

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MICHELY CASTRO DOS SANTOS

**APLICAÇÃO DA ANÁLISE FATORIAL NA DETERMINAÇÃO  
DE INDICADORES DOS MUNICÍPIOS PARANAENSES**

**CURITIBA**

**2016**

MICHELY CASTRO DOS SANTOS

**APLICAÇÃO DA ANÁLISE FATORIAL NA DETERMINAÇÃO  
DE INDICADORES DOS MUNICÍPIOS PARANAENSES**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, área de concentração em Programação Matemática e linha de pesquisa em Métodos Estatísticos Aplicados à Engenharia, do Setor de Ciências Exatas e do Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Jair Mendes Marques

**CURITIBA**

**2016**

---

S237a

Santos, Michely Castro dos

Aplicação da análise fatorial na determinação de indicadores dos municípios paranaenses / Michely Castro dos Santos. – Curitiba, 2016.  
104 f. : il. color. ; 30 cm.

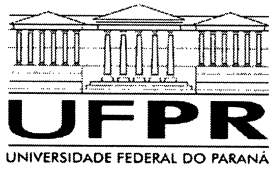
Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2016.

Orientador: Jair Mendes Marques .  
Bibliografia: p. 70-72.

1. Estatística multivariada. 2. Análise fatorial. 3. Escores fatoriais. I. Universidade Federal do Paraná. II. Marques, Jair Mendes. III. Título.

CDD: 519.5

---

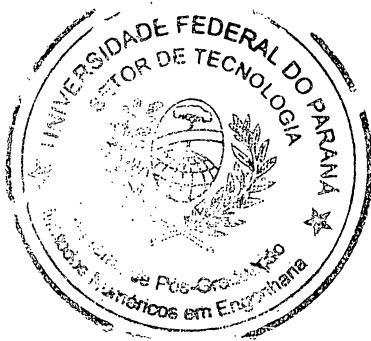


MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
Setor Tecnologia  
Programa de Pós Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA  
Código CAPES: 40001016030P0

## ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA

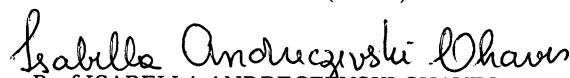
No dia trinta de Agosto de dois mil e dezesseis às 14:00 horas, na sala Vídeo Conferência, CESEC/TC/UFPR - Centro Politécnico, do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, foram instalados os trabalhos de arguição da mestranda **MICHELY CASTRO DOS SANTOS** para a Defesa Pública de sua Dissertação intitulada: "**APLICAÇÃO DA ANÁLISE FATORIAL NA DETERMINAÇÃO DE INDICADORES DOS MUNICÍPIOS PARANAENSES**". A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: JAIR MENDES MARQUES (UFPR), GUSTAVO VALENTIM LOCH (UFPR), ISABELLA ANDRECZEWSKI CHAVES (UFPR), MAURICIO KOUBAY DO AMARAL (UTFPR). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra a discente, para que a mesma expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. A aluna respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais e, depois, solicitou que os presentes e a mestranda deixassem a sala. A Banca Examinadora, então, reuniu-se sigilosamente e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela APROVAÇÃO da aluna. A mestranda foi convidada a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, JAIR MENDES MARQUES, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.


Curitiba, 30 de Agosto de 2016.



  
Prof JAIR MENDES MARQUES  
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

  
Prof GUSTAVO VALENTIM LOCH  
Avaliador Interno (UFPR)

  
Prof ISABELLA ANDRECZEWSKI CHAVES  
Avaliador Externo (UFPR)

  
Prof MAURICIO KOUBAY DO AMARAL  
Avaliador Externo (UTFPR)

Dedico este trabalho a toda minha família, pelo incentivo e apoio em todas minhas escolhas. Essa conquista é para vocês.

## AGRADECIMENTOS

Obrigada, meu Deus, pela vida, pela saúde e por me presentear com momentos tão felizes como esse.

Ao meu orientador, professor Jair Mendes Marques, por acreditar em mim, por toda paciência na orientação, pelos ensinamentos e incentivo que tornaram possível a realização desse trabalho.

A todos os envolvidos no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE), da Universidade Federal do Paraná, por me proporcionarem esse período de aprendizado tão enriquecedor para minha carreira. Em especial, ao secretário, Jair Anjos, pelos serviços e atendimento muito bem prestados. Obrigada também aos colegas do programa, pelos momentos de companheirismo, conselhos e estímulos. Aos grandes professores pelas aulas inspiradoras, ensinamentos e experiências compartilhados.

Aos meus queridos pais, Wilson e Maria Izabel e a todos meus familiares, pela proteção, pelo carinho e apoio. Obrigada por serem um exemplo de dedicação, força e por sempre estarem por perto, dando-me o suporte necessário para ir em busca dos meus sonhos. Aos meus amados sobrinhos, Bruno e João, que trazem a alegria para nossa casa e nos inspiram a buscar um mundo melhor.

Ao meu amor, Bruno Sena, que além de grande companheiro, é um maravilhoso amigo. Agradeço por dividir comigo horas de estudo, compartilhar as alegrias e angústias, pela disposição em me ajudar a fazer o melhor.

Às minhas grandes amigas, pela compreensão nos momentos de ausência e pelas sábias palavras de estímulos vindas nas horas mais importantes. Aos amigos de trabalho, pelo convívio, apoio e companheirismo.

Hoje, por mais uma etapa concluída, paro para dizer a todos vocês, muito obrigada pela compreensão, pelo estímulo nas horas de desânimo, pelas palavras de bondade e simpatia, pelas alegrias que compartilhamos.

*Cada raio de luz lançado sobre os outros será refletido sobre nós mesmos.*

Ellen Gold White

## RESUMO

No presente estudo, são aplicadas técnicas estatísticas multivariadas para alguns dados disponibilizados pelo Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econômico e Social (IPARDES) do Anuário Estatístico do Estado do Paraná de 2013, com a finalidade de obter informações sobre os municípios do estado, a fim de facilitar a aplicação de mecanismos e tomada de decisão para o planejamento governamental, gerando promoção e alocação de investimentos, minimizando as distorções entre os municípios. Os resultados encontrados com a aplicação dos métodos estatísticos foram preparados através do Excel e do software MATLAB. A metodologia adotada inicia-se com a seleção das variáveis originais. Foram estudadas 62 variáveis entre as trabalhadas no Anuário e por conter variáveis com observações faltantes, foram usados dois critérios. O primeiro, descarta a variável, caso tenha muitas observações faltantes e o segundo, calcula, de acordo com o número de habitantes dos municípios, a média aritmética entre os valores informados, para completar os dados. Assim, restaram 58 variáveis originais e a matriz de dados ficou composta por 399 linhas, as quais representam as observações referentes aos municípios paranaenses e 58 colunas, correspondentes às variáveis. Verificou-se que a matriz em estudo não apresenta dados normalizados e por conta disso, não foi aplicado o teste de esfericidade de Bartlett. Através do teste de KMO foi confirmado que o modelo de análise fatorial poderia ser aplicado à matriz de dados. Sendo assim, os resultados obtidos por meio da análise fatorial em conjunto com a análise de componentes principais, determinaram 3 fatores sintéticos, indicando as variáveis mais correlacionadas, as quais contém informações sobre a economia, a infraestrutura, a educação, o indicador humano, sociais e demográficos. Com os escores fatoriais finais ponderados foi possível traçar o perfil de cada município, permitindo estabelecer quais apresentaram alto ou baixo potencial de desenvolvimento em relação a cada fator extraído. Por meio da rotação Varimax, determinou-se que os três fatores são responsáveis por pouco mais de 72% da explicação do sistema. Através dos escores fatoriais finais foram calculados o indicador sintético para cada município e por fim, o ranqueamento, em ordem decrescente de valores, em relação ao potencial de desenvolvimento referente aos fatores estudados.

**Palavras-chave:** Estatística multivariada, análise fatorial, análise de componentes principais, escores fatoriais, municípios paranaenses



## ABSTRACT

In the present study, we applied multivariate statistical techniques to the data provided by the Paraná Institute for Economic and Social Development (IPARDES) Statistical 2013 Paraná State Yearbook, in order to obtain information about the cities of the state to facilitate the application mechanisms and decision-making for government planning, producing and promoting investment allocation, minimizing distortions among municipalities. The results with the application of statistical methods were prepared by Excel and MATLAB software. The methodology starts with the selection of the original variables. We studied 62 variables among the ones in the directory and since there were variables with missing observations, two criteria were used. The first, rules out the variable if there are many missing observations and the second calculates, according to the number of inhabitants of the municipalities, the arithmetic mean of the values given to complete the data. As a result, 58 original variables remain, and data matrix ended up being composed of 399 lines, which represents the observations relating to municipal districts and 58 columns corresponding to the variables. It was found that the matrix study has no standardized data and because of that, the Bartlett sphericity test was not applied. Through KMO test it was confirmed that the factor analysis model could be applied to the data matrix. Thus, the results obtained through factor analysis in conjunction with the principal components analysis, determined three synthetic factors, and the most correlated variables, which contains information about the economy, infrastructure, education, human indicator, social and demographic. With the final weighted factor scores it was possible to trace the profile of each city, allowing to establish which had high or low development potential for each factor extracted. Through Varimax rotation, it was determined that three factors are responsible for slightly over 72% of the system's explanation. Through the final factor scores, the calculated synthetic indicator for each municipality was calculated, and finally the ranking, in descending order of values in relation to the development potential regarding the factors studied.

**Key-words:** Multivariate analysis, factor analysis, principal component analysis, factor scores, municipal districts

## LISTA DE FIGURAS

|          |   |    |
|----------|---|----|
| FIGURA 1 | – O BRASIL E O ESTADO DO PARANÁ .....                 | 18 |
| FIGURA 2 | – O ESTADO DO PARANÁ. ....                            | 19 |
| FIGURA 3 | – COMPOSIÇÃO DO VALOR ADICIONADO - 2013 .....         | 23 |
| FIGURA 4 | – AVALIAÇÃO DA NORMALIDADE .....                      | 51 |
| FIGURA 5 | – FLUXOGRAMA .....                                    | 52 |
| FIGURA 6 | – GRÁFICO DOS ESCORES FATORIAIS - FATORES 1 e 2 ..... | 55 |
| FIGURA 7 | – GRÁFICO DOS ESCORES FATORIAIS - FATORES 1 e 3 ..... | 55 |

## LISTA DE SIGLAS

|         |   |
|---------|---|
| IPARDES | Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econômico e Social      |
| IBGE    | Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística                 |
| PBF     | Programa Bolsa Família  |
| ACP     | Análise de Componentes principais                               |
| ARM     | Análise de Regressão Múltipla                                   |
| AA      | Análise de Agupamento   |
| CDI     | Inventário de Depressão Infantil                                |
| BR      | Brasil Rodovia  |
| PNUD    | Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento               |
| PIB     | Produto Interno Bruto   |
| VA      | Valor Adicionado  |
| AF      | Análise Fatorial  |
| KMO     | Kaiser-Meyer-Olkin  |
| MSA     | Medida de adequabilidade da amostra                             |
| IDHM    | Índice de Desenvolvimento Humano Municipal                      |
| ICMS    | Imposto sobre circulação de mercadorias e prestação de serviços |

## LISTA DE TABELAS

|          |   |    |
|----------|---|----|
| TABELA 1 | – DADOS GERAIS SOBRE O ESTADO DO PARANÁ .....         | 21 |
| TABELA 2 | – MUNICÍPIOS MAIS POPULOSOS .....                     | 22 |
| TABELA 3 | – VARIÁVEIS ESTUDADAS .....                           | 48 |
| TABELA 4 | – AF - DETERMINAÇÃO DE FATORES .....                  | 53 |
| TABELA 5 | – ROTAÇÃO VARIMAX - DETERMINAÇÃO DE FATORES .....     | 53 |
| TABELA 6 | – RANQUEAMENTO, ESCORE FATORIAL E INDICADOR SINTÉTICO | 58 |

## SUMÁRIO

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>  | <b>11</b> |
| 1.1      | JUSTIFICATIVA  | 12        |
| 1.2      | OBJETIVOS  | 12        |
| 1.2.1    | Objetivo Geral   | 12        |
| 1.2.2    | Objetivos Específicos  | 13        |
| 1.3      | IMPORTÂNCIA DO TRABALHO  | 13        |
| 1.4      | ESTRUTURA DO TRABALHO  | 13        |
| <b>2</b> | <b>REVISÃO DE LITERATURA</b>   | <b>15</b> |
| 2.1      | TRABALHOS RELACIONADOS   | 15        |
| 2.2      | A SOCIEDADE  | 17        |
| 2.3      | O ESTADO DO PARANÁ   | 18        |
| 2.3.1    | O estado do Paraná em números  | 21        |
| 2.4      | DEFINIÇÕES PRELIMINARES E NOTAÇÕES   | 24        |
| 2.4.1    | Objetos  | 24        |
| 2.4.2    | Variáveis  | 24        |
| 2.4.3    | Matriz e vetor   | 25        |
| 2.4.4    | Esperança de um vetor aleatório  | 26        |
| 2.4.5    | Matriz de covariância de um vetor aleatório  | 27        |
| 2.4.6    | Matriz de correlação de um vetor aleatório   | 28        |
| 2.4.7    | Vetor de médias, matriz de covariância e matriz de correlação de um vetor aleatório amostral | 29        |
| 2.5      | ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS  | 31        |
| 2.6      | ANÁLISE FATORIAL   | 36        |
| 2.6.1    | Teste de Esfericidade de Bartlett  | 42        |
| 2.6.2    | Medida de Adequabilidade da Amostra de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO)                              | 43        |
| 2.6.3    | Rotação dos fatores  | 44        |
| <b>3</b> | <b>MATERIAL E MÉTODOS</b>  | <b>47</b> |
| 3.1      | DESCRIÇÃO DOS DADOS  | 47        |
| 3.2      | ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DOS DADOS   | 49        |
| <b>4</b> | <b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>  | <b>53</b> |
| <b>5</b> | <b>CONCLUSÕES</b>  | <b>68</b> |
|          | REFERÊNCIAS  | 70        |
|          | Apêndice A – CÓDIGO - ANÁLISE FATORIAL   | 73        |
|          | Apêndice B – TESTE DE ESFERICIDADE DE BARTLETT E KMO   | 95        |
|          | Anexo A – NÚMEROS E NOMES DOS MUNICÍPIOS PARANAENSES   | 97        |
|          | Anexo B – CÓDIGO - A NORMALIDADE DE UMA DISTRIBUIÇÃO   | 101       |
|          | Anexo C – QUADROS COM AS 62 VARIÁVEIS SELECIONADAS   | 102       |

## 1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho é motivado pela proposta de aplicar técnicas estatísticas de análise multivariada, tais como o método das componentes principais e a análise fatorial, com a finalidade de reduzir o número de variáveis em estudo e verificar quais dessas componentes originais explicam a maior variabilidade total, e assim extrair os indicadores de maior poder de explicação sobre o problema. Através dos resultados, é possível obter informações que podem facilitar a aplicação de mecanismos e tomada de decisão para o planejamento governamental, gerando promoção e alocação de investimentos nas cidades, a fim de minimizar as distorções entre os municípios carentes e não-carentes do estado do Paraná.

Segundo Amaral (2006), a aglomeração de variáveis na análise de dados é, muitas vezes, imprescindível em algumas áreas da pesquisa. A correlação entre as variáveis tomadas em uma mesma amostra ocorre naturalmente. Em geral, as diferenças existentes entre os grupos não são dependentes de apenas uma variável e sim de um conjunto delas. Existem situações em que, quando analisadas separadamente, não são detectadas diferenças significativas entre os grupos para as variáveis em estudo. No entanto, quando a análise é feita de forma global, isto é, multivariada, as diferenças ficam evidenciadas e são detectadas pelos testes estatísticos. Isso pode ocorrer tanto pelo acúmulo de diferenças das variáveis individuais como por diferenças existentes entre combinações lineares dessas variáveis.

A proposta desta dissertação é analisar as características dos municípios paranaenses, através das informações fornecidas pelo Anuário Estatístico do Paraná de 2013, o qual contém informações de dados estatísticos sobre a realidade estadual, permitindo conhecer e analisar o comportamento

socioeconômico e ambiental dos 399 municípios. Esse Anuário traz informações das pesquisas realizadas pelo Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econômico e Social (IPARDES) e pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

## 1.1 JUSTIFICATIVA

As análises que simplificam as informações que advêm das relações entre as variáveis do conjunto de dados, referentes aos 399 municípios do estado, vêm a ser úteis para entender a relação entre essas variáveis e ainda permitir identificar quais desses municípios são mais carentes e também aqueles com maior potencial de desenvolvimento.

A análise estatística univariada, por melhor explorada que seja, pode não ser o suficiente, diante da necessidade do pesquisador que busca informações sobre os fenômenos que interagem no processo em estudo. Logo, há a necessidade da aplicação das técnicas da estatística multivariada, visto que a mesma estuda a relação (ou parte sistemática) que há entre todas as variáveis simultaneamente, e ainda obtém informações sobre o todo de maneira sumarizada (MINGOTI, 2005).

Para problemas envolvendo apenas dois conjuntos de medidas, os dados são referidos como bivariados. Para estudarmos um conjunto de observações através da análise multivariada, é necessário que todas as variáveis sejam aleatórias e correlacionadas, de tal modo que seus diferentes efeitos não sejam significativamente interpretados separadamente.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 OBJETIVO GERAL

Criar indicadores sintéticos para os 399 municípios paranaenses com base nas variáveis selecionadas do Anuário Estatístico do Estado do Paraná 2013, as quais trazem informações sobre a economia, infraestrutura,

características demográficas, sociais e educacionais, por meio de técnicas estatísticas multivariadas, como a análise de componentes principais e a análise fatorial.

### 1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Determinar os fatores que explicam as potencialidades e carências dos municípios paranaenses em relação aos dados analisados;
- identificar variáveis não observáveis que representam os diferentes conjuntos de dados referentes ao Anuário Estatístico do Estado do Paraná 2013 e o quanto estas variáveis explicam das variáveis originais correspondentes ao conjunto de dados;
- obter, por meio dos escores fatoriais finais ponderados, os municípios com maior potencial de desenvolvimento e identificar aqueles que estão em situação desfavorável em relação aos fatores determinados por meio da análise fatorial;
- ranquear os municípios de acordo com os indicadores obtidos.

### 1.3 IMPORTÂNCIA DO TRABALHO

Este trabalho visa determinar a relação entre as variáveis originais que descrevem as reais condições dos municípios paranaenses. Utilizando técnicas da estatística multivariada para o propósito acima, consegue-se resultados que podem vir a ajudar em planejamentos e informações que facilitam a aplicação de mecanismos e tomada de decisão para o planejamento governamental, gerando promoção e alocação de investimentos nos municípios.

### 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Além da introdução, este trabalho contém no primeiro capítulo a justificativa, o objetivo e a importância desse estudo.



O Capítulo 2 inicia com as referências de trabalhos utilizados para embasar este estudo. Aborda um breve resumo sobre as características do estado do Paraná e seus 399 municípios. Traz algumas definições, tais como, objetos, variáveis, matriz e vetor, esperança, covariância e correlação de um vetor aleatório. Por fim, aborda conceitos sobre o método de componentes principais, a análise fatorial, o teste de esfericidade de Bartlett, a medida de adequabilidade da amostra de KMO e o uso da rotação Varimax.

É possível encontrar as informações referentes à matriz de dados utilizada nesta pesquisa, bem como sua organização, tratamento e a metodologia desenvolvida, descritos no Capítulo 3.

No Capítulo 4 estão descritos os resultados e discussões sobre as informações obtidas através da aplicação da análise fatorial para a matriz de dados.

Por fim, as conclusões são apresentadas no Capítulo 5.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Em cada seção é apresentada a revisão de literatura utilizada para embasar este trabalho, além de uma breve descrição sobre o estado do Paraná e o conjunto de dados. São apresentadas algumas definições preliminares, o método de análise de componentes principais e da análise de fatorial.

### 2.1 TRABALHOS RELACIONADOS

Outros trabalhos que aplicam técnicas estatísticas multivariadas e serviram como exemplo para o desenvolvimento deste projeto estão listados a seguir.

Para um conjunto de dados disponível na página eletrônica do IBGE, Esquarcini (2005) aplicou inicialmente a análise fatorial para estudar os fatores resultantes e interpretá-los à respeito das carências e não-carências dos 399 municípios paranaenses. Assim, através dos escores fatoriais finais pôde perceber em quais condições os municípios apresentavam deficiências quanto à prestação de serviço na área da habitação, de geração de trabalho e renda.

No estudo de Amaral (2006) foram aplicadas técnicas estatísticas multivariadas nos dados das famílias cadastradas no Programa Bolsa Família (PBF), do Município de Tibagi, com a finalidade de elaborar um instrumento de alocação que ajudasse no controle dos cadastros das famílias desse programa.

Com o objetivo de identificar as variáveis que mais influenciam no alto custo de um plano de saúde privado, Smaka (2010) aplicou o método multivariado conhecido como Análise de Componentes Principais (ACP) e a Análise de Regressão Múltipla (ARM).

Os resultados obtidos na pesquisa de Valgas (2010) foram explorados por

técnicas multivariadas de Análise de Agrupamento (AA).

O uso da estatística multivariada também foi explorada por Grobe (2006) para analisar os resultados das análises de solos e variáveis derivadas de animais. Por meio da análise fatorial foi possível descrever a estrutura da dependência de um conjunto de variáveis através da criação de fatores que medem aspectos comuns.

No trabalho de Soares (2007) foi utilizada a análise de correlação canônica para estimar a intensidade de associação entre os grupos de caracteres agrônomicos e industriais em cana-de-açúcar de uma usina no município de Rio Claro, Alagoas.

Na pesquisa de Wathier *et al.* (2008) foi utilizado o Inventário de Depressão Infantil (CDI) como fonte de dados para detectar os sintomas de depressão em crianças e adolescentes, explorando, então, a estrutura fatorial envolvida.

Em Balbo (2010) foi aplicada a análise fatorial exploratória, com a intenção de identificar inter-relações entre um grupo de dados de acidentes na rodovia BR-277 e obter variáveis latentes que pudessem caracterizar melhor as causas de tais acidentes nessa rodovia. Seguindo a mesma estratégia, Sehaber (2013) visou encontrar variáveis latentes e canônicas que exprimissem as inter-relações entre os dados oriundos dos boletins de ocorrência da Polícia Federal Rodoviária do Paraná. Assim como Bogo (2010) fez para identificar o perfil dos acidentes no trecho da rodovia BR-116 no estado do Paraná, utilizando a análise de correlação canônica para verificar as inter-relações entre os tipos de acidentes e outras características dos acidentes nessa rodovia.

Utilizando a técnica de análise de correlação canônica, Protassio (2012) verificou as associações existentes em um grupo formado pelas características da madeira de clones de *Eucalyptus* com outro grupo formado pelas características do carvão vegetal.

## 2.2 A SOCIEDADE

Segundo Esquarcini (2005), no passado, a agricultura constituía a base da sociedade, sendo que o homem movia a mesma através da sua força, da energia dos animais, sol, vento e água. Mais tarde, veio a sociedade industrial e esta passou a retirar sua energia do carvão, do gás, do petróleo e outros combustíveis fósseis.

Para Drucker (1989), a sociedade industrial gerou o que é denominado de "visão bitolada". Considerada por ele a doença degenerativa dos especialistas e seu enfoque restrito e limitado. Pelo que Drucker afirma, essa visão está presente na administração pública como, por exemplo, quando especialistas somente conseguem enxergar uma parte do processo ou estão demasiadamente envolvidos com procedimentos burocráticos, descuidando daquilo que realmente é importante: o atendimento das necessidades e expectativas do cidadão.

O mundo, assim como tudo o que nos rodeia, está mudando. Atualmente, tudo acontece mais rapidamente e o que ocorreria em anos, hoje ocorre em apenas alguns minutos, pois estamos inseridos em uma sociedade tecnológica. Nesse sentido, a frase do filósofo Heráclito é oportuna: "Não podemos banhar-nos duas vezes no mesmo rio, porque o rio não será mais o mesmo"(VERGARA, 2003).

A reforma do Estado com base na racionalidade gerencial do setor privado é resumida por Osborne e Gaebler (1995) nos seguintes termos: estabelecer competição entre os que prestam o serviço público, transferência de poder aos cidadãos, medição dos resultados, orientação para missão e objetivos, redefinição dos usuários como clientes, prevenção de problemas, investimentos na produção de recursos, descentralização, estabelecer mecanismos de mercado, formar parcerias com o setor privado e com as

organizações voluntárias.

### 2.3 O ESTADO DO PARANÁ

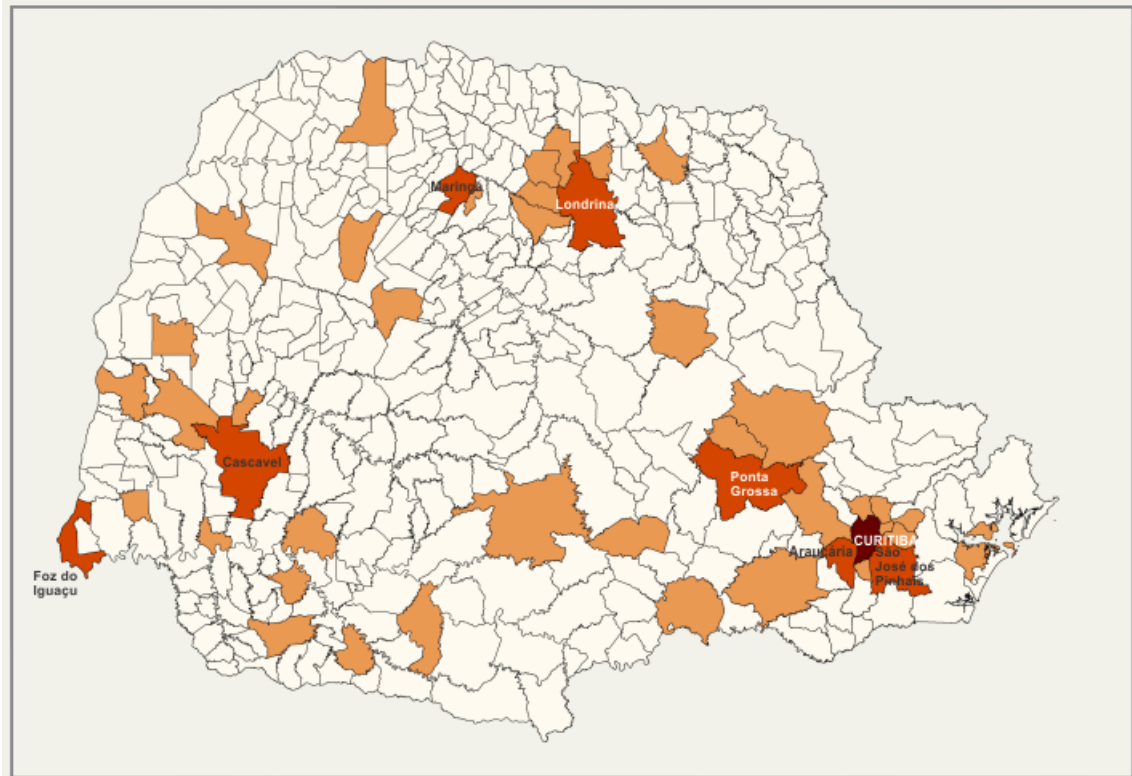
Situado na região sul do país, o Paraná é um dos 26 estados do Brasil e faz divisa com os estados de São Paulo, Santa Catarina e Mato Grosso do Sul, fronteira com a Argentina e o Paraguai e limite com o Oceano Atlântico. A Figura 1 mostra a localização do estado em relação ao país e às fronteiras internacionais.



