 2^{k-1}.$$

Dado $k = 1, \ldots, N$, pelas estimativas (6.6), (6.6) e (6.7), temos que

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{d^{N-k}}{dt^{N-k}} (e^{iJ\cdot p_0 t + S(t)} e^{\rho_J \tilde{Q}(t)}) \right| \\
\leq\ & \sum_{r=0}^{N-k} \binom{N-k}{r} \left| \frac{d^r}{dt^r} \left(e^{\rho_J \tilde{Q}(t) + S(t)} \right) \right| \cdot \left| \frac{d^{N-k-r}}{dt^{N-k-r}} e^{iJ\cdot p_0 t} \right| \\
\leq\ & \sum_{r=0}^{N-k} \binom{N-k}{r} |e^{\rho_J \tilde{Q}(t) + S(t)}| \sum_{w=0}^{r} \binom{r}{w} \left[h_{q0}^w \sum_{\gamma \in \Delta(w)} \frac{1}{\gamma!} (C_q)^{|\gamma|} (1 + \|J\|)^{|\gamma|} \frac{m_w}{m_{|\gamma|}} \right] \\
&\times \left[h_{s0}^{r-w} \sum_{\eta \in \Delta(r-w)} \frac{1}{\eta!} (C_{s0})^{|\eta|} \frac{m_{r-w}}{m_{|\eta|}} \right] \cdot h_p^{N-k-r} \cdot (1 + \|J\|)^{N-k-r}.
\end{aligned}$$

Por fim, temos que

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \frac{d^{N-k}}{dt^{N-k}} (e^{iJ\cdot p_0 t + S(t)} e^{\rho_J \tilde{Q}(t)}) \cdot \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left(e^{-\rho_J \tilde{Q}(t)} e^{-iJ\cdot p_0 t - S(t)} G_{1J}(t) \right) \right| \\
\leq\ & \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \left| \frac{d^{N-k}}{dt^{N-k}} (e^{iJ\cdot p_0 t + S(t)} e^{\rho_J \tilde{Q}(t)}) \right| \cdot \left| \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left(e^{-\rho_J \tilde{Q}(t)} e^{-iJ\cdot p_0 t - S(t)} G_{1J}(t) \right) \right| \\
\leq\ & \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \left[\sum_{r=0}^{N-k} \binom{N-k}{r} |e^{\rho_J \tilde{Q}(t) + S(t)}| \sum_{w=0}^{r} \binom{r}{w} \left[h_{q0}^w \sum_{\gamma \in \Delta(w)} \frac{1}{\gamma!} (C_q)^{|\gamma|} (1 + \|J\|)^{|\gamma|} \frac{m_w}{m_{|\gamma|}} \right] \right. \\
&\left. \times \left[h_{s0}^{r-w} \sum_{\eta \in \Delta(r-w)} \frac{1}{\eta!} (C_{s0})^{|\eta|} \frac{m_{r-w}}{m_{|\eta|}} \right] \cdot h_p^{N-k-r} \cdot (1 + \|J\|)^{N-k-r} \right] \cdot |e^{-\rho_J \tilde{Q}(t) - S(t)}| \cdot C_{G0}
\end{aligned}$$

$$\times\, h_{00}^{k-1}\cdot m_{k-1}\cdot(k-1)!\cdot\left[\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{(\delta_2/H^2)^j(1+\|J\|)^j}\right)\right]^4$$

$$\le\ \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}\left[\sum_{r=0}^{N-k}\binom{N-k}{r}h_{qs}^{r}h_p^{N-k-r}\sum_{w=0}^{r}\binom{r}{w}\left[\sum_{\gamma\in\Delta(w)}\frac{1}{\gamma!}(C_q)^{|\gamma|}(1+\|J\|)^{|\gamma|}\frac{m_w}{m_{|\gamma|}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,\frac{m_{|\gamma|}\cdot|\gamma|!}{\delta_4^{|\gamma|}(1+\|J\|)^{|\gamma|}}\right]\cdot\left[\sum_{\eta\in\Delta(r-w)}\frac{1}{\eta!}(C_{s0})^{|\eta|}\frac{m_{r-w}}{m_{|\eta|}}\cdot\frac{m_{|\eta|}\cdot|\eta|!}{\delta_4^{|\eta|}(1+\|J\|)^{|\eta|}}\right]\right]$$

