

SERGIO MAURI FABRI

**DETERMINAÇÃO DE ATITUDE DE SATÉLITES  
ARTIFICIAIS ESTABILIZADOS POR ROTAÇÃO  
COM O USO DO GPS**

Tese apresentada ao Departamento de Geociências da Universidade Federal do Paraná como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências Geodésicas.

CURITIBA  
1997

**Sergio Mauri Fabri**

**Determinação de Atitude de Satélites  
Artificiais Estabilizados por Rotação  
com o uso do GPS**

**Orientadores:**

**Dr. Roberto Vieira da Fonseca Lopes**

**Prof. Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira**

**Curitiba**

**1997**

**Determinação de Atitude de Satélites  
Atrificiais Estabilizados por Rotação  
com o uso do GPS**

— ★ —

Sergio Mauri Fabri

Lic., Universidade Federal do Paraná (1978)  
MSc., Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (1987)

— ★ —

Novembro, 1997

© Sergio Mauri Fabri, 1997

O autor garante à UFPR  
o direito de reprodução  
e distribuição.

Catálogo na fonte  
Tania Barros Baggio - CRB-9/760

---

**F124** Fabri, Sergio Mauri  
Determinação de atitude de satélites artificiais estabilizados  
por rotação com o uso do GPS / Sergio Mauri Fabri. – 1997.  
xxiii, 185f. : il.; 29cm.

Orientadores : Roberto Vieira da Fonseca Lopes e Luiz Danilo  
Damasceno Ferreira.

Tese(doutorado) - Setor de Tecnologia, Universidade Federal  
do Paraná.

1.Sistema de posicionamento global. 2.Satélites artificiais - Ór-  
bitas. 3.Satélites artificiais - Sistemas de determinação de atitude.  
I.Lopes, Roberto Vieira da Fonseca. II.Ferreira, Luiz Danilo Da-  
masceno. III.Universidade Federal do Paraná. Setor de Tecnolo-  
gia. I.Título.

---

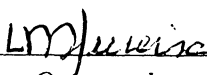
526.982 - CDD20

Determinação de Atitude de Satélites  
Artificiais Estabilizados por Rotação  
com o uso do GPS

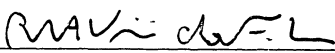
— \* —

Aprovada pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido  
para a obtenção do grau de Doutor  
em Ciências Geodésicas.

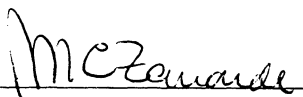
Prof. Dr. Luiz Danilo D. Ferreira (UFPR)

  
Orientador - Presidente

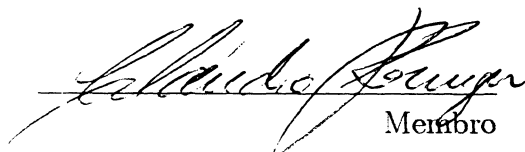
Dr. Roberto V. da F. Lopes (INPE)

  
Orientador

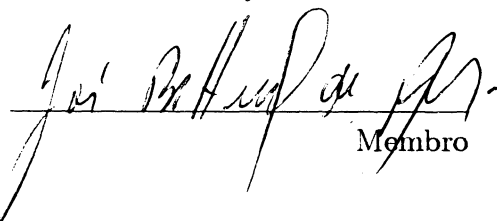
Prof<sup>ª</sup>. Dra. Maria Cecília Zanardi (UNESP/FEG)

  
Membro

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Cláudia Pereira Krueger (UFPR)

  
Membro

Prof. Dr. José Bittencourt de Andrade

  
Membro

Candidato: Sergio Mauri Fabri

Curitiba, 13 de novembro de 1997.



*À Madalena,  
Camila e  
Ângela que,  
acima de tudo e de qualquer coisa,  
sempre foram a principal razão.*

## Agradecimentos

À Universidade Federal do Paraná, através do Departamento de Física do Setor de Ciências Exatas, pela concessão da licença que possibilitou a realização deste curso.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, especialmente à Divisão de Mecânica Espacial e Controle da Coordenadoria de Engenharia e Tecnologia Espacial, nas pessoas do Dr. Otávio Santos Cupertino Durão e do Dr. Petrônio Noronha de Souza, que em atendimento ao convênio de cooperação técnico-científica firmado com a UFPR, colocou todas as suas instalações e equipamentos à disposição deste trabalho.

Ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas do Departamento de Geociências do Setor de Tecnologia, principalmente nas pessoas do Prof. Dr. Sílvio Rogério Correia de Freitas e do Prof. Dr. Quintino Dalmolin, pela oportunidade, pela excelência de seus professores e por ter colocado à disposição deste trabalho, todos os recursos disponíveis.

Ao Dr. Roberto Vieira da Fonseca Lopes e ao Prof. Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira, pela brilhante, competente e dedicada orientação, aos quais aprendi a respeitar e admirar como expoentes na pesquisa espacial e sem os quais este trabalho não seria possível.

Ao Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira, responsável pela decisão de realizar este curso e responsável também pela escolha do tema mas, principalmente, pela particular amizade.

Ao Dr. Helio Koiti Kuga, pela colaboração com a parte experimental bem como com programas para o tratamento de dados e constante incentivo.

Ao colegas do INPE, Dr. Mário Cesar Ricci, Dr. Hans U. Pilchowski, Dr. Sebastião E. C. Varotto e aos técnicos Francisco E. de Carvalho e José Pelogia da Silva, pela colaboração na realização da parte experimental deste trabalho.

Ao dileto amigo, Dr. Ulisses Thadeu Vieira Guedes, sempre incansável na colaboração, decisiva ajuda na parte computacional inicial e incomparável espírito de participação.

Ao colega Marcelo José Pereira da Cunha, MSc., pela eficiente operação dos equipamentos quando da fase experimental.

À Prof<sup>ª</sup>. Dra. Cláudia Pereira Krueger e ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho dos Santos, do CPGCG, pelo fornecimento dos programas de tratamento de dados do rastreo e pelo empréstimo dos equipamentos GPS.

Aos extraordinários e sempre presentes amigos, Jucilei Cordini e Sílvia Helena Soares Schwab, que nas horas mais críticas não pouparam incentivos e constante apoio.

À Biblioteca de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, nas pessoas das Bibliotecárias Eliane Maria Stroparo e Tania Barros Baggio, e à Biblioteca do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, nas pessoas das Bibliotecárias Celina Custódio G. Resende, Marciana Leite Ribeiro e Suelena Costa B. Coelho, pela sempre pronta atenção e profissional aconselhamento.

À Sra. Verali Mônica Kleuser Reguilin, secretária do CPGCG, pelo atendimento, fornecimento de materiais e pela sempre ímpar alegria.

A todos os colegas e professores do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas (UFPR) e do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espacial (INPE), pelo profissionalismo e amizade.

Ao amigo Dr. Valdemir Carrara, pela inspiração destes agradecimentos.

## Resumo

O principal objetivo deste trabalho consiste em um procedimento para a completa determinação da atitude de satélites estabilizados por rotação com o uso do GPS. O procedimento considera dois casos: o problema restrito onde apenas o vetor de atitude é relevante e o problema geral, no qual, o ângulo de fase em torno do eixo de rotação também é levado em conta. As observações iniciais são dadas pela fase da onda portadora. O vetor de atitude, os ângulos de fase e a taxa de rotação são estimados através do filtro estendido de Kalman. Apresenta-se os resultados de simulações digitais, assim como, os resultados de um experimento realizado no solo, através da determinação da atitude de uma barra girante na qual foram instaladas duas antenas conectadas a receptores independentes. A solução do problema da ambigüidade tira vantagem do movimento da linha de base entre as antenas. Uma aplicação real em satélites está prevista no programa espacial brasileiro.

## **Abstract**

The main task of this work consist in a complete GPS-based attitude determination procedure for spin stabilized satellites. The process is made for two cases: the strict sense problem, where the attitude vector only is relevant and the wide problem, where phase angle around the spin axis is also required. Starting with interferometric observations of GPS carrier phase, the attitude vector, phase angle and spin rate are estimated by extended Kalman filter. Numerical results from digital simulation are presented, as well as some real data from an experiment on the ground. The attitude of a spinning bar with two offset antennas linked to independent receivers was determined from the double difference phase observable. The solution of the integer ambiguity problem takes advantage of antenna baseline motion. Real satellite application is also envisaged under the scope of the Brazilian space program.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>v</b>
<b>Resumo</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>viii</b>
<b>Sumário</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xvi</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Determinação e controle de atitude . . . . .	2
1.2 Revisão bibliográfica . . . . .	3
1.3 Contexto nacional . . . . .	4
1.4 Objetivos . . . . .	5
1.5 Seqüência do trabalho . . . . .	6
<b>2 Sensores de atitude</b>	<b>8</b>
2.1 Sensores não inerciais . . . . .	8
2.1.1 Sensores de horizonte . . . . .	8
2.1.2 Sensores solares . . . . .	12
2.1.3 Magnetômetro . . . . .	14
2.1.4 Sensor de estrelas . . . . .	15
2.2 Sensores inerciais . . . . .	16
2.3 Outros sensores . . . . .	18
2.3.1 Sextante espacial . . . . .	18
2.3.2 Sensor de impacto . . . . .	18

2.4	O GPS como sensor de atitude . . . . .	19
2.4.1	O sensor GPS em satélites estabilizados por rotação . . . . .	21
<b>3</b>	<b>NAVSTAR - GPS</b>	<b>23</b>
3.1	Projeto GPS . . . . .	23
3.1.1	Constelação . . . . .	24
3.1.2	Satélites do Bloco I . . . . .	26
3.1.3	Satélites do Bloco II . . . . .	26
3.2	Sinais GPS . . . . .	27
3.3	Mensagens de navegação e observação . . . . .	28
3.4	Equações de observação . . . . .	30
3.4.1	Observação de fase . . . . .	30
3.4.2	Simple diferença de fase . . . . .	33
3.4.3	Dupla diferença de fase . . . . .	34
3.4.4	Tripla diferença de fase . . . . .	35
3.5	Fontes de erro . . . . .	36
3.6	Vantagens e limitações . . . . .	37
3.7	Visibilidade GPS × satélite usuário . . . . .	37
3.7.1	Introdução . . . . .	37
3.7.2	Visibilidade . . . . .	38
3.7.3	Diluição geométrica da precisão para a atitude - ADOP . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Fundamentos teóricos da determinação de atitude</b>	<b>43</b>
4.1	Sistemas de referência . . . . .	43
4.2	Representação da atitude . . . . .	45
4.2.1	Matriz de atitude . . . . .	45
4.2.2	Ângulos de Euler . . . . .	46
4.2.3	Quatérnions . . . . .	48
4.2.4	Vetor de rotação . . . . .	51
4.2.5	Considerações sobre a representação da atitude . . . . .	53
4.3	Métodos de determinação de atitude . . . . .	54
4.3.1	Métodos determinísticos: estabilização em um eixo . . . . .	54
4.3.2	Métodos determinísticos: estabilização em três eixos . . . . .	59

4.3.3	Incertezas dos métodos determinísticos . . . . .	62
4.3.4	Métodos não determinísticos . . . . .	65
4.4	Técnicas de estimação ótima . . . . .	71
4.4.1	Filtro de Kalman . . . . .	72
4.4.2	Filtro estendido de Kalman . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Procedimento da determinação de atitude por GPS</b>	<b>80</b>
5.1	Formulação do problema . . . . .	82
5.2	Hipóteses simplificadoras . . . . .	85
5.3	Equação da interferometria . . . . .	87
5.4	A questão da ambigüidade . . . . .	88
5.5	Observações de atitude . . . . .	91
5.6	Determinação estática de atitude . . . . .	92
5.6.1	Problema restrito . . . . .	93
5.6.2	Problema geral . . . . .	94
5.7	Efeitos da imprecisão da taxa de rotação . . . . .	95
5.7.1	Sensitividade das observações de atitude . . . . .	96
5.7.2	Sensitividade das estimativas estáticas de atitude . . . . .	96
5.8	Determinação dinâmica da atitude . . . . .	97
5.8.1	Filtro estendido de Kalman . . . . .	98
5.8.2	Modelo dinâmico e de observação para o problema restrito . . . . .	99
5.8.3	Modelo dinâmico para o problema geral . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>101</b>
6.1	Simulação digital . . . . .	101
6.1.1	Simulação 1 - problema restrito . . . . .	103
6.1.2	Simulação 2 - problema geral . . . . .	106
6.1.3	Simulação 3 - problema restrito . . . . .	108
6.1.4	Simulação 4 - problema geral . . . . .	110
6.1.5	Simulação 5 - problema restrito . . . . .	112
6.1.6	Simulação 6 - problema geral . . . . .	114
6.1.7	Simulação 7 - problema restrito . . . . .	116
6.1.8	Simulação 8 - problema geral . . . . .	118



6.1.9	Simulação 9 - problema restrito . . . . .	120
6.1.10	Simulação 10 - problema geral . . . . .	122
6.1.11	Simulação 11 - problema restrito . . . . .	124
6.1.12	Simulação 12 - problema geral . . . . .	126
6.1.13	Simulação 13 - problema restrito . . . . .	128
6.1.14	Simulação 14 - problema geral . . . . .	131
6.1.15	Simulação adicional 1 - problema restrito . . . . .	135
6.1.16	Simulação adicional 2 - problema geral . . . . .	137
6.1.17	Simulação adicional 3 - problema restrito . . . . .	139
6.1.18	Simulação adicional 4 - problema geral . . . . .	141
6.2	Experimento de determinação de atitude . . . . .	143
6.3	Algoritmo para a dupla diferença de fase . . . . .	145
6.3.1	Cálculo das observações de atitude . . . . .	146
6.4	Resultados do experimento . . . . .	149
6.4.1	Primeiro experimento no modo dinâmico contínuo . . . . .	149
6.4.2	Segundo experimento no modo dinâmico contínuo . . . . .	149
6.4.3	Terceiro experimento no modo dinâmico contínuo . . . . .	150
6.4.4	Primeiro experimento no modo dinâmico intermitente . . . . .	150
6.4.5	Segundo experimento no modo dinâmico intermitente . . . . .	151
6.5	Tabela geral de resultados . . . . .	152
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>153</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>155</b>
<b>A</b>	<b>Figuras esquemáticas e Tabelas do GPS</b>	<b>160</b>

## Lista de Figuras

2.1	(a) Sensor de horizonte, gerador de pulso. (b) Sensor de horizonte de varredura cônica. . . . .	10
2.2	(a) Sensor de horizonte de varredura plana. (b) Sensor de horizonte de rastreo puntual. . . . .	11
2.3	(a) Sensor de rastreo limiar. (b) Sensor de radiação planetária. . . . .	11
2.4	(a) Sensor solar simples. (b) Sensor solar detector de cossenos. . . . .	12
2.5	(a) Orientação de dois detectores de cossenos. (b) Sensor digital básico de um eixo. . . . .	13
2.6	Dois sensores solares de um eixo para satélites estabilizados por rotação, com $180^\circ$ de FOV( <i>Adcole Model 17083</i> ). . . . .	14
2.7	Magnetômetro. . . . .	15
2.8	Sensor de estrela, com cardan. . . . .	16
2.9	(a) Giroscópio com um grau de liberdade. (b) Control Moment Gyros CMG da estação Skylab. . . . .	17
2.10	Sextante espacial. . . . .	18
2.11	Sensor de impacto. . . . .	19
2.12	Possível geometria das antenas GPS. . . . .	20
3.1	Configuração dos 24 satélites GPS. . . . .	24
3.2	Arranjo final dos satélites na constelação GPS. . . . .	25
3.3	Estrutura dos sinais dos satélites GPS. . . . .	27
3.4	Formato da mensagem do GPS. . . . .	28
3.5	(a) Distância geométrica. (b) Simples diferença de fase. . . . .	34
3.6	Dupla diferença de fase. . . . .	35
3.7	Condição de visibilidade entre satélites. . . . .	39
3.8	Visibilidade. . . . .	41
3.9	Número de satélites visíveis . . . . .	41
4.1	Referencial externo e referencial local. . . . .	43

4.2	Sistema geocêntrico inercial. . . . .	44
4.3	Sistema geocêntrico terrestre. . . . .	44
4.4	Especificação da orientação dos eixos do satélite usuário em relação ao referencial externo. . . . .	45
4.5	Rotações dos ângulos de Euler. . . . .	47
4.6	Rotação em torno do eixo $z$ . . . . .	51
4.7	<i>Ascensão reta e declinação</i> do eixo de rotação. . . . .	55
4.8	Determinação da atitude usando-se a intersecção de dois cones. . . . .	55
4.9	Relação entre o eixo de rotação e a direção do Sol. . . . .	56
4.10	Solução de atitude (caso1). . . . .	57
4.11	Solução de atitude (caso 2). . . . .	59
4.12	Determinação do ângulo de fase $\psi$ . . . . .	60
4.13	Paralelogramo de erro para observações discretas. . . . .	63
4.14	Elipse de erro para medidas ortogonais. . . . .	65
4.15	Arcos e ângulos diedros. . . . .	66
5.1	Ângulo de aspecto GPS. . . . .	82
5.2	Visão geral do problema de atitude. . . . .	83
5.3	(a) Geometria de atitude. (b) Geometria de observação. . . . .	87
5.4	Representação dos saltos de uma unidade. . . . .	89
5.5	Representação dos saltos de duas unidades. . . . .	90
6.1	Simulação 1 - problema restrito. . . . .	105
6.2	Simulação 2 - problema geral. . . . .	107
6.3	Simulação 3 - problema restrito. . . . .	109
6.4	Simulação 4 - problema geral. . . . .	111
6.5	Simulação 5 - problema restrito. . . . .	113
6.6	Simulação 6 - problema geral. . . . .	115
6.7	Simulação 7 - problema restrito. . . . .	117
6.8	Simulação 8 - problema geral. . . . .	119
6.9	Simulação 9 - problema restrito. . . . .	121
6.10	Simulação 10 - problema geral. . . . .	123
6.11	Simulação 11 - problema restrito. . . . .	125

6.12	Simulação 12 - problema geral. . . . .	127
6.13	Simulação 13 - problema restrito. . . . .	129
6.14	Simulação 13 - problema restrito. . . . .	130
6.15	Simulação 14 - problema geral. . . . .	132
6.16	Simulação 14 - problema geral. . . . .	133
6.17	Simulação adicional 1 - problema restrito. . . . .	136
6.18	Simulação adicional 2 - problema geral. . . . .	138
6.19	Simulação adicional 3 - problema restrito. . . . .	140
6.20	Simulação adicional 4 - problema geral. . . . .	142
6.21	Equipamentos usados no experimento. . . . .	143
A.1	Princípio básico do posicionamento GPS. . . . .	160
A.2	Vista esquemática de um satélite do Bloco II. . . . .	161

## Lista de Tabelas

6.1	Tabela dos resultados das simulações digitais. . . . .	134
6.2	Tabela geral de resultados. . . . .	152
A.1	Satélites do Bloco I. . . . .	160
A.2	Satélites do Bloco II. . . . .	161
A.3	Satélites do Bloco IIA. . . . .	162

## Lista de símbolos

$A^p$	amplitude de oscilação das observações da dupla diferença de fase
$A$	matriz de atitude
$B$	matriz de elementos do quatérnion
$C$	matriz de elementos do quatérnion
$E$	vetor Nadir
$E_e$	fluxo de energia
$E_{\oplus}^p$	raio angular da Terra em relação ao vetor posição instantânea do $p$ -ésimo satélite GPS, no referencial externo
$E_{\oplus}$	raio angular da Terra em relação ao vetor posição instantânea do satélite usuário, no referencial externo
$E[\cdot]$	operador esperança matemática
$\mathcal{E}_j^p$	matriz de covariância do vetor de parâmetros
$\mathcal{F}(t)$	matriz contínua no tempo
$\mathcal{G}(t)$	matriz contínua no tempo
$\mathcal{H}_j$	matriz de sensibilidade do vetor de observações
$\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$	versores do referencial externo
$\hat{I}', \hat{J}', \hat{K}'$	versores do sistema geocêntrico terrestre
$I$	corrente elétrica
$I_i^p$	efeito da ionosfera
$\mathcal{I}$	matriz identidade
$J_{2...6}$	coeficientes dos harmônicos zonais do geopotencial
$J(\cdot)$	indica função custo num processo de ajuste por mínimos quadrados
$K$	unidade da temperatura Kelvin
$\mathcal{K}(\cdot)$	matriz ganho de Kalman
$M$	projeção do vetor Sol sobre o plano normal a $z$
$M_S$	anomalia média do satélite usuário
$M_S^p$	anomalia média do $p$ -ésimo satélite GPS
$\mathcal{M}_e$	matriz de uma base ortogonal definida no referencial externo
$\mathcal{M}_\ell$	matriz de uma base ortogonal definida no referencial local

$\mathbf{N}$	vetor da linha dos nodos
$N^p$	ambigüidade
$\mathcal{N}(\cdot, \cdot)$	variável aleatória com distribuição gaussiana de média zero e covariância dada
$\mathbb{N}$	conjunto dos Naturais
$\mathcal{O}$	vetor de observações no filtro de Kalman
$\mathbf{P}$	$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{N}$
$\mathbf{P}_{re}$	vetor fluxo de energia de radiação
$P_{\theta\theta}$	matriz de covariância de $\tilde{\theta}$
$\mathcal{P}$	matriz de covariância do erro, no estado
$\wp_j$	conjunto dos satélites GPS visíveis
$\mathcal{Q}$	matriz coluna dos elementos do quatérnion
$\mathcal{Q}(t)$	matriz semi-definida positiva
$R$	matriz de rotação
$\mathcal{R}$	matriz de covariância do erro da observação genericamente denotada por $\mathcal{O}$
$\mathcal{R}_{n_j}^o$	covariância do erro da estimativa estática de $\mathbf{n}_j$
$\mathcal{R}_{\xi_j}^o$	covariância do erro da estimativa estática de $\xi_j$
$\mathbb{R}$	conjunto dos Reais
$\mathbf{S}$	vetor Sol
$\mathcal{S}_j^p$	matriz peso na função custo da atitude
$T_i^p$	efeito da troposfera
$\mathbf{U}_e$	vetor genérico no referencial externo
$\mathbf{U}_\ell$	vetor genérico no referencial local
$U_j$	matriz das componentes de $\hat{\mathbf{u}}_j^p$ , $\forall p \in \wp_j$
$\mathcal{U}$	sensitividade na estimativa estática do vetor de rotação em relação a erros na estimativa da velocidade angular
$W_j$	matriz das componentes de $\hat{\mathbf{w}}_j^p$ , $\forall p \in \wp_j$
$\mathcal{X}(\cdot)$	vetor de estado do sistema dinâmico
$X_j^p$	vetor de parâmetros do modelo das medidas do $p$ -ésimo satélite GPS no instante $t_j$

$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$	sistema de coordenadas geocêntricas inerciais
$(\mathbf{X}', \mathbf{Y}', \mathbf{Z}')$	sistema de coordenadas geocêntricas terrestres
$Y_j^p$	vetor da $j$ -ésima amostra das observações pré-processadas do $p$ -ésimo satélite GPS no instante $t_j$
$a_S$	semi-eixo maior da órbita do satélite usuário
$a_S^p$	semi-eixo maior da órbita do $p$ -ésimo satélite GPS
$a_f^p$	ajuste da frequência
$\mathbf{b}$	vetor linha de base
$ \mathbf{b} $	módulo de $\mathbf{b}$
$b$	vetor de componentes de $\mathbf{b}$
$b_f^p$	deriva da frequência
$c$	velocidade da luz
$dA$	elemento de área
$d^p$	atraso de hardware no satélite GPS
$d_i$	atraso de hardware no receptor
$d_i^p$	efeito de multi-caminho
$dt_i$	erro no relógio do receptor
$dt^p$	erro no relógio do $p$ -ésimo satélite GPS
$d_i$	auto-valores não nulos de $\mathcal{R}_{w_j^p}$
$e_i$	auto-vetores não nulos de $\mathcal{R}_{w_j^p}$
$\exp\{\cdot\}$	função exponencial
$(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2)$	base cartesiana bidimensional
$e_S$	excentricidade da órbita do satélite usuário
$e_S^p$	excentricidade da órbita do $p$ -ésimo satélite GPS
$f$	frequência nominal da portadora
$h$	vetor de funções não lineares do estado
$i_S$	inclinação da órbita do satélite usuário
$i_S^p$	inclinação da órbita do $p$ -ésimo satélite GPS
$\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$	versores do referencial local
$\mathbf{n}$	vetor do eixo de rotação no referencial externo
$\hat{\mathbf{n}}_{ss}$	versor normal do sensor solar



$n$	tamanho da $j$ -ésima amostra
$p_q$	parte vetorial ou imaginária do quatérnion
$\underline{q}$	quatérnion
$(\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$	base de um sistema ortogonal
$q_n$	densidade espectral de potência do ruído dinâmico em $n$
$q_\zeta$	densidade espectral de potência do ruído dinâmico na atitude
$q_\omega$	densidade espectral de potência do ruído dinâmico na taxa de rotação
$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$	base ortogonal
$r_\oplus$	raio da Terra
$(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$	base ortogonal
$t_0$	tempo de referência
$t_j$	instante de referência para um intervalo de observação
$t_{j,k}$	$k$ -ésimo instante de amostragem da $j$ -ésima amostra
$t_r$	tempo verdadeiro
$\hat{\mathbf{u}}^p$	versor na direção da linha de visada do $p$ -ésimo satélite GPS
$(\hat{\mathbf{u}}^1, \hat{\mathbf{u}}^2)$	direções de dois sensores no referencial externo
$u_i^p$	distância geométrica ( $i$ -ésima antena - $p$ -ésimo satélite GPS)
$\dot{u}_i^p$	taxa de variação da distância geométrica
$\mathbf{v}$	vetor arbitrário
$v^p$	erro de medida (gaussiano de média zero e variância dada)
$v(t)$	incertezas na modelagem
$\mathbf{w}$	vetor no referencial local
$\hat{\mathbf{w}}^p$	versor na direção da linha de visada do $p$ -ésimo satélite GPS no referencial local
$(\hat{\mathbf{w}}^1, \hat{\mathbf{w}}^2)$	direções de dois sensores no referencial local
$w^p$	vetor de componentes de $\hat{\mathbf{w}}^p$
$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	sistema de coordenadas ortogonais fixo no satélite usuário
$(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$	eixos auxiliares na rotação 313
$(\mathbf{x}'', \mathbf{y}'', \mathbf{z}'')$	eixos auxiliares na rotação 313

$y_{j,k}^p$	observação pré-processada do $p$ -ésimo satélite GPS no instante $t_{j,k}$
$z^p$	medida do cosseno do ângulo de aspecto da atitude
$\Delta t$	período de amostragem
$\Delta\phi^p$	variação da fase recebida
$\Phi(\cdot)$	matriz de transição de estado do sistema dinâmico
$\Phi_{SE}$	ângulo entre o vetor Sol e o vetor Nadir
$\Omega_S$	longitude do nodo ascendente do satélite usuário
$\Omega_S^p$	longitude do nodo ascendente do $p$ -ésimo satélite GPS
$\Omega(\cdot)$	operador produto vetorial
$\alpha_n$	ascensão reta do satélite usuário
$\alpha$	ângulo diretor
$\alpha_{nE}$	ângulo entre as direções $\hat{n}$ e $\hat{E}$
$\alpha_{SAT}$	ascensão reta do satélite usuário em relação ao Nadir
$\alpha_{SOL}$	ascensão reta do Sol
$\beta$	ângulo diretor
$\beta_{nS}$	ângulo entre o vetor Sol e o eixo de rotação
$\gamma$	ângulo diretor
$\gamma_{\oplus}$	ângulo entre os raios vetores instantâneos do satélite usuário e do $p$ -ésimo satélite GPS
$\delta_n$	declinação do eixo de rotação do satélite usuário
$\delta_{SAT}$	declinação do satélite usuário em relação ao Nadir
$\delta_{SOL}$	declinação do Sol
$\delta(t)$	delta de Dirac
$\delta_{j,k}$	delta de Kröenecker
$\delta x(\cdot)$	desvio da trajetória nominal
$\delta y(\cdot)$	variação em torno das medidas nominais
$\epsilon$	ruído aleatório na fase da portadora
$\zeta_j$	vetor de rotação de pequenas correções angulares entre $\tilde{\mathcal{A}}_{j-}$ e $\mathcal{A}_j$
$\zeta_j^o$	vetor de rotação de pequenas correções angulares entre $\tilde{\mathcal{A}}_{j-}$ e $\mathcal{A}_j^o$
$\eta_{nE}$	ângulo entre o vetor Nadir e o eixo de rotação

$(\theta_1, \theta_2)$	ângulos esféricos
$\theta^{(i)}$	$i$ -ésima aproximação da estimativa de $\theta$
$\boldsymbol{\theta}_R$	vetor de rotação entre dois referenciais
$\theta_R$	ângulo de rotação
$\theta_{ss}$	ângulo da radiação incidente em relação ao versor normal do sensor solar
$\theta^p$	ângulo de aspecto do $p$ -ésimo satélite GPS
$\lambda$	comprimento de onda da portadora
$\mu$	ângulo de máscara da antena GPS
$\nu_j$	seqüência gaussiana branca
$\xi_j$	vetor de rotação de pequenas correções angulares entre $\tilde{\mathcal{A}}_j^o$ e $\mathcal{A}_j$
$\rho(t)$	vetor posição instantânea do satélite usuário, no referencial externo
$\rho^p(t)$	vetor posição instantânea do $p$ -ésimo satélite GPS, no referencial externo
$\sigma$	desvio padrão ( $5mm$ ) do erro na fase da portadora, adotado na simulação digital e no cálculo do fator ADOP
$(\sigma^p)^2$	variância do erro em $v^p$
$\sigma_{\theta^p}$	desvio padrão total relativo ao ângulo de aspecto para o fator ADOP
$\sigma_{\tilde{\theta}_j^p}^2$	variância do erro em $\tilde{\theta}_j^p$
$\tau$	período de amostragem normalizado
$\tau_i^p$	tempo de deslocamento da fase, no vácuo
$\phi_i$	fase gerada no receptor
$\phi^p$	fase da portadora gerada pelo $p$ -ésimo satélite GPS
$\phi_i^p$	fase da portadora emitida pelo $p$ -ésimo satélite GPS, conforme recebida pela $i$ -ésima antena
$\phi_T^p$	fase emitida pelo $p$ -ésimo satélite GPS

$\dot{\phi}_T^P$	taxa de variação de $\phi_T^P$ ; modelagem na frequência
$\psi_{SE}$	comprimento do arco entre $S$ e $E$
$\psi$	ângulo de fase
$\psi_S$	observação do azimute da projeção de $S$ sobre $z$
$(\psi, \theta, \phi)$	ângulos de Euler
$\omega(\cdot)$	taxa de rotação no instante considerado
$\omega_S$	argumento do perigeu do satélite usuário
$\omega_S^p$	argumento do perigeu do $p$ -ésimo satélite GPS

### Índices superiores

$o$	índice de valor a priori
$p$	índice do $p$ -ésimo satélite GPS; satélite escravo
$q$	índice do satélite mestre

### Índices inferiores

$i$	indica a $i$ -ésima antena do satélite usuário
$j$	índice relativo ao instante $t_j$
$j-$	índice relativo ao instante $t_j$ , não atualizado
$k$	índice do $k$ -ésimo instante de amostragem

### Símbolos especiais

$T$	indica transposta de matriz
$\hat{\phantom{x}}$	indica versor
$\tilde{\phantom{x}}$	indica valor estimado
$\bar{\phantom{x}}$	indica valor nominal
$\times$	indica produto vetorial
$\cdot$	indica produto escalar
$\dot{(\phantom{x})}$	indica derivada temporal
$*$	indica conjugado do quatérnion

# Capítulo 1

## Introdução

Sabe-se que a *atitude* de um satélite artificial é definida pela sua orientação no espaço (Wertz, 1978)<sup>[45]</sup>, conceito este que representa o principal objeto de estudo deste trabalho. Mais especificamente, investiga-se o uso de receptores GPS para determinar a atitude de satélites estabilizados por rotação.

A proliferação mundial de missões espaciais com fins meteorológicos, de telecomunicação, de sensoriamento remoto e científicos, entre outros, confere relevância significativa às atividades de controle e determinação de órbita e atitude de satélites. Em particular, a determinação da atitude de um satélite faz parte de um segmento importante no contexto das atividades espaciais, seja pela necessidade de interpretação da carga útil do satélite, frequentemente relacionada a obtenção de imagens, seja pela necessidade de atender aos requisitos de controle de atitude. No âmbito da Fotogrametria, a determinação da atitude da câmara fotográfica em vôo é um requisito desejável para a obtenção de melhor precisão e definição da área fotografada.

A posição angular de um satélite artificial, estabilizado em *um* ou em *três eixos*, requer uma atenção específica no âmbito de qualquer missão espacial, posto que, normalmente é uma atividade distinta da determinação de órbita.

O projeto *Navigation System with Time and Ranging - NAVSTAR* do governo americano, comercialmente designado de *Global Positioning System - GPS*, proporcionou, entre inúmeras aplicações, uma nova e eficiente ferramenta a princípio útil para a determinação da órbita de satélites artificiais e posteriormente também para determinação de atitude.

O uso deste sistema se apresenta especialmente atrativo e promissor por viabilizar a determinação autônoma de órbita e atitude, reduzindo assim os custos de operação em solo. A determinação de órbita vem sendo realizada com o uso do GPS e a complementação da determinação de atitude com o mesmo equipamento, acrescentando-se antenas, representa uma considerável diminuição de custos, comparando-se com o uso de sensores convencionais.

Uma breve discussão introdutória sobre determinação e controle de atitude, a revisão bibliográfica, considerações sobre estudos de posicionamento GPS no contexto nacional e os objetivos específicos deste trabalho, constam da seqüência deste capítulo.

## 1.1 Determinação e controle de atitude

Por **controle** de veículos (espaciais ou não) entende-se a alteração propositada dos parâmetros do movimento do centro de massa (do veículo) e do movimento em torno do centro de massa. O controle em vôo pode incluir: a escolha de uma trajetória ótima, a estabilização de sua posição na rota desejada e sua orientação segundo uma direção especificada.

O controle pode ser executado inteiramente por equipamentos automáticos à bordo de um veículo (carro, navio, avião, satélite, etc.). Quando a operação de tais equipamentos não depende de informações externas, convencionou-se denominá-lo de **controle autônomo**.

O **sistema de controle** é responsável por manobras de atitude e pela estabilização da posição angular do veículo em sua trajetória, com a precisão estabelecida. Nas manobras o satélite adquire uma dada atitude a partir de outra inicial, enquanto que na estabilização espera-se a manutenção de uma dada posição, impassível à ação de torques perturbadores.

Um **sistema de determinação atitude**, como regra, permite expressar um sistema de coordenadas local, fixo no corpo do veículo ou em um instrumento dentro do mesmo em função de um sistema de coordenadas externo. Um sistema de controle de atitude e estabilização pode ser *passivo*, *ativo* ou *combinado*. O sistema passivo difere do ativo unicamente pelo fato de que o controle não requer consumo de potência do veículo e nem precisa de processos de decisão para a geração dos torques de controle. O sistema combinado é uma junção dos dois anteriores.

Os fatores mais importantes para escolha do sistema de controle são:

- a) a configuração geométrica da órbita;
- b) a característica das perturbações internas e externas;
- c) a disponibilidade de fontes internas de energia;
- d) requisitos de precisão e tempo de resposta do controle;

f) limitações de massa, volume e geometria do veículo.

Sistemas de controle ótimo e auto-ajustáveis são amplamente usados no controle de veículos e escolhidos de forma que a lei de controle maximize ou minimize o maior número possível de itens de performance. Todo sistema de determinação e controle de atitude depende de algum tipo de **sensor** que determina a posição angular do veículo: estes sensores podem ser classificados como *inerciais* ou *não inerciais* e a comunicação com as estações de controle efetuada através de sinais de rádio.

Os torques de controle podem ser gerados pelos campos *gravitacional* e *magnético* da Terra, *pressão de radiação solar*, *jatos de gás* ou por *motores* de quaisquer natureza, montados no ou dentro do veículo.

## 1.2 Revisão bibliográfica

No âmbito específico da determinação de órbita com o uso do GPS, inúmeros trabalhos foram publicados, inicialmente na solução de navegação em terra, aplicada a aeronaves e satélites, tais como (Bender & Larden, 1989)<sup>[2]</sup>, (Lopes & Kuga, 1988)<sup>[22]</sup>, (Lucas & Martin-Neira, 1990)<sup>[27]</sup>, (Mitchell et al., 1996)<sup>[33]</sup>, entre outros.

A determinação de atitude com o uso do GPS, por sua vez, tem gerado uma grande quantidade de trabalhos, notadamente em simulações com aeronaves (Cohen et al., 1994)<sup>[7]</sup>, (Cohen, Parkinson & McNally, 1994)<sup>[4]</sup> e simulações com antenas receptoras montadas em braços giratórios em terra (Lucas & Matrín-Neira, 1990)<sup>[27]</sup>, (Lucas, Martinez & Neira, 1994)<sup>[28]</sup> e (Hope, 1994)<sup>[16]</sup>.

A determinação de atitude por interferometria recebeu atenção nos trabalhos de (Ellis & Creswell, 1979)<sup>[8]</sup>, (Cohen & Parkinson, 1994)<sup>[7]</sup> e (Sebbag & Issler, 1995)<sup>[37]</sup>.

Da mesma forma, trabalhos desenvolvidos para a determinação de atitude com o uso do GPS, entre outros estudos enfocam métodos de polarização de ângulos em antenas (Parvez, 1990)<sup>[36]</sup>, diferença de fase entre duas antenas (Melvin & Hope, 1993)<sup>[32]</sup>, (Martin-Neira & Lucas, 1988)<sup>[30]</sup>, sistema de direcionamento com Ashtech 3-D (Ferguson et al., 1993)<sup>[10]</sup>, (Lu et al., 1994)<sup>[29]</sup>, direcionamento com Trimble TANS Quadrex (Lightsey et al., 1994)<sup>[21]</sup>, (Melvin, Ward & Axelrad, 1995)<sup>[32]</sup>, estimação direta dos ângulos de atitude (Landau & Ordóñez, 1993)<sup>[19]</sup> e finalmente o trabalho recente (Freesland et al., 1996)<sup>[11]</sup> reportando o satélite REX II como o primeiro satélite a

empregar o GPS para controle autônomo de atitude.

Note-se que todos os trabalhos citados, tratam de métodos de determinação de atitude para satélites estabilizados em três eixos. Com raras exceções, a determinação de atitude para satélites estabilizados por rotação não tem merecido a atenção que sua importância requer, dado que ela ocorre, freqüentemente, durante o período de injeção em órbita, ou ainda permanentemente, durante toda a vida útil de muitos satélites.

No que diz respeito a satélites estabilizados por rotação, os trabalhos publicados enfocam a determinação de atitude levando em conta o efeito Doppler (Cohen, 1991)<sup>[5]</sup>, a determinação da atitude em presença da nutação e a tripla diferença de fase (Martin-Neira & Lucas, 1993)<sup>[31]</sup> e a aplicação de apenas uma antena receptora no satélite usuário (Hashida & Unwin, 1993)<sup>[14]</sup>

### **1.3 Contexto nacional**

O Sistema de Posicionamento Global - NAVSTAR/GPS oferece um meio moderno, preciso, praticamente instantâneo e ininterrupto de posicionamento na superfície ou no espaço ao redor de toda a Terra.

Por essa razão, a utilização do GPS vem sendo largamente disseminada e baseia-se em informações transmitidas por uma constelação adequada de satélites e captadas por um receptor local apropriado.

No contexto Nacional, além da Universidade Federal do Paraná (UFPR), onde, através do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, o Grupo de Geodésia por Satélite desenvolve trabalhos em determinação de órbita e atitude por GPS, o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), na Divisão de Mecânica Espacial e Controle (DMC) da Coordenadoria de Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE), realiza estudos de determinação de órbita e atitude de satélites artificiais com o uso do GPS. Além disso, o INPE atualmente vem desenvolvendo esforços para a realização de experimentos participativos em missões espaciais, destacando-se (Fabri, Lopes & Ferreira, 1996)<sup>[9]</sup>:

1. Experimento de determinação de órbita e atitude da plataforma sub-orbital prevista para ser lançada pelo foguete nacional Sonda IV, a partir de 1998;
2. Experimento de determinação de órbita e atitude por GPS no balão estratosférico MASCO (42 km de altitude) cuja carga útil é um telescópio de raios gama com



máscara codificada, previsto para lançamento em 1998;

3. Experimento de determinação de órbita e atitude no satélite de coleta de dados SCD-3 da Missão Espacial Completa Brasileira (MECB), previsto para lançamento a partir de 2000.

Comunicações em Congressos e Reuniões Científicas e publicações em Revistas Científicas Especializadas também têm focado o interesse do uso do GPS na determinação de órbita (Lopes & Kuga, 1988)<sup>[22]</sup>, (Paiva, 1988)<sup>[35]</sup>, (Mog, 1996)<sup>[34]</sup>, (Chiaradia, 1996)<sup>[3]</sup> e (Lopes & Kuga, 1997)<sup>[23]</sup>, entre outros.

Outras instituições brasileiras demonstram interesse no uso do GPS, tanto na área de Geodésia como no Segmento Espacial, tais como, Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia, campus de Presidente Prudente (UNESP/FCT) e Universidade Estadual Paulista, Grupo de Dinâmica Orbital e Planetologia (DMA/FEG/UNESP), campus de Guaratinguetá, entre muitas outras.

A UFPR e o INPE firmaram um convênio de cooperação técnico-científica e, tendo em vista o uso do GPS, no âmbito deste convênio, desenvolveu-se a Dissertação de Mestrado intitulada *Determinação de Órbita dos Satélites NAVSTAR-GPS* (Mog, 1996)<sup>[34]</sup>, a *Primeira Campanha Exploratória UFPR & INPE Sobre Observações GPS* (Fabri, Lopes & Ferreira, 1996)<sup>[9]</sup>, e os trabalhos científicos *Attitude Determination For Spin Stabilized Satellites From GPS Interferometry* (Lopes, Fabri & Ferreira, 1997)<sup>[26]</sup> e *GPS-Based Navigation Solution And Spin-Axis Attitude Determination: Numerical Results Of On The Ground Experiment* (Lopes et al., 1997)<sup>[24]</sup>, partes integrantes deste trabalho.

## 1.4 Objetivos

A atitude de satélites artificiais, em função das particularidades das diferentes missões espaciais, tem sido determinada através do uso de sensores de horizonte, solares, giroscópicos, sensores de estrelas e magnetômetros, entre outros. Problemas de custo, peso, calibração e operacionalidade sob variadas condições têm sido contornados com o uso de softwares relativamente sofisticados e que otimizam a operação de tais sensores dentro de sua faixa de aplicação e visibilidade.

O objetivo deste trabalho é propor um esquema de determinação de atitude de satélites artificiais estabilizados por rotação que utiliza unicamente o sistema NAVSTAR-GPS como sensor de atitude. O esquema requer um par de antenas e um receptor à bordo do satélite usuário e prevê a recepção quase ininterrupta de sinais praticamente imunes a zonas de sombra ou períodos de ocultação. O caso de satélites rotacionados, além de ser muito pouco explorado na literatura, apresenta variações em relação ao caso de estabilização em três eixos que podem ser exploradas vantajosamente.

Diferentemente dos poucos esquemas já existentes na literatura, o procedimento proposto não requer a resolução de ambigüidades, o que se constitui uma das principais contribuições do trabalho.

Deve-se ressaltar que satélites rotacionados continuam sendo uma solução atraente adotada em missões nacionais e internacionais. Outrossim, embora satélites mais sofisticados tendam a ser estabilizados em três eixos, o procedimento proposto pode ainda assim ser adequado durante a fase de órbita de transferência, quando os satélites freqüentemente são rotacionados para obtenção de rigidez giroscópica.

## 1.5 Seqüência do trabalho

Apresenta-se, no Capítulo 2, um estudo panorâmico dos tipos de sensores inerciais e não inerciais usados tradicionalmente, alguns sensores não usuais mencionados na literatura e propõe-se o uso de um sensor baseado no sistema NAVSTAR-GPS para a determinação de atitude de satélites artificiais estabilizados por rotação.

O Capítulo 3, enfoca sucintamente as características básicas de operação dos satélites GPS, dando ênfase às mensagens de navegação e observação e às equações de observação bem como o importante aspecto da condição de visibilidade entre os satélites do sistema GPS e o satélite *usuário*.

O Capítulo 4 trata da determinação de atitude definindo os sistemas de referência envolvidos, as diferentes parametrizações da atitude, os métodos determinísticos e não determinísticos mais usuais e as técnicas de estimação ótima, via filtro de Kalman.

Estes três capítulos contêm as noções básicas para o desenvolvimento do procedimento de determinação de atitude propriamente dito, que é apresentado no Capítulo 5. Finalmente, resultados de simulação bem como, de um experimento realizado em

so, são apresentados no Capítulo 6.

Com isto pretende-se dar uma contribuição objetiva ao problema de determinação autônoma de atitude e pertinente ao programa espacial brasileiro.

## Capítulo 2

# Sensores de atitude

Uma grande variedade de equipamentos pode ser usada para a determinação da atitude de satélites artificiais: sensores de horizonte, sensores solares, sensores de estrelas, sextantes espaciais, magnetômetros, giroscópios, sensores de impacto e uma nova tecnologia de sensores baseadas no *Sistema Global de Posicionamento - GPS*.

Aparentemente, a maioria dos sensores foi desenvolvida sem o objetivo de uma aplicação específica mas de modo que possuam uma certa versatilidade para se adequarem à diversas missões espaciais. Entretanto, a escolha dos sensores de um dado satélite segue critérios específicos de sua missão.

Embora a importância das características de um sensor em particular dependa da aplicação pretendida, alta precisão, baixo consumo de potência, pequeno tamanho, alta confiabilidade e baixa sensibilidade à interferências externas, de modo geral são características desejáveis. Somam-se a estes itens, a habilidade de operação num amplo intervalo de altitudes, capacidade de visualização angular adequada e vida útil compatível com a do satélite.

Uma breve descrição dos tipos de sensores de atitude é dada a seguir, com o intuito de situar o GPS como sensor de atitude em relação ao seu contexto.

## 2.1 Sensores não inerciais

### 2.1.1 Sensores de horizonte

O termo *sensor de horizonte* é aplicado indiscriminadamente a vários tipos de sensores de atitude que têm em comum o fato de determinar a atitude de veículos espaciais relativamente à Terra ou à Lua.

Em vôos orbitais, freqüentemente, a vertical local é determinada, isto é, mais precisamente a direção do centro de massa do geóide num dado instante, no referencial do satélite.

A vertical local é determinada pela intersecção de dois planos mutuamente perpendiculares, cada um dos quais é o bissetor do ângulo diedro formado pelos planos de varredura que passam através do centro de massa do veículo espacial e tangentes à superfície da Terra. Deste modo, para determinar a vertical, é necessário haver divisões que determinem as posições dos planos tangentes à superfície terrestre. Quaisquer partes do espectro de radiação podem ser usadas para tais divisões. No entanto, não é conveniente usar a energia solar refletida pela Terra em UV ou secções de ondas curtas de infravermelho do espectro ( $< 7 \mu$ ) pois, neste caso, as possíveis verticais construídas quando o satélite estiver do lado iluminado ou do lado não iluminado, diferem marcadamente. A fronteira entre o lado iluminado e o lado não iluminado pode ser falsamente interpretada como o horizonte.

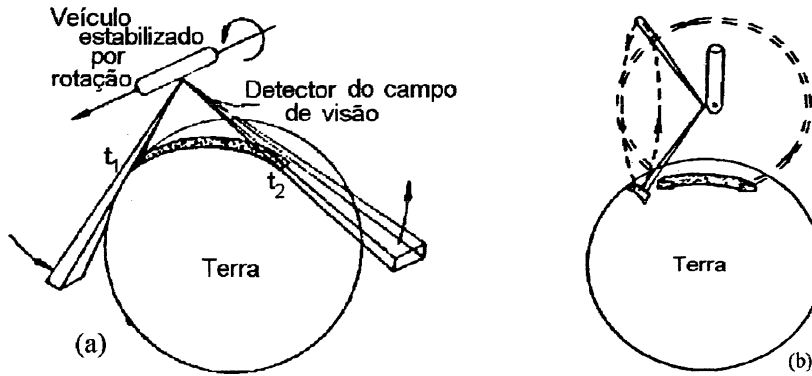
O método de construção da vertical através da radiação infravermelha própria da Terra é largamente usado e consiste em efetuar observações do disco da Terra de qualquer lado, independentemente da posição do Sol. Quando observada pelo satélite através de uma camada da atmosfera, a Terra tem uma faixa de temperatura de radiação efetiva de cerca de  $250^\circ K$  enquanto que a temperatura efetiva da radiação do espaço cósmico é  $4^\circ K$ . Quando observado por um satélite com instrumentos de infravermelho, o horizonte terrestre corresponde a uma altitude de 6 a 16 *km* sobre a superfície da Terra. Esta distância é de mesma ordem que a variação no raio do geóide, associado com a presença de montanhas e a diferença entre os raios terrestres nos polos e no equador.

Os sensores de horizonte operacionais atualmente (figuras adaptadas de Hatcher (1967)<sup>[15]</sup>) encontram-se em uma das categorias seguintes: (2.1.1.1) gerador de pulso, (2.1.1.2) varredura cônica, (2.1.1.3) varredura plana, (2.1.1.4) rastreo puntual, (2.1.1.5) rastreo limiar e (2.1.1.6) radiação planetária, entre outros.

#### 2.1.1.1 *Sensor de horizonte, gerador de pulso*

O sensor infravermelho mais simples é o sensor de horizonte gerador de pulso. Este dispositivo usa o movimento de rotação do satélite para obter a ação de varredura necessária. Possui apenas uma lente simples para detectar e focar a radiação infravermelha incidente sobre um resistor sensível ao calor e um amplificador de saída (*bolometro*) [Figura (2.1a)]. Em operação, produz um pulso (em  $t_1$ ) quando seu campo

**Figura 2.1:** (a) Sensor de horizonte, gerador de pulso. (b) Sensor de horizonte de varredura cônica.



de visão (*field of view FOV*) cruza com o planeta, vindo do espaço e um outro pulso (em  $t_2$ ) quando o campo de visão deixa o planeta. O eixo de rotação do satélite e o ponto médio entre os pulsos  $(t_1 - t_2)/2$  definem um plano que passa através do centro do planeta, assumido esférico (Hatcher, 1967)<sup>[15]</sup>.

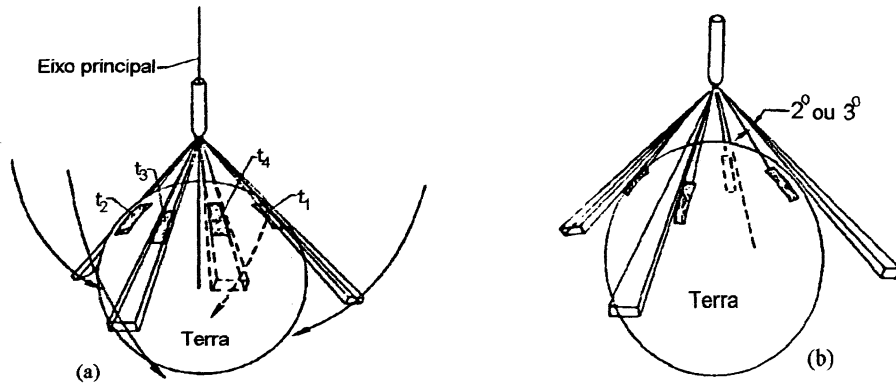
#### 2.1.1.2 Sensor de horizonte de varredura cônica

O sensor de horizonte de varredura cônica, mostrado na Figura (2.1b) é uma variação do sensor de horizonte gerador de pulso com sistema próprio de varredura. Possui, por exemplo, um gerador de pulso que mede a faixa térmica da Terra em torno do eixo de rolamento (*roll*) do veículo e um outro que mede a faixa térmica em torno do eixo de arfagem (*pitch*) (Hatcher, 1967)<sup>[15]</sup>.

#### 2.1.1.3 Sensor de horizonte de varredura plana

Alguns sensores foram desenvolvidos para determinar a atitude efetuando varredura em planos ortogonais através da descontinuidade da radiação infravermelha observada do lado oposto do horizonte do sensor. Em tal configuração, o campo de visão é rotacionado de arcos longos e de tal maneira que os ângulos entre os campos de visão em cada plano e o eixo primário sejam iguais todo o tempo [Figura (2.2a)]. Os sinais de cruzamento no horizonte são produzidos nos tempos  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  e  $t_4$ . Na figura apresentada, a diferença de tempo entre o cruzamento de lados opostos do horizonte, em cada um dos planos, indica a atitude naquele plano (Hatcher, 1967)<sup>[15]</sup>.