**Figura 1:** O BRASIL E O ESTADO DO PARANÁ  
 FONTE: IPARDES (2015)

A capital paranaense, Curitiba, em conjunto com as cidades de Londrina, Maringá, Foz do Iguaçu, Ponta Grossa, Cascavel, Guarapuava, Paranaguá, São José dos Pinhais e Araucária destacam-se por sua importância econômica. Na

Figura 2 é possível observar a localização desses municípios.



**Figura 2:** O ESTADO DO PARANÁ.  
 FONTE: IPARDES (2015)

A economia se baseia no agronegócio, na agropecuária, em indústrias de transformação e no setor de serviços.

Descobriu-se na região do Paraná, no século XVII, uma área aurífera, anterior ao descobrimento das Minas Gerais, que provocou o povoamento tanto no litoral quanto no interior. Com o descobrimento das Minas Gerais, o ouro de Paranaguá perdeu a importância. Assim, as famílias ricas que possuíam grandes extensões de terra, passaram a se dedicar à criação de gado, que logo abasteceria a população das Minas Gerais. No entanto, apenas no século XIX, as terras do centro e do sul do Paraná foram definitivamente ocupadas pelos fazendeiros.

A erva-mate, no final do século XIX, dominou a economia e criou uma nova fonte de riqueza para os líderes que partilhavam o poder. Com o aparecimento das estradas de ferro, ligando a região da araucária aos portos e a

São Paulo, ocorreu novo período de crescimento.

O governo, a partir de 1850, empreendeu um amplo programa de colonização, especialmente de alemães, italianos, poloneses e ucranianos, que contribuíram para a expansão da economia paranaense e para a renovação de sua estrutura social.

A seguir, é apresentada uma análise dos principais elementos que compõe o arranjo paisagístico da região, segundo Freitas (2005).

- **Relevo:** constituído, basicamente, de superfície plana, dispostas em grande altitude com planaltos escarpados. Ao longo da área paranaense é possível identificar cinco unidades de relevo - Baixada litorânea, Serra do Mar, Planalto de Curitiba e Planalto de Guarapuava.
- **Clima:** predominante subtropical. O estado apresenta clima com diferenças marcantes, dependendo da região – de tropical úmido ao norte a temperado úmido ao sul. A capital é a cidade mais fria do país, pois apresenta temperatura média anual relativamente baixa. Os índices pluviométricos no Estado atingem 2.000 mm anuais e as chuvas são bem distribuídas durante o ano todo. A temperatura média estadual é de 19 °C.
- **Vegetação:** a cobertura vegetal é formada por Floresta Tropical, Floresta Subtropical e Campos. A Floresta Tropical faz parte da Mata Atlântica, consiste em uma vegetação tipicamente brasileira que cobre boa parte do território, em especial a parte litorânea. A Floresta Subtropical é composta por vegetação latifoliadas, coníferas, cedro e erva-mate, denominada de Florestas das Araucárias. Os campos se estabelecem de forma dispersa no território, existem dois tipos, Campos Limpos (9% do território) e Campos Cerrado (cerca de 1% da área estadual).
- **Hidrografia:** os rios paranaenses escoam suas águas diretamente no mar,

outros vão a sentido oeste e são afluentes do rio Paraná. O estado possui em seu território cinco bacias hidrográficas - Bacia do rio Paraná, Bacia do rio Paranapanema, Bacia do rio Aguaçu, Bacia do rio Ribeira do Iguape e a Bacia do Litoral Paranaense.

A população é formada por descendentes de várias etnias: poloneses, italianos, alemães, ucranianos, holandeses, espanhóis, japoneses e portugueses, e por imigrantes procedentes, em sua maioria, dos estados do Rio Grande do Sul, Santa Catarina, São Paulo e Minas Gerais.

### 2.3.1 O ESTADO DO PARANÁ EM NÚMEROS

Observa-se na tabela a seguir, algumas informações gerais sobre o Estado fornecidas pelo IPARDES em 2015.

**Tabela 1: DADOS GERAIS SOBRE O ESTADO DO PARANÁ**

| INFORMAÇÕES GERAIS                      | DADOS                       |
|---|-----------------------------|
| Capital                                 | Curitiba                    |
| Área                                    | 199.880 km <sup>2</sup>     |
| Densidade demográfica (2015)            | 55,85 hab × km <sup>2</sup> |
| Número de municípios                    | 399                         |
| População (2010)                        | 10.444.526                  |
| População do Brasil (2010)              | 190.755.799                 |
| Participação na população do Brasil (%) | 5,5                         |
| População urbana (2010) (%)             | 85,3                        |
| IDH (2010)                              | 0,749                       |

FONTE: IPARDES, IBGE, PNUD

Em relação a economia, o Paraná detém a quarta maior do País. O Estado responde atualmente por 6,3% do PIB nacional, registrando uma renda per capita de R\$ 30,3 mil em 2013, acima do valor de R\$ 26,4 mil referente ao Brasil.

Os levantamentos realizados pelo IBGE e IPARDES, concluem que as economias dos municípios da Região Metropolitana de Curitiba estão entre as maiores do Estado. Em razão do dinamismo da indústria e dos serviços, Curitiba



e São José dos Pinhais são os municípios mais representativos no PIB do Paraná. No interior do Estado, Londrina, Maringá e Ponta Grossa têm forte presença da agroindústria e dos serviços e, em Foz do Iguaçu, sobressaem as atividades ligadas ao turismo e à produção de energia elétrica. No litoral, Paranaguá se destaca pelas atividades ligadas ao Porto.

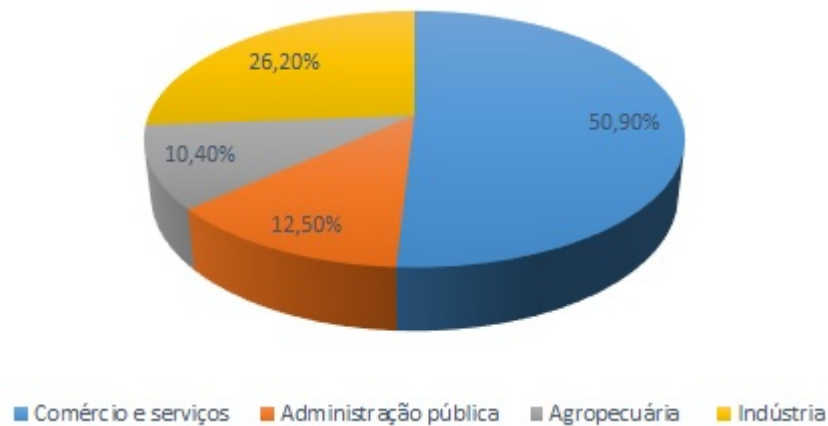
A relação dos nomes dos 399 municípios está disponível no ANEXO A. Na Tabela 2 estão indicados aqueles com maior número de habitantes, de acordo com o Censo demográfico de 2010 realizado pelo IBGE.

**Tabela 2: MUNICÍPIOS MAIS POPULOSOS**

| MUNICÍPIO            | NÚMERO DE HABITANTES |
|----------------------|----------------------|
| Curitiba             | 1.751.907            |
| Londrina             | 506.701              |
| Maringá              | 357.077              |
| Ponta Grossa         | 311.611              |
| Cascavel             | 286.205              |
| São José dos Pinhais | 264.210              |
| Foz do Iguaçu        | 256.088              |
| Colombo              | 212.967              |
| Guarapuava           | 167.328              |
| Paranaguá            | 140.469              |
| Apucarana            | 120.919              |
| Toledo               | 119.313              |
| Araucária            | 119.123              |
| Pinhais              | 117.008              |
| Campo Largo          | 112.377              |

FONTE: IBGE - Censo Demográfico 2010

Sabendo que o valor adicionado (VA) informa, de forma sintética, os valores correspondentes à formação da riqueza gerada pelo Estado em determinado período e sua respectiva distribuição, observa-se na Figura 3 a composição do valor adicionado de 2013, de acordo com os dados do IBGE e IPARDES.



**Figura 3:** COMPOSIÇÃO DO VALOR ADICIONADO - 2013

FONTE: IBGE, IPARDES (2015)

Na agropecuária, o Paraná é o maior produtor nacional de grãos, apresentando uma pauta agrícola diversificada. A utilização de avançadas técnicas agronômicas o coloca em destaque em termos de produtividade. A cana-de-açúcar, o milho, a soja, a mandioca, o trigo e a batata-inglesa sobressaem na estrutura produtiva da agricultura local, observando-se, em paralelo, forte avanço de outras atividades, como a produção de frutas. Na pecuária, destaca-se a avicultura, com 29,2% do total de abates do país. Nos segmentos de bovinos e suínos, a participação atinge 4,2% e 19,1%, respectivamente.

No setor industrial, o valor atingiu R\$ 78 bilhões em 2013. Na estrutura da indústria de transformação, predominam os segmentos de alimentos, veículos automotores e refino de petróleo.

Em serviços, o valor adicionado desse setor totalizou R\$ 146.070 bilhões em 2013, com grande participação dos ramos de comércio e atividades imobiliárias.

Em relação ao Comércio Exterior, em 2015, o Paraná respondeu por 7,8% dos US\$ 191 bilhões das exportações nacionais, ficando na quinta posição entre os estados brasileiros. Nas importações, os maiores fornecedores de bens ao

Paraná foram China, Argentina, Estados Unidos e Alemanha, responsáveis por US\$ 5,4 bilhões em negócios com o estado.

## 2.4 DEFINIÇÕES PRELIMINARES E NOTAÇÕES

### 2.4.1 OBJETOS

Chamam-se de objetos as entidades das quais são tomadas medidas. Nesse estudo, cada um dos 399 municípios paranaenses representam um objeto do qual foram analisadas várias medidas, como infraestrutura, características demográficas e sociais da população, economia, indicadores sociais e demográficos, entre outros.

### 2.4.2 VARIÁVEIS

Um conjunto de dados é composto por variáveis e observações. Chamam-se de variáveis os aspectos dos objetos que são medidos. Segundo Morettin e Bussab (2010), as variáveis podem ser classificadas em duas categorias: qualitativas ou quantitativas.

Para Hair (2009), dentre as variáveis qualitativas, existe um tipo de quantificação muito útil, a chamada variável dicotômica, a qual admite apenas duas realizações, por exemplo: sucesso e fracasso, sim e não, 0 e 1, dentre outras. As variáveis qualitativas são definidas por várias categorias, isto é, representam uma classificação dos indivíduos. Enquanto as variáveis quantitativas correspondem às características que podem ser medidas em uma escala quantitativa, ou seja, apresentam valores numéricos que fazem sentido.

As variáveis quantitativas são classificadas em contínuas ou discretas. São chamadas de discretas quando seus valores possíveis formam um conjunto finito ou infinito enumerável de números, e que resultam, frequentemente, de uma contagem. São contínuas se os possíveis valores pertencem a um intervalo de números reais e resultam de uma mensuração.

Nesse estudo foram selecionadas 62 variáveis. Todas classificadas em quantitativas discretas ou contínuas. Por exemplo, o número de estabelecimentos de saúde (consultar Tabela 3, variável  $V_{10}$ ) representa uma variável quantitativa discreta, pois todas as observações referentes aos 399 municípios paranaenses, correspondem à uma contagem. No entanto, a quantia gasta em despesas municipais (consultar Tabela 3, variável  $V_{52}$ ) representa uma variável quantitativa contínua, pois cada observação corresponde a um valor pertencente a um intervalo real.

### 2.4.3 MATRIZ E VETOR

Os dados multivariados podem ser organizados em um arranjo estrutural denominado de matriz. A matriz  $X$  de ordem  $n \times p$  é dada

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \quad (1)$$

ou também

$$X' = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \quad (2)$$

onde  $n$  se refere ao o número de objetos da amostra e  $p$  ao número de variáveis. Portanto, cada linha representa uma lista de todas as características medidas de um objeto, enquanto cada coluna equivale a uma característica medida de todos os objetos. Cada elemento  $x_{ij}$  corresponde a uma observação do objeto  $i$  em relação a variável  $j$  da amostra.

O vetor é uma matriz com apenas uma linha ou uma coluna. Por exemplo, um vetor coluna que apresenta  $n$  elementos é dado por

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

Enquanto um vetor linha de  $n$  elementos é denotado por  $\underline{x}'$  e escrito da forma

$$\underline{x}' = \left( x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \right). \quad (4)$$

Sendo assim, a matriz  $X$  de ordem  $n \times p$  pode ser apresentada na forma

$$\underline{X}' = \left( \underline{X}_1 \quad \underline{X}_2 \quad \dots \quad \underline{X}_p \right) \quad (5)$$

onde cada elemento  $\underline{X}_j$  representa um vetor coluna de ordem  $n \times 1$ .

É possível encontrar mais detalhes sobre a álgebra matricial e vetorial em Marques (2015), Chaves Neto (2011), Johnson e Wichern (2002), Rencher (2002) e Timm (2002).

#### 2.4.4 ESPERANÇA DE UM VETOR ALEATÓRIO

Considere um espaço amostral  $\Omega$ , uma função  $\varphi$  que relaciona cada evento aleatório  $\omega \in \Omega$  a um número real,  $\varphi(\omega)$ , é chamada de variável aleatória, isto é,  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Uma variável aleatória é chamada de discreta quando o seu contradomínio é um conjunto finito ou infinito enumerável; ou contínua quando o seu contradomínio é um conjunto infinito.

Um vetor aleatório  $\underline{X}$  de ordem  $p \times 1$  é um vetor cujos elementos são

variáveis aleatórias,  $X_i$ , sendo  $i = 1, 2, 3, \dots, p$ .

As médias, as variâncias e os desvios-padrão são dados, respectivamente, por  $\mu_i = E(X_i)$ ,  $\sigma_i^2 = E(X_i - \mu_i)^2$  e  $\sigma_i$ . A esperança desse vetor aleatório é igual a

$$E(\underline{X}) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix}. \quad (6)$$

#### 2.4.5 MATRIZ DE COVARIÂNCIA DE UM VETOR ALEATÓRIO

Para um vetor aleatório  $\underline{X}$  de ordem  $p \times 1$  a matriz de covariância  $\Sigma$  associada é uma matriz simétrica de ordem  $p$  definida por  $\Sigma = V(\underline{X}) = E[\underline{X} - E(\underline{X})]^2 = E[\underline{X} - \underline{\mu}]^2 = E[(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{X} - \underline{\mu})']$ . Assim,

$$\begin{aligned} \Sigma &= E[(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{X} - \underline{\mu})'] \\ &= E \left[ \begin{pmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ X_p - \mu_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 - \mu_1 & X_2 - \mu_2 & \dots & X_p - \mu_p \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \begin{pmatrix} (X_1 - \mu_1)^2 & (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) & \dots & (X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p) \\ (X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) & (X_2 - \mu_2)^2 & \dots & (X_2 - \mu_2)(X_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1) & (X_p - \mu_p)(X_2 - \mu_2) & \dots & (X_p - \mu_p)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E(X_1 - \mu_1)^2 & E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] & \dots & E[(X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p)] \\ E[(X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1)] & E(X_2 - \mu_2)^2 & \dots & E[(X_2 - \mu_2)(X_p - \mu_p)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1)] & E[(X_p - \mu_p)(X_2 - \mu_2)] & \dots & E(X_p - \mu_p)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_p^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7}$$

sendo  $\sigma_{ij}$  a covariância entre as variáveis  $X_i$  e  $X_j$ , cujo valor pertence ao intervalo  $] - \infty, +\infty[$ . Dificilmente a covariância fornece informações sobre o grau de associação entre as variáveis, pois a unidade de medida não é padronizada, dificultando a interpretação dos resultados.

Dada a matriz de covariância  $\Sigma$  do vetor aleatório  $\underline{X}$ , a matriz  $V^{1/2}$  que representa seu desvio-padrão é

$$V^{1/2} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_p \end{pmatrix} \tag{8}$$

#### 2.4.6 MATRIZ DE CORRELAÇÃO DE UM VETOR ALEATÓRIO

A matriz de correlação facilita a interpretação da variabilidade entre as variáveis, pois é obtida de variáveis padronizadas, eliminando assim o efeito de escalas diferentes para as várias variáveis. A matriz de correlação  $\rho$  associada

ao vetor aleatório  $\underline{X}$  de ordem  $p \times 1$  é uma matriz simétrica de ordem  $p$  igual a

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \dots & \rho_{pp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

sendo  $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$  o coeficiente de correlação entre as variáveis  $X_i$  e  $X_j$ , cujo valor pertence ao intervalo  $] -1, +1[$ . Coeficientes de correlação com valores muito próximos de  $-1$  ou de  $+1$  implicam que as variáveis são fortemente associadas. Caso o valor do coeficiente de correlação seja nulo, as variáveis não apresentam associação linear, ou seja, são variáveis linearmente independentes.

Dado um vetor aleatório  $\underline{X}$  de ordem  $p \times 1$  é possível verificar que  $\Sigma = V^{1/2} \rho V^{1/2}$  e, conseqüentemente,  $\rho = V^{-1/2} \Sigma V^{-1/2}$ , onde  $V^{-1/2}$  representa a inversa da matriz desvio-padrão  $V^{1/2}$ .

#### 2.4.7 VETOR DE MÉDIAS, MATRIZ DE COVARIÂNCIA E MATRIZ DE CORRELAÇÃO DE UM VETOR ALEATÓRIO AMOSTRAL

Neste estudo, será necessário o cálculo do vetor de médias amostral, da matriz de covariância amostral e da matriz de correlação amostral associados à matriz de dados  $X$  dada na equação (1).

Trabalhar com um grande conjunto de dados oferece um sério problema para qualquer tentativa de extrair visualmente informações pertinentes. Muito da informação contida na matriz de dados pode ser acessada (avaliada) pelo cálculo de certos números sumários, conhecidos como estatísticas descritivas. Muitas vezes por não ser possível trabalhar com toda população, usa-se parte da mesma, o que se denomina amostra, e tais estatísticas descritivas funcionam como estimadores dos parâmetros (JOHNSON; WICHERN, 2002).

Para essa matriz de dados temos o vetor médio amostral  $\overline{X}$ , o qual



representa o centro de gravidade dos pontos amostrais. Ele estima o vetor médio populacional  $\underline{\mu}$ , onde

$$\underline{\bar{X}}' = \left( \underline{\bar{X}}_1 \quad \dots \quad \underline{\bar{X}}_p \right) \quad (10)$$

sendo  $\underline{\bar{X}}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ik}$  a média do vetor aleatório  $\underline{X}_k$ , para  $k = 1, 2, 3, \dots, p$  que representa o centro de gravidade da amostra da variável  $\underline{X}_k$ .

A matriz de covariância amostral, estimador da covariância amostral  $\Sigma$  é da forma

$$S = \begin{pmatrix} s_1^2 & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_2^2 & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \dots & s_p^2 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

em que,

$$s_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ki} - \underline{\bar{X}}_i)(x_{kj} - \underline{\bar{X}}_j), \forall i \neq j \quad (12)$$

ou

$$s_{ii} = s_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ki} - \underline{\bar{X}}_i)^2 \quad (13)$$

Por fim, a matriz de correlação amostral  $R$  que estima a matriz de correlação populacional  $\rho$  é expressa por

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \dots & 1 \end{pmatrix} = D^{-1/2} S D^{-1/2} \quad (14)$$

em que,

$$r_{ij} = \frac{s_{ij}}{s_i s_j}, \forall i \neq j \quad (15)$$

ou

$$r_{ii} = \frac{s_{ii}}{s_i s_i} = \frac{s_i^2}{s_i s_i} = 1 \quad (16)$$

De forma análoga,  $S = D^{1/2} R D^{1/2}$ , em que  $D^{1/2}$  é a matriz desvio-padrão que estima a matriz desvio-padrão  $V^{1/2}$ .

## 2.5 ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS

A análise de componentes principais é um método estatístico de análise multivariada introduzido inicialmente por Karl Pearson, em 1901, e tratado mais formalmente por Hotelling, em 1933, e por Rao, em 1964. Esse método consiste em explicar a estrutura da matriz de dados,  $X$ , de ordem  $n \times p$  (sendo  $p$  o número de v.a. e  $n$  o número de observações) por meio de combinações lineares não correlacionadas das  $p$  variáveis originais. Mesmo que haja  $p$  variáveis para reproduzir a variabilidade total do sistema, grande parte dessa variabilidade pode ser explicada por um número  $k$  de componentes principais, sendo  $k \leq p$ .

Assim, há tanto informação explicada pelas  $k$  componentes quanto pelas  $p$  variáveis originais. Portanto, essas  $k$  componentes principais podem substituir as  $p$  variáveis e o conjunto de dados que antes era de ordem  $n \times p$  passa a ser reduzido para  $n \times k$ .

Com esse método é possível reduzir o conjunto de dados a ser estudado, facilitando sua interpretação por meio da obtenção de variáveis aleatórias não correlacionadas.

As componentes principais, identificadas por  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_p$ , são combinações lineares das  $p$  variáveis aleatórias  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_p$ . Segundo Johnson e Wichern (2002), essas combinações lineares representam, geometricamente, a seleção de um novo sistema de coordenadas oriundo da rotação do sistema original. Dessa forma, os novos eixos representam as direções com máxima variabilidade e oferecem uma descrição mais simples e

parcimoniosa da estrutura da covariância. A obtenção das componentes principais,  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_p$ , é realizada por meio da diagonalização de matrizes simétricas semipositivas-definidas. Seu desenvolvimento não requer pressuposições de normalidade multivariada, mas possuem interpretações úteis em termos da constante elipsóide de densidade, se a normalidade existir.

Observa-se a seguir alguns resultados sobre o método de componente principais baseados em Mingoti (2005), Johnson e Wichern (2002), Jolliffe (2002) e Rencher (2002).

Considere o vetor aleatório  $\underline{X}' = \left( \underline{X}_1 \quad \underline{X}_2 \quad \dots \quad \underline{X}_p \right)$ , em que cada  $\underline{X}_i$ , de ordem  $n \times 1$ , representa um vetor de observação de  $\underline{X}$ , todos independentes. Para  $\underline{X}$  o vetor de médias e a matriz de covariância são, respectivamente,  $\underline{\mu} = E(\underline{X})$  e  $\Sigma = V(\underline{X})$ .

Tem-se em Ferreira (2011) alguns métodos numéricos abordados para a obtenção de autovalores e autovetores.

Os pares de autovalores e autovetores de  $\Sigma$  são  $(\lambda_1, \underline{e}_1), (\lambda_2, \underline{e}_2), (\lambda_3, \underline{e}_3), \dots, (\lambda_p, \underline{e}_p)$ , com  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$ . Assim, as componentes principais são dadas por

$$Y_1 = \underline{e}'_1 \underline{X} = e_{11}X_1 + e_{21}X_2 + e_{31}X_3 + \dots + e_{p1}X_p$$

$$Y_2 = \underline{e}'_2 \underline{X} = e_{12}X_1 + e_{22}X_2 + e_{32}X_3 + \dots + e_{p2}X_p$$

$$Y_3 = \underline{e}'_3 \underline{X} = e_{13}X_1 + e_{23}X_2 + e_{33}X_3 + \dots + e_{p3}X_p$$

$$\vdots$$

$$Y_p = \underline{e}'_p \underline{X} = e_{1p}X_1 + e_{2p}X_2 + e_{3p}X_3 + \dots + e_{pp}X_p$$

Ou na forma matricial

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} & \dots & e_{p1} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} & \dots & e_{p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{1p} & e_{2p} & e_{3p} & \dots & e_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} = C_{(p \times p)} \cdot \underline{X}_{(p \times 1)} \quad (17)$$

Então, tem-se os resultados:

1. A variância de cada componente principal  $Y_i$  é  $V(Y_i) = V(\underline{e}'_i \underline{X}) = \underline{e}'_i V(\underline{X}) \underline{e}_i = \underline{e}'_i \Sigma \underline{e}_i = \lambda_i$ .
2. As componentes principais  $Y_i$  e  $Y_j$  apresentam covariância dada por  $cov(Y_i, Y_j) = \underline{e}'_i \Sigma \underline{e}_j = 0, \forall i \neq j$ .
3. E a covariância do vetor de componentes principais  $\underline{Y}$  é  $cov(\underline{Y}) = V(C \cdot \underline{X}) = C \Sigma C'$ .
4. A soma dos quadrados das variâncias  $s_i$  de cada observação  $X_i$  é igual a soma dos autovalores  $\lambda_i$ , referentes a matriz  $\Sigma$ , isto é

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots + \sigma_p^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_p$$

E segue que  $\sum_{i=1}^p V(X_i) = \sum_{i=1}^p V(Y_i)$ .

Desse modo,  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots + \sigma_p^2$  representa o total da variância da população, assim como  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_p$ .

5. A variância total populacional é igual a soma das variâncias das componentes principais. Assim, a proporção da variância total explicada (devido a) pela  $k$ -ésima componente principal é

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_p}, \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots, p.$$

6. Para  $k \leq p$ , se a maior parte da variância populacional puder ser atribuída a uma, duas ou  $k$  componentes principais, então estas  $k$  componentes podem substituir as  $p$  variáveis originais sem muita perda de informação.

As componentes principais  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_p$  são combinações lineares não-correlacionadas, cujas variâncias são tão grandes quanto possível. Desse modo, a primeira componente principal,  $Y_1$ , é a combinação linear que maximiza  $V(\underline{e}'_1 \underline{X})$  sujeito a restrição  $\underline{e}'_1 \underline{e}_1 = 1$  (autovetor padronizado). Assim, a primeira componente principal explica o máximo de variância possível e não é correlacionada com as demais componentes principais e a variância que a componente  $Y_1$  não conseguir explicar acaba sendo explicada pelas demais componentes principais, devido a decomposição de valores singulares. Esse resultado é garantido pela decomposição espectral.