$$\times\,(1+\|J\|)^{N-k-r}\cdot\frac{m_{N-k-r}\cdot(N-k-r)!}{\delta_4^{N-k-r}(1+\|J\|)^{N-k-r}}\cdot C_{G0}\cdot h_{00}^{k-1}\cdot m_{k-1}\cdot(k-1)!$$

$$\times\,\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{\delta_4^j(1+\|J\|)^j}\right)$$

$$\le\ C_{G0}\sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}h_{00}^{k-1}h_{pqs}^{N-k}\left[\sum_{r=0}^{N-k}\binom{N-k}{r}\sum_{w=0}^{r}\binom{r}{w}m_w\left[\sum_{\gamma\in\Delta(w)}\frac{|\gamma|!}{\gamma!}\left(\frac{C_q}{\delta_4}\right)^{|\gamma|}\right]m_{r-w}\right.$$

$$\left.\times\left[\sum_{\eta\in\Delta(r-w)}\frac{1}{\eta!}\left(\frac{C_{s0}}{\delta_4}\right)^{|\eta|}\right]m_{N-k-r}\cdot\frac{1}{\delta_4^{N-k-r}}\cdot(N-k-r)!\right]\cdot m_{k-1}\cdot(k-1)!$$

$$\times\,\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{\delta_4^j(1+\|J\|)^j}\right)$$

$$\le\ C_{G0}\cdot h_{00}^{N}\sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}m_{k-1}\sum_{r=0}^{N-k}\binom{N-k}{r}m_{N-k-r}m_r\sum_{w=0}^{r}\binom{r}{w}[C_{q3}(1+C_{q3})^{w-1}]$$

$$\times\,[C_{s3}(1+C_{s3})^{r-w-1}](N-r-1)!\cdot\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{\delta_4^j(1+\|J\|)^j}\right)$$

$$\le\ C_{G0}\cdot h_{00}^{N}\sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}m_{k-1}\sum_{r=0}^{N-k}\binom{N-k}{r}m_{N-k-r}m_r\sum_{w=0}^{r}\binom{r}{w}C_{q4}^{w}\cdot C_{s4}^{r-w}\cdot(N-r-1)!$$

$$\times \cdot \inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{\delta_4^j(1+\|J\|)^j}\right)$$

$$\leq \; C\cdot h^N\cdot m_N\cdot N!\cdot \inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{\delta_4^j(1+\|J\|)^j}\right),$$

com $\delta_4 = \delta_2/H^2$, $h_{qs} = \max\{h_{q0}, h_{s0}\}$, $h_{pqs} = \max\{h_p, h_{qs}\}$, $C_{q3} = C_q/\delta_4$, $C_{s3} = C_{s_0}/\delta_4$, $C_{q4} = 1 + C_{q3}$, $C_{s4} = 1 + C_{s3}$, $h = 2\max\{h_{00}, h_{pqs}, C_{q4}, C_{s4}\}$ e $C = 2C_{G0}$.

Utilizando argumentos similares, obtemos estimativas análogas para as derivadas de

$$\frac{d^N}{dt^N}(e^{iJ\cdot p_0t+S(t)}e^{\rho_J\tilde{Q}(t)})\cdot\left(\int_t^{2\pi} e^{-\rho_J\tilde{Q}(\sigma)}e^{-iJ\cdot p_0\sigma-S(\sigma)}G_{1J}(\sigma)\,d\sigma\right)$$

e de

$$e^{iJ\cdot p_0t+S(t)}e^{\rho_J\tilde{Q}(t)}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-\rho_J(q_0+\tilde{Q}(\sigma))}e^{-iJ\cdot p_0\sigma-S(\sigma)}}{e^{-\rho_Jq_0}-e^{iJ\cdot p_0 2\pi+s_0}}G_{1J}(\sigma)\,d\sigma,$$

observando que

$$\begin{aligned}\left|\int_t^{2\pi} e^{-\rho_J\tilde{Q}(\sigma)}e^{-iJ\cdot p_0\sigma-S(\sigma)}G_{1J}(\sigma)\,d\sigma\right| \;&\leq\; \int_t^{2\pi}|e^{-\rho_J\tilde{Q}(\sigma)-S(\sigma)}|\cdot|G_{1J}(\sigma)|\,d\sigma\\ &\leq\; 2\pi\cdot\sup|e^{-\rho_J\tilde{Q}(t)-S(t)}|\cdot|\sup|G_{1J}(t)|\\ &\leq\; C\cdot h_{G_1}\cdot\sup|e^{-\rho_J\tilde{Q}(t)-S(t)}|\cdot\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{h_{G_2}^j(1+\|J\|)^j}\right)\end{aligned}$$

e que vale a condição (III).