**Figura 2.2:** (a) Sensor de horizonte de varredura plana. (b) Sensor de horizonte de rastreo puntual.

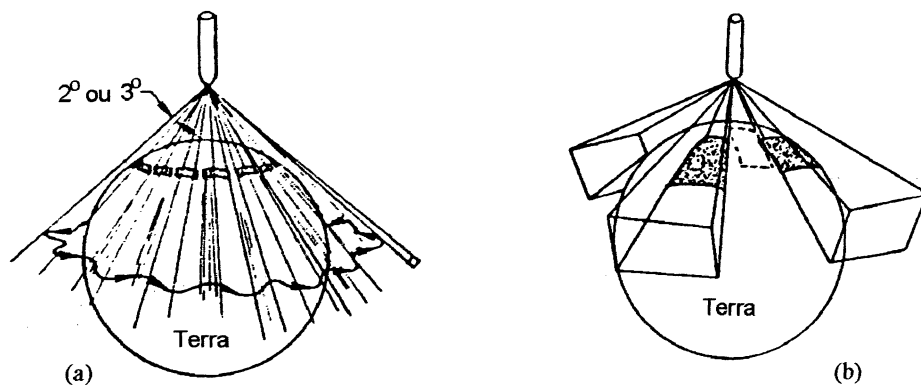


#### 2.1.1.4 Sensor de horizonte de rastreo puntual

O sensor de horizonte de rastreo puntual consiste de três ou quatro espelhos e seus mecanismos de direcionamento associados [Figura (2.2b)]. Estes mecanismos fazem os espelhos oscilarem os campos de visão em torno de pontos do horizonte, após ser alcançado o alvo de observação. A posição ótica indica a atitude. O movimento oscilatório é provocado vibrando-se eletromagneticamente os espelhos que são presos ao mecanismo do sensor por barras de torção (Hatcher, 1967)<sup>[15]</sup>.

#### 2.1.1.5 Sensor de horizonte de rastreo limiar

**Figura 2.3:** (a) Sensor de rastreo limiar. (b) Sensor de radiação planetária.



A diferença significativa entre o sensor de rastreo limiar [Figura (2.3a)] e o sensor de rastreo puntual [Figura (2.2b)], é o adição de um mecanismo de rotação que gira o campo de visão de apenas um sensor em torno do horizonte. O horizonte é

varrido várias vezes e sob muitos aspectos, o sensor de rastreamento limiar permite melhor precisão por acompanhar o achatamento do alvo, variação efetiva da altitude da fonte de emissão de radiação e a variação de temperatura da fonte (Hatcher,1967)<sup>[15]</sup>.

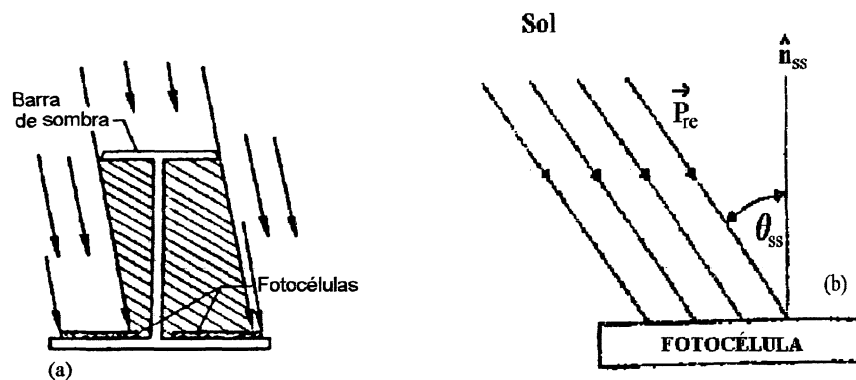
#### 2.1.1.6 Sensor de radiação planetária

Os sensores de radiação planetária, normalmente usam detetores fotovoltaicos que determinam o centro de iluminação do alvo. Para operações a grandes altitudes onde os erros devidos à iluminação parcial são pequenos, tais sensores têm se mostrado satisfatórios [Figura (2.3b)] (Hatcher, 1967)<sup>[15]</sup>.

### 2.1.2 Sensores solares

Os sensores solares têm sido usados no espaço para captação de energia e para determinação de atitude [Figura (2.4a)]<sup>1</sup>. Por causa da sua robustez e simplicidade, têm funcionado com precisão e confiabilidade. Para cada eixo de operação, o sensor solar, normalmente, consiste de um par de células fotovoltaicas de silicone ou um par de células fotocondutoras de sulfeto de cádmio, conectadas em ponte, com saída em pulsos.

Figura 2.4: (a) Sensor solar simples. (b) Sensor solar detector de cossenos.



Os sensores solares são freqüentemente usados e mais de uma variedade destes sensores voaram em muitos satélites e devem sua escolha a vários fatores. Ao contrário da Terra, o raio angular do Sol é independente da órbita de um satélite e suficientemente pequeno ( $0,267^\circ$  em  $1UA$ ). Em muitas aplicações o Sol pode ser aproximado a uma

<sup>1</sup>Adaptada de Wertz, 1978<sup>[45]</sup>.

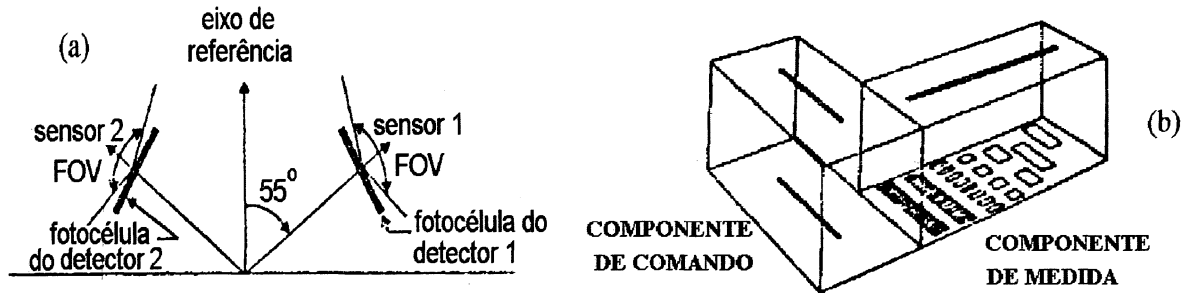


fonte puntual o que simplifica a construção dos sensores e os algoritmos de determinação de atitude e é suficientemente brilhante para permitir o uso de equipamentos simples e confiáveis e que requerem potência mínima (Wertz, 1978)<sup>[45]</sup>.

### 2.1.2.1 Sensor analógico

Os sensores analógicos são também chamados de *detetores de cossenos* porque comumente são baseados na variação cossenoidal da corrente de saída de uma célula solar de silicone, com ângulo solar como mostrado na Figura (2.4b)<sup>2</sup>. Especificamente, o fluxo de energia  $E_e$  através de uma superfície de área  $dA$  com vetor normal  $\hat{n}_{ss}$  é,

**Figura 2.5:** (a) Orientação de dois detetores de cossenos. (b) Sensor digital básico de um eixo.



$$E = P_{re} \cdot \hat{n}_{ss} dA \quad (2.1)$$

onde  $P_{re}$  é o vetor que fornece a direção e a magnitude do fluxo de energia da radiação eletromagnética. Desta forma, a energia depositada na fotocélula e, conseqüentemente, a corrente de saída  $I$ , é proporcional ao cosseno do ângulo da radiação solar incidente.

$$I(\theta_{ss}) = I(0) \cos \theta_{ss}. \quad (2.2)$$

Para simplicidade, no modelo da Equação (2.2) foram omitidas as pequenas perdas de transmissão provocadas pela reflexão de Fresnel, a área efetiva da fotocélula e a reflexão ângulo-dependente na interface ar-célula.

Algumas aberturas usadas para limitar o campo de visão de um sensor analógico e o detector de cossenos usado para posicionar o ângulo solar, geralmente possuem campos de visão cônicos. Um par de detetores de cossenos ou *olhos*, cada um com um

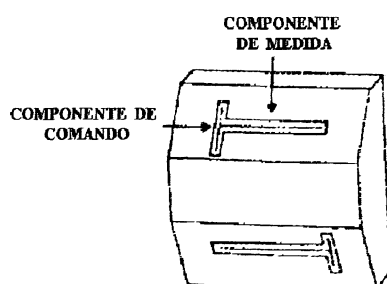
<sup>2</sup>Adaptada de Wertz, 1978<sup>[45]</sup>.

limitado campo de visão, proporciona uma precisão mais homogênea às custas de um FOV reduzido [Figura (2.5a)]<sup>3</sup> (Wertz, 1978)<sup>[45]</sup>.

### 2.1.2.2 Sensor digital

Um sensor solar digital comum para satélites estabilizados por rotação consiste de dois componentes básicos: um componente de comando e um componente de medida [Figura (2.5b)]<sup>4</sup>.

**Figura 2.6:** Dois sensores solares de um eixo para satélites estabilizados por rotação, com 180° de FOV (Adcole Model 17083).



O valor nominal do campo de visão, por exemplo, para o sensor 'Adcole' é limitado a  $\pm 64^\circ$  e a cobertura de  $180^\circ$  é conseguida com a montagem de dois ou mais sensores com sobreposição dos campos de visão, conforme a Figura (2.6)<sup>5</sup>.

O componente de medida gera uma saída que é uma representação digital do ângulo entre a linha do Sol e a normal à face do sensor quando o Sol está na faixa do campo de visão do componente de comando (Wertz, 1987)<sup>[45]</sup>.

### 2.1.3 Magnetômetro

Os magnetômetros [Figura (2.7)]<sup>6</sup>, medem a orientação do veículo espacial relativamente às linhas de força do campo magnético da Terra.

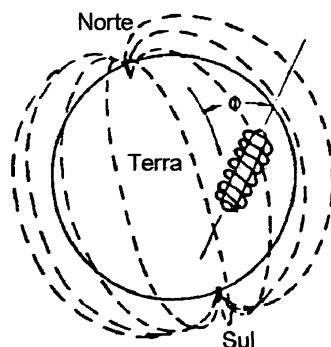
<sup>3</sup>Adaptada de Wertz, 1978<sup>[45]</sup>.

<sup>4</sup>Adaptada de Wertz, 1978<sup>[45]</sup>.

<sup>5</sup>Adaptada de Wertz, 1978<sup>[45]</sup>.

<sup>6</sup>Adaptada de Wertz, 1978<sup>[45]</sup>.

Figura 2.7: Magnetômetro.



O magnetômetro vetorial (de efeito Hall, SQUID<sup>7</sup>, tipo Fluxgate) consiste de três bobinas de haste de alta permeabilidade, mutuamente perpendiculares. Uma corrente alternada é aplicada às bobinas para magnetizar as hastes, primeiramente em uma direção e então na direção oposta. A orientação das hastes em relação ao campo magnético da Terra (e portanto, a orientação do veículo espacial) é indicada pelo desequilíbrio na corrente alternada de saída das bobinas, com respeito à voltagem zero.

Como a voltagem de saída é proporcional ao cosseno do ângulo entre o eixo da haste da bobina e o vetor campo magnético terrestre, a sensação de precisão é variável e é máxima para um eixo a  $90^\circ$  do vetor campo magnético. O magnetômetro escalar que mede o módulo do vetor campo magnético (magnetômetro de precessão de prótons, de bombeamento ótico) é utilizado em medidas da intensidade do campo magnético.

Os magnetômetros não são sensíveis a rotações em torno do vetor campo geomagnético local; um sensor solar é normalmente usado para suprir esta informação (Hatcher, 1967)<sup>[15]</sup>.

#### 2.1.4 Sensor de estrelas

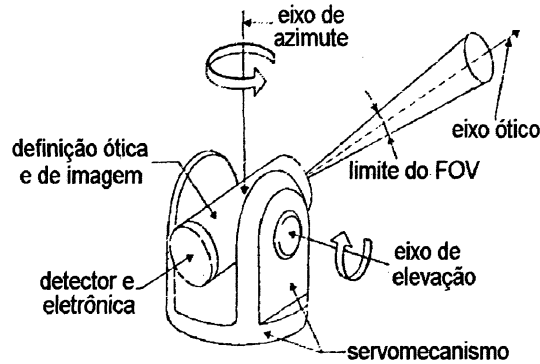
Um sensor de estrelas instalado na estrutura do veículo espacial, mede as coordenadas de uma estrela e fornece informações de atitude quando estas coordenadas observadas são comparadas com a direção fornecida por catálogos. Existem vários tipos de sensores de estrelas: os de varredura, os de rastreamento e os de fenda em V. Em geral os sensores de estrelas são os mais precisos sensores de atitude, atingindo precisões

---

<sup>7</sup>SQUID - *Superconducting Quantum Interference Device*

da ordem de segundos de arco. Esta impressionante capacidade não é conseguida sem um custo considerável. Os sensores de estrelas são pesados, caros e necessitam de mais energia do que qualquer outro tipo de sensor [Figura 2.8]<sup>8</sup>.

Figura 2.8: Sensor de estrela, com cardan.



Somado a estes detalhes, deve-se considerar que o software requerido é extenso pois, as medidas devem ser pré-processadas e as estrelas identificadas antes que a atitude seja calculada. O sensor de estrela é também afetado pelo brilho do Sol, da Terra e de qualquer outro corpo luminoso. Apesar destas desvantagens, graças à sua precisão e versatilidade, tem sido usado em um grande número de missões espaciais.

## 2.2 Sensores inerciais

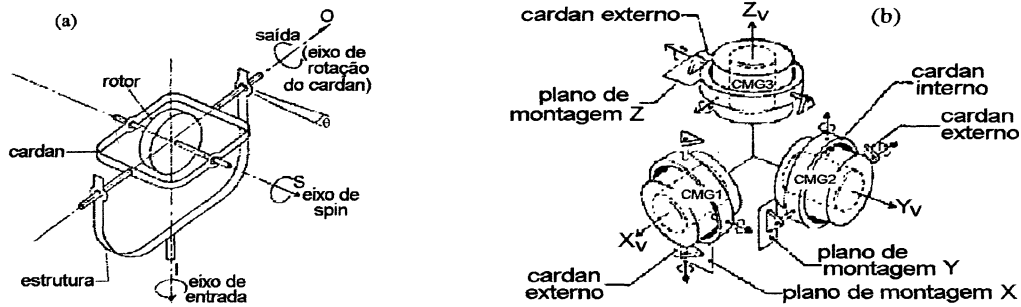
Entre os tipos de sensores mais comumente usados para a determinação de atitude de veículos espaciais, os *instrumentos giroscópicos* ocupam lugar de destaque e permitem observar variações na atitude em relação a um referencial inercial externo. Os sensores tipo '*rate gyros*' (RG) medem a velocidade angular, enquanto que, os '*rate-integrating gyros*' (RIG) medem diretamente a variação na orientação do satélite.

Os RG são parte de um sistema de realimentação para controle da velocidade de rotação ou estabilização da atitude, medem as velocidades angulares dos satélites e não devem ser confundidos com os '*control moment gyros*' (CMG) [Figura (2.9b)]<sup>9</sup>, estes usados para a geração de torques de controle que alteram ou mantêm a orientação do satélite. Um computador de bordo integra a velocidade angular de saída dos RG e

<sup>8</sup>Adaptada de Wertz, 1978<sup>[45]</sup>.

<sup>9</sup>Adaptada de Wertz, 1978<sup>[45]</sup>.

**Figura 2.9:** (a) Giroscópio com um grau de liberdade. (b) Control Moment Gyros CMG da estação Skylab.



fornece uma estimativa do desvio de atitude do satélite em relação a uma referência inicial. Os RIG medem o deslocamento angular diretamente e sua saída pode consistir da rotação total do satélite a partir de um sistema inercial de referência ou então do incremento de rotação durante um intervalo de tempo (pequeno). A integração de velocidades angulares médias construídas a partir dos vários deslocamentos incrementais fornece uma medida precisa do deslocamento total em atitude.

Velocidades médias assim construídas podem ser utilizadas para o controle da velocidade angular ou para estabilização realimentada. Os RIG são mais precisos mas de custo mais elevado. O vetor momento angular de um RG ou RIG é fixo em módulo e paralelo ao eixo próprio do giroscópio.

Como o vetor momento angular mantém sua orientação inercial na ausência de torques aplicados, o movimento do satélite ao redor do *eixo de entrada* do giroscópio faz o suporte cardan do eixo próprio precessionar ao redor do eixo de saída (ou eixo de rotação do cardan). Obtém-se a saída de um RG ou de um RIG a partir do movimento do cardan. Um CMG opera em sentido inverso pois um deslocamento do cardan muda a resultante no vetor do momento angular e gera um binário de controle ao redor do eixo de entrada do giroscópio. A Figura (2.9a)<sup>10</sup> mostra um giroscópio com um grau de liberdade cujo eixo de rotação é suportado por um único cardan o que o torna sensível a apenas uma direção de entrada. Dois cardans definem um giroscópio com dois graus de liberdade e uma combinação deles fornece o controle ao redor de três eixos. O satélite HEAO-1 (High Energy Astronomical Observatory) levou uma configuração de quatro RIG para a determinação da atitude e controle da velocidade de rotação própria. O

<sup>10</sup>Adaptada de Wertz, 1978<sup>[45]</sup>.

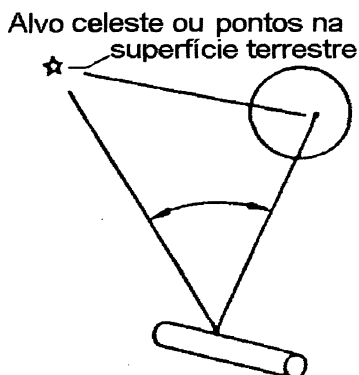
sistema de controle de atitude do SKYLAB [Figura (2.9b)]<sup>11</sup> foi efetuado com três CMG de dois graus de liberdade. Um sistema de três eixos com pelo menos uma redundância é chamado de sistema de referência inercial (Wertz, 1978)<sup>[45]</sup>.

## 2.3 Outros sensores

### 2.3.1 Sextante espacial

O sextante espacial automático mede o ângulo relativo do veículo espacial em relação a dois ou mais corpos celestes conhecidos ou em relação a dois ou mais pontos na superfície da Terra ou da Lua, para determinar a atitude e a posição do veículo [Figura (2.10)]<sup>12</sup>. Os corpos usados como alvos de referência para atitude podem ser estrelas, o Sol, a Lua, ou um Planeta.

Figura 2.10: Sextante espacial.



O sextante espacial pode ser usado para várias funções. Por exemplo: quando uma estrela e a Lua ou, uma estrela e um planeta são usados, o sextante torna-se essencialmente um rastreador de estrelas, um alvo-extensão do tracejador planetário, e uma média das medidas do ângulo entre os tracejadores é usada em um único instrumento (Hatcher, 1967)<sup>[15]</sup>.

### 2.3.2 Sensor de impacto

Vários estudos têm sugerido a possibilidade da determinação de atitude de veículos espaciais de órbita planetária através da medida da pressão atmosférica residual, da

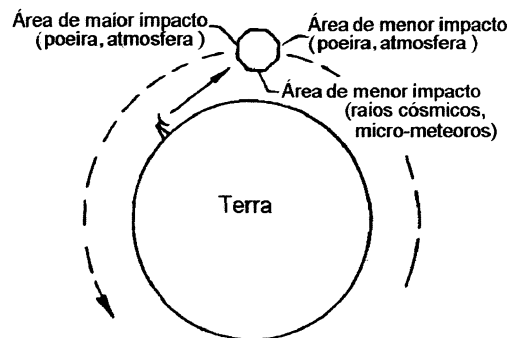
---

<sup>11</sup>Adaptada de Wertz, 1978<sup>[45]</sup>.

<sup>12</sup>Adaptada de Hatcher, 1967<sup>[15]</sup>.

taxa de impacto de micro-meteoros, raios cósmicos ou radiação natural sobre diferentes pontos do veículo espacial [Figura (2.11)]<sup>13</sup>. A área de máximo impacto dos micro-meteoros pode ser a área do topo do veículo, enquanto que a área de maior impacto da pressão atmosférica residual, íons de raios cósmicos e partículas neutras pode ser a área frontal (lado visto da Terra) (Hatcher, 1967)<sup>[15]</sup>.

Figura 2.11: Sensor de impacto.



## 2.4 O GPS como sensor de atitude

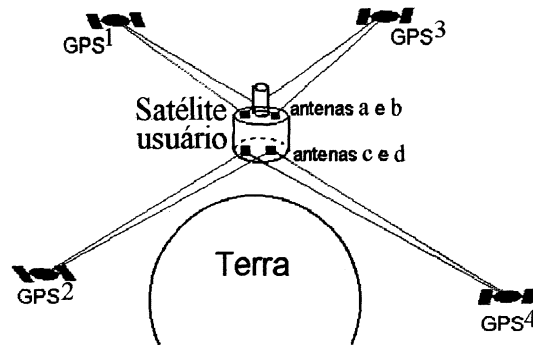
O *Sistema de Posicionamento Global* (GPS) está revolucionando as operações espaciais por viabilizar a navegação e o controle autônomo de satélites com órbitas baixas. O receptor GPS é um equipamento capaz de diversas funções, muitas das quais tem sido realizadas por componentes de vôo completamente separados e não relacionados. Aplicável à navegação, guiagem em malha fechada, controle de atitude e à transferência de tempo com precisão atômica, um receptor GPS a bordo de um satélite pode fazer o papel de um sensor *deca*-dimensional, fornecendo Posição (3 dimensões), Velocidade (3 dimensões), Tempo (1 dimensão) e Atitude (3 dimensões) (PVTA). Com o amadurecimento da tecnologia do GPS, o custo do receptor, tamanho, massa, e consumo de potência decrescem rapidamente.

A determinação de atitude usando GPS tem sido desenvolvida como uma nova alternativa aos sensores de atitude. Dois fatores tem contribuído para a viabilidade desta tecnologia:

---

<sup>13</sup>Adaptada de Hatcher, 1967<sup>[15]</sup>

Figura 2.12: Possível geometria das antenas GPS.



1. a constelação GPS, de 24 satélites, está em operação e permite recepção contínua e independente das condições atmosféricas e da interferência da refração ionosférica,
2. a tecnologia do receptor avançou a ponto de as unidades de vôo serem desajavelmente pequenas ( $\sim 1300cc$ ), leves ( $\sim 1.5kg$ ) e consumirem baixa potência ( $\sim 3.5W$ ), permitindo sua instalação em quase todos os tipos de satélites (Cohen & Parkinson, 1992)<sup>[7]</sup>.

Normalmente, a atitude e o posicionamento são resolvidos por sensores separados e requerem processamento em solo. Agora, com o uso do GPS, um único receptor poderá fornecer ambas as funções simultaneamente e de modo autônomo.

Um receptor TANS, construído pela Trimble Navigation Ltda., foi configurado para um satélite artificial e a versão com quatro antenas foi instalada no satélite RADCAL (RADar CALibration) lançado em junho de 1994, com estabilização em três eixos. Esta missão é a primeira a testar em vôo a medida de atitude de satélites usando GPS. Quando combinada com a determinação de posição e a medida de tempo, um receptor GPS possui capacidade para fornecer até 10 dimensões de informação (Lightsey et al., 1994)<sup>[21]</sup>.

Basicamente o GPS permite calcular a distância em que o satélite usuário se encontra de cada elemento da constelação. Um artifício usando múltiplas antenas permite observar a posição relativa entre antenas, determinando assim também a atitude. O próximo capítulo descreve com mais detalhes o funcionamento do GPS.

O sensor GPS mostra-se promissor pois possui amplo campo de visão ( $\sim 180^\circ - 20^\circ$  de elevação para cada antena), não tem partes móveis, dispõe de 24 fontes constantes de sinais e independe de condições meteorológicas. O ângulo de máscara mais usado é



15° para cada lado acima da linha de horizonte da antena.

A escolha dos sensores de atitude adequados a uma dada missão depende de várias considerações. Por exemplo, sensores solares estão relacionados com o apontamento do satélite em relação ao Sol e ficam inoperante nos trechos noturnos da órbita. Sensores de horizonte são mais adequados para satélites com apontamento para a Terra. Sensores de estrelas são mais adequados para satélites com estabilização inercial. Magnetômetros são indicados apenas para missões em órbitas baixas (até cerca de 1000km) devido ao decaimento da intensidade do campo geomagnético com a altitude. O desempenho do sensor GPS, por sua vez, depende do número e da disposição geométrica dos satélites GPS no campo de visada e das antenas instaladas no satélite usuário, que determinam o fator ADOP (*diluição da precisão de atitude*) (Cohen, 1996)<sup>[6]</sup>.

No Capítulo 3, testes de visibilidade mostram que, após uma adequada escolha na disposição das antenas instaladas no satélite, o sensor GPS tem períodos grandes de recepção de sinais com pelo menos quatro fontes de transmissão. A única limitação do sensor GPS, no que diz respeito à visibilidade está no fato de que os satélites usuários, portadores de sensores GPS devem orbitar altitudes inferiores às das órbitas dos satélites GPS. No mesmo capítulo, apresenta-se o algoritmo para o cálculo do fator ADOP e suas considerações.

#### **2.4.1 O sensor GPS em satélites estabilizados por rotação**

O uso do GPS para determinação de atitude em satélites estabilizados em três eixos já tem sido testado. Tal uso requer alguns ajustes no hardware do receptor/antenas para combinar adequadamente os sinais das múltiplas antenas em um único receptor. O processamento adequado dos sinais, nessa situação, também é necessário.

O caso de satélites estabilizados por rotação (estabilização em um eixo) requer, presumivelmente, outros arranjos adequados no hardware, próprios para a nova situação que é conceitualmente diferente, o mesmo se aplicando ao software. Essas diferenças possibilitam o estudo de novas técnicas, tais como, uma única antena ou mais de uma antena, uma única frequência ou duas frequências, de acordo com as peculiaridades do GPS.

Estudos sobre o hardware e software internos dos receptores GPS e sobre as modificações que se façam necessárias para determinação de atitude de satélites rotacionados

fogem ao escopo deste trabalho que, outrossim, se concentrará em soluções com duas antenas e uma única frequência.

Não se têm notícias de testes realizados com o uso de sensor GPS em satélites estabilizados por rotação. Porém, os resultados de experimentos em solo são promissores e já há perspectivas de testes a bordo de futuras missões nacionais.

## Capítulo 3

# NAVSTAR - GPS

O lançamento do SPUTNIK I (1957), foi o ponto de partida na utilização de sinais de rádio enviados por satélites artificiais em navegação. Cientistas da Universidade Johns Hopkins perceberam o efeito *doppler* nas transmissões de rádio do satélite e descobriram que a medida da variação deste efeito compara-se à medida da variação da distância entre as fontes *emissora* e *receptora* dos sinais. Ocupando-se pontos de coordenadas conhecidas conseguiu-se determinar a órbita do satélite. Posteriormente, notou-se que a recíproca é verdadeira. A posição do receptor pode ser determinada à partir de observações da variação do efeito *doppler* se as órbitas dos satélites forem conhecidas.

Sistemas de rádionavegação como LORAN e DECCA são falhos especialmente em alto mar e por este motivo a Marinha Americana solicitou à Agência de Projetos de Pesquisas Avançadas um estudo sobre a técnica do efeito *doppler*, estudo este que culminou com o programa TRANSIT (Marinha Americana e Laboratório de Física Aplicada da Universidade Johns Hopkins), que entrou em operação em 1964, foi colocado à disposição para uso civil em 1967 e despertou interesse para aplicações geodésicas à partir de 1970 (Seeber, 1993<sup>[38]</sup>).

### 3.1 Projeto GPS

O projeto NAVSTAR (Navigation System with Time and Ranging) que posteriormente recebeu o nome comercial GPS (Global Positioning System) resultou da discussão de dois programas americanos, desenvolvidos na década de 60; o programa TIMATION (Time Navigation) da Marinha Americana e o programa chamado Projeto 621-B da Força Aérea.

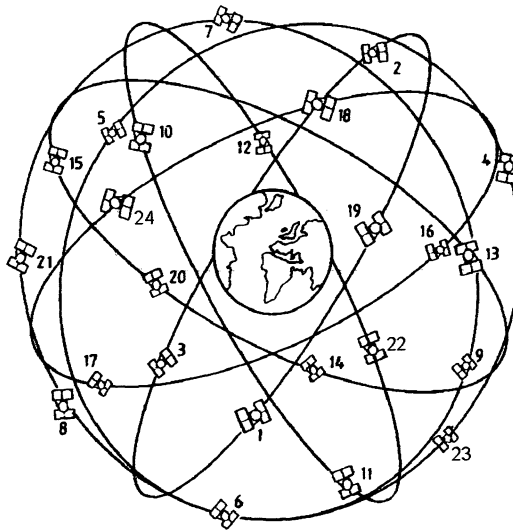
Segundo as partes interessadas, o potencial inicial do sistema deve obedecer aos seguintes aspectos (Andrade, 1988)<sup>[1]</sup>:

1. precisão para posicionamento, da ordem do centímetro;

2. exata determinação de velocidade e tempo;
3. disponibilidade contínua de dados de navegação;
4. base para o estabelecimento de um referencial global;
5. cobertura global e regional;
6. potencial generalizado de navegação para minimizar a proliferação de sistemas para fins especiais ou de cobertura regional;
7. independência das condições meteorológicas;
8. observação simultânea de pelo menos quatro satélites visíveis acima do horizonte, em qualquer região e em qualquer instante.

### 3.1.1 Constelação

Figura 3.1: Configuração dos 24 satélites GPS.



a) número de satélites no sistema:

- 24 satélites em órbita (21 operacionais e 3 para reposição)  
[Figura (3.1)]<sup>1</sup>;

b) 6 planos orbitais,

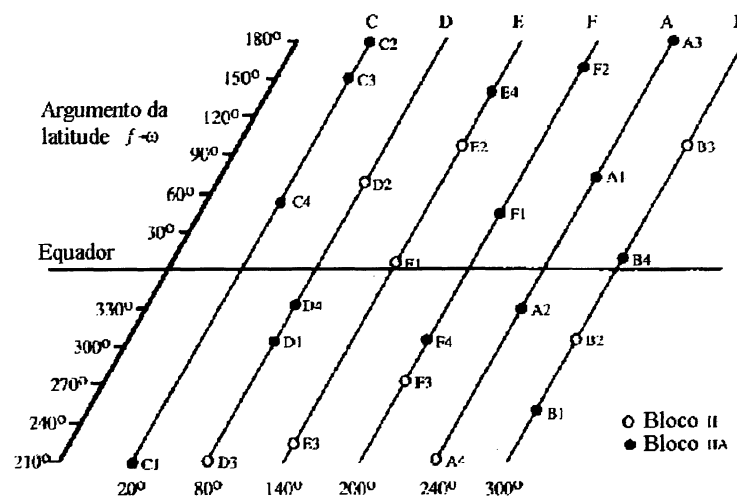
c) altura da órbita -  $\sim 20.200 \text{ km}$ ,

---

<sup>1</sup>Adaptada de Seeber, 1993<sup>[38]</sup>.

- d) período - 12 h,
- e) órbita quase circular, com excentricidade igual a 0,05 ,
- f) 55° de inclinação do plano orbital,
- g) relógios de bordo - atômicos com estabilidade da ordem de  $10^{-13}$ ; um de rubídio e outro de césio em cada satélite,
- h) portadoras de rádio frequência de 1.228 MHz e 1.575 MHz,
- i) potência de 450 W,
- j) visibilidade contínua,
- l) semi-eixo maior da órbita  $\sim 26.000$  km,
- m) a posição orbital de cada satélite em cada um dos seis planos de A até F, conforme a Figura (3.2)<sup>2</sup>, é indicada pelo seu número de posição no plano,

Figura 3.2: Arranjo final dos satélites na constelação GPS.



- n) a distância em ‘ascensão reta’ entre dois planos orbitais é de 60°,
- o) a posição de um satélite em um plano orbital particular pode ser definida pelo *argumento da latitude*,  $u = w + v$  ou pela anomalia média  $M_S^p$  para uma dada época.

<sup>2</sup>Adaptada de Leick, 1995<sup>[20]</sup>.

### 3.1.2 Satélites do Bloco I

O projeto GPS desenvolveu-se progressivamente. Inicialmente os satélites NAVSTAR de 1 à 11, lançados entre 1978 e 1985 em dois planos orbitais com inclinação de 63°, compuseram o que se denominou Bloco I [Apêndice A]. O tempo de vida útil destes protótipos de teste foi determinado em cinco anos mas, na realidade, este prazo foi excedido em muitos casos. Atualmente, todos os satélites do Bloco I estão desativados.

### 3.1.3 Satélites do Bloco II

Posteriormente, novos lançamentos começam a formar o chamado Bloco II. O primeiro satélite do Bloco II ocupou sua posição na constelação em fevereiro de 1989. Um total de 28 satélites deste tipo foram planejados para dar suporte a uma configuração de 21+3 satélites (atualmente os 24 satélites estão disponíveis) [Tabela A.2, Apêndice A].

Uma versão levemente modificada, satélites do Bloco IIA, [Tabela A.3, Apêndice A], iniciou sua operação em novembro de 1990 e a vida útil destes satélites está prevista para sete anos e meio.

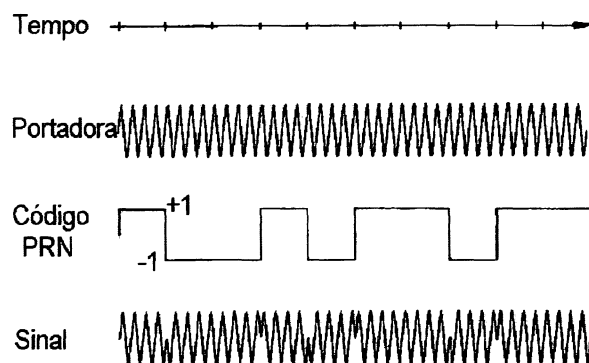
O desenvolvimento de uma nova geração de satélites do Bloco II iniciada em 1996, deverá ser composta de vinte satélites conhecidos como satélites do Bloco IIR os quais substituirão os anteriores. Estes satélites possuirão relógios atômicos de Hydrogen-Maser, vida útil de 10 anos e terão a habilidade de medir distâncias entre os satélites GPS, determinar suas órbitas de modo autônomo gerar suas próprias mensagens de navegação à bordo e transmitir observações entre si e para estações em terra. Poderão operar pelo período de até 6 meses sem suporte das estações de controle em terra, sem perda de precisão na transmissão de suas efemérides. O primeiro satélite do Bloco IIR teve um lançamento falho em 17/01/97 e o segundo foi lançado com sucesso em 23/07/97, entrando em operação em 29/11/97.

Uma nova série de satélites GPS, designada por satélites do Bloco IIF, deve ser iniciada em torno do ano 2000.

A Figura (A.2) no Apêndice (A) mostra uma vista esquemática de um satélite do Bloco II.

## 3.2 Sinais GPS

Figura 3.3: Estrutura dos sinais dos satélites GPS.



Os satélites GPS transmitem sinais *pseudo-aleatórios* de ruído (*PRN - pseudo random noise signal*), um na frequência de  $1.575\text{ MHz}$  e outro na frequência de  $1.227\text{ MHz}$ , com frequência fundamental de  $10,23\text{ MHz}$ . Tais frequências da banda *L* permitem a operação em quaisquer condições de tempo e, como são geradas de modo coerente, permitem a medida do efeito da refração ionosférica na propagação das ondas quando o usuário está no solo ou em órbita baixa.

As frequências são moduladas em fase por dois códigos gerados por algoritmos que, de maneira aleatória, fazem trocar seus valores de  $+1$  para  $-1$  ou vice-versa [Figura (3.3)]<sup>3</sup>. O código preciso *P* (*precise*) é gerado à uma razão de  $10,23\text{ Mbps}$  ( $\text{Mbps} = \text{mega bits por segundo}$ ) e dura aproximadamente 38 semanas, cada satélite usando uma semana, enquanto que o código de fácil acesso *C/A* (*coarse acquisition*) tem frequência de  $1,023\text{ Mbps}$  e repete-se a cada milissegundo. Nesta constelação cada satélite tem o seu código *C/A* próprio, detalhe que o distingue dos demais. O código *P* fornece capacidade para uma navegação de alta precisão, sendo resistente a contra-medidas eletrônicas ou interferência de multicaminhos, com uso restrito a aplicações militares. Já o código *C/A* é de uso geral e fornece um sinal de alcance grosseiro, com precisão degradada em relação do código *P*.

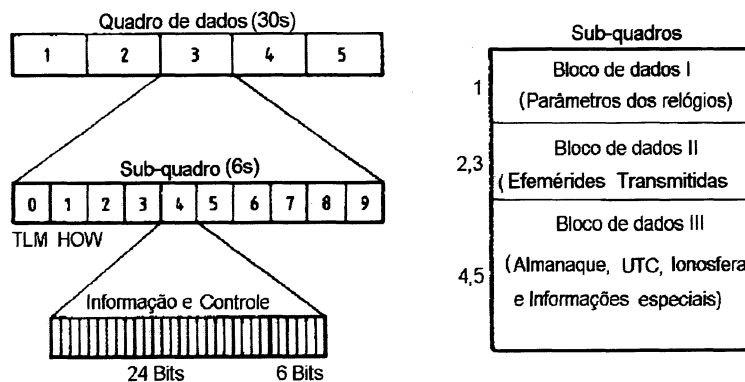
<sup>3</sup>Adaptada de Seeber, 1993<sup>[38]</sup>.

### 3.3 Mensagens de navegação e observação

O sistema de controle rastreia os satélites e determina as efemérides e os parâmetros do relógio de cada um deles. Transmite a informação aos satélites, que por sua vez, retransmitem esses dados (mensagens de navegação), gerados coerentemente a uma razão de  $50\text{ bps}$ , aos usuários.

A estrutura de dados completa [Figura (3.4)]<sup>4</sup> é subdividida em cinco sub-quadros de seis segundos de duração (correspondentes a  $300\text{ bits}$  cada). Cada sub-quadro contém dez palavras de dados de  $30\text{ bits}$  cada, seis das quais fazem o controle de bits. As duas primeiras palavras de cada sub-quadro são as *palavras de telemetria* (TLM) e o código C/A-P *hand over words* (HOW). As palavras TLM contém um padrão de sincronização que facilita o acesso aos dados de navegação. A transmissão de dados de navegação é

Figura 3.4: Formato da mensagem do GPS.



dividida em três blocos de dados:

- *Bloco de dados I*
  - aparece no primeiro sub-quadro e contém os coeficientes dos relógios;
- *Bloco de dados II*
  - aparece nos segundo e terceiro sub-quadros e contém todos os parâmetros necessários para o cálculo das coordenadas dos satélites;
- *Bloco de dados III*

<sup>4</sup>Adaptada de Seeber, 1993<sup>[38]</sup>.



- aparece nos quarto e quinto sub-quadros e contém os dados do almanaque com parâmetros dos relógios e efemérides para todos os satélites disponíveis do sistema GPS. O bloco de dados inclui também parâmetros de correção da ionosfera e informações alfanuméricas particulares para *usuários autorizados* (Seeber, 1993)<sup>[38]</sup>.

O rastreamento dos satélites é feito por quatro estações de monitoramento. Cada estação recebe e processa os sinais de navegação, retransmitindo-os para a Estação de Controle Principal (ECP) juntamente com informações meteorológicas, entre outras pertinentes. A ECP recebe os dados das estações de monitoramento a cada 15 minutos e os corrige eliminando os desvios conhecidos (atrasos provocados pela refração ionosférica, efeitos relativísticos, etc.). Os dados são processados e armazenados para posterior envio ao Naval Surface Weapons Center, Dahlgren, Virginia. Os dados pré-processados são usados para a estimativa em lotes (realizada semanalmente) do estado do satélite (relativa a uma dada época) e para a estimativa da localização das estações de monitoramento.

Uma época de efemérides é definida no final do período de estimação e o estado e a matriz de transição de estados são integrados a partir da época de efemérides, fato esse que permite a predição das efemérides para duas semanas. As condições dos satélites nesta época, suas efemérides e a matriz de transição são enviadas à ECP, juntamente com a localização atualizada das estações. Essas informações são usadas juntamente com lotes de dados de rastreamento pré-processados (15 *min*), para a determinação das efemérides atualizadas e os dados dos relógios dos satélites. A estimativa ocorre em tempo quase real com a utilização de um estimador de Kalman. Finalmente, a ECP faz a previsão das efemérides dos satélites e do comportamento dos relógios por um período de um dia com  $\Delta t = 1 \text{ hora}$  e envia estas previsões para a estação de carregamento (upload station) que as envia aos satélites. Cada satélite armazena um grupo diário de efemérides e atualiza a mensagem de navegação a cada hora (Paiva, 1988)<sup>[35]</sup>.

### 3.4 Equações de observação

A observação de fase é definida como a diferença entre a fase da portadora emitida pelo  $p$ -ésimo satélite GPS e recebida pela  $i$ -ésima antena ligada a um receptor e a fase do oscilador interno deste receptor. O processo de medida não calcula o número de ondas portadoras que trafegam entre o satélite GPS e a antena. Por outro lado, a antena não identifica o número exato de ciclos das ondas portadoras emitidas pelo satélite GPS.

O desenvolvimento matemático leva em conta o fato de que a fase da portadora foi emitida pelo satélite GPS, num instante de tempo anterior, muito próximo. A variação da observação da fase da portadora altera a distância topocêntrica como se fosse uma observação Doppler. Desta maneira, o termo *interferometria* é usado para descrever as técnicas de observação da fase da portadora.

Medir ondas com acurácia da ordem do milímetro requer uma atenção especial ao tratamento dado ao fator tempo, visto que, a luz leva  $0,01ns$  ( $ns = nano\ segundos$ ) para se deslocar por uma distância de  $3mm$ . Deve-se levar em conta que, inevitáveis erros de sincronização podem ser eliminados através do cálculo de uma apropriada diferença de fase. A modelagem das Equações de Observação nas seções seguintes é extraída de Leick, (1994)<sup>[20]</sup>.

#### 3.4.1 Observação de fase

A observação da fase da portadora  $\phi_i^p(t)$  para a  $i$ -ésima antena e o  $p$ -ésimo satélite GPS é escrita na forma:

$$\begin{aligned} \phi_i^p(t) = & \phi_i(t) - \phi^p(t) + N^p(1) + I_i^p(t) + \frac{f}{c}T_i^p(t) + \\ & + d_i(t) + d_i^p(t) + d^p(t) + \epsilon , \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $\phi_i(t)$  é a fase gerada pelo receptor e  $\phi^p(t)$  é a fase gerada pelo  $p$ -ésimo satélite GPS, no tempo de referência  $t$ . Note-se que o índice  $i$  não é usado em  $t$  e  $N^p$  para simplificar a notação. O termo  $N^p(1)$  representa a ambigüidade inteira inicial,  $I_i^p(t)$  e  $T_i^p(t)$  representam os efeitos da ionosfera e da troposfera. Os termos  $d_i(t)$  e  $d^p(t)$  representam os atrasos de hardware no receptor das antenas e no satélite GPS,  $d_i^p(t)$  representa o efeito de multicaminho e  $\epsilon$  é o ruído aleatório medido na fase da portadora.

Na Equação (3.1), não é usado o índice que identifica a onda portadora, para que essa equação seja geral. O atraso da troposfera é convertido para ciclos, usando-se o fator  $f/c$ , onde,  $f$  é a frequência nominal da portadora e  $c$  é a velocidade da luz.

A diferença  $\phi_i(t) - \phi^p(t)$  é calculada em relação ao vácuo, visto que, a contribuição de outros ruídos e atrasos são adicionados separadamente. Na Equação (3.1), o termo  $\phi^p(t)$  indica que as fases da portadora recebida pela  $i$ -ésima antena e emitida pelo  $p$ -ésimo satélite GPS, diferem de exatos  $\tau_i^p$  segundos. Isto pode ser expresso na forma:

$$\phi^p(t) = \phi_T^p(t - \tau_i^p) , \quad (3.2)$$

onde  $\tau_i^p$  é o tempo de deslocamento no vácuo. Como os diferentes satélites GPS têm distâncias diferentes, os sinais recebidos num mesmo instante têm diferentes instantes de emissão. O índice  $T$  representa a fase emitida pelo  $p$ -ésimo satélite. As fases para o tempo de referência  $t$  e para o tempo verdadeiro  $t_r$  são interpretadas como erros de relógios, na forma:

$$\phi_i(t_r) = \phi_i(t) + f dt_i , \quad (3.3)$$

$$\phi_T^p(t_r - \tau_i^p) = \phi_T^p(t - \tau_i^p) + f dt^p , \quad (3.4)$$

onde  $dt_i$  e  $dt^p$  são os erros dos relógios do receptor do satélite usuário e do  $p$ -ésimo satélite GPS, respectivamente.

Nestas equações é levado em conta o fato de que a frequência de um oscilador é constante em relação ao seu próprio sistema de tempo. Desta forma, pode-se considerar a frequência do oscilador, como uma constante e, por definição, um erro de relógio, também constante.

Uma adequada manipulação algébrica entre as Equações (3.3) e (3.4), resulta:

$$\phi_i(t) = \phi_i(t_r) - f dt_i , \quad (3.5)$$

$$\phi^p(t) \equiv \phi_T^p(t - \tau_i^p) = \phi_T^p(t_r - \tau_i^p) - f dt^p . \quad (3.6)$$

Substituindo-se as Equações (3.5) e (3.6) na Equação (3.1) e ignorando-se os erros de propagação e outros atrasos, obtém-se:

$$\phi_i^p(t) = \phi_i(t_r) - \phi_T^p(t_r - \tau_i^p) - f dt_i + f dt^p + N^p(1) . \quad (3.7)$$

Como o tempo de deslocamento do sinal  $\tau_i^p$ , no vácuo, é da ordem de  $70\text{ ms}$  ( $ms = \text{milisegundos}$ ), a expansão de  $\phi_T^p(t_r - \tau_i^p)$  requer uma modelagem da frequência do satélite GPS. Esta modelagem pode ser realizada através de um modelo simples, tal como:

$$\dot{\phi}_T^p(t_r) = f + a_f^p + b_f^p t \quad (3.8)$$

onde  $a_f^p$  é o ajuste e  $b_f^p$  é a deriva das frequências no instante de emissão, respectivamente. Então:

$$\begin{aligned} \phi_T^p(t_r - \tau_i^p) &= \phi_T^p(t_r) - \int_{\tau} \dot{\phi}_T^p(t) dt \\ &= \phi_T^p(t_r) - [f + a_f^p + \frac{1}{2}b_f^p\tau_i^p]\tau_i^p . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Substituindo-se a Equação (3.9) na Equação (3.7), resulta:

$$\begin{aligned} \phi_i^p(t) &= \phi_i(t) - \phi_T^p(t_r) - f dt_i + f dt^p + \\ &+ (f + a_f^p + \frac{1}{2}b_f^p\tau_i^p)\tau_i^p + N^p(1) . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Os termos  $\phi_i(t_r)$  e  $\phi_T^p(t_r)$  podem ser ignorados pois os mesmos não podem ser separados dos erros dos relógios  $f dt_i$  e  $f dt^p$  e também, porque se cancelam quando da execução da dupla diferença de fase que será apresentada na Seção 3.4.3. A Equação (3.10) evidencia que os erros de ajuste e de deriva afetam a fase recebida na quantidade,

$$\Delta\phi^p = (a_f^p + \frac{1}{2}b_f^p\tau_i^p)\tau_i^p , \quad (3.11)$$

onde o termo  $\Delta\phi^p$  é o impacto da mudança do erro do relógio do satélite GPS durante o tempo de deslocamento do sinal. O impacto sobre a fase recebida é função do tempo de deslocamento do sinal  $\tau_i^p$  e como este tempo é pequeno, o impacto da deriva da frequência  $b_f^p\tau_i^p$  pode ser negligenciado. Desta forma,

$$\phi_i^p(t) = -f dt_i + f dt^p + (f + a_f^p)\tau_i^p + N^p(1) . \quad (3.12)$$

Como último passo neste desenvolvimento, apresenta-se o tempo de deslocamento do sinal  $\tau_i^p$  em relação à distância geométrica  $u_i^p$  entre a  $i$ -ésima antena e o  $p$ -ésimo satélite GPS, na forma,

$$\tau_i^p = \frac{u_i^p(t) - \dot{u}_i^p(t)dt_i}{c} , \quad (3.13)$$

onde  $\dot{u}_i^p$  é a taxa de variação da distância geométrica.

Substituindo-se a Equação (3.13) na Equação (3.12), incluindo os termos relativos à ionosfera e à troposfera e os demais atrasos, tem-se:

$$\begin{aligned} \phi_i^p(t) = & \frac{f}{c} u_i^p(t) - f \left[ 1 - \frac{\dot{u}_i^p(t)}{c} \right] dt_i + f dt^p + N^p(1) + \frac{a_f^p}{c} u_i^p(t) + \\ & + I_i^p(t) + \frac{f}{c} T_i^p(t) + d_i(t) + d_i^p(t) + d^p(t) + \epsilon . \end{aligned} \quad (3.14)$$

A Equação (3.14) é a forma completa para a observação de fase. Como existe uma relação linear entre os erros de relógios e os outros efeitos não modelados, seria necessário modelar o efeito combinado para cada parâmetro por época de observação. No entanto, isto não é feito posto que, estes erros têm impacto insignificante ou são eliminados através das técnicas de simples e dupla diferença de fase, apresentadas a seguir.

### 3.4.2 Simples diferença de fase

Se duas antenas  $i = 1, 2$  observam o mesmo  $p$ -ésimo satélite GPS numa mesma época de recepção, pode-se escrever a Equação (3.14) na forma:

$$\begin{aligned} \phi_{12}^p(t) & \equiv \phi_1^p(t) - \phi_2^p(t) \\ & = \frac{f}{c} [u_1^p(t) - u_2^p(t)] + \frac{a_f^p}{c} [u_1^p(t) - u_2^p(t)] + \\ & \quad + \frac{f}{c} [\dot{u}_1^p(t) dt_1 - \dot{u}_2^p(t) dt_2] + N_{12}^p(1) - f (dt_1 - dt_2) + \\ & \quad + I_{12}^p(t) + \frac{f}{c} T_{12}^p(t) + d_{12}(t) + d_{12}^p(t) + \epsilon_{12}^p . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como pode ser visto na Equação (3.16), o índice  $i = 1, 2$  é usado para indicar uma operação de diferença entre os termos  $\phi_1^p(t)$  e  $\phi_2^p(t)$ . Da mesma forma, a convenção é usada para efetuar as operações:

$$N_{12}^p(1) = N_1^p(1) - N_2^p(1) , \quad (3.16)$$

$$I_{12}^p(t) = I_1^p(t) - I_2^p(t) , \quad (3.17)$$

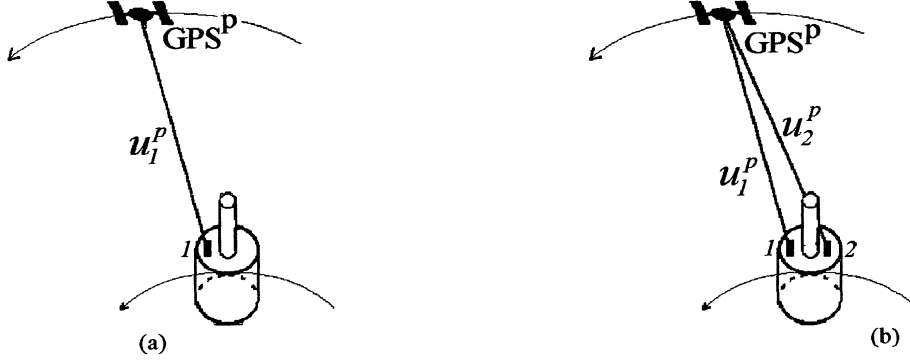
$$T_{12}^p(t) = T_1^p(t) - T_2^p(t) , \quad (3.18)$$

$$d_{12}(t) = d_1(t) - d_2(t) , \quad (3.19)$$

$$d_{12}^p(t) = d_1^p(t) - d_2^p(t) , \quad (3.20)$$

$$\epsilon_{12}^p(t) = \epsilon_1^p(t) - \epsilon_2^p(t) . \quad (3.21)$$

Figura 3.5: (a) Distância geométrica. (b) Simples diferença de fase.



A Figura (3.5b) mostra a geometria da simples diferença de fase cuja principal vantagem consiste em cancelar erros comuns ao  $p$ -ésimo satélite GPS. Por exemplo, os termos  $dt^p$  foram cancelados e os pequenos termos remanescentes das frequências de ajuste do satélite GPS, tendem a zero conforme diminui a linha de base entre as antenas. Os atrasos de hardware também são cancelados. Se a transmissão do satélite for constante, todos estes erros são cancelados durante a transmissão.

No entanto, a técnica de simples diferença permanece sensível aos erros  $dt_1$  e  $dt_2$  dos relógios dos receptores usados em cada antena.