A decomposição espectral representa um importante método de fatoração de  $\Sigma$ . Considere a matriz de autovetores  $P = \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 & \dots & \underline{e}_p \end{pmatrix}$  e a matriz de autovalores  $D^{1/2} = \text{diag}(\lambda_i)$  referentes a matriz de covariância  $\Sigma$ , com  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_p$ , assim:

$$\Sigma = PD^{1/2}P' = PD^{1/2}D^{1/2}P' = LL' \quad (18)$$

em que  $L = PD^{1/2}$  é a matriz  $p \times p$  de cargas fatoriais.

A segunda componente principal,  $Y_2$ , é a combinação linear que maximiza  $V(\underline{e}'_2 \underline{X})$  sujeito a restrição  $\underline{e}'_2 \underline{e}_2 = 1$  (autovetor padronizado), e assim sucessivamente.

A correlação entre a componente  $Y_j$  e a variável  $X_i$  é dada por

$$\rho(Y_j, X_i) = \frac{e_{ij}\sqrt{\lambda_j}}{\sigma_i}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, p \text{ e } j = 1, 2, 3, \dots, p. \quad (19)$$

Se o vetor aleatório  $\underline{X}$  estiver padronizado, temos:

$$\underline{Z}' = \left( Z_1 \ Z_2 \ \dots \ Z_p \right) = \left( \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \ \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} \ \dots \ \frac{X_p - \mu_p}{\sigma_p} \right) \quad (20)$$

Com  $E(\underline{Z}) = 0$  e  $cov(\underline{Z}) = V^{-1/2}\Sigma V^{-1/2} = \rho$ , em que  $V^{-1/2} = diag(1/\sigma_i)$ . Todas as propriedades consideradas para a matriz  $\Sigma$  também são válidas para a matriz de correlação  $\rho$  e que a particularidade do uso de cada uma está nas medidas dos dados e ao padronizar todas as variáveis de  $\underline{X}$  não existem problemas de escala, sendo que ao encontrar a matriz de covariância  $\Sigma$ , essa será equivalente à matriz de correlação  $\rho$ . Mas ainda é difícil comparar matrizes de covariâncias onde as variáveis possuem escalas e medidas diferentes, enquanto as matrizes de correlação possuem um padrão e isto facilita a interpretação dos dados. E então, para as variáveis padronizadas  $\underline{Z}' = \left( Z_1 \ Z_2 \ \dots \ Z_p \right)$ , onde  $cov(\underline{Z}) = \rho$  e os pares de autovalores e autovetores de  $\rho$  são  $(\lambda_1, \underline{e}_1), (\lambda_2, \underline{e}_2), (\lambda_3, \underline{e}_3), \dots, (\lambda_p, \underline{e}_p)$ , com  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$ , as componentes principais são dadas por

$$Y_1 = \underline{e}'_1 \underline{Z} = e_{11}Z_1 + e_{21}Z_2 + e_{31}Z_3 + \dots + e_{p1}Z_p \quad (21)$$

Então, tem-se os resultados:

1. A variância de cada componente principal  $Y_i$  é  $V(Y_i) = V(\underline{e}'_i \underline{Z}) = \underline{e}'_i V(\underline{Z}) \underline{e}_i = \underline{e}'_i \Sigma \underline{e}_i = \lambda_i$ .
2. As componentes principais  $Y_i$  e  $Y_j$  apresentam covariância dada por  $cov(Y_i, Y_j) = 0, \forall i \neq j$ .
3. A variância da população é  $tr(\rho) = p = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_p$ .
4. A correlação entre a componente  $Y_j$  e a variável padronizada  $Z_i$  é dada por

$$\rho(Y_j, Z_i) = e_{ij} \sqrt{\lambda_j}, \forall i, j = 1, 2, 3, \dots, p.$$

5. A proporção da variância total populacional explicada pela  $k$ -ésima componente principal é

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_p} = \frac{\lambda_k}{p}, \forall k = 1, 2, 3, \dots, p.$$

Na prática, os parâmetros  $\underline{\mu}$  e  $\Sigma$  são desconhecidos e devem ser estimados. Jolliffe (2002) comenta que todas as propriedades consideradas para a matriz  $\Sigma$  também são válidas para a matriz  $\rho$  e que a particularidade do uso de cada uma está nas medidas dos dados.

## 2.6 ANÁLISE FATORIAL

A análise estatística univariada, por melhor explorada que seja, pode não ser o suficiente diante da necessidade do pesquisador que busca informações sobre os fenômenos que interagem no processo em estudo, pois trabalha com apenas uma variável. Logo, há a necessidade da aplicação das técnicas da estatística multivariada, visto que a mesma estuda a relação (ou parte sistemática) que há entre todas as variáveis simultaneamente e obtém informações sobre o todo de maneira sumarizada (MINGOTI, 2005), isto é, a estatística multivariada permite o estudo de fenômenos complexos, pois realiza o tratamento de diversas variáveis simultaneamente, mesmo quando não se conhece o modelo teórico que as relaciona (JOHNSON; WICHERN, 2002).

Em 1888, os primeiros conceitos sobre a análise fatorial exploratória surgiram com Galton, assim que apresentou os métodos de regressão e coeficiente de correlação. Em 1904, Spearman propôs a atual modelagem da estrutura fatorial em estudos de testes de escores na inteligência humana. Posteriormente, esse modelo de um único fator, proposto por Spearman, foi generalizado por Thurstone, em 1931 e 1947, para contemplar múltiplos fatores.

Segundo Timm (2002), ambas as técnicas de análise de componentes

principais e análise fatorial se iniciam pela variação de um conjunto de variáveis, representadas pela matriz de covariância ou de correlação. No entanto, análise fatorial procura explicar todas as covariâncias ou correlações com poucos fatores comuns que não são observáveis ou latentes. Enquanto, a análise de componentes principais utiliza todas as componentes para representar todas as covariâncias ou correlações.

Em quase todas as áreas de aplicação, pesquisas são realizadas e várias variáveis são observadas. Essas variáveis, em geral, não são independentes e, por isso, devem ser analisadas conjuntamente. A análise multivariada é a área da Estatística que trata desse tipo de análise. Várias são as técnicas que podem ser aplicadas aos dados. Sua utilização depende do tipo de dado que se deseja analisar, e dos objetivos do estudo (VICINI, 2005).

A Análise Fatorial (AF) é uma das técnicas de estatística multivariada e foi essencial no desenvolvimento deste trabalho. Seu propósito é descrever, se possível, as relações de covariância entre muitas variáveis observáveis em termos de poucas variáveis aleatórias não-observáveis, chamadas de fatores. Basicamente, cada fator define um grupo onde as variáveis originais tenham correlação muito alta, mas que relativamente tenham baixa correlação com variáveis de grupos diferentes definidos por outros fatores. Com este estudo é possível saber quanto cada fator está associado a cada variável observável e ainda se permite a explicação da variabilidade do conjunto de dados iniciais. O objetivo é encontrar um meio de condensar a informação contida em várias variáveis originais em um conjunto menor de variáveis estatísticas (fatores) com uma perda mínima de informação (HAIR, 2009).

Conforme Marques (2015), seja  $\underline{X} \cdot \sim (\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$  um vetor aleatório com  $p$  componentes o modelo fatorial de  $\underline{X}$  é linearmente dependente sobre as variáveis aleatórias (v.a.) não observáveis (latentes)  $F_1, F_2, \dots, F_m$ , com  $m \leq p$ , chamadas de fatores comuns e  $p$  fontes de variação aditiva



$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ , chamadas de erros. O modelo de análise fatorial é dado por:

$$X_1 - \mu_1 = l_{11}F_1 + l_{12}F_2 + \dots + l_{1m}F_m + \varepsilon_1$$

$$X_2 - \mu_2 = l_{21}F_1 + l_{22}F_2 + \dots + l_{2m}F_m + \varepsilon_2$$

⋮

$$X_p - \mu_p = l_{p1}F_1 + l_{p2}F_2 + \dots + l_{pm}F_m + \varepsilon_p$$

Sendo  $\mu_i$  a média referente à v.a.  $X_i$ ,  $\forall i = 1, 2, 3, \dots, p$ ; e  $l_{ij}$  o peso ou também chamado de carregamento da v.a.  $X_i$  em relação ao fator  $F_j$ , sendo  $i = 1, 2, 3, \dots, p$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ . Cada carregamento  $l_{ij}$  indica o grau de correspondência entre a variável e o fator. A representação na forma matricial é da forma:

$$(\underline{X} - \underline{\mu})_{(p \times 1)} = \underline{L}_{(p \times m)} \cdot \underline{F}_{(m \times 1)} + \underline{\varepsilon}_{(p \times 1)} \quad (22)$$

Foram consideradas algumas suposições adicionais. Assim, assume-se que:

- $E(\underline{F}) = \underline{0}_{(m \times 1)}$
- $Cov(\underline{F}) = E(\underline{F} \underline{F}') = \underline{I}_{(m \times m)}$
- $E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0}_{(p \times 1)}$
- $Cov(\underline{\varepsilon}) = E(\underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}') = \underline{\Psi}_{(p \times p)}$ , em que

$$\underline{\Psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \psi_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \psi_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \psi_p \end{pmatrix}. \quad (23)$$

A matriz  $\Psi_{(p \times p)}$  representa a variância dos erros, ou seja,  $\psi_1 = V(\varepsilon_1), \psi_2 = V(\varepsilon_2), \dots, \psi_p = V(\varepsilon_p)$ , chamadas de variância específica. Além disso,  $\underline{F}$  e  $\underline{\varepsilon}$  são independentes, assim

$$Cov(\underline{\varepsilon}, \underline{F}) = \underline{0}_{(p \times m)}$$

Essas hipóteses e o modelo visto na Equação (21) constituem o modelo fatorial ortogonal. Da Equação (21), obtém-se a matriz de covariância do vetor  $\underline{X}$ , dada por  $\Sigma$ .

$$\begin{aligned} \Sigma &= E[(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{X} - \underline{\mu})'] \\ &= E[(L\underline{F} + \underline{\varepsilon})(\underline{F}'L' + \underline{\varepsilon}')] \\ &= E[L\underline{F}\underline{F}'L' + L\underline{F}\underline{\varepsilon}' + \underline{\varepsilon}\underline{F}'L' + \underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}'] \\ &= LE(\underline{F}\underline{F}')L' + LE(\underline{F}\underline{\varepsilon}') + E(\underline{\varepsilon}\underline{F}')L' + E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') \\ &= LIL' + \Psi \\ &= LL' + \Psi \end{aligned} \tag{24}$$

Ou também,

$$V(X_i) = l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + l_{i3}^2 + \dots + l_{im}^2 + \psi_i \tag{25}$$

$$Cov(X_i, X_k) = l_{i1}l_{k1} + l_{i2}l_{k2} + l_{i3}l_{k3} + \dots + l_{im}l_{km} \tag{26}$$

Da Equação (21), é possível determinar a covariância entre o vetor das variáveis originais,  $\underline{X}$ , e o vetor dos fatores  $\underline{F}$ .

$$\begin{aligned} Cov(\underline{X}, \underline{F}) &= E[(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{F} - E(\underline{F}))'] \\ &= E[(L\underline{F} + \underline{\varepsilon})\underline{F}'] \\ &= E[L\underline{F}\underline{F}' + \underline{\varepsilon}\underline{F}'] \\ &= LE(\underline{F}\underline{F}') + E(\underline{\varepsilon}\underline{F}') \\ &= LI + 0 \\ &= L \end{aligned} \tag{27}$$

Assim,  $Cov(X_i, F_j) = l_{ij}$ .

Por meio do método das componentes principais extraímos os fatores e seus respectivos pesos fatoriais  $l_{ij}$ , que no caso da análise fatorial ortogonal, são dados pela covariância entre cada v.a.  $X_i$  e o fator  $F_j$ . Sendo assim, quanto maior o peso fatorial, maior a correlação da variável com aquele fator.

A comunalidade  $h_i$  é outro importante valor a ser calculado, sendo esta uma porção da variância da variável aleatória  $X_i$ , determinada pelas somas dos quadrados dos pesos correspondentes de cada fator  $F_j$ . Isto é:

$$h_i^2 = l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \dots + l_{im}^2 \quad (28)$$

Assim, quanto mais alto for esse valor, maior é a garantia de se estar trabalhando com um modelo fatorial adequado.

A porção de  $V(X_i) = \sigma_{ii}$  deve-se ao fator específico e é frequentemente chamada de variância específica. Assim,

$$\underbrace{\sigma_{ii}}_{V(X_i)} = \underbrace{l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \dots + l_{im}^2}_{\text{comunalidade}} + \underbrace{\psi_i}_{\text{variância específica}} \quad (29)$$

Utilizando a expressão (28) para reescrever (29), tem-se:

$$\sigma_{ii} = V(X_i) = h_i^2 + \psi_i \quad (30)$$

em que  $i = 1, 2, 3, \dots, p$ .

Nota-se que o número de fatores,  $m$ , deve ser menor ou igual ao número de variáveis observáveis,  $p$ , pois a análise fatorial se torna vantajosa apenas quando o número de fatores é muito menor do que o número de variáveis observáveis.

Em seguida, se calcula os autovalores da matriz de correlação  $R$  e pelo Critério de Kaiser são considerados apenas aqueles maiores que um.

Considerando os autovalores em ordem decrescente, cada um reflete a importância de um fator, sendo que a variabilidade de cada fator é dada pela razão entre o autovalor correspondente e a soma de todos os autovalores que foram escolhidos pelo Critério de Kaiser. Sendo assim, quanto maior o autovalor, maior a variabilidade explicada pelo fator correspondente a esse. De acordo com Mingoti (2005), o número de fatores a serem considerados deve refletir pelo menos 70% da variabilidade original dos dados, contudo esta não é a única forma de tomada de decisão.

Segundo Marques (2015), a escolha de quantos fatores devem ser utilizadas para resumir os dados pode ser baseada nos seguintes critérios:

1. selecionar  $k$  fatores que especificam uma porcentagem da variância total, como, por exemplo, 70% a 80%;
2. selecionar  $k$  fatores que especificam os autovalores maiores do que a média dos autovalores,  $\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{p}$ . Para a matriz de correlação, esta média é 1 (Critério de Kaiser);
3. usar o método *screeplot* para representar o valor de  $\lambda_i$  por  $i$ , e olhar para uma separação entre os maiores e os menores autovalores;
4. o olhar experiente do pesquisador com relação aos dados que são trabalhados.

O procedimento a ser tomado após a extração dos fatores é a interpretação dos dados. É preciso definir qual a contribuição de cada variável aleatória a um fator, porém quando existe mais de um fator e os pesos referentes a cada um não são claros, pode ser adotado o método de rotação Varimax, que tem por finalidade rotacionar os eixos coordenados, procurando dar aos fatores maior clareza para interpretação, pois para cada v.a. haverá um grande peso fatorial de contribuição para apenas um fator e pequenas

contribuições aos demais fatores.

Segundo Lattin *et al.* (2011), a análise fatorial não é um fim em si mesma. Pode ser necessário que se conheça a localização de cada observação original no reduzido espaço fatorial, cujos valores são chamados de escores fatoriais. Assim, os escores fatoriais podem ser utilizados também para construir gráficos, mapas de percepção, como variáveis-resposta ou explicativas para algum procedimento estatístico.

Por fim, por meio da matriz de resíduos será analisado o ajuste do modelo, pois essa matriz traz informações das diferenças entre as covariâncias originais e as covariâncias ajustadas (com a aplicação do método das componentes principais), portanto quanto menores os valores que compõem a matriz de resíduos, melhor o ajuste. Se a matriz residual é composta por zero em sua diagonal principal e se os demais elementos forem também tão pequenos trata-se de um modelo bem ajustado pelo método das componentes principais, caso contrário os erros podem causar grandes falhas na interpretação.

#### 2.6.1 TESTE DE ESFERICIDADE DE BARTLETT

Para um modelo fatorial, o conjunto de dados cujas variáveis originais  $X_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, p$ , estão correlacionados entre si. Quando essas variáveis  $X_i$  são provenientes de uma distribuição normal  $p$ -variada, é possível aplicar o Teste de Esfericidade de Bartlett.

A hipótese é testada com o objetivo de verificar se a matriz de correlação populacional  $\rho$  (estimada pela matriz de correlação amostral,  $R$ ) do vetor aleatório observado, é ou não, a matriz identidade. Em outras palavras, esse teste verifica se as variáveis são independentes, e caso sejam, a matriz de correlação  $\rho$  será a matriz identidade, concluindo que a aplicação do método de AF é inapropriado nesta situação.

Portanto, esse procedimento testa a hipótese nula  $H_0$ , de que a matriz de correlação populacional  $\rho$  do vetor aleatório observado é a matriz identidade  $I_{(p \times p)}$ , contra a hipótese alternativa  $H_1$ , matriz diferente da identidade. Sendo a estatística do teste definida por

$$T = - \left[ (n - 1) - \frac{2p + 5}{6} \right] \ln|R| \quad (31)$$

onde

$n$ : tamanho da amostra;

$p$ : número de variáveis;

$|R|$ : determinante da matriz de correlação.

Assim, sob  $H_0$  e um tamanho de amostra  $n$  grande, a estatística  $T$  tem uma distribuição aproximadamente qui-quadrado com  $v = \frac{p(p-1)}{2}$  graus de liberdade, isto é,  $T \sim \chi^2$ .

Sendo assim, para que o modelo fatorial seja aceitável, é necessário que o Teste Esfericidade de Bartlett rejeite a hipótese nula  $H_0$ , pois caso contrário, as variáveis originais não serão correlacionadas e não pode-se aplicar o método de AF.

### 2.6.2 MEDIDA DE ADEQUABILIDADE DA AMOSTRA DE KAISER-MEYER-OLKIN (KMO)

Para que o modelo de análise fatorial tenha um bom ajuste recomenda-se que matriz  $R^{-1}$  seja próxima de uma matriz diagonal. Essa condição é representada pela medida de adequabilidade da amostra de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO), representada por um índice (MSA).

Essa medida é definida por

$$MSA = \frac{\sum_{i \neq j} r_{ij}^2}{\sum_{i \neq j} r_{ij}^2 + \sum_{i \neq j} q_{ij}^2}, \quad (32)$$

em que o elemento  $r_{ij}^2$  é o quadrado dos elementos da matriz de correlação original (exceto na diagonal), isto é, cada  $r_{ij}$  representa o coeficiente de correlação linear simples entre as variáveis  $X_i$  e  $X_j$ . O elemento  $q_{ij}^2$  é o quadrado dos elementos fora da diagonal da matriz  $Q$ , onde  $Q = DR^{-1}D$  e  $D = [\text{diag}(R^{-1})^{1/2}]^{-1}$ . Como a matriz  $R^{-1}$  se aproxima de uma matriz diagonal, o índice MSA se aproxima de 1.

Segundo Favero (2009), caso a medida fornecida seja um valor entre 0,5 e 1,0, a técnica de AF é apropriada e, recomenda-se que para obter resultados satisfatórios, o KMO deve exceder 0,8.

Sendo provada a adequabilidade da AF, primeiramente se calcula a matriz de correlação  $R$  das v.a. Assim, poderá ser observado quão relacionadas estão, a fim de identificar os grupos de v.a. com forte correlação entre si e baixa associação com as v.a dos demais grupos.

### 2.6.3 ROTAÇÃO DOS FATORES

A rotação dos fatores permite obter estrutura para os pesos tal que cada variável tenha peso alto em um único fator e pesos baixos ou moderados nos demais fatores. Nem sempre é possível obter uma estrutura simples. Quando  $m = 2$ , a transformação para a estrutura simples pode ser obtida graficamente. Os eixos podem então ser rotacionados visualmente de um ângulo  $\theta$  (MARQUES, 2015).

Os novos pesos rotacionados  $\hat{l}_{ij}^*$  são determinados pela relação:

$$\hat{L}^* = \hat{L}T,$$

em que  $T$  é a matriz dos carregamentos “rotacionados”, sendo ortogonal, com  $TT' = T'T = I$  e

- no sentido horário, é dada por

$$T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (33)$$

- no sentido anti-horário, é dada por

$$T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (34)$$

Para situações com  $m > 2$ , a análise sobre a rotação dos fatores passa a ser realizada através de programas computacionais. Sendo que os carregamentos obtidos mediante uma transformação ortogonal dos carregamentos originais têm a mesma habilidade para reproduzir a matriz de covariância ou de correlação, segundo Chaves Neto (2011).

Sendo assim, a Equação (22) pode ser reescrita da forma

$$\underline{X} - \underline{\mu} = \underline{L}\underline{F} + \underline{\varepsilon} = \underline{L}\underline{T}\underline{T}'\underline{F} + \underline{\varepsilon} = \underline{L}^*\underline{F}^* + \underline{\varepsilon} \quad (35)$$

desde que as condições abaixo sejam satisfeitas.

$$E(\underline{F}^*) = \underline{T}'E(\underline{F}) = 0 \quad (36)$$

$$\text{Cov}(\underline{F}^*) = \underline{T}'\text{Cov}(\underline{F})\underline{T} = \underline{T}\underline{T}' = I_{m \times m} \quad (37)$$

Os fatores  $\underline{F}$  e  $\underline{F}^* = \underline{T}'\underline{F}$  têm as mesmas propriedades estatísticas, e apesar de os carregamentos  $L^*$  serem, em geral, diferentes dos carregamentos  $L$ , ambos geram a mesma matriz de covariância.

$$\Sigma \approx \underline{L}\underline{L}' + \Psi \approx \underline{L}\underline{T}\underline{T}'\underline{L}' + \Psi \approx \underline{L}^*\underline{L}'^* + \Psi \quad (38)$$

E as comunalidades dadas pelos elementos da diagonal de  $\underline{L}\underline{L}' = \underline{L}^*\underline{L}'^*$  também não são afetadas pela escolha de  $\underline{T}$ .

Portanto, os ângulos e as distâncias são preservados, as comunalidades



inalteradas e a configuração básica dos pontos continuam os mesmos da rotação ortogonal. Apenas a referência dos eixos que difere, de forma que os fatores tornem-se mais interpretáveis. Isso ocorre quando a rotação consegue aproximar, quanto possível, os fatores aos pontos. Se existem grupos de pontos, os fatores são deslocados de forma a passar ou se aproximar desses grupos.

A busca da matriz  $T$  tem como base a tentativa de encontrar fatores com grandes variabilidades nos carregamentos, isso significa que o objetivo é determinar, para um valor fixo, um grupo de variáveis  $X_i$  altamente correlacionadas com o fator e um outro grupo de variáveis que tenham correlação desprezível ou moderada com o fator. Para cada fator fixo, a solução é obtida através da maximização da variação dos quadrados dos carregamentos originais das colunas da matriz  $L_{p \times m}$  (MINGOTI, 2005).

Uma medida analítica da estrutura simples é conhecida como Rotação Varimax, que define

$$\tilde{l}_{ij}^* = \frac{\hat{l}_{ij}^*}{\sqrt{\hat{h}_i}} \quad (39)$$

como sendo os coeficientes escalonados pela raiz quadrada das comunalidades. De acordo com Ferreira (2011), se utilizarmos esse critério, daremos pesos iguais às respostas com grandes e pequenas comunalidades. Kaiser (1958) sugeriu para esse procedimento, a transformação ortogonal  $T$  que torna

$$V = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^p \tilde{l}_{ij}^{*4} - \frac{\left( \sum_{i=1}^p \tilde{l}_{ij}^{*2} \right)^2}{p} \right) \quad (40)$$

tão grande quanto possível.

### 3 MATERIAL E MÉTODOS

Tem-se a seguir, a descrição dos dados utilizados nas análises deste trabalho, assim como o tratamento dos mesmos para que as técnicas estatísticas multivariadas pudessem ser aplicadas.

#### 3.1 DESCRIÇÃO DOS DADOS

Para o desenvolvimento deste trabalho foi realizada a coleta de dados dos municípios paranaenses, e para isso foi utilizado o Anuário Estatístico do Paraná de 2013, o qual contém informações de dados estatísticos sobre a realidade estadual, permitindo conhecer e analisar o comportamento socioeconômico e ambiental dos 399 municípios. Esse Anuário traz informações das pesquisas realizadas pelo Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econômico e Social (IPARDES) e pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Para estudar as características dos municípios paranaenses, foram selecionadas 62 variáveis, as quais trazem informações sobre: infraestrutura (energia, saneamento, transportes e comunicação), características demográficas e sociais da população (famílias e domicílios, nascimentos e óbitos, saúde, educação, justiça e segurança), economia (trabalho, agropecuária, atividades financeiras, contabilidade social, finanças públicas e despesas), indicadores sociais e demográficos (densidade demográfica, grau de urbanização, taxa de envelhecimento, taxa de mortalidade, cobertura vacinal, taxa de analfabetismo, taxa de aprovação, desenvolvimento municipal, Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM)), entre outros.

Na tabela 3 consta a descrição das 62 variáveis selecionadas para fazerem parte deste estudo.