O cálculo do decaimento de $e^{iJ\cdot p_0t+S(t)}z_{2J}$ e de suas derivadas é análogo ao de $e^{iJ\cdot p_0t+S(t)}z_{1J}$. Segue que $u\in\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1})$ e $Pu = f\in\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1})$ por construção. O que conclui a demonstração do teorema principal.

6.2 Consequências do Teorema 6.1

Nesta seção, apresentamos um caso particular do Teorema 6.1, assim como recuperamos os resultados de [6] para classes de Gevrey.

Considere o operador $P:\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1})\to\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1})$ dado por

$$Pu = \frac{\partial}{\partial t}u - \sum_{j=1}^{n}(p_{0j}+i\lambda_j q(t))\frac{\partial}{\partial x_j}u - (s(t)+i\delta q(t))u - \alpha q(t)\bar{u}, \tag{6.8}$$

com $q, s \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T};\mathbb{R})$, $p_{0j}, \lambda_j, \delta \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ e $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Além disso, suponha $q \not\equiv 0$ e $q \geq 0$.

Para enunciar o teorema abaixo, também vamos considerar o sistema

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(A_0(k + J \cdot p_0)) = 0 \\ 4\pi^2|k + J \cdot p_0|^2 = |A_0|^2 - |B_0|^2 \end{cases} ; \tag{6.9}$$

e a seguinte equação diofantina

(DC$'_{\mathcal{M}}$) Para todo $\varepsilon > 0$, existem $\gamma_\varepsilon, C_\varepsilon > 0$ tais que $(J, k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $\|J\| \geq \gamma_\varepsilon$ implica

$$|2k\pi + J \cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}| \geq C_\varepsilon \cdot \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j (1 + \|J\|)^j} \right).$$

Corolário 6.5. Seja P tal como em (6.8) e suponha $\lambda = 0$. Suponha que vale uma das condições abaixo:

(1) $|B_0| > |A_0|$;

(2) $|B_0| \leq |A_0|$, $|\alpha| > |\delta|$ e o sistema (6.9) não possui solução $(J, k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$;

(3) $|\alpha| < |\delta|$ e $s_0 \neq 0$;

(4) $|\alpha| < |\delta|$, $s_0 = 0$, o sistema (6.9) não possui solução $(J, k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ e vale condição diofantina (DC$'_{\mathcal{M}}$).

Então, para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$, existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ tal que $Pu = f$.

Demonstração. Procedendo como nos Teoremas 3.1 e 3.10, as condições (1), (2), (3) e (4) nos garantem que valem as condições (I) e (II) do Teorema 3.10. Supondo que vale (1), (2) ou (3), obtemos $C > 0$ tal que

$$|e^{-\rho_J q_0} - e^{s_0 + i2\pi J \cdot p_0}| \geq C \quad \text{e} \quad |1 - e^{-\rho_J q_0 + s_0 + i2\pi J \cdot p_0}| \geq C$$

para todo $J \in \mathbb{Z}^n$. Observe que

$$C = C \cdot \frac{m_0 \cdot 0!}{\varepsilon^0 (1 + \|J\|)^0} \geq C \cdot \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j (1 + \|J\|)^j} \right)$$

para todo $\varepsilon > 0$ e, portanto, vale a condição (III) do Teorema 6.1. Procedendo de maneira análoga ao Teorema 6.1, segue que, para toda função $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$, existe $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^n)$ tal que $Pu = f$.