### 3.4.3 Dupla diferença de fase

Da mesma forma, se duas antenas observam dois satélites GPS,  $p$  e  $q$ , durante um mesmo intervalo de tempo, a dupla diferença de fase é:

$$\begin{aligned}
 \phi_{12}^{pq} &\equiv \phi_{12}^p(t) - \phi_{12}^q(t) \\
 &= \frac{a_f^p}{c} [u_1^p(t) - u_2^p(t)] - \frac{a_f^q}{c} [u_1^q(t) - u_2^q(t)] + \\
 &\quad + \frac{f}{c} [u_1^p(t) - u_2^p(t)] - \frac{f}{c} [u_1^q(t) - u_2^q(t)] + \\
 &\quad + \frac{f}{c} [\dot{u}_1^p(t)dt_1 - \dot{u}_2^p(t)dt_2] - \frac{f}{c} [\dot{u}_1^q(t)dt_1 - \dot{u}_2^q(t)dt_2] + \\
 &\quad + N_{12}^{pq}(1) + I_{12}^{pq}(t) + \frac{f}{c} T_{12}^{pq}(t) + d_{12}^{pq}(t) + \epsilon_{12}^{pq},
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde,

$$N_{12}^{pq}(1) = N_{12}^p(t) - N_{12}^q(t), \tag{3.23}$$

$$I_{12}^{pq}(t) = I_{12}^p(t) - I_{12}^q(t), \tag{3.24}$$

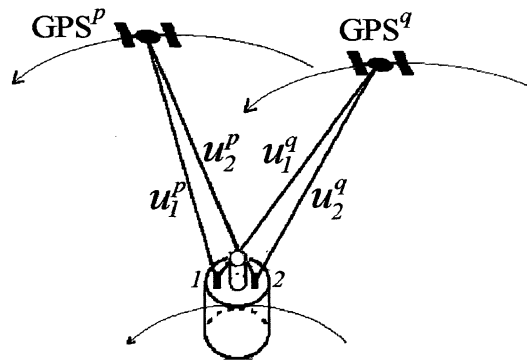
$$T_{12}^{pq}(t) = T_{12}^p(t) - T_{12}^q(t) , \quad (3.25)$$

$$d_{12}^{pq}(t) = d_{12}^p(t) - d_{12}^q(t) , \quad (3.26)$$

$$\epsilon_{12}^{pq} = \epsilon_{12}^p - \epsilon_{12}^q . \quad (3.27)$$

O detalhe mais importante das observações de dupla diferença de fase, reside no cancelamento dos erros  $dt_1$  e  $dt_2$  dos relógios dos receptores. Estes erros são completamente cancelados pois, ou as observações dos  $p$ -ésimo e  $q$ -ésimo satélites GPS são realizadas em tempos simultâneos ou as variações dos relógios dos receptores, numa mesma época de observação, são negligenciáveis. Figura (3.6) apresenta a geometria da dupla diferença de fase.

Figura 3.6: Dupla diferença de fase.



Como os efeitos de multicaminho são funções específicas do conjunto receptor-satélite GPS-geometria de reflexão, os mesmos não são cancelados pelas observações de dupla diferença e são, neste trabalho, considerados como erros não correlacionados. Da mesma forma, devido as questões da ambigüidade e do fenômeno de escorregamento de ciclo, só será levada em conta a parte fracionária da fase.

#### 3.4.4 Tripla diferença de fase

Aplicando-se a Equação (3.23) para dois tempos diferentes de observação, mas ainda simultâneos para as antenas 1 e 2 do satélite usuário, obtém-se a *tripla diferença de fase*.

Os resultados, na prática, demonstram que a dupla diferença de fase é mais precisa que a tripla diferença de fase (Seeber,1993)<sup>[38]</sup>. Na tripla diferença de fase pode-se

detectar eventuais perdas de ciclos (resíduos altos) e elimina-se o número inteiro de ambiguidades. Neste trabalho, a tripla diferença de fase não é usada.

### 3.5 Fontes de erro

Na prática, as equações da seção anterior apresentam diversos termos difíceis de serem avaliados, naturalmente. Estes afetam a precisão da navegação, bem como, a determinação de atitude com GPS e podem ser classificados como:

- Erros do segmento espacial (*disponibilidade seletiva*) acarretando erro nas efemérides (técnica *epsilon*) e instabilidade dos relógios (técnica *dither*) e a degradação intencional do sinal do código *C/A*, para o usuário standar. A instabilidade dos relógios do GPS provocam erros de  $1.000\mu s$ , equivalentes a  $300\text{ km}$  quando a correção da mensagem transmitida não é levada em conta. Com a devida correção (introdução de efemérides precisas) esse erro reduz-se a  $30\text{ ns}$  o que corresponde a  $10\text{ m}$  (Wells, 1986)<sup>[44]</sup>;
- Erros de propagação de sinal: atrasos provocados pela refração ionosférica ( $150\text{ m}$  no horizonte e  $50\text{ m}$  no zênite) e efeitos multicaminhos. Atrasos devidos à refração troposférica ( $20\text{ m}$  a  $10^\circ$  acima do horizonte e  $2\text{ m}$  no zênite) mas afetam apenas usuários localizados próximos a superfície terrestre (Wells, 1986)<sup>[44]</sup>, o que não se aplica a satélites artificiais em geral;
- Eventuais descontinuidades na recepção acarretam variações no número inteiro de ciclos da fase da portadora. No entanto, a parte fracionária continua a mesma, fato este que beneficia as observações preconizadas neste trabalho.
- Erros provocados pela má geometria usuário/GPS (ADOP). Além disso, embora as antenas dos receptores sejam onidirecionais, a razão sinal ruído se degrada em baixas elevações.
- Erros comuns às antenas e ao  $p$ -ésimo satélite GPS, termos remanescentes das frequências de ajuste e os atrasos de hardware, são cancelados no cálculo da simples diferença de fase;
- Erros de relógios dos receptores são completamente cancelados no cálculo da dupla diferença de fase;



### 3.6 Vantagens e limitações

A possibilidade de cobertura global e contínua, aliada à alta precisão na determinação do estado do usuário é a grande vantagem da determinação de atitude com o sistema GPS.

As limitações podem ser classificadas como:

- Razoável influência da geometria usuário/GPS na precisão: quanto maior o número de satélites GPS visíveis, tanto menor o valor do fator ADOP, descrito no final deste capítulo, e que se situa geralmente abaixo da unidade;
- Erros no tempo e nas efemérides limitam a precisão nos resultados do usuário;
- O sistema GPS possibilita a determinação autônoma da atitude;
- O sistema pertence ao governo de uma nação e em princípio o acesso da comunidade pode vir a ser restringido, embora não hajam quaisquer indícios de que isto venha a ocorrer, muito ao contrário.
- Até o momento, a aplicação se restringe a satélites com altitudes inferiores a da constelação GPS, a saber, 20.200 *km*.

### 3.7 Visibilidade GPS × satélite usuário

#### 3.7.1 Introdução

A possibilidade de determinação autônoma de atitude é um componente chave do uso do GPS no espaço. Tal determinação é derivada da medida diferencial da fase da portadora do GPS entre múltiplas antenas montadas sobre um satélite artificial. Suas características satisfazem o estudo do movimento de um satélite artificial, tanto no caso da estabilização por rotação quanto no caso da estabilização em três eixos. Adotando-se uma adequada configuração de antenas, a determinação de atitude usando GPS não sofre restrições para satélites artificiais orbitando em altitudes inferiores às do GPS. No caso de órbitas muito excêntricas, onde o apogeu do satélite usuário está a uma altitude maior que a dos satélites GPS, uma antena de alto ganho pode ser usada para a recepção de sinais dos satélites GPS do hemisfério oposto.

No entanto, a condição de visibilidade entre os satélites da constelação GPS e o satélite usuário têm sido tratada de maneira superficial, motivo pelo qual este estudo se faz necessário.

Os satélites da constelação GPS, em número de 24, transmitem (periodicamente) mensagens de navegação onde estão contidos os elementos keplerianos usados no estudo da visibilidade. Com a instalação do receptor GPS em satélites artificiais, estas mensagens serão transmitidas diretamente ao receptor de bordo do satélite usuário.

Para efeito do estudo de visibilidade feito a seguir, consideram-se conhecidos os elementos keplerianos do satélite usuário e os sistemas de referência externo ( $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ ) e local ( $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ), abordados mais propriamente no Capítulo 4.

Os elementos keplerianos dos 24 satélites GPS e do satélite usuário são propagados analiticamente no referencial externo (inercial), levando-se em conta apenas as perturbações zonais do geopotencial (de  $J_2$  a  $J_6$ , com o aproveitamento de um propagador analítico desenvolvido anteriormente pelo autor deste trabalho) e transformados em vetores de estado. Outras perturbações, tais como, atração luni-solar e pressão de radiação solar são relevantes no caso dos satélites GPS mas fogem do escopo deste estudo de visibilidade.

### 3.7.2 Visibilidade

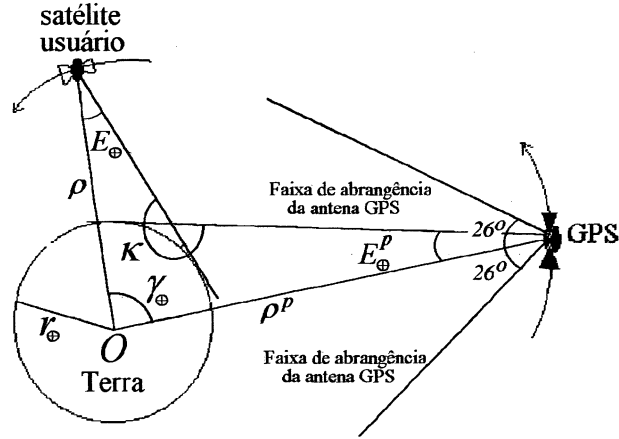
O espaço disponível e o custo são fatores que limitam a colocação de múltiplas antenas em um satélite artificial.

Optou-se nesse trabalho, pela colocação de apenas duas antenas receptoras, com ângulo de máscara  $\mu = 15^\circ$  (ângulo de elevação das antenas em relação ao seu horizonte), na face positiva de rotação de um satélite usuário hipotético, estabilizado por rotação. Esta escolha restringe o ângulo de aspecto da atitude ( $\theta^p$ ) (ângulo formado pelo eixo nominal de rotação e o sinal emitido pelo  $p$ -ésimo satélite GPS) a uma amplitude entre  $0^\circ$  e  $75^\circ$  [Figura (5.1)].

Outro fator a considerar é o fato de que um satélite GPS envia sinais abrangendo  $26^\circ$  em meio cone e a Terra vista por um destes satélites, cuja altitude situa-se em torno de  $20.200km$  tem em torno de  $14^\circ$ . O satélite usuário é admitido como um satélite de órbita baixa (em torno de  $700km$ ) e portanto esse limite pode aqui ser desconsiderado.

De acordo com a Figura (3.7), a condição para que um satélite da constelação GPS

Figura 3.7: Condição de visibilidade entre satélites.



seja potencialmente visível ao satélite usuário, é (Paiva, 1988)<sup>[35]</sup>:

$$\kappa \geq \pi, \quad (3.28)$$

onde  $\kappa$  é o ângulo formado pelas tangentes à superfície da Terra, dos dois satélites. Da trigonometria tem-se que:

$$\kappa = 2\pi - (\gamma_{\oplus} + E_{\oplus} + E_{\oplus}^p), \quad (3.29)$$

onde  $E_{\oplus}$  e  $E_{\oplus}^p$  são os raios angulares da Terra em relação ao satélite usuário e ao  $p$ -ésimo satélite GPS, respectivamente, e  $\gamma_{\oplus}$  é o ângulo formado pelos raios vetores instantâneos  $\rho$  e  $\rho^p$  dos dois satélites.

A condição de visibilidade efetiva, que leva em conta a atitude do satélite usuário e a disposição das antenas, pode ser então reescrita na forma

$$\theta^p \in [0, \pi/2 - \mu], \quad (3.30)$$

$$\rho \cdot \rho^p \geq -|\rho| \cdot |\rho^p| \cos(E_{\oplus}^p + E_{\oplus}), \quad (3.31)$$

na qual,  $\mu$  é o ângulo de máscara das antenas do satélite usuário.

Numa idéia realista da questão da visibilidade, apresenta-se, num primeiro estudo, uma simulação digital da visibilidade entre a constelação GPS e o satélite usuário. O objetivo do teste é verificar o número de satélites GPS visíveis, nos intervalos de propagação.

A transformação do referencial local para o referencial externo pode ser efetuada por uma seqüência de rotações do tipo 313 utilizando ângulos de Euler:

$$\mathbf{w} = R_{313}(\psi, \theta, \phi) \mathbf{n}, \quad (3.32)$$

onde  $\mathbf{w}$  representa as coordenadas de um vetor no referencial local e  $\mathbf{n}$  no referencial externo.

O vetor do eixo nominal de rotação do satélite usuário é então calculado através da relação:

$$\mathbf{w} = w \hat{\mathbf{k}}, \quad (3.33)$$

onde  $w$  é o módulo de  $\mathbf{w}$ . O ângulo de aspecto  $\theta^p$  do  $p$ -ésimo satélite GPS observado pelo satélite usuário, obedece a relação:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}^p = w u^p \cos \theta^p(t_j), \quad (3.34)$$

na qual,  $u^p$  é o módulo do vetor  $\mathbf{u}^p$  e  $t_j$  é o instante de referência para um intervalo de observação. Isto posto, o ângulo de aspecto do  $p$ -ésimo satélite GPS no instante  $t_j$  resulta:

$$\theta^p(t_j) = \cos^{-1} \left( \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}^p}{w u^p} \right). \quad (3.35)$$

A fase de referência  $\phi^p$  é calculada através da equação:

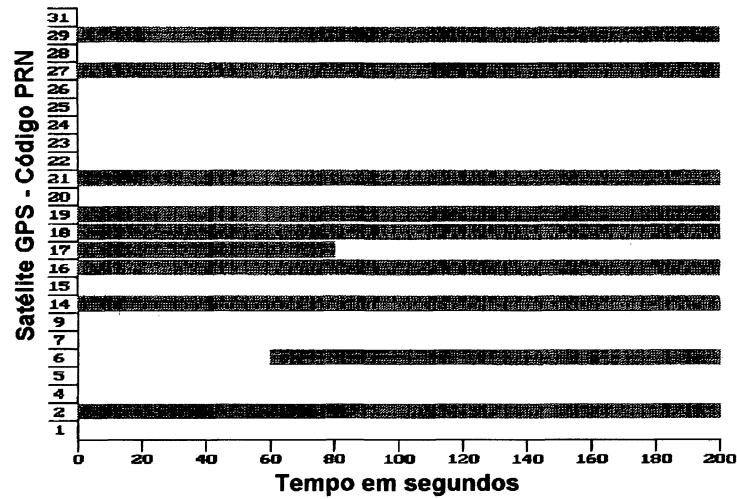
$$\phi^p(t_j) = \tan^{-1} \left[ \frac{\mathbf{u}_x^p(t_j)}{\mathbf{u}_y^p(t_j)} \right]. \quad (3.36)$$

Os elementos keplerianos do satélite usuário considerado para essa simulação, são os seguintes:

$$\begin{aligned} a_S = 7000000,00 \text{ m} & \rightarrow \text{semi-eixo maior,} \\ e_S = 0,02 & \rightarrow \text{excentricidade,} \\ i_S = 45^\circ & \rightarrow \text{inclinação,} \\ \Omega_S = 32,761^\circ & \rightarrow \text{longitude do nodo ascendente,} \\ \omega_S = 45,82^\circ & \rightarrow \text{argumento do perigeu,} \\ M_S = 29,993^\circ & \rightarrow \text{anomalia média.} \end{aligned}$$

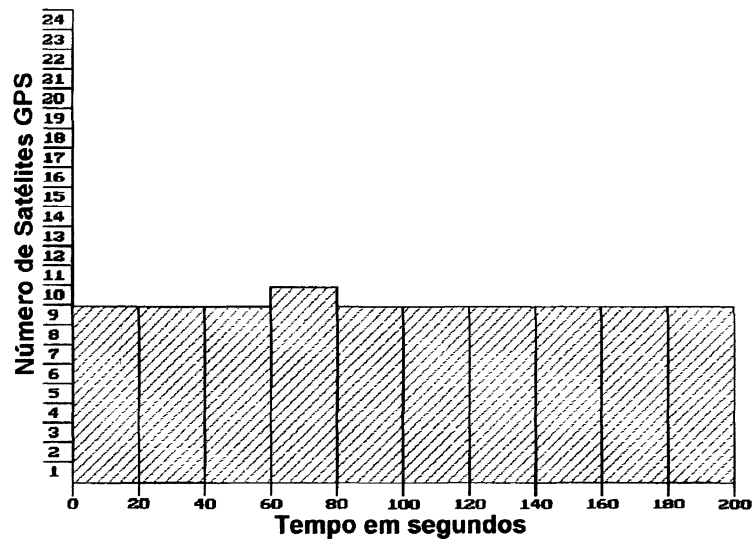
O gráfico de visibilidade é apresentado na Figura (3.8), construído após a propagação das órbitas dos 25 satélites com passo de 20 segundos de integração durante 200 segundos.

Figura 3.8: Visibilidade.



Da mesma forma, o gráfico que apresenta o número de satélites visíveis [Figura (3.9)], obedeceu o passo de propagação de 20 segundos e mostra um período de 200 segundos de visibilidade constante com pelo menos 9 satélites GPS.

Figura 3.9: Número de satélites visíveis



### 3.7.3 Diluição geométrica da precisão para a atitude - ADOP

Um dos fatores que conduzem a erros na determinação de atitude é a distribuição geométrica dos satélites GPS visíveis ao satélite usuário, além da disposição das antenas receptoras e do comprimento da linha de base entre elas.

Uma maneira conveniente de caracterizar adequadamente a geometria da constelação GPS para a determinação de atitude é, em analogia com a diluição geométrica da precisão - GDOP, a *diluição geométrica da precisão para a atitude* - *ADOP* que é definida considerando-se a componente geométrica da matriz de covariância.

Levando-se em conta a invariância do traço da matriz em relação às coordenada de rotação, o erro angular total  $\sigma_{\theta^p}$  pode ser escrito como:

$$\sigma_{\theta^p} = (ADOP) \frac{\sigma}{|\mathbf{b}|}, \quad (3.37)$$

onde

$$ADOP \equiv \sqrt{\text{tr} \left\{ \left[ \sum_{p \in \wp_j} (\mathcal{I} - w^p w^{pT}) \right]^{-1} \right\}}, \quad (3.38)$$

$\mathcal{I}$  é a matriz identidade,  $w^p$  é o vetor de componentes de  $\hat{\mathbf{w}}^p$ ,  $|\mathbf{b}|$  é o módulo do vetor linha de base entre antenas e  $\sigma \sim 5mm$  (Cohen, 1996)<sup>[6]</sup>, e  $\wp$  é o conjunto de satélites visíveis.

A quantidade *ADOP* é definida sempre que pelo menos dois satélites GPS estiverem visíveis, número mínimo necessário para a determinação da atitude de satélites estabilizados em três eixos. Neste trabalho exige-se pelo menos três satélites visíveis para permitir a determinação da órbita do satélite usuário.

O valor da quantidade *ADOP* geralmente situa-se em torno da unidade ou menor, indicando que a constelação GPS fornece uma geometria adequada para a determinação de atitude.

Isto posto, uma aproximação para os erros em atitude pode ser feita negligenciando-se o termo *ADOP*, considerando-o próximo à unidade, tal que:

$$\sigma_{\theta^p} \cong \frac{\sigma}{b}. \quad (3.39)$$

Na simulação do satélite usuário hipotético, apresentada nesta Seção, obteve-se o valor do fator *ADOP* da ordem de 0,8. Este resultado confirma que o fator *ADOP*, para aplicações práticas pode ser negligenciado. Os gráficos da simulações apresentados no Capítulo 6, ilustram adequadamente a ordem de valor do referido fator.

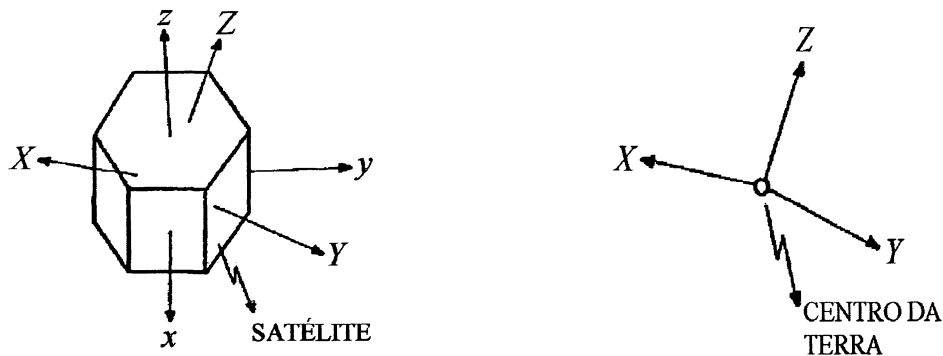
## Capítulo 4

# Fundamentos teóricos da determinação de atitude

### 4.1 Sistemas de referência

A caracterização numérica da atitude necessita da definição de dois referenciais: um solidário ao corpo do satélite, neste trabalho, chamado de *referencial local*, e outro com orientação conhecida, chamado de *referencial externo*. No primeiro, o sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  de versores  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ , coincide com os eixos principais de inércia (nominais) do satélite [Figura (4.1)].

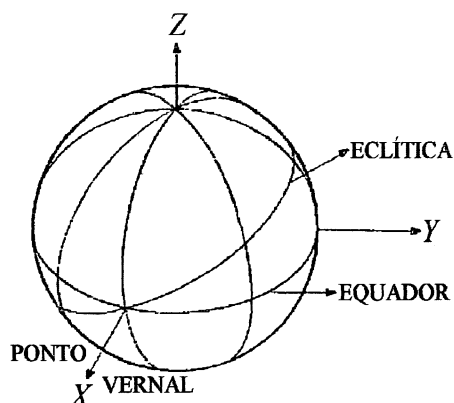
Figura 4.1: Referencial externo e referencial local.



Para o segundo, adota-se o sistema de coordenadas inerciais geocêntricas  $(X, Y, Z)$  de versores  $(\hat{I}, \hat{J}, \hat{K})$ , [Figura (4.2)], no qual,  $\hat{I}$  é um versor que aponta para o equinócio vernal, na intersecção do plano do equador terrestre com o plano da órbita da Terra ao redor do Sol (eclíptica);  $\hat{K}$  é um versor na direção e sentido do vetor velocidade angular terrestre; e  $\hat{J}$  é o produto vetorial de  $\hat{K}$  por  $\hat{I}$ .

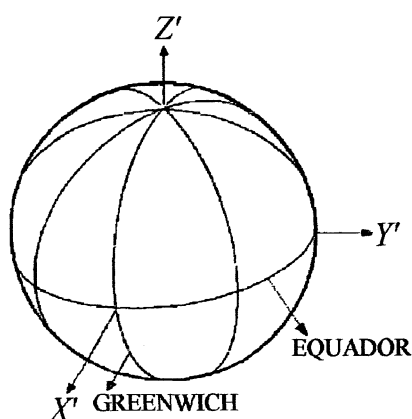
Mesmo que este sistema não seja absolutamente inercial, pode-se considerá-lo como tal, com uma precisão maior que um minuto de arco por ano, precisão esta, mais que suficiente para a finalidade deste trabalho. O fato deste sistema ser geocêntrico é uma particularização irrelevante quando se trata de atitude, uma vez que esta diz respeito a rotações e não a translações (Lopes, 1982)<sup>[25]</sup>.

Figura 4.2: Sistema geocêntrico inercial.



Outros referenciais também são importantes no processo de estimação de atitude, como por exemplo, o sistema geocêntrico terrestre ( $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ ) de versores ( $\hat{I}'$ ,  $\hat{J}'$ ,  $\hat{K}'$ ), representado na Figura (4.3), que é utilizado para descrever o campo geomagnético. Uma única rotação de um ângulo  $GAST^1$  (ângulo entre o eixo  $X$  e o eixo  $X'$ ) em torno do eixo de rotação terrestre (eixo  $Z'$ ) leva o sistema geocêntrico inercial ao geocêntrico terrestre. O versor  $\hat{I}'$  situa-se na direção e sentido do meridiano de Greenwich, latitude zero e o versor  $\hat{K}'$  é orientado para o Polo Norte (Lopes, 1982)<sup>[25]</sup>.

Figura 4.3: Sistema geocêntrico terrestre.



<sup>1</sup>GAST - Greenwich Apparent Sideral Time



## 4.2 Representação da atitude

Segundo Wertz (1978)<sup>[45]</sup>, a matriz de rotação é a principal quantidade para a especificação da atitude de um corpo rígido, neste trabalho, assumido como sendo um satélite artificial denominado *satélite usuário*. Existem várias parametrizações para representar a atitude: *matriz de atitude*, *ângulos de Euler*, *quatérnions* e *vetor de rotação*, entre outras.

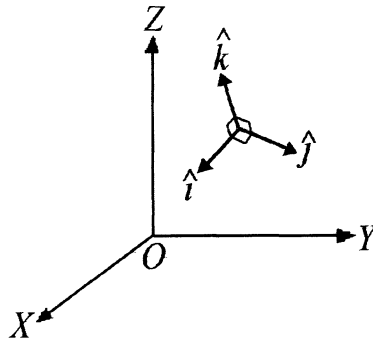
### 4.2.1 Matriz de atitude

Considere-se um satélite usuário no espaço. Assume-se a existência de um referencial ortogonal destrógiro local  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , solidário ao satélite, cujos versores  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$  são representados na Figura (4.4) e são tais que,

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}, \quad (4.1)$$

onde fica claro que especificando-se as componentes de  $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$  e  $\hat{\mathbf{k}}$  ao longo dos três

**Figura 4.4:** Especificação da orientação dos eixos do satélite usuário em relação ao referencial externo.



eixos do referencial externo, a orientação é completamente fixada. Isto requer nove parâmetros que podem ser considerados como elementos de uma matriz  $\mathcal{A}_{3 \times 3}$ , chamada de *matriz de atitude* (Wertz, 1978)<sup>[45]</sup>:

$$\mathcal{A} \equiv \begin{bmatrix} i_X & i_Y & i_Z \\ j_X & j_Y & j_Z \\ k_X & k_Y & k_Z \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

onde  $\hat{\mathbf{i}} = (i_X, i_Y, i_Z)^T$ ,  $\hat{\mathbf{j}} = (j_X, j_Y, j_Z)^T$  e  $\hat{\mathbf{k}} = (k_X, k_Y, k_Z)^T$ . Cada um desses elementos é o cosseno do ângulo entre o versor do satélite e um eixo de referência;  $i_X$ , por exemplo,

é o cosseno do ângulo entre o versor  $\hat{i}$  e o eixo  $X$ . Por essa razão,  $\mathcal{A}$  é frequentemente chamada de *matriz de cossenos diretores*. Os elementos da matriz de cossenos diretores não são todos independentes pois, como  $\hat{i}$  é um versor,

$$i_X^2 + i_Y^2 + i_Z^2 = 1,$$

e a ortogonalidade de  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  significa que,

$$i_X j_X + i_Y j_Y + i_Z j_Z = 0.$$

Estas relações podem ser resumidas pelo fato de que o produto de  $\mathcal{A}$  pela sua transposta é a matriz identidade  $\mathcal{I}$ , conforme a álgebra matricial,

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathcal{I}. \quad (4.3)$$

A matriz de atitude permite transformar coordenadas de um vetor do referencial externo para o referencial local, isto é, se  $\mathbf{a}$  é um vetor com componentes  $a_X$ ,  $a_Y$  e  $a_Z$  ao longo dos eixos de referência, então,

$$\mathcal{A}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} i_X & i_Y & i_Z \\ j_X & j_Y & j_Z \\ k_X & k_Y & k_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_X \\ a_Y \\ a_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i} \cdot \mathbf{a} \\ \hat{j} \cdot \mathbf{a} \\ \hat{k} \cdot \mathbf{a} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

As componentes de  $\mathcal{A}\mathbf{a}$  são as componentes do vetor  $\mathbf{a}$  em relação ao referencial local  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  de versores  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  (Wertz, 1978)<sup>[45]</sup>. Uma transformação matricial própria, real e ortogonal conserva as magnitudes dos vetores e os ângulos entre os mesmos e, por esse motivo representa uma rotação.

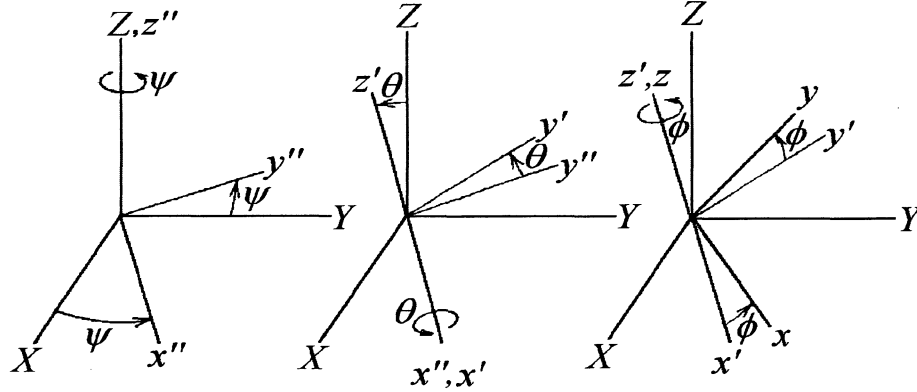
#### 4.2.2 Ângulos de Euler

A orientação de um satélite no espaço em relação a um referencial externo, é determinada por uma série de rotações puras, resultando em uma transformação ortogonal. Estas rotações são completamente especificadas por três eixos e os respectivos ângulos de rotação ao seu redor, denominados ângulos de Euler (Kaplan, 1976)<sup>[18]</sup>. Uma sequência de rotações convenientes é ilustrada na Figura (4.5)<sup>2</sup>:

O eixo  $\mathbf{x}'$ , conhecido como *linha dos nodos*, é a intersecção dos planos  $(X, Y)$  e  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Isto posto, é possível efetuar a transformação direta de  $(X, Y, Z)$  para  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$

<sup>2</sup>Adaptada de Kaplan, 1976<sup>[18]</sup>

Figura 4.5: Rotações dos ângulos de Euler.



combinando a sequência de rotações  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\phi$ . Desta forma,  $\mathcal{A} = R(z, \phi)R(x', \theta)R(x'', \psi)$  onde  $R(a, b)$  representa uma rotação de um ângulo  $b$  em torno do eixo  $a$  ou,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & c\phi s\psi + s\phi c\theta c\psi & s\phi s\theta \\ -s\phi c\psi - c\phi c\theta s\psi & -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi & c\phi s\theta \\ s\theta s\psi & -s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

na qual, as letras  $s$  e  $c$ , significam *seno* e *coseno*. Então,  $\mathcal{A}$  transforma as componentes de um vetor expresso no referencial externo  $(X, Y, Z)$  em componentes expressas no referencial local  $(x, y, z)$ :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Se as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  são conhecidas e as componentes  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  precisam ser determinadas,

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathcal{A}^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

pois  $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^T$ , uma vez que a matriz  $\mathcal{A}$  é ortogonal (Kaplan, 1976)<sup>[18]</sup>.

Combinações diferentes dessas rotações são possíveis, e podem ser encontradas em Wertz (1978)<sup>[45]</sup>, Kaplan (1976)<sup>[18]</sup> e Goldstein (1972)<sup>[13]</sup>, entre outros.

A vantagem dos ângulos de Euler na determinação da atitude de satélites artificiais estabilizados por rotação, consiste no fato de que, dois dos ângulos que fornecem a direção do eixo de rotação variam lentamente.

### 4.2.3 Quatérnions

Uma outra representação adequada e conveniente da atitude são os parâmetros simétricos de Euler, que compõem um quatérnion de módulo unitário.

O quatérnion é composto por uma parte *vetorial* ou *imaginária* ( $q_1\hat{\mathbf{I}} + q_2\hat{\mathbf{J}} + q_3\hat{\mathbf{K}}$ ) e outra *escalar* ou *real* ( $q_4$ ), ou seja:

$$\underline{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{p}_q + q_4 \equiv q_1\hat{\mathbf{I}} + q_2\hat{\mathbf{J}} + q_3\hat{\mathbf{K}} + q_4, \quad (4.8)$$

onde os versores  $\hat{\mathbf{I}}$ ,  $\hat{\mathbf{J}}$  e  $\hat{\mathbf{K}}$  definem a base de um referencial externo que, por exemplo, e sem perda de generalidade, pode ser o sistema geocêntrico inercial, definido na Seção (4.1). As propriedades básicas do quatérnion são:

#### 4.2.3.1 Conjugado

$$\underline{\mathbf{q}}^* \equiv -q_1\hat{\mathbf{I}} - q_2\hat{\mathbf{J}} - q_3\hat{\mathbf{K}} + q_4 \quad (4.9)$$

#### 4.2.3.2 Multiplicação

$$\underline{\mathbf{q}}' \otimes \underline{\mathbf{q}} = \mathcal{B}(\mathbf{p}'_q, q'_4) \mathcal{Q}, \quad (4.10)$$

onde o sinal  $\otimes$  indica multiplicação na álgebra de quatérnions;  $\mathcal{Q}$  é uma matriz coluna composta pelos elementos do quatérnion, e (Wertz, 1978)<sup>[45]</sup>:

$$\mathcal{B}(\mathbf{p}'_q, q'_4) = \begin{bmatrix} q'_4 & -q'_3 & q'_2 & q'_1 \\ q'_3 & q'_4 & -q'_1 & q'_2 \\ -q'_2 & q'_1 & q'_4 & q'_3 \\ -q'_1 & -q'_2 & -q'_3 & q'_4 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

ou

$$\underline{\mathbf{q}}' \otimes \underline{\mathbf{q}} = \mathcal{C}(\mathbf{p}_q, q_4) \mathcal{Q}', \quad (4.12)$$

onde

$$\mathcal{C}(\mathbf{p}_q, q_4) = \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

#### 4.2.3.3 Módulo

$$|\underline{\mathbf{q}}| = \underline{\mathbf{q}} \otimes \underline{\mathbf{q}}^* = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2. \quad (4.14)$$

#### 4.2.3.4 Relações e conceitos

Além das propriedades já descritas, são importantes as seguintes relações e conceitos sobre os quatérnions:

##### 1. Interpretação geométrica:

No caso particular em que as componentes do quatérnion são os parâmetros simétricos de Euler, também chamados de parâmetros de Rodriguez-Hamilton, tem-se que:

$$\underline{\mathbf{q}} = \sin \frac{\theta_R}{2} [\hat{\mathbf{I}} \cos \alpha + \hat{\mathbf{J}} \cos \beta + \hat{\mathbf{K}} \cos \lambda] + \cos \frac{\theta_R}{2}, \quad (4.15)$$

onde os ângulos são interpretados geometricamente como:

- $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \lambda$  - cossenos diretores de um eixo de rotação (eixo de Euler);
- $\theta_R$  - ângulo de uma rotação executada em torno do referido eixo,

que definem a rotação que leva o referencial externo adotado para um referencial arbitrário. Se este referencial arbitrário for o referencial local (por exemplo, os eixos principais de inércia do satélite), o quatérnion se torna uma medida de atitude do satélite, denominada *quatérnion de atitude*. Observa-se que neste caso  $|\underline{\mathbf{q}}| = 1$ .

##### 2. Rotação:

No caso do Sub-ítem (1), dado um vetor genérico com coordenadas nos referenciais externo e local, definidas respectivamente por:

$$\mathbf{U}_e^T = \{U_X : U_Y : U_Z\},$$

$$\mathbf{U}_\ell^T = \{U_x : U_y : U_z\},$$

demonstra-se que [(Wertz, 1978)<sup>[45]</sup>]:

$$\mathbf{U}_\ell = \underline{\mathbf{q}}^* \otimes \mathbf{U}_e \otimes \underline{\mathbf{q}}, \quad (4.16)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} U_x \hat{\mathbf{i}} + U_y \hat{\mathbf{j}} + U_z \hat{\mathbf{k}} &= (-q_1 \hat{\mathbf{I}} - q_2 \hat{\mathbf{J}} - q_3 \hat{\mathbf{K}} + q_4) \otimes (U_X \hat{\mathbf{I}} + U_Y \hat{\mathbf{J}} + U_Z \hat{\mathbf{K}}) \otimes \\ &\otimes (q_1 \hat{\mathbf{I}} + q_2 \hat{\mathbf{J}} + q_3 \hat{\mathbf{K}} + q_4). \end{aligned}$$

Note-se que  $\mathbf{U}_\ell$  e  $\mathbf{U}_e$  são quatérnions com parte escalar nula.

### 3. Derivação.

Utilizando ainda o quatérnion de módulo unitário e na forma do Sub-ítem (1), a sua derivada é (Wertz, 1978)<sup>[45]</sup>:

$$\dot{\underline{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{q}} \otimes \boldsymbol{\omega}, \quad (4.17)$$

com,

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \omega_x \hat{\mathbf{i}} + \omega_y \hat{\mathbf{j}} + \omega_z \hat{\mathbf{k}},$$

onde  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  são as componentes do vetor velocidade angular ( $\boldsymbol{\omega}$ ) instantânea do referencial local no mesmo referencial. A Equação (4.17) pode ser escrita na forma matricial, como:

$$\dot{\underline{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \mathcal{Q}, \quad (4.18)$$

onde  $\mathcal{Q}$  é a matriz coluna composta pelos elementos do quatérnion  $\underline{\mathbf{q}}$ :

$$\mathcal{Q}^T = \{q_1 : q_2 : q_3 : q_4\}.$$

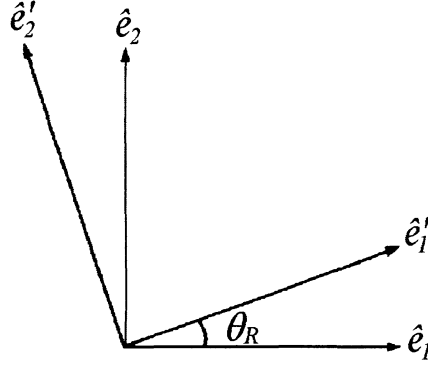
Por não depender de funções trigonométricas, o quatérnion é a melhor representação para a maioria dos casos, especialmente para a solução das equações diferenciais de movimento. Mas, em muitas aplicações, algumas redundâncias em suas componentes não são aceitáveis.

Em Lopes (1982)<sup>[25]</sup> e Varotto (1986)<sup>[42]</sup> encontram-se explicações elucidativas sobre quatérnions e seu uso para representação da atitude.

#### 4.2.4 Vetor de rotação

A presente seção baseia-se em Shuster (1994)<sup>[41]</sup>. Uma rotação em torno do eixo  $z$  ou mais propriamente em torno do eixo  $\hat{e}_3$ , de um ângulo  $\theta_R$  é representada na Figura (4.6).

Figura 4.6: Rotação em torno do eixo  $z$ .



Matematicamente, esta rotação é descrita por,

$$\begin{aligned}\hat{e}'_1 &= \cos \theta_R \hat{e}_1 + \sin \theta_R \hat{e}_2, \\ \hat{e}'_2 &= -\sin \theta_R \hat{e}_1 + \cos \theta_R \hat{e}_2, \\ \hat{e}'_3 &= \hat{e}_3,\end{aligned}\tag{4.19}$$

ou

$$\hat{e}'_{i=1,2,3} = \sum_{j=1}^3 \mathcal{R}_{ij}(\hat{e}_3, \theta_R) \hat{e}_j.\tag{4.20}$$

Desta forma,

$$R(\hat{e}_3, \theta_R) = \begin{bmatrix} \cos \theta_R & \sin \theta_R & 0 \\ -\sin \theta_R & \cos \theta_R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\tag{4.21}$$

A matriz de rotação, Equação (4.21), é uma função de representação de eixos de rotação e não de vetores abstratos. Da mesma forma, para rotações em torno dos outros dois eixos, as matrizes de rotação são expressas por:

$$R(\hat{e}_1, \theta_R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_R & \sin \theta_R \\ 0 & -\sin \theta_R & \cos \theta_R \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R(\hat{e}_2, \theta_R) = \begin{bmatrix} \cos \theta_R & 0 & -\sin \theta_R \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_R & 0 & \cos \theta_R \end{bmatrix}\tag{4.22}$$

O efeito de uma rotação em torno de um eixo arbitrário, sobre um vetor arbitrário pode ser facilmente entendida. Seja  $\mathbf{n}$  um eixo de rotação tal que, para qualquer vetor coluna  $\mathbf{v}$ ,

$$\mathbf{v} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}). \quad (4.23)$$

Apenas o segundo termo é afetado pela rotação, enquanto que, a componente ao longo do eixo de rotação não é afetada (note-se que o vetor  $\mathbf{v}$  não é afetado pela rotação; esta envolve apenas uma mudança nos eixos coordenados). Então, a representação de  $\mathbf{v}$  em relação à base indicada com *linha* é:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= R(\mathbf{n}, \theta_R)\mathbf{v} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} - \cos \theta_R(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) + \sin \theta_R \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v})], \\ \mathbf{v}' &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} - \sin \theta_R(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) - \cos \theta_R[\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v})], \end{aligned} \quad (4.24)$$

que é conhecida como *fórmula de Euler*.

A Equação (4.23) é usada para remover o triplo produto vetorial na Equação (4.24). Daí, a fórmula de Euler toma a forma:

$$R(\mathbf{n}, \theta)\mathbf{v} = \cos \theta_R \mathbf{v} + (1 - \cos \theta_R)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} - \sin \theta_R(\mathbf{n} \times \mathbf{v}). \quad (4.25)$$

Fazendo-se,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{v} = -[[\mathbf{n}]]\mathbf{v}, \quad (4.26)$$

e

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} = \mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{v}, \quad (4.27)$$

a fórmula de Euler resulta:

$$R(\mathbf{n}, \theta_R)\mathbf{v} = \cos \theta_R \mathbf{v} + (1 - \cos \theta_R)\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{v} + \sin \theta_R [[\mathbf{n}]]\mathbf{v}, \quad (4.28)$$

e dada a arbitrariedade do vetor  $\mathbf{v}$ , resulta:

$$R(\mathbf{n}, \theta_R) = \cos \theta_R \mathcal{I} + (1 - \cos \theta_R)\mathbf{n}\mathbf{n}^T + \sin \theta_R [[\mathbf{n}]], \quad (4.29)$$

a qual pode ser escrita na forma equivalente,

$$R(\mathbf{n}, \theta_R) = \mathcal{I} + \sin \theta_R [[\mathbf{n}]] + (1 - \cos \theta)[[\mathbf{n}]]^2. \quad (4.30)$$

Note-se que,

$$R^{-1}(\mathbf{n}, \theta_R) = R^T(\mathbf{n}, \theta_R) = R(-\mathbf{n}, \theta_R) = R(\mathbf{n}, -\theta_R). \quad (4.31)$$



Para ângulos  $\theta_R$  pequenos, a Equação (4.30) pode ser apresentada na forma,

$$R(\mathbf{n}, \theta_R) = \mathcal{I} + \theta_R[[\mathbf{n}]] + O(|\theta_R|^2), \quad (4.32)$$

e, para um ângulo infinitesimal  $\Delta\theta_R$  tem-se uma rotação infinitesimal, a qual é representada por,

$$R(\mathbf{n}, \Delta\theta_R) = \mathcal{I} + \Delta\theta_R[[\mathbf{n}]], \quad (4.33)$$

ou,

$$R(\mathbf{n}, \Delta\theta_R) = \mathcal{I} + [[\Delta\theta_R\mathbf{n}]]. \quad (4.34)$$

rotações infinitesimais, representam um papel importante no desenvolvimento da cinemática de atitude e na descrição de seus erros.

A quantidade  $\Delta\theta_R\mathbf{n}$  é o vetor de rotação para uma rotação infinitesimal. O vetor de rotação, em geral, é definido na forma,

$$\boldsymbol{\theta}_R \equiv \theta_R\mathbf{n}. \quad (4.35)$$

A matriz de atitude relaciona-se com o vetor de rotações infinitesimais através da expressão,

$$R(\boldsymbol{\theta}_R) = \exp\{[[\boldsymbol{\theta}_R]]\}, \quad (4.36)$$

onde  $\exp\{\cdot\}$  significa a função matricial exponencial definida pela série de Taylor,

$$\exp\{\mathcal{M}\} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathcal{M}^k, \quad (4.37)$$

na qual,  $\mathcal{M}^0 \equiv \mathcal{I}$  (Shuster, 1989<sup>[40]</sup>).

#### 4.2.5 Considerações sobre a representação da atitude

Duas qualidades principais determinam o mérito relativo de diferentes representações de atitude: a *dimensão* da representação e a *simplicidade* de suas leis de composição.

No primeiro caso, uma representação de atitude que requeira reduzidas exigências de armazenamento e número limitado de restrições que tal representação deve observar, são qualidades desejáveis pois, a acumulação de erros numéricos contrapõe-se a estas restrições. Deste ponto de vista, a melhor parametrização são os ângulos de Euler e a matriz de atitude não se apresenta como a mais adequada. O quatérniom e o vetor de

rotação situam-se numa posição intermediária, visto que, o primeiro usa apenas quatro parâmetros e o segundo fornece uma solução ótima com os mesmos dados da solução aproximada.

No segundo caso, a representação das leis de composição deve ser simples. Se estas representações possuírem equações cinemáticas simples e uma perspectiva de não possuírem singularidades, elas atendem os requisitos desejáveis. Aqui, o quatérnio e a matriz de atitude são as melhores parametrizações (Shuster, 1987)<sup>[41]</sup>.

### 4.3 Métodos de determinação de atitude

Diversos satélites artificiais são estabilizados por rotação e, nestes casos, a determinação de atitude em um eixo é, em geral suficiente. A fase num instante de referência é também, por vezes, necessária. Métodos de determinação de atitude específicos para satélites com este tipo de estabilização são usados para satélites de modo geral, durante as manobras na órbita de transferência.

Destacam-se os métodos determinísticos de *dois arcos* (caso 1) e *um arco e um diedro* (caso 2), bem como o método de *interceptação de cones* para estabilização por rotação e *geométrico* (ângulos de Euler) e *algébrico* (matriz de atitude) para estabilização em três eixos. Estes métodos são determinísticos no sentido de que usam o mesmo número de observações como variáveis (normalmente, dois parâmetros para especificar a orientação de um eixo).

Os métodos de estimação ótima ou não determinísticos exigem uma grande quantidade de dados para o cálculo do melhor resultado e são apresentados para ambos os casos de estabilização.

#### 4.3.1 Métodos determinísticos: estabilização em um eixo

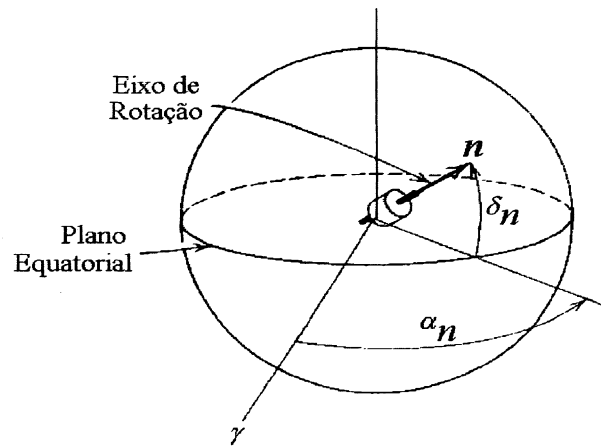
##### 4.3.1.1 Interceptação de cones

As coordenadas de atitude em um eixo normalmente usadas são ilustradas na Figura (4.7)<sup>3</sup> e são definidas como *ascensão reta*  $\alpha_{\mathbf{n}}$  medida do ponto vernal até a projeção do vetor *eixo de rotação*  $\mathbf{n}$  sobre o plano equatorial e *declinação*  $\delta_{\mathbf{n}}$  medida entre o eixo de rotação e a projeção do vetor desse eixo sobre o plano equatorial.

---

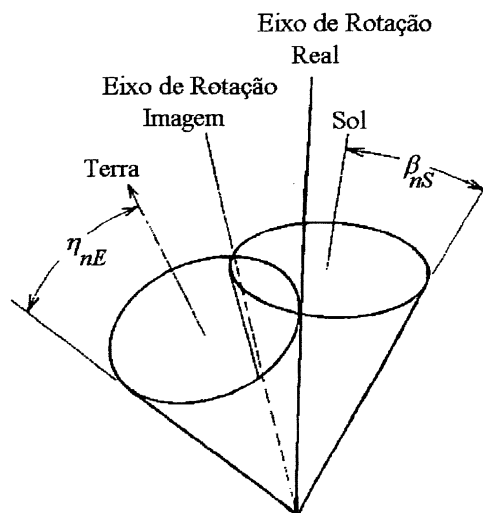
<sup>3</sup>Adaptada de Kaplan, 1976<sup>[18]</sup>.

Figura 4.7: Ascensão reta e declinação do eixo de rotação.



Se os sensores instalados à bordo do satélite forem, um solar e um terrestre, as duas medidas independentes necessárias para o estabelecimento da atitude são o ângulo  $\beta_{nS}$  entre o vetor *Sol* ( $S$ ) e  $n$  e o ângulo  $\eta_{nE}$  entre o vetor *Nadir* ( $E$ ) e  $n$ . Cada sensor, individualmente, gera um cone como visto na Figura (4.8)<sup>4</sup>. Desta forma,  $n$  satisfaz simultaneamente os dois ângulos e situa-se na intersecção dos dois cones.

Figura 4.8: Determinação da atitude usando-se a intersecção de dois cones.



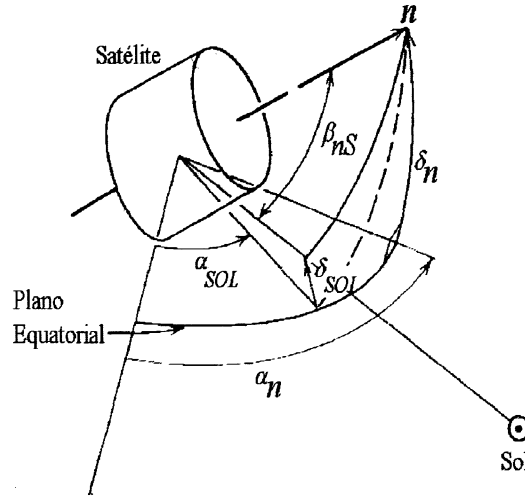
Em geral, há duas intersecções: o eixo de rotação *real* e o eixo de rotação *imagem*. A ambiguidade no eixo é resolvida tomando-se duas medidas adicionais, logo após as primeiras. A solução verdadeira não muda com esse procedimento mas a solução para

<sup>4</sup>Adaptada de Kaplan, 1967<sup>[18]</sup>.

o eixo imagem é alterada (naturalmente, fica implícito que o eixo de rotação não muda a orientação entre as medidas).

Os ângulos  $\beta_{nS}$  e  $\eta_{nE}$  dos cones, relacionam-se com os ângulos  $\alpha_n$  e  $\delta_n$  do eixo de rotação, através da aplicação da trigonometria esférica. A Figura (4.9)<sup>5</sup> apresenta as posições relativas do Sol e do eixo de rotação no sistema fixo no satélite (Kaplan, 1976)<sup>[18]</sup>.

**Figura 4.9:** Relação entre o eixo de rotação e a direção do Sol.



Desta forma,

$$\beta_{nS} = \cos^{-1} [\sin \delta_n \sin \delta_{SOL} + \cos \delta_n \cos \delta_{SOL} \cos(\alpha_n - \alpha_{SOL})], \quad (4.38)$$

onde  $\alpha_{SOL}$  e  $\delta_{SOL}$  são a ascensão reta e a declinação do Sol, respectivamente. Uma equação similar determina  $\eta_{nE}$ , isto é,

$$\eta_{nE} = \cos^{-1} [-\sin \delta_n \sin \delta_{SAT} - \cos \delta_n \cos \delta_{SAT} \cos(\alpha_n - \alpha_{SAT})], \quad (4.39)$$

sendo,  $\alpha_{SAT}$  e  $\delta_{SAT}$  a ascensão reta e a declinação da posição do satélite, respectivamente. Em princípio, a solução simultânea dessas duas expressões fornece um conjunto de valores para  $\alpha_n$  e  $\delta_n$ , correspondentes aos eixos real e imagem.

É importante notar que, vista a Figura (4.8), se as direções da Terra e do Sol forem paralelas, os cones não se interceptam e a atitude fica indeterminada. No entanto, tal situação só ocorre esporadicamente (Kaplan, 1976)<sup>[18]</sup>.

<sup>5</sup>Adaptada de Kaplan, 1976<sup>[18]</sup>.

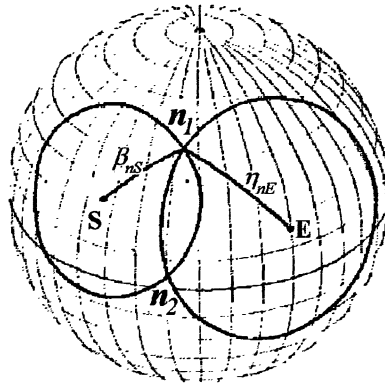
#### 4.3.1.2 Dois arcos (caso 1) e um arco e um diedro (caso 2)

Para a solução da atitude usando-se um método determinístico de dois arcos (caso 1), requer-se dois vetores de referência com origem no satélite e (Wertz, 1978)<sup>[45]</sup>:

1. uma medida do comprimento do arco formado pelo vetor de rotação do satélite e cada um dos vetores de referência ou,
2. uma medida de comprimento de arco e uma medida de um ângulo de rotação medido em relação ao eixo de rotação e formado pelos vetores de referência.