Tabela 3: VARIÁVEIS ESTUDADAS

| VARIÁVEL        | DESCRIÇÃO                                     | VARIÁVEL        | DESCRIÇÃO                               |
|-----------------|---|-----------------|---|
| V <sub>1</sub>  | Consumo total de energia elétrica             | V <sub>32</sub> | Índice GINI                             |
| V <sub>2</sub>  | Total de consumidores de energia elétrica     | V <sub>33</sub> | Índice THEIL-L                          |
| V <sub>3</sub>  | Unidades atendidas de abastecimento de água   | V <sub>34</sub> | Número de eleitores                     |
| V <sub>4</sub>  | Ligações de abastecimento de água             | V <sub>35</sub> | Acidentes de trânsito                   |
| V <sub>5</sub>  | Unidades atendidas de abastecimento de esgoto | V <sub>36</sub> | Vítimas de acidentes de trânsito        |
| V <sub>6</sub>  | Ligações de abastecimento de esgoto           | V <sub>37</sub> | Pessoas com condição de atividade       |
| V <sub>7</sub>  | Consumo de água medido                        | V <sub>38</sub> | Pop. ocup.: Indústrias de Transformação |
| V <sub>8</sub>  | Frotas de veículos cadastrados                | V <sub>39</sub> | Pop. ocup.: Construção                  |
| V <sub>9</sub>  | Domicílios particulares permanente            | V <sub>40</sub> | Pop. ocup.: Comércio automotivo         |
| V <sub>10</sub> | Estabelecimentos de saúde                     | V <sub>41</sub> | Pop. ocup.: Transporte                  |
| V <sub>11</sub> | Alunos matriculados no ensino regular         | V <sub>42</sub> | Pop. ocup.: Alojamento e alimentação    |
| V <sub>12</sub> | Alunos matriculados em creche                 | V <sub>43</sub> | Pop. ocup.: Administração pública       |
| V <sub>13</sub> | Alunos matriculados no ensino pré-escolar     | V <sub>44</sub> | Pop. ocup.: Educação                    |
| V <sub>14</sub> | Alunos matriculados no ensino fundamental     | V <sub>45</sub> | Pop. ocup.: Saúde humana                |
| V <sub>15</sub> | Alunos matriculados no ensino médio           | V <sub>46</sub> | Pop. ocup.: Serviços domésticos         |
| V <sub>16</sub> | Número de docentes                            | V <sub>47</sub> | Produto interno bruto                   |
| V <sub>17</sub> | Estabelecimentos de ensino                    | V <sub>48</sub> | Preços correntes                        |
| V <sub>18</sub> | Alunos matriculados no ensino superior        | V <sub>49</sub> | Receitas correntes municipais           |
| V <sub>19</sub> | Concluintes na educação superior              | V <sub>50</sub> | Total de receita tributária             |
| V <sub>20</sub> | Instituições de ensino superior               | V <sub>51</sub> | Arrecadação do ICMS                     |
| V <sub>21</sub> | Número de empregos formais                    | V <sub>52</sub> | Despesas municipais                     |
| V <sub>22</sub> | Rendimento médio: empregos formais            | V <sub>53</sub> | Densidade demográfica                   |
| V <sub>23</sub> | Receita tributária municipal                  | V <sub>54</sub> | Grau de urbanização                     |
| V <sub>24</sub> | Produção de soja                              | V <sub>55</sub> | Esperança de vida ao nascer             |
| V <sub>25</sub> | Produção de milho                             | V <sub>56</sub> | Índice de idosos                        |
| V <sub>26</sub> | Sobrevivência até 60 anos                     | V <sub>57</sub> | IDHM                                    |
| V <sub>27</sub> | Taxa de envelhecimento                        | V <sub>58</sub> | IDHM - longevidade                      |
| V <sub>28</sub> | Imunização: poliomielite                      | V <sub>59</sub> | IDHM - educação                         |
| V <sub>29</sub> | Imunização: hepatite B                        | V <sub>60</sub> | IDHM - renda                            |
| V <sub>30</sub> | Imunização: rotavírus humano                  | V <sub>61</sub> | Valor adicionado per capta              |
| V <sub>31</sub> | Índice IPARDES de desempenho municipal        | V <sub>62</sub> | População: taxa de atividade            |

Em relação às 62 variáveis descritas, 14 delas trazem informações sobre as características sociais da população, 14 variáveis correspondentes à economia, 12 variáveis relacionadas à educação, 9 variáveis sobre a saúde, 8 variáveis correspondente à infraestrutura e 5 variáveis representam as características demográficas, referentes aos 399 municípios. Nesse estudo, foram selecionadas observações de variáveis quantitativas apenas. Para cada variável  $V_i$ , em que  $i = 1, 2, 3, \dots, 62$ , foram contabilizadas 399 observações. Tais observações correspondem aos dados de cada município.

### 3.2 ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DOS DADOS

Selecionadas as variáveis para este estudo, foi considerada uma matriz de dados, onde as colunas representam 62 variáveis observáveis, também chamadas de variáveis originais, escolhidas entre todos os dados coletados do Anuário Estatístico do Estado do Paraná de 2013, disponibilizado em IPARDES (2015). Sendo assim, a dimensão da matriz de dados é  $399 \times 62$  e algumas dessas informações podem ser visualizadas na tabela

As variáveis com informações faltantes foram analisadas cuidadosamente. Para essa situação, foram aplicados dois critérios. Um deles descarta a variável, caso ela não contenha um grande número de observações. Com o outro critério, a observação faltante de uma variável em relação à um município é selecionada e substituída pela média aritmética das observações correspondentes aos municípios cujo número de habitantes esteja em um mesmo intervalo. Em relação às variáveis com falta de dados, conclui-se que:

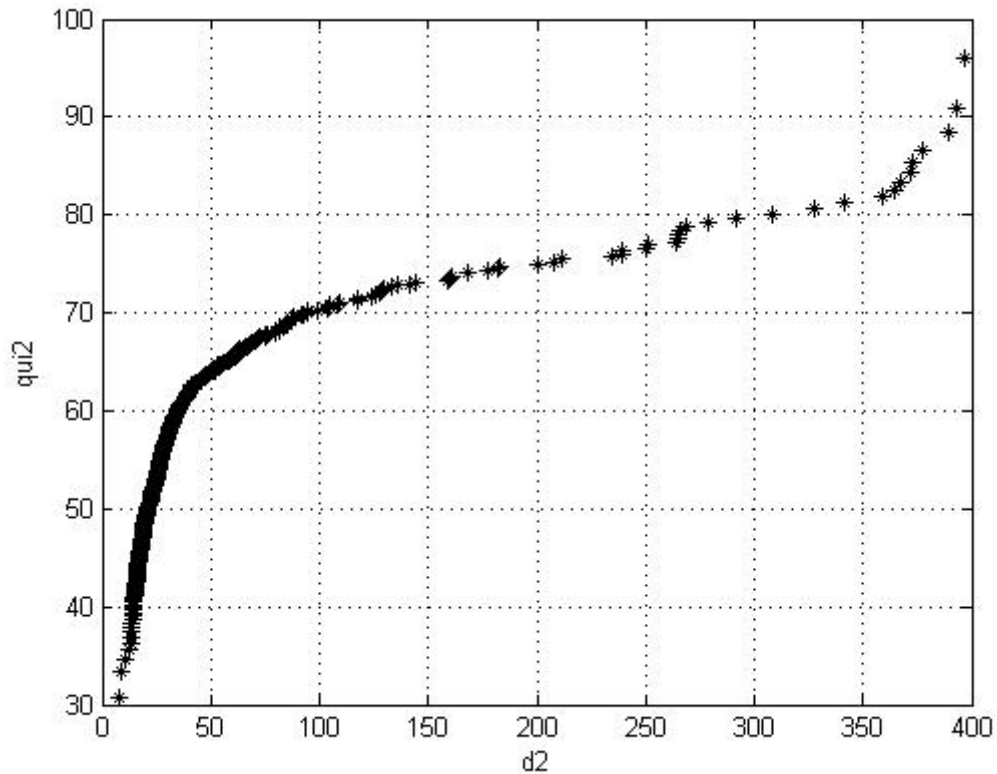
- As variáveis  $V_5$  (Unidades atendidas de abastecimento de esgoto),  $V_6$  (Ligações de abastecimento de esgoto),  $V_{18}$  (Alunos matriculados no ensino superior) e  $V_{19}$  (Concluintes na educação superior) foram descartadas do estudo por apresentarem de 228 a 323 observações faltantes.

- Cada observação faltante referente às variáveis  $V_3$  (Unidades atendidas de abastecimento de água),  $V_4$  (Ligações de abastecimento de água),  $V_7$  (Consumo de água medido),  $V_{12}$  (Matriculados em creche),  $V_{23}$  (Receita tributária municipal),  $V_{24}$  (Produção de soja),  $V_{25}$  (Produção de milho),  $V_{35}$  (Acidentes de trânsito),  $V_{36}$  (Vítimas de acidentes de trânsito),  $V_{49}$  (Receita correntes municipais),  $V_{50}$  (Total de receitas tributárias) e  $V_{52}$  (Despesas municipais) foram analisadas separadamente. Calculando-se a média aritmética das observações correspondentes aos municípios cujo número de habitantes esteja em um mesmo intervalo realizar substituição de tais dados faltantes. Essas variáveis não ultrapassaram 55 observações faltantes.

Assim, a matriz de dados, que antes era de dimensão  $399 \times 62$ , manteve o número de linhas (399 observações referentes aos municípios), mas diminui o número de colunas para 58, após o descarte das quatro variáveis ( $V_5$ ,  $V_6$ ,  $V_{18}$  e  $V_{19}$ ).

Realizada a seleção da matriz de dados foi possível iniciar sua análise. Dessa forma, o presente projeto é motivado pela proposta de aplicar técnicas de análise multivariada, tais como o método de componentes principais e a análise fatorial. A primeira técnica tem o papel de reduzir o número de variáveis e verificar quais componentes originais (entre as 58 variáveis  $V_i$ ) explicam a maior variabilidade do sistema e a segunda técnica, para obter os indicadores de maior poder de explicação sobre o problema.

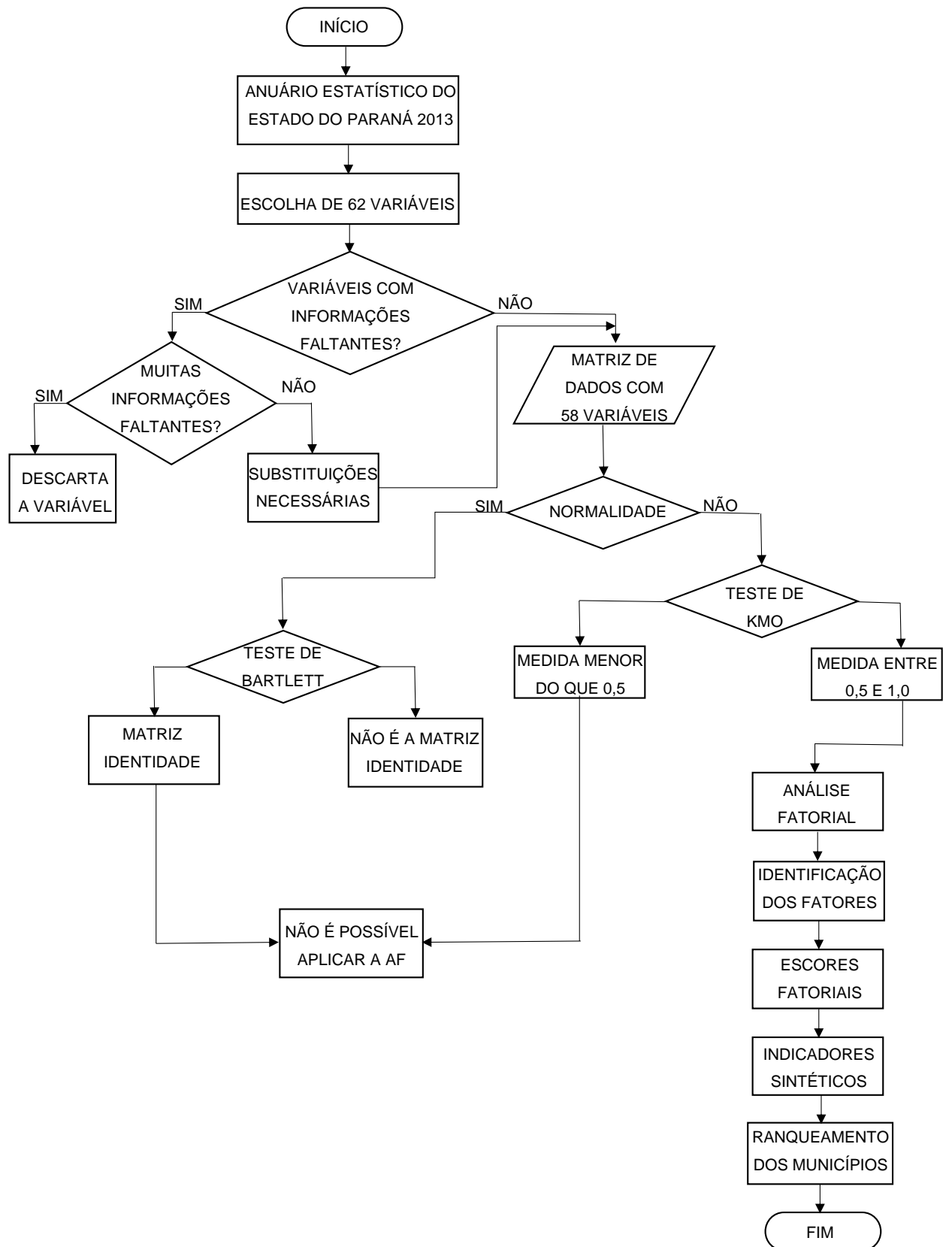
Primeiramente, com o auxílio do *software* MATLAB, foi avaliada a normalidade conjunta dos dados multivariados. O código aplicado é apresentado no Anexo B, o qual está baseado no quadrado da distância generalizada. A normalidade pode ser confirmada caso o gráfico obtido seja uma reta aproximada.



**Figura 4:** AVALIAÇÃO DA NORMALIDADE  
 FONTE: A AUTORA

O gráfico referente a Figura 4, representa a aplicação do código à matriz de dados, onde  $d2$  indica o quadrado da distância generalizada para os 399 municípios e  $qui2$  representa a distribuição de Qui-quadrado correspondente, com  $p = 58$  graus de liberdade. Percebe-se que há evidência de um desvio sistemático da reta, sendo razoável descartar a hipótese de normalidade para essa amostra. O teste de Esfericidade de Bartlett não pôde ser aplicado, por se tratar de uma amostra cuja condição de normalidade não é satisfeita. No entanto, o teste de adequabilidade de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) foi analisado. O valor 0,8907 indica que a AF é apropriada, pois se trata de um valor maior do que 0,80, mostrando que correlações suficientes existem entre as variáveis, sendo pertinente a análise fatorial desses dados.

A Figura 5 representa o fluxograma com a sequência de análises referente à matriz dados utilizada neste trabalho.



**Figura 5:** FLUXOGRAMA

FONTE: A AUTORA

#### 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Analisada as condições para a aplicação da análise fatorial, a partir da matriz de dados,  $X$ , foi determinada a matriz de correlação  $R$  correspondente. Por meio do método das componentes principais, foram determinados os fatores que representam as variáveis originais. A escolha do número de fatores foi determinada através do Critério de Kaiser, o qual trabalha com a quantidade de autovalores maiores do que um.

Assim, como a matriz de correlação  $R$  admitiu 8 autovalores maiores do que um, foram determinados 8 fatores para explicarem o sistema de dados. Com a aplicação da análise fatorial (o código utilizado pode ser visto no Apêndice A) à matriz de tratamento é possível considerar apenas os três primeiros deles, pois juntos explicam pouco mais de 78% da variância total, conforme representado na Tabela 4.

**Tabela 4:** AF - DETERMINAÇÃO DE FATORES

| FATORES                 | F1    | F2    | F3    | F4    | F5    | F6    | F7    | F8    |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Autovalor               | 36,75 | 5,59  | 3,09  | 2,45  | 1,95  | 1,70  | 1,37  | 1,12  |
| Variância acumulada (%) | 63,37 | 73,01 | 78,34 | 82,57 | 85,92 | 88,86 | 91,22 | 93,16 |

FONTE: A AUTORA

Com a finalidade de facilitar a interpretação dos resultados, foi aplicada a rotação Varimax, cujos resultados estão apresentados na Tabela 5. A referência dos eixos difere os resultados para a variância acumulada, no entanto, os autovalores são preservados.

**Tabela 5:** ROTAÇÃO VARIMAX - DETERMINAÇÃO DE FATORES

| FATORES                 | F1    | F2    | F3    | F4    | F5    | F6    | F7    | F8    |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Autovalor               | 36,75 | 5,59  | 3,09  | 2,45  | 1,95  | 1,70  | 1,37  | 1,12  |
| Variância acumulada (%) | 61,93 | 68,66 | 72,61 | 76,89 | 80,96 | 84,24 | 88,24 | 93,16 |

FONTE: A AUTORA

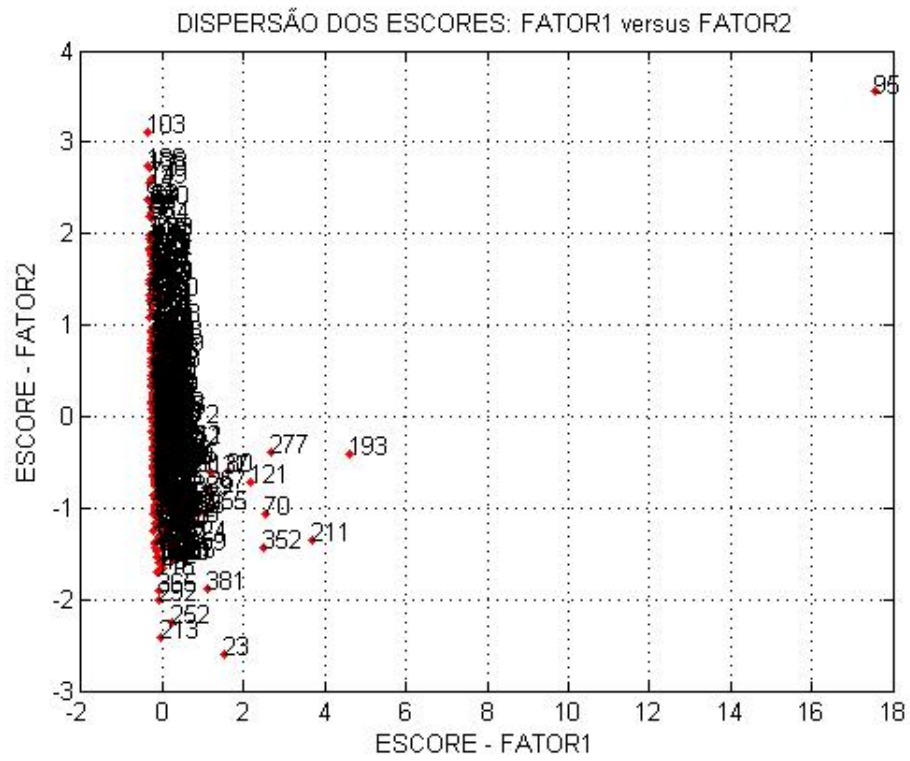


Pelas Tabelas 4 e 5 observa-se que os fatores 1, 2 e 3, sem rotação, são responsáveis por 78,34% da explicação do sistema de dados originais ou 72,61%, com a rotação Varimax. Nesses dois métodos, verificou-se que as comunalidades estão acima de 0,67, portanto a variabilidade das variáveis originais é explicada pelos fatores escolhidos. Esse resultado induz a pertinência do uso da AF para a matriz de tratamento. Além disso, a matriz residual, com os elementos da diagonal principal sendo nulos e os demais valores muito próximos de zero, confirma um bom ajuste do modelo.

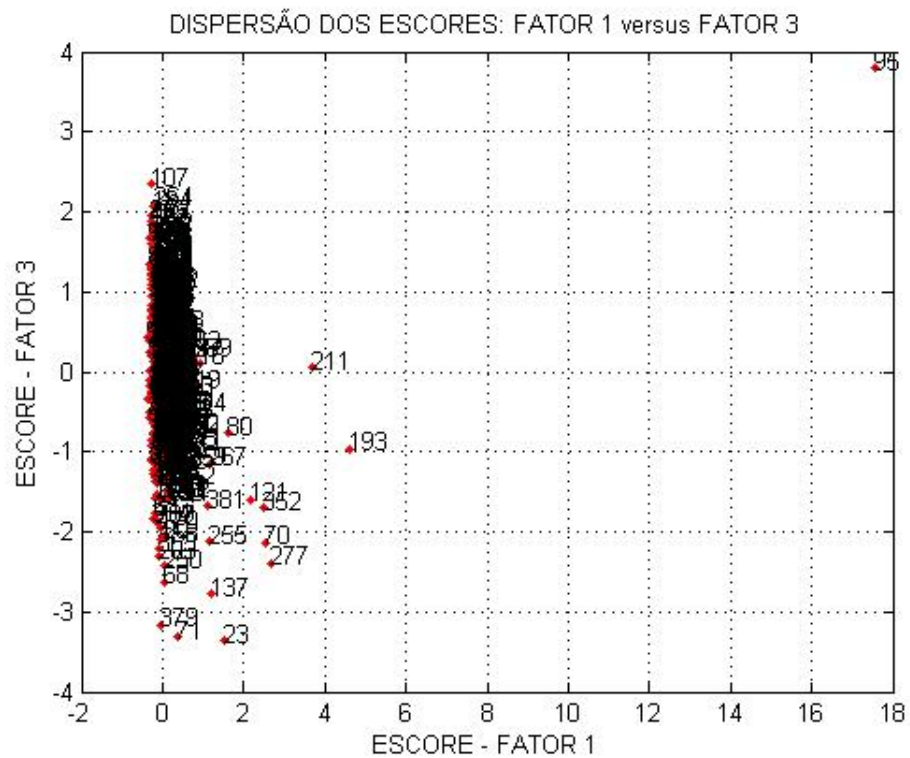
Em relação ao critério de rotação Varimax, o fator 1 representa 61,93% da variabilidade total explicada pelos dados e é composto por 37 variáveis originais, representando o indicador referente à economia, infraestrutura e educação, por apresentar maior número de variáveis com tais características. O fator 2 explica 6,73% do sistema com 4 variáveis originais, caracterizado como indicador de desenvolvimento humano. Por fim, o fator 3, responsável por 3,95% da variabilidade total, composto por duas variáveis originais, é denominado indicador de envelhecimento populacional.

A seguir, a Figura 6 mostra o gráfico da dispersão dos escores correspondentes aos fatores 1 e 2. Cada ponto em vermelho representa um município, identificados pelos números de 1 a 399.

Observe que o ponto cujo número é 95, representa a capital parananense. O valor de seu escore fatorial está distante dos demais e os municípios identificados pelos números 193 (Londrina), 211 (Maringá), 352 (São José dos Pinhais), 277 (Ponta Grossa) e 121 (Foz do Iguaçu) têm escore entre 2 e 6, em relação ao fator 1, no entanto, percebe-se que os outros municípios têm os valores muito próximos do intervalo [0, 2].



**Figura 6:** GRÁFICO DOS ESCORES FATORIAIS - FATORES 1 e 2  
 FONTE: A AUTORA



**Figura 7:** GRÁFICO DOS ESCORES FATORIAIS - FATORES 1 e 3  
 FONTE: A AUTORA

A Figura 7 exibe o gráfico da dispersão dos escores referentes as fatores 1 e 3, em que o ponto de número é 95 representa a capital paranaense. Assim como na análise do gráfico da Figura 6, o valor do escore fatorial de Curitiba está distante dos demais. Os municípios de Londrina, Maringá, São José dos Pinhais, Ponta Grossa e Foz do Iguaçu têm escore entre 2 e 6, em relação ao fator 1, no entanto, percebe-se que os outros municípios têm os valores muito próximos do intervalo  $[0, 2]$ .

Por meio dos escores fatoriais finais ponderados, foi possível ranquear os municípios paranaenses em relação aos indicadores sintéticos: fator 1, fator 2 e fator 3.

A Tabela 6, que se encontra no final dessa seção, exibe os 399 municípios ranqueados, cada um com seu respectivo escore fatorial final ponderado, referente ao desempenho geral nos três fatores estudados: economia, infraestrutura e educação, desenvolvimento humanos, envelhecimento populacional.

A partir dos escores finais ponderados, podem ser determinados indicadores sintéticos, cuja finalidade é dar maior clareza e interpretação aos resultados. Para isso, são considerados o mais alto e mais baixo valor de escore. Assim, tomando como base Curitiba (escore: 11,8341) e Presidente Castelo Branco (escore:  $-0,4239$ ), considera-se então o menor valor ( $-0,4239$ ) igual a 0 (zero) e o maior escore (11,8341) igual a 1 (um) e através de um simples cálculo, são determinados os demais indicadores sintéticos.

- Primeiramente, calcula-se  $E_T$ , a diferença entre os escores finais de Curitiba e Presidente Castelo Branco.

$$E_T = \text{Escore de Curitiba} - \text{Escore de Presidente Castelo Branco}$$

$$E_T = 11,8341 - (-0,4239)$$

$$\therefore E_T = 12,258.$$

- Em seguida, é calculado a diferença entre os escores finais de cada um

dos demais municípios e de Presidente Castelo Branco. Por exemplo, para Londrina:

$E_1 = \text{Escore de Londrina} - \text{Escore de Presidente Castelo Branco}$

$$E_1 = 2,6893 - (-0,4239) \therefore E_1 = 3,1132.$$

Usando proporção, obtemos:

$$\begin{array}{l} E_T \rightarrow 1 \\ E_1 \rightarrow x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 12,258 \rightarrow 1 \\ 3,1132 \rightarrow x \end{array} \Rightarrow x = \frac{3,1132}{13,2515} \Rightarrow x = 0,2540.$$

Portanto, o valor 0,2540 é o indicador sintético referente ao município de Londrina. Procedendo do mesmo modo para os 397 restantes, obtém-se a terceira coluna da Tabela 6.

Os valores encontrados para o indicador sintético, permitem uma comparação entre os municípios do estado. Quanto mais próximo de 1 estiver o o valor do indicador sintético de certo município, maior será seu potencial de desenvolvimento em relação aos fatores estudados.

Observa-se que o valor do indicador sintético de Londrina (2ª posição no ranqueamento) é, aproximadamente, 25% do indicador sintético de Curitiba (1ª posição no ranqueamento). Pela Tabela 2, indicada na seção 2.3.1, é possível notar a mesma relação entre o número de habitantes entre esses municípios, isto é, a população de Londrina é quase 25% a de Curitiba. A mesma observação pode ser feita entre os dados de Maringá (3ª posição no ranqueamento) e Curitiba, assim, o valor de seu indicador sintético e o número de habitantes, representam cerca de 20% dos respectivos valores referentes à Curitiba. Essa relação pode ser verificada para os demais municípios.

Para os últimos municípios ranqueados, observa-se a necessidade de criação de uma política social e econômica para elaboração de programas ou investimentos que venham melhorar esse quadro.