Se vale (4), não existe tal $C > 0$ como nos casos anteriores. Neste caso, procedemos de maneira análoga ao Teorema 6.1 utilizando a condição diofantina (DC$''_{\mathcal{M}}$), que é equivalente à condição diofantina (DC$'_{\mathcal{M}}$) conforme o lema seguinte. Verifica-se facilmente que a condição (DC$''_{\mathcal{M}}$) implica na condição (III) do Teorema 3.10. $\square$

Lema 6.6. A condição diofantina (DC$'_{\mathcal{M}}$) é equivalente a

(DC$''_{\mathcal{M}}$) Para todo $\varepsilon > 0$, existem $\gamma_\varepsilon, C_\varepsilon > 0$ tais que $(J,k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $\|J\| \geq \gamma_\varepsilon$ implica

$$|e^{i(J\cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2})} - 1| \geq C_\varepsilon \cdot \inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{\varepsilon^j(1+\|J\|)^j}\right).$$

Demonstração. A demonstração deste lema é semelhante à do Lema 3.7. Suponha que não vale (DC$'_{M}$). Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\ell \in \mathbb{N}$, existe $(J_\ell, k_\ell) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ com $\|J_\ell\| \geq \ell$ de modo que

$$|2\pi k_\ell + J_\ell\cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2}| < \frac{1}{2}\cdot\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{\varepsilon^j(1+\|J_\ell\|)^j}\right).$$

Observe que

$$\begin{aligned}
|e^{i(J_\ell\cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2})} - 1|^2 &= |e^{i(2\pi k_\ell + J_\ell\cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2})} - 1|^2 \\
&= 2(1-\cos(2\pi k_\ell + J_\ell\cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2})) \\
&= 2(2\pi k_\ell + J_\ell\cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2})\mathrm{sen}(\xi_\ell) \\
&\leq \inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{\varepsilon^j(1+\|J_\ell\|)^j}\right) \\
&\leq \left[\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{(\varepsilon/H)^j(1+\|J_\ell\|)^j}\right)\right]^2,
\end{aligned}$$

para algum $\xi_\ell \in \mathbb{R}$ e, portanto,

$$|e^{i(J_\ell\cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2-|\alpha|^2})} - 1| < \inf_{j\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_j\cdot j!}{(\varepsilon/H)^j(1+\|J_\ell\|)^j}\right).$$

Logo, não vale (DC$''_{\mathcal{M}}$).

Por outro lado, suponha que não vale (DC$''_{\mathcal{M}}$). Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\ell \in \mathbb{N}$, existe $J_\ell \in \mathbb{Z}^n$ com $\|J_\ell\| \geq \ell$ tal que

$$|e^{i(J_\ell \cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2})} - 1| < \inf_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j(1 + \|J_\ell\|)^j}\right).$$

Para cada $\ell \in \mathbb{N}$, tome

$$-k_\ell = \left\lfloor J_\ell \cdot p_0 - \frac{q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}}{2\pi} \right\rfloor \in \mathbb{Z},$$

isto é, $-k_\ell$ é a parte inteira de $J_\ell \cdot p_0 - \dfrac{q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}}{2\pi}$. Observe que

$$0 \leq J_\ell \cdot p_0 - \frac{q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}}{2\pi} + k_\ell < 1.$$

Como

$$|e^{i(J_\ell \cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2})} - 1| < \inf_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j(1 + \|J_\ell\|)^j}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon(1 + \|J_\ell\|)} \to 0, \quad \ell \to \infty,$$

uma vez que $\|J_\ell\| \geq \ell \to \infty$ com $\ell \to \infty$, temos que

$$J_\ell \cdot p_0 - \frac{q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}}{2\pi} + k_\ell \to 0 \quad \text{ou} \quad J_\ell \cdot p_0 - \frac{q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}}{2\pi} + k_\ell \to 1, \quad \ell \to \infty.$$