Como mostra a Figura (4.10)<sup>6</sup>, cada medida de comprimento de arco (caso 1), define um cone em torno do vetor de referência; a intersecção destes cones são possíveis soluções de atitude.

Figura 4.10: Solução de atitude (caso1).



Por exemplo, assume-se que os dois vetores de referência conhecidos são os vetores *Sol* ( $\mathbf{S}$ ) e *Nadir* ( $\mathbf{E}$ ). O cone em torno de  $\mathbf{S}$  possui um ângulo  $\beta_{nS}$ , igual à separação angular desse vetor até o vetor de atitude  $\mathbf{n}$  a ser determinado; similarmente, o cone em torno de  $\mathbf{E}$  possui um ângulo  $\eta_{nE}$ , igual à separação angular entre  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{n}$ . As possíveis soluções para a atitude são  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$ .

Analicamente este problema geométrico é especificado por três equações simultâneas em três coordenadas desconhecidas  $n\hat{I}$ ,  $n\hat{J}$  e  $n\hat{K}$ :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = \cos \beta_{nS}, \quad (4.40)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \cos \eta_{nE}, \quad (4.41)$$

<sup>6</sup>Adaptada de Wertz, 1978<sup>[45]</sup>.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (4.42)$$

Estas equações são resolvidas usando a técnica devida a Grubin<sup>7</sup>, na forma:

$$x = \frac{\cos \beta_{nS} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{S}) \cos \eta_{nE}}{1 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{S})^2}, \quad (4.43)$$

$$y = \frac{\cos \eta_{nE} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{S}) \cos \beta_{nS}}{1 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{S})^2}, \quad (4.44)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{1 - x \cos \beta_{nS} - y \cos \eta_{nE}}{1 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{S})^2}}, \quad (4.45)$$

e

$$\mathbf{C} = \mathbf{S} \times \mathbf{E}. \quad (4.46)$$

Desta forma, as soluções para  $\mathbf{n}$  são dadas por:

$$\mathbf{n} = x\mathbf{S} + y\mathbf{E} + z\mathbf{C}. \quad (4.47)$$

A Equação (4.47) fornece duas soluções ambíguas da atitude. Se o radicando da Equação (4.45) é negativo, não existe solução real; isto é, os cones não se interceptam. Se este radicando for nulo ( $\mathbf{E} // \mathbf{S}$ ) a solução é indeterminada. Em caso contrário, tem-se a solução de atitude (Wertz, 1978)<sup>[45]</sup>. Este método é equivalente ao método de interceptação de dois cones apenas usando a representação vetorial da atitude ( $\mathbf{n}$ ) ao invés da representação angular ( $\alpha_{\mathbf{n}}, \delta_{\mathbf{n}}$ ).

A Figura (4.11)<sup>8</sup> mostra o caso 2, no qual a atitude é obtida a partir de medidas de um arco e um ângulo diedro.

A medida do arco  $\beta_{nS}$  força a atitude situar-se sobre um círculo de raio  $\beta_{nS}$  com centro em  $\mathbf{S}$ . Este círculo, nesse exemplo, é chamado de *cone Sol*, onde o vetor referência é o vetor Sol. Entretanto, é possível fazer o problema recair no caso anterior notando que, pela lei dos cossenos para os lados do triângulo esférico  $AES$ , tem-se:

$$\cos \psi_{SE} = \cos \beta_{nS} \cos \eta_{nE} + \sin \beta_{nS} \sin \eta_{nE} \cos \Phi_{SE}, \quad (4.48)$$

onde  $\psi_{SE}$  é o comprimento do arco entre  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{S}$ . Daí resulta que:

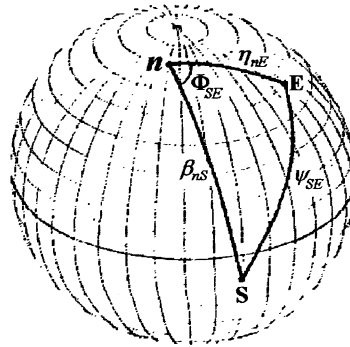
$$\cos \eta_{nE} = \frac{\cos \beta_{nS} \cos \psi_{SE} \pm \sin \beta_{nS} \cos \Phi_{SE} \sqrt{\sin^2 \beta_{nS} \cos^2 \Phi_{SE} + \cos^2 \beta_{nS} - \cos^2 \psi_{SE}}}{\sin^2 \beta_{nS} \cos^2 \Phi_{SE} + \cos^2 \beta_{nE}}. \quad (4.49)$$

---

<sup>7</sup>Citado por Wertz (1978)<sup>[45]</sup>, p. 364.

<sup>8</sup>Adaptada de Wertz, 1978<sup>[45]</sup>.

Figura 4.11: Solução de atitude (caso 2).



Cada arco  $\eta_{nE}$  define um círculo em torno de  $E$ . Quando  $E$  representa o vetor Nadir, esse cone é chamado de *cone Nadir*. Uma vez obtido  $\eta_{nE}$ , a avaliação de  $n$  recai no caso 1, já que a atitude é forçada a situar-se na intersecção dos círculos com raios iguais ao comprimento dos arcos  $\beta_{nS}$  e  $\eta_{nE}$ . Por causa da dupla ambigüidade em  $\eta_{nE}$ , um máximo de quatro soluções possíveis pode ser obtida para  $n$  (Wertz, 1978)<sup>[45]</sup>.

#### 4.3.2 Métodos determinísticos: estabilização em três eixos

A determinação da atitude de satélites estabilizados em três eixos, que é equivalente à completa especificação da matriz de atitude  $\mathcal{A}$  pode ser obtida através da aplicação direta do conceito de atitude como uma matriz de rotação.

Se o satélite tiver um eixo preferencial, é conveniente especificar a atitude em três eixos em termos da atitude do eixo preferencial mais a fase de um ângulo em torno do referido eixo. Este tratamento assimétrico dos ângulos de atitude é justificado pela configuração de sensores e pela precisão requerida, normalmente mais severa para o eixo preferencial.

A este tratamento dá-se o nome de *método geométrico* de determinação de atitude em três eixos pois, o ângulo de fase é calculado mais convenientemente usando-se a trigonometria esférica. Por outro lado, nos métodos *algébricos*, a matriz de atitude é determinada diretamente de duas observações vetoriais sem valer-se de qualquer representação angular.

#### 4.3.2.1 Geométrico (solução com ângulos de Euler)

O método geométrico é normalmente usado quando há um eixo preferencial de rotação e o ângulo de fase em relação a este eixo pode ser calculado. Em muitos casos, sensores (tais como, sensor solar de rotação ou rastreador de horizonte) definem um eixo preferencial do satélite e fornecem uma informação azimutal pobre em relação a este eixo [Figura (4.12)]<sup>9</sup>.

Dados os eixos de um referencial externo,  $X, Y$  e  $Z$ , efetua-se uma sequência de rotações dos ângulos de Euler,  $\phi, \theta$  e  $\psi$ , definindo-se a transformação do referencial externo para o referencial local, de eixos  $x, y$  e  $z$ . Os ângulos de Euler  $\phi$  e  $\theta$  relacionam-se com a atitude do eixo  $z$  preferencial do satélite, através das relações:

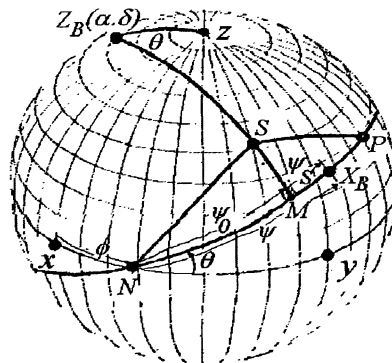
$$\phi = 90^\circ + \alpha, \quad (4.50)$$

e

$$\theta = 90^\circ + \delta, \quad (4.51)$$

onde a *ascensão reta*  $\alpha$  e a *declinação*  $\delta$  são obtidas usando-se qualquer um dos métodos de determinação de atitude para um eixo. O ângulo  $\phi$  define a orientação da linha dos nodos  $N$ . O ângulo de fase  $\psi$  é calculado a partir da observação do azimute  $\psi_S$  da projeção do vetor Sol ( $S$ ) sobre o plano normal a  $z$ .

Figura 4.12: Determinação do ângulo de fase  $\psi$ .



Seja  $M$  a projeção de  $S$  sobre o plano normal a  $z$  e  $P = z \times N$ . Aplicando-se a

<sup>9</sup>Adaptada de Wertz, 1978<sup>[45]</sup>.



regra de Napier<sup>10</sup> aos triângulos esféricos  $SMN$  e  $SMP$ , resulta:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{S} = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{S}) \cos \psi_0, \quad (4.52)$$

e

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{S}) \cos(90^\circ - \psi_0) = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{S}) \sin \psi_0. \quad (4.53)$$

Note-se que  $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{S}) \geq 0$ , pela definição de  $\mathbf{M}$ . Se  $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{S}) = 0$ ,  $\psi_0$  é indeterminado pois  $\mathbf{S}$  não fornece informações de fase em relação a  $z$ . Se  $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{S}) > 0$ ,  $\psi_0$  é obtido sem ambigüidades, uma vez que os quadrantes de  $\sin \psi_0$  e  $\cos \psi_0$  são conhecidos.

Desta forma, das Equações (4.52) e (4.53) resulta:

$$\psi_0 = \tan^{-1} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}}{\mathbf{N} \cdot \mathbf{S}}, \quad (4.54)$$

onde

$$\mathbf{N} = (\cos \phi \ \sin \phi \ 0)^T, \quad (4.55)$$

e

$$\mathbf{P} = (-\cos \theta \sin \phi \ \cos \theta \cos \phi \ \sin \theta)^T, \quad (4.56)$$

e o ângulo de fase  $\psi$  é dado pela expressão:

$$\psi = \psi_0 + \psi_S. \quad (4.57)$$

Note-se que os vetores  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$  são conhecidos no referencial externo, dados os ângulos  $\theta$  e  $\phi$ .

#### 4.3.2.2 Algébrico (matriz de atitude)

Sabe-se que, a partir de quaisquer dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , pode-se definir um sistema de coordenadas ortogonal de base  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{s}$ , dados por:

$$\mathbf{q} = \mathbf{u}, \quad (4.58)$$

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}, \quad (4.59)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{q} \times \mathbf{r}, \quad (4.60)$$

com a condição:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \neq 1. \quad (4.61)$$

---

<sup>10</sup>A regra de Napier pode ser encontrada em Wertz, (1978)<sup>[45]</sup>, pg.730, entre outros.

A matriz de atitude ou matriz de cossenos diretores  $\mathcal{A}$ , é obtida através da transformação de coordenadas,

$$\mathcal{A}\mathcal{M}_e = \mathcal{M}_l, \quad (4.62)$$

na qual, a matriz  $\mathcal{M}_l$  é determinada por dois vetores dados no referencial local  $\mathbf{u}_l$  e  $\mathbf{v}_l$ :

$$\mathcal{M}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_l & \vdots & \mathbf{r}_l & \vdots & \mathbf{s}_l \end{bmatrix}, \quad (4.63)$$

e os mesmos dois vetores em relação a um referencial externo permitem a construção da matriz de referência  $\mathcal{M}_e$ , na forma:

$$\mathcal{M}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_e & \vdots & \mathbf{r}_e & \vdots & \mathbf{s}_e \end{bmatrix}. \quad (4.64)$$

A solução da Equação (4.62) é dada por:

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_l\mathcal{M}_e^{-1}. \quad (4.65)$$

Como  $\mathcal{M}_e$  é ortogonal ( $\mathcal{M}_e^{-1} = \mathcal{M}_e^T$ ), a matriz  $\mathcal{A}$  resulta:

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_l\mathcal{M}_e^T. \quad (4.66)$$

Não há, nesse desenvolvimento, nenhuma limitação para a escolha do referencial externo ou para a forma da matriz de atitude. O único requisito é que  $\mathcal{M}_e$  possua inversa ou seja, que os vetores  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{s}$  sejam linearmente independentes. A simplicidade da Equação (4.66) indica esse método como atrativo para processamento à bordo: note-se que não são necessárias transformações inversas e uma única atitude é obtida, sem ambigüidades. Por outro lado, o volume de cálculo computacional exigido é inferior ao dos métodos não determinísticos.

### 4.3.3 Incertezas dos métodos determinísticos

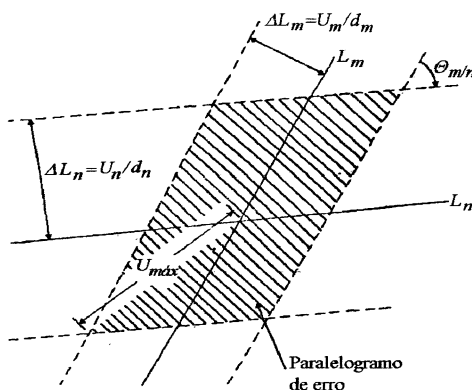
Geralmente a *análise da variância* é um procedimento estatístico para o estudo da relação entre os erros das medidas efetuadas e as quantidades derivadas dessas medidas. Nesse procedimento, chamado de *cálculo direto*, a incerteza na atitude é obtida diretamente de várias incertezas nas observações, através das derivadas parciais dos parâmetros da atitude em relação às observações. No entanto, embora seja adequado para determinar as incertezas de atitude para conjuntos de observações específicas, este procedimento não é adequado para estudos analíticos da atitude onde um grande

número de alternativas deve ser levado em conta. Uma apresentação mais completa desse procedimento pode ser encontrada em Wertz (1978)<sup>[45]</sup>.

Um método alternativo que expressa a incerteza em atitude em termos de três fatores com boas definições físicas e geométricas, desenvolve expressões analíticas explícitas para as incertezas da atitude e discute suas causas geométricas. A discussão restringe-se à atitude em um eixo, determinada por medidas instantâneas. A atitude correspondente a um ponto sobre a esfera celeste é definida como o eixo de rotação ou como a direção de algum eixo preferencial, fixo no corpo de um satélite estabilizado em três eixos.

As medidas de interpretação mais imediatas são as *medidas discretas*. Então, tomando-se duas medidas  $m$  e  $n$ , cada uma indicando uma possível atitude dentro de uma *banda* da esfera celeste, como mostrado na Figura (4.13)<sup>11</sup>, faz-se uma aproximação geométrica plana para que as constantes medidas sobre a esfera celeste sejam tomadas como linha retas.

**Figura 4.13:** Paralelogramo de erro para observações discretas.



Seja  $L_m$  o lugar geométrico das atitudes correspondentes à observação  $m$ ; então,

$$\Delta L_m = \frac{U_m}{dm}, \quad (4.67)$$

é a projeção perpendicular de  $L_m$ , devida à incerteza  $U_m$  e  $dm$  a densidade de medida para as observações  $m$ . A correta solução da atitude pode situar-se em qualquer posição do paralelogramo de erro. A probabilidade de que a atitude correta esteja em qualquer área limitada dentro desse paralelogramo é a mesma para qualquer região. A densidade

<sup>11</sup> Adaptada de Wertz, 1978<sup>[45]</sup>.

de probabilidade por unidade de área sobre a esfera celeste é constante dentro do paralelogramo e zero fora dele.

A caracterização das incertezas da atitude pode ser feita através das componentes de incerteza, por exemplo, as distâncias do centro do paralelogramo à sua borda, ao longo de alguma direção específica. A incerteza máxima  $U_{máx}$  é o semi-comprimento da diagonal maior ou, o raio de um círculo circunscrito no paralelogramo, tal que:

$$U_{máx} = \frac{1}{|\sin \Theta_{m/n}|} [(\Delta L_m)^2 + (\Delta L_n)^2 + 2(\Delta L_m)(\Delta L_n)|\cos \Theta_{m/n}|]^{1/2}, \quad (4.68)$$

onde  $\Theta_{m/n}$  é o ângulo de correlação entre as medidas  $m$  e  $n$ .

Salvo especificação em contrário,  $U_{máx}$  é tomado como a incerteza para medidas discretas e a incerteza média  $U_{média}$  é definida como o raio médio do círculo cuja área é igual a área do paralelogramo. Então,

$$U_{média} = 2 \left[ \frac{\Delta L_m \Delta L_n}{\pi |\sin \Theta_{m/n}|} \right]^{1/2}. \quad (4.69)$$

Se a incerteza em uma medida é resultado de qualquer erro randômico de distribuição gaussiana ou, resultado de qualquer erro sistemático com distribuição de probabilidade gaussiana (medidas contínuas), a incerteza de atitude corresponde a uma elipse de erro sobre a esfera celeste.

Tome-se duas medidas independentes  $m$  e  $n$ , que correspondam a lugares geométricos ortogonais sobre a esfera celeste [Figura (4.14)]<sup>12</sup>.

Seja  $x_a$  a componente de atitude perpendicular à  $L_m$  e  $\sigma_x$  o desvio padrão em  $x_a$ , resultante da incerteza em  $m$ , tal que:

$$\sigma_x \equiv \frac{U_m}{dm}, \quad (4.70)$$

onde  $U_m$ , agora, é tomado como o desvio padrão da medida  $m$ .

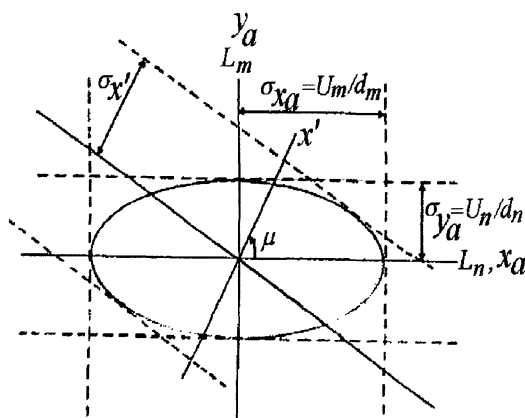
Pela definição de distribuição gaussiana, a probabilidade de que a componente  $x_a$  da atitude situe-se entre  $x_a$  e  $\delta x_a$  é dada por:

$$\rho(x_a)\delta x_a = \left( \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \right) \exp \left( \frac{-x_a^2}{2\sigma_x^2} \right) \delta x_a, \quad (4.71)$$

---

<sup>12</sup>Adaptada de Wertz, 1978<sup>[45]</sup>.

Figura 4.14: Elipse de erro para medidas ortogonais.



na qual  $\rho(x_a)$  é a densidade de probabilidade para a componente  $x_a$ . Da mesma forma, se  $y_a$  é a componente perpendicular da atitude para  $L_n$ ,

$$\rho(y_a)\delta y_a = \left( \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \right) \exp\left( \frac{-y_a^2}{2\sigma_y^2} \right) \delta y_a . \quad (4.72)$$

A probabilidade de que a componente  $x_a$  situe-se entre  $x_a$  e  $\delta x_a$  e a componente  $y_a$  entre  $y_a$  e  $\delta y_a$  é dada pelo produto das Equações (4.71) e (4.72), na forma:

$$\rho(x_a)\delta x_a \rho(y_a)\delta y_a = \rho(x_a, y_a)\delta x_a \delta y_a , \quad (4.73)$$

onde  $\rho(x_a, y_a)$  é a densidade de probabilidade bi-dimensional sobre a esfera celeste. Os lugares geométricos da densidade de probabilidade constante definem elipses do tipo,

$$\frac{x_a^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_a^2}{\sigma_y^2} = k_a, \quad (4.74)$$

com  $k_a$  constante. Os desvios padrão de  $x_a$  e  $y_a$  são, então, os semi-eixos maior e menor da elipse, respectivamente, quando  $k_a = 1$ .

Um desenvolvimento completo sobre a análise das incertezas pode ser encontrado em Wertz (1978)<sup>[45]</sup>, entre outros.

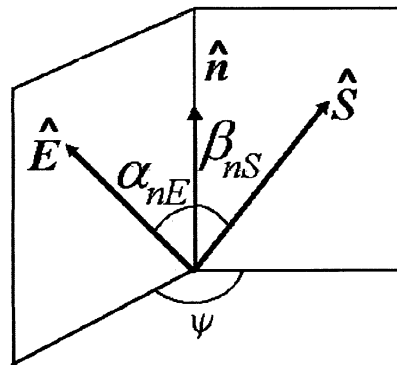
#### 4.3.4 Métodos não determinísticos

Somando-se aos métodos determinísticos, os métodos não determinísticos oferecem algoritmos eficientes para a determinação da atitude de satélites estabilizados em um eixo e em três eixos. A principal característica desses métodos reside no fato de usarem os mesmos dados, tanto no caso da solução aproximada como no caso da solução exata da estimativa de máxima verossimilhança da atitude.

#### 4.3.4.1 Estabilização em um eixo

A atitude de satélites estabilizados por rotação é geralmente determinada através da medida dos cossenos dos ângulos determinados pelo eixo de rotação e direções conhecidas no espaço, tais como: o Sol, uma estrela, o ponto Nadir, o campo magnético e mais recentemente, em relação a um satélite da constelação GPS. Um algoritmo simples para o cálculo da primeira aproximação da atitude, nesses casos, é apresentado em Shuster (1987)<sup>[40]</sup> e fornece a solução ótima para a determinação de atitude.

Figura 4.15: Arcos e ângulos diedros.



Os ângulos  $\alpha_{nE}$  e  $\beta_{nS}$  mostrados na Figura (4.15)<sup>13</sup> são medidos entre a direção do eixo de rotação conhecida no referencial externo e cada uma das direções  $\hat{E}$  e  $\hat{S}$  no mesmo referencial. Generalizando estas direções através da notação  $\hat{u}^p$ , cada medida pode ser tomada como a medida de um cosseno. Desta forma:

$$z^p = \hat{n} \cdot \hat{u}^p + v^p, \quad (4.75)$$

onde  $z^p$  é a medida do cosseno e  $v^p$  é o erro da medida, assumido como Gaussiano, de média zero e variância  $(\sigma^p)^2$ . A estimativa de  $\hat{n}$ , sujeita à restrição,

$$\hat{n} \cdot \hat{n} = 1. \quad (4.76)$$

deve minimizar a função custo dada por,

$$J(\hat{n}) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N (\sigma^p)^{-2} (z^p - \hat{n} \cdot \hat{u}^p)^2, \quad (4.77)$$

<sup>13</sup>Adaptada de Wertz, 1978<sup>[45]</sup>.

## Primeira aproximação

Um conjunto de pelo menos três direções  $\hat{\mathbf{u}}^p$ , linearmente independentes, determina univocamente a estimativa  $\tilde{\mathbf{n}}$  de máxima verossimilhança. Minimizando  $J(\hat{\mathbf{n}})$  sem a restrição da Equação (4.76) e normalizando o resultado, obtém-se a primeira aproximação  $\hat{\mathbf{n}}^{(0)}$ , que é uma solução da expressão:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{n}} \left( \mathbf{n}^{(0)} \right) = \mathbf{0} , \quad (4.78)$$

ou,

$$- \sum_{p=1}^N (\sigma^p)^{-2} \left( z^p - \mathbf{n}^{(0)} \cdot \hat{\mathbf{u}}^p \right) \hat{\mathbf{u}}^p = \mathbf{0} , \quad (4.79)$$

A Equação (4.79) pode ser escrita na forma:

$$- G + F \mathbf{n}^{(0)} = \mathbf{0} , \quad (4.80)$$

onde,

$$F = \sum_{p=1}^N (\sigma^p)^{-2} \hat{\mathbf{u}}^p \hat{\mathbf{u}}^{pT} , \quad (4.81)$$

$$G = \sum_{p=1}^N (\sigma^p)^{-2} z^p \hat{\mathbf{u}}^p . \quad (4.82)$$

A estimativa de máxima verossimilhança, sem restrições, da Equação (4.80) é escrita como:

$$\mathbf{n}^{(0)} = F^{-1} G , \quad (4.83)$$

Normalizando, obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{n}}^{(0)} = \frac{\mathbf{n}^{(0)}}{|\mathbf{n}^{(0)}|} . \quad (4.84)$$

## Estimativa de máxima verossimilhança

Tomando-se o vetor do eixo de rotação como função de dois ângulos esféricos, obtém-se a estimativa de máxima verossimilhança submetida às restrições, na forma,

$$\hat{\mathbf{n}}(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_1 \end{bmatrix} . \quad (4.85)$$

A função custo dos ângulos esféricos, é definida na forma usual, como:

$$J(\theta) = J(\hat{\mathbf{n}}(\theta)) , \quad (4.86)$$

com  $\theta = [\theta_1, \theta_2]^T$ . O vetor gradiente e a matriz hessiana são dadas por:

$$\frac{\partial J}{\partial \theta}(\theta) = M(\theta) \frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{n}}}(\theta) = -M(\theta) (G - F \hat{\mathbf{n}}(\theta)) , \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial \theta \partial \theta^T}(\theta) &= M(\theta) \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{\mathbf{n}} \partial \hat{\mathbf{n}}^T}(\theta) M^T(\theta) + \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{n}}_\ell}(\theta) \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{n}}_\ell}{\partial \theta \partial \theta^T}(\theta), \\ &= M(\theta) F M^T(\theta) - \sum_{\ell=1}^3 (G - F \hat{\mathbf{n}}(\theta))_\ell \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{n}}_\ell}{\partial \theta \partial \theta^T}(\theta) , \end{aligned} \quad (4.88)$$

com

$$\begin{aligned} M(\theta) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}(\theta)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}(\theta)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}^T , \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 \sin \theta_2 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (4.89)$$

Se  $\theta^{(i)}$  é a  $i$ -ésima aproximação de  $\tilde{\theta}$ , então, no limite de uma vizinhança suficientemente pequena de  $\theta^{(i)}$ ,

$$\begin{aligned} J(\theta) &= J(\theta^{(i)}) + \frac{\partial J}{\partial \theta}(\theta^{(i)}) (\theta - \theta^{(i)}) + \frac{1}{2} (\theta - \theta^{(i)})^T \frac{\partial^2 J}{\partial \theta \partial \theta^T}(\theta^{(i)}) (\theta - \theta^{(i)}) + \\ &+ O(|\theta - \theta^{(i)}|^3) . \end{aligned} \quad (4.90)$$

A próxima aproximação,  $\theta^{(i+1)}$  é a solução da equação,

$$\frac{\partial J}{\partial \theta}(\theta^{(i)}) + \frac{\partial^2 J}{\partial \theta \partial \theta^T}(\theta^{(i)}) (\theta^{(i+1)} - \theta^{(i)}) = 0 . \quad (4.91)$$

Desta forma,

$$\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} - \left[ \frac{\partial^2 J}{\partial \theta \partial \theta^T}(\theta^{(i)}) \right]^{-1} \frac{\partial J}{\partial \theta}(\theta^{(i)}) , \quad (4.92)$$

e,

$$\tilde{\theta} = \lim_{i \rightarrow \infty} \theta^{(i)} . \quad (4.93)$$

Levando-se em conta as Equações (4.80), (4.92) e (4.93), pode-se escrever,

$$E[\tilde{\theta}] = \theta^{\text{verdadeiro}} , \quad (4.94)$$

onde  $E[\cdot]$  é o operador esperança. A matriz covariância de  $\tilde{\theta}$ ,  $\mathcal{P}_{\theta\theta}$ , é calculada pela inversa da matriz informação de Fischer<sup>14</sup>,

$$P_{\theta\theta} = \left[ M(\theta) F M^T(\theta) \right]^{-1} . \quad (4.95)$$

<sup>14</sup>Citado por Shuster (1987)<sup>[40]</sup>



A Equação (4.91) converge quando  $(\partial J/\partial \theta)$  tende a zero. Notando que na Equação (4.88), o segundo termo possui esperança nula e é muito menor que o primeiro, pode-se escrever a Equação (4.92) assim:

$$\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + \left[ M(\theta^{(i)}) F M^T(\theta^{(i)}) \right]^{-1} M(\theta^{(i)}) (G - F \hat{\mathbf{n}}(\theta^{(i)})) . \quad (4.96)$$

Os dados de  $F$  e  $G$ , na Equação (4.96), são os mesmos usados no cálculo de  $\hat{\mathbf{n}}^{(0)}$ . Note-se que é a correção da normalização que impede o desaparecimento do fator  $(G - F \hat{\mathbf{n}}(\theta^{(i)}))$  quando  $i = 0$ .

#### 4.3.4.2 Estabilização em três eixos

Considere-se a determinação da atitude de um satélite artificial estabilizado em três eixos, por exemplo, através da medida de duas direções,  $\mathbf{w}^1$  e  $\mathbf{w}^2$ , no referencial local (o índice superior indica sensor 1 e sensor 2). Estas duas direções podem ser representadas no referencial externo por  $\mathbf{u}^1$  e  $\mathbf{u}^2$ . Desta forma,

$$\mathbf{w}^1 = \mathcal{A} \mathbf{u}^1 , \quad \mathbf{w}^2 = \mathcal{A} \mathbf{u}^2 . \quad (4.97)$$

Como a matriz de atitude é uma matriz ortogonal, tem-se que:

$$\mathbf{w}^1 \cdot \mathbf{w}^2 = \mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{u}^2 . \quad (4.98)$$

No entanto, devido a erros nas medidas (ou nos vetores de referência),  $\mathbf{w}^1$ ,  $\mathbf{w}^2$ ,  $\mathbf{u}^1$  e  $\mathbf{u}^2$  podem ser inconsistentes com a Equação (4.98), o que implicaria em não existir a matriz de atitude  $\mathcal{A}$  satisfazendo simultaneamente as Equações (4.97). Tolerando tal inconsistência, uma solução aproximada para a atitude pode ser encontrada definindo-se dois ternos vetoriais ortogonais, tais que:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{u}^1 , \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{u}^1 \times \mathbf{u}^2}{|\mathbf{u}^1 \times \mathbf{u}^2|} , \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 , \quad (4.99)$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{w}^1 , \quad \mathbf{s}_2 = \frac{\mathbf{w}^1 \times \mathbf{w}^2}{|\mathbf{w}^1 \times \mathbf{w}^2|} , \quad \mathbf{s}_3 = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 , \quad (4.100)$$

e sabendo-se que, qualquer transformação ortogonal preserva o produto escalar mas, apenas uma transformação ortogonal própria (ortonormal) preserva o produto vetorial e levando-se em conta as hipóteses das Equações (4.97), tem-se:

$$\mathbf{s}_i = \mathcal{A} \mathbf{r}_i , \quad i = 1, 2, 3 . \quad (4.101)$$

Definindo-se duas matrizes ortonormais,

$$\mathcal{M}_e \equiv [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3], \quad \mathcal{M}_l \equiv [\mathbf{s}_1 \quad \mathbf{s}_2 \quad \mathbf{s}_3], \quad (4.102)$$

tem-se a relação,

$$\mathcal{M}_l = \mathcal{A}\mathcal{M}_e. \quad (4.103)$$

Isto posto,

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_l\mathcal{M}_e^T, \quad (4.104)$$

é a atitude procurada. Segundo Shuster (1994)<sup>[41]</sup>, embora este não seja um algoritmo ótimo, tem sido freqüentemente usado.

A disponibilidade de uma grande quantidade de dados permite a determinação da atitude *ótima* que minimiza a função custo,

$$J(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N (\sigma^p)^{-2} |\mathbf{w}^p - \mathcal{A}\mathbf{u}^p|^2. \quad (4.105)$$

Geralmente, a solução direta da Equação (4.105) não é possível. A parametrização da atitude  $\mathcal{A}$  em termos de alguma representação de dimensão mínima, tal como os ângulos de Euler e uma otimização iterativa como apresentado em Shuster (1994)<sup>[41]</sup>, resolve o problema.

Seja  $\mathcal{A}(i-1)$  a solução após a  $(i-1)$ -ésima iteração do algoritmo ótimo e seja a matriz  $\mathcal{A}$  dada como,

$$\mathcal{A} = \exp[[\xi_i]]\mathcal{A}(i-1). \quad (4.106)$$

Sempre é possível obter-se bons valores iniciais pois o algoritmo pode usar as duas primeiras medidas para o processo iterativo. Supondo-se então que  $\xi_i$  é pequeno, escreve-se,

$$\mathcal{A} \simeq (\mathcal{I} + [[\xi_i]])\mathcal{A}(i-1), \quad (4.107)$$

que substituída na Equação (4.105) fornece:

$$\begin{aligned} J(\xi_i) &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N (\sigma^p)^{-2} |\mathbf{w}^p - (\mathcal{I} + [[\xi_i]])\mathcal{A}(i-1)\mathbf{u}^p|^2, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N (\sigma^p)^{-2} |\mathbf{w}^p - \mathcal{A}(i-1)\mathbf{u}^p - [[\xi_k]]\mathcal{A}(i-1)\mathbf{u}^p|^2, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N (\sigma^p)^{-2} |\mathbf{w}^p - \mathcal{A}(i-1)\mathbf{u}^p + [[\mathcal{A}(i-1)\mathbf{u}^p]]\xi_i|^2. \end{aligned} \quad (4.108)$$

A Equação (4.108) permite calcular o valor ótimo de  $\xi_i$ , como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \xi_i}(\tilde{\xi}_i) &= \sum_{p=1}^N (\sigma^p)^{-2} [[\mathcal{A}(i-1)\mathbf{u}^p]]^T [\mathbf{w}^p - \mathcal{A}(i-1)\mathbf{u}^p + [[\mathcal{A}(i-1)\mathbf{u}^p]]\tilde{\xi}_i]^2, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Dessa forma, a solução da Equação (4.109) pode ser escrita na forma,

$$\tilde{\xi}_i = M_i^{-1} \mathbf{U}_i, \quad (4.110)$$

onde

$$M_i = \sum_{p=1}^N (\sigma^p)^{-2} [[\mathcal{A}(i-1)\mathbf{u}^p]]^T [[\mathcal{A}(i-1)\mathbf{u}^p]], \quad (4.111)$$

e

$$\mathbf{U}_i = \sum_{p=1}^N (\sigma^p)^{-2} [[\mathcal{A}(i-1)\mathbf{u}^p]] (\mathbf{w}^p - \mathcal{A}(i-1)\mathbf{u}^p). \quad (4.112)$$

Uma vez obtido o valor de  $\tilde{\xi}_i$ ,  $\mathcal{A}(i)$  pode ser calculada de acordo com a expressão,

$$\mathcal{A}(i) = \exp\{[[\tilde{\xi}_i]]\} \mathcal{A}(i-1), \quad (4.113)$$

e a função matriz exponencial da equação acima pode ser avaliada usando-se as fórmulas de Euler. A matriz atitude ótima, é então, dada por:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{A}(i). \quad (4.114)$$

Segundo Shuster (1994)<sup>[41]</sup>, tendo-se um valor inicial adequado, a convergência é rápida e, freqüentemente, uma simples iteração é suficiente.

#### 4.4 Técnicas de estimação ótima

A estimativa de sistemas dinâmicos lineares não apresenta problemas significativos. O caso mais comum em problemas de satélites artificiais fica por conta de sistemas com dinâmica contínua, observada discretamente no tempo. A solução convencional passa pela linearização do sistema não-linear em torno de uma solução de referência, seguida da aplicação das técnicas de estimação linear. Os dados podem ser processados globalmente, isto é, todos de uma vez, usando-se um estimador adequado ao problema (Gelb et ali., 1974<sup>[12]</sup>; Jazwinski, 1970<sup>[17]</sup>, entre outros).

#### 4.4.1 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman é conhecido como um estimador ótimo, não tendencioso e de mínima variância e sua aplicação na estimativa de sistemas dinâmicos lineares é apresentada concisamente, com a finalidade de situar o problema da estimação.

Considere-se um sistema dinâmico linear, modelado matematicamente pela equação diferencial estocástica (Jazwinski, 1970)<sup>[17]</sup>,

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = \mathcal{F}(t)\mathcal{X}(t) + \mathcal{G}(t)v(t), \quad \mathcal{X}(t_0) = \mathcal{X}_0, \quad (4.115)$$

na qual  $\mathcal{X}(t)$  é o vetor  $n$ -dimensional do estado do sistema,  $\mathcal{F}(t)$  é uma matriz de dimensão  $(n \times n)$ , contínua no tempo,  $\mathcal{G}(t)$  é uma matriz de dimensão  $(n \times r)$ , contínua no tempo e  $v(t)$  é um vetor  $r$ -dimensional que representa as incertezas da modelagem e é um processo branco gaussiano, tal que:

$$E[v(t)] = 0,$$

$$\text{cov}[v(t), v(t + \Delta t)] = \mathcal{Q}(t)\delta(\Delta t), \quad \forall \Delta t > 0, \quad \Delta t \in \mathbb{R} \quad (4.116)$$

onde  $\mathcal{Q}(t)$  é uma matriz de dimensão  $(n \times n)$ , semi-definida positiva e  $\delta(\Delta t)$  é o delta de Dirac.

O vetor de estado inicial, tomado como variável aleatória, segue uma distribuição gaussiana com estatística,

$$E[\mathcal{X}_0] = \tilde{\mathcal{X}}(t_0),$$

$$\text{cov}[\mathcal{X}_0] = \mathcal{P}(t_0), \quad (4.117)$$

onde  $\tilde{\mathcal{X}}(\cdot)$  representa a melhor estimativa do estado, no instante considerado e  $\mathcal{P}$  é a matriz de covariância do erro no estado do sistema.

Dispondo-se de observações do estado do sistema, obtidas discretamente no tempo e espaçadas por um intervalo de tempo constante, essas observações podem ser representadas pelo modelo matemático,

$$\mathcal{O}_j = \mathcal{H}_j \mathcal{X}_j + \nu_j, \quad (j = 1, 2, \dots) \quad \text{para} \quad (t = t_1, t_2, \dots), \quad (4.118)$$

no qual, o índice  $j$  representa o instante da observação,  $\mathcal{O}_j$  é um vetor  $m$ -dimensional que representa o conjunto de observações referentes ao instante  $t_j$ ,  $\mathcal{H}_j$  é uma matriz de

dimensão ( $m \times n$ ) e  $\nu_j$  é um vetor  $m$ -dimensional que representa uma seqüência branca gaussiana com estatística,

$$\begin{aligned} E[\nu_j] &= 0, \\ cov[\nu_j, \nu_k] &= \mathcal{R}_{\mathcal{O}_j} \delta_{j,k}, \end{aligned} \quad (4.119)$$

$\mathcal{R}_{\mathcal{O}_j} > 0$  é a matriz de covariância associada ao ruído nas medidas e conhecida para qualquer instante no intervalo considerado e  $\delta_{j,k}$  é o delta de Kröenecker.

O filtro de Kalman é um estimador de estado que fornece como resultado o valor médio do estado, condicionado às observações processadas e é um estimador ótimo por minimizar as variâncias dos erros de estimação. Sua dedução está, também, baseada nas seguintes hipóteses: o ruído  $v(t)$  no estado, é não-correlacionado, tanto com o estado inicial quanto com o ruído nas observações, assim como este último é não-correlacionado com o estado. Tais hipóteses são expressas matematicamente por;

$$\begin{aligned} cov[v(t), \nu_k] &= 0, \\ cov[v(t), \mathcal{X}_0] &= 0, \\ cov[\nu_j, \mathcal{X}(t)] &= 0. \end{aligned} \quad (4.120)$$

As equações do filtro de Kalman, aplicadas para a estimação do sistema dinâmico, modelado pela Equação (4.115), de maneira recursiva e ótima, são:

$$\tilde{\mathcal{X}}(t/t_{j-1}) = \mathcal{F}(t)\tilde{\mathcal{X}}(t/t_{j-1}), \quad (4.121)$$

$$\dot{\mathcal{P}}(t/t_{j-1}) = \mathcal{F}(t)\mathcal{P}(t/t_{j-1})\mathcal{F}^T(t) + \mathcal{G}(t)\mathcal{Q}(t)\mathcal{G}^T(t), \quad (4.122)$$

com  $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ .

A propagação da estimativa do estado do sistema, entre os instantes de amostragem das observações, é feita com a Equação (4.121), na qual o vetor  $\tilde{\mathcal{X}}$  (resultante da propagação) é usualmente chamado de estado nominal e a propagação da matriz de covariância do erro no estado, pela Equação (4.122). A equação para a propagação da estimativa do estado não tem como levar em conta a parcela estocástica  $v(t)$ , que representa as incertezas na modelagem do sistema mas, seu efeito é considerado na propagação da matriz de covariância  $\mathcal{P}$ , através da matriz densidade espectral de potência de  $v(t)$ , denominada  $\mathcal{Q}(t)$  na Equação (4.116).

O estado nominal do sistema, correspondente ao instante a que se referem as observações, é corrigido, incorporando as informações sobre o estado geral, no referido instante. Essa correção, denominada de atualização, é aplicada tanto ao estado nominal quanto à matriz de covariância do erro no estado. Quanto maior o conhecimento sobre o estado, tanto menores os auto-valores dessa matriz, pois representam as incertezas no conhecimento do mesmo. Dessa forma, as equações do filtro de Kalman para a atualização das estimativas, são:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{X}}(t_j/t_j) &= \tilde{\mathcal{X}}(t_j/t_{j-1}) + \mathcal{K}(t_j) [\mathcal{O}(t_j) - \mathcal{H}(t_j) \tilde{\mathcal{X}}(t_j/t_{j-1})], \\ \mathcal{P}(t_j/t_j) &= [\mathcal{I} - \mathcal{K}(t_j) \mathcal{K}(t_j)] \mathcal{P}(t_j/t_{j-1}), \\ \mathcal{K}(t_j) &= \mathcal{P}(t_j/t_{j-1}) \mathcal{H}^T(t_j) [\mathcal{H}(t_j) \mathcal{P}(t_j/t_{j-1}) \mathcal{H}^T(t_j) + \mathcal{R}(t_j)]^{-1},\end{aligned}\tag{4.123}$$

nas quais,  $\mathcal{I}$  é a matriz identidade e  $\mathcal{K}(t_j)$  é a matriz ganho de Kalman.

O processo de filtragem pode ser resumido da seguinte forma: propaga-se o estado do sistema e a matriz de covariância do erro, do instante  $t_{j-1}$  para o instante  $t_j$ , do que se obtém a estimativa do estado  $\tilde{\mathcal{X}}(t_j/t_{j-1})$  e a correspondente matriz de covariância do erro  $\mathcal{P}(t_j/t_{j-1})$  no instante  $t_j$ , a partir de observações feitas até o instante  $t_{j-1}$ . A seguir, o processamento das observações relativas ao instante  $t_j$  é efetuado pelas Equações (4.123), obtendo-se as estimativas atualizadas  $\tilde{\mathcal{X}}(t_j/t_j)$  (estimativa do estado) e  $\mathcal{P}(t_j/t_j)$  (matriz de covariância do erro), correspondentes ao instante  $t_j$ , desta feita, baseadas em observações feitas até o instante  $t_j$  inclusive. À medida que as observações se tornem disponíveis, o processamento é feito sucessiva e seqüencialmente para instantes consecutivos de observação.

A resolução das Equações Diferenciais (4.121) e (4.122) pode ser feita através da matriz de transição de estado do sistema dinâmico linear definida no intervalo de tempo  $(t_{j-1}, t_j)$ , dada por:

$$\dot{\Phi}(t, t_{j-1}) = \mathcal{F}(t) \Phi(t, t_{j-1}),\tag{4.124}$$

cujas condições iniciais são  $\Phi(t_{j-1}, t_{j-1}) = \mathcal{I}$  e  $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ .

Isto posto, a propagação do estado e sua covariância do erro, Equações (4.121) e (4.122), ficam:

$$\tilde{\mathcal{X}}(t_j/t_{j-1}) = \Phi(t_j, t_{j-1}) \tilde{\mathcal{X}}(t_{j-1}/t_{j-1}),\tag{4.125}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t_j/t_{j-1}) &= \Phi(t_j, t_{j-1})\mathcal{P}(t_{j-1}/t_{j-1})\Phi^T(t_j, t_{j-1}) + \\ &+ \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Phi(t_j, \tau)\mathcal{G}(\tau)\mathcal{Q}(\tau)\mathcal{G}^T(\tau)\Phi^T(t_j, \tau)d\tau. \end{aligned} \quad (4.126)$$

#### 4.4.2 Filtro estendido de Kalman

O filtro estendido de Kalman permite estimar o estado de um sistema dinâmico não linear ao longo de sua evolução no tempo (ao longo da trajetória), a medida que observações não lineares são realizadas.

Suponha-se um sistema não-linear, cujo modelo matemático é (Jazwinski, 1970<sup>[17]</sup>; Gelb, 1974<sup>[12]</sup>),

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = f[\mathcal{X}(t), t] + \mathcal{G}(t)v(t), \quad \mathcal{X}(t_0) = \mathcal{X}_0, \quad (4.127)$$

onde  $\mathcal{X}(\cdot)$  é o vetor  $n$ -dimensional do estado do sistema,  $f$  é um vetor  $n$ -dimensional, no qual, pelo menos uma das componentes é função não-linear do estado,  $\mathcal{G}(t)$  é uma matriz de dimensão  $(n \times r)$  com elementos contínuos no tempo e  $v(t)$  é o vetor  $n$ -dimensional das incertezas na modelagem do sistema. As propriedades estatísticas de  $v(t)$  são as mesmas expressas pela Equação (4.116) e a condição inicial  $\mathcal{X}_0$  é uma variável aleatória com distribuição gaussiana  $\mathcal{N}[\mathcal{X}(t_0), \mathcal{P}(t_0)]$ , supondo-se válidas as hipóteses de não-correlação expressas pelas Equações (4.120).

Suponha-se ainda que seja gerada uma trajetória nominal  $\bar{\mathcal{X}}(t)$  a partir da condição inicial  $\bar{\mathcal{X}}(t_0)$  dada, tal que:

$$\dot{\bar{\mathcal{X}}}(t) = f[\bar{\mathcal{X}}(t), t]. \quad (4.128)$$

Por outro lado, defina-se:

$$\delta\mathcal{X}(t) \doteq \mathcal{X}(t) - \bar{\mathcal{X}}(t), \quad (4.129)$$

como o desvio da trajetória nominal. O desvio  $\delta\mathcal{X}(t)$  é um processo estocástico que satisfaz a equação diferencial,

$$\frac{d[\delta\mathcal{X}(t)]}{dt} = f[\mathcal{X}(t), t] - f[\bar{\mathcal{X}}(t), t] + \mathcal{G}(t)v(t), \quad \delta\mathcal{X}(t_0) = \mathcal{X}_0 - \bar{\mathcal{X}}(t_0) \quad (4.130)$$

onde a distribuição de  $\delta\mathcal{X}(t_0)$  é gaussiana com  $\mathcal{N}[\bar{\mathcal{X}}(t_0) - \bar{\mathcal{X}}(t_0), \mathcal{P}(t_0)]$ .

Se  $\delta\mathcal{X}(t)$  for pequeno, no sentido médio quadrático, uma expansão em série de Taylor de 1<sup>a</sup> ordem, pode ser escrita como:

$$f[\mathcal{X}(t), t] - f[\bar{\mathcal{X}}(t), t] \cong \mathcal{F}[t; \bar{\mathcal{X}}(t_0)]\delta\mathcal{X}(t), \quad (4.131)$$

onde,

$$\mathcal{F}[t, \bar{\mathcal{X}}(t_0)] \doteq \left[ \frac{\partial f[\bar{\mathcal{X}}(t), t]}{\partial \mathcal{X}} \right], \quad (4.132)$$

é a matriz de derivadas parciais de  $f[\cdot]$  em relação ao estado calculado ao longo da trajetória de referência.

O resultado da Equação (4.131) na Equação (4.130) fornece:

$$\frac{d[\delta \mathcal{X}(t)]}{dt} = \mathcal{F}[t; \bar{\mathcal{X}}(t_0)] \delta \mathcal{X}(t) + \mathcal{G}(t)v(t), \quad (4.133)$$

que é a equação linearizada do sistema [Equação (4.127)].

A inclusão de  $\bar{\mathcal{X}}(t_0)$  no argumento da função  $\mathcal{F}$  enfatiza a dependência de  $\delta \mathcal{X}(t)$  na escolha da trajetória nominal. Isto evidencia que  $\mathcal{F}$  é função apenas do tempo, avaliada em  $\bar{\mathcal{X}}(t)$ .

A discretização da Equação (4.133), resulta:

$$\delta \mathcal{X}(t_{j+1}) = \Phi [t_{j+1}, t_j; \bar{\mathcal{X}}(t)] \delta \mathcal{X}(t_j) + v(t_j), \quad (4.134)$$

onde  $\Phi$  é a matriz de transição de estado do sistema linearizado, definida pela Equação (4.124) e  $v(t_j)$  tem as seguintes propriedades estatísticas:

$$E [v(t_j)] = 0,$$

$$E [v(t_j) v^T(t_k)] = \Gamma(t_j) \delta_{j,k}, \quad (4.135)$$

sendo  $\delta_{j,k}$  a função delta de Kröenecker e  $\Gamma(t_j)$  é dada por,

$$\Gamma(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Phi [t_{j+1}, \tau] \mathcal{G}(\tau) \mathcal{Q}(\tau) \mathcal{G}^T(\tau) \Phi [t_{j+1}, \tau] d\tau, \quad (4.136)$$

Suponha-se agora, dispor-se de observações, da mesma forma, funções não-lineares do estado e modeladas matematicamente por:

$$\mathcal{O}(t_j) = h [\mathcal{X}(t_j), t_j] + \nu_j, \quad (4.137)$$

onde  $\mathcal{O}(t_j)$  é o vetor  $m$ -dimensional de observações no instante  $t_j$ ,  $h$  é um vetor  $m$ -dimensional de funções não-lineares do estado e  $\nu_j$  é um vetor  $m$ -dimensional cujas componentes representam ruídos nas respectivas componentes do vetor de observações e cujas propriedades estatísticas são:

$$E [\nu_j] = 0,$$



$$E [\nu_j \nu_j^T] = \mathcal{R}_{\mathcal{O}_j}. \quad (4.138)$$

Defina-se agora, como medidas nominais  $\bar{\mathcal{O}}(t_j)$ , ao vetor de medidas calculadas a partir da trajetória nominal  $\bar{\mathcal{X}}(t_j)$ ,

$$\bar{\mathcal{O}}(t_j) \doteq h [\bar{\mathcal{X}}(t_j), t_j], \quad (4.139)$$

e como variação em torno das medidas nominais,

$$\delta \mathcal{O}(t_j) \doteq \mathcal{O}(t_j) - \bar{\mathcal{O}}(t_j). \quad (4.140)$$

Um procedimento análogo ao efetuado para a linearização das equações do sistema dinâmico, fornece:

$$\delta \mathcal{O}(t_j) = \mathcal{M} [t_j; \bar{\mathcal{X}}(t_j)] \delta \mathcal{X}(t_j) + \nu_j, \quad (4.141)$$

onde,

$$\mathcal{M} [t_j; \bar{\mathcal{X}}(t_j)] \doteq \left[ \frac{\partial h(\bar{\mathcal{X}}(t_j), t_j)}{\partial \mathcal{X}} \right]. \quad (4.142)$$

As equações linearizadas do sistema, Equações (4.134) e (4.141), são equações de um sistema linear discreto ao qual se aplicam as equações discretizadas do filtro, apresentadas na Seção 4.4.1. No caso em questão, no entanto, trabalha-se com desvios de estado e de medida, e não diretamente com estado e medida.