**Tabela 6:** RANQUEAMENTO, ESCORE FATORIAL E INDICADOR SINTÉTICO

| POSIÇÃO | MUNICÍPIO              | ESCORE FINAL | INDICADOR SINTÉTICO |
|---------|------------------------|--------------|---------------------|
| 1º      | Curitiba               | 11,8341      | 1,0000              |
| 2º      | Londrina               | 2,6893       | 0,2540              |
| 3º      | Maringá                | 2,0169       | 0,1991              |
| 4º      | Ponta Grossa           | 1,3106       | 0,1415              |
| 5º      | São José dos Pinhais   | 1,1992       | 0,1324              |
| 6º      | Cascavel               | 1,0803       | 0,1227              |
| 7º      | Foz do Iguaçu          | 0,9172       | 0,1094              |
| 8º      | Araucária              | 0,7391       | 0,0949              |
| 9º      | Colombo                | 0,4091       | 0,0680              |
| 10º     | Paranaguá              | 0,4002       | 0,0672              |
| 11º     | Pinhais                | 0,3424       | 0,0625              |
| 12º     | Umuarama               | 0,3300       | 0,0615              |
| 13º     | Guarapuava             | 0,3135       | 0,0602              |
| 14º     | Saudade do Iguaçu      | 0,2821       | 0,0576              |
| 15º     | Nova Tebas             | 0,2802       | 0,0574              |
| 16º     | Arapongas              | 0,2724       | 0,0568              |
| 17º     | Apucarana              | 0,2703       | 0,0566              |
| 18º     | Cruzmaltina            | 0,2493       | 0,0549              |
| 19º     | Lindoeste              | 0,2478       | 0,0548              |
| 20º     | Cândido de Abreu       | 0,2433       | 0,0544              |
| 21º     | Rio Branco do Ivaí     | 0,2045       | 0,0513              |
| 22º     | Espigão Alto do Iguaçu | 0,2044       | 0,0513              |
| 23º     | Diamante D'Oeste       | 0,2020       | 0,0511              |
| 24º     | Altamira do Paraná     | 0,2011       | 0,0510              |
| 25º     | Guarapuacaba           | 0,1905       | 0,0501              |
| 26º     | Lidianópolis           | 0,1898       | 0,0501              |
| 27º     | Rosário do Ivaí        | 0,1865       | 0,0498              |
| 28º     | Cantagalo              | 0,1848       | 0,0497              |
| 29º     | Diamante do Sul        | 0,1804       | 0,0493              |
| 30º     | Toledo                 | 0,1779       | 0,0491              |
| 31º     | Icaraíma               | 0,1772       | 0,0490              |
| 32º     | Francisco Alves        | 0,1740       | 0,0488              |
| 33º     | Jardim Olinda          | 0,1673       | 0,0482              |
| 34º     | Corumbataí do Sul      | 0,1656       | 0,0481              |
| 35º     | Ariranha do Ivaí       | 0,1652       | 0,0481              |
| 36º     | Paranavaí              | 0,1618       | 0,0478              |
| 37º     | Reserva                | 0,1574       | 0,0474              |
| 38º     | Cerro Azul             | 0,1496       | 0,0468              |
| 39º     | São João do Caiuá      | 0,1444       | 0,0464              |
| 40º     | Santa Maria do Oeste   | 0,1396       | 0,0460              |

continua

| POSIÇÃO | MUNICÍPIO               | ESCORE FINAL | INDICADOR SINTÉTICO |
|---------|-------------------------|--------------|---------------------|
| 41º     | Doutor Ulysses          | 0,1373       | 0,0458              |
| 42º     | Inácio Martins          | 0,1362       | 0,0457              |
| 43º     | Arapuã                  | 0,1353       | 0,0456              |
| 44º     | Planaltina do Paraná    | 0,1352       | 0,0456              |
| 45º     | São José da Boa Vista   | 0,1338       | 0,0455              |
| 46º     | Santa Mariana           | 0,1318       | 0,0453              |
| 47º     | Cafezal do Sul          | 0,1308       | 0,0453              |
| 48º     | Nova Cantu              | 0,1286       | 0,0451              |
| 49º     | Nova Prata do Iguaçu    | 0,1233       | 0,0456              |
| 50º     | Esperança Nova          | 0,1232       | 0,0456              |
| 51º     | Curiúva                 | 0,1220       | 0,0455              |
| 52º     | Planalto                | 0,1201       | 0,0444              |
| 53º     | Tijucas do Sul          | 0,1199       | 0,0444              |
| 54º     | Faxinal                 | 0,1192       | 0,0443              |
| 55º     | Pérola d'Oeste          | 0,1158       | 0,0440              |
| 56º     | Itambaracá              | 0,1146       | 0,0439              |
| 57º     | Centenário do Sul       | 0,1139       | 0,0439              |
| 58º     | Sapopema                | 0,1121       | 0,0437              |
| 59º     | São Pedro do Iguaçu     | 0,1106       | 0,0436              |
| 60º     | Mariluz                 | 0,1105       | 0,0436              |
| 61º     | Alto Piquiri            | 0,1078       | 0,0434              |
| 62º     | Grandes Rios            | 0,1058       | 0,0432              |
| 63º     | Boa Vista da Aparecida  | 0,1041       | 0,0431              |
| 64º     | Prudentópolis           | 0,1040       | 0,0431              |
| 65º     | Candói                  | 0,1013       | 0,0428              |
| 66º     | Imbaú                   | 0,0998       | 0,0427              |
| 67º     | Itaúna do Sul           | 0,0994       | 0,0427              |
| 68º     | Jandaia do Sul          | 0,099        | 0,0427              |
| 69º     | Mandirituba             | 0,097        | 0,0425              |
| 70º     | Quedas do Iguaçu        | 0,0969       | 0,0425              |
| 71º     | Campina do Simão        | 0,0959       | 0,0424              |
| 72º     | Manfrinópolis           | 0,0932       | 0,0422              |
| 73º     | Wenceslau Braz          | 0,0922       | 0,0421              |
| 74º     | São Jorge do Patrocínio | 0,0907       | 0,0420              |
| 75º     | Campo Mourão            | 0,0891       | 0,0419              |
| 76º     | Itaguajé                | 0,0890       | 0,0418              |
| 77º     | São Jorge d'Oeste       | 0,0889       | 0,0418              |
| 78º     | Iguatu                  | 0,0859       | 0,0416              |
| 79º     | Laranjal                | 0,0837       | 0,0414              |
| 80º     | Santa Lúcia             | 0,0824       | 0,0413              |

continua

| POSIÇÃO | MUNICÍPIO                 | ESCORE FINAL | INDICADOR SINTÉTICO |
|---------|---------------------------|--------------|---------------------|
| 81º     | Moreira Sales             | 0,0798       | 0,0411              |
| 82º     | Iretama                   | 0,0769       | 0,0409              |
| 83º     | Ibiporã                   | 0,0761       | 0,0408              |
| 84º     | São João do Triunfo       | 0,0750       | 0,0407              |
| 85º     | Tapira                    | 0,0736       | 0,0406              |
| 86º     | Telêmaco Borba            | 0,0726       | 0,0405              |
| 87º     | Luiziana                  | 0,0704       | 0,0403              |
| 88º     | Cambé                     | 0,0695       | 0,0403              |
| 89º     | Ivaí                      | 0,0683       | 0,0402              |
| 90º     | Capanema                  | 0,0680       | 0,0401              |
| 91º     | Rio Bonito do Iguaçu      | 0,0666       | 0,0400              |
| 92º     | Araruna                   | 0,0659       | 0,0400              |
| 93º     | Colorado                  | 0,0654       | 0,0399              |
| 94º     | São João do Ivaí          | 0,0643       | 0,0398              |
| 95º     | Fernandes Pinheiro        | 0,0641       | 0,0398              |
| 96º     | Sertaneja                 | 0,0622       | 0,0397              |
| 97º     | Coronel Domingos Soares   | 0,0619       | 0,0396              |
| 98º     | Santo Antônio do Sudoeste | 0,0580       | 0,0393              |
| 99º     | Xambrê                    | 0,0575       | 0,0393              |
| 100º    | Agudos do Sul             | 0,0533       | 0,0389              |
| 101º    | Ortigueira                | 0,0531       | 0,0389              |
| 102º    | Leópolis                  | 0,0453       | 0,0383              |
| 103º    | Rancho Alegre             | 0,0452       | 0,0383              |
| 104º    | Rolândia                  | 0,0427       | 0,0381              |
| 105º    | Cianorte                  | 0,0418       | 0,0380              |
| 106º    | Pérola                    | 0,0412       | 0,0379              |
| 107º    | Figueira                  | 0,0410       | 0,0379              |
| 108º    | Uraí                      | 0,0396       | 0,0378              |
| 109º    | Quitandinha               | 0,0356       | 0,0375              |
| 110º    | Santa Isabel do Ivaí      | 0,0355       | 0,0375              |
| 111º    | Pinhal de São Bento       | 0,0339       | 0,0373              |
| 112º    | Campo Largo               | 0,0316       | 0,0372              |
| 113º    | Pato Branco               | 0,0297       | 0,0370              |
| 114º    | Porto Vitória             | 0,0296       | 0,0370              |
| 115º    | Francisco Beltrão         | 0,0291       | 0,0370              |
| 116º    | Pitanga                   | 0,0291       | 0,0370              |
| 117º    | Itaperuçu                 | 0,0272       | 0,0368              |
| 118º    | Nova Santa Rosa           | 0,0248       | 0,0366              |
| 119º    | Guamiranga                | 0,0243       | 0,0366              |
| 120º    | Santo Antônio da Platina  | 0,0233       | 0,0365              |

continua

| POSIÇÃO | MUNICÍPIO                | ESCORE FINAL | INDICADOR SINTÉTICO |
|---------|--------------------------|--------------|---------------------|
| 121º    | Palmital                 | 0,0221       | 0,0364              |
| 122º    | Congonhinhas             | 0,0219       | 0,0364              |
| 123º    | Bom Jesus do Sul         | 0,0211       | 0,0363              |
| 124º    | Ibaiti                   | 0,0202       | 0,0362              |
| 125º    | Mariópolis               | 0,0195       | 0,0362              |
| 126º    | Vera Cruz do Oeste       | 0,0193       | 0,0362              |
| 127º    | Jardim Alegre            | 0,0184       | 0,0361              |
| 128º    | Amaporã                  | 0,0180       | 0,0360              |
| 129º    | Abatiá                   | 0,0169       | 0,0360              |
| 130º    | Barra do Jacaré          | 0,0168       | 0,0360              |
| 131º    | Joaquim Távora           | 0,0166       | 0,0359              |
| 132º    | Bocaiúva do Sul          | 0,0164       | 0,0359              |
| 133º    | Mato Rico                | 0,0159       | 0,0359              |
| 134º    | Pinhão                   | 0,0124       | 0,0356              |
| 135º    | Boa Ventura de São Roque | 0,0092       | 0,0353              |
| 136º    | Marquinho                | 0,0091       | 0,0353              |
| 137º    | Querência do Norte       | 0,0067       | 0,0351              |
| 138º    | Tuneiras do Oeste        | 0,0039       | 0,0349              |
| 139º    | Santa Amélia             | 0,0036       | 0,0349              |
| 140º    | Nova Olímpia             | 0,0024       | 0,0348              |
| 141º    | Conselheiro Mairinck     | 0,0019       | 0,0347              |
| 142º    | Mangueirinha             | 0,0019       | 0,0347              |
| 143º    | Adrianópolis             | 0,0010       | 0,0347              |
| 144º    | Terra Boa                | 0,0006       | 0,0346              |
| 145º    | Roncador                 | 0,0005       | 0,0346              |
| 146º    | Quarto Centenário        | 0,0002       | 0,0346              |
| 147º    | Farol                    | -0,0001      | 0,0346              |
| 148º    | Ivaiporã                 | -0,0020      | 0,0344              |
| 149º    | Santa Fé                 | -0,0023      | 0,0344              |
| 150º    | Cruzeiro do Iguaçu       | -0,0039      | 0,0343              |
| 151º    | Primeiro de Maio         | -0,0069      | 0,0340              |
| 152º    | Paulo Frontin            | -0,0072      | 0,0340              |
| 153º    | Ventania                 | -0,0074      | 0,0340              |
| 154º    | São Jerônimo da Serra    | -0,0080      | 0,0339              |
| 155º    | Santo Antônio do Paraíso | -0,0094      | 0,0338              |
| 156º    | Braganey                 | -0,0107      | 0,0337              |
| 157º    | Almirante Tamandaré      | -0,0114      | 0,0337              |
| 158º    | União da Vitória         | -0,0129      | 0,0335              |
| 159º    | Barbosa Ferraz           | -0,0147      | 0,0334              |
| 160º    | Bandeirantes             | -0,0163      | 0,0333              |

continua



| POSIÇÃO | MUNICÍPIO               | ESCORE FINAL | INDICADOR SINTÉTICO |
|---------|-------------------------|--------------|---------------------|
| 161°    | Rebouças                | -0,0194      | 0,0330              |
| 162°    | Antônio Olinto          | -0,0199      | 0,0330              |
| 163°    | Cruzeiro do Oeste       | -0,0203      | 0,0329              |
| 164°    | Ourizona                | -0,0239      | 0,0326              |
| 165°    | Ramilândia              | -0,0239      | 0,0326              |
| 166°    | Nova Santa Bárbara      | -0,0252      | 0,0325              |
| 167°    | Ibema                   | -0,0253      | 0,0325              |
| 168°    | Manoel Ribas            | -0,0255      | 0,0325              |
| 169°    | Iporã                   | -0,0271      | 0,0324              |
| 170°    | Irati                   | -0,0292      | 0,0322              |
| 171°    | Clevelândia             | -0,0302      | 0,0321              |
| 172°    | Mirador                 | -0,0321      | 0,0320              |
| 173°    | Ribeirão do Pinhal      | -0,0328      | 0,0319              |
| 174°    | Quatiguá                | -0,0330      | 0,0319              |
| 175°    | Santa Mônica            | -0,0349      | 0,0317              |
| 176°    | Mallet                  | -0,0351      | 0,0317              |
| 177°    | São Jorge do Ivaí       | -0,0351      | 0,0317              |
| 178°    | Astorga                 | -0,0364      | 0,0316              |
| 179°    | Catanduvas              | -0,0375      | 0,0315              |
| 180°    | Jundiá do Sul           | -0,0384      | 0,0314              |
| 181°    | Tunas do Paraná         | -0,0388      | 0,0314              |
| 182°    | Sertanópolis            | -0,0391      | 0,0314              |
| 183°    | Cidade Gaúcha           | -0,0396      | 0,0314              |
| 184°    | Boa Esperança           | -0,0403      | 0,0313              |
| 185°    | Goioxim                 | -0,0428      | 0,0311              |
| 186°    | Lunardelli              | -0,0436      | 0,0310              |
| 187°    | Marialva                | -0,0442      | 0,0310              |
| 188°    | Inajá                   | -0,0444      | 0,0310              |
| 189°    | Céu Azul                | -0,0459      | 0,0308              |
| 190°    | Bela Vista da Caroba    | -0,0462      | 0,0308              |
| 191°    | Sarandi                 | -0,0466      | 0,0308              |
| 192°    | Janiópolis              | -0,0467      | 0,0308              |
| 193°    | Pranchita               | -0,0468      | 0,0308              |
| 194°    | Marechal Cândido Rondon | -0,0491      | 0,0306              |
| 195°    | Guaporema               | -0,0492      | 0,0306              |
| 196°    | Cambará                 | -0,0521      | 0,0303              |
| 197°    | Coronel Vivida          | -0,0527      | 0,0303              |
| 198°    | Terra Roxa              | -0,0532      | 0,0302              |
| 199°    | Nova Esperança          | -0,0536      | 0,0302              |
| 200°    | Nova Aliança do Ivaí    | -0,0537      | 0,0302              |

continua

| POSIÇÃO | MUNICÍPIO                  | ESCORE FINAL | INDICADOR SINTÉTICO |
|---------|----------------------------|--------------|---------------------|
| 201º    | Cafeara                    | -0,0547      | 0,0301              |
| 202º    | Borrazópolis               | -0,0573      | 0,0299              |
| 203º    | Tomazina                   | -0,0578      | 0,0299              |
| 204º    | Missal                     | -0,0583      | 0,0298              |
| 205º    | Cruzeiro do Sul            | -0,0587      | 0,0298              |
| 206º    | Mauá da Serra              | -0,0591      | 0,0298              |
| 207º    | Ribeirão Claro             | -0,0608      | 0,0296              |
| 208º    | Nova Laranjeiras           | -0,0621      | 0,0295              |
| 209º    | Formosa do Oeste           | -0,0642      | 0,0293              |
| 210º    | Piraí do Sul               | -0,0664      | 0,0292              |
| 211º    | Ivaté                      | -0,0675      | 0,0291              |
| 212º    | Loanda                     | -0,0678      | 0,0291              |
| 213º    | Maria Helena               | -0,0698      | 0,0289              |
| 214º    | Chopinzinho                | -0,0710      | 0,0288              |
| 215º    | Piên                       | -0,0738      | 0,0286              |
| 216º    | Perobal                    | -0,0740      | 0,0285              |
| 217º    | Mandaguari                 | -0,0748      | 0,0285              |
| 218º    | Vitorino                   | -0,0755      | 0,0284              |
| 219º    | Guaraci                    | -0,0757      | 0,0284              |
| 220º    | Turvo                      | -0,0759      | 0,0284              |
| 221º    | Rio Azul                   | -0,0767      | 0,0283              |
| 222º    | Japurá                     | -0,0768      | 0,0283              |
| 223º    | Brasilândia do Sul         | -0,0778      | 0,0282              |
| 224º    | Cornélio Procópio          | -0,0782      | 0,0282              |
| 225º    | Godoy Moreira              | -0,0793      | 0,0281              |
| 226º    | Novo Itacolomi             | -0,0822      | 0,0279              |
| 227º    | Santa Helena               | -0,0856      | 0,0276              |
| 228º    | Castro                     | -0,0899      | 0,0272              |
| 229º    | Florestópolis              | -0,0908      | 0,0272              |
| 230º    | São Sebastião da Amoreira  | -0,0910      | 0,0272              |
| 231º    | Rondon                     | -0,0914      | 0,0271              |
| 232º    | Guaraniaçu                 | -0,0933      | 0,0270              |
| 233º    | Nova Esperança do Sudoeste | -0,0942      | 0,0269              |
| 234º    | Porto Amazonas             | -0,0943      | 0,0269              |
| 235º    | Indianópolis               | -0,0955      | 0,0268              |
| 236º    | Alto Paraíso               | -0,0966      | 0,0267              |
| 237º    | Peabiru                    | -0,0977      | 0,0266              |
| 238º    | Bom Sucesso                | -0,0988      | 0,0265              |
| 239º    | Marilândia do Sul          | -0,1013      | 0,0263              |
| 240º    | Nova América da Colina     | -0,1017      | 0,0263              |

continua

| POSIÇÃO | MUNICÍPIO                | ESCORE FINAL | INDICADOR SINTÉTICO |
|---------|--------------------------|--------------|---------------------|
| 241°    | Corbélia                 | -0,1040      | 0,0261              |
| 242°    | Assaí                    | -0,1056      | 0,0260              |
| 243°    | Guapirama                | -0,1065      | 0,0259              |
| 244°    | Nova Fátima              | -0,1074      | 0,0258              |
| 245°    | Campo do Tenente         | -0,1101      | 0,0256              |
| 246°    | Floraí                   | -0,1103      | 0,0256              |
| 247°    | Realeza                  | -0,1113      | 0,0255              |
| 248°    | São Miguel do Iguaçu     | -0,1137      | 0,0253              |
| 249°    | Contenda                 | -0,1145      | 0,0252              |
| 250°    | Siqueira Campos          | -0,1161      | 0,0251              |
| 251°    | Três Barras do Paraná    | -0,1169      | 0,0250              |
| 252°    | Tupãssi                  | -0,1169      | 0,0250              |
| 253°    | Honório Serpa            | -0,1177      | 0,0250              |
| 254°    | Kaloré                   | -0,1185      | 0,0249              |
| 255°    | São Pedro do Paraná      | -0,1186      | 0,0249              |
| 256°    | Capitão Leônidas Marques | -0,1197      | 0,0248              |
| 257°    | Sulina                   | -0,1198      | 0,0248              |
| 258°    | Pinhalão                 | -0,1210      | 0,0247              |
| 259°    | Sengés                   | -0,1211      | 0,0247              |
| 260°    | Teixeira Soares          | -0,1213      | 0,0247              |
| 261°    | Santo Antônio do Caiuá   | -0,1216      | 0,0247              |
| 262°    | Salto do Itararé         | -0,1236      | 0,0245              |
| 263°    | Santa Tereza do Oeste    | -0,1265      | 0,0243              |
| 264°    | Santa Izabel do Oeste    | -0,1291      | 0,0240              |
| 265°    | Douradina                | -0,1297      | 0,0240              |
| 266°    | São Manoel do Paraná     | -0,1305      | 0,0239              |
| 267°    | Ouro Verde do Oeste      | -0,1321      | 0,0238              |
| 268°    | Palmeira                 | -0,1322      | 0,0238              |
| 269°    | Porto Barreiro           | -0,1334      | 0,0237              |
| 270°    | Tamarana                 | -0,1358      | 0,0235              |
| 271°    | Palmas                   | -0,1360      | 0,0235              |
| 272°    | Quatro Pontes            | -0,1363      | 0,0235              |
| 273°    | Flor da Serra do Sul     | -0,1375      | 0,0234              |
| 274°    | Tapejara                 | -0,1375      | 0,0234              |
| 275°    | Porecatu                 | -0,1381      | 0,0233              |
| 276°    | Arapoti                  | -0,1383      | 0,0233              |
| 277°    | Jesuítas                 | -0,1383      | 0,0233              |
| 278°    | Ipiranga                 | -0,1386      | 0,0233              |
| 279°    | Marumbi                  | -0,1389      | 0,0233              |
| 280°    | Uniflor                  | -0,1393      | 0,0232              |

continua

| POSIÇÃO | MUNICÍPIO                   | ESCORE FINAL | INDICADOR SINTÉTICO |
|---------|-----------------------------|--------------|---------------------|
| 281°    | Guaratuba                   | -0,1394      | 0,0232              |
| 282°    | Bom Sucesso do Sul          | -0,1408      | 0,0231              |
| 283°    | Laranjeiras do Sul          | -0,1410      | 0,0231              |
| 284°    | Itapejara d'Oeste           | -0,1424      | 0,0230              |
| 285°    | Lapa                        | -0,1426      | 0,0229              |
| 286°    | Guairaçá                    | -0,1427      | 0,0229              |
| 287°    | Jacarezinho                 | -0,1433      | 0,0229              |
| 288°    | Andirá                      | -0,1456      | 0,0227              |
| 289°    | Mandaguaçu                  | -0,1482      | 0,0225              |
| 290°    | Campo Bonito                | -0,1485      | 0,0225              |
| 291°    | Marilena                    | -0,1496      | 0,0224              |
| 292°    | Jaguapitã                   | -0,1501      | 0,0223              |
| 293°    | Fazenda Rio Grande          | -0,1530      | 0,0221              |
| 294°    | Santa Cruz de Monte Castelo | -0,1533      | 0,0221              |
| 295°    | São Mateus do Sul           | -0,1534      | 0,0221              |
| 296°    | Altônia                     | -0,1546      | 0,0220              |
| 297°    | Pato Bragado                | -0,1547      | 0,0220              |
| 298°    | Floresta                    | -0,1551      | 0,0219              |
| 299°    | Imbituva                    | -0,1562      | 0,0218              |
| 300°    | Rancho Alegre D'Oeste       | -0,1570      | 0,0218              |
| 301°    | Bela Vista do Paraíso       | -0,1573      | 0,0217              |
| 302°    | Foz do Jordão               | -0,1578      | 0,0217              |
| 303°    | General Carneiro            | -0,1599      | 0,0215              |
| 304°    | Antonina                    | -0,1605      | 0,0215              |
| 305°    | Carlópolis                  | -0,1605      | 0,0215              |
| 306°    | Campina da Lagoa            | -0,1623      | 0,0213              |
| 307°    | Juranda                     | -0,1625      | 0,0213              |
| 308°    | Mamborê                     | -0,1628      | 0,0213              |
| 309°    | Morretes                    | -0,1657      | 0,0211              |
| 310°    | Enéas Marques               | -0,1661      | 0,0210              |
| 311°    | Alvorada do Sul             | -0,1683      | 0,0209              |
| 312°    | Matinhos                    | -0,1684      | 0,0208              |
| 313°    | Verê                        | -0,1609      | 0,0208              |
| 314°    | Piraquara                   | -0,1699      | 0,0207              |
| 315°    | Doutor Camargo              | -0,1711      | 0,0206              |
| 316°    | Guaíra                      | -0,1717      | 0,0206              |
| 317°    | Iracema do Oeste            | -0,1722      | 0,0205              |
| 318°    | Fênix                       | -0,1729      | 0,0205              |
| 319°    | Japira                      | -0,1748      | 0,0203              |
| 320°    | Barracão                    | -0,1757      | 0,0202              |

continua

| POSIÇÃO | MUNICÍPIO                 | ESCORE FINAL | INDICADOR SINTÉTICO |
|---------|---------------------------|--------------|---------------------|
| 321°    | Santana do Itararé        | -0,1785      | 0,0200              |
| 322°    | São Tomé                  | -0,1794      | 0,0199              |
| 323°    | Bituruna                  | -0,1798      | 0,0199              |
| 324°    | Nova Aurora               | -0,1821      | 0,0197              |
| 325°    | Diamante do Norte         | -0,1826      | 0,0197              |
| 326°    | Cruz Machado              | -0,1837      | 0,0196              |
| 327°    | Califórnia                | -0,1839      | 0,0196              |
| 328°    | Quinta do Sol             | -0,1847      | 0,0195              |
| 329°    | Assis Chateaubriand       | -0,1850      | 0,0195              |
| 330°    | Rio Bom                   | -0,1861      | 0,0194              |
| 331°    | Ampére                    | -0,1915      | 0,0190              |
| 332°    | Matelândia                | -0,1924      | 0,0189              |
| 333°    | Engenheiro Beltrão        | -0,1964      | 0,0186              |
| 334°    | Mercedes                  | -0,1968      | 0,0185              |
| 335°    | Terra Rica                | -0,1971      | 0,0185              |
| 336°    | Salgado Filho             | -0,1975      | 0,0185              |
| 337°    | Jaboti                    | -0,1976      | 0,0185              |
| 338°    | Pontal do Paraná          | -0,1985      | 0,0184              |
| 339°    | Paraíso do Norte          | -0,2002      | 0,0182              |
| 340°    | Santo Inácio              | -0,2026      | 0,0181              |
| 341°    | Anahy                     | -0,2027      | 0,0180              |
| 342°    | São Pedro do Ivaí         | -0,2036      | 0,0180              |
| 343°    | Entre Rios do Oeste       | -0,2050      | 0,0179              |
| 344°    | Santa Terezinha de Itaipu | -0,2057      | 0,0178              |
| 345°    | Goioerê                   | -0,2070      | 0,0177              |
| 346°    | Alto Paraná               | -0,2076      | 0,0176              |
| 347°    | Cambira                   | -0,2087      | 0,0176              |
| 348°    | Jussara                   | -0,2136      | 0,0172              |
| 349°    | Flórida                   | -0,2177      | 0,0168              |
| 350°    | Ângulo                    | -0,2180      | 0,0168              |
| 351°    | Rio Branco do Sul         | -0,2200      | 0,0166              |
| 352°    | Reserva do Iguaçu         | -0,2202      | 0,0166              |
| 353°    | Tibagi                    | -0,2216      | 0,0165              |
| 354°    | São José das Palmeiras    | -0,2227      | 0,0164              |
| 355°    | Salto do Lontra           | -0,2240      | 0,0163              |
| 356°    | Santa Cecília do Pavão    | -0,2250      | 0,0162              |
| 357°    | São João                  | -0,2258      | 0,0162              |
| 358°    | Medianeira                | -0,2260      | 0,0161              |
| 359°    | São Carlos do Ivaí        | -0,2331      | 0,0156              |
| 360°    | Atalaia                   | -0,2354      | 0,0154              |

continua

| POSIÇÃO | MUNICÍPIO                 | ESCORE FINAL | INDICADOR SINTÉTICO |
|---------|---------------------------|--------------|---------------------|
| 361°    | Miraselva                 | -0,2361      | 0,0153              |
| 362°    | Itaipulândia              | -0,2401      | 0,0150              |
| 363°    | Tamboara                  | -0,2424      | 0,0148              |
| 364°    | Serranópolis do Iguaçu    | -0,2450      | 0,0146              |
| 365°    | Paranapoema               | -0,2467      | 0,0145              |
| 366°    | Marmeleiro                | -0,2472      | 0,0144              |
| 367°    | Campo Magro               | -0,2489      | 0,0143              |
| 368°    | Carambeí                  | -0,2530      | 0,0139              |
| 369°    | Paula Freitas             | -0,2540      | 0,0139              |
| 370°    | Paíçandu                  | -0,2554      | 0,0137              |
| 371°    | Boa Esperança do Iguaçu   | -0,2566      | 0,0136              |
| 372°    | Ivatuba                   | -0,2588      | 0,0135              |
| 373°    | Lupionópolis              | -0,2608      | 0,0133              |
| 374°    | Santa Inês                | -0,2719      | 0,0124              |
| 375°    | Nossa Senhora das Graças  | -0,2754      | 0,0121              |
| 376°    | Dois Vizinhos             | -0,2760      | 0,0121              |
| 377°    | Jataizinho                | -0,2770      | 0,0120              |
| 378°    | Maripá                    | -0,2797      | 0,0118              |
| 379°    | Virmond                   | -0,2858      | 0,0113              |
| 380°    | Iguaraçu                  | -0,2863      | 0,0112              |
| 381°    | Quatro Barras             | -0,2912      | 0,0108              |
| 382°    | Balsa Nova                | -0,2915      | 0,0108              |
| 383°    | Campina Grande do Sul     | -0,2959      | 0,0104              |
| 384°    | Palotina                  | -0,2966      | 0,0104              |
| 385°    | Ubiratã                   | -0,2987      | 0,0102              |
| 386°    | Sabáudia                  | -0,3086      | 0,0094              |
| 387°    | Munhoz de Melo            | -0,3117      | 0,0092              |
| 388°    | Lobato                    | -0,3123      | 0,0091              |
| 389°    | Rio Negro                 | -0,3220      | 0,0083              |
| 390°    | Paranacity                | -0,3279      | 0,0078              |
| 391°    | Pitangueiras              | -0,3356      | 0,0072              |
| 392°    | Cafelândia                | -0,3368      | 0,0071              |
| 393°    | Jaguariaíva               | -0,3405      | 0,0068              |
| 394°    | Itambé                    | -0,3408      | 0,0068              |
| 395°    | Nova Londrina             | -0,3495      | 0,0061              |
| 396°    | Porto Rico                | -0,3759      | 0,0039              |
| 397°    | Renascença                | -0,3764      | 0,0039              |
| 398°    | Prado Ferreira            | -0,3972      | 0,0022              |
| 399°    | Presidente Castelo Branco | -0,4239      | 0,0000              |