Deste modo, para $\ell \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos que

$$\begin{aligned} |e^{i(2\pi k_\ell + J_\ell \cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2})} - 1|^2 &= 2(1 - \cos(2\pi k_\ell + J_\ell \cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2})) \\ &\geq \frac{1}{2}|2\pi k_\ell + J_\ell \cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}|^2, \end{aligned}$$

uma vez que $1 - \cos(x) \geq \dfrac{1}{4}x^2$ para todo $x \in (-2, 2)$. Isto segue da fórmula de Taylor. Como

$$|e^{i(2\pi k_\ell + J_\ell \cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2})} - 1| < \inf_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j(1 + \|J_\ell\|)^j}\right), \quad \forall \ell \in \mathbb{N},$$

temos que

$$|2\pi k_\ell + J_\ell \cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}| < \inf_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_j \cdot j!}{\varepsilon^j(1 + \|J_\ell\|)^j}\right), \quad \forall \ell \in \mathbb{N},$$

e, portanto, não vale (DC$'_{\mathcal{M}}$). Logo, (DC$'_{\mathcal{M}}$) e (DC$''_{\mathcal{M}}$) são equivalentes. $\square$

Observação 6.7. No caso bidimensional, utilizando os argumentos do Teorema 3.1, não é difícil ver que as condições (I) e (II) implicam em (III) supondo $\lambda = 0$, o que não é necessariamente verdadeiro para $n \geq 2$. Observe que o Teorema 6.1 é verdadeiro para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Quando $\lambda = 0$, obtemos um caso particular deste resultado, no qual o operador L se torna um campo vetorial real e é possível enunciar condições mais simples para a resolubilidade de P.

Para finalizar este capítulo observamos que, no caso particular em que a classe de funções ultradiferenciáveis é a classe das funções de Gevrey, nossos resultados recuperam os resultados obtidos por M. Almeida e P. Dattori da Silva em [6].

Mais precisamente, dado $s \geq 1$, considere o operador P definido em (6.8) com $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^{n+1}) = \mathcal{G}_s(\mathbb{T}^{n+1})$ e $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}^1_t;\mathbb{R}) = \mathcal{G}_s(\mathbb{T}^1_t;\mathbb{R})$. Neste caso os Teoremas 6.1 e 6.5 podem ser reescritos na formas abaixo.

Teorema 6.8 (Almeida e Dattori da Silva, 2021)**.** Suponha que sejam válidas as seguintes condições abaixo:

(I) $|\alpha| \neq |\delta|$;

(II) O sistema

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(A_0(2\pi k + J \cdot \overline{C_0})) = 0 \\ |2\pi k + J \cdot C_0|^2 = |A_0|^2 - |B_0|^2 \end{cases}$$

não possui solução $(J, k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$;

(III) Vale a seguinte condição diofantina:

(DC$_s$) Para todo $\varepsilon > 0$, existem $\gamma_\varepsilon, C_\varepsilon > 0$ tais que $\|J\| \geq \gamma_\varepsilon$ implica

$$\min\{|e^{-\rho_J q_0} - e^{s_0 + i2\pi J\cdot p_0}|, |1 - e^{-\rho_J q_0 + s_0 + i2\pi J \cdot p_0}|\} \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon\|J\|^{1/s}}.$$

Então, para toda $f \in \mathcal{G}_s(\mathbb{T}^{n+1})$, existe $u \in \mathcal{G}_s(\mathbb{T}^{n+1})$ tal que $Pu = f$.

Teorema 6.9 (Almeida e Dattori da Silva, 2021)**.** Suponha que $\lambda = 0$ e que vale uma das condições abaixo:

(1) $|B_0| > |A_0|$;

(2) $|B_0| \leq |A_0|$, $|\alpha| > |\delta|$ e não existe $(J,k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ solução de

$$\begin{cases} \text{Re}(A_0(k + J \cdot p_0)) = 0 \\ 4\pi^2 |k + J \cdot p_0|^2 = |A_0|^2 - |B_0|^2 \end{cases} ; \tag{6.10}$$

(3) $|\alpha| < |\delta|$ e $s_0 \neq 0$;

(4) $|\alpha| < |\delta|$, $s_0 = 0$, não existe $(J,k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ satisfazendo (6.10) e vale a seguinte condição diofantina:

(DC$'_s$) Para todo $\varepsilon > 0$, existem $\gamma_\varepsilon, C_\varepsilon > 0$ tais que $(J,k) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $\|J\| \geq \gamma_\varepsilon$ implica

$$|2k\pi + J \cdot p_0 2\pi - q_0\sqrt{\delta^2 - |\alpha|^2}| \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon \|J\|^{1/s}}.$$

Então, para toda $f \in \mathcal{G}_s(\mathbb{T}^{n+1})$, existe $u \in \mathcal{G}_s(\mathbb{T}^{n+1})$ tal que $Pu = f$.