Como se deseja uma trajetória nominal próxima à trajetória real, a escolha é feita com base na estimativa mais recente do estado. Então,

$$\bar{\mathcal{X}}(t) = \tilde{\mathcal{X}}(t/t_j). \quad (4.143)$$

A partida do processo é feita com,

$$\bar{\mathcal{X}}(t_0) = \tilde{\mathcal{X}}(t_0), \quad (4.144)$$

considerando-se  $\tilde{\mathcal{X}}(t_0)$  a estimativa a priori do estado e esta escolha permite escrever  $\delta \mathcal{X}(t_0) \cong \mathcal{N}[0, \mathcal{P}(t_0)]$ . A melhor estimativa do estado do sistema entre observações é dada por:

$$\frac{d\tilde{\mathcal{X}}(t/t_j)}{dt} = f[\tilde{\mathcal{X}}(t/t_j), t], \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}. \quad (4.145)$$

A equação para a correção da estimativa do sistema linearizado, Equações (4.134) e (4.141) é dada por:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_{j+1}) &= \delta \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j) + \mathcal{K} [t_{j+1}; \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j)] \cdot \\ &\cdot \{ \delta \mathcal{O}_{j+1} - \mathcal{M}(t_{j+1}) \delta \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j) \}. \end{aligned} \quad (4.146)$$

O processamento de um conjunto de observações em  $t = t_{j+1}$  fornecerá  $\delta\tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_{j+1})$  que representa a correção a ser efetuada em  $\tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j)$  para que a estimativa do estado em  $t_{j+1}$  inclua as informações sobre o estado real em  $t_{j+1}$  contidas nessas observações. Então,

$$\tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_{j+1}) = \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j) + \delta\tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_{j+1}). \quad (4.147)$$

Na fase anterior ao processamento desse conjunto de observações, a melhor estimativa do estado é  $\tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j)$ , resultado da propagação de  $\tilde{\mathcal{X}}(t_j/t_j)$  com o uso da Equação (4.145), do que se conclui que:

$$\delta\tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j) = 0. \quad (4.148)$$

Substituindo-se os resultados de  $\delta\tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_{j+1})$  dado pela Equação (4.147),  $\delta\tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j)$  dado pela Equação (4.148) e  $\delta\mathcal{O}(t_j)$  dado pela Equação (4.140), chega-se à equação para a atualização do estado, através do filtro estendido de Kalman,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_{j+1}) &= \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j) + \mathcal{K}[t_{j+1}; \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j)] \cdot \\ &\cdot \{\mathcal{O}_{j+1} - h[\tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j), t_{j+1}]\}. \end{aligned} \quad (4.149)$$

A ordenação dos resultados oferece o conjunto de equações para o filtro estendido de Kalman, a seguir (Jazwinski, 1970<sup>[17]</sup>; Gelb, 1974<sup>[12]</sup>):

a). Equação para a propagação do estado, entre instantes de amostragem;

$$\tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j) = \tilde{\mathcal{X}}(t_j/t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f[\tilde{\mathcal{X}}(t/t_j)]dt, \quad (4.150)$$

b). Equação de propagação da matriz de covariância do erro (análoga ao filtro linear);

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t_{j+1}/t_j) &= \Phi[t_{j+1}, t_j; \tilde{\mathcal{X}}(t_j/t_j)]\mathcal{P}(t_j/t_j) \cdot \\ &\cdot \Phi^T[t_{j+1}, t_j; \tilde{\mathcal{X}}(t_j/t_j)] + \Gamma(t_j)\mathcal{Q}(t_j)\Gamma^T(t_j), \end{aligned} \quad (4.151)$$

c). Equação para atualização do estado;

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_{j+1}) &= \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j) + \mathcal{K}[t_{j+1}; \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j)] \cdot \\ &\cdot \{\mathcal{O}_{j+1} - h[\tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j), t_{j+1}]\}, \end{aligned} \quad (4.152)$$

d). Equação para atualização da matriz de covariância do erro;

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t_{j+1}/t_{j+1}) &= \{\mathcal{I} - \mathcal{K}[t_{j+1}; \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j)] \cdot \\ &\cdot \mathcal{M}[t_{j+1}; \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j)]\} \cdot \mathcal{P}(t_{j+1}/t_j), \end{aligned} \quad (4.153)$$

e). Nas Equações (4.152) e (4.153) o termo  $\mathcal{K}[\cdot]$  é o ganho de Kalman, dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}[t_{j+1}; \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j)] &= \mathcal{P}(t_{j+1}/t_j) \mathcal{M}^T[t_{j+1}; \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j)] \cdot \\ &\cdot \{ \mathcal{M}[t_{j+1}; \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j)] \mathcal{P}(t_{j+1}/t_j) \cdot \\ &\cdot \mathcal{M}^T[t_{j+1}; \tilde{\mathcal{X}}(t_{j+1}/t_j)] + \mathcal{R}_{\mathcal{O}_{j+1}} \}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.154)$$

## Capítulo 5

# Procedimento da determinação de atitude por GPS

Este capítulo apresenta a contribuição teórica original da determinação de atitude com o uso do GPS, notadamente no que diz respeito à recomposição da característica senoidal da parte fracionária da fase da portadora que é o ponto de partida, permitindo a obtenção das observações de atitude, do que todo o resto do procedimento deriva.

O procedimento da determinação da atitude por GPS envolve primeiramente a formulação do problema, as hipóteses simplificadoras adotadas e a equação da interferometria. Na seqüência, a questão da ambigüidade é conceituada e o modelo matemático é proposto.

As fases das portadoras são utilizadas no procedimento por serem observações mais precisas. No entanto, mesmo que mais precisa, a fase da portadora apresenta ambigüidades por se tratar essencialmente de uma medida relativa. O problema da ambigüidade tem sido abordado por duas metodologias distintas. A primeira, de âmbito mais geral, baseia-se nas características dos sinais GPS propriamente ditos. A segunda, especificamente voltada para os procedimentos de determinação de atitude, tira proveito dos movimentos de translação e rotação próprios do satélite (Cohen & Parkinson, 1992)<sup>[7]</sup>.

Como o objetivo principal deste trabalho é determinar a atitude de satélites estabilizados por rotação, neste caso particular, a amplitude de oscilação da diferença de fase da portadora entre duas antenas convenientemente dispostas torna-se uma observação de atitude onde, a maior parte das componentes de erro presentes no sinal de cada antena se cancelam mutuamente. Se duas antenas são montadas na face positiva de rotação, com linha de base perpendicular ao eixo de rotação, o problema da ambigüidade pode ser facilmente resolvido através de um algoritmo simples e a característica senoidal da observação interferométrica pode ser recuperada. Desta forma, o ângulo de

aspecto entre a linha de visada do satélite GPS e o eixo de rotação do satélite usuário pode então ser obtido da amplitude deste sinal.

Após o pré-processamento dos dados, a atitude é determinada em três passos:

1. uma observação de atitude é calculada por ajuste de curva a partir de dados do sinal senoidal pré-processado, correspondente a um curto intervalo de tempo;
2. uma estimativa estática da atitude é obtida através de um conjunto de observações de atitude simultâneas, relacionadas com o subconjunto completo de satélites visíveis durante cada curto período de observação. Métodos convencionais de mínimos quadrados são usados nesse propósito;
3. um filtro estendido de Kalman (ver Capítulo 4) é utilizado afim de levantar a estimativa de atitude sob efeitos dinâmicos de longo período. As estimativas estáticas são tomadas como entradas do filtro. A modularidade e a confiabilidade do algoritmo são vantagens desta abordagem, em comparação com o filtro de Kalman direto.

Como as observações de atitude são obtidas de curvas ajustadas, elas são sensíveis à taxa de rotação. Conseqüentemente, as estimativas estáticas de atitude também são sensíveis à taxa de rotação. Isto é, relativamente ao filtro de Kalman, a estimativa estática funciona de fato como uma observação composta de atitude e taxa de atitude. Desta forma, a taxa de rotação pode ser estimada simultaneamente com os parâmetros de atitude, desde que as necessárias matrizes de sensibilidade tenham sido avaliadas.

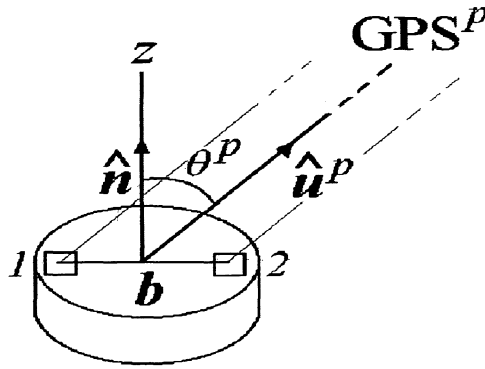
O processo completo é deduzido para dois possíveis casos: o problema restrito, onde apenas o vetor de atitude é relevante e o problema geral, onde o ângulo da fase em torno do eixo de rotação também deve ser levado em conta. Para o primeiro caso, o ângulo de aspecto da linha de visada dos satélites GPS é a observação de atitude. Para o segundo caso, a observação de atitude é o vetor unitário da linha de visada dos satélites GPS. Em ambos os casos, o modelo dinâmico-discreto é tomado como o movimento de rotação pura excitado por uma seqüência branca.

Como se sabe, a matriz covariância dos erros dos vetores unitários de atitude é singular. Este obstáculo é superado por uma abordagem de decomposição em auto-vetores. A observabilidade é alcançada por causa da constante mudança na geometria do conjunto de satélites GPS visíveis.

## 5.1 Formulação do problema

Considera-se um satélite artificial, designado por satélite usuário, estabilizado por rotação, orbitando em altitudes inferiores a da constelação GPS, portando duas antenas dispostas sobre a face positiva de rotação, separadas por uma linha de base e conectadas a um receptor GPS que processa simultaneamente os sinais de ambas as antenas [Figura (5.1)].

Figura 5.1: Ângulo de aspecto GPS.



Os eixos  $(X, Y, Z)$  caracterizam um referencial externo, inercial e conhecido e os eixos  $(x, y, z)$  um referencial local [Figura (5.2)]<sup>1</sup>, solidário ao satélite usuário, com o eixo  $z$  paralelo ao eixo nominal de rotação.  $\mathcal{A}(t)$  é a matriz de atitude do satélite usuário,  $\hat{n}(t)$  o vetor unitário na direção de seu eixo de rotação no sistema externo, ou seja, seu vetor de atitude e  $\omega(t)$  sua taxa de rotação, todos no instante  $t$ .

O vetor linha de base  $\mathbf{b}$  [Figura (5.1)], é definido entre os centros de fase das duas antenas e conhecido no referencial local.  $\Delta t$  é o intervalo de amostragem do receptor,  $t_{j,k}$  é um instante de amostragem e  $t_j$  é um instante de referência, de modo que:

$$t_{j,k} \equiv t_j + \left[ k - \left( \frac{n+1}{2} \right) \right] \Delta t, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (5.1)$$

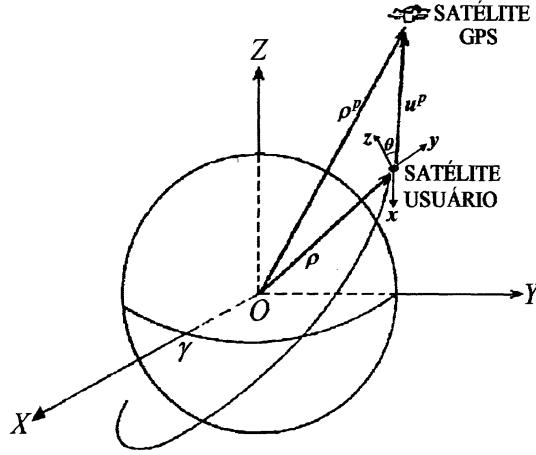
$$t_{j+1} \geq t_j + n\Delta t, \quad \forall j = 1, 2, \dots,$$

onde  $n$  é o tamanho da  $j$ -ésima amostra.

Seja  $\wp_j \equiv \{p \in \mathbb{N} \mid \text{o } p\text{-ésimo satélite GPS visível pelas duas antenas durante todo o intervalo } [t_{j,1}, t_{j,n}]\}$ .

<sup>1</sup>Adaptada de Paiva, 1988<sup>[35]</sup>.

Figura 5.2: Visão geral do problema de atitude.



Sejam  $\hat{u}^p(t)$  o vetor unitário na direção da linha de visada do  $p$ -ésimo satélite GPS, dado por,

$$\hat{u}^p(t) = \frac{\rho^p(t) - \rho(t)}{|\rho^p(t) - \rho(t)|}, \quad (5.2)$$

onde  $\rho(t)$  e  $\rho^p(t)$  são os vetores posição instantânea do satélite usuário e do  $p$ -ésimo satélite GPS, respectivamente e conhecidos no referencial externo e  $u^p(t)$  o vetor que representa as componentes de  $\hat{u}^p(t)$ , no instante  $t$ , no mesmo referencial.

Sejam  $\hat{w}^p(t)$  o vetor unitário da linha de visada do  $p$ -ésimo satélite GPS, no instante  $t$ , no referencial local e  $w^p(t)$  o vetor que representa as componentes de  $\hat{w}^p(t)$ , no mesmo referencial, tal que:

$$w^p(t) = \mathcal{A}(t)u^p(t). \quad (5.3)$$

Seja  $\theta_j^p$  o ângulo de aspecto do  $p$ -ésimo satélite GPS em relação ao vetor de atitude em  $t_j$ , tal que:

$$\hat{u}^p(t_j) \cdot \hat{n}(t_j) = \cos(\theta_j^p). \quad (5.4)$$

Seja ainda,  $\phi_i^p(t)$ , a parte fracionária da fase da portadora do sinal GPS, emitido pelo  $p$ -ésimo satélite GPS e recebido pela  $i$ -ésima antena no instante  $t$  e,  $\phi_{12}^p$  a simples diferença de fase entre as antenas, dada por:

$$\phi_{12}^p(t) \equiv \phi_1^p(t) - \phi_2^p(t). \quad (5.5)$$

Sejam os conjuntos  $\Phi_j^p$ ,  $\mathfrak{F}_j$ ,  $U_j$ ,  $W_j$  e  $\Theta_j$  definidos respectivamente por:

$$\Phi_j^p \equiv \{\phi_{12}^p(t_{j,k}), \quad \forall k = 1, 2, \dots, n\},$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_j &\equiv \{\Phi_j^p, \quad \forall p \in \wp_j\}, \\ U_j &\equiv \{u_j^p, \quad \forall p \in \wp_j\}, \\ W_j &\equiv \{w_j^p, \quad \forall p \in \wp_j\}, \\ \Theta_j &\equiv \{\cos(\theta_j^p), \quad \forall p \in \wp_j\}.\end{aligned}$$

Sejam  $\tilde{\mathcal{A}}_0$ ,  $\tilde{\mathbf{n}}_0$  e  $\tilde{\omega}_0$  as estimativas a priori de  $\mathcal{A}$ ,  $\hat{\mathbf{n}}$  e  $\omega$ , respectivamente, em  $t_0$ .

Sejam  $\tilde{\mathcal{A}}_j^o$  e  $\tilde{\mathbf{n}}_j^o$  as estimativas estáticas de  $\mathcal{A}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$ , respectivamente em  $t_j$ .

Sejam  $\tilde{\mathcal{A}}_j$ ,  $\tilde{\mathbf{n}}_j$  e  $\tilde{\omega}_j$  as estimativas dinâmicas de  $\mathcal{A}$ ,  $\hat{\mathbf{n}}$  e  $\omega$ , respectivamente, em  $t_j$ .

O problema a ser resolvido pode ser, então, formulado em dois níveis distintos:

1. o problema restrito, onde o interesse recai apenas sobre o vetor de atitude propriamente dito e,
2. o problema geral, no qual a fase também é relevante.

Ambos os níveis incluem a estimativa da taxa de rotação e desdobram-se em três passos básicos:

- **Problema restrito:**

Dados  $\{n, \Delta t, b, t_{j-1}, \tilde{\mathbf{n}}_{j-1}, \tilde{\omega}_{j-1}, t_j, \mathfrak{S}_j, U_j\}$ , determinar  $\{\tilde{\mathbf{n}}_j, \tilde{\omega}_j\}$ .

- **Observação de atitude:**

Dados  $\{n, \Delta t, b, \tilde{\omega}_{j-1}, t_j, \mathfrak{S}_j\}$ , determinar  $\{\Theta_j\}$ .

- **Determinação estática de atitude:**

Dados  $\{\Theta_j, U_j\}$ , determinar  $\{\tilde{\mathbf{n}}_j^o\}$ .

- **Determinação dinâmica de atitude:**

Dados  $\{t_{j-1}, \tilde{\mathbf{n}}_{j-1}, \tilde{\omega}_{j-1}, t_j, \tilde{\mathbf{n}}_j^o\}$ , determinar  $\{\tilde{\mathbf{n}}_j, \tilde{\omega}_j\}$ .

- **Problema geral:**

Dados  $\{n, \Delta t, b, t_{j-1}, \tilde{\mathcal{A}}_{j-1}, \tilde{\omega}_{j-1}, t_j, \mathfrak{S}_j, U_j\}$ , determinar  $\{\tilde{\mathcal{A}}_j, \tilde{\omega}_j\}$ .

- **Observação de atitude:**

Dados  $\{n, \Delta t, b, \tilde{\omega}_{j-1}, t_j, \mathfrak{S}_j\}$ , determinar  $\{W_j\}$ .

- **Determinação estática de atitude:**

Dados  $\{W_j, U_j\}$ , determinar  $\{\tilde{\mathcal{A}}_j^o\}$ .

- **Determinação dinâmica de atitude:**

Dados  $\{t_{j-1}, \tilde{\mathcal{A}}_{j-1}, \tilde{\omega}_{j-1}, t_j, \tilde{\mathcal{A}}_j^o\}$ , determinar  $\{\tilde{\mathcal{A}}_j, \tilde{\omega}_j\}$ .



## 5.2 Hipóteses simplificadoras

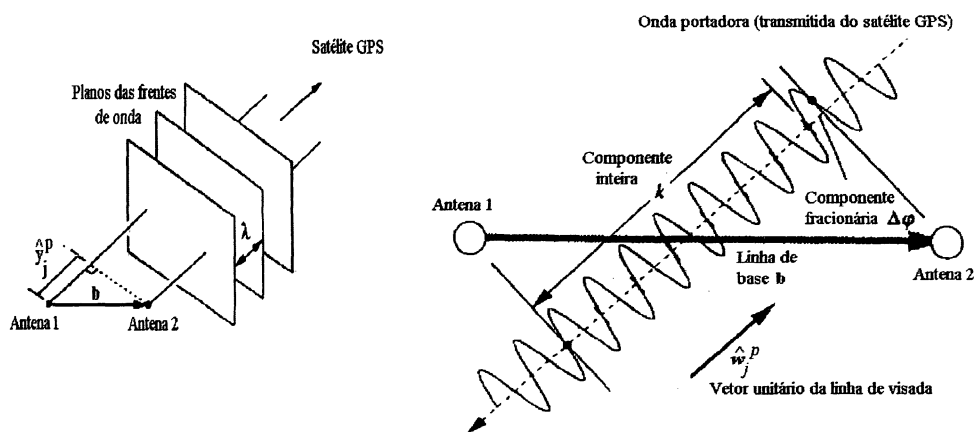
- O satélite usuário é um corpo rígido;
  - (Em geral, os efeitos de não rigidez do satélite usuário, no que diz respeito à atitude, são da ordem de grandeza inferiores aos detectados na precisão preconizada por este trabalho. No entanto, se o satélite usuário possuir painéis solares flexíveis e desdobráveis ou apêndices compridos, estes efeitos de não rigidez devem ser considerados pois podem afetar a precisão dos resultados).
- A dinâmica de atitude de curto período do satélite usuário é um movimento de rotação pura em torno do eixo  $z$ , durante cada intervalo  $[t_{j,1}, t_{j,n}]$ ;
  - (Satélites estabilizados por rotação, geralmente possuem eficientes amortecedores de nutação, o que garante o movimento de rotação pura dentro da precisão desejada neste trabalho. Nos casos de satélites usuários onde os amortecedores de nutação não são usados pode haver comprometimento da precisão).
- A dinâmica de longo período do satélite usuário é um processo estocástico;
  - (No caso da ação de torques de controle durante breves manobras, será necessária uma reavaliação).
- O vetor linha de base  $\mathbf{b}$  é ortogonal ao eixo  $z$ ;
  - (O alinhamento da linha de base pode ser feito no solo. Os erros devidos a desalinhamentos em vôo são geralmente pequenos quando comparados à precisão do sensor (neste caso, sensores de preciso média). Numa aplicação real estes efeitos devem ser avaliados mas, como são dependentes de cada aplicação específica, se tornam muito mais um problema de engenharia).
- A mudança de direção da linha de visada de cada satélite GPS durante cada intervalo  $[t_{j,1}, t_{j,n}]$  é desprezível;
- O comprimento da linha de base é desprezível em comparação à distância entre o satélite usuário e qualquer satélite da constelação GPS;

- A taxa de amostragem é suficientemente alta para permitir a solução da questão da ambigüidade;
  - (Esta simplificação é uma imposição do algoritmo).
- Flutuações assimétricas nos atrasos de hardware das antenas são desprezíveis no intervalo;
  - (Óbviamente esta hipótese é válida no caso da precisão exigida nesse trabalho. Para sensores mais precisos, estas flutuações devem ser reavaliadas).
- A deflexão na trajetória do sinal, devida a troposfera e a ionosfera, é desprezível;
  - (Vale a mesma consideração do item anterior, acrescentando-se ainda que, nas altitudes dos satélites artificiais usuários, esses efeitos inexistem).
- Flutuações assimétricas nos atrasos de multicaminho são consideradas como ruído não correlacionado;
  - (Trata-se de uma aproximação, visto que, na prática estas flutuações são correlacionadas. No entanto, o levantamento desta correlação foge ao escopo deste trabalho).
- Todos os demais atrasos referentes a fase da portadora se cancelam mutuamente na diferença de fase entre as antenas;
  - (No caso de ser usado um único receptor para conectar as duas antenas. Em outro arranjo, o cancelamento acontece na dupla diferença de fase).
- Cada conjunto  $\varphi_j$  possui pelo menos três elementos.
  - (Se tal afirmativa não puder ser cumprida, a solução será prever a instalação de outro par de antenas na face oposta do satélite usuário ou usar antenas de alto ganho).

### 5.3 Equação da interferometria

A fase da portadora é uma observação GPS que consiste do número inteiro de ciclos completos que chega ao receptor desde um tempo de referência arbitrário mais a parte fracionária do ciclo presente. Devido a essência relativa da fase da portadora e ao fenômeno da perda de ciclos, ela contém uma ambigüidade inteira variável. Por esta razão, apenas a parte fracionária é usualmente considerada [Figuras (5.3) (a) e (b)]<sup>2</sup>.

Figura 5.3: (a) Geometria de atitude. (b) Geometria de observação.



Com base nas hipóteses simplificadoras, a parte fracionária da fase da portadora é dada por:

$$\phi_i^p(t) \doteq \left\lfloor \frac{|\rho^p(t) - \rho_i| + v_i^p(t)}{\lambda} \right\rfloor \in [0, 1), \quad (5.6)$$

onde  $\lfloor \cdot \rfloor$  representa a parte fracionária,  $\rho_i$  representa as componentes do vetor posição instantânea da  $i$ -ésima antena no referencial externo e  $v_i^p$  é uma seqüência branca aleatória:

$$\rho_i(t) = \rho(t) - \frac{(-1)^i}{2} \mathcal{A}^T(t)b, \quad (5.7)$$

$$E\{v_i^p(t_{j,k})v_{i'}^p(t_{j,k'})\} = \begin{cases} \sigma_i^2, & \forall k' = k, \quad i' = i, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.8)$$

Ainda, de acordo com as hipóteses simplificadoras, os sinais incidem paralelamente sobre as antenas [Figura (5.3a)]. Deste modo, a diferença de fase entre as antenas resulta na equação clássica da interferometria, que em unidades de comprimento de

<sup>2</sup>Adaptadas de Cohen, 1991<sup>[5]</sup>.

onda pode ser escrita como:

$$\phi_{2,1}^p(t) = \frac{\mathbf{b}}{\lambda} \cdot \hat{\mathbf{w}}^p(t) + N^p(t) + v^p(t) \in (-1, 1), \quad (5.9)$$

onde a função inteira  $N^p$  representa a ambigüidade e  $v^p(t_{j,k})$  uma seqüência branca aleatória de variância  $\sigma^2$ :

$$v^p(t) = v_2^p(t) - v_1^p(t), \quad (5.10)$$

$$\sigma^2 = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\lambda^2}. \quad (5.11)$$

Para o caso particular em estudo, onde o satélite usuário se encontra em movimento de rotação pura, tem-se que:

$$w^p(t) = R(z, \varphi_j(t))w^p(t_j), \quad \forall t \in [t_{j,1}, t_{j,n}], \quad (5.12)$$

onde  $R$  representa a matriz de rotação em torno de  $z$ :

$$R(z, \varphi_j) \equiv \begin{pmatrix} \cos \varphi_j & \sin \varphi_j & 0 \\ -\sin \varphi_j & \cos \varphi_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

$$\varphi_j \equiv \omega_j(t - t_j). \quad (5.14)$$

Desta forma, a equação da interferometria pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \phi_{2,1}^p(t) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{w}}_j^p \cos \varphi_j(t) + \left( \mathbf{b} \times \hat{\mathbf{w}}_j^p \right)_z \sin \varphi_j(t) \right\} + \\ N^p(t) + v^p(t), \quad \forall t \in [t_{j,1}, t_{j,n}], \end{aligned} \quad (5.15)$$

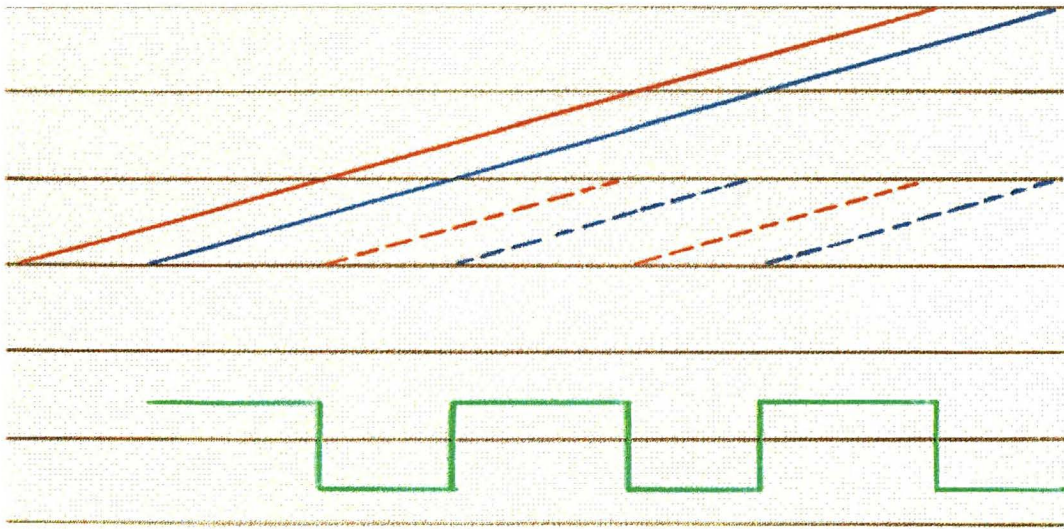
na qual, fica implícito que o produto vetorial entre  $\mathbf{b}$  e  $\hat{\mathbf{w}}_j^p$  leva em consideração a projeção destes vetores em relação ao eixo  $z$ .

## 5.4 A questão da ambigüidade

Em um satélite estabilizado por rotação, a diferença de fase da portadora entre antenas sofre dois tipos de descontinuidade relacionadas com a questão da ambigüidade: saltos unitários, devidos principalmente ao movimento de translação do satélite e saltos de duas unidades, devidos principalmente ao movimento de rotação do satélite. O primeiro deles ocorre basicamente porque as fases dos sinais recebidos pelas duas

antenas não necessariamente mudam de ciclo simultaneamente quando sujeitas ao movimento de translação. Assim, cada vez que a fase muda de ciclo em uma das antenas a ambigüidade  $N^p$  experimenta um salto unitário e a diferença de fase entre as antenas muda de sinal. Já o segundo se deve ao fato de que a linha de base é em geral maior que o semi-comprimento de onda da portadora ( $|\mathbf{b}| > \frac{\lambda}{2}$ ). Isto faz com que a ambigüidade salte duas unidades cada vez que a diferença de fase entre as antenas se aproxima de um de seus limites  $\pm 1$ . Os deslocamentos das antenas durante cada intervalo

**Figura 5.4:** Representação dos saltos de uma unidade.



de amostragem, devido ao movimento de translação, são tipicamente maiores que os devidos a rotação. Para uma linha de base de  $30\text{ cm}$ , uma taxa de rotação de aproximadamente  $30\text{ rpm}$  e frequência de amostragem de  $10\text{ Hz}$ , por exemplo, o movimento de translação seria da ordem de vários metros, contra apenas alguns centímetros do movimento de rotação. Neste caso, o primeiro fator implica um padrão aleatório para a diferença de fase entre antenas, mas onde ainda é possível discernir a variação senoidal devido a rotação das antenas. Para taxas de amostragem suficientemente elevadas, o padrão senoidal pode ser facilmente restaurado pelo seguinte algoritmo:

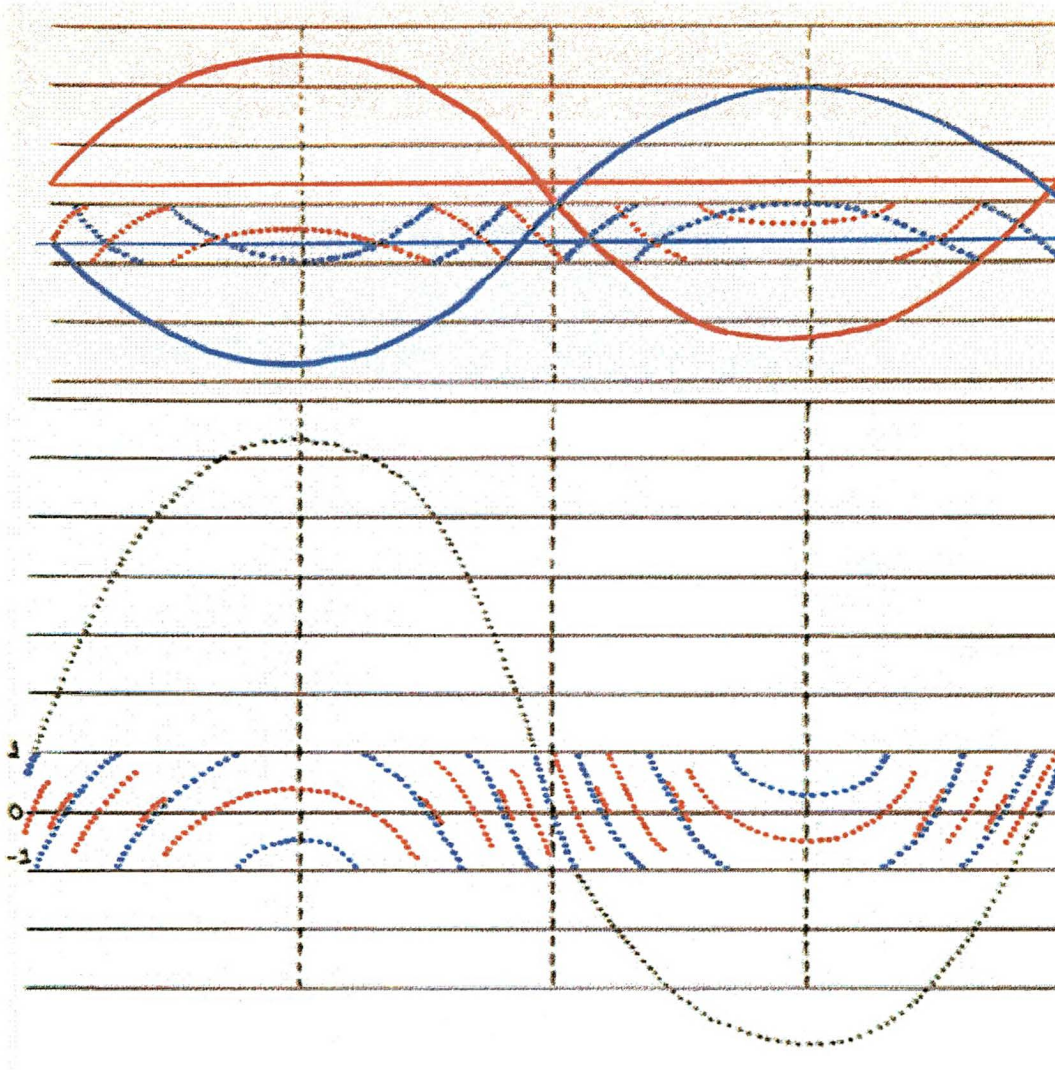
$$\Delta N_{j,1}^p = 0, \quad (5.16)$$

$$y_{j,1}^p = \phi_{2,1}^p(t_{j,1}), \quad (5.17)$$

$$\Delta \phi_{j,k}^p = \phi_{2,1}^p(t_{j,k}) - \phi_{2,1}^p(t_{j,k-1}), \quad \forall k = 2, \dots, n, \quad (5.18)$$



Figura 5.5: Representação dos saltos de duas unidades.



$$\Delta N_{j,k}^p = \begin{cases} \Delta N_{j,k-1}^p, & \text{se } |\Delta \phi_{j,k}^p| \leq 0,5, \\ \Delta N_{j,k-1}^p + \text{sign}(\Delta \phi_{j,k}^p), & \text{se } |\Delta \phi_{j,k}^p| \in (0,5; 1,5], \\ \Delta N_{j,k-1}^p + 2 \text{sign}(\Delta \phi_{j,k}^p), & \text{se } |\Delta \phi_{j,k}^p| \geq 1,5, \end{cases} \quad (5.19)$$

$$y_{j,k}^p = \phi_{2,1}^p(t_{j,k}) + \Delta N_{j,k}^p. \quad (5.20)$$

Nas simulações que são apresentadas no Capítulo 6, o padrão senoidal foi perfeitamente reconstituído para  $\tau \leq 0,4$ , onde:

$$\tau = \frac{\omega |\mathbf{b}|}{\lambda} \Delta t, \quad (5.21)$$

na qual,  $\tau$  é o período de amostragem normalizado.

Acima deste valor, o deslocamento devido a rotação eventualmente atinge valores

maiores que o semi-comprimento de onda e o padrão se torna totalmente aleatório não sendo mais possível identificar sua componente senoidal livre de saltos.

Deve-se notar que a seqüência  $y_{j,k}^p$ , embora livre da presença indesejável de descontinuidades, ainda contém o efeito da ambigüidade no instante inicial  $N^p(t_{j,1})$ :

$$y_{j,k}^p = \frac{1}{\lambda} \left[ \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{w}}_j^p \cos \varphi_j(t) + \left( \mathbf{b} \times \hat{\mathbf{w}}_j^p \right)_z \sin \varphi_j(t) \right] + N^p(t_{j,1}) + v^p(t_{j,k}). \quad (5.22)$$

## 5.5 Observações de atitude

Como o sinal primariamente observado pela interferometria é a diferença de fase entre antenas, é necessário extrair dele uma observação mais diretamente relacionada com a atitude para que esta possa ser posteriormente estimada. Com a seqüência  $y_{j,k}^p$  obtida, a redução destes dados por ajuste de mínimos quadrados resolve o problema de observação de atitude para os problemas restrito e geral.

Com esta finalidade, define-se:

$$Y_j^p \equiv \{ y_{j,1}^p \quad \cdots \quad y_{j,n}^p \}^T, \quad (5.23)$$

$$V_j^p \equiv \{ v^p(t_{j,1}) \quad \cdots \quad v^p(t_{j,n}) \}^T, \quad (5.24)$$

$$\Psi_j^p \equiv \begin{bmatrix} \cos \varphi_{j,1} & \sin \varphi_{j,1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \varphi_{j,n} & \sin \varphi_{j,n} & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

$$X_j^p \equiv \left\{ \frac{1}{\lambda} (\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{w}}_j^p) \quad \frac{1}{\lambda} (\mathbf{b} \times \hat{\mathbf{w}}_j^p)_z \quad N^p(t_{j,1}) \right\}^T. \quad (5.26)$$

Isto posto, a Equação (5.22) pode ser reescrita na forma:

$$Y_j^p = \Psi_j^p X_j^p + V_j^p. \quad (5.27)$$

Definindo-se a função custo quadrática,

$$J_j^p(X_j^p) \equiv \frac{1}{2} [Y_j^p - \Psi_j^p X_j^p]^T [Y_j^p - \Psi_j^p X_j^p], \quad (5.28)$$

a estimativa ótima do vetor de parâmetros  $X_j^p$  e sua matriz de covariância  $\mathcal{E}_j^p$  são dadas respectivamente por:

$$\tilde{X}_j^p = \left( \Psi_j^{pT} \Psi_j^p \right)^{-1} \Psi_j^{pT} Y_j^p, \quad (5.29)$$

$$\mathcal{E}_j^p = \left( \Psi_j^{pT} \Psi_j^p \right)^{-1} \sigma^2. \quad (5.30)$$

Uma estimativa adequada para o problema restrito é o cosseno do ângulo de aspecto  $z_j^p$  do  $p$  - ésimo satélite GPS. Mostra-se que a estimativa ótima  $\tilde{z}_j^p$  e a variância do erro são dadas, respectivamente, por:

$$\tilde{z}_j^p = \sqrt{1 - \tilde{X}_j^{pT} L^T L \tilde{X}_j^p}, \quad (5.31)$$

$$\sigma_{\tilde{\theta}_j^p}^2 = \frac{\tilde{X}_j^p L^T L \mathcal{E}_j^p L^T L \tilde{X}_j^p}{\sin^2(\tilde{\theta}_j^p) \cos^2(\tilde{\theta}_j^p)}, \quad (5.32)$$

onde,

$$\tilde{z}_j^p \equiv \cos(\tilde{\theta}_j^p), \quad (5.33)$$

$$L \equiv \frac{\lambda}{|\mathbf{b}|} (\mathcal{I}_{2 \times 2} \ O_2), \quad (5.34)$$

e  $\mathcal{I}_{\ell \times \ell}$  representa a matriz identidade em  $\mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ ,  $O_\ell$  o vetor nulo em  $\mathbb{R}^\ell$ .

Uma estimativa adequada para o problema geral é o vetor linha de visada  $w_j^p$  do  $p$  - ésimo satélite GPS . Então, sua estimativa ótima e sua respectiva covariância, são dadas por:

$$\tilde{w}_j^p = \left\{ \frac{\mathbf{B} \tilde{X}_j^p}{\sqrt{1 - \tilde{X}_j^{pT} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \tilde{X}_j^p}} \right\}, \quad (5.35)$$

$$\mathcal{R}_{w_j^p} = \mathcal{D}_j^p \mathbf{B} \mathcal{E}_j^p \mathbf{B}^T \mathcal{D}_j^{pT}, \quad (5.36)$$

com:

$$\mathbf{B} \equiv \frac{\lambda}{|\mathbf{b}|^2} \begin{bmatrix} b_x & -b_y & 0 \\ b_y & b_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.37)$$

$$\mathcal{D}_j^p \equiv \left[ \mathcal{I}_{2 \times 2} \quad \vdots \quad - \left( 1 - \tilde{X}_j^{pT} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \tilde{X}_j^p \right)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \tilde{X}_j^p \right]^T, \quad (5.38)$$

lembrando que  $\mathcal{R}_{w_j^p}$  é singular.

## 5.6 Determinação estática de atitude

Obtidos os conjuntos de observações simultâneas de atitude, o problema da determinação estática poderia, em princípio, ser resolvido por qualquer método clássico (Wertz, 1978)<sup>[45]</sup>. No entanto, como será necessário introduzir o efeito das imprecisões na taxa de rotação, optou-se, em ambos os problemas, restrito e geral, por métodos do tipo mínimos quadrados linearizados (Shuster, 1994)<sup>[41]</sup>, apresentados no Capítulo 4 e descritos sumariamente a seguir:



### 5.6.1 Problema restrito

Para o caso do problema restrito, inicialmente obtém-se uma aproximação linear relaxando-se o vínculo de norma unitária do vetor de atitude. Assim,  $\tilde{\mathbf{n}}_j^o$  é solução da Equação (4.77), escrita como:

$$\min J(\hat{\mathbf{n}}_j) = \frac{1}{2} \sum_{\forall p \in \wp_j} \sigma_{\tilde{z}_j^p}^{-2} [\tilde{z}_j^p - \hat{\mathbf{n}}_j \cdot \hat{\mathbf{u}}_j^p]^2, \quad (5.39)$$

que é dada pelas Equações (4.83), (4.81) e (4.82), na forma:

$$\tilde{\mathbf{n}}_j^{(o)} = F_j^{-1} G_j, \quad (5.40)$$

$$F_j = \sum_{\forall p \in \wp_j} \sigma_{\tilde{z}_j^p}^{-2} \hat{\mathbf{u}}_j^p \hat{\mathbf{u}}_j^{pT}, \quad (5.41)$$

$$G_j = \sum_{\forall p \in \wp_j} \sigma_{\tilde{z}_j^p}^{-2} \tilde{z}_j^p \hat{\mathbf{u}}_j^p. \quad (5.42)$$

Em seguida, levando-se em conta a condição de norma unitária do vetor de atitude, define-se o vetor de coordenadas angulares, elevação e azimute  $\theta$ , conforme a Equação (4.85), tal que:

$$\tilde{\mathbf{n}}_j^o = \{\sin \theta_1 \cos \theta_2 \quad \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad \cos \theta_1\}^T. \quad (5.43)$$

Reescrevendo a função custo  $J(\hat{\mathbf{n}}_j)$  em termos de  $\theta$  e linearizando em torno da solução anterior, a estimativa de mínimos quadrados com vínculo pode ser obtida como:

- Inicialização:

$$\theta \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \arccos(n_{jz}^o) \\ \arcsin \left( \frac{n_{jy}^o}{\sqrt{(n_{jx}^o)^2 + (n_{jy}^o)^2}} \right) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \arccos(n_{jz}^o) \\ \arccos \left( \frac{n_{jx}^o}{\sqrt{(n_{jx}^o)^2 + (n_{jy}^o)^2}} \right) \end{array} \right\}. \quad (5.44)$$

- Iteração repetida até a convergência:

$$\mathcal{T} \leftarrow \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 \sin \theta_2 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

$$\theta \leftarrow \theta + (\mathcal{T}_j F_j \mathcal{T}_j^T)^{-1} \mathcal{T}_j (G_j - F_j \tilde{\mathbf{n}}_j^o), \quad (5.46)$$

$$\tilde{\mathbf{n}}_j^o \leftarrow \{\sin \theta_1 \cos \theta_2 \quad \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad \cos \theta_1\}^T, \quad (5.47)$$

conforme as Equações (4.89), (4.96) e (4.85), respectivamente.

Após a convergência a covariância de  $\tilde{\mathbf{n}}_j^o$  é dada por:

$$\mathcal{R}_{\mathbf{n}_j}^o = \mathcal{T}_j^T (\mathcal{T}_j F_j \mathcal{T}_j^T)^{-1} \mathcal{T}_j. \quad (5.48)$$

### 5.6.2 Problema geral

Dado um conjunto de vetores unitários em ambos os sistemas de referência, fixo no satélite usuário e externo, o problema da determinação de atitude por mínimos quadrados recai no problema de Wahba<sup>[43]</sup>:

$$\min J(\mathcal{A}_j) = \frac{1}{2} \sum_{\forall p \in \rho_j} (\tilde{w}_j^p - \mathcal{A}_j u_j^p)^T \mathcal{S}_j^p (\tilde{w}_j^p - \mathcal{A}_j u_j^p), \quad (5.49)$$

onde  $\mathcal{S}_j^p$  é a matriz peso. Normalmente a matriz peso é tomada simplesmente como a matriz identidade ponderada pelo inverso do quadrado da incerteza angular global, que inclui erros tanto nas observações  $\tilde{w}_j^p$  quanto nas referências  $u_j^p$ . Este procedimento é justificado na maioria das aplicações baseadas em observações de sensores convencionais, onde a distribuição de erros supostamente não possui direção preferencial, sendo axialmente distribuída ao redor da linha de visada. O mesmo não pode ser afirmado no presente caso. Como as observações de atitude são obtidas a partir das observações elementares, por interferometria, existem claras assimetrias na distribuição de erros. Por outro lado, a matriz de pesos não pode ser simplesmente a inversa da matriz de covariância das observações, como é usual em métodos deste tipo, visto que tal matriz é singular. A assimetria na distribuição dos erros é levada em conta tomando-se a matriz peso como uma espécie de pseudo-inversa de  $\mathcal{R}_{w_j^p}$ , definida por:

$$\mathcal{S}_j^p \equiv d_1^{-1} e_1 e_1^T + d_2^{-1} e_2 e_2^T, \quad (5.50)$$

onde os  $d_i$  são os auto-valores não nulos de  $\mathcal{R}_{w_j^p}$  e os  $e_i$  seus respectivos auto-vetores, tais que:

$$\mathcal{R}_{w_j^p} = d_1 e_1 e_1^T + d_2 e_2 e_2^T. \quad (5.51)$$

Linearizando a função custo quadrática  $J(\mathcal{A}_j)$  em torno de uma solução aproximada e reescrevendo-a em termos do vetor de rotação de pequenas correções angulares  $\xi_j$ , tem-se:

$$\mathcal{A}_j = \exp[\Omega(\xi_j)] \tilde{\mathcal{A}}_j^o, \quad (5.52)$$

onde  $\Omega$  é a função matricial definida por:

$$\Omega(a) \equiv \begin{pmatrix} 0 & a_z & -a_y \\ -a_z & 0 & a_x \\ a_y & -a_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall a \in \mathbb{R}^3. \quad (5.53)$$

A solução pode ser obtida pelo seguinte algoritmo:

- Inicializar  $\tilde{\mathcal{A}}_j^o$ , por exemplo, pelo algoritmo TRIAD<sup>3</sup> que utiliza apenas duas observações arbitrariamente tomadas do conjunto  $\wp_j$ ;
- Iterar repetidamente até convergir:

$$\mathcal{L}_j \leftarrow \sum_{\forall p \in \wp_j} \Omega^T \left( \tilde{\mathcal{A}}_j^o u_j^p \right) \mathcal{S}_j^p \Omega \left( \tilde{\mathcal{A}}_j^o u_j^p \right), \quad (5.54)$$

$$\alpha_j \leftarrow \sum_{\forall p \in \wp_j} \Omega^T \left( \tilde{\mathcal{A}}_j^o u_j^p \right) \mathcal{S}_j^p \left( \tilde{w}_j^p - \tilde{\mathcal{A}}_j^o u_j^p \right), \quad (5.55)$$

$$\Delta \xi_j^o \leftarrow \mathcal{L}_j^{-1} \alpha_j, \quad (5.56)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_j^o \leftarrow \exp \left[ \Omega \left( \Delta \xi_j^o \right) \right] \tilde{\mathcal{A}}_j^o, \quad (5.57)$$

com:

$$\exp[\Omega(a)] = \begin{cases} \mathcal{I}_{3 \times 3} \cos(|a|) + [1 - \cos(|a|)] \frac{a a^T}{|a|^2} + \\ + \frac{\sin(|a|)}{|a|} \Omega(a), \quad \forall a \in \mathbb{R}^3, |a| \neq 0, \\ \mathcal{I}_{3 \times 3}, \quad \text{se } |a| = 0. \end{cases} \quad (5.58)$$

Após a convergência a covariância de  $\Delta \xi_j^o$  é dada por:

$$\mathcal{R}_{\xi_j^o} = \mathcal{L}_j^{-1}. \quad (5.59)$$

## 5.7 Efeitos da imprecisão da taxa de rotação

Até este ponto foram resolvidos os problemas de observação de atitude e de determinação estática de atitude, sendo a taxa de rotação um dado de entrada para o problema de observação enquanto que a saída deste, entradas para a determinação estática, cujas saídas, por sua vez, serão os dados de entrada para o problema de determinação dinâmica. Na prática, porém, a taxa de rotação é também um parâmetro a ser determinado e, nem sempre o satélite possui um giro para medi-la. Assim sendo, para garantir que um receptor GPS possa, segundo o esquema ora proposto, estimar a atitude de modo completamente autônomo, é necessário que a taxa de rotação também seja estimada. Com este propósito, as matrizes de sensibilidade necessárias para os procedimentos de estimação são apresentadas a seguir.

---

<sup>3</sup>Apresentado em Shuster, 1981.<sup>[39]</sup>

### 5.7.1 Sensitividade das observações de atitude

No processo de redução dos dados observados por interferometria, o vetor de parâmetros ajustados  $\tilde{X}_j^p$  [Equação (5.29)], é tal que:

$$\left(\Psi_j^{pT} \Psi_j^p\right)^{-1} \Psi_j^{pT} \left(Y_j^p - \Psi_j^p \tilde{X}_j^p\right) = 0. \quad (5.60)$$

Negligenciando-se os erros de estimação, resulta:

$$\frac{\partial \tilde{X}_j^p}{\partial \omega_j} = - \left(\Psi_j^{pT} \Psi_j^p\right)^{-1} \Psi_j^{pT} \frac{\partial \Psi_j^p}{\partial \omega_j} \tilde{X}_j^p, \quad (5.61)$$

onde a sensibilidade de  $\Psi_j^p$  é obtida diretamente da Equação (5.25):

$$\frac{\partial \Psi_j^p}{\partial \omega_j} = \frac{1}{\tilde{\omega}_j} \begin{bmatrix} -\varphi_{j,1} \sin \varphi_{j,1} & \varphi_{j,1} \cos \varphi_{j,1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\varphi_{j,n} \sin \varphi_{j,n} & \varphi_{j,n} \cos \varphi_{j,n} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.62)$$

A sensibilidade da observação de atitude para o problema restrito pode então ser expressa por:

$$\frac{\partial \tilde{z}_j^p}{\partial \omega_j} = - \left(\tilde{z}_j^p\right)^{-1} \tilde{X}_j^{pT} L^T L \frac{\partial \tilde{X}_j^p}{\partial \omega_j}, \quad (5.63)$$

com  $L$  dado pela Equação (5.34).

Analogamente, para o caso do problema geral, a sensibilidade resulta:

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_j^p}{\partial \omega_j} = \left[ \mathcal{B}^T \quad ; \quad - \left(1 - \tilde{X}_j^{pT} \mathcal{B}^T \mathcal{B} \tilde{X}_j^p\right)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{B}^T \mathcal{B} \tilde{X}_j^p \right]^T \frac{\partial \tilde{X}_j^p}{\partial \omega_j}, \quad (5.64)$$

com  $\mathcal{B}$  dado pela Equação (5.37).

### 5.7.2 Sensitividade das estimativas estáticas de atitude

Qualquer que seja o valor de  $\tilde{\omega}_j$ , após a convergência, a estimativa do vetor de componentes da atitude  $\tilde{n}_j^o$  é tal que [ver Equação (5.46)]:

$$\mathcal{T}_j \left(G_j - F_j \tilde{n}_j^o\right) = 0, \quad (5.65)$$

$$\tilde{n}_j^{oT} \tilde{n}_j^o = 1. \quad (5.66)$$

Então, negligenciando erros de estimação, segue que:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}_j F_j \\ \tilde{n}_j^{oT} \end{pmatrix} \frac{\partial \tilde{n}_j^o}{\partial \omega_j} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_j \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial G_j}{\partial \omega_j}, \quad (5.67)$$

resultando:

$$\frac{\partial \tilde{n}_j^o}{\partial \omega_j} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_j F_j \\ \tilde{n}_j^{oT} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_j \\ 0 \end{pmatrix} \sum_{\forall p \in \wp_j} \sigma_{\tilde{z}_j^p}^{-2} u_j^p \frac{\partial \tilde{z}_j^p}{\partial \omega_j}. \quad (5.68)$$

No problema geral, a sensibilidade é melhor expressa em termos do vetor de rotação. Mais especificamente, a matriz de sensibilidade da atitude estática,  $\mathcal{U}_j$  é tal que:

$$\tilde{\mathcal{A}}_j^o(\tilde{\omega}_j) = \exp \{ \Omega [\mathcal{U}_j (\tilde{\omega}_j - \omega_j)] \} \tilde{\mathcal{A}}_j^o(\omega_j), \quad (5.69)$$

para  $\tilde{\omega}_j$  suficientemente próximo de  $\omega_j$ .

Após a convergência do algoritmo de estimação estática,  $\xi_j^o$  se anula e, conseqüentemente,  $\alpha_j$  também se anula. Negligenciando-se erros de estimação, tem-se:

$$\sum_{\forall p \in \wp_j} \Omega^T (\tilde{\mathcal{A}}_j^o n_j^p) \mathcal{S}_j^p \left( \frac{\partial \tilde{\omega}_j^p}{\partial \omega_j} - \Omega (\mathcal{U}_j) \tilde{\mathcal{A}}_j^o u_j^p \right) = 0. \quad (5.70)$$

Utilizando-se as propriedades especiais de  $\Omega$ , após alguma manipulação algébrica e tomando-se  $\mathcal{L}$  dado pela Equação (5.54), resulta:

$$\mathcal{U}_j = \mathcal{L}_j^{-1} \sum_{\forall p \in \wp_j} \Omega (\tilde{\mathcal{A}}_j^o u_j^p) \mathcal{S}_j^p \frac{\partial \tilde{\omega}_j^p}{\partial \omega_j}. \quad (5.71)$$

## 5.8 Determinação dinâmica da atitude

No que diz respeito a dinâmica de atitude de curto período (tomada como um movimento rotacional puro), o problema da determinação de atitude foi completamente resolvido na seção anterior, incluindo a sensibilidade aos efeitos da imprecisão da taxa de rotação.

No caso do problema da dinâmica de atitude de longo período, o movimento de rotação pura não se aplica devido a ação de perturbações e eventuais torques de controle. Um modelo dinâmico melhorado deve ser desenvolvido para cada satélite específico.