## 5 CONCLUSÕES

Por meio da análise fatorial foram determinados três fatores sintéticos relacionados à matriz de dados de dimensão  $399 \times 58$ . Assim, foi possível traçar os perfis dos municípios do estado do Paraná. E a partir da análise dos indicadores de economia, infraestrutura e educação; indicador de desenvolvimento humano e o indicador de envelhecimento populacional, foram estabelecidos quais os municípios com alto ou baixo potencial de desenvolvimento nas áreas citadas.

Através dos valores dos escores fatoriais finais ponderados nota-se que Curitiba, Londrina, Maringá, Ponta Grossa, São José dos Pinhais, Cascavel, Foz do Iguaçu, Araucária e Colombo são os municípios com maior potencial de desenvolvimento em relação aos fatores estudados. Esses municípios estão entre os mais populosos do estado.

Em contra partida, os municípios de Presidente Castelo Branco, Prado Ferreira, Renascença, Porto Rico, Nova Londrina, Itambé, Jaguariaíva, Cafelândia, Pitangueiras e Paranacity atingiram os piores índices de desenvolvimento. Com exceção de Jaguariaíva, com aproximadamente 32 mil habitantes, Nova Londrina, com pouco mais de 13 mil habitantes e Cafelândia, 14 mil habitantes, os demais municípios que apresentaram esses índices, apresentam população entre 2,5 mil a 10,3 mil habitantes. O município de Presidente Castelo Branco, o qual ocupa a 399<sup>a</sup> posição no ranqueamento, está localizado na região metropolitana de Maringá.

Este estudo pode facilitar aplicação de mecanismos e tomada de decisão para o planejamento governamental, gerando promoção e alocação de investimentos a fim de melhorar o desenvolvimento dos 399 municípios

paranaenses e amenizar as distorções entre eles. Foi possível notar a relevância das grandes cidades, com os maiores valores de escores finais, caracterizadas pelo alto potencial de desenvolvimento econômico, de infraestrutura e educacional. E a relevância dos pequenos municípios em relação ao indicador caracterizado pelo envelhecimento populacional. Destaque para a capital do estado, pois alcançou o mais alto escore em relação aos três fatores estudados.



## REFERÊNCIAS

- AMARAL, M. K. **Aplicação da estatística multivariada na análise das obrigações condicionais do programa bolsa família**. 2006. II Encontro de Engenharia e Tecnologia dos Campos Gerais.
- BALBO, F. A. N. e. a. **Análise fatorial aplicada aos dados dos acidentes na BR-277**. 2010. SBPO, XLII, p. s/n.
- BOGO, R. L. e. a. **Análise de correlação canônica aplicada ao fluxo de tráfego veicular - estudo de caso da rodovia federal BR-116**. 2010. Asociación Argentina de Mecánica Computacional, XXIX, p. 2071-2081.
- CHAVES NETO, A. **Notas de aula de análise multivariada**. [S.l.]: Curitiba: UFPR, 2011.
- DRUCKER, P. F. **As Fronteiras da Administração: onde as decisões do amanhã estão sendo determinadas hoje**. [S.l.]: São Paulo: Pioneira, 1989.
- ESQUARCINI, R. **Classificação e ranqueamento dos municípios paranaenses segundo suas políticas públicas setoriais através da análise multivariada**. 2005. <[http://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/1892/DISSERTA%C3%87%C3%83O\\_ROG%C3%89RIO.pdf?sequence=1](http://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/1892/DISSERTA%C3%87%C3%83O_ROG%C3%89RIO.pdf?sequence=1)>. Acesso em 17 jul. 2016.
- FAVERO, L. P. e. a. **Análise de dados: modelagem multivariada para tomada de decisões**. [S.l.]: Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.
- FERREIRA, D. F. E. **Statística multivariada**. [S.l.]: Lavras: Editora UFLA, 2011.
- FREITAS, E. d. **Aspectos naturais do Paraná**. 2005. <<http://brasilescola.uol.com.br/brasil/aspectos-naturais-parana.htm>>. Acesso em 10 dez. 2015.
- GROBE, J. R. **O método de análise fatorial aplicado ao estudo de resultados de análise de solos**. 2006. Synergismus Scyentifica UTFPR , v. 1, p. 237-243.

HAIR, J. F. **Análise Multivariada de dados**. [S.l.]: Porto Alegre: Bookman, 2009.

IPARDES. **Anuário Estatístico do Estado do Paraná**. 2015. <[http://www.ipardes.pr.gov.br/anuario\\_2013/index.html](http://www.ipardes.pr.gov.br/anuario_2013/index.html)>. Acesso em 29 mar. 2015.

JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. [S.l.]: Ney Jersey: Prentice-Hall, 2002.

JOLLIFFE, I. T. **Principal component analysis**. [S.l.]: New York: Springer, 2002.

KAISER, H. F. **The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis**. [S.l.]: Psychometrika, v. 23, p. 187–200, 1958.

LATTIN, J.; CARROL, J. D.; GREEN, P. E. **Análise de dados multivariados**. [S.l.]: São Paulo: Cengage Learning, 2011.

MARQUES, J. M. **Notas de aula de análise multivariada aplicada à pesquisa**. [S.l.]: Curitiba: UFPR, 2015.

MINGOTI, S. **Análise de dados através de métodos de estatística multivariada: uma abordagem aplicada**. [S.l.]: Belo Horizonte: Editora UFMG, 2005.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. **Estatística básica**. [S.l.]: São Paulo: Saraiva, 2010.

OSBORNE, D.; GAEBLER, T. **Reinventando o governo**. [S.l.]: Brasília: MH Comunicação, 1995.

PROTASSIO, T. P. e. a. **Análise de correlação canônica entre características da madeira e do carvão vegetal de Eucalyptus**. 2012. Scientia Forestalis, v. 4, p. 317-326.

RENCHER, A. **Methods of multivariate analysis**. [S.l.]: New York: Wiley-Interscience, 2002.

SEHABER, V. F. **Análise estatística multivariada dos acidentes de trânsito da BR-376 no período entre os anos de 2009 e 2012**. 2013. <<http://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/32018/R%20-%20D%20-%20VANESSA%20FERREIRA%20SEHABER.pdf?sequence=1>>. Acesso em 17 jul. 2016.

SMAKA, C. **Aplicação da análise multivariada na identificação de fatores que influenciam no custo de um plano de saúde**. 2010. <<http://biblioteca.versila.com/9514088>>. Acesso em 10 jul. 2015.

SOARES, L. e. a. **Correlações canônicas de características agroindustriais em cana-de-açúcar**. 2007. *Acta Scientiarum Agronomy*, 29, p. 345-349.

TIMM, N. H. **Applied multivariate analysis**. [S.l.]: New York: Springer, 2002.

VALGAS, R. A. **Técnicas de agrupamento aplicadas no mapeamento da divergência genética de subpopulações de *Araucaria angustifolia* (Bert.) O. Ktze em Irati, PR e Caçador, SC por marcadores isoenzimáticos**. 2010. *Ciência e Natura*, UFSM, 32 (2): 35 - 50.

VERGARA, S. C. e. a. **Propostas para uma gestão pública municipal efetiva**. [S.l.]: Rio de Janeiro: Editora FGV, 2003.

VICINI, L. **Análise multivariada da teoria à prática**. 2005. <<http://w3.ufsm.br/adriano/livro/Caderno%20dedatico%20multivariada%20-%20LIVRO%20FINAL%201.pdf>>. Acesso em 14 mar. 2016.

WATHIER, J. L.; DELLAGLIO, D. D.; BANDEIRA, D. R. **Análise fatorial do inventário de depressão infantil (CDI) em amostra de jovens brasileiros**. [S.l.]: *Psicologia e Sociedade*: v. 7, p. 75-84, 2008.

## APÊNDICE A – CÓDIGO - ANÁLISE FATORIAL

```

1 function y=fator(X)
2 % Entrada de dados
3 disp(' *****')
4 disp(' *      OPÇÃO DE ENTRADA DE DADOS      *')
5 disp(' *****')
6 disp(' *    k = 1, para MATRIZ DE DADOS      *')
7 disp(' *    k = 2, para MATRIZ CORRELAÇÃO *')
8 disp(' *    k = 3, para MATRIZ COVARIÂNCIA *')
9 disp(' *****')
10 disp(' ')
11 disp(' ')
12 k=input('          ENTRAR COM A OPÇÃO k = ');
13 % Matriz correlação R
14 if k==1
15     R=corrcoef(X);
16 elseif k==3
17     S=X;
18     D=inv(diag(sqrt(diag(S))));
19     R=D*S*D;
20 elseif k==2
21     R=X;
22 else
23     disp('ERRO NA ENTRADA DE DADOS')
24 end
25 disp(' ')
26 disp(' ')
27 disp(' *****')
28 disp(' *    MATRIZ CORRELAÇÃO *')
29 disp(' *****')
30 pause
31 disp(' ')
32 n2=length(diag(R));
33 if n2<8
34     disp(R)
35     pause
36 elseif n2 < 15
37     disp(R(:,1:7))
38     pause
39     disp(R(:,8:n2))
40     pause
41 elseif n2 < 22
42     disp(R(:,1:7))
43     pause
44     disp(R(:,8:14))
45     pause

```

```

46     disp(R(:,15:n2))
47     pause
48     else
49         disp(R)
50         pause
51     end
52 % Autovalores e autovetores de R
53 [E2,D2]=eig(R);
54 [dd2,i2]=sort(diag(D2));
55 dd2=flipud(dd2)';
56 i2=flipud(i2)';
57 E2=E2(:,i2);
58 % Matriz de pesos L
59 disp(' ')
60 disp(' ')
61 disp(' *****')
62 disp(' * CRITÉRIOS PARA SELEÇÃO DO NÚMERO DE FATORES *')
63 disp(' *****')
64 disp(' * CRITÉRIO 1: NÚMERO DE FATORES IGUAL AO NÚMERO *')
65 disp(' *           DE AUTOVALORES MAIORES QUE 1.      *')
66 disp(' * CRITÉRIO 2: NÚMERO DE FATORES IGUAL AO NÚMERO *')
67 disp(' *           DE AUTOVALORES MAIORES QUE V.      *')
68 disp(' * CRITÉRIO 3: NÚMERO DE FATORES QUE EXPLICAM  *')
69 disp(' *           PELO MENOS N% DA VARIÂNCIA TOTAL. *')
70 disp(' * CRITÉRIO 4: NÚMERO DE FATORES IGUAL A N.    *')
71 disp(' *****')
72 disp(' ')
73 disp(' ')
74 C = input('          ENTRAR COM O CRITÉRIO: 1, 2, 3 OU 4, C = ');
75 disp(' ')
76 disp(' ')
77 pause
78 n1=length(diag(R));
79 if C==1
80     nn=1;
81     k1=0;
82     for i=1:n1
83         if dd2(i)>nn
84             k1=k1+1;
85             d(k1)=dd2(k1);
86             n2=i;
87         else
88             end
89     end
90     i1=1:n2;
91     E3=E2(:,i1);
92 elseif C==2
93 V= input('          ENTRAR COM O VALOR DE V, V = ');
94 nn=V;
95 k1=0;
96 for i=1:n1
97     if dd2(i)>nn
98         k1=k1+1;
99         d(k1)=dd2(k1);
100         n2=i;
101     else
102         end

```

```

103     end
104     i1=1:n2;
105     E3=E2(:,i1);
106 elseif C==3
107 N = input('          ENTRAR COM O VALOR DE N EM %, N = ');
108     ddt=(dd2/(sum(dd2)))*100;
109     ddacum=cumsum(ddt);
110     for i=1:n1
111         if ddacum(i) >= N
112             n2 = i;
113             break
114         else
115             nf = 0;
116         end
117     end
118     i1=1:n2;
119     d=dd2(i1);
120     E3=E2(:,i1);
121 elseif C==4
122 N = input('          ENTRAR COM O NÚMERO N DE FATORES, N = ');
123     n2=N;
124     i1=1:n2;
125     d=dd2(1:N);
126     E3=E2(:,i1);
127 else
128     disp('ERRO NA ENTRADA DO CRITÉRIO!')
129     end
130     disp(' ')
131 % Matriz L dos pesos
132 L=E3*diag(sqrt(d));
133 % Comunalidades h2
134 if n2==1
135     h2=L.^2;
136 else
137     h2=(sum((L.^2)'))';
138 end
139 % Variâncias específicas
140 um=ones(n1,1);
141 psi=um-h2;
142 % Proporção acumulada
143 s1=sum(dd2);
144 sss=s1;
145 c3=(cumsum(d)/s1)*100;
146 % Identificação das variáveis
147 var=1:n1;
148 c=[var' L h2 psi];
149 % Coef. dos escores fatoriais e escores fatoriais
150 coef=(inv(L'*L))*L'; % Coeficientes
151 if k==1
152     xm=mean(X);
153     dp=inv(diag(sqrt(diag(cov(X)))));
154     [mm1,nn1]=size(X);
155     for i=1:nn1
156         Z(:,i)=X(:,i)-xm(i);
157     end
158     Z=Z*dp;
159     ZZZ=Z;

```

```

160     f=(coef*Z')'; % Escores fatoriais
161 % Escore final ponderado
162     prop=d/s1;
163     escf=f*prop';
164 % Escore final ponderado ordenado com identificação
165 [escord, ident]=sort(escf);
166     else
167         end
168 % Matriz dos resíduos
169 res=R-L*L'-diag(psi);
170 disp(' *****')
171 disp(' * ANÁLISE FATORIAL - MÉTODO DAS COMPONENTES PRINCIPAIS *')
172 disp(' *****')
173 pause
174 disp(' ')
175 if n2>18
176     disp(' *****')
177     disp(' * PESOS ESTIMADOS *')
178     disp(' *****')
179     pause
180     disp(' ')
181     disp(L)
182     pause
183     disp(' *****')
184     disp(' * COMUNALIDADES *')
185     disp(' *****')
186     pause
187     disp(' ')
188     disp(h2)
189     pause
190     disp(' *****')
191     disp(' * VARIÂNCIAS ESPECÍFICAS *')
192     disp(' *****')
193     pause
194     disp(' ')
195     disp(psi)
196     pause
197     disp(' *****')
198     disp(' * AUTOVALORES *')
199     disp(' *****')
200     disp(' ')
201     pause
202     disp(d)
203     pause
204     disp(' *****')
205     disp(' * PROPORÇÕES ACUMULADAS (VARIÂNCIAS) *')
206     disp(' *****')
207     pause
208     disp(' ')
209     disp(c3)
210     pause
211 else
212     kkk=0;
213 end
214 if n2==1
215 disp(' -----')
216 disp(' VAR. | PESO ESTIMADO | COM. | VAR.')
```

```

217 disp('          |          F1          |          | ESP. ')
218 disp('-----')
219 disp(sprintf('%7.0f | %10.4f | %4.2f | %4.2f\n',c'))
220 disp('-----')
221 disp(sprintf('    AUTO | %9.2f |',d))
222 disp('-----')
223 disp('    PROP. |          |')
224 disp(sprintf('    ACUM. | %10.2f |',c3))
225 disp('-----')
226 pause
227 elseif n2==2
228 disp('-----')
229 disp('    VAR. | PESOS ESTIMADOS | COM. | VAR. ')
230 disp('          |    F1    F2    |          | ESP. ')
231 disp('-----')
232 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',c'))
233 disp('-----')
234 disp(sprintf('    AUTO | %6.2f %6.2f |',d))
235 disp('-----')
236 disp('    PROP. |          |')
237 disp(sprintf('    ACUM. | %7.2f %7.2f |',c3))
238 disp('-----')
239 pause
240 elseif n2==3
241 disp('-----')
242 disp('    VAR. |          PESOS ESTIMADOS          | COM. | VAR. ')
243 disp('          |    F1    F2    F3    |          | ESP. ')
244 disp('-----')
245 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',c'))
246 disp('-----')
247 disp(sprintf('    AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f |',d))
248 disp('-----')
249 disp('    PROP. |          |')
250 disp(sprintf('    ACUM. | %7.2f %7.2f %7.2f |',c3))
251 disp('-----')
252 pause
253 elseif n2==4
254 disp('-----')
255 disp('    VAR. |          PESOS ESTIMADOS          | COM. | VAR. ')
256 disp('          |    F1    F2    F3    F4    |          | ESP. ')
257 disp('-----')
258 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',c'))
259 disp('-----')
260 disp(sprintf('    AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f |',d))
261 disp('-----')
262 disp('    PROP. |          |')
263 disp(sprintf('    ACUM. | %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f |',c3))
264 disp('-----')
265 pause
266 elseif n2==5
267 disp('-----')
268 disp('    VAR. |          PESOS ESTIMADOS          | COM. | VAR. ')
269 disp('          |    F1    F2    F3    F4    F5    |          | ESP. ')
270 disp('-----')
271 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',c'))
272 disp('-----')
273 disp(sprintf('    AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f |',d))

```



```

274 disp(' -----')
275 disp('  PROP. |                                     |')
276 disp(sprintf('  ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f |',c3))
277 disp(' -----')
278 pause
279 elseif n2==6
280 disp(' -----')
281 disp('  VAR. |                PESOS ESTIMADOS                | COM. | VAR.>')
282 disp('      |   F1      F2      F3      F4      F5      F6 |     | ESP.>')
283 disp(' -----')
284 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',c'))
285 disp(' -----')
286 disp(sprintf('  AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f |',d))
287 disp(' -----')
288 disp('  PROP. |                                     |')
289 disp(sprintf('  ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f |',c3))
290 disp(' -----')
291 pause
292 elseif n2>6
293 dd=d(:,1:6);
294 c4=c3(:,1:6);
295 if n2==7
296 cc=c(:,[1:7 9 10]);
297 elseif n2==8
298 cc=c(:,[1:7 10 11]);
299 elseif n2==9
300 cc=c(:,[1:7 11 12]);
301 elseif n2==10
302 cc=c(:,[1:7 12 13]);
303 elseif n2==11
304 cc=c(:,[1:7 13 14]);
305 elseif n2==12
306 cc=c(:,[1:7 14 15]);
307 elseif n2==13
308 cc=c(:,[1:7 15 16]);
309 elseif n2==14
310 cc=c(:,[1:7 16 17]);
311 elseif n2==15
312 cc=c(:,[1:7 17 18]);
313 elseif n2==16
314 cc=c(:,[1:7 18 19]);
315 elseif n2==17
316 cc=c(:,[1:7 19 20]);
317 elseif n2==18
318 cc=c(:,[1:7 20 21]);
319 end
320 end
321 if n2>6
322 M=1;
323 if n2<18
324 disp(' -----')
325 disp('  VAR. |                PESOS ESTIMADOS                | COM. | VAR.>')
326 disp('      |   F1      F2      F3      F4      F5      F6 |     | ESP.>')
327 disp(' -----')
328 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cc'))
329 disp(' -----')
330 disp(sprintf('  AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f |',dd))

```

```

331 disp(' -----')
332 disp('  PROP. |                                     |')
333 disp(sprintf('  ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f |',c4))
334 disp(' -----')
335 pause
336 else
337 end
338 else
339 end
340 if n2==7
341 cd=c(:, [1 8 9 10]);
342 dc=d(:,7);
343 c5=c3(:,7);
344 disp(' -----')
345 disp('  VAR. | PESO ESTIMADO | COM. | VAR. ')
346 disp('      |      F7      |     | ESP. ')
347 disp(' -----')
348 disp(sprintf('%7.0f | %10.4f | %4.2f | %4.2f\n',cd'))
349 disp(' -----')
350 disp(sprintf('  AUTO | %9.2f |',dc))
351 disp(' -----')
352 disp('  PROP. |                                     |')
353 disp(sprintf('  ACUM. | %10.2f |',c5))
354 disp(' -----')
355 pause
356 elseif n2==8
357 cd=c(:, [1 8:11]);
358 dc=d(:,7:8);
359 c5=c3(:,7:8);
360 disp(' -----')
361 disp('  VAR. | PESOS ESTIMADOS | COM. | VAR. ')
362 disp('      |      F7      F8      |     | ESP. ')
363 disp(' -----')
364 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cd'))
365 disp(' -----')
366 disp(sprintf('  AUTO | %6.2f %6.2f |',dc))
367 disp(' -----')
368 disp('  PROP. |                                     |')
369 disp(sprintf('  ACUM. |%7.2f %7.2f |',c5))
370 disp(' -----')
371 pause
372 elseif n2==9
373 cd=c(:, [1 8:12]);
374 dc=d(:,7:9);
375 c5=c3(:,7:9);
376 disp(' -----')
377 disp('  VAR. |      PESOS ESTIMADOS      | COM. | VAR. ')
378 disp('      |      F7      F8      F9      |     | ESP. ')
379 disp(' -----')
380 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cd'))
381 disp(' -----')
382 disp(sprintf('  AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f |',dc))
383 disp(' -----')
384 disp('  PROP. |                                     |')
385 disp(sprintf('  ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f |',c5))
386 disp(' -----')
387 pause

```

```

388     elseif n2==10
389 cd=c(:,[1 8:13]);
390 dc=d(7:10);
391 c5=c3(7:10);
392 disp('-----')
393 disp('  VAR. |          PESOS ESTIMADOS          | COM. | VAR. ')
394 disp('      | F7      F8      F9      F10 |      | ESP. ')
395 disp('-----')
396 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cd'))
397 disp('-----')
398 disp(sprintf('  AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f | ',dc))
399 disp('-----')
400 disp('  PROP. |          | ')
401 disp(sprintf('  ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f | ',c5))
402 disp('-----')
403 pause
404     elseif n2==11
405 cd=c(:,[1 8:14]);
406 dc=d(7:11);
407 c5=c3(7:11);
408 disp('-----')
409 disp('  VAR. |          PESOS ESTIMADOS          | COM. | VAR. ')
410 disp('      | F7      F8      F9      F10      F11 |      | ESP. ')
411 disp('-----')
412 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cd'))
413 disp('-----')
414 disp(sprintf('  AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f | ',dc))
415 disp('-----')
416 disp('  PROP. |          | ')
417 disp(sprintf('  ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f | ',c5))
418 disp('-----')
419 pause
420     elseif n2==12
421 cd=c(:,[1 8:15]);
422 dc=d(7:12);
423 c5=c3(7:12);
424 disp('-----')
425 disp('  VAR. |          PESOS ESTIMADOS          | COM. | VAR. ')
426 disp('      | F7      F8      F9      F10      F11      F12 |      | ESP. ')
427 disp('-----')
428 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cd'))
429 disp('-----')
430 disp(sprintf('  AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f | ',dc))
431 disp('-----')
432 disp('  PROP. |          | ')
433 disp(sprintf('  ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f | ',c5))
434 disp('-----')
435 pause
436     elseif n2>12
437 d6=d(7:12);
438 c6=c3(7:12);
439     if n2==13
440 cc6=c(:,[1 8:13 15 16]);
441     elseif n2==14
442 cc6=c(:,[1 8:13 16 17]);
443     elseif n2==15
444 cc6=c(:,[1 8:13 17 18]);