Referências

[1] A. Arias Junior, A. Kirilov, and C. de Medeira. Global Gevrey hypoellipticity on the torus for a class of systems of complex vector fields. *J. Math. Anal. Appl.*, 474(1):712–732, 2019.

[2] A. P. Bergamasco, P. D. Cordaro, and G. Petronilho. Global solvability for a class of complex vector fields on the two-torus. *Commun. Partial Differ. Equations*, 29(5-6):785–819, 2004.

[3] A. P. Bergamasco and P. L. Dattori da Silva. Solvability in the large for a class of vector fields on the torus. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 86(5):427–447, 2006.

[4] A. P. Bergamasco, P. L. Dattori da Silva, and A. Meziani. Solvability of a first order differential operator on the two-torus. *J. Math. Anal. Appl.*, 416(1):166–180, 2014.

[5] E. Bierstone and P. D. Milman. Resolution of singularities in Denjoy-Carleman classes. *Sel. Math., New Ser.*, 10(1):1–28, 2004.

[6] M. de Almeida and P. L. Dattori da Silva. Solvability of a class of first order differential operators on the torus. *Result. Math.*, 76(2):17, 2021. Id/No 104.

[7] F. de Ávila Silva, R. B. Gonzalez, A. Kirilov, and C. de Medeira. Global hypoellipticity for a class of pseudo-differential operators on the torus. *J. Fourier Anal. Appl.*, 25(4):1717–1758, 2019.

[8] B. de Lessa Victor. Fourier analysis for Denjoy-Carleman classes on the torus. *Ann. Fenn. Math.*, 46(2):869–895, 2021.

[9] B. de Lessa Victor. *Hipoeliticidade em classes de funções ultradiferenciáveis no toro*. PhD thesis, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2021.

[10] B. de Lessa Victor and A. Meziani. A generalized CR equation with isolated singularities. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 0(0):1–13, 2022.

[11] B. de Lessa Victor and Abdelhamid Meziani. Infinitesimal bendings for classes of two-dimensional surfaces. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 0(0):1–23, 2022.

[12] W. A. A. de Moraes. Regularity of solutions to a Vekua-type equation on compact Lie groups. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 201(1):379–401, 2021.

[13] J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk. *Distributions. Theory and applications*. Cornerstones. Basel: Birkhäuser, 2010.

[14] S. J. Greenfield. Hypoelliptic vector fields and continued fractions. *Proc. Am. Math. Soc.*, 31:115–118, 1972.

[15] S. J. Greenfield and N. R. Wallach. Global hypoellipticity and Liouville numbers. *Proc. Am. Math. Soc.*, 31:112–114, 1972.

[16] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, Fifth edition, 1979.

[17] J. Hounie. Globally hypoelliptic and globally solvable first-order evolution equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 252:233–248, 1979.

[18] H. Komatsu. Ultradistributions. I. Structure theorems and a characterization. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 20:25–105, 1973.

[19] S. Krantz and H. R. Parks. *A primer of real analytic functions*, volume 4 of *Basler Lehrbüch.* Basel: Birkhäuser Verlag, 1992.

[20] A. Meziani. Representation of solutions of a singular Cauchy-Riemann equation in the plane. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 53(12):1111–1130, 2008.

[21] A. Meziani. Solvability of planar complex vector fields with applications to deformation of surfaces. In *Complex analysis*, Trends Math., pages 263–278. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2010.

[22] A. Meziani. On first and second order planar elliptic equations with degeneracies. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 217(1019):vi+77, 2012.

[23] A. Meziani. Nonrigidity of a class of two dimensional surfaces with positive curvature and planar points. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141(6):2137–2143, 2013.

[24] L. T. Takahashi. Hipoeliticidade global de certas classes de operadores diferenciais parciais. Master's thesis, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 1995.

[25] I. N. Vekua. *Generalized Analytic Functions*. Pergamon Press, London-Paris-Frankfurt; Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1962.

[26] S. L. Zani. Hipoeliticidade global para operadores de segunda ordem. Master's thesis, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.