Contudo, os intervalos de tempo entre as estimativas de parâmetros de atitude consecutivos são tipicamente muito menores que as constantes de tempo da dinâmica de atitude sob a ação de torques externos. Desta forma, para o objetivo do presente trabalho, o processo estocástico apresentado a seguir é um modelo simples e adequado para a dinâmica de atitude de longo período:

$$n_{j+1} \doteq n_j + \mathcal{N} \left[ 0, q_n(t_{j+1} - t_j) \left( \mathcal{I}_{3 \times 3} - \tilde{n}_j \tilde{n}_j^T \right) \right], \quad (5.72)$$

$$\mathcal{A}_{j+1} \doteq \exp \{ \Omega ( \mathcal{N} [ 0, q_\zeta (t_{j+1} - t_j) \mathcal{I}_{3 \times 3} ] ) \} \exp \{ \Omega [ \omega_j (t_{j+1} - t_j) \mathcal{Y} ] \} \mathcal{A}_j, \quad (5.73)$$

$$\omega_{j+1} \doteq \omega_j + \mathcal{N} ( 0, q_\omega ), \quad (5.74)$$

onde  $\mathcal{N}$  representa um ruído branco Gaussiano com média nula e matriz de covariância dada;  $q_n$ ,  $q_\zeta$  e  $q_\omega$  são a densidade espectral de potência do ruído dinâmico no vetor de atitude, na matriz de atitude e na taxa de rotação, respectivamente e;

$$\mathcal{Y} \equiv \{ 0 \ 0 \ 1 \}^T. \quad (5.75)$$

Nesta seção, um algoritmo de estimação de estado é desenvolvido usando-se o filtro estendido de Kalman, apresentado no Capítulo 4. Além da atitude propriamente dita, deve ser estimada também a taxa de rotação.

### 5.8.1 Filtro estendido de Kalman

Considere-se um sistema dinâmico caracterizado pelo vetor de estado  $\mathcal{X}$  e pelo vetor de observações  $\mathcal{O}$ , tais que:

$$\mathcal{X}_{j+1} = \mathcal{F}_j \mathcal{X}_j + \mathcal{N} [ 0, Q_j (t_{j+1} - t_j) ], \quad (5.76)$$

$$\mathcal{O}_j = h_j (\mathcal{X}_j) + \mathcal{N} ( 0, \mathcal{R}_{\mathcal{O}_j} ), \quad (5.77)$$

onde  $\mathcal{F}_j$  é a matriz de transição do estado,  $Q_j$  é a densidade espectral de potência do ruído dinâmico equivalente e  $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_j}$  é a matriz de covariância dos ruídos de observação.

As equações do filtro estendido de Kalman, apresentadas no final da Seção 4.5.2, são aqui repetidas numa forma mais compacta, particularizada para este sistema, para maior facilidade na programação:

$$\tilde{\mathcal{X}}_j = \tilde{\mathcal{X}}_{j-} + \mathcal{K}_j [ \mathcal{O}_j - h_j ( \tilde{\mathcal{X}}_{j-} ) ], \quad (5.78)$$

$$\mathcal{P}_j = \mathcal{P}_{j-} - \mathcal{K}_j \mathcal{H}_j \mathcal{P}_{j-}, \quad (5.79)$$

$$\mathcal{K}_j = \mathcal{P}_{j-} \mathcal{H}_j^T ( \mathcal{H}_j \mathcal{P}_{j-} \mathcal{H}_j^T + \mathcal{R}_{\mathcal{O}_j} )^{-1}, \quad (5.80)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}_{j+1-} = \mathcal{F}_j \tilde{\mathcal{X}}_j, \quad (5.81)$$

$$\mathcal{P}_{j+1-} = \mathcal{F}_j \mathcal{P}_j \mathcal{F}_j^T + Q_j (t_{j+1} - t_j), \quad (5.82)$$

onde  $\mathcal{K}_j$  é o ganho de Kalman e  $\mathcal{H}_j$  é a matriz de sensibilidade do vetor de observações, dado pela Equação (5.77), em relação ao vetor de estado:

$$\mathcal{H}_j = \left. \frac{\partial h_j}{\partial \mathcal{X}_j} \right|_{\mathcal{X}_j} = \tilde{\mathcal{X}}_{j-}. \quad (5.83)$$

### 5.8.2 Modelo dinâmico e de observação para o problema restrito

No problema restrito, o estado primário a ser estimado é o vetor de atitude, cuja norma é unitária e, conseqüentemente a matriz de covariância é singular. Para evitar as complicações advindas deste fato, ao invés de agregar a taxa de rotação como um quarto elemento do estado, estima-se o vetor velocidade angular. Para tanto, define-se o vetor de estado  $\mathcal{X}_j$  como:

$$\mathcal{X}_j \equiv \omega_j n_j. \quad (5.84)$$

O vetor de componentes da atitude e a taxa de rotação, são então, expressos em função do estado, respectivamente, por:

$$n_j = \left( \mathcal{X}_j^T \mathcal{X}_j \right)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{X}_j, \quad (5.85)$$

$$\omega_j = \left( \mathcal{X}_j^T \mathcal{X}_j \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.86)$$

O modelo de observação é:

$$\tilde{n}_j^o \doteq n_j + \frac{\partial \tilde{n}_j^o}{\partial \omega_j} (\tilde{\omega}_{j-} - \omega_j) + N \left( 0, \mathcal{R}_{n_j}^o \right). \quad (5.87)$$

De acordo com o apresentado anteriormente, mostra-se que:

$$\mathcal{F}_j = \mathcal{I}_{3 \times 3}, \quad (5.88)$$

$$Q_j = q_n \left( \tilde{\mathcal{X}}_j^T \tilde{\mathcal{X}}_j \mathcal{I}_{3 \times 3} - \tilde{\mathcal{X}}_j \tilde{\mathcal{X}}_j^T \right) + q_\omega \left( \tilde{\mathcal{X}}_j^T \tilde{\mathcal{X}}_j \right)^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathcal{X}}_j \tilde{\mathcal{X}}_j^T, \quad (5.89)$$

$$\mathcal{O}_j = \tilde{n}_j^o, \quad (5.90)$$

$$h_j = \left( \tilde{\mathcal{X}}_{j-}^T \tilde{\mathcal{X}}_{j-} \right)^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathcal{X}}_{j-}, \quad (5.91)$$

$$\mathcal{H}_j = \left( \tilde{\mathcal{X}}_{j-}^T \tilde{\mathcal{X}}_{j-} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ \mathcal{I}_{3 \times 3} - \left( \tilde{\mathcal{X}}_{j-}^T \tilde{\mathcal{X}}_{j-} \right)^{-1} \tilde{\mathcal{X}}_{j-} \tilde{\mathcal{X}}_{j-}^T - \frac{\partial \tilde{n}_j^o}{\partial \omega_j} \tilde{\mathcal{X}}_{j-}^T \right], \quad (5.92)$$

$$\mathcal{R}_{\mathcal{O}_j} = \mathcal{R}_{n_j}^o. \quad (5.93)$$

Como o vetor de estado é um vetor nulo para ambos  $(\mathcal{H}_j \mathcal{P}_{j-} \mathcal{H}_j^T)$  e  $(\mathcal{R}_{\mathcal{O}_j})$ , o ganho de Kalman resulta mal-condicionado. O resíduo  $[\mathcal{O}_j - h_j(\tilde{\mathcal{X}}_{j-})]$  é também ortogonal ao vetor de estado. Desta forma, substituindo-se a matriz inversa no ganho de Kalman pela espécie de pseudo-inversa citada anteriormente, pode-se escrever:

$$\mathcal{K}_j = \mathcal{P}_{j-} \mathcal{H}_j^T \left( d_1^{-1} e_1 e_1^T + d_2^{-1} e_2 e_2^T \right), \quad (5.94)$$

onde os  $d_i$  são os auto-valores não nulos de  $\mathcal{H}_j \mathcal{P}_{j-} \mathcal{H}_j^T + \mathcal{R}_{\mathcal{O}_j}$  e os  $e_i$  seus respectivos auto-vetores, tais que:

$$d_1 e_1 e_1^T + d_2 e_2 e_2^T = \left( \mathcal{I}_{3 \times 3} - \tilde{n}_j^o \tilde{n}_j^{oT} \right) \left( \mathcal{H}_j \mathcal{P}_{j-} \mathcal{H}_j^T + \mathcal{R}_{\mathcal{O}_j} \right) \left( \mathcal{I}_{3 \times 3} - \tilde{n}_j^o \tilde{n}_j^{oT} \right). \quad (5.95)$$

### 5.8.3 Modelo dinâmico para o problema geral

Para evitar a redundância de elementos no estado, ao invés de se estimar diretamente a matriz de atitude, define-se o seguinte vetor de estado:

$$\mathcal{X}_j \equiv \left\{ \zeta_j^T \ \omega_j \right\}^T, \quad (5.96)$$

onde  $\zeta_j$  é o vetor das componentes de rotação de pequenas correções angulares em torno da estimativa não atualizada  $\tilde{\mathcal{A}}_{j-}$ , tal que:

$$\mathcal{A}_j = \exp \{ \Omega(\zeta_j) \} \tilde{\mathcal{A}}_{j-}. \quad (5.97)$$

O modelo de observação é dado por:

$$\tilde{\mathcal{A}}_j^o \doteq \left\{ \Omega \left[ \mathcal{U}_j (\tilde{\omega}_{j-} - \omega_j) + \mathcal{N} \left( 0, \mathcal{R}_{\xi_j}^o \right) \right] \right\} \mathcal{A}_j. \quad (5.98)$$

O modelo de observação expresso em função do vetor das componentes de rotação é:

$$\tilde{\zeta}_j^o = \zeta_j + \mathcal{U}_j (\tilde{\omega}_{j-} - \omega_j) + \mathcal{N} \left( 0, \mathcal{R}_{\xi_j}^o \right), \quad (5.99)$$

onde  $\tilde{\zeta}_j^o$  é o vetor das componentes de rotação de pequenas correções angulares em torno das observações, tal que:

$$\tilde{\mathcal{A}}_j^o = \exp \left\{ \Omega \left( \tilde{\zeta}_j^o \right) \right\} \tilde{\mathcal{A}}_{j-}, \quad (5.100)$$

que, para pequenos erros, obedece a relação:

$$\Omega \left[ \tilde{\zeta}_j^o \right] = \tilde{\mathcal{A}}_j^o \tilde{\mathcal{A}}_{j-}^T - \mathcal{I}_{3 \times 3}. \quad (5.101)$$

Do exposto acima, segue-se que:

$$\mathcal{I}_j = \begin{bmatrix} \exp \{ \Omega[\omega_j(t_{j+1} - t_j)] \mathcal{Y} \} & (t_{j+1} - t_j) \mathcal{Y} \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.102)$$

$$\mathcal{Q}_j = \begin{bmatrix} q_\zeta \mathcal{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3^T & q_\omega \end{bmatrix}, \quad (5.103)$$

$$\mathcal{O}_j = \tilde{\zeta}_j^o, \quad (5.104)$$

$$h_j = \mathbf{0}_3, \quad (5.105)$$

$$\mathcal{H}_j = [\mathcal{I}_{3 \times 3} \quad -\mathcal{U}_j], \quad (5.106)$$

$$\mathcal{R}_{\mathcal{O}_j} = \mathcal{R}_{\xi_j}^o. \quad (5.107)$$



## Capítulo 6

### Resultados numéricos

Com o objetivo de testar o procedimento de determinação de atitude proposto, foi implementada uma simulação digital usando-se o software MATLAB, bem como, um experimento dividido em três modos de operação: modo estático (motor de passo desligado), modo dinâmico contínuo (com rotação de  $1, 2rpm$ ) e modo dinâmico intermitente (passo de  $3, 6^\circ$ ), cujos resultados são apresentados a seguir.

#### 6.1 Simulação digital

A simulação digital teve por finalidade testar o procedimento proposto de determinação de atitude a partir da recuperação da característica senoidal da fase da portadora da onda gerada pelos satélites GPS e recebida pelo receptor no qual estão acopladas duas antenas, efetuando-se o cálculo da simples diferença de fase. Estas antenas são consideradas instaladas na face positiva de rotação de um satélite artificial usuário e a recepção de sinais obedece os critérios de visibilidade e de diluição geométrica de precisão para a atitude (ADOP), discutidos no Capítulo 3.

A constelação GPS foi considerada com órbita circular usando-se os elementos keplerianos fornecidos por Leick<sup>[20]</sup>:

$$\begin{aligned} a_S^p &= 26000000,00 \text{ m} && \rightarrow \text{semi-eixo maior,} \\ e_S^p &= 0,0 && \rightarrow \text{excentricidade,} \\ i_S^p &= 55^\circ && \rightarrow \text{inclinação,} \\ M_S^p &= \begin{matrix} 210_{06}^\circ & 305_{24}^\circ & 5_{14}^\circ & 45_{01}^\circ & 75_{09}^\circ & 250_{22}^\circ \\ 180_{28}^\circ & 70_{15}^\circ & 95_{21}^\circ & 165_{26}^\circ & 330_{25}^\circ & 300_{20}^\circ \\ 150_{31}^\circ & 210_{17}^\circ & 225_{16}^\circ & 270_{18}^\circ & 180_{27}^\circ & 95_{02}^\circ \\ 55_{07}^\circ & 330_{04}^\circ & 140_{23}^\circ & 300_{29}^\circ & 210_{19}^\circ & 10_{05}^\circ \end{matrix} \end{aligned}$$

onde  $M_S^p$  é a anomalia média, o índice representa o  $PRN$  dos satélites GPS e a distribuição representa a posição orbital de cada satélite GPS em um dos seis planos orbitais, conforme a Figura (3.2).

Os elementos keplerianos do satélite usuário são os do satélite brasileiro SCD2, estabilizado por rotação e cujo lançamento está previsto para o final de 1997, em uma órbita quase-circular, a saber:

$$\begin{aligned}
 a_S &= 7000000,00 \text{ m} && \rightarrow \text{semi-eixo maior,} \\
 e_S &= 0,0\dots && \rightarrow \text{excentricidade,} \\
 i_S &= 23^\circ && \rightarrow \text{inclinação,} \\
 M_S &= 0^\circ && \rightarrow \text{anomalia média.}
 \end{aligned}$$

Numa aplicação com uma órbita diferente dessa usada na simulação digital, o que pode sofrer variação é o perfil do número de satélites GPS visíveis e uma vez que a constelação GPS foi projetada para permitir uma cobertura global, esse efeito não deverá ser notável.

Os outros parâmetros de entrada para a simulação digital, são:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{L_1} &= 19,05 \text{ cm} && \rightarrow \text{comprimento de onda da frequência } L_1, \\
 \sigma &= 5 \text{ mm} && \rightarrow \text{desvio padrão do ruído na fase da portadora,} \\
 n &= 100 && \rightarrow \text{tamanho da amostra de curto período,} \\
 t_{j+1} - t_j &= 10 \text{ s} && \rightarrow \text{intervalo de tempo entre amostras de curto período,} \\
 \mu &= 15^\circ && \rightarrow \text{ângulo de máscara das antenas,} \\
 q_n &= 4,6 \times 10^{-7} \text{ rad}^2/\text{s} && \rightarrow \text{densidade espectral de potência} \\
 &&& \text{do ruído dinâmico no vetor de atitude,} \\
 q_\zeta &= 4,6 \times 10^{-7} \text{ rad}^2/\text{s} && \rightarrow \text{densidade espectral de potência} \\
 &&& \text{do ruído dinâmico na matriz de atitude,} \\
 q_\omega &= 1,3 \times 10^{-6} \text{ rad}^2/\text{s}^3 && \rightarrow \text{densidade espectral de potência} \\
 &&& \text{do ruído dinâmico na taxa de rotação.}
 \end{aligned}$$

Após comprovar a recuperação da característica senoidal da fase da portadora apresentada em (Fabri, Lopes & Ferreira, 1996)<sup>[9]</sup> e, tendo-se portanto, a amplitude da senoide como uma observação de atitude, a simulação digital permite testar o procedimento de determinação da atitude desenvolvido no Capítulo anterior para os problemas restrito e geral. Cabe lembrar aqui que, para o problema restrito, apenas o vetor de atitude é relevante e por conseguinte o ângulo de aspecto da linha de visada do satélite GPS é a observação de atitude, enquanto que, para o problema geral, a observação de

atitude é o vetor unitário das linhas de visada dos satélites GPS onde se leva em conta também o ângulo de fase.

Nas figuras a seguir, os quatro primeiros gráficos enfocam aspectos mais ligados à geometria dos  $p$  satélites GPS visíveis ao satélite usuário, tais como:  $PRN$  e número de satélites visíveis, valores dos ângulos de aspecto entre o eixo de rotação do satélite usuário e as direções das linhas de visada dos  $p$  satélites GPS e o valor do fator  $ADOP$  para os intervalos de simulação considerados.

Os quatro gráficos seguintes tratam dos resíduos relativos à fase da portadora, da precisão dos erros angulares (minutos de arco), dos resíduos do cosseno do ângulo de aspecto (erro médio quadrático [rms]) para o problema restrito e dos resíduos da linha de visada para o problema geral e da taxa de rotação (percentual [%]).

Em várias simulações, alguns gráficos são apresentados com eixo de ordenadas em escala logarítmica para melhor definição de pontos e curvas. Outro detalhe a ser observado é que todos os gráficos apresentam correspondência entre as cores das curvas de desempenho com as cores relativas aos PRN dos satélites GPS.

### 6.1.1 Simulação 1 - problema restrito

Parâmetros de entrada.

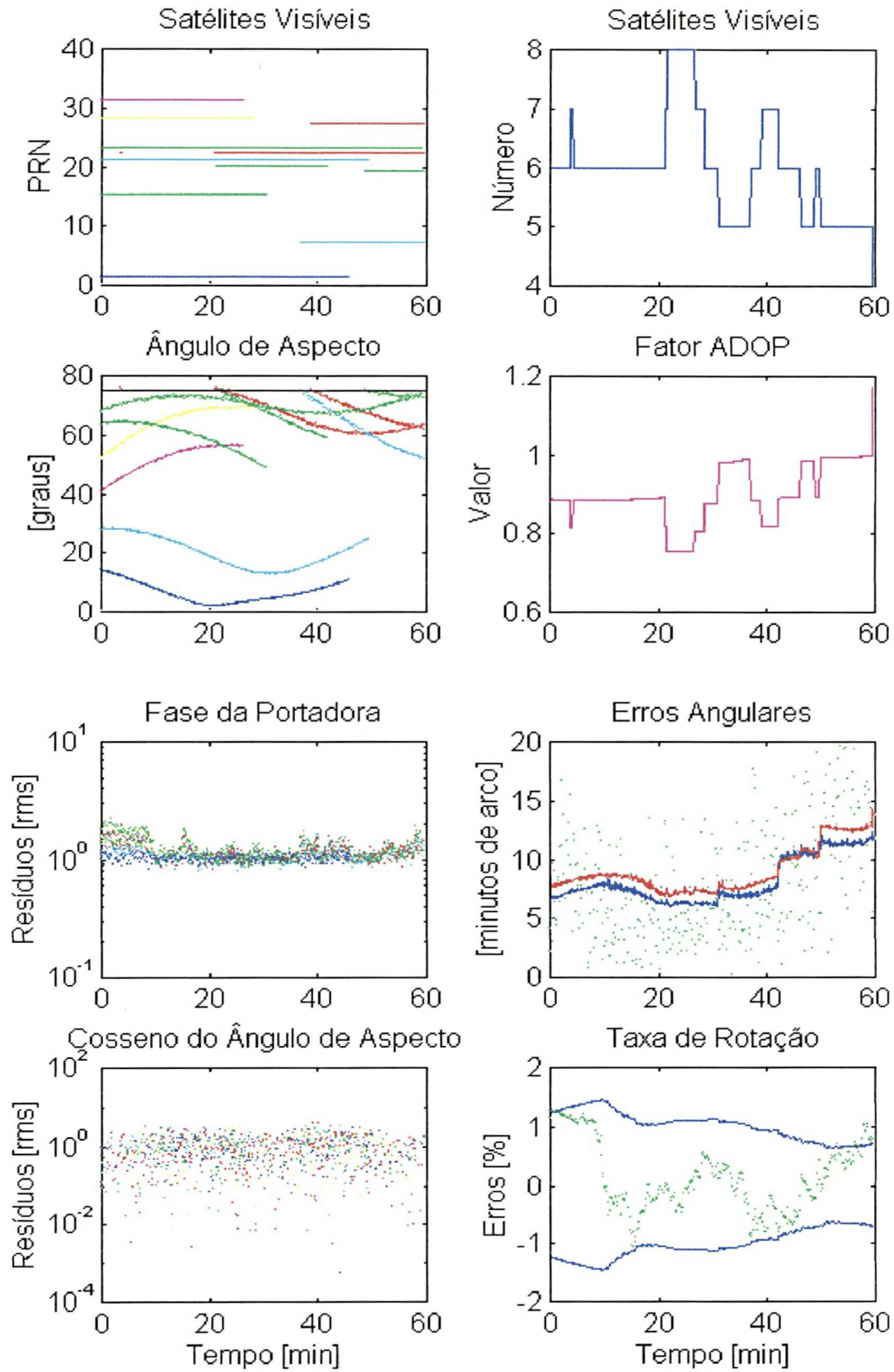
Comprimento da linha de base	$b = 60cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,025s$
Taxa de rotação	$\omega = 28,28rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,23$
Tempo de simulação	$T = 60min$

Na Figura (6.1) observa-se uma variação no número de satélites visíveis, na faixa de 6 satélites no início da simulação, passando a 8 e no final dos  $60min$  caindo a quatro satélites. Verifica-se facilmente que, quanto maior o número de satélites visíveis tanto menor o fator ADOP, o qual, como já foi dito, para uma boa geometria, deve ser sempre menor ou igual à unidade. No presente caso, o gráfico dos ângulos de aspecto mostra uma geometria pouco propícia, nos últimos minutos da simulação. Alguns satélites aparecem ligeiramente acima da linha do ângulo de máscara ( $\mu = 15^\circ$ ) por serem valores calculados e que, naturalmente, contêm erros.

Os resíduos da fase da portadora, normalizados, estão basicamente concentrados na linha da unidade e os resíduos do cosseno do ângulo de aspecto, também normalizados, distribuem-se, com maior intensidade, na faixa da unidade. Os erros em atitude representados no gráfico de erros angulares, onde os pontos verdes são os valores calculados, a linha vermelha representa os valores da estimativa estática e a linha azul, os valores resultantes do filtro de Kalman, situam-se na faixa compatível com os sensores tradicionais. Finalmente, observa-se que o filtro de Kalman manteve os erros da taxa de rotação dentro da faixa de incerteza de 1%.

Ainda há a enfatizar que o período de amostragem normalizado  $\tau = 0,23$  está abaixo do limite de 0,4 preconizado pela Equação (5.21).

Figura 6.1: Simulação 1 - problema restrito.



### 6.1.2 Simulação 2 - problema geral

Parâmetros de entrada.

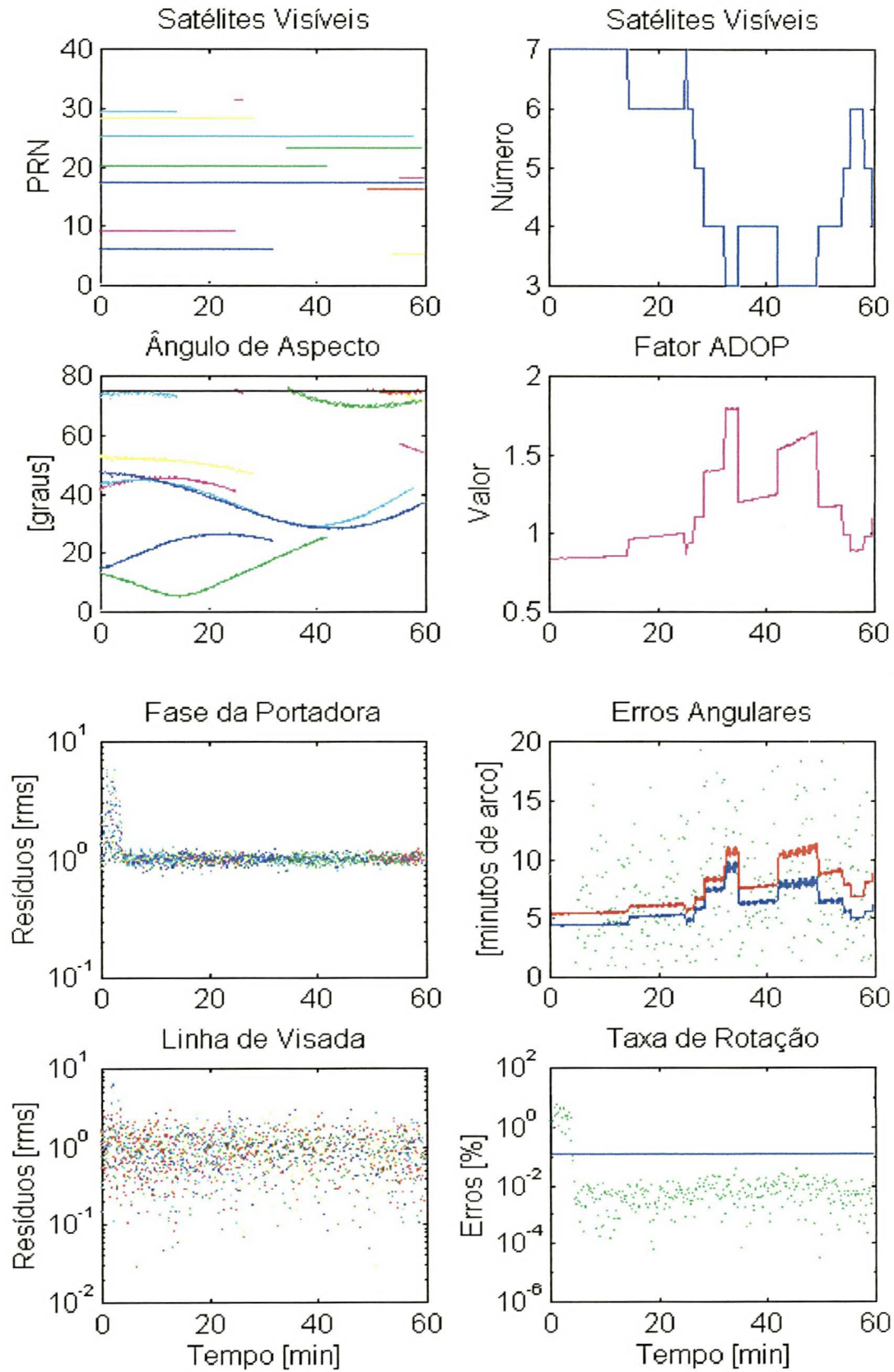
Comprimento da linha de base	$b = 60cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,025s$
Taxa de rotação	$\omega = 28,28rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,23$
Tempo de simulação	$T = 60min$

A simulação mostrada na Figura (6.2) confirma a característica de relativa simetria entre os gráficos do número de satélites visíveis e do fator ADOP, notando-se que este fator piora quando o número de satélites visíveis é menor. Cabe aqui ressaltar que um fator  $ADOP > 1$  requer cuidados pois pode degradar a precisão mas, um fator  $ADOP < 1$  não garante a alta precisão, uma vez que, na aplicação preconizada por esse trabalho, esta precisão depende também de outros fatores no processo de ajuste das senoides. Tal observação vale para todos os casos de simulação digital, bem como para os casos de experimento no solo.

Nesta figura observa-se que para o problema geral a precisão dos erros angulares ( $\sim 4'$ ) é melhor do que no problema restrito ( $\sim 6'$ ), visto que neste caso o ângulo de fase também é considerado. Principalmente a faixa de incerteza dos erros percentuais da taxa de rotação apresenta um patamar melhor do que no problema restrito, o que contribui também para uma menor sensibilidade a mudanças na configuração dos satélites visíveis. A estimativa da taxa de rotação só convergiu após  $5min$ , contribuindo então para a convergência dos demais resíduos e erros angulares.

Os parâmetros de entrada das duas simulações já discutidas são os mesmos. A diferença fica por conta da atitude inicial e dos ruídos dinâmicos e de observação, diferentes para cada um dos casos pois são gerados aleatoriamente. Como a atitude inicial é diferente em cada caso, a comparação da precisão não é feita entre os casos restrito e geral mas apenas levando em conta os valores absolutos de cada caso. Esta análise se repete para todas as simulações.

Figura 6.2: Simulação 2 - problema geral.



### 6.1.3 Simulação 3 - problema restrito

Parâmetros de entrada.

Comprimento da linha de base	$b = 60cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,035s$
Taxa de rotação	$\omega = 28,28rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,32$
Tempo de simulação	$T = 60min$

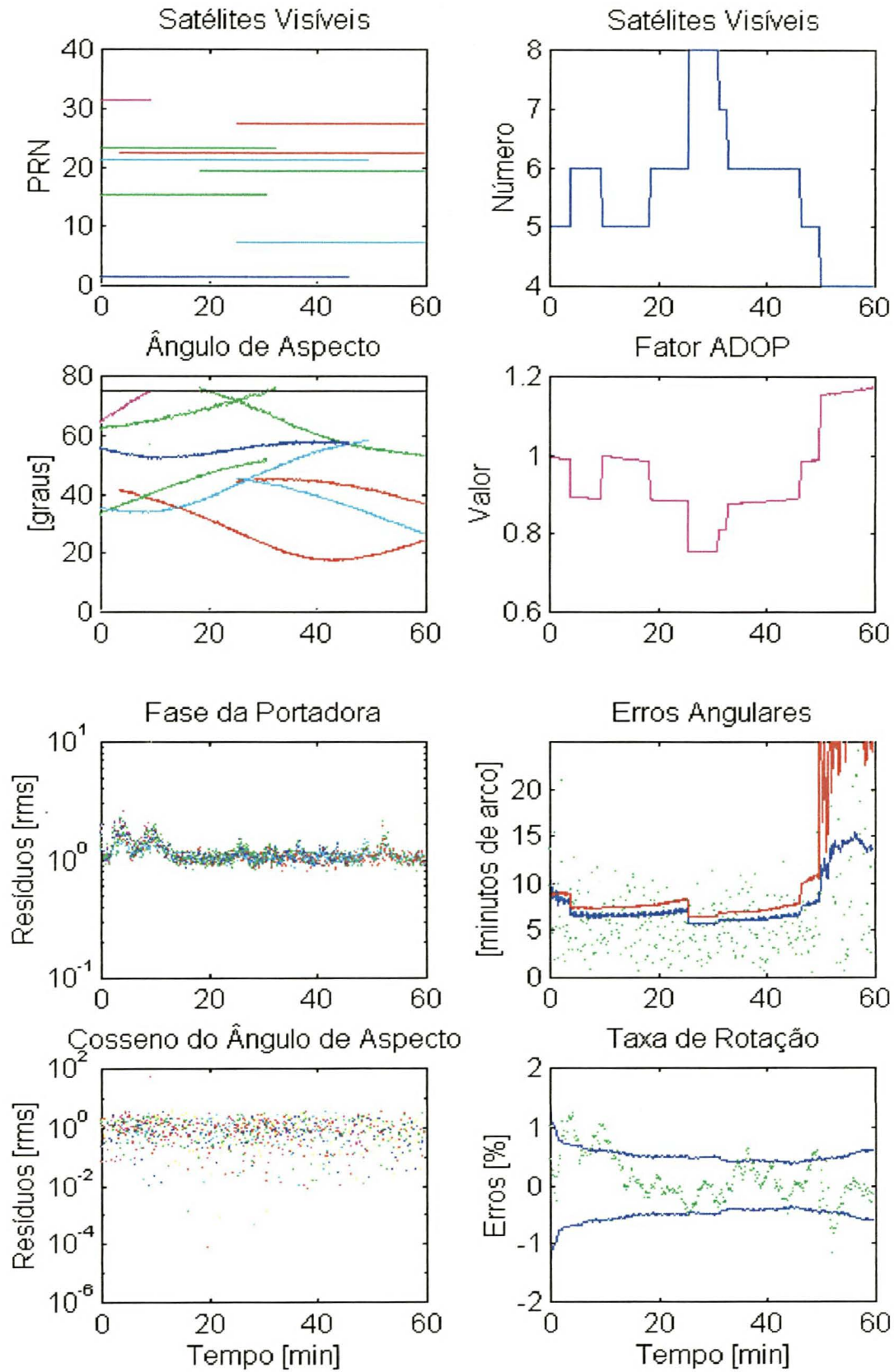
Nesta simulação os parâmetros de entrada para a linha de base e para a taxa de rotação foram mantidos inalterados. A mudança aconteceu no período de amostragem de  $0,025s$  para  $0,035s$  o que provoca a alteração no período de amostragem normalizado  $\tau$  de  $0,23$  para  $0,32$  mas ainda abaixo do valor limite.

Novamente, por conta da geometria não adequada nos últimos  $10min$  da simulação [Figura (6.3)], o valor do fator ADOP ultrapassa a faixa da unidade repercutindo na precisão dos erros angulares e em ligeira variação no percentual de erros da taxa de rotação.

No gráfico dos erros angulares o crescimento da incerteza nas estimativas nos últimos  $10min$  fica por conta da geometria não adequada descrita pelo fator ADOP. Mesmo assim, devido a informação dinâmica, a precisão (linha azul) é melhor do que a obtida pela estimativa estática (linha vermelha).



Figura 6.3: Simulação 3 - problema restrito.



#### 6.1.4 Simulação 4 - problema geral

Parâmetros de entrada.

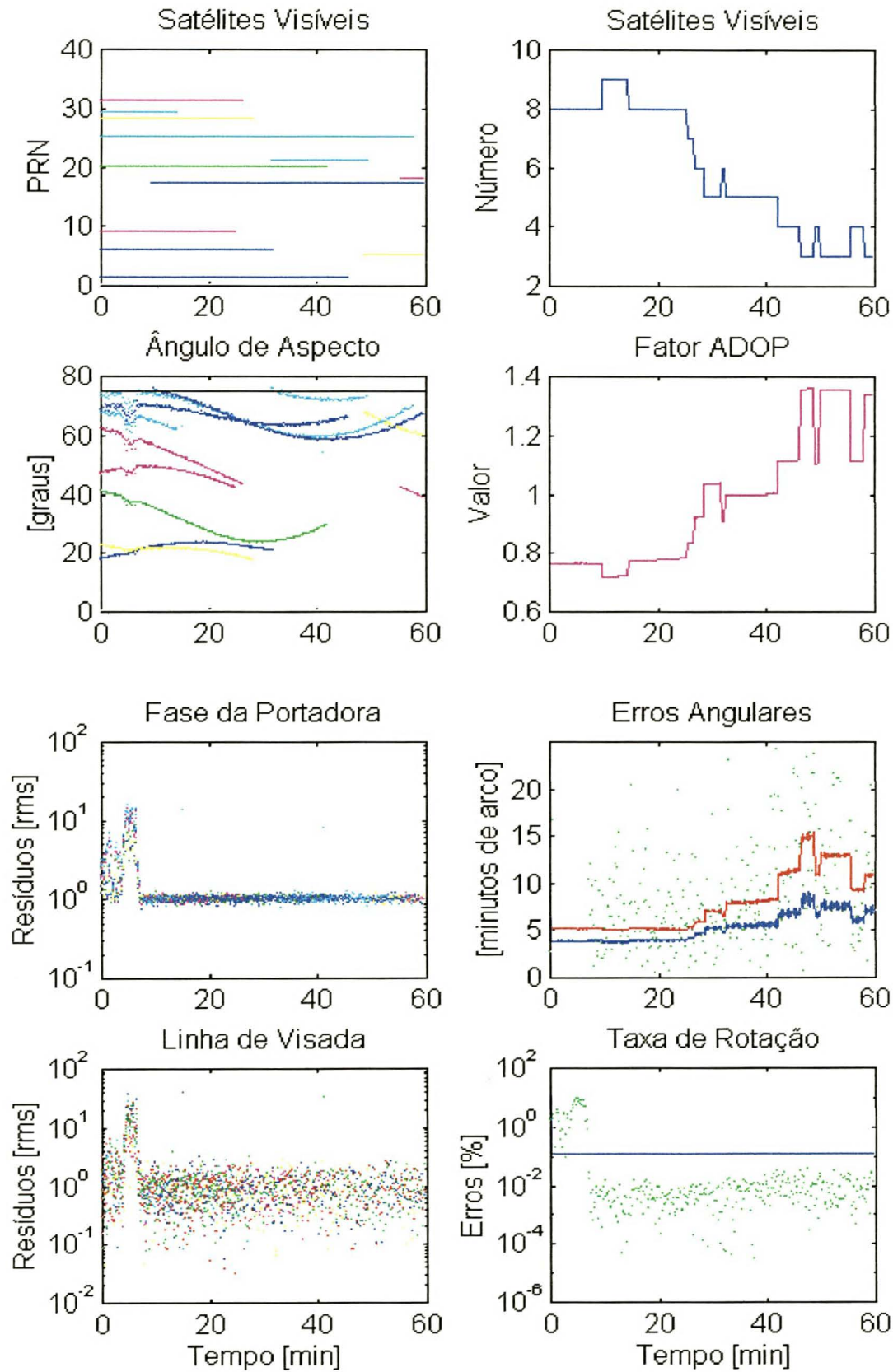
Comprimento da linha de base	$b = 60cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,035s$
Taxa de rotação	$\omega = 28,28rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,32$
Tempo de simulação	$T = 60min$

Embora o número de satélites visíveis seja grande [Figura (6.4)], a atitude inicial desfavorável impõe uma demora na convergência da taxa de rotação e, por conseguinte, alterações bruscas nos padrões da fase da portadora e da linha de visada, bem como, incertezas iniciais nos ângulos de aspecto, mesmo tendo-se em vista que nesta região, o grupo de satélites visíveis apresenta uma ótima geometria. A velocidade de convergência também pode ser afetada pelos erros na estimativa a priori da atitude e da velocidade angular, que são gerados aleatoriamente. Quanto menores os erros iniciais, tanto maior será a velocidade de convergência do algoritmo.

Por outro lado, embora nos minutos finais da simulação esta geometria já não apresente as mesmas características iniciais, o comportamento dos erros angulares e dos demais gráficos continua satisfatório, por conta da boa convergência da taxa de rotação.

Novamente o problema geral apresenta-se ligeiramente mais preciso ( $\sim 4'$ ) do que o problema restrito ( $\sim 6'$ ).

Figura 6.4: Simulação 4 - problema geral.



### 6.1.5 Simulação 5 - problema restrito

Parâmetros de entrada.

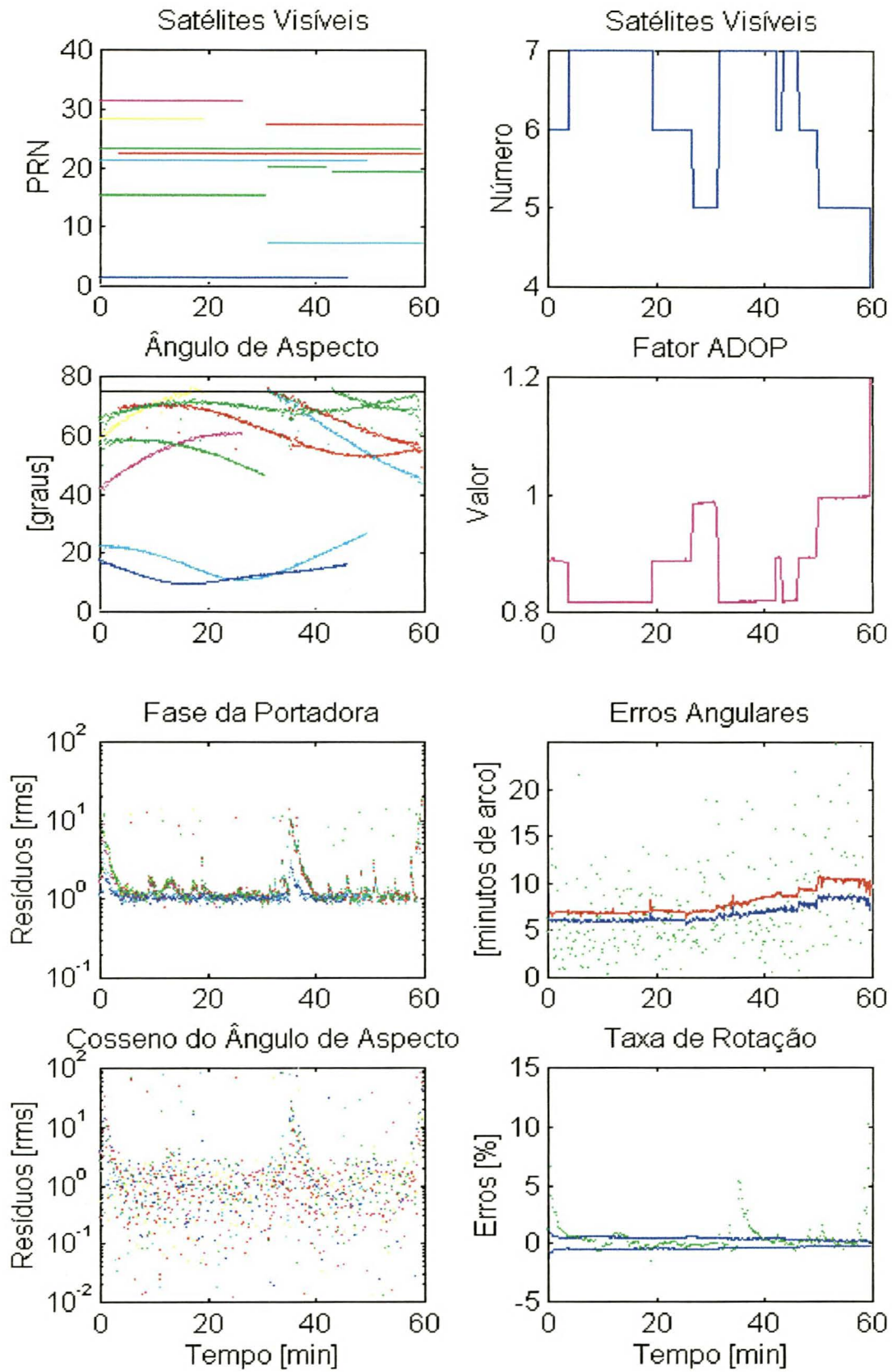
Comprimento da linha de base	$b = 60cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,04s$
Taxa de rotação	$\omega = 28,28rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,37$
Tempo de simulação	$T = 60min$

Observa-se na Figura (6.5) que os erros percentuais na taxa de rotação, após a aquisição inicial, convergem em quase todo o período, exceto durante um pequeno intervalo. Isto é suficiente para provocar alterações nos comportamentos da fase da portadora e do cosseno do ângulo de aspecto por volta dos  $35min$  de simulação, e também causar incertezas nos ângulos de aspecto. Nota-se, no final do período, uma rápida divergência com novos efeitos de incertezas nos ângulos de aspecto, justamente quando o número de satélites visíveis cai para 4 e o fator ADOP sobe acima do valor preconizado. Neste caso o procedimento começa a sentir os efeitos da proximidade do valor limite do período de amostragem normalizado ( $\tau = 0,4$ ) causando instabilidades localizadas.

Devido ao número satisfatório de satélites visíveis em quase toda a simulação e à boa geometria da distribuição presente, o fator ADOP permanece a maior parte do tempo de simulação abaixo ou em torno da unidade.

Os erros angulares ( $\sim 6'$ ) encontram-se ainda na faixa compatível com os demais sensores de atitude tradicionais.

Figura 6.5: Simulação 5 - problema restrito.



### 6.1.6 Simulação 6 - problema geral

Parâmetros de entrada.

Comprimento da linha de base	$b = 60cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,04s$
Taxa de rotação	$\omega = 28,28rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,37$
Tempo de simulação	$T = 60min$

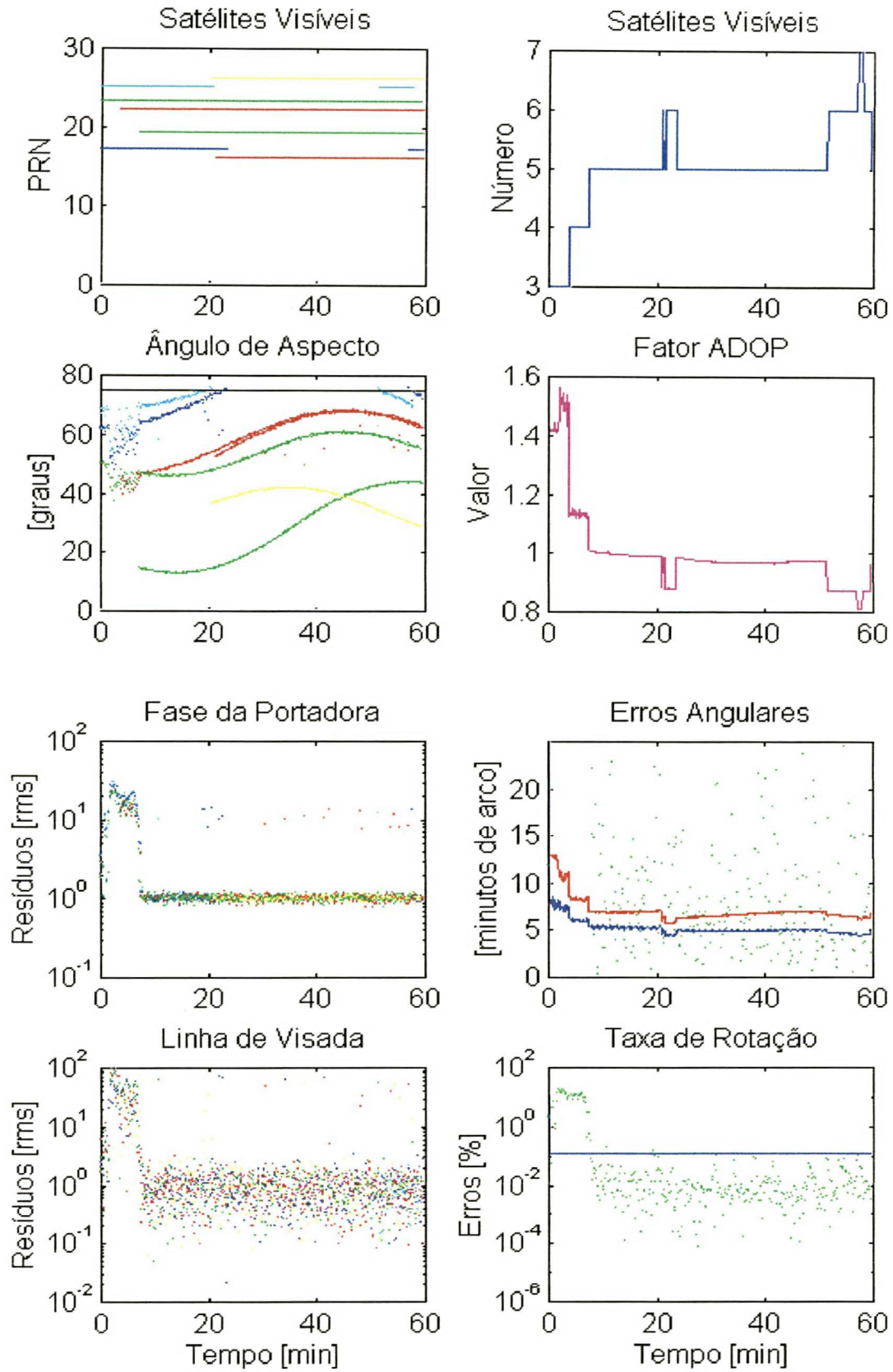
Na Figura (6.6), o baixo número de satélites visíveis e o fator ADOP acima da unidade nos primeiros momentos da simulação confirmam uma geometria menos favorável e as incertezas nos ângulos de aspecto. Nos gráficos dos resíduos da fase da portadora e da linha de visada, alguns pontos estão distribuídos fora da faixa normalizada.

O período de amostragem é tomado como  $0,04s$  e o período de amostragem normalizado  $\tau = 0,37$  aproxima-se do valor limite. Após a entrada de mais dois satélites GPS na linha de visada do satélite alvo, o processamento converge satisfatoriamente. Os erros angulares correspondem à precisão adotada e os erros da taxa de rotação convergem mostrando que, novamente, a simulação para o problema geral é ligeiramente mais precisa ( $\sim 4'$ ) do que a simulação para o problema restrito ( $\sim 6'$ ) e menos sujeita à instabilidades.

Da mesma forma, pode ser observado que, mesmo havendo efeitos esparsos nos resíduos, tais efeitos não se manifestam nos erros angulares e na taxa de rotação, como aconteceu no problema restrito, caracterizando o procedimento para o problema geral como mais robusto.



Figura 6.6: Simulação 6 - problema geral.



### 6.1.7 Simulação 7 - problema restrito

Parâmetros de entrada.

Comprimento da linha de base	$b = 60cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,025s$
Taxa de rotação	$\omega = 48,99rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,4$
Tempo de simulação	$T = 60min$

A mudança nos parâmetros de entrada, considerando-se o período de amostragem  $\Delta t = 0,025s$  e a taxa de rotação  $\omega = 48,99rpm$ , coloca o período de amostragem normalizado  $\tau$  sobre o valor limite.

Neste caso [Figura (6.7)], apesar do satisfatório número de satélites GPS visíveis e do compatível fator ADOP, durante todo o intervalo de simulação, os erros percentuais da taxa de rotação não convergem na maior parte do intervalo.

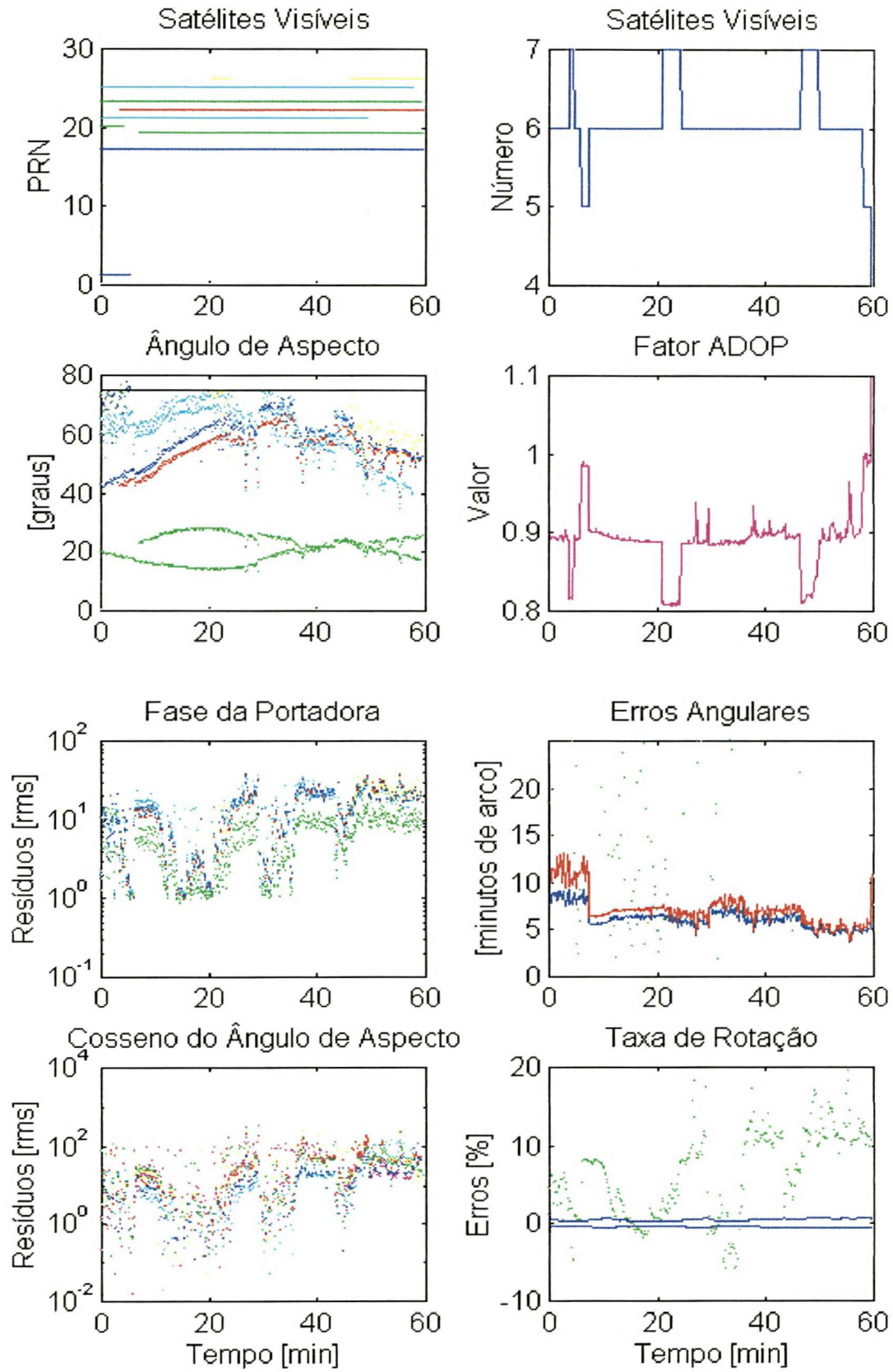
Com isto, os resíduos da fase da portadora e do cosseno do ângulo de aspecto ficam comprometidos, não conseguindo convergir para a faixa de normalização. Pela mesma razão, os ângulos de aspecto apresentam incertezas tanto maiores quanto mais próximos do valor do ângulo de máscara  $\mu$ .

Com esta característica, a presente simulação não resulta satisfatória, confirmando a dificuldade em se discernir a variação senoidal da fase da portadora devida a rotação das antenas quando o período de amostragem normalizado atinge o valor limite.

Este caso de simulação não elimina a possibilidade de aplicação do procedimento para valores do período de amostragem normalizado ( $\tau = 0,4$ ), como pode ser visto na simulação seguinte.



Figura 6.7: Simulação 7 - problema restrito.



### 6.1.8 Simulação 8 - problema geral

Parâmetros de entrada.

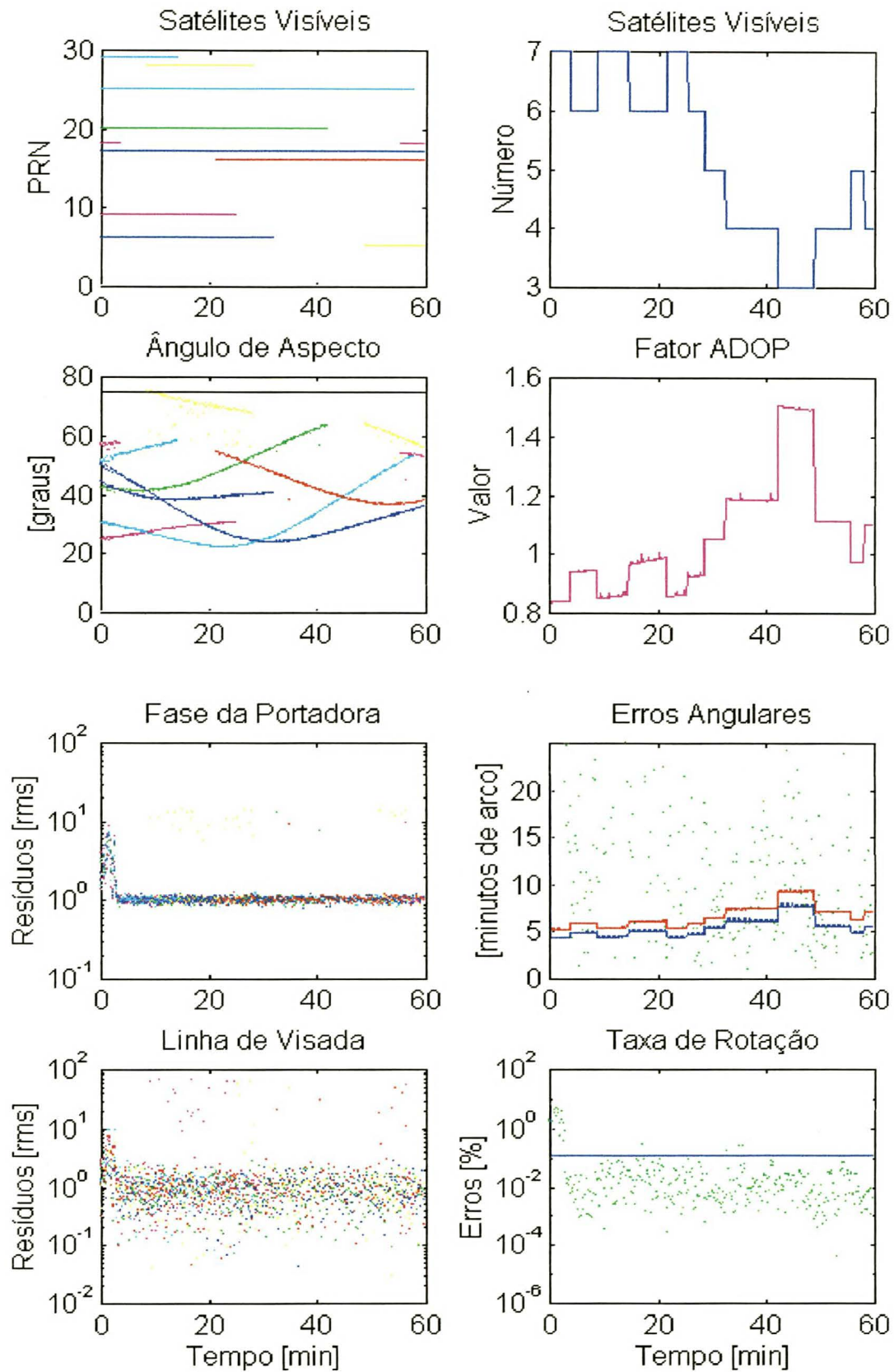
Comprimento da linha de base	$b = 60cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,025s$
Taxa de rotação	$\omega = 48,99rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,4$
Tempo de simulação	$T = 60min$

A exemplo da simulação 7, esta foi realizada com os parâmetros de entrada descritos acima. O número de satélites visíveis variou de 7 a 3 e o valor do fator ADOP indica uma geometria menos favorável da metade do período em diante, conforme mostra a Figura (6.8).

Mesmo assim, e apesar da perda de sinal dos vários satélites GPS que saíram da faixa de visibilidade em um curto intervalo, os ângulos de aspecto apresentam incertezas menores pois, como o procedimento para o problema geral é mais apto a estimar a taxa de rotação, os resíduos se tornam menos instáveis mesmo na proximidade do limite de  $\tau$ . Os resíduos da fase da portadora e da linha de visada estão na faixa da normalização e os erros angulares situam-se dentro do esperado. Esta simulação, em especial, mostra a diferença que há entre os dois algoritmos.

Verifica-se a convergência dos erros percentuais da taxa de rotação, com exceção de alguns poucos pontos e confirma-se que a simulação para o problema geral é mais precisa ( $\sim 4'$ ) do que a simulação para o problema restrito que no caso anterior não teve bom desempenho, mesmo no limite do período de amostragem normalizado  $\tau = 0,4$ .

Figura 6.8: Simulação 8 - problema geral.



### 6.1.9 Simulação 9 - problema restrito

Parâmetros de entrada.

Comprimento da linha de base	$b = 30cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,1s$
Taxa de rotação	$\omega = 19,97rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,3$
Tempo de simulação	$T = 60min$

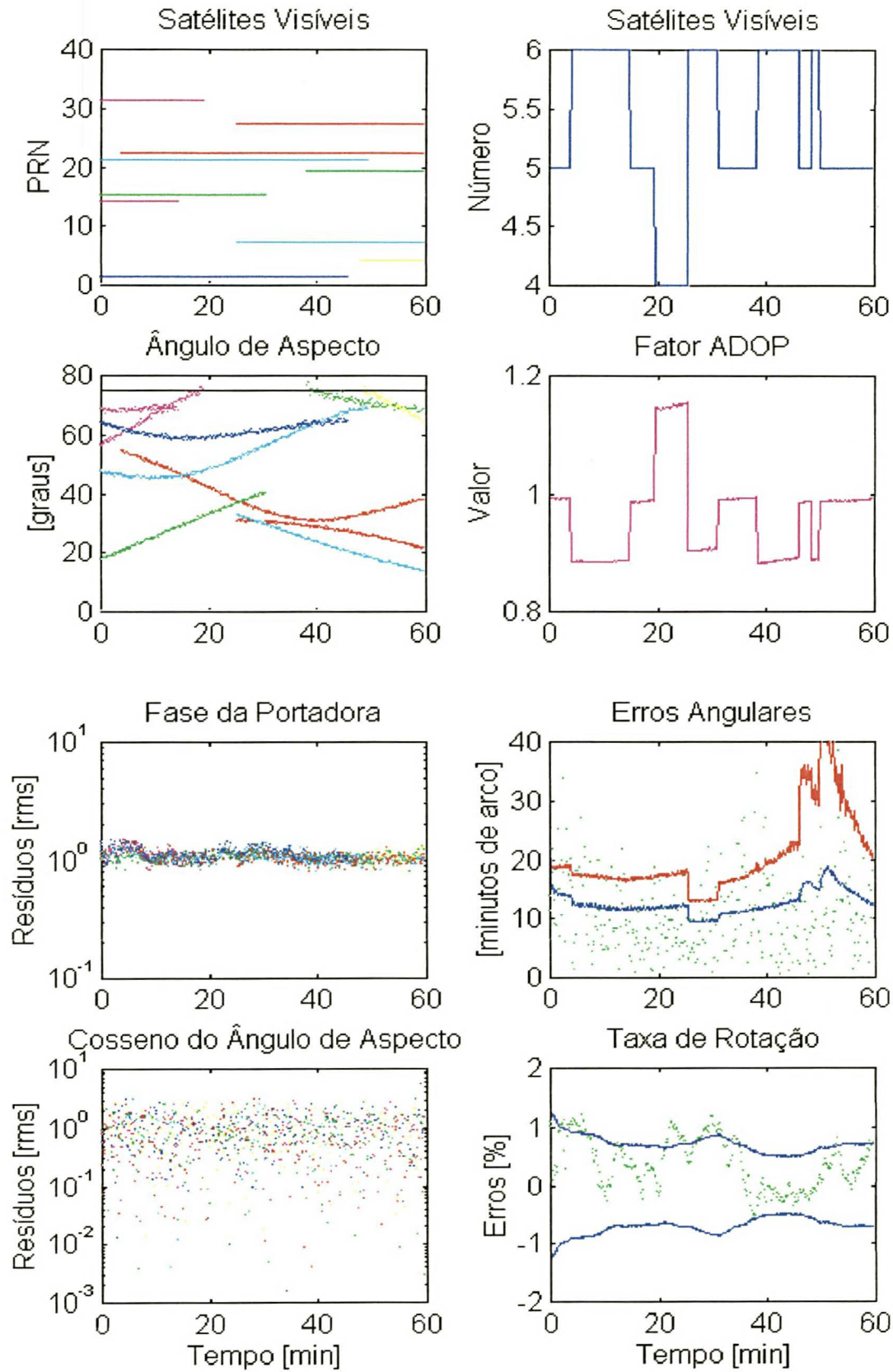
Até a simulação 8, a taxa de amostragem representada pelo período de amostragem situava-se entre  $25Hz$  e  $40Hz$ , o que é perfeitamente válido no caso de simulações. No entanto, até o presente momento, os receptores GPS não conseguem ultrapassar a taxa de amostragem de  $10Hz$ , motivo pelo qual, as simulações seguintes foram realizadas neste patamar, tendo como valor fixo o período de amostragem normalizado  $\tau = 0,3$  para que o procedimento não sentisse os efeitos da proximidade do valor limite. Com isso, o comprimento da linha de base foi diminuído para  $30cm$  e a taxa de rotação resultou em  $19,97rpm$ , calculada pela Equação (5.21).

A simulação apresenta um número satisfatório de satélites GPS visíveis durante todo o tempo de simulação e o fator ADOP mostra a formação de má geometria entre  $20min$  e  $25min$  aproximadamente, causada pela perda de visibilidade de dois satélites e a entrada na faixa de visibilidade de outros dois satélites GPS, de acordo com a Figura (6.9).

Esta variação provoca um aumento no erro de estimativa da taxa de rotação no intervalo. Os resíduos da fase da portadora e do cosseno do ângulo de aspecto, no entanto, estão dentro da faixa de normalização, em sua maioria.

No que diz respeito aos erros angulares, nota-se um aumento para  $\sim 11'$  no início da simulação e para  $\sim 13'$  no final. Isto acontece pelo fato de que, quando o período de amostragem situa-se em em torno dos  $0,025s$  o satélite usuário pode ser considerado parado durante o intervalo de aquisição. Tal consideração não é válida quando o período de amostragem sobe para  $0,1s$ . Neste período o satélite usuário sofre um significativo deslocamento, provocando o aumento nos erros angulares.

Figura 6.9: Simulação 9 - problema restrito.



### 6.1.10 Simulação 10 - problema geral

Parâmetros de entrada.

Comprimento da linha de base	$b = 30cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,1s$
Taxa de rotação	$\omega = 19,97rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,3$
Tempo de simulação	$T = 60min$

A mesma configuração de parâmetros de entrada é considerada na simulação 10. Mas, nesta simulação, pela primeira vez, a atitude aleatória inicial colocou o satélite usuário numa posição particular onde, por volta dos  $33min$  de simulação aproximadamente, o número de satélites visíveis caiu para 2 e em seguida para 1 [Figura (6.10)].

Por um pequeno lapso de tempo, não se apresentaram satélites visíveis. A recuperação da visibilidade com pelo menos 3 satélites, ocorreu por volta dos  $55min$  de simulação, quando os erros percentuais da taxa de rotação voltaram a convergir satisfatoriamente. No intervalo de eclipse, isto é, com menos de 3 satélites visíveis, o processamento continuou a propagar as órbitas considerando como valor de entrada a covariância inicial do eixo de rotação, dos  $33min$  até os  $55min$  aproximadamente. Neste intervalo, a atitude não é calculada. Na ausência de satélites GPS suficientes, o filtro de Kalman propaga a última estimativa feita antes do problema ocorrer.

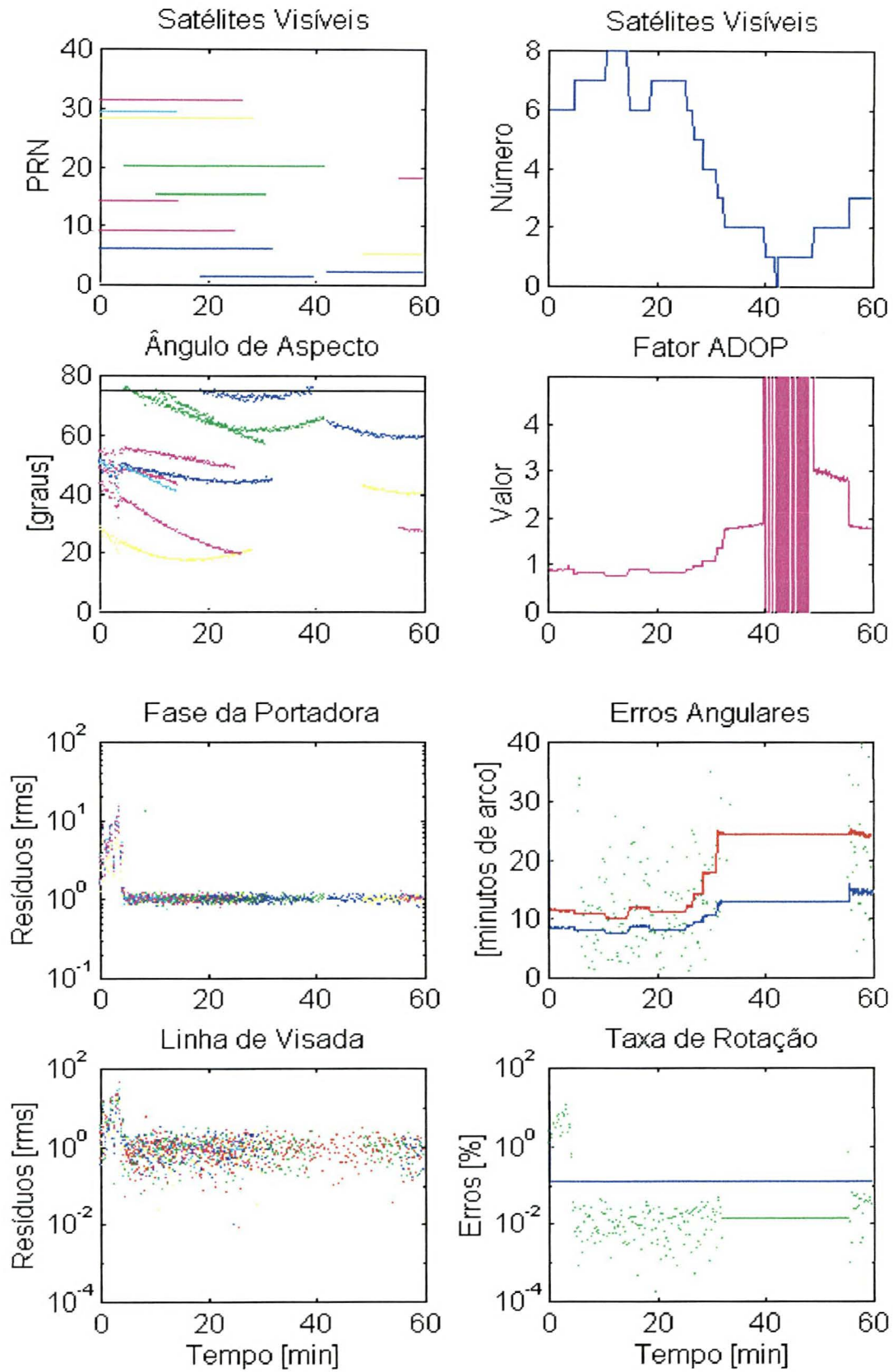
Também neste intervalo de tempo, como seria de se esperar, o fator ADOP apresenta uma geometria desfavorável enquanto 2 satélites permanecem visíveis e não é calculada para menos de dois satélites.

Os demais gráficos, convergiram após  $5min$  para suas faixas de normalização e o gráfico dos ângulos de aspecto mostra uma pequena incerteza nestes instantes.

Esta simulação, em especial, mostra a capacidade de recuperação do procedimento após o período de perda da condição mínima de visibilidade com satélites GPS, confirmando o procedimento geral como mais robusto que o restrito ( $\sim 9'$ ).



Figura 6.10: Simulação 10 - problema geral.



### 6.1.11 Simulação 11 - problema restrito

Parâmetros de entrada.

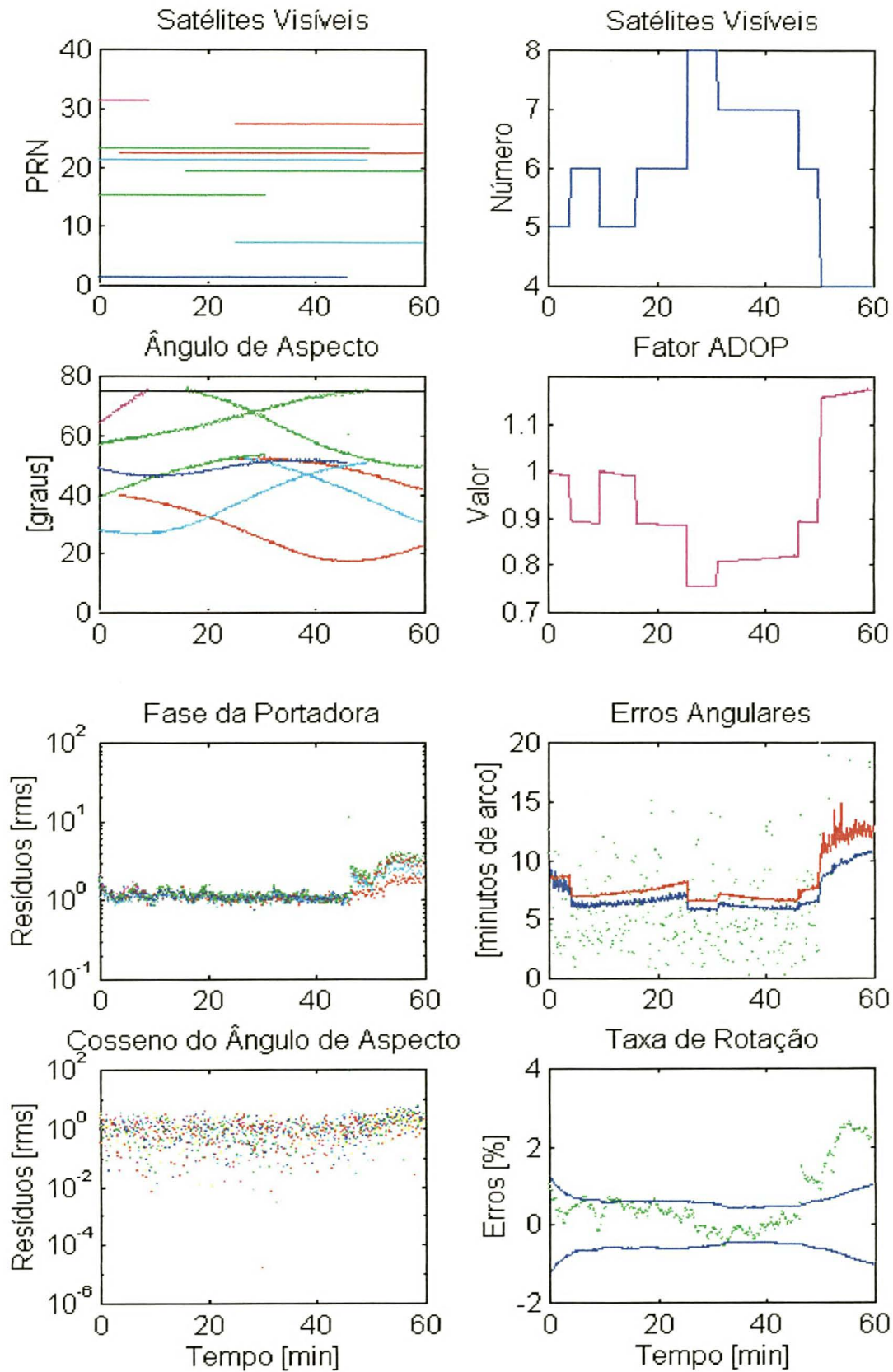
Comprimento da linha de base	$b = 60cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,1s$
Taxa de rotação	$\omega = 9,9rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,3$
Tempo de simulação	$T = 60min$

Novamente, com o objetivo de realizar as simulações em períodos de amostragem de  $0,1s$ , a simulação 11 foi feita com um comprimento da linha de base de  $60cm$  e um período de amostragem normalizado de  $0,3$ . O valor da taxa de rotação calculado pela Equação (5.21) resultou  $9,9rpm$ . Este valor ainda é factível, como se pode ver no caso do micro-satélite científico brasileiro SACI, a ser lançado até o fim de 1998, com  $\omega = 6rpm$ .

O número de satélites visíveis variou de 8 a 4 e o valor do fator ADOP teve um ligeiro aumento, provocado pela geometria desfavorável nos últimos  $10min$  [Figura (6.11)]. Esta variação do fator ADOP e possivelmente a saída de visibilidade de algum satélite que garantia a boa observabilidade fez com que a taxa de rotação deixasse de ser bem estimada. Os erros percentuais da taxa de rotação divergem neste intervalo, afetando os resíduos da fase da portadora e do cosseno do ângulo de aspecto, bem como a precisão dos erros angulares que atingem os valores de  $\sim 9'$  no início da simulação, caem para  $\sim 6'$  dos  $10min$  aos  $50min$  e sobem para  $\sim 11'$  nos instantes finais da simulação.



Figura 6.11: Simulação 11 - problema restrito.



### 6.1.12 Simulação 12 - problema geral

Parâmetros de entrada.

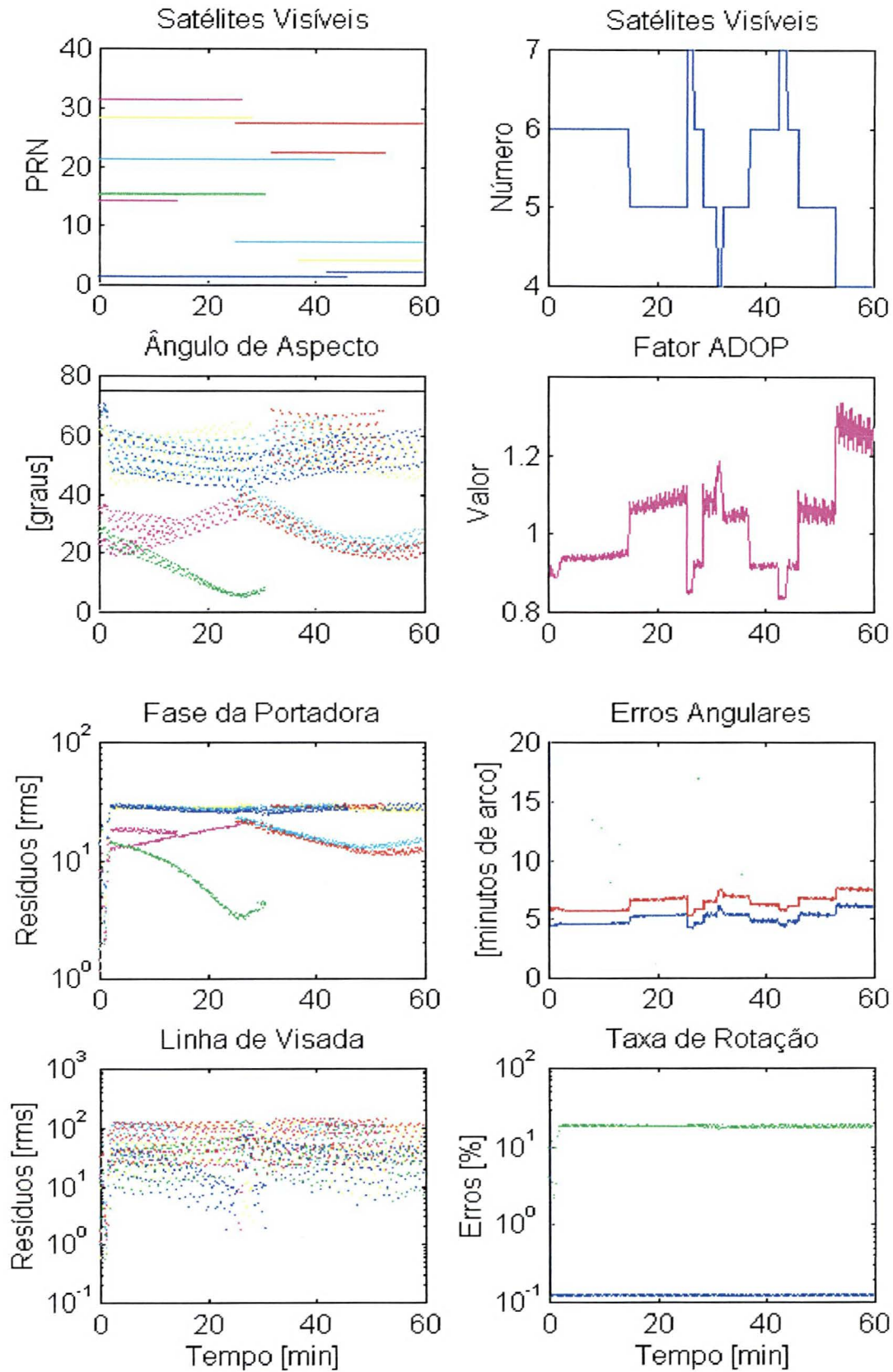
Comprimento da linha de base	$b = 60cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,1s$
Taxa de rotação	$\omega = 9,9rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,3$
Tempo de simulação	$T = 60min$

Na determinação para o problema geral, com os mesmos parâmetros de entrada da simulação 11 não houve convergência da taxa de rotação. Em consequência disso ocorreram incertezas significativas nos ângulos de aspecto, os resíduos da fase da portadora e da linha de visada não se distribuíram na faixa de normalização e a precisão dos erros angulares não se apresentou compatível com o desejado.

Este foi o único caso em que o procedimento geral teve um desempenho inferior ao do procedimento restrito. Isto pode ter sido acarretado por uma atitude inicial menos favorável ou por um valor inadequado de  $q_\omega$  para este caso.

Note-se que, na maior parte do período de simulação o valor do fator ADOP está um pouco acima da unidade, mostrando uma geometria não muito favorável. Esta situação normalmente é criada pela geração aleatória da atitude inicial.

Figura 6.12: Simulação 12 - problema geral.



### 6.1.13 Simulação 13 - problema restrito

Parâmetros de entrada.

Comprimento da linha de base	$b = 60cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,1s$
Taxa de rotação	$\omega = 9,9rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,3$
Tempo de simulação	$T = 12h$

Todas as simulações anteriores foram realizadas durante um período de  $60min$ . As simulações seguintes adotam um período de  $12h$  que é o período de uma órbita dos satélites da constelação GPS. Neste primeiro caso, determinação para o problema restrito, a atitude aleatória inicial foi favorável, não acontecendo nenhum instante com número de satélites visíveis inferior a 3, [Figura (6.13)].

No entanto, o fator ADOP alterna valores acima da unidade com valores iguais a unidade e abaixo dela. Ocorreram instabilidades entre  $2h30min$ ,  $5h-6h$  e  $6h30min-7h$  devido a estimativa da taxa de rotação que divergiu por cerca de duas horas nesta simulação.

Os resíduos da fase da portadora e do cosseno do ângulo de aspecto apresentam comportamento semelhante nestes intervalos. Apesar das divergências, os erros angulares mesmo assim têm precisão dentro da faixa aceitável ( $\sim 7'$ ) e comparável à dos sensores tradicionais em uso, durante todo o período de simulação.

Figura 6.13: Simulação 13 - problema restrito.

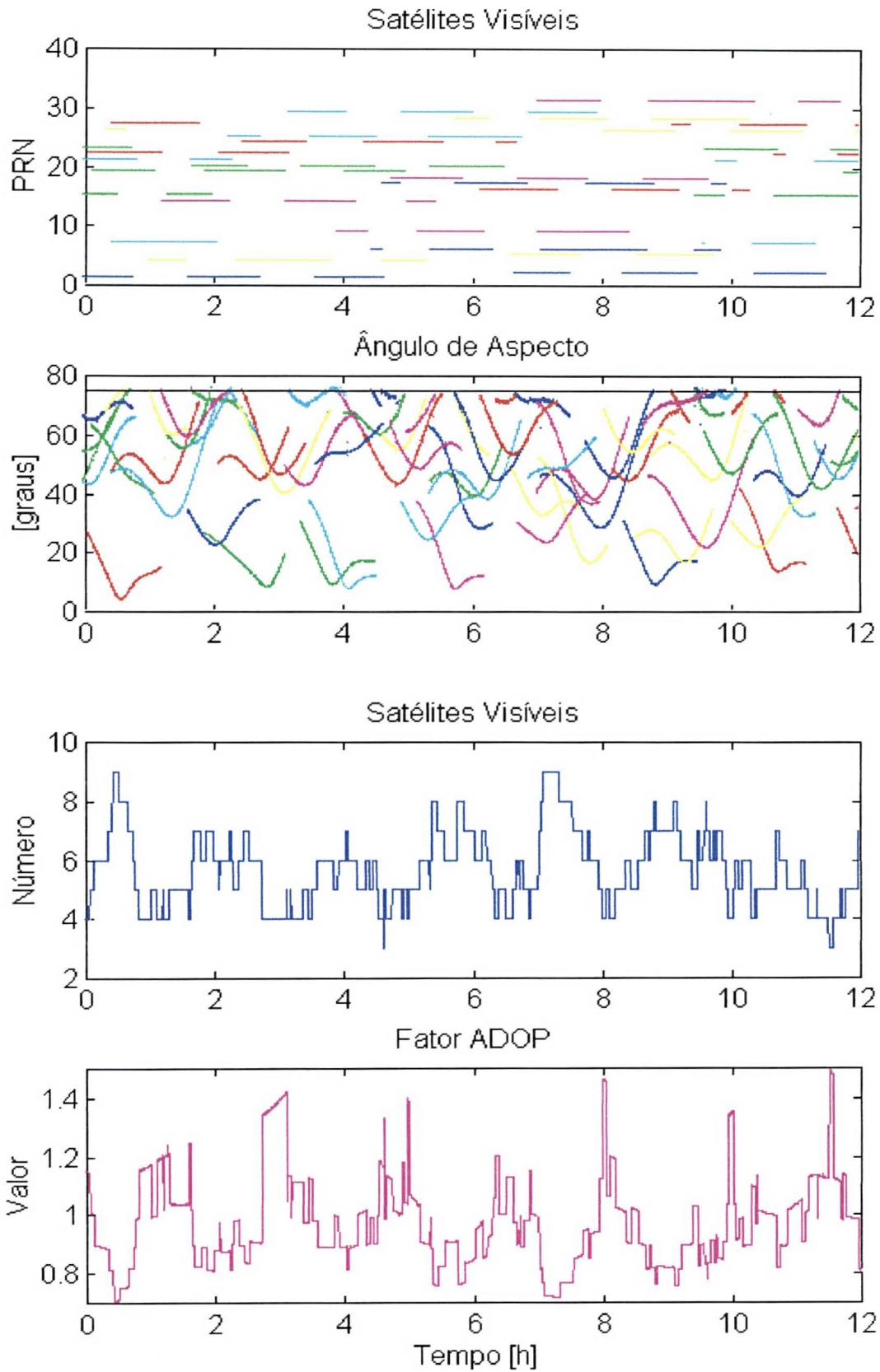
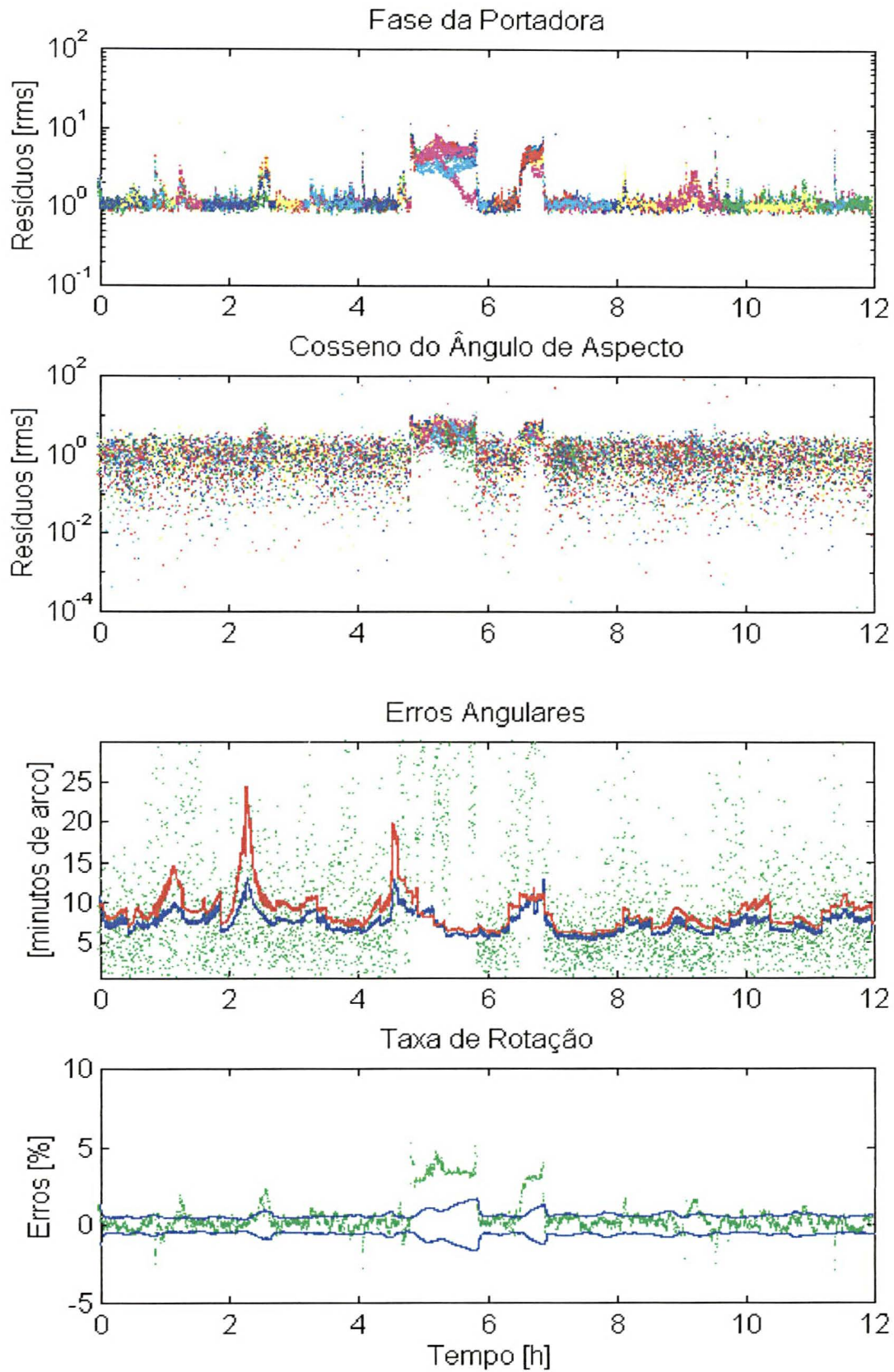


Figura 6.14: Simulação 13 - problema restrito.





### 6.1.14 Simulação 14 - problema geral

Parâmetros de entrada.

Comprimento da linha de base	$b = 60cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,1s$
Taxa de rotação	$\omega = 9,9rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,3$
Tempo de simulação	$T = 12h$

A determinação da atitude para o problema geral, pelo período de 12h voltou a apresentar intervalos com menos de 3 satélites GPS visíveis [Figura (6.17)]. O gráfico do fator ADOP mostra este estado de forma clara. Nestas ocasiões, tomou-se novamente, o valor da covariância inicial do eixo de rotação e a propagação das órbitas continuou sendo processada. O fator ADOP é calculado enquanto pelo menos 2 satélites GPS estão visíveis e não é calculado nos intervalos com menos de 2 satélites.

Quando da entrada de novos satélites GPS na faixa de visibilidade, os valores dos erros percentuais da taxa de rotação voltaram a convergir. Os resíduos da fase da portadora e da linha de visada convergiram para a faixa de normalização.

Também neste caso de simulação, os erros angulares têm precisão um pouco melhor ( $\sim 4'$ ) em relação à simulação para o problema restrito ( $\sim 7'$ ) e são compatíveis com os erros dos sensores tradicionais.

Embora as diferenças na precisão entre o método restrito e o método geral sejam pequenas, o efeito importante a se considerar é a maior precisão no cálculo da taxa de rotação e, conseqüentemente, a maior estabilidade do processo como um todo. Note-se que, todas as vezes em que ocorreram problemas de convergência com a taxa de rotação, a estimativa da atitude foi drasticamente afetada. Por esta razão, o método geral se configura como o mais vantajoso.

Figura 6.15: Simulação 14 - problema geral.

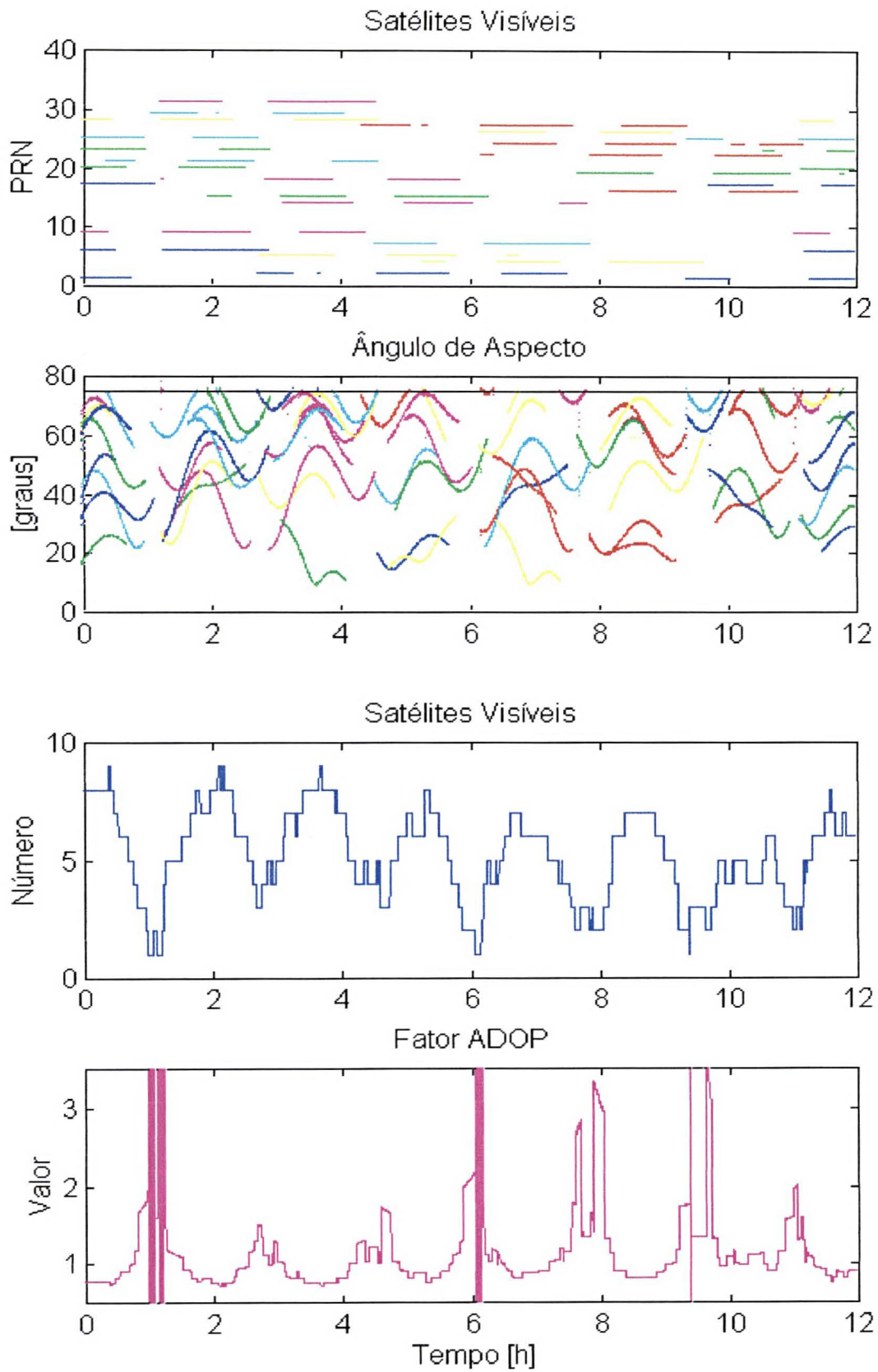
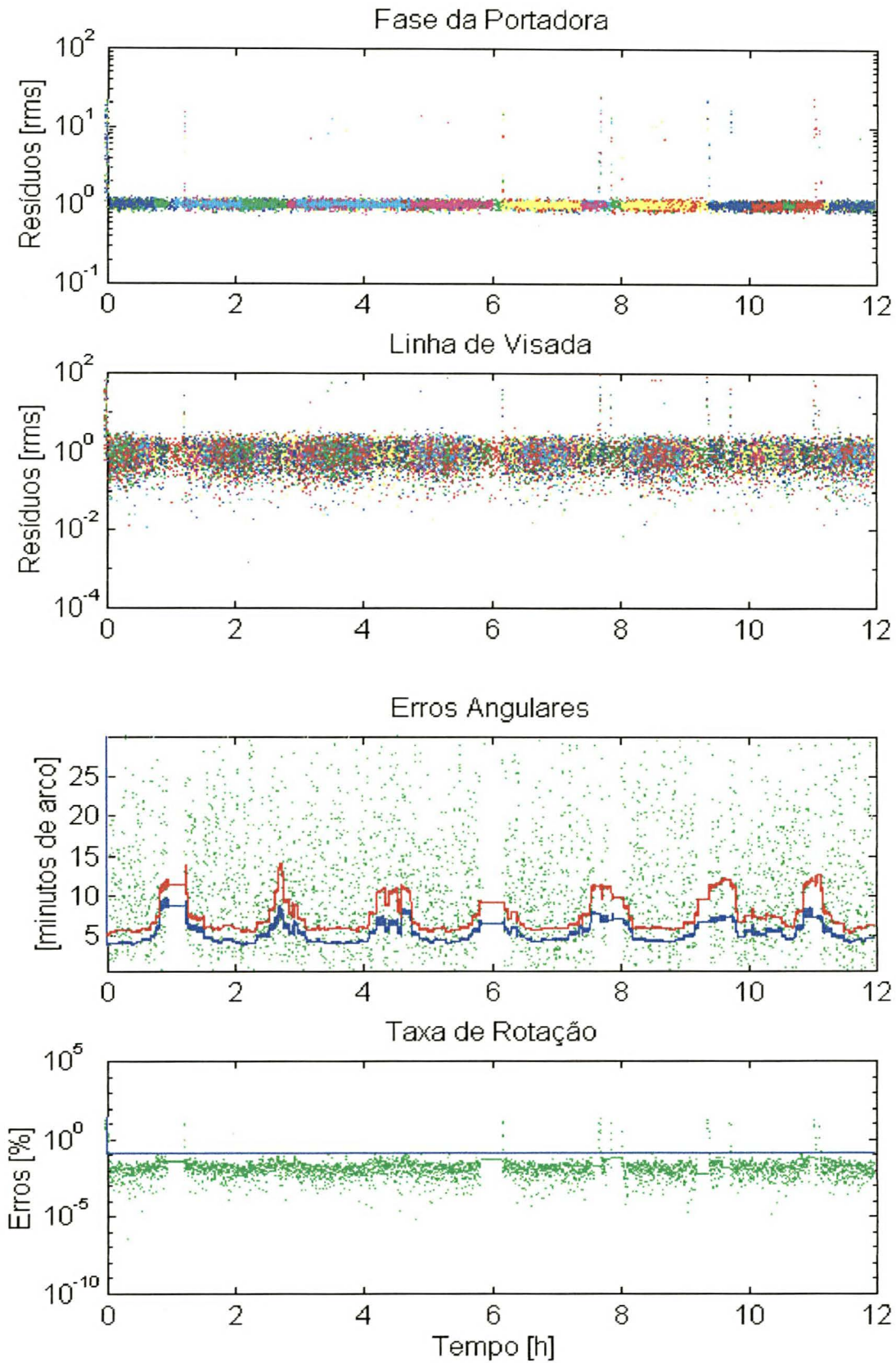




Figura 6.16: Simulação 14 - problema geral.



A Tabela (6.1) sumariza os resultados das 14 simulações digitais apresentadas nesta seção, para uma melhor visualização.

**Tabela 6.1:** Tabela dos resultados das simulações digitais.

	$b$	$\Delta t$	$\omega$	$\tau$	$T$	PAED	$rms$
simulação 1 - restrito	60cm	0,025s	28,28rpm	0,23	60min	7'	10'
simulação 2 - geral	60cm	0,025s	28,28rpm	0,23	60min	4'	9'
simulação 3 - restrito	60cm	0,035s	28,28rpm	0,32	60min	6'	16'
simulação 4 - geral	60cm	0,035s	28,28rpm	0,32	60min	4'	11'
simulação 5 - restrito	60cm	0,04s	28,28rpm	0,37	60min	6'	1°
simulação 6 - geral	60cm	0,04s	28,28rpm	0,37	60min	5'	26'
simulação 7 - restrito	60cm	0,025s	48,99rpm	0,4	60min	6'	4°
simulação 8 - geral	60cm	0,025s	48,99rpm	0,4	60min	4'	42'
simulação 9 - restrito	30cm	0,1s	19,97rpm	0,3	60min	11'	11'
simulação 10 - geral	30cm	0,1s	19,97rpm	0,3	60min	9'	12'
simulação 11 - restrito	60cm	0,1s	9,9rpm	0,3	60min	6'	17'
simulação 12 - geral	60cm	0,1s	9,9rpm	0,3	60min	4'	2°33'
simulação 13 - restrito	60cm	0,1s	9,9rpm	0,3	12h	7'	17'
simulação 14 - geral	60cm	0,1s	9,9rpm	0,3	12h	4'	10'

PAED = precisão angular média da estimativa dinâmica (filtro de Kalman).

Na Tabela (6.1) são apresentados todas as precisões angulares médias obtidas através da estimativa dinâmica bem como os erros médios quadráticos dos erros angulares calculados. Nas simulações 10 e 14 foram eliminados os intervalos onde o número de satélites visíveis foi menor que 3.

Em todas as simulações apresentadas e cujos resultados foram resumidos pela Tabela (6.1), o tamanho da amostra de curto período foi adotado como  $n = 100$ . Na seqüência, são apresentadas quatro simulações digitais, duas com  $n = 20$  e duas com  $n = 200$ . Tais simulações têm o objetivo de confirmar o tamanho da amostra de curto período adotado como padrão como um tamanho suficiente e adequado.

### 6.1.15 Simulação adicional 1 - problema restrito

Parâmetros de entrada.

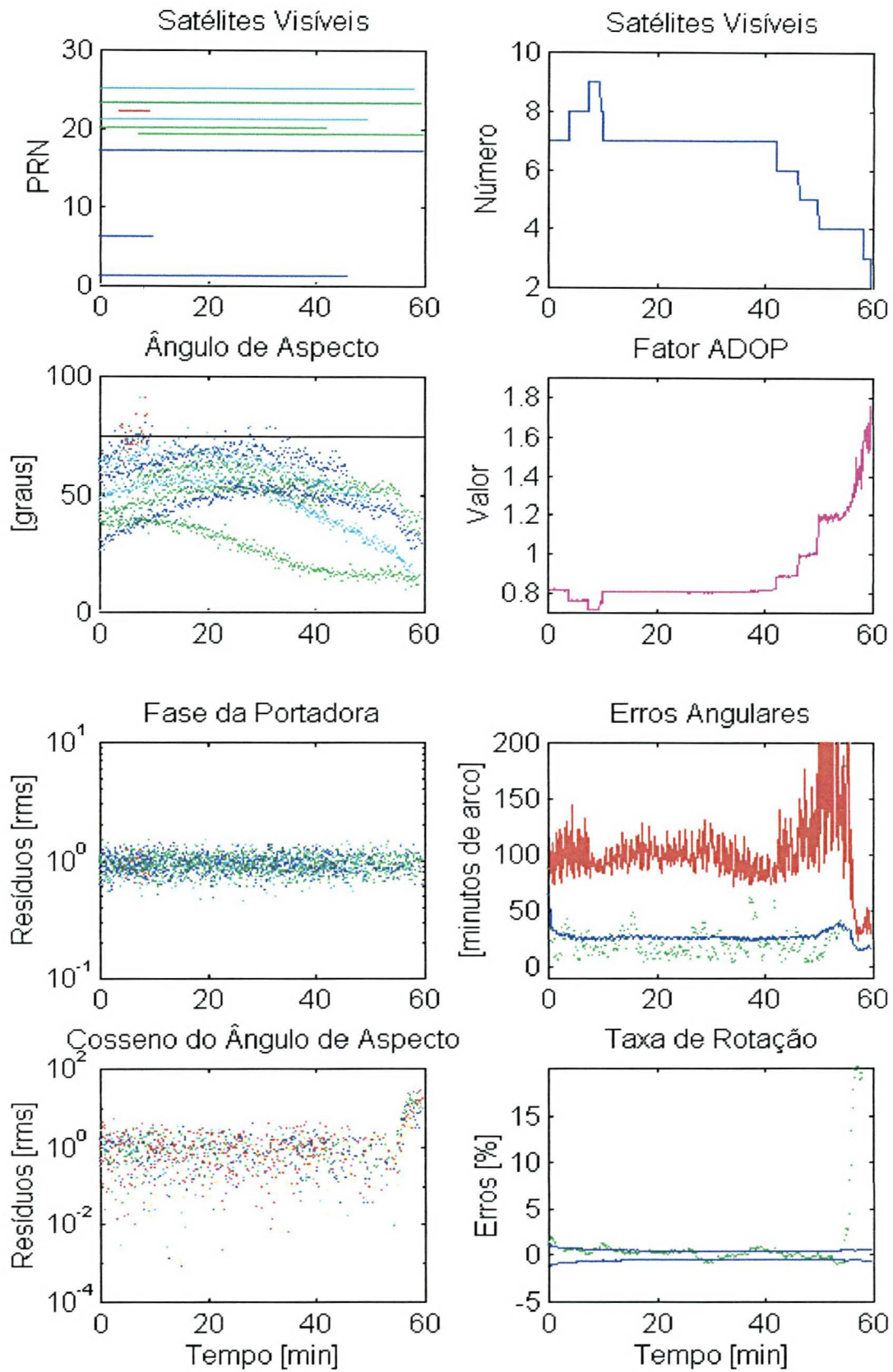
Comprimento da linha de base	$b = 60cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,025s$
Taxa de rotação	$\omega = 48,99rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,4$
Tempo de simulação	$T = 60min$
Tamanho da amostra de curto período	$n = 20$

Esta simulação digital [Figura (6.17)] com o tamanho da amostra de curto período fixado em  $n = 20$  mostra o gráfico dos ângulos de aspecto apresentando incertezas acentuadas em todos os satélites visíveis. O valor do fator ADOP fica a maior parte do tempo de simulação abaixo da unidade, e esse valor só é ultrapassado nos 10 minutos finais da simulação.

Os gráficos da fase da portadora e do cosseno do ângulo de aspecto apresentam resultados dentro da faixa de normalização. O gráfico dos erros percentuais da taxa de rotação apresenta convergência quase total, divergindo apenas nos 5 minutos finais da simulação.

O maior efeito da mudança no tamanho da amostra de curto período pode ser verificado no gráfico dos erros angulares, onde a precisão diminuiu sensivelmente, tanto para o caso da estimativa estática (linha vermelha) quanto para o caso da estimativa dinâmica (linha azul) ( $PAED = 26'$ ) e  $rms = 10^\circ$ . Este fato, comparado às simulações anteriores, onde  $n = 100$ , demonstra que o tamanho da amostra de curto período afeta principalmente a incerteza nos ângulos de aspecto e a precisão nos erros angulares.

Figura 6.17: Simulação adicional 1 - problema restrito.



### 6.1.16 Simulação adicional 2 - problema geral

Parâmetros de entrada.

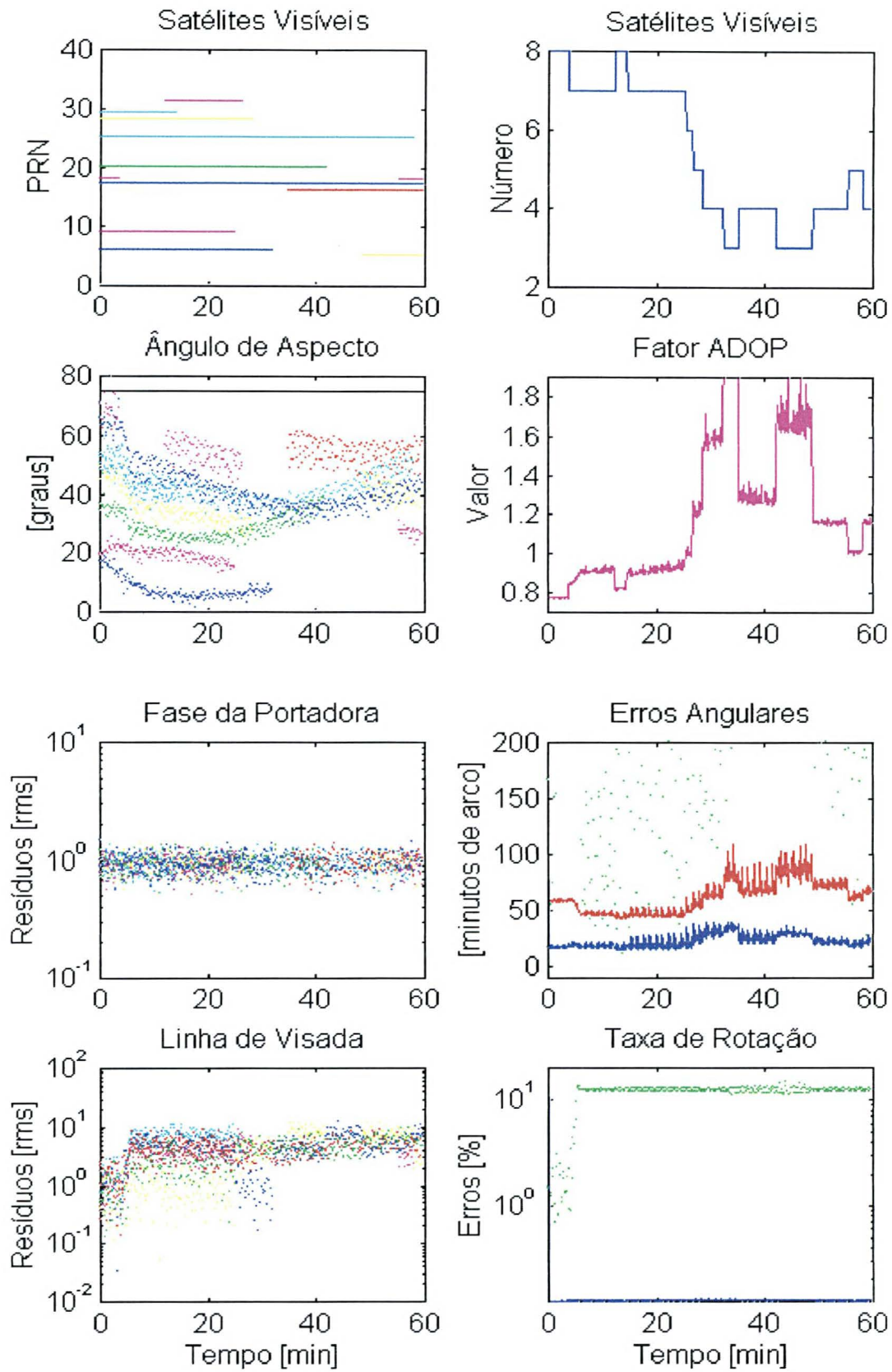
Comprimento da linha de base	$b = 60cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,025s$
Taxa de rotação	$\omega = 48,99rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,4$
Tempo de simulação	$T = 60min$
Tamanho da amostra de curto período	$n = 20$

Novamente, a Figura (6.18) apresenta as características básicas da simulação digital adicional 1. O gráfico dos ângulos de aspecto apresentando acentuada incerteza e o gráfico do valor do fator ADOP fica abaixo da unidade (ou igual), apenas até aproximadamente 25 minutos da simulação. Após esse tempo o gráfico apresenta geometria não favorável para os satélites GPS visíveis.

A precisão dos erros angulares diminuiu sensivelmente, também nesse caso. No entanto, nesta simulação observa-se que os erros percentuais da taxa de rotação não convergiram e conseqüentemente os resultados não foram bons, o  $PAED$  ficou em  $24'$  e o  $rms$  em  $7^\circ$ .

Mesmo nesse caso, verifica-se que o tamanho da amostra de curto período, tomado como  $n = 20$  não é uma escolha adequada.

Figura 6.18: Simulação adicional 2 - problema geral.



### 6.1.17 Simulação adicional 3 - problema restrito

Parâmetros de entrada.

Comprimento da linha de base	$b = 60cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,025s$
Taxa de rotação	$\omega = 48,99rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,4$
Tempo de simulação	$T = 60min$
Tamanho da amostra de curto período	$n = 200$

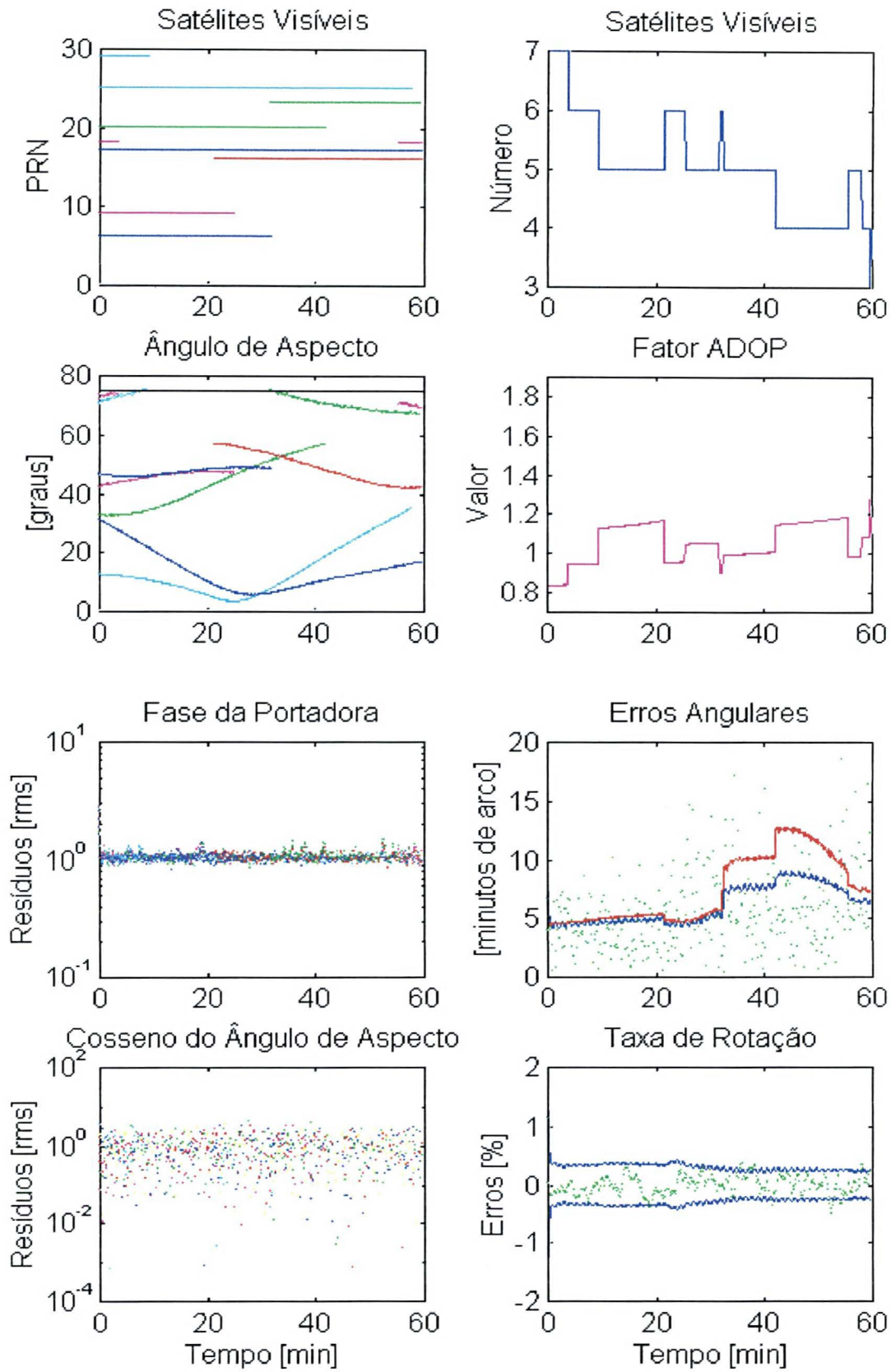
A Figura (6.19) mostra com propriedade que a simulação digital adicional efetuada com o tamanho da amostra de curto período igual a 200, melhora consideravelmente a resposta de definição em todos os gráficos.

O gráfico dos ângulos de aspecto apresenta a menor incerteza entre todos os gráficos de ângulos de aspecto mostrados nas simulações anteriores. O gráfico do valor do fator ADOP apresenta uma geometria muito favorável, com valores abaixo da unidade ou igual a ela, em quase todo o período de simulação.

Os gráficos dos resíduos da fase da portadora e dos cossenos dos ângulos de aspecto, convergem para faixa de normalização. Os erros percentuais da taxa de rotação convergem todo o tempo de simulação e os erros angulares confirmam as características das simulações com  $n = 100$  apresentando precisão compatível com os resultados anteriores  $PAED = 6'$  e uma melhora, no  $rms = 7'$ , que é o erro médio quadrático dos erros calculados (pontos verdes).



Figura 6.19: Simulação adicional 3 - problema restrito.





### 6.1.18 Simulação adicional 4 - problema geral

Parâmetros de entrada.

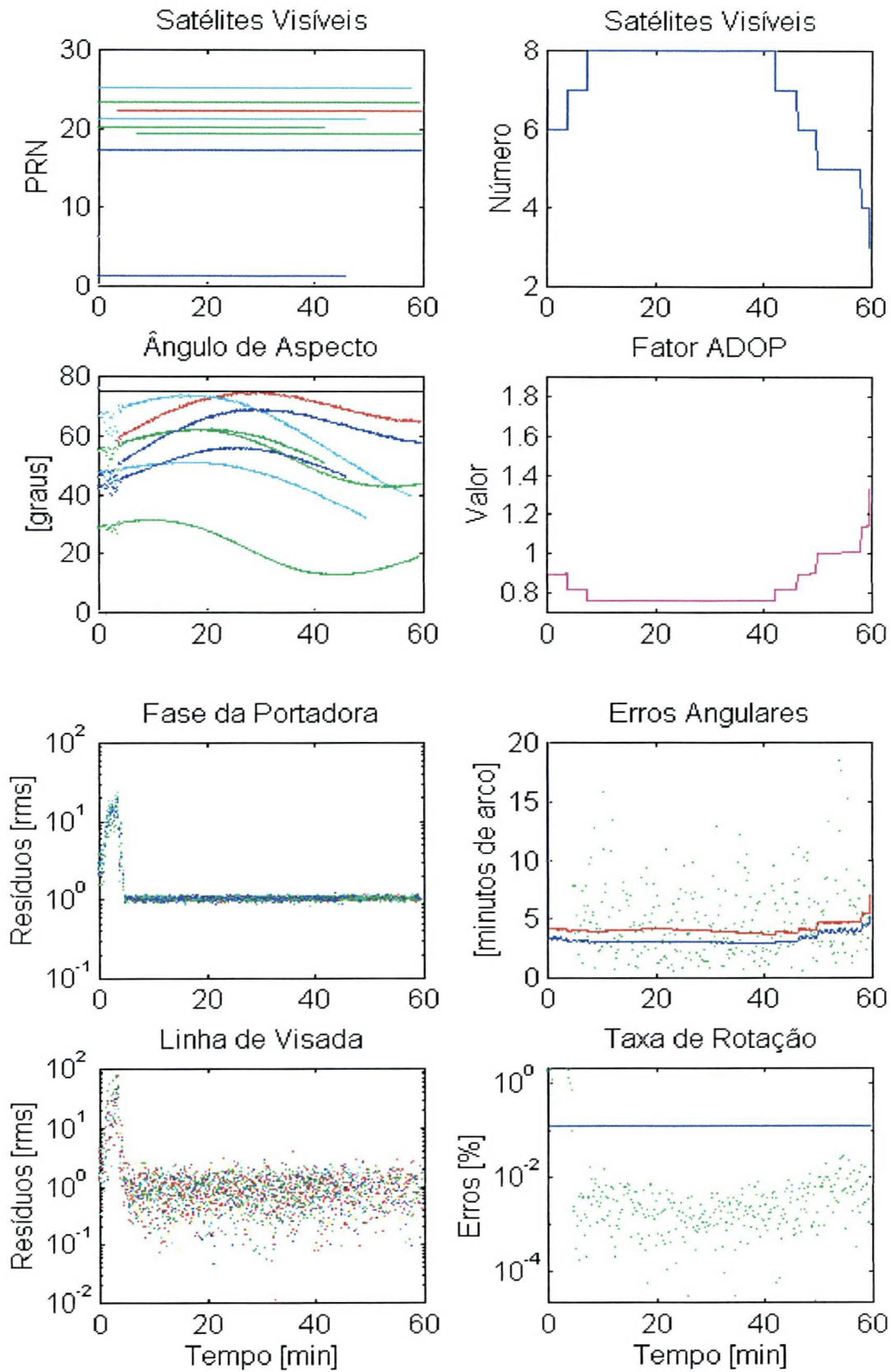
Comprimento da linha de base	$b = 60cm$
Período de amostragem	$\Delta t = 0,025s$
Taxa de rotação	$\omega = 48,99rpm$
Período de amostragem normalizado	$\tau = 0,4$
Tempo de simulação	$T = 60min$
Tamanho da amostra de curto período	$n = 200$

Finalmente, a Figura (6.20) apresenta a simulação digital adicional com o tamanho da amostra de curto período  $n = 200$  para o caso geral, onde a fase também é levada em consideração.

Apesar de uma pequena demora na convergência nos  $5min$  iniciais, o que afeta inicialmente os gráficos dos ângulos de aspecto, das fases das portadoras e das linhas de visada, no restante do intervalo de tempo do processamento o resultado é satisfatório. A precisão dos erros angulares confirma as precisões das demais simulações,  $PAED = 4'$  e uma melhora no  $rms = 5'$ .

Como a precisão dos erros angulares ( $PAED$ ) com  $n = 200$  e  $n = 100$  não difere significativamente, a escolha de  $n = 100$  é suficiente e eficiente para todas as simulações.

Figura 6.20: Simulação adicional 4 - problema geral.



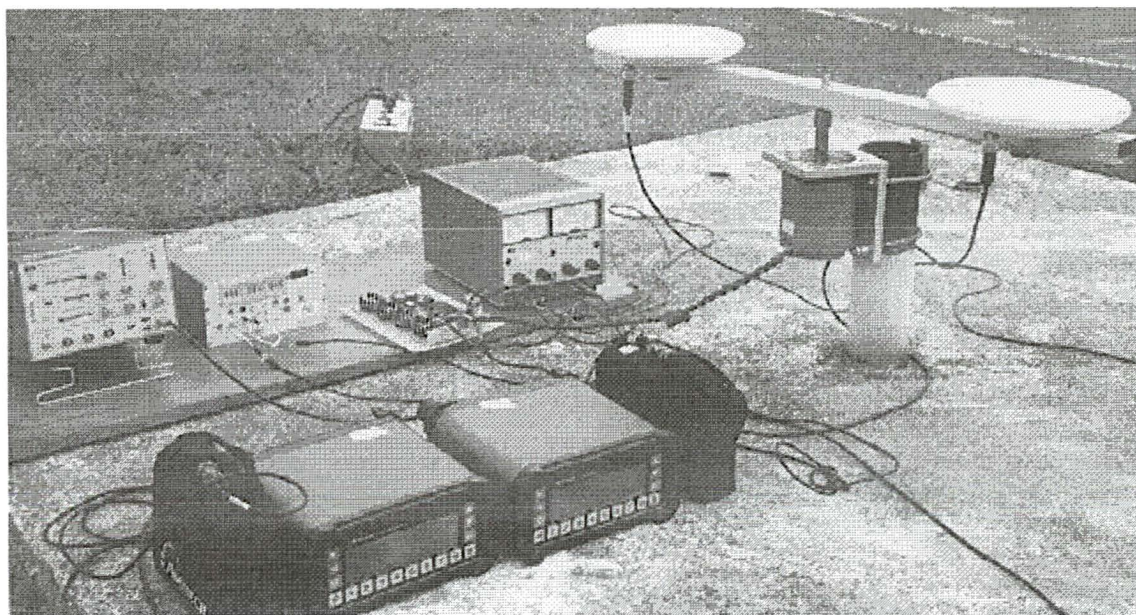
## 6.2 Experimento de determinação de atitude

Tendo-se em vista o convênio de cooperação técnico-científica firmado entre o INPE e a UFPR, descrito no Capítulo 1 e visando a complementação deste trabalho, realizou-se o experimento de levantamento de posição por GPS (Fabri, Lopes & Ferreira, 1996)<sup>[9]</sup>. Este experimento foi levado a cabo na semana de 23 a 26 de setembro de 1996, nas dependências do INPE, com mecânica e eletrônica a cargo deste e com receptores e antenas da UFPR, com o principal objetivo de obter informações experimentais sobre o comportamento da fase da portadora do sinal GPS. Tal conhecimento complementa estudos teóricos acessíveis na literatura especializada (Leick, 1994; Seeber, 1993, entre outros) e é essencial para o correto processamento dos sinais utilizados na determinação de atitude por GPS

O experimento foi planejado de modo a averiguar especificamente a possibilidade de se detectar o movimento de rotação de uma linha de base entre duas antenas a partir da fase da portadora em cada antena.

Com esta finalidade, duas antenas conectadas a seus respectivos receptores GPS foram instaladas próximo às extremidades de uma barra tubular rotacionada por um motor de passo com eixo na vertical local, conforme a Figura (6.21).

**Figura 6.21:** Equipamentos usados no experimento.



Idealmente, as antenas deveriam ter sido conectadas a um único receptor para que os erros devidos a instabilidade nos osciladores se cancelassem, como supostamente

ocorreria em uma aplicação espacial. O receptor disponível porém não oferecia este recurso. A alternativa seria alimentar um dos receptores com a frequência fundamental do outro, possivelmente reproduzindo a situação anterior. Embora o modelo do receptor disponível em princípio ofereça tal recurso, aquele exemplar em particular não é habilitado a este fim. Por esta razão, as antenas tiveram que ser conectadas a diferentes receptores, cada um com seu próprio oscilador [Figura (6.21)]. Os equipamentos usados no experimento são descritos a seguir:

- Dois receptores GPS Ashtech Z-XII3, versão 1G00;
- Duas antenas Geodetic L1/L2 P, com incerteza do centro de fase de aproximadamente  $10mm$  (Wübbena, 1996)<sup>[46]</sup>;
- Motor de passo natural de  $1,8^\circ$ ;
- Eletrônica do motor de passo:
  - hp 6227B Dual DC Power Supply, (0 – 25V) (0 – 2A) Hewlett Packard;
  - hp 8012B Pulse Generator, (100/120V) (1A T 220/240V) (500mAT) (48/440Hz) (80V A) Max;
  - placa de acionamento: projeto do Laboratório de eletrônica do DMC/INPE;
  - temporizador programável: Grupo Suprimento de Energia (DEA/INPE);
- Micro PC / Notebook Epson ActionNote 500c;
- Barra tubular de alumínio de seção retangular de  $80cm$  de comprimento (linha de base de  $60cm$  entre os centros geométricos das antenas: direção inicial norte).

Dados de código  $P$  foram também armazenados permitindo a determinação do range entre os satélites GPS e o satélite usuário e alguns testes funcionais foram realizados apenas para ajustar devidamente cada equipamento.

Três modos de atuação do motor foram então efetivamente ensaiados: estático (desligado), dinâmico contínuo (continuamente ligado) e dinâmico intermitente (passos automáticos).

O primeiro modo visou verificar a possibilidade de recompor uma diferença de fase constante entre duas antenas numa situação estática bem como avaliar o efeito da

instabilidade dos osciladores e seus resultados são apresentados no relatório técnico *Primeira campanha exploratória UFPR & INPE sobre observações GPS* (Fabri, Lopes & Ferreira, 1996)<sup>[9]</sup>.

O segundo modo introduz o efeito da rotação sobre as medidas. O terceiro modo simula um movimento de rotação com maior precisão que o anterior, visto que o motor de passo utilizado oferece excelente precisão angular entre seus passos, mas não mantém uma velocidade constante com o mesmo nível de precisão. Assim, arbitrando-se um intervalo de tempo regular entre cada ciclo do funcionamento intermitente do motor, torna-se possível reproduzir o movimento circular uniforme mais fielmente do que no caso de rotação contínua.

Uma descrição completa do experimento encontra-se no relatório técnico já citado.

### 6.3 Algoritmo para a dupla diferença de fase

A situação prevista para a determinação de atitude, conforme descrita na seção de simulação, numa situação de aplicação espacial, prevê a recomposição da característica senoidal da fase da portadora com o cálculo da simples diferença de fase. No entanto, na impossibilidade técnica do uso de duas antenas conectadas ao mesmo receptor, a instabilidade entre os osciladores mantém uma característica aleatória na fase. Por esse motivo e, no caso destes experimentos, se fez necessário o cálculo da dupla diferença de fase. Com este procedimento complementar, a característica senoidal da fase da portadora é perfeitamente recomposta. Apresenta-se, então, o algoritmo para o cálculo da atitude a partir da dupla diferença de fase.

O vetor das componentes do vetor linha de visada do  $p$ -ésimo satélite GPS  $w^p$ , no referencial local, é dado por:

$$w^p = \begin{Bmatrix} \sin \theta^p \cos[\omega(t - t_0) - \alpha^p] \\ -\sin \theta^p \sin[\omega(t - t_0) - \alpha^p] \\ \cos \theta^p \end{Bmatrix}, \quad (6.1)$$

onde:  $\theta^p$  e  $\alpha^p$  são o ângulo de aspecto e o azimute da linha de visada do  $p$ -ésimo satélite GPS, respectivamente,  $\omega$  é a taxa de rotação,  $t$  é o tempo e  $t_0$  é o tempo de referência.

A simples diferença de fase em relação as duas antenas é:

$$\phi_{12}^p \equiv \phi_1^p - \phi_2^p$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b}{\lambda_k} \sin \theta^p \cos[\omega(t - t_0) - \alpha^p] \\
&+ \tau_{12}(t) + N^p(t) + v^p(t) ,
\end{aligned} \tag{6.2}$$

onde:  $\phi_i^p$  é a fase da portadora em relação a  $i$ -ésima antena do  $p$ -ésimo satélite GPS,  $b$  é a linha de base entre as antenas,  $\lambda_k$  é o comprimento de onda da fase da portadora  $L_k$  ( $k = 1$  ou  $2$ ),  $\tau_{12}$  é a simples diferença do erro dos relógios entre os receptores,  $N^p$  é parte inteira da ambigüidade e  $v^p$  é um ruído que representa o efeito das perturbações remanescentes, tal como o efeito de multicaminhos.

As observações de dupla diferença de fase são dadas então, por:

$$\begin{aligned}
\phi_{12}^{p,q} &\equiv \phi_{12}^p - \phi_{12}^q \\
&= \frac{b}{\lambda_k} [C^p \cos \omega(t - t_0) + S^p \sin \omega(t - t_0)] \\
&+ N^{p,q}(t) + v^{p,q}(t) , \quad \forall p \neq q ,
\end{aligned} \tag{6.3}$$

onde  $q \in \wp_j$  representa o satélite mestre, escolhido arbitrariamente, enquanto que,  $p \neq q$  são os satélites escravos,  $N^{p,q}$  e  $v^{p,q}$  têm o mesmo significado e  $C^p$  and  $S^p$  são coeficientes dados por:

$$C^p = \sin \theta^p \cos \alpha^p - \sin \theta^q \cos \alpha^q , \tag{6.4}$$

$$S^p = \cos \theta^p \cos \alpha^p - \cos \theta^q \cos \alpha^q . \tag{6.5}$$

Após o pré-processamento de  $\phi_{12}^{p,q}$ , a ambigüidade  $N^{p,q}(t)$  é reduzida à constante  $N_0^{p,q}$ , a qual pode ser estimada pelos coeficientes  $C^p$  e  $S^p$  através do adequado ajustamento, completando assim, o conjunto de dados reduzidos.

### 6.3.1 Cálculo das observações de atitude

O cálculo do conjunto de observações de atitude  $\{\theta^p, \alpha^p, \forall p \in \wp_j\}$  através do conjunto de coeficientes  $\{C^p, S^p, \forall p \neq q, p \in \wp_j\}$  não pode ser realizado diretamente pelo fato de, num primeiro momento, o problema apresentar mais variáveis do que equações. No entanto, a característica invariante do produto escalar fornece um conjunto adicional de informações,

$$\begin{aligned}
\cos \psi^p &\equiv u^p \cdot u^q = w^p \cdot w^q \\
&= \cos \theta^p \cos \theta^q + \sin \theta^p \sin \theta^q \cos(\alpha^p - \alpha^q) ,
\end{aligned} \tag{6.6}$$



onde  $u^p$  é o vetor de coordenadas do vetor linha de visada do  $p$ -ésimo satélite GPS, ( $u^p$ ), no referencial externo, dado pelo cálculo entre a posição dos satélites GPS e a posição do satélite usuário. Adicionando-se o conjunto  $\{\psi^p, \forall p \neq q, p \in \wp_j\}$  ao conjunto de dados de entrada, o problema resulta super determinado.

Desprezando-se os erros de estimação, a amplitude senoidal das observações da dupla diferença de fase, obedece a relação:

$$\begin{aligned} A^{p^2} &\equiv C^{p^2} + S^{p^2}, \\ &= \sin^2 \theta^p + \sin^2 \theta^q - 2 \sin \theta^p \sin \theta^q \cos(\alpha^p - \alpha^q), \end{aligned} \quad (6.7)$$

que, tendo em vista a Equação (6.6) resulta:

$$\begin{aligned} A^{p^2} + 2 \cos \psi^p &= \sin^2 \theta^p + \sin^2 \theta^q + 2 \cos \theta^p \cos \theta^q \\ &= 2 - (\cos \theta^p - \cos \theta^q)^2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Isto posto, das Equações (6.1), (6.4), (6.5) e (6.8), pode-se escrever:

$$w^p(t_0) = w^q(t_0) + \mathcal{M}^p, \quad (6.9)$$

onde,

$$\mathcal{M}^p \equiv \left\{ \begin{array}{c} C^p \\ S^p \\ \sigma^p \{2(1 - \cos \psi^p) - A^{p^2}\}^{1/2} \end{array} \right\}, \quad (6.10)$$

na qual,  $\sigma^p \in \{-1, 1\}$  representa a ambigüidade de sinal da raiz quadrada.

Como  $w^p$  deve ser um vetor unitário, esta condição imposta à Equação (6.9), resulta:

$$\mathcal{M}^{p^T} w^q(t_0) = -(1 - \cos \psi^p), \quad \forall p \neq q, p \in \wp_j. \quad (6.11)$$

Para um dado conjunto  $\{\sigma^p, \forall p \in \wp_j\}$ , o conjunto de equações lineares [Equações (6.11)] pode ser resolvido para  $w^q(t_0)$  por um método de mínimos quadrados. Naturalmente, devido à imprecisões do processo como um todo, a solução por mínimos quadrados sem vínculo  $w^q(t_0)$  pode não resultar num vetor unitário. Este obstáculo é resolvido reescrevendo a Equação (6.11) como função de  $\theta^q$  e  $\alpha^q$  e linearizando-a em torno da solução sem vínculos. Daí, resulta:

$$\mathcal{M}^{p^T} \mathcal{H} \left\{ \begin{array}{c} \Delta \theta^q \\ \Delta \alpha^q \end{array} \right\} = - \left[ \mathcal{M}^{p^T} w^q(t_0) + (1 - \cos \psi^p) \right], \quad (6.12)$$

com

$$\mathcal{H} \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta^q \cos \alpha^q & -\sin \theta^q \sin \alpha^q \\ \cos \theta^q \sin \alpha^q & \sin \theta^q \cos \alpha^q \\ -\sin \theta^q & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

A solução do conjunto de equações lineares [Equações (6.12)] para  $\Delta\theta^q$  e  $\Delta\alpha^q$  pelo método de mínimos quadrados fornece a correção iterativa para  $\theta^q$  e  $\alpha^q$  e, conseqüentemente, para  $w^q(t_0)$ . Obtida a convergência do algoritmo iterativo, o conjunto de observações de atitude em relação a  $t_0$  pode ser calculado pela Equação (6.9).

O número total de soluções prováveis, devido à ambigüidade de sinal, é  $2^{n-1}$ . A metade dessas soluções corresponde a sinais GPS recebidos incidindo por baixo das antenas e, naturalmente, são rejeitadas. A ambigüidade remanescente é resolvida através do critério empírico seguinte:

$$\min \sum_{p \in \mathcal{P}_j} [|w^p(t_0)| - 1]^2. \quad (6.14)$$

Este algoritmo, incluindo alguns resultados numéricos, foi apresentado no 12<sup>th</sup> *International Symposium on Space Flight Dynamics* (Lopes, Kuga, Fabri & Ferreira, 1997)<sup>[24]</sup>.



## 6.4 Resultados do experimento

Para a descrição dos resultados, foram realizados cinco processamentos, tomando-se os dados de três seções de rastreamento no modo dinâmico contínuo e duas seções no modo dinâmico intermitente. Os parâmetros comuns a todos os experimentos, são:

Coordenadas locais (WGS84)	$\left\{ \begin{array}{l} \text{latitude : } 23^{\circ}12'43''S \\ \text{longitude : } 45^{\circ}51'36''W \\ \text{altitude : } 613m \end{array} \right.$
Data	26/09/96
Eixo de rotação	direção do zênite
Azimute inicial	direção norte
Taxa de amostragem	2Hz
Intervalo de amostragem	100s
Linha de base	60cm
Período de amostragem normalizado p/L1	0,19
Período de amostragem normalizado p/L2	0,15

### 6.4.1 Primeiro experimento no modo dinâmico contínuo

Tempo inicial	11h 46min 29,5s
Satélites localizados (PRN)	2 10 16 18 19 27 31
Satélites válidos	todos
Satélite mestre	PRN#2
Satélites aceitos	todos os satélites válidos
Pontos usados	todos

### 6.4.2 Segundo experimento no modo dinâmico contínuo

Tempo inicial	11h 52min 19s
Satélites localizados (PRN)	2 7 10 16 18 19 27
Satélites válidos	todos
Satélite mestre	PRN#2
Satélites aceitos	todos os satélites válidos
Pontos usados	desconsiderados após 180

### 6.4.3 Terceiro experimento no modo dinâmico contínuo

Tempo inicial	11h 59min 17s
Satélites locados (PRN)	2 7 10 16 18 19 27
Satélites válidos	todos para $L_1$ desconsiderado $PRN\#2$ para $L_2$
Satélite mestre	$PRN\#2$ para $L_1$ e $PRN\#19$ para $L_2$
Satélites aceitos	todos os satélites válidos
Pontos usados	todos

### 6.4.4 Primeiro experimento no modo dinâmico intermitente

Tempo inicial	13h 54min 31s
Passo do motor	3,6°
Satélites locados (PRN)	2 4 7 26 27
Satélites válidos	$PRN\#4$ , 26 e 27 para $L_1$ $PRN\#2$ , 4, 26 e 27 para $L_2$
Satélite mestre	$PRN\#26$
Satélites aceitos	todos os satélites válidos
Pontos usados	todos

Neste experimento, o satélite  $PRN\#4$  não estava presente nos instantes iniciais do rastreamento para a fase  $L_2$ . Por esse motivo, o tempo inicial foi deslocado para 14h 05min 13s e a diferença corrigida no processamento todo.

Da mesma forma, como o rastreamento foi realizado no modo dinâmico intermitente, com o passo especificado acima, algumas características adicionais foram consideradas, a saber:

- o conjunto foi reprocessado para eliminar-se saltos remanescentes;
- o número de dados foi reduzido a 1 (um) ponto para cada 10 (dez) pontos originais ( $i = 4, 14, \dots$ );
- o valor de  $\omega$  foi recalculado, tomando-se por base o semi-período entre o máximo e o mínimo da curva  $L_1$  do satélite  $PRN\#26$  (5º satélite escravo), do segundo

experimento dinâmico intermitente, através da expressão:

$$\omega = \frac{4\pi}{100 \times 23,2}$$

#### 6.4.5 Segundo experimento no modo dinâmico intermitente

Tempo inicial	14h 46min 25,5s
Satélites locados (PRN)	2 4 5 7 9 26 27
Satélites válidos	todos
Satélite mestre	PRN #2
Satélites aceitos	PRN #2 7 9 26 e 27
Pontos usados	todos

Neste experimento, o satélite *PRN #5* não estava presente nos instantes iniciais do rastreamento para a fase  $L_2$ . Por esse motivo, o tempo inicial foi deslocado para 14h 49min 4s e a diferença corrigida no processamento todo.

Da mesma forma que no experimento anterior, neste, as características adicionais consideradas, foram:

- o conjunto foi reprocessado para eliminar-se saltos remanescentes;
- o número de dados foi reduzido a 1 (um) ponto para cada 10 (dez) pontos originais ( $i = 4, 14, \dots$ ) num total de 165 pontos;
- Ocorreu uma falha no rastreamento, na altura do ponto 66 e por essa razão, os pontos anteriores a essa falha foram eliminados. O processamento foi realizado à partir do ponto 67 inclusive, com 99 pontos remanescentes;
- Cálculo de  $\omega$  já relatado anteriormente.

## 6.5 Tabela geral de resultados

Tabela 6.2: Tabela geral de resultados.

Exp. n <sup>o</sup>	$\Delta_{xy}(L_1)$	$\Delta_{xy}(L_2)$	$\Delta_z(L_1, L_2)$	nsv ( $L_1$ )	nsv ( $L_2$ )
dc 1	2°10'	1°15'	2'	7	7
dc 2	1°04'	10'	1'	7	7
dc 3	22'	1°57'	30'	7	6
di 1	4°06'	8°30'	6°12'	3	4
di 2	17'	3°48'	25'	5	5

dc = dinâmico contínuo;

di = dinâmico intermitente

nsv = número de satélites válidos;

$\Delta_{xy}(L_i)$  = erro angular total no plano  $xy$  a partir de dados da portadora  $L_i$ ;

$\Delta_z(L_1, L_2)$  = erro angular relativo ao redor do eixo  $z$  a partir de dados das portadoras  $L_1$  e

$L_2$ .

Não foi possível sincronizar adequadamente o processo de armazenamento dos sinais recebidos como azimute da barra girante. Por esta razão, não pode ser obtido um valor confiável para o erro absoluto em torno do eixo  $z$ . Ao invés disso, a Tabela (6.1) apresenta o erro relativo entre as duas soluções ( $L_1$  e  $L_2$ ). Como na ausência de erros elas seriam iguais, a discrepância dá uma idéia da magnitude do erro real.

Acrescente-se ainda que, o principal objetivo do experimento em solo foi confirmar a possibilidade da recomposição da característica senoidal da fase da portadora e não a obtenção de alta precisão nos resultados. Estes resultados provavelmente podem ser melhorados em futuras aplicações e/ou em repetições mais elaboradas do experimento.

## Capítulo 7

# Conclusão

Através dos testes realizados pode-se concluir que o procedimento apresentado baseado no uso do GPS para a determinação de atitude de satélites estabilizados por rotação é viável.

O procedimento de determinação de atitude de satélites estabilizados por rotação foi descrito obedecendo uma seqüência que facilita o processamento dos dados obtidos através da simulação digital e daqueles obtidos pelo experimento real em solo onde, uma haste giratória com duas antenas conectadas a dois receptores, simulou um satélite rotacionado.

A simulação digital considerou a constelação GPS e o satélite usuário como tendo órbitas circulares e elementos keplerianos apresentados no Capítulo 6. O processamento, tanto para o problema restrito, onde apenas o vetor de atitude é alvo de interesse, como no problema geral, onde a fase também é relevante, foi realizado em três passos, a saber: A observação de atitude, a determinação estática de atitude e a determinação dinâmica de atitude, a qual, nas simulações, foi inicializada com valores corrompidos por erros aleatórios de 1° em direção e 1% em taxa de rotação.

Os resultados da simulação digital, apresentados também no Capítulo 6, procuram cobrir uma faixa de atuação que represente o processamento para diferentes conjuntos de parâmetros de entrada. Adotando-se inicialmente uma taxa de amostragem entre 25Hz a 40Hz, variou-se a taxa de rotação e o período de amostragem. Na quase totalidade dos testes de simulação, os resultados se mostram promissores, apresentando valores do fator ADOP compatíveis com os apresentados na literatura, em torno da unidade ou abaixo dela. Esta representação é importante na medida em que a geometria instantânea dos satélites GPS visíveis ao satélite usuário afeta a estimativa dos erros tanto quanto a atitude inicial, que é gerada aleatoriamente.

Isto posto, conclue-se que:

- O procedimento é viável;

- É possível recuperar a característica senoidal da fase da portadora à partir da dupla diferença de fase;
- O procedimento é válido para o período de amostragem normalizado ( $\tau \leq 0,4$ );
- A precisão é muito sensível à correta estimação de  $\omega$ ;
- A precisão é compatível com a dos sensores de precisão mediana;
- a precisão é compatível a de outros procedimentos por GPS;
- A aplicação em satélites rotacionados é mais simples que em satélites estabilizados em três eixos por facilitar a resolução da ambigüidade inteira;
- Se as antenas forem ligadas a receptores distintos, é necessário utilizar a dupla diferença de fase para evitar o efeito da instabilidade dos osciladores.

As propostas de continuidade do trabalho incluem as seguintes sugestões:

- Experimentos com equipamentos mais específicos e com algum mecanismo que permita sincronizar o azimute inicial;
- Realização de experimento com dois receptores GPS conectados, para aproveitamento de um único oscilador;
- Investigação dos efeitos de multicaminho;
- Incluir a correlação dos erros presentes na dupla diferença de fase;
- Solução mais elegante para tratar da questão do teste da ambigüidade de sinal no algoritmo da dupla diferença de fase;
- Adaptação do procedimento de pré-processamento para aplicações com  $\tau > 0,4$ ;

## Referências Bibliográficas

(NBR 6023 - ABNT e Código de Catalogação Anglo-Americano)

- [1] ANDRADE José B. de. *NAVSTAR-GPS*. Curitiba : UFPR, 1988.
- [2] BENDER, Peter L.; LARDEN, Douglas R. TOPEX Orbit Determination Using GPS Signals plus a Sidetone ranging system. *NASA-169694*, p. 1253–1258, 1989.
- [3] CHIARADIA, A. P. M. *Aplicação do Sistema GPS para Determinação Preliminar de Órbita de Satélite*. São José dos Campos, 1996. Dissertação (Mestrado), Instituto Tecnológico da Aeronáutica.
- [4] COHEN, C. E.; PERVAN, B. S.; LAWRENCE, D. G.; COBB, H. S.; POWELL, D.; PARKINSON, B. W. Real-Time Flight Testing Using Integrity Beacons for GPS Category III Precision Landing. *NAVIGATION: Journal of The Institute of Navigation*, v. 41, n. 2, p. 145–157, Summer, 1994.
- [5] COHEN, Clark E. Doppler Determination of Satellite Attitude. *United States Patent*, n. 5.070.338, 1991.
- [6] COHEN, Clark E. Attitude Determination, In : SPILKER, B. J. *Global Positioning System: Theory and Applications*. Washington : Penina Axelrad, v. II, p. 519–538, 1996.
- [7] COHEN, Clark E.; PARKINSON, Bradford W. Integer Ambiguity Resolution of the GPS Carrier for Spacecraft Attitude Determination. *AAS (92-015) Advances in the Astronautical Sciences*, v. 78, p. 107–118, 1994.
- [8] ELLIS, J. F.; CRESWELL, G. A. Interferometric Attitude Determination with the Global Positioning System. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, v. 2, n. 6, p. 522–527, Nov.-Dec., 1979.
- [9] FABRI, Sergio M.; LOPES, Roberto V. F.; FERREIRA, Luiz D. D. Primeira Campanha Exploratória UFPR & INPE sobre Observações GPS. *UFPR-CPGCG*, 1996.

- [10] FERGUSON, K.; GOUREVITCH, S.; QIN, X. Attitude Determination with Ashtech 3-D Direction Finding System. *Journal of Surveying Engineering*, v. 119, n. 1, p. 22–39, Feb., 1993.
- [11] FREESLAND, Douglas; REISS, Keith; YOUNG, David; COOPER, Jon; ADAMS, Andrew. GPS Based Attitude Determination: The REX II Flight Experience. 1996.
- [12] GELB, A.; KASPER, J. F.; NASH JR., R. A.; PRICE, C. F.; SHUTERLAND JR., A. A. *Applied Optimal Estimation*. Cambridge, MA : MIT, 1974.
- [13] GOLDSTEIN Herbert. *Mecanica Clasica*. Madrid : Aguilar, 1972.
- [14] HASHIDA, Y.; UNWIN, M. Satellite Attitude from a Single GPS Antenna. *ION*, Salt Lake City, 1993.
- [15] HATCHER, Norman M. A Survey of Attitude Sensors for Spacecraft. *NASA (SP-145)*, 1967.
- [16] HOPE, Alan S. Ground Test of Attitude Determination Using GPS. *AAS (94-105) Advances in the Astronautical Sciences*, v. 87, part 1, p. 67–78, 1994.
- [17] JAZWINSKI A. H. *Stochastic Process and Filtering Theory*. New York : Academic, 1970.
- [18] KAPLAN, Marshall H. *Modern Spacecraft Dynamics & Control*. New York : John Wiley & Sons, 1976.
- [19] LANDAU, Herbert; ORDÓÑEZ, José M. F. A New Algorithm for Attitude Determination with GPS. Institute of Astronomical and Physical Geodesy, University FAF Munich, 1993.
- [20] LEICK, Alfred. *GPS Satellite Surveying*. New York : John Wiley & Sons, 2 ed., 1994.
- [21] LIGHTSEY, E. G.; COHEN, C. E.; FEESS, W. A.; PARKINSON, B. W. Analysis of Spacecraft Attitude Measurements Using Onboard GPS. *AAS (94-063) Advances in the Astronautical Sciences*, v. 86, p. 521–532, 1994.
- [22] LOPES, R. V. F.; KUGA, H. K. Optimal Estimation of Local Orbit from GPS Measurements. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, v. 11, n. 2, p. 186–188, Mar.-Apr., 1988.



- [23] LOPES, R. V. F.; KUGA, H. K. ORBEST - A GPS Navigation Solution Algorithm Without Dop Analysis. *AAS (97-108) Advances in the Astronautical Sciences*. Huntsville, Alabama, USA, v. 95-I, p. 153–166, 1997.
- [24] LOPES, R. V. F.; KUGA, H. K.; FABRI, S. M.; FERREIRA, L. D. D. GPS-based navigation solution and spin-axis attitude determination: numerical results of on the ground experiment. *Proceedings of 12<sup>th</sup> International Symposium on Space Flight Dynamics*, Darmstadt, Germany, p. 221–226, June 2-6, 1997.
- [25] LOPES, Roberto V. F. *Determinação de Atitude de Satélites Artificiais através de Estimadores de Estado*. São José dos Campos, 1982. Dissertação (Mestrado em Ciência Espacial), Instituto Nacional de Ciências Espaciais [INPE-2608-TDL/105].
- [26] LOPES, Roberto V. F.; FABRI, Sergio M.; FERREIRA, Luiz D. D. Attitude Determination for Spin Stabilized Satellites from GPS Interferometry. *AAS (97-165) Advances in the Astronautical Sciences*, Huntsville, Alabama, v. 95-II, p. 783–802 1997.
- [27] LUCAS, R.; MARTIN-NEIRA, M. The GPS Integrated Navigation and Attitude-Determination System (GINAS). *ESA Journal*, v. 14, p. 289–302, 1990.
- [28] LUCAS, R.; MARTÍNEZ, M. A.; NEIRA, M. Attitude Determination with GPS: Experimental Results. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System*, v. 1, p. 148–151, Summer, 1994.
- [29] LU, G.; CANNON, M. E.; LACHAPELLE, G.; KIELLAND, P. Attitude Determination using Dedicated and Nondedicated Multiantenna GPS Sensor. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System*, New York, N. Y., v. 30, n. 4, p. 1053–1059, Oct., 1994.
- [30] MARTIN-NEIRA, M.; LUCAS, R. Dynamic-Free Bias-Free Differential GPS: Application to Landing. *AAS (91-413) Advances in the Astronautical Sciences*, v. 1, p. 249–263, 1988.
- [31] MARTIN-NEIRA, Manuel; LUCAS, Rafael. Using GPS to Determine the Attitude of a Spacecraft. *GPS World*, p. 49–54, March, 1993.
- [32] MELVIN, Peter J.; WARD, Lisa M.; AXELRAD, Penina. The Analysis of GPS

- Attitude Data from a Slowly Rotating, Symmetrical Gravity Gradient Satellite. *AAS (95-133) Advances in Astronautical Sciences*, v. 89, p. 539–557, 1995.
- [33] MITCHELL, Scott; JACKSON, Bill; CUBBEDGE, Skip; HIGBEE, Terry. Navigation Solution Accuracy from a Spaceborne GPS Receiver. *GPS World*, p. 42–50, June, 1996.
- [34] MOG, Darwin E. *Determinação de Órbita dos Satélites NAVSTAR-GPS*. Curitiba, 1996. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas), Universidade Federal do Paraná.
- [35] PAIVA, Ricardo Negreiros de. *Determinação Autônoma de Órbita Usando o GPS*. São José dos Campos, 1988. Tese (Doutorado em Ciência Espacial), Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais [INPE-4815-TDL/361].
- [36] PARVEZ, S. A. Attitude Determination Using Antenna Polarization Angles. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, v. 14, n. 2, p. 236–240, Mar.-Apr., 1990.
- [37] SEBBAG, Isabelle; ISSLER, Jean Luc. Mesure D'Attitude par interférométrie GPS. *Centre National d'Études Spatiales*, 1995.
- [38] SEEBER, Günter. *Satellite Geodesy. Foundations, Methods and Applications*. New York : deGruyter, 1993.
- [39] SHUSTER, Malcolm D. Three-Axis Attitude Determination from Vector Observation. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, v. 4, n. I, p. 70–77, Jan.-Feb., 1981.
- [40] SHUSTER, Malcolm D. A Simple Estimator for Spin-Axis Attitude. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System*, p. 1–5, 1987.
- [41] SHUSTER, Malcolm D. *Introduction to Spacecraft Attitude Determination (chapter 5)* In : *Fundamentals Of Space Systems - JHU/APL Series In Science And Engineering*. New York : Oxford University Press, Inc., PISACANE, V. L.; MOORE, R. C., 1994.
- [42] VAROTTO, Sebastião E. C. *Determinação de Atitude de Satélites Artificiais através da Aplicação Conjunta de Técnicas de Estimção Ótima Estática e Dinâmica*. São José dos Campos, 1986. Dissertação (Mestrado em Ciência

Espacial/Mecânica Orbital), Instituto Nacional de Ciências Espaciais [INPE-4415-TDL/306].

- [43] WAHBA, G. A Least Squares Estimate of Spacecraft Attitude, Problem 65-1. *SIAM Review*, v. 7, n. 3, p. 409 July, 1965.
- [44] WELLS D. *Guide to GPS Positioning*. Fredericton : University of New Brunswick, 1986.
- [45] WERTZ, James R. *Spacecraft Attitude Determination and Control*. Boston : D. Reidel, 1978.
- [46] WÜBBENA, Gerhard; MENGUE, F.; SCHMITZ, M.; SEEBER, G.; V OLKSEN, C. A New Approach for Field Calibration of Absolute Antenna Phase Center Variations. *In : Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation, ION GPS-96*, Kansas City, Missouri, September, 1996.

## Apêndice A

### Figuras esquemáticas e Tabelas do GPS

Figura A.1: Princípio básico do posicionamento GPS.

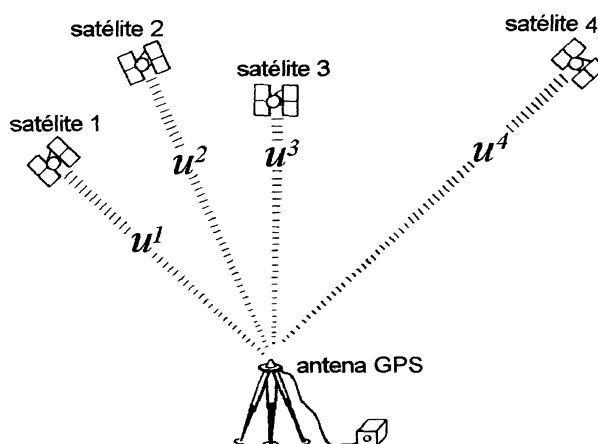


Tabela A.1: Satélites do Bloco I.

Seqüência de Lançamento	SVN	Cód. PRN	Lança-mento	PPO*	Estado do Satélite
I-1	01	04	2/78		desativado
I-2	02	07	5/78		desativado
I-3	03	06	10/78		desativado
I-4	04	08	12/78		desativado
I-5	05	05	02/80		desativado
I-6	06	09	04/80		desativado
I-7	07				lanç. falho
I-8	08	11	07/83		desativado
I-9	09	13	06/84		desativado
I-10	10	12	09/84		desativado
I-11	11	03	10/85		desativado

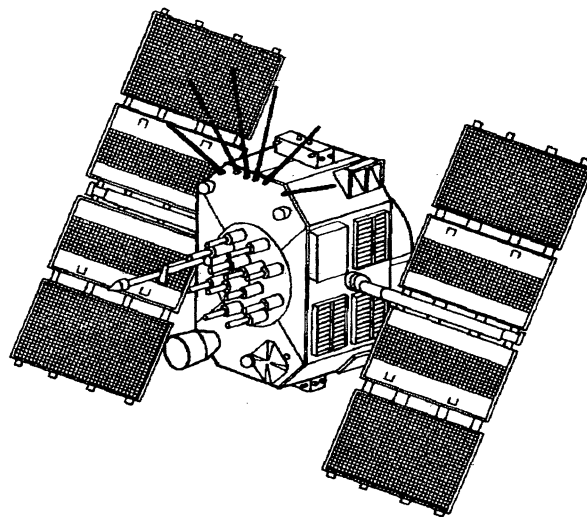
\* PPO = Posição no Plano Orbital.

**Tabela A.2:** Satélites do Bloco II.

Sequência de Lançamento	SVN	Cód. PRN	Lançamento	PPO*	Estado do Satélite
II-1	14	14	02/89	E1	operando
II-2	13	02	06/89	B3	operando
II-3	16	16	08/89	E5	operando
II-4	19	19	10/89	A4	operando
II-5	17	17	12/89	D3	operando
II-6	18	18	01/90	F3	operando
II-7	20	20	03/90		inativo
II-8	21	21	08/90	E2	operando
II-9	15	15	10/90	D2	operando

\* PPO = Posição no Plano Orbital.

**Figura A.2:** Vista esquemática de um satélite do Bloco II.



**Tabela A.3: Satélites do Bloco IIA.**

Seqüência de Lançamento	SVN	Cód. PRN	Lança-mento	PPO*	Estado do Satélite
II-10	23	23	11/90	E4	operando
II-11	24	24	07/91	D1	operando
II-12	25	25	02/92	A2	operando
II-13	28	28	04/92	C5	desativado
II-14	26	26	07/92	F2	operando
II-15	27	27	09/92	A3	operando
II-16	32	01	11/92	F1	operando
II-17	29	29	12/92	F4	operando
II-18	22	22	02/93	B1	operando
II-19	31	31	03/93	C3	operando
II-20	37	07	05/93	C4	operando
II-21	39	09	06/93	A1	operando
II-22	35	05	08/93	B4	operando
II-23	34	04	10/93	D4	operando
II-24	36	06	03/94	C1	operando
II-25	33	03	03/96	C2	operando
II-26	40	10	07/96	E3	operando
II-27	30	30	09/96	B2	operando
II-28	38	08	11/97	A5	operando

\* PPO = Posição no Plano Orbital.