```

```

445     elseif n2==16
446 cc6=c(:, [1 8:13 18 19]);
447     elseif n2==17
448 cc6=c(:, [1 8:13 19 20]);
449     elseif n2==18
450 cc6=c(:, [1 8:13 20 21]);
451     end
452 end
453 if n2<18
454     if n2>12
455 disp(' -----')
456 disp('   VAR. |           PESOS ESTIMADOS           | COM. | VAR. ')
457 disp('       |   F7       F8       F9       F10       F11       F12 |   | ESP. ')
458 disp(' -----')
459 disp(sprintf('%7.0f   | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n', cc6'))
460 disp(' -----')
461 disp(sprintf('   AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f | ', d6))
462 disp(' -----')
463 disp('   PROP. |           | ')
464 disp(sprintf('   ACUM. | %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f | ', c6))
465 disp(' -----')
466 pause
467 else
468     end
469     else
470     kkkk=0;
471 end
472     if n2==13
473 cc7=c(:, [1 14:16]);
474 d7=d(13);
475 c7=c3(13);
476 disp(' -----')
477 disp('   VAR. | PESO ESTIMADO | COM. | VAR. ')
478 disp('       |   F13       |   | ESP. ')
479 disp(' -----')
480 disp(sprintf('%7.0f   | %10.4f   | %4.2f | %4.2f\n', cc7'))
481 disp(' -----')
482 disp(sprintf('   AUTO | %9.2f   | ', d7))
483 disp(' -----')
484 disp('   PROP. |           | ')
485 disp(sprintf('   ACUM. | %10.2f   | ', c7))
486 disp(' -----')
487 pause
488     elseif n2==14
489 cc7=c(:, [1 14:17]);
490 d7=d(13:14);
491 c7=c3(13:14);
492 disp(' -----')
493 disp('   VAR. | PESOS ESTIMADOS | COM. | VAR. ')
494 disp('       |   F13       F14   |   | ESP. ')
495 disp(' -----')
496 disp(sprintf('%7.0f   | %7.4f %7.4f   | %4.2f | %4.2f\n', cc7'))
497 disp(' -----')
498 disp(sprintf('   AUTO | %6.2f %6.2f   | ', d7))
499 disp(' -----')
500 disp('   PROP. |           | ')
501 disp(sprintf('   ACUM. | %7.2f %7.2f   | ', c7))

```

```

502 disp(' -----')
503 pause
504     elseif n2==15
505 cc7=c(:, [1 14:18]);
506 d7=d(13:15);
507 c7=c3(13:15);
508 disp(' -----')
509 disp('   VAR. |   PESOS ESTIMADOS   | COM. | VAR. ')
510 disp('       | F13     F14     F15   |     | ESP. ')
511 disp(' -----')
512 disp(sprintf('%7.0f   | %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cc7'))
513 disp(' -----')
514 disp(sprintf('   AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f   |',d7))
515 disp(' -----')
516 disp('   PROP. |                               |')
517 disp(sprintf('   ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f   |',c7))
518 disp(' -----')
519 pause
520     elseif n2==16
521 cc7=c(:, [1 14:19]);
522 d7=d(13:16);
523 c7=c3(13:16);
524 disp(' -----')
525 disp('   VAR. |   PESOS ESTIMADOS   | COM. | VAR. ')
526 disp('       | F13     F14     F15     F16 |     | ESP. ')
527 disp(' -----')
528 disp(sprintf('%7.0f   | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cc7'))
529 disp(' -----')
530 disp(sprintf('   AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f |',d7))
531 disp(' -----')
532 disp('   PROP. |                               |')
533 disp(sprintf('   ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f |',c7))
534 disp(' -----')
535 pause
536     elseif n2==17
537 cc7=c(:, [1 14:20]);
538 d7=d(13:17);
539 c7=c3(13:17);
540 disp(' -----')
541 disp('   VAR. |   PESOS ESTIMADOS   | COM. | VAR. ')
542 disp('       | F13     F14     F15     F16     F17 |     | ESP. ')
543 disp(' -----')
544 disp(sprintf('%7.0f   | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cc7'))
545 disp(' -----')
546 disp(sprintf('   AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f |',d7))
547 disp(' -----')
548 disp('   PROP. |                               |')
549 disp(sprintf('   ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f |',c7))
550 disp(' -----')
551 pause
552     elseif n2==18
553 cc7=c(:, [1 14:21]);
554 d7=d(13:18);
555 c7=c3(13:18);
556 disp(' -----')
557 disp('   VAR. |   PESOS ESTIMADOS   | COM. | VAR. ')
558 disp('       | F13     F14     F15     F16     F17     F18 |     | ESP. ')

```

```

559 disp(' -----')
560 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cc7'))
561 disp(' -----')
562 disp(sprintf(' AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f |',d7))
563 disp(' -----')
564 disp(' PROP. | |')
565 disp(sprintf(' ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f |',c7))
566 disp(' -----')
567 end
568 disp(' ')
569 disp(' ')
570 disp(' *****')
571 disp(' * MATRIZ DOS RESÍDUOS *')
572 disp(' *****')
573 disp(' ')
574 disp(' ')
575 disp(res)
576 pause
577 disp(' *****')
578 disp(' * COEFICIENTES DOS ESCORES *')
579 disp(' * FATORIAIS *')
580 disp(' *****')
581 disp(' ')
582 disp(' ')
583 disp(coef')
584 pause
585 if k==1
586 disp(' ')
587 disp(' ')
588 disp(' *****')
589 disp(' * ESCORES FATORIAIS *')
590 disp(' *****')
591 disp(' ')
592 disp(' ')
593 nf=length(f);
594 ii=1:nf;
595 disp(f)
596 pause
597 disp(' ')
598 disp(' ')
599 disp(' *****')
600 disp(' * ESCORES FATORIAIS *')
601 disp(' * FINAIS PONDERADOS *')
602 disp(' *****')
603 disp(' ')
604 disp(' ')
605 idesc=[ii' escf];
606 disp(sprintf('%8.0f %10.4f\n',idesc'))
607 pause
608 disp(' ')
609 disp(' ')
610 disp(' *****')
611 disp(' * ESCORES FATORIAIS FINAIS *')
612 disp(' * PONDERADOS ORDENADOS *')
613 disp(' *****')
614 disp(' ')
615 disp(' ')

```

```

616 ides=[ident escord];
617 disp(sprintf('%12.0f %10.4f\n',ides'))
618 else
619     end
620 pause
621 [ml,nl]=size(L);
622 figure(1)
623     clf
624     plot(L(:,1),L(:,2),'r.','markersize',15)
625     grid
626     for i=1:ml
627         text(L(i,1),L(i,2)+0.05,num2str(i))
628     end
629     title('PESOS DOS FATORES: FATOR 1 versus FATOR 2')
630     xlabel('FATOR 1')
631     ylabel('FATOR 2')
632     pause
633 if nl>2
634 figure(2)
635     clf
636     plot(L(:,1),L(:,3),'r.','markersize',15)
637     grid
638     for i=1:ml
639         text(L(i,1),L(i,3)+0.05,num2str(i))
640     end
641     title('PESOS DOS FATORES: FATOR 1 versus FATOR 3')
642     xlabel('FATOR 1')
643     ylabel('FATOR 3')
644     pause
645 else
646     end
647     if k==1
648         [mf,nf]=size(f);
649         figure(3)
650         clf
651         plot(f(:,1),f(:,2),'r.','markersize',10)
652         grid
653         for i=1:mf
654             text(f(i,1),f(i,2)+0.08,num2str(i),'fontsize',10)
655         end
656         title('DISPERSÃO DOS ESCORES: FATOR1 versus FATOR2')
657         xlabel('ESCORE - FATOR1')
658         ylabel('ESCORE - FATOR2')
659         pause
660 if nl>2
661     figure(4)
662     clf
663     plot(f(:,1),f(:,3),'r.','markersize',10)
664     grid
665     for i=1:mf
666         text(f(i,1),f(i,3)+0.08,num2str(i),'fontsize',10)
667     end
668     title('DISPERSÃO DOS ESCORES: FATOR 1 versus FATOR 3')
669     xlabel('ESCORE - FATOR 1')
670     ylabel('ESCORE - FATOR 3')
671     pause
672 else

```

```

673     end
674 else
675 end
676 % Rotacao varimax
677 if n2>1
678 t=rota(L);
679 % Matriz L dos pesos rotacionados
680 L1=L*t;
681 % Comunalidades h2
682 if n2==1
683 h2=L1.^2;
684 else
685 h2=(sum((L1.^2)'))';
686 end
687 % Variâncias específicas
688 um=ones(n1,1);
689 psi=um-h2;
690 % Proporção acumulada
691 if n2==1
692 s1=L1.^2;
693 c3=(sum(s1))/n1;
694 dd=sum(s1);
695 else
696 s1=sum(L1.^2)/n1;
697 dd=sum(L1.^2);
698 c3=(cumsum(s1))*100;
699 end
700 % Identificação das variáveis
701 var=1:n1;
702 c=[var' L1 h2 psi];
703 disp(' ***** ')
704 disp(' * ROTAÇÃO VARIMAX * ')
705 disp(' ***** ')
706 disp(' ')
707 disp(dd)
708 disp(' ***** ')
709 disp(' * ANÁLISE FATORIAL - MÉTODO DAS COMPONENTES PRINCIPAIS * ')
710 disp(' ***** ')
711 pause
712 disp(' ')
713 if n2>18
714 disp(' ***** ')
715 disp(' * PESOS ESTIMADOS * ')
716 disp(' ***** ')
717 pause
718 disp(' ')
719 disp(L)
720 pause
721 disp(' ***** ')
722 disp(' * COMUNALIDADES * ')
723 disp(' ***** ')
724 pause
725 disp(' ')
726 disp(h2)
727 pause
728 disp(' ***** ')
729 disp(' * VARIÂNCIAS ESPECÍFICAS * ')

```



```

730     disp(' *****')
731     pause
732     disp(' ')
733     disp(psi)
734     pause
735     disp(' *****')
736     disp(' * AUTOVALORES *')
737     disp(' *****')
738     disp(' ')
739     pause
740     disp(d)
741     pause
742     disp(' *****')
743     disp(' * PROPORÇÕES ACUMULADAS (VARIÂNCIAS) *')
744     disp(' *****')
745     pause
746     disp(' ')
747     disp(c3)
748     pause
749 else
750     end
751 end
752     if n2==1
753 disp(' -----')
754 disp('     VAR. | PESO ESTIMADO | COM. | VAR. ')
755 disp('         |      F1      |      | ESP. ')
756 disp(' -----')
757 disp(sprintf('%7.0f | %10.4f | %4.2f | %4.2f\n',c'))
758 disp(' -----')
759 disp(sprintf('     AUTO | %9.2f |',d))
760 disp(' -----')
761 disp('     PROP. | |')
762 disp(sprintf('     ACUM. | %10.2f |',c3))
763 disp(' -----')
764 pause
765     elseif n2==2
766 disp(' -----')
767 disp('     VAR. | PESOS ESTIMADOS | COM. | VAR. ')
768 disp('         |      F1      F2      |      | ESP. ')
769 disp(' -----')
770 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',c'))
771 disp(' -----')
772 disp(sprintf('     AUTO | %6.2f %6.2f |',d))
773 disp(' -----')
774 disp('     PROP. | |')
775 disp(sprintf('     ACUM. | %7.2f %7.2f |',c3))
776 disp(' -----')
777 pause
778     elseif n2==3
779 disp(' -----')
780 disp('     VAR. |      PESOS ESTIMADOS      | COM. | VAR. ')
781 disp('         |      F1      F2      F3      |      | ESP. ')
782 disp(' -----')
783 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',c'))
784 disp(' -----')
785 disp(sprintf('     AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f |',d))
786 disp(' -----')

```

```

787 disp(' PROP. | |')
788 disp(sprintf(' ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f |',c3))
789 disp(' -----')
790 pause
791 elseif n2==4
792 disp(' -----')
793 disp(' VAR. | PESOS ESTIMADOS | COM. | VAR. ')
794 disp(' | F1 F2 F3 F4 | | ESP. ')
795 disp(' -----')
796 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',c'))
797 disp(' -----')
798 disp(sprintf(' AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f |',d))
799 disp(' -----')
800 disp(' PROP. | |')
801 disp(sprintf(' ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f |',c3))
802 disp(' -----')
803 pause
804 elseif n2==5
805 disp(' -----')
806 disp(' VAR. | PESOS ESTIMADOS | COM. | VAR. ')
807 disp(' | F1 F2 F3 F4 F5 | | ESP. ')
808 disp(' -----')
809 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',c'))
810 disp(' -----')
811 disp(sprintf(' AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f |',d))
812 disp(' -----')
813 disp(' PROP. | |')
814 disp(sprintf(' ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f |',c3))
815 disp(' -----')
816 pause
817 elseif n2==6
818 disp(' -----')
819 disp(' VAR. | PESOS ESTIMADOS | COM. | VAR. ')
820 disp(' | F1 F2 F3 F4 F5 F6 | | ESP. ')
821 disp(' -----')
822 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',c'))
823 disp(' -----')
824 disp(sprintf(' AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f |',d))
825 disp(' -----')
826 disp(' PROP. | |')
827 disp(sprintf(' ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f |',c3))
828 disp(' -----')
829 pause
830 elseif n2>6
831 dd=d(:,1:6);
832 c4=c3(:,1:6);
833 if n2==7
834 cc=c(:,[1:7 9 10]);
835 elseif n2==8
836 cc=c(:,[1:7 10 11]);
837 elseif n2==9
838 cc=c(:,[1:7 11 12]);
839 elseif n2==10
840 cc=c(:,[1:7 12 13]);
841 elseif n2==11
842 cc=c(:,[1:7 13 14]);
843 elseif n2==12

```

```

844 cc=c(:,[1:7 14 15]);
845     elseif n2==13
846 cc=c(:,[1:7 15 16]);
847     elseif n2==14
848 cc=c(:,[1:7 16 17]);
849     elseif n2==15
850 cc=c(:,[1:7 17 18]);
851     elseif n2==16
852 cc=c(:,[1:7 18 19]);
853     elseif n2==17
854 cc=c(:,[1:7 19 20]);
855     elseif n2==18
856 cc=c(:,[1:7 20 21]);
857     end
858 end
859 if n2>6
860     M=1;
861     if n2<18
862 disp(' -----')
863 disp('  VAR. |          PESOS ESTIMADOS          | COM. | VAR. ')
864 disp('      | F1      F2      F3      F4      F5      F6 |     | ESP. ')
865 disp(' -----')
866 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cc'))
867 disp(' -----')
868 disp(sprintf('  AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f | ',dd))
869 disp(' -----')
870 disp('  PROP. |                                     | ')
871 disp(sprintf('  ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f | ',c4))
872 disp(' -----')
873 pause
874     else
875     end
876 else
877     end
878     if n2==7
879 cd=c(:,[1 8 9 10]);
880 dc=d(:,7);
881 c5=c3(:,7);
882 disp(' -----')
883 disp('  VAR. | PESO ESTIMADO | COM. | VAR. ')
884 disp('      | F7      |     | ESP. ')
885 disp(' -----')
886 disp(sprintf('%7.0f | %10.4f | %4.2f | %4.2f\n',cd'))
887 disp(' -----')
888 disp(sprintf('  AUTO | %9.2f | ',dc))
889 disp(' -----')
890 disp('  PROP. |                                     | ')
891 disp(sprintf('  ACUM. | %10.2f | ',c5))
892 disp(' -----')
893 pause
894     elseif n2==8
895 cd=c(:,[1 8:11]);
896 dc=d(:,7:8);
897 c5=c3(:,7:8);
898 disp(' -----')
899 disp('  VAR. | PESOS ESTIMADOS | COM. | VAR. ')
900 disp('      | F7      F8      |     | ESP. ')

```

```

901 disp(' -----')
902 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cd'))
903 disp(' -----')
904 disp(sprintf(' AUTO | %6.2f %6.2f |',dc))
905 disp(' -----')
906 disp(' PROP. | |')
907 disp(sprintf(' ACUM. |%7.2f %7.2f |',c5))
908 disp(' -----')
909 pause
910 elseif n2==9
911 cd=c(:,[1 8:12]);
912 dc=d(:,7:9);
913 c5=c3(:,7:9);
914 disp(' -----')
915 disp(' VAR. | PESOS ESTIMADOS | COM. | VAR. ')
916 disp(' | F7 F8 F9 | | ESP. ')
917 disp(' -----')
918 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cd'))
919 disp(' -----')
920 disp(sprintf(' AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f |',dc))
921 disp(' -----')
922 disp(' PROP. | |')
923 disp(sprintf(' ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f |',c5))
924 disp(' -----')
925 pause
926 elseif n2==10
927 cd=c(:,[1 8:13]);
928 dc=d(7:10);
929 c5=c3(7:10);
930 disp(' -----')
931 disp(' VAR. | PESOS ESTIMADOS | COM. | VAR. ')
932 disp(' | F7 F8 F9 F10 | | ESP. ')
933 disp(' -----')
934 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cd'))
935 disp(' -----')
936 disp(sprintf(' AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f |',dc))
937 disp(' -----')
938 disp(' PROP. | |')
939 disp(sprintf(' ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f |',c5))
940 disp(' -----')
941 pause
942 elseif n2==11
943 cd=c(:,[1 8:14]);
944 dc=d(7:11);
945 c5=c3(7:11);
946 disp(' -----')
947 disp(' VAR. | PESOS ESTIMADOS | COM. | VAR. ')
948 disp(' | F7 F8 F9 F10 F11 | | ESP. ')
949 disp(' -----')
950 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cd'))
951 disp(' -----')
952 disp(sprintf(' AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f |',dc))
953 disp(' -----')
954 disp(' PROP. | |')
955 disp(sprintf(' ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f |',c5))
956 disp(' -----')
957 pause

```

```

958     elseif n2==12
959 cd=c(:,[1 8:15]);
960 dc=d(7:12);
961 c5=c3(7:12);
962 disp(' -----')
963 disp('  VAR. |                PESOS ESTIMADOS                | COM. | VAR.>')
964 disp('      | F7      F8      F9      F10      F11      F12 |      | ESP.>')
965 disp(' -----')
966 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cd'))
967 disp(' -----')
968 disp(sprintf('  AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f | ',dc))
969 disp(' -----')
970 disp('  PROP. |                |')
971 disp(sprintf('  ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f | ',c5))
972 disp(' -----')
973 pause
974 elseif n2>12
975 d6=d(7:12);
976 c6=c3(7:12);
977     if n2==13
978 cc6=c(:,[1 8:13 15 16]);
979     elseif n2==14
980 cc6=c(:,[1 8:13 16 17]);
981     elseif n2==15
982 cc6=c(:,[1 8:13 17 18]);
983     elseif n2==16
984 cc6=c(:,[1 8:13 18 19]);
985     elseif n2==17
986 cc6=c(:,[1 8:13 19 20]);
987     elseif n2==18
988 cc6=c(:,[1 8:13 20 21]);
989     end
990 end
991 if n2<18
992     if n2>12
993 disp(' -----')
994 disp('  VAR. |                PESOS ESTIMADOS                | COM. | VAR.>')
995 disp('      | F7      F8      F9      F10      F11      F12 |      | ESP.>')
996 disp(' -----')
997 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cc6'))
998 disp(' -----')
999 disp(sprintf('  AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f | ',d6))
1000 disp(' -----')
1001 disp('  PROP. |                |')
1002 disp(sprintf('  ACUM. |%7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f | ',c6))
1003 disp(' -----')
1004 pause
1005 else
1006     end
1007     else
1008     kkkk=0;
1009 end
1010     if n2==13
1011 cc7=c(:,[1 14:16]);
1012 d7=d(13);
1013 c7=c3(13);
1014 disp(' -----')

```

```

1015 disp('      VAR. | PESO ESTIMADO | COM. | VAR. ')
1016 disp('      |      F13      |      | ESP. ')
1017 disp('-----')
1018 disp(sprintf('%7.0f | %10.4f | %4.2f | %4.2f\n',cc7'))
1019 disp('-----')
1020 disp(sprintf('      AUTO | %9.2f |',d7))
1021 disp('-----')
1022 disp('      PROP. |      |')
1023 disp(sprintf('      ACUM. | %10.2f |',c7))
1024 disp('-----')
1025 pause
1026     elseif n2==14
1027 cc7=c(:, [1 14:17]);
1028 d7=d(13:14);
1029 c7=c3(13:14);
1030 disp('-----')
1031 disp('      VAR. | PESOS ESTIMADOS | COM. | VAR. ')
1032 disp('      |      F13      F14      |      | ESP. ')
1033 disp('-----')
1034 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cc7'))
1035 disp('-----')
1036 disp(sprintf('      AUTO | %6.2f %6.2f |',d7))
1037 disp('-----')
1038 disp('      PROP. |      |')
1039 disp(sprintf('      ACUM. | %7.2f %7.2f |',c7))
1040 disp('-----')
1041 pause
1042     elseif n2==15
1043 cc7=c(:, [1 14:18]);
1044 d7=d(13:15);
1045 c7=c3(13:15);
1046 disp('-----')
1047 disp('      VAR. |      PESOS ESTIMADOS      | COM. | VAR. ')
1048 disp('      |      F13      F14      F15      |      | ESP. ')
1049 disp('-----')
1050 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cc7'))
1051 disp('-----')
1052 disp(sprintf('      AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f |',d7))
1053 disp('-----')
1054 disp('      PROP. |      |')
1055 disp(sprintf('      ACUM. | %7.2f %7.2f %7.2f |',c7))
1056 disp('-----')
1057 pause
1058     elseif n2==16
1059 cc7=c(:, [1 14:19]);
1060 d7=d(13:16);
1061 c7=c3(13:16);
1062 disp('-----')
1063 disp('      VAR. |      PESOS ESTIMADOS      | COM. | VAR. ')
1064 disp('      |      F13      F14      F15      F16      |      | ESP. ')
1065 disp('-----')
1066 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n',cc7'))
1067 disp('-----')
1068 disp(sprintf('      AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f |',d7))
1069 disp('-----')
1070 disp('      PROP. |      |')
1071 disp(sprintf('      ACUM. | %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f |',c7))

```

```

1072 disp(' -----')
1073 pause
1074     elseif n2==17
1075 cc7=c(:, [1 14:20]);
1076 d7=d(13:17);
1077 c7=c3(13:17);
1078 disp(' -----')
1079 disp('   VAR. |           PESOS ESTIMADOS           | COM. | VAR. ')
1080 disp('       | F13      F14      F15      F16      F17 |     | ESP. ')
1081 disp(' -----')
1082 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n', cc7'))
1083 disp(' -----')
1084 disp(sprintf('   AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f | ', d7))
1085 disp(' -----')
1086 disp('   PROP. |                               | ')
1087 disp(sprintf('   ACUM. | %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f | ', c7))
1088 disp(' -----')
1089 pause
1090     elseif n2==18
1091 cc7=c(:, [1 14:21]);
1092 d7=d(13:18);
1093 c7=c3(13:18);
1094 disp(' -----')
1095 disp('   VAR. |           PESOS ESTIMADOS           | COM. | VAR. ')
1096 disp('       | F13      F14      F15      F16      F17      F18 |     | ESP. ')
1097 disp(' -----')
1098 disp(sprintf('%7.0f | %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f %7.4f | %4.2f | %4.2f\n', cc7'))
1099 disp(' -----')
1100 disp(sprintf('   AUTO | %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f | ', d7))
1101 disp(' -----')
1102 disp('   PROP. |                               | ')
1103 disp(sprintf('   ACUM. | %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f %7.2f | ', c7))
1104 disp(' -----')
1105     end
1106 % Coef. dos escores fatoriais e escores fatoriais
1107     coef1=(inv(L1'*L1))*L1'; % Coeficientes
1108     if k==1
1109         f1=(coef1*ZZZ)'; % Escores fatoriais
1110 % Escore final ponderado
1111     prop1=d/sss;
1112     escf1=f1*prop1';
1113 % Escore final ponderado ordenado com identificação
1114     [escord1, ident1]=sort(escf1);
1115     else
1116         end
1117 % Matriz dos resíduos
1118     res1=R-L1*L1'-diag(psi);
1119     disp(' ')
1120     disp(' ')
1121     disp(' ***** ')
1122     disp(' *   MATRIZ DOS RESÍDUOS   * ')
1123     disp(' ***** ')
1124     disp(' ')
1125     disp(' ')
1126     disp(res1)
1127     pause
1128     disp(' ***** ')

```

```

1129 disp(' * COEFICIENTES DOS ESCORES *')
1130 disp(' *          FATORIAIS          *')
1131 disp(' *****')
1132 disp(' ')
1133 disp(' ')
1134 disp(coef1')
1135 pause
1136 if k==1
1137 disp(' ')
1138 disp(' ')
1139 disp(' *****')
1140 disp(' *          ESCORES FATORIAIS          *')
1141 disp(' *****')
1142 disp(' ')
1143 disp(' ')
1144 nf=length(f1);
1145 ii=1:nf;
1146 disp(f1)
1147 pause
1148 disp(' ')
1149 disp(' ')
1150 disp(' *****')
1151 disp(' *          ESCORES FATORIAIS          *')
1152 disp(' *          FINAIS PONDERADOS          *')
1153 disp(' *****')
1154 disp(' ')
1155 disp(' ')
1156 idesc1=[ii' escf1];
1157 disp(sprintf('%8.0f %10.4f\n',idesc1'))
1158 pause
1159 disp(' ')
1160 disp(' ')
1161 disp(' *****')
1162 disp(' *          ESCORES FATORIAIS FINAIS          *')
1163 disp(' *          PONDERADOS ORDENADOS          *')
1164 disp(' *****')
1165 disp(' ')
1166 disp(' ')
1167 ides1=[ident1 escord1];
1168 disp(sprintf('%12.0f %10.4f\n',ides1'))
1169 else
1170     end
1171 pause
1172 [ml,nl]=size(L);
1173 figure(5)
1174     clf
1175     plot(L(:,1),L(:,2),'r.','markersize',15)
1176     grid
1177     for i=1:ml
1178         text(L(i,1),L(i,2)+0.05,num2str(i))
1179     end
1180     title('PESOS DOS FATORES: FATOR 1 versus FATOR 2')
1181     xlabel('FATOR 1')
1182     ylabel('FATOR 2')
1183     pause
1184 if nl>2
1185 figure(6)

```



```

1186     clf
1187     plot(L(:,1),L(:,3),'r.','markersize',15)
1188     grid
1189     for i=1:m1
1190         text(L(i,1),L(i,3)+0.05,num2str(i))
1191     end
1192     title('PESOS DOS FATORES: FATOR 1 versus FATOR 3')
1193     xlabel('FATOR 1')
1194     ylabel('FATOR 3')
1195     pause
1196 else
1197     end
1198     if k==1
1199         [mf,nf]=size(f);
1200     figure(7)
1201         clf
1202         plot(f(:,1),f(:,2),'r.','markersize',10)
1203         grid
1204         for i=1:mf
1205             text(f(i,1),f(i,2)+0.08,num2str(i),'fontsize',10)
1206         end
1207         title('DISPERSÃO DOS ESCORES: FATOR1 versus FATOR2')
1208         xlabel('ESCORE - FATOR1')
1209         ylabel('ESCORE - FATOR2')
1210         pause
1211     if n1>2
1212         figure(8)
1213         clf
1214         plot(f(:,1),f(:,3),'r.','markersize',10)
1215         grid
1216         for i=1:mf
1217             text(f(i,1),f(i,3)+0.08,num2str(i),'fontsize',10)
1218         end
1219         title('DISPERSÃO DOS ESCORES: FATOR 1 versus FATOR 3')
1220         xlabel('ESCORE - FATOR 1')
1221         ylabel('ESCORE - FATOR 3')
1222         pause
1223     else
1224         end
1225     else
1226         end

```

## APÊNDICE B – TESTE DE ESFERICIDADE DE BARTLETT E KMO

```

1 function y = KMO(X)
2 % Função que tem o objetivo de calcular a Estatística
3 % de Bartlett para o teste de esfericidade e a Medida
4 % de Adequacidade da Amostra de Kaiser-Meyer-Olkin. O
5 % argumento de entrada é: X = matriz de dados(amostra
6 % multivariada).
7 R=corrcoef(X);
8 [n,p]=size(X);
9 % Cálculo da estatística de Bartlett
10 Q2=-((n-1)-(2*p+5)/6)*log(det(R));
11 GL=p*(p-1)/2;
12 pvalor=(1-chi2cdf(Q2,GL));
13 disp('Teste de Esfericidade -Estatística de Bartlett')
14 disp(' ')
15 Q2
16 disp(' ')
17 pvalor
18 disp(' ')
19 % Cálculo da medida KMO
20 [p,p]=size(R);
21 for i=1:p-1
22     for j=i+1:p
23         l=0;
24         for k=1:p
25             if (i~=k)&(j~=k)
26                 l=l+1;
27                 w(l)=k;
28             else
29                 m=1;
30             end
31         end
32         Y1=X(:,i);
33         X1=X(:,w);
34         B1=pinv(X1'*X1)*(X1'*Y1);
35         e1=Y1-X1*B1;
36         Y2=X(:,j);
37         B2=pinv(X1'*X1)*(X1'*Y2);
38         e2=Y2-X1*B2;
39         r(i,j)=sum(e1.*e2)/sqrt((sum(e2.^2))*(sum(e1.^2)));
40         r(j,i)=r(i,j);
41         r(i,i)=0;
42         clear w
43     end
44 end
45 q=r;

```

```
46 r2=R.^2;
47 q2=q.^2;
48 sr2=0;
49 sq2=0;
50 for i=1:p
51     for j=1:p
52         if i==j
53             k=1;
54         else
55             sr2=sr2+r2(i,j);
56             sq2=sq2+q2(i,j);
57         end
58     end
59 end
60 MSA=sr2/(sr2+sq2);
61 disp('Medida de adequacidade da amostra de Kaiser-Meyer-Olkin')
62 disp(' ')
63 MSA
64 disp(' ')
```

## ANEXO A – NÚMEROS E NOMES DOS MUNICÍPIOS PARANAENSES

|    |                     |    |                          |    |                          |
|----|---------------------|----|--------------------------|----|--------------------------|
| 1  | Abatiá              | 31 | Barbosa Ferraz           | 61 | Campo Magro              |
| 2  | Adrianópolis        | 32 | Barra do Jacaré          | 62 | Campo Mourão             |
| 3  | Agudos do Sul       | 33 | Barracão                 | 63 | Cândido de Abreu         |
| 4  | Almirante Tamandaré | 34 | Bela Vista da Caroba     | 64 | Candói                   |
| 5  | Altamira do Paraná  | 35 | Bela Vista do Paraíso    | 65 | Cantagalo                |
| 6  | Alto Paraíso        | 36 | Bituruna                 | 66 | Capanema                 |
| 7  | Alto Paraná         | 37 | Boa Esperança            | 67 | Capitão Leônidas Marques |
| 8  | Alto Piquiri        | 38 | Boa Esperança do Iguaçu  | 68 | Carambeí                 |
| 9  | Altônia             | 39 | Boa Ventura de São Roque | 69 | Carlópolis               |
| 10 | Alvorada do Sul     | 40 | Boa Vista da Aparecida   | 70 | Cascavel                 |
| 11 | Amaporã             | 41 | Bocaiúva do Sul          | 71 | Castro                   |
| 12 | Ampére              | 42 | Bom Jesus do Sul         | 72 | Catanduvas               |
| 13 | Anahy               | 43 | Bom Sucesso              | 73 | Centenário do Sul        |
| 14 | Andirá              | 44 | Bom Sucesso do Sul       | 74 | Cerro Azul               |
| 15 | Ângulo              | 45 | Borrazópolis             | 75 | Céu Azul                 |
| 16 | Antonina            | 46 | Braganey                 | 76 | Chopinzinho              |
| 17 | Antônio Olinto      | 47 | Brasilândia do Sul       | 77 | Cianorte                 |
| 18 | Apucarana           | 48 | Cafeara                  | 78 | Cidade Gaúcha            |
| 19 | Arapongas           | 49 | Cafelândia               | 79 | Clevelândia              |
| 20 | Arapoti             | 50 | Cafezal do Sul           | 80 | Colombo                  |
| 21 | Arapuã              | 51 | Califórnia               | 81 | Colorado                 |
| 22 | Araruna             | 52 | Cambará                  | 82 | Congonhinhas             |
| 23 | Araucária           | 53 | Cambé                    | 83 | Conselheiro Mairinck     |
| 24 | Ariranha do Ivaí    | 54 | Cambira                  | 84 | Contenda                 |
| 25 | Assaí               | 55 | Campina da Lagoa         | 85 | Corbélia                 |
| 26 | Assis Chateaubriand | 56 | Campina do Simão         | 86 | Cornélio Procópio        |
| 27 | Astorga             | 57 | Campina Grande do Sul    | 87 | Coronel Domingos Soares  |
| 28 | Atalaia             | 58 | Campo Bonito             | 88 | Coronel Vivida           |
| 29 | Balsa Nova          | 59 | Campo do Tenente         | 89 | Corumbataí do Sul        |
| 30 | Bandeirantes        | 60 | Campo Largo              | 90 | Cruz Machado             |

|     |                        |     |                   |     |                         |
|-----|------------------------|-----|-------------------|-----|-------------------------|
| 91  | Cruzeiro do Iguaçu     | 131 | Guairaçá          | 171 | Jaguariaíva             |
| 92  | Cruzeiro do Oeste      | 132 | Guamiranga        | 172 | Jandaia do Sul          |
| 93  | Cruzeiro do Sul        | 133 | Guapirama         | 173 | Janiópolis              |
| 94  | Cruzmalina             | 134 | Guaporema         | 174 | Japira                  |
| 95  | Curitiba               | 135 | Guaraci           | 175 | Japurá                  |
| 96  | Curiúva                | 136 | Guaraniaçu        | 176 | Jardim Alegre           |
| 97  | Diamante do Norte      | 137 | Guarapuava        | 177 | Jardim Olinda           |
| 98  | Diamante do Sul        | 138 | Guaraqueçaba      | 178 | Jataizinho              |
| 99  | Diamante D'Oeste       | 139 | Guaratuba         | 179 | Jesuítas                |
| 100 | Dois Vizinhos          | 140 | Honório Serpa     | 180 | Joaquim Távora          |
| 101 | Douradina              | 141 | Ibaiti            | 181 | Jundiá do Sul           |
| 102 | Doutor Camargo         | 142 | Ibema             | 182 | Juranda                 |
| 103 | Doutor Ulysses         | 143 | Ibiporã           | 183 | Jussara                 |
| 104 | Enéas Marques          | 144 | Icaraíma          | 184 | Kaloré                  |
| 105 | Engenheiro Beltrão     | 145 | Iguaraçu          | 185 | Lapa                    |
| 106 | Entre Rios do Oeste    | 146 | Iguatu            | 186 | Laranjal                |
| 107 | Esperança Nova         | 147 | Imbaú             | 187 | Laranjeiras do Sul      |
| 108 | Espigão Alto do Iguaçu | 148 | Imbituva          | 188 | Leópolis                |
| 109 | Farol                  | 149 | Inácio Martins    | 189 | Lidianópolis            |
| 110 | Faxinal                | 150 | Inajá             | 190 | Lindoeste               |
| 111 | Fazenda Rio Grande     | 151 | Indianópolis      | 191 | Loanda                  |
| 112 | Fênix                  | 152 | Ipiranga          | 192 | Lobato                  |
| 113 | Fernandes Pinheiro     | 153 | Iporã             | 193 | Londrina                |
| 114 | Figueira               | 154 | Iracema do Oeste  | 194 | Luiziana                |
| 115 | Flor da Serra do Sul   | 155 | Irati             | 195 | Lunardelli              |
| 116 | Floraí                 | 156 | Iretama           | 196 | Lupionópolis            |
| 117 | Floresta               | 157 | Itaguajé          | 197 | Mallet                  |
| 118 | Florestópolis          | 158 | Itaipulândia      | 198 | Mamborê                 |
| 119 | Flórida                | 159 | Itambaracá        | 199 | Mandaguaçu              |
| 120 | Formosa do Oeste       | 160 | Itambé            | 200 | Mandaguari              |
| 121 | Foz do Iguaçu          | 161 | Itapejara d'Oeste | 201 | Mandirituba             |
| 122 | Foz do Jordão          | 162 | Itaperuçu         | 202 | Manfrinópolis           |
| 123 | Francisco Alves        | 163 | Itaúna do Sul     | 203 | Mangueirinha            |
| 124 | Francisco Beltrão      | 164 | Ivaí              | 204 | Manoel Ribas            |
| 125 | General Carneiro       | 165 | Ivaiporã          | 205 | Marechal Cândido Rondon |
| 126 | Godoy Moreira          | 166 | Ivaté             | 206 | Maria Helena            |
| 127 | Goioerê                | 167 | Ivatuba           | 207 | Marialva                |
| 128 | Goioxim                | 168 | Jaboti            | 208 | Marilândia do Sul       |
| 129 | Grandes Rios           | 169 | Jacarezinho       | 209 | Marilena                |
| 130 | Guaíra                 | 170 | Jaguapitã         | 210 | Mariluz                 |

|     |                          |     |                      |     |                          |
|-----|--------------------------|-----|----------------------|-----|--------------------------|
| 211 | Maringá                  | 251 | Palmital             | 291 | Quatro Barras            |
| 212 | Mariópolis               | 252 | Palotina             | 292 | Quatro Pontes            |
| 213 | Maripá                   | 253 | Paraíso do Norte     | 293 | Quedas do Iguaçu         |
| 214 | Marmeleiro               | 254 | Paranacity           | 294 | Querência do Norte       |
| 215 | Marquinho                | 255 | Paranaguá            | 295 | Quinta do Sol            |
| 216 | Marumbi                  | 256 | Paranapoema          | 296 | Quitandinha              |
| 217 | Matelândia               | 257 | Paranavaí            | 297 | Ramilândia               |
| 218 | Matinhos                 | 258 | Pato Bragado         | 298 | Rancho Alegre            |
| 219 | Mato Rico                | 259 | Pato Branco          | 299 | Rancho Alegre D'Oeste    |
| 220 | Mauá da Serra            | 260 | Paula Freitas        | 300 | Realeza                  |
| 221 | Medianeira               | 261 | Paulo Frontin        | 301 | Rebouças                 |
| 222 | Mercedes                 | 262 | Peabiru              | 302 | Renascença               |
| 223 | Mirador                  | 263 | Perobal              | 303 | Reserva                  |
| 224 | Miraselva                | 264 | Pérola               | 304 | Reserva do Iguaçu        |
| 225 | Missal                   | 265 | Pérola d'Oeste       | 305 | Ribeirão Claro           |
| 226 | Moreira Sales            | 266 | Piên                 | 306 | Ribeirão do Pinhal       |
| 227 | Morretes                 | 267 | Pinhais              | 307 | Rio Azul                 |
| 228 | Munhoz de Melo           | 268 | Pinhal de São Bento  | 308 | Rio Bom                  |
| 229 | Nossa Senhora das Graças | 269 | Pinhalão             | 309 | Rio Bonito do Iguaçu     |
| 230 | Nova Aliança do Ivaí     | 270 | Pinhão               | 310 | Rio Branco do Ivaí       |
| 231 | Nova América da Colina   | 271 | Piraí do Sul         | 311 | Rio Branco do Sul        |
| 232 | Nova Aurora              | 272 | Piraquara            | 312 | Rio Negro                |
| 233 | Nova Cantu               | 273 | Pitanga              | 313 | Rolândia                 |
| 234 | Nova Esperança           | 274 | Pitangueiras         | 314 | Roncador                 |
| 235 | Nova Esp. do Sudoeste    | 275 | Planaltina do Paraná | 315 | Rondon                   |
| 236 | Nova Fátima              | 276 | Planalto             | 316 | Rosário do Ivaí          |
| 237 | Nova Laranjeiras         | 277 | Ponta Grossa         | 317 | Sabáudia                 |
| 238 | Nova Londrina            | 278 | Pontal do Paraná     | 318 | Salgado Filho            |
| 239 | Nova Olímpia             | 279 | Porecatu             | 319 | Salto do Itararé         |
| 240 | Nova Prata do Iguaçu     | 280 | Porto Amazonas       | 320 | Salto do Lontra          |
| 241 | Nova Santa Bárbara       | 281 | Porto Barreiro       | 321 | Santa Amélia             |
| 242 | Nova Santa Rosa          | 282 | Porto Rico           | 322 | Santa Cecília do Pavão   |
| 243 | Nova Tebas               | 283 | Porto Vitória        | 323 | Santa Cruz de M. Castelo |
| 244 | Novo Itacolomi           | 284 | Prado Ferreira       | 324 | Santa Fé                 |
| 245 | Ortigueira               | 285 | Pranchita            | 325 | Santa Helena             |
| 246 | Ourizona                 | 286 | Presidente C. Branco | 326 | Santa Inês               |
| 247 | Ouro Verde do Oeste      | 287 | Primeiro de Maio     | 327 | Santa Isabel do Ivaí     |
| 248 | Paiçandu                 | 288 | Prudentópolis        | 328 | Santa Izabel do Oeste    |
| 249 | Palmas                   | 289 | Quarto Centenário    | 329 | Santa Lúcia              |
| 250 | Palmeira                 | 290 | Quatiguá             | 330 | Santa Maria do Oeste     |

|     |                           |     |                         |     |                       |
|-----|---------------------------|-----|-------------------------|-----|-----------------------|
| 331 | Santa Mariana             | 354 | São Mateus do Sul       | 377 | Terra Rica            |
| 332 | Santa Mônica              | 355 | São Miguel do Iguaçu    | 378 | Terra Roxa            |
| 333 | Santa Tereza do Oeste     | 356 | São Pedro do Iguaçu     | 379 | Tibagi                |
| 334 | Santa Terezinha de Itaipu | 357 | São Pedro do Ivaí       | 380 | Tijucas do Sul        |
| 335 | Santana do Itararé        | 358 | São Pedro do Paraná     | 381 | Toledo                |
| 336 | Santo Antônio da Platina  | 359 | São Sebast. da Amoreira | 382 | Tomazina              |
| 337 | Santo Antônio do Caiuá    | 360 | São Tomé                | 383 | Três Barras do Paraná |
| 338 | Santo Antônio do Paraíso  | 361 | Sapopema                | 384 | Tunas do Paraná       |
| 339 | Santo Antôn. do Sudoeste  | 362 | Sarandi                 | 385 | Tuneiras do Oeste     |
| 340 | Santo Inácio              | 363 | Saudade do Iguaçu       | 386 | Tupãssi               |
| 341 | São Carlos do Ivaí        | 364 | Sengés                  | 387 | Turvo                 |
| 342 | São Jerônimo da Serra     | 365 | Serranópolis do Iguaçu  | 388 | Ubiratã               |
| 343 | São João                  | 366 | Sertaneja               | 389 | Umuarama              |
| 344 | São João do Caiuá         | 367 | Sertanópolis            | 390 | União da Vitória      |
| 345 | São João do Ivaí          | 368 | Siqueira Campos         | 391 | Uniflor               |
| 346 | São João do Triunfo       | 369 | Sulina                  | 392 | Uraí                  |
| 347 | São Jorge do Ivaí         | 370 | Tamarana                | 393 | Ventania              |
| 348 | São Jorge do Patrocínio   | 371 | Tamboara                | 394 | Vera Cruz do Oeste    |
| 349 | São Jorge d'Oeste         | 372 | Tapejara                | 395 | Verê                  |
| 350 | São José da Boa Vista     | 373 | Tapira                  | 396 | Virmond               |
| 351 | São José das Palmeiras    | 374 | Teixeira Soares         | 397 | Vitorino              |
| 352 | São José dos Pinhais      | 375 | Telêmaco Borba          | 398 | Wenceslau Braz        |
| 353 | São Manoel do Paraná      | 376 | Terra Boa               | 399 | Xambê                 |

## ANEXO B – CÓDIGO - A NORMALIDADE DE UMA DISTRIBUIÇÃO

```
1 function normalidade(X)
2 %função para verificar a normalidade multivariada
3 [n,p]=size(X);
4 m=mean(X);
5 S=cov(X);
6
7 for i = 1:n
8     d2(i)=(X(i,:)-m)*inv(S)*(X(i,:)-m)';
9
10 end
11
12 % em ordem crescente
13 d2=sort(d2)
14
15 for j=1:n
16     qui2(j)=chi2inv((j-0.5)/n,p)
17
18 end
19
20 plot(d2,qui2,'*k')
21 xlabel('d2')
22 ylabel('qui2')
23 grid
```



## ANEXO C – QUADROS COM AS 62 VARIÁVEIS SELECIONADAS

| MUNICÍPIOS |                | V <sub>1</sub> (Mwh) | V <sub>2</sub> | V <sub>3</sub> | V <sub>4</sub> | V <sub>5</sub> | V <sub>6</sub> | V <sub>7</sub> (m <sup>3</sup> ) | V <sub>8</sub> |
|------------|----------------|----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------------------------|----------------|
| 1          | Abatiá         | 7.654                | 2.963          | 1.728          | 1.636          | 0              | 0              | 218.183                          | 2.989          |
| 2          | Adrianópolis   | 6.170                | 2.372          | 1.226          | 1.194          | 0              | 0              | 184.744                          | 2.210          |
| ⋮          | ⋮              | ⋮                    | ⋮              | ⋮              | ⋮              | ⋮              | ⋮              | ⋮                                | ⋮              |
| 398        | Wenceslau Braz | 21.662               | 7.639          | 6.024          | 5.729          | 1.726          | 1.580          | 704.308                          | 8.759          |
| 399        | Xambrê         | 7.703                | 2.516          | 1.799          | 1.733          | 0              | 0              | 230.230                          | 2.711          |

| Municípios |                | V <sub>9</sub> | V <sub>10</sub> | V <sub>11</sub> | V <sub>12</sub> | V <sub>13</sub> | V <sub>14</sub> | V <sub>15</sub> | V <sub>16</sub> | V <sub>17</sub> | V <sub>18</sub> | V <sub>19</sub> |
|------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1          | Abatiá         | 2.516          | 6               | 1.542           | 84              | 123             | 937             | 398             | 116             | 8               | 0               | 0               |
| 2          | Adrianópolis   | 1.974          | 6               | 1.725           | 46              | 89              | 1.206           | 384             | 106             | 16              | 0               | 0               |
| ⋮          | ⋮              | ⋮              | ⋮               | ⋮               | ⋮               | ⋮               | ⋮               | ⋮               | ⋮               | ⋮               | ⋮               | ⋮               |
| 398        | Wenceslau Braz | 6.244          | 26              | 4.162           | 226             | 334             | 2.612           | 920             | 269             | 20              | 148             | 67              |
| 399        | Xambrê         | 2.009          | 5               | 1.213           | 88              | 98              | 795             | 232             | 68              | 9               | 0               | 0               |

| Municípios |                | V <sub>20</sub> | V <sub>21</sub> | V <sub>22</sub> (R\$) | V <sub>23</sub> | V <sub>24</sub> (R\$ mil) | V <sub>25</sub> (R\$ mil) |
|------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------------|-----------------|---------------------------|---------------------------|
| 1          | Abatiá         | 188             | 914             | 1.199,62              | 587.335,52      | 14.001                    | 10.238                    |
| 2          | Adrianópolis   | 87              | 918             | 2.095,42              | 2.927.448,19    | 18.075                    | 4.517                     |
| ⋮          | ⋮              | ⋮               | ⋮               | ⋮                     | ⋮               | ⋮                         | ⋮                         |
| 398        | Wenceslau Braz | 502             | 2.661           | 1.252,23              | 2.303.834,68    | 19.923                    | 20.432                    |
| 399        | Xambrê         | 146             | 1.021           | 1.026,41              | 547.638,57      | 18.075                    | 68                        |

| Municípios |                | V <sub>26</sub> (%) | V <sub>27</sub> (%) | V <sub>28</sub> (%) | V <sub>29</sub> (%) | V <sub>30</sub> (%) | V <sub>31</sub> | V <sub>32</sub> |
|------------|----------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------------|-----------------|
| 1          | Abatiá         | 80,8                | 9,9                 | 104,9               | 95,1                | 89,22               | 0,6287          | 0,44            |
| 2          | Adrianópolis   | 82,28               | 10,54               | 104,23              | 107,04              | 109,86              | 0,6183          | 0,53            |
| ⋮          | ⋮              | ⋮                   | ⋮                   | ⋮                   | ⋮                   | ⋮                   | ⋮               | ⋮               |
| 398        | Wenceslau Braz | 79,85               | 9,24                | 109,16              | 99,62               | 106,87              | 0,6344          | 0,52            |
| 399        | Xambrê         | 83,01               | 12,84               | 98,59               | 109,86              | 87,32               | 0,6406          | 0,48            |

| Municípios |                | V <sub>33</sub> | V <sub>34</sub> | V <sub>35</sub> | V <sub>36</sub> | V <sub>37</sub> | V <sub>38</sub> | V <sub>39</sub> | V <sub>40</sub> | V <sub>41</sub> | V <sub>42</sub> |
|------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1          | Abatiá         | 0,34            | 5.903           | 12              | 8               | 6.784           | 252             | 211             | 443             | 55              | 43              |
| 2          | Adrianópolis   | 0,51            | 5.083           | 8               | 6               | 5.309           | 73              | 165             | 191             | 83              | 37              |
| ∴          | ∴              | ∴               | ∴               | ∴               | ∴               | ∴               | ∴               | ∴               | ∴               | ∴               | ∴               |
| 398        | Wenceslau Braz | 0,49            | 14.821          | 58              | 18              | 16.489          | 659             | 605             | 1.584           | 326             | 233             |
| 399        | Xambrê         | 0,42            | 5.081           | 4               | 3               | 5.216           | 957             | 151             | 278             | 43              | 27              |

| Municípios |                | V <sub>43</sub> | V <sub>44</sub> | V <sub>45</sub> | V <sub>46</sub> | V <sub>47</sub> (R\$) | V <sub>48</sub> (R\$ mil) | V <sub>49</sub> (R\$) |
|------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------|
| 1          | Abatiá         | 138             | 187             | 63              | 269             | 8.701                 | 67.229                    | 12.920.876,12         |
| 2          | Adrianópolis   | 158             | 172             | 48              | 93              | 16.061                | 101.634                   | 19.428.362,98         |
| ∴          | ∴              | ∴               | ∴               | ∴               | ∴               | ∴                     | ∴                         | ∴                     |
| 398        | Wenceslau Braz | 500             | 573             | 254             | 516             | 11.309                | 218.018                   | 30.029.399,42         |
| 399        | Xambrê         | 148             | 71              | 28              | 138             | 8.427                 | 50.353                    | 12.843.041,81         |

| Municípios |                | V <sub>50</sub> (R\$) | V <sub>51</sub> (R\$) | V <sub>52</sub> (R\$) | V <sub>53</sub> (hab/km <sup>2</sup> ) |
|------------|----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--|
| 1          | Abatiá         | 702.014,35            | 142.061,29            | 11.573.667,12         | 34,58                                  |
| 2          | Adrianópolis   | 2.927.448,19          | 2.647.169,14          | 18.294.214,95         | 4,78                                   |
| ∴          | ∴              | ∴                     | ∴                     | ∴                     | ∴                                      |
| 398        | Wenceslau Braz | 2.951.838,11          | 1.382.915,06          | 34.325.859,42         | 50,45                                  |
| 399        | Xambrê         | 654.536,12            | 351.195,71            | 18.403.160,97         | 16,93                                  |

| Municípios |                | V <sub>54</sub> (%) | V <sub>55</sub> (anos) | V <sub>56</sub> (%) | V <sub>57</sub> | V <sub>58</sub> | V <sub>59</sub> | V <sub>60</sub> |
|------------|----------------|---------------------|------------------------|---------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1          | Abatiá         | 73,83               | 73,23                  | 46,13               | 0,687           | 0,804           | 0,596           | 0,676           |
| 2          | Adrianópolis   | 32,31               | 74,02                  | 37,99               | 0,667           | 0,817           | 0,563           | 0,644           |
| ∴          | ∴              | ∴                   | ∴                      | ∴                   | ∴               | ∴               | ∴               | ∴               |
| 398        | Wenceslau Braz | 80,37               | 72,42                  | 38,63               | 0,687           | 0,790           | 0,594           | 0,692           |
| 399        | Xambrê         | 33,10               | 74,52                  | 61,66               | 0,706           | 0,825           | 0,606           | 0,703           |

| Municípios |                | V <sub>61</sub> (R\$) | V <sub>62</sub> (%) |
|------------|----------------|-----------------------|---------------------|
| 1          | Abatiá         | 6.193,19              | 61,17               |
| 2          | Adrianópolis   | 8.430,84              | 48,5                |
| ∴          | ∴              | ∴                     | ∴                   |
| 398        | Wenceslau Braz | 9.272,35              | 57,38               |
| 399        | Xambrê         | 8.174,19              | 55,79